

• 高等学校教学用书 •

金属压力加工 理论基础

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU



冶金工业出版社

高等学校教学用书

金属压力加工理论基础

[苏] Г.Я.古恩 著

赵志业 王国栋 译

孙文俊 校

标准分享网
www.bzfxw.com
免费专业丰富

冶金工业出版社

高等学校教学用书
金属压力加工理论基础
〔苏〕Г.Я.古恩 著
赵志业 王国栋 译
孙文俊 校

冶金工业出版社出版
(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)
新华书店总店科技发行所发行
山西新华印刷厂排版
冶金工业出版社印刷厂印刷

850×1168 1/32 印张 $17\frac{1}{2}$ 字数462千字

1989年11月第一版 1989年11月第一次印刷

印数00,001~2,180册

ISBN 7-5024-0164-4

TG·21 (课) 定价4.10元

译校者的话

本书系根据莫斯科钢与合金学院 А.Я.占恩教授所著《Теоретические основы обработки металлов давлением》一书翻译，原书由苏联冶金工业出版社于1980年出版。

这是一部论述金属压力加工基础理论的专著。它主要以能量守恒和转换定律为基础，以解决各种压力加工问题为主线，利用现代数学力学方法详尽地介绍了金属压力加工问题的各种求解方法，例如滑移线法、能量法、变分法、差分法、复变函数法等等。其中第一篇以张量分析为主要工具，给出了应力、应变、应变速率等的基本概念及变形物理方程——塑性条件和本构关系。第二篇运用数学物理方法的基本理论介绍了求解压力加工各种边值问题的基本原理。第三篇针对实际材料特性和具体变形过程给出了各种确定应力及应变分布的解析方法和数值方法，其中还特别考虑了温度场的影响。

本书体现了数学力学的特色，它广泛地应用数学理论来阐述基本概念和求解问题。本书较为注重理论的应用，在论述各种求解方法的过程中不仅讲述了基本原理，而且给出了大量的例题和思考题，并在最末一章介绍了应用本书所述各种方法进行二维和三维金属成形过程的电子计算机模拟的要点。

本书适于高等学校金属压力加工专业学生、研究生、教师以及工厂和科研机关从事金属压力加工专业的工程技术人员参考。

书中绪论、第二篇、第三篇由赵志业翻译；第一篇由王国栋翻译，全书由孙文俊校订。

限于水平，在译校过程中难免有错误和不当之处，请读者批评指正。

原版前言

本书是作为金属压力加工专业大学生的教科书而写作的。它是以作者从1965年起在莫斯科钢与合金学院讲授《连续介质力学》教程的讲稿为基础的。

目前不论是苏联国内还是国外，都有许多关于连续介质力学和塑性理论方面的书籍，很自然，它们将影响我们教程的结构。

书的内容稍微超出了金属压力加工专业《塑性理论》教学大纲的范围。其补充材料是为自学或选修用的，它们用星号标出。

正文中详细地解答了大量的习题和例题。此外，在每一节的末尾列有思考题。

书中的材料是对已具有高等数学水平的学生叙述的。在必要的情况下简短地叙述了补充材料。为便于深入钻研，每章末尾列举了推荐的参考文献目录。

哈萨克苏维埃社会主义共和国科学院院士П.И.波鲁欣(Полухин)为审校本书花费了巨大劳动，苏联科学院通讯院士А.А.依留申(Ильюшин)承担了通读原稿的工作，提出了许多宝贵的意见，А.А.波兹捷耶夫(Поздеев)教授和В.Л.科尔莫哥洛夫(Колмогоров)教授参加了原稿提纲及其各部分内容的讨论，Г.А.斯米尔诺夫-阿列耶夫(Смирнов-Аляев)教授、列宁格勒机械学院金属压力加工教研室的同事们和А.К.格里高利耶夫(Григорьев)教授在评论原稿时都提出了宝贵的意见和建议，Л.И.坎塔米洛娃(Кантамирова)、Л.П.茹尔柯娃(Журкова)协助准备付印手稿，作者对他们深表谢意。

绪 论

金属压力加工是以金属与合金的塑性变形能力为基础的，也就是以外力作用下物体形状和尺寸不可逆变化的能力为基础的。它属于最普遍和最有效的金属加工方法。象轧制、挤压、拉拔、锻造和冲压这样的过程都具有高生产率和经济性的特点，并且都容易实现机械化和自动化。塑性变形也成功地用于改善金属表面质量——减小粗糙度、强化表面层、使残余应力按要求分布（平整过程、利用小球和辊子滚压等）。

金属压力加工原理是工艺过程设计的科学基础。这个实用的工程规律，应当按一定的指标来保证工艺过程的最优化，这些指标就是机组的生产率、产品的成本或质量，使产品获得规定形状和尺寸的可能性以及加工特殊材料的可能性等等。

一些杰出的苏联学者的著作为金属压力加工的现代理论打下了基础，这些学者是А. А. 依留申 (Ильющин)、С. И. 古布金 (Губкин)、Г. А. 斯米尔诺夫-阿列耶夫 (Смирнов-Аляев)、А. Ф. 哥洛文 (Головин)、А. И. 采里科夫 (Целиков)、И. М. 巴甫洛夫 (Павлов)、П. И. 波鲁欣 (Полухин)、Е. П. 温科索夫 (Унксов)、К. Н. 谢夫钦科 (Шевченко)、И. Я. 塔尔诺夫斯基 (Тарновский)、В. С. 斯米尔诺夫 (Смирнов)、А. П. 契克马廖夫 (Чекмарев)、А. В. 克鲁宾 (Крупин)、И. Л. 佩尔林 (Перлин)、В. Н. 魏得林 (Выдрин)、Н. Н. 马里宁 (Малинин)、Е. В. 波波夫 (Попов)。还应指出Н. 汉基 (Hencky)、R. 希尔 (Hill)、T. 卡曼 (Karman)、W. 约翰逊 (Johnson)、W. 普拉格 (Prager) 等学者的重大贡献。

关于求解金属压力加工问题的理论方法，在一些苏联学者的著作中已有了很大的发展，这些学者是А. А. 波兹捷耶夫 (Поздеев)、В. Л. 科尔莫哥洛夫 (Колмогоров)、А. К. 格里高利耶

夫 (Григорьев)、В.М.谢格勒 (Сегал)、Л.Г.斯捷潘斯基 (Степанский) 和另外一些研究者。

解决工艺过程最优化的问题, 现在已不能局限于用总结生产经验所建立的各种半经验方法。因此, 金属压力加工理论的发展方向, 就是建立考虑多因素影响的、足够精确的定量描述工艺过程的方法。也就是工艺过程的数学模拟和最优化。

依靠连续介质力学、金属物理和化学所取得的成就, 金属压力加工理论正向如下三个主要方面, 即力学-数学、物理学和物理-化学方面发展。

其中的第一方面, 通常不是研究金属与合金塑性变形时所发生的微观过程的任何具体模型和机制, 而是根据宏观试样的加载试验来确定连续介质, 即实际金属的抽象模型的具体流变性质。这种方法称为唯象法。结果, 工件塑性变形过程的研究可归结为解析数学物理的某一边值问题, 即归结为研究应力和应变的分布、温度场和断裂条件。应用分布参数系统控制理论方法, 能够在金属压力加工过程的某个方面 (例如, 按生产率、几何精度和表面质量等) 提出优化的任务。

在物理学方面, 是研究单晶体和多晶体的塑性变形机制。研究完善晶格的结构和实际晶体所固有的各种缺陷。对位错即晶格线缺陷的研究应予以特别注意, 这种线缺陷的形成和运动与金属的塑性变形和断裂有密切的联系。

最后, 在物理-化学方面, 是建立物质的化学成分和相态与其塑性的关系。

看来, 当金属压力加工理论发展到一定水平时, 这些方面会完全融合为一体, 从而将保证用一个统一的方法来描写物体塑性变形所伴随的复杂的综合现象。此时就会发生关于材料力学行为微观和宏观概念上的结合, 也就是将会建立固体宏观力学性能 (例如屈服极限、瞬时强度和有限尺寸试样的塑性) 与其微观结构参数的定量关系。固体的塑性和强度的统计理论, 在实现这种结合上将起决定作用。这种统计理论, 以晶格缺陷和塑性变形与断裂

机制的现代物理概念为基础，并考虑到实际金属组织不均匀性引起的这些过程发展的不均匀性。

这种理论的建立是将来的事。现时，在金属塑性变形力学-数学理论领域里的研究有着最完整的特点，本书将对这方面的理论予以讲述。

目 录

绪论	(VI)
第一篇 变形、流动和断裂	(1)
第 1 章 直角坐标系中的张量	(3)
1.1 矢量	(4)
1.2 矩阵	(15)
1.3 张量	(21)
第 2 章 连续介质的变形	(54)
2.1 拉格朗日变量和欧拉变量	(54)
2.2 有限变形张量	(57)
2.3 板料的有限变形	(66)
2.4 小变形张量	(72)
第 3 章 连续介质的流动	(89)
3.1 速度场	(89)
3.2 应变速率张量、流函数	(102)
第 4 章 应力	(118)
4.1 应力张量	(118)
4.2 应力的研究	(128)
第 5 章 守恒定律	(135)
5.1 质量守恒定律	(135)
5.2 动量守恒定律	(138)
5.3 动量矩守恒定律	(145)
5.4 机械能守恒	(148)
5.5 间断场的守恒定律	(151)
5.6 热力学基础	(157)
5.7 热传导方程	(168)
第 6 章 本构方程	(171)
6.1 流变模型 (单向应力状态)	(173)
6.2 弹性和粘性	(183)
6.3 塑性	(187)

6.4 作为过程的塑性变形.....	(199)
6.5 有限变形和塑性流动.....	(203)
第7章 断裂	(208)
7.1 变形稳定性和超塑性.....	(209)
7.2 裂纹.....	(218)
7.3 损伤的累积.....	(222)
第二篇 边值问题	(232)
第8章 边值问题的提法	(232)
8.1 数学物理学的边值问题.....	(233)
8.2 热传导理论的边值问题.....	(241)
8.3 关于连续介质力学边值问题的提法.....	(250)
8.4 线弹性介质.....	(256)
8.5 理想不可压缩液体.....	(265)
8.6 线粘性不可压缩介质.....	(268)
第9章 边值问题的解法	(274)
9.1 泛函空间、算子和泛函.....	(275)
9.2 迭代法和投影法.....	(291)
9.3 分离变量法.....	(300)
9.4 有限差分法.....	(305)
9.5 变分法.....	(317)
9.6 局部变分法.....	(340)
9.7 复变函数、保角映射.....	(345)
9.8 复势.....	(361)
第三篇 塑性流动	(373)
第10章 理想塑性介质	(373)
10.1 理想塑性.....	(374)
10.2 平面塑性流动.....	(381)
10.3 滑移线法.....	(387)
10.4 极值原理.....	(405)
10.5 近似解法.....	(413)
10.6 保角映射法.....	(423)
第11章 粘-塑性继承硬化介质	(451)

11.1 边值问题.....	(451)
11.2 虚位移原理、质点系.....	(454)
11.3 关于连续介质力学的变分原理.....	(459)
11.4 虚速度原理.....	(467)
11.5 塑性理论的泛函.....	(470)
11.6 虚速度原理的数值实施.....	(480)
11.7 推广的平面流动.....	(490)
11.8 定常的三维流动.....	(501)
11.9 在电子计算机上塑性流动过程的数学模拟.....	(523)
推荐的参考文献	(544)
例 题 目 录	
第 1 章.....	(3)
例题1.1 正交基底的转动.....	(24)
例题1.2 张量分量的变换.....	(25)
例题1.3 矢量与张量相乘.....	(28)
例题1.4 化张量为对角线形式.....	(34)
例题1.5 矢量场的梯度.....	(40)
例题1.6 张量场的散度.....	(42)
例题1.7 哈密顿-凯莱定理的证明.....	(48)
第 2 章.....	(54)
例题2.1 有限变形.....	(64)
例题2.2 板的有限变形.....	(71)
例题2.3 单元体的变形和转动.....	(74)
例题2.4 主应变分量.....	(79)
例题2.5 应变张量的散度.....	(80)
例题2.6 在圆柱坐标系中的变形.....	(86)
例题2.7 在球坐标系中的变形.....	(87)
第 3 章.....	(89)
例题3.1 计算全导数.....	(96)
例题3.2 体元的应变速率和转动.....	(105)
例题3.3 应变速率张量的散度.....	(105)
例题3.4 流函数.....	(109)

例题3.5 不可压缩条件的一般形式·····	(112)
例题3.6 曲线坐标中的流函数·····	(112)
第4章 ·····	(118)
例题4.1 斜面上的应力·····	(124)
例题4.2 将应力张量化为对角线形式·····	(126)
第5章 ·····	(135)
例题5.1 在有势流动时的连续性方程·····	(137)
例题5.2 密度的导数·····	(137)
例题5.3 在圆柱坐标系中的运动·····	(142)
例题5.4 在球坐标系中的运动·····	(143)
例题5.5 应力函数·····	(144)
例题5.6 法向速度分量的连续性·····	(153)
例题5.7 法向应力分量的连续性·····	(155)
第7章 ·····	(208)
例题7.1 杆件拉伸时的失稳·····	(209)
例题7.2 原始不均匀性对变形局部化的影响·····	(211)
例题7.3 材料的理论强度·····	(218)
例题7.4 裂纹扩展条件·····	(219)
例题7.5 杆件的准脆性断裂·····	(223)
例题7.6 平行六面体的断裂·····	(226)
例题7.7 断裂概率的正态分布规律·····	(229)
例题7.8 断裂概率·····	(230)
第8章 ·····	(232)
例题8.1 不恰当问题的例子(拉格朗日例)·····	(239)
例题8.2 热坯和工具的热接触·····	(244)
例题8.3 存在中间氧化层或润滑层时工具与热坯间的 热接触·····	(246)
例题8.4 工具和坯料间摩擦热的分布·····	(248)
例题8.5 弹性体的均匀压缩·····	(260)
例题8.6 刚性表面间粘性层的流动·····	(270)
第9章 ·····	(274)
例题9.1 关于不动点的定理·····	(294)

例题9.2 加廖尔金法	(298)
例题9.3 在平模间热坯料的冷却	(301)
例题9.4 用内热源加热坯料	(301)
例题9.5 泊松方程的狄利克莱问题	(305)
例题9.6 用内热源加热扁坯	(307)
例题9.7 追赶法	(314)
例题9.8 求极值函数	(322)
例题9.9 奥斯特洛格拉得斯基-欧拉方程	(321)
例题9.10 拉拔和挤压工具的孔型设计	(324)
例题9.11 里兹法	(332)
例题9.12 泛函的构成	(338)
例题9.13 局部变分法	(344)
例题9.14 四边形向半平面的映射	(359)
例题9.15 由点源产生的在上半平面上的流动	(368)
第10章	(373)
例题10.1 平行六面体的锻造	(377)
例题10.2 圆孔附近的塑性变形	(385)
例题10.3 直线边界附近的应力	(393)
例题10.4 自由边界附近的应力	(394)
例题10.5 板料的挤压	(399)
例题10.6 半压模的压入	(400)
例题10.7 理想塑性问题解的非唯一性	(403)
例题10.8 锻造平行六面体(运动学解)	(409)
例题10.9 棒的拉拔	(414)
例题10.10 锻造圆板	(420)
例题10.11 刚性模压入塑性半空间	(422)
例题10.12 板材挤压(可行解)	(429)
例题10.13 板材挤压(使可行解精确化)	(436)
例题10.14 在具有跨接部分的模中挤压薄壁型材	(440)
第11章	(451)
例题11.1 变分计算	(472)
例题11.2 连续弯曲角材	(475)

例题11.3 冷却中的圆柱体的微粗.....	(484)
例题11.4 管的推广平面流动.....	(493)

第一篇 变形、流动和断裂

连续介质力学的基本概念和方法是现代金属压力加工理论的基础。

连续介质力学是力学的一个分支。

众所周知，力学是一门科学，它研究物质最简单的运动形式——机械运动，即物体或物体各部分之间相互位置随时间而发生的变化。

研究这种运动形式的普遍规律时，力学利用了质点、绝对刚体、连续介质的抽象概念。

质点是指尺寸小到可以忽略但有最终质量的物体。质点可以起质点系惯性中心的作用，认为在该中心处集中着整个系统的质量。

绝对刚体指的是相互距离不改变的质点的总和。如果物体在载荷作用下的变形可以忽略，则允许应用绝对刚体的概念。

如果允许单元体的相互位置变化，则引出连续介质的概念。

以如下的抽象模型来表示可变形固体、液体和气体属于连续介质，这些抽象模型就是理想弹性体、塑性体、理想液体、粘性液体、理想气体等。

上述的关于物体的抽象概念，反映了实际物体在研究条件下所固有的真实性质。

在连续介质力学中利用了质点的概念，即尺寸无限小的体元的概念。质点的运动，是用位移矢量、速度矢量和加速度矢量来描绘的。总之，连续介质的运动，即无限多质点的运动，可用相应的矢量场来描述，也就是可用位移矢量场、速度矢量场和加速度矢量场来描述。

力是力学中物体或物体各部分之间相互作用的基本度量。通常，在连续介质力学中所研究的是分布力。它们的强度称为应力。连续介质的应力状态用张量场来描述。

引入连续性的假定作为基本假定。根据这个假定，实际物体被看作连续充满空间的物质系统。这个系统的性质反映了构成某些物体的大量相互作用粒子（原子、分子等）总体的统计规律。

引入连续性的假定允许采用经典的分析方法，其中包括允许研究无限小的体元。

应用连续性的假定，使得我们引出了由连续介质所充满的域的概念（图1）。

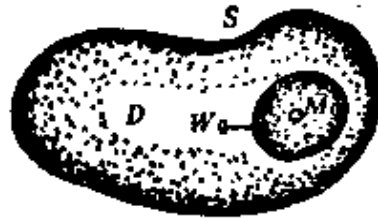


图1 关于定理的证明

根据定义，域 D 是某些空间点的总和，它们有两个性质：

- 1) 如果某点 M 属于该域，则足够接近于 M 的所有点也都属于该域；
- 2) 域的任何两个点可以用完全位于域内的折曲线连接。

域的边界 S 是这样一些点的总和，在每个点的任何邻域内都有既属于该域又不属于该域的点。平面域的边界可能是闭合曲线或某些闭合曲线的总和。一个或几个闭合的曲面可能是空间域的边界。我们将假定，包围域的曲线或曲面是光滑的或分片光滑的。

在连续介质力学中，标量、矢量和张量一般都是坐标和时间的函数。还可假定，这些函数可以对指定的变量连续微分足够多的次数，因而，它们与导数一起被限制于连续介质充满的任何有限域中。

在研究某域 D 的同时，可以研究各种完全属于域 D 的子域 W （用 $W \subset D$ 表示）。作为推导连续介质力学最重要方程的基础的如下预备定理是正确的。

基本预备定理 设连续函数 $\varphi(M)$ 在域 D 内有定义，且对任何子域 $W \subset D$ 满足等式

$$\iiint_W \varphi(M) dW = 0$$

则可证明函数 $\varphi(M)$ 在 D 内等于零。

证明 假定在位于域 D 内的某点 M_0 (图1) (用 $M_0 \in D$ 表示), $\varphi(M_0) \neq 0$, 例如 $\varphi(M_0) > 0$ 。因为函数 φ 是连续的, 所以可以选择一个环绕 M_0 点的子域 W_0 , 在该子域内 $\varphi(M) > \varphi(M_0)/2$ 。对这个域积分 $\iiint_{W_0} \varphi(M) dW$ 不等于零, 这与定理

的原始条件矛盾。

如果用某个矢量 $\vec{a}(M)$ 代替标量函数 $\varphi(M)$, 这个结果仍旧是正确的。为了证明这一点, 只要将这个定理应用于这个函数向各坐标轴的投影就足够了。

第 1 章 直角坐标系中的张量

在连续介质力学中, 应力和应变理论的阐述以及它们之间的关系的研究, 通常都是应用张量分析进行的。如 B. 布尔加基 (Бургагги) 指出的, “张量分析是以数学物理所有分支的公共语言来叙述和描写的, 它的同一性、清晰性、说明问题的简明性、由概念到公式和由公式到概念转化的迅速性以及同时包含着直觉、逻辑、综合和分析的固有特性, 这一切使得人们能够把它作为科学和教育方面真正第一流的工具。”

为什么需要张量计算? 在描述许多物理现象时, 常常引入某个坐标系。这允许以数的形式表示相应的物理现象, 并允许将物理规律化为联系这些数和数组的等式。如果标量值 (例如温度、密度、质量) 在任何坐标系中都以同一个数表示, 那么矢量值 (速度、加速度、力) 是用三个数即用矢量的坐标来表示, 在向新的坐标系变换时, 矢量的坐标按一定的规律变化。因此, 在所研究

的矢量图示上，一般说来，要加上随机选择的坐标系。将来，在研究更复杂的数学对象——描述连续介质的应力和应变状态的张量图示时，也要这样做。

张量计算的基本任务是研究坐标系的选择对物理对象表象的影响，并引出所谓的不变量，即向新坐标系变换时保持不变的量。在连续介质力学中，许多物理量（例如相对体积变化、静水压力、切应力强度等）是不变量。

与此同时，必须很好地掌握向新坐标系变换时矢量或张量分量的变换规则。很明显，物理规律的描写应该有协变的特性，即方程在任意的坐标变换中应该保持自己的种类和形式不变。张量计算能够给出连续介质力学基本关系的解析表达。

利用任意的非正交曲线坐标系以最普遍的形式继续进行张量分析会遇到数学方面的严重困难，这在工程计算中并非总有必要。因此，我们将主要利用笛卡儿直角坐标（以下简称为笛卡儿坐标）。属于曲线坐标的结果将只引用最终的形式，而不做推导。

1.1 矢 量

1.1.1 标量和矢量

以下我们必须涉及到三种类型的量，即标量、矢量和张量。

在选定的测量单位下用一个数来表示的量称为标量。在空间某点的连续介质的温度、密度、比重就是这样的量。

两个同样量纲的标量，当用同一个测量单位测量时，若符号和数值都相同，则它们是相等的。

除了以一定的测量单位测量的数值之外，还要用空间的方向来表示的量称为矢量。液体质点的速度以及液体质点在某个时间间隔内在空间的位移，都是矢量的例子。

矢量 a 用直线段表示，它的方向与已知物理量的方向一致，而在选定比例下的长度用来表示它的数值——矢量 a 的模。

只有量纲相同的矢量才可以比较。在这种情况下，如果具有同

一量纲的两个矢量 \vec{a} 和 \vec{b} 模相同，方向一致，则它们是相等的。此时可写为 $\vec{a} = \vec{b}$ 。

张量是更复杂的概念，它同样与在空间中的位向有关，并将标量和矢量作为特殊情况包括进来。我们将在以后给出张量的定义和它的运算规则（见1.3.2节）。

我们来提示一下矢量的基本性质。

矢量可分为三种基本类型，即自由矢量、滑动矢量和关联矢量。

自由矢量可以平行于自身移动，并可施于任何点上（例如绝对刚体的平动速度）。

滑动矢量可以沿着确定矢量方向的直线移动。作用在绝对刚体上的力可作为滑动矢量的例子。

最后，根据物理意义，关联矢量属于一定的点。质点的速度或加速度就是这样。

滑动和关联矢量的研究可以归结到自由矢量的研究，因此，只限于研究后者就够了。

1.1.2 矢量运算

对矢量可以完成下述运算：

- 1) 矢量相加；
- 2) 矢量与数相乘；
- 3) 矢量的标量积；
- 4) 矢量的矢量积。

两矢量 \vec{a} 和 \vec{b} 之和是第三个矢量 \vec{c} ，它用被加矢量构成的平行四边形的对角线表示。

矢量 \vec{a} 与标量 λ 的积是矢量 \vec{b} ，它的模数是矢量 \vec{a} 的模的 $|\lambda|$ 倍。当 $\lambda > 0$ 时，它的方向与 \vec{a} 一致，当 $\lambda < 0$ 时，它的方向与 \vec{a} 的方向相反。

两个矢量 \vec{a} 和 \vec{b} 的模与它们夹角余弦的乘积称为这两个矢量的标量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b})$ 。

如果矢量 \vec{a} 和 \vec{b} 正交，则它们的标量积等于零。

两矢量 \vec{a} 和 \vec{b} 的矢量积 $\vec{a} \times \vec{b}$ 是矢量 \vec{c} ，它垂直于相乘矢量构成的平面，从它所指的方向观察由第一个乘数沿小角转向第二个乘数时应是反时针方向，它的模等于被乘矢量构成的平行四边形的面积，即 $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin(\vec{a}, \vec{b})$ 。

1.1.3 正交基底

选择三个互相正交的方向，将三个单位长度的矢量 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 、 \vec{e}_3 分别置于其上，这三个矢量，满足关系 $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ ，和 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$ 。

矢量 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 、 \vec{e}_3 称为单位矢量。它们的长度等于 1，并且两两互相垂直。我们说，它们在被研究的三维空间里形成了正交基底，并且，如果有关关系式 $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ ，则基底被称为右基底，如果 $\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ ，则被称为左基底。今后我们一般用右基底。

与基底相对应的坐标轴 x_1 、 x_2 、 x_3 构成的系统被称为正交直线（笛卡儿）坐标系（图 2）。

取任意正交基底 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 、 \vec{e}_3 。任何矢量 \vec{a} 都能够沿基底的单位矢量分解，即可以写成 $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ 。

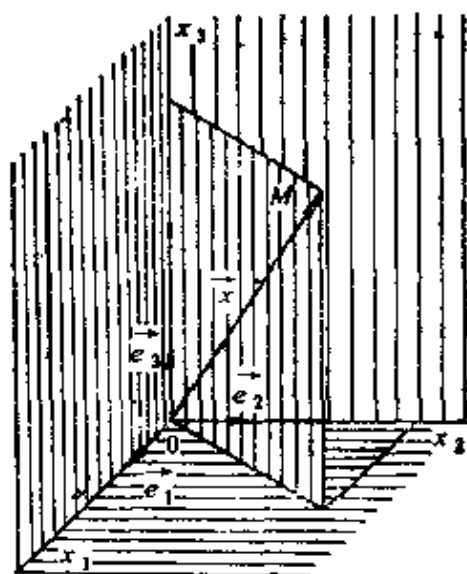


图 2 正交基底和坐标轴

值 a_1 、 a_2 、 a_3 称为矢量 \vec{a} 的坐标；它们是矢量在 x_1 、 x_2 、 x_3 上的投影。

因为矢量由自己的坐标充分地确定，所以还可以利用一种矢量表达式 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 。

1.1.4 爱因斯坦求和约定

以后我们将常常遇到带有标号——肩标和足标的表达式，例如 a_i 、 b_{ik} 、 c_i^j 、 e_{ij}^{kl} 等等。

仿效爱因斯坦 (Einstein) 引入这些表达式的缩写规则是合理的，此时应该预先规定：

- 1) 在一项中出现一次的每一个字母标号可以取值 1, 2, 3；
- 2) 在一项中重复出现两次的字母标号要由 1 到 3 求和。

我们来观察几个例子：

1) 具有一个字母标号的表达式 a_i 是三个值 a_1 、 a_2 、 a_3 的总体。

2) 具有两个字母标号的表达式 a_{ik} 表示 $3^2 = 9$ 个数值的总体，它们可以用矩阵表的形式排列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3) 具有两个重复字母标号的表达式 a_{ii} 表示和

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

4) 表达式

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

同样是和。

应该指出，求和标号常称为“哑标”，它的意思是，如果用另一个字母代替这个标号，显然和的值是不会改变的，例如 $a_i b_i = a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ 。

现在，利用缩写规则以紧缩的形式给出矢量 $\vec{a} = (a_i)$ 的表达

式和以自己坐标表示的矢量的运算规则：

矢量和 $\vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i)$;

矢量与数的乘积 $\lambda \vec{a} = (\lambda a_i)$;

矢量的标量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$;

矢量的矢量积 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

1.1.5 标量场和矢量场

我们研究一下矢量分析的基本关系在新符号系统中有什么样的形式。

任意一点 M 的位置用它相对于某点 O (坐标原点) 的矢径 \vec{x} 来描写 (参见图 2)。

矢量 \vec{x} 沿坐标上的单位矢量分解：

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad (1-1)$$

如果在域 D 的每一点 M 处, 某标量 φ 的值是已知的, 那么这个域称为标量场。此时, $\varphi = \varphi(\vec{x}, t) = \varphi(x_i, t)$ 。

如果在域 D 的每一点 M 处, 某矢量 \vec{a} 的值是已知的, 则这个域被称为矢量场。可写成 $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t) = \vec{a}(x_i, t)$ 。

因为 $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, 则给定了三个函数, 其中的每一个函数都取决于四个实型变量: $a_i = a_i(x_i, t)$ 。

在表 1 中利用新的符号列出了场论的基本关系。

表 1 场论的基本关系式

名 称	矢量写法	笛 卡 儿 坐 标 中 的 写 法	
		缩写写法	展开写法
坐标基底的单位矢量 ^①	\vec{e}_i	—	—
矢量	\vec{a}	$\vec{a} = a_i \vec{e}_i$	$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$
矢量加法	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$(c_i) = (a_i + b_i)$	$c_1 = a_1 + b_1 \quad c_2 = a_2 + b_2$ $c_3 = a_3 + b_3$

续表 1

名 称	矢量写法	笛 卡 儿 坐 标 系 中 的 写 法	
		缩写写法	展开写法
矢量与数相乘	$\vec{b} = \lambda \vec{a}$	$(b_i) = (\lambda a_i)$	$b_1 = \lambda a_1 \quad b_2 = \lambda a_2 \quad b_3 = \lambda a_3$
标量积	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
矢量积	$\vec{a} \times \vec{b}$	—	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
矢径	\vec{x}	$\vec{x} = x_i \vec{e}_i$	$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$
标量场	$\varphi(x, t)$	$\varphi = \varphi(x_i, t)$	$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, t)$
矢量场	$\vec{a}(x, t)$	$\vec{a} = a(x_i, t)$	$a_1 = a_1(x_1, x_2, x_3, t)$ $a_2 = a_2(x_1, x_2, x_3, t)$ $a_3 = a_3(x_1, x_2, x_3, t)$
哈密尔顿“那波拉”算子	∇	$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i$	$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2$ $+ \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3$
标量场 $\varphi(x, t)$ 的梯度	$\frac{\text{grad } \varphi}{\nabla \varphi}$	$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{e}_i$	$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{e}_2$ $+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{e}_3$
矢量场在方向 \vec{n} 的导数 ^②	$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} n_i$	$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_2$ $+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} n_3$

续表 1

名 称	矢量写法	笛卡儿坐标系中的写法	
		缩写写法	展开写法
矢量场 $\vec{a} \bullet (x, t)$ 的散度	$\text{div} \vec{a}$	$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$	$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$
矢量场 $\vec{a} \bullet (x, t)$ 的旋度	$\text{rota} = \nabla \times \vec{a}$	—	$\text{rota} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$
与表面 Σ 垂直的矢 量分量 $\vec{a} \textcircled{3}$	$a_n = \vec{a} \cdot \vec{n}$	$a_n = a_i n_i$	$a_n = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3$
矢量场 $\vec{a}(x, t)$ 通 过表面 Σ 的通量	$\iint_{\Sigma} a_n d\Sigma$	$\iint_{\Sigma} a_i n_i d\Sigma$	$\iint_{\Sigma} (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3) d\Sigma$
高斯-奥斯特洛格 拉得斯基公式 $\textcircled{4}$	$\iint_{\Sigma} a_n d\Sigma$ $= \iiint_W \text{div} \vec{a} dW$	$\iint_{\Sigma} a_i n_i d\Sigma$ $= \iiint_W \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dW$	$\iint_{\Sigma} (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3) d\Sigma$ $= \iiint_W \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dW$
拉普拉斯算子	∇^2	$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

$\textcircled{1} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$;

$\textcircled{2} \vec{n} = n_i \vec{e}_i$ —— 单位矢量;

$\textcircled{3} \vec{n}$ —— 表面法向单位矢量;

$\textcircled{4} W$ —— 闭合曲面 Σ 包围的体积。

● 原文为 a , 有误。 —— 校者

1.1.6 正交曲线坐标

正如我们已指出的，空间点 M 的位置可借助它相对于某不动点 O 的矢径 \vec{x} 给出，或用三个笛卡儿坐标 x_i 给出：

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

在许多问题中，用三个其它的数 β_1 、 β_2 、 β_3 ——曲线坐标合理地确定 M 点的位置，对于求解更为方便。

研究变换

$$\beta_i = f_i(x_k) \quad (1-2)$$

式中， f_i ——取决于 x_k ● 的足够光滑的任意函数。

如果雅可比行列式 $|\partial\beta_i/\partial x_k|$ 不为零，则变换式 (1-2) 是可逆的，即式 (1-2) 可对 x_k 求解：

$$x_k = g_k(\beta_i) \quad (1-3)$$

某些曲面族形成了函数 $\beta_i(x)$ 的等值面。每族有一个曲面通过每一个空间点 M (图 3)。这些曲面被称为坐标面。两个坐标面的交线被称为坐标线。

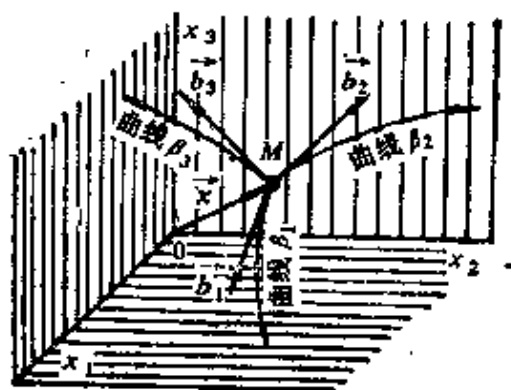


图 3 正交曲线坐标

这样，形为 $\beta_i(x_1, x_2, x_3) = \text{常数}$ 的条件确定了坐标面。两个坐标面，例如 $\beta_2(x_1, x_2, x_3) = \text{常数}$ 和 $\beta_3(x_1, x_2, x_3) = \text{常数}$ ，沿着坐标线 β_1 相交。沿着坐标线仅仅坐标 β_1 改变，而坐标 β_2 和 β_3 保持常数值。

●原文 β_k ，为 x_k 之误。——译者注

今后我们只限于研究对于应用最重要的正交曲线坐标的情况。此时每一点的坐标线都是垂直的。

引入单位矢量 \vec{b}_i ，它沿着点 M 处坐标线切线的方向指向变量 β_i 增加的一方(图 3)。矢量组 \vec{b}_i 形成了局部正交基底。在点 M 处给定的任意矢量 \vec{a} 可以沿着这个基底矢量分解：

$$\vec{a} = \alpha_i \vec{b}_i \quad (1-4)$$

将称 α_i 为矢量 \vec{a} 的曲线分量，或者也可以称为矢量 \vec{a} 在曲线坐标轴上的投影。

应当强调指出，当移动到其它空间点时，局部基底矢量的方向会发生变化，而笛卡儿直角坐标系单位矢量 \vec{e}_i 的方向则保持不变。

由式 (1-2) 和式 (1-3) 得到，任何一组 β_i 对应于唯一的一组 x_i ，反之亦然。变量 β_i 唯一地确定空间点 M 的位置，因此被称为点 M 的曲线坐标。

让我们转向点 M 的矢径 \vec{x} 。我们有：

$$\vec{x} = x_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \vec{e}_1 + x_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \vec{e}_2 + x_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \vec{e}_3$$

我们来计算导数

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} = \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \vec{e}_i$$

在微分时， β_2 和 β_3 保持不变，因此，矢量 $\partial \vec{x} / \partial \beta_1$ 指向坐标线 β_1 的切线方向，即 $\partial \vec{x} / \partial \beta_1 = H_1 \vec{b}_1$ 。很明显， H_1 是矢量 $\partial \vec{x} / \partial \beta_1$ 的长度，并有下列关系：

$$\begin{aligned} H_1^2 &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} = \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \\ &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \beta_1} \right)^2 \end{aligned}$$

在一般情况下， $\partial \vec{x} / \partial \beta_i = H_i \vec{b}_i$ ，此时

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \beta_i} \right)^2 \quad (1-5)$$

H_1 、 H_2 、 H_3 的值称为拉梅 (Lamé) 系数。

对于矢量 \vec{x} 的微分, 有

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_i} d\beta_i = H_1 d\beta_1 \vec{b}_1 + H_2 d\beta_2 \vec{b}_2 + H_3 d\beta_3 \vec{b}_3 \quad (1-6)$$

将式 1-6 两边平方。由于

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dS^2, \quad \text{而 } \vec{b}_i \cdot \vec{b}_k = \delta_{ik}$$

所以对单元 $d\vec{x}$ 长度的平方得到下式:

$$dS^2 = H_1^2 d\beta_1^2 + H_2^2 d\beta_2^2 + H_3^2 d\beta_3^2 \quad (1-7)$$

作为例子, 让我们研究圆柱坐标系和球坐标系。

1.1.7 圆柱坐标系 $r, \omega, z, (r \geq 0)$

在这个坐标系中, $\beta_1 = r, \beta_2 = \omega$, 它们是点 M 在 $x_1 O x_2$ 平面上投影的极坐标, $\beta_3 = z$, 它是点 M 到 $x_1 O x_2$ 平面的距离 (图 4)。

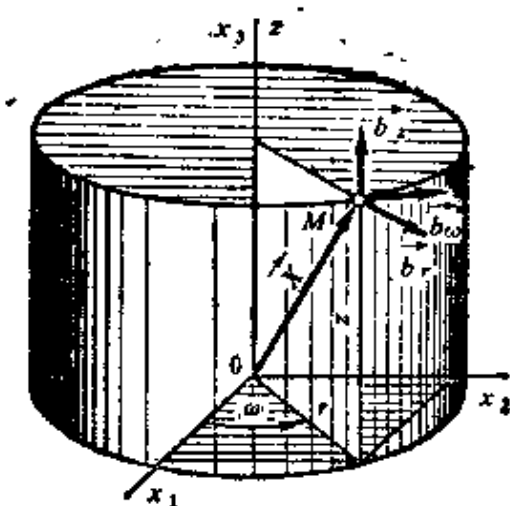


图 4 圆柱坐标系

坐标面: 垂直于轴 x_3 的平面 ($z = \text{常数}$), 过轴 x_3 的半平面 ($\omega = \text{常数}$) 和以轴 x_3 为轴的圆柱面 ($r = \text{常数}$)。

坐标线是这些面的交线。

圆柱坐标向直角坐标的变换公式和反变换公式是：

$$x_1 = r \cos \omega; \quad x_2 = r \sin \omega; \quad x_3 = z;$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \omega = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}; \quad z = x_3$$

坐标的微分等于

$$\begin{aligned} dx_1 &= \cos \omega dr - r \sin \omega d\omega, & dx_2 &= \sin \omega dr + r \cos \omega d\omega, \\ dx_3 &= dz \end{aligned}$$

单元 dx 长度的平方

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + dz^2$$

拉梅系数是：

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\omega = r, \quad H_3 = H_z = 1 \quad (1-8)$$

1.1.8 球坐标系 r, ω, χ , ($r \geq 0, 0 \leq \chi \leq \pi$)

这里 $\beta_1 = r$, 是矢径的长度, $\beta_2 = \omega$, 是径度, $\beta_3 = \chi$, 是极距 (图 5)。图 5 中指出读数的正向。

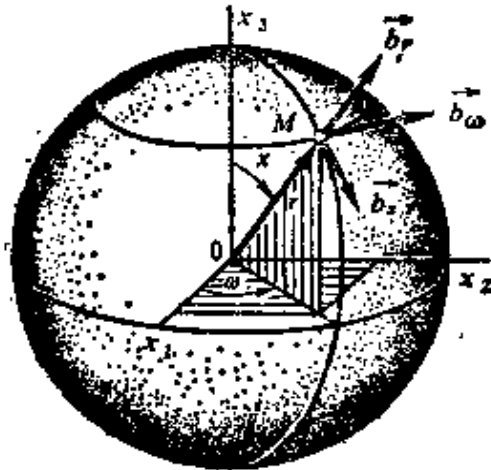


图 5 球坐标系

坐标面：以坐标原点为中心的球 ($r = \text{常数}$)，过轴 x_3 的半平面 ($\omega = \text{常数}$)，顶点在坐标原点的圆锥面 ($\chi = \text{常数}$)。

坐标线是这些面的交线。

由球坐标向直角坐标的变换公式和反变换公式是：

$$x_1 = r \sin \chi \cos \omega, \quad x_2 = r \sin \chi \sin \omega, \quad x_3 = r \cos \chi.$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \omega = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$$

$$\chi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}$$

坐标的微分为:

$$dx_1 = \sin\chi \cos\omega dr - r \sin\chi \sin\omega d\omega + r \cos\chi \cos\omega d\chi,$$

$$dx_2 = \sin\chi \sin\omega dr + r \sin\chi \cos\omega d\omega + r \cos\chi \sin\omega d\chi,$$

$$dx_3 = \cos\chi dr - r \sin\chi d\chi$$

元素 dx 长度的平方为

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\chi d\omega^2 + r^2 d\chi^2$$

拉梅系数为

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\omega = r \sin\chi$$

$$H_3 = H_\chi = r \quad (1-9)$$

思 考 题

1. 什么是标量? 什么是矢量?
2. 对矢量进行怎样的运算?
3. 什么是单位矢量? 单位矢量怎样配置?
4. 坐标基底与坐标轴系有什么不同?
5. 在什么情况下进行单项求和?
6. 为什么求和足标称为“哑标”?
7. 什么是标量场? 什么是矢量场?
8. 坐标面沿什么样的线相交?
9. 局部坐标基底与笛卡儿坐标基底有什么不同?
10. 什么被称为拉梅系数?
11. 在圆柱坐标系中哪些面是坐标面? 它们沿什么样的线相交?
12. 什么是球坐标系的坐标面? 它们沿什么样的线相交?

1.2 矩 阵

1.2.1 矩阵的定义

矩形的数表称为矩阵。使用圆括号表示矩阵，例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \\ 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

组成矩阵的数称为它的元素。横列的元素称为行，而纵列的元素称为列。

如果矩阵的行数等于列数，则矩阵被称为方阵，而行的数目称为矩阵的阶。一般我们将涉及到三阶方阵，它们被简单地称为矩阵。

以普通形式书写时，矩阵的元素一般用两个足标的字母表示，第一个足标指出行数，而第二个足标指出列数。例如三阶方阵的普通形式书写如下：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(读作 a 一，一， a 一，二，而不是 a 拾壹， a 拾贰)。

因此，一般的矩阵元素用 a_{ik} 表示，而矩阵可用下式表示：

$$A = (a_{ik}), \quad B = (b_{ik}), \quad C = (c_{ik}) \text{ 等等。}$$

位于左上角到右下角的方阵的一组元素被称为主对角线。

与每一个矩阵对应，都有用直括号表示的行列式：

$$|A| = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1.2.2 矩阵的运算

对矩阵确定了三种基本运算，即相加，数与矩阵相乘，矩阵与矩阵相乘。

矩阵 C 被称为两矩阵 A 和 B 的和，它的元素可用下述规则求出：

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (1-10)$$

因此，相加归结到两个矩阵对应元素求和。

例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

矩阵 $cA = (ca_{ik})$ 称为矩阵 $A = (a_{ik})$ 与数 c 的乘积，它是通过矩阵的所有元素与数 c 相乘而得到的。

例如：

$$(-2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

矩阵 $C = (c_{ik})$ 称为以一定次序给出的矩阵 $A = (a_{ik})$ 和 $B = (b_{ik})$ (第一个矩阵和第二个矩阵) 的乘积， C 的各元素按下述规则确定：

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \quad (1-11)$$

因此，矩阵 A 和 B 乘积中位于 i 行和 k 列的元素等于第一个矩阵 i 行元素与第二个矩阵 k 列对应元素乘积之和。

例：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = AB$$

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 1,$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 2,$$

$$c_{13} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1,$$

$$c_{21} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 2 \text{ 等等。}$$

因而得到

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

很明显，按照指出的规则不仅可以进行同阶方阵相乘，而且还可以进行不同维数矩阵相乘。仅仅需要第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数，只有在这种情况下能够按式 1-11 中的“哑标”求和。

因此，附带地研究一下具有三列的行矩阵 $(b_1 \ b_2 \ b_3)$ 和

具有三行的列矩阵 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 。

对上述第一个矩阵可以左乘三阶方阵。结果还是行矩阵。
例：

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (14 \ 5 \ 23)$$

很明显，为了表示行矩阵和列矩阵的元素，最好利用具有一个足标的字母。此时，在例中所研究的运算可以用下式写出。

$$c_i = b_k a_{ki} \quad (1-12)$$

当方阵右乘以列矩阵时，结果同样是列矩阵，它的元素按下式求出

$$c_i = a_{ik} b_k \quad (1-13)$$

例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}$$

下述形式的矩阵称为单位矩阵 E

称为它的特征方程。

展开这个方程中的行列式并按 λ 的方次将各项组合，可得到下列形式的三次方程：

$$\lambda^3 - a^I \lambda^2 + a^{II} \lambda - a^{III} = 0 \quad (1-19)$$

式中， $a^I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ 是矩阵对角线元素之和，称为矩阵 A 的迹。此外

$$a^{II} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$a^{III} = |a_{jk}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1.2.4 对称和反对称矩阵

关于特征多项式实根存在的问题与对称矩阵的概念紧密相关。

如果满足条件 $a_{ik} = a_{ki}$ ，则矩阵称为对称的。

如果 $a_{ik} = -a_{ki}$ ，则矩阵称为反对称的。

在第一种情况下，相对主对角线对称分布的元素成对相等。

在第二种情况下，这些元素绝对值相等，符号相反。反对称矩阵主对角线元素等于零。

施行矩阵转置的运算（用“'”表示），即用相应的列代替行，反过来用相应的行代替列。

如果矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

则转置矩阵 A' 可写成

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

用符号 \vec{e}_i' 表示取新位置的单位矢量。

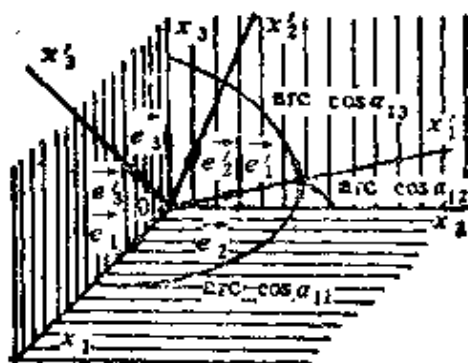


图6 正交基底的转动

因而，得到了两个坐标系，具有单位矢量 \vec{e}_i 的“旧”坐标系（没有“'”）和具有单位矢量 \vec{e}_i' 的“新”坐标系（带“'”）。并且

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{在 } i = k \text{ 时} \\ 0 & \text{在 } i \neq k \text{ 时} \end{cases}$$

$$\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_k' = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{在 } i = k \text{ 时} \\ 0 & \text{在 } i \neq k \text{ 时} \end{cases}$$

引入新旧坐标轴组成的九个角的余弦表。称它为方向余弦表。

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}_1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
\vec{e}_2'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
\vec{e}_3'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

这里 $a_{i,k}$ 是第 i 个“带撇的”单位矢量和第 k 个“不带撇的”单位矢量之间夹角的余弦： $a_{i,k} = \cos(\vec{e}_i', \vec{e}_k) = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_k$ 。

因而新的单位矢量 \vec{e}_i' 按旧的单位矢量 \vec{e}_k 分解有下述形式：

$$\vec{e}_i' = \cos(\vec{e}_i', \vec{e}_k) \vec{e}_k = a_{ik} \vec{e}_k$$

$$\alpha_{11} = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_1) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2,$$

$$\alpha_{12} = \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_2) = \cos 60^\circ = 1/2,$$

$$\alpha_{22} = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_2) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2,$$

$$\alpha_{21} = \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}_1) = \cos 120^\circ = -1/2.$$

因而，方向余弦表为：

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}'_1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0
\vec{e}'_2	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	0
\vec{e}'_3	0	0	1

例题1.2 张量分量的变换

将基底 \vec{e}_i 绕单位矢量 \vec{e}_3 转动角度 $\pi/6$ （见例题1.1），求转换到新坐标系时张量

$$T_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的分量。

解 利用例题中相对于给定的坐标变换所得到的方向余弦表。按式(1-21)

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \alpha_{11}\alpha_{21}a_{11} + \alpha_{11}\alpha_{12}a_{12} + \alpha_{11}\alpha_{13}a_{13} \\ &\quad + \alpha_{12}\alpha_{21}a_{21} + \alpha_{12}\alpha_{12}a_{22} + \alpha_{12}\alpha_{13}a_{23} \\ &\quad + \alpha_{13}\alpha_{21}a_{31} + \alpha_{13}\alpha_{12}a_{32} + \alpha_{13}\alpha_{13}a_{33} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \cdot 1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \end{aligned}$$

$$+ 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

其次,

$$\begin{aligned} a'_{12} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{12} + a_{11}a_{23}a_{13} \\ &\quad + a_{12}a_{21}a_{21} + a_{12}a_{22}a_{22} + a_{12}a_{23}a_{23} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{32} + a_{13}a_{23}a_{33} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \cdot 1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 2 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

等等。

容易看出, a_{ik} 中仅有三个不等于零, 即 $a_{13} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{33} = 2$, 如果利用这种情况, 则确定张量分量的庞大公式可以大为简化。此外, 在方向余弦表中 $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$, 考虑到这一点, 则有

$$a_{ik} = a_{i1}a_{k2}a_{33} = a_{i1}a_{k3}a_{13} + a_{i2}a_{k1}a_{21} + a_{i3}a_{k3}a_{33}$$

按此公式计算, 得出新坐标系中张量 T_A 的分量为

$$T_A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & -1/4 & 0 \\ 3/4 & -\sqrt{3}/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.3 张量的运算

张量的运算归结为由张量的分量所组成的矩阵的相应运算。结果得到的矩阵是新张量的矩阵。运算包括

张量的加法 $T_C = T_A + T_B$, 式中矩阵 $C = A + B$;

张量与数相乘 $T_B = \lambda T_A$, 式中矩阵 $B = \lambda A$;

张量与张量相乘 (标量的) $T_C = T_A T_B$, 式中矩阵 $C = AB$ 。

应该指出, 张量实际上是上面所定义的运算的结果, 换言之, 应该指出, 在向另一坐标系转换时由于矩阵运算而得到的分量按张量的规律式 (1-21) 变换。

对于加法有: $a'_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{kq} a_{pq}$, $b'_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{kq} b_{pq}$; 因而 $c'_{ik} = a'_{ik} + b'_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{kq} (a_{pq} + b_{pq}) = \alpha_{ip} \alpha_{kq} c_{pq}$ 。

在张量与数相乘时

$$a'_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{kq} \lambda a_{pq}$$

和

$$b'_{ik} = \lambda a'_{ik} = \lambda \alpha_{ip} \alpha_{kq} a_{pq} = \alpha_{ip} \alpha_{kq} (\lambda a_{pq}) = \alpha_{ip} \alpha_{kq} b_{pq}$$

最后在张量和张量按式 (1-11) 即 $c'_{ik} = a'_{ip} b'_{pk}$ 相乘时, 我们可写出 $a'_{ip} = \alpha_{im} \alpha_{pn} a_{mn}$ 和 $b'_{pk} = \alpha_{p1} \alpha_{kz} a_{1z}$, 则

$$c'_{ik} = \alpha_{im} (\alpha_{pn} \alpha_{p1}) \alpha_{kz} a_{mn} a_{1z}$$

对于圆括号内的表达式, 根据方向余弦矩阵 (α_{ik}) 的性质, 应有

$$\alpha_{pn} \alpha_{p1} = \delta_{n1} = \begin{cases} 1 & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } n \neq 1 \text{ 时} \end{cases}$$

在代入到前述关系后, 我们最终得到 $c'_{ik} = \alpha_{im} \alpha_{kz} (a_{m1} a_{1z}) = \alpha_{im} \alpha_{kz} c_{mz}$, 即分量 c_{mz} 实际上按张量规律变换。

如同矩阵相乘的情况那样, 张量与张量相乘的运算可以推广, 将不同维数张量相乘包括进去。

设某坐标系中我们已知张量 $T_A = [a_{ik}]$ 和分量为 b_i 的矢量 \vec{b} 。

矢量 $\vec{c} = \vec{b} T_A$ 称为矢量 \vec{b} 对张量 T_A 的左乘积, 它的分量按矢量 \vec{b} 的行矩阵与张量 T_A 的矩阵 A 相乘规则得到:

$$(c_1 \quad c_2 \quad c_3) = (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

且 $c_i = b_k a_{ki}$

矢量 \vec{c} 被称为矢量 \vec{b} 与张量 T_A 的右乘积，它的各分量是按矩阵 A 与矢量 \vec{b} 的列矩阵相乘的规则得出， $\vec{c} = T_A \vec{b}$ ，或以展开的形式给出

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

其中 $c_i = a_{ik} b_k$ 。

例题1.3 矢量与张量相乘

在采用的坐标系下，矢量 \vec{b} 有分量 (1, 2, 3)，而张量 T_A 的矩阵形为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

试求矢量 \vec{b} 对张量 T_A 的左乘积和右乘积。

解 矢量 \vec{b} 与张量 T_A 的左乘积等于

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (14 \ 5 \ 23)$$

矢量 \vec{b} 对张量 T_A 的右乘积给出具有下述分量的矢量：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}$$

以后我们要用到下述的定理。

辅助定理1.1 如果相应每一个矢量 \vec{c} ，都能给出一个矢量 \vec{b} ，

它的分量按矢量 \vec{c} 与矩阵 (a_{ik}) 相乘规则确定，则数量 a_{ik} 的总体是张量，即在变换为另一个坐标系时，这些量按下述规律变换：

$$a'_{ik} = a_{ip} a_{kq} a_{pq}$$

证明: 选择矢量 \vec{c} , 使得在新坐标系下它的一个坐标是 c'_k 等于 1, 而其余的等于零: $c'_k = 1, c'_s = 0 (s \neq k)$ 。

按照定理的条件, 在新坐标系中 $b'_i = a'_{im} c'_m = a'_{ik}$ 。

在转到旧坐标系时, $b_i = a_{ip} b_p$ 。

我们来确定矢量 \vec{c} 的分量在旧坐标系中有什么形式: $c_q = a_{mq} c'_m = a_{kq}$ 。所以 $a'_{ik} = b'_i = a_{ip} b_p$, 但 $b_p = a_{pq} c_q$ 。

因而, 我们得到矩阵 A 分量的变换规律:

$$a'_{ik} = a_{ip} a_{pq} c_q = a_{ip} a_{kq} a_{pq}$$

这正是要证明的。

1.3.4 对称和反对称张量

任意张量 $T_A = [a_{ik}]$ 能够并且以唯一的方式表示成两个张量之和, 即对称张量 T_B 和反对称张量 T_C 之和: $T_A = T_B + T_C$ 。这个分解归结为矩阵 A 分解为对称矩阵和反对称矩阵。

对称张量 T_B 的分量按公式 $b_{ik} = (1/2)(a_{ik} + a_{ki})$ 求得, 它满足相对主对角线对称的条件, 即 $b_{ik} = b_{ki}$ 。

反对称张量的分量

$$c_{ik} = (1/2)(a_{ik} - a_{ki})$$

满足关系 $c_{ik} = -c_{ki}$ 。

例:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.5 偏差张量和球张量

我们再来研究一种张量的分解

$$T_A = D_A + a_0 I \quad (1-22)$$

$$\text{其中 } a_0 = \frac{a_{ii}}{3} = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \quad (1-23)$$

●原文1/2处无括号不妥。——校者

●原文此处为 0 不对。——校者

$$I = [\delta_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

I 是单位张量，具有 $T_A I = I T_A = T_A$ 这种性质。
张量

$$D_A = [a_{ik} - a_0 \delta_{ik}] = \begin{bmatrix} a_{11} - a_0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - a_0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - a_0 \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

它的对角线分量之和等于零，被称为偏差张量。

公式 (1-22) 将任意张量 T_A 分解为偏差张量 D_A 和球张量 $a_0 I$ 之和。

1.3.6 主方向和特征值

如我们上面已指出的(见27页)，矢量 \vec{y} 与张量 T_A 相乘的结果仍是矢量。如果得到的矢量与原始矢量共线，即如果由于相乘的结果矢量 \vec{y} 的方向并不改变，仅仅数值上发生变化，那末这个方向称为张量 T_A 的主方向。

为确切起见，以后约定谈的是右乘积，这样我们将有：

$$T_A \vec{y} = \lambda \vec{y} \quad (1-26)$$

实数 λ 称为张量 T_A 的特征值。

现求张量的特征值和主方向。为此我们把公式 (1-26) 写成展开的形式：

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = \lambda y_1$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = \lambda y_2$$

$$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = \lambda y_3$$

将 λy_i 移到左边，得到

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= 0 \\ a_{21}y_1 + (a_{22} - \lambda)y_2 + a_{23}y_3 &= 0 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + (a_{33} - \lambda)y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

为了使得到的关于变量 y_i 的齐次线性方程组有非零解, 必须使方程组的系数行列式为零:

$$|a_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

因而, 确定张量 T_A 主方向和特征值的问题可归结为解其矩阵 A 的特征方程。

求得特征方程的实根, 就可以由方程组(1-27)求出比值 $y_1:y_2:y_3$, 即求出与此根相应的张量 T_A 的主方向(见例题1.4)。

1.3.7 张量椭球

在我们的三维空间中取某个基底 \vec{e}_i 并研究分量满足关系 $a_{ik} = a_{ki}$ 的对称张量 $T_A = [a_{ik}]$ 。

写出二次方程

$$a_{ik} x_i x_k = 1 \quad (1-28)$$

或以展开的形式表示

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 1$$

由解析几何已知, 这个方程是有心二次曲面。旋转坐标系, 这个方程可以化为标准形:

$$a_1(x_1^0)^2 + a_2(x_2^0)^2 + a_3(x_3^0)^2 = 1 \quad (1-29)$$

这个方程的特殊情况是:

椭球面

$$\left(\frac{x_1^0}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2^0}{b_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3^0}{b_3}\right)^2 = 1$$

单叶双曲面

$$\left(\frac{x_1^0}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2^0}{b_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3^0}{b_3}\right)^2 = 1$$

双叶双曲面

$$\left(\frac{x_1^0}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2^0}{b_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3^0}{b_3}\right)^2 = 1$$

在这些方程中

$$a_i = \pm 1/b_i^2$$

在一般的情况下，式 (1-28) 称为张量椭球方程。

很明显，曲面形状 (1-28) 由张量 T_A 确定，并且不应该与如何选择基底有关。为了证实这一点，我们研究一下旋转坐标轴，并转换为“带撇的”基底 e'_i 时，式 (1-28) 形式的变化。

用新坐标按式 $x_i = \alpha_{mi} x'_m$ ， $x_k = \alpha_{nk} x'_n$ 表示某点 M 的旧坐标 x_i ，其中 α_{mi} 、 α_{nk} 是新坐标的方向余弦，代入式 (1-28) 后，得到 $a_{ik} \alpha_{mi} \alpha_{nk} x'_m x'_n = 1$ ，或重新组合后有 $(\alpha_{mi} \alpha_{nk} a_{ik}) x'_m x'_n = 1$ 。

但是在圆括号中的表达式是张量 T_A 在“带撇的”基底中的分量， $a'_{mn} = \alpha_{mi} \alpha_{nk} a_{ik}$ 。

这就是说，在新的坐标系中张量椭球的方程 (1-28) 仍旧形为 $a'_{mn} x'_m x'_n = 1$ ，即保持不变。

如我们已指出的，对每一个对称张量来说，通过旋转坐标系张量椭球方程可以化为标准形 (1-29)。这时张量 T_A 的非对角线分量变为零，即 $a_{12}^0 = a_{23}^0 = a_{31}^0 = 0$ ，而对角线分量 $a_{11}^0 = a_1$ ， $a_{22}^0 = a_2$ ， $a_{33}^0 = a_3$ 。

因而，张量 T_A 取对角线的形式

$$T_A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

式中数 a_i 称为张量的主分量。

这样，我们就可得出：每一个对称张量都能够借助于坐标旋转化为对角线的形式。

现在来研究什么是新坐标系的单位矢量 e'_i 。

将张量 T_A 乘以单位矢量 e'_i 。进行矩阵相乘，就得到

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

或以矢量形式表示, $T_A \vec{e}_1^0 = a_1 \vec{e}_1^0$.

相似地, $T_A \vec{e}_2^0 = a_2 \vec{e}_2^0$, $T_A \vec{e}_3^0 = a_3 \vec{e}_3^0$.

这就是说, 坐标的单位矢量 \vec{e}_i^0 确定了张量 T_A 的主方向, 而数 a_i 是它的特征值。由此得出, 对每一个对称张量, 有三个互相正交的主方向, 与它们相应的特征值 (张量的主分量) 是实数。

1.3.8 张量的不变量

很明显, 张量的特征值与它的主方向一样, 不应该取决于坐标系的选择。因此特征方程

$$\lambda^3 - a^I \lambda^2 + a^{II} \lambda - a^{III} = 0 \quad (1-31)$$

的系数同样也不取决于这种选择, 并因此把这些系数称为张量 T_A 的不变量。

每个张量 $T_A = [a_{ik}]$ 相应有:

一次不变量

$$a^I = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_1 + a_2 + a_3 \quad (1-32)$$

二次不变量

$$\begin{aligned} a^{II} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 \end{aligned} \quad (1-33)$$

和三次不变量

$$a^{III} = |a_{ik}| = a_1 a_2 a_3 \quad (1-34)$$

应该指出, 由张量 T_A 的分量可以构成无限多的对称不变量:

$$A_1 = a_{ii} = a_1 + a_2 + a_3$$

$$2A_2 = a_{ik} a_{ik} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$3A_3 = a_{ik} a_{kl} a_{li} = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3$$

$$4A_4 = a_{ik}a_{kl}a_{lm}a_{mi} = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4$$

.....

