

# 第 1 篇 总 论

---

主 编 许洪基（郑州机械研究所）

编写人

第 1 章 许洪基

第 2 章 徐晓俊（哈尔滨工业大学）

审稿人

雷 光（北京联合大学纺织工学院）

李华敏（哈尔滨工业大学）



# 第 1 章 概 述

## 1 齿轮的历史与发展趋势

### 1.1 齿轮的历史

齿轮传动是近代机器中最常见的一种机械传动,是传递机器动力和运动的一种主要形式,是机械产品的重要基础零部件。它与带、链、摩擦、液压等机械传动相比,具有功率范围大、传动效率高、圆周速度高、传动比准确、使用寿命长、结构尺寸小等一系列特点。因此,它已成为许多机械产品不可缺少的传动部件,也是机器中所占比重最大的传动形式。齿轮的设计与制造水平将直接影响到机械产品的性能和质量。由于齿轮在工业发展中的突出地位,致使齿轮被公认为工业化的一种象征。

齿轮传动技术经历了长期的历史发展过程。公元前 400~200 年,中国古代就开始使用齿轮,在我国山西出土的青铜齿轮是迄今已发现的最古老齿轮,作为反映古代科学技术成就的指南车就是以齿轮机构为核心的机械装置。但从 17 世纪末,人们才开始研究能正确传递运动的轮齿形状。18 世纪,欧洲工业革命以后,齿轮传动应用日益广泛,先是发展摆线齿轮,而后是渐开线齿轮。

早在 1694 年,法国学者 Philippe De La Hire,首先提出渐开线可作为齿形曲线。1733 年,法国人 Camus M. 提出轮齿接触点的公法线必须通过中心连线上的节点,他考虑了两齿面的啮合状态,明确建立了关于接触点轨迹的概念。1765 年,瑞士的 Euler L. 提出渐开线齿形解析研究的数学基础,阐明了相啮合的一对齿轮,其齿形曲线的曲率半径和曲率中心位置的关系。后来, Savary 进一步完成这一方法,成为现在的 Euler-Savary 方程。对渐开线齿形应用作出贡献的是 Robert Willis,他提出中心距变化时,渐开线齿轮具有角速比不变的优点。1873 年,德国工程师 Hoppe 提出,对不同齿数的齿轮,在压力角改变时的渐开线齿形,从而奠定了现代变位齿轮的思想基础。

直至 19 世纪末,展成切齿法的原理及利用此原理切齿的专用机床与刀具的相继出现,使齿轮加工具有较完善的手段后,渐开线齿形才显示出巨大的优越性。切齿时,只要将切齿刀具从正常的啮合位置稍作移动,就能用标准齿轮刀具在机床上切出相应的变位齿轮。

1908 年,瑞士 MAAG 公司研究并制造出展成法加工的插齿机。接着,英国 BSS、美国 AGMA、德国的 DIN 等相继对变位齿轮提出了多种计算方法。

为提高动力传动齿轮的使用寿命并减小其尺寸,英国人 Humphris 在 1907 年最早发表了圆弧齿形的设想。1926 年,瑞士人 Wildhaber 取得了法面圆弧齿形斜齿轮的专利权。1955 年,原苏联工程师 Novikov 在完成实用性研究后进入工业应用。1970 年,英国 Rolls-Royce 公司工程师 Studer 取得了双圆弧齿轮的美国专利。与此同时,我国与原苏联,以及日本等国对双圆弧齿形,进行了一系列开发研究并获得了普遍的应用成果。

### 1.2 我国的齿轮传动

建国初期,当时基本上没有齿轮产品的生产能力。经过第一、二个五年计划的建设,我国初步形成了一套包括机床、汽车、重型机械、电站设备,石油化工与通用设备等机械制造能力。同时,相应的齿轮制造业也随着发展起来,到 1963 年左右,我国已不仅能成批生产齿轮及其装置,而且普通规格的齿轮机床、刀具、量仪也能由国内制造。1970 年后,国家为了上水平,新建与改建一批生产齿轮及齿轮箱的专业厂与车间,并从国外引进一批关键设备,使齿轮产品的生产能力和水平上了一个台阶。到 1980 年初,当时结合发展硬齿面齿轮制造技术与齿轮产品的更新换代,进一步装备了一批齿轮制造企业,这就基本上形成了我国齿轮制造业的完整体系。

齿轮传动在我国的发展是从渐开线齿廓起步的。渐开线齿轮在技术上最成熟,应用最具备条件,因而使用也最普遍,并在机械传动设计中,占有主导地位。渐开线齿廓具有中心距敏感性小,可进行各种变位和修形设计,易于进行精密加工、互换性好等一系列优点。从 50 年代起,在一般与重要的设备传动系统中,都采用渐开线齿轮。限于当时的制造水平,多数齿轮传动采用定轴式结构,普遍使用以调质热处理为主的所谓软齿面齿轮,其制造精度相当于国际 GB 10095—88 的 8~9 级。由于渐开线软齿面齿轮表面接触强度薄弱,加之一般质量水平不高,在使用中往往出现早期失效,尤其在一些承载较重的场合,使用寿命较低。1958 年以后,我国开始研究与应用单圆弧齿轮。这种齿轮主要

靠轴向传递运动,其端面齿廓理论上呈点啮合,因而降低了对齿廓的技术要求;在垂直于齿面瞬时接触线方向,诱导曲率半径较大;再有,齿面润滑性能较好,因此,在软齿面条件下其齿面接触强度与渐开线齿轮相比有显著提高。从60年代起,单圆弧齿轮在国内获得了广泛应用。1970年以后,我国由单圆弧齿轮发展为双圆弧齿轮,即由单凸圆弧或单凹圆弧组成齿廓改变为由凸凹圆弧上下分段组成的单一齿廓形式,也就是说大、小齿轮的基本齿廓是一致的。它简化了切齿工艺,大大提高了轮齿的弯曲强度,使圆弧齿轮的技术达到了更完善的程度。这对于同样参数与尺寸的软齿面圆柱齿轮,圆弧齿轮的工作寿命高于渐开线齿轮,特别是应用在一些重负荷、大功率的齿轮传动中,取得了良好的效果。

70年代末,随着国外机械产品的引进与齿轮制造水平的提高,齿面经渗碳淬火、氮化或感应淬火处理的所谓硬齿面渐开线齿轮开始为人们所重视。这种齿轮由于齿面硬度高与轮齿精度好而大大提高承载能力和使用寿命,并因结构尺寸小使齿轮装置的成本大为降低。80年代末,我国已初步具备了硬齿面渐开线齿轮的制造能力,齿轮加工精度一般为6~7级,高精度齿轮可达4~5级。与此同时,双圆弧齿轮的硬齿面技术也有新的发展,研制成功齿面经氮化处理的硬齿面双圆弧齿轮,且已在大功率高参数齿轮传动装置上推广应用。近来,又在成功应用珩齿新工艺基础上,开发出超硬滚切(也称刮齿)圆弧齿轮的精加工工艺,将会进一步扩大硬齿面圆弧齿轮的应用范围。

为避免根切、减少传动结构尺寸、提高齿面接触强度,变位齿轮的应用日益见多。一般根据齿轮的工作条件、材料热处理状况,以及性能指标的要求,选取各自不同的变位系数。近年来,有的重载齿轮为了降低齿面接触应力,提高抗胶合能力,设计大变位系数的齿轮传动,使最大滑动率接近相等;有的开式齿轮为抗磨损与提高齿轮弯曲强度;选择总变位系数尽可能大的正变位设计,使齿轮在不改变结构、不增加制造成本条件下,提高承载性能与使用寿命,充分发挥了变位齿轮的优越性。

实践已经证明:符合理论齿廓与理论齿向的齿轮传动不一定具有良好的动态性能。重要的齿轮传动通常设计为修形齿轮。现在,不仅那些有降噪要求的机床与车辆齿轮需要齿顶修形(也称修缘)或齿向修形,而且发展为整个齿廓与齿向进行不同方式的修形设计。特别对于大功率高速或重载齿轮传动,由于受到轮齿变形与制造安装误差等影响,因静态齿面接触情况的改变,造成齿轮运转中的振动与偏载。一般对6级精

度以上的圆柱齿轮传动,都可进行修形设计,这种轮齿修形的概念已较普遍地应用在其他类型的齿轮传动中。

各类齿轮的行星传动是近20年来发展较快的一种传动形式,它是一种至少有一个齿轮的几何轴线绕中心轮轴线回转的齿轮传动。因此种传动采用数个行星轮或一个行星轮的多个轮齿同时传递负荷,并利用了向啮合的组合形式,因而具有体积小、重量轻、速比范围大、传动效率高、噪声小等优点,广泛用于冶金、矿山、起重运输、通用、化工、航天等设备上,作为增速、减速与变速的传动装置。在有些要求结构紧凑的场合或是同轴线传动的情况下,它已替代了一批平行轴结构的定轴传动。

渐开线齿轮行星传动一般用于大、中功率的增、减速传动,而各种少齿差式的行星传动主要使用在中、小功率的大减速比传动。所谓少齿差即是在内齿轮啮合副中,其内齿轮与外齿轮的齿数差很少而得名。对于渐开线齿轮少齿差行星传动与摆线针轮少齿差行星运动来说,其基本原理与计算方法相同,其行星运动的产生,并无单独的行星轮而是由其中的外齿轮通过一转臂轴承的偏心作用所致。渐开线少齿差中的外齿轮一般是不磨齿的,因而加工简便,成本低。摆线少齿差中的外齿轮(摆线轮)是齿面渗碳淬火磨齿的。传动效率较高,但需专用加工设备,因为是成批生产,成本不会太高,应用面越来越广,它是目前我国齿轮减速器中年产量最大的一种。另一种谐波齿轮少齿差行星传动是依靠柔性材料制成的外齿轮所产生的可控弹性变形来传递运动。常应用于传动功率不大、运动精度高、回差小、结构更为紧凑的大速比传动装置,特别适合于仿生机械,医疗机械,电子设备及航空航天装置上要求高动态性能的伺服系统中使用。

锥齿轮与准双曲面齿轮根据其类型、制造精度与材料热处理的不同,具有各自的应用范围。在车辆与航空方面,较多采用弧齿锥齿轮,并长期沿用美国的格利森(Gleason)制,多年来已形成一整套比较成熟的设计与工艺方法。也有一些采用奥利康(Oerlikon)制,这种锥齿轮是在延伸外摆线锥齿轮铣齿机上加工的。90年代后,针对重型、矿山设备中大型曲齿锥齿轮的需要,连续从国外引进由德国克林根贝尔格(Klingelnberg)公司生产的延伸外摆线锥齿轮生产线,加工齿轮最大法向模数35mm,最大直径达到2000mm,形成了一套摆线—准渐开线齿制。

在要求单级大减速比并传递大转矩的齿轮传动中,多数应用蜗杆传动。现有普通圆柱蜗杆,圆弧圆柱蜗杆与环面蜗杆等三种类型。一般设计成普通圆柱蜗

杆传动,加工比较方便。其中应用较多的是轴向直廓圆柱蜗杆传动与法向直廓圆柱蜗杆传动两种;对于载荷较大的场合,常采用圆弧圆柱蜗杆传动;对于较精密的传动,可采用渐开线圆柱蜗杆传动或轴向直廓圆柱蜗杆传动。在一些重载,且功率较大的传动中,较多采用环面蜗杆传动。它具有多齿接触与润滑条件好等特点。如与普通圆柱蜗杆副相比,承载能力可提高1.5~3倍。其缺点是制造比较复杂、成本高。蜗杆传动类型的选择取决于所具有的工艺条件与传递功率的范围。蜗杆传动的性能质量不仅与蜗杆和蜗轮的制造质量有关,且与安装跑合的效果密切相关。只要在工艺上保证,同一类型的蜗杆传动,其承载能力不会有显著差别。

齿轮产品的质量和性能,除依赖于合理而先进的设计方法外,主要决定于齿轮制造水平的高低。近些年来,我国齿轮制造能力和水平已有长足的发展,齿轮精度等级普遍有所提高,例如一般低速齿轮已由8~9级提高到7~8级;机床齿轮由6~8级提高到5~7级;汽车齿轮由6~9级提高到5~8级;轧机齿轮由7~8级提高到5~6级;高速齿轮由5~7级提高到4~6级。由此带动了相关的齿轮机床、切齿刀具、测量仪器的技术更新、精度水平的提高及品种规格范围的扩大。多数齿轮机床与刀具已接近或达到国际通用标准水平,但对少数高精度磨齿机、高效切齿机床以及精密量仪等,与国际通用标准相比尚有一定差距。

对于不同类型的齿轮、齿廓形状、齿面硬度、结构形式、精度等级与生产条件,可选择不同的工艺方案。一般来说,齿轮制造工艺过程包括材料制备、齿坯加工、切齿、齿面热处理和齿面精加工等五个阶段。常用的轮齿加工方法有铣齿、滚齿、插齿、剃齿、研齿与磨齿等,其相应的齿轮加工机床与切齿工具一般均能立足于国内。圆柱齿轮在机械产品中,应用广泛,规格品种繁多,长期来采用渐开线齿廓。多数选用中碳合金钢与渗碳合金钢两种,少数采用氮化钢。按其性能规定相应的热处理工艺,如调质、感应淬火、渗碳淬火与表面氮化等。在切齿工艺方面,对于汽车、拖拉机批量生产的中、小模数齿轮,通常采用滚(插)齿—剃(挤)齿—热处理—研齿工艺;对于冶金、矿山、石化、起重运输等机械配套的大、中模数齿轮,大都采用调质处理—滚(插)齿工艺;对于低速重载与高速齿轮,一般采用滚(插)齿—渗碳淬火—磨齿工艺。

蜗轮副的加工相当于蜗杆与蜗轮的啮合运动关系。蜗杆通常可用铣削与车削两种加工方法,对于要求较精确的或硬齿面蜗杆,应采用磨削方法。蜗轮轮齿在成批生产条件下,使用几何尺寸做成与相啮蜗杆基本

相同的蜗轮滚刀,按要求的中心距滚削加工;对于单件制造的蜗轮,可采用单齿或多齿飞刀加工;对于重要的或高精度蜗轮,应使用蜗轮剃齿刀精加工齿面。蜗杆副安装后,一般需要跑合运转。

锥齿轮加工方式名目繁多,按其齿线形式差异,有不同的方法。直齿(包括斜齿)锥齿轮用刨齿法加工,其中分展成法与仿形法两种形式。对于大批生产的较小模数锥齿轮可用圆拉刀成形法铣齿,其效率较高,但需专用刀具;也用双刀盘铣齿,适于中、小模数锥齿轮的高效加工,它与展成法刨齿相似,其加工齿宽受刀盘直径限制;如用砂轮替代刀盘,可作磨齿加工;对于齿廓精度要求不高的锥齿轮,用成形铣刀(如盘状铣刀或指形铣刀)以单面法或双面法进行加工。

曲齿锥齿轮加工主要分弧齿锥齿轮与长幅外摆线锥齿轮两类。弧齿锥齿轮用铣刀盘铣齿,刀盘在铣齿机摇台上做切削旋转运动,而摇台与被加工锥齿轮做相对滚动,刀盘与工件的运动关系,相当于一个平面圆弧齿轮与被加工锥齿轮的啮合,所得齿形为渐开线的近似齿廓,刀盘滚切一次就切出一个齿侧面,工件分度后再加工另一齿面。对于收缩齿与等高齿两种情况,铣刀盘种类与旋转轴线的调整是不同的。如用砂轮代替刀盘,可进行锥齿轮齿面的磨削精加工。长幅外摆线锥齿轮在加工时,机床摇台固定不动,刀盘与工件相对转动,可以连续铣齿,同时完成齿槽切削与分度,铣刀盘转过内外一组刀齿,工件则转过一个齿节距。若刀盘随机床摇台与被加工工件相对滚动切削,则一次滚动可同时完成分度与齿廓和齿向的加工。这种锥齿轮因机床与刀盘结构不同,也有奥利康、克林根贝尔格、格利森等三种齿制的切齿调整方法。以上两类曲齿锥齿轮,只要将被加工锥齿轮的轴线调整到机床摇台轴线相错位置,均可切制准双曲面锥齿轮副。

摆线齿轮、谐波齿轮与非圆齿轮等加工均属相应的滚齿、铣齿、插齿、与磨齿等方法的特殊应用。如改变砂轮的形状与通常的磨齿运动关系,就可磨削摆线齿轮的齿面;如利用数控技术,在插齿方法中改变刀具与工件相互运动的瞬时速比关系与中心距,就可加工非圆齿轮。

齿轮的技术标准是各类齿轮产品质量的重要保证。齿轮精度标准是影响齿轮质最重要的一项,它规定了不同等级齿轮加工误差的限制范围,多年来,企业努力贯彻此标准,并在标准的基础上,创立了齿轮整体误差测量理论和仪器,为确保齿轮质量,提供了重要手段。目前,我国已颁布各项齿轮国家标准88项,齿轮行业标准283项。其中大多数齿轮技术标准,均已与国际接轨,达到了国际通用技术水平。关于齿轮术语、代

号、设计计算、试验与检验方法等基础标准,广泛采用了世界先进国家标准,推动企业不断提高齿轮产品的质量水平。

近十几年来,我国陆续从世界工业先进国家引进了石油化工、大型化肥、燃气轮机、冶金轧钢、建材、露天矿开采等大型成套设备,数量可观。经实际使用分析,其中高速与重载齿轮是这些成套设备的关键部件,绝大部分采用硬齿面齿轮,齿轮的圆周速度最高达150m/s,传动功率最高达40000kW,齿轮精度等级5~6级,最高为4级。为实现这些高精度硬齿面齿轮制造的国产化,开展了科研与制造技术攻关,使我国的高速齿轮与重载齿轮设计制造水平提高了一大步。现已能设计制造的高速齿轮,其最大功率为44000kW,最高圆周速度为156m/s,齿轮制造精度为4~5级;重载齿轮最大功率达6000kW,最大传递转矩达2000kN·m,圆周速度达30~50m/s,齿轮精度达5~6级。

### 1.3 发展趋势

国际上,动力传动齿轮装置正沿着小型化、高速化、低噪声、高可靠性方向发展。为提高齿轮传动的承载能力,硬齿面齿轮设计制造技术,日益受到普遍的关注,以提高齿轮齿面硬度缩小传动装置的尺寸。软、硬齿面齿轮设计性能参数及经济效益对比(见表1.1-1),表中列出了各种齿轮材料与工艺条件下的经济效果。其次,采用以圆弧齿轮为代表的特殊齿形,如英法合作研制的舰载直升飞机主传动系统,应用圆弧齿轮设计后,使减速器高度大为降低。还有,随着船舶动力由中速柴油机代替的趋势,在大型船上采用大功率行星齿轮装置确有成效。在冶金、矿山、水泥、轧机等大型传动装置中,行星齿轮以其体积小、同轴性好、效率

高等特点而应用愈来愈多。

由于炼油、化肥、冶金等设备向大型化发展,对传动装置的功率、速度与可靠性都提高了。如传动功率1000~30000kW,齿轮圆周速度20~200m/s,设计工作寿命 $5 \times 10^4 \sim 10 \times 10^4$ h,因而要求齿轮的精度等级达到4~5级以上。并对齿轮运转的平稳性与噪声均有较高的要求。

由于数控技术和计算机技术的发展,应用于传递两轴间非匀速比运动的非圆齿轮传动已在各种机器及仪器仪表,如机床、重型机械、轻工机械、汽车以及流量计等中逐步发展起来,其应用效果是十分显著的,如锥形立铣刀的刀刃是圆锥面上的螺旋线,采用非圆齿轮使等导程螺旋线改变为等螺旋角螺旋线,可改善铣刀的切削性能;在汽车变速箱转向器中,采用的齿条与齿扇传动设计,就是利用非圆齿轮的传动原理;此外,钢带轧制生产线中最后切断工序的滚筒式飞剪机,就是利用非圆齿轮装置,来保证钢带的同步剪切。

齿轮用钢材及其热处理工艺对齿轮的承载能力影响较大,如合金钢调质到300HBS的许用接触应力为850N/mm<sup>2</sup>,许用弯曲应力为300N/mm<sup>2</sup>;而渗碳淬火至60HRC的钢,其许用接触和弯曲应力分别达到1600N/mm<sup>2</sup>和500N/mm<sup>2</sup>。因而,目前普遍提高了对各类齿轮的齿面硬度要求。在钢材的冶金质量方面,对重要的齿轮,要求采用真空脱气处理,提高了钢的韧度,改善了加工性能。为保证齿轮不同尺寸的心部硬度与减少热处理变形,开始生产并应用保证淬透性钢。为缩短齿轮渗碳周期,正逐步推行齿轮的稀土渗碳工艺。此外,为确保齿轮的加工质量、效率及减少变形,对齿坯预备热处理的质量越来越重视。

表 1.1-1 软、硬齿面齿轮性能参数及经济效益对比

钢 材	45	42CrMo4	30MnCr5 42CrMo4	31CrMoV9	34CrMo4	20MnCr5
热处理	正火	调质	渗碳调质	气体氮化	感应或火焰淬火	渗碳
加工	滚齿	滚齿	磨齿滚齿	精滚	滚齿、研齿	磨齿
中心距/mm	830	650	585	490	470	390
重量/kg	8505	4860	3465	2620	2390	1581
重量比(%)	174	100	71	54	49	33
价格比(%)	132	100	85	78	66	63
安全系数	抗点蚀	1.3	1.3	1.3	1.3	1.4
	抗弯曲	6.1	5.7	3.9	2.3	2.3