所有这些不变量可以通过三个基本不变量合理地表示，头三个 A_1 、 A_2 、 A_3 可以选作基本不变量。换言之，有公式

$$A_n = c_{ijkl} A_1^i A_2^k A_3^l$$

其中， c_{ijkl} 是某个合理的系数，并满足方程 $i + 2k + 3l = n$ 。

下述关系是正确的：

$$A_1 = a^I, \quad A_2 = a^{\text{II}} + \frac{1}{2}(a^I)^2,$$

$$A_3 = a^{\text{III}} + a^I a^{\text{II}} + \frac{1}{3}(a^I)^3, \quad \dots\dots$$

可以证明， a^I ， a^{II} ， a^{III} 同样能构成基本不变量系。

例题1.4 化张量为对角线形式

试求张量

$$T_A = [a_{ik}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的主方向和特征值。

解 我们来计算张量的不变量。

一次不变量 $a^I = 3 + 3 + 1 = 7$ 。

二次不变量

$$a^{\text{II}} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 3 = 14.$$

三次不变量

$$a^{\text{III}} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = 8.$$

特征方程 $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$ 可以写成下式： $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$(\lambda - 4) = 0$ 。因而它的根（张量的特征值）等于： $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ 。

设长度为 1 的矢量 $\vec{y}^{(1)} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})$ 确定与特征值 $\lambda_1 = 1$ 相对应的主方向。

解方程组式 (1-27)：

$$2y_1^{(1)} - y_2^{(1)} = 0, \quad -y_1^{(1)} + 2y_2^{(1)} = 0$$

引用矢量 $\vec{y}^{(1)}$ 的正规化条件

$$[y_1^{(1)}]^2 + [y_2^{(1)}]^2 + [y_3^{(1)}]^2 = 1$$

得到

$$y_1^{(1)} = y_2^{(1)} = 0, \quad y_3^{(1)} = \pm 1$$

相似地，对 $\lambda_2 = 2$ 有 $y_1^{(2)} - y_2^{(2)} = 0$, $y_3^{(2)} = 0$, $[y_1^{(2)}]^2 + [y_2^{(2)}]^2 + [y_3^{(2)}]^2 = 1$ ，由此得

$$y_1^{(2)} = y_2^{(2)} = \pm 1/\sqrt{2}, \quad y_3^{(2)} = 0$$

最后，对于 $\lambda_3 = 4$ ，有 $y_1^{(3)} + y_2^{(3)} = 0$, $y_3^{(3)} = 0$, $[y_1^{(3)}]^2 + [y_2^{(3)}]^2 + [y_3^{(3)}]^2 = 1$ 。

因而求得： $y_1^{(3)} = -y_2^{(3)} = \mp 1/\sqrt{2}$, $y_3^{(3)} = 0$ 。

符号选择应使一组单位矢量 $\vec{y}^{(i)}$ 保持右手方向。

引入一组新的单位矢量 \vec{e}_i^0 ，使它同张量主方向重合， $\vec{e}_1^0 = \vec{y}^{(1)}$, $\vec{e}_2^0 = \vec{y}^{(2)}$, $\vec{e}_3^0 = \vec{y}^{(3)}$ 。

新坐标系相对于旧坐标系的方向用下面列出的方向余弦表给出：

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}_1^0	0	0	1
\vec{e}_2^0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0
\vec{e}_3^0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0

在新的坐标系中，张量 T_A 为：

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3.9 偏差张量不变量

张量 $T_A = [a_{ik}]$ 与偏差张量 $D_A = [b_{ik}] = [a_{ik} - \lambda a_0 \delta_{ik}]$ 相对应，其中

$$a_0 = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \quad (1-35)$$

偏差张量对角线分量之和等于零，它的特征方程为

$$\lambda^3 + b^{\text{II}}\lambda - b^{\text{III}} = 0 \quad (1-36)$$

其中

$$b^{\text{I}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{33} & b_{31} \\ b_{13} & b_{11} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}b_{ik}b_{ik} = -\frac{1}{6}[(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{22} - a_{33})^2$$

$$+ (a_{33} - a_{11})^2 + 6(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2)] \quad (1-37)$$

$$b^{\text{III}} = |b_{ik}| \quad (1-38)$$

由式 $T_A = D_A + a_0 I$ 得出，张量主轴与它的偏差张量主轴相重合。

偏差张量的二次不变量不能取正值。令

$$B = +\sqrt{|b|} = +\sqrt{\frac{1}{2}b_{ik}b_{ik}} \quad (1-39)$$

特征方程形为

$$\lambda^3 - B^2\lambda = b^{\text{III}} \quad (1-40)$$

借助三角代换 $\lambda = C \cos \beta$ 解上式。

将这个式子代入到式(1-40)，得到

$$C^3[\cos^3\beta - \left(\frac{B}{C}\right)^2 \cos\beta] = b^3 \quad (1-41)$$

利用已知公式 $\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$ 并将式 (1-41) 变换为

$$C^3[4\cos^3\beta - 4\left(\frac{B}{C}\right)^2 \cos\beta] = 4b^3 \text{ 的形式。}$$

现在选择 C , 使得满足式 $4(B/C)^2 = 3$ 。为此只要取 $C = 2B/\sqrt{3}$ 就足够了。

因而得到方程

$$\cos 3\beta = 4b^3/C^3 \quad (1-42)$$

式 (1-42) 确定了三个可能的 β 值。其中之一由条件 $3\beta < \pi$ 确定, 其余两个值等于 $\beta + 2\pi/3$ 和 $\beta + 4\pi/3$ 。将它们排列起来, 应使偏差张量的主分量〔特征方程 (1-36) 的根〕满足不等式 $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ 。

代入式 (1-41) 后, 得到^[2]

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} B \cos\beta \\ b_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} B \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) \\ b_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} B \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

张量 T_A 的主分量为

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} B \cos\beta \\ a_2 &= a_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} B \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) \\ a_3 &= a_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} B \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

引入参数

$$\begin{aligned} \nu_a &= \frac{2a_2 - a_1 - a_3}{a_1 - a_3} \\ &= \frac{2\sin(\beta - \pi/6) - \cos\beta + \cos(\pi/3 - \beta)}{\cos\beta + \cos(\pi/3 - \beta)} \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\beta - \pi/6)}{\operatorname{tg}\pi/6} \end{aligned} \quad (1-45)$$

式 (1-45) 以单值的关系将参数 β 和 ν 联系起来。

1.3.10 哈密顿-凯莱定理

张量与张量相乘的运算使得能够得到二阶张量的全部幂。

我们假定张量 $T_A = [a_{ik}]$ 被化为对角线形式

$$T_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

容易看出

$$T_A^2 = T_A T_A = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

在一般情况下，张量 T_A 的 n 次幂为：

$$T_A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix}$$

且张量 T_A 和它的全部幂有同一主轴。

我们写出特征方程 $\lambda^3 - a^1\lambda^2 + a^2\lambda - a^3 = 0$ 并用张量 T_A 的相应方次代替 λ 的方次。因为 λ_i 满足方程 (1-31)，所以关系式

$$T_A^3 - a^1 T_A^2 + a^2 T_A - a^3 I = \theta$$

也将被满足，其中 $I = [\delta_{ik}]$ 是单位张量，而 θ 是零张量。

所以，哈密顿-凯莱 (Hamilton-Cayley) 定理是正确的。

定理1.1: 每一个对称张量都满足自己的特征方程。

1.3.11 矢量对矢量宗量的导数

研究矢量场 $\vec{a} = a(x, t)$ ，其中 $\vec{x} = (x_i)$ 是计算矢量的点的矢径。

这个关系意味着，在某个区域已经给定了三个实函数，其中的每一个都有 $a_i = a_i(x_i, t)$ 。

固定某时刻 t 。取矢径为 \vec{x} 的任意点 M 并将它移到矢径为 $\vec{x} + d\vec{x}$ 的相邻点 M' ， a_i 值得到增量

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dx_k$$

按矩阵相乘的规则，可写作

$$\begin{pmatrix} da_1 \\ da_2 \\ da_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

因为这个方程对任何坐标系都是正确的，所以表达式 (da_i/dx_k) 是张量（见1.3节），且可以写出

$$d\vec{a} = [\partial a_i / \partial x_k] d\vec{x} \quad (1-46)$$

用下式表示张量

$$d\vec{a}/d\vec{x} = [\partial a_i / \partial x_k] \quad (1-47)$$

称它为矢量 \vec{a} 对矢量宗量 \vec{x} 的导数。

转置张量 $\vec{\nabla} \vec{a} = [\partial a_k / \partial x_i]$ 称为矢量 \vec{a} 的梯度。张量 $d\vec{a}/d\vec{x}$ 和 $\vec{\nabla} \vec{a}$ 的一次不变量是矢量 \vec{a} 的散度。

将张量 $d\vec{a}/d\vec{x}$ 表示成两个张量即对称和反对称张量之和：

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right] &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) \right] \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned}$$

由条件 $c_{ik} = -c_{ki}$ 和 $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$ 得出：在一般情况下，反对称张量可以表示成如下形式：

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right)$, $\omega_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \right)$,

$\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right)$ 。回忆计算矢量场旋度的公式

(见1.1节)，由此得出：具有分量 ω_i 的矢量 $\vec{\omega}$ 与矢量场 \vec{a} 以下述关系相联系：

$$\vec{\omega} \odot = 0.5 \operatorname{rot} \vec{a} \quad (1-48)$$

例题1.5 矢量场的梯度

对于矢量场 $\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_1 x_2 \vec{e}_2 + x_1 x_3^2 \vec{e}_3$ 计算在点 $M(1, 1, 1)$ 处矢量 \vec{a} 对矢量宗量 x 的导数和矢量 \vec{a} 的梯度。

解

$$\frac{\vec{d}a}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \odot & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3^2 & 0 & 2x_1 x_3 \end{bmatrix} \quad \nabla a = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3^2 \\ 0 \odot & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_1 x_3 \end{bmatrix}$$

在点 M

$$\frac{\vec{d}a}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \odot & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \nabla a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 \odot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

将张量 $\vec{d}a/dx$ 表示成对称和反对称张量之和的形式：

①原文为 ω 不妥。——校者

②原文误为 x_1 。

③原文误为 1。

$$\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{dx}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5x_2 \textcircled{1} & 0.5x_3^2 \\ 0.5x_2 \textcircled{1} & x_1 & 0 \\ 0.5x_3^2 & 0 & 2x_1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.5x_2 \textcircled{2} & 0.5x_3^2 \\ 0.5x_2 \textcircled{3} & 0 & 0 \\ -0.5x_3^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矢量 ω 有分量 $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0.5x_3^2$, $\omega_3 = 0.5x_2$ 。

1.3.12 张量场

如果在域 D 内每点都给定某个张量 T_A , 则这个域称为张量场。此时写作

$$T_A = T_A(\overrightarrow{x}, t) \quad (1-49)$$

这样一来, 在确定的坐标系中给定了六个函数 $a_{ik} = a_{ik}(x_m, t)$ 。其中每一个函数都依赖于四个实型变量。当张量分量恒定时, 即 $a_{ik} = \text{常数}$ 时, 张量场被称为均匀的。

如果张量 T_A 是对称的, 那末在每点 M 都可求得这个张量的三个主方向和三个特征值。如果转动坐标系, 可以将张量化成对角线形式。在一般不均匀张量场的情况下, 域 D 内不同点的主方向是不同的。如果张量场是均匀的, 那末在所有点这个方向是一

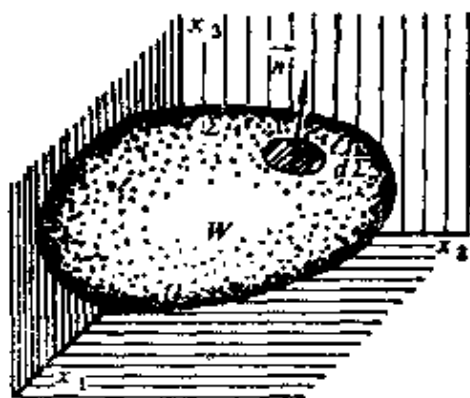


图8 关于张量场散度公式的推导

①原文误为 $0.5(x_1 + x_2)$ 译者。

②原文误为 $0.5(x_1 + x_2)$ 。

③原文误为 $-0.5(x_1 + x_2)$ 。

致的，并且张量 T_A 在全域内有对角线形式。

1.3.13 张量场的散度

假定在域 D 内已知张量场 T_A 。我们在此域内作闭合的表面 Σ ，它围出体积 W （图 8）。

设 \vec{n} 为表面的法向单位矢量。将此矢量乘以张量 T_A 并计算积分

$$\iint_{\Sigma} T_A \vec{n} d\Sigma \quad (1-50)$$

它被称为张量 T_A 通过表面 Σ 的通量，积分结果是某个矢量。求它的分量。

利用公式 $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ ，得到

$$\iint_{\Sigma} T_A \vec{n} d\Sigma = \iint_{\Sigma} a_{ik} \vec{e}_i n_k d\Sigma = \vec{e}_i \iint_{\Sigma} a_{ik} n_k d\Sigma$$

因而，所求矢量的分量等于 $c_i = \iint_{\Sigma} a_{ik} n_k d\Sigma$ 。采用高斯-奥

斯特洛格拉得斯基定理（见第一章第一节），得到

$$c_i = \iint_{\Sigma} a_{ik} n_k d\Sigma = \iiint_W \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} dW$$

具有分量 $\partial a_{ik} / \partial x_k$ 的矢量被称为张量 T_A 的散度：

$$\operatorname{div} T_A = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \vec{e}_i \quad (1-51)$$

我们得到了高斯-奥斯特洛格拉得斯基定理的推广公式

$$\iint_{\Sigma} T_A \vec{n} d\Sigma = \iiint_W \operatorname{div} T_A dW \quad (1-52)$$

例题 1.6 张量场的散度

已知球张量场

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$$

式中 $\sigma_0 = \sigma_0(x_1, x_2, x_3, t)$ 。试计算张量的散度

解 因为在此情况下 $a_{ik} = \sigma_0 \delta_{ik}$ ，则

$$\begin{aligned} \operatorname{div} T_{\sigma} &= \frac{\partial(\sigma_0 \delta_{ik})}{\partial x_k} \vec{e}_i = \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_k} \delta_{ik} \vec{e}_i \\ &= \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_i} \vec{e}_i = \operatorname{grad} \sigma_0 \end{aligned} \quad (1-53)$$

曲线坐标：写出正交曲线坐标系中张量场散度的表达式。

矢量 $\operatorname{div} T_A$ 的第一个分量为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_1} (H_2 H_3 a_{11}) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} (H_2 H_1 a_{12}) \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial \beta_3} (H_1 H_2 a_{13}) + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} a_{12} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_3} a_{13} \\ &\left. - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1} a_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1} a_{33} \right] \end{aligned} \quad (1-54)$$

其余分量按足标以模式 1-2-3-1-…… 循环移动的规则确定。

换言之，在依次写出表达式时，应该用足标 2 代替足标 1，用足标 3 代替足标 2，用足标 1 代替足标 3。这个规则是根据坐标 x_1, x_2, x_3 地位完全均等得出的。

因而，对第二个分量可得到如下表达式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_2} (H_3 H_1 a_{22}) + \frac{\partial}{\partial \beta_3} (H_1 H_2 a_{23}) \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial \beta_1} (H_2 H_3 a_{21}) + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_3} a_{23} + H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1} \end{aligned}$$

$$a_{21} - H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2} a_{33} - H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} a_{11}] \quad (1-55)$$

而对于第三个方程有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_3} (H_1 H_2 a_{33}) + \frac{\partial}{\partial \beta_1} (H_2 H_3 a_{31}) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta_2} (H_3 H_1 a_{32}) + H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1} a_{31} + H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2} \\ & \left. a_{32} - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_3} a_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_3} a_{22} \right] \quad (1-56) \end{aligned}$$

1.3.14 度量张量

重新研究曲线坐标 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (见1.1节), 在一般情况下, 坐标是非正交的。取两个相邻点 $M(x)$ 和 $M'(x+dx)$ 。

矢径 \vec{x} 的微分为:

$$\vec{dx} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_2} d\beta_2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_3} d\beta_3$$

式中 $d\beta_i$ 是由 M 移到 M' 时坐标 β_i 的增量。

指向沿坐标线 β_i 切线方向的矢量 $\partial \vec{x} / \partial \beta_i$ 在点 M 形成了局部坐标系。

用下式确定点 M 和 M' 间距离的平方:

$$\begin{aligned} dS^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_i} d\beta_i \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_k} d\beta_k \right) \\ &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_k} d\beta_i d\beta_k = g_{ik} d\beta_i d\beta_k \quad (1-57) \end{aligned}$$

式中

$$g_{ik} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_k} = \frac{\partial x_1}{\partial \beta_i} \frac{\partial x_1}{\partial \beta_k} + \frac{\partial x_2}{\partial \beta_i} \frac{\partial x_2}{\partial \beta_k} + \frac{\partial x_3}{\partial \beta_i} \frac{\partial x_3}{\partial \beta_k} \quad (1-58)$$

是度量张量 $\{g_{ik}\}$ 的分量。

这个张量常被称为基本张量，因为它在张量分析中起着重要的作用。

如果曲线坐标系 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 是正交的，那末度量张量的分量与拉梅系数可用如下关系联系起来

$$g_{11} = H_1^2, g_{22} = H_2^2, g_{33} = H_3^2, g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0 \quad (1-59)$$

1.3.15 关于两个二阶对称张量之间函数关系的形式

将应力与应变或应变速度联系起来的连续介质的本构方程(见第6章)应该在任意的坐标变换中都保持自己的形式不变。因此，以普遍的形式来研究两个对称张量 $T_y = [y_{ik}]$ 和 $T_z = [z_{ik}]$ 之间函数关系的可能形式是合理的。

线性各向异性关系 从最简单的线性关系的情况开始分析

$$z_{ik} = c_{ikpq} y_{pq} \quad (1-60)$$

为了在任何笛卡儿直角坐标中都能满足这个等式， c_{ikpq} 必须是某个四阶张量的分量，即在转换到新的(带撇的)坐标系时按下述规律变换

$$c'_{ikpq} = \alpha_{im} \alpha_{kn} \alpha_{pr} \alpha_{qs} c_{mnr s}$$

因为 T_y 和 T_z 是对称张量，所以对第一对足标和第二对足标应满足对称条件：

$$c_{ikpq} = c_{kipeq}, \quad c_{ikpq} = c_{ikqp}$$

因而张量 $[c_{ikpq}]$ 的独立分量数由 $3^4 = 81$ 减少到36。

在一般情况下，张量 T_y 和 T_z 的主轴方向并不重合。形为式1-60的关系式一般用于描写各向异性介质的行为，这类介质的力学性能在不同方向是不同的(例如塑料玻璃、木材、晶体)。

线性各向同性关系 现假定关系式(1-60)是各向同性的，即张量 $[c_{ikpq}]$ 在任何笛卡儿直角坐标中有相同的分量。我们已遇到过相似的张量。二阶单位张量 $I = [\delta_{ik}]$ 就是各向同性张

量。

同样，如下的四阶张量 $[\delta_{ik}\delta_{pq}]$ 和 $[\delta_{ip}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{kp}]$ 也是各向同性的。

在一般情况下，四阶的各向同性张量可以用这两个张量的线性组合表示：

$$c_{ikpq} = \lambda\delta_{ik}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{kp}) \quad (1-61)$$

式中 λ 和 μ 是某些常数。

因此，在各向同性关系的情况下，张量 c_{ikpq} 的独立分量数减少到两个。

代入到式(1-60)后，得到

$$\begin{aligned} z_{ik} &= \lambda\delta_{ik}\delta_{pp}y_{pp} + \mu(\delta_{ip}\delta_{kp} + \delta_{iq}\delta_{kp})y_{pp} \\ &= \lambda\delta_{ik}y_{pp} + \mu(y_{ik} + y_{ki}) \end{aligned}$$

因为张量 T_s 是对称的， $y_{ik} = y_{ki}$ ，所以最后得到：

$$z_{ik} = \lambda\delta_{ik}y_{pp} + 2\mu y_{ik} \quad (1-62)$$

张量 T_s 和 T_z 可分解为偏差张量和球张量，利用这种分解可有 $T_s = D_s + y_0 I$ ， $T_z = D_z + z_0 I$ ，

式中

$$y_0 = \frac{1}{3} y_{pp} = \frac{1}{3} (y_{11} + y_{22} + y_{33})$$

$$z_0 = \frac{1}{3} z_{pp} = \frac{1}{3} (z_{11} + z_{22} + z_{33})$$

$I = [\delta_{ik}]$ ——单位张量

代入式(1-62)，给出

$$T_z = 3\lambda y_0 I + 2\mu T_s \quad (1-63)$$

或 $D_z + z_0 I = 3\lambda y_0 I + 2\mu(D_s + y_0 I)$

经过简单的变换，有

$$D_z + z_0 I = (3\lambda + 2\mu)y_0 I + 2\mu D_s \quad (1-64)$$

将上式左右两边乘以 δ_{ik} 并按足标化简，得到 $z_0 = (3\lambda + 2\mu)y_0$ 。

将此关系代入式(1-64)后，有 $D_z = 2\mu D_s$ 。

第一个公式将球张量联系在一起，而第二个公式将偏差张量联系在一起。令 $(3\lambda + 2\mu)/3 = k$ ，将这些方程写成

$$z_0 = 3ky_0 \quad (1-65)$$

$$D_z = 2\mu D_y \quad (1-66)$$

式 (1-62)、式 (1-63) 一般用于描写各方向力学性质相同的各向同性介质的行为 (例如液体、气体、非晶态固体、多晶体物体)。这时张量 T_y 和 T_z 主轴是重合的。

非线性各向同性关系 现在研究用函数 f_{ik} : $z_{ik} = f_{ik}(y_{rs})$ 给定的非线性张量关系 $T_z = f(T_y)$ ，函数 f_{ik} 将另一个对称张量 T_z 的分量与对称张量 T_y 的分量对应起来。

假定这个关系是各向同性的，即它不取决于参照系的选择。因此，在转换到新坐标系 \vec{e}'_i 时，将有 $z'_{ik} = f_{ik}(y'_{rs})$ 。

如果函数 f_{ik} 为

$$f_{ik} = f\delta_{ik} + Aa_{ik} + Bb_{ik} + Cc_{ik} + \dots \quad (1-67)$$

则可以满足各向同性条件。

其中 f 、 A 、 B 、 C 是标量， $[\delta_{ik}]$ 是单位张量， $[a_{ik}]$ 、 $[b_{ik}]$ 、 $[c_{ik}]$ 是与张量 T_y 有相同主轴的张量。

这些张量能够借助 T_y 以 $a_{ik} = y_{ik}$ ， $b_{ik} = y_{ij}y_{jk}$ ， $c_{ik} = y_{ij}y_{jk}y_{kl}$ 等等的形式构造，也就是说，它们是张量 T_y 的幂。

关系式 (1-68) 按张量 T_y 的幂以级数形式写出：

$$T_z = a_0 I + a_1 T_y + a_2 T_y^2 + a_3 T_y^3 + \dots \quad (1-68)$$

此时标量 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 ... 是某些函数，或者在更普遍的情况下，是某些取决于张量 T_y 、 T_z 不变量的泛函 (见 9.1 节)。

上面已经指出，每个张量的不变量系中仅仅有三个是独立的。与此相类似，很容易证明展开式 (1-68) 可以在第三项截断。实际上，由哈密顿-凯莱定理能够得出：

$$T_y^3 = y^1 T_y^2 - y^2 T_y + y^3 I \quad (1-69)$$

其中 y^1 、 y^2 、 y^3 是张量 T_y 的一次、二次、三次不变量。

很明显，张量 T_y 的任何更高次幂可以通过张量本身或它的二次幂 T_y^2 以线性形式表示，并且这个关系的系数是不变量。

例题1.7 哈密顿-凯莱定理的证明

试以张量 T_v^2 、 T_v 、 I 的线性组合的形式表示张量 T_v 的四次幂。

解 将式 (1-69) 两边乘以 T_v ，得出

$$T_v^4 = y^I T_v^3 - y^{\text{II}} T_v^2 + y^{\text{III}} T_v$$

利用式 (1-69)，以便通过 T_v^2 、 T_v 、 I 表示 T_v^3 。因而

$$\begin{aligned} T_v^4 &= y^I (y^I T_v^2 - y^{\text{II}} T_v + y^{\text{III}} I) - y^{\text{II}} T_v^2 + y^{\text{III}} T_v \\ &= [-y^{\text{II}} + (y^I)^2] T_v^2 + (y^{\text{III}} - y^I y^{\text{II}}) T_v + y^I y^{\text{III}} I \end{aligned}$$

因此，两个对称张量之间的各向同性关系的最普遍形式为：

$$T_v = a_0 I + a_1 T_v + a_2 T_v^2 \quad (1-70)$$

其中， a_0 、 a_1 、 a_2 是张量 T_v 和 T_v 基本不变量系的某些函数（或者在更广泛情况下某些泛函）（见9.1节）。

我们谈谈准线性关系的个别情况，即系数 a_2 也同样等于零的情况：

$$T_v = a_0 I + a_1 T_v \quad (1-71)$$

令 $a_0 = 3\lambda y_0$ ， $a_1 = 2\mu$ ，则由式 (1-64) 得到下式：

$$z_0 = (3\lambda + 2\mu) y_0; \quad D_v = 2\mu D_v$$

令 $(3\lambda + 2\mu)/3 = k$ ，这些方程能以更紧缩的形式写成：

$$z_0 = 3k y_0 \quad (1-72)$$

$$D_v = 2\mu D_v \quad (1-73)$$

上面第一式将球张量联系起来，而第二式将偏差张量联系起来。与线性关系式 (1-65)、式 (1-66) 不同，这里参数 λ 和 μ 是张量 T_v 和 T_v ，或它们的偏差张量 D_v 和 D_v 的不变量的某个函数。

我们来确定参数 μ 。用 α^{II} 和 β^{II} 表示偏差张量 D_v 和 D_v 的二次不变量。

由式 (1-73) 有 $\beta^{\text{II}} = 4\mu^2 \alpha^{\text{II}}$ ，因而

$$2\mu = \sqrt{\frac{\beta^{\text{II}}}{\alpha^{\text{II}}}} \quad (1-74)$$

因而式 (1-73) 成为

$$D_z = \sqrt{\frac{\beta^{\mathbb{K}}}{\alpha^{\mathbb{I}}}} D_v \quad (1-75)$$

在研究连续介质中发生的流动过程时，常常必须确定属于同一物质质点且随时间变化的两个张量之间的关系。

设对称张量随时间变化过程给定，即 $T_v = T_v(\tau)$ ， $t_0 \leq \tau < t$ ，这个过程单值地确定了另一个张量 T_z 的变化过程。根据 A. A. 依留申 (Ильющин)，张量 T_z 在时刻 t 的值将称为过程 $T_v(\tau)$ 的泛函^① 并以下式写出：

$$T_z(t) = T_z[T_v(\tau)]!_0$$

1.3.16 张量的矢量概念

张量 T_A 用来表示质点 M 某邻域内的某个物理状态（例如应力和应变），现在研究它随时间变化的过程，假定它的所有分量以九个时间函数 $a_{ik} = a_{ik}(t)$ 的形式给出。

建立九维欧氏空间 E_9 的固定的（与 t 无关的）九维正交基底 \vec{e}_m ($m=1, 2, \dots, 9$)，在此空间中两个矢量 \vec{y} 和 \vec{z} 以 $\vec{y} = y_m \vec{e}_m$ ， $\vec{z} = z_m \vec{e}_m$ ($m=1, 2, \dots, 9$) 表示，并用一般方法定义加法和乘法（数量积）运算：

$$\vec{y} + \vec{z} = (y_m + z_m) \vec{e}_m, \quad \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{y} = y_m z_m$$

且 $\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = \delta_{mn}$ 。

相应地用具有分量

$$a_1 = a_{11}, \quad a_2 = a_{22}, \quad a_3 = a_{33}, \quad a_4 = a_{12},$$

$$a_5 = a_{21}, \quad \dots, \quad a_8 = a_{31}, \quad a_9 = a_{13},$$

的矢量 \vec{a} 代替张量 T_A ，记作 $\vec{a} = a_m \vec{e}_m$ 。

矢量 \vec{a} 的模的平方用如下关系与张量 T_A 的对称不变量 A_2 (见 33 页) 相联系。

$$a^2 = a_m a_m = a_{ik} a_{ik} = 2A_2 \left(\begin{matrix} m=1, 2, \dots, 9 \\ i, k=1, 2, 3 \end{matrix} \right) \quad (1-76)$$

^① 泛函的概念在 290 页较详细地研究。

很明显，如果我们关于矢量 \vec{a} 的分量完成了对于时间 t 的微分和积分的线性运算，那我们对张量 $[a_{ik}]$ 的分量也将完成同样的运算，反之亦然，对张量分量所进行的线性运算与对矢量 \vec{a} 的分量进行的同样运算是彼此对应的。若用张量 T_A 的矢量

$$\vec{a}(t) = a_m \vec{e}_m (m = 1, 2, \dots, 9)$$

随时间的变化表示张量 T_A ，则可以对它的变化过程给出明显的几何解释。

矢量 \vec{a} 的端点在空间 E ，描出了某条九维曲线——矢量 $\vec{a}(t)$ 的轨迹。

应当指出，很明显，借助矢量建立起来的张量的这种概念意义是有限的。首先，它不是不变量，因为同一个张量 T_A 相对于三维物理空间中的坐标轴将对应于另一个同样长度的矢量 \vec{a}' ，因为矢量长度的平方是张量 T_A 的不变量。但是矢量长度是它的唯一的不变量，而张量却有三个基本不变量。从这种意义上来说，以多维矢量的形式表示的张量的概念会使研究者受到限制。在研究对称张量随时间的变化时，将它分解为偏差张量和球张量并用偏差张量的五维矢量的形式表示，这要方便得多。在许多过程中，张量三次不变量的影响并不重要，因此标量函数——一次不变量和表示偏差张量的矢量随时间的变化可以充分地描述过程。

1.3.17 偏差张量的矢量概念

将对称张量 T_A 表示成偏差张量和球张量之和的形式，

$$[a_{ik}(t)] = [b_{ik}(t)] + a_0 [\delta_{ik}]$$

式中， $a_0 = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33})$ ； δ_{ik} 是克罗内克尔符号。

因为偏差张量的分量与条件 $b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$ 有关，所以引入五个独立函数 $b_m(t)$ ($m = 1, 2, \dots, 5$) 是方便的，引入这五个函数应使变换是互为单值的和线性的，且二次不变量 b^2 同样地也等于函数 b_m 的平方和，

$$b^{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} b_{ik} b_{ik} = b_m b_m \quad (m=1, 2, \dots, 5) \quad (1-77)$$

下述关系^[3]满足这些条件

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= b_{11} \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) - b_{22} \sin\beta \\ b_2 &= b_{11} \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) - b_{22} \cos\beta \\ b_3 &= b_{12}, \quad b_4 = b_{23}, \quad b_5 = b_{31} \end{aligned} \right\} \quad (1-78)$$

式中 β 是任意与时间无关的实数。在同时研究两个或几个偏差张量时，将假定 β 对于每一个偏差张量都是相同的。

建立了与时间无关的五维欧氏空间 E_5 的五维正交基底 \vec{e}_m ($m=1, 2, \dots, 5$) 之后，我们用矢量 \vec{b} 随时间的变化

$$\vec{b} = b_m(t) \vec{e}_m \quad (m=1, 2, \dots, 5) \quad (1-79)$$

同函数 $a_0(t)$ 一起表示张量 T_A 的变化过程。

这样，过程 $a_{ik} = a_{ik}(t)$ 由 E_5 空间中矢量 $\vec{b}(t)$ 轨迹在不同时刻的给定值与轨迹每点上一次不变量 $a_0(t)$ 的给定值所确定。

研究张量

$$\dot{T}_A = [\dot{a}_{ik}(t)] = \left[-\frac{da_{ik}(t)}{dt} \right]$$

它的分量是张量 T_A 的分量对时间的导数。通常 \dot{T}_A 能够表示为偏差张量之和的形式：

$$[\dot{a}_{ik}(t)] = [\dot{b}_{ik}(t)] + \dot{a}_0(t) [\delta_{ik}]$$

式中

$$\dot{b}_{ik} = db_{ik}/dt, \quad \dot{a}_0(t) = da_0(t)/dt$$

经过时间 dt ，矢量 $\vec{b}(t)$ 得到增量：

$$d\vec{b} = db_m \vec{e}_m \quad (m=1, 2, \dots, 5)$$

●书中为 T_A 似不妥。——校者

其方向是沿矢量轨迹切线的方向。这个值的模称为轨迹弧长的微分 dA 。很明显，

$$|\vec{db}| = dA = \sqrt{db_m \cdot db_m} \quad (m=1, 2, \dots, 5)$$

$$\begin{aligned} \text{和} \quad \frac{dA}{dt} &= \sqrt{\frac{db_m}{dt} \frac{db_m}{dt}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{db_{ik}}{dt} \frac{db_{ik}}{dt}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \dot{b}_{ik} \dot{b}_{ik}} = \dot{B} \end{aligned} \quad (1-80)$$

积分得到

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{db_m}{dt} \frac{db_m}{dt}} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{1}{2} \dot{b}_{ik} \dot{b}_{ik}} dt \\ &= \int_{t_0}^t \dot{B} dt \end{aligned} \quad (1-81)$$

思 考 题

1. 方向余弦表具有什么样的性质?
2. 可以将标量看作零阶张量吗?
3. 如何定义三阶张量?
4. 二阶张量和三阶方阵的区别是什么?
5. 你知道对张量可进行什么样的运算?
6. 偏差张量主对角线元素之和等于什么?
7. 什么样的方向称为张量的主方向?
8. 什么样的数称为张量的特征值?
9. 对什么样的张量总是存在三个实特征值?
10. 为什么量 σ^I 、 σ^{II} 、 σ^{III} 称为不变量?
11. 偏差张量的一次不变量等于什么?
12. 什么叫张量场?
13. 球张量的散度等于什么?

参 考 文 献

- Гун Г.Я.* Лекции по механике сплошных сред. Ч. 1. М., МИСиС, 1971, 124 с. с ил.
- Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды Изд. 2-е. М., Изд-во МГУ, 1978, 288 с. с ил.
- Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М., «Наука», 1965, 426 с. с ил.
- Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ. М., Физматгиз, 1963, 412 с. с ил.
- Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М., «Мир», 1974, 319 с. с ил.
- рашевский П.К.* риманова геометрия и тензорный анализ. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967, 664 с. с ил.
- Сокольников И.С.* Тензорный анализ. М., «Наука», 1971, 374 с. с ил.

第2章 连续介质的变形

在熟悉了张量的概念之后，就可以转而研究连续介质的运动以及与运动有关的变形——微小体积或有限体积的尺寸和形状的改变。这些问题在运动学（力学中的一个分支）中进行研究，在这个分支中只研究运动的几何性质但不分析引起这种运动的原因。

力学中对任何对象的运动的研究，一般都相对于某个参照系来进行，借助于参照系确定对象在不同时刻的位置。参照系包括用作确定其它物体位置基准的参照体。监测人员和测量时间与距离的仪器仪表，相对于这个物体来说，其位置是固定不变的。通常，为了确定运动物体相对于参照体的位置，利用不同的坐标系。相对于参照体固定的笛卡儿坐标系称为观察者的坐标系，而对应的三维欧氏空间称为观察者的固定空间。

2.1 拉格朗日变量和欧拉变量

2.1.1 “点”和“质点”

在研究连续介质中进行的过程和在这种情况下利用术语“点”的时候，我们既可以指观察者固定空间的确定点，也可以指在这个空间中运动的连续介质的物质点。因此，以后术语“点”将意味空间的确定点。连续介质的物质点将称为“质点”。

在研究线、面这样的几何对象时，若利用附加定语“空间的”或“物质的”（例如空间曲面、物质体积等等），就可以认为这个外形是由相应的点或质点构成。

在所研究的时刻充满某个观察者空间域 D 的无限多质点，形成了物体；构成物体的质点的位置即它的外形在一般情况下随时间变化而变化。

2.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 变量

研究连续介质运动时，同样可能有两种方法。

第一种是以拉格朗日命名的方法，其研究对象是质点本身。此时要研究某些标量或矢量（如确定质点的密度、温度和速度）随时间的变化以及由一个质点转移到另一个质点时这些量的变化。

换言之，这些量是作为时间和表示所取质点特性的那些变量的函数。

例如，可以取任意质点在初始时刻 $t=0$ 时的笛卡儿坐标 X_i 作为变量，而它在同一观察者空间基底中的即时坐标 x_i 是时间 t 和同一质点初始坐标的函数：

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1(X_1, X_2, X_3, t) \\x_2 &= \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t) \\x_3 &= \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t)\end{aligned}$$

或简写为

$$x_i = \varphi_i(X_i, t) \quad (2-1)$$

这样，当固定初始坐标为 X_i ，并认为时间 t 是变量时，我们就可得到一个固定质点的运动规律。假定 X_i 是变量，并固定 t ，则按公式 (2-1) 就可以求得在给定时刻质点在空间中的分布。最后，如果认为 X_i 和 t 都是变量，则式 (2-1) 就是连续介质的运动规律。与平常一样，我们将假定函数 $\varphi_i(X_i, t)$ 是连续的且对所有的宗量有连续的偏导数，而对任何的 t ，关系式 (2-1) 都是互为单值的。

变量 X_1, X_2, X_3 和时间 t 称为拉格朗日变量。质点的速度和加速度的投影由下述公式确定：

$$\begin{aligned}v_i &= \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i(X_i, t)}{\partial t} \\w_i &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_i(X_i, t)}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (2-2)$$

应当指出，在一般情况下，可以用质点在初始时刻 $t=0$ 时的曲线坐标 β_i ，来代替将所研究的物质体积内一个质点与另一个质点区别开来的笛卡儿坐标 X_i 。

2.1.3 随动坐标系

到现在为止，是采用相对于观察者的坐标系——不动的笛卡儿直角坐标系 x_1, x_2, x_3 来研究连续介质的运动的。但是，容易看出（见第一章第一节），关系式 (2-1) 用质点的拉格朗日坐标可完全确定它在空间中的位置。这就使得我们能够再引入一个参照系——移动的可变形的坐标系 X_1, X_2, X_3 ，它被称为随动坐标系。

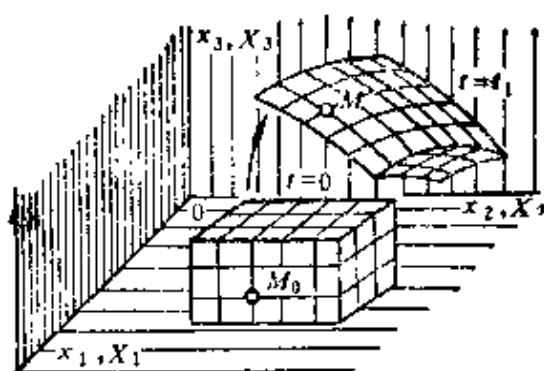


图9 体元的变形

在初始时刻，随动坐标系的物质坐标线是直线，在任何随后的时刻，它们与连续介质的质点一起又重新移向这个系统的坐标线上，但是，在一般情况下将被弯曲。可以说，随动曲线坐标系固定到介质上并与它一起变形（图9）。

2.1.4 欧拉(Euler)变量

由欧拉所发展的第二种方法，是将观察者的固定空间或它的充满运动介质的固定部分，作为研究对象。各种表示运动的量，被认为是点和时间的函数，即认为是称为欧拉变量的三个宗量 x_i 和时间 t 的函数。

例如，在具有矢径 \vec{x} 的空间已知点，速度表达式成为 $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t) = v(x_i, t)$ 。

因此，从欧拉的观点来看，研究的对象是各种描写连续介质运动的场（标量场、矢量场或张量场）。

2.1.5 由欧拉变量向拉格朗日变量的转换

从拉格朗日观点来看,我们的兴趣在于已知的独立质点的压力、速度、温度和其它量的变化规律;而从欧拉观点来看,则兴趣在于已知空间点的这些量的变化。拉格朗日变量怎样转换为欧拉变量呢?请观察关系式(2-1)。若相对于 X_1, X_2, X_3 解这个关系式,则得到

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2-3)$$

即转到欧拉变量上。如果区分出坐标为 x_1, x_2, x_3 的点,则式(2-3)表明,什么样的独立质点在时刻 t 到达指定的空间点。若相对 x_i 解式(2-3),就得到了关系式(2-1),即由欧拉变量转换到拉格朗日变量上。

我们再来研究这种转换的另一种方法。假设已知速度矢量的分量为 v_1, v_2, v_3 , 它们是坐标 x_1, x_2, x_3 和时间 t 的函数。写出微分方程组 $dx_i/dt = v_i(x_i, t)$, 若将连续介质质点独立出来的 X_1, X_2, X_3 做为固定参数时,这些微分方程以相应坐标对时间的导数来确定速度分量。解这个方程组并由条件 $t=0, x_1 = X_1, x_2 = X_2, x_3 = X_3$ 决定积分常数之后,就可求出未知的关系式(2-1)。

思 考 题

1. 质点的拉格朗日坐标是否随时间变化?
2. 什么是随动坐标系?
3. 空间质点的欧拉坐标是否随时间变化?
4. 欧拉方法和拉格朗日方法有什么区别?

2.2 有限变形张量

2.2.1 拉格朗日和欧拉对运动的描述

研究连续介质的运动,但首先并不提出小位移的要求。选择某个基底 e_1, e_2, e_3 , 认为它们相对观察者是固定的。

设质点 M 在开始 $t=0$ 时位于具有初始坐标 (X_1, X_2, X_3)

的空间点，而在此时 t 位于具有即时坐标 (x_1, x_2, x_3) 的点。

相应的矢径可以写作

$$\vec{X} = X_i \vec{e}_i = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3 \quad (2-4)$$

$$\text{和} \quad \vec{x} = x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad (2-5)$$

$$\text{并且} \quad \vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \quad (2-6)$$

其中 \vec{u} 是位移矢量。

如上面已指出的，描述连续介质运动的初始坐标和即时坐标之间的关系可用两种方法表示。

在第一种方法即拉格朗日方法中，质点的初始坐标和时间 t 是独立变量： $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$ ，或以矢量形式表示。

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad (2-7)$$

通常，假定这个关系是互为单值的，且函数 (2-1) 有任何阶的连续偏导数。

此外，连续介质的运动可以用 $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ 或

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t) \quad (2-8)$$

的关系描述。

其中，独立变量是坐标 x_i 和时间 t 。欧拉的运动描述方法可以求得即时时刻占有位置 (x_1, x_2, x_3) 的质点的初始坐标。

与前述情况一样，认为关系式 (2-3) 是互为单值的和连续的，对所有的宗量都有连续的偏导数。

很明显，公式 (2-1) 和 (2-3) 可用唯一的一对互逆的函数表示，且函数行列式〔雅可比 (Jacobi) 行列式〕

$$\Delta = | \partial x_i / \partial X_k | \quad (2-9)$$

在充满连续介质的域内的每一质点都不为零。

2.2.2 映射、体积变化

对于任意确定的时间值 t ，函数组 (2-1)、(2-3) 可以从两个观点出发来进行研究。一种观点如上所述，它们在固定的观察者笛卡儿坐标系中描述连续介质的运动 (变形)。

从另一种观点出发，第一组函数 (2-1) 确定着附有笛卡儿坐标系 $OX_1X_2X_3$ 的三维欧氏空间的某域 D (图10, a) 在附有笛卡儿

坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 的另一三维欧氏空间的域 E (图10, b) 的光滑映射。确定不同时刻 t 物体外形的这种映射的逐次性, 描述了连续

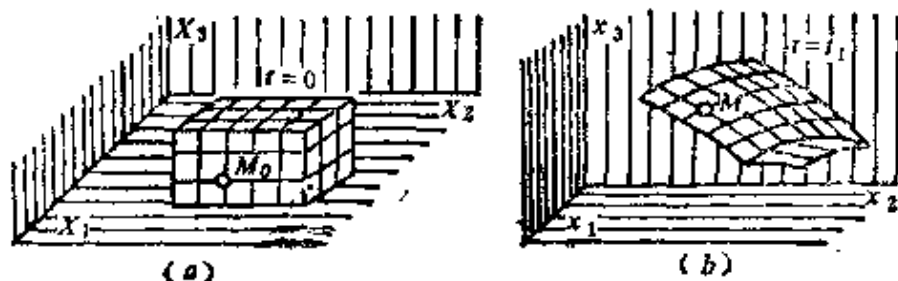


图10 作为映射的连续介质的运动

介质的运动和与此相关的物体的变形。映射的雅可比行列式(2-9)是映射的最重要的性质。它的模数是在所研究点的映射畸变系数, 这个系数表示在指定点映射时, 包含该点在内的无限小域的体积改变了几倍, 精度可以达到高阶无穷小。由此得出, 雅可比行列式(2-9)不能变为零, 又因为映射(2-1)连续地依赖于 t , 而 $t=0$ 时同样映射的雅可比行列式等于 1, 则它总是正的。

对于体元 $d\omega$ (即时的) 和 dW (初始的), 有关系式

$$d\omega = \Delta dW \quad (2-10)$$

不可压缩条件可写作下述形式:

$$\Delta = 1 \quad (2-11)$$

同样, 如果固定时间 t , 则函数组(2-3)确定着域 E 向域 D 的映射, 此时

$$dW = \left| \partial X_i / \partial x_k \right| d\omega \quad (2-12)$$

例: 运动的拉格朗日描述有如下形式:

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2 + X_3(e^t - 1), \quad x_3 = X_3 + X_2(e^{-t} - 1)$$

正如所料, 在 $t=0$ 时, 这个关系确定了质点的初始位置:

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3。$$

如果向反函数变换, 就可求得运动的欧拉描述:

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = \frac{x_3(e^t - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}, \quad X_3 = \frac{x_2(e^{-t} - 1) - x_3}{1 - e^t - e^{-t}}$$

2.2.3 仿射映射

形为

$$x_i = b_i + a_{ik} X_k \quad (2-13)$$

的线性映射称为仿射映射，在整个空间 $O X_1 X_2 X_3$ 它是确定的。映射的雅可比行列式 $|a_{ik}|$ 在空间的每一点保持常数。

仿射映射的优点在于，任何圆球都映射为椭圆球，而平面和直线的映射为平面和直线。由仿射映射所描述的变形状态称为均匀的。

由公理 1.1 得到， $\{a_{ik}\}$ 是张量，在将它变换为对角线形式时，映射化为沿新坐标轴的拉伸（压缩），式(2-13)取简单的形式：

$$x_1 = b_1 + a_1 X_1, \quad x_2 = b_2 + a_2 X_2, \quad x_3 = b_3 + a_3 X_3 \quad (2-14)$$

任何微分映射都是“局部仿射”的。因此，在无限小的域内它具有和在整个空间仿射映射一样的性质。

2.2.4 有限变形张量

为了描述连续介质的变形，我们研究两个接近质点的位移。设初始时刻它们位于点 M_0 和 N_0 。（图 11），而在有限时刻它们位于点 M 和 N 。

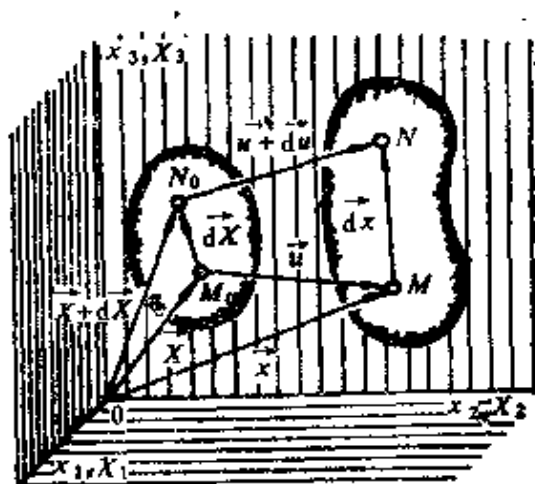


图11 体元的终了变形

点 M 和 N 之间无限小距离的平方 $(dx)^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3$ 。以拉格朗日运动描述为基础，按式(1-46)， $\vec{dx} = (dx/dX) dX$ ，

或以标量的形式表示, $dx_p = (\partial x_p / \partial X_i) dX_i$ 。

因此, 线元的平方为

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} dX_i dX_k \quad (2-15)$$

在初始时刻, 质点间距离的平方 $(dX)^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = dX_i dX_i$,
 $= \delta_{ik} dX_i dX_k$ 。

取差值

$$\begin{aligned} (dx)^2 - (dX)^2 &= \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} - \delta_{ik} \right) dX_i dX_k \\ &= 2L_{ik} dX_i dX_k \end{aligned} \quad (2-16)$$

作为质点邻域变形的量度。若物体中处处均有 $(dx)^2 - (dX)^2 = 0$, 则物体的运动称为绝对刚体运动。如果在点 M , 不变量 $(dx)^2 - (dX)^2 \neq 0$, 则称物体在这点处于变形状态。

具有分量

$$L_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} - \delta_{ik} \right) \quad (2-17)$$

的二阶对称张量称为拉格朗日有限变形张量〔格林 (Green) 张量〕。

由式(2-6)有 $x_p = u_p + X_p$,

因而

$$\frac{\partial x_p}{\partial X_i} = \frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \delta_{pi}$$

和

$$\frac{\partial x_p}{\partial X_k} = \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{pk}$$

因为 $\frac{\partial u_p}{\partial X_i} \delta_{pk} = \frac{\partial u_i}{\partial X_k}$, $\delta_{pi} \cdot \delta_{pk} = \delta_{ik}$, 所以得到

$$\frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} = \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ik}$$

和

$$L_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \frac{\partial u_p}{\partial X_k} \right) \quad (2-18)$$

现取欧拉运动描述作为基础，重复进行推导。变形的量度

$$\begin{aligned} (dx)^2 - (dX)^2 &= \left(\delta_{ik} - \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k \\ &= 2E_{ik} dx_i dx_k \end{aligned} \quad (2-19)$$

可借助于有限变形的欧拉张量〔阿曼西(Almansi)张量〕来计算，欧拉张量的分量为

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} - \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \right) \quad (2-20)$$

若转换成位移矢量的分量，就得到

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \right) \quad (2-21)$$

2.2.5 对数变形

应当指出，如同由映射的“局部仿射性”所得出的那样，在变形过程中，球形微元变为椭球，为此，我们在没有变形的介质中取出由半径为 dr 的球形表面所围出的物质体积。在初始坐标中，这个曲面的方程将是

$$(dX)^2 = \delta_{ik} dX_i dX_k = dr^2$$

变形后，同一物质体积的曲面方程形为

$$(dX)^2 = \delta_{ik} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_p} dx_p \right) \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_q} dx_q \right) = dr^2$$

或

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_q} dx_p dx_q = dr^2 \quad (2-22)$$

并确定了半轴为 dr_1 、 dr_2 、 dr_3 的椭球，这就是众所周知的变形物质椭球。

设 $dr_1 \geq dr_2 \geq dr_3$ 。进行对数计算

$$\bar{\varepsilon}_1 = \ln \frac{dr_1}{dr}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \ln \frac{dr_2}{dr}, \quad \bar{\varepsilon}_3 = \ln \frac{dr_3}{dr} \quad (2-23)$$

并考虑对数变形张量

$$T_{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

该张量的主轴与物质椭球的轴相重合，其主分量 $\bar{\varepsilon}_i$ 称为主对数变形。

在任意坐标系中的张量分量可以借助典型公式(1-21)求得。

我们来研究一下怎样描述不可压缩性条件。变形前球形微元

的体积为 $dW = \frac{4}{3}\pi(dr)^3$ ，而物质椭球的体积是 $dW = \frac{4}{3}\pi dr_1$

$dr_2 dr_3$ ，令这两个体积相等并对得到方程的两边取对数，有

$$\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = 0$$

即对数变形之和为零。

为了更深入地研究对数变形的性质，我们来研究直角平行六面体的均匀变形。用 B 、 L 、 H 分别表示即时 t 平行六面体的宽、长和高。设它的初始尺寸是 B_1 、 L_1 、 H_1 ，最终尺寸是 B_2 、 L_2 、 H_2 (图12)。

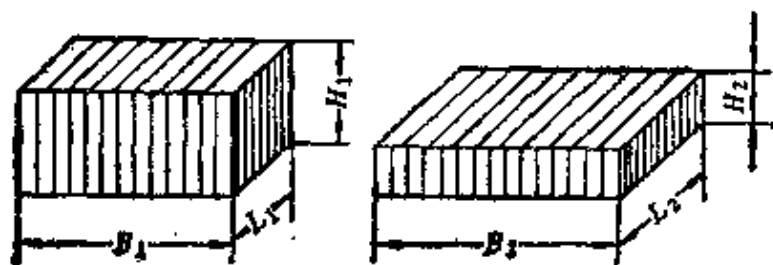


图12 直角平行六面体的均匀变形

假定平行六面体压缩了 dH 。相应的无限小的相对变形为

$$d\varepsilon_H = dH/H$$

在物体由 H_1 压缩到 H_2 时，物体的总的相对变形量是

$$\bar{\varepsilon}_H = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{H} = \ln \frac{H_2}{H_1}$$

在宽向和长向的总相对变形分别为

$$\bar{\varepsilon}_B = \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{B} = \ln \frac{B_2}{B_1}, \quad \bar{\varepsilon}_L = \int_{L_1}^{L_2} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_2}{L_1}$$

因此，在均匀变形的情况下，对数变形是无限小变形求和的结果，所以它们常常被称为真变形。由此可见它的可加性，即在确定几次操作中实现的总变形时可以将它们相加。

变形后物体尺寸与变形前相应尺寸的比值用下述形式表示： $\eta = H_2/H_1$ ——压缩系数， $\beta = B_2/B_1$ ——展宽系数， $\lambda = L_2/L_1$ ——延伸系数（延伸）。

对于不可压缩材料， $H_1 B_1 L_1 = H_2 B_2 L_2$ ，并且

$$\frac{H_2}{H_1} \frac{B_2}{B_1} \frac{L_2}{L_1} = \eta \beta \lambda = 1$$

对此式取对数后，得到了以下述形式表示的不可压缩性条件：

$$\ln \eta + \ln \beta + \ln \lambda = \bar{\varepsilon}_H + \bar{\varepsilon}_B + \bar{\varepsilon}_L = 0$$

例题2.1 有限变形

在 $t = t_1$ 时，质点的初始坐标以下述关系与即时坐标相联系（均匀变形）（图13）：

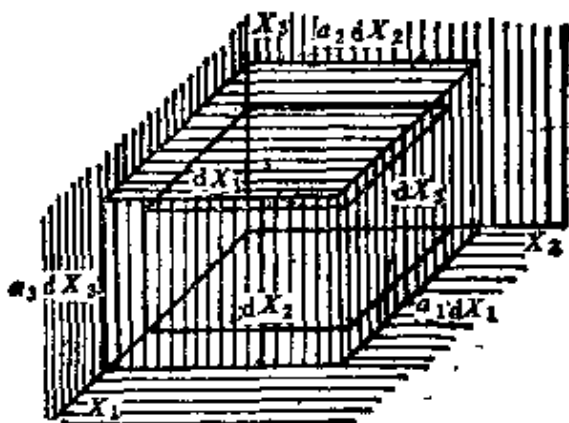


图13 例题2.1图示

$$x_1 = a_1 X_1, \quad x_2 = a_2 X_2, \quad x_3 = a_3 X_3$$

试求有限变形张量的拉格朗日分量和欧拉分量以及对数变形张量分量的表达式。

解 因为

$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = a_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = a_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = a_3, \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = 0$$

当 $i \neq k$ 时,

有

$$T_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a_1^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a_2^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(a_3^2 - 1) \end{bmatrix}$$

类似地

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{1}{a_1}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \frac{1}{a_2}, \quad \frac{\partial X_3}{\partial x_3} = \frac{1}{a_3}, \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = 0$$

当 $i \neq k$ 时 (2-25)

$$T_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_3^2} - 1\right) \end{bmatrix}$$

现转向计算对数的变形分量。变形前物质球的方程为

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = dr^2$$

物质椭球的方程是 $\frac{\partial X_i}{\partial x_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_q} dx_p dx_q = dr^2$ 。将关系式

(2-25) 代入到这个方程中, 它就成为

$$\frac{dx_1^2}{(a_1 dr)^2} + \frac{dx_2^2}{(a_2 dr)^2} + \frac{dx_3^2}{(a_3 dr)^2} = 1 \textcircled{1}$$

椭球的主半轴是 $dr_1 = a_1 dr$, $dr_2 = a_2 dr$, $dr_3 = a_3 dr$, 主对数变形为 $\bar{\epsilon}_1 = \ln a_1$, $\bar{\epsilon}_2 = \ln a_2$, $\bar{\epsilon}_3 = \ln a_3$, 此时

$$T_{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \ln a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln a_3 \end{bmatrix}$$

张量 T_L 、 T_E 和 $T_{\bar{\epsilon}}$ 的主轴和坐标轴一致。

思考题

1. 雅可比行列式(2-9)是否能够改变符号?
2. 什么是仿射映射?
3. 什么样的运动被称为绝对刚性的?
4. 在连续介质运动时球形微元以怎样的方式变形?
5. 在什么情况下对数变形具有可加性?
6. 不可压缩介质主对数变形之和是什么?

2.3 板料的有限变形

2.3.1 曲面的参数化

研究曲面或曲面的某个部分, 而它们可以拓扑地 (即单值、连续地) 映射到某个直角坐标为 β_1 、 β_2 的平面域去 (图14)。

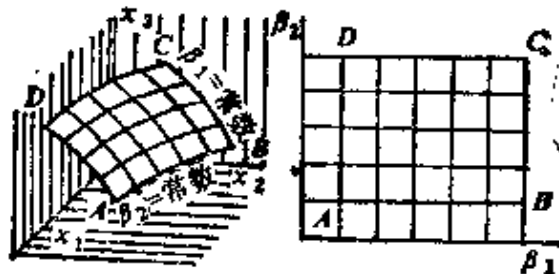


图14 曲面的参数化

如果这个映射给定, 则说曲面已参数化, 值 β_1 和 β_2 被称为已知

①原书本式为 $\frac{dx_1}{(a_1 dr)^2} + \frac{dx_2}{(a_2 dr)^2} + \frac{dx_3}{(a_3 dr)^2} = 1$, 不妥。——译者

曲面点 M 的曲线坐标。

点 M 的矢径是曲线坐标的函数，即有曲面的参数方程

$$\vec{x} = \vec{x}(\beta_1, \beta_2) \quad (2-26)$$

它等效于三个标量方程： $x_1 = x_1(\beta_1, \beta_2)$, $x_2 = x_2(\beta_1, \beta_2)$, $x_3 = x_3(\beta_1, \beta_2)$ 。

这些方程可以对于 β_1 和 β_2 求解，此时曲面点的坐标将用 $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的关系式联系，这个式子被称为曲面隐式方程。

2.3.2 度量张量

分布于曲面上的弧微元与矢径 \vec{x} 对应，对于 \vec{x} 的微分，有关系式：

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_2} d\beta_2。 \text{ 矢量 } \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} = \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \vec{e}_i$$

沿坐标线 β_1 的切线方向，矢量 $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} = \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \vec{e}_i$ ；沿坐标线 β_2 的

切线方向，它们在切平面上形成了对应于切平面和曲面接触点的局部坐标系（一般情况下是非正交的）。

令

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \beta_1} \right)^2 \\ g_{22} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \beta_2} \right)^2 \\ g_{12} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta_2} = \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} + \frac{\partial x_2}{\partial \beta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} + \frac{\partial x_3}{\partial \beta_1} \frac{\partial x_3}{\partial \beta_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

g_{11} 、 g_{22} 、 g_{12} 是度量张量

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

的分量。

在所有的非特殊的曲面点上，它们服从不等式 $g_{11} > 0$ ，

$$g_{22} > 0, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0.$$

分布于曲面上的弧微元的平方由下式确定

$$\begin{aligned} dS^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = & \left(\frac{\partial x}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial x}{\partial \beta_2} d\beta_2 \right)^2 = g_{11} d\beta_1^2 \\ & + 2g_{12} d\beta_1 d\beta_2 + g_{22} d\beta_2^2 \end{aligned} \quad (2-28)$$

它被称为曲面的第一二次形。

2.3.3 正交网格

有 $f(\beta_1, \beta_2, c) = 0$ 的曲线族，其中 c 是任意变量，如果曲面上每一点有一条且仅有一条曲线通过，则称这个单参数曲线族为规则的。

若两规则的曲线族的曲线相交但并不彼此相切，则此两个规则曲线族的总和称为曲面上的曲线网格。如果网格不同族的曲线相交成直角，则称其为正交的。

通过曲面给定点的曲面平截面中，可以分离出法向截面，它们所在的平面包含有该点处曲面的法线。

每一个法向截面 C 的曲率由欧拉公式确定：

$$1/R = (\cos^2 \alpha)/R_1 + (\sin^2 \alpha)/R_2$$

其中， R_1 和 R_2 是主曲率半径，亦即 R 的最大值和最小值。它们对应于主法向截面 C_1 和 C_2 。此外，角 α 是截平面 C 和 C_1 间的夹角。

容易看出，主法向截平面 C_1 ($\alpha = 0$) 和 C_2 ($\alpha = \pi/2$) 互相垂直。

在表面上每一点处于主曲率方向的曲线称为曲率线。很明显，它们在表面上形成正交网。

2.3.4 克希霍夫-拉甫(Kirchhoff-Love)公设

研究物体的有限变形，该物体由其间距离与物体其它尺寸相比很小的两个曲面所限定。

与两个表面等距离的点的几何位置称为中心面。

在中心面的任意点再作一垂线。它在两个限定面之间线段的长度确定着板料的厚度。

在板壳理论中采用的基本假定是克希霍夫-拉甫公设，即变形前中心面的法线在变形后仍为法线。由此得出。在板料变形的任何时刻，对数变形张量的主方向之一确定为中心面的法线，而其余的两个方向位于与中心面相切的平面内。

2.3.5 主对数变形〔4〕

我们来研究初始为平板的板料的有限变形情况。坐标基底配置在中心面上，应使其单位矢量 e_1 和 e_2 位于它的切平面上。设 x_1 、 x_2 、 x_3 是任意质点的即时坐标，而 X_1 、 X_2 、 X_3 是它的初始坐标。很明显，对于中心面 $X_3 = 0$ （图15）。

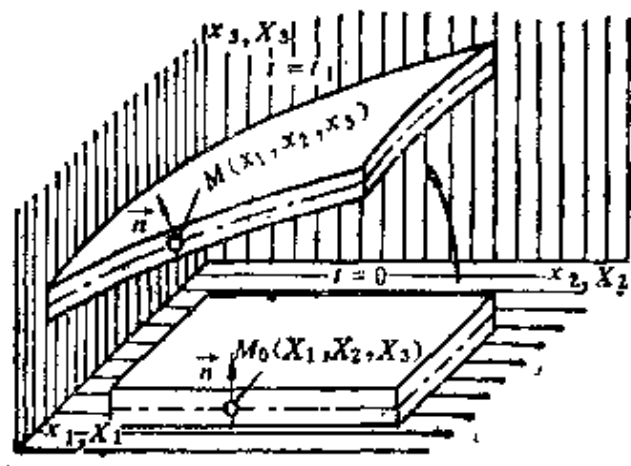


图15 板料的变形

利用变量 X_1 和 X_2 使中心面参数化。在任意时刻 t 这个曲面的方程以下述形式写出：

$$x_1 = x_1(X_1, X_2), \quad x_2 = x_2(X_1, X_2), \quad x_3 = x_3(X_1, X_2) \quad (2-29)$$

以位于中心面上的点 $M_0(X_1^0, X_2^0, 0)$ 为中心建立半径为 dr 的球形微元。在初始时刻($t=0$)，球与中心面在点 M_0 处的切平面之交线是半径为 dr 的圆， dr 的即时坐标是 $X_1 = X_1^0 + dr \cos \omega$ 和 $X_2 = X_2^0 + dr \sin \omega$ 。

在时刻 t ，初始的圆变为椭圆，由点 M 到点 N 距离的平方按公式 $dS^2 = g_{ik} dX_i dX_k$ ($i, k = 1, 2$)确定，其中 N 点也位于按公式 $dS^2 = g_{ik} dX_i dX_k$ 确定的椭圆上，在初始时刻坐标为

$$X_1^0 + dX_1, X_2^0 + dX_2, dX_1 = dr \cos \omega, dX_2 = dr \sin \omega.$$

其中 $g_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k}$ 是度量张量(2-27)的分量。

在我们的情况下,

$$dS^2 = g_{11} (dr \cos \omega)^2 + 2g_{12} dr^2 \cos \omega \sin \omega + g_{22} (dr \sin \omega)^2 \quad (2-30)$$

由极值条件

$$\partial(ds/dr)/\partial\omega = 0$$

能求出变形张量主轴的方向。

由此有

$$\operatorname{tg} 2\omega = 2g_{12} / (g_{11} - g_{22}) \quad (2-31)$$

将此值代入到公式(2-30), 得到了主要关系式:

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)_{1,2} = \sqrt{\frac{g_{11} + g_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4g_{12}^2 + (g_{11} - g_{22})^2}}$$

因此, 主对数变形可用以下关系确定:

$$\bar{\epsilon}_1 = \ln \sqrt{\frac{g_{11} + g_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4g_{12}^2 + (g_{11} - g_{22})^2}} \quad (2-32)$$

$$\bar{\epsilon}_2 = \ln \sqrt{\frac{g_{11} + g_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4g_{12}^2 + (g_{11} - g_{22})^2}} \quad (2-33)$$

相对减薄由不可压缩性条件确定, 所以

$$\bar{\epsilon}_3 = -\ln \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (2-34)$$

应当指出, 差 $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ 总是正的。然而, 也有可能这个差值小于 1 的情况。此时, 主变形的足标改变了, 式(2-32)、(2-34)和(2-33)的右边给出 $\bar{\epsilon}_1$ 、 $\bar{\epsilon}_2$ 和 $\bar{\epsilon}_3$ 的相应值。

对于不位于中心面上的点, 变形也按同样公式确定, 但要考虑 g_{ik} 与 X_j 的关系。

对于小变形(此时位移可能是有限位移)利用下述关系是合理的, 即:

$$\bar{\epsilon}_{11} = \sqrt{g_{11}} - 1 \quad \bar{\epsilon}_{12} = g_{12} \quad \bar{\epsilon}_{22} = \sqrt{g_{22}} - 1$$

例题2.2 板的有限变形

沿四周 γ 固定的板发生变形, 使得位于中心面上的质点仅仅获得垂直位移 (图16)。

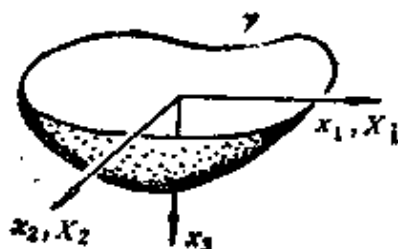


图16 板的有限变形

在时刻 t 时中心面的方程是: $x_3 = f(x_1, x_2)$ 。

试求位于中心面上的点的主对数变形和变形张量主轴的方向。

解 位于板中心面上的任意质点在该情况下即时坐标和初始坐标的关系为下述形式: $x_1 = X_1, x_2 = X_2, x_3 = f(x_1, x_2) = f(X_1, X_2)$ 。

按公式(2-27), $g_{11} = 1 + p^2, g_{22} = 1 + q^2, g_{12} = pq$,

$$\text{其中 } p = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial X_2}$$

$$\text{由于 } (g_{11} - g_{22})^2 = (p^2 - q^2)^2$$

$$\text{和 } 4g_{12}^2 + (g_{11} - g_{22})^2 = (p^2 + q^2)^2$$

$$\text{得到 } \bar{\varepsilon}_1 = \ln \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \bar{\varepsilon}_2 = 0 \quad \bar{\varepsilon}_3 = -\ln \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

按下式确定变形张量主轴的方向

$$\text{tg} 2\omega = 2pq / (p^2 - q^2)$$

思 考 题

1. 什么样的曲面称为参数化的曲面?
2. 什么是第一二次型?
3. 由克希霍夫-拉甫公设是否可以确定对数变形张量的主方向?

2.4 小变形张量

2.4.1 小位移

现在我们放弃一般的办法，并认为位移分量和它的梯度都很小。

特别是，若认为 $\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \ll 1$ ，则在式(2-17)中可忽略这些量的乘积，结果可得到小变形的拉格朗日张量，其分量为

$$l_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right)$$

与此相类似，若假定 $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ 与 1 相比很小，在式(2-21)中略去它们的乘积，则可得到小变形的欧拉张量，其分量为

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

由关于小位移的假定，可以做出结论：拉格朗日坐标和欧拉坐标之间的差别是不重要的，而相应的张量则一致，即 $e_{ik} = l_{ik}$ 。

以后在小变形理论中将仅仅利用拉格朗日坐标。

我们将研究两个时刻：开始时刻 ($t=0$) 和终了时刻 ($t=t_1$)。

质点的终了位置（在 $t=t_1$ 时）将借助位移矢量 u 确定。这就可以改变（在一段的范围内）符号的系统，用小写字母 x_i 写出质点的初始（拉格朗日）坐标。

此时位移矢量场以 $u = u(x)$ 的形式写出。

2.4.2 介质微元的移动、转动和变形

连续介质运动和绝对刚体运动的区别在于相邻质点的距离发生变化，介质发生变形。

从未变形的物体中分离出质点 M （矢径 \vec{x} ）和邻近于它的质点 N （矢径 $\vec{x} + d\vec{x}$ ）。

质点 M 的位移等于 $u(\vec{x})$ ，邻近质点的位移则是

$$\vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + d\vec{u} \quad (2-35)$$

其中, 按式 (1-46) (见1.3节), 微分式

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} d\vec{x} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\vec{x} \quad (2-36)$$

张量 $[\partial u_i / \partial x_k]$ 是矢量 \vec{u} 对矢量宗量 \vec{x} 的导数, 将它分解为对称张量和反对称张量之和, 就得到

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] d\vec{x} \\ & + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] d\vec{x} \end{aligned}$$

稍微改变第二个加数, 将反对称张量表示为

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

式中 (见公式1-48) $\vec{\omega} = 0.5 \text{rot} \vec{u}_0$

我们得到

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] d\vec{x} = \vec{\omega} \times d\vec{x} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u} \times d\vec{x} \textcircled{1}$$

因而

$$\vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u} \times d\vec{x} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] d\vec{x} \quad (2-37)$$

我们假定位移很小, 研究这个方程的几何意义。先回忆一下绝对刚体力学的某些结果。

在这样的物体中选择任意点——极点 P 。当物体绕通过极点的瞬时轴转动时, 任何其它点 P' 的速度是极点 P 的平动运动速度

①原文括号中为正号, 不妥。——译者

v_0 和转动速度 $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ 的几何和。

这里， $\vec{\Omega}$ 是沿瞬时转动轴分出的角速度矢量，而 \vec{r} 是由极点向所研究的质点引出的相对矢径。

因此
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

将这个方程两边乘以 dt 后，就将位移微元 \vec{u} 分解为平动和转动之和：

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + (\vec{\Omega} dt) \times \vec{r}$$

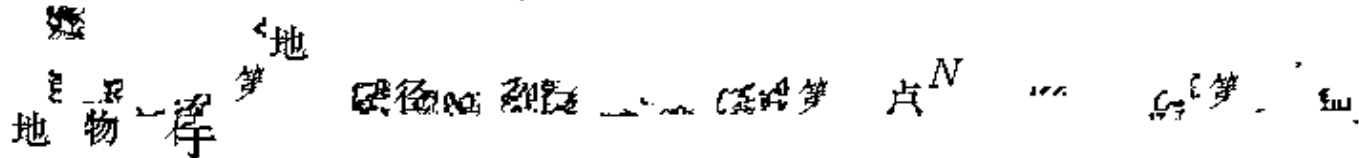
应当指出，乘积 $\vec{\Omega} dt$ 是绕转动轴的回转角。

再回到连续介质，研究包括质点 M 和 N 的物质体积微元。很明显，公式(2-37)的前两个加数描述了将单元体作为极点在 M 点的绝对刚体时，由于单元体的运动而引起质点 N 的位移。此时

N 的相对矢径等于 $d\vec{x}$ ，而转动角是 $\frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}$ 。

式(2-37)的最后一个加数定性表示在绝对刚体力学中没有遇到的新现象——连续介质的变形。

例题2.3 单元体的变形



$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

小变形张量为

$$T_{ik} = [\varepsilon_{ik}] = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

转动角矢量 $\vec{\omega}$ 为

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u = -\frac{1}{2} \alpha e_3$$

2.4.3 应变张量

对称张量

$$T_{ik} = [\varepsilon_{ik}] \quad (2-38)$$

$$\text{其中} \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2-39)$$

称为小应变线性张量，或简称为小应变张量。

我们研究它的分量有什么样的几何意义。

前面我们假定质点 M 和 N 是完全任意的。现选择质点 N ，使得矢量 \vec{dx} 平行于 x_1 轴，则 $\vec{dx} = (dx_1, 0, 0)$ 。

在变形后，矢量 \vec{dx} 变成矢量 $\vec{dx} + \vec{du}$ ，且矢量 \vec{du} 的分量按式 (2-36) 计算。

质点 M 和 N 之间在变形前后的距离分别用 L 和 l 表示，则

$$L = |dx_1|, \quad l = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} |dx_1|$$

以前我们是将分析局限于小变形的情况（见72页），这允许以无穷小量 $(\partial u_i / \partial x_i)^2$ 这样的精度将上式写成

$$l = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} |dx_1| = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) |dx_1|$$

物质线段MN的相对伸长是

$$\frac{l-L}{L} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \epsilon_{11}$$

因而，分量 ϵ_{11} 等于变形时平行于 x_1 轴的微元线段的相对伸长。

同样，分量 ϵ_{22} 和 ϵ_{33} 等于平行于相应轴 x_2 、 x_3 的物质线段的相对伸长。

变形之前用平行于坐标轴的平面在连续介质中分离出棱长 dx_1 、 dx_2 、 dx_3 的无限小平行六面体（图17）。当介质变形时，它们在空间中移动且本身发生变形，它的棱长变化，而各棱之间的原始直角也发生歪曲。

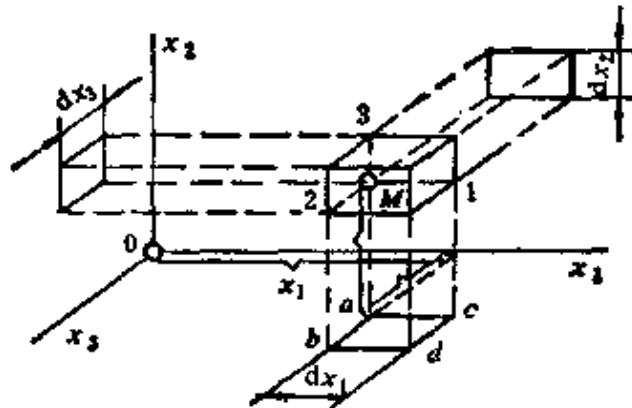


图17 六面体微元

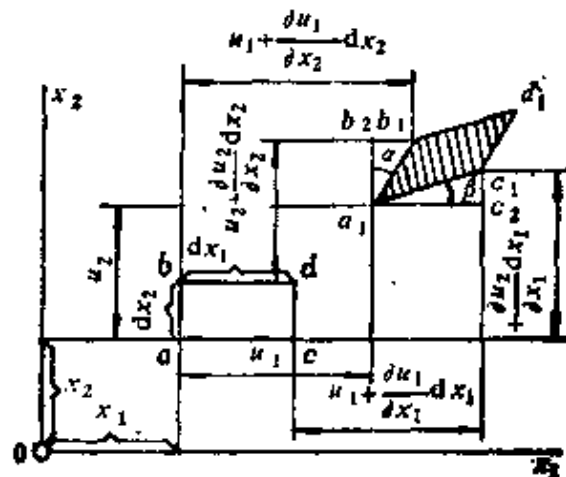


图18 线应变和切应变

按上面的叙述，这个平行六面体棱的相对面长可用线应变分量 ε_{11} 、 ε_{22} 、 ε_{33} 来表示。

图18所示为平行六面体在 x_1Ox_2 平面上的投影。其中 $abcd$ 是变形前的投影， $a_1b_1c_1d_1$ 是变形后的投影。质点 a 位移分量是 u_1 和 u_2 。

按公式(2-35)计算的质点 $b(x_1, x_2 + dx_2)$ 和 $c(x_1 + dx_1, x_2)$ 的位移分量分别为：

$$\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2, \quad u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 \right)$$

$$\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1, \quad u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \right)$$

棱 ab 在平面 x_1x_2 上转角的正切为：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 - u_1}{u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + dx_2 - u_2} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}$$

由于 $\partial u_2 / \partial x_2$ 与 1 相比是微小量，所以略去分母上的 $\partial u_2 / \partial x_2$ ，

写作 $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ 。

类似地，棱 ac 在平面 x_1x_2 的转动角 $\beta = \partial u_2 / \partial x_1$ 。因而，在线段 ab 和 ac 之间的初始直角的减小值为 $\partial u_1 / \partial x_2 + \partial x_2 / \partial u_1 = 2\varepsilon_{12}$ 。

直角的这种改变（歪曲）称作它的相对切应变。

对于所研究的平行六面体在其它坐标平面上的投影，重复这种讨论，容易得出结论：应变张量的非主对角线分量 ε_{12} 、 ε_{23} 、 ε_{31} 表示角的变形。它们被称为切应变分量。

我们对分量 ε_{ik} 的符号进行一下分析。

如果函数 u_1 随 x_1 增加而增加，即 $\varepsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1 > 0$ ，那末很明显我们碰到的是长度 dx_1 增加的情况（图18中质点 c 向右的

位移大于质点 a 的位移)。这就是说，如果 $\varepsilon_{11} > 0$ ，则发生伸长，如果 $\varepsilon_{11} < 0$ ，就发生缩短，这对 ε_{22} 和 ε_{33} 同样也是正确的。

此外，如果函数 u_2 随 x_1 的增加而增加，则 $\beta = \partial u_2 / \partial x_1 > 0$ ，此时（见图18）线段 ac 由 $+x_1$ 轴转向 $+x_2$ 轴；同样地在 $\alpha = \partial u_1 / \partial x_2 > 0$ 时，线段 ab 由 $+x_2$ 轴转向 $+x_1$ 轴。

由此得出，如果在 $+x_1$ 轴和 $+x_2$ 轴之间的直角减小，则切应变 ε_{12} 是正的。这个规则对于其余平面上的切应变也是正确的。

因此，正的线应变 ε_{11} 、 ε_{22} 、 ε_{33} 对应于沿坐标轴伸长，负的对应用于缩短。

正的切应变 ε_{12} 、 ε_{23} 、 ε_{31} 对应于坐标轴正向间夹角减小，而负的对应用于那些角增大。

2.4.4 应变分量的其它符号

在连续介质力学中采用的符号对于一般的应力和变形的分析、定理和基本方程的推导是非常方便的。但它们与材料力学、金属压力加工理论和其它工程学科中所使用的符号稍有不同。

下而比较三种符号系统

I	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}	ε_{12}	ε_{23}	ε_{31}
II	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{zz}	ε_{xy}	ε_{yz}	ε_{zx}
III	ε_x	ε_y	ε_z	$-\frac{1}{2} \gamma_{xy}$	$-\frac{1}{2} \gamma_{yz}$	$-\frac{1}{2} \gamma_{zx}$

第 I 行是所采用的系统。如果转变形式为 $x \equiv x_1$ ， $y \equiv y_1$ ， $z \equiv z_1$ 的惯用坐标写法并用相应的字母代替足标，则很容易由所采用的系统得到第 II 行的符号。

在第 III 行符号中，线应变和切应变使用了不同的字母。

每一组符号都有自己的优点和缺点。现把列于第 I 行中的符号系统作为基本的。在变换为曲线坐标时，利用字母足标更加方便，此时按相同足标求和的规则已失效。

2.4.5 应变的主分量

利用坐标轴旋转, 可以将应变张量 T_e 化为对角线形式:

$$T_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

并约定, 应变主分量满足不等式 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ 。

在新的坐标中, 张量的非主对角线分量等于零, 不存在切应变, 仅仅在坐标轴方向有线应变。立方体元的面平行于坐标面, 高为 dl , 体积为 $W = dl^3$, 它由于变形转变为棱长为 $dl(1 + \varepsilon_1)$ 、 $dl(1 + \varepsilon_2)$ 、 $dl(1 + \varepsilon_3)$ 的直角平行六面体。

这个平行六面体的体积 $w = dl^3(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = dl^3 \times (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)$ 。

精确到二阶微小量的相对体积变化是

$$\frac{w - W}{W} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2-41)$$

应变主分量 ε_i 是特征方程 $|\varepsilon_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0$ 的实根, 特征方程也可以用展开形式表示

$$\lambda^3 - \varepsilon^I \lambda^2 + \varepsilon^{II} \lambda - \varepsilon^{III} = 0 \quad (2-42)$$

变形张量不变量为

$$\varepsilon^I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_0 \quad (2-43)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{II} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2-44)$$

$$\varepsilon^{III} = |\varepsilon_{ik}| = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (2-45)$$

一次不变量 ε^I 的物理意义很明显, 这个值是变形介质体元的体积相对变化, 它同样可由下式得出:

$$\varepsilon^I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div} \vec{u} \quad (2-46)$$

例题2.4 主应变分量

以如下形式给出变形张量 (纯剪):

$$T_s = \begin{bmatrix} 0 & 0.5\gamma & 0 \\ 0.5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为了可定性而假定 $\gamma > 0$ ，试将张量化为对角线形式。

解 特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0.5\gamma & 0 \\ 0.5\gamma & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

或以展开的形式表示 $-\lambda^3 + \gamma^2\lambda/4 = 0$ 。

方程的根是 $\lambda_1 = \frac{1}{2}\gamma$ ， $\lambda_2 = 0$ ， $\lambda_3 = -\frac{1}{2}\gamma$ 。

在化为主轴后，张量可以用下式写出

$$T_s = \begin{bmatrix} 0.5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5\gamma \end{bmatrix}$$

变形可归结为沿第一轴的拉伸和沿第三轴的压缩。

例题2.5 应变张量的散度

试证明存在下述关系

$$2\operatorname{div}T_s = \nabla^2 \vec{u} + 3\operatorname{grad}\epsilon_s$$

式中， $\nabla^2(\quad) = \frac{\partial^2(\quad)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\quad)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\quad)}{\partial x_3^2}$ ，是拉普

拉斯(Laplace)算子。

解 按式(1-51)

$$\begin{aligned} 2\operatorname{div}T_s &= 2\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_k} \vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \\ &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} \vec{e}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \end{aligned}$$

这个方程右边第一项是

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \vec{e}_i = \nabla^2 (u_i \vec{e}_i) = \nabla^2 \vec{u}$$

此外, $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \operatorname{div} \vec{u} = 3e_0$, 并且 $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \vec{e}_i = 3 \operatorname{grade}_0$

因而 $2 \operatorname{div} T_i = \nabla^2 \vec{u} + 3 \operatorname{grade}_0$

这就是要证明的。

2.4.6 应变偏差张量

应变张量 T_i 能够表示成偏差张量 D_i 和球张量 $e_0 I$ 之和的形式:

$$T_i = D_i + e_0 I \quad (2-47)$$

或

$$[e_{ik}] = [e_{ik} - e_0 \delta_{ik}] + e_0 [\delta_{ik}]$$

根据定义, 偏差张量 D_i 的一次不变量为零。因此偏差张量表征与体积变化无关的变形。

公式 (2-47) 把无限小体元的变形表示成两个变形的叠加, 其中第一个用偏差张量描述, 表示不改变体元体积情况下它的形状畸变。而第二个分量 (球张量) 表示这个体元的各向均匀拉伸和压缩。

用 e_{ik} 表示偏差张量的分量, 则 $e_{ik} = e_{ik} - e_0 \delta_{ik}$ 。

因为偏差张量 $D_i = [e_{ik}]$ 满足对称条件, 所以它可以化为对角线形式。很明显, 应变偏差张量的主方向与应变张量的主方向是一致的。

特征方程为: $|e_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0$ 或

$$\lambda^3 + e^{\text{I}} \lambda - e^{\text{II}} = 0 \quad (2-48)$$

因为偏差张量的一次不变量等于零。

不变量是

$$\begin{aligned} e^{\text{II}} &= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{33} & e_{31} \\ e_{13} & e_{11} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} e_{ik} e_{ik} \\ &= -\frac{1}{6} [(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2] \end{aligned}$$

$$+ 6(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2)] \quad (2-49)$$

$$e^{\text{II}} = |e_{ik}| \quad (2-50)$$

引入量

$$\Gamma = +2\sqrt{|e^{\text{II}}|} = \sqrt{2e_{ik}e_{ik}} \quad (2-51)$$

称它为切应变强度。今后这个量将广泛地应用于描述不同材料的行为。

例：举例研究变形状态的最重要的情况。

简单拉伸（介质是不可压缩的， $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ， $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon$ ，

$\varepsilon > 0$ ）

$$T_s = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -0.5\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -0.5\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \sqrt{3}\varepsilon \quad (2-52)$$

简单压缩（介质是不可压缩的， $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ ， $\varepsilon_3 = -\varepsilon$ ，

$\varepsilon > 0$ ）

$$T_s = \begin{bmatrix} 0.5\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0.5\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \sqrt{3}\varepsilon \quad (2-53)$$

纯剪

$$T_s = \begin{bmatrix} 0 & 0.5\gamma & 0 \\ 0.5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = |\gamma| \quad (2-54)$$

平面变形 ($u_1 = u_1(x_1, x_2)$ ， $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ ， $u_3 = 0$)

$$T_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对不可压缩性介质

$$\Gamma = 2\sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2} \quad (2-55)$$

不可压缩介质的三维变形

在这种情况下, $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$ 和

$$\Gamma = 2\sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{31}^2)} \quad (2-56)$$

利用公式 (1-43) 计算应变偏差张量的主分量:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1/\sqrt{3})\Gamma \cos\beta_e, & e_2 &= (1/\sqrt{3})\Gamma \sin(\beta_e - \pi/6), \\ e_3 &= -(1/\sqrt{3})\Gamma \cos(\pi/3 - \beta_e) \end{aligned}$$

表征变形方式的角 β_e 与下述参数 ν_e 有关:

$$\nu_e = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (2-57)$$

比值 $\nu_e = [\text{tg}(\beta_e - \pi/6)/\text{tg}(\pi/6)]$ 取决于变形形式, 可在 $0 \sim \pi/3$ 的范围内变化。同时

简单拉伸对应于 $\nu_e = 1$ 和 $\beta_e = 0$;

纯剪对应于 $\nu_e = 0$, $\beta_e = \pi/6$;

简单压缩对应于 $\nu_e = -1$, $\beta_e = \pi/3$ 。

2.4.7 变形协调方程

在连续介质运动时, 任何物质质点的位移都由三个函数描述, 即位移矢量 u 的分量 u_i 。这个质点邻域的变形由六个量来描述

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

如果正向的问题即根据位移分量计算应变分量归结为函数 u_i 对坐标微分的话, 则反向的问题即根据变形分量 ε_{ik} 求出函数 u_i 并不总是有解的。

从物理上来说, 这一点很明显。将物体分成若干微平行六面体, 每一个都规定六个应变分量。如果应变分量彼此不以确定的关系相联系, 则由变形后的单个的平行六面体不能重新垒出连续变形的物体; 在它们之间会形成无限小的裂缝 (空洞)。

我们来导出上述关系。这些关系的总数等于六, 它们分成两组, 第一组是在一个平面内应变分量之间的关系, 第二组是在不

同平面中的应变分量之间的关系。

第一组

我们写出方程

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

以下述方式将它们微分

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2}$$

将这两个方程逐项相加，求得：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

采用足标循环移动，得到

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}$$

第二组

现转到第二组方程。为此将式

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right);$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)$$

以下述形式微分：

$$\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1} \right);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_2} \right);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right)$$

将第一行两个式子相加，再减去第三个式子，得到 $\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}$

$$+ \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}。$$

再一次对 x_3 微分这个方程，并注意到

$$\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

这是所求的第二组关系中的一个。进行足标循环移动，又可得到两个同样类型的方程。将它们与第一组方程联立，就得到如下的方程组：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \end{aligned} \right\} (2-58)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} \end{aligned} \right\} (2-59)$$

这些方程首先由圣维南(St. Venant)得到, 称为变形协调方程。

2.4.8 曲线坐标

设 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ 是局部正交基底 \vec{b}_i (见图16) 中的位移矢量的曲线分量, 即在每一点 M 都发生分解 $\vec{u} = \tilde{u}_i \vec{b}_i$ 。

在正交曲线坐标系中计算应变张量的公式是

$$\left. \begin{aligned} \tilde{e}_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \beta_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} \tilde{u}_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_3} \tilde{u}_3 \\ \tilde{e}_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \beta_2} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \beta_3} \tilde{u}_3 + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1} \tilde{u}_1 \\ \tilde{e}_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \beta_3} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1} \tilde{u}_1 + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2} \tilde{u}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-60)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\tilde{e}_{12} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{\tilde{u}_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\tilde{u}_1}{H_1} \right) \\ 2\tilde{e}_{23} &= \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\tilde{u}_3}{H_3} \right) + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left(\frac{\tilde{u}_2}{H_2} \right) \\ 2\tilde{e}_{31} &= \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left(\frac{\tilde{u}_1}{H_1} \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{\tilde{u}_3}{H_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-61)$$

式中, H_1, H_2, H_3 是拉梅系数。

例题2.6 在圆柱坐标系中的变形

试求圆柱坐标系中的应变分量。

解 对圆柱坐标系有(见1.1节): $\beta_1 = r, \beta_2 = \omega, \beta_3 = z,$
 $\tilde{u}_1 = u_r, \tilde{u}_2 = u_\omega, \tilde{u}_3 = u_z, H_1 = H_r = 1, H_2 = H_\omega = r, H_3 = H_z = 1。$

按式(2-60)、(2-61)计算 e_{ik} , 得到:

●原书 H_r 写作 H_2 , 不妥。——译者

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{r,r} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\omega,\omega} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{z,z} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 2\varepsilon_{r,\omega} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\omega}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \omega} \\
 2\varepsilon_{\omega,z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \omega} + \frac{\partial u_\omega}{\partial z} \\
 2\varepsilon_{z,r} &= -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}
 \end{aligned} \right\} (2-62)$$

例题2.7 在球坐标系中的变形

试求球坐标系中的应变分量。

解 对球坐标系有 (见1.1节)

$$\beta_1 = r, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \chi, \quad \tilde{u}_1 = u_r, \quad \tilde{u}_2 = u_\omega, \quad \tilde{u}_3 = u_\chi$$

拉梅系数是 $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\omega = r \sin \chi$, $H_3 = H_\chi = r$ 。

应变分量按下列公式求得:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{r,r} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \varepsilon_{\omega,\omega} &= \frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\chi}{r} \operatorname{ctg} \chi \\
 \varepsilon_{\chi,\chi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \chi} + \frac{u_r}{r} \\
 2\varepsilon_{r,\omega} &= \frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial u_r}{\partial \omega} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\omega}{r} \right) \\
 2\varepsilon_{\omega,\chi} &= \frac{\sin \chi}{r} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{u_\omega}{\sin \chi} \right) + \frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial u_r}{\partial \omega} \\
 2\varepsilon_{\chi,r} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\chi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \chi}
 \end{aligned} \right\} (2-63)$$

思 考 题

1. 关于小位移的假定导致什么样的简化?
2. 小应变张量的主对角线分量描述体元的什么应变? 它的非主 角线分量描述的又是什么应变?
3. 在什么情况下应变分量是正的?
4. 小应变张量一次不变量的物理意义是什么?
5. 其棱平行于应变张量主轴的体元怎样变形?
6. 什么叫切应变强度?

参 考 文 献

- Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд. 2-е, М., «Высшая школа», 1968, 12 с. с ил.
- Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды, М., «Наука», 1978, 304с. с ил.
- Гун Г.Я.* Лекции по механике сплошных сред. Ч. 1. М., МИСиС, 1971, 124с. с ил.
- Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды, Изд. 2-е. М., Изд-во МГУ, 1978, 288 с. с ил.
- Пластическое формоизменение металлов. М., «Металлургия», 1968, 416 с. с ил.
- Авт.: Г. Я. Гун, П. И. Полухин, В. П. Полухин, Б. А. Прудковский.
- Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Изд. 3-е. Т. I, М., «Наука», 1976, 535 с. с ил.
- Смирнов-Аляев Г.А.* Сопротивление материалов пластическому деформированию. Изд. 3-е. М., Машгиз, 1978, 368 с. с ил.

第3章 连续介质的流动

我们已确定，连续介质的运动和变形是由质点初始坐标和即时坐标之间的关系给定的。由于应用非线性张量，有限变形的描述（金属压力加工过程正是以这种变形描述）在数学上遇到了很大的困难。由即时时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ ，物体外形变成与之接近的另一外形，研究这种外形变化将会使问题大大简化。在这种情况下，具有即时坐标 x_i 的质点移到具有坐标 $x_i + \Delta u_i$ 的空间点。将 Δu 除以 Δt ，并使 Δt 趋向于零，求极限便得到速度矢量场，

$$\vec{v}(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$$

它描述了全部质点流动的瞬时情景。前面我们已指出，如果知道了速度场，就能够知道以怎样的方式确定任意质点的初始坐标和即时坐标之间的联系。因此，有限变形的分析就可以归结为研究在相继的时间间隔内的速度场。

因为速度场是矢量场的特殊情况，所以描述它可以利用矢量场的一般理论。

3.1 速度场

3.1.1 流线

速度场的矢量线称为流线。它在每一点的切线与该区域内速度矢量的方向一致。

所有矢量线的总和形成了该时刻的流动图象。

速度场可能是稳定的。此时连续介质的运动称为定常运动，流动图象不随时间而变化。

不稳定的流动由不稳定速度场描述。

3.1.2 轨迹

随时间而运动的质点所描画出的曲线称为质点M的轨迹（图

19)。

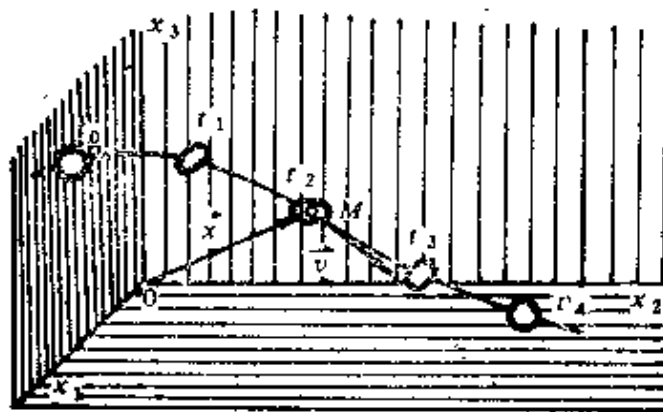


图19 质点的轨迹

质点的运动方向是沿着轨迹的切线方向。因此，通过描画出轨迹的质点的瞬时位置可以作出流线，轨迹恰与这些流线相切。

很明显，对于定常运动，轨迹与流线重合。

我们作轨迹和流线的微分方程。为了对已知时刻 \$t\$ 在空间中引出的无限小的任意线段与在时间 \$dt\$ 内连续介质质点的微小位移加以区别，约定用符号 \$\underline{dx} = (dx_i)\$ 表示前者，而用符号 \$\underline{dx}^* = (dx_i)^*\$ 表示后者。

在同一点流线切线方向和速度矢量方向重合的条件给出了如下的流线微分方程组：

$$\frac{dx_1}{v_1(x_i, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_i, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_i, t)} \tag{3-1}$$

同样，轨迹切线方向和质点 \$M\$ 微小位移矢量的方向重合，可写出下述形式的轨迹微分方程组：

$$\frac{dx_1^*}{v_1(x_i, t)} = \frac{dx_2^*}{v_2(x_i, t)} = \frac{dx_3^*}{v_3(x_i, t)} = dt \tag{3-2}$$

对于稳定流动，这些方程是一致的。

3.1.3 流管

在空间中取封闭曲线（图20），并通过该曲线的每一点引出流线，因此得到了流管（图20, a）。如果流管的横截面尺寸无限

小，则称它为流管元（图20, b）。

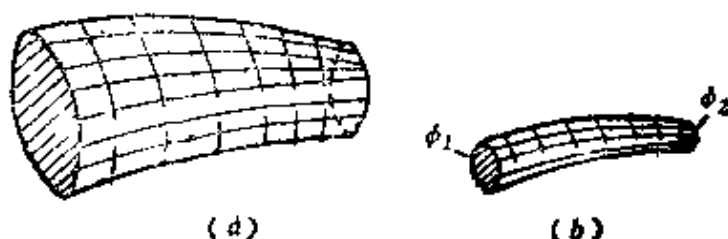


图20 流管和流管元

对于不稳定速度场来说，流管元和流管的外形随时间改变而变化。

在连续介质定常流动中，流管与其中流过液体的真实管子的行为相似。实际上，液流总是与管壁相接触的，而管壁在空间中有确定的位置，因此，如果我们用刚性表面代替管壁，则运动不发生变化。

在同样的条件下研究流管元。在流管元横截面范围内，可以认为速度是恒定的。令 v_1 和 v_2 是在面积分别为 Φ_1 和 Φ_2 的横截面中的流速（见图20）。

如果介质是不可压缩的，则通过一个截面流入的体积等于同样时间内通过另一截面流出的体积。因此可以写出等式

$$v_1 \Phi_1 = v_2 \Phi_2 \quad (3-3)$$

由此得出结论，在速度减小的地方，流管元扩张；而在连续介质速度增大的地方，流管元缩小。

3.1.4 速度的有势场

设速度场有位势，这就意味着存在某个标量函数 $\varphi(x_i)$ ，借助它可以按下述公式表示速度矢量分量：

$$v_i = \partial\varphi/\partial x_i \quad (3-4)$$

由斯托克斯（Stokes）定理得出，当在单连域中流动时，存在着速度有势场的必要和充分条件是速度的旋度为零，即

$$\text{rot } v = 0 \quad (3-5)$$

因此，速度势场常被称为无旋场。

3.1.5 速度矢量的通量

设给定了某个在空间中确定的分片光滑的表面 Σ (参见图 8)。对于具有单位法向矢量 \vec{n} 的微面元 $d\Sigma$, 速度的法向分量 v_n 以下述关系式确定:

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = v_i \cos(\vec{n}, \vec{e}_i) \quad (3-6)$$

回忆矢量通量的定义, 就求得单位时间内流过表面 Σ 的体积等于通过这个表面的速度矢量的通量, 即:

$$q = \iint_{\Sigma} v_n d\Sigma \quad (3-7)$$

利用下述定理:

定理 3.1 高斯-奥斯特洛格拉得斯基 (Gauss-Ostrogradskii) 定理

设域 W 由分片光滑的封闭曲面 Σ 限定, \vec{n} 是 Σ 的单位法向矢量, 方向向外。此外, 设在域 W 内和表面 Σ 上, 矢量场 \vec{a} 是确定的和连续的, 且坐标 a_i 对 x_i 有连续的可在域 W 内被积分的一阶偏导数。这样则有以下式:

$$\iint_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\Sigma = \iiint_W \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dW \quad (3-8)$$

所以, 如果表面 Σ 是封闭的, 则由高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式得出:

$$\iint_{\Sigma} v_n d\Sigma = \iiint_W \operatorname{div} \vec{v} dW \quad (3-9)$$

设介质是不可压缩的, 则流入域 W 的体积等于由它流出的体积, 即 $\iint_{\Sigma} v_n d\Sigma = 0$, 再由基本公理得出

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (3-10)$$

相反, 如果 $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, 则通过任何封闭表面的速度矢量通量等于零, 且介质是不可压缩的。

散度等于零的速度场称为无源场或管形场。

同时是无源场和有势场的速度场称为调和矢量场。

这种场的势满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (3-11)$$

实际上,不可压缩条件(3-10)与方程(3-4)一起可导出关系(3-11)。

3.1.6 连续介质中的可变场

今后我们必须研究在运动介质中随时间变化而发生的过程。

假定有这样的运动且速度场用下述函数确定:

$$\underline{v} = v(x, t) \quad (3-12)$$

换言之, \underline{v} 是在时刻 t 通过点 $M(x)$ 的质点的速度矢量。

我们来研究某个标量函数 $\varphi(x, t)$, 例如液流的不同质点的温度。假定, 这函数取决于坐标和时间 t 。

函数 $\varphi(x, t)$ 随时间改变, 研究它的变化。这可以用两种方法做到, 首先, 可以研究函数在已知位置的变化, 第二可以相对于已知质点研究它。

函数 φ 在已知点的变化用 φ 对 t 的偏导数或局部导数描述:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(M, t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t} \quad (3-13)$$

在计算此偏导数时, 点 M 的矢径认为是常数。在时刻 $t + \Delta t$, 质点所处位置为 M' , 在时刻 t 质点处于初始位置 M , 为了表示在时间间隔 Δt 内已知质点的 φ 的变化, 我们取这两点的函数值之差作为 φ 的增量。这个增量与 Δt 的比值在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限称为 φ 对 t 的全导数, 表示为:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(M', t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t} \quad (3-14)$$

现求偏导数和全导数的关系。

在求函数 $\varphi(x_i, t)$ 的全导数时, 应该认为 x_i 是时间 t 的函数, 因为坐标为 x_i 的质点以速度 v 移动, 而速度 $v_i = dx_i/dt$ 。

因此, $\varphi(x, t)$ 是取决于时间的复合函数, 它的导数必须按

复合函数微分法则求出：

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} v_i \quad (3-15)$$

或以矢量形式表示：

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}\varphi \quad (3-16)$$

若转向矢量值并重复同样的讨论，就可求得矢量 \vec{a} 的偏导数的表达式：

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial a_i}{\partial t} \vec{e}_i \quad (3-17)$$

和矢量的全导数

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i} v_i = \left(\frac{\partial a_k}{\partial t} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i} v_i \right) \vec{e}_k \quad (3-18)$$

其中也包括，质点加速度是速度对时间的全导数：

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} v_i \quad (3-19)$$

式 (3-16) 中的 $\vec{v} \text{grad}\varphi$ 一项和公式 (3-18) 中的 $\left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i} \right) v_i$ 一

项称为对流项，它们与连续介质运动时质点的移动有关。

如果场是定常的，则这个函数对时间的偏导数变为零，在一般情况下，由于存在对流项，所以全导数不为零。

现在研究对物质体积积分，即对同样质点组成的体积所进行的积分随时间的变化：

$$J = \iiint_W \varphi dW$$

式中 φ 是某个标量函数。

在时间 dt 内，主要是两个原因引起积分 J 发生变化，即函数 φ 的变化和体积 W 的变化 (图20)。

如果体积 W 不发生变化, 则在时间 dt 内函数 φ 得到增量 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$,

而积分 J 获得增量 $\iiint_W \frac{\partial \varphi}{\partial t} dW dt$ 。

设函数 φ 保持不变, 仅仅体积 W 变化。这样, 只有当某些质点通过在 t 时刻包围体积 W 的空间表面 Σ 流入或流出时, 才会发生这种情况。

在时间 dt 通过这个表面微元 $d\Sigma$ 流出的连续介质体积为 $v_n dt d\Sigma$ 。

由此积分 J 得到了增量 $\varphi v_n dt d\Sigma$, 很明显, 与体积变化有关的积分 J 的全部增量将等于 $\iint_{\Sigma} \varphi v_n d\Sigma dt$ 。

因此, 积分 J 的全部变化是

$$dJ = \iiint_W \frac{\partial \varphi}{\partial t} dW dt + \iint_{\Sigma} \varphi v_n d\Sigma dt$$

而对时间的导数将有形式:

$$\frac{dJ}{dt} = \iiint_W \frac{\partial \varphi}{\partial t} dW + \iint_{\Sigma} \varphi v_n d\Sigma \quad (3-20)$$

利用高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式, 将面积分变为体积分:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \varphi v_n d\Sigma &= \iint_{\Sigma} \varphi v_i n_i d\Sigma = \iiint_W \frac{\partial(\varphi v_i)}{\partial x_i} dW \\ &= \iiint_W \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_i dW + \iiint_W \varphi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dW \end{aligned}$$

代入式 (3-20) 之后, 得到

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \iiint_W \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_i \right) + \varphi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] dW \\ &= \iiint_W \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dW \quad (3-21) \end{aligned}$$

例题3.1 计算全导数

给定速度场 $v_1 = x_1 e^{-t}$, $v_2 = x_1 x_2 e^{-2t}$, $v_3 = x_3 e^t$ 。试求加速度分量。

解 利用公式 (3-19):

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_i} v_i = -x_1 e^{-t} + x_1 e^{-2t}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} v_i = -2x_1 x_2 e^{-2t} + x_1 x_2 e^{-2t} \\ &\quad + x_1^2 x_2 e^{-4t} \end{aligned}$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} v_i = x_3 e^t + x_3 e^{2t}$$

3.1.7 速度场和映射

设连续介质的运动以 $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ 的形式给出, 式中 X_i 和 x_k 分别是在不动的观察者空间中质点的初始笛卡儿坐标和即时笛卡儿坐标。

很明显, 对于任意的质点, 运动时它的拉格朗日坐标保持不变, 即 $\frac{\partial X_i}{\partial t} = 0$ 。

利用公式 (3-15), 得到 $\frac{\partial X_i}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x_k} v_k = 0$ 或

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} v_k = -\frac{\partial X_i}{\partial t} \quad (3-22)$$

方程组 (3-22) 是相对于速度分量 v_k 的线性代数方程组。方程组的雅可比映射行列式 (2-9) 是 $\Delta = |\partial X_i / \partial x_k| > 0$ 。对于不可压缩介质, $\Delta = 1$ 。

方程组 (3-22) 的解以下述形式写出〔1〕:

$$v_i = -\frac{\partial X_k}{\partial t} \frac{\Delta_{k,i}}{\Delta} \quad (3-23)$$

其中, $\Delta_{k,i}$ 是在行列式 Δ 中元素 $\partial X_k / \partial x_i$ 的代数余子式。

假定介质是不可压缩的，速度场是定常的，计算流动域内任意点 M 的局部导数 $\partial X_i / \partial t$ 。为此分离出一个包括流线 γ 在内的流管元，被研究的质点恰在流线 γ 上。由流管元表面和两个接近的横截面 ω, ω_1 围出一个无限小的物质体元，我们来研究它沿流管元的运动（图21）。这个体元的体积保持不变，它等于横截面积 S 与体元长度 Δl 的乘积。

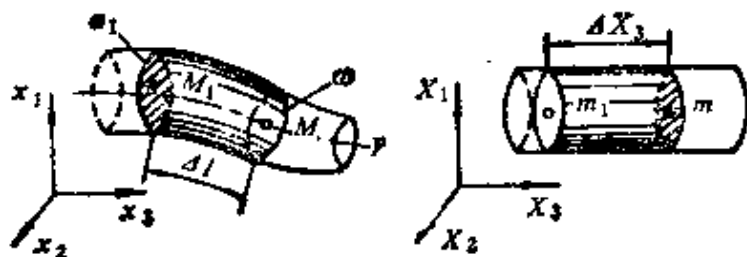


图21 物质体积沿流管元的运动

选择时间参考原点并配置好坐标系，使得在 $t=0$ 时被研究的体元处于介质的刚性位移区，该位移平行于 x_3 轴并具有速度 v_0 。

（图21），质点 m （截面 ω ）的拉格朗日坐标是 (X_1, X_2, X_3) ，而沿同一流线运动的接近于它的质点 m_1 （截面 ω_1 ），其拉格朗日坐标是 $(X_1, X_2, X_3 - \Delta X_3)$ 。

在时刻 t ，质点 m 与点 M 重合，而质点 m_1 与位于同一流线的 M_1 点重合。

根据局部导数的定义，

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_i(M; t + \Delta t) - X_i(M; t)}{\Delta t}$$

在时刻 t ，具有拉格朗日坐标 (X_1, X_2, X_3) 的质点 m 位于点 M ，而在时刻 $t + \Delta t$ ，具有拉格朗日坐标 $(X_1, X_2, X_3 - \Delta X_3)$ 的质点 m_1 位于质点 M ，因此， $\partial X_1 / \partial t = \partial X_2 / \partial t = 0$ ， $\partial X_3 / \partial t = -\Delta X_3 / \Delta t$ 。

利用不可压缩性条件。体元体积在 $t=0$ 时为 $\Phi_0 \Delta X_3$ ，而在时刻 t 时，这个体积是 $\Phi \Delta l$ ，其中 $\Delta l = v \Delta t$ ， Φ_0 和 Φ 分别是横截面积的初始值和即时值， v 是速度。

由体元体积不变条件 $\Phi v \Delta t = \Phi_0 \Delta X_3$ 和方程 (3-3) 得出, $\Delta X_3 / \Delta t = \Phi v / \Phi_0 = v_0$ 。

因而, 对于不可压缩介质的稳定流动, 象图中指出那样配置坐标后, 就有:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{\partial X_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial X_3}{\partial t} = -v_0 \quad (3-24)$$

其中 v_0 是刚性平动移动的速度。此时速度分量为:

$$v_1 = -v_0 \Delta_{31}, \quad v_2 = -v_0 \Delta_{32}, \quad v_3 = -v_0 \Delta_{33} \quad (3-25)$$

3.1.8 利用混合的欧拉-拉格朗日变量建立速度场

研究不可压缩介质在表面 S 所围出的流管中的三维定常流动。规定 $t=0$ 时在以速度 v_0 平行于 x_3 轴作刚性位移的区域中, 坐标面 $X_1 = \text{常数}$, $X_2 = \text{常数}$ 。如果在变形区中作出 $x_3 = \text{常数}$ 的流管横截面, 则在这些截面上 $X_1 = \text{常数}$ 和 $X_2 = \text{常数}$ 的线形成了曲线网格, 它可以确定下述的混合关系:

$$x_1 = f(x_3, X_1, X_2), \quad x_2 = g(x_3, X_1, X_2) \quad (3-26)$$

因而, 若质点 X_1 、 X_2 位于在连续介质刚性位移区所作的横截面 Ω_0 ($X_3 = \text{常数}$) 上, 且知道了 X_1 、 X_2 的坐标, 则可以(例如实验地)建立 (3-26) 式的关系, 并可以确定质点处于在变形区所做的截面 Ω ($x_3 = \text{常数}$) 上时该质点的坐标 x_1 、 x_2 。

初看起来, 关系式 (3-26) 并未给出变形的全部图景。特别是它们不能确定 $X_3 = \text{常数}$ 的横截面的弯曲。

但是如 П. И. 波鲁欣 (П. И. Полухин) 和 В. К. 沃伦佐夫 (В. К. Воронцов) 所指出的, 式 (3-26) 能够建立一个速度场, 也就是能够充分地确定连续介质的运动。

实际上, 如果研究已知的关系:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1, \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} = 0$$

(这些关系表示了 $\partial x_i / \partial x_i = \delta_{ii}$ 的条件) 并且完成式 (3-26) 右边部分的微分 (这部分是 x_i 的复合函数), 则得到以 $(\partial X_i / \partial x_i)$ 为变量的线性代数方程组, 解方程组得到:

$$\begin{aligned} \Delta_0 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial g}{\partial X_2}, & \Delta_0 \frac{\partial X_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial g}{\partial X_1}, \\ \Delta_0 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial f}{\partial X_2}, & \Delta_0 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial X_1}, \\ \Delta_0 \frac{\partial X_1}{\partial x_3} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial X_2} - \frac{\partial f}{\partial X_2} - \frac{\partial g}{\partial x_3} \right), \\ \Delta_0 \frac{\partial X_2}{\partial x_3} &= \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} - \frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial g}{\partial X_1} \right) \end{aligned}$$

式中,

$$\Delta_0 = \frac{\partial f}{\partial X_1} - \frac{\partial g}{\partial X_2} - \frac{\partial f}{\partial X_2} - \frac{\partial g}{\partial X_1} = \frac{D(x_1, x_2)}{D(X_1, X_2)}$$

是域 Ω 向 Ω_0 映射的雅可比行列式。

转向关系式 (3-25), 得到以下述形式表示的速度表达式:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -v_0 \Delta_{31} = -v_0 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \\ v_2 &= -v_0 \Delta_{32} = -v_0 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) \\ v_3 &= -v_0 \Delta_{33} = -v_0 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) = -\frac{v_0}{\Delta_0} \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

实验建立速度场可归结如下。例如, 研究在孔型中的轧制过程。

用伍德 (Wood) 合金将具有纵向刻线的铅薄片粘结起来, 可以确定 $X_2 = \text{常数}$ 的坐标面 (即薄片表面)。此时, 刻线放在 $X_1 = \text{常数}$ 的坐标面上。在轧制过程中, 这些固定在变形金属中

的表面以一定的方式进行变形。停止轧制过程之后，可以由轧辊中抽出未轧完的坯料，然后在刨床上刨去一层 $\Delta x_3 = \text{常数}$ ，将得到的横截面拍照下来（图22）。将 x_3 固定时由线 $X_1 = \text{常数}$ 、 $X_2 = \text{常数}$ 构成之曲线网格节点坐标 x_1 、 x_2 的测量数据加以近似处理，就可得到函数（3-26）。

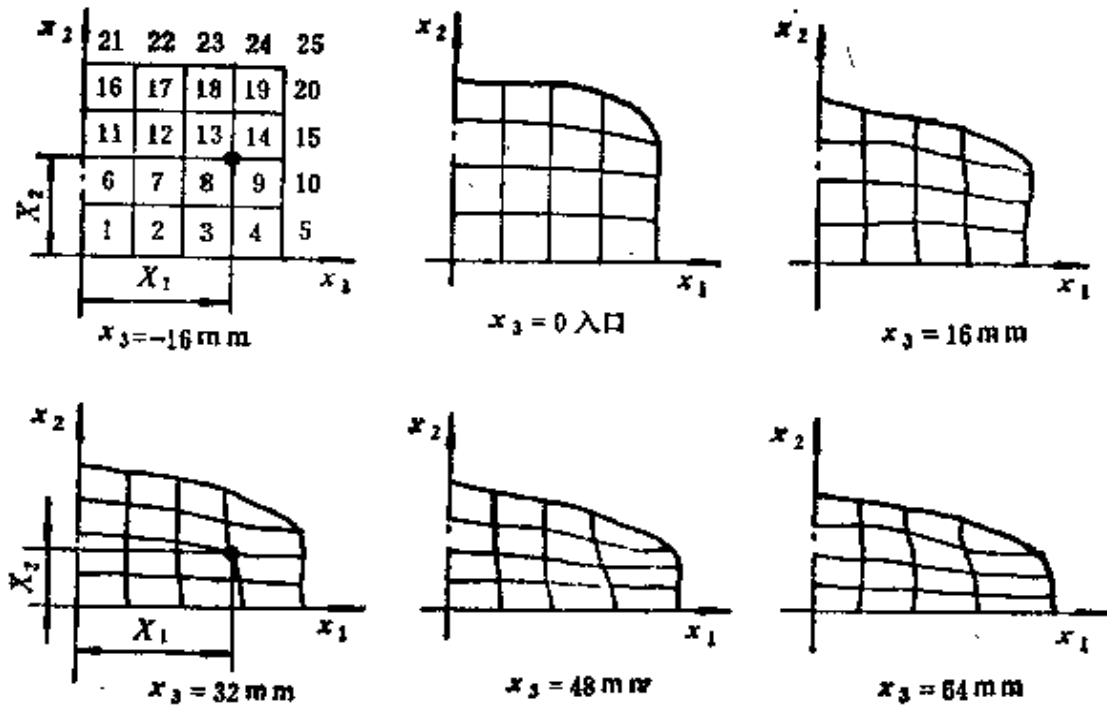


图22 轧件横截面上坐标网格的变形（据B.K.沃伦佐夫）

在图23中作出了通过孔型轧制轧件时的速度图（据B.K.沃伦佐夫的数据）作为例子。

最后研究在截面 Ω_1 ($t=0$) 采用曲线拉格朗日坐标系的情况：

$$B_1 = B_1(X_1, X_2), \quad B_2 = B_2(X_1, X_2) \quad (3-28)$$

写出条件 $dB_1/dt = dB_2/dt = dX_3/dt = 0$ ，得到与式（3-20）相似的方程组，它的解就是速度分量：

$$v_1 = -v_0 \frac{\Delta_{31}}{\Delta_0}, \quad v_2 = -v_0 \frac{\Delta_{32}}{\Delta_0}, \quad v_3 = -v_0 \frac{\Delta_{33}}{\Delta_0} \quad (3-29)$$

式中, $\Delta_0 = \frac{D(B_1, B_2)}{D(X_1, X_2)}$ 是映射式(3-28)的雅可比行列式。

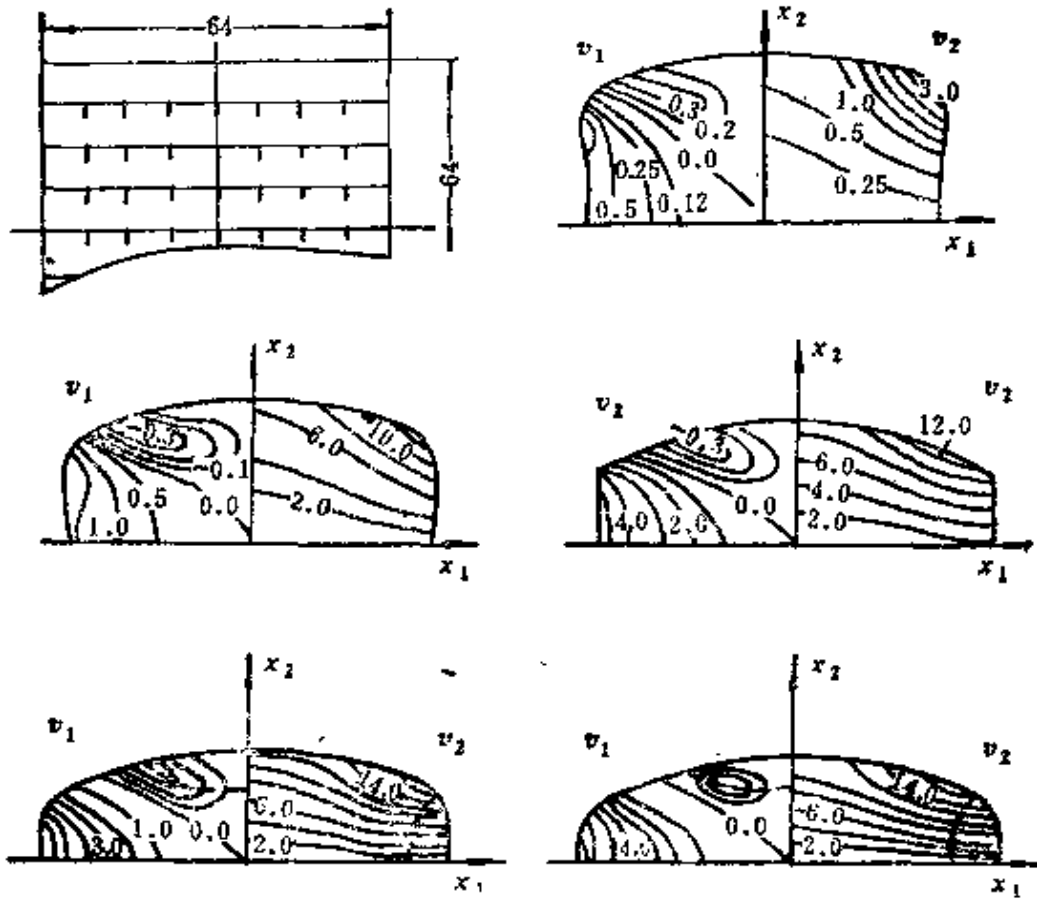


图23 通过孔型轧制时塑性流动的运动学 (据B.K.沃伦佐夫)

思 考 题

1. 什么是流线? 什么是轨迹?
2. 在什么情况下流线和轨迹重合?
3. 单位时间内流过表面的连续介质的体积是什么?
4. 流管元与流管有什么区别?
5. 什么样的速度场称为无源场?
6. 对时间的全导数和偏导数的区别是什么?