注:表中齿轮转矩均为21000N·m。

在切齿加工方面,目前正向高速、高效、高精度方向发展。如用高速钢滚刀滚齿,切削速度可达 $100\sim 200\text{m/min}$ ,被加工齿面的硬度达 $300\sim 400\text{HBS}$ ;硬质合金滚刀切齿,切削速度达 $300\text{m/min}$ 。在汽车齿轮加工中,多采用多头滚刀,一般双头滚刀可提高效率 $40\%$ ,且头数越多、前刀面磨损越小。滚齿时,在机床上采用数控、数显装置,可缩短调整时间 $80\%$ ,使加工精度提高1级。硬齿面齿轮的精加工,当前采用硬质合金负前角滚刀超硬滚齿,如与蜗杆珩齿结合可部分代替传统的磨齿工艺,费用仅为磨齿的 $1/3$ ,效率比普通磨齿提高 $1\sim 5$ 倍,模数越大,齿数越多,效果越明显,且没有烧伤或裂纹,还可适当提高齿面的疲劳强度。用超硬滚切代替齿轮的粗磨或半精磨的趋势日益明显,滚切精度可以达到6级,对大模数硬齿面齿轮可达到7级。此外,在加工汽车硬齿面齿轮时,发展一种不使用切削液的超硬滚刀干式滚切工艺,不仅可以提高生产率,减少加工费用,而且可减轻环境污染。

在插齿工艺方面,有些插床的插削速度已提高到 $1000\sim 2500$ 冲程/ $\text{min}$ ,加工精度可达5~6级,如使用TiN涂层插齿刀加工摩托车齿轮,刃磨一次可加工1000件,它比无涂层插齿刀寿命延长6倍。用AA级硬质合金插齿刀加工 $45\sim 62\text{HRC}$ 的硬齿面齿轮,其精度可达6~7级。使用CBN梳齿刀加工淬硬齿轮,其精度可达5级。

在珩齿方面,除采用蜗杆式珩轮进行珩齿外,瑞士生产了一种内啮合式珩轮的珩齿机,加工一个 $m=3.5\text{mm}$ 、 $z=41$ 、 $b=37\text{mm}$ 的斜齿轮,时间仅为 $1\text{min}$ ,加工精度达5~6级,现已在一些轿车齿轮上应用推广。

磨齿是获得高精度齿轮最可靠的方法,在齿轮加工中的比重日益增大。一方面普遍采用数控技术提高自动化程度,另一方面广泛使用CBN砂轮提高磨齿精度,改善冷却润滑条件。新近开发了高效数控CBN蜗杆砂轮磨齿机与数控CBN成形砂轮磨齿机,磨削效率与质量显著提高,还可减少磨削次数、提高磨削用量,省去昂贵的修正机构与补偿装置。有的在蜗杆砂轮上镀一层CBN磨料,无需经机床修整,磨削淬硬的汽车齿轮,仅需 $1\text{min}$ ,加工精度达4~5级。瑞士莱斯豪尔公司采用环面蜗杆砂轮磨削原理开发的RIP200型磨齿机,其生产率为普通磨齿法的5倍;磨削轿车齿轮时,单件磨削时间可缩短到 $1\text{min}$ ,平均每个齿的磨削时间仅为 $2\text{s}$ ,并按需可磨削各种修形齿轮。由于应用立方氮化硼砂轮的结果,使成形磨削获得了快速发展。与蜗杆砂轮磨齿相比,成形磨齿能十分方便解决齿廓修缘和齿根圆角问题,并在理论上对工件的模数没有

限制,而蜗杆砂轮磨齿的最大模数仅 $7\sim 8\text{mm}$ 。数控成形砂轮磨齿机具有其他各种磨齿机无法比拟的万能性,配备相应软件后,可加工各种特殊齿形,而且调整方便,操作简单,最高磨齿精度可达2级。

齿轮传动CAD技术的开发与应用已日趋完善,从优化设计到计算机辅助绘图,从二维图形发展到三维实体造型,从齿轮零部件CAD到齿轮传动装置CAD,逐步建立了齿轮传动一体化的CAD集成系统。它包含了各类齿轮传动装置相关零部件CAD。一般内轮设计计算软件开发已较完整,在工程应用中已较普遍。目前,少数单位开发了典型齿轮零部件的参数化CAD绘图,效率很高。要把通用的机械CAD软件和齿轮专用的CAD软件结合起来,推动软件的商品化与集成化,建成齿轮设计与制造工程数据库,逐步过渡到齿轮传动的动态设计技术与仿真技术,以适应高参数与高性能齿轮装置的设计要求,进一步解决齿轮产品虚拟设计与制造技术中,三维可视图形、建模与仿真、动态设计与分析计算等现代设计技术问题。

## 2 齿轮传动的特点

### (1) 优点

1) 传动比准确。对于固定速比的齿轮传动,其瞬时传动比是恒定的,工作平稳性较高;对于可变速比齿轮传动,可采用各种差动式行星传动,对于要求按精确的非匀速比规律或要求再现的运动函数的传动,可采用非圆齿轮传动。

2) 传动比变化范围大,适用于减速或增速传动。一般单级圆柱齿轮传动为 $1\sim 7$ ,普通行星齿轮传动为 $2.8\sim 12.5$ ,蜗杆传动为 $5\sim 100$ ,少齿差传动为 $10\sim 200$ ,谐波传动为 $80\sim 320$ 。

3) 圆周速度范围大。一般齿轮的节线速度可从 $0.1\text{m/s}\sim 200\text{m/s}$ 以上,而转速可从低于 $1\text{r/min}\sim 20000\text{r/min}$ 以上。

4) 传动功率范围大,承载能力高。高速齿轮传动功率可达 $50000\text{kW}$ 以上,低速重载齿轮的转矩可达 $14\times 10^5\text{N}\cdot\text{m}$ 以上。

5) 传动效率高。一般精度较高的圆柱齿轮副,其效率可达 $0.98\sim 0.99$ 以上。

6) 使用寿命长。设计合理的齿轮,在适当材料与热处理工艺条件下,并具有足够的内轮制造精度,保证在正常的工况下运转工作,可取得较长使用寿命,一般为 $5\sim 10$ 年以上,较好的情况可到 $20\sim 30$ 年。

7) 结构紧凑。齿轮与其他机械传动形式如带、链条、摩擦、液压等传动比较,其传动结构较紧凑。有些齿轮传动,特别是行星齿轮传动,摆线针轮行星传动、

谐波齿轮传动等可使传动部件更为小型化。

(2) 缺点

- 1) 运转时,有振动和噪声,会产生一定的动载荷。
- 2) 无过载保护作用。
- 3) 对于要求较高精度的齿轮或使用特殊齿廓的

齿轮时,需要高精度切齿机床或特种刀具,以及较精密的测量仪器,制造工艺较复杂,成本较高。

### 3 齿轮传动的类型

各种齿轮传动的分类和形式见图 1.1-1。

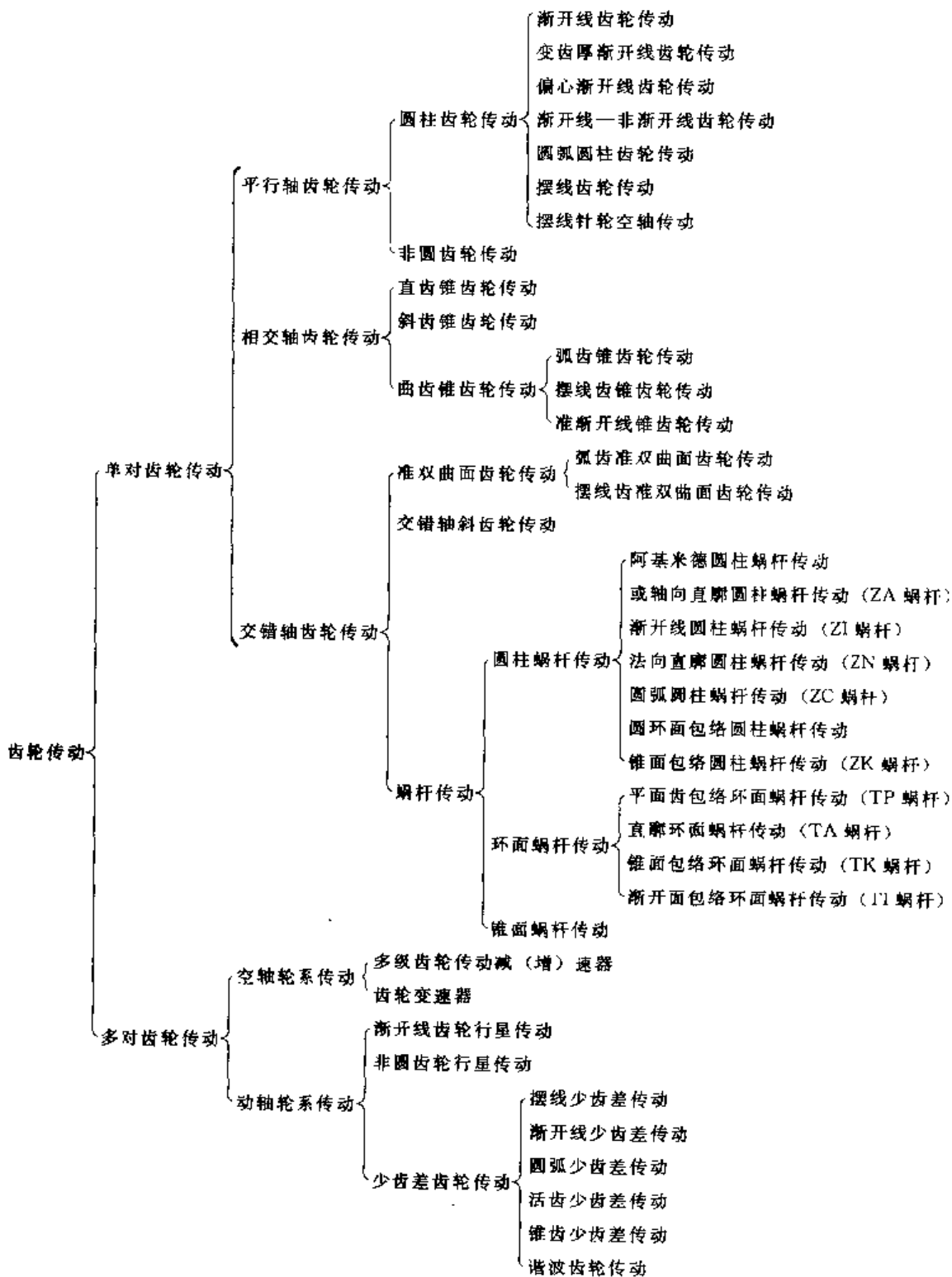


图 1.1-1 齿轮传动的类型



## 4 齿轮传动类型的选择原则

当动力机械的输出转速、转矩和输出轴的几何位置等与工作机械要求不相适应时,可选用齿轮传动装置将它们联接起来,以满足不同工况的不同要求。技术经济综合指标是选择齿轮传动方案的最根本的因素,特别对于重要的或大功率传动应以此为选型的出发点。一般对较小功率传动,应在满足工作性能的前提下,选用结构简单、初始费用低的传动装置;对于较大功率的传动,应优先考虑齿轮传动的效率,以节约能源,降低运转与维修费用。另外,齿轮传动装置的选用必须与设计制造技术水平相适应,通常尽可能选用齿轮与齿轮装置专业生产的标准通用齿轮传动产品。

在选择齿轮传动类型时,一般可考虑以下的原则:

- 1) 工作机械对传动装置的结构与动力参数的要求,如传动装置的尺寸、安装位置、功率(或转矩)、转速、效率等。
- 2) 工作机械对传动装置的性能要求,如传动精度、振动、噪声、负荷特性、与工作可靠性等。
- 3) 动力机械的安装位置、功率、转速与负荷特性情况。
- 4) 传动装置的合理性、先进性、经济性与通用性等。
- 5) 制造设备条件、生产工艺水平与所需生产批量。
- 6) 利用类比法选型的可能性,即参考已有或类似机械的使用情况与选型经验。

通常,对于无特殊要求的一般低速齿轮装置,尽量采用平行轴结构的渐开线圆柱齿轮传动,因为这种传动类型制造比较简单,通用性强、成本也低。对于大功率(或大转矩)的低速重载齿轮装置,可选用中等以上齿轮精度的平行轴渐开线齿轮传动或圆弧齿轮传动。

除仅要求传递运动的速度偏低的高速齿轮装置可选用直齿渐开线齿轮外,一般要求选用斜齿的圆柱齿轮传动;对于高速重载传动,应使用较高精度的斜齿或双斜齿渐开线齿轮或圆弧齿轮。

对于要求传递相交轴结构的传动装置,应选用锥齿轮传动。对于速度较低的轻载传动装置,可选用直齿或斜齿锥齿轮传动,制造简便、成本较低。对于低速重载情况,可选用曲齿锥齿轮;对于较高速度的相交轴传动,应用较高精度的曲齿锥齿轮。通常,相交轴传动在汽车、拖拉机、机床及冶金矿山等设备中较多应用。

对于传递交错轴结构的传动装置,常选用各种蜗杆传动,较少采用交错轴斜齿轮传动,只在汽车、拖拉机等移动设备中,采用准双曲面齿轮传动。蜗杆传动的效率一般在90%以下,但应用较广,如在冶金矿山、机床及通用等设备中较多采用。此外,在要求自锁性能的传动装置与传动比较大的情况,多采用蜗杆传动。准双曲面齿轮传动效率较低,但在有空间结构限制的条件下,可传递较大的功率。

在传动比较大与要求结构紧凑的场合,可选用行星齿轮传动或各种少齿差齿轮传动。对于较高速度的大功率传动,常采用渐开线行星齿轮传动。对于中、小功率的低速传动,尤其传动比在80~200以上的单级传动中,应优先选用各种少齿差行星传动,其中摆线针轮行星减速器已实现大规模专业生产,可放在选择的首位。对于在结构上有特殊要求与更为轻便的传动装置,如要求实现向密闭空间传递运动或要求传动精度高与回差小的机器人的传动装置,应选择谐波齿轮传动。以上各类行星传动均适用于同轴线传动形式。

在具有降噪要求的传动装置上,可选用蜗杆传动;也可选择摆线针轮行星传动与谐波齿轮传动。前者用于较大功率,而后者用于中、小功率。一般来说,适当选择圆柱齿轮的参数提高齿轮的精度与合理的轮齿修形也可以降低齿轮传动的噪声。

当单级齿轮传动不能满足传动比要求时,可采用多级传动,但传动效率相应降低,然而,单级蜗杆传动的效率常低于多级齿轮传动,为了提高圆柱齿轮与锥齿轮传动的效率,可使用齿面精磨的齿轮传动装置。

常用齿轮传动型式见表1.1-2,各类齿轮传动主要特点和适用范围见表1.1-3。

表 1.1-2 常用齿轮传动型式

平行轴	相交轴	交错轴
外啮合直齿轮 内啮合直齿轮 外啮合斜齿轮 内啮合斜齿轮	直齿圆锥齿轮 零度锥齿轮 曲线齿锥齿轮	交错轴斜齿轮 圆柱蜗杆 环面蜗杆 准双曲面齿轮

表 1.1-3 各类齿轮传动的主要特点和适用范围

名称	主要特点	适用范围			
		传动比	传动功率	速度	应用举例
渐开线圆柱 内轮传动	传动的速度和功率范围很大,传动效率高,一对齿轮可达98%~99.5%,精度愈高,润滑愈好,效率愈高;对中心距的敏感性小,即互换性好,装配和维修方便;可以进行变位切削及各种修形、修缘,从而提高传动质量;易于进行精密加工。可以取得高精度,是各种齿轮中应用最为广泛的一种齿轮	单级: 7.1(软齿面) 6.3(硬齿面) 两级: 50(软齿面) 28(硬齿面) 三级: 315(软齿面) 180(硬齿面)	低速重载传动可达 6000kW以上; 高速传动可达 40000kW以上;	可达到 200m/s以上	高速船用透平齿轮,大型轧机齿轮,轻工、化工、矿山和建材机械齿轮等等
摆线针轮定 轴传动	有外啮合(外摆线)、内啮合(外摆线)和齿条啮合(渐开线)三种型式。适用于低速、重载的机械传动和粉尘多、润滑条件差等工作环境恶劣的场合;传动效率 $\eta=0.9\sim0.93$ (无润滑油时),或 $\eta=0.93\sim0.95$ (有润滑油时),与一般齿轮相比,结构简单、加工容易、造价低、拆修方便	一般5~30		0.05~0.5m/s	1)起重机的回转机构 2)球磨机的传动机构 3)磷肥工业用的回转化成室 4)翻盘式真空过滤机的底部传动机构 5)工业加热炉用的台车拖曳机构
圆弧形 圆柱 齿轮 传动	单圆弧形 齿轮传动	同渐开线圆柱 齿轮	低速重载传动可达 $P=3700\text{kW}$ 以上, 高速传动可达 $P=6000\text{kW}$ 以上	可达到 100m/s以上	3700kW初轧机,输出轴 转矩 $T=14\times 10^5\text{N}\cdot\text{m}$ 轧 机主减速器,矿井卷扬机减 速齿轮,鼓风机制氧机、压 缩机减速器,3000~ 6000kW汽轮发电机齿轮 等
	双圆弧形 齿轮传动	除具有单圆弧形齿轮的优点外,弯曲强度比单圆弧形齿轮高(一般高40%~60%),可用同一把滚刀加工一对互相啮合的齿轮,传动比单圆弧形齿轮平稳;噪声和振动比单圆弧形齿轮小			
非圆齿轮传动	非圆齿轮可以实现特殊的运动和实现函数运算,对机构的运动特性很有利,可以提高机构的性能,改善机构的运动条件 如应用在自动机器中,可使机器的工作机构和控制机构具有变速运动,可以协调平行工作的机构的循环时间;用非圆齿轮带动铰链连杆机构的主动件时,使铰链连杆机构的运动特性具有所需的形式	瞬时传动比是变化的,平均传动比是整数,大多数情况下为1			广泛用于自动机器、仪器仪表及解算装置中,滚筒式平版印刷机的自动送纸装置,双色印刷机中的非圆一圆的扇形齿轮,纺织机械中绕线托架机构偏心圆齿轮和卵形齿轮,纸板机的横切机构中的椭圆齿轮,链传送带传动装置中的非圆齿轮,带有椭圆齿轮传动机构的摆动式传送机,连续线绕函数电位计中的非圆齿轮,仪器中的卵形齿轮流量计大转矩液压马达中的非圆行星齿轮

(续)

名 称		主 要 特 点	适 用 范 围			
			传 动 比	传 动 功 率	速 度	应 用 举 例
锥 齿 轮 传 动	直齿锥 齿轮传动	比曲线齿锥齿轮的轴向力小,制造也比曲线齿锥齿轮容易	1~8	<370kW	<5m/s	用于机床、汽车、拖拉机及其他机械中轴线相交的传动
	斜齿锥 齿轮传动	比直齿锥齿轮总重合度大,噪声较低	1~8	<370kW	<5m/s	用于机床、汽车行业的机械设备中
	曲线齿 锥齿轮传 动	比直齿锥齿轮传动平稳,噪声小,承载能力大。由于螺旋角而产生的轴向力较大	1~8	<746kW	一般:>5m/s 磨齿:>40m/s	用于汽车驱动桥传动,以及拖拉机和机床等传动
准双曲面 齿轮传动	比曲线齿锥齿轮传动更平稳。利用偏置距增大小轮直径,因而可以增加小轮刚度,实现两端支承。沿齿长方向有滑动,传动效率比直齿锥齿轮低,需用准双曲面齿轮油	一般 1~10,用于代替蜗杆传动时可达 50~100	<750kW	>5m/s	最广泛用于越野及小客车,也用于载货汽车,可用以代替蜗杆传动	
交错轴斜齿 轮传动	是由两个螺旋角不等(或螺旋角相等,旋向也相同)的斜齿齿轮组成的齿轮副,两齿轮的轴线可以成任意角度。缺点是齿面为点接触,齿面间的滑动速度大,所以承载能力和传动效率比较低,故只能用于轻载或传递运动的场合				用于空间(在任意方向转向)传动机构	
蜗 杆 传 动	普通圆 柱蜗杆传 动(阿基米 德蜗杆、渐 开线蜗杆 及延长渐 开线蜗杆)	传动比大,工作平稳,噪声较小,结构紧凑,在一定条件下有自锁性,效率低	8~80	<200kW	<15~35m/s	多用于中、小负荷间歇工作的情况下,如轧钢机压下装置、小型转炉倾动机构等
	圆弧圆 柱蜗杆传 动	接触线形状有利于形成油膜;主平面共轭齿面为凸凹齿啮合;传动效率及承载能力均高于普通圆柱蜗杆传动	8~80	<200kW	<15~35m/s	用于中、小负荷间歇工作的情况,如轧钢机压下装置
	环面蜗 杆传动(平 面齿包络 环面蜗杆、 直廓环面 蜗杆、锥面 包络环面 蜗杆、渐开 面包络环 面蜗杆等)	接触线和相对速度夹角接近于90°,有利于形成油膜;同时接触齿数多,当量曲率半径大,因而承载能力大,一般比普通圆柱蜗杆传动大2~3倍,但制造工艺一般比普通圆柱蜗杆要复杂	5~100	<4500kW	15~35m/s	轧机压下装置、各种绞车、冷挤压机、转炉、军工产品以及其他冶金矿山设备等

(续)

名称	主要特点	适用范围			
		传动比	传动功率	速度	应用举例
锥面蜗杆传动	同时接触齿数多,齿面可得到比较充分的润滑和冷却,易于形成油膜;传动比较平稳,效率比普通圆柱蜗杆传动高;设计计算和制造比较麻烦	10~359			适用于结构要求比较紧凑的场合
普通渐开线齿轮行星传动	体积小、重量轻、承载能力大、效率高、工作平稳。NGW型行星齿轮减速器与普通圆柱齿轮减速器比较,体积和重量可减小30%~50%,效率可稍提高,但结构比较复杂,制造成本比较高	NGW型单级 2.8~12.5, 两级 14~160, 三级 100~2000	NGW型达6500kW	高低速均可	NGW型主要用于冶金、矿山、起重运输等低速重载机械设备;也用于压缩机、制氧机、船舶发动机高速大功率传动
渐开线少齿差传动	内外圆柱齿轮的齿廓皆采用渐开线,因而可用普通的齿轮机床加工,结构较简单,生产价格也较低,但转臂轴承受径向力较大。这种传动与通用渐开线圆柱齿轮传动(或蜗杆传动)相比较,具有传动比大、体积小、重量轻、结构紧凑等特点。其承受过载荷冲击能力较强,寿命较长。传动效率一般为 $\eta=0.8\sim0.94$ 。由于内齿轮采用软齿面,故承载能力略低于摆线针轮行星传动	单级: 10~100, 可多级串联取得更大的传动比	最大:100kW 常用: $\leq 55$ kW	一般高速轴转速 $<1500\sim1800$ r/min	电工机械、起重运输机械、轻工机械、化工机械、食品机械、粮油机械、农机、仪表、机床与附件、工程机械等
摆线少齿差传动(亦称摆线针轮行星传动)	它以外摆线作为行星轮齿的齿廓曲线,是少齿差传动中应用最广的一种类型。其效率达到 $\eta=0.9\sim0.98$ (单级传动时);多齿啮合,承载能力高,运转平稳,故障少,寿命长;与电动机直联的减速器结构紧凑,但制造成本比较高,主要零部件加工精度要求高。齿形检测困难,大直径摆线轮加工困难	单级: 11~87 双级: 121~5133	常用: $<110$ kW 最大: $<220$ kW		广泛用于矿山、冶金、石油化工、轻工食品、纺织印染、国防工程、起重运输等各类机械
圆弧少齿差传动	又称圆弧针齿行星传动,或冕轮减速器,其结构型式与摆线少齿差传动基本相同,其特点在于:行星轮的齿廓曲线改用凹圆弧代替摆线,轮齿与针齿形成凹凸两圆的内啮合,且曲率半径相差很小,从而提高了接触强度	单级: 11~71	0.2~30kW	高速轴转速 $<1500\sim1800$ r/min	用于矿山运输机械、轻工机械、纺织及印染机械
活齿少齿差传动(又称“活齿传动”、“滑齿传动”、“滚道传动”、“密切圆传动”)	固定齿圈上的齿形制成圆弧或其他曲线,行星轮上的各轮齿改用单个的活动构件(如滚珠)代替,当主动偏心盘驱动时,它们将在输出轴盘上的径向槽孔中活动,故称之为“活齿”,其效率为 $\eta=0.86\sim0.87$	单级: 20~80	$<18$ kW	高速轴转速 $<1500\sim1800$ r/min	用于矿山、冶金机械

(续)

名称	主要特点	适用范围			
		传动比	传动功率	速度	应用举例
少齿差传动 (又称“锥齿轮谐波传动”或“章动传动”)	它采用一对少齿差的锥齿轮,以轴线运动的锥齿轮与另一固定锥齿轮啮合产生摆转运动代替了原来行星轮的平面运动	单级: ≤200			用于矿山机械
谐波齿轮传动	传动比大,范围宽;元件少、体积小、重量轻,在相同的条件下可比一般减速器的元件少一半,体积和重量可减少 20%~50%;同时啮合的齿数多,双波传动在受载情况下同时啮合齿数可达总数的 20%~40%,故承载能力高;且误差可相互补偿,故运动精度高。可采用调整波发生器达到无侧隙啮合;运转平稳、噪声低、可通过密封壁传递运动,传动效率也比较高; $i=100$ 时, $\eta=69\% \sim 90\%$ , $i=400$ 时, $\eta=80\%$ ,且传动比大时,效率并不显著下降,但主要零件——柔轮的制造工艺比较复杂	单级 1.002~1.02(波发生器固定,柔轮主动时); 50~500(柔轮或刚轮固定,波发生器主动时); 150~4000(用行星波发生器 $2 \times 10^3$ ,采用复波)	几瓦到几十千瓦		主要用于航空、航天飞行器、原子能、雷达系统等,也用于造船、汽车、坦克、机床、仪表、纺织、冶金、起重运输、医疗器械等行业,如机床进给分度机构,自动控制系统中的执行机构和数据传递装置,光学机械中的精密传动;用于化工设备、大型绞盘;用于高压、高真空的密封式传动;工业机器人、武器系统和无线电跟踪系统

## 第 2 章 齿轮啮合原理

### 1 齿轮啮合原理的数学基础

#### 1.1 坐标变换与变换矩阵

##### 1.1.1 点的坐标变换

如图 1.2-1 所示,已知点  $P$  在旧坐标系  $\sigma_1 [O_1, x_1, y_1, z_1]$  中的坐标为  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\sigma_1$  的原点  $O_1$  在新坐标系  $\sigma_2 [O_2, x_2, y_2, z_2]$  中的坐标为  $(x_{20}, y_{20}, z_{20})$ , 则点  $P$  在  $\sigma_2$  中的坐标  $(x_2, y_2, z_2)$  由下式确定:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_{20} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2-1)$$

式中矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_{20} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2-2)$$

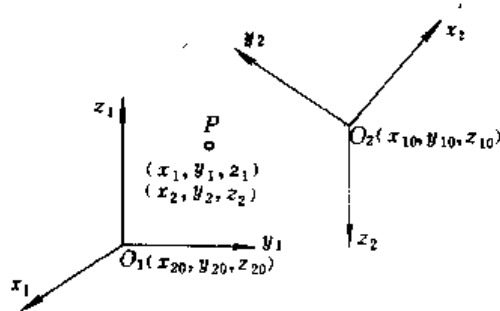


图 1.2-1 点的坐标变换

称为由旧坐标系  $\sigma_1$  到新坐标系  $\sigma_2$  的点的坐标变换矩阵,记为  $M_{21}$ 。这个 4 阶变换矩阵的组成原则是:第一行的前三个元素  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  依次是新坐标系的第一根轴 ( $x_2$  轴) 与旧坐标系的三根轴 ( $x_1, y_1, z_1$ ) 夹角的余弦;第二行的前三个元素  $a_{21}, a_{22}, a_{23}$  依次是新坐标系的第二根轴 ( $y_2$  轴) 与旧坐标系的三根轴 ( $x_1, y_1, z_1$ ) 夹角的余弦;第三行的前三个元素  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$  依次是新坐标系的第三根轴 ( $z_2$  轴) 与旧坐标系的三根轴 ( $x_1,$

$y_1, z_1$ ) 夹角的余弦; 第四列的前三个元素依次是旧坐标系  $\sigma_1$  的原点  $O_1$  在新坐标系  $\sigma_2$  中的坐标; 第四行的元素总是  $0, 0, 0, 1$ 。

依据上述原则, 反过来, 若把  $\sigma_2$  看成是旧坐标系, 并且其原点  $O_2$  在新坐标系  $\sigma_1$  的坐标为  $(x_{10}, y_{10}, z_{10})$ , 则由  $\sigma_2$  到  $\sigma_1$  的变换矩阵可表示为

$$M_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & x_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & y_{10} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-3)$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & x_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & y_{10} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-4)$$

当两个坐标系的原点  $O_1$  与  $O_2$  重合时, 上式可简化为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (1.2-5)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (1.2-6)$$

以上两式中的  $a_i$  仍由上述原则确定。

### 1.1.2 空间坐标系中矢量的分量变换

由于矢量可以平移, 因此其分量变换与坐标系原点的位置无关, 设矢量  $r$  在  $\sigma_1$  中的分量为  $x_1, y_1, z_1$ , 在  $\sigma_2$  中的分量为  $x_2, y_2, z_2$ , 则其变换公式与式 (1.2-5)、式 (1.2-6) 相同。

上述的空间变换矩阵的组成原则也适用于平面坐标变换。在平面坐标系中, 由于  $a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_{31} = a_{32} = z_{10} = z_{20} = 0$ , 故点的变换矩阵简化为三阶方阵, 即

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & x_{20} \\ a_{21} & a_{22} & y_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-7)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & x_{10} \\ a_{12} & a_{22} & y_{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-8)$$

矢量分量的变换矩阵简化为 2 阶方阵, 即有

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (1.2-9)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (1.2-10)$$

**【例 1】** 如图 1.2-2 所示, 有三个平面坐标系

$\sigma[O; x, y], \sigma_1[O_1; x_1, y_1], \sigma_2[O_2; x_2, y_2]$ , 试写出  $\sigma_2$  到  $\sigma_1$  点的坐标变换公式。

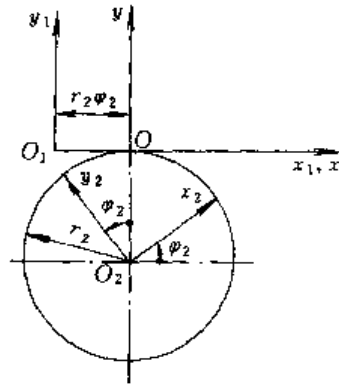


图 1.2-2 在  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$  坐标系中  $\sigma_2$  到  $\sigma_1$  的点的坐标变换

**【解】** 根据前面所述的变换矩阵组成原则, 则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_2 \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-11)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-12)$$

综合以上两式, 则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_2 \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & -r_2 \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-13)$$

**【例 2】** 图 1.2-3 所示的是研究蜗杆传动时经常采用的坐标系, 其中  $\sigma[O; x, y, z]$  和  $\sigma_p[O_p; x_p, y_p, z_p]$  是固定坐标系,  $\sigma_1[O_1; x_1, y_1, z_1]$  与  $\sigma_2[O_2; x_2, y_2, z_2]$  分别是和蜗杆与蜗轮相固连的坐标系, 试写出  $\sigma_1$  到  $\sigma_2$  的点的坐标变换公式。

**【解】** 依照前面所述的变换矩阵组成原则, 可知  $\sigma_1$  到  $\sigma$  的变换矩阵为

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\sigma$  到  $\sigma_1$  的变换矩阵为

$$M_{p0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

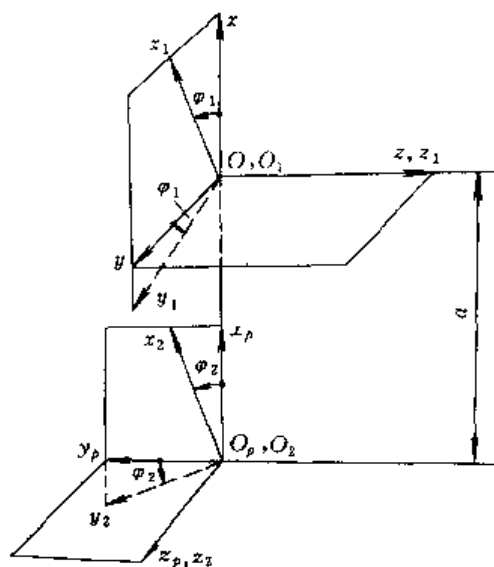


图 1.2-3 在  $\sigma_p, \sigma_1, \sigma_2$  坐标系中  $\sigma_1$  到  $\sigma_2$  的点的坐标变换

$\sigma_p$  到  $\sigma_2$  的变换矩阵为

$$M_{2p} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据以上三式, 则  $\sigma_1$  到  $\sigma_2$  的变换矩阵为

$$M_{21} = M_{2p} M_{p0} M_{01} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-14)$$

最后得到

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-15)$$

## 1.2 有关微分几何的简明知识

### 1.2.1 向量代数

在空间直角坐标系内, 若  $i, j, k$  为三个坐标轴正向的么矢(单位矢量), 则向量  $r$  可写成它们的线性组合, 即

$$r = xi + yj + zk = \{x, y, z\} \quad (1.2-16)$$

式中  $x, y, z$  是  $r$  的分量。  $r$  的长(模)为

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2-17)$$

若  $r \neq 0$ , 则  $\frac{r}{|r|}$  是和  $r$  同向的么矢。

若向量  $r_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, r_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ , 则它们可以进行如下运算:

1) 矢量和

$$r_1 + r_2 = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\} \quad (1.2-18)$$

2) 矢量差

$$r_1 - r_2 = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\} \quad (1.2-19)$$

3) 纯量乘矢量

$$\lambda r_1 = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\} \quad (1.2-20)$$

式中的  $\lambda$  为一纯量。

4) 矢量的数积

$$r_1 r_2 = |r_1| |r_2| \cos\theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (1.2-21)$$

式中  $\theta$  ——  $r_1$  与  $r_2$  之间夹角 ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )。

显然,  $r_1$  与  $r_2$  垂直的充要条件是  $r_1 r_2 = 0$ 。

5) 矢量的矢积

$$r_1 \times r_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (1.2-22)$$

$r_1$  与  $r_2$  平行的充要条件是  $r_1 \times r_2 = 0$ 。

6) 混合积

若有第三个矢量  $r_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$ , 则  $r_1, r_2, r_3$  可作混合积运算:

$$\begin{aligned} (r_1 \times r_2) \cdot r_3 &= (r_1 r_2 r_3) = (r_2 r_3 r_1) = (r_3 r_1 r_2) \\ &= -(r_2 r_1 r_3) = -(r_1 r_3 r_2) = -(r_3 r_2 r_1) \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.2-23)$$

7) 二重矢积

$$(r_1 \times r_2) \times r_3 = (r_1 r_3) r_2 - (r_2 r_3) r_1 \quad (1.2-24)$$

8) 拉格朗日恒等式

$$(r_1 \times r_2)(r_3 \times r_4) = (r_1 r_3)(r_2 r_4) - (r_1 r_4)(r_2 r_3) \quad (1.2-25)$$

9) 矢量的回转

如图 1.2-4 所示, 若  $Oa$  轴的正向么矢为  $e$ , 向量  $r$  绕  $Oa$  轴转过  $\varphi$  角后, 得一新的向量  $r^*$ , 则

$$r^* = r \cos\varphi + (1 - \cos\varphi)(re)e + \sin\varphi(e \times r) \quad (1.2-26)$$

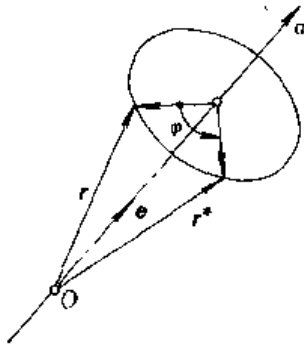


图 1.2-4 矢量的回转

1.2.2 曲线

1. 矢函数与曲线的参数方程

空间曲线  $\Gamma$  (见图 1.2-5) 可用矢函数

$$r(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

表示, 式中  $t$  为参数, 例如, 圆的方程 (见图 1.2-6) 可以写成:

$$r = R \cos \theta i + R \sin \theta j = \{R \cos \theta, R \sin \theta, 0\} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1.2-27)$$

圆柱螺线的方程 (见图 1.2-7) 为

$$r = R \cos \theta i + R \sin \theta j + p \theta k = \{R \cos \theta, R \sin \theta, p \theta\} \quad (-\infty < \theta < +\infty) \quad (1.2-28)$$

式中  $p$  —— 螺旋参数,  $p = \frac{h}{2\pi}$ ;  
 $h$  —— 螺旋线的导程。

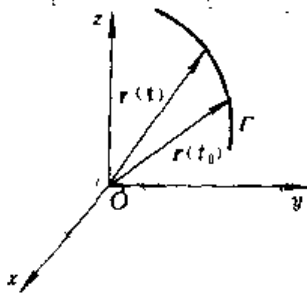


图 1.2-5 空间曲线的表示

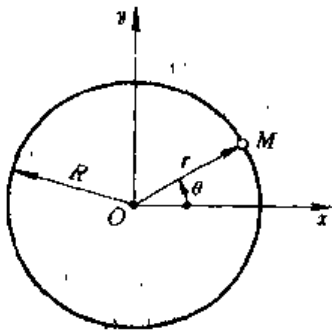


图 1.2-6 圆的表示

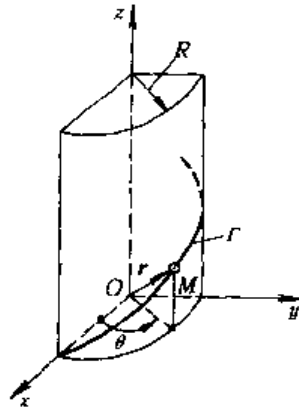


图 1.2-7 圆柱螺线的表示

引进弧长  $s$  为曲线的参数 (称其为曲线的自然参数) 时, 曲线  $\Gamma$  的方程为

$$r(s) = \{x(s), y(s), z(s)\} \quad (s_1 \leq s \leq s_2)$$

2. 矢函数的微导

(1) 矢函数的导矢 极限 (见图 1.2-8)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = r'(t)$$

称为矢函数  $r(t)$  在  $P$  点的导矢, 其几何意义是, 当  $r(t) \neq 0$  时,  $r'(t)$  为曲线  $\Gamma$  在  $P$  点在切线上的一个矢量, 简称切矢。

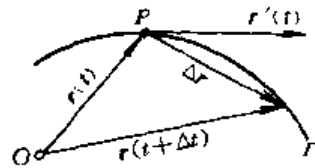


图 1.2-8 矢函数的导矢

当以弧长为参数时,

$$\frac{dr(s)}{ds} = \dot{r} = a \quad (1.2-29)$$

为切矢。

(2) 矢函数的微分公式

$$\frac{dr}{dt} = r' = \{x'(t), y'(t), z'(t)\} \quad (1.2-30)$$

$$dr = r'(t) dt = \{dx, dy, dz\} \quad (1.2-31)$$

$$(\lambda r)' = \lambda' r + \lambda r' \quad (1.2-32)$$

$$(r_1 + r_2)' = r_1' + r_2' \quad (1.2-33)$$

$$(r_1 r_2)' = r_1' r_2 + r_1 r_2' \quad (1.2-34)$$

$$(r_1 \times r_2)' = r_1' \times r_2 + r_1 \times r_2' \quad (1.2-35)$$

$$(r_1 r_2 r_3)' = (r_1' r_2 r_3) + (r_1 r_2' r_3) + (r_1 r_2 r_3') \quad (1.2-36)$$

$$\frac{dr^2}{dt} = 2r r' \quad (1.2-37)$$

$$\frac{dr}{ds} = r'(t) \frac{dt}{ds} \quad (1.2-38)$$



(3) 几个重要结论

- 1) 变矢  $r(t)$  具有固定长的充要条件是  $rr' = 0$ 。
- 2) 非零变矢  $r(t)$  具有固定方向的充要条件是  $r \times r' = 0$ 。
- 3) 变矢  $r(t)$  平行于固定平面的充要条件是  $(rr' r'') = 0$ 。

(4) 曲线的基本三棱形 如图 1.2-9 所示,  $\alpha, \beta, \gamma$  是曲线  $\Gamma$  在  $P$  点的基本(么)矢, 依次称为么切矢、主法矢、副法矢。它们之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \beta \times \gamma \\ \beta &= \gamma \times \alpha \\ \gamma &= \alpha \times \beta \end{aligned} \right\} \quad (1.2-39)$$

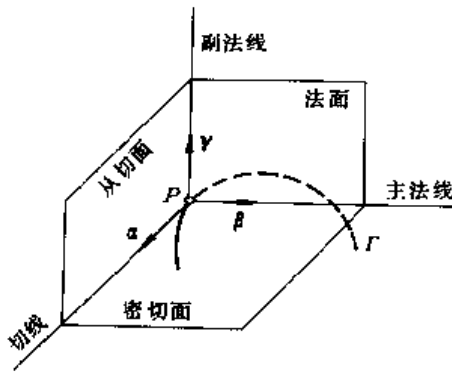


图 1.2-9 么切矢、主法矢和副法矢

并且, 主法矢  $\beta$  总是指向曲线弯曲的一侧。

当曲线以变矢  $r(t)$  给出时, 密切面的方程为

$$[\rho - r(t), r'(t), r''(t)] = 0 \quad (1.2-40)$$

式中  $\rho$  —— 密切面上点的径矢。

(5) 曲线的基本公式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \kappa \beta \\ \dot{\beta} &= -\kappa \alpha + \tau \gamma \\ \dot{\gamma} &= -\tau \beta \end{aligned} \right\} \quad (1.2-41)$$

式中  $\kappa$  —— 曲线在  $P$  点的曲率;

$\tau$  —— 曲线在  $P$  点的挠率。

曲率  $\kappa$  的几何意义是: 曲线  $\Gamma$  在  $P$  点的切线方向对于弧长的转动率; 挠率  $\tau$  的几何意义是: 就其绝对值而言, 等于副法线方向对于弧长的转动率。

曲率  $\kappa$  和挠率  $\tau$  分别由下式确定:

$$\kappa = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} \quad (1.2-42)$$

$$\tau = \frac{(r' r'' r''')}{(r' \times r'')^2} \quad (1.2-43)$$

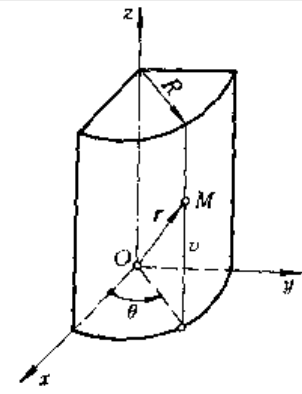
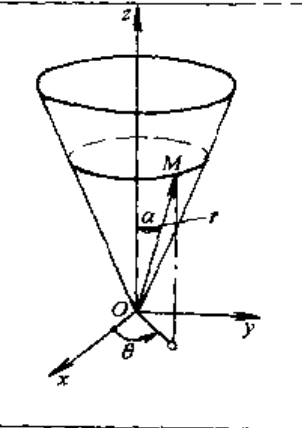
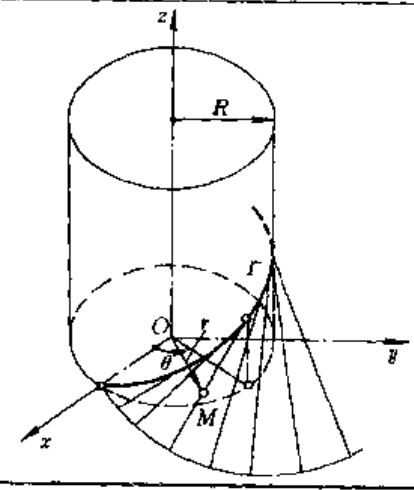
1.2.3 曲面