3.2 应变速率张量、流函数

3.2.1 应变速率

让我们利用在观察者空间中确定的笛卡儿坐标系 x_i 。在连续介质发生运动的域中取出体元 W ，并研究位于其中的点 M 和接近于它的点 N ， M 、 N 的矢径分别为 \vec{x} 和 $\vec{x} + d\vec{x}$ (图24)。

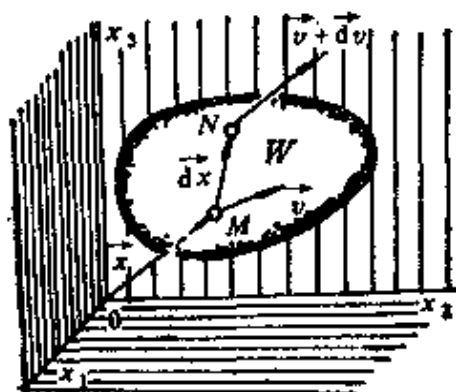


图24 连续介质的流动

点 M 处的速度等于 $\vec{v}(\vec{x})$ ，而在邻近点的速度是 $\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{v} + d\vec{v}$ ，其中，按式 (1-46) (1.3 节) 微分为 $d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} d\vec{x} =$

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] d\vec{x}$$

将张量 $[\partial v_i / \partial x_j]$ 即矢量 \vec{v} 对矢量宗量 \vec{x} 的导数分解为对称和反对称张量之和，与式 (2-37) 相似，得到

$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}) + \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \times d\vec{x} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\vec{x} \quad (3-30)$$

重复对位移场的讨论 (2.4 节)，容易证明，式 (3-30) 以三个加数和的形式表示 N 点的速度，这三个加数是：体元 W 平动位移速度 $\vec{v}(\vec{x})$ ；与体元作为绝对刚体而发生的转动相联系的速

度 $\frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \times d\vec{x}$ ，以及最后与体元变形有关的分量：

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] d\vec{x}$$

3.2.2 应变速率张量

对称张量

$$T_{\xi} = [\xi_{ik}] \quad (3-31)$$

称为应变速率张量，其中 $\xi_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]$ (3-32)

现在研究它的分量有什么样的几何意义。

我们给时间 t 以增量 dt 。这时介质质点获得小的位移 $d\vec{u} = \vec{v} dt$ 。

位移场 $d\vec{u} = (du_i)$ 对应于具有下述分量的应变张量场：

$$d\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (du_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (du_k)}{\partial x_i} \right]$$

将分量 $d\varepsilon_{ik}$ 除以时间增量 dt 并使 dt 趋向于零。

值

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{ik}}{dt} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \left(\frac{du_i}{dt} \right)}{\partial x_k} + \frac{\partial \left(\frac{du_k}{dt} \right)}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \xi_{ik} \quad (3-33) \end{aligned}$$

称为应变速率。

张量 T_{ξ} 的主对角线分量是平行于坐标轴之微元线段的相对伸长速率。

张量 T_{ξ} 的非主对角线分量表示这些线段之间初始直角的畸变速率，即切应变速率。

下面在表中列出了应变速率分量的不同符号系统。我们仍将利用其中第一组作为基本符号系统，在变换为曲线坐标时，用字母足标代替数字足标是合理的。很明显，此时应该放弃重复足标

的求和约定。

I	ξ_{11}	ξ_{22}	ξ_{33}	ξ_{12}	ξ_{23}	ξ_{31}
I	ξ_{xx}	ξ_{yy}	ξ_{zz}	ξ_{xy}	ξ_{yx}	ξ_{zx}
II	ξ_x	ξ_y	ξ_z	$\frac{1}{2}\eta_{xy}$	$\frac{1}{2}\eta_{yx}$	$\frac{1}{2}\eta_{zx}$

3.2.3 主应变速率

通过旋转坐标轴，应变速率对称张量 $T_{\dot{\epsilon}}$ 能够化为对角线形式：

$$T_{\dot{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

且主应变速率分量 ξ_i 满足不等式 $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_3$ 。

在新的坐标系中，张量的非主对角线分量等于零，仅仅在坐标轴方向的线应变速率不为零。各面平行于坐标面的立方体元高为 dl ，体积 $W = (dl)^3$ ，在 dt 时间内变为棱长 $dl(1 + \xi_i dt)$ 和体积为 w 的直角平行六面体。

精确到比 dt 更高阶无穷小的体积相对变化是：

$$(\omega - W)/W = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)dt$$

应变速率主分量是特征方程 $|\xi_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0$ 或以展开的形式表示的特征方程：

$$\lambda^3 - \xi^I \lambda^2 + \xi^{II} \lambda - \xi^{III} = 0 \quad (3-35)$$

的实根。

应变速率张量不变量为：

$$\xi^I = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 3\xi_0 \quad (3-36)$$

$$\begin{aligned} \xi^{II} &= \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{32} & \xi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_{33} & \xi_{31} \\ \xi_{13} & \xi_{11} \end{vmatrix} \\ &= \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 \end{aligned} \quad (3-37)$$

$$\xi^{III} = |\xi_{ik}| = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \quad (3-38)$$

一次不变量 ξ^I 的物理意义很明显, 这个量等于介质体元体积相对变化速度。这同样可由下式得到:

$$\xi^I = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{v} \quad (3-39)$$

例题3.2 体元的应变速率和转动

已知定常速度场 $v_1 = 0$, $v_2 = 4x_1$, $v_3 = 4x_1$ 。试求质点的应变速率张量和角速度矢量。

解 计算张量分量

$$\frac{\vec{dv}}{\vec{dx}} = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因而

$$T_{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = -2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

由下式求主应变速率张量的分量:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

或 $\lambda^3 - 8\lambda = 0$,

因而 $\lambda_1 = 2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2\sqrt{2}$ 。

应变速率张量的主对角线形式是:

$$T_{\xi} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

例题3.3 应变速率张量的散度

试证明对不可压缩介质, 关系式

$$2\operatorname{div} T_{\xi} = \nabla^2 \vec{v}$$

是正确的, 其中 $\nabla^2 () = \frac{\partial^2 ()}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial x_3^2}$ 是拉普拉斯算子。

解 若在例题 2.5 中用速度代替位移, 则得到公式:

$$2\text{div}T_{\xi} = \nabla^2 \vec{v} + 3\text{grad}\xi_0 \quad (3-40)$$

其中 $\xi_0 = \frac{1}{3}(\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33})$

对不可压缩介质 $\xi_0 = 0$ 和 $2\text{div}T_{\xi} = \nabla^2 \vec{v}$

3.2.4 应变速率偏差张量

应变速率张量可以表示成偏差张量 D_{ξ} 和球张量 $\xi_0 I$ 之和的形式:

$$T_{\xi} = D_{\xi} + \xi_0 I \quad (3-41)$$

式中

$$\xi_0 = \frac{1}{3} \xi_{i i} = \frac{1}{3} (\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33})$$

或

$$[\xi_{i k}] = [\xi_{i k} - \xi_0 \delta_{i k}] + \xi_0 [\delta_{i k}] \quad (3-42)$$

根据定义, 偏差张量 D_{ξ} 的一次不变量等于零。因此偏差张量只说明介质体元的形状变化速率, 与体积变化无关。

式 (3-41) 将介质无限小体元的应变速率表示成两个应变速率之和, 其中第一个用偏差张量描述, 它说明无体积改变时体元形状改变的速率, 而第二个分量 (球张量) 描述这个体元各向均匀拉伸或压缩的速率。

用 $\eta_{i k}$ 表示偏差张量的分量, $\eta_{i k} = \xi_{i k} - \xi_0 \delta_{i k}$ 。

因为应变速率偏差张量 $D_{\xi} = [\eta_{i k}]$ 是对称的, 它可以化为对角线形式。

应变速率偏差张量的主方向与应变速率张量的主方向一致。

特征方程形为

$$|\eta_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0$$

或

$$\lambda^3 + \eta^{II} \lambda - \eta^{III} = 0 \quad (3-43)$$

因为它的一次不变量为零。我们有：

$$\begin{aligned} \eta^{II} &= \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{32} & \eta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{33} & \eta_{31} \\ \eta_{13} & \eta_{11} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \eta_{ik} \eta_{ik} = -\frac{1}{6} [(\xi_{11} - \xi_{22})^2 + (\xi_{22} - \xi_{33})^2 + \\ &\quad + (\xi_{33} - \xi_{11})^2 + 6(\xi_{12}^2 + \xi_{23}^2 + \xi_{31}^2)] \end{aligned} \quad (3-44)$$

$$\eta^{III} = |\eta_{ik}| \quad (3-45)$$

引入量

$$H = +2\sqrt{|\eta^{III}|} = +\sqrt{2\eta_{ik}\eta_{ik}} \quad (3-46)$$

它称为切应变速率强度。这个量和切应变强度 Γ 一样，今后将常常遇到。

3.2.5 切变形程度

上面我们已指出，知道了速度场，就能够确定质点初始坐标和即时坐标之间的关系，并能够转到计算变形。

在描述强化效果时，质点邻域的总变形起着重要的作用。切变形程度可以成为它的量度：

$$\Lambda = \int_0^t H(\tau) d\tau \quad (3-47)$$

沿着质点的整个轨迹即由它的初始位置 ($\tau=0$) 到即时位置 ($\tau=t$) 进行积分。

公式

$$H = \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} v_i \quad (3-48)$$

将切应变速率强度 H 和切变形程度 Λ 联系起来。

用五维欧氏空间 E_5 中的矢量表示小应变偏差张量 D ，(见1.3节)。质点邻域随时间而发生的变形过程将用这个空间中的某个

轨迹表示。轨迹弧的长度正是切变形程度 A 。表示材料变形强化的参数可看作这个量的函数。

例：

与分析变形相类似，我们来研究某些特殊的情况。

简单拉伸（介质是不可压缩的， $\xi_1 = \xi$ ， $\xi_2 = \xi_3 = -0.5\xi$ ， $\xi > 0$ ）

$$T_{\xi} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & -0.5\xi & 0 \\ 0 & 0 & -0.5\xi \end{bmatrix}, H = \sqrt{3}\xi \quad (3-49)$$

简单压缩（介质是不可压缩的， $\xi_1 = \xi_2 = 0.5\xi$ ， $\xi_3 = -\xi$ ， $\xi > 0$ ）

$$T_{\xi} = \begin{bmatrix} 0.5\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0.5\xi & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \end{bmatrix}, H = \sqrt{3}\xi \quad (3-50)$$

纯剪

$$T_{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5\eta & 0 \\ 0.5\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H = |\eta| \quad (3-51)$$

平面流动 ($v_1 = v_1(x_1, x_2)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2)$, $v_3 \equiv 0$)

$$T_{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & 0 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对不可压缩介质

$$H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{12}^2} \quad (3-52)$$

不可压缩介质的三维流动

在这种情况下

$$\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 0 \quad (3-53)$$

且
$$H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{11}\xi_{22} + \xi_{12}^2 + \xi_{12}\xi_{21} + \xi_{23}^2 + \xi_{23}\xi_{32} + \xi_{31}^2} \quad (3-54)$$

应变偏差张量的主分量可以用下述形式表示：

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} H \cos \beta_{\xi}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} H \sin \left(\beta_{\xi} - \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\eta_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} H \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta_\xi\right)$$

此时参数

$$v_\xi = \frac{2\xi_2 - \xi_1 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \quad (3-55)$$

由关系式 $v_\xi = [\operatorname{tg}(\beta_\xi - \pi/6)] / \operatorname{tg}(\pi/6)$ 确定角 β_ξ 。

简单拉伸对应于 $v_\xi = -1$, $\beta_\xi = 0$; 纯剪对应于 $v_\xi = 0$, $\beta_\xi = \pi/6$; 简单压缩对应于 $v_\xi = +1$, $\beta_\xi = \pi/3$ 。

例题3.4 流函数

对于不可压缩介质的平面流动, 试通过某个函数 $\psi(x_1, x_2)$ 表示速度分量, 使得在无论怎样选择函数时, 不可压缩条件都能同时满足。

解 不可压缩条件为:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3-56)$$

假定

$$v_1 = \partial\psi/\partial x_2, \quad v_2 = -\partial\psi/\partial x_1 \quad (3-57)$$

代入 (3-56) 式之后, 得到

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} \equiv 0$$

即同时满足不可压缩性条件。

让我们研究函数 $\psi(x_1, x_2)$ 有什么样的物理意义。写出流线微分方程 $dx_1/v_1 = dx_2/v_2$, 并将表达式 3-57 代入, 有:

$$\frac{dx_1}{\partial\psi/\partial x_2} = \frac{dx_2}{-\partial\psi/\partial x_1}$$

将公式变换之后, 得到 $\frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 = 0$ 或 $d\psi = 0$,

$\psi = \text{常数}$ 。

这样, 沿流线函数 $\psi(x_1, x_2)$ 保持常数值, 因此称它为流函数。

3.2.6 应变速率协调方程

重复 2.4 节的讨论并考虑到下述两个关系

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right); \quad \xi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

真正相似，可证明应变速率张量的分量与下列协调方程相联系：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \xi_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \xi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \xi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \xi_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \xi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \xi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \xi_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (3-58)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \xi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \xi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \xi_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_{23}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2 \xi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \xi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_{31}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 \xi_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (3-59)$$

3.2.7 曲线坐标

设 $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ 是速度矢量在局部正交基底 \tilde{b}_i (见 1.1 节) 上的曲线分量。

在这种情况下，点 M 处发生分解， $\vec{v} = \tilde{v}_i \tilde{b}_i$ 。

在点 M 处应变速率张量的分量按下述公式计算：

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi}_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \beta_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} \tilde{v}_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_3} \tilde{v}_3 \\ \tilde{\xi}_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \beta_2} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \beta_3} \tilde{v}_3 + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1} \tilde{v}_1 \\ \tilde{\xi}_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \beta_3} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1} \tilde{v}_1 + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2} \tilde{v}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-60)$$

$$\left. \begin{aligned}
 2\tilde{\xi}_{12} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{\tilde{v}_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{H_1} \right) \\
 2\tilde{\xi}_{23} &= \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{\tilde{v}_3}{H_3} \right) + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left(\frac{\tilde{v}_2}{H_2} \right) \\
 2\tilde{\xi}_{31} &= \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left(\frac{\tilde{v}_1}{H_1} \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{\tilde{v}_3}{H_3} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (3-61)$$

其中 H_1 、 H_2 、 H_3 是拉梅系数。

让我们列出圆柱坐标系 (r, ω, z) (见1.1节) 中变形速度分量公式:

$$\xi_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \xi_{\omega\omega} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} + \frac{v_r}{r}, \quad \xi_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$2\xi_{r\omega} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\omega}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \omega} \quad (3-62)$$

$$2\xi_{\omega z} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \omega} + \frac{\partial v_\omega}{\partial z} \quad (3-63)$$

$$2\xi_{zr} = -\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

在球坐标系 (r, ω, χ) (见1.1节) 中有

$$\xi_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\xi_{\omega\omega} = \frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\chi}{r} \operatorname{ctg} \chi \quad (3-64)$$

$$\xi_{z\chi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\chi}{\partial \chi} + \frac{v_r}{r}$$

● 原文 $\frac{r_r}{r}$, 系 $\frac{v_r}{r}$ 之误。——译者

$$\left. \begin{aligned} 2\xi_{r\omega} &= \frac{1}{r\sin\chi} \frac{\partial v_r}{\partial \omega} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\omega}{r} \right) \\ 2\xi_{\omega\chi} &= \frac{\sin\chi}{r} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(-\frac{v_\omega}{\sin\chi} \right) + \frac{1}{r\sin\chi} \frac{\partial v_x}{\partial \omega} \\ 2\xi_{x\chi} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_x}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \chi} \end{aligned} \right\} (3-65)$$

例题3.5 不可压缩条件的一般形式

试写出在正交曲线坐标系中的不可压缩条件。

解 不可压缩条件形为 $\tilde{\xi}_{11} + \tilde{\xi}_{22} + \tilde{\xi}_{33} = 0$ 。将关系式(3-60)左右两边乘以拉梅系数的乘积 $H_1 H_2 H_3$ 并相加。经过简单变换, 就可得到所求的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_1} (H_2 H_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} (H_3 H_1 v_2) + \\ + \frac{\partial}{\partial \beta_3} (H_1 H_2 v_3) = 0 \end{aligned} \quad (3-66)$$

例题3.6 曲线坐标中的流函数

在正交曲线坐标系中, 速度分量之一(例如 v_3) 等于零。试通过某个函数 ψ 表示其余的速度分量, 使得同时满足不可压缩性条件。

解 对于所研究的流动, 写出不可压缩性条件(3-66):

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} (H_2 H_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} (H_3 H_1 v_2) = 0 \quad (3-67)$$

设 $H_2 H_3 v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2}$, $H_3 H_1 v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial \beta_1}$, 则式(3-67)同时满足

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} \equiv 0$$

这样, 对于速度分量有关系式

$$v_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2}, \quad v_2 = -\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial \beta_1} \quad (3-68)$$

与平面流动情况相似 (见例题 3.4), 函数 ψ 称为 曲线坐标下的流函数。

因为速度分量以关系式

$$v_1 = H_1 \frac{d\beta_1}{dt}, \quad v_2 = H_2 \frac{d\beta_2}{dt}, \quad v_3 = H_3 \frac{d\beta_3}{dt} \quad (3-69)$$

与质点的曲线坐标相联系, 所以沿流线

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} d\beta_2 = -H_3 H_1 v_2 \frac{v_1}{H_1} dt \\ &\quad + H_2 H_3 v_1 \frac{v_2}{H_2} dt = 0 \end{aligned}$$

也象平面流动那样, 沿流线流函数保持常数值。

在圆柱坐标系中, 若 $v_\omega = 0$, 在

$$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3-70)$$

时, 将满足不可压缩性条件。

在球坐标中, 若 $v_\omega = 0$, 将有

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \chi} \frac{\partial \psi}{\partial \chi}, \quad v_\chi = -\frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3-71)$$

3.2.8 三维定常流动的流函数

我们来研究不可压缩介质的定常流动。设用曲面 $\psi_1(x_1, x_2, x_3) = \text{常数}$ 和 $\psi_2(x_1, x_2, x_3) = \text{常数}$ 的交线得到流线。我们将证明, 在这种情况下速度矢量能够以精确到常数乘子的精度采用下述形式表示:

$$\vec{v} = \nabla \psi_1 \times \nabla \psi_2 \quad (3-72)$$

为此需证明, 对于矢量场 (3-72), 应满足不可压缩性条件, 而速度矢量的方向是沿上述曲面交线的切线方向 (图25)。

由矢量分析已知

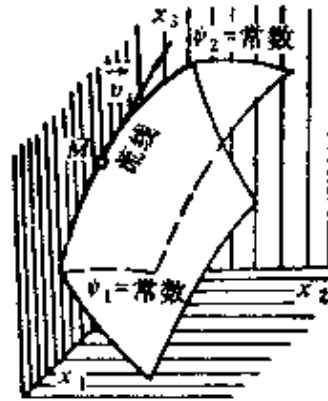


图25 三维流动的流函数

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2) &= \nabla(\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2) \\ &= \nabla\psi_2 - \nabla\psi_1(\nabla \times \nabla\psi_1)(\nabla \times \nabla\psi_2) = 0 \end{aligned}$$

因为 $\nabla \times \nabla\psi = 0$ (有势场的旋度等于零)。

这样,不可压缩性条件满足了。余下要证明,速度矢量与流线相切。在曲面 $\psi_1 = \text{常数}$ 和 $\psi_2 = \text{常数}$ 交线的每一点处该线的切线都平行于矢量 $\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2$, 由此可证明速度矢量与流线相切。

因此,速度场可以借助于两个流函数 ψ_1 和 ψ_2 以下述形式表示:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \\ v_2 &= -\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} \\ v_3 &= \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} = \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_1, x_2)} \end{aligned} \right\} \quad (3-73)$$

应注意到,关系式(3-73)与式(3-27)仅仅相差一常数乘子 v_0 。这意味着,固定到连续介质上并与它一起变形的物质坐标面 $X_1 = \text{常数}$, $X_2 = \text{常数}$ 的方程能够被看作定常三维流动的流函数。

我们来计算由面 $\psi_1 = \psi_1^+$, $\psi_1 = \psi_1^-$, $\psi_2 = \psi_2^+$, $\psi_2 = \psi_2^-$ 所围定的流管中的连续介质流量。为此引出平面 $x_3 = \text{常数}$, 此时流量等于下述沿流管截面 Ω 的积分:

$$\begin{aligned} B &= \iint_{\Omega} v_3 dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \\ &= \Delta\psi_1 \cdot \Delta\psi_2 \end{aligned} \quad (3-74)$$

其中 $\Delta\psi_1 = \psi_1^+ - \psi_1^-$, $\Delta\psi_2 = \psi_2^+ - \psi_2^-$ 。

下面研究几种特殊情况:

1) 设 $\psi_1 = \psi(x_1, x_2)$ 和 $\psi_2 = x_3$ 。流线是 $\psi(x_1, x_2) = \text{常数}$, $x_3 = \text{常数}$ 确定的线, 它们位于平行于坐标面 $x_1 O x_2$ 的平面内。按公式(3-73), $v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}$, $v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$, 即 $\psi(x_1, x_2)$ 是

例3.4中研究的平面流动的流函数。

2) 流函数 $\psi_1(x_1, x_2)$ 描述平面 $x_1 O x_2$ 上的平面流动, 而流函数 $\psi_2(x_1, x_2)$ 描述在 $x_1 O x_2$ 上的平面流动。三维流动的流线是曲面 $\psi_1 = \text{常数}$ 和 $\psi_2 = \text{常数}$ 的交线, 它由下述公式确定:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}, \quad v_2 = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}, \\ v_3 &= -\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (3-75)$$

3) 设 β_i 是正交曲线坐标。流函数 $\psi_1(\beta_i)$ 和 $\psi_2(\beta_i)$ 以下述形式确定连续介质在坐标系 β_i 中所进行的流动。

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \frac{1}{H_1} \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_2} & \frac{1}{H_3} \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_3} \\ \frac{1}{H_1} \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2} & \frac{1}{H_3} \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_3} \end{vmatrix} \quad (3-76)$$

其中 H_i 是拉梅系数, \vec{b}_i 是局部坐标基底的单位矢量。

特别是, 如果 $\psi_1 = \psi(\beta_1, \beta_2)$ 和 $\psi_2 = \beta_3$, 我们将可得到下

述形式的速度分量： $\tilde{v}_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2}$, $\tilde{v}_2 = -\frac{1}{H_1 H_3}$

$\times \frac{\partial \psi}{\partial \beta_1}$ (见例题3.5)。

例：

1) $\psi_1 = x_1$, $\psi_2 = x_2$ 。这些面的交线是平行于 x_3 轴的直线。由公式 (3-73), $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = 1$ 。所以, 被研究的函数描述了连续介质平行于 x_3 轴的刚性移动。

2) $\psi_1 = f(x_1)$, $\psi_2 = g(x_2)$ 。象上例中一样, 流线是平行于 x_3 轴的直线。速度分量为 $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = f'(x_1)g'(x_2)$ 。

3) $\psi_1 = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$, $\psi_2 = \text{arctg} x_2/x_1$ 。流线是圆周 $x_1^2 + x_2^2 = \text{常数}$ 和射线 $\text{arctg} x_2/x_1 = \text{常数}$ 的交线, 也是直线且平行于 x_3 轴。速度分量为 $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = 1$ 。

3.2.9 速度场的普遍概念

在解金属压力加工问题时, 必须有满足流动区域某些边界条件的速度场的普遍概念 (所谓的运动许可场) (见10.4节)。我们来证明, 任何局限单连域的速度场都可能用下述形式表示:

$$\vec{v} = \nabla \varphi + \nabla \psi_1 \times \nabla \psi_2 + \nabla \Phi \quad (3-77)$$

其中 φ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 Φ 是某些标量函数, 且

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3-78)$$

由矢量分析已知, 任意的矢量场 \vec{v} 可以分解为两个场之和, 其中一个是有势场, 另一个是无源场,

$$\vec{v} = \nabla \chi + \text{rot } \vec{A}$$

我们可利用这种分解进行证明。函数 χ 称为标量势, 而 \vec{A} 称为矢量势。

首先, 矢量 \vec{A} 可以表示成:

$$\vec{A} = \psi_1 \nabla \psi_2 + \nabla \psi \quad (3-79)$$

这是由已知的关系式 $\text{rot}(\psi_1 \nabla \psi_2) = \nabla \psi_1 \times \nabla \psi_2$ 得出的, 因此 $\text{rot}(\vec{A} - \psi_1 \nabla \psi_2) = 0$, 且 $\vec{A} - \psi_1 \nabla \psi_2 = \nabla \psi$ 。

由势 χ 中分离出调和分量, 即将它表示为 $\chi = \varphi + \Phi$ 的形式, 其中 $\nabla^2 \varphi = 0$, 并利用式(3-79), 得到式(3-77)。如果介质是不可压缩的, 则 $\Phi = 0$ 。

思 考 题

1. 其棱边平行于应变速率张量主轴的立方体元怎样变形?
2. 如何计算体元体积的相对变化速度?
3. 什么是切应变速率强度? 什么是切变形程度?
4. 流函数同时能够满足什么样的条件? 在什么情况下满足?
5. 在描述不可压缩介质的三维流动时, 需利用几个流函数?
6. 如何给出速度场的普遍概念?

参 考 文 献

- Гун Г. Я. Лекции по механике сплошных сред. Ч. 1. М., МИСиС, 1971. 124с. с ил.
- Ильюшин А. А. Механика сплошной среды Изд2-е. М., Изд-во МГУ, 1978. 288 с. с ил.
- Кочин Н. Е. Кибель И. А. Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Изд. 6-е. Ч. 1. М., Физматгиз, 1963. 684 с. с ил.
- Лойцанский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 3-е. М., «Наука», 1970. 904 с. с ил.
- Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидромеханика. М., «Мир», 1964. 656 с. с ил.
- Седов Л. И. Механика сплошной среды. Изд. 3-е. Т. I. М., «Наука», 1976. 535 с. с ил.

第 4 章 应 力

研究运动学之后，我们转而分析引起机械运动的原因。力就属于这种原因，它是量度其它物体对已知物体机械作用的量，这种作用既可以在直接接触（摩擦、物体彼此压紧的压力）中实现，也可以通过由物体建立场的方法（重力场、电磁场等等）来实现。一般在连续介质力学中，力有分布的特征，它们沿某个表面或体积连续地分布。因此利用求极限的方法过渡到应力即单位表面积上所作用的力的概念更为方便。

4.1 应力张量

4.1.1 外力

给定由某个表面 S 所限定的物体 D 。力由周围介质方面作用到所研究的物体上。称为外力并分为体积（质量）力和表面力，前者是作用在体元上，而后者作用在物体的表面上。

力沿物体的体积或表面连续分布，这是这些力的基本特点。

4.1.2 密度

在所研究物体内部取任意点 M 并在这个点的邻域分离出质量为 Δm 的体元 ΔW 。

作比值 $\Delta m / \Delta W$ ，并令微小尺寸趋向于零。值

$$\rho(M) = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W} \quad (4-1)$$

称为点 M 处的介质密度。

4.1.3 质量外力

设作用在分离出的体元上外力的主矢量为 $\Delta \vec{\Phi}$ 。

作比值 $\Delta \vec{\Phi} / \Delta m$ ，并求极限

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta W} \quad (4-2)$$

由于求极限而得到的矢量值称为质量外力。

4.1.4 表面外力

如已指出的，在表面 S 上作用着表面外力。分离出具有外法线 \vec{n} 的微面元 ΔS 。在这个微面元上作用着主矢量为 $\Delta \vec{P}$ 的力。令微面元趋向于零。按着柯西 (Cauchy) 应力原理，当微面元集中到 M 点时，比值 $\Delta \vec{P} / \Delta S$ 趋向于一定的极限 $\vec{\sigma}^n$

$$\vec{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} \quad (4-3)$$

而对 M 点的主力矩 $\Delta \vec{M} / \Delta S$ 趋向于零。点 M 位于法线为 \vec{n} 的面积上，合成矢量 $\vec{\sigma}^n$ （作用在单位面积上的力）称为作用于点 M 上的表面应力矢量（图26）。



图26 表面外力和质量外力

如果假定对 M 点的主力矩在求极限时不趋于零，则在这点将确定一应力力矩矢量。这种应力状态在弹性力矩理论中研究。特别是在这个理论中切应力互等规律已经不正确了。

4.1.5 内应力

回到开始研究的物体 D 并想象地用面 Σ 将它剖成两部分 D_1 和 D_2 （图27，a）。取掉 D_2 （图27，b）。为了使物体的剩余部分保持平衡，必须在面 Σ 上作用某个力系。称它们为内力。

在面 Σ 上取点 M ，并在它的邻域取法线为 \vec{n} 的微面元 $\Delta \Sigma$ 。令由外法线一边作用在面积 $\Delta \Sigma$ 上的力的主矢量为 $\Delta \vec{P}$ 。

重复前面的讨论，求极限就得到了内应力矢量：

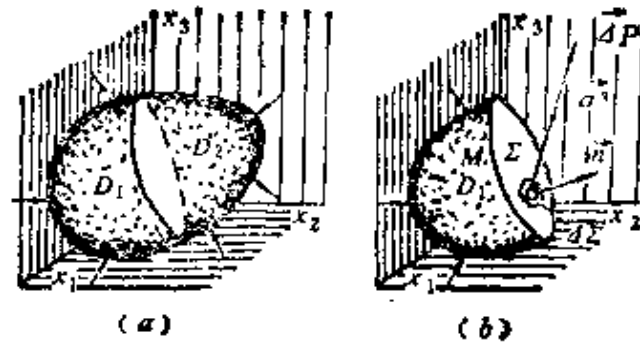


图27 内应力

$$\vec{\sigma}^* = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta \Sigma}$$

它作用于外法线为 \vec{n} 的一定位向的截面上。

这个表面 Σ 的位向是任意的，也就是说，法线 \vec{n} 的位向是任意的，这是重要的特点。

因此，我们选择通过点 M 的截面和法向单位矢量 \vec{e}_i 。在指定点的邻域作棱边平行于坐标轴 x_i 的立方体元（图28），用这个立方体元的面作为选定的截面是方便的。

在垂直于单位矢量 \vec{e}_1 的截面上作用有应力矢量 $\vec{\sigma}^1$ ，它具有分量 σ_{11} 、 σ_{12} 、 σ_{13} 、 $\vec{\sigma}^1 = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ 。

同样，在另外两个面上，作用有应力矢量 $\vec{\sigma}^2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$ 和 $\vec{\sigma}^3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$ （1、2、3是肩标，不是 σ 的方次）。

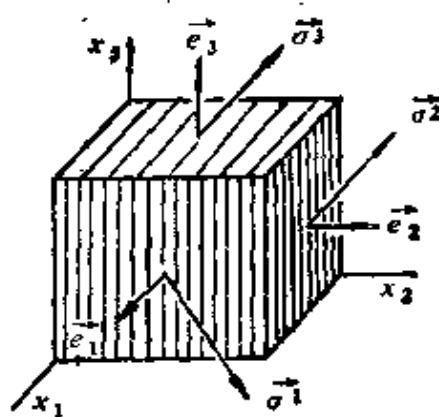


图28 立方体元面上的应力

组成矩阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

并研究它的分量的物理意义。

矩阵的对角线元素 σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{33} 称为正应力分量，因为它们是应力矢量在该截面法线上的投影（图29）。

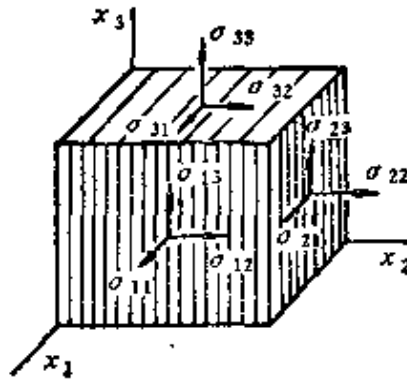


图29 应力的法向和切向分量

矩阵的非对角线元素称为切应力分量，它们是矢量在截面平面上的投影（见图29）。

我们研究一下应力分量的符号规则。如果正应力引起拉伸，则认为是对的（在这种情况下，它们的方向是沿属于物体被研究部分截面的外法线方向）。如果它们引起压缩，则认为是对的（在这种情况下，对于物体的给定部分，它们的方向是沿内法线方向）。

如果截面的外法线与坐标轴的正向重合，则作用在该截面上切应力分量的正向与相应坐标轴的正向一致。如果截面的外法线方向与某坐标轴的正向相反，则相应坐标轴的负向作为该截面上切应力分量的正向。

除了所采用的符号系统外，还可以采用其它的符号系统表示应力；

I	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{12}	σ_{23}	σ_{31}
II	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}
III	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}

很明显，在第 I 行和第 II 行列出的符号之间没有重大差别。转换为系统 II 就要预先规定恢复传统的坐标写法。 $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ ，并用字母足标代替数字足标。但此时应不再使用按重复足标求和的规则。

由于系统 III 更明显地表示了正应力和切应力之间的区别，所以使连续介质力学的关系大为复杂。因此，采用第 I 种符号系统作为基本系统。

4.1.6 斜面上的应力

我们将能证明，只要知道了与坐标轴正交的截面上作用的应力矢量 $\vec{\sigma}^i$ ，或者也可以说，知道了应力分量 σ_{ij} ，就能够计算出任意截面上的应力矢量。

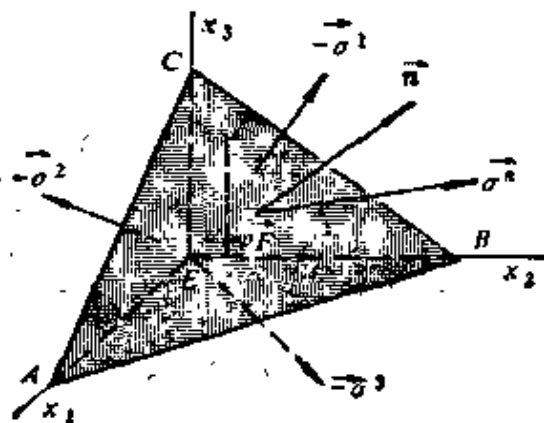


图30 单元四面体

通过点 M 作法线为 \vec{n} 的截面，这个面与垂直于坐标轴的面之间的交线形成一个单元四面体（图30）。

设面 ABC 的面积是 $\Phi_{ABC} = \Delta\Phi$ 。

因而其余各面的面积就是：

$$\Phi_{CBE} = \Delta\Phi n_1, \quad \Phi_{ACE} = \Delta\Phi n_2; \quad \Phi_{ABC} = \Delta\Phi n_3$$

其中 n_1 、 n_2 、 n_3 是法线 \vec{n} 在坐标轴上的投影。

作用在四面体各面上的力分别是：面 ABC 上是 $\vec{\sigma}^* \Delta\Phi$ ，面 CBE 上是 $-\vec{\sigma}^1 \Delta\Phi n_1$ ，面 ACE 上是 $-\vec{\sigma}^2 \Delta\Phi n_2$ ，面 ABE 上是 $-\vec{\sigma}^3 \Delta\Phi n_3$ 。

考虑到四面体相应面的法线与单位矢量 \vec{e}_i 方向相反，故这些项前面出现负号。

此外，在四面体上还作用质量外力 $\vec{F} \Delta m = \vec{F} \rho \Delta W$ ，式中 Δm 是四面体的质量， ΔW 是它的体积， ρ 是介质在点 M 处的密度。

$$\text{考虑到惯性质量力 } -\frac{d\vec{v}}{dt} \Delta m = -\frac{d\vec{v}}{dt} \rho \Delta W \text{ (} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

是点 M 处质点的加速度)，并采用达朗倍尔 (D'Alembert) 原理，则在作为绝对刚体的四面体上所受力之主矢量等于零的条件可以写成：

$$\vec{\sigma}^* \Delta\Phi - (\vec{\sigma}^1 \Delta\Phi n_1 + \vec{\sigma}^2 \Delta\Phi n_2 + \vec{\sigma}^3 \Delta\Phi n_3) + \vec{F} \rho \Delta W - \frac{d\vec{v}}{dt} \rho \Delta W = 0 \bullet$$

将等式两边除以 $\Delta\Phi$ ，得到

$$\vec{\Delta}^* = \vec{\sigma}_i n_i - \left(\vec{F} \rho - \frac{d\vec{v}}{dt} \rho \right) \frac{\Delta W}{\Delta\Phi}$$

假若使四面体的尺寸趋向于零，此时它将集中于点 M 。比值 $\Delta W / \Delta\Phi$ 同样也趋向于零，因为 ΔW 的值正比于四面体长度尺寸的立方，而 $\Delta\Phi$ 正比于它的平方。

因此得到柯西公式：

① 式中 ΔW 原文误为 Δm 。——译者

② 式中 $\Delta\Phi$ 原文误为 ΔS ，下同。——译者

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}^i n_i \quad (4-5)$$

或以坐标写法写出:

$$\sigma_{nk} = \sigma_{ik} n_i \quad (4-6)$$

回忆矩阵相乘法则, 求得:

$$(\sigma_{n_1} \ \sigma_{n_2} \ \sigma_{n_3}) = (n_1 \ n_2 \ n_3) (\sigma_{ik}) \quad (4-7)$$

因此, 公式 (4-7) 对每一个矢量 \vec{n} 都对应一个按矢量与矩阵相乘法则确定的作用在与 \vec{n} 垂直的面上的应力矢量 $\vec{\sigma}^n$ 。

由第一章公理 1.1 (见 1.3 节) 得出, 矩阵 σ_{ik} 是张量

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

它称为应力张量。

这时, 斜面上的应力矢量由柯西公式确定:

$$\vec{\sigma}^n = \vec{n} T_\sigma \quad (4-9)$$

例题 4.1 斜面上的应力

点 M 处的应力张量以下式给出

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

试求法线单位矢量为 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 - \frac{1}{2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3$ 的面上点 M

处的应力矢量。

解 按公式 (4-9), $\vec{\sigma}^n = \vec{n} T_\sigma$ 。

相应矩阵相乘, 便可求得

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^n &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1 \quad \frac{3}{2} \quad -\sqrt{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

4.1.7 应力张量

这样，我们在研究中引出了新的二阶张量——应力张量 $[\sigma_{ik}]$ 。

以后将证明（见5.3节），这个张量是对称的。

为了将它化为对角线形式，必须解特征方程

$$\lambda^3 - \sigma^I \lambda^2 + \sigma^II \lambda - \sigma^III = 0 \quad (4-10)$$

这个方程的根是应力张量的特征值，并称为主应力分量。我们约定 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 是正确的。

在新的坐标系中，应力张量为

$$T_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

这时应力的切向分量变为零。

因此，在与坐标主轴正交的立方体元上，将仅仅作用着正应力（图31）。

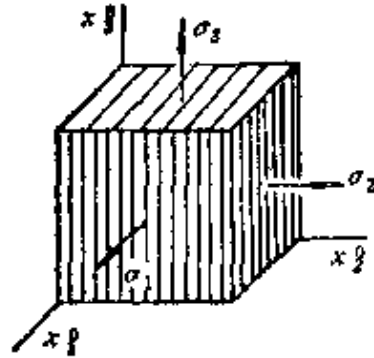


图31 主应力

特征方程系数形成一组不变量

$$\sigma^I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0 \quad (4-12)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{II} &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{vmatrix} \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \end{aligned} \quad (4-13)$$

$$\sigma^{III} = |\sigma_{ik}| = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (4-14)$$

例题4.2 将应力张量化为对角线形式

以如下形式给定应力张量 (纯剪)

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设 $\tau > 0$, 试将张量化为对角线形式。

解 写出特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \tau & 0 \\ \tau & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

或写成展开形式: $-\lambda^3 + \tau^2\lambda = 0$, $\lambda(\lambda^2 - \tau^2) = 0$

方程的根为 $\lambda_1 = \tau$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\tau$ 。

应力张量的对角线形式是

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix}$$

4.1.8 应力偏差张量

应力张量可以用偏差张量和球张量之和的形式表示

$$T_{\sigma} = D_{\sigma} + \sigma_0 I \quad (4-15)$$

其中量 σ_0 称为平均应力

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (4-16)$$

偏差张量分量为 $s_{ik} = \sigma_{ik} - \sigma_0 \delta_{ik}$ 。

应力偏差张量的特征方程

$$\lambda^3 + s^I \lambda - s^III = 0 \quad (4-17)$$

与下述不变量系相对应

$$s^I = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{33} & s_{31} \\ s_{13} & s_{11} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}s_{ik}s_{ik} = -\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] \quad (4-18)$$

$$s^{\text{II}} = |s_{ik}| \quad (4-19)$$

量 T 称为切应力强度，

$$T = +\sqrt{|s^{\text{II}}|} = +\sqrt{\frac{1}{2}s_{ik}s_{ik}} \quad (4-20)$$

例：

举例研究几种应力状态

简单拉伸 ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \sigma_1 / \sqrt{3} \quad (4-21)$$

简单压缩 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$)

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad T = |\sigma_3| / \sqrt{3} \quad (4-22)$$

纯剪 ($\tau > 0$)

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \tau \quad (4-23)$$

平面应力状态 ($\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2), \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2), \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$)；

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2} \quad (4-24)$$

在一般的三维应力状态下，应力偏差张量的主分量为：

$$s_1 = (2\sqrt{3})T \cos\beta_\sigma, \quad s_2 = (2/\sqrt{3})T \sin(\beta_\sigma - \pi/6), \\ s_3 = -(2\sqrt{3})T \cos(\pi/3 - \beta_\sigma)。$$

应力状态类型角 β_σ 根据关系式 $\nu_\sigma = [\text{tg}(\beta_\sigma - \pi/6)]/\text{tg}(\pi/6)$ 由下述参数决定

$$\nu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (4-25)$$

简单拉伸对应于 $\nu_\sigma = -1$, $\beta_\sigma = 0$ ；纯剪对应于 $\nu_\sigma = 0$, $\beta_\sigma = \pi/6$ ，简单压缩对应于 $\nu_\sigma = +1$, $\beta_\sigma = \pi/3$ 。

思 考 题

1. 外力因素和内力因素有什么不同？
2. 应力张量的对角线分量有什么意义？非对角线分量又有什么意义？
3. 斜面上的应力以怎样的形式与应力张量分量相联系？
4. 怎样证明矩阵(4-4)是张量？
5. 立方体元棱边平行于应力张量主轴时，什么样的应力作用在它的面上？
6. 什么是平均应力？什么是切应力强度？

4.2 应力的研究

4.2.1 关于截面上的正应力

我们来计算作用于斜面上的正应力和切应力。为此将矢量 $\vec{\sigma}^n$ 分解为沿该面法线的分量和沿该面切线的分量，

$$\vec{\sigma}^n = \vec{P} + \vec{T} \quad (4-26)$$

式中， \vec{P} 和 \vec{T} 分别是法向和切向应力分量（图32）。

金属压力加工时，通常在接触表面上作用有压缩应力。在液体中，法向压应力作用在内部面元上。按符号规则，这种情况下

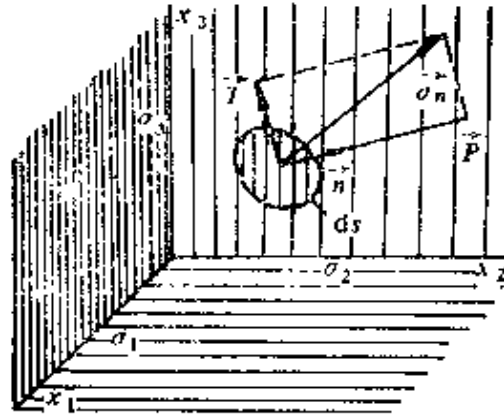


图32 作用在斜截面上的应力

的正应力是负的。因为经常涉及到负值不方便，所以在连续介质力学中引入了正压力 p 的概念，它作用在面元上，并在压缩时取正值。

由于使用这个量，正应力矢量以下述形式写出：

$$\vec{P} = -p\vec{n} \quad (4-27)$$

其中 p 是面元上的正压力， \vec{n} 是该面法向单位矢量。

切应力矢量以下述形式表示

$$\vec{T} = \tau\vec{s} \quad (4-28)$$

其中 τ 是面上的切应力， \vec{s} 是位于该面上的单位矢量。

因而，作用于面元上的正压力和正应力绝对值相等，符号相反。

最大切应力 将具有分量 $(\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \sigma_{n_3})$ 的矢量向法线 \vec{n} 上投影，得到了正压力表达式： $p = -\sigma_{n_i}n_i$

利用 (4-6) 式，求得

$$p = -\sigma_{i_i}n_i n_i \quad (4-29)$$

由下式确定切应力

$$p^2 + \tau^2 = |\vec{\sigma}^n|^2 \quad (4-30)$$

对于研究应力的点的邻域，取应力张量的主方向为坐标轴方向 x_{i_0}

对于任何通过指定点的斜面，按式 (4-29)、(4-30) 以下述形式写出正压力和切应力：

$$p = -(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \quad (4-31)$$

$$\tau^2 = |\vec{\sigma}^n|^2 - p^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (4-32)$$

现借助关系式 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ ，由式 (4-32) 中消去一个余弦值，例如 n_3 ，此后确定余弦 n_1 和 n_2 ，使切应力 τ 得到最大值。

将 $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ 代入到表达式 (4-32) 后，求该式对 n_1 、 n_2 的导数并令此导数为零。结果将可得到两个关于方向余弦 n_1 和 n_2 的方程，这两个方程确定了应力 τ 获得最大值或最小值的斜面的位置：

$$n_1 [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0$$

$$n_2 [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0$$

如令 n_1 和 n_2 等于零，就可得到这些方程的一个解。可以得到非零解。因此，取 n_1 等于零时，由第二个方程求得 $n_2 = \pm\sqrt{1/2}$ ；而取 n_2 等于零时，由第一个方程求出 $n_1 = \pm\sqrt{1/2}$ 。重复进行上面进行的计算，先从 (4-32) 中消去 n_1 ，再消去 n_2 。结果得到六组使应力获得最大值和最小值角的余弦值表（极值面法线方向余弦表）：

n_1	0	0	± 1	0	$\pm\sqrt{1/2}$	$\pm\sqrt{1/2}$
n_2	0	± 1	0	$\pm\sqrt{1/2}$	0	$\pm\sqrt{1/2}$
n_3	± 1	0	0	$\pm\sqrt{1/2}$	$\pm\sqrt{1/2}$	0

表中最后三列给出的面通过一个主轴并平分另外两个主轴所夹的角。把确定这个重要截面位置的方向余弦值代入到表达式 (4-32)，就可求得沿这三个面的下列切应力值（有时称为主切

应力)

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2); \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \\ \tau_{31} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\end{aligned}\quad (4-33)$$

这表明，最大切应力作用在等分最大和最小主应力间夹角的平面上，且它等于这两个主应力差的一半。

在切应力值为式(4-33)的面上，也作用有正应力，按(4-31)，它等于相应主应力和的一半： $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ ； $\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$ ； $\frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)$ 。

由式(4-33)知，如果主应力值服从不等式 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，则最大切应力等于 $0.5(\sigma_1 - \sigma_3)$ ，即最大和最小主应力差的一半。

4.2.2 莫尔 (Mohr) 圆

莫尔圆给出了点的三维应力状态的明显的二维图象概念。我们将点 M 处的坐标张量主轴取作坐标轴(见图32)。

按公式(4-31)和式(4-30)， $-p = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$ 和 $p^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$ ，且 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ 。

由这个方程组解出方向余弦的平方，则有

$$\left. \begin{aligned}n_1^2 &= \frac{(p + \sigma_2)(p + \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 &= \frac{(p + \sigma_3)(p + \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 &= \frac{(p + \sigma_1)(p + \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}\end{aligned}\right\} \quad (4-34)$$

因为方程的左边是非负数，而应力张量的主分量满足条件 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，所以必须满足下述关系式：

$$\left. \begin{aligned} (p + \sigma_2)(p + \sigma_3) + \tau^2 &\geq 0 \\ (p + \sigma_3)(p + \sigma_1) + \tau^2 &\leq 0 \\ (p + \sigma_1)(p + \sigma_2) + \tau^2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-35)$$

因此，应力 $-p$ 和 τ 应当位于几个半圆限定的域内（图33阴影部分）。

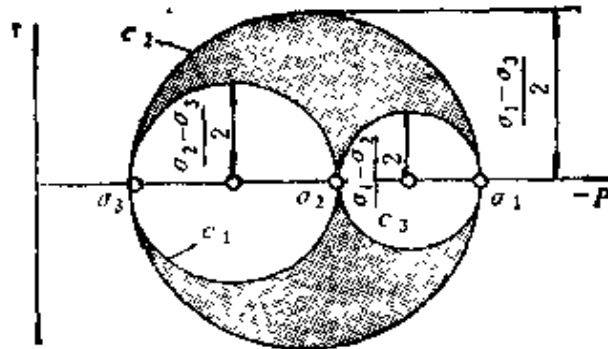


图33 莫尔圆

4.2.3 八面体应力

我们研究与主平面等倾的截面（图34）。

这个面称为已知点的八面体面或合成应力面。我们来计算这个面上的正应力和切应力。

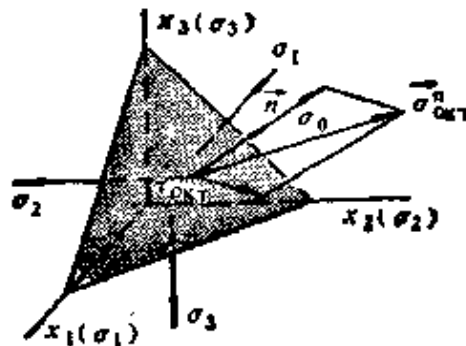


图34 八面体应力

坐标轴和应力张量主方向重合。很明显，八面体面的方向余弦彼此相等，且 $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$ 。按式(4-6)， $\sigma_{n_1} = \sigma_1 n_1$ ， $\sigma_{n_2} = \sigma_2 n_2$ ， $\sigma_{n_3} = \sigma_3 n_3$ 。

对于八面体平面上的全应力，有

$$\sigma_{o.s.}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad (4-36)$$

即八面体平面上全应力的平方等于主应力平方的算术平均值。

根据该面上正压力的公式(4-31)，得到

$$p_{o.s.} = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -\sigma_0 \quad (4-37)$$

即八面体上的正压力的绝对值等于平均应力，但符号相反。

对于八面体面上的切应力有表达式 $\tau_{o.s.}^2 = \sigma_{o.s.}^2 - p^2$ ①，在这种情况下，它可写作：

$$\tau_{o.s.}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

展开后有：

$$\tau_{o.s.}^2 = \frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

因而

$$\tau_{o.s.} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}T \quad (4-38)$$

因此，切应力强度与八面体切应力仅相差一常数乘子。

思考题

1. 最大切应力截面对于主轴位向如何？

①原书 $\tau_{o.s.}^2 = p^2 - \sigma_{o.s.}^2$ ，不妥。——译者

2. 什么是八面体应力? 什么是八面体面?
3. 在八面体面上作用什么样的应力?

参 考 文 献

- Безухов Н. П.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., «Высшая школа», 1961, 533 с. с ил.
- Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды, М., «Наука», 1978, 304 с. с ил.
- Гун Г. Я.* Лекции по механике сплошных сред, Ч. 1, М., МИСИС, 1971, 124 с. с ил.
- Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды, Изд. 2-е, М., Изд-во МГУ, 1978, 288 с. с ил.
- Седов Л. И.* Механика сплошной среды, Изд. 3-е, Т. 1, М., «Наука», 1976, 535с, с ил.

第5章 守恒定律

根据一些物理规律性知道，某些物理量的数值在任何物理过程中都不随时间而变化，这些物理规律称为守恒定律。在牛顿经典力学范围内，最重要的守恒定律是质量、动量、动量矩和能量守恒定律。它们对任何孤立的即不受外部作用的体系都是正确的。

如果体系不是孤立的，则守恒定律以平衡方程的形式写出，这些方程将下述三者联系起来，即相应物理量在某个体积内的“全量”变化速度、该量通过包围这个体积的表面的“通量”以及在体积内作用的“源”。

对于连续介质任意体积以积分形式写出的守恒定律符合于局部守恒定律，也就是符合于在连续介质所充满的域内每一点都同时满足的方程。连续性方程、运动方程、剪应力互等条件、能量守恒方程和熵守恒（增长）方程属于这样的方程。

在研究连续介质的运动学时，我们完全可任意地选择参照系。在表述物理规律时，将假定参照系是惯性的。在下述这样的体系中，惯性定律是正确的：不受任何力作用（或作用有互相平衡的力）的质点处于静止状态或匀速直线运动状态。一个惯性参照系相对另一个作平行匀速直线运动，存在这样的惯性参照系是牛顿力学的基本公设。

惯性系的概念是科学的抽象。同某个具体物体（地球、船身、飞机机身等）相联系的任何实际参照系可以以某种近似程度看作惯性系。在解决力学问题时，可以将与地球刚性联结在一起的笛卡儿坐标系取作惯性系，这样做精度是足够的。

5.1 质量守恒定律

5.1.1 积分形式

我们来导出连续介质的连续性方程。在连续介质中想象地分离出一个物质曲面 Σ 包围的体积 V （见图8）。

质量守恒定律断言，介质的被分离部分的质量不随时间而变：

$$m = \iiint_W \rho(\vec{x}, t) dW = \text{常数}$$

其中 ρ 是介质密度。

因此得到了以积分形式写出的定律

$$-\frac{d}{dt} \iiint_W \rho dW = 0 \quad (5-1)$$

5.1.2 连续性方程

回忆确定积分对时间全导数的公式(3-20)，求得：

$$-\frac{d}{dt} \iiint_W \rho dW = \iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \oint_{\Sigma} \rho v_n d\Sigma \quad (5-2)$$

其中 $v_n = v_i n_i$ 是表面 Σ 上速度的法向分量； n_i 是法线 \vec{n} 的分量。

利用高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式并将沿表面的积分变换为沿体积的积分：

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \rho v_n d\Sigma &= \iint_{\Sigma} \rho v_i n_i d\Sigma = \iiint_W \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} dW \\ &= \iiint_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dW \end{aligned}$$

因此，式(5-2)有形式：

$$\iiint_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dW = 0$$

由基本公理（见前言），因为体积是任意的，应有：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5-3)$$

这个方程左边的头两项是密度 ρ 对时间 t 的全导数，因此在

变换后有:

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (5-4)$$

得到的方程称为连续性方程。

如果介质密度不变, 即 $\rho = \text{常数}$, 且是均匀的, 则连续性方程变为不可压缩性方程:

$$\partial v_i / \partial x_i = 0 \quad (5-5)$$

或写成矢量形式:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (5-6)$$

例题5.1 在有势流动时的连续性方程

试研究对连续介质有势流动连续性方程是什么样的形式。

解 对有势流动, $v_i = \partial \varphi / \partial x_i$, 其中 φ 是势函数。

代入式 (5-4) 后, 得到

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla^2 \varphi = 0 \quad (5-7)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ 是拉氏算子。

对于不可压缩性介质, 满足方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。

例题5.2 密度的导数

试证明存在下述公式

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho f dW = \iiint_W \rho \frac{df}{dt} dW \quad (5-8)$$

其中 $f(\vec{x}, t)$ 是任意的正则函数; W 是任意的物质体积; ρ 是介质密度。

解

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho f dW = \iiint_W \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) dW + \iint_{\Sigma} \rho f v_n d\Sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_W \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho f) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho f v_i) \right] dW \\
&= \iiint_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) f dW + \iiint_W \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \right) dW
\end{aligned}$$

由式 (5-3) 得到：等式右边的第一个积分等于零，第二个积分可以写作 $\iiint_W \rho \frac{df}{dt} dW$ 。

思 考 题

1. 在什么样的力学的范围内（经典的或是相对的）质量守恒定律是正确的？
2. 在什么样的情况下连续性方程简化为不可压缩性方程？
3. 怎样以积分的形式和局部的形式表述质量守恒定律？

5.2 动量守恒定律

5.2.1 质点的运动

我们来研究质量为 m 的质点相对于基底为 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 、 \vec{e}_3 的坐标系的运动。量 $m\vec{v}$ 称为点的动量。

力学的基本规律（牛顿第二定律）可写作下述形式：

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad (5-9)$$

即质点动量对时间的导数等于作用于其上的力。

由式 (5-9) 得出质点动量守恒定理：

定理5.1 如果力 \vec{F} 等于零，则质点的动量保持不变。
如果质点的质量不变，则方程采用下述形式：

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

这符合于牛顿定律的另一种表述：质点的质量与它的加速度的乘积等于作用于该点的力。

5.2.2 质点系的运动

现在转向 n 个质点的质点系。设第 i 个质点的质量等于 m^i ，而速度为 v^i 。

设 $d(m^i v^i)/dt = \vec{F}^i$ (对标号 i 不求和)。

很明显，作用在标号为 i 的质点上的全部力都包括在 F^i 中，这些力既包括 n 个质点组成的体系的外力，也包括内力。

按 i 求和，就得到：

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(m^i v^i)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m^i v^i = \sum_{i=1}^n \vec{F}^i \quad (5-10)$$

应当指出，等式的右边是体系外力之和。这可由牛顿第三定律得出，按此定律，相互作用的内力成对存在并在求和时消去。

引入量 $m = \sum_{i=1}^n m^i$ 和 $\vec{v}^* = \sum_{i=1}^n m^i v^i / m$ ，它们分别是体系的质量和质心速度。

量 $m \vec{v}^*$ 称为体系的动量。式 (5-10) 写成如下形式：

$$\frac{d(m \vec{v}^*)}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}^i \quad (5-11)$$

即质点系动量对时间的导数等于全部作用于系统的外力之和。

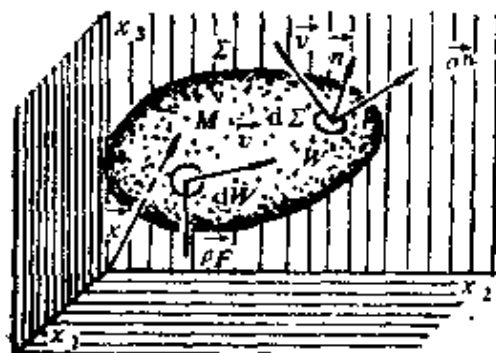
由式 (5-11) 得出质点系动量守恒定理。

定理5.2 如果作用在体系上的外力之和等于零，那末体系的总动量保持不变。

5.2.3 连续介质的运动

现在转而分析连续介质任意物质体积 W 的运动 (图35)。

设质量为 ρdW 的体元 dW 以速度 \vec{v} 移动。体元的动量等于 $\rho \vec{v} dW$ ，体积 W 的总动量用积分 $\iiint_W \rho \vec{v} dW$ 求得。

图35 物质体积 W 的运动

分离出的体元上的外力 $\vec{\sigma}^n d\Sigma$ 作用在法线为 \vec{n} 的面元 $d\Sigma$ 上。这些力的和为 $\iint_{\Sigma} \vec{\sigma}^n d\Sigma$ 。

最后，在体元 dW 上作用有质量外力 $\rho \vec{F} dW$ 。所有质量外力之和是 $\iiint_W \rho \vec{F} dW$ 。

体积 W 的动量守恒方程可写作如下形式：

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \vec{v} dW = \iint_{\Sigma} \vec{\sigma}^n d\Sigma + \iiint_W \rho \vec{F} dW \quad (5-12)$$

连续介质体积为 W ，它的动量对时间的导数等于作用于其上的所有质量外力和表面力之和。

5.2.4 运动方程、平衡方程

利用式 (5-8)，写出

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \vec{v} dW = \iiint_W \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dW$$

此外，由式 (4-9) 和式 (1-52)，有

$$\iint_{\Sigma} \vec{\sigma}^n d\Sigma = \iint_{\Sigma} \vec{n} T_{\sigma} d\Sigma = \iiint_W \operatorname{div} T_{\sigma} dW$$

因此，式 (5-12) 可以变换为

$$\iiint_W \left(\operatorname{div} T_{\sigma} + \rho \vec{F} - \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right) dW = 0$$

因为体积 W 是任意选定的, 由基本公理得出连续介质运动的微分方程:

$$\operatorname{div} T_{\sigma} + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5-13)$$

与此式相应, 有三个标量方程

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad (5-14)$$

如果惯性项很小, 可将其忽略, 则运动方程变为平衡方程:

$$\operatorname{div} T_{\sigma} + \rho \vec{F} = 0 \quad (5-15)$$

或

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0 \quad (5-16)$$

最后, 在没有质量力时, 平衡方程采用下述形式:

$$\operatorname{div} T_{\sigma} = 0 \quad (5-17)$$

或

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (5-18)$$

5.2.5 曲线坐标

我们来写出正交曲线坐标系中的运动方程。为此应用张量场散度分量的表达式 (1-54)~(1-59)。

结果得到

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_1} (H_2 H_3 \tilde{\sigma}_{11}) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} (H_3 H_1 \tilde{\sigma}_{12}) \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial \beta_3} (H_1 H_2 \tilde{\sigma}_{13}) + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} \tilde{\sigma}_{12} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_3} \tilde{\sigma}_{13} \\
 & \left. - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1} \tilde{\sigma}_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1} \tilde{\sigma}_{33} \right] + \rho F_1 = \rho \frac{dv_1}{dt}, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_1} (H_2 H_3 \tilde{\sigma}_{21}) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} (H_3 H_1 \tilde{\sigma}_{22}) \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial \beta_3} (H_1 H_2 \tilde{\sigma}_{23}) + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_3} \tilde{\sigma}_{23} + H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1} \tilde{\sigma}_{21} \\
 & \left. - H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2} \tilde{\sigma}_{33} - H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} \tilde{\sigma}_{11} \right] + \rho F_2 = \rho \frac{dv_2}{dt}, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_1} (H_2 H_3 \tilde{\sigma}_{31}) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} (H_3 H_1 \tilde{\sigma}_{32}) \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial \beta_3} (H_1 H_2 \tilde{\sigma}_{33}) + H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1} \tilde{\sigma}_{31} + H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2} \tilde{\sigma}_{32} \\
 & \left. - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_3} \tilde{\sigma}_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_3} \tilde{\sigma}_{22} \right] + \rho F_3 = \rho \frac{dv_3}{dt}
 \end{aligned} \right\} (5-19)$$

例题5.3 在圆柱坐标系中的运动

试写出在圆柱坐标系中的运动方程。

解 在圆柱坐标系 (r, ω, z) 中 (见1.1节), 有 $\beta_1 = r$, $\beta_2 = \omega$, $\beta_3 = z$, $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\omega = r$, $H_3 = H_z = 1$ 。

考虑到这一点, 式 (5-19) 为:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial \sigma_{r\omega}}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial z} (r \sigma_{rz}) - \sigma_{\omega\omega} \right] + \rho F_r \\
 & = \rho \frac{dv_r}{dt}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{\omega r}) + \frac{\partial \sigma_{\omega\omega}}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial z} (r\sigma_{\omega z}) + \sigma_{\omega r} \right] + \rho F_{\omega} \\ &= \rho \frac{dv_{\omega}}{dt} \\ & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{\partial \sigma_{z\omega}}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial z} (r\sigma_{zz}) \right] + \rho F_z = \rho \frac{dv_z}{dt} \end{aligned}$$

经过微分和简单的变换，最终得到

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\omega}}{\partial \omega} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz} - \sigma_{\omega\omega}}{r} + \rho F_r \\ &= \rho \frac{dv_r}{dt} \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{r\omega}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\omega\omega}}{\partial \omega} + \frac{\partial \sigma_{\omega z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\omega r}}{r} + \rho F_{\omega} \\ &= \rho \frac{dv_{\omega}}{dt} \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\omega z}}{\partial \omega} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho F_z \\ &= \rho \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (5-20)$$

例题5.4 在球坐标系中的运动

试写出在球坐标系中的运动方程。

解 对球坐标系 (r, ω, χ) (见1.1节) 有: $\beta_1 = r, \beta_2 = \omega, \beta_3 = \chi, H_1 = H_r = 1, H_2 = H_{\omega} = r \sin \chi, H_3 = H_{\chi} = r.$

代入式 (5-19) 并经过不太复杂的变换，得到:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial \sigma_{r\omega}}{\partial \omega} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \chi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rz} \\
 & - \sigma_{\omega\omega} - \sigma_{zz} + \sigma_{rz} \operatorname{ctg} \chi) + \rho F_r = \rho \frac{dv_r}{dt} \\
 & \frac{\partial \sigma_{r\omega}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial \sigma_{\omega\omega}}{\partial \omega} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\omega z}}{\partial \chi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\omega} \\
 & + 2\sigma_{\omega z} \operatorname{ctg} \chi) + \rho F_\omega = \rho \frac{dv_\omega}{dt} \\
 & \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial \sigma_{\omega z}}{\partial \omega} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \chi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{zz} \\
 & - \sigma_{\omega\omega}) \operatorname{ctg} \chi + 3\sigma_{rz}] + \rho F_z = \rho \frac{dv_z}{dt}
 \end{aligned} \right\} (5-21)$$

例题5.5 应力函数

应力状态是平面的。应力张量为：

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 σ_{11} 、 σ_{12} 和 σ_{22} 是欧拉变量 (x_1, x_2) 的函数。

试求出能同时满足平衡方程的应力表达式。无质量外力。

解 对所研究情况，平衡方程有下述形式

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\
 & \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0
 \end{aligned} \right\} (5-22)$$

由下述公式借助艾雷 (Airy) 函数 $\Phi(x_1, x_2)$ 确定应力：

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \quad (5-23)$$

代入式 (5-22) 后, 得到恒等式

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial x_1^2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_1} = 0$$

思 考 题

1. 什么叫质点的动量? 什么叫质点系的动量? 什么叫物质体积的动量?
2. 连续介质的运动方程和平衡方程有什么不同?
3. 应力函数能同时满足什么样的方程? 在什么情况下满足?
4. 怎样以积分形式和以局部的形式表述动量守恒定律?