(1) 曲面的参数表示 空间曲面可以用双参数方程表示, 几种常见的曲面方程见表 1.2-1。应该注意的是, 曲面的参数方程不是唯一的。

表 1.2-1 几种常见的曲面的方程

曲面名称	简 图	曲 面 的 方 程
平面		$r = r_0 + ua + vb = r(u, v)$ <p>式中 <math>a, b</math> —— 常矢; <math>u, v</math> —— 变参数</p>
球面		$r = R(\cos \varphi \cos \theta i + \cos \varphi \sin \theta j + \sin \varphi k) = r(\varphi, \theta)$ <p>式中 <math>\varphi, \theta</math> —— 变参数; <math>R</math> —— 球面半径</p>

(续)

曲面名称	简 图	曲 面 的 方 程
圆柱面		$r = R\cos\theta i + R\sin\theta j + vk = r(\theta, v)$ 式中 $\varphi, \theta$ ——变参数; $R$ ——球面半径
圆锥面		$r = v(\sin\alpha\cos\theta i + \sin\alpha\sin\theta j + \cos\alpha k) = r(v, \theta)$ 式中 $\alpha$ ——半顶角; $v, \theta$ ——变参数
渐开螺旋面		$r = R[(\cos\theta - u\sin\theta)i + (\sin\theta + u\cos\theta)j] + p(\theta + u)k = r(\theta, u)$ 式中 $p$ ——螺旋参数; $\theta, u$ ——变参数

当曲面  $\Sigma$  (见图 1.2-10) 用变矢  $r(u, v)$  给出时, 令  $v = v_0 = \text{常数}$ ,  $r(u, v_0)$  表示一条  $u$  线; 令  $u = u_0 = \text{常数}$  时,  $r(u_0, v)$  表示一条  $v$  线。经过表面上的每一点都有一条  $u$  线和  $v$  线, 它们叫做曲面的参数曲线。

(2) 曲面的么法矢和切平面

1) 么法矢  $n$  (见图 1.2-10) 若曲面  $\Sigma$  的方程为  $r = r(u, v)$ , 则  $\Sigma$  上  $P$  点的么法矢

$$n = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right|} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \quad (1.2-44)$$

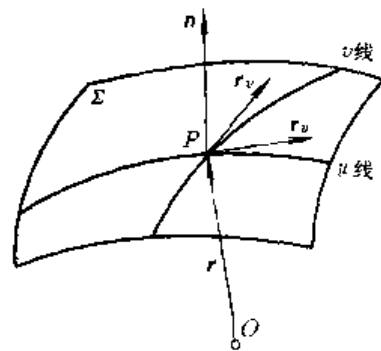


图 1.2-10 曲面的参数曲线

2) 切平面方程

$$n(\rho-r)=0 \quad (1.2-45)$$

式中  $\rho$ —曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的切平面上点的径矢。

(3) 第一基本齐式

$$\varphi_1=ds^2=(dr)^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \quad (1.2-46)$$

式中  $E=r_u^2, F=r_u r_v, G=r_v^2$

(4) 第二基本齐式

$$\varphi_2=-dn dr=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2 \quad (1.2-47)$$

式中  $L=nr_{uu}=-n_u r_u, M=nr_{uv}=-n_v r_u=-n_u r_v,$   
 $N=nr_{vv}=-n_v r_v$

(5) 法曲率

1) 法曲率的定义 如图 1.2-11 所示,  $\Gamma$  为曲面  $\Sigma$  上过  $P$  点的一条曲线,  $\alpha$  为么切矢,  $n$  为曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的么法矢。我们称

$$\begin{aligned} \kappa_n &= n\alpha - \kappa\beta n = \kappa\cos\theta = \varphi_1/\varphi_2 \\ &= \frac{L(du/dv)^2 + 2M(du/dv) + N}{E(du/dv)^2 + 2F(du/dv) + G} \end{aligned} \quad (1.2-48)$$

为曲面  $\Sigma$  沿  $\alpha$  方向的法曲率。

式中  $\kappa$ —曲线  $\Gamma$  在  $P$  点的曲率;  
 $\theta$ — $n$  与  $\beta$  的夹角。

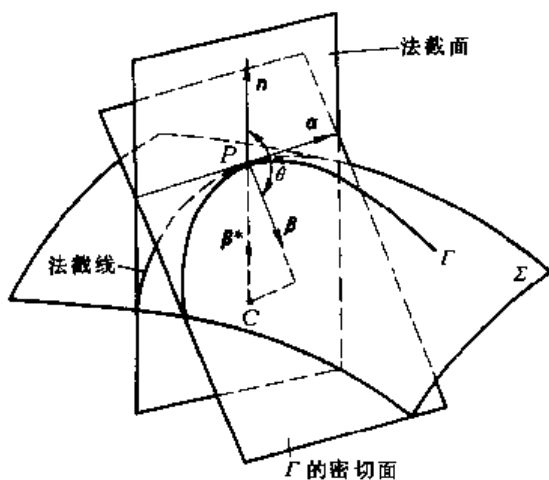


图 1.2-11 法曲率

2) 法曲率的几何意义 就绝对值而言,法曲率与同方向法截线( $\alpha, n$  所在平面与  $\Sigma$  的交线)的曲率相等。法截线的弯曲方向与法矢  $n$  的正向相同时,法曲率  $\kappa_n$  为正;法截线的弯曲方向与  $n$  的正向相反时,  $\kappa_n$  为负。显然,  $\kappa_n$  的正负与  $n$  的方向有关。

3) 默尼埃定理 我们把公式

$$\kappa_n = \kappa\cos\theta \quad (1.2-49)$$

称为默尼埃定理。它表示在  $P$  点曲面  $\Sigma$  上曲线  $\Gamma$  的曲率  $\kappa$  与同方向法曲率  $\kappa_n$  之间的关系。

4) 主方向与主曲率 曲面  $\Sigma$  上点  $P$  在不同方向

的法曲率  $\kappa_n$  一般是不同的,其中有一个最大值和一个最小值,称为主曲率,分别以  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$  表示。它们所对应的方向叫做主方向,这两个主方向互相垂直。若在  $P$  点,沿一切方向的法曲率相同,则这个固定的法曲率就叫做主曲率,一切方向都是主方向。主方向由下面的方程式确定:

$$(EM - FL)du^2 + (EN - GL)dudv + (FN - GM)dv^2 = 0 \quad (1.2-50)$$

将由上式求得两个主方向代入式(1.2-48),就可求出这两个主方向所对应的主曲率。

主方向的特征之一是,沿该方向  $dn$  与  $dr$  平行,即满足

$$dn = -Kdr \quad (1.2-51)$$

上式称为罗德里克公式。

5) 欧拉公式 如图 1.2-12 所示,  $g_1, g_2$  是  $\Sigma$  在  $P$  点的两个主方向的么矢,它们所对应的主曲率分别为  $\kappa_1, \kappa_2$ ,其他的任意方向  $\alpha$  的法曲率可通过下面的欧拉公式求得:

$$\kappa_n = \kappa_1\cos^2\varphi + \kappa_2\sin^2\varphi \quad (1.2-52)$$

式中  $\varphi$ — $g_1$  到  $\alpha$  的有向角。

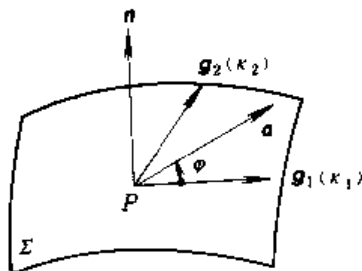


图 1.2-12 任意方向  $\alpha$  的法曲率

若规定  $n = g_1 \times g_2$ , 则沿  $\alpha$  方向,有

$$\frac{dn}{ds} = -(\kappa_1\cos\varphi g_1 + \kappa_2\sin\varphi g_2) \quad (1.2-53)$$

6) 短程挠率

a. 短程挠率的概念 如图 1.2-13 所示,  $\Gamma$  为曲面  $\Sigma$  上的一条曲线,其在  $P$  点的么切矢为  $\alpha$ ,令

$$v = n \times \alpha \quad (1.2-54)$$

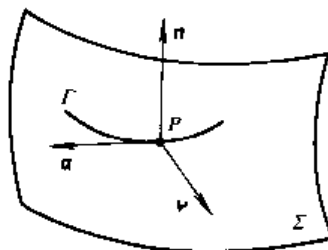


图 1.2-13 曲面在  $P$  点沿  $\alpha$  方向的短程挠率

则沿  $\alpha$  方向,有

$$\dot{n} = \frac{dn}{ds} = -\kappa_n \alpha - \tau_g v \quad (1.2-55)$$

式中的  $\tau_g = -v \dot{n}$  称为曲面在  $P$  点沿  $\alpha$  方向的短程挠率。

b. 短程挠率的计算公式

$$\tau_g = -v \dot{n} = \left( n \frac{dn}{ds} \frac{dr}{ds} \right) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 & -\frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} & \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} \quad (1.2-56)$$

式中  $D = \sqrt{EG - F^2}$

短程挠率  $\tau_g = 0$  是主方向的又一特征。

7) 法曲率和短程挠率的关系

$$\tau_g = (\kappa_2 - \kappa_1) \sin \varphi \cos \varphi \quad (1.2-57)$$

或

$$\tau_g = \frac{1}{2} \frac{d\kappa_n}{d\varphi} \quad (1.2-58)$$

式(1.2-57)称为贝特朗公式。

8) 欧拉公式和贝特朗公式的推广 若已知曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的两个切线方向  $\alpha'$  和  $\alpha''$ , 它们与曲面的一个主方向  $g_1$  所成的有向角分别为  $\varphi$  和  $\varphi'$  (见图 1.2-14), 并且它们所对应的法曲率依次为  $\kappa_n', \kappa_n''$ , 短程挠率依次为  $\tau_g', \tau_g''$ , 则沿任意切线方向  $\alpha$  的法曲率  $\kappa_n$  与短程挠率  $\tau_g$  可分别由下面公式求得:

$$\kappa_n = \kappa_n' \cos^2 \psi + \kappa_n'' \sin^2 \psi + \tau_g' \sin 2\psi + (\tau_g'' - \tau_g') \sin^2 \psi \cos \theta \quad (1.2-59)$$

$$\tau_g = \frac{\kappa_n'' - \kappa_n'}{2} \sin 2\psi + \frac{\tau_g'' - \tau_g'}{2} \sin 2\psi \cos \theta + \tau_g' \cos 2\psi \quad (1.2-60)$$

式中  $\psi = \varphi - \varphi'$ ;

$\theta = \varphi'' - \varphi'$ 。

式(1.2-59)称为欧拉公式的推广, 式(1.2-60)称为贝特朗公式的推广。

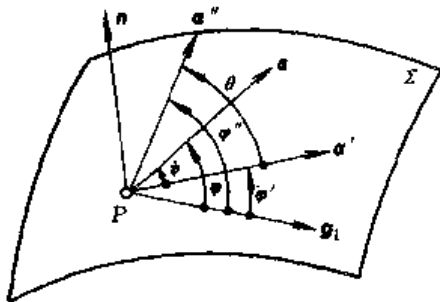


图 1.2-14 欧拉公式和贝特朗公式的推广

### 1.3 相对运动与相对微分

#### 1.3.1 两个坐标系(两齿轮)的相对运动速度

如图 1.2-15 所示,  $\sigma [O; e_1, e_2, e_3]$  为固定坐标系;  $\sigma^{(1)} [O^{(1)}; e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}]$  与  $\sigma^{(2)} [O^{(2)}; e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(2)}]$  为两个动坐标系, 它们分别和曲面(齿轮的齿面)  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  相固连, 其回转角速度矢依次为  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ 。在空间任意一点  $P$ , 和  $\sigma^{(1)}$  相固连的点  $P$  的牵连速度  $v^{(1)}$  与和  $\sigma^{(2)}$  相固连的点  $P$  的牵连速度  $v^{(2)}$  之差  $v^{(12)} = v^{(1)} - v^{(2)}$ , 称为两坐标系的相对速度, 它由下式确定:

$$v^{(12)} = \omega^{(12)} \times r^{(1)} + \frac{dr^{(1)}}{dt} - \omega^{(2)} \times r^{(2)} \quad (1.2-61)$$

式中  $\xi = O^{(2)}O^{(1)}, \omega^{(12)} = \omega^{(1)} - \omega^{(2)}$

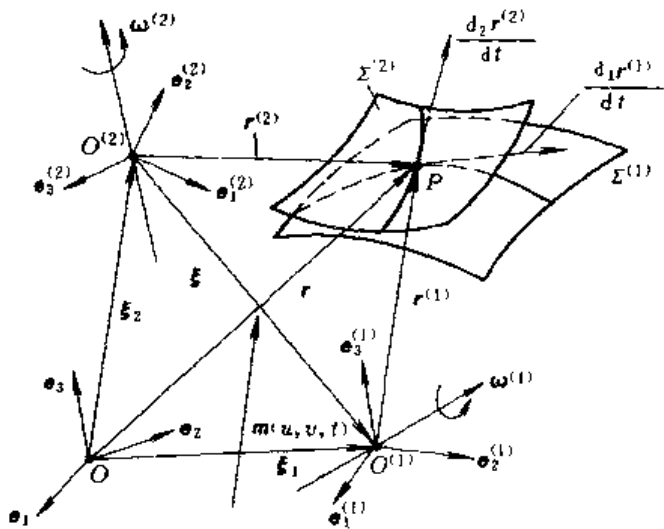


图 1.2-15 多元矢函数在固定坐标系  $\sigma$  中的表示

#### 1.3.2 矢函数的相对微分与绝对微分

(1) 绝对微分与相对微分的概念 设有一多元函数  $m(u, v, t)$  (见图 1.2-15), 其在固定坐标系  $\sigma$  中的表达式为

$$m(u, v, t) = \sum_{i=1}^3 m_i(u, v, t) e_i \quad (1.2-62)$$

在动坐标系  $\sigma^{(1)}$  中的表达式为

$$m(u, v, t) = \sum_{i=1}^3 m_i^{(1)}(u, v, t) e_i^{(1)} \quad (1.2-63)$$

相对固定坐标系  $\sigma$ , 矢函数  $m$  的全微分

$$dm = m_u du + m_v dv + m_t dt \quad (1.2-64)$$

称为  $m$  的绝对微分。

$$\left. \begin{aligned} m_u &= \sum_{i=1}^3 m_{ui} e_i \\ m_v &= \sum_{i=1}^3 m_{vi} e_i \\ m_t &= \sum_{i=1}^3 m_{ti} e_i \end{aligned} \right\} \quad (1.2-65)$$

相对动坐标系  $\sigma^{(1)}$  的全微分

$$d_1 m = m_{1u} du + m_{1v} dv + m_{1t} dt \quad (1.2-66)$$

称为  $m$  的相对微分。

$$\text{式中 } \left. \begin{aligned} m_{1u} &= \sum_{i=1}^3 m_{iu}^{(1)} e_i^{(1)} \\ m_{1v} &= \sum_{i=1}^3 m_{iv}^{(1)} e_i^{(1)} \\ m_{1t} &= \sum_{i=1}^3 m_{it}^{(1)} e_i^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-67)$$

动坐标系  $\sigma^{(1)}$  的么矢  $e_i^{(1)}$  是随时间  $t$  而变化的矢量,但在  $m$  的相对  $\sigma^{(1)}$  微分的表达式(1.2-66)中,我们把它作为常矢处理的。由此可知,绝对微分与相对微分没有本质的区别,只是相对不同的坐标系而言。以上几式中的  $m_u, m_v, m_t$  称为绝对偏导矢;  $m_{1u}, m_{1v}, m_{1t}$  称为相对偏导矢。它们之间有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} m_u &= m_{1u} \\ m_v &= m_{1v} \\ m_t &= m_{1t} + \omega^{(1)} \times m \end{aligned} \right\} \quad (1.2-68)$$

应该注意的是,  $u, v$  是与时间无关的一般参数,而  $t$  是时间变量。

(2) 相对微分与绝对微分的关系 同一矢函数  $m(u, v, t)$  的相对微分与绝对微分有如下关系:

$$dm = d_1 m + \omega^{(1)} \times m dt \quad (1.2-69)$$

如果  $m$  相对动坐标系  $\sigma^{(2)}$  的相对微分为  $d_2 m$ , 则有

$$d_2 m = d_1 m + \omega^{(12)} \times m dt \quad (1.2-70)$$

### 1.3.3 相对微分与相对速度的关系

如图 1.2-15 所示,  $\Sigma^{(1)}$  与  $\sigma^{(1)}$  相固连,其方程式为  $r^{(1)}$ ,  $\Sigma^{(2)}$  与  $\sigma^{(2)}$  相固连,其方程式为  $r^{(2)}$ 。在  $\sigma^{(1)}$  与  $\sigma^{(2)}$  的相对运动中,  $\Sigma^{(1)}$  与  $\Sigma^{(2)}$  在  $P$  点接触(相切)时,则有

$$\frac{d_2 r^{(2)}}{dt} - \frac{d_1 r^{(1)}}{dt} = v^{(12)} \quad (1.2-71)$$

或

$$\frac{\partial_2 r^{(2)}}{\alpha} - \frac{\partial_1 r^{(1)}}{\alpha} = v^{(12)} \quad (1.2-72)$$

式中  $\frac{d_1 r^{(1)}}{dt}$  —— 接触点  $P$  在  $\Sigma^{(1)}$  上(即在  $\sigma^{(1)}$  中)的相对速度;

$\frac{d_2 r^{(2)}}{dt}$  —— 接触点  $P$  在  $\Sigma^{(2)}$  上(即在  $\sigma^{(2)}$  中)的相对速度。

应注意的是,  $\frac{d_1 r^{(1)}}{dt}$  和  $\frac{d_2 r^{(2)}}{dt}$  虽然与  $v^{(12)}$  都叫相对速度,但有本质区别。

满足式(1.2-71)的两个切线方向  $d_1 r^{(1)}$  ( $\Sigma^{(1)}$  的)、 $d_2 r^{(2)}$  ( $\Sigma^{(2)}$  的)称为共轭方向。

## 2 平面啮合的基本原理

### 2.1 齿轮的瞬心线

#### 2.1.1 齿轮瞬心线的概念

两平面啮合齿轮的传动比可以是可变的,也可以是恒定的,在实践中经常遇到的情况往往是后者。在平面啮合中,一个非常重要的概念是齿轮的瞬心线。由机械原理可知,图 1.2-16 所示的两转动构件的瞬心  $P$  一定在连心线  $O_1 O_2$  上,并且

$$\frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

即构件 1、2 的瞬心  $P$  把中心距  $O_1 O_2$  分为两段,这两段的长度和两构件的瞬时角速度  $\omega_1, \omega_2$  成反比。

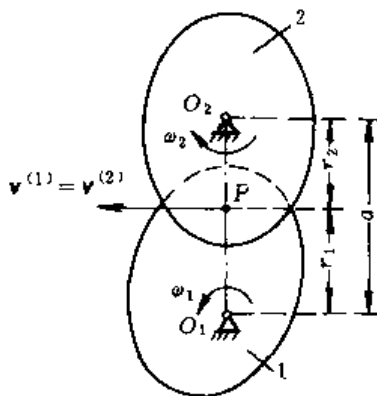


图 1.2-16 两转动构件的瞬心  $P$

在齿轮啮合原理中,把瞬心  $P$  称为啮合节点。传动比恒定时,节点  $P$  固定不动;传动比是变数时,节点  $P$  在连心线  $O_1 O_2$  上作相应的变动。

每个齿轮的瞬心线,就是节点  $P$  在与该齿轮相固连的坐标系中的轨迹,因而两齿轮的相对运动可以归结为它们的瞬心线作纯滚动。

#### 2.1.2 瞬心线的方程

下面用极坐标给出两齿轮瞬心线的方程

$$\text{齿轮 1: } r_1 = \frac{a}{i_{12} \pm 1} \quad (1.2-73)$$

$$\text{齿轮 2: } \left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{i_{12}}{i_{12} \pm 1} a \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-74)$$

式中  $i_{12}$  —— 两齿轮的瞬时传动比,  $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$

$$= \frac{r_2}{r_1} = f(\varphi_1);$$

$a$  —— 中心距,  $a = r_2 \pm r_1$  (假定  $r_2 > r_1$ )。

在以上两式中,上边的符号对应于外啮合,下边的符号对应于内啮合。

应该注意的是,在这两个方程中,极角的大小分别等于齿轮的转角  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$ ,但其计量方向要和齿轮的转动方向相反,即齿轮 1 逆时针转动时,它的极角应从初始位置  $O_1P$  起顺时针量取  $\varphi_1$  值;同样,齿轮 2 顺时针转动时,它的极角应从初始位置  $O_2P$  起逆时针量取  $\varphi_2$  值。

在齿条与齿轮的啮合中(见图 1.2-17),齿轮的瞬心线方程为

$$r_1 = \frac{v_2}{\omega_1} = \psi(\varphi_1) \quad (1.2-75)$$

式中  $v_2$ ——齿条的移动速度,  $v_2 = \frac{ds}{dt}$ ;

$\omega_1$ ——齿轮的瞬时角速度,  $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$ 。

在以  $O_1$  为原点的直角坐标系中,齿条的瞬心线方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_0^{\varphi_1} r_1 d\varphi_1 \\ y &= r_1 = \psi(\varphi_1) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-76)$$

显然,传动比  $i_{12}$  为常数时,齿轮的瞬心线是圆,齿条的瞬心线是一条直线。

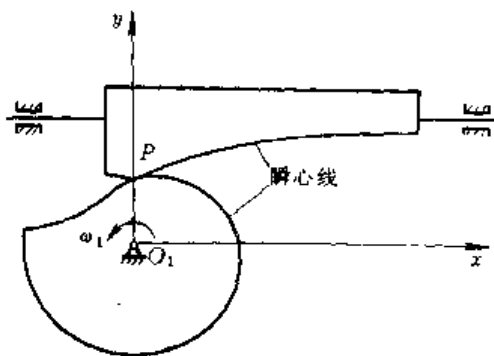


图 1.2-17 齿条与齿轮啮合的瞬心线

### 2.1.3 齿轮瞬心线的封闭条件

在生产实践中,两个齿轮的瞬心线可能是封闭的,也可能是不封闭的。如果要求一对齿轮连续转动,则它们的瞬心线必须是封闭的、连续的。这就意味着当  $\varphi_1 = 0^\circ$  和  $\varphi_1 = 2\pi$  时,传动比  $i_{12}$  相同,即要求在  $\varphi_1 = 0^\circ \sim 2\pi$  的范围内  $i_{12}$  的变化周期是个整数  $n_1$ 。这样,  $i_{12}$  每变化一个周期,齿轮 1 转过的角度  $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ 。同理,在齿轮 2 的转角  $\varphi_2 = 0^\circ \sim 2\pi$  的范围内,  $i_{12}$  的变化周期也应是某个整数  $n_2$ ,即  $i_{12}$  每变化一个周期,齿轮 2 转过的角度  $\varphi_2 = \frac{2\pi}{n_2}$ 。根据式(1.2-74),则有

$$\frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{\frac{2\pi}{n_1}} \frac{1}{i_{12}} d\varphi_1 \quad (1.2-77)$$

这就是齿轮瞬心线封闭时的条件。

## 2.2 齿廓啮合的基本定理

如图 1.2-18 所示, I、II 是两齿轮的瞬心线, 1、2 依次是与它们相固连的齿廓。齿轮转动过程中,两条瞬心线作无滑动的滚动,两齿廓 1、2 则总保持相切接触。我们称 1、2 两齿廓为共轭齿廓。

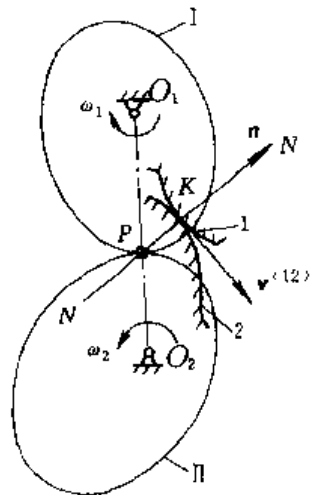


图 1.2-18 两齿轮啮合转动的瞬心线

齿廓啮合的基本定理是:共轭齿廓在接触点处的公法线必须通过该瞬时的啮合节点。可用如下方程表示:

$$n \cdot v^{(1,2)} = 0 \quad (1.2-78)$$

式中  $n$ ——接触点处的公共法矢;

$v^{(1,2)}$ ——相对速度。

这个定理又称 Willis 定理,它确定了一对共轭齿廓的几何条件。

## 2.3 确定共轭齿廓的方法

在生产实践中,经常遇到的一类问题是,已知构件 1 的齿廓,两构件作相对运动,求与其相共轭的构件 2 的齿廓。求共轭齿廓的方法有好几种,这里仅介绍两种常用的方法。

### 2.3.1 齿廓法线法

齿廓法线法的原理是根据齿廓啮合的基本定理,确定接触点在给定齿廓上的位置与齿轮转角之间的关系式,然后通过坐标变换求出与给定齿廓相共轭的另一齿廓。

如图 1.2-19 所示,曲线  $a-a$  是在与齿轮 1 相固连的动坐标系  $\sigma^{(1)}[O_1; x_1, y_1]$  里给出的左侧齿廓,  $P$  点是在固定坐标系  $\sigma[O; x, y]$  中给出的啮合节点,并且还假定齿轮 1 转角  $\varphi_1$  沿逆时针方向为正。

根据齿廓啮合的基本定理,  $a-a$  上的点  $M_1(x_1, y_1)$  成为接触点时,齿轮 1 要转过  $\varphi_1$  角。  $M_1$  点的坐标

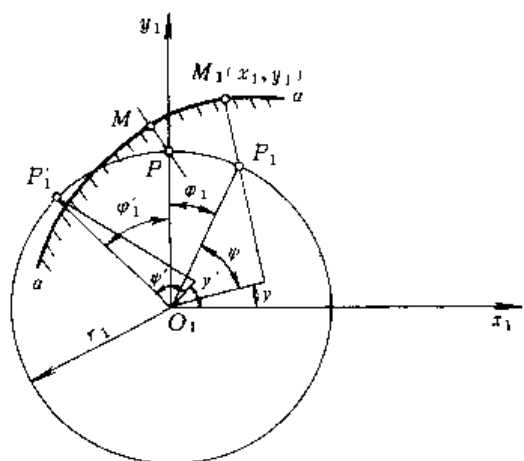


图 1.2-19

$(x_1, y_1)$ 与 $\varphi_1$ 角之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \cos\psi &= \frac{x_1 \cos\gamma + y_1 \sin\gamma}{r_1} \\ \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} - (\gamma + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-79)$$

式中  $\gamma$ ——齿廓  $a-a$  在点  $M_1(x_1, y_1)$  的切线与  $x_1$  轴的夹角。

$\gamma$  角的计算公式见表 1.2-2。

表 1.2-2  $\gamma$  角的计算公式

$a-a$ 曲线的方程形式	$\gamma$ 角的计算公式
显式 $y_1 = f_1(x_1)$	$\tan\gamma = y_1'$
隐式 $F_1(x_1, y_1) = 0$	$\tan\gamma = -\frac{\partial F_1 / \partial x_1}{\partial F_1 / \partial y_1}$
参数式 $\begin{aligned} x_1 &= x_1(u) \\ y_1 &= y_1(u) \end{aligned}$	$\tan\gamma = \frac{dy_1/du}{dx_1/du}$

在已知齿廓  $a-a$  上给出一点  $M_1(x_1, y_1)$ ，就可由式(1.2-79)求出其所对应的  $\varphi_1$  角，然后把  $(x_1, y_1)$  变换到与构件 2 相固连的动坐标系  $\sigma^{(2)}$  中，便求到与  $M_1(x_1, y_1)$  相共轭的一点。给出一系列点  $(x_1, y_1)$ ，就对应得到一系列的点  $(x_2, y_2)$ ，用光滑曲线把后者连接起来，就在  $\sigma^{(2)}$  中得到欲求的共轭齿廓。

接触点在固定坐标系  $\sigma$  中的轨迹称为啮合线。把一系列的接触点  $(x_1, y_1)$  变换到固定坐标系  $\sigma$  中去，就得到这对共轭齿廓的啮合线。

【例 3】用齿廓法线法求切制花键轴(见图 1.2-20)的齿条刀具齿廓和啮合线。

【解】在动坐标系  $\sigma^{(1)}$  中，花键轴左侧齿廓  $ab$  的方程式为

$$x_1 + h = 0$$

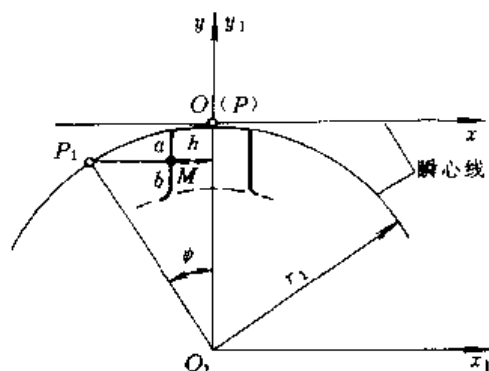


图 1.2-20 花键轴齿条刀的齿廓和啮合线

由图可知

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

故

$$\left. \begin{aligned} \cos\psi &= \frac{y_1}{r_1} \\ \varphi_1 &= -\psi \end{aligned} \right\}$$

于是

$$\cos\varphi_1 = \cos\psi = \frac{y_1}{r_1} \quad (1.2-80)$$

把满足式(1.2-80)的点  $(x_1, y_1)$  变换到固定坐标系中，可得到啮合线的方程式

$$\left. \begin{aligned} x &= -y_1 \left( \frac{h}{r_1} + \sin\varphi_1 \right) \\ y &= -h \sin\varphi_1 + y_1^2 / r_1 - r_1 \\ \cos\varphi_1 &= y_1 / r_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-81)$$

再继续将其变换到与齿条刀相固连的动坐标系  $\sigma^{(2)}$  中，就得到齿条刀的齿廓方程式

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -y_1 (h/r_1 + \sin\varphi_1) + r_1 \varphi_1 \\ y_2 &= -h \sin\varphi_1 + y_1^2 / r_1 - r_1 \\ \cos\varphi_1 &= y_1 / r_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-82)$$

### 2.3.2 运动学法

用啮合函数  $\Phi = n \cdot v^{(2)} = 0$  来确定共轭齿廓的方法，通常称为运动学法。

设有三个坐标系  $\sigma, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$ ，其中  $\sigma$  为固定坐标系， $\sigma^{(1)}$  与  $\sigma^{(2)}$  是分别与构件 1、2 相固连的动坐标系。若构件 1 的齿廓  $\Gamma^{(1)}$  在  $\sigma^{(1)}$  里的方程式为

$$r^{(1)} = x_1(u)i_1 + y_1(u)j_1$$

式中  $u$  —— 参数。

则  $\Gamma^{(1)}$  上啮合点的方程式为

$$\left. \begin{aligned} r^{(1)} &= x_1(u)i_1 + y_1(u)j_1 \\ \Phi(u, t) &= n \cdot v^{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-83)$$

在  $\sigma^{(2)}$  中，与  $\Gamma^{(1)}$  相共轭的内廓  $\Gamma^{(2)}$  由下式确定：

$$\left. \begin{aligned} r^{(2)} &= M_{21} r^{(1)} \\ \Phi(u, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-84)$$

式中  $M_{21}$  --- 由  $\sigma^{(1)}$  到  $\sigma^{(2)}$  的坐标变换矩阵。啮合线的方程为

$$\left. \begin{aligned} r &= M_{01} r^{(1)} \\ \Phi(u, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-85)$$

式中  $M_{01}$  --- 由  $\sigma^{(1)}$  到  $\sigma$  的坐标变换矩阵。

**【例 4】** 如图 1.2-21 所示, 齿轮 1、2 作外啮合传动。它们的节圆半径分别为  $r'_1, r'_2$ ; 角速度依次为  $\omega_1, \omega_2$ 。若已知齿轮 1 的齿廓  $\Gamma^{(1)}$  的方程为  $r^{(1)} = x_1(u)i_1 + y_1(u)j_1$ , 求齿轮 2 的齿廓  $\Gamma^{(2)}$  及它们的啮合线。

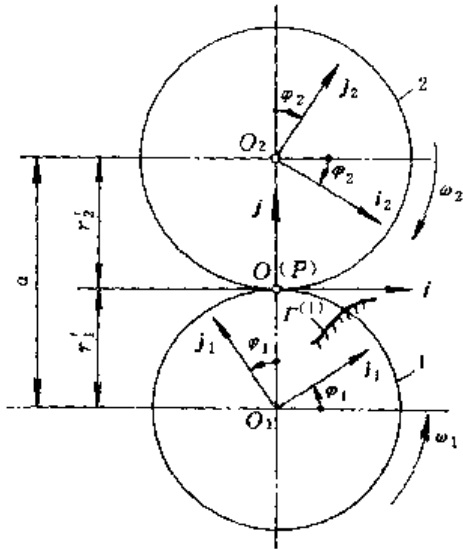


图 1.2-21 齿轮 1、2 作外啮合传动

**【解】** 选两齿轮的啮合节点为固定坐标系  $\sigma$  的原点, 它们的回转中心  $O_1, O_2$  分别为运坐标系  $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$  的原点。由图 1.2-21 可以直接确定

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= \omega_1 k_1 \\ \omega^{(2)} &= -\omega_2 k_2 = -\omega_2 k_1 \\ \omega^{(12)} &= (\omega_1 + \omega_2) k_1 \end{aligned}$$

$$\xi = O_2 O_1 = -a j = \text{常矢}$$

将它们代入式(1.2-61), 经变换后, 得到

$$\begin{aligned} v^{(12)} &= [\omega_2 (a \cos \varphi_1 - y_1) - \omega_1 y_1] i_1 + \\ & \quad [\omega_1 x_1 + \omega_2 (x_1 - a \sin \varphi_1)] j_1 \end{aligned} \quad (1.2-86)$$

齿廓  $\Gamma^{(1)}$  上的公切矢为

$$g_1 = \frac{\frac{d_1 r^{(1)}}{du}}{\left| \frac{d_1 r^{(1)}}{du} \right|} = b \left( \frac{dx_1}{du} i_1 + \frac{dy_1}{du} j_1 \right) \quad (1.2-87)$$

$$\text{式中 } b = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{du}\right)^2}}$$

因此,  $\Gamma^{(1)}$  的公法矢为

$$n = g_1 \times k_1 = b \left( \frac{dy_1}{du} i_1 - \frac{dx_1}{du} j_1 \right) \quad (1.2-88)$$

根据式(1.2-86)、式(1.2-88), 可得啮合方程

$$\begin{aligned} \Phi(u, t) &= n \cdot v^{(12)} = \frac{dy_1}{du} [a i_{21} \cos \varphi_1 - (1 + i_{21}) y_1] - \\ & \quad \frac{dx_1}{du} [x_1 (1 + i_{21}) - a i_{21} \sin \varphi_1] = 0 \end{aligned} \quad (1.2-89)$$

式中  $i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ;

$a = r_1 + r_2$  --- 中心距。

由  $\sigma^{(1)}$  到  $\sigma$  的变换矩阵为

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & -r_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-90)$$

由  $\sigma^{(1)}$  到  $\sigma^{(2)}$  的变换矩阵为

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & a \sin \varphi_2 \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -a \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-91)$$

设所求齿廓  $\Gamma^{(2)}$  在动坐标系  $\sigma^{(2)}$  中的方程式为

$$r^{(2)} = x_2 i_2 + y_2 j_2$$

则根据式(1.2-84)、式(1.2-91)可求得

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - y_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + a \sin \varphi_2 \\ y_2 = x_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + y_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - a \cos \varphi_2 \end{cases} \quad (1.2-92)$$

式中  $\varphi_2 = i_{21} \varphi_1$ 。

根据式(1.2-84)、式(1.2-89)、式(1.2-92), 齿轮 2 的齿廓  $\Gamma^{(2)}$  的方程为

$$\begin{aligned} r^{(2)} &= [x_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - y_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + a \sin \varphi_2] i_2 + \\ & \quad [x_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + y_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - a \cos \varphi_2] j_2 \\ & \quad \left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{du} [a i_{21} \cos \varphi_1 - (1 + i_{21}) y_1] - \frac{dx_1}{du} [x_1 (1 + i_{21}) - \\ a i_{21} \sin \varphi_1] = 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (1.2-93)$$

根据式(1.2-85)、式(1.2-89)、式(1.2-90), 啮合线  $\Gamma$  的方程为

$$\begin{aligned} r &= (x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1) i + (x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1 - r_1) j \\ & \quad \left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{du} [a i_{21} \cos \varphi_1 - (1 + i_{21}) y_1] - \frac{dx_1}{du} [x_1 (1 + i_{21}) - \\ a i_{21} \sin \varphi_1] = 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (1.2-94)$$

## 2.4 齿廓的渐屈线

### 2.4.1 齿廓渐屈线的概念

一条给定齿廓曲线的渐屈线是该齿廓曲线曲率中心的轨迹, 也是该齿廓曲线密切圆圆心的轨迹(见图 1.2-22)。齿廓曲线每一点的法线都与其渐屈线相切, 因此, 齿廓渐屈线也是齿廓法线族的包络。



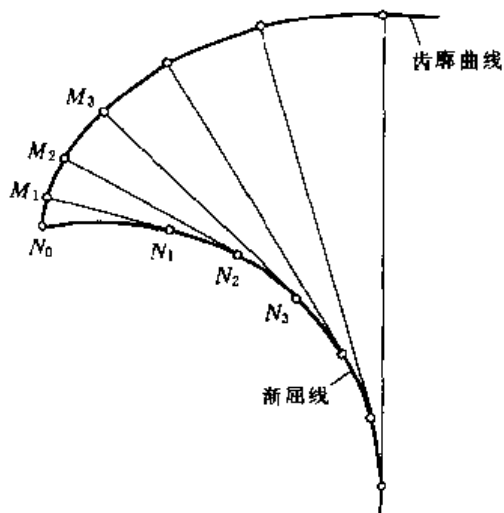


图 1.2-22 齿廓的渐屈线

2.4.2 齿廓法线在齿轮瞬心线上分布的规律

渐开线圆柱齿轮齿廓的渐屈线就是齿轮的基圆。非圆齿轮齿廓的渐屈线,可由齿廓法线在齿轮瞬心线上的分布规律来确定,而分布规律的特点又取决于所选择的切齿方法,例如,用直线齿廓的齿条刀具 1 切削非圆齿轮 2(见图 1.2-23)时,齿条刀具的瞬心线(直线)沿齿轮的瞬心线作纯滚动。在这种情况下,齿条刀具左右两侧齿廓的法线  $Pn_1$  和  $Pn_2$  与瞬心线的切线  $Pi$ (其正向么切矢为  $e$ )之间的夹角为刀具的齿形角  $\alpha$ 。由图 1.2-23 可知

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{左} &= \mu + \alpha \\ \lambda_{右} &= \pi + \mu - \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.2-95)$$

式中  $\mu$ ——瞬心线的径矢和切线正向之间的夹角。

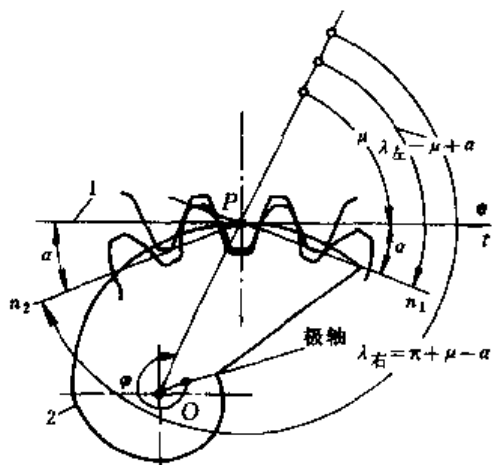


图 1.2-23 齿廓法线在齿轮瞬心线上的分布当瞬心线以矢量方程给出时

$$\cos \mu = \frac{(e, r)}{|r|} \quad (1.2-96)$$

式中  $r$ ——瞬心线的径矢。

若瞬心线以极坐标方程  $r=r(\varphi)$  给出时

$$\tan \mu = r / (dr/d\varphi) \quad (1.2-97)$$

应该注意的是,极角  $\varphi$  的度量方向应如图 1.2-23 所示。

2.4.3 齿廓渐屈线的确定

在齿轮的瞬心线给出的情况下(见图 1.2-24),齿轮齿廓的渐屈线可由下式确定

$$p = r + PC \quad (1.2-98)$$

式中  $p$ ——齿廓渐屈线的径矢;

$r$ ——瞬心线的径矢。

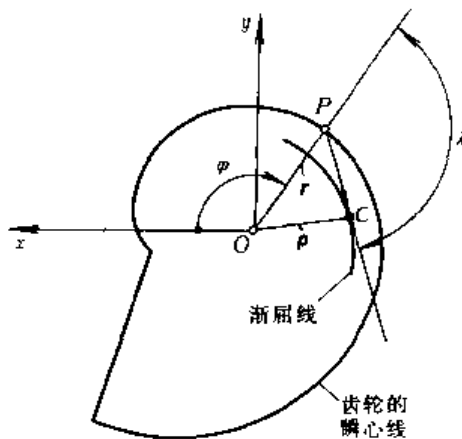


图 1.2-24 齿廓渐屈线的确定

$PC$  的模  $l$  由下式确定

$$|PC| = l = r \frac{\sin(\lambda - \mu)}{\left[1 + \frac{d\lambda}{d\varphi}\right] \sin \mu} \quad (1.2-99)$$

式中  $r = |r|$ 。

在图示的直角坐标系中,齿廓的渐屈线方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi + l \cos(\varphi + \lambda) \\ y &= r \sin \varphi + l \sin(\varphi + \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-100)$$

2.5 共轭齿廓的曲率及其关系

2.5.1 共轭齿廓的曲率

在已知一条齿廓曲线  $\Gamma^{(1)}$  和两构件相对运动的条件下,与  $\Gamma^{(1)}$  相共轭的齿廓曲线  $\Gamma^{(2)}$  的曲率  $\kappa_2$  可用下式求得:

$$\kappa_2 \left( \frac{d_1 r^{(1)}}{dt} + v^{(12)} \right) = \kappa_1 \frac{d_1 r^{(1)}}{dt} - \omega^{(12)} \times n^{(1)} \quad (1.2-101)$$