5.3 动量矩守恒定律

5.3.1 质点的运动

我们取用力学基本方程式 (5-9), 即 $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ 。

方程两边叉乘矢径

$$\vec{x} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{x} \times \vec{F} \quad (5-24)$$

因为

$$\vec{v} \times m\vec{v} = m(\vec{v} \times \vec{v}) = 0$$

所以有关系式

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) &= \frac{d}{dt}(\vec{x} \times m\vec{v}) - \frac{d\vec{x}}{dt} \times m\vec{v} \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{x} \times m\vec{v}) - \vec{v} \times m\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{x} \times m\vec{v}) \end{aligned}$$

乘积 $\vec{x} \times \vec{F}$ 是力 \vec{F} 对不动的中心——惯性坐标系原点 O 的力矩。与此相类似, 乘积 $\vec{x} \times m\vec{v}$ 称为对于该中心的动量矩。

方程 (5-24) 采用下述形式

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \times m\vec{v}) = \vec{x} \times \vec{F} \quad (5-25)$$

即相对于任何中心的动量矩对时间的导数等于作用的力对于同一中心的力矩。

也象方程 (5-9) 的情况那样, 由方程 (5-25) 可直接得出质点动量矩守恒定理。

定理 5.3 如果合转动力矩 $\vec{x} \times \vec{F}$ 等于零, 则动量矩保持不变。

5.3.2 质点系的运动

对于质量为 m^i 的第 i 个单独质点重复进行叉乘运算, 得到:

$$\frac{d}{dt} (\vec{x} \times m^i \vec{v}^i) = \vec{x} \times \vec{F}^i.$$

经过求和, 省略中间的推导, 得到:

$$\frac{d}{dt} (\vec{x} \times m \vec{v}^*) = \sum_{i=1}^n \vec{x} \times \vec{F}^i \bullet \quad (5-26)$$

即质点系对固定中心之动量矩对时间的导数等于所有作用于体系上的外力对同一中心的主力矩。

与方程 (5-26) 相对应, 有下述关于质点系动量矩的定理。

定理 5.4 如果作用于体系的总外力矩等于零, 那末系统的动量矩保持不变。

5.3.3 连续介质的运动

我们转而分析连续介质任意物质体积 W 的运动。对这种情况, 守恒定律可以用下述形式表述: 连续介质体积 W 对于任何与惯性坐标系相连的中心所产生的动量矩对时间的导数等于作用于其上的所有质量外力和表面力对同一中心的力矩之和。

设 \vec{x} 是体元 dW 的矢径。则可以用如下形式写出平衡方程:

$$\frac{d}{dt} \iiint_W (\vec{x} \times \rho \vec{v}) dW = \iint_{\Sigma} (\vec{x} \times \vec{\sigma}^n) d\Sigma + \iiint_W (\vec{x} \times \rho \vec{F}) dW \quad (5-27)$$

●原文中为 F^i , 漏矢号。——译者

由式 (5-8) 得出

$$\frac{d}{dt} \iiint_W (\vec{x} \times \rho \vec{v}) dW = \iiint_W \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \rho \vec{v} \right) dW + \iiint_W \left(\vec{x} \times \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right) dW$$

第一项积分等于零, 因为 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$, $\vec{v} \times \rho \vec{v} = 0$ 。此外,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{\sigma}^i \times \vec{x} d\Sigma &= \iint_{\Sigma} (\vec{\sigma}^i n_i \times \vec{x}) d\Sigma = \iiint_W \frac{\partial(\vec{\sigma}^i \times \vec{x})}{\partial x_i} dW \\ &= \iiint_W (\operatorname{div} T_{\sigma} \times \vec{x}) dW + \iiint_W \left(\vec{\sigma}^i \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_i} \right) dW \end{aligned}$$

这是因为 $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$, $\frac{\partial \vec{x}}{\partial x_i} = \vec{e}_i$ 。

还有, $\vec{\sigma}^i = \sigma_{ik} \vec{e}_k$ 。

将这些关系式代入式 (5-27), 得到

$$\begin{aligned} \iiint_W \left[\vec{x} \times \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \operatorname{div} T_{\sigma} - \rho \vec{F} \right) \right] dW + \\ \iiint_W \sigma_{ik} \vec{e}^k \times \vec{e}_i dW = 0 \end{aligned} \quad (5-28)$$

5.3.4 切应力互等

由方程 (5-13) 得出, 第一项积分等于零。因为体积 dW 是任意选定的, 所以第二项积分给出

$$\sigma_{ik} \vec{e}_k \times \vec{e}_i = 0 \quad (5-29)$$

单位矢量两两叉乘积是

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \end{aligned}$$

因此式 (5-29) 取下述形式:

$$(\sigma_{12} - \sigma_{21})\vec{e}_3 + (\sigma_{23} - \sigma_{32})\vec{e}_1 + (\sigma_{31} - \sigma_{13})\vec{e}_2 = 0$$

因而我们得到了切应力互等定律:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (5-30)$$

换言之, 应力张量是对称张量。

思 考 题

1. 什么叫质点的动量矩? 什么叫质点系的动量矩? 什么叫物质体积的动量矩?
2. 是否存在切应力互等规律不适用的理论?
3. 怎样以积分形式表述动量矩守恒定律? 怎样以局部的形式表述它?

5.4 机械能守恒

5.4.1 功和功率

众所周知, 力的功是力的作用的量度, 它取决于力的数值和方向以及它的作用点的位移。如果力 \vec{R} 数值和方向不变, 而位移 \vec{u} 是直线, 则功 A 等于标量积: $A = \vec{R} \cdot \vec{u} = R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3$, 其中 R_i 、 u_i 分别是力和位移在笛卡儿坐标系坐标轴上的投影。

在一般情况下, 利用微元功的概念, $dA = \vec{R} \cdot d\vec{u} = R_1 du_1 + R_2 du_2 + R_3 du_3$, 其中 $d\vec{u}$ 是力作用点在时间 dt 内的微位移。

求微元功与做这个功的时间间隔之比, 就得到了力 \vec{R} 的功率

$$\dot{A}; \quad \dot{A} = \frac{dA}{dt} = \vec{R} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{R} \cdot \vec{v} = R_1 v_1 + R_2 v_2 + R_3 v_3, \quad \text{其中 } \vec{v}$$

$= v_i \vec{e}_i$ 是力作用点的位移速度。

5.4.2 外力功率

现在研究在某时刻 t 由曲面 Σ 所围出的物质体积 W (图35)。计算质量外力所做的功率。为此想象地分离出体元 dW 。在它上面作用合力为 $\rho \vec{F} dW$ 的质量外力, 力的作用点 (体积 dW 质点中的一个) 以速度 \vec{v} 移动。质量外力对体元 dW 所做功率等于 $\rho \vec{F}$

$\vec{v} dW$, 而对体积 W 整体说来, 它以积分表示 $\dot{A}_F = \iiint_W \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dW$ 。

类似地, 分离出微面元 $d\Sigma$, 我们认定: 在此面元上作用合力为 $\vec{\sigma}^n d\Sigma$ 的表面外力, 且合力作用点以速度 \vec{v} 移动。这个力的功率等于 $\vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} d\Sigma$ 。表面外力的总功率可以用沿表面 Σ 积分的形式写出: $\dot{A}_\sigma = \iint_\Sigma \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} d\Sigma$ 。

利用高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式并将面积分变换成按体积分:

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} d\Sigma &= \iint_\Sigma \sigma_{ik} n_i v_k d\Sigma = \iiint_W \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ik} v_k) dW \\ &= \iiint_W \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \sigma_{ik} dW + \iiint_W v_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} dW \\ &= \iiint_W \sigma_{ik} \xi_{ik} dW + \iiint_W v_k \left(\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k \right) dW \end{aligned}$$

这里利用了运动方程 (5-14)。

经过变换之后, 得到:

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} d\Sigma + \iiint_W \rho F_i v_i dW \\ = \iiint_W \sigma_{ik} \xi_{ik} dW + \iiint_W \rho v_k \frac{dv_k}{dt} dW \end{aligned} \quad (5-31)$$

5.4.3 应力 σ_{ik} 的功率

我们来计算物体变形时由应力 σ_{ik} 引起的功率。为此在某点 M 的邻域内分离出立方体元, 它的棱长 dl , 且各面与应力张量主轴正交。假定应变速率张量和应力张量主轴重合。

在时间 dt 内, 作用应力 σ_1 的面移动距离 $\xi_1 dl dt$, 对于分离出来的体元来说, σ_1 是外部作用的应力。此时完成的功为 $\sigma_1 dl^2 \xi_1 dl dt = \sigma_1 \xi_1 dl^3 dt$ 。

类似地,对其它面说来,这个功将是 $\sigma_2 \xi_2 dV dt$ 和 $\sigma_3 \xi_3 dV dt$ 。

总功是 $\sigma_i \xi_i dV dt$, 而由应力 σ_i 所完成的比功率(在单位时间内单位体积上做的功)是 $\sigma_i \xi_i$ 。

转向任意坐标系并考虑方向余弦矩阵 α_{ik} (见1.2节)的性质,可得到:

$$\dot{A}_{v,i} = \sigma_i \dot{\xi}_i = \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} \quad (5-32)$$

应当指出,这个表达式可以用两个加数之和的形式表示:

$$\sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} = (s_{ik} + \sigma_0 \delta_{ik})(\eta_{ik} + \xi_0 \delta_{ik}) = s_{ik} \eta_{ik} + 3\sigma_0 \dot{\xi}_0 \quad (5-33)$$

(在导出这个公式时,利用了明显的关系 $s_{ik} \delta_{ik} = \eta_{ik} \delta_{ik} = 0$, $\delta_{ik} \delta_{ik} = 3$)。

这些加数中的第一项是体元形状改变时由应力偏差张量的分量所做的功率。而第二项是体元体积改变时球张量的分量所做的功率。

由应力 σ_{ik} 在体积 D 中所做总功率等于 $\iiint_D \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} dW$ 。

最后,有关系式(见例题5.2):

$$\begin{aligned} \iiint_W \rho v_k \frac{dv_k}{dt} dW &= \frac{1}{2} \iiint_W \rho \frac{d}{dt} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) dW \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iiint_W \rho v^2 dW \right) = \frac{dK}{dt} \end{aligned}$$

其中 $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ 是速度矢量的模, K 是域 W 内连续介质的动能。

这就可以以如下形式写出机械能守恒方程:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} d\Sigma + \iiint_W \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dW \\ = \iiint_W \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} dW + \frac{d}{dt} \iiint_W \frac{1}{2} \rho v^2 dW \end{aligned} \quad (5-34)$$

因而我们证明了下述定理。

定理5.5 外力（表面力 $\vec{\sigma}$ 和体积力 \vec{F} ）的功率等于应力 σ_{ik} 所做功率和变形体动能对时间的变化速率之和。

思 考 题

1. 什么是功？什么是功率？
2. 怎样计算质量外力的功率？怎样计算表面外力的功率？
3. 为什么在体元 dW 和面元 $d\Sigma$ 的范围内速度 \vec{v} 可看作是不变的？
4. 什么是动能？怎样计算它？
5. 怎样表述机械能守恒定律？

5.5 间断场的守恒定律

5.5.1 间断面

在某些情况下解决连续介质力学问题允许存在密度 ρ 、速度 \vec{v} 和应力 σ_{ik} 的间断。我们来研究什么样的条件被加到这些间断上去^[5]。为此想象地分离出由表面 S 所围出的物质体积 V （图36）。设运动的曲面 $\Sigma(t)$ 将体积分成两部分： V_1 和 V_2 ，它们

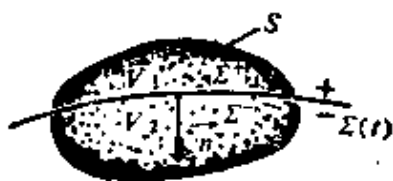


图36 间断面

分别由曲面 S_1 和 S_2 从外面围出。用 G 表示曲面 $\Sigma(t)$ 在体积 V_2 方向上的法向运动速度。此时将认为曲面 Σ 的法线 \vec{n} 指向体积 V_2 一方。

很明显，曲面 Σ 向体积 V_1 一面的法向运动速度等于 $-G$ 。

在表面 S 上，质点的法向移动速度等于 $v_n = v_i n_i$ ，其中 n_i 是法线 \vec{n} 的方向余弦。

5.5.2 积分关系

设 $\varphi(\vec{x}, t)$ 是任意的正则函数。根据公式 (3-20)，有

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_1} \varphi(\vec{x}, t) dV = \iiint_{V_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \iint_{S_1} \varphi v_n dS + \iint_{\Sigma} \varphi G dS \quad (5-35)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_2} \varphi(\vec{x}, t) dV = \iiint_{V_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \iint_{S_2} \varphi v_n dS - \iint_{\Sigma} \varphi G dS \quad (5-36)$$

这里及以后积分域 Σ 应理解为曲面 Σ 封闭在体积 V 内的那部分。

现在我们假定函数 $\varphi(\vec{x}, t)$ 在曲面 Σ 有间断。用 φ^+ 和 φ^- 分别表示函数 φ 在曲面 Σ 上体积 V_1 和 V_2 一侧的值。因而由方程 (5-35)、(5-36) 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \varphi(\vec{x}, t) dV &= \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \iint_S \varphi v_n dS \\ &+ \iint_{\Sigma} (\varphi^+ - \varphi^-) G dS \quad (5-37) \end{aligned}$$

为了方便，我们把曲面 Σ 与 V_1 邻接的一面称为“+”面，面与 V_2 邻接的一面称为“-”面。现在我们规定函数 $\varphi = \rho(\vec{x}, t)$ ，并研究与密度和速度间断有关的条件。

由质量守恒定律得出， $-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV = 0$ ，因而

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{S_1} \rho v_n dS + \iint_{S_2} \rho v_n dS + \iint_{\Sigma} (\rho^+ - \rho^-) G d\Sigma = 0 \quad (5-38)$$

●原本文式右边的 dV 漏印。——译者

这里 ρ^+ 和 ρ^- 是在表面 Σ 的 “+” 面和 “-” 面的密度值。

5.5.3 运动学条件

现在我们固定时间 t 并使体积 V 以一定方式趋向于零，以便使该体积在极限情况下转移到曲面 Σ 的 Σ_0 部分。因此在方程 (5-38) 中沿体积的积分就趋向于零，而

$$\iint_{S_1} \rho v_n dS \rightarrow \iint_{\Sigma_0} \rho^+ v_n^+ dS, \quad \iint_{S_2} \rho v_n dS \rightarrow - \iint_{\Sigma_0} \rho^- v_n^- dS$$

其中，用 v_n^+ 和 v_n^- 表示在法线指向体积 v_2 一方的条件下质点在曲面 Σ_0 “+”、“-” 两方的法向速度。

$$\text{因而得到 } \iint_{\Sigma_0} \rho^+ (v_n^+ - G) d\Sigma - \iint_{\Sigma_0} \rho^- (v_n^- - G) d\Sigma = 0 \bullet$$

因为积分域 Σ_0 是任意的，所以由基本公理得到：在曲面 $\Sigma(t)$ 上有等式：

$$\rho^+ (v_n^+ - G) = \rho^- (v_n^- - G) \quad (5-39)$$

例题5.6 法向速度分量的连续性

密度 $\rho(x, t)$ 在曲面 $\Sigma(t)$ 上没有间断，试求对速度间断施加的限制条件。

解 在式 (5-39) 中取 $\rho^+ = \rho^-$ 后，得到

$$v_n^+ = v_n^- \quad (5-40)$$

因此，沿曲面 $\Sigma(t)$ 速度的法向分量应该是连续的。仅仅允许速度 \vec{v} 的切向分量发生间断。

5.5.4 动力学条件

现在我们转而考虑应力。假定质量外力等于零，我们来写出关于体积 V 动量变化的定理：

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iint_S \vec{\sigma}^n dS$$

●原文 ρ^+ 误为 ρ ， ρ^- 误为 ρ_2 。——译者

或以标量的形式写成：

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV = \iint_S \sigma_{ik} n_k dS \quad (5-41)$$

象在推导条件 (5-39) 那样，令 V 趋向于零，得到：

$$\iint_S \sigma_{ik} n_k dS \rightarrow \iint_{\Sigma_0} (\sigma_{ik}^- - \sigma_{ik}^+) n_k dS$$

其中 σ_{ik}^+ 和 σ_{ik}^- 是曲面 Σ 的 “+”、“-” 两方面的应力张量分量。

此外还有

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \iint_S \rho v_n v_i dS$$

因而方程 (5-41) 的左边变换为：

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \iint_{S_1} \rho v_n v_i dS + \iint_{S_2} \rho v_n v_i dS + \iint_{\Sigma} (\rho^+ v_i^+ \\ & - \rho^- v_i^-) G d\Sigma \end{aligned}$$

其中 v_i^+ 、 v_i^- 分别是曲面 Σ 上 “+”、“-” 两面的速度分量。

求极限并考虑到此时沿体积积分趋向于零，就得到

$$\iint_{\Sigma_0} \rho^+ v_i^+ (G - v_n^+) d\Sigma - \iint_{\Sigma_0} \rho^- v_i^- (G - v_n^-) d\Sigma$$

令式 (5-41) 右边趋向于极限，并考虑到式 (5-39)，就得到下述条件：

$$[\sigma_{ik}] n_k = \rho^+ (v_n^+ - G) [v_i] \quad (5-42)$$

这里用 $[\sigma_{ik}]$ 和 $[v_i]$ 表示应力和速度通过曲面 $\Sigma(t)$ 时的阶跃值：

$$[\sigma_{ik}] = \sigma_{ik}^- - \sigma_{ik}^+, [v_i] = v_i^- - v_i^+ \quad (5-43)$$

例题5.7 法向应力分量的连续性

假定介质密度是连续的，试研究对间断面的法向和切向应力分量施加什么样的限制条件。

解 在曲面 $\Sigma(t)$ 上作正交基底，使得单位矢量 \vec{e}_1 与法向重合，而单位矢量 \vec{e}_2 和 \vec{e}_3 位于曲面的切平面内。在这种情况下

$$n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0; v_1^+ = v_n^+, v_1^- = v_n^-$$

由法向速度分量连续性条件得到 $[v_1] = v_n^- - v_n^+ = 0$

条件 (5-42) 采用下述形式： $[\sigma_{11}] = 0$

因此，曲面 $\Sigma(t)$ 的法向应力分量在曲面上不能有间断。象对应力 σ_{22} 、 σ_{33} 、 σ_{32} 一样，对曲面 $\Sigma(t)$ 切向应力分量 σ_{12} 和 σ_{13} 的间断式 (5-42) 没有加以限制。

5.5.5 机械能守恒

首先假定应力在曲面 $\Sigma_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 上间断，而密度和速度在 $\Sigma_k(t)$ 上没有间断。

因为在式 (5-42) 中， $[v_i] = 0$ ，在曲面 Σ_k 上应力条件为 $[\sigma_{ik}]n_k = 0$ 或

$$(\vec{\sigma}^n)^+ + (\vec{\sigma}^n)^- = 0 \quad (5-44)$$

间断面将物体分为有限数目的几部分。如果对每一个这样的部分单独写出机械能守恒方程，并将它们相加，则沿间断面形为

$\iint_{\Sigma_k} \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} d\Sigma$ 的所有部分都可以消去。

因而，应力间断的存在并不改变式 (5-34) 的形式。

现在转而分析间断面 Σ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 上应力和密度连续但有速度矢量间断的情况，即 $[v] = v^- - v^+ \neq 0$ 。对每个应力、密度、速度都连续的域单独写出机械能守恒方程后，将这些方程相加，则发现在式 (5-34) 左边对每个曲面 Σ_k 都出现一附加的加数，其形式为：

$$\iint_{\Sigma_k} [(\vec{\sigma}^n)^+ \cdot \vec{v}^+ - (\vec{\sigma}^n)^- \cdot \vec{v}^-] d\Sigma =$$

$$-\iint_{\Sigma_k} (\vec{\sigma}^*)^+ [\vec{v}] d\Sigma = - \iint_{\Sigma_k} \tau_v [\vec{v}] d\Sigma \quad (5-45)$$

其中 $[\vec{v}] = |v^- - v^+|$ 是切向速度间断量的绝对值； τ_v 是应力矢量 $(\vec{\sigma}^*)^+$ 的切向分量在矢量 $|\vec{v}|$ 方向的投影。

因此，间断速度场机械能守恒方程可写作下述形式：

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{\sigma}^* \cdot \vec{v} d\Sigma + \iiint_W \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dW &= \iiint_W \sigma_{i,k} \xi_{i,k} dW \\ &+ \left(\iint_{\Sigma_1} \tau_v [\vec{v}] d\Sigma + \dots + \iint_{\Sigma_n} \tau_v [\vec{v}] d\Sigma \right) + \frac{d}{dt} \iiint_W \frac{1}{2} \rho v^2 dW \end{aligned} \quad (5-46)$$

最后，我们研究物体存在刚性（没变形）区域 W_r 的情况，该区域通过曲面 S 与已变形区域 W_d 分开，在 S 面上速度和应力连续。

按5-34，对每一个这样的部分将有：

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_d} \vec{\sigma}^* \cdot \vec{v} d\Sigma + \iint_S \vec{\sigma}^* \cdot \vec{v} dS + \frac{d}{dt} \iiint_{W_d} \frac{1}{2} \rho v^2 dW \\ = \iiint_{W_d} \sigma_{i,k} \xi_{i,k} dW + \iint_{W_d} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dW \end{aligned} \quad (5-47)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_r} \vec{\sigma}^* \cdot \vec{v} d\Sigma - \iint_S \vec{\sigma}^* \cdot \vec{v} dS + \frac{d}{dt} \iiint_{W_r} \frac{1}{2} \rho v^2 dW \\ = \iiint_{W_r} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dW \end{aligned} \quad (5-48)$$

式中， $\Sigma_d + S$ 和 $\Sigma_r + S$ 分别是包围物体变形部分 (W_d) 和刚性部分 (W_r) 的曲面。

式(5-48)积分前面出现负号是由于域 W 和 W' 在曲面 S 上的法线正方向彼此相反。

将式(5-47)和(5-48)相加,并考虑到 $\Sigma_+ + \Sigma_- = \Sigma$,就得到以前的式(5-34)。因此,能量方程(5-34)和(5-48)适用于整个物体,也包括它的刚性域。

思考题

1. 设密度 $\rho(x, t)$ 是坐标和时间 t 的连续函数。在某个面 $\Sigma(t)$ 上速度的法向分量能否有间断?切向速度分量和垂直于曲面 $\Sigma(t)$ 的应力是否有间断?
2. 出现应力和速度间断会影响到机械能守恒定律的描述吗?
3. 能量方程(5-46)能够适用于包括其刚性部分在内的整个变形体吗?

5.6 热力学基础

5.6.1 研究宏观体系的唯象方法和统计方法

连续介质力学是研究发生在宏观体系即包含有大量微观粒子(原子、分子、离子等)的体积内的过程。这些体系的研究方法有两个,唯象方法和统计方法。

唯象方法(源于希腊词汇 *phenomenus*——现象)确定象体积、压力、温度这样直接被观察到的(在宏观对象上测定到的)量之间的关系。此时不利用任何关于物质原子-分子结构模型概念。

统计方法与唯象方法相反,它是由描述某些单个原子或分子间相互作用的某些模型出发的。提出下述任务:若已知构成体系的粒子行为的规律,利用概率的数学理论方法确定宏观数量物质的行为规律。

研究物理现象的两种方法的内容和可能性有本质的不同。

唯象研究方法比较简单。它的特征是对介质结构的细节进行抽象并用最少数目的可能参数描述它。由于不涉及模型的概念,它具有巨大的普遍性。但是唯象方法不能够揭露现象的内部机

制。

研究宏观体系的统计方法能够解决一系列在唯象方法范围内不能加以分析的问题。一系列物质状态方程的推导、热容量系数的计算就属于这些问题。同时，统计方法的特殊方面是它的复杂性，这使得仅仅对于物质的极简单的原始模型（气体中的简单分子、金属中的电子气等）可得到最终的计算关系。可惜的是，利用统计力学研究塑性变形过程，仍不能获得适于实际应用的结果。

5.6.2 唯象的和统计的热力学

热力学是关于宏观体系的最有普遍性的科学。它分为平衡或可逆过程的经典热力学和最近出现的不平衡或不可逆过程的热力学。其中前者研究处于热力学平衡状态的体系以及这些状态间的转化过程。对于不平衡过程，它仅仅建立指出这些过程可能方向的不等式。不平衡过程热力学的基本任务是定量地研究不平衡过程，特别是以取决于外部条件的函数确定它的速度。

依据所使用的方法，可以说明统计热力学或唯象热力学。

不论是平衡还是不平衡过程的统计热力学都是由组成体系的质点总和所建立的力学（量子力学或经典力学）方程出发的。由于变量数目十分庞大，所以实际上不能实现对这个方程组的积分，即使这一点可能做到，我们大家同样也不能确定这么多方程的初始条件，它远远地超出了实验可能的范围。因此，为了研究类似的体系，一般利用以导入分布函数或统计算子为基础的统计力学方法。

唯象热力学的理论基础是统计热力学，它是根据一些基本原理建立的，这些基本原理概括了大量的观察并且是不取决于形成物体的体系的具体性质而实现的。因此，经典的唯象热力学（以后简称它为热力学）所导出的关于各物理量之间关系方面的规律性有通用的特点。

我们来研究热力学的基本原理和概念。

5.6.3 体系的外参数和内参数

宏观参数是描述宏观体系和它与周围物体关系的量，我们从这个概念开始讨论。属于宏观参数的有密度、体积、弹性等等。宏观参数分为外参数和内参数。

由不包括在体系内的外部物体状况确定的量称为外参数 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

由体系内质点在空间中总体的运动和分布确定的量称为内参数 $b_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 。

独立宏观参数的总和确定了体系的状态。不取决于体系的历史且在给定时刻其状态充分确定的量（即独立参数之总和）称为状态函数。

如果体系参数不随时间而变化，则体系是稳定的。此外，如果体系中不仅全部参数都不随时间变化，而且没有由任何的哪怕是外部源的作用而产生的任何稳定流（即参数沿坐标的梯度等于零），则这个体系状态称为是平衡的。

体系不平衡状态的特征是，参数的梯度作为坐标和时间 t 的函数不等于零。

5.6.4 热力学过程

发生在热力学体系内且哪怕只与体系的一个参数改变相关的一切变化称为热力学过程。

体系内不平衡状态转变到平衡状态的过程称为弛豫过程。此时，为了使每一个参数处于平衡，都存在着自己的特征时间，即该参数的弛豫时间。这些时间中最长的起着全部弛豫时间的作用。

在热力学体系中发生的过程如果其速度远低于弛豫速度，则它就是一连串无限接近的平衡状态，并被称为平衡过程或准静态过程。在任何时刻这种过程的所有参数的梯度都等于零。

如果任何一个参数在等于或小于弛豫时间的一段时间内发生变化，则这个过程称为不平衡的（不稳定的）。

由某状态1向状态2过渡的过程，如果其每一个中间状态即使将所有增量用相反符号的增量代替，全部方程对于这些无限小的

参数增量仍然满足,则称此过程是可逆的。如果过程不具有这样的特性,则称为不可逆的。一般平衡过程同时也是可逆的。同时,也可以研究不是由热力学平衡状态组成的可逆过程。

我们来研究一下热力学体系与周围介质的关系。根据与外部物体关系的特性或根据将热力学体系与周围介质分离开的约束的类型,可以将热力学体系分为三种类型:

- 1) 孤立的或封闭的体系,它不与周围介质交换能量。
- 2) 绝热孤立体系,它不与周围介质以热的形式交换能量。
- 3) 非孤立体系。

5.6.5 热力学定律

现在我们来列举热力学的基本定律。

1) 热力学平衡状态存在原理 该原理认为:孤立体系永远处于热力学平衡状态,任何时候也不会自发地脱离这种状态。

2) 温度存在原理(热力学第零定律) 这个原理认为:当使若干绝热孤立的热力学平衡的体系进行热接触时,只有在原始体系温度相等的条件下,这些体系才形成共同的热力学平衡体系。

根据这个原理,引入了经验温度 θ ,这个量反映了平衡体系的内部运动状态。热力学体系的全部的平衡内参数都是外参数和温度 θ 的函数。

3) 热力学第一定律 当物质运动由一种形式转变为另一种形式时,它们的公共的度量是能。热力学体系的全部能量分为外能和内能。

整个体系的动能和力场中体系的势能属于外部能量。体系能量的其余部分称为它的内能。

热力学中一般不研究整个体系的运动和在这种运动中体系势能的变化,因此体系的内能是热力学体系的能量。所有类型的动能和体系中粒子的相互作用能(例如分子的平动和转动动能、原子振动能、分子相互作用能、被充满的电子层的原子内能,等等)都属于体系内能。

内能 E 是内参数,因而在平衡时它取决于外参数 α_i 和温

度 θ ;

$$E = E(a_1, a_2, \dots, a_n, \theta) \quad (5-49)$$

当热力学体系同周围介质相互作用时，发生能量交换。此时外部物体向体系传递能量可能有两种不同的方法，即改变体系外参数的方法和不改变这些参数的方法。

第一种能量传递方法与外参数变化有关，称为功；第二种方法不改变外参数，称为热，而传递过程本身称为热交换。

改变体系外参数而向体系传递的能量也称为功 A （而不称为功的数量），不改变体系的外参数而向它传递的能量称为热量 Q 。

在热力学中，如果体系对外部物体做功，则通常认为功 A 是正的，如果相应的能量是传递给体系的，则认为热量是正的。

热力学第一定律确定：体系的内能是它的状态的单值函数，仅仅在外部作用影响下才发生变化。

以积分的形式，即对于最终的过程，第一定律以 $E_2 - E_1 = Q - A$ 的形式写出，其中 $E_2 - E_1$ 是体系由第一状态转变为第二状态时内能的改变。

对于微小的过程，有方程

$$\delta E = \delta Q - \delta A \quad (5-50)$$

其中 δQ 表示微热量， δA 表示微功，选择字母 δ 以便指出它们不是精确的微分，如象 dE 那样。

4) 热力学第二定律 热力学第二定律确认，任何一个平衡的体系存在一个单值的状态函数——熵 S ，与内能不同，在孤立体系中仅仅对准静态过程熵才不改变，在不稳定过程中，它总是增加。

对于准静态过程，

$$\delta Q = T dS \quad (5-51)$$

其中 T 是绝对温度，它被定为实验确定的温度 θ 的函数。

将此方程与第一定律的方程 (5-50) 联立，将可得到准静态过程（可逆过程）的热力学基本方程，

$$T dS = dE + \delta A \quad (5-52)$$

对于不可逆过程，有不等式

$$T dS > dE + \delta A \quad (5-53)$$

此外，还证明了在任何绝热过程中熵的增量 ΔS 不能是负的，即

$$\Delta S \geq 0 \quad (5-54)$$

5.6.6 关于不平衡过程的运动学-热力学

经典热力学主要研究平衡过程。在分析不平衡过程时，它仅仅指出了它们的方向，并没有给出得到定量结果的可能。

同时，正是不平衡过程对于连续介质力学来说有重大的意义。因此，力图建立不平衡过程热力学是很自然的^[6]。

经典热力学的普遍化首先要基于局部平衡的概念。众所周知，弛豫时间随着体系尺寸的增加而增加。因此从宏观看来体系的个别微小部分本身达到平衡状态比这些微小部分之间建立平衡要早得多。尽管体系整体不是处于平衡状态，但是可以说从宏观看来体系的不大的一部分处于局部平衡，这些部分可用确定的温度和其它的热力学参数来表示。

现代的不可逆过程热力学基于如下形式表示的某些公设：

1) 热力学平衡过程的关系 (5-52)、(5-53) 对于热力学不平衡过程仍然是正确的，但这仅仅是对局部而言（局部平衡状态原理）。

2) 在每一个局部体积内，内能和熵象平衡状态一样，明显地只取决于热力学参数，并仅仅通过它们又依赖于时间和坐标。

3) 在所研究的介质内速度、温度、应力的梯度足够小。

4) 已知物体变形时，能和熵的全部变化是在单个体元中这些参数变化的叠加。

应当指出，上述原理与经典热力学的原理并不互相矛盾，特别是与一切不可逆过程中熵增加的论断不发生矛盾。事实是仅仅局部地假定关系式 (5-53)、(5-54) 是正确的。

在转而研究整个物体时，关于局部平衡的假定可以计算不平

衡过程引起的熵的变化。因此，对于孤立的绝热物体，可以与经典热力学完全对应地指出：对于整个物体在不可逆过程中熵将增加。

5.6.7 关于连续介质的热力学和运动学

我们来研究某个时刻 t 由曲面 Σ 限定的物质体积 W 。对于体积的局部部分（微元 dW ），如果引入了单位质量具有比内能 e 和比熵 s 的概念，则可以确定内能 dE 和熵 dS 。此时 $dE = e\rho dW$ ， $dS = s\rho dW$ 。

根据这些量对体积 W 叠加的公设，有：

$$E = \iiint_W e\rho dW, \quad S = \iiint_W s\rho dW \quad (5-55)$$

让我们回到机械能方程 (5-34)。现在我们来考虑通过曲面 Σ 的热通量，为此引入热流矢量 \vec{q} ，用来表示在单位时间内通过单位表面的热通量。

除了通过物体表面的热通量外，由内向外的热能流也可以用强度为 z 的分布热源的作用描述。换言之， z 是单位时间在单位质量内由于同周围介质相互作用（例如由于物体的涡流感应如热）而放出的热量。

此时，物体流向介质的热流速度用下述公式表示：

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \iint_{\Sigma} q_n d\Sigma + \iiint_W \rho z dW \quad (5-56)$$

由于计算单位时间内流入体积 W 的热量，所以前面出现负号（正号是相应于由体积流出的热量）。

能量守恒定律以下述形式写出^[7]

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dF}{dt} = \frac{\delta A}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} \quad (5-57)$$

$$\text{其中 } \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_W \rho e dW = \iiint_W \rho \frac{de}{dt} dW$$

[参见公式 (5-8)，体积 W 内能的改变速度]。

其次， $\delta A/dt$ 是作用在体积 W 上的表面外力和质量外力的功率，即外力单位时间内对体积 W 所作的功。因此，与关系式 (5-50)、(5-52) 不同，这个功率带着“+”号出现在能量方程的右边部分。

字母“ δ ”表示与时间 dt 对应的增量 δA 和 δQ 不是全微分。

式 (5-57) 展开后形为：

$$\begin{aligned} \iiint_W \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dW + \iiint_W \rho \frac{de}{dt} dW &= \iint_{\Sigma} \sigma_{ni} v_i d\Sigma \\ &+ \iiint_W \rho F_i v_i dW - \iint_{\Sigma} q_i n_i d\Sigma + \iiint_W \rho z dW \end{aligned} \quad (5-58)$$

利用柯西关系 $\sigma_{ni} = \sigma_{ik} n_k$ ，并将面积分变换为按体积积分，将可得到

$$\begin{aligned} \iiint_W \left[v_i \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho F_i \right) + \rho \frac{de}{dt} - \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} \right. \\ \left. + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho z \right] dW = 0 \end{aligned}$$

由运动方程 (5-14) 得出：圆括号内的表达式是零。体积 W 的选择是任意的。因此在充满连续介质的域内的每一点，以局部形式写出能量守恒方程

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho z \quad (5-59)$$

都是正确的。

假定应变速率张量 $T_{ij}^{\dot{}}$ 可用两个张量即弹性（可逆）应变速率张量 $T_{ij}^{\dot{e}} = [\dot{\xi}_{ij}^e]$ 和塑性（不可逆）应变速率张量 $T_{ij}^{\dot{p}} = [\dot{\xi}_{ij}^p]$ 之和的形式表示。此时能量守恒方程 (5-59) 可用下式写出。

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik}^e + \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik}^p - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho z \quad (5-60)$$

量 $\sigma_{ik}\xi_{ik}$ 称为耗散函数，它是单位体积内的内应力能的耗散速度。如果在介质中发生可逆过程，则耗散函数同样都等于零^①。

5.6.8 热力学第二定律

对于局部体元 dW ，能够确定有限数目的外部和内部热力学参数。例如对于弹性介质（见6.1节）比内能 e 是六个外部参数即应变分量 ε_{ik} 和温度 T 的函数。当由给定的状态转变为无限接近的应变状态时，增量 e 可以用下述形式写出：

$$de = \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik} + \frac{\partial e}{\partial T} \delta T$$

若用 δQ 表示热增量，则热力学第一定律可写成：

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik} + \frac{\partial e}{\partial T} \delta T = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} + \delta Q)$$

在一般情况下，局部体元 dW 的外部热力学参数是变形分量和温度随时间变化过程的某个泛函（见9.1节）。

热力学第一定律认为，机械能和热能可以相互转变。但是只有热力学第二定律才能回答过程是否可逆这一问题。

上面我们引入了单位质量所具有的比熵 s 的概念。

体元 dW 的熵等于 $\rho s dW$ ，而体积 W 的总熵由积分 $\iiint_W \rho s dW$ 确定。

以两个加数和的形式表示比熵的变化 ds ，即 $ds = ds^{(e)} + ds^{(i)}$ 。其中 $ds^{(e)}$ 是由于同外部介质相互作用引起的比熵的增量，而 $ds^{(i)}$ 是与体系内变化有关的增量。

若承认了热力学第二定律对于体系局部的可用性，则可以断言， $ds^{(i)} \geq 0$ ，且等号仅仅对于可逆过程是正确的。

由热力学第二定律得出：连续介质充满体积 W ，它的总熵 S

^①在研究液体流动时，将应力张量表示为保守应力张量 $[\sigma_{ik}^C]$ 和耗散应力张量 $[\sigma_{ik}^D]$ 之和更为方便。在这种情况下耗散函数定义为 $\sigma_{ik}^D \xi_{ik}$ 。

的变化速率无论何时也不能小于通过体积边界的熵流与在体积内由外源产生的熵之和。

这个规律用积分的形式表示如下：

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho s dW \geq \iiint_W \rho \eta dW - \iint_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\Sigma \quad (5-61)$$

其中 η 是单位质量上局部外熵源的功率， T 是绝对温度。

等号适用于可逆过程，不等式适用于不可逆过程。

引入量 γ 表示单位质量上内部产生熵的速率值。

利用变换

$$\iint_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\Sigma = \iiint_W \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dW$$

并考虑到体积 dW 的任意性，得到克劳修斯-杜亥姆 (Clausius-Duhem) 不等式：

$$\gamma \equiv \frac{ds}{dt} - \eta - \frac{1}{\rho T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \geq 0 \quad (5-62)$$

这个不等式对应力和应变状态关系方程加上了一定的限制。

特别由它可得出：耗散函数满足不等式

$$\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{ik}^p \geq 0 \quad (5-63)$$

5.6.9 唯象方程

在连续介质里所发生的许多不可逆过程中，相应的规律性用原因和结果之间的线性关系表示。例如，热流和温度梯度成正比例的热传导定律 ($\vec{q} = -k \text{grad} \theta$, $k > 0$)，混合物组元流和浓度梯度成比例的扩散定律 ($\vec{j} = -D \text{grad} c$, $D > 0$)，电流密度和电势梯度成正比例的欧姆定律 ($\vec{j} = -\sigma \text{grad} \varphi$, $\sigma > 0$)。

在关于这些现象的热力学中，把引起不可逆现象的原因称为“力”，并通过 X_i ($i = 1, 2, \dots$ ；温度梯度、浓度梯度、电势梯度、等等) 表示。

●原文误为 W 。——校者。

由力 \vec{X}_i 引起的相应的不可逆现象的数量特征称为流 \vec{J}_i ($i = 1, 2, \dots$; 热流、扩散流、电流密度矢量, 等等)。

产生熵的速度仅仅由不可逆过程决定并可写作:

$$\gamma = \sum_i \vec{J}_i \cdot \vec{X}_i \quad (5-64)$$

其中 \vec{J}_i 是“流” (例如扩散流 \vec{j} , 热流 \vec{q} , 耗散应力张量 σ_{ik}^D), 而 \vec{X}_i 是伴同它的“热力学力”, 即引起偏离平衡状态的热力学参数的梯度。

从热力学观点看来, 平衡位置的特征是有效的热力学力等于零。在这种情况下, 熵产生速度的表达式同样等于零。若将平衡的概念推广, 则可以合乎逻辑地作出假定: 随着所有有效热力学力在平衡位置变为零, 热力学流也变为零。在这种情况下, 可以用一般的形式写出热力学流和力的关系。经验表明, 在很广泛的实验条件范围内, 这个关系非常简单, 不可逆流是热力学力的线性函数,

$$\vec{J}_i = \sum_k L_{ik} \vec{X}_k \quad (5-65)$$

其中 L_{ik} 是转移系数。

唯象方程(5-65)可以看作是将流和力的普遍关系展开级数的第一项。在一些直接的过程中, 热力学力 \vec{X}_i 引起流 \vec{J}_i , 例如温度梯度引起热流

$$q = -k \text{grad} \theta \quad (5-66)$$

其中 k 是导热系数。

确定电势梯度和电流之间关系的欧姆定律, 确定浓度梯度和物质流之间关系的道尔西 (Darcy) 定律, 都包括在这种情况下内。

与此同时, 在 $k \neq i$ 时热力学力 \vec{X}_i 同样可以引起流 \vec{J}_k 。例如温度梯度可以引起多元系的物质流 (热扩散), 浓度梯度可以引起热流 (扩散的热效应)。这种过程称为交叉效应或叠加效应, 它们用系数 L_{ik} 表示。

不可逆过程热力学的一个基本理论是翁扎格 (Onsager) 定理，它确定了在没有外加磁场和整个体系的转动时，转移系数是对称的，即：

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (5-67)$$

思 考 题

1. 唯象方法的基本特点是什么？
2. 何谓热力学外参数、热力学内参数、状态函数？
3. 什么叫热力学过程？
4. 什么样的热力学过程称为可逆的？什么样的称为不可逆的？
5. 你都知悉什么类型的热力学体系？
6. 怎样表述热力学的基本原理？
7. 什么是经验温度？
8. 局部平衡状态原理是什么？
9. 什么是耗散函数？

5.7 热传导方程

5.7.1 热平衡方程

由变形介质中分离出体积 W ，它由表面 Σ 限定(见1.3节)。设分离体任意质点的温度是 θ ，而在时间 dt 内改变了 $d\theta$ 。体元 dW 吸收的热量等于 $\rho dW c d\theta$ ，其中 c 是介质的热容量。根据热力学过程的类型， c 可以指 c_p (压力 $p = \text{常数}$)， c_v (体积 $v = \text{常数}$)， c_σ (应力张量 $T_\sigma = \text{常数}$)， c_ϵ (应变张量 $T_\epsilon = \text{常数}$) 等。

对体积 W 整个说来，这个热将等于 $\iiint_W d\theta c \rho dW$ ，它由两部分组成：通过表面 Σ 的热流和在变形过程中物体释放的热量。此时，我们假定沿体积分布的外热源的功率等于零。因而，我们不研究变形体通电流进行高频电流加热等这样的过程。

前面我们曾假定应变速率张量 T_ϵ 可以用两个张量即弹性(可

逆) 应变速率张量 $T_i^e = [\xi_{ik}^e]$ 和塑性 (不可逆) 应变速率张量 $T_i^p = [\xi_{ik}^p]$ 之和的形式表示。量 $\sigma_{ik} \xi_{ik}^p$ 称为耗散函数, 它是单位体积内能量的耗散速度。此时在时间 dt 体元 dW 内释放热量为 $\frac{\sigma_{ik} \xi_{ik}^p}{J} dW dt$, 其中 J 是热功当量。

总耗散量为积分 $\frac{1}{J} \iiint_W \sigma_{ik} \xi_{ik}^p dW dt$

在转向计算通过表面 Σ 的热流时, 让我们引入某些假定。

首先假定, 存在热流矢量 $\vec{q} = q(x, t)$, 且在单位时间内通过某个表面 S 流过的热量等于通过这个表面的矢量流量:

$$Q = \iint_S q_n dS。$$

因此, 在时间 dt 流入体积 W 的热量等于 $-\iint_S q_n d\Sigma dt$, 而体

积 W 的热平衡方程将是

$$\iiint_W d\theta \rho c dW = -\iint_S q_n d\Sigma dt + \iiint_W \frac{\sigma_{ik} \xi_{ik}^p}{J} dW dt \quad (5-68)$$

5.7.2 热传导方程

将面积分变换为按体积积分:

$$\iiint_W \left(\frac{d\theta}{dt} \rho c + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{\sigma_{ik} \xi_{ik}^p}{J} \right) dW = 0$$

因为体积 W 的选择是相当任意的, 由基本定理有

$$\frac{d\theta}{dt} \rho c + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{\sigma_{ik} \xi_{ik}^p}{J} = 0 \quad (5-69)$$

第二个假定认为热流矢量 \vec{q} 和温度场梯度有以下关系 [傅立叶 (Fourier) 定律]:

●原文为 q , 不妥。——译者

$$\vec{q} = -k \text{grad} \theta \quad (5-70)$$

式中 k 是称为导热系数的某个值。“负”号意味着热是由物体较热的部分向不太热的部分运动。

将这个方程式代入 (5-69) 后, 可得到热传导方程

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) - \frac{\sigma_{ij} \xi_{ij}^p}{J} = 0$$

让我们研究 $k = \text{常数}$ 时的这个方程的特殊情况。

将方程两边除以 ρc , 得到

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \right) + \nu \sigma_{ij} \xi_{ij}^p \quad (5-71)$$

其中 $\kappa = k/\rho c$, 称为导温系数, 而量

$$\nu = 1/[\rho c]$$

思 考 题

1. 怎样将热流矢量同温度场联系起来?
2. 怎样计算单位时间内流过表面 Σ 的热量?
3. 什么样的物理量称为导温系数?

参 考 文 献

- Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды, М., «Наука», 1978, 308с. с ил.
- Гун Г. Я. Лекции по механике сплошных сред. Ч.1. М., МИСИС, 1971, 124с. с ил.
- Ильюшин А. А. Механика сплошной среды, Изд. 2-е, Изд-во МГУ, 1978 288с. с ил.
- Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, М., Мир, 1974, 319с. с ил.
- Лыков А. В. Теория теплопроводности, М., «Высшая школа», 1967, 600с. с ил.
- Седов Л. И. Механика сплошной среды, Изд. 3-е, Т.1, М., «Наука», 1976, 535с. с ил.
- Томас Г. Пластическое течение и разрушение в твердых телах, М., «Мир», 1964, 308 с, с ил.

第6章 本构方程

运动学关系和守恒定律不能与初始和边界条件一起给出描述连续介质运动的全部方程组。为了使方程组成为闭合的，必须有附加的关系式。所谓本构方程就是这样的附加关系式，它是描述所研究介质具体物理性质的方程。

上面研究的热传导理论方程 $q = -k \text{grad} \theta$ 可以引用作为本构方程的例子，它将热量矢量 q 与温度 θ 的梯度联系起来（傅立叶定律）。虎克定律在经典的弹性理论中将应力和变形联系起来，可作为本构方程的另一个例子。

唯象本构方程的普遍理论确定了不同介质中的应力场、应变场、应变速率场、温度场之间关系的普遍形式，建立这种理论是连续介质力学的基本问题之一。

通常本构方程是根据实验研究结果导出的。为了使这些实验关系能在与实验条件不同的条件下正确地描述材料的行为，必须确定某些应该满足这些关系的规则。其中最重要的是宏观确定性原理、物理容许性原理和与参照系无关原理。

上述第一个原理与发生在连续介质中的热力学过程的概念有关。在研究确定的质点 M ($\vec{X} = \text{常数}$)的邻域时，如果这个质点的应变张量在间隔 $[t_0, t]$ 内以时间的连续可微的函数形式

$$\vec{X} = \text{常数}; T_e = T_e(\tau), t_0 \leq \tau \leq t$$

给出，则我们说变形过程给定。

类似地，在质点 M ($\vec{X} = \text{常数}$)的邻域内，如果该点的应力张量以时间的连续可微的函数形式

$$\vec{X} = \text{常数}, T_\sigma = T_\sigma(\tau), t_0 \leq \tau \leq t$$

给出，则加载过程也给定了。

由A.A. 依留申定义的宏观确定性公设断言：对给定的物质，热力学状态即时刻 t 质点 M ($\vec{X} = \text{常数}$)的任何热力学宏观

量都单值地由该质点的过程 $T_i(\tau)$ 、 $\theta(\tau)$ ， $t_0 \leq \tau \leq t$ 及初始值 $T_i(t_0)$ ， $\theta(t_0)$ 确定。

为了使本构方程与物理的守恒定律协调一致，需要物理容许性原理。

由与参照系无关原理可以得出：相对于观察者坐标系的变换，状态方程应该不变。

让我们谈谈基于金属和合金机械性能的实验研究而得出的宏观确定性原理的一个结果。

在金属压力加工问题中，加载物体的应力和应变状态在一般情况下是不均匀的，即在物体不同点是不同的，是非定常和随时间变化的。同时，如果分离出任意质点 M 的足够小的邻域，那末由于在这个邻域内应力和应变状态的连续性，可以认为是均匀的。

一定形状和有限尺寸的物体，构成它的物质与构成体积 ΔW 的物质一样，两者在初始时刻 t_0 的状态也一样，则称这个物体是对于质点 M 邻域内物体体积的 M -试样。此时，试样的应力和应变状态以及温度场在任何时刻沿体积都是均匀的；温度 $\theta(t)$ 、应变 $\epsilon_{ik}(t)$ （应力 $\sigma_{ik}(t)$ ）的任何变化过程都能够实现。 M -试样试验的总和称为 M -试验。

宏观确定性公设的结果断言：在物体体积 ΔW 中的物质状态可以在 M -试验中再现。换言之， M -试样可以对应于所研究的质点 M 的邻域，且这个邻域的加载（变形）过程可以在 M -试样中再现^[8]。

为了确定应力和变形之间关系的规律以及考虑加载过程影响来研究材料的破坏条件，可以进行 M -试样实验，从而给出温度 $\theta(t)$ 、应变分量 $\epsilon_{ik}(t)$ 随时间变化的规律。这时假定实际中可能瞬时测量试样边界上的外力和位移并能进行足够精确的热量测量，这样就能够确定吸收热和析出热。知道了外力，就能够求出应力 $\sigma_{ik}(t)$ （试样的应力状态是均匀的），此应力已经与实验者无关而只决定于物质的物理性质和外部条件。

同样，若已知应力 $\sigma_{ik}(t)$ 和温度 $\theta(t)$ 的变化规律，在实验过

程中就能求出应变 $\varepsilon_{ik}(t)$ 的变化。在对物理特性进行某些限制时，加载过程就能以混合的形式给定，即在十二个量 σ_{ik} 、 ε_{ik} 中给出六个。

在位移和应变很小时，适当的办法是研究在点 M_0 的加载过程以及相应地研究在 M -试样中的加载过程并进而给出应变偏差张量 $[e_{ik}(t)]$ 和平均静水压力 $p(t) = -\sigma_0(t)$ 随时间的变化规律。很明显，将随时间而给定的函数这样组合起来，在物理上是允许的。实际上， M -试样实验可以在高压小室中进行，并可按任何规律给出这个压力和试样切变形的变化。

6.1 流变模型（单向应力状态）

6.1.1 关于流变学

建立本构方程的普遍理论是连续介质力学重要部分——流变学的基本任务之一（“流变”源于希腊词汇“*reo*”——流，意即关于材料流动的科学）。流变学应当回答的问题是：在时刻 t ，在已知质点的邻域内，已知它的变形（加载）过程时，应力（应变）应该是什么样的。更确切地说，流变学确定了描述不同连续介质热力学性质的泛函[●]形式。

$$T_0 = T_0[\overline{T_0(t)}]_0^t \quad \text{或} \quad T_0 = T_0[\overline{T_0(t)}]_0^t$$

解决这个问题就能预料大范围实验研究的实施情况，并建立能够描述物质实际热力学性质的流变模型。

让我们转向实验研究。在拉伸圆柱试样的实验中，可以揭示材料的重要典型性质。为了在试样中间部分得到均匀的应力和变形状态，圆柱形试样的计算长度 l_0 超过其直径 d_0 五至十倍。

一般使用拉力试验机进行实验，它能够自动地建立原始的拉伸图。此图中纵轴是力 P ，而横轴是与之相应的伸长 Δl 。

6.1.2 条件应力图和真实应力图

以 P - Δl 为坐标的拉伸图的图形不仅取决于材料的性质而且

●泛函的概念在1.3节和9.1节研究。

取决于试样的尺寸。为了得到仅仅表示材料机械性能的图，以 $\sigma-\epsilon$ 为坐标重新计算原始的拉伸图。这个图的纵坐标是拉力 P 与试样原始横截面积之比， $\sigma = P/\Phi_0$ 。

应力图的横坐标是试样计算部分的绝对伸长与其初始长度之比，即 $\epsilon = \Delta l/l_0$ 。

这样得到的应力与应变的关系图没有考虑试样横截面积的变化，因此称其为条件应力图，以便与真实应力图相区别，后者是以 P 除以即时横截面积而作出的。

图37给出了低碳钢的条件应力图（实线）和真实应力图（虚线）。每一条线都可标出一系列特征点： A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 。

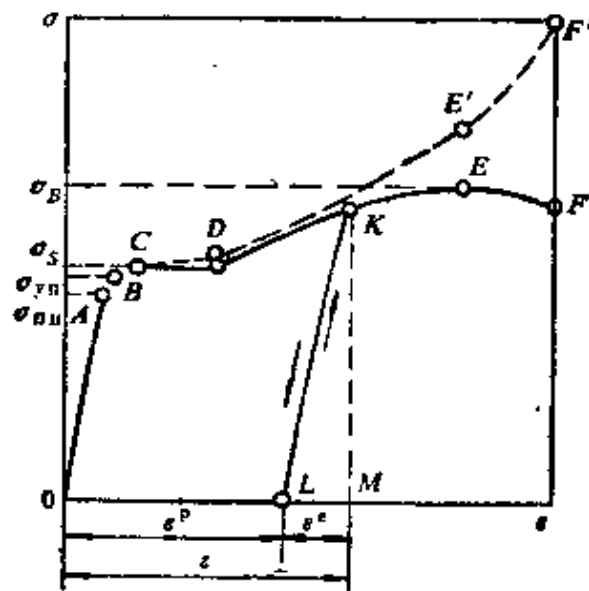


图37 有流动台阶材料的应力图

首先在 OA 段，图中是倾斜直线。在这个范围内，应力 σ 与应变 ϵ 成比例增长，即遵从胡克定律 $\sigma = E\epsilon$ ，其中 E 是拉伸弹性模数。

在达到比例极限 σ_{nu} 之前，胡克定律都是正确的。

过点 A ，曲线弯曲，胡克定律被破坏了。但是一直到相应弹性极限 σ_{yn} 的点 B 之前，试样的变形仍然是弹性的，在卸载时变形完全消失。点 B 接近于点 A ，因此常常认为它们是重合的。如果通过点 B 引垂线，则图上这条线的左边是弹性变形区，而右边

是弹塑性变形区，因为在这个区内发生弹性变形同时总是发生卸载时不消失的残余塑性变形。

图上C点开始有一水平段，它对应于流动极限 σ_s 。在这段，不增加载荷变形就增加，材料似乎在“流动”。因此，CD段常称为流动台阶。

出现流动台阶并不是所有材料的特征。在很多情况下，拉伸实验时没有发现台阶CD，拉伸图是图38所示的曲线形式。在这种情况下流动极限 σ_s 有条件地确定为残余变形为某给定值时的应力。

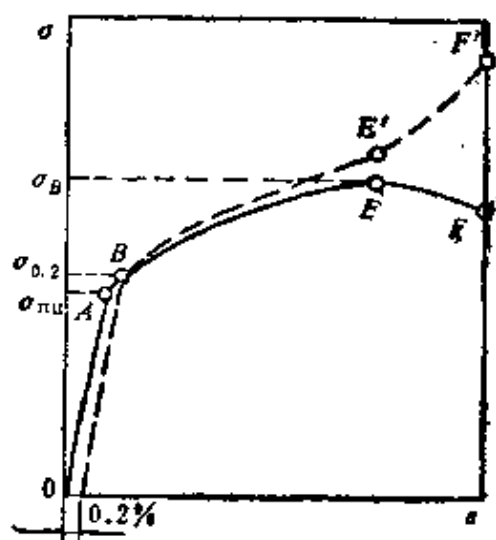


图38 无流动台阶材料的应力图

我们回到图37。从D点开始，材料重新具有了增加变形抗力以抵抗进一步变形的能力。但是在试样伸长时，载荷的增长比起弹性段要缓慢得多。

图沿着有最高点E的光滑曲线变化，在E点条件应力($\sigma = P/\Phi_0$)具有最大值，达到了极限强度 σ_B 。

达到点E之后，在试样上出现将来要断裂的位置并形成了细颈，即试样的局部收缩。在图上，条件应力降低，这与试样横截面减小有关。但是如果计算细颈处最小横截面积上的真实应力，则发现一直到断裂时刻(点F')之前，应力都是增大的。

应该指出，细颈形成的过程伴同着变形的不均匀性，这种不

均匀性既存在于各截面之间，也存在于细颈部分的每个截面之内。

6.1.3 卸载和重复加载

在达到条件应力图的某点 K 之前，我们减少试样的载荷。在卸载过程中 σ - ϵ 关系用平行于直线 OA 的直线 KL 表示。在弹塑性变形区域内卸载时，变形并不完全消失。它减小的是弹性部分的值（线段 LM ）。线段 OL 是残余变形或塑性变形。

在试样重复加载时，拉伸图取直线 KL ，然后取直线 KEF ，就好象我们没有进行中间卸载似的。因此，由于初始变形，金属似乎获得了弹性，并且超过了弹性极限，同时由此而在很大程度上失去了进行塑性变形的能力。这种现象称为强化（硬化）。

在压缩和扭转圆柱体时建立的应力图有同样的特性。

6.1.4 变形速度的影响

变形速度对应力图的影响本质上说来是取决于温度。这是因为，在温度 θ （大约是熔点绝对温度的0.4左右）或此温度以上时，在变形了的金属中以一定速度发生再结晶过程。此时，多晶体的一些晶粒依靠同相的另一些晶粒形成和长大（或仅长大）。在再结晶的过程中，物质转变为具有更大热力学稳定性的状态。

这个过程分为三个阶段。第一阶段中在变形的多晶体中形成了新的晶粒，它们消耗畸变变形的晶粒而长大。第二阶段是集合阶段。在此过程中它的一些畸变的晶粒依赖另一些而长大。因此，晶粒的平均尺寸增大了。最后，在第三阶段，仅仅个别的晶粒表现出长大的能力，这导致形成具有不同尺寸晶粒的组织。

再结晶可消除组织缺陷，提高塑性，恢复金属的初始（变形前的）性质和组织，使它们软化。

因而，加热到超过再结晶温度 θ 的试样进行塑性变形时（这样的变形称为“热变形”），伴同着强化发生了再结晶引起的软化过程。曲线 σ - ϵ 的特征由这两个过程的速度比值确定，变形速度越快，软化的影响越小。这时材料显示出粘性，即在弹塑性变形区域中应力 σ 随变形速度增加而增大（图39）。在最简的情况

下，有线性关系 $\sigma = \sigma_s + \mu' \dot{\epsilon}$ ，其中 μ' 是粘性系数。在 $\sigma_s = 0$ 时，

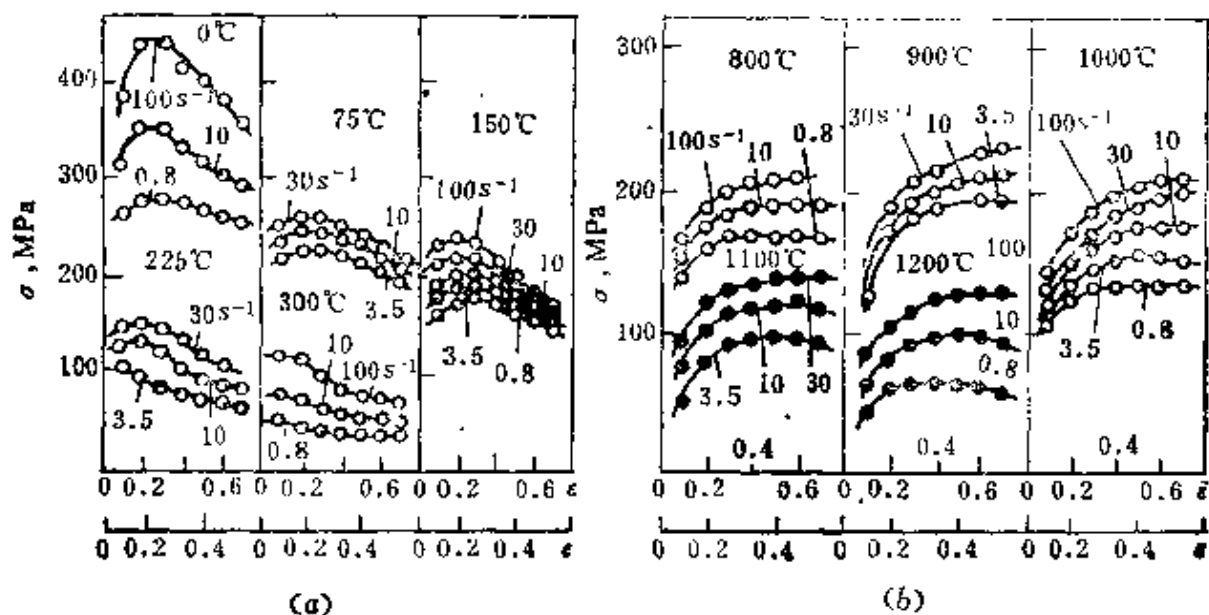


图39 塑性曲线

(a) 钢 90, 60, 热轧后; (b) 钢, 15CrMn, 经锻造和退火; 其中

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \bar{\epsilon} = \ln \frac{l_1}{l_0} \quad \text{曲线上的数字表示变形速度, } s^{-1}$$

我们得到线粘性材料(牛顿介质)。因而根据材料的温度, 我们将能评定“热金属”塑性变形 ($\theta > \theta_s$)、 “冷金属”塑性变形 ($\theta < \theta_s$) 和 “温金属”塑性变形 ($\theta \approx \theta_s$)。

变形速度和温度对于应力图的影响在专门的实验机——塑性计上研究, 这种装置允许以恒定的变形速度拉伸或压缩试样。利用手册⁽⁹⁾可以熟悉实验方法以及许多钢与合金机械性能的研究结果。

图39引用了实验得到的一系列金属与合金的 $\sigma = \sigma(\theta, \epsilon, \dot{\epsilon})$ 曲线。

6.1.5 最简单的流变模型

在研究拉伸圆柱试样的实验结果时, 我们曾指出实际材料的下述基本性质: 弹性、粘性和塑性。连续介质在所施加载荷作用下的行为特点可以用这些基本性质的组合说明。

因此, 采用描述某些理想介质的最简单的流变模型并将此流变模型用机械元件假想地表示是方便的。

我们仍旧研究单向应力状态（杆件拉伸）。用 σ 表示相应的应力，用 e 表示相对伸长，用 $\dot{e} = de/dt$ 表示相对伸长速率。

服从胡克定律的线弹性介质模型

$$\sigma = E\epsilon \quad (6-1)$$

将假想以弹簧的形式表示（图40）。

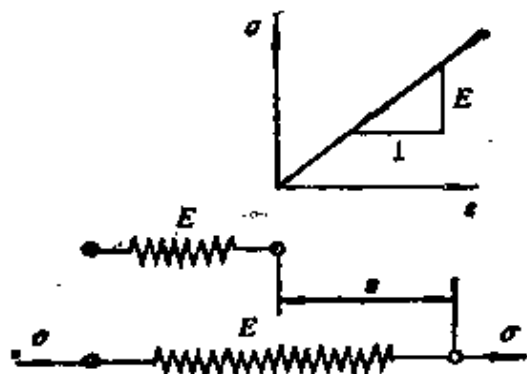


图40 线弹性介质流变模型

遵循牛顿粘性定律的线粘性介质模型

$$\sigma = \mu' \frac{de}{dt} \quad (6-2)$$

可以用在充满粘性介质的气缸中移动的活塞这种形式表示。此时液体在缸壁和活塞之间的缝隙中流出（图41）。

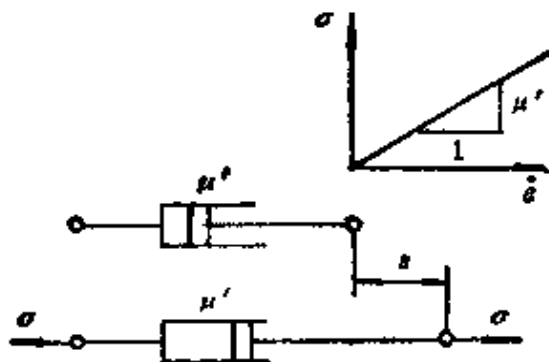


图41 线粘性介质模型

在建立刚-塑性介质模型时，我们将假定：在应力低于流动极限时不发生塑性变形。在满足流动条件

$$\sigma = \sigma_0 \quad (6-3)$$

的时候，发生塑性流动。以位于平面上之荷重（干摩擦定律，图42, a) 的形式表示这个模型。

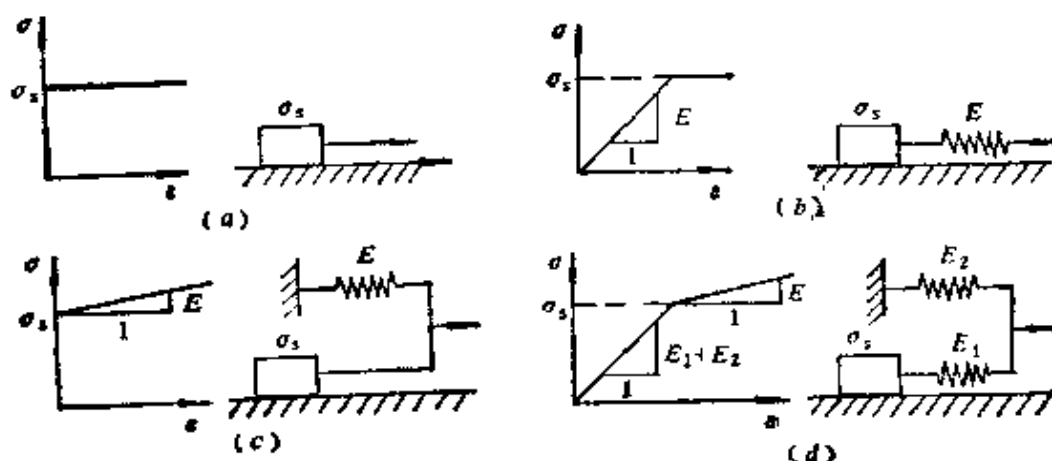


图42 塑性介质模型

(a)刚-塑性介质；(b)弹-理想塑性介质；(c)刚-塑性线性强化介质；
(d)弹-塑性线性强化介质

让我们转向研究最简单的组合模型。顺次将弹性元件和塑性元件联结起来（图42, b）。由此得到了弹-塑性介质模型。这种介质的 σ - ϵ 图见图42, b。此时总的变形由两部分组成，即弹性部分 e^e 和塑性部分 e^p ，

$$\epsilon = e^e + e^p \quad (6-4)$$

在卸载时，弹性变形消失，塑性变形残留下来。图42, c, d 给出了刚-塑性和弹-塑性线性强化介质的 σ - ϵ 图。

让我们顺次连接弹性和粘性元件（图43）。应变速率 $\dot{\xi} = de/dt$ ，是对应于同一应力的弹性分量 $\dot{\xi}^e = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$ 与粘性分量 $e^p = \sigma/\mu'$ 之和；

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu'} \quad (6-5)$$

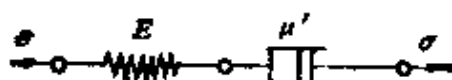


图43 麦克斯韦尔弹-粘性介质

这个方程对应于麦克斯韦尔 (Maxwell) 弹-粘性介质模型，我们来研究这种介质的某些性质。设应力恒定 ($\sigma = \text{常数}$)，则 $d\sigma/dt = 0$ ，材料的流动与粘性液体相似。

在时刻 $t = 0$ 施加应力 $\sigma(0)$ 并将杆端固定后，现在就固定了变形。因为此时 $de/dt = 0$ ，式(6-5)成为 $\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu'} = 0$ ，因而

$$\sigma = \sigma(0) \exp(-t/t_0) \quad (6-6)$$

其中量 $t_0 = \mu'/E$ 称为松弛时间，它是初始应力减小到 $e = 2.718$ 倍所用的时间。

因此，麦克斯韦尔介质模型可以描述实际物体的重要性质，包括应变固定时应力按指数规律降低（所谓应力松弛）的性质。

我们来分析弹性和粘性元件的并列联结〔佛格特 (Voigt) 弹-粘性介质模型〕（图44）。很明显，应力 σ 是弹性分量 $\sigma' =$

Ee 和塑性分量 $\sigma'' = \mu' \frac{de}{dt}$ 之和，

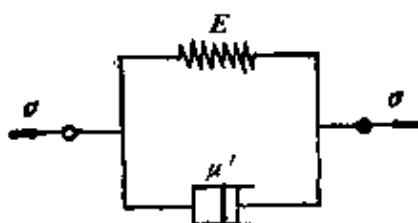


图44 佛格特的弹粘性介质

$$\sigma = Ee + \mu' \frac{de}{dt} \quad (6-7)$$

与式(6-5)不同，式(6-7)不描述松弛过程，因为在 $e = \text{常数}$ 时 d 应力也保持不变，介质的行为是弹性的。如果应力 σ 保持不变，则变形逐渐按规律

$$e = \frac{\sigma}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu'} t\right) \right] \quad (6-8)$$

增长，趋向于值 σ/E ，即产生蠕变。

让我们研究粘性和塑性性质的组合。顺次连接两个元件——

在式(6-10)、(6-11)中积分下限取作 $-\infty$ ，以此强调考虑了全部的加载历史。但实际上加载历史是从一定时刻 $t=0$ 开始的，因此应该规定在 $-\infty \leq t \leq 0$ 时 $\varepsilon = 0$ ，因而式(6-10)、(6-11)写作如下形式：

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (6-12)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (6-13)$$

为确定函数 $K(t)$ 和 $R(t)$ ，可以利用实验数据。例如，设在瞬时施加的应力 σ_1 作用下试样得到瞬时变形 $\varepsilon_1 = \sigma_1/E$ 。在长时间的过程中，保持应力恒定，由关系6-12得到：

$$\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_1} - 1 = \int_0^t R(t-\tau)d\tau$$

在进行变量代换和对 t 微分后， $R(t) = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{dt}$ 。

同样，由式(6-13)，在取 $\varepsilon_1 = \sigma_1/E = \text{常数}$ 后，有

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_1} - 1 = - \int_0^t K(t-\tau)d\tau$$

对 t 微分，得到 $K(t) = \frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma}{dt}$

6.1.7 蠕变的继承理论

为了比在佛格特理论中更完全地描述蠕变过程，Ю.Н.拉包特诺夫(Работнов)将(6-13)式以如下方式

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (6-14)$$

写出后，建议将其推广。

在 $t \rightarrow 0$ 时，由式(6-14)得到 $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ ，即函数 $\varphi(\varepsilon)$ 说明瞬时加载时应力和应变之间的关系。

对 $\sigma(t)$ 解式(6-14)，得到

$$\sigma(t) = \varphi[\varepsilon(t)] - \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \quad (6-15)$$

其中 $R(t-\tau)$ 是式 (6-14) 的核 $K(t-\tau)$ 的预解式。

由导出的关系式可得到恒应力作用下蠕变的规律:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma_1 \left[1 + \int_0^t K(t-\tau)d\tau \right] \quad (6-16)$$

和固定变形时的松弛规律:

$$\sigma(t) = \varphi(\varepsilon_1) \left[1 - \int_0^t R(t-\tau)d\tau \right] \quad (6-17)$$

Ю.Н. 拉包特诺夫在用表达式 $K(t-\tau) = A(t-\tau)^{-\beta}$ 求出核后, 采用幂函数 $\varphi(\varepsilon) = a\varepsilon^\alpha$ 作为函数 $\varphi(\varepsilon)$ 。式中 a, α, A, β 是某些常数。

思 考 题

1. 什么是流变学? 这门科学研究什么问题?
2. 应变速率以怎样的方式影响应力图?
3. 你知道何种最简单的流变模型?
4. 什么是蠕变? 什么是应力松弛?
5. 继承介质的基本特点是什么?

6.2 弹性和粘性

6.2.1 三维应力状态

我们已经研究了最简单的线弹性、线粘性、刚-塑性和继承介质的流变模型。描述这些介质行为的方程属于单向应力状态的特殊情况。

在转向三维应力状态下描述这些介质行为的普遍关系时, 必须确定在应力、应变、应变速率之间的某些联系以及以某种形式写出塑性条件, 以使得在单向应力状态下的方程简化为已经研究过的关系, 而在普遍的情况下, 能够满足本构方程理论的基本原则并保证同实验良好一致。

在第1章(见1.3节)曾确定了两个对称张量函数关系的可

能形式，让我们利用该章的结果。

取应力张量 T_σ [与方程 (6-1)~(6-2) 中的应力 σ 对应] 作为其中一个张量 (T_i)，应变张量 T_ϵ (与应变 e 对应) 或应变速率张量 $T_\dot{\epsilon}$ (与应变速率 $\dot{\epsilon}$ 对应) 将起第二个张量 (T_j) 的作用。

6.2.2 线弹性介质

应力和应变之间的各向同性线性关系的形式为：

$$T_\sigma = 3\lambda\epsilon_0 I + 2\mu T_\epsilon \quad (6-18)$$

或以标量的形式表示：

$$\sigma_{,i} = \lambda\delta_{i,i}\Delta + 2\mu\epsilon_{i,i} \quad (6-19)$$

其中 $\Delta = 3\epsilon_0 = \epsilon_{1,1} + \epsilon_{2,2} + \epsilon_{3,3}$ 是相对体积变化。

这些方程称为广义虎克定律，它描述线弹性介质的行为，常数 λ 和 μ 称为拉梅弹性常数。

如果以等价于上述关系的形式写出它们时，就可得到胡克定律的另一种形式：

$$\sigma_0 = k\Delta \quad (6-20)$$

$$D_\sigma = 2\mu D_\epsilon \quad (6-21)$$

系数 $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ ，称为体积压缩模数。

因此，对线弹性介质而言，平均应力与相对体积变化成正比，而应力偏差张量与应变偏差张量成正比。

我们再回到线性应力状态的情况。令

$$E = [\mu(3\lambda + 2\mu)]/(\lambda + \mu) \quad (6-22)$$

由式 (6-19) 得到了形为 $\sigma_{1,1} = E\epsilon_{1,1}$ 的胡克定律。

在纯剪情况下， $\sigma_{1,2} = 2\mu\epsilon_{1,2}$

因此系数 μ 就是在材料力学教程中熟知的剪切模量。

6.2.3 非线性弹性介质

如果弹性材料不服从胡克定律，那末在单向应力状态下 σ - e 关系的形式是非线性函数 $\sigma = f(e)$ (图45, a)。这时加载和卸载都与同一曲线 OA 相对应，在卸载后变形等于零。这种材料称为非

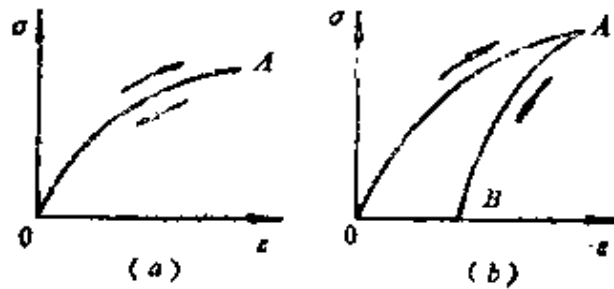


图15 弹性和非弹性

(a)非线性弹性介质; (b)非弹性介质

线性弹性材料。对于非弹性材料，加载规律（曲线 OA ）和卸载规律（曲线 AB ）不同（图45, b ），在物体完全卸载时仍有残余（塑性）变形。

在转向三维应力状态时，为了确定应力和应变之间的各向同性的非线性关系，我们可利用方程式 (1-72) 和 (1-73)。结果得到关系式

$$\sigma_0 = k\Delta \quad (6-23)$$

$$D_o = 2\mu(\Gamma)D_s \quad (6-24)$$

上式将胡克定律进行了推广，其中 $k = \text{常数}$ ，而函数 $\mu(\Gamma)$ 是变化的剪切模数，且由式 (1-74) 得到力学状态方程：

$$T = \mu(\Gamma)\Gamma \quad (6-25)$$

对于实际材料满足稳定性条件 $dT/d\Gamma > 0$ 。

因此，对于非线性弹性介质，在应力和变形之间的关系仍旧是单值的，平均应力和体积相对变化成正比，偏差张量 D_o 和 D_s 成正比。但是后一个关系有非线性特征且由状态方程 (6-25) 确定。

6.2.4 线粘性介质

在转而研究粘性介质时，假定平均应力 σ_0 由不直接依赖于变形速度的压力 ($-p$) 和与体变形速度 $\Delta' = \dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{22} + \dot{\xi}_{33}$ 成比例的附加应力 σ_0' 构成：

$$\sigma_0 = -p + k'\Delta' \quad (6-26)$$

利用关系 (1-63) 并令 $T_s = T_o$ ， $T_v = T_\xi$ ，则得到方程

$$T_{\sigma} = -pI + 3\lambda' \xi_0 I + 2\mu' T_{\xi} \quad (6-27)$$

它将牛顿假定进行了推广。

这个方程以标量的形式可写成

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \lambda' \delta_{ik} \Delta' + 2\mu' \xi_{ik} \quad (6-28)$$

系数 λ' 、 μ' 称为粘性系数。因为它们不取决于应变和应变速率，故称它们为“粘性常数”，尽管它们可能依赖于温度。

这些方程的另一种书写形式是：

$$\sigma_0 = -p + k' \Delta' \quad (6-29)$$

$$D_{\sigma} = 2\mu' D_{\xi} \quad (6-30)$$

常数 k' 称为体积粘性系数。

若介质是不可压缩的，则 $\Delta' = 0$ ，方程(6-29)、(6-30)简化为应力偏差张量与应变速率偏差张量成比例的条件。

最后，如果粘性系数 λ' 和 μ' 等于零，则

$$T_{\sigma} = -pI \quad (6-31)$$

即应力张量和球张量一致，而应力偏差张量等于零。这是理想液体的基本性质。

6.2.5 非线性粘性介质

现在我们来研究在应力和应变速率之间的各向同性的非线性关系。将线粘性规律推广而得到的关系式为：

$$\sigma_0 = -p + k' \Delta' \quad (6-32)$$

$$D_{\sigma} = 2\mu'(\theta, H) D_{\xi} \quad (6-33)$$

其中 $k' = \text{常数}$ ，而函数 $\mu'(\theta, H)$ 是变动的粘性系数，它依赖于温度和切应变速率强度。

非线性粘性介质的力学状态方程为：

$$T = \mu'(\theta, H) H \quad (6-34)$$

思 考 题

1. 弹性介质和非弹性介质有何不同？
2. 线弹性介质平均应力和相对体积变化之间关系如何？应力偏差张量和应变偏差张量之间的关系如何？

3. 线弹性介质和非线性弹性介质的区别是什么?
4. 对于粘性介质应力偏差张量和应变速率偏差张量之间关系如何?
5. 线粘性介质和非线性粘性介质区别是什么?

6.3 塑性

6.3.1 各向同性介质的塑性开始条件

将理想的弹-塑性介质模型 (见6.1节) 推广到复杂应力状态的情况。我们已经确定: 在单向应力状态下当达到流动极限即 $\sigma = \sigma_s$ 时, 金属转为塑性状态。

在一般情况下, 塑性条件 (也常称为流动条件) 写作:

$$f(\sigma_{ik}) = k, \quad k = \text{常数} \quad (6-35)$$

其中 σ_{ik} 是应力张量分量, k 是与流动极限有关的材料常数。

此时假定: 当物体处于弹性状态时满足不等式

$$f(\sigma_{ik}) < k \quad (6-36)$$

而转为塑性状态时, 对应于条件 (6-35)。

为了更清晰起见, 我们将引入张量 $[\sigma_{ik}]$ 的九维应力矢量空间 Π_9 。在空间 Π_9 中, 每一个张量 T_0 都与某个点对应, 而塑性条件 (6-35) 与某个封闭的塑性面 Σ 对应 (图46, a)。位于这个表面内的域 Q 称为材料的弹性状态域。与这个域的点对应的应力状态并不引起残余变形。

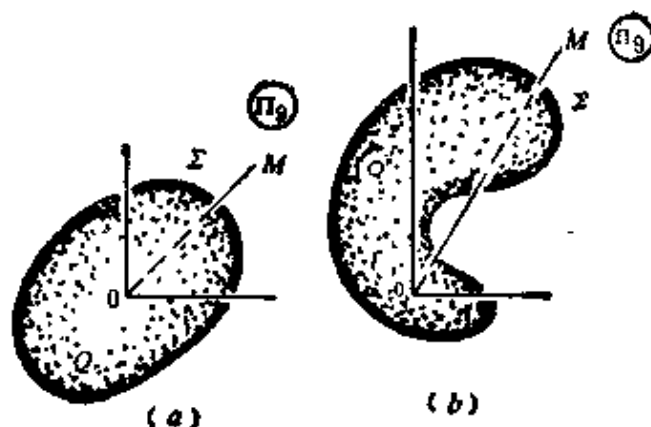


图46 塑性面

(a)凸出的; (b)凹入的

塑性面不通过原点，并且应该是外凸的，即任何一条由坐标原点出发的射线与塑性面相交不多于一次。

第一个性质很明显，达到塑性状态时，应力不等于零。此外，假如塑性图如图46，*b*，那么就存在这样一些弹性应力，在这些应力作用下，如果成比例地减小载荷（沿射线 *OM* 向原点运动），材料就会从某个时刻开始又获得塑性变形。

在材料强化时，塑性面在变形过程中改变，它们可能扩展，发生歪斜，具有棱角和锥点等等。

对理想的塑性介质，塑性面固定。塑性面取决于变形状态参数并在整个塑性变形过程中保持自己的外形不变。

6.3.2 塑性曲线

在采用九维应力空间 Π_9 的同时，我们引入主应力 σ_i ($i=1, 2, 3$) 的三维空间 Π_3 ，在这个空间中，暂时放弃条件 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，则点的笛卡儿坐标同主应力分量一致。

如果塑性条件 (6-35) 不取决于 σ_0 ，则以与偏差张量平面垂直的直线 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 为轴作一圆柱面，它可用来说明塑性条件。为了确定塑性条件的性质，只要研究这个圆柱体在偏差张量平面上的迹——曲线 *C* 就足够了，曲线 *C* 称为塑性曲线 (图47)。

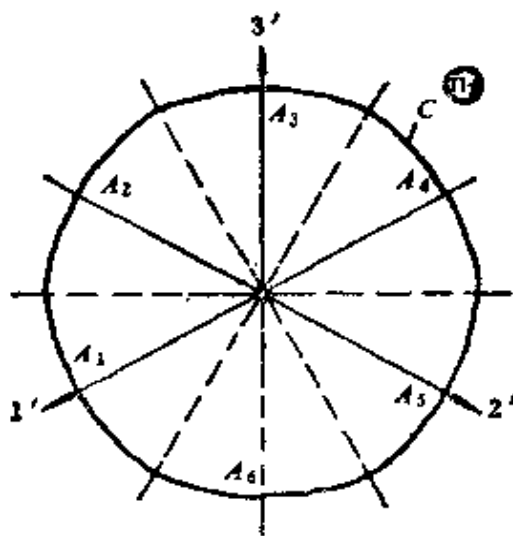


图47 塑性曲线

由介质的各向同性可以得出轴 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的等同性和塑性

曲线对这些轴的对称性。此外，由于拉伸和压缩时流动极限相等，所以塑性曲线应该通过轴1'、2'、3'上与坐标原点等距离的六个点 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_6 。因此，各向同性体的塑性曲线应当由十二个相同的圆弧组成，在实验研究塑性条件时只须观察材料在一个这样的圆弧上的行为就可以了。

6.3.3 最大切应力不变条件

这个条件〔屈雷斯卡-圣维南 (Tresca-St. Venant) 条件〕写成。

$$\left. \begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_s \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_s \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_s \end{aligned} \right\} \quad (6-37)$$

其中 τ_1 、 τ_2 、 τ_3 是最大剪应力，它们作用在与主平面倾斜成 $\pi/4$ 角的平面上。

正如我们已经指出过的，不要求满足条件 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

在弹性状态下，式(6-37)全部条件以不等号满足。在塑性状态下，有一个或两个条件应当是等号。此时存在的最大切应力保持常数数值。

用 τ_s 表示纯剪时的流动极限，此时 $\sigma_1 = \tau_s$ ， $\sigma_2 = 0$ ， $\sigma_3 = -\tau_s$ 。由式(6-37)得出：拉伸时的流动极限 σ_s 与 τ_s 的关系是 $\sigma_s = 2\tau_s$ 。

屈雷斯卡-圣维南塑性条件在主应力空间中用与坐标轴等倾的六棱柱表示(图48)。塑性曲线即棱柱与偏差张量平面的交线是正六边形。

因为最大切应力等于最大和最小主应力差值的一半，所以中间主应力不影响塑性条件。

6.3.4 切应力强度不变条件

如果用围绕六棱柱所画出的圆柱体代替它，则得到胡别尔-密塞司 (Huber-Mises) 塑性条件：

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (6-38)$$

塑性曲线，即圆柱由偏差张量平面所截出的截面是绕正六边

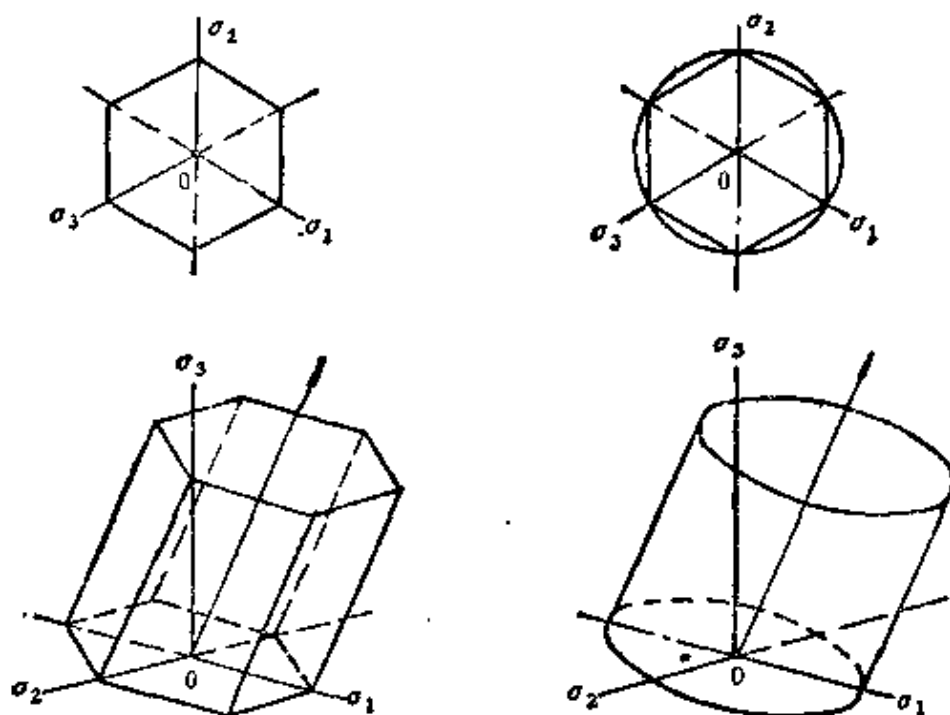


图48 屈雷斯卡-圣维南塑性面

图49 胡别尔-密塞司塑性面

形作出的圆（图49）。因为切应力强度

$$T = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (6-39)$$

所以胡别尔-密塞司塑性条件可以写成

$$T = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \text{常数} \quad (6-40)$$

即它是切应力强度不变条件。

将拉伸时的流动极限 σ_s 和纯剪时的流动极限 τ_s 比较：

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = 0.577\sigma_s \quad (6-41)$$

6.3.5 平面应力状态

让我们针对平面应力状态（ $\sigma_3 = 0$ ）情况来研究上述塑性条件。

屈雷斯卡-圣维南条件可写成

在 $\sigma_1\sigma_2 > 0$ 和 $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ 时, $|\sigma_1| = \sigma_s$;

在 $\sigma_1\sigma_2 > 0$ 和 $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ 时, $|\sigma_2| = \sigma_s$;

在 $\sigma_1\sigma_2 < 0$ 时, $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ 。

在 σ_1, σ_2 坐标系中, 这些表达式用六边形 $ABCDEF$ (图50) 表示, 该六边形在坐标轴上截出的线段等于流动极限 σ_s 。

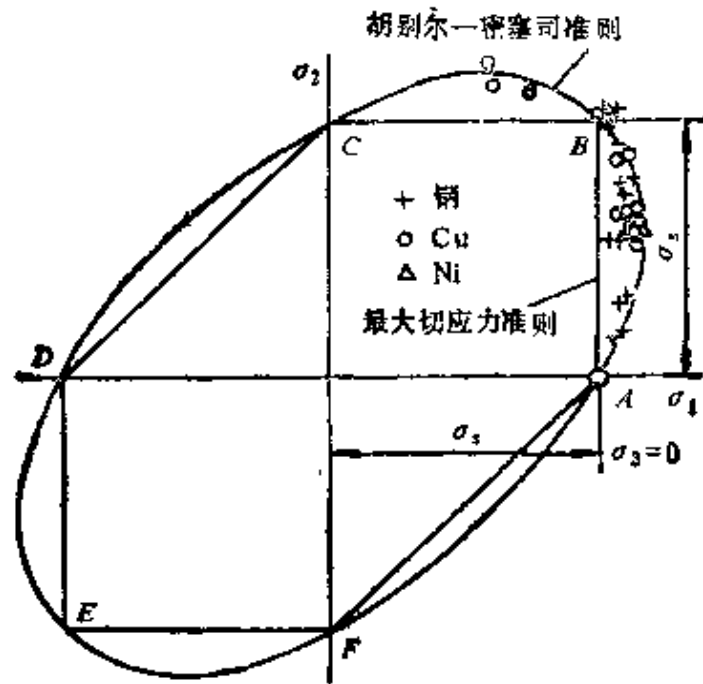


图50 平面应力状态的塑性条件

在 $\sigma_3 = 0$ 时, 胡别尔-密塞司条件为:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2 \quad (6-42)$$

是绕六边形所作的椭圆的方程。

用拉力、内压力和扭矩对薄壁圆管加载进行实验 (在接近于均匀平面应力状态下), 洛德 (Lode)、泡什 (Poeschl)、艾欣格 (Eichinger)、茹科夫 (A. M. ЖУКОВ) 及其它研究者们业已确定: 实验研究结果同我们在建立塑性理论中取作基本条件的胡别尔-密塞司塑性条件良好地一致 (图51)。

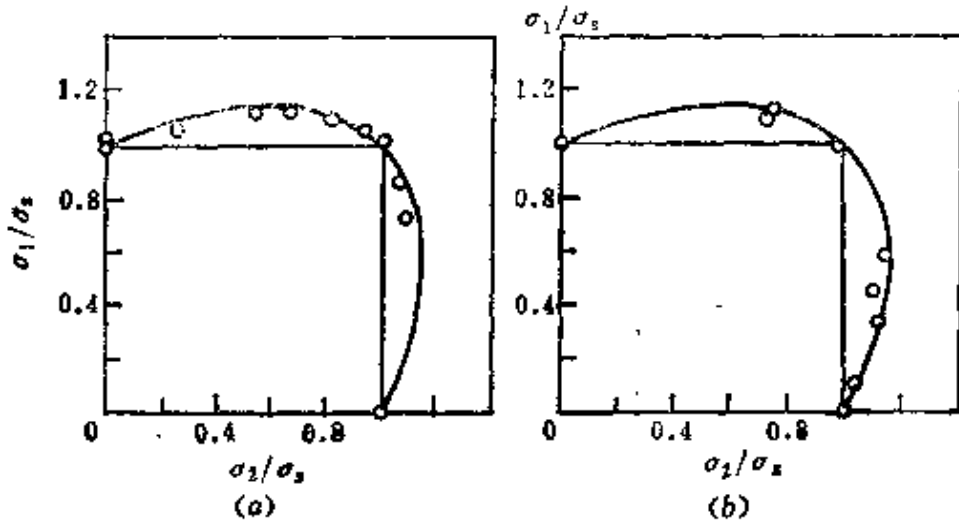


图51 塑性条件的实验校验

(a) 钢EI415, 据A.M.茹科夫; (b) 低合金钢, 据A.M.茹科夫

6.3.6 变形强化, 有效加载和卸载

让我们回到九维应力空间 Π , 并研究下面的情况, 此时流动面并不象理想塑性情况那样保持不变, 而是随着强化的发展以某种形式扩展和移动。我们称这种面是加载面。加载面的形状和位置不仅取决于即时的应力状态, 而且也依赖于在此之前发生的全部变形历史。

设体元位于塑性状态, 而在其邻域内的应力等于 $\sigma_{i,k}$ 。如果给 $\sigma_{i,k}$ 以无限小的增量 $d\sigma_{i,k}$, 即引起所研究体元受载, 则可能有下列情况 (图52)。

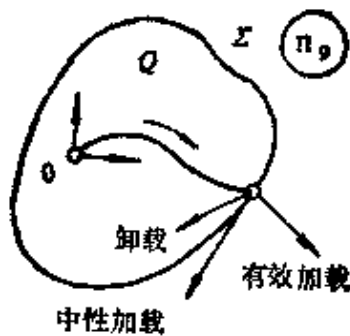


图52 体元受载的不同情况

1) 矢量 $d\vec{\sigma}$ 指向域 Q 内部。受载导致弹性变形 (卸载)。在这种情况下, 应力增量和变形增量以胡克定律联系, 不发生塑性变形的变化。在卸载时表面不改变。

2) 矢量 $d\vec{\sigma}$ 方向沿加载面的切向 (中性加载)。与前述情况一样, 塑性变形增量等于零, 表面 Σ 不变化。

应力增量和变形增量以胡克定律联系。

3) 矢量 $d\vec{\sigma}$ 对表面 Σ 来说指向外。发生有效加载, 塑性变形

增量不等于零。有效加载过程和表面 Σ 的变化有关。

6.3.7 德鲁克尔 (Drucker) 公设

除了应力空间 Π 外, 我们还将研究九维的应变空间 Θ 。在这些空间中, 某质点应力和应变张量随时间的变化过程用应力轨迹 (在空间 Π 中) 和应变轨迹 (在空间 Θ 中) 表示。将应变空间叠加到应力空间上, 就建立了加载过程的模式。

将总应变 e_{ik} 表示成弹性应变 e_{ik}^e 和塑性应变 e_{ik}^p 之和:

$$e_{ik} = e_{ik}^e + e_{ik}^p$$

研究处于某初始应力状态 σ_{ik}^0 的质点 (图53)。设 Σ 是加载面的即时位置。在空间 Π 中研究对应力闭合的等温加载循环 $OABO$ 。开始点 O 与位于表面 Σ 上或表面 Σ 内的初始应力状态 σ_{ik}^0 对应。点 A (应力状态 σ_{ik}) 与材料进入塑性状态相对应, 它位于表面 Σ 上。由 A 点产生一个无限小的受载, 它伴同无限小的塑性变形增量 de_{ik}^p 和弹性变形增量 de_{ik}^e 。新的接近的加载面位置用 Σ' 表示。

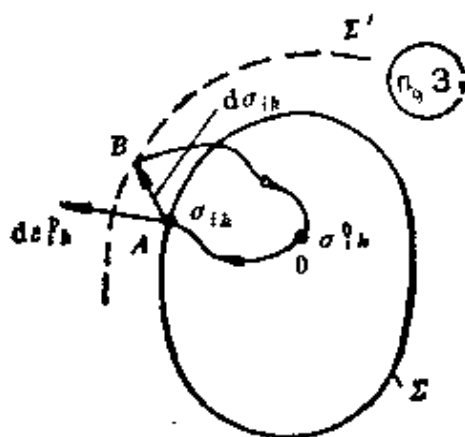


图53 关于德鲁克尔公设

德鲁克尔公设断言, 在整个附加的加载和卸载循环中, 如果发生塑性变形, 则附加的应力做正功,

$$\int (\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^0) de_{ik} > 0$$

因为对于闭合的循环 $OABO$, 对弹性变形 de_{ik}^e 附加应力所做的功等于零, 就得到:

$$\int (\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^0) d\epsilon_{ik}^p > 0 \quad (6-43)$$

仅仅在无限小的一段 AB 上发生塑性变形，所以不等式 (6-43) 归结为局部最大值原理：

$$(\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^0) d\epsilon_{ik}^p > 0 \quad (6-44)$$

上面我们已指出，流动面（加载面）是外凸的。这由不等式 6-44 同样可以得出。实际上，如果将它看作矢量 $(\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^0)$ 与 $d\epsilon_{ik}^p$ 标量积取正值的条件，则可以得出结论，在这些矢量之间的角总应该是锐角。在矢量 $d\epsilon_{ik}^p$ 与加载面正交的条件下，仅仅在加载面外凸时这个要求才能满足。

如果介质是理想塑性的，那末受载矢量 $d\sigma_{ik}$ 位于表面 Σ 的切平面内。在陈述德鲁克尔公设时，附加的应力功取正值的要求就应该以要求它非负性来代替。容易证明，在这种情况下由公设可得出流动面的外凸特性和矢量 $d\epsilon_{ik}^p$ 与流动面的正交特性。

6.3.8 关联塑性流动法则

以下述形式写出加载面方程

$$\varphi(\sigma_{ik}) - f(q) = 0 \quad (6-45)$$

其中 q 是表征强化的参数。应力空间中表面 Σ 的法线的方向余弦与导数 $\partial\varphi/\partial\sigma_{ik}$ 成比例，因此矢量 $d\epsilon_{ik}^p$ 与加载面正交的条件可写作：

$$d\epsilon_{ik}^p = d\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ik}} \quad (6-46)$$

式 (6-46) 称为塑性流动的关联（同加载面方程关联）法则。

以时间的微分 dt 除这个方程的两边，就可以用塑性应变速率关系式的形式将此法则写成：

$$\dot{\epsilon}_{ik}^p = \nu \frac{\partial\varphi}{\partial s_{ik}} \quad (6-47)$$

由塑性的不可压缩性条件 $d\epsilon_{11}^p + d\epsilon_{22}^p + d\epsilon_{33}^p = 0$ 得出，加载面方程和应力偏差张量的一次不变量无关，这允许将它写作应力偏差张量与量的函数

$$\varphi(s_{i,k}) - f(q) = 0 \quad (6-48)$$

特别是, 对于胡别尔-密塞司塑性条件有 $T^2 = \tau^2$ 和 $\varphi(s_{i,k}) - f(q) = s_{i,k}s_{i,k} - 2\tau^2 = 0$; 忽略弹性变形, 就得到应力偏差张量和应变速率偏差张量成比例的条件:

$$D_o = 2gD_\varepsilon \quad (6-49)$$

式中 g 是这些偏差张量的不变量和温度的某个函数。

6.3.9 各向同性强化

让我们研究恒温 θ 下的各向同性强化过程, 介质微元塑性变形时加载面 Σ 经历了均匀的扩张。因为平均应力不影响塑性条件, 所以表面方程可以以下述形式写出:

$$\varphi(s^{\text{II}}, s^{\text{II}}) = f(\theta, q) \quad (6-50)$$

式中 f 是 $\theta = \text{常数}$ 时某个表示变形过程的参数 $q(t)$ 的增函数 ($dq/dt \geq 0$)。如果应力偏差张量的三次不变量 s^{II} 的影响不大, 则关系式 (6-50) 可表示成:

$$T = F(\theta, q) \quad (6-51)$$

这时在主应力空间中表面 Σ 用轴为直线 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 的圆柱面描述。随着参数 q 的增加, 圆柱面的半径也增加。

6.3.10 “统一曲线”假定

认为变形微小, 选切应变强度 Γ 作为参数 q , 并假定 $d\Gamma/dt \geq 0$ 。式 (6-51) 可以用力学状态方程的形式写出:

$$T = \tau(\theta, \Gamma) = \mu(\theta, \Gamma)\Gamma \quad (6-52)$$

式中 μ 是温度 θ 和切应变强度 Γ 的某个函数。

因而, 我们采用了“统一曲线”假定: 在物体体元有效加载时切应力强度是体元温度和与应力状态形式无关的切变形强度的函数。

函数 $\mu(\theta, \Gamma)$ 可由拉伸或扭转圆柱试样的实验求出。

例如, 在拉伸时实现单向应力状态图示, 对不可压缩材料有 $T = \sigma/\sqrt{3}$, $\Gamma = \varepsilon\sqrt{3}$, 曲线 $\sigma - \varepsilon$ 能很容易地改换成曲线 $T - \Gamma$ 。

在扭转时实现纯剪切图示, 则 $T = \tau$, $\Gamma = \gamma = 2\varepsilon_{12}$ 。

依次改变试样温度, 并应用处理实验数据的数学理论来逼近

研究结果，以建立所求的函数式 (6-52)。

6.3.11 小弹-塑性变形理论

在确定各向同性的弹-塑性介质小应变和应力之间的非线性关系时，我们利用式 (6-22)、(6-23)，并限于研究等温过程：

$$\sigma_0 = k\Delta \quad (6-53)$$

$$D_\sigma = 2\mu D_\epsilon \quad (6-54)$$

实验表明，体积相对变化 $\Delta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ 总是可逆的（弹性的），而关系式 (6-53) 接近于线性（我们暂且不研究具有多孔性的粉末材料和混合材料）。

因此，可以取 $k = \text{常数}$ 。若令 $\mu = \mu(\theta, \Gamma)$ 并进而采用“统一曲线”假定，则有可能描述塑性变形过程。此时，可以把下述小弹-塑性变形理论的原始规定叙述成：

- 1) 介质是各向同性的。
- 2) 平均应力和有弹性特性的相对体积变化成比例。
- 3) 应力偏差张量和应变偏差张量成比例。

应力张量主轴和应变张量主轴一致以及偏差张量主值成比例是第三个规定的结果。

研究一下特殊情况，它们包括：

线弹性状态：

$$\mu = \text{常数}$$

理想塑性状态

$$\mu = \tau_s / \Gamma$$

此时

$$s_{ik} = \frac{2\tau_s}{\Gamma} e_{ik} \quad (6-55)$$

变形强化状态

$$T = \mu(\theta, \Gamma)\Gamma$$

和 $s_{ik} = 2\mu(\theta, \Gamma)e_{ik}$

或 $s_{ik} = \frac{2T(\theta, \Gamma)}{\Gamma} e_{ik} \quad (6-56)$

弹性卸载状态

$$\sigma_0^* - \sigma_0 = k(\Delta^* - \Delta) \quad (6-57)$$

$$s_{i;k}^* - s_{i;k} = 2\mu(e_{i;k}^* - e_{i;k}), \quad \mu = \text{常数} \quad (6-58)$$

用星号表示对应于卸载开始的应力和应变状态。

如果温度场是不稳定的, 则式6-53应写作

$$\sigma_0 = k[\Delta - 3\alpha(\theta - \theta_0)] \quad (6-59)$$

其中 α 是热膨胀系数, θ_0 是开始温度。

函数 $T = \mu(\theta, \Gamma)\Gamma$ 在 T 、 Γ 、 θ 空间中表示某个曲面(图54)。

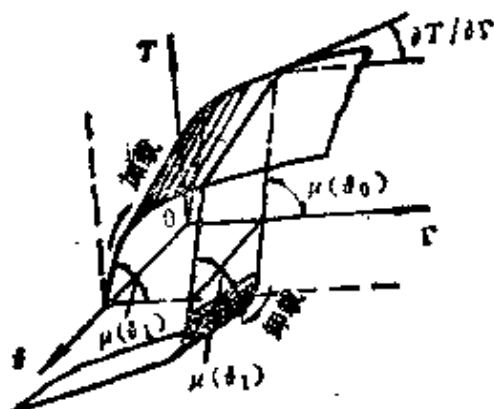


图54 T 与 θ 、 Γ 的关系

在弹性变形域中 $T \leq \tau_r(\theta)$, 这个曲面变为由平行线段组成的表面 $T = \mu(\theta)\Gamma$, 其中 $\mu(\theta)$ 是剪切模量, 它取决于温度。

小弹-塑性变形理论已经由单调改变温度和接近于简单加载的实验数据很好地证实。所谓简单加载, 就是物体加载时在它的所有点应力张量分量和某个参数成正比地增加。否则加载是复杂的。对于复杂加载, 粘-塑性流动理论可给出更好的结果。

6.3.12 粘性强化

在应力空间 Π 中作流动曲面 Σ , 它随体元应变速率增加 (“热变形”) 而扩展, 曲面方程以下述形式给出

$$\varphi(s^{\text{II}}, s^{\text{III}}) = f(\theta, q) \quad (6-60)$$

其中, f 是 $\theta = \text{常数}$ 时某个表示应变速率强度的参数 q 的增函数。

忽略应力偏差张量三次不变量的影响并选切应变速率强度 H 作为参数 q ，关系式 (6-60) 可以用介质的力学状态方程的形式写出：

$$T = g(\theta, H)H \quad (6-61)$$

并采用下述假定：在塑性流动时切应力强度是温度和切应变速率强度的函数而与应力状态形式无关。

这就能借助非线性粘性介质理论工具描述加热金属的粘性强化。

6.3.13 粘-塑性流动理论

因为与塑性变形相比弹性变形很小，所以我们将其忽略，也忽略温度应力；类似于塑性变形理论为非线性弹性理论的推广，粘-塑性介质流动理论也是非线性粘性理论的推广。我们将粘-塑性介质流动理论的基本原理叙述为

- 1) 介质各向同性且不可压缩。
- 2) 应力偏差张量和应变偏差张量成比例：

$$D_{\sigma} = 2gD_{\epsilon} \quad (6-62)$$

由此得出，应力张量的主轴和应变速率张量的主轴重合，而对应的偏差张量主值成比例。

关系式 (6-61) 的特殊情况包括：

线粘性状态： $g = \text{常数}$ ；

理想塑性状态： $g = \frac{\tau_s}{H}$ ，此时

$$s_{ik} = \frac{2\tau_s}{H} \eta_{ik} \quad (6-63)$$

粘性强化状态：

$$T = T(\theta, H) = g(\theta, H)H$$

和 $s_{ik} = 2g(\theta, H)\eta_{ik}$

或 $s_{ik} = \frac{2T(\theta, H)}{H} \eta_{ik} \quad (6-64)$

思 考 题

1. 怎样描述各向同性介质的塑性条件?
2. 塑性曲面具有什么样的性质?
3. 什么是塑性曲线? 它有什么性质?
4. 对于你所知道的塑性条件, 塑性曲线有什么形式?
5. 可能有哪几种加载情况?
6. 在弹-塑性小变形理论中怎样表述统一曲线假定? 在粘-塑性流动理论中怎样表述?
7. 怎样表述弹-塑性小变形理论的基本原理? 又怎样表述粘-塑性流动理论的基本原理?
8. 变形体怎样加载是简单加载?
9. 怎样叙述德鲁克尔公设? 如果取方程 $T = \tau$, 作为塑性条件, 由它可得出什么样的塑性理论?
10. 是否可以用增量的形式叙述粘-塑性流动理论的基本原理? 怎样进行?

6.4 作为过程的塑性变形

6.4.1 依留申的塑性理论

在上述的塑性理论中, 在应力、应变、应变速率之间确定了最终的函数关系。然而, 更深入的分析证实, 一般说来, 在所研究的体元中, 应力状态是由应变及应变速率张量分量和外物理参量在此之前发生的全部变化过程的特征所确定, 而不是由它的即时值确定的。这就意味着, 不论是塑性变形理论还是粘-塑性流动理论, 都是某种简化的类型, 仅对一定种类的加载过程来说才是正确的, 因此它们应该由更一般的理论中得出。

这种关于初始各向同性材料小变形的一般塑性理论已由 A. A. 依留申提出, 我们来研究一下它的基本原理^[3,8]。

6.4.2 应变和应力空间

将所研究体元分离出来后, 在具有正交单位基底 \vec{a}_i ($i = 1,$

2, ..., 5) 的五维欧氏空间 E_5 中用变形轨迹 D_5 表示应变偏差张量变化过程。

将轨迹点的矢径称为应变矢量:

$$\underline{e} = e_i a_i \quad (6-65)$$

它的分量通过应变偏差张量分量 e_{ik} 用式 (1-78) 类型的线性关系表示, 以使得应变矢量的模等于切应变强度 Γ

$$|\underline{e}| = \Gamma = \sqrt{2e_{ik}e_{ik}} \quad (6-66)$$

很明显, 轨迹的弧长 A 是切应变程度。与此相类似, 在具有基底 q_i 的五维应力空间 Σ_5 中, 可确定应力矢量:

$$\underline{s} = s_i q_i \quad (6-67)$$

它的分量以式 (1-78) 类型的关系与应力偏差张量的分量相联系。此时应力矢量的模等于切应力强度:

$$|\underline{s}| = T = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ik}s_{ik}} \quad (6-68)$$

将应力空间 Σ_5 叠加到应变空间 E_5 去, 借此以建立过程的模式, 它总括了变形轨迹、在轨迹相应点形成的许多应力矢量以及轨迹 D_5 上弧长 A 的函数 $\theta(A)$ 、 $\sigma_0(A)$ 的总体 (图55)。

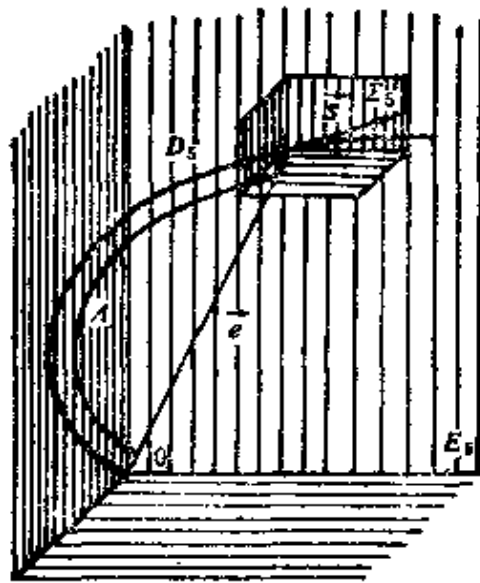


图55 加载过程的模式

6.4.3 各向同性公设

A. A. 依留申定义了各向同性公设, 根据这个公设, 过程的模式对于空间 E_3 中的转动和映射变换是不变的, 其中特别还包括空间坐标系 x_1, x_2, x_3 的旋转变换。

应力和应变之间在张量方面的如下线性关系是各向同性公设的结果:

$$\vec{s} = P_i \vec{p}_i \quad (i=1, 2, \dots, 5) \quad (6-69)$$

其中 \vec{p}_i 是在轨迹 D_3 上每一点建立的自然正交基底之单位矢量 (所谓的弗林 (Френе) 伴随基底)。对于我们习惯的三维空间来说, 这种基底的例子是曲线的法向和切向单位矢量。

P_i 是泛函, 它是沿弧长 A 由过程的内部特征所引起的 (见 9.1 节),

$$P_i = P_i[\kappa_m(\xi), \theta(\xi), \dots]_{\xi=A}^{\xi=\sigma}$$

其中 κ_m 是变形轨迹的曲率。

6.4.4 滞后原理

对于弹-塑性材料, 证明了滞后原理: 在自然基底 p_i 中, 应力矢量的位向取决于所研究轨迹点之前的变形轨迹上有限线段的内部几何关系。这个线段的长度称为滞后迹, 用 h 表示。

由滞后原理得出如下的结果:

1) 如果在点 A 之前, 变形轨迹分布在空间 E_3 的 n 维子空间 E_{n-k} ($1 \leq n-k \leq 5$) 中, 而从 A 点开始它完全分布在 $(n-k)$ 维子空间 E_{n-k} ($1 \leq n-k < n$) 中, 则在离 A 点距离超过 h 的地方应力矢量分布在子空间 E_{n-k} 中。

2) 特别是, 如果从 A 点开始变形轨迹是直线, 则在距 A 点超过 h 的地方, 应力矢量的方向沿这条直线。

在其所有点满足不等式

$$h^2 \kappa_1 \ll 1 \quad (6-70)$$

的变形轨迹称为小曲率轨迹, 其中 κ 是轨迹的主曲率。

3) 在小曲率变形轨迹上, 应力矢量方向与轨迹相切:

$$\vec{s}^0 = \vec{p}_1 \quad (6-71)$$

其中 \vec{s}^0 是单位应力矢量； \vec{p} 是轨迹切向的单位矢量。

6.4.5 实验研究

为了实验验证 A. A. 依留申所提出的假定和公设，曾设计了专门的实验机 CH，它能把超平面 (e_{11}, e_{23}) 上复杂加载规定的轨迹在联合受到拉伸和扭转的薄壁管试样上自动重现。三维空间 E_3 中的类似实验（复合拉伸、扭转和内压）已在其它的实验机上进行过。

大量实验已很好地证实了各向同性公设和由滞后公设得出的结果的正确性。

6.4.6 塑性理论的特殊形式

作为特殊形式，可以由 A. A. 依留申理论得出上述的塑性理论，其中包括：

塑性变形理论 在普遍理论的范围内，它适用于简单变形过程。在这种情况下，变形轨迹是由空间 E_3 的坐标原点引出的一条直线射线。

塑性变形理论直接由各向同性公设得出。对于有效加载的过程，它以下列关系式表示：

应力偏差张量和变形偏差张量成比例

$$\vec{s}_0 = e^0 \quad (6-72)$$

统一曲线假定

$$T = \mu(\theta, \Gamma) \Gamma \quad (6-73)$$

球张量的比例关系

$$\sigma_0 = k e_0 \quad (6-74)$$

或以标量形式表示

$$s_{ik} = 2\mu(\theta, \Gamma) e_{ik} \quad (6-75)$$

$$\sigma_0 = k e_0 \quad (6-76)$$

在卸载时利用广义胡克定律。

应当指出，在适于等温过程的关系式 (6-73) 中，与温度的关系具有关于 t 的泛函的特性；但实践中常常利用最终的关系式 (6-73)。

粘-塑性流动理论 在 A. A. 依留申理论范围内是小曲率过程理论。公式 (6-71) 允许写出下述关系:

应力偏差张量和应变速率偏差张量成比例

$$\vec{s}^0 = \vec{p}_1 \quad (6-77)$$

既考虑变形强化又考虑速度强化的“统一曲线”假定

$$T = g(\theta, A, H)H \quad (6-78)$$

应力球张量和应变球张量成比例

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0 \quad (6-79)$$

对不可压缩性材料以标量的形式写出这些关系, 则

$$s_{i,k} = 2g(\theta, A, H)\xi_{i,k} \quad (6-80)$$

在计算金属压力加工过程时, 应用这个理论的可能性基于下述情况, 在这些过程中 (除了金属加工的冲击方法), 在物体的所有点实际上发生小曲率轨迹。为此, 只要外载平稳改变就可以了, 即要求外载轨迹 (在相应的空间中) 对直线的偏离应小于这个轨迹前一段的长度, 此过程长度的数量级约为滞后迹。

思 考 题

1. 加载过程模式是什么? 在什么样的空间中研究它们?
2. 怎样叙述各向同性公设?
3. 滞后原理是什么?
4. 什么样的变形轨迹称为小曲率轨迹? 它们与什么样的塑性理论对应?

6.5 有限变形和塑性流动

6.5.1 单调有限变形

尽管前面研究的依留申理论严格说来仅仅对于小变形才是正确的, 但它可以采用作为基本原理来论证用于描述金属压力加工过程的有限变形理论。这时可以遵循两个不同的原则。

第一原则是在 Г. A. 斯米尔诺夫-阿列耶夫、B. M. 罗森贝格 (B. M. Розенберг) 和他们同事的著作中发展起来的, 它推广

了小弹-塑性变形理论，简单变形过程以在 E_3 空间中由原点出发的直线射线表示，它在 $\Gamma. A.$ 斯米尔诺夫-阿列耶夫的理论中对应于单调有限变形过程。

根据定义，如果位于对数变形张量主轴上的全部质点（见63页）在该体元全部前段变形过程所有阶段都位于这些轴上（尽管这些轴相对于观察者坐标系可能改变自己的方向），则物质体元的变形被称为是单调的。

此外，洛德参数在给定的物质体积变形过程中必须保持不变，即

$$\nu_2 = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (6-81)$$

这些材料哪怕有一条不遵守，则这种变形就被认为是非单调的。

单调变形的一例是在第二章里研究的直角平行六面体的均匀变形。我们指出，对这种情况而言，对数变形是无限小变形的求和结果，所以它常常被称为真变形。

同样还证明了，对于任意体元的单调变形，对数变形是与单个变形阶段对应的无限小主变形之和，对数变形对时间的导数等于应变速率张量的主分量，而切应变强度

$$A = \sqrt{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (6-82)$$

同用公式 (3-47)

$$A = \int_0^t H dt$$

所确定的切变形程度一致，其中对时间的积分是沿体元运动轨迹完成的。

写出小弹-塑性变形理论的关系式 (6-53)、(6-54) 之后，如果完成了无限小变形的求和，则我们就得到单调变形时的有限变形理论方程。此时理论的基本点归纳为：

- 1) 介质各向同性。
- 2) 平均应力与具有弹性性质的体积相对变化 Δ 成正比

$$\sigma_0 = k\Delta \quad k = \text{常数} \quad (6-83)$$

3) 应力偏差张量和对数变形偏差张量成比例

$$D_o = 2\mu D_s \quad (6-84)$$

在统一曲线假定的范围内材料的具体性质用关系式

$$\mu = \mu(\theta, A) \quad (6-85)$$

描述。

特别对于线弹性状态, $\mu = \text{常数}$ 。

对于理想塑性

$$\mu = \tau_s / A$$

且

$$s_i = \frac{2\tau_s}{A} e_i' \quad (6-86)$$

其中 e_i' 是对数变形偏差张量的分量, s_i 是应力偏差张量的主分量。

在变形强化时

$$T = \mu(\theta, A) A \quad (6-87)$$

和

$$s_i = 2\mu(\theta, A) e_i' \quad (6-88)$$

利用Г.А.斯米尔诺夫-阿列耶夫理论的例子是求解带钢在冷弯轧机上连续成型的问题(见475页)。

6.5.2 继承强化介质的粘-塑性流动理论

在金属压力加工中物体完全单调变形的可能性直到今天为止还没有证明。很明显,可以分离出某类过程,在这类过程中物体最大应力部分的变形可以近似地认为是单调的。在更普遍的情况下,解金属和合金有限变形的边值问题时近年推广的粘-塑性流动理论得到了广泛的应用。这个理论既考虑了粘性强化,也考虑了变形强化、温度不均匀分布的影响和材料的继承性质。在分析粉末材料的变形过程时,考虑了不可逆的塑性体积变化。此时完全忽略了弹性变形,因为与塑性变形相比,弹性变形非常小。

认为物体的初始状态是未变形的,而初始应力等于零,让我们研究材料体元沿观察者的三维物理空间(见图19)中某个轨迹的运动。

在描述变形历史时,取时间 t 或某个与它单值联系的参数 λ

(例如切变形程度 A) 作为独立参量。

计算时刻 t 的体积相对变化:

$$\Delta = 3 \int_0^t \xi_0 dt = \int_0^t \operatorname{div} \vec{v} dt \quad (6-89)$$

利用连续性方程

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

将值 Δ 同密度联系起来

$$\Delta = \ln \frac{\rho_t}{\rho} \quad (6-90)$$

其中 ρ_i 是分离体的初始密度。

同样, 沿轨迹对时间积分, 可求得切变形程度 $A = \int_0^t H dt$ 。

在写出本构方程时将利用值 Δ 和 A 。

我们将继承强化介质粘-塑性流动理论的基本点阐述如下:

- 1) 介质各向同性,
- 2) 平均应力与体积相对变化成比例

$$\sigma_0 = k \Delta \quad (6-91)$$

- 3) 应力偏差张量与应变速率偏差张量成比例

$$D_\sigma = 2g D_\varepsilon \quad (6-92)$$

力学状态方程为

$$k = k(\theta, \Delta, \xi_0, A, \dots, t) \neq \text{常数} \quad (6-93)$$

$$g = g(\theta, H, A, \Delta, \dots, t) \neq \text{常数} \quad (6-94)$$

即式 (6-91) 和 (6-92) 在一般情况下是非线性的。这时假定, k 和 g 与时间的关系可能有较为复杂的特性。

特别是在某些情况下必须利用形为

$$k(t) = \int_0^t K(t, \tau) \varphi[\Delta(\tau)] d\tau + k_0(t) \quad (6-95)$$

$$g(t) = \int_0^t G(t, \tau) \psi[H(\tau)] d\tau + g_0(t) \quad (6-96)$$

的继承理论方程。其中核 $K(t, \tau)$ 、 $G(t, \tau)$ 和函数 φ 、 ψ 描述当过

渡到热力学更稳定的状态时随时间材料强化（与体元变形有关的强化）的“衰减”能力以及在烧结过程中孔隙度的变化能力。

由宏观确定性原理可以得到确定函数 k 和 g 的原则上的可能性。建立唯象关系的基本方法是在塑性计和气冲台架(газостат)（在粉末变形时）上进行加载 M -试样的实验研究。

在致密材料变形时 $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ ，这就可以忽略体积变化。这时剩下一个力学状态方程（6-94），而理论基本点同粘-塑性流动理论是一致的。

思 考 题

1. 体元的什么样的变形称为单调的？
2. 怎样叙述Г.А.斯米尔诺夫-阿列耶夫理论的基本点？
3. 强化介质的粘-塑性流动理论能够考虑什么效应？
4. 在物质体元的邻域内怎样计算体积相对变化？
5. 怎样计算切应变程度？

参 考 文 献

- Безруков Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд. 2-е. М., «Высшая школа», 1968. 512 с. с ил.
- Ньюшун А. А. Механика сплошной среды. Изд. 2-е. М., Изд-во МГУ, 1978. 288 с. с ил.
- Нолухин П. И., Гун Г. Я., Галкин А. М. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М., «Металлургия», 1976. 488 с. с ил.
- Применение теории ползучести при обработке металлов давлением. М., «Металлургия», 1973. 192 с. с ил. Авт.: А. А. Поздеев, В. И. Тарнопский, В. И. Еремеев, В. С. Баакашвили.
- Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1966. 752 с. с ил.
- Седов Л. И. Механика сплошной среды. Изд. 3-е. Т. I. М., «Наука», 1976. 535 с. с ил.
- Трудсделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975. 592 с. с ил.