式中  $n^{(1)}$ ——齿廓  $\Gamma^{(1)}$  的么法矢;

$\kappa_1$ —— $\Gamma^{(1)}$  的相对曲率。

当  $\Gamma^{(1)}$  以方程式  $r^{(1)} = x_1(u)i_1 + y_1(u)j_1$  给出时,

$\kappa_1$  由下式计算:

$$\kappa_1 = \frac{x_1' y_1'' - x_1'' y_1'}{(x_1'^2 + y_1'^2)^{3/2}} \quad (1.2-102)$$

计算  $\kappa_2$  的实例将在 2.7 中给出。

2.5.2 共轭齿廓的曲率关系——欧拉—沙瓦里公式

如图 1.2-25 所示,一对共轭齿廓在  $K$  点啮合(接触)。若两齿轮的节圆半径分别为  $r_1, r_2$ , 齿廓 1、2 在接触点处的曲率半径分别为  $\rho_1, \rho_2$ ,  $PK=x, a'$  为啮合角, 则有

$$\left( \frac{1}{\rho_1 - x} + \frac{1}{\rho_2 + x} \right) \sin a' = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad (1.2-103)$$

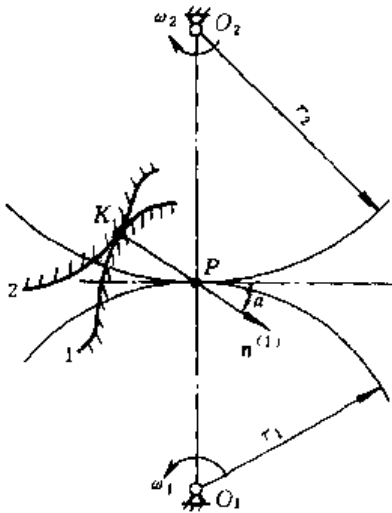


图 1.2-25 共轭齿廓的曲率关系

上式称为欧拉—沙瓦里公式。这个公式表明了平面啮合中共轭齿廓在接触点处的曲率半径  $\rho_1, \rho_2$  与两齿轮节圆半径  $r_1, r_2$  以及接触点位置(由  $a', x$  确定)之间的关系。在已知  $r_1, r_2, a'$  和  $x$  的情况下, 可通过一个齿廓的曲率半径  $\rho_1$  求得另一个齿廓的曲率半径  $\rho_2$ 。

应用这个公式时要注意以下几点:

1) 齿廓 1 的法矢  $n^{(1)}$  总是指向轮齿的实体里,  $x$  是代数值。有向线段  $PK$  与  $n^{(1)}$  同向时,  $x$  为正值, 否则为负值。

2) 对于内啮合(假定  $r_2 > r_1$ ),  $r_2$  应以负值代入; 同样, 齿廓 1、2 为凹形齿时,  $\rho_1, \rho_2$  也应以负值代入。

当齿轮 2 与齿条 1 啮合时,  $r_1 \rightarrow \infty$ , 上式变为

$$\left( \frac{1}{\rho_1 - x} + \frac{1}{\rho_2 + x} \right) \sin a' = \frac{1}{r_2} \quad (1.2-104)$$

【例 5】证明与渐开线齿轮相啮合的齿条齿廓是直线。

【证明】如图 1.2-26 所示, 齿轮 2 的齿廓  $f$  是渐开线,  $KN$  是  $K$  点的曲率半径,  $N$  是曲率中心, 且  $N$  在基圆上。令  $PK=x, NK=\rho_2$ , 则

$$\rho_2 + x = r_2 \sin a'$$

即 
$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\rho_2 + x} \sin a'$$

将上式代入式(1.2-104), 得

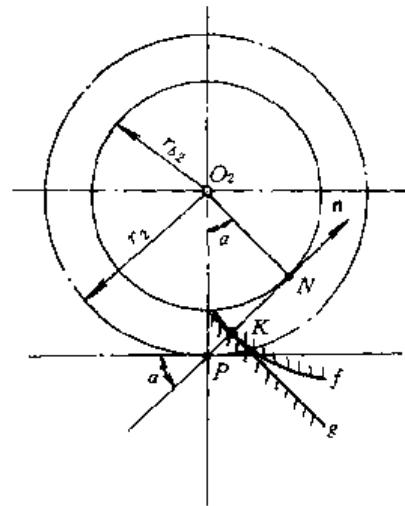


图 1.2-26 与渐开线齿轮相啮合的齿条齿廓

$$\frac{1}{\rho_1 - x} = 0$$

因此,  $\rho_1 \rightarrow \infty$ , 即齿条的齿廓是直线。

2.6 平面啮合的根切

如果一对共轭齿廓的设计参数选择不当, 在其加工时将会产生根切, 根切界限点满足条件

$$\frac{d_1 r^{(1)}}{dt} + v^{(12)} = 0 \quad (1.2-105)$$

进一步分析表明, 公式

$$v_x^{(12)} \Phi_u - \Phi_\varphi \frac{dx_1}{du} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (1.2-106)$$

或

$$v_{y_1}^{(12)} \Phi_u - \Phi_\varphi \frac{dy_1}{du} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (1.2-107)$$

与式(1.2-105)等价。

式中  $v_x^{(12)}, v_{y_1}^{(12)}$  —— 相对速度  $v^{(12)}$  在  $x_1$  轴和  $y_1$  轴上的分量;

$\Phi_u, \Phi_\varphi$  —— 依次是啮合函数  $\Phi = n v^{(12)}$  对  $u, \varphi$  的偏导数。

因此, 我们可以用式(1.2-106)或式(1.2-107)来确定根切界限点。

【例 6】确定用齿条刀具加工渐开线圆柱齿轮时的根切界限点。

【解】首先选择三个坐标系(见图 1.2-27a):  $\sigma[O; i, j]$  为固定坐标系;  $\sigma^{(1)}[O_1; i_1, j_1]$  为与齿条刀具相固连的动坐标系;  $\sigma^{(2)}[O_2; i_2, j_2]$  为与齿轮相固连的坐标系。

在动坐标系  $\sigma^{(1)}$  里, 齿条刀具齿廓的方程为

$$r^{(1)} = x_1 i_1 + y_1 j_1$$

$$x_1 = u \sin a$$

$$y_1 = u \cos a$$

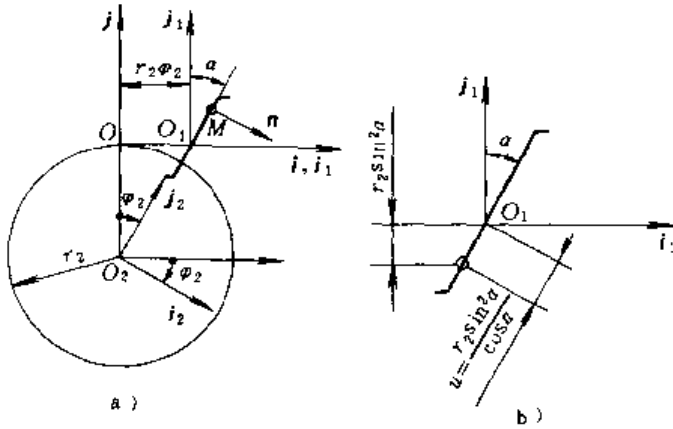


图 1.2-27 渐开线圆柱齿轮根切界限点的确定  
么法矢  $n^{(1)}$  的方程为

$$n^{(1)} = \cos \alpha i_1 - \sin \alpha j_1$$

把  $\xi = O_2 O_1 = r_2 \varphi_2 i_1 + r_2 j_1$ ,  $\frac{d\xi}{dt} = \omega_2 r_2 i_1$ ,  $\omega^{(1)} = 0$ ,  $\omega^{(2)} = -\omega_2 k_1$ ,  $\omega^{(12)} = \omega_2 k_1$ , 以及  $r^{(1)}$  的表达式代入式 (1.2-51), 则得

$$v^{(12)} = -\omega_2 u \cos \alpha i_1 + \omega_2 (r_2 \varphi_2 + u \sin \alpha) j_1$$

故

$$v_{x_1}^{(12)} = -\omega_2 u \cos \alpha$$

$$v_{y_1}^{(12)} = \omega_2 (r_2 \varphi_2 + u \sin \alpha)$$

$$\Phi = n^{(1)} v^{(12)} = -\omega_2 (u + r_2 \varphi_2 \sin \alpha)$$

$$\Phi_u = -\omega_2$$

$$\Phi_{\varphi_2} = -\omega_2 r_2 \sin \alpha$$

$$\frac{dx_1}{du} = \sin \alpha$$

$$\frac{dy_1}{du} = \cos \alpha$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2$$

将以上各有关量代入式 (1.2-106) 或式 (1.2-107), 就得到根切界限点的条件

$$u = -\frac{r_2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \quad (1.2-108)$$

为了避免根切, 齿条刀具的齿顶线不得超过根切界限点 (见图 1.2-27b), 即

$$h_a^* m \leq r_2 \sin^2 \alpha$$

将  $r_2 = \frac{1}{2} m z_2$  代入, 就得到

$$z_2 \geq \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha}$$

这和机械原理中所得到的结论是一致的。

## 2.7 过渡曲线

用展成法加工齿轮时, 轮齿的齿廓由三段曲线组

成 (图 1.2-28):  $a-a$  是刀具齿廓直线部分的包络;  $b-c$  是齿槽底部的圆弧;  $a-b$  是联接  $a-a$  与  $b-c$  两段曲线的过渡曲线。

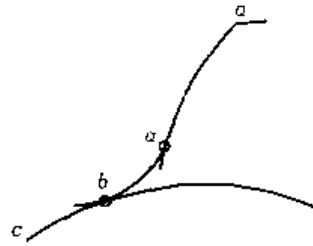


图 1.2-28 齿轮齿廓曲线的组成

过渡曲线是由刀具齿顶的圆角或尖角 (如果没有倒圆角的话) 在展成过程中形成的。用具有尖角的齿条刀具切削齿轮时, 在一般情况下, 过渡曲线是长幅渐开线; 当齿条刀具的齿顶倒成圆角时, 过渡曲线是长幅渐开线的等距曲线, 用插齿刀切削外齿轮时, 过渡曲线是长幅外摆线; 切削内齿轮时, 过渡曲线是长幅内摆线。

在没有根切的情况, 过渡曲线和齿廓曲线在公共点处彼此相切; 有根切时, 则破坏了两者之间的光滑联接。

下面来确定用齿条刀具切削的圆柱齿轮的过渡曲线及其曲率。

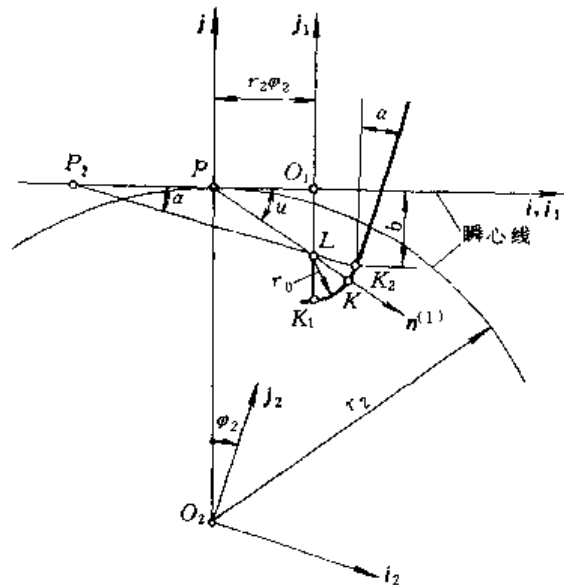


图 1.2-29 过渡曲线的形成

如图 1.2-29 所示, 齿轮 2 的过渡曲线是由齿条刀具的齿顶圆角  $K_1 K K_2$  所形成的。在与其相固联的坐标系  $\sigma^{(1)} [O_1; i_1, j_1]$  中, 该圆角的方程式为

$$\left. \begin{aligned} r^{(1)} &= x_1 i_1 + y_1 j_1 \\ x_1 &= r_0 \cos u \\ y_1 &= -b + r_0 (\sin \alpha - \sin u) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-109)$$

式中  $b$ ——齿廓直线段的终点  $K_2$  至齿条瞬心线的距离;

$r_c$ ——圆角半径;

$u$ ——决定接触点处齿廓法线方向的角,是变量。

齿廓的么法矢  $n^{(1)}$  的表达式为

$$n^{(1)} = \cos u i_1 - \sin u j_1 \quad (1.2-110)$$

根据齿廓啮合的基本定理,即接触点处的公法线必须通过啮合节点  $P$  这个条件,易于得到如下的啮合方程式

$$\tan u = \frac{O_1 L}{P O_1} = \frac{b - r_0 \sin \alpha}{r_2 \varphi_2} \quad (1.2-111)$$

或

$$\Phi(u, \varphi_2) = r_2 \varphi_2 \tan u - (b - r_0 \sin \alpha) = 0 \quad (1.2-112)$$

在与齿轮 2 相固连的动坐标系  $\sigma^{(2)} [O_2, i_2, j_2]$  中,接触点的集合就是所求的过渡曲线,由  $\sigma^{(1)}$  到  $\sigma^{(2)}$  的坐标变换公式为

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \varphi_2 - y_1 \sin \varphi_2 + r_2 (\varphi_2 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2) \\ y_2 &= x_1 \sin \varphi_2 + y_1 \cos \varphi_2 + r_2 (\varphi_2 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-113)$$

将式(1.2-109)、式(1.2-112)及式(1.2-113)联立,就得到过渡曲线的方程式

$$\left. \begin{aligned} r^{(2)} &= x_2 i_2 + y_2 j_2 \\ x_2 &= (r_0 \cos u + r_2 \varphi_2) \cos \varphi_2 + [b - r_0 (\sin \alpha - \sin u)] \\ &\quad \sin \varphi_2 - r_2 \sin \varphi_2 \\ y_2 &= (r_0 \cos u + r_2 \varphi_2) \sin \varphi_2 - [b - r_0 (\sin \alpha - \sin u)] \\ &\quad \cos \varphi_2 + r_2 \cos \varphi_2 \\ r_2 \varphi_2 \tan u - (b - r_0 \sin \alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-114)$$

下面再用式(1.2-101)来求上述过渡曲线的曲率。仿照[例 6],可得

$$v^{(2)} = \omega_2 [b - r_0 (\sin \alpha - \sin u)] i_1 + \omega_2 (r_0 \cos u + r_2 \varphi_2) j_1 \quad (1.2-115)$$

根据式(1.2-109)、式(1.2-110)及式(1.2-112),又可得

$$\omega^{(2)} \times n^{(1)} = \omega_2 (\sin u i_1 + \cos u j_1) \quad (1.2-116)$$

$$\frac{d_1 r^{(1)}}{dt} = -r_0 \frac{du}{dt} (\sin u i_1 + \cos u j_1) \quad (1.2-117)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\sin u \cos u}{\varphi_2} \omega_2 \quad (1.2-118)$$

将式(1.2-115)~式(1.2-118)代入式(1.2-101),并注意

到  $\kappa_1 = -\frac{1}{r_0}$ , 经过整理后,得到

$$\kappa_2 = -\frac{\sin u (\varphi_2 + \sin u \cos u)}{r_0 \sin u (\varphi_2 + \sin u \cos u) + (b - r_0 \sin \alpha) \varphi_2} \quad (1.2-119)$$

负号表示过渡曲线的弯曲方向与么法矢  $n^{(1)}$  的方向相反。

如果齿条刀具的齿顶是尖角的话,则应以  $r_0 = 0$  代入。

### 3 空间啮合的共轭齿面

#### 3.1 共轭齿面的定义

设有三个坐标系  $\sigma, \sigma^{(1)}$  与  $\sigma^{(2)}$ , 其中  $\sigma$  是固定坐标系,  $\sigma^{(1)}$  与  $\sigma^{(2)}$  依次是与构件 1 的齿面  $\Sigma^{(1)}$ 、构件 2 的齿面  $\Sigma^{(2)}$  相固连的动坐标系。当  $\sigma^{(1)}$  相对  $\sigma$  按  $v$  运动时,齿面  $\Sigma^{(1)}$  始终和齿面  $\Sigma^{(2)}$  保持接触,并推动  $\sigma^{(2)}$  相对  $\sigma$  按  $v_2$  运动,则称齿面  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  为在共轭运动  $v_1, v_2$  条件下的共轭齿面。

共轭齿面  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  在每一瞬时可能只在一点接触,也可能沿着一条曲线接触。称前一种情况为点接触的共轭齿面,后一种情况为线接触的共轭齿面。 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  的瞬时接触线(或点)在固定坐标系  $\sigma$  中所形成的曲面(或曲线)叫做啮合面(或啮合线)。

#### 3.2 相啮齿面的共轭条件

一对相啮合的共轭齿面  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  在接触点处必须满足以下条件:

$$\left. \begin{aligned} r^{(2)} &= r^{(1)} + \xi \\ n^{(1)} &= -n^{(2)} \\ n^{(1)} v^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-120)$$

式中  $r^{(1)}$ 、 $r^{(2)}$ —— $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  的接触点的径矢;

$n^{(1)}$ 、 $n^{(2)}$ —— $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  在接触点处的么法矢,它们的正向规定为由实体指向空域,或者由空域指向实体;

$\xi$ —— $\sigma^{(2)}$  的原点  $O^{(2)}$  到  $\sigma^{(1)}$  的原点  $O^{(1)}$  的矢量;

$v^{(2)}$ —— $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  在接触点处的相对速度。

#### 3.3 共轭齿面的形成方法

在生产实践中,用来形成共轭齿面的方法很多,这里只介绍两种最常用的方法。

##### 3.3.1 直接成形法

这种方法的主要原理是,切制一对共轭齿面  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  中的一个齿面,例如  $\Sigma^{(2)}$  时,刀具的刀刃所形成的产形面  $\Sigma_F$  与另一齿面  $\Sigma^{(1)}$  完全一样,并且在加工中,  $\Sigma_F$ 、 $\Sigma^{(2)}$  的相对运动和相对位置与实际工作中  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  的相对运动和相对位置也必须完全一致。这样形成的共轭齿面  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  是线接触的,蜗杆传动就是用这种方法形成的。这种方法的优点是简单,但是需

要配备多套切齿刀具。

### 3.3.2 间接成形法

在这种方法中,应用最广泛的是借助于一个辅助曲面(产形面) $\Sigma_F$ 来形成共轭齿面 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 。它的原理是,给出一个既不同于 $\Sigma^{(1)}$ 也不同于 $\Sigma^{(2)}$ 的辅助曲面 $\Sigma_F$ ,当 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 相对固定坐标系 $\sigma$ 完成所需求的共轭运动 $v_1$ 、 $v_2$ 时, $\Sigma_F$ 也相对 $\sigma$ 以确定的形式运动, $\Sigma_F$ 的一侧在与 $\Sigma^{(1)}$ 相固连的坐标系 $\sigma^{(1)}$ 中形成 $\Sigma^{(1)}$ , $\Sigma_F$ 的另一侧在 $\Sigma^{(2)}$ 相固连的坐标系 $\sigma^{(2)}$ 中形成 $\Sigma^{(2)}$ 。根据前面所述的直线成形法原理, $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 皆与 $\Sigma_F$ 作线接触。令 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma_F$ 的瞬时接触线为 $c_{11}$ , $\Sigma^{(2)}$ 、 $\Sigma_F$ 的瞬时接触线为 $c_{21}$ 。若 $c_{11}$ 与 $c_{21}$ 在每一瞬时都完全重合,那么, $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 则成线接触的共轭齿面。平行轴的渐开线圆柱齿轮传动和等高齿的弧齿锥齿轮传动的齿面就是用这种方法形成的;如果 $c_{11}$ 、 $c_{21}$ 在第一瞬时不重合而相交于一点 $K$ ,则 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 在 $K$ 点相切,彼此成为点接触的共轭齿面,交错轴的螺旋齿轮传动的齿面就是这样形成的;在某些情况下, $c_{11}$ 与 $c_{21}$ 可能交于 $\Sigma_F$ 的工作部分之外,这样, $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 既不能成为线接触也不能成为点接触的共轭齿面。

利用上述的这种间接成形法来切削齿轮副的齿面时,刀具的刀刃在空间形成辅助曲面(产形面) $\Sigma_F$ 的形状, $\Sigma_F$ 的一侧形成 $\Sigma^{(1)}$ ,另一侧形成 $\Sigma^{(2)}$ 。所以,生产中一般要用两把刀具,它们各自形成的产形面必须能互相“贴合”在一起,就像一个样板,另一个是检验样板那样。

### 3.4 共轭齿面的确定、啮合方程式

在生产实践中,经常遇到一种情况是:已知一个构件的齿面 $\Sigma^{(1)}$ 和两构件的相对运动,求与 $\Sigma^{(1)}$ 相共轭的另一构件的齿面 $\Sigma^{(2)}$ 。设 $\Sigma^{(1)}$ 在与之相固连的坐标系 $\sigma^{(1)}$ 中的方程为

$$r^{(1)} = r^{(1)}(u, v) \quad (1.2-121)$$

则所求的 $\Sigma^{(2)}$ 与构件2相固连的坐标 $\sigma^{(2)}$ 中的方程为

$$\left. \begin{aligned} r^{(2)} &= M_{21} r^{(1)} \\ n v^{(12)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-122)$$

式中  $r^{(2)}$  ——  $\Sigma^{(2)}$ 的径矢;

$M_{21}$  ——  $\sigma^{(1)}$ 到 $\sigma^{(2)}$ 的坐标变换矩阵;

$n = n^{(1)}$  ——  $\Sigma^{(1)}$ 的么法矢。

啮合面在固定坐标系 $\sigma$ 中的方程为

$$\left. \begin{aligned} r &= M_{01} r^{(1)} \\ n v^{(12)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-123)$$

式中  $r$  —— 啮合面的径矢;

$M_{01}$  ——  $\sigma^{(1)}$ 到 $\sigma$ 的坐标变换矩阵。

$n v^{(12)}$ 是 $u$ 、 $v$ 以及与 $\Sigma^{(1)}$ 的转角 $\varphi_1$ 有关的时间 $t$ 的纯量函数,通常记为

$$\Phi(u, v, t) = n v^{(12)} \quad (1.2-124)$$

称 $\Phi(u, v, t)$ 为啮合函数,而称

$$\Phi(u, v, t) = n v^{(12)} = 0 \quad (1.2-125)$$

为啮合方程。

在空间啮合中,上式总可化为

$$M_1 \cos \varphi_1 - M_2 \sin \varphi_1 - M_3 = 0 \quad (1.2-126)$$

式中的 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 是与 $\varphi_1$ 无关的系数。

令

$$\frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} = \cos \delta, \quad \frac{M_2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} = \sin \delta,$$

$$\frac{M_3}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} = \cos \theta$$

上式又可化为

$$\cos(\varphi_1 + \delta) = \cos \theta \quad (1.2-127)$$

当

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2} > |M_3| \quad (1.2-128)$$

时, $\varphi_1$ 有两个解,它们是

$$\varphi_1' = \theta - \delta$$

$$\varphi_1'' = -(\theta + \delta)$$

这表明 $\Sigma^{(1)}$ 上满足式(1.2-128)的点,在 $\Sigma^{(1)}$ 转过一周时有两个位置参加接触。我们称这种现象为二次接触。

当  $\sqrt{M_1^2 + M_2^2} = |M_3|$  (1.2-129)

时, $\varphi_1$ 只有一个解,即 $\varphi_1 = -\delta$ 。这表明 $\Sigma^{(1)}$ 上满足式(1.2-129)的点,在 $\Sigma^{(1)}$ 转过一周时,只有一个位置参加接触。

当  $\sqrt{M_1^2 + M_2^2} < |M_3|$  (1.2-130)

时, $\varphi_1$ 无解。 $\Sigma^{(1)}$ 上满足式(1.2-130)的点,在 $\Sigma^{(1)}$ 转过一周时,不参加接触。

### 3.5 共轭齿面上的界限点与界限曲线

#### 3.5.1 第一齿面(刀具齿面) $\Sigma^{(1)}$ 上的界限点与啮合界限曲线

当第一齿面(刀具齿面) $\Sigma^{(1)}$ 与第二齿面(工件齿面) $\Sigma^{(2)}$ 相啮合时,并不是 $\Sigma^{(1)}$ 上所有的点都参与啮合。 $\Sigma^{(1)}$ 上参与啮合与不参与啮合部分的分界线称为 $\Sigma^{(1)}$ 的啮合界限曲线,其上的点称为啮合界限点(又称二类界点)。如前所述, $\Sigma^{(1)}$ 与 $\Sigma^{(2)}$ 啮合时,在 $\Sigma^{(1)}$ 上每一瞬时都有一条接触线 $C_1$ ,于是形成了接触线族 $\{C_1\}$ 。如果这个接触线族有包络线的话,那么这条包络线就是 $\Sigma^{(1)}$ 上的啮合界限曲线,也称二界曲线。这条曲线用下列方程确定:

$$\left. \begin{aligned} r^{(1)} &= r^{(1)}(u, v) \\ \Phi(u, v, t) &= 0 \\ \Phi_t(u, v, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-131)$$

式中  $\Phi_t$  —— 二界函数。

二界函数  $\Phi_t(u, v, t)$  可通过啮合函数  $\Phi = n \cdot v^{(12)}$  对  $t$  求偏导数求得, 也可用下式确定:

$$\Phi_t = n \left[ \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d\xi}{dt} \times (\omega^{(1)} + \omega^{(2)}) + \omega^{(1)} \times (\omega^{(2)} \times \xi) + \xi \times \frac{d\omega^{(2)}}{dt} + \left( \frac{d\omega^{(1)}}{dt} + \omega^{(1)} \times \omega^{(2)} \right) \times r^{(1)} \right] \quad (1.2-132)$$

当  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  绕固定轴以等速转动, 两动坐标系的原点  $O^{(1)}$ 、 $O^{(2)}$  选在其回转轴上时, 上式简化为

$$\Phi_t = n [\omega^{(1)} \times (\omega^{(2)} \times r^{(2)}) - \omega^{(2)} \times (\omega^{(1)} \times r^{(1)})] \quad (1.2-133)$$

式中  $r^{(2)}$  ——  $\Sigma^{(2)}$  的径矢。

若  $\xi = O^{(2)}O^{(1)}$  = 常矢, 则

$$\Phi_t = (\varepsilon^{(1)} r^{(1)} \cdot n) - (\varepsilon^{(2)} r^{(2)} \cdot n) + (\omega^{(2)} v^{(1)} \cdot n) + (v^{(2)} \omega^{(1)} \cdot n) \quad (1.2-134)$$

式中  $\varepsilon^{(1)}$ 、 $\varepsilon^{(2)}$  ——  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  的角加速度矢量;

$$v^{(1)} = \omega^{(1)} \times r^{(1)}$$

可以证明,  $\Phi_t = 0$  与  $\sqrt{M_1^2 + M_2^2} = M_3$  等价。这意味着  $\Sigma^{(1)}$  啮合界限线上的点只参与一次接触, 其一侧满足  $\sqrt{M_1^2 + M_2^2} > |M_3|$  的点参与两次接触, 另一侧满足  $\sqrt{M_1^2 + M_2^2} < |M_3|$  的点不参与接触 (图 1.2-30)。

应该指出的是,  $\Sigma^{(1)}$  上的啮合界限点不是奇点。

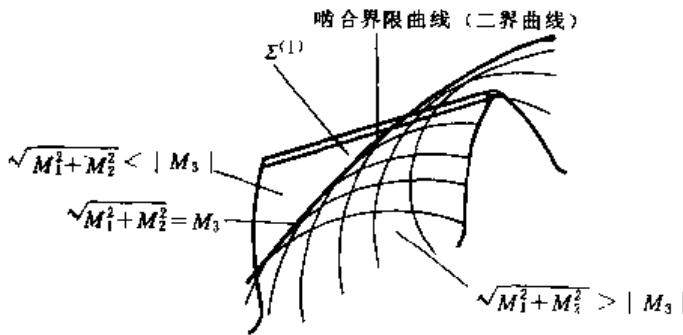


图 1.2-30 瞬时接触线族

### 3.5.2 第二齿面 (工件齿面) $\Sigma^{(2)}$ 上的奇点与一界曲线

用刀具齿面  $\Sigma^{(1)}$  来展成工件齿面  $\Sigma^{(2)}$  时,  $\Sigma^{(2)}$  上将会出现奇点。这些奇点称为一类界点, 它们的集合称为一界曲线。  $\Sigma^{(2)}$  上的奇点用下列方程确定:

$$\left. \begin{aligned} r^{(2)} &= M_{21} r^{(1)} \\ \Phi(u, v, t) &= 0 \\ \phi(u, v, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-135)$$

式中  $\phi(u, v, t)$  —— 一界函数。

一界函数的表达式为

$$\phi(u, v, t) = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} E & F & r_u^{(1)} \cdot v^{(12)} \\ F & G & r_v^{(1)} \cdot v^{(12)} \\ \Phi_u & \Phi_v & \Phi_t \end{vmatrix} \quad (1.2-136)$$

式中  $E, F, G$  ——  $\Sigma^{(1)}$  的第一类基本量;

$\Phi_u, \Phi_v$  ——  $\Phi(u, v, t)$  对  $u, v$  的偏导数;

$r_u^{(1)}, r_v^{(1)}$  —— 径矢  $r(u, v)$  对  $u, v$  的偏导矢;

$$D^2 = EG - F^2$$

此外,  $\phi(u, v, t)$  还可表示为

$$\phi = \lambda(g_1 \cdot v^{(12)}) + \mu(g_2 \cdot v^{(12)}) + \Phi_t \quad (1.2-137)$$

$$\phi = \kappa_{nv}^{(1)} [v^{(12)}]^2 + (v^{(12)} \omega^{(12)} \cdot n) + \Phi_t \quad (1.2-138)$$

$$\phi = A \cdot v^{(12)} + \Phi_t \quad (1.2-139)$$

式中  $g_1, g_2$  ——  $\Sigma^{(1)}$  的两个主方向上的么矢, 它们所

对应的主曲率为  $\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}$ ;

$\kappa_{nv}^{(1)}$  ——  $\Sigma^{(1)}$  沿  $v^{(12)}$  方向的法曲率;

$$\lambda = \kappa_1^{(1)} (g_1 \cdot v^{(12)}) + (g_2 \cdot \omega^{(12)}) \quad (1.2-140)$$

$$\mu = \kappa_2^{(1)} (g_2 \cdot v^{(12)}) - (g_1 \cdot \omega^{(12)}) \quad (1.2-141)$$

$$A = \omega^{(12)} \times n + \kappa_{nv}^{(1)} v^{(12)} + \tau_{sv}^{(1)} n \times v^{(12)} \quad (1.2-142)$$

$\tau_{sv}^{(1)}$  ——  $\Sigma^{(1)}$  沿  $v^{(12)}$  方向的短程挠率。

$\kappa_{nv}^{(1)}, \tau_{sv}^{(1)}$  可通过欧拉公式和贝特朗公式的推广公式求得。

应该特别指出的是, 矢量  $A$  是  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  瞬时接触线法线方向上的一个矢量, 它在后面计算  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  接触点处的诱导法曲率时有着重要作用。

还应说明的是,  $\Sigma^{(2)}$  是  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  的瞬时接触线族  $\{C_t\}$  在坐标系  $\sigma^{(2)}$  (与  $\Sigma^{(2)}$  固连) 中所形成的曲面。在  $\Sigma^{(2)}$  上, 这个接触线族的包络线就是一界曲线。

## 3.6 等距共轭齿面

### 3.6.1 等距齿面

设有两个齿面  $\Sigma$  与  $\Sigma_h$ , 如果  $\Sigma$  上的任意一点  $P$  在  $\Sigma_h$  上都有一点  $P_h$  与之对应, 而且对应点间的连线  $PP_h$  是  $\Sigma, \Sigma_h$  的公法线,  $PP_h$  的长度是一定的, 即  $\Sigma, \Sigma_h$  之间的距离处处相等, 我们就称  $\Sigma$  与  $\Sigma_h$  互为等距齿面。

设  $\Sigma$  的方程式为

$$r = r(u, v)$$

则其等距齿面  $\Sigma_h$  的方程式为 (见图 1.2-31)

$$R = r + hn \quad (1.2-143)$$

式中  $n$  ——  $\Sigma$  的么法矢;

$h$  ——  $\Sigma, \Sigma_h$  对应点间的有向距离,  $h$  变动时, 将得到  $\Sigma$  的一系列等距齿面  $\Sigma_h$ , 故称  $h$  为等距参数。

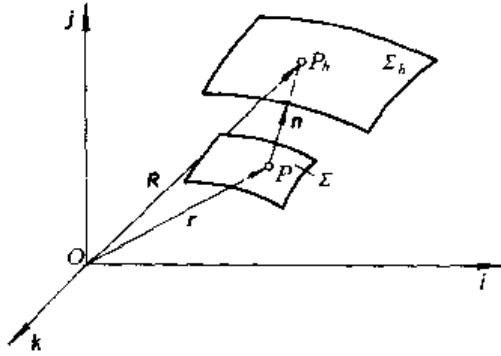


图 1.2-31 等距齿面

$\Sigma, \Sigma_h$  在对应点处有相同的主方向。设  $\Sigma$  上在  $P$  点处的主曲率为  $\kappa = \frac{1}{\rho}$ , 则在  $\Sigma_h$  上的对应点  $P_h$  处的主曲率为

$$\kappa_h = \frac{1}{\rho - h} \quad (1.2-144)$$

### 3.6.2 等距共轭齿面

如图 1.2-32 所示,  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  为一对共轭齿面, 它们所对应的等距齿面  $\Sigma_h^{(1)}, \Sigma_h^{(2)}$  在同样共轭运动条件下也为共轭齿面, 我们称  $\Sigma_h^{(1)}, \Sigma_h^{(2)}$  为  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的等距共轭齿面。随着  $h$  的变动,  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的等距共轭齿面也有无数多对。

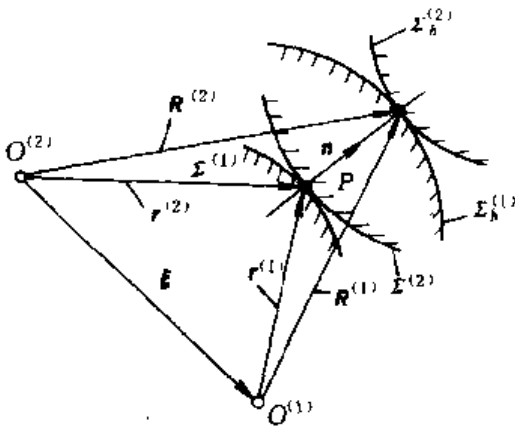


图 1.2-32 等距共轭齿面

等距共轭齿面有相同的二界面函数。令  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的二界面函数为  $\Phi, \Sigma_h^{(1)}, \Sigma_h^{(2)}$  的二界面函数为  $\Phi_h$ , 则

$$\Phi_h = \Phi, \quad (1.2-145)$$

它们的一界面函数有如下关系:

$$\psi_h = \psi + h(\lambda_h + \mu_h) \quad (1.2-146)$$

式中  $\psi_h$  ——  $\Sigma_h^{(1)}, \Sigma_h^{(2)}$  的一界面函数;

$\psi$  ——  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的一界面函数;

$$\lambda_h = \lambda + \frac{h}{\rho_1 - h} \lambda \quad (1.2-147)$$

$$\mu_h = \mu + \frac{h}{\rho_2 - h} \mu \quad (1.2-148)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{\kappa_1^{(1)}} \\ \rho_2 &= \frac{1}{\kappa_2^{(1)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-149)$$

式中  $\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}$  —— 齿面  $\Sigma^{(1)}$  的主曲率。

## 4 共轭齿面的曲率关系

### 4.1 共轭齿面沿任意切线方向的诱导法曲率

#### 4.1.1 诱导法曲率的定义

如图 1.2-33 所示,  $P$  为共轭齿面  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  瞬时接触线上之任意点。在  $P$  点, 沿任意切线方向  $\alpha$ ,  $\Sigma^{(1)}$  的法曲率为  $\kappa_n^{(1)}$ ,  $\Sigma^{(2)}$  的法曲率为  $\kappa_n^{(2)}$ , 则称

$$\kappa_n^{(12)} = \kappa_n^{(1)} - \kappa_n^{(2)} \quad (1.2-150)$$

为  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  沿  $\alpha$  方向的诱导法曲率。它是描述该两曲面在  $P$  点接触时沿这个方向“贴近”程度的一个几何量。 $|\kappa_n^{(12)}|$  越小, 两曲面沿这个方向就越“贴近”。在一般情况下, 在  $P$  点在各个方向的诱导法曲率是不同的, 沿接触线  $C_t$  方向,  $\kappa_n^{(12)} = 0$ 。

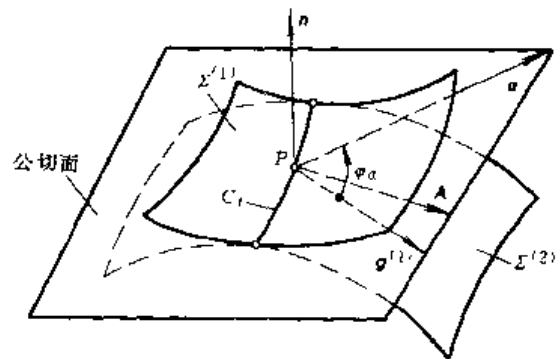


图 1.2-33

#### 4.1.2 诱导法曲率的计算公式

共轭齿面  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  沿在任意切线方向  $\alpha$  (公切矢) 的诱导法曲率可由下列的任一公式求出:

$$\kappa_n^{(12)} = \frac{(\alpha A)^2}{\psi} \quad (1.2-151)$$

$$\kappa_n^{(12)} = \frac{\left( \Phi_t \frac{dt}{ds} \right)^2}{\psi} \quad (1.2-152)$$

$$\kappa_n^{(12)} = \frac{(\lambda \cos \varphi_\alpha + \mu \sin \varphi_\alpha)^2}{\psi} \quad (1.2-153)$$

式中  $\varphi_\alpha$  —— 齿面  $\Sigma^{(1)}$  的第一个主方向  $g_1$  到  $\alpha$  的有向角;

$ds$  ——  $\Sigma^{(1)}$  上沿  $\alpha$  方向曲线弧长  $s$  的微分。

上面几种形式的诱导法曲率计算公式各有其特点, 可以根据具体情况加以选用, 在一般情况下用式

(1.2-151),但在齿面  $\Sigma^{(1)}$  的主方向与主曲率容易获得的情况下,用式(1.2-153)尤为方便。

#### 4.2 沿接触线法线方向的诱导法曲率

在分析两个作线接触的一对共轭齿面的啮合质量时,往往要计算沿接触线法线方向的诱导法曲率  $\kappa_n^{(12)}$ ,因为在各个方向的诱导法曲率中,它的绝对值最大。 $\kappa_n^{(12)}$  的计算公式有如下几种形式:

$$\kappa_n^{(12)} = \frac{A^2}{\psi} \quad (1.2-154)$$

$$\kappa_n^{(12)} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\psi} \quad (1.2-155)$$

$$\kappa_n^{(12)} = \frac{1}{\psi D^2} (E\Phi_v^2 - 2F\Phi_v\Phi_\psi + G\Phi_\psi^2) \quad (1.2-156)$$

在一般情况下,用式(1.2-154)。若  $\Sigma^{(1)}$  的主方向与主曲率易知,则用式(1.2-155)比较方便;如果  $\Sigma^{(1)}$  的第一类基本量易求,用式(1.2-156)亦宜。

#### 4.3 沿相对速度 $v^{(12)}$ 方向的诱导法曲率

令

$$\alpha = v = \frac{v^{(12)}}{|v^{(12)}|}$$

将上式及  $A, \psi$  的相应表达式代入式(1.2-151),就可求得沿相对速度  $v^{(12)}$  方向的诱导法曲率

$$\kappa_{mv}^{(12)} = \frac{[(\omega^{(12)} n v + |v^{(12)}| \kappa_m^{(1)})^2]}{\kappa_m^{(1)} [v^{(12)}]^2 + (\omega^{(12)} n v^{(12)}) + \Phi} \quad (1.2-157)$$

#### 4.4 诱导短程挠率

设共轭齿面  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  在接触点  $P$  沿任意切线方向  $\alpha$  的短程挠率分别为  $\tau_\alpha^{(1)}, \tau_\alpha^{(2)}$ , 则称

$$\tau_\alpha^{(12)} = \tau_\alpha^{(1)} - \tau_\alpha^{(2)}$$

为其沿  $\alpha$  方向的诱导短程挠率。它的计算公式为

$$\begin{aligned} \tau_\alpha^{(12)} &= \frac{1}{2} \frac{d\kappa_n^{(12)}}{d\varphi_\alpha} \\ &= \frac{1}{\psi} (\lambda \cos \varphi_\alpha + \mu \sin \varphi_\alpha) (-\lambda \sin \varphi_\alpha + \mu \cos \varphi_\alpha) \end{aligned} \quad (1.2-158)$$

#### 4.5 共轭齿面的曲率干涉

如果我们规定  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  在接触点  $P$  处的公共法矢  $n$  的方向由  $\Sigma^{(1)}$  的实体指向空域,则它们的诱导法曲率  $\kappa_n^{(12)}$  必须是负值,才能保证它们正确啮合,不产生曲率干涉;假若规定  $n$  由空域指向  $\Sigma^{(1)}$  的实体,则它们的法曲率  $\kappa_n^{(12)}$  必须是正值,才不会产生曲率干涉。为了说明这一点,请参看图 1.2-34。该图所示的是共轭齿面  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  在接触点  $P$  处的某个法截面的形状,

并规定  $n$  由  $\Sigma^{(1)}$  的实体指向空域,它可能有以下几种情况:

图 1.2-34a 中,  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的凹向相反,实体不会产生曲率干涉。因为沿  $n$  方向,  $\kappa_n^{(1)}$  为负,  $\kappa_n^{(2)}$  为正,故  $\kappa_n^{(12)}$  为负。反之,如像图 1.2-34b 所示那样,  $\kappa_n^{(1)}$  为正,  $\kappa_n^{(2)}$  为负,  $\kappa_n^{(12)}$  为正,  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的实体将会产生曲率干涉。图 1.2-34c 中,两齿面的凹向相同,  $\kappa_n^{(1)}, \kappa_n^{(2)}$  均为负值,若  $\kappa_n^{(12)}$  为负,即  $|\kappa_n^{(1)}| > |\kappa_n^{(2)}|$ ,不会产生曲率干涉;反之  $\kappa_n^{(12)}$  为正,即  $|\kappa_n^{(1)}| < |\kappa_n^{(2)}|$ ,将会发生曲率干涉。在图 1.2-34d 中,  $\kappa_n^{(1)}$  与  $\kappa_n^{(2)}$  均为正值。若  $\kappa_n^{(12)}$  为负,表明  $\kappa_n^{(1)} < \kappa_n^{(2)}$ ,  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  不会发生曲率干涉;反之  $\kappa_n^{(12)}$  为正,即  $\kappa_n^{(1)} > \kappa_n^{(2)}$ ,两者将会产生曲率干涉。