第 7 章 断 裂

断裂问题向来受到研究者的注意。在最近几十年间，由于喷气式飞机、火箭制造、空间技术的发展，这个问题具有特殊的实际意义。业已进行了大量的有关构件、机构和机器重要零件的断裂条件分析和强度计算方法的研究。在很多著作中，也研究压力加工过程中金属的断裂。

利用连续介质力学的方法，可以求出在某外力系作用下物体内的应力场和位移场以及温度分布。但是，如许多研究者们所指出的，总的说来，精确确定应力场和位移场的方法与下一步关于强度的极粗糙的估算之间有明显的差异。其原因在于实际材料结构的复杂性和存在大量的损伤——从微观和亚微观缺陷直到较大的孔隙和主裂纹。外部条件，即加载特点和外部介质的侵蚀性对物体强度有重大的影响。因此，断裂是一个综合性的问题，它是固体物理、连续介质力学和材料学的中间学科。

尽管在研究固体流动和断裂条件的物理方法上已经取得成就，但是迄今为止用物理方法甚至还不能定性地描述断裂过程的许多特点。

在断裂力学这个新学科的领域内，现时仅仅利用连续介质力学的经典系统方法来定量地估价工程材料的强度。断裂力学的目的是揭示在一定的温度—速度范围内外载作用下物体的断裂条件。

断裂力学按以下几个主要方向发展：

- 1) 建立材料的极限应力状态理论（强度理论）；
- 2) 研究构件极限承载能力的计算方法；
- 3) 研究交变载荷作用下材料的适应条件；
- 4) 分析强化物体变形的稳定性条件；
- 5) 研究裂纹力学；

- 6) 建立损伤累积的唯象理论;
- 7) 发展断裂概率的计算方法。

众所周知，在结构力学和弹性理论中，将塑性体发生明显残余变形和脆性体发生断裂的应力状态理解为极限应力状态。因此，断裂力学的头三个方向不太适用于在金属压力加工中金属断裂条件的分析，因为压力加工总是与充分发展的塑性变形相联系的。建议希望更详细了解这些方向的读者去研究文献目录中所推荐的专门论文，我们只是较详细地讲述变形稳定性问题、裂纹理论、损伤累积理论和断裂概率的计算。

7.1 变形稳定性和超塑性

7.1.1 稳定性条件

我们来研究强化物体的变形过程。随应力增加伴随发生剧烈的强化之前，过程是稳定进行的。当应力增长速度和物体强化速度之间的平衡受到破坏时，就会导致失稳和产生明显的不均匀变化(例如拉伸圆柱试样时出现细颈，在板料变形时形成局部减薄)以及接着发生物体的断裂。

研究下面的例题。

例题7.1 杆件拉伸时的失稳

求出杆件塑性拉伸过程中产生失稳的临界变形。假定材料是

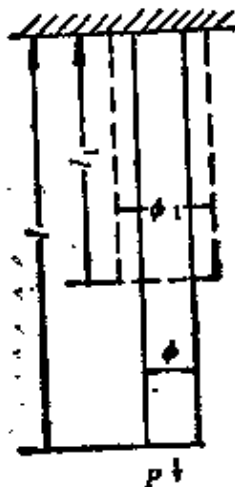


图56 杆件的拉伸

不可压缩的，并按幂次规律强化。

解 研究以力 P 拉伸的杆件（图56）。

显然， $P = \sigma\phi$ ，其中 σ ——杆件横截面上的正应力； ϕ ——横截面积。

沿杆轴伸长的对数变形是 $\bar{\epsilon} = \ln l/l_1$ ，式中 l ——杆件的即时长度； l_1 ——杆件的原始长度。

根据不可压缩条件， $l\phi = l_1\phi_1 = \text{常数}$ 。所以， $dl/l + d\phi/\phi = 0$ 或者 $d\bar{\epsilon} = -d\phi/\phi$ 。

在满足条件 $dP = \sigma d\phi + \phi d\sigma > 0$ 时，变形过程是稳定的。

假定载荷 P 达到了最大值 P_{max} 。这时

$$dP = \sigma d\phi + \phi d\sigma = 0 \quad (7-1)$$

对变形杆件来说，可能有不同的接近的状态，在这些状态下，断面的缩小将由强化而引起的应力增加来补偿。由于某些部位局部地偏离杆件的正常形状和不满足其机械性能的统一性条件，所以杆件中不可避免地会有一些“薄弱部位”，在其中的一个部位通常会迅速地形成细颈。

将式(7-1)两边除以 $\sigma \cdot \phi$ 。则当

$$\frac{d\sigma}{d\bar{\epsilon}} = \sigma \quad (7-2)$$

时，变形就变得不稳定。

材料的流变性质可用如下关系描述：

$$\sigma = C\bar{\epsilon}^m \dot{\bar{\epsilon}}^n \quad (7-3)$$

式中， $\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \frac{d \ln l}{dt}$ ——杆件伸长变形速度。

因此，在 $m = 0$ 时，杆件材料具有以 $n = d \ln \sigma / d \ln \dot{\bar{\epsilon}}$ 为指数的塑性变形强化，而在 $n = 0$ 时，是以

$$m = \frac{d \ln \sigma}{d \ln \dot{\bar{\epsilon}}} \quad (7-4)$$

为指数的粘性强化。

在一般情况下，当 $m \neq 0$ ， $n \neq 0$ 时，材料呈现粘-塑性性质。

首先，假定 $m = 0$ ，然后求杆件的稳定变形条件。将式(7-3)代入式(7-2)后，则有 $nC\dot{\epsilon}^{n-1} = C\dot{\epsilon}^n$ ，由此得到 $\bar{\epsilon}_{KP} = n$ 。

7.1.2 关于超塑性

由上可见，塑性变形的稳定性与材料的可强化性能有关。在实际情况下，强化指数 $n = 0.2 \sim 0.5$ ，所以圆柱试样的稳定塑性变形可进行到 $\bar{\epsilon}_{KP} = 20 \sim 50\%$ 。随着细颈的出现，在它的附近迅速地发生局部变形并使试样断裂。

现今 $m \neq 0$ ，即材料是粘性的。当 m 值足够大时 ($m > 0.3$)，变形速度对 σ 值有重大影响。在这些条件下，细颈的发生会导致局部体积内变形速度迅速增大，并在这个区域内发生粘性强化，因而便阻止了细颈的进一步发展。因此，细颈似乎被“冻结”。产生新的细颈后会同样过程的重复。结果，材料表现出超塑性，即材料具有产生大塑性变形（约百分之几百）而不破坏连续性的能力（图57）。

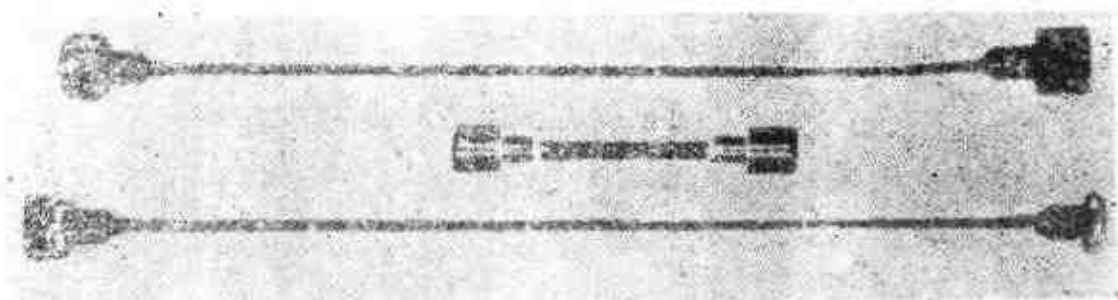


图57 耐热合金ЖС6КII在超塑性条件下的变形

为了研究参数 m 和 n 以及杆件原始不均匀性对细颈发展过程的影响，观察下面的问题。

例题7.2 原始不均匀性对变形局部化的影响^[10]

由粘-塑性材料制成的杆件按幂次规律强化

$$\sigma = C(\bar{\epsilon}_0 + \bar{\epsilon})^n \dot{\epsilon}^m \quad (7-5)$$

式中， $\bar{\epsilon}_0$ ——材料常数，表明仅仅在超出临界应力后才开始塑性

变形。由于形状或显微组织的不均匀性，常数 C 可能沿试样长度变化，用参数 ν 反映试样原始不均匀性程度，

$$\nu = C_B / C_A \quad (7-6)$$

式中， C_A 、 C_B ——分别为最强和最弱断面的常数 c 的值。

研究以参数值 m 、 n 、 ν 的函数表示的变形局部化的过程。

解 因试样所有断面都经受着同样的载荷，所以

$$\phi_A \sigma_A = \phi_B \sigma_B \quad (7-7)$$

令 ϕ_A 、 ϕ_B 的原始值等于 ϕ_0 ，则在某个时刻

$$\bar{\varepsilon}_A = \ln \frac{\phi_0}{\phi_A}, \quad \bar{\varepsilon}_B = \ln \frac{\phi_0}{\phi_B}$$

因而

$$\phi_A = \phi_0 e^{-\bar{\varepsilon}_A}, \quad \phi_B = \phi_0 e^{-\bar{\varepsilon}_B} \quad (7-8)$$

将式(7-5)、(7-6)、(7-8)代入式(7-7)，经简单的变换，得到

$$\left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B} \right)^m = \nu \left[e^{-(\bar{\varepsilon}_B - \bar{\varepsilon}_A)} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_B}{\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_A} \right)^n \right]$$

该式将均匀流动区域的变形 ε_A 和细颈区的变形 ε_B 之间的关系表示成参数 m 、 n 、 ν 的函数。分析它可以得出结论，要想开始失稳，试样必须有某一原始的不均匀性 ($\nu \neq 1$)。参数 m 和 n 增加，可提高稳定变形的极限程度。

现在我们来求 $n=0$ 、 $m \neq 0$ 情况下均匀伸长的极限值 ε_{AKP} 。为此我们把上面的方程积分，则得：

$$\bar{\varepsilon}_A = -m \ln \left[1 - \nu^{1/m} \left(1 - e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_B}{m}} \right) \right]^{\bullet}$$

并使 $\bar{\varepsilon}_B$ 趋向于无穷大（细颈的横截面积 ϕ_B 这时趋向于零）。从而

●此处原文叙述不清。该式是由 $\left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B} = \nu \right) \left[e^{-(\bar{\varepsilon}_B - \bar{\varepsilon}_A)} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_B}{\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_A} \right)^n \right]$ 式在 $n=0$

时积分并按 $\bar{\varepsilon}_A = \bar{\varepsilon}_B = 0$ 的条件确定积分常数得到的。——译者

得到

$$\bar{\epsilon}_{AKP} = -m \ln(1 - \nu^{1/m}) \quad (7-9)$$

7.1.3 超塑性曲线

我们业已确定，有两个因素，即材料强化的能力（特别是粘性强化）和原始不均匀性的存在对于塑性变形稳定性有重大影响。因此，由式(7-9)可以得出，一方面在 $n=m=0$ 和 $\nu \approx 1$ 时 $\epsilon_{AKP} = 0$ ；另一方面在 $n=0$ 、 $m=0.5$ 和不均匀程度 $\nu=0.95$ 时 $\epsilon_{AKP} = 116\%$ 。

为确定参数 m 。可使用各种不同的方法。属于这些方法的一种是突跃式地改变拉伸速度随后对应力图采用外推法，另一种方法是基于应力松弛实验。

有一些金属和合金具有所谓结构超塑性，它们有非常小的等轴晶粒（1~10微米，比普通材料小一个数量级），并在超过 $0.5 T_{熔}$ 的温度下在一定的小变形速度范围内呈现出发生大塑性变形的能力。研究这些金属和合金的行为时，研究者们通常作出 $\ln \sigma - \ln \dot{\epsilon}$ 曲线，这些曲线被称为超塑性曲线(图58)。

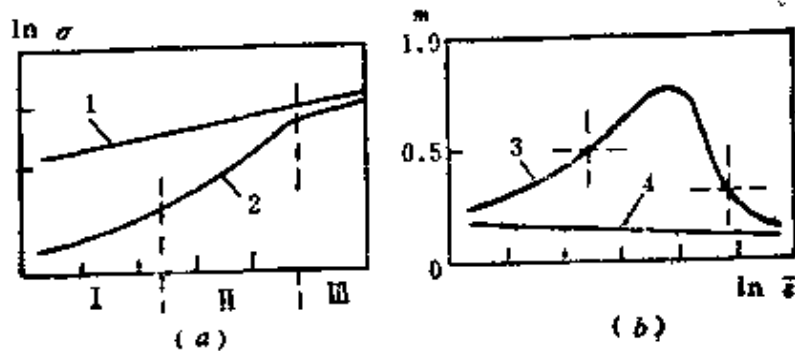


图58 超塑性曲线

1,4—粗晶粒显微组织不具有超塑性的合金；2,3—同种合金，但为超细等轴晶粒显微组织，具有超塑性〔据M. B. 格拉勃斯基(M. B. Грабский)〕

这个曲线具有S形的特性，可将它分为三个特征阶段：

阶段 I 出现在低速变形时，参数 m 小于 0.5，且随变形速度的降低而减小。在 $m < 0.3$ 时，材料失去了超塑性变形的能力。

阶段 II 对应于窄小的变形速度范围。参数 m 大约达到 0.8。材料呈现出超塑性。

阶段 III 在较高的变形速度下 ($\dot{\epsilon} > 10^{-2}$ 秒⁻¹) 出现。参数 $m < 0.3$ ，且随变形速度增大， m 减小。材料失去了超塑性变形的能力。

最后应指出，首先系统地研究超塑性现象的是苏联学者 A. A. 包赤瓦尔 (Бочвар) 和 З. А. 斯维杰斯基 (Свидерский)。他们亲自建议了现在已成为国际通用术语“超塑性”。在很多金属和合金中都已发现了超塑性效应 (表 2、3)。

表 2 已发现超塑性效应的合金

(据 M. B. 格拉勃斯基)

合金, % (按质量)	ϵ_{max} %	T, K	d, μm	m
Al + 33% Cu (共晶)	1000	680~800	1~7	0.5~0.8
Al + 12% Si (共晶)	117	800	—	0.5
Al + 12% Si + 4% Cu	100	770	—	0.4
Ag + 28% Cu (共晶)	500	1050	—	0.5
Bi + 40% Ca (共晶)	—	—	—	—
Bi + 65% In (共晶)	450	290	—	—
Bi + 43% Sn	1000	290	—	0.5
Bi + 32% Pb + 16% Sn	1150	290	—	—
Cd + 26% Zn	400	293	1~2	0.5
Co + 40% Al (共晶)	850	1470	0.4	0.47
Cr + 30% Co	160	1473	0.4	0.47
Cr + 40% Ru	100	1560	—	—

续表 2

合金,% (按质量)	ε_{max} %	T,K	d, μm	m
Cu + 10% Mg (共晶)	262	950	—	—
Cu + 10% Al + 4% Fe	720	1070	10	0.6
Cu + 38 - 50% Zn	300	720~1260	—	0.5
碳钢	350	970	2	0.6
低合金钢	400	1070~1170	2	0.65
26-6型不锈钢	—	1090~1200	4~5	0.5
Mg + 6% Zn + 0.6% Zr	1000	540~580	0.5	0.6
Mg + 35% Ni (共晶)	120	770	—	—
Mg + 30% Cu (共晶)	400	770	—	—
Mg + 33% Al (共晶)	2100	670~720	0.5	0.8
纯镍	—	1090	8	—
Ni—Cr—Fe (不同成分)	达1000	1080~1250	5	0.5
Ni + 49% Cr	400	1270	—	—
In 100%	500	—	1	0.5
Pb + 10% Cd	1500	373	—	0.55
Pb + 17% Cd (共晶)	2700	290	—	—
Pb + 8% Ti	371	290	1	—
Sn + 15% Bi (共晶)	1000	290	1.2~4	0.48~0.7
Sn + 2% Pb	1000	290	2~3	0.55
Sn + 38% Pb (共晶)	1000	290	2~3	0.6~0.7
Sn + 38% Pb + 18% Cd (共晶)	1150	290	2~3	0.6~0.7
Sn + 33% Cd	138	—	—	0.5
Ti + 6% Al + 4% V	1000	1070~1270	—	0.85
Ti + 15% Al + 2.5% Sn	450	170~1370	—	0.72
Ti + 4% Al + 0.25% O	—	1210~1310	—	0.6
W—Re (不同成分)	200	2270	—	0.46

续表 2

合金% (按质量)	ϵ_{max} %	T, K	d, μm	m
纯锌	400	290	—	0.2
Zn + 0.2% Al	450	295	—	0.8
Zn + 0.4% Al	550	290	—	0.5
Zn + 3% Al	300	470~630	—	0.5
Zn + 22% Al (共晶)	1500	470~570	0.8~4	0.5~0.7
Zn + 40% Al	700	520	1~10	0.5
铅合金	200	1170	12	0.5

表3 根据工程应用万能性的观点某些超塑性合金的比较

(据M. B. 格拉勃斯基)

合 金	ϵ_{max} %	T, K	d, μm	m	ϵ_{max} (在 $m > 0.3$ 时) S^{-1}
Bi + 43% Sn	1000	290	1	—	—
Cd + 26% Zn	400	290	1~2	0.5	—
Pb + 38% Sn	1000	290	3	0.6	10^{-1}
Al + 33% Cu	1000	670~900	1~7	0.5~0.8	6×10^{-2}
Mg + 6% Zn + 0.6% Zr	1000	540~580	0.5	0.6	5×10^{-2}
Mg + 33% Al	2100	620~670	2	0.8	2×10^{-1}
Zn + 22% Al	1500	520	0.5	0.5	1
碳钢	350	970	2	0.6	10^{-3}
低合金钢	400	1070~ 1170	2	0.6	10^{-3}
Ni—Cr—Fe系合金	1000	1080~ 1250	1~3	0.5	8×10^{-2}
Ti + 6% Al + 4% V	1000	1070~ 1270	7	0.8	5×10^{-3}
Cu + 10% Al + 4% Fe	720	1070	10	0.6	7×10^{-3}

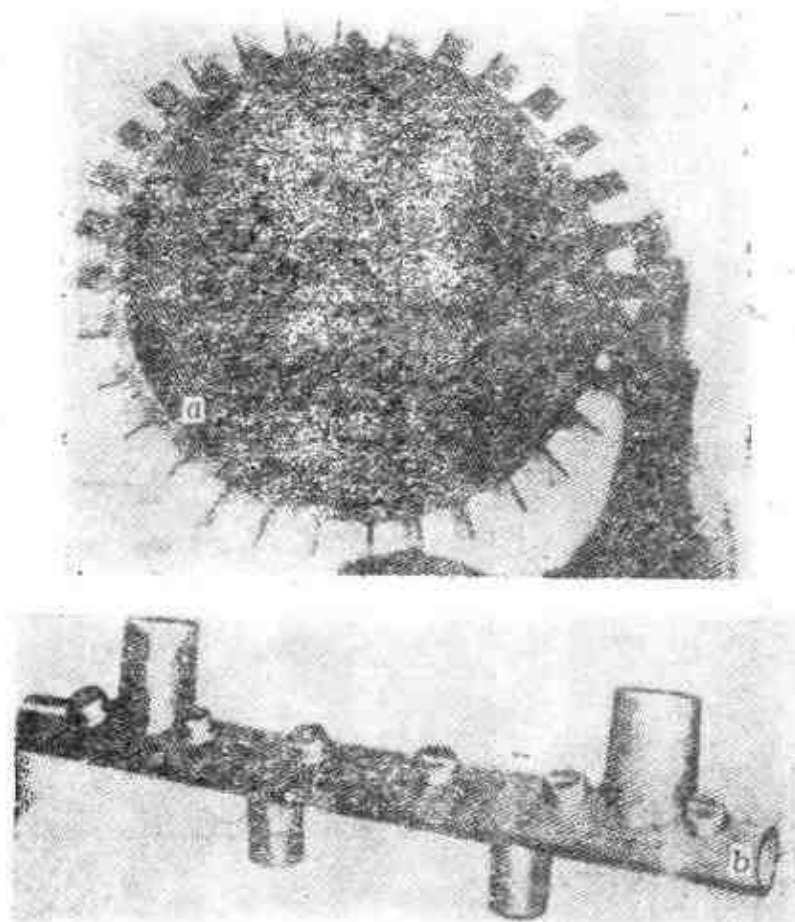


图59 超塑性的工程应用

(a) 在超塑性状态下利用体积冲压获得的气轮机涡轮盘，(b) “Конкорд”飞机客舱通风用的空气分配器，由超塑性状态下的Zn + 22% Al型合金制成

实际应用这个效应，可以大大地降低塑性变形时所发生的力，可获得高的变形程度而不破坏材料，并可原则上提出金属加工的新方法。图59所示为利用超塑性效应所得到的一些零件。

思 考 题

1. 拉伸杆件时失稳的原因是什么？
2. 用什么样的参数表征材料的强化能力？
3. 材料的粘性怎样提高变形的稳定性？
4. 什么是超塑性曲线？它有什么样的特征段？
5. 何谓结构超塑性？

7.2 裂 纹

关于裂纹力学

我们从材料力学中知道，由于金属的机械性能和金属压力加工条件的不同，在物体断裂之前，可能发生相当大的塑性变形（粘性或塑性断裂）；也可能在断裂之前发生小变形（脆性断裂）。不同的组织缺陷——使材料强度水准急剧降低的显微孔洞和显微裂纹，在断裂机制中起着重要作用。

例题7.3 材料的理论强度

在金属晶格距离为 r 的两层原子互相作用时（图 60a）， σ - r 曲线（ σ ——相互作用的应力）如图 60b 所示。试估计金属的理论强度。

解 在 O 点发生了由于原子内电子层的重叠引起的斥力和原子的离子与金属键引起的引力之间的相对平衡。通过 r_0 表示相应的原子层间的平衡距离。

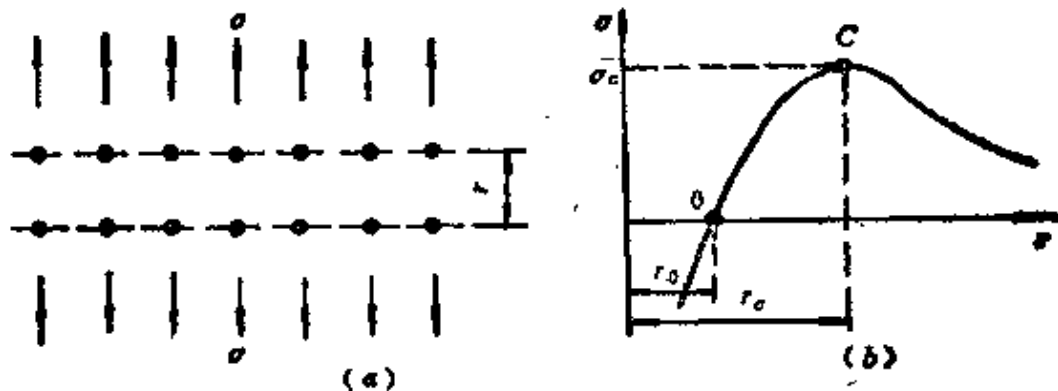


图60 晶格两层原子的相互作用

仿照已知的解，用部分正弦曲线近似曲线段 OC ：

$$\sigma = \sigma_0 \sin 2\pi \frac{r - r_0}{r_0} \quad (7-10)$$

式中 σ_0 —— σ 的最大值（理论强度）。在 $r = r_0$ 时， $\sigma = \sigma_0$ ，平衡变得不稳定并开始断裂。

将比值 $\varepsilon = \frac{r-r_0}{r_0}$ 作为相对伸长, 将有

$$\sigma = \sigma_c \sin 2\pi\varepsilon \quad (7-11)$$

材料的弹性模数 $E = (d\sigma/d\varepsilon)_{\varepsilon=0}$ 。

由式 (7-11) 得到 $\sigma_c = E/2\pi$ 或在粗略估计时取 $\sigma_c \approx 0.1E$ 。

作为缺陷对强度影响的一个例子, 利用得到的解来估计低碳钢的强度。

杨氏模量 $E = 2 \times 10^5$ MPa, 因此理论强度是 2×10^4 兆帕。但室温下低碳钢的实际强度大约是 2×10^2 兆帕, 即小两个数量级。

这样, 在实际材料中有显微裂纹。在一定的条件下, 显微裂纹开始增大, 汇合。这就导致形成宏观裂纹(主裂纹)和它们的雪崩式的扩展直至最终的物体脆性断裂。同时, 变形条件的改变(在一定范围内温度的升高, 造成各方向的流体静压力)能够避免显微裂纹的扩展并大大提高物体承受塑性加工的能力。

裂纹力学的任务是研究裂缝扩展和随之而来的物体断裂的条件。

我们把格利费思(Griffith)问题作为裂纹理论的经典问题来研究。

例题7.4 裂纹扩展条件

具有长为 $2l$ 裂纹的无限大弹性平面受应力 q 拉伸 (图61)。求裂纹扩展条件。

解 我们利用具有椭圆切口弹性平面拉伸问题的已知解。假定椭圆垂直轴长度趋向于零来求长 $2l$ 的裂纹所引起的应力分布。在平面变形条件下, 裂纹上沿的垂直位移由下述关系确定(见8.4节):

$$u_z = \frac{2q(1-\nu^2)}{E} \sqrt{l^2 - x_1^2}$$

式中, ν ——泊松比。

因此, 在加载后裂纹取被严重拉长的椭圆形状(图61,a)。

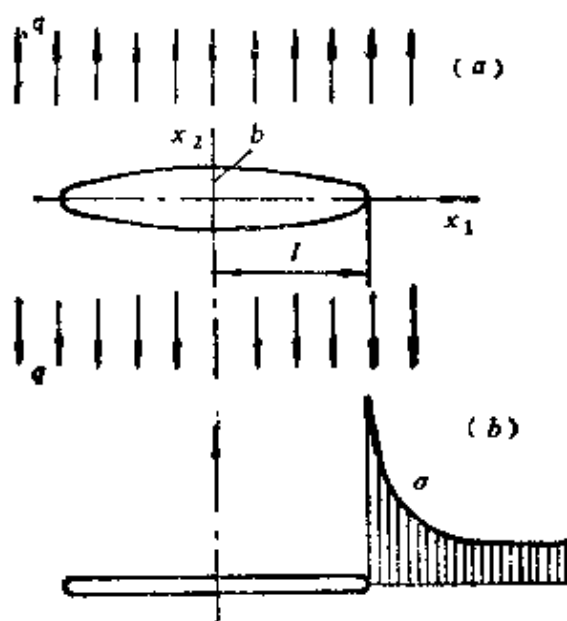


图61 裂纹扩展问题

我们来计算使裂纹扩展而由系统获得的“扩展功” W 。为此我们研究沿轴 Ox_2 受到应力 q 拉伸的无切口的弹性平面。

在平面上引出一个想象的切口 (图61, b)。很明显, 在切口的边沿上作用有拉伸应力 $\sigma_{22} = q$ 。在切口边缘上的应力将逐渐地由 q 减小到零。这时, 应力做功为:

$$W = 2 \left(-\frac{1}{2} q \int_{-l}^l u_2 dx_1 \right) = - (1 - \nu^2) \frac{\pi l^2 q^2}{E} \quad (7-12)$$

现在转到为克服邻近原子层相互作用力而必需的功 Π 的计算上。为此引入“表面能密度” γ 这个概念, 它是形成单位自由表面所必需的功, 因而

$$\Pi = 4\gamma l \quad (7-13)$$

此时我们通常假定弹性层的厚度等于1。

在裂纹扩展时, 即由长 l 变到 $l + dl$ 时, 释放势能 dW , 它消

耗于形成新的表面: $dW = -d\Pi$ 。因为此时 $dW = \frac{\partial W}{\partial l} dl$ 和

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial l} dl, \text{ 故有}$$

$$\frac{\partial}{\partial l}(W + \Pi) = 0$$

考虑公式(7-12)和(7-13), 则得到格利费思公式:

$$q_* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l(1-\nu^2)}} \quad (7-14)$$

在给定长度 l 时, 该式可确定导致裂纹扩展的临界应力 q_* 。由于应力 q_* 随裂纹扩展而降低, 所以裂纹传播得非常快, 即有雪崩特性。

现在我们来近似地估计 γ 值。为此利用区间 $r_c \leq r \leq 1.5r_0$ 。内曲线 $\sigma = \sigma(r)$ 的近似式 (7-10)。由于内聚力迅速减小, 所以可认为在 $r > 1.5r_0$ 时 $\sigma = 0$ 。

因而, 为了形成两个新的单位表面所必需的键破坏功等于

$$2\gamma = \int_x^{\infty} \sigma dr = \int_{l/4}^{l/2} \sigma_c \sin r \epsilon r_0 dr = \frac{\sigma_c r_0}{2\pi}$$

或近似地取 $\gamma = 0.01Er_0$ 。

由式 (7-14) 得出, 对于给定的材料和规定的温度条件, q 正比于 $1/\sqrt{l_0}$ 。对于脆性材料的实验定性证实了这个关系。

应该指出, 裂纹扩展开始的准则是裂纹力学的基础, 它不能直接由连续介质的平衡和运动方程得出, 它只是解有裂纹物体的极限平衡条件时的附加边界条件。在上面研究的格利费思问题中假定 Π 值是固体的表面能, 它与液体的表面能有相同的物理本质。但是奥洛文和依尔文的研究表明, 裂纹扩展而形成新的表面所消耗的能量主要是与分布于裂纹顶端前部那部分材料的塑性变形功有关。对于大量的实际材料来说, 在裂纹端部的微小区域内由于巨大的应力而产生了塑性流动区, 在此区域内应力和位移的分布与弹性区不同。在现代的裂纹理论中, 对这个问题给予很大的注意。

思 考 题

1. 为什么材料的实际强度通常远远地低于理论强度?
2. 如何写出裂纹扩展时的能量平衡方程?
3. 为什么裂纹扩展具有雪崩特性?

7.3 损伤的累积

7.3.1 “连续性”和“损伤”

虽然裂纹力学已取得了巨大的成就，但是由于实际材料中显微裂纹分布的偶然性特征和裂纹端部塑性区的影响，将取得的结果应用于实际时遇到了很大的困难。分析实验数据证明，用“相匣的”试样进行试验时，数据会发生严重的分散。这证明将简化的唯象方法应用到断裂问题上是有用的。损伤累积理论是这种方法的一个例子。这个理论研究了不同本质的断裂过程。其中包括经受蠕变的构件经过长时间正常工作产生相当小的变形时(约1%或更小)所突然发生的准脆性断裂。在描述由于交变载荷作用而引起的疲劳破坏和压力加工过程中充分发展的塑性变形所产生的断裂时，同样也可利用损伤累积理论。

为了描述断裂随时间的发展，在断裂力学中建议利用某个在0~1范围内变化的标量函数 Ψ ，即所谓物体的连续性。在初始状态下没有损伤时， $\Psi = 1$ ；随着时间的延长，函数 Ψ 减小。当 $\Psi = 0$ 时，发生断裂。Ю.Н.拉包特诺夫(Работнов)引入了函数 $\omega = 1 - \Psi$ ，即损伤度，在初始状态下，它等于零，而在断裂时，等于1。在分析金属压力加工的断裂条件时，В.П.柯勒莫哥洛夫(Колмогоров)同样也利用了这个函数，并把它称为塑性资源利用程度。

在损伤累积理论中，由于物理方面的原因对函数 Ψ 和 ω 建立了形为

$$\frac{d\Psi}{dt} = f(\Psi, \dots) \quad \text{或} \quad \frac{d\omega}{dt} = f(\omega, \dots) \quad (7-15)$$

的动力学方程，这个方程可将连续性或损伤度的变化速度与过程

的基本参数联系起来。解这个方程可以找到 $\Psi = 0 (\omega = 1)$ 的区域，从而可描述裂纹顶端沿物体的扩展。

A. A. 依留申 (Ильющин) 的方法是更普通的方法，它建议借助损伤张量来描述损伤累积过程，在最简单的情况下它是一个二阶的对称张量，张量的分量由式(7.15)类型的动力学方程确定并与材料质点加载（变形）过程相联系。

我们来研究下面的例题。

例题7.5 杆件的准脆性断裂

在不随时间变化的应力（即 $\sigma = \text{常数}$ ）下受拉伸的杆件突然断裂。求断裂时间 t_p 。

解 令函数 ω 即损伤度在破坏时等于1。仿照断裂力学领域中众所周知的著作，认为损伤度的增长速度由有效应力 $\sigma/(1-\omega)$ ，即应力与杆件未损伤横断面的比值来确定。对于幂次关系的情况，有

$$\frac{d\omega}{dt} = A \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n$$

式中， A 和 n ——某些常数。

在初始条件 $t=0$ ， $\omega=0$ 时，积分这个方程，得到

$$(1-\omega)^{n+1} = 1 - A(n+1)\sigma^n t \quad (7-16)$$

因为在断裂时刻 t_p 有 $\omega=1$ ，所以有 $t_p = \frac{1}{A(n+1)\sigma^n}$ 。

脆性断裂时间和应力 σ 之间的曲线关系示于图62。接近于瞬时抗力 σ_B 时的实际曲线用虚线标出。

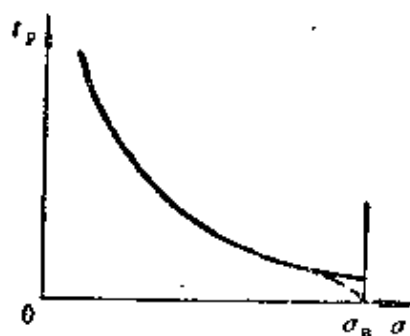


图62 准脆性断裂时间与应力 σ 的关系

7.3.2 损伤的线性叠加原理

现在放弃上面研究的问题中所取的应力恒定条件，即 $\sigma =$ 常数，而研究在随时间变动的拉伸应力 $\sigma(t)$ 作用下杆件的断裂。令载荷阶梯式变化。

在时间间隔 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ 内，作用恒定的应力 σ_k ，这时由式(7-16)得出：

$$(1 - \omega_{k-1})^{n+1} - (1 - \omega_k)^{n+1} = A(n+1) \sigma_k^n \Delta t_k = -\frac{\Delta t_k}{t_p(\sigma_k)} \quad (7-17)$$

式中， $t_p(\sigma_k) = [A(n+1)\sigma_k^n]^{-1}$ —— 在恒应力 σ_k 作用时的断裂时间。

以下列方式变换函数 ω ， $\omega^* = 1 - (1 - \omega)^{n+1}$ 。

容易看出，在开始时刻 $\omega^* = \omega = 0$ ，在断裂时刻 $\omega^* = \omega = 1$ ，即函数 ω^* 也同样表征损伤度的水平。

式(7-17)可写成下列形式

$$\Delta \omega_k^* = \frac{\Delta t_k}{t_p(\sigma_k)} \quad (7-18)$$

将式(7-17)对 k 求和，得到下列形式的断裂条件：

$$\sum_{k=1}^S \frac{\Delta t_k}{t_p(\sigma_k)} = 1$$

当间隔 Δt_k 趋向于零而它们的数目趋向于无穷时，断裂条件可写成贝尔积分形式：

$$\int_0^t \frac{dt}{t_p[\sigma(t)]} = 1 \quad (7-19)$$

对幂次关系(7-15)得到的这个公式可直接由应力线性叠加原理得出。依据这个原理，对于任意的时间 t ，损伤度 ω 的增量可用表达式(7-18)确定，即等于用恒定应力 σ_k 拉伸杆件时时间增量 Δt_k 与断裂时间 $t_p(\sigma_k)$ 的比值。

我们以微分形式写出这个公式：

$$d\omega = \frac{dt}{t_p[\sigma]} \quad (7-20)$$

并在可变应力 $\sigma(t)$ 作用下对时间求和, 结果得到

$$\omega = \int_0^t \frac{dt}{t_p[\sigma(t)]} \quad (7-21)$$

断裂条件 $\omega = 1$ 时, 可导出方程(7-19)。

7.3.3 压力加工时金属的断裂

显然, 运用损伤累积概念的唯一方法也可以用于分析金属压力加工时的断裂。在这种情况下, 标量函数 ω 可表征材料体素 dW 的损伤度, 该体素应该足够小, 以便在体素范围内应力状态和变形状态与温度场一样都认为是均匀的(见第6章起始 A.A. 依留申的宏观可确定性)。

我们将体素 dW 沿某一轨迹的运动看作变量 λ 的函数(图19)。时间 t 或在运动时累积的剪变形程度 $A = \int_0^t H dt$ 能够起这种变量的作用。把体素的状态用参数 $a_1(\lambda)$ 、 $a_2(\lambda)$ 、 \dots 、 $a_n(\lambda)$ 的终了数来表征。可以取温度、应力张量不变量或它们的某些函数作为上述的参数。最常用的是参数 $k = \sigma_0/T$ (k ——应力状态刚度系数) 和 ν_0 (罗德参数), 它通过公式(4-25)与表示应力状态形式的 β_0 角相联系。

利用损伤的线性迭加原理, 损伤度的动力方程可写成下列形式:

$$d\omega = \frac{d\lambda}{\lambda_p(a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

这里, λ_p ——是当 $a_1 = a_1 = \text{常数}$, 即 $a_2 = \text{常数}$ 、 \dots 、 $a_n = \text{常数}$ 时与体素 dW 断裂相对应的参数 λ 的值。

积分便得到

$$\omega = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda_p[a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_n(\lambda)]} \quad (7-22)$$

而断裂条件有下列形式

$$\int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda_p[a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_n(\lambda)]} = 1 \quad (7-23)$$

7.3.4 塑性图

许多学者进行的圆柱试样的拉伸、压缩和扭转实验，其中包括在各向静水压力下的压缩实验，都能证实给定温度和变形速度及单调变形时用极限剪变形程度 A_p 表征的金属塑性和应力状态刚性系数 $k = \sigma_0/T$ 之间有接近于单值的关系。这个关系可以用塑性图的形式给出（图63a, b, c）。由塑性图的分析可以得出，在各向静水力下压缩时塑性最高，随着系数 k 的增加，塑性急剧降低。

7.3.5 柯勒莫格洛夫的断裂条件

B. П. 柯勒莫格洛夫在分析金属单调变形条件下的断裂时首先应用了损伤累积理论。把剪变形程度 A 取作参数 λ 并限于一个参数 $a_1 = k = \sigma_0/T$ ，B. П. 柯勒莫格洛夫将损伤度的动力学方程写成 $d\omega = dA/A_p[k]$ 。

由于 $dA = H dt$ （其中 H ——剪变形速度强度），所以得到

$$\omega = \int_0^A \frac{H dt}{A_p[k(t)]} \quad (7-24)$$

断裂条件可写成下列形式〔试与贝尔积分（式7-19）相比较〕：

$$\omega_p = \int_0^{A_p} \frac{dA}{A_p[k(t)]} = \int_0^A \frac{H dt}{A_p[k(t)]} = 1 \quad (7-25)$$

例题7.6 平行六面体的断裂

利用例题10.1的解，可找到刚性平板间微粗平行六面体的断裂条件（图64）。材料是20号钢； $\theta = 20^\circ\text{C}$ ， $\sigma_s = 300$ 兆帕。塑性图示于图63。

解 按式(10-19)，剪变形速度强度用式 $H = 2\dot{\epsilon}\sqrt{1-a+a^2}$ 确定，式中， $\dot{\epsilon} = \frac{v_0}{l_3} = -\frac{dl_3/dt}{l_3} = -\frac{d\ln l_3}{dt} = -\frac{d\ln H_1}{dt}$ （ H_1 ——平行六面体的高度），参数 a 是作用于平行六面体侧面上的应力

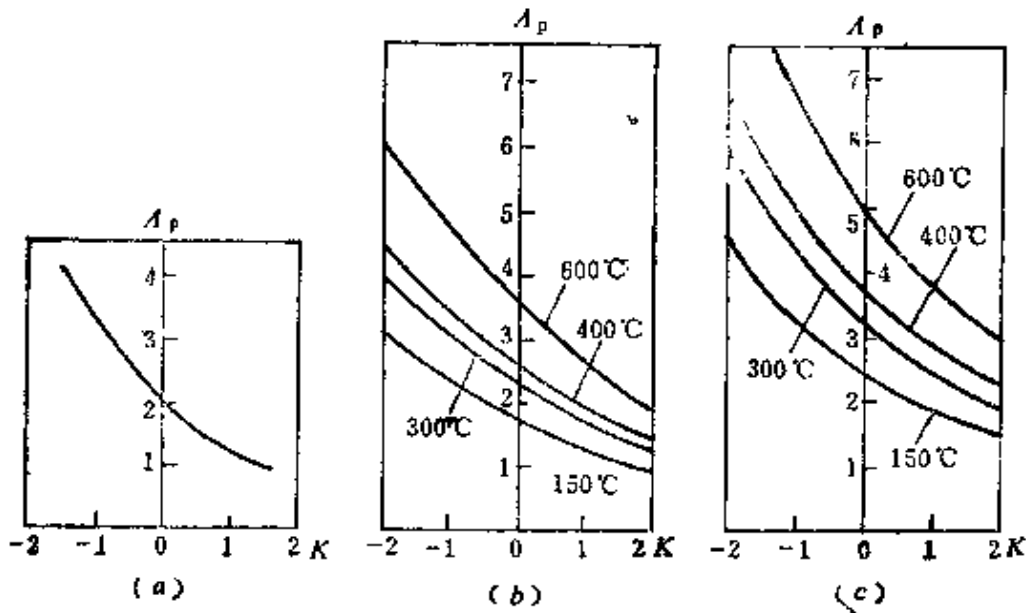


图63 塑性图

(a) 钢; (b), (c) 钛合金BT14和BT1

q_1, σ_s 和 q_2, σ_s 的函数, 按式(10-20)确定。

由于平行六面体的应力和变形状态是均匀的, 所以材料任意质点处的剪变形程度为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^t H(\tau) d\tau = -2\sqrt{1-a+a^2} \int_0^t \frac{d \ln H}{d\tau} d\tau \\ &= -2\sqrt{1-a+a^2} \ln H_t \int_{H_1}^{H_t} = 2\sqrt{1-a+a^2} \ln \frac{H_t}{H_1} \quad (7-26) \end{aligned}$$

令破坏在 $H_t = H_p$ 时发生, 此时 $A = A_p(k)$, 并且在给定 $k = \sigma_s/T$ 时与断裂相对应的变形程度 A_p 按塑性图^[11]确定 (见图64)。由式(7-26)得到

$$H_p/H_1 = \exp[-A_p/(2\sqrt{1-a+a^2})]$$

应力状态刚性系数 k 为

$$k = \frac{\sigma_s}{T} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_s (q_1 + q_2 - p)}{\tau_s} = \frac{q_1 + q_2 - p}{\sqrt{3}}$$

作为 q_1 和 q_2 函数的正压力 p 按公式(10-16)求出后, 则得到

$$k = [3(q_1 + q_2) - \sqrt{4 - 3(q_1 - q_2)^2}] / 2\sqrt{3}$$

我们细致研究一下应力-变形状态图示以怎样的方式影响平行六面体的断裂条件。如改变侧面载荷特征,系数 k 将逐步增加。

1) $q_1 = q_2 = -1.00$ (在侧面作用等于屈服极限 σ_s 的压缩应力)。在这种情况下 $k = -2.31$, $A_p \gg 5.00$; $a = 0.50$; $p = 2.00$; $H_p/H_1 \ll 0.06$ 。

2) $q_1 = -1.00$; $q_2 = 0.00$ (沿 x_1 轴在侧面上作用等于 σ_s 的压缩应力)。 $k = -1.16$, $A_p = 4.80$; $a = -1.00$; $p = 1.00$; $H_p/H_1 = 0.09$ 。

3) $q_1 = q_2 = 0.00$ (侧面无应力作用)。 $k = -0.58$; $A_p = 2.60$; $a = 0.50$; $p = 1.00$; $H_p/H_1 = 0.22$ 。

4) $q_1 = 1.00$; $q_2 = 0.00$ (沿 x_1 轴作用等于 σ_s 的拉应力)。 $k = 0.58$; $A_p = 1.50$; $a = 2.00$; $H_p/H_1 = 0.65$ 。

沿 x_1 轴发生了剧烈的变形,同时沿 x_2 轴产生收缩。根据式(7-26),剪变形程度等于 $2\sqrt{3} \ln H_1/H_2$ 。

5) $q_1 = q_2 = 1.00$ (在侧面作用等于 σ_s 的拉应力)。 $k = 2/\sqrt{3} = 1.16$; $A_p = 1.20$; $a = 0.50$; $p = 0.00$; $H_p/H_1 = 0.50$ 。

虽然 k 增大,但允许的压缩率变得很大。这与沿 x_1 、 x_2 轴的变形均匀性有关。在 $a = 0.50$ 时剪变形程度等于 $\sqrt{3} \ln H_1/H_2$,也就是说,即使取同样的压下系数 H_1/H_2 ,剪变形程度仅为前一种情况的二分之一。

7.3.6 断裂的概率

如我们已指出的,在最初的研究中被看作均匀的工程材料总是包含有随机分布的不同成因和不同尺寸的缺陷。因此,不论在建立塑性图时,还是在研究金属压力加工中金属的破坏时,都不可避免地会导致实验数据分散。由此可以看出建立断裂概率模型的必要性。应该指出,这个问题困难很大,迄今为止离解决还很遥远。因此下面仅仅提及概率方法的基本概念。

观察在确定的温度为 θ ,变形速度为 H ,应力状态指数为 k 时所进行的塑性实验。在这个实验中,剪变形程度 $A = \gamma$ 时试样断

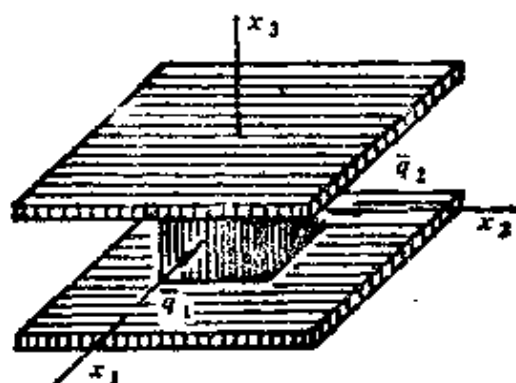


图64 平行六面体的破坏

裂。在一般情况下， γ 是具有分布规律 $Q(A) = p\{\gamma < A\}$ 的随机值，式中 p 为概率。我们将假定函数 $Q(A)$ 是连续的且存在着连续的断裂概率密度 $q(A) = Q'(A)$ 。

除函数 $Q(A)$ 外，还需要另一个函数 $R(A) = 1 - Q(A) = P\{\gamma \geq A\}$ ，即保证率函数。

我们研究几个表征函数 Q 和 R 的数值。它们中间最重要的是塑性数学期望 $M\gamma$ ，它与以确定方式解决断裂问题时金属的塑性 A_p 是一致的。

在采用概率方法时

$$A_p = M\gamma = \int_0^{\infty} \gamma q(\gamma) d\gamma$$

断裂概率分布的另一个重要特征数是塑性方差：

$$D\gamma = M(A - A_p) = M\gamma^2 - (M\gamma)^2 = \int_0^{\infty} \gamma^2 q(\gamma) d\gamma - A_p^2$$

例题7.7 断裂概率的正态分布规律

实验表明，通常 $Q(A)$ 取正态分布规律，试分析证明之。

解 假定由铸锭和由轧制、挤压或锻造的坯料上切取的试样有初始损伤度 ω_0 ，它以不大的方差按正态规律分布。在试样加载时参数 ω 以固定形式改变： $\omega = f(A, \omega_0)$ ，且函数 ω 对 A 是单调的。

根据条件，当 ω 值达到 1 时断裂开始。因而，在每一个单独的实验中断裂变形 γ 由式 $f(\gamma, \omega_0) = 1$ 确定。

解此方程，有 $\gamma = \varphi(\omega_0)$ 。将函数 φ 在点 $a = M\omega_0$ 展成泰劳级

数:

$$\gamma = \varphi(a) + \varphi'(a)(\omega_0 - a) + \frac{1}{2}\varphi''(a)(\omega_0 - a)^2 + \dots$$

这里, M ——数学期望。

根据 ω_0 方差很小的假定, 在这个展开中, 可以限于取级数的前两项。由于 ω_0 是正态值, 所以断裂变形 γ 作为依赖于 ω_0 的线性函数也是按正态规律分布的。

例题7.8 断裂概率

在达到变形 A 之前, 被试验的试样并没有断裂。问它在区间 (A, A_1) ($A_1 > A$)内不断裂的概率是多少?

解 用 $R(A, A_1)$ 表示这个概率, 令 A 表示在区间 $(0, A)$ 不断裂的事件, 而 B 表示在区间 (A, A_1) 不断裂的事件。则我们的概率是条件概率:

$$R(A, A_1) = P\{A/B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}$$

但事件 AB 表示在区间 $(0, A_1)$ 不发生断裂, 因此 $R(A, A_1) = R(A_1)/R(A)$ 。

思考题

1. 损伤累积理论利用什么概念? 动力学方程描述什么?
2. 损伤线性叠加原理是什么?
3. 怎样能够建立塑性图? 它的固有规律是什么?
4. В. Л. 柯勒莫格洛夫断裂条件是什么?
5. 为什么断裂有偶然性的特点?

参 考 文 献

- Грaбский М. В. Структурная сверхпластичность металлов. М., «Металлургия», 1975. 270 с. с ил.
- Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
- Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругоупругого разрушения.

шения. М., «Наука», 1974. 416 с. с ил.

Разрушение. Т. 3. Под редакцией Г. Либовица. М., «Мир», 1976. 797 с.

с и л.

Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974. 236

с. с ил.

第二篇 边值问题

研究连续介质所进行的过程，包括计算温度场、应力和应变以及分析断裂条件，就必须研究相应的物理场。在定常过程条件下，这些场不随时间而变；对非定常过程，这些场随时间而变，并反映各种因素的影响。具体问题的解可归结为分析相应变量（温度，应力，应变等）在时间和空间上的分布。如果问题提得正确，那末问题的条件就应包括使解唯一存在的一整套充分的原始数据，而这些数据的不可避免的误差对解的精度影响很小。这就意味着问题应提得恰当。

我们研究的运动学关系和本构方程是研究过程的内部机制的数学模型。它们不描写物体与周围介质的相互作用条件和物体的初始状态。因此，必需补充研究下述的全部资料，即决定物体初始状态（初始条件）的资料和描述周围介质对物体中所进行过程的影响（边界条件）的资料。它们共同构成所研究问题的解的唯一性条件并统一到边值条件的概念中去。此时指的是某一空间-时间域的边界，在该域界限内进行所研究的过程。

因此，我们引出边值问题：根据在空间-时间域给定的边界条件用介质的数学模型来确定该域整个体积的条件。

第8章 边值问题的提法

连续介质力学是数学物理学的一个分支。广义地说，数学物理学应理解为物理现象的数学模拟理论。

在数学物理课程中一般只叙述二阶线性偏微分方程这样的理论。因此，在描写连续介质运动时，仅仅对于最简单的情况（理

想液体的运动、弹性波传播、最简单的热传导问题)才可能直接采用经典的准则。在比较复杂的问题中,描述连续介质内的速度、应力和温度分布的非线性偏微分方程组不属于传统的叙述范围。同时,边值问题提法恰当的概念对连续介质力学来说是非常重要的,并需要专门研究。

由于连续介质运动的问题通常与变形体内进行的热交换问题有密切联系,所以也就必须研究热传导理论边值问题的提法。最后,我们还将提出弹性理论、理想和粘性液体力学的边值问题作为经典的例子。这些问题有着重大的实际意义。采用弹性理论的方法可以研究轧辊、挤压模和轧机牌坊的应力。在求解塑性介质流动的问题时可初步近似采用理想和粘性液体流动的速度场。最后,在计算金属拉拔和挤压润滑层的工作规程时也广泛采用不可压缩粘性液体的流动理论。

8.1 数学物理学的边值问题

8.1.1 连续介质的数学物理学和力学

从十九世纪中叶开始,在研究连续介质中的物理现象时,也就是在电动力学、声学、弹性理论、水力学、塑性理论和其它许多方面,都成功地采用着数学物理学方法。利用定名为数学物理方程的偏微分方程可以较充分地写出这类问题的数学模型。

数学物理学处于物理学和数学这两个学科的边缘,除了微分方程外,还采用数学中的其它分支,如积分和积分-微分方程、变分法和概率论方法、场论和复变函数理论方法等。由于数值计算法的蓬勃发展,利用电子计算机的直接算法,首先是解边值问题的有限差分法,有着特殊的意义。

作为数学物理学问题,连续介质力学问题的提法在于构成描写所研究的一类物理现象基本规律的数学模型,也就是在于导出满足表示物理过程各量的方程(微分的、积分的、积分-微分的或代数的)和在于描写初始的和边界的条件。此时的出发点,是仅仅考虑现象的最重要特点的基本物理规律而舍弃其次要特点。这

样的基本规律通常是守恒定律（例如质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律）以及本构方程。

8.1.2 偏微分方程

我们研究如下形式的方程：

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \quad (8-1)$$

这个方程把未知函数 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、独立变量 x_1, x_2, \dots, x_n 和关于未知函数的偏导数联系起来。这个方程称为偏微分方程。在方程 (8-1) 中出现的导数的最高阶数称为方程的阶。

如果方程 (8-1) 对于未知函数和其偏导数是线性的，则称此方程是线性的。对于数学物理学来说，二阶线性方程是重要的，也是研究得最好的，此二阶线性方程可写成如下的一般形式

$$a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (8-2)$$

其中 $a_{ik} = a_{ki}$ ①， $(i, k = 1, 2, \dots, n)$

按重复足标由 1 到 n 求和。 a_{ik} 、 b_i 、 c 和 f 是 n 个独立变量的给定函数。

类似地可以引出偏微分方程组的概念。在许多情况下，利用函数的连续微分和消去的方法，可将此方程组化为一个更高阶的微分方程。方程 (8-2) 正是这样的方程，在研究它时能够谈到这一点。

满足下述条件的所有函数 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为偏微分方程的解，即如果将这些函数代入方程来代替未知函数和它们的

①原文 a_{ik} 系 a_{ki} 之误。——译者

偏导数, 则方程就变为以独立变量表示的恒等式。

3.1.3 二阶方程的分类

我们来研究方程 (8-2)①。令 a_{ik} 、 b_i 、 c 和 f 是 n 维欧氏空间 (x_1, x_2, \dots, x_n) 中域 D 上的给定函数。采用线性变换, 用新的未知变量 (ξ_1, \dots, ξ_n) 代替 (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\xi_k = c_{ki} x_i, (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (8-3)$$

我们将认为变换式 (8-3) 是非奇异的, 也就是行列式 $|c_{ki}|$ 不等于零。在这种情况下, 按如下方法用新变量的导数表示旧变量的导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = c_{pi} \frac{\partial u}{\partial \xi_p} \quad \bullet, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = c_{pi} c_{qk} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q}$$

代入方程 (8-2), 得到

$$\bar{a}_{pq} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q} + \bar{b}_p \frac{\partial u}{\partial \xi_p} + cu = f \quad (8-4)$$

式中 $\bar{a}_{pq} = a_{ik} c_{pi} c_{qk}$ 。

我们可以利用下述情况, 即当按式 (8-3) 替换独立变量时, 若在二次型 $a_{ik} t_i t_k$ 中作可化成 $\bar{a}_{pq} \tau_p \tau_q$ 的线性变换

$$t_i = c_{pi} \tau_p \quad (8-5)$$

则函数 u 的第二次导数的系数变换式 (8-4) 就与该二次型的系数变换式相一致。

在域 D 内定出定点 M , 并构成二次式

$$a_{ik}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) t_i t_k \quad (8-6)$$

大家知道, 存在着这样的非奇异变换 (式8-5), 这种变换

① 原文 (7-2) 系 (8-2) 之误。——译者

② 原文 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 系 $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ 之误。——译者

可使二次型 (式8-6) 化为标准型:

$$\sum_{i=1}^m (\pm \tau_i^2), \quad m < n \quad (8-7)$$

并且正项和负项的数目以及 m 本身的数目与非奇异变换的选择无关。

此时, 方程式 (8-2) 可化为如下的标准型:

$$\sum_{i=1}^m \pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} \right) = \Phi \left(\xi_1, \dots, \xi_n, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right) \quad (8-8)$$

在此方程中没有混合导数。我们注意到, 对于每个点来说将有自己的二次型系数值和自己的化为标准型的变换式。

利用二次型 (式8-6) 或者再分析标准型 (式8-7), 便可得出如下变形的二阶线性方程:

如果 $m = n$ 且等式 (8-8) 左边的所有符号相同, 则该点处的方程是椭圆型的,

如果 $m = n$ 且等式 (8-8) 左边除一个符号外, 其它符号相同, 则该点处的方程是双曲线型的。

如果 $m = n$ 且等式 (8-8) 左边的符号多于一个正号和多于一个负号, 则该点处的方程是超越双曲线型的,

如果 $m < n$, 则该点处的方程是广义抛物线型的,

如果 $m = n - 1$, 在方程 (8-8) 中所有符号相同, 且此方程右

边含有导数 $\partial u / \partial \xi$, 结果 $\partial \Phi / \partial \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) \neq 0$, 则该点处的方程是

狭义抛物线型的。

当常系数时, 方程属于哪种类型与独立变量的值无关, 如果方程式的系数是变量, 则在域 D 的各部分, 方程的类型可能不同。

8.1.4 数学物理的经典方程

这些经典方程如下:

拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad (8-9)$$

或简写成

$$\nabla^2 u = 0 \quad (8-10)$$

式中 ∇^2 是拉普拉斯微分算子,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (8-11)$$

容易看出, 拉普拉斯方程是属于椭圆型的。如果函数 u 及其直到二阶的导数在域 D 内连续并满足拉普拉斯方程, 则函数 u 称为域 D 内的调和函数。

泊松 (Poisson) 方程

$$\nabla^2 u + f = 0 \quad (8-12)$$

也是椭圆型方程。

热传导方程 (对于不变形的固体)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u + f \quad (8-13)$$

是抛物线型方程。

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (8-14)$$

属于双曲线型方程。

式中 c —— 在该介质中声的传播速度。

还可以引用一个在弹性理论中广泛采用的方程: $\nabla^2(\nabla^2 u) = 0$, 或所谓重调和方程。

$$\nabla^4 u = 0 \quad (8-15)$$

对于两个自变量的情况，其形式如下：

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0 \quad (8-16)$$

如果在域 D 内函数 u 及其直到四阶的导数连续且满足重调和方程，则函数 u 称为域 D 内的重调和函数。

方程 (8-10) ~ (8-16) 常常称为基本数学物理方程。

8.1.5 边值问题

通常在数学物理问题中要求找到方程的满足某些附加数据的解。这些附加条件特点不同，且取决于建立该方程的物理问题的提法。多半要求未知解（通解和特解）的某些导数在规定的曲面（对两个自变量是曲线）上取给定的值。

这样的附加条件称为边值条件，而在给定的边值条件下微分方程的积分问题称为边值问题。

边值问题应当满足以下的基本要求：

- 1) 解应当是存在的；
- 2) 解应当是单值确定的（唯一性）；
- 3) 解对于该问题应当是连续的（稳定性）。

第一个要求归结为这样的条件，即在解上不加过多的限制，也就是说在这些限制条件中彼此没有矛盾。

按照第二个要求，如果非确定性和非单值性不是物理状况本身所固有的。则应该将它们排除。

第三个要求断言，只有当确定问题初始数据不可避免的误差不会导致解产生较大误差的情况下，数学问题才能正确地描述物理现象。

满足所有三个要求的问题称为恰当提出的问题。

显然，这些要求反映了我们对广泛范围内的物理现象所持的一般概念。如果创造必要条件，这些现象必然发生（解存在）；这些现象由其发生的条件充分地确定（解的唯一性）；如果这些现象产生的条件充分接近，则所发生的现象几乎是一样的（解与已知问题的连续关系）。

例题8.1 不恰当问题的例子 (拉格朗日例)

在半带状域 $y > 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 按下面的附加条件 (柯西

问题) 求解拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$:

$$u \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = u \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad u \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x),$$

并且 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 。

解 开始令 $\varphi = 0$ 。此时问题的唯一解将为 $u(x, y) \equiv 0$ 。

现令 $\varphi^*(x) = e^{-\sqrt{2n+1}} \cos(2n+1)x$ 。唯一解将是

$$u^* = \frac{1}{2n+1} e^{-\sqrt{2n+1}y} \cos(2n+1)x \operatorname{sh}(2n+1)y$$

函数 φ^* 的选择应在 n 足够大时使函数本身及其所有导数无论如何小也不为零。同时, 对于一切恒定的不为零的 y 来说, u^* 具有其振幅不管如何大的余弦曲线型式, 且当 n 足够大时无论如何也不为零解。没有满足稳定性条件, 因而问题提得不恰当。

曾有过这种意见, 当描述物理过程时, 不会遇到不恰当的问题, 并且在失去稳定性的情况下, 对不恰当的问题不能构成近似解。但是, 更深入的分析表明, 与实验数据的数学处理、优化设计、傅立叶级数求和, 以及系数行列式为零的线性代数方程的求解等有关的许多问题, 不论对于问题的原始数据或对于可能的解, 在完全自然地选择精度的概念时就会是不恰当的。在 A. H. 吉洪诺夫 (Тихонов) 和他的学生的著作中发展了不恰当问题的近似求解方法, 该方法可归结为求所谓 调整算子, 此算子决定着边值问题稳定的近似解。

8.1.6 椭圆型方程的边值问题

对于拉普拉斯和泊松方程以及对任何椭圆型方程, 可以提出三种基本类型的边值问题。对其中每一个都必须找到一个函数 u ,

它在包括边界 S 在内的域 D 上连续、在域 D 内存在连续的二阶导数和满足拉普拉斯（泊松）方程。在域的边界上应当满足如下边值条件：

- 1) 第一边值问题或狄利克莱（Dirichlet）问题：

$$u|_S = \varphi(M) \quad (8-17)$$

- 2) 第二边值问题或诺伊曼（Neumann）问题：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \varphi(M) \quad (8-18)$$

- 3) 第三或混合边值问题：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Big|_S = \varphi(M) \quad (8-19)$$

式中 φ 和 β ——在边界面 S 上所确定的连续函数； M ——边界点； $\frac{\partial u}{\partial n}$ ——表面 S 的每个点上沿其外法线方向的导数。在许多情况下，式（8-17）~（8-19）的右边等于零，相应的边界条件称为齐次的。

如果方程有解的域受限制，则边值问题称之为内部的。假如这个域是位于某一限制域之外的空间部分，则边值问题称之为外部的。

在数学物理学课程中证明，上述的边值问题的提法是恰当的。

8.1.7 重调和方程的边值问题

重调和方程（也属于椭圆型方程）的基本边值问题是求函数 $u(x, y)$ ，此函数及其导数在闭域 $\bar{D} \equiv D + S$ 上连续。在 D 域内存在直到四阶的导数、在 D 域内满足方程（8-16）和满足 S 上的边界条件：

$$u|_S = g(M), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = h(M) \quad (8-20)$$

式中 $g(M)$ 、 $h(M)$ ——连续函数。

可以证明, 所提出的问题解是存在的, 而且是唯一的和稳定的, 也就是问题提得恰当。

其次, 如果 u_1 和 u_2 在某域 D 上是两个调和函数, 则在该域上函数 $u = xu_1 + u_2$ 是重调和的。这样, 重调和函数可通过两个调和函数来表示。当求解类似上面提出的边值问题时, 这个情况使得可以利用复变函数理论方法。

思 考 题

1. 什么是物理过程的数学模型?
2. 什么叫偏微分方程的解?
3. 你知道二阶线性方程有什么类型?
4. 什么叫边值问题?
5. 如何叙述边值问题提法恰当的条件? 它们具有什么样的物理意义?
6. 你知道那一些最简单的边值问题?