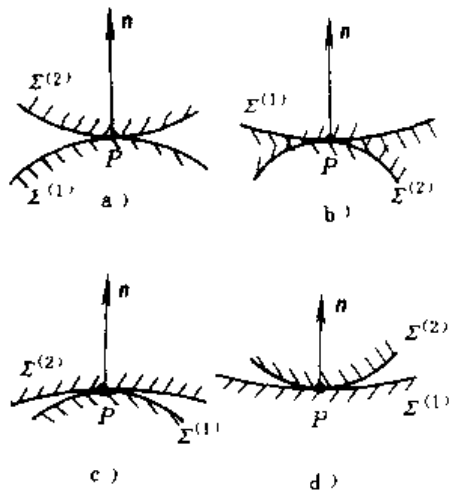


图 1.2-34 共轭齿面的曲率干涉

空间啮合理论的应用实例请参看第六篇平面二次包络环面蜗杆传动部分。

## 5 双自由度啮合的基本原理

双自由度共轭曲面的啮合问题是典型的点接触啮合,近年来在锥齿轮及圆柱齿轮的滚切加工,机器人 Trallfa 柔性手腕的球面传动等方面得到了应用。

### 5.1 双自由度共轭曲面问题的一般形式

首先建立三个坐标系:固定的基础标架  $\sigma = [O; e_1, e_2, e_3]$ ,同第一曲面  $\Sigma^{(1)}$  固连的动标架  $\sigma_1 = [O_1; e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}]$ ,同第二曲面  $\Sigma^{(2)}$  固连的动标架  $\sigma_2 = [O_2; e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(2)}]$ ,双自由度共轭曲面问题可表达为:设给定曲面  $\Sigma^{(1)}$  的方程为

$$r^{(1)} = \sum X_i^{(1)}(u, v) e_i^{(1)} \quad (1.2-159)$$

则与  $\Sigma^{(1)}$  共轭的曲面  $\Sigma^{(2)}$  可表示为

$$r^{(2)} = \xi + r^{(1)} \quad (1.2-160)$$



式中

$$\xi = \overline{O_2 O_1} = \sum \xi_i(s, t) e_i^{(2)} \quad (1.2-161)$$

$$e_i^{(1)} = \sum a_{ij}(s, t) e_j^{(2)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.2-162)$$

$u, v$ —— $\sum^{(1)}$  的曲面参数坐标;

$s, t$ ——两独立的运动参数。

运动参数  $s, t$  一般与时间变量  $T$  有关, 它们可分别表示为

$$\begin{cases} s = s(T) \\ t = t(T) \end{cases} \quad (1.2-163)$$

显然, 其共轭曲面  $\sum^{(2)}$  的一般形式为

$$r^{(2)} = r^{(2)}(u, v, s, t) \quad (1.2-164)$$

### 5.2 双自由度共轭曲面的相对运动

分别考察  $\sum^{(1)}$  上与  $a_i (i=1, 2)$  固连的点  $P$  的运动, 显然

$$\rho = \xi_i + r^{(i)} \quad (i=1, 2) \quad (1.2-165)$$

其中

$$\xi_i = \overline{O O_i} = \xi_i(s, t) \quad (i=1, 2) \quad (1.2-166)$$

微分式(1.2-165), 并记

$$v^{(i)} = \frac{d\rho}{dT} = \frac{d\xi_i}{dT} + \frac{dr^{(i)}}{dT} \quad (i=1, 2) \quad (1.2-167)$$

显然

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial s} ds + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} dt \quad (i=1, 2) \quad (1.2-168)$$

$$dr^{(i)} = \sum_j X_j^{(i)} de_j^{(i)} \quad (i=1, 2) \quad (1.2-169)$$

$$de_j^{(i)} = \frac{\partial}{\partial s} e_j^{(i)} ds + \frac{\partial}{\partial t} e_j^{(i)} dt \quad (i=1, 2; j=1, 2, 3) \quad (1.2-170)$$

令

$$\omega^{(i)} dT = \omega^{(i,s)} ds + \omega^{(i,t)} dt \quad (i=1, 2) \quad (1.2-171)$$

或

$$\omega^{(i)} = \sum_j \omega_j^{(i)} e_j^{(i)} \quad (i=1, 2) \quad (1.2-172)$$

$$\omega_j^{(i)} = \omega_j^{(i,s)} \frac{ds}{dT} + \omega_j^{(i,t)} \frac{dt}{dT} \quad (i=1, 2; j=1, 2, 3) \quad (1.2-173)$$

其中

$$\begin{cases} \omega_1^{(1,s)} = \frac{\partial e_2^{(1)}}{\partial s} e_3^{(1)}, \omega_1^{(1,t)} = \frac{\partial e_2^{(1)}}{\partial t} e_3^{(1)} \\ \omega_2^{(1,s)} = \frac{\partial e_3^{(1)}}{\partial s} e_1^{(1)}, \omega_2^{(1,t)} = \frac{\partial e_3^{(1)}}{\partial t} e_1^{(1)} \\ \omega_3^{(1,s)} = \frac{\partial e_1^{(1)}}{\partial s} e_2^{(1)}, \omega_3^{(1,t)} = \frac{\partial e_1^{(1)}}{\partial t} e_2^{(1)} \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad (1.2-174)$$

则式(1.2-169)变为

$$dr^{(i)} = (\omega^{(i)} \times r^{(i)}) dT \quad (1.2-175)$$

在  $\sum^{(1)}, \sum^{(2)}$  的共轭接触点  $P$ , 相对速度可表示为

$$v^{(12)} dT = d\xi + (\omega^{(12)} \times r^{(1)} - \omega^{(2)} \times \xi) dT \quad (1.2-176)$$

式中

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial s} ds + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt \quad (1.2-177)$$

$$\omega^{(12)} = \omega^{(1)} - \omega^{(2)} \quad (1.2-178)$$

如令

$$\omega^{(12,k)} = \omega^{(1,k)} - \omega^{(2,k)} \quad (k=s, t) \quad (1.2-179)$$

$$v^{(12,k)} = \frac{\partial \xi}{\partial k} + (\omega^{(12,k)} \times r^{(1)} - \omega^{(2,k)} \times \xi) \quad (k=s, t) \quad (1.2-180)$$

则

$$\omega^{(12)} = \omega^{(12,s)} \frac{ds}{dT} + \omega^{(12,t)} \frac{dt}{dT} \quad (1.2-181)$$

$$v^{(12)} = v^{(12,s)} \frac{ds}{dT} + v^{(12,t)} \frac{dt}{dT} \quad (1.2-182)$$

另一方面, 当  $P$  点不与  $a_i (i=1, 2)$  固定时

$$r^{(1)} = \sum_i x_i^{(1)}(u, v, s, t) e_i^{(1)} \quad (1.2-183)$$

$$d_1 r^{(1)} = \frac{\partial_1 r^{(1)}}{\partial s} ds + \frac{\partial_1 r^{(1)}}{\partial t} dt \quad (1.2-184)$$

$$dr^{(1)} = \omega^{(1)} \times r^{(1)} dT + d_1 r^{(1)} \quad (1.2-185)$$

同样, 对  $r^{(2)}$  有

$$dr^{(2)} = \omega^{(2)} \times r^{(2)} dT + d_2 r^{(2)} \quad (1.2-186)$$

从而有

$$\frac{dr}{dT} = v^{(i)} + \omega^{(i)} \times r^{(i)} + \frac{d_1 r^{(i)}}{dT} \quad (i=1, 2) \quad (1.2-187)$$

$$d_2 r^{(2)} - d_1 r^{(1)} = v^{(12)} dT \quad (1.2-188)$$

在更为普遍的情况下, 如

$$m = m(s, t) = \sum_i m_i^{(1)}(s, t) e_i^{(1)} \quad (1.2-189)$$

则

$$d_2 m - d_1 m = (\omega^{(12)} \times m) dT \quad (1.2-190)$$

由上面的推导可见, 引入式(1.2-171)~式(1.2-174)及式(1.2-179)、式(1.2-180)后, 双参数下的相对微分公式同单参数的形式完全相同。这样的处理使得分析双参数的啮合时可以大量借用单参数的有关公式, 而且易于推广到多参数的情况下。

### 5.3 啮合方程

两共轭曲面啮合时必然有

$$n \cdot v^{(12)} = 0 \quad (1.2-191)$$

式中  $n$  为接触点的公共公法矢。由式(1.2-182), 并

考虑到  $ds, dt$  的任意性, 有

$$\begin{cases} \Phi_1 = n \cdot v^{(12,s)} = 0 \\ \Phi_2 = n \cdot v^{(12,t)} = 0 \end{cases} \quad (1.2-192)$$

由此得  $\Sigma^{(2)}$  的曲面方程

$$\begin{cases} r^{(2)} = r^{(2)}(u, v, s, t) \\ \Phi_1 = \Phi_1(u, v, s, t) = 0 \\ \Phi_2 = \Phi_2(u, v, s, t) = 0 \end{cases} \quad (1.2-193)$$

可以看出, 推出啮合方程(1.2-192)的条件是  $ds, dt$  的独立性。这一条件在一般的机床传动链均不能实现, 加工出的齿面也不是理论上的双自由度共轭曲面。在实践中, 为了切削出理论上的双自由度共轭曲面, 需用多次切削的方法加工。

另一方面, 因实际使用的齿面并不是方程(1.2-193)描述的整个曲面, 在对使用有利的一个局部范围内, 可用选取  $s, t$  的适当函数关系的方法, 加工出满足一定要求的齿面形状来。这种方法可以应用在现今十分活跃的齿面可控曲率修正中。

还可以看出, 给定  $s, t$  后啮合方程(1.2-192)仅能求出有限对满足方程的  $u, v$  值, 一般说来仅有一组数值是正确的, 可见双参数啮合时必然是点接触的。

#### 5.4 界点与界函数

##### 5.4.1 一类界点

曲面  $\Sigma^{(1)}$  包络  $\Sigma^{(2)}$  时,  $\Sigma^{(2)}$  上可能出现的奇异点是共轭曲面的一类界点。因  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  为点接触, 认定  $s, t$  为  $\Sigma^{(2)}$  的参数坐标, 则  $\Sigma^{(2)}$  的法矢  $N^{(2)}$  可表示为

$$N^{(2)} = (r_s^{(2)} + u_s r_u^{(2)} + v_s r_v^{(2)}) \times (r_t^{(2)} + u_t r_u^{(2)} + v_t r_v^{(2)}) \quad (1.2-194)$$

记

$$r_k^{(2)} = \frac{\partial r^{(2)}}{\partial k} = \frac{\partial r^{(1)}}{\partial k} = r_k^{(1)} \quad (k = u, v) \quad (1.2-195)$$

$$v^{(12,k)} = r_k^{(2)} \quad (k = s, t) \quad (1.2-196)$$

$$\begin{cases} \xi^{(k)} = -(r_v^{(1)} \cdot v^{(12,k)}, n) / |N^{(1)}| \\ \eta^{(k)} = (r_u^{(1)} \cdot v^{(12,k)}, n) / |N^{(1)}| \end{cases} \quad (k = s, t) \quad (1.2-197)$$

则

$$v^{(12,k)} = \xi^{(k)} r_u^{(1)} + \eta^{(k)} r_v^{(1)} \quad (k = s, t) \quad (1.2-198)$$

记

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \Phi_{1i} & \Phi_{1j} \\ \Phi_{2i} & \Phi_{2j} \end{vmatrix} \quad (i, j = u, v, s, t) \quad (1.2-199)$$

$$\psi = [(\xi^{(s)} \Delta_{uv} - \Delta_{sv})(\eta^{(t)} \Delta_{uv} - \Delta_{ut}) - (\xi^{(t)} \Delta_{uv} - \Delta_{tv})(\eta^{(s)} \Delta_{uv} - \Delta_{us})] / \Delta_{uv} \quad (1.2-200)$$

假定  $\Delta_{uv} \neq 0$ , 微分啮合方程, 可解出

$$\begin{cases} u_k = -\Delta_{kv} / \Delta_{uv} \\ u_k = -\Delta_{uk} / \Delta_{uv} \end{cases} \quad (k = s, t) \quad (1.2-201)$$

$$N^{(2)} = \psi N^{(1)} / \Delta_{uv} \quad (1.2-202)$$

可见  $\Sigma^{(2)}$  上奇异点的条件为

$$\psi = 0$$

##### 5.4.2 二类界点

反过来, 以  $\Sigma^{(2)}$  包络  $\Sigma^{(1)}$  时可能产生的奇异点确定了  $\Sigma^{(1)}$  上一条边界线, 其上的点为二类界点。同样, 认定  $s, t$  为齿面参数坐标, 考虑曲面

$$\begin{cases} r^{(1)} = r^{(1)}(u, v) \\ \Phi_1(u, v, s, t) = 0 \\ \Phi_2(u, v, s, t) = 0 \end{cases} \quad (1.2-203)$$

对  $s, t$  求偏导数有

$$\begin{aligned} r_s^{(1)} &= r_u^{(1)} + r_v^{(1)} v_s \\ r_t^{(1)} &= r_u^{(1)} + r_v^{(1)} v_t \end{aligned} \quad (1.2-204)$$

法矢为

$$N^{(1)} = r_s^{(1)} \times r_t^{(1)} = (u_s v_t - u_t v_s) N^{(1)} \quad (1.2-205)$$

可见  $N^{(1)} = 0$  的条件为

$$\Theta / \Delta_{uv} = u_s v_t - u_t v_s = 0 \quad (1.2-206)$$

化简后得二界函数为

$$\Theta = \Phi_{1s} \Phi_{2t} - \Phi_{1t} \Phi_{2s} = \Delta_{st} \quad (1.2-207)$$

##### 5.5 接触的退化

前已指出, 一般情况下双参数共轭曲面是点接触的, 因啮合方程仅确定了唯一的一组  $u, v$ 。其退化情况是, 如  $v^{(12,s)} = k v^{(12,t)}$  ( $k$  为常数, 则上述两个方程仅有一个是独立的, 接触变成线接触, 从而得接触退化条件

$$v^{(12,s)} = k v^{(12,t)} \quad (1.2-208)$$

利用式(1.2-197), 上述条件变为

$$\xi^{(s)} / \eta^{(s)} = \xi^{(t)} / \eta^{(t)} \quad (1.2-209)$$

即

$$\frac{(r_u^{(1)} \cdot v^{(12,s)}, n)}{(r_v^{(1)} \cdot v^{(12,s)}, n)} = \frac{(r_u^{(1)} \cdot v^{(12,t)}, n)}{(r_v^{(1)} \cdot v^{(12,t)}, n)} \quad (1.2-210)$$

##### 5.6 诱导曲率计算

共轭曲面啮合时诱导法曲率是表征啮合具有的一重要参数。诱导法曲率  $\kappa_n^{(12)}$  可表示为两曲面法曲率之差, 即

$$\kappa_n^{(12)} = \kappa_n^{(1)} - \kappa_n^{(2)} \quad (1.2-211)$$

取啮合点处一公共公切矢  $\alpha$

$$\frac{dr^{(1)}}{ds^{(1)}} = \frac{\partial r^{(2)}}{\partial s^{(2)}} = \alpha \quad (1.2-212)$$

则

$$\frac{\partial_2 n}{\partial s^{(2)}} = \frac{\partial_1 n}{\partial s^{(2)}} + (\omega^{(12)} \times n) \frac{\partial T}{\partial s^{(2)}} \quad (1.2-213)$$

可导出

$$\kappa_n^{(12)} = \frac{1}{\psi} \left[ \Omega_1 \left( \frac{ds}{ds^{(1)}} \right)^2 + \Omega_2 \frac{ds}{ds^{(1)}} \frac{dt}{ds^{(1)}} + \Omega_3 \left( \frac{dt}{ds^{(1)}} \right)^2 \right] \quad (1.2-214)$$

式中

$$\begin{cases} \Omega_1 = \Phi_{1s}(\Delta_u + \Delta_u \xi^{(1)} + \Delta_u \eta^{(1)}) + \Phi_{2t}(\Delta_u \xi^{(1)} + \Delta_u \eta^{(1)}) \\ \Omega_2 = \Phi_{1t}(\Delta_u \xi^{(1)} + \Delta_u \eta^{(1)}) + \Phi_{1s}(\Delta_u + \Delta_u \xi^{(1)} + \Delta_u \eta^{(1)}) \\ \quad - \Phi_{2t}(\Delta_u + \Delta_u \xi^{(1)} + \Delta_u \eta^{(1)}) + \Phi_{2s}(\Delta_u \xi^{(1)} + \Delta_u \eta^{(1)}) \\ \Omega_3 = \Phi_{1t}(\Delta_u \xi^{(1)} + \Delta_u \eta^{(1)}) + \Phi_{2s}(\Delta_u + \Delta_u \xi^{(1)} + \Delta_u \eta^{(1)}) \end{cases} \quad (1.2-215)$$

设  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的公共切矢  $\alpha$  与  $\Sigma^{(1)}$  上第一主方向  $g_1$  的夹角为  $\varphi$ , 则由微分几何知

$$\alpha = \cos\varphi g_1 + \sin\varphi g_2 \quad (1.2-216)$$

$$\frac{d_1 n}{ds^{(1)}} = -(\kappa_1^{(1)} \cos\varphi g_1 + \kappa_2^{(1)} \sin\varphi g_2) \quad (1.2-217)$$

其中  $\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}$  为  $\Sigma^{(1)}$  的两主曲率

引入参数  $\lambda, \mu, (i=1, 2)$ , 定义如下:

$$\lambda_i = \kappa_i^{(1)} (\nu^{(12,j)} g_1) + (\omega^{(12,j)} g_2) \quad \begin{cases} i=1, 2 \\ j=s, t \end{cases} \quad (1.2-218)$$

$$\mu_i = \kappa_i^{(1)} (\nu^{(12,j)} g_2) - (\omega^{(12,j)} g_1)$$

得确定  $\frac{ds}{ds^{(1)}}, \frac{dt}{ds^{(1)}}$  的方程组

$$\begin{cases} \Phi_{1s} \frac{ds}{ds^{(1)}} + \Phi_{1t} \frac{dt}{ds^{(1)}} = \lambda_1 \cos\varphi + \mu_1 \sin\varphi \\ \Phi_{2s} \frac{ds}{ds^{(1)}} - \Phi_{2t} \frac{dt}{ds^{(1)}} = \lambda_2 \cos\varphi + \mu_2 \sin\varphi \end{cases} \quad (1.2-219)$$

解出

$$\begin{cases} \frac{ds}{ds^{(1)}} = \bar{\lambda}_1 \cos\varphi + \bar{\mu}_1 \sin\varphi \\ \frac{dt}{ds^{(1)}} = \bar{\lambda}_2 \cos\varphi + \bar{\mu}_2 \sin\varphi \end{cases} \quad (1.2-220)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = (\Phi_{2t} \lambda_1 - \Phi_{1t} \lambda_2) / \Delta_u \\ \bar{\mu}_1 = (\Phi_{2t} \mu_1 - \Phi_{1t} \mu_2) / \Delta_u \\ \bar{\lambda}_2 = (\Phi_{1s} \lambda_1 - \Phi_{2s} \lambda_2) / \Delta_u \\ \bar{\mu}_2 = (\Phi_{1s} \mu_2 - \Phi_{2s} \mu_1) / \Delta_u \end{cases} \quad (1.2-221)$$

由此得双自由度共轭曲面的诱导法曲率计算公式

$$\kappa_n^{(12)} = \frac{1}{\psi} \left[ \Omega_1 (\bar{\lambda}_1 \cos\varphi + \bar{\mu}_1 \sin\varphi)^2 + \Omega_2 (\bar{\lambda}_1 \cos\varphi + \bar{\mu}_2 \sin\varphi) (\bar{\lambda}_2 \cos\varphi + \bar{\mu}_2 \sin\varphi) + \Omega_3 (\bar{\lambda}_2 \cos\varphi - \bar{\mu}_2 \sin\varphi)^2 \right] \quad (1.2-222)$$

### 5.7 诱导短程挠率

共轭曲面的诱导短程挠率  $\tau_g^{(12)}$  可定义为

$$\tau_g^{(12)} = \frac{d}{d\varphi} \kappa_n^{(12)} \quad (1.2-223)$$

计算公式为

$$\tau_g^{(12)} = \frac{1}{\psi} \{ (-\bar{\lambda}_1 \sin\varphi + \bar{\mu}_1 \cos\varphi) [2\Omega_1 (\bar{\lambda}_1 \cos\varphi + \bar{\mu}_1 \sin\varphi) + \Omega_2 (\bar{\lambda}_2 \cos\varphi + \bar{\mu}_2 \sin\varphi)] + (-\bar{\lambda}_2 \sin\varphi + \bar{\mu}_2 \cos\varphi) [\Omega_2 (\bar{\lambda}_1 \cos\varphi + \bar{\mu}_1 \sin\varphi) + 2\Omega_3 (\bar{\lambda}_2 \cos\varphi - \bar{\mu}_2 \sin\varphi)] \} \quad (1.2-224)$$

## 参 考 文 献

- 1 机械工程手册电机工程手册编辑委员会编. 机械工程手册;第6卷第2篇齿轮传动. 第2版. 北京:机械工业出版社,1997
- 2 Drale. W. Dudley. Hand Book of Practical Gear Design, 1984
- 3 吴大任. 微分几何讲义. 北京:人民教育出版社,1979
- 4 吴大任等. 齿轮啮合原理. 北京:科学出版社,1985
- 5 李特文 Ф. И. 著. 齿轮啮合原理. 卢贤占等译. 上海:上海科学技术出版社,1984
- 6 吴序堂. 齿轮啮合原理. 北京:机械工业出版社,1982
- 7 陈志新. 共轭曲面原理(上). 北京:科学出版社,1974
- 8 萨本信. 高速齿轮传动设计. 北京:机械工业出版社,1986