8.2 热传导理论的边值问题

初始条件和边界条件

对于运动的连续介质, 得到热传导微分方程为

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa \nabla^2 \theta + \nu \sigma_{ik} \xi_{ik} \quad (8-21)$$

在数学上可描写物体内部热量的迁移, 并建立物体温度 $\theta(\kappa, t)$ 的空间变化和时间变化之间的关系。因为 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} v_i$, 而应力和变形速度事先不知道, 所以若不分析连续介质的运动和不同时决定速度场和应力场, 在一般情况下是不能研究方程(8-21)的。因此, 热传导理论是关联性的, 因为它把热传导理论和连续介质力学联系起来。求解这样问题的方法我们将在以后(第十一章)研究, 暂且假定根据某种理由速度和应力我们已知。这时, 方程(8-21)是二阶线性偏微分方程, 导数 $\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ 具有变系数 $v_i(x, t)$ 。这个方程属于抛物型的, 在一般情况下有无穷多个解。

为了从这么多解中选出具体的能够单值表示所研究过程的解，必须把边值条件与基本方程联结起来。表示初始瞬间在物体 D 内温度分布的初始条件

$$\vec{\theta}(x, 0) = \vec{\varphi}(x) \quad (8-22)$$

和周围介质与物体表面 S 相互作用规律（边界条件）都属于边值条件。

让我们研究几种典型的边界条件：

第一类边界条件给出任何时刻沿物体表面上的温度分布：

$$\theta|_s = \psi(M, t) \quad (8-23)$$

式中 M ——表面 S 上的点。

温度 $\psi(M, t)$ 可能是常数，也可能随着由物体表面一点到另一点及随时间 t 改变而变化。

第二类边界条件在物体表面每个点上给出热流密度，将它作为时间的函数：

$$q_n|_s = \psi(M, t) \quad (8-24)$$

式中 q_n ——热流矢量 q 在物体表面外法线方向 n 上的投影。因此，若物体表面被冷却，则量 q_n 是正的；当加热表面时，则为负的。

由傅立叶热传导定律 $\vec{q} = -k \text{grad } \theta$ 得出

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = -k \text{grad } \theta \cdot \vec{n} = -k \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (8-25)$$

这就能够将条件式 (8-24) 写作如下形式：

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_s = \psi(M, t) \quad (8-26)$$

特别地，物体表面绝热条件为

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_s = 0 \quad (8-27)$$

金属在高温炉中加热时，热量的传递过程主要是辐射。物体表面由加热炉墙和拱顶所获得的热流与辐射表面绝对温度 T_r 和

物体表面绝对温度 T_s 的四次方之差成比例〔斯捷潘-玻尔兹曼 (Stefan-Boltzmann) 定律〕：

$$-q_n = \beta c(T_c^4 - T_s^4) \quad (8-28)$$

式中 β ——斯捷潘-玻尔兹曼常量； c ——考虑到热交换条件的系数。式 (8-28) 左边的负号是由于物体表面受热， $q_n < 0$ 。

如果物体表面温度 T_s 比炉子温度 $T_c = \text{常数}$ 低得多，则 T_s 可以忽略，并可写出如下的边界条件：

$$q_n|_s = -\beta c T_c^4 = \text{常数} \quad (8-29)$$

第三类边界条件是按牛顿定律描写物体表面和周围介质间的对流热交换过程：

$$q_n|_s = \alpha(\theta_s - \theta_c)$$

式中 θ_c ——周围介质的温度； α ——称为热交换系数的比例系数，瓦特/(米²·度)。这个量在数值上等于物体表面和周围介质间温差为 1℃ 时单位时间、单位表面积流出的（或得到的）热量。

利用关系式 (8-25)，可以把这个关系写成如下形式：

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial n} = \alpha(\theta_s - \theta_c) \quad (8-30)$$

因此，第三类边界条件描述下述的热传递过程，即在单位时间内，单位物体表面传到周围介质的热量，同物体表面温度与周围介质温度之差成正比。但是，在很多情况下这个热传递定律也应用于描述由于辐射物体的加热或冷却。为了确信这一点，我们把关系式 (8-28) (斯捷潘-玻尔兹曼定律) 的右边写成如下形式：

$$\begin{aligned} \beta c(T_c^4 - T_s^4) &= \beta c(T_c - T_s)(T_c + T_s)(T_c^2 + T_s^2) \\ &= -\alpha(T)(\theta_s - \theta_c) \end{aligned} \quad (8-31)$$

式中辐射热交换系数 $\alpha(T)$ 与对流热交换系数有同样的量纲，它取决于参与辐射热交换的物体表面的性质和温度，并等于：

$$\alpha(T) = \beta c(T_c + T_s)(T_c^2 + T_s^2) \quad (8-32)$$

在许多问题中，温度 $T_c = \text{常数}$ 且 T_s 的大小在比较狭窄的范围内变化，这就能够近似地取系数 $\alpha(T)$ 为常数，即化为第三

类边界条件。

第四类边界条件描写受液体或气体包围的物体表面的热交换以及假设接触表面温度相同的情况下接触着的固体的热交换。

此时，不仅温度相等

$$\theta_s = \theta_c \quad (8-33)$$

而且热流相等

$$-k \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Big|_s = -k_c \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_c \quad (8-34)$$

显然，描写接触热交换过程，特别是对于非稳定的温度场，第四类边界条件比第三类更精确。同时，采用这个边界条件规定还要解一个温度问题，即分析温度在介质中的分布。因为当物体表面被氧化膜或润滑膜覆盖时，对实际过程表面热交换的热物理常数的值只能近似地知道，所以在许多情况下只限于用近似的方法描写表面条件，并限于第一类或第三类边界方程。因此，我们来研究下面的例题。

例题8.2 热坯和工具的热接触

在研究靠近工具和热坯之间接触表面的热交换条件时，可以提出如下的问题。两个半有限体 D_1 和 D_2 分别均匀加热到温度 θ_{10} 和 θ_{20} ，并在 $t=0$ 时进行接触。求任意时刻温度的分布。

解 取坐标系如图65所示。此时坐标的原点位于接触面。在表示变量时，足标1指物体 D_1 ，足标2指物体 D_2 。

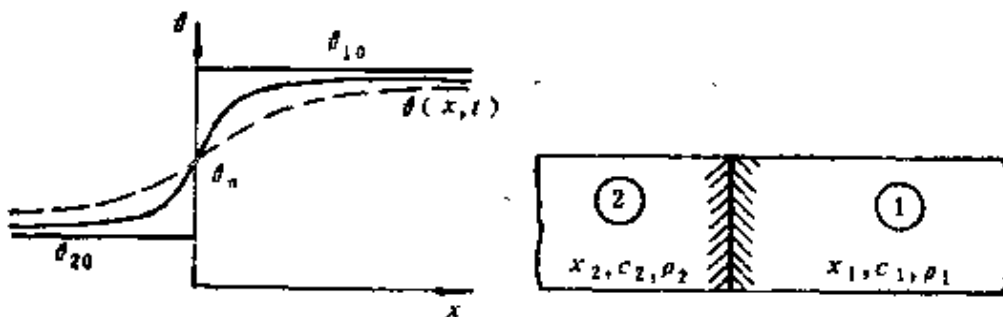


图65 理想的热接触

所研究物体任意点的温度仅取决于两个变量，即坐标 x 和时间 t 。热传导方程可写成：

$$\text{对物体 } D_1, \frac{\partial \theta_1(x, t)}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 \theta_1(x, t)}{\partial x^2}$$

$$(t > 0, x > 0);$$

$$\text{对物体 } D_2, \frac{\partial \theta_2(x, t)}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 \theta_2(x, t)}{\partial x^2}$$

$$(t > 0, x < 0)。$$

让我们来叙述边值条件。初始条件 $\theta_1(x, 0) = \theta_{10}$, $\theta_2(x, 0) = \theta_{20}$ 和第四类边界条件:

$$\theta_1(+0, t) = \theta_2(-0, t) \quad (8-35)$$

$$\frac{\partial \theta_1(0, t)}{\partial x} = -\frac{k_2}{k_1} \frac{\partial \theta_2(0, t)}{\partial x} \quad (8-36)$$

均属于边值条件。其中 $\theta_1(+0, t)$ 和 $\theta_2(-0, t)$ 分别为 x 从左、右趋于零时温度的极限值。

我们加入如下的附加条件:

$$\frac{\partial \theta_1(+\infty, t)}{\partial x} = \frac{\partial \theta_2(-\infty, t)}{\partial x} = 0$$

它描述 x 趋于无穷时热扰动的衰减。

文献[12]中用拉普拉斯积分变换来解所提出的边值问题, 得出的解有如下形式:

$$\theta_1(x, t) = \theta_{10} + \frac{K\Delta\theta}{1+K} \left[1 + \frac{1}{K} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}}\right) \right], \quad (8-37)$$

$$\theta_2(x, t) = \theta_{20} + \frac{K\Delta\theta}{1+K} \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{\kappa_2 t}}\right) \quad (8-38)$$

式中 $\Delta\theta = \theta_{10} - \theta_{20}$ 。

系数 K 表示第一物体对第二物体的热活动性之比。它等于

$$K = \sqrt{\frac{k_1 c_1 \rho_1}{k_2 c_2 \rho_2}} = \frac{b_1}{b_2} \quad (8-39)$$

式中 $b = \sqrt{k c \rho}$ —— 热活动性系数; k —— 热传导系数; c —— 热

容量； ρ ——介质密度。

足标 1 和 2 分别指物体 D_1 或 D_2 。

函数 $\operatorname{erf} z$ 是概率积分，

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du; \quad \operatorname{erf}(0) = 0 \quad (8-40)$$

在数学手册和概率论教科书中有这个函数的表。最后

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z); \quad \operatorname{erfc}(0) = 1 \quad (8-41)$$

所研究的问题可以用于近似分析金属压力加工过程中热工件和工具间接触区周围的温度分布。由得到的解所获得的重要结果是在接触表面上接触后温度立即建立起相等关系：

$$\theta_1(+0, t) = \theta_2(-0, t) = \theta_{2,0} + \frac{K \Delta \theta}{1 + K} \quad (8-42)$$

并在热交换的整个过程期间内保持不变。这可以将第四类边界条件转化为第一类边界条件，从而使热交换问题的解大为简化。

若第一物体的热活动性（即值 $b_1 = \sqrt{k_1 c_1 \rho_1}$ ）比另一物体的热活动性大很多，则 $K \gg 1$ ，而接触处的温度接近于第一物体的初始温度。否则， $K \rightarrow 0$ ，按公式 (8-42) 接触表面的温度近似于第二物体的初始温度。若热活动性相同，则 $K = 1$ ，而接触处的温度等于初始温度 $\theta_{1,0}$ 和 $\theta_{2,0}$ 的算术平均值。

当式 (8-37) 和式 (8-38) 中的时间 t 趋于无穷大时，可以求得，在稳定状态下两物体所有体积的温度将是一样的，并等于接触表面的温度。

例题 8.3 存在中间氧化层或润滑层时工具与热坯间的热接触

例题 8.2 描述了理想热接触情况下热坯和工具表面间的相互热作用，它仅在相当稀少的情况下（例如在真空中轧制无氧化面的坯料）才发生。为了估价接触物体间氧化层或润滑层的影响，我们稍许改变这个问题的条件，假设在 $x = 0$ 的平面上接触物体间存在热流阻力。

解 保留例题8.2 (图66) 的符号系统, 在提出边值问题时, 用如下的热阻条件来代替式 (8-35) 和 (8-36):

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = -\alpha_{1,2}(\theta_1 - \theta_2) \quad (8-43)$$



图66 存在中间层的热接触

式中 $\alpha_{1,2}$ 表示存在物质中间层时的热交换条件, 此中间层使第一物体表面向第二物体表面的热迁移发生困难。

在文献[12]中给出了这个边值问题的解。对第一物体, 可写出如下形式的温度分布:

$$\theta_1 = \theta_{1,0} - \frac{b_2 \Delta \theta}{b_1 + b_2} f(\kappa_1, h_1, x, t) \quad (8-44)$$

式中

$$f(\kappa_1, h_1, x, t) = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - \exp(hx + h^2 \kappa t) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + h\sqrt{\kappa t} \right) \quad (8-45)$$

足标“1”指第一物体, 所引用的热交换系数 h_1 按下式计算:

$$h_1 = \frac{\alpha_{1,2}(b_1 + b_2)}{k_1 b_2} \quad (8-46)$$

让我们把这个解同半无限体边值问题的解进行比较, 此半无限体在初始时刻 $t=0$ 加热到温度 $\theta_0 = \text{常数}$ 和在 $x=0$ 的表面上按牛顿定律 (第三类边界条件) 冷却:

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\alpha(\theta - \theta_0) \quad (8-47)$$

对这种情况，有

$$\theta = \theta_0 - \Delta\theta f(\kappa, h, x, t) \quad (8-48)$$

式中 $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_c$ ，而 $h = \alpha/k$ ——相对热交换系数。

由此可以得出结论，在两个半有限物体之间存在热阻时，求解这两个物体的热接触问题比较复杂，这个问题的解可以化为比较简单的两物体之一的冷却问题的解（第三类边界条件），其相对热交换系数按式（8-46）确定：

$$h = \frac{\alpha_{1,2}(b_1 + b_2)}{k_1 b_0} \quad (8-49)$$

并假定周围介质的温度等于

$$\theta_c = \frac{\theta_{1,0} b_1 + \theta_{2,0} b_2}{b_1 + b_2} \quad (8-50)$$

例题8.4 工具和坯料间摩擦热的分布

塑性变形过程中在接触表面上有热排出，这个热与摩擦力的功率成正比。在工具和工件间的这个热流分布事先是未知的。这个问题可以近似地化为下述问题。两个半有限物体温度为 θ_0 ，沿 $x=0$ 的面接触。当 $t=0$ 时，在接触表面上开始作用均匀分布的热源。热源的强度即单位时间内单位面积上放出的热量为 $a = \text{常数}$ 。研究每个物体的温度场和物体间热源的热流分配。

解 利用例题8.2的符号系统通过解下述方程组可求出温度分布：

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \quad (t > 0, x > 0)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \quad (t > 0, x < 0) \textcircled{\bullet}$$

此时边值条件如下：

$$\left. \begin{aligned}
 t=0 \quad \theta_1(x, 0) = \theta_2(x, 0) = \theta_0 \\
 \frac{\partial \theta_1(+\infty, t)}{\partial x} = \frac{\partial \theta_2(-\infty, t)}{\partial x} = 0 \\
 \theta_1(+0, t) = \theta_2(-0, t), \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = -a
 \end{aligned} \right\} \quad (8-51)$$

这个问题的解可用下述形式表示^[13]：

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2a_1}{b_1} \sqrt{\kappa_1 t} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \quad (x > 0) \quad (8-52)$$

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{2a_2}{b_2} \sqrt{\kappa_2 t} \operatorname{ierfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\kappa_2 t}} \quad (x < 0) \quad (8-53)$$

$$\operatorname{ierfc} u = \int_u^\infty \operatorname{erfc} \lambda d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - u \operatorname{erfc} u \quad (8-54)$$

a_1 和 a_2 ——由热源分别向第一和第二物体流出的热流，因而

$$a_1 + a_2 = a \quad (8-55)$$

由边界条件式 (8-51) 并假定解式 (8-52) 和 (8-53) 中 $x=0$ ，得到

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 \quad (8-56)$$

解方程组 (8-55) 和 (8-56)，可求得如下的热流分配：

$$a_1 = \frac{ab_1}{b_1 + b_2}, \quad a_2 = \frac{ab_2}{b_1 + b_2} \quad (8-57)$$

它们不随时间而变，并且完全取决于接触物体热活动性系数 b_i ($i=1, 2$) 的比值。

这样，我们提出的热传导理论的边值问题是：求域 D 内的温度分布，使之满足热传导方程 (8-21) 和边值 (初始的和边界的)

① 原文为 $\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2}$ 系 $\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2}$ 之误。——译者

条件。在数学物理学教程中证明，在某些附加假定条件下，存在所提出的问题的解，而且是唯一的和稳定的。换句话说，边值问题提得恰当。

思 考 题

1. 在给定应力和速度时，热传导方程属于何种类型方程？
2. 你知道热传导理论有什么样的边界条件？它们对应于哪类边界条件？
3. 两个半有限体理想热接触时表面温度按什么规律改变？
4. 什么是热活动性系数？
5. 在半有限体的接触表面上从热源放出之热是如何分配的？

8.3 关于连续介质力学边值问题的提法

8.3.1 综述

连续介质力学是数学物理学的一个分支。边值问题的概念和恰当提出边值问题的要求也完全适用于连续介质力学。

同时，连续介质力学的边值问题也有其独特之点。这些特点是：基本方程的非线性；流动区的复杂的几何形状；出现事先未知的边界段；描写边界条件时的一定的难度。这就希望简化问题的提法，并在不带来严重误差的情况下只描述所研究现象的最重要的方面。因此，我们得到所谓的经典介质的简化模型——如线弹性介质、理想和线粘性介质的简化模型。

利用几何对称性的条件和基本流动参数与时间实际无关的条件可以研究平面和轴对称流动，也可以研究稳定场，从而减少未知函数和自变量的数目。

8.3.2 初始条件和边界条件

关于在具有边界 S 的域 D 内连续介质运动的具体问题的提出意味着选择介质的数学模型，也就是写出相应的闭合方程组，给出外力和表述初始条件及边界条件。

描述初始时刻未知压力、温度、速度分布的方程属于初始条件。在某些情况下，为得出定解，仅仅有一些初始条件就完全足

够了（例如在无限域中的流动）。

广泛采用的关于物体初始无应力状态的假定就是给定初始条件的例子。

在边界 S （在任何时刻已知的或未知的）上的条件可分为力学边界条件和温度边界条件。后者包括描述物体边界上温度分布或散热条件的方程。

8.3.3 温度边界条件

在给定温度边界条件时，最大的困难是与塑性变形的金属和工具间的热传导过程的描述有关，处理这个问题的严格方法是同时计算这些物体的温度场，也就是协调边界面上的解来求解两个足够复杂的问题。

同时，考虑到缺乏接触表面上热物理常数值充分资料以及中间氧化膜和润滑膜对热传导过程的复杂影响，在许多情况下可以利用相当简单的半有限体接触问题（例题8.2~8.4）求解的结果，来近似描述边界条件。此时给定边界条件的方法归结如下。将工件的初始温度 $\theta_{1,0}$ 和工具的初始温度 $\theta_{2,0}$ 按物体体积均化（此处及以后足标“1”和“2”分别指工件和工具）。接触表面上的热交换可用两个半有限体（见图65）的热交换来模拟。

决定热交换的最重要的热物理常数是金属的热活动性系数 $b_1 = \sqrt{k_1 c_1 \rho_1}$ 和工具的热活动性系数 $b_2 = \sqrt{k_2 c_2 \rho_2}$ ，式中， k ——热传导系数； c ——热容量， ρ ——介质密度。

我们来研究三类最重要的边界条件。

1) 金属与工具之间的理想热接触（例题8.2）边界条件归为第 I 类边界条件：

$$\theta|_s = \theta_{2,0} + \frac{K \Delta \theta}{1 + K} \quad (8-58)$$

式中 $\Delta \theta = \theta_{1,0} - \theta_{2,0}$ ； $K = b_1 / b_2$ 。

2) 在接触表面间，按照与存在氧化层和润滑层（例题8.3）有关的规律（式8-30）出现热阻时的热交换边界条件写成第 II

类① 边界条件:

$$-\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_s = h(\theta - \theta_c) \quad (8-59)$$

式中, 相对热交换系数为

$$h = \frac{\alpha(b_1 + b_2)}{k_1 b_2} \quad (8-60)$$

而用下式确定周围介质的温度:

$$\theta_c = \frac{\theta_{1,0} b_1 + \theta_{2,0} b_2}{b_1 + b_2} \quad (8-61)$$

3) 接触表面间存在热阻和摩擦放热时的热交换 统一例题
8.3和例题8.4中得到的结果, 把边界条件归为第三类边界条件:

$$-\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_s = h(\theta - \theta'_c) \quad (8-62)$$

式中 h ——按公式 (8-60) 计算, 而

$$\theta'_c = \theta_c + \frac{\alpha b_1}{h(b_1 + b_2)} \quad (8-63)$$

这里, θ_c 按(8-61)的关系确定。 α 是在物体边界上的热源强度。

8.3.4 力学边界条件

力学边界条件可以是动力的(静力的)、运动的和混合的。

在物体边界上用应力矢量 $\vec{\sigma}^n$ 给出动力边界条件, 此应力矢量是边界点 M 和时间 t 的已知函数:

$$\vec{\sigma}^n \Big|_s = \vec{f}(M, t) \quad (8-64)$$

这样, 当连续介质运动时, 可以研究自由表面, 自由表面上的表面应力简化为大气压力。

如果介质处于平衡，则条件（式8-64）称为静力的。

若介质是刚-塑性的，则刚性区和塑性流动区之间边界上的动力（静力）条件可通过以表面应力表示的主矢量 \vec{Q} 和相对于某点 O 的主力矩 \vec{M} 给出，根据作用于刚性区的外力问题的条件， O 点是已知的（图67, a）。

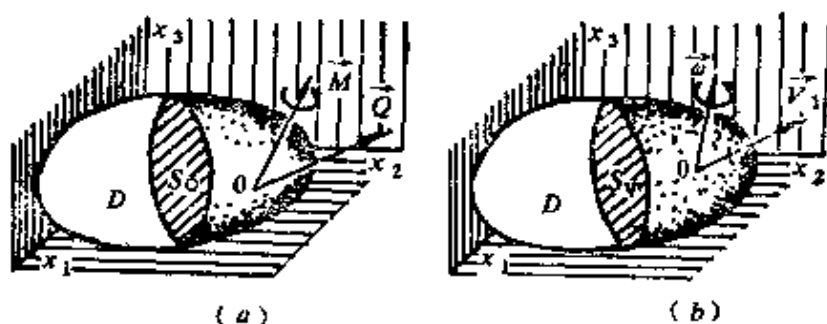


图67 刚性区和塑性流动区的边界条件

运动边界条件在物体表面上，可完全确定位移矢量 \vec{u} 或速度矢量 \vec{v} 。

设我们已知某段边界的位置和运动。如果材料质点沿边界的切向没有滑动，则发生质点对表面的“粘着”条件。这个条件可写成

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_{c.p.e.} &= \vec{u}_0 \\ \vec{v}_{c.p.e.} &= \vec{v}_0 \end{aligned} \right\} \quad (8-65)$$

粘着于被包绕物体的边界条件是粘性液体的特征。实验表明，在一定的条件下（例如轧制厚轧件时）工具与热金属之间的接触面上会发生粘着。

对于刚-塑性介质，将“刚性”区的运动同塑性流动区的速度场连续连接的条件也归结为这个条件（图67 b）。在这种情况下，可给出刚性区的平动运动速度 \vec{v} 和回转角速度 $\vec{\omega}$ 。

如果介质的质点可能沿着边界滑动，则在表面上就作用有较弱的包绕运动条件（非多孔性）：

$$u_{n(\text{спрв})} = u_{n(\text{лев})}; \quad v_{n(\text{спрв})} = v_{n(\text{лев})} \quad (8-66)$$

这种情况下,在边界上介质和边界表面质点仅仅法向速度(位移)分量一致。这个条件可以用接触表面上的某个外摩擦物理规律来补充。例如,对于理想液体来说摩擦切应力等于零;对粘性液体来说,这个摩擦切应力甚大,以致引起质点对表面的粘着。

一般情况下,外摩擦的规律把某些条件加到表面应力矢量的法向矢量与切向矢量间的关系上。

从而我们引出了混合边界条件,在此条件下物体表面上一部分对运动学施加了限制,一部分对表面应力施加了限制。让我们较详细地来叙述非常重要的接触表面摩擦问题。

8.3.5 金属压力加工时的外摩擦

大家知道,外摩擦是两个接触物体相对移动时在接触表面上发生的机械阻力。摩擦分为两类:滚动摩擦和滑动摩擦。金属压力加工的滑动摩擦是有特色的,就其性质而言,它与机械部件中的滑动摩擦有重大区别。希望较详细地了解这方面问题的读者可参考推荐的文献,我们只简略地叙述大量实验研究的主要结果。

我们研究位于接触表面上法线为 \vec{n} 的微面元。作用在面元上的表面应力矢量 $\vec{\sigma}^n$, 表示成正压力矢量 \vec{p} 和摩擦应力矢量 $\vec{\tau}$ 的矢量和 (图68) :

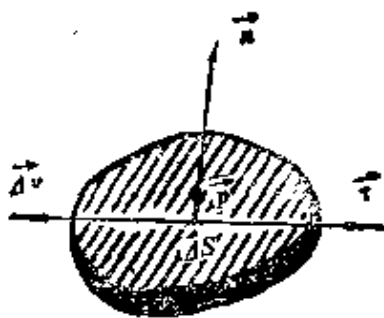


图68 接触面上的法向和切向应力

$$\vec{\sigma}^n = \vec{p} + \vec{\tau} \quad (8-67)$$

矢量 \vec{p} 指向表面的内法线方向,它的模 p 等于作用在单位面积上的法向力。

矢量 $\vec{\tau}$ 位于表面的切平面上，其方向与金属质点相对于工具的滑动矢量的方向相反。设 \vec{v} —— 质点速度； \vec{v}_1 —— 在所研究面上的工具速度； $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_1$ —— 滑动速度。此时

$$\vec{\tau} = -\tau \frac{\Delta\vec{v}}{|\Delta\vec{v}|} \quad (8-68)$$

式中 τ —— 摩擦应力矢量的模，一般简称为摩擦应力。

实验证明，摩擦应力与基本因素之间的关系有着复杂特征，这些基本因素是压力 p 、滑动速度 Δv 、总的相对位移 Δu 、工具的表面状态、工具及变形物体的化学成分和温度、存在于接触表面上的氧化皮或润滑剂。实际上使用两个简化的摩擦定律：

阿蒙顿-库仑 (Amonton-Codron) 定律

$$\tau = fp \quad (8-69)$$

式中 f —— 摩擦系数。

普朗特 (Prandtl) (齐别尔 (Siebel)) 定律

$$\tau = f\sigma_s \quad (8-70)$$

式中 σ_s —— 工件的屈服极限，而系数 f (它常常被有条件地称为摩擦系数) 象在式 (8-69) 中一样应该反映出上面列举的诸因素的影响。

式 (8-69) 常常用于描述金属冷压力加工时的外摩擦，而式 (8-70) 用于金属热加工。

必须指出，按照屈服条件，摩擦应力不能超过接触层上工件的屈服切应力 τ_s 。因此按下述方式写出式 (8-69) 是比较正确的：

$$\tau = \begin{cases} fp & \text{在 } fp < \tau_s \text{ 时} \\ \tau_s & \text{在 } fp \geq \tau_s \text{ 时} \end{cases} \quad (8-71)$$

由于接触层剧烈的塑性变形，所以这个区域的屈服极限可能大大超过该量在整个塑性流动区域的平均值。

8.3.6 典型的简化

自变量数目的减少和线性化的方法属于提出连续介质力学边

值问题时所采用的简化。

在某些实际可行的情况下，在相应的坐标系内连续介质的运动和在其中进行的物理过程可以认为是稳定的（定常的）。利用欧拉变量，可以去掉时间，也就是自变量数目减少一个。因为在描述定常过程的全部方程中去掉了对时间的偏导数，在这样的~~问题~~中没有初始条件，从而使解大为简化。

在许多问题中，如果正确地选择笛卡儿坐标系，则连续介质的运动可以认为是平面运动。流体力学、弹性理论和塑性理论已很好地研究了相应“平面”问题的解法。在这种情况下，可以顺利引用强有力的工具和复变函数理论方法及特征线法。

在轴对称问题中，采用圆柱坐标系可以不研究角坐标 ω ，仅仅保留坐标 r 、 z 、 t 作为本质宗量。这种情况下，给出解的所有方程和公式在绕 z 轴转动任何角度时都不改变。

线性化方法可以把求解非线性问题转化为迭代过程，在此过程中，每个阶段都求解某个线性问题（见第10.11章）。

思 考 题

1. 在连续介质边值问题的提法中包括什么？
2. 在给定温度边界条件的情况下可以进行什么样的简化？
3. 什么是力学边界条件？
4. 在接触表面上摩擦应力矢量的指向如何？
5. 在金属压力加工理论中采用哪些最简化的摩擦定律？

8.4 线弹性介质

8.4.1 边值问题

对于各向同性的弹性介质，可以提出两类问题：静力学问题和动力学问题。

静力学问题

在提出静力学问题时，可以忽略运动方程中的惯性项。

在连续介质充满的域 D 的每一点应该满足

1) 平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0 \quad (8-72)$$

2) 胡克定律

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \Delta + 2\mu \varepsilon_{ik} \quad (8-73)$$

式中

$$\Delta = \varepsilon_{pp} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\varepsilon_0$$

3) 应变和位移的关系

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

在包围域 D 的表面 S 上应满足应力或位移的边界条件。

一般可分为三类边界条件：

1) 在所有边界 S 上给定位移 (运动边界条件)

$$\vec{u} \Big|_S = \vec{f}_1(M)$$

式中 M —— 边界上的点。

2) 在所有边界 S 上给定应力 (静力边界条件)

$$\vec{\sigma}^n \Big|_S = \vec{f}_2(M)$$

3) 在部分边界 S_1 上给定位移，在其余表面 S_2 上给定应力 (混合边界条件)

$$S = S_1 + S_2$$

$$M \in S_1 \quad \vec{u} \Big|_{S_1} = \vec{f}_1(M)$$

$$M \in S_2 \quad \vec{\sigma}^n \Big|_{S_2} = \vec{f}_2(M)$$

在所有三种情况下都假定在物体中处处质量外力是已知的。

动力学问题

在提出弹性理论动力学问题时，将假设应力和位移是坐标和时间 t 的函数： $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(x, t)$ ， $u_i = u_i(x, t)$ 。在弹性体处处都应当遵守如下的方程：

1) 运动方程

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

2) 胡克定律

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \Delta + 2\mu \varepsilon_{ik}$$

3) 应变和位移的关系

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

表面 S 上的边界条件同样可能有三类:

1) 运动边界条件 $\vec{u} \Big|_S = \vec{f}_1(M, t)$

2) 动力边界条件 $\vec{\sigma}^n \Big|_S = \vec{f}_2(M, t)$

3) 混合边界条件 $S = S_1 + S_2$

$$M \in S_1, \quad \vec{u} \Big|_{S_1} = \vec{f}_1(M, t)$$

$$M \in S_2, \quad \vec{\sigma}^n \Big|_{S_2} = \vec{f}_2(M, t)$$

除了应该满足边界条件外, 还应该满足初始条件, 它们一般以等式形式给出:

$$\vec{u} \Big|_{t=0} = \vec{g}_1(\vec{x}), \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \vec{g}_2(\vec{x})$$

8.4.2 用位移表示的弹性平衡方程

如果把位移矢量 u_i 的三个分量作为未知量, 则用第一类边界条件(在物体的整个表面上给定位移)求解弹性理论的静力学问题是方便的。

若将应力化为应变, 则平衡方程(8-72)的形式如下:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{F} = 0 \quad (8-74)$$

与这个矢量方程相对应, 由拉梅首先提出并以他的名字命名的三个标量方程是:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 + \rho F_1 &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 + \rho F_2 &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3 + \rho F_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-75)$$

式中 $\Delta = 3\varepsilon_0 = \operatorname{div} \vec{u}$ —— 相对体积膨胀。

8.4.3 用应力表示的问题的提法

如果把应力张量的六个分量 σ_{ik} 作为未知量，用第二类边界条件（在物体整个表面上给定应力）求解弹性理论的静力问题是方便的。

三个平衡方程 $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0$ 是不充分的，必须求助于变形连续性条件式 (2-58)、式 (2-59)。因为后者包含应变 ε_{ik} ，所以必须利用式 (8-73) 通过应力表示它们。完成了这个代换，我们将可得到下述方程组〔贝尔特拉米 (Beltrami) 恒等式〕：

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_{ik} + 3 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (8-76)$$

式中 ν —— 泊松系数，而 σ_0 的大小为

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

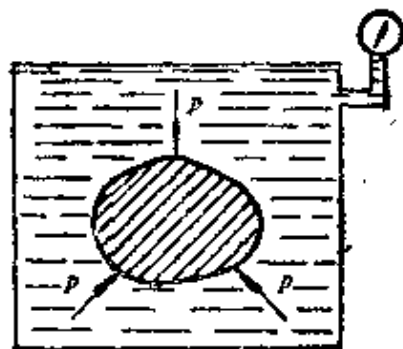


图69 弹性体的均匀压缩

这些方程仅仅在没有质量外力($F_i = 0$)的弹性平衡情况下才适用。

例题8.5 弹性体的均匀压缩

弹性的连续体从各向以恒定的外压力 p 压缩 (图69)。没有质量外力。试求应力分布。

解 所求的应力分布形如

$$T_o = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

式中 $p = \text{常数}$

容易看出, 平衡方程 (8-72) 和贝尔特拉米恒等式 (8-76) 都能得到满足。

在边界上有

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^n &= \sigma_{,i} n_i \vec{e}_i = -p \delta_{,i} n_i \vec{e}_i = -p(n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3) \\ &= -pn \end{aligned}$$

即表面外力应当是压力 p , 实际正是这样。

8.4.4 关于弹性理论的平面问题

广泛的一类弹性理论问题可以在求解的数学方面进行很大的简化。在这类问题中, 一个坐标轴, 例如 Ox_3 轴可以去掉, 并且

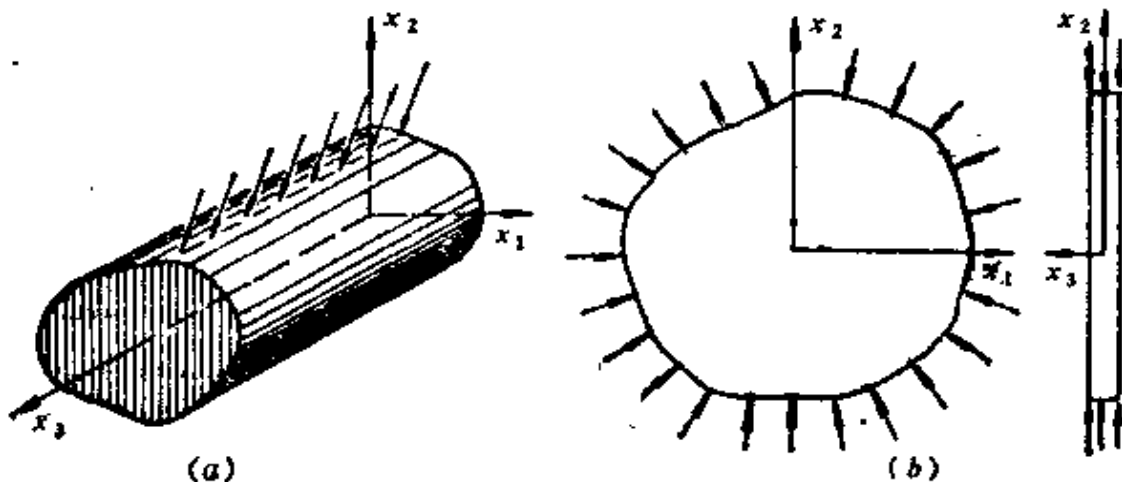


图70 弹性理论的平面问题

(a) 平面变形状态; (b) 推广的平面应力状态

所有现象认为是在 $x_1 O x_2$ 平面内发生。因此，我们得出弹性理论的平面问题。有重大实际意义的物体弹性平衡的下列三种情况就属于弹性理论的平面问题，即平面应变（图70,a），平面应力状态和推广的平面应力状态（图70,b）。我们研究前两个。

在平行于 $x_1 O x_2$ 平面的平面变形情况下，弹性体的静力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho F_1 = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho F_2 = 0 \\ \sigma_{11} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \sigma_{22} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \Delta = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8-77)$$

这个有六个未知量 σ_{11} 、 σ_{12} 、 σ_{22} 、 u_1 、 u_2 、 Δ 的方程组包含有六个方程且为闭合的。在问题求解之后按公式 (8-73) 确定 σ_{33} 的值。

引入如下的符号：

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \quad (8-78)$$

在平面应力状态的情况下，弹性体的静力学方程可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho F_1 = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho F_2 = 0; \\ \sigma_{11} = \lambda^* \Delta^* + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \sigma_{22} = \lambda^* \Delta^* + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \\ \sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \end{aligned}$$

$$\Delta^* = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

将这些方程同适用于平面应变情况的方程 (8-77) 比较, 可确认它们是一致的, 其差别仅仅在于用式 (8-78) 确定的常数代替了拉梅常数。

8.4.5 平面问题的应力函数

我们引入应力函数 $\Phi(x_1, x_2)$ (艾雷 (Airy) 函数) 并用它按下式 (见例题 5.5) 确定应力分量:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (8-79)$$

在这样给定应力时, 平衡方程 ($F_i = 0$) 恒能满足。

为了求出函数 $\Phi(x_1, x_2)$ 本身的形式, 将式 (8-79) 代入到方程 $\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$, 从如下的变形协调条件出发, 应力应当使这个方程满足:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

这个方程可以以展开的形式写成

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \bullet \quad (8-80)$$

因此, 平面问题的应力解应该归结为重调和方程 (8-80) 的积分。这时应该满足外廓条件:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n_1} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} n_1 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} n_2 \\ \sigma_{n_2} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} n_2 \bullet \end{aligned} \right\} \quad (8-81)$$

●原文为 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}$ 系 $\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4}$ 之误。——译者

●原文为 $-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} n_1$ 系 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} n_2$ 之误。——译者

如果引入横截面外廓弧上函数的导数的概念, 则这些方程可以简写。

由图71得到

$$n_1 = \cos \alpha = \frac{dx_2}{dS}, \quad n_2 = \sin \alpha = -\frac{dx_1}{dS}$$

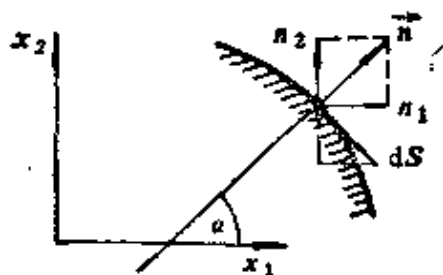


图71 公式(8-82)的推导

代入式(8-81)后, 得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n_1} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{dx_2}{dS} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{dS} = \frac{d}{dS} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_{n_2} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2}{dS} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{dS} = -\frac{d}{dS} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \textcircled{1} \end{aligned} \right\} \quad (8-82)$$

8.4.6 平面问题的多项式解

用半逆算法求解许多实用问题是方便的, 此时先给出应力函数的解析形式, 然后再选择某些常数, 使方程(8-80)和外廓条件得到满足。特别是, 如果取应力函数是 x_1 、 x_2 的完整多项式的形式并适当选择它的系数使之满足重调和方程(8-80), 则对于矩形件就可以得出许多有意思的解。

下面研究长为 $2l$, 高为 $2h$ 的薄片(图72)。以多项式的形式给出函数 Φ ,

①原文第二项中 $\frac{\partial x_1}{\partial S}$ 系 $\frac{dx_1}{dS}$ 之误。——译者

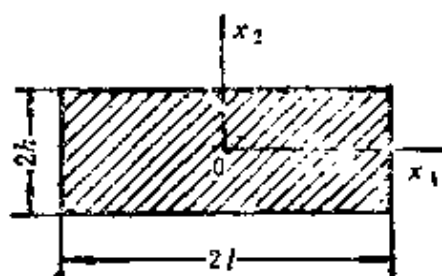


图72 弹性薄片

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} x_1^i x_2^k$$

容易看出，任意选择系数时，二次多项式

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2$$

都满足重调和方程 (8-80)。这种情况下可得到沿物体体积恒定的应力：

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = 2a_{02} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = 2a_{20} \quad \sigma_{12} = -a_{11}$$

三次多项式

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 + a_{20}x_1^2$$

+ $a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2$ 仍然将能满足重调和方程。按式 (8-79)，应力表示成：

$$\sigma_{11} = 6a_{03}x_2 + 2a_{12}x_1 + 2a_{20}$$

$$\sigma_{22} = 6a_{30}x_1 + 2a_{21}x_2 + 2a_{20}$$

$$\sigma_{12} = -(2a_{21}x_1 + 2a_{12}x_2 + a_{11})$$

即这些应力是坐标的线性函数

思 考 题

1. 为什么在弹性理论中常常谈到“平面问题”，而不确切地指出谈的是什么样的具体情况（平面应变，平面应力状态等等）？

2. 利用应力函数会得出什么样的边值问题？

8.5 理想不可压缩液体

8.5.1 边值问题

前面已指出, 应力张量的偏差部分等于零的介质称为理想液体。因此, 理想液体的应力张量仅仅由球张量部分组成。由此可以容易得出结论, 在任何截面上的应力指向该截面的法线方向而且大小都相等, 与截面的位向无关。

取符号 $p = -\sigma_0$, 把 p 的值称之为压力。选择正、负号时, 希望压力取正号, 因采用理想液体模型描述的介质的体元处于压缩状态。

将式 (1-53) 代入式 (5-13), 可得到所求的理想液体的运动方程或欧拉方程

$$-\text{grad } p + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (8-83)$$

方程组 (8-83) 不是闭合的, 因为按坐标将矢量方程 (8-83) 改写后, 仅有三个方程, 但要确定四个未知量 v_1 、 v_2 、 v_3 和 p 。

假定所研究的介质是不可压缩的, 即有使方程组闭合的方程

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (8-84)$$

求理想的不可压缩液体变形时所消耗的单位功率

$$\dot{A}_{T,i} = \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} = -\delta_{ik} p \dot{\xi}_{ik} = -p \dot{\xi}_{ii}$$

因为 $\xi_{ii} = \partial v_i / \partial x_i$, 所以 $\xi_{ii} = \text{div } \vec{v} = 0$, 且 $\dot{A}_{T,i} = 0$ 。这个等式意味着理想的不可压缩液体不消耗功率, 即耗散函数恒等于零。

为了由偏微分方程组 (8-83) 和 (8-84) 确定速度场 $\vec{v}(x, t)$ 和压力场 $p(x, t)$, 要求给定初始时刻的速度场和压力场 (初始条件):

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{g}_1(x), \quad p(x, 0) = g_2(x)$$

式中 \vec{g}_1 和 g_2 —— 矢径 x 以及液体体积边界条件的给定函数。所有这些条件应当互相匹配并不与方程组 (8-83)、(8-84) 矛盾。

仅当研究液体的不稳定运动时，才必须给定初始条件。

现转到边界条件上来。这些条件可分为运动边界条件和动力边界条件，如果它们将约束加到边界处的速度上，则为运动边界条件，如果它们是关于边界上压力的大小，则为动力边界条件。

1) 包绕固定固体的运动条件可用如下形式表示：

$$v_n |_S = 0 \quad (8-85)$$

式中 v_n —— 速度在固体和液体接触面 S 的法向 n 上的投影，也就是说速度方向是沿这个接触面的切向。

2) 由 (8-85) 和理论力学中速度的合成原理，容易得到包绕运动固体的运动条件。在这种情况下

$$v_n |_S = (v_n)_T \quad (8-86)$$

式中 $(v_n)_T$ —— 物体速度在边界面 S 法线上的投影。

3) 在液体自由表面上的动力条件

$$p |_S = p_0 \quad (8-87)$$

式中 p_0 —— 大气压力。

应当指出，暂时还没有液体流动三维问题的一般解法。保角映射法（见第九章）是解平面问题的最有效方法。

8.5.2 汤姆逊 (Thomson) 定理

定理8.1: 在有势体积力的作用下理想液体运动时，速度沿封闭物质回路的环量不随时间而变（称作速度环量守恒定律）（图73）。

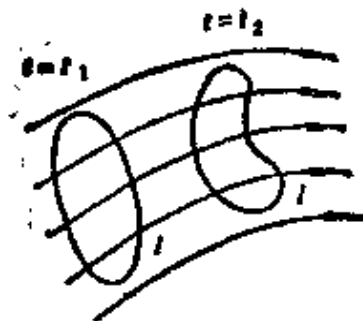


图73. 物质回路的运动

体积力有势意味着存在一标量函数 $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ ，使得 $\vec{F} = -\text{grad}u$ 。

对于所研究的情况，欧拉方程可写作

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + u\right)$$

证明以下两点：

1) 如果理想液体存在定常流动，并且这个无限流动是均匀的，则流动是有势的，即速度场是有势的。

2) 如果理想液体非定常流动，在某时刻速度场是有势的，则在任何随后的时刻速度场也是有势的。

在有势流动时，建立速度场十分容易，因为这可归结为求唯一的函数 $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ ，即速度场的势。

如果考虑到不可压缩性条件 (8-84)，则为了确定 φ 得到拉普拉斯方程：

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (8-88)$$

如果速度场是定常的，则式 (8-85)、式 (8-86) 类型的 (见8.5节) 包绕固体的运动边界条件可写成

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = 0 \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = (v_n)_r \quad (8-89)$$

其中利用了关系式 $v_n = v_i l_i = (\partial \varphi / \partial x_i) l_i = \partial \varphi / \partial n$ 。

这就把确定势 φ 的问题归结为数学物理中的一个经典问题——诺伊曼问题。

理想的不可压缩液体平面无旋流动时速度场的建立可归结为求复势 (见9.8节)。

思 考 题

1. 在理想液体中受载面元上的压力是否取决于面元的方位？
2. 理想液体运动时，功率耗散等于什么？
3. 怎样计算沿物质回路的速度环量？
4. 怎样表述汤姆逊定理？
5. 什么样的流动称为有势的？

8.6 线粘性不可压缩介质

8.6.1 边值问题

线粘性介质应力偏差张量与应变速率偏差张量成比例，即

$$D_{\sigma} = 2\mu' D_{\varepsilon} \quad (8-90)$$

且 $\mu' = \text{常数}$

常数 μ' 称为介质的粘性系数。由式 (8-90) 容易导出切应力强度 T 与切应变速率强度 H 成比例

$$T = \mu' H$$

线粘性介质的应力张量可以分解为偏差张量部分和球张量部分：

$$T_{\sigma} = D_{\sigma} + \sigma_{\sigma} I = D_{\sigma} - pI$$

式中 $p = -\sigma_{\sigma}$ ，与理想液体情况相同，也将它的大小称为压力。显然， $\text{div} T_{\sigma} = \text{div} D_{\sigma} - \text{div}(pI)$ 。因此，利用理想液体时球张量散度的结论（见1.3节）和例题3.3的解，线粘性介质的运动方程可写成纳皮尔-斯托克斯 (Napier-Stokes) 方程的形式

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu'}{\rho} \nabla^2 \vec{v} + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (8-91)$$

如果将不可压缩性方程

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (8-92)$$

添加到式 (8-91)，则式 (8-91)、式 (8-92) 就形成了求解速度场 $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ 和压力场 $p(x_1, x_2, x_3, t)$ 的四个方程组成的闭合方程组。

求速度场 $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ 和压力 $p(x_1, x_2, x_3, t)$ 可归结为解方程组 (8-91) 和 (8-92)。解这个微分方程组将含有任意函数，为确定这些函数，必须知道初始条件和边界条件。

初始条件写作

$$\vec{v}(\underline{x}, 0) = \vec{g}_1(\underline{x}), \quad p(\underline{x}, 0) = g_2(\underline{x})$$

式中 \vec{g}_1, g_2 —— 矢径 \underline{x} 的给定函数。

显然，它不应当与方程组 (8-91) 和 (8-92) 矛盾。仅当研究液体的不稳定运动时，才必须给出初始条件。

边界条件可分为运动边界条件和动力边界条件。它们包括：

1) 包绕固定固体的运动条件（粘性液体质点粘着在被包围物体的表面上）：

$$\vec{v} \Big|_s = 0$$

2) 包绕运动固体的运动条件，它也归结为粘性液体质点对物体表面的粘着条件：

$$\vec{v} \Big|_s = v_T$$

3) 在自由表面上的动力条件：

$$p_n = p_a, \quad \tau = 0$$

式中 τ ——在表面 S 上应力矢量的切向分量； p_a ——大气压力。

液体对固体的粘着条件是线粘性液体包绕固体的边界条件，换言之，在液体和固定固体边界上的流动速度等于零。

由于全导数 $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 中的对流项，方程组 (8-91) 和 (8-92) 是非线性的，所以这个方程组的积分一般说来是很复杂的问题。迄今为止这个问题还没有一般解法，得到的结果也仅仅只包括各种局部情况。

8.6.2 关于粘性液体的无旋运动

设质量外力有势，即 $\vec{F} = -\text{grad}u$ 。

利用公式

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

将纳皮尔-斯托克斯公式 (8-9) 变形。

结果得到葛罗米柯-拉姆波 (Громек-Lamb) 型的线粘性介质的运动方程。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \mu' \nabla^2 \vec{v} - \text{grad} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \quad (8-93)$$

假定在有限域 D 中转动角速度矢量 $\vec{\omega}$ 等于零, 即流动是有势的,

$$\vec{v} = \text{grad} \varphi \quad (8-94)$$

由不可压缩性条件得出, 势 φ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。在这种情况下 $\nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 \text{grad} \varphi = \text{grad}(\nabla^2 \varphi) = 0$, 即分量 v_i 是调和函数。

结果我们得到适用于理想液体无旋运动的方程

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \quad (8-95)$$

而考虑到式(8-94), 则有 $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \text{grad}(\frac{\partial \varphi}{\partial t})$ 和

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0 \quad (8-96)$$

由此, 对于任意流线可得到理想液体运动方程的拉格朗日-柯西积分:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = f(t) \quad (8-97)$$

对于定常流动 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ 和 $f(t) = \text{常数}$, 结果得到伯努利(Bernoulli)积分:

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C \quad (8-98)$$

这样, 关于无旋的假设可以满足粘性介质的运动方程, 这种情况下速度和压力的分布不取决于粘性系数且同理想液体运动的解一致。

但是, 除了特殊的情况以外, 在有势流动时不可能满足液体对被包绕固体粘着的边界条件。理想液体绕圆柱体的纯环形流动就属于这种情况。此种流动的流线将是包括圆的给定外廓在内的同心圆。由粘着条件得出, 圆柱应当转动。

例题8.6 刚性表面间粘性层的流动

彼此间距 $2h$ 甚小的两个平行平面间不可压缩的粘性液体发生缓慢的稳定运动。在平面之间放置同一高度 $2h$ 的圆筒形障碍物(图74)，忽略惯性力和质量外力，试求速度场和压力场。

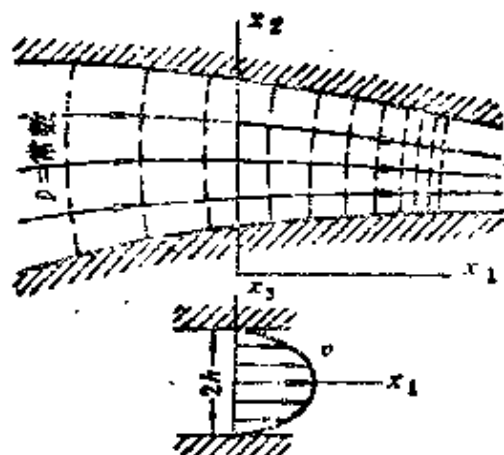


图74 刚性表面间粘性层的流动

解 将坐标平面 x_1Ox_2 放在中心平面上，而轴 x_3 垂直于边界平面。假定认为运动发生在与 x_1Ox_2 平行的平面上，即 $v_3 = 0$ 。

方程(8-91)，(8-92)取下述形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \mu' \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \mu' \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= 0 \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-99)$$

速度分量 v_1 和 v_2 应当满足粘着条件

$$x_3 = \pm h \text{ 时, } v_1 = v_2 = 0 \quad (8-100)$$

我们来研究流动区中压力 p 的分布。由方程组(8-99)中的第三个方程得到

$$p = p(x_1, x_2)$$

将方程组(8-99)的第一个方程对 x_1 微分，第二个方程对 x_2 微分，并将结果相加。得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = \mu' \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] \end{aligned}$$

因为 $\partial v_1 / \partial x_1 + \partial v_2 / \partial x_2 = 0$, 压力 p 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0 \quad (8-101)$$

容易相信 (例如进行代换), 下面的速度场满足方程(8-99)和边界条件(8-100):

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -\frac{h^2}{2\mu'} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left[1 - \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \\ v_2 &= -\frac{h^2}{2\mu'} \frac{\partial p}{\partial x_2} \left[1 - \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (8-102)$$

沿平面 $x_1 O x_2$ 的法向取平均速度

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} v_1 dx_3 = -\frac{h^2}{3\mu'} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \tilde{v}_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} v_2 dx_3 = -\frac{h^2}{3\mu'} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{aligned}$$

这时 $\partial \tilde{v}_1 / \partial x_1 + \partial \tilde{v}_2 / \partial x_2 = 0$

速度场 $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ 相应于理想的不可压缩介质的某一虚构的平面无旋运动, 其势为

$$\varphi = -\frac{h^2}{3\mu'} p \quad (8-103)$$

并且等势线与等压线一致。

思 考 题

1. 在线粘性液体运动时应力偏量和应变速度偏量之间有什么联系?
2. 怎样表述线粘性介质运动的边值问题?
3. 线粘性介质的流动是否可能是有势的?
4. 在刚性表面间的粘性层流动时能够确立什么样的相似关系?

推荐的参考文献

- Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд. 2-е. М., «Высшая школа», 1968. 512 с. с ил.
- Громов Н. П. теория обработки металлов давлением. Изд. 2-е. М., «Металлургия», 1978. 360 с. с ил.
- Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970. 710 с. с ил.
- Крагельский И. В. Трение и износ. М., Машигиз, 1962. 480 с. с ил.
- Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964. 830 с. с ил.
- Леванов А. Н., Колмогоров В. Л. и др. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1976. 416 с. с ил.
- Линейные уравнения математической физики. Справочник. Под ред. С. Г. Михлина. М., «Наука», 1964. 368 с. с ил.
- Лойцманский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 3-е. М., «Наука», 1970. 904 с. с ил.
- Лыков А. В. теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967. 600 с. с ил.
- Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М., «Наука», 1966. 707 с. с ил.
- Содов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I. Изд. 3-е. М., «Наука», 1976. 535 с. с ил.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Изд. 6-е. М., «Наука», 1977. 735 с. с ил.
- Шеоецко К. Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением. М., «Высшая школа», 1970. 352 с. с ил.

第9章 边值问题的解法

研究连续介质中所发生的过程（例如压力加工时金属的塑性流动）的数学模型时，在提出边值问题之后，必须转向过程的数学研究。为此需得到边值问题的解——精确的或近似的。

通常，对于最粗糙和不复杂的模型，只有问题的最简单的提法才可以得到精确的解。实际上，必须涉及到介质在复杂几何形状的区域内的流动和温度的不均匀分布。模拟金属与合金真实性能的介质流变性质的描述以及物体接触表面上的摩擦条件和热传导的描述，也都引起很大的困难。所有这些都必须采用近似法并在每秒计算几十万次甚至几百万次的现代电子计算机（ЭВМ）上解题。

但是以为近似解法就能完全排除解析方法是没有根据的。对于某些理想化了的问题（例如热传导理论中的某些问题，用滑移线法得到的个别解）所得到的精确的解析解，可以充分描述所研究的过程的机制以及它与基本参数的关系。这也使得有可能更好地制订近似的计算方法。

在编制电子计算机程序以及为了控制计算精度，可利用精确解起试验作用。这样，在研究工艺过程时的近似和精确解法应当合理地结合在一起。不管怎么说可以认为边值问题的近似解法现时毕竟还是数学模拟金属压力加工过程的最有前途的方法。

本章对数学的有关部分作简要介绍，这些部分在研究塑性流动理论边值问题的有效解法时得到了广泛的应用，但并没有包括在金属压力加工专业的大学生所学的高等数学传统教程中。

求解边值问题时，研究者碰到的基本问题是必须单值地确定近似解对精确解的近似程度、近似解的结构、解析及其对精确解的收敛程度。在现代数学发展最快的一个分支——泛函分析范围内可成功地做这一点。在计算数学中采用泛函分析可以清晰地确定近似法的方案、解的存在条件、它的唯一性和收敛性，并可使近似解误差的估计有所依据。在本章中我们只可能讲到泛函分析

个别的最重要的部分。其中包括度量空间、赋范空间和希尔伯特空间的理论的基本概念。

从泛函分析的角度出发，在这一章内叙述边值问题的如下一些已知解法，如迭代和投影法、分离变量法、变分法。还将研究复变函数理论方法和复势理论。希望更深入地了解上述方法的读者可参考本章末推荐的文献。

9.1 泛函空间、算子和泛函

9.1.1 集

我们把某种性质对象的总和或集合理解为集

例如，所有实数的集 N ，线段 $[a, b]$ 的点集，在线段 $[a, b]$ 上有定义和连续的所有函数的集 $C[a, b]$ 。

组成集每个对象称为这个集的元素。如果集用字母 E 表示，而这个集任意元素一般用符号 x 表示，则写作 $E = \{x\}$ 。如果 a 是集 E 的元素，则写作 $a \in E$ （读作 a 属于 E ）。如果在集 E 的元素中间没有遇到对象 a ，则写作 $a \notin E$ （读作 a 不属于 E ）。

让我们研究两个集 E 和 D 。如果集 D 的每个元素也包括在集 E 中，则说集 D 包括在集 E 中或者说 D 是 E 的子集。在此情况下写作 $D \subset E$ （和用记号 \in 写时一样读）。

如果两个集是由同样的元素组成，也就是由 $x \in D$ 得到 $x \in E$ ，反之由 $y \in E$ 得到 $y \in D$ ，则称集 D 和集 E 相等。在这种情况下写作 $D = E$ 。

9.1.2 度量空间

若称作 x 和 y 间距离的非负实数 $\rho(x, y)$ 与集 E 的每一对元素 x 和 y 相对应，且 $\rho(x, y)$ 满足如下的条件（度量空间公理）：

- 1) 只当 $x = y$ 时， $\rho(x, y) = 0$ ；
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ （对称公理）；
- 3) 对任何三个元素 x, y, z ， $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ （三角形公理），则称集 E 为度量空间。

此时说在空间 E 中规定了度量。度量空间的元素一般称为它的点。

位于度量空间 E 中且元素间的距离和在 E 内一样的任何集 D 本身也是度量空间并称作空间 E 的子空间。

应当指出，度量空间公理系统表达一般三维欧氏空间点间距离的最普遍的性质：距离总是非负的并仅在重合点间等于零；确定其间距离的两点地位完全相等。最后，三角形公理表明，由点 x 到 y 的直线路程不应大于经过第三点 z 由 x 到 y 的路程。

9.1.3 序列的极限

距离的存在可以在度量空间中引出极限的概念。

如果当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ ，则把度量空间 E 的元素 x 称作属于 E 的元素序列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 的极限。在此情况下将写作 $x_n \rightarrow x$ 。

不管收敛于极限的点列 x_n 是什么样的，只要它的极限包括在 M 中，则属于 E 的集 M 称为闭合的。

我们还给出极限点的概念，在度量空间理论中，这个概念有很大的意义。令 $D \subset E$ 是任一个集。如果存在由无限多种不同点组合的点列 $x_n \in D$ ，且 $x = \lim x_n$ ，则称 $x \in E$ 的点为集 D 的极限点。

现在可给出闭合集的新定义，即它是包含自己所有极限点的集合。

对于任意集 $D \subset E$ 存在闭合运算，此运算包括把集 D 的所有收敛的点列的极限合并到该集上。例如在实数 R 的空间上线段 $a \leq x \leq b$ 将是间隔 $a < x < b$ 的闭合。

度量空间的例子：

1) 实数 R_1 的集。若 $x, y \in R_1$ ，则认为

$$\rho(x, y) = |x - y|。$$

度量公理的正确性是很明显的。在 R_1 空间的收敛是数序列的一般收敛。

2) 在线段 $a \leq t \leq b$ 上指定的所有连续函数 $x(t)$ ① 的空间 $C[a, b]$, 对任何两元素 $x, y \in C[a, b]$ 具有距离:

$$\rho(x, y) = \max |x(t) - y(t)|, \quad a \leq t \leq b.$$

这样, 在 $C[a, b]$ 中的距离是一个函数对另一个函数的最大偏离。

可以确信, 度量公理得到了满足。

在 $C[a, b]$ 中的收敛是在线段上的均匀收敛。

3) 具有平方度量的连续函数空间 $C^2[a, b]$ 。这个空间和上面研究的例子一样, 也用在线段 $[a, b]$ 上连续的所有函数的总和来表示。但是在它上面的距离却用另外的方式来确定,

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt}$$

度量空间的公理 1 和 2 是无疑义的。公理 3 在泛函分析的任何教程中都可给出证明。

设 $x_n(t) \in C^2[a, b]$ 收敛于 $x(t) \in C^2[a, b]$, 即

$$\int_a^b [x_n(t) - x(t)]^2 dt \rightarrow 0$$

于是就说函数序列 $\{x_n(t)\}$ 平均收敛于函数 $x(t)$ 。

如果选择了度量空间即选择了集 X, Y , 并在它们中间确定了度量, 我们就来约定在哪一类函数中可以取边值条件和求边值问题的解。因此, 在具体问题中, 空间的选择应首先由问题的物理意义来确定, 其次才是由纯数学考虑来确定 (例如证明收敛的可能性)。这样, 当计算变形体内的应力和它的断裂条件时, 必须使近似解均匀地收敛于精确解, 而平均接近是不充分的: 在小区域内应力超载就会引起物体的断裂。相反, 当计算力能参数时, 平均收敛就可以完全满足。因为内应力功率是由沿流动区域 TH 式的积分求出的。

9.1.4 度量空间的完备性

①原书误写为 x, t 。——译者

如果度量空间 E 的元素序列 $\{x_n\}$ 满足柯西准则, 即对任何数 $\varepsilon > 0$ 可找到这样的数 N_ε , 使 $n, m \geq N_\varepsilon$ 时 $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, 则称此序列为自身收敛序列或基本序列。

由三角形公理可得到, 任何收敛序列都是基本序列。

对于任意度量空间来说, 相反的论点是不正确的。存在着这样的度量空间, 在此空间中存在自身收敛的序列, 但不收敛于任何的极限。

如果在空间 E 上任何基本的序列都收敛, 则这个空间称作完备的空间。

9.1.5 致密集

由分析可知, 从数的任何有界无穷序列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 中可分出 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$ 的子序列, 此子序列收敛于最终的极限〔波尔查诺-外尔斯特拉斯 (Bolzano-Weierstrass) 定理〕。

有界的概念可以推广到度量空间致密性的概念上去, 也就是如果从任何无穷点列 $x_n \in D$ 中分出在 D 中收敛于某一极限的子序列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$, 则属于度量空间 E 的集 D 称作致密的。特别是, 如果空间 E 本身也具有这样的性质, 则它就称作致密空间。

9.1.6 线性系统

在研究度量空间时, 我们研究了与距离、收敛性和序列有关的问题。

但是, 如果除空间的度量外, 在其上还规定代数运算, 那末就可建立相当丰富的理论。

设 E 是由任意元素组成的集。在其中我们规定两个运算, 元素的加法和元素与数的乘法。这就意味, 对两个 $x, y \in E$ 的元素可单值地确定属于 E 的元素, 此元素称作它们的和, 并且加法运算满足线性系统的第一组公理:

- 1) $x + y = y + x$ ——交换律;
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ ——结合律;

3) 存在单值确定的元素 0 ，任何属于 E 的 x 使得 $x + 0 = x$;

4) 对于 $x \in E$ 的每个元素存在同一空间单值确定的元素 $(-x)$ ，以使 $x + (-x) = 0$ 。

代替 $x + (-y)$ 将写作 $x - y$ 。

元素 0 称为零元素，或空间 E 的零，元素 $-x$ 称作相反的元素。

其次，对于任何的 $x \in E$ 和任何的实数 λ 单值地确定元素 $\lambda x \in E$ ，后者称作 x 与数 λ 的乘积，并满足第二组公理：

1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ——乘法结合律；

2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ， $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ——两个分配律；

3) $1 \cdot x = x$ 。

满足上述公理的集 E 称作线性系统或线性的。

举例如下：

1) 实数 R_1 的总和构成线性系统。

2) 在线段 $a \leq t \leq b$ 上给定的所有连续函数 $x(t)$ 的空间 $C[a, b]$ 元素的总和也形成线性系统。

此时，对于函数和通常一样求和与求积：

$$z = x + y \text{ 意味着 } z(t) = x(t) + y(t);$$

$$z = \lambda x \text{ 意味着 } z(t) = \lambda x(t)。$$

恒等于零的函数是零元素。

9.1.7 线性相关

在线性系统中可以引用元素线性相关和线性无关的概念。如果由等式

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \quad (9-1)$$

得出

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0。 \quad (9-2)$$

则线性系统的元素 x_1, x_2, \cdots, x_n 称为线性无关的。

如果存在不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，使 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ ，则元素 x_1, x_2, \cdots, x_n 称为线性相关的。例如，

此时设 $\lambda_n \neq 0$ 。于是

$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} x_{n-1}。 \text{用符号}$$

$$-\frac{\lambda_k}{\lambda_n} = \alpha_k, \text{ 则得到}$$

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}。 \quad (9-3)$$

此时就说元素 x_n 是元素 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的线性组合。

9.1.8 赋范空间

我们现在引入范数的概念。如果实数与 $x \in E$ 的每个元素相对应，此实数称为该元素的范数，用 $\|x\|$ 表示，并假设满足如下的条件（范数公理）：

- 1) $\|x\| \geq 0$ ，并且只在 $x=0$ 时 $\|x\|=0$ ；
- 2) 对任何 $x, y \in E$ ， $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ （三角形公理）；
- 3) 对任何 $x \in E$ 和任何数 λ ， $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ，

那末，线性系统 E 称作赋范空间。

对任何 $x, y \in E$ ，假设元素间的距离等于它们之差的范数：

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (9-4)$$

则在线性赋范空间中可引用度量。

容易检查引用的距离满足所有度量公理。因为 $x-0=x$ ，所以

$$\|x\| = \|x-0\| = \rho(x, 0) \quad (9-5)$$

即任何元素的范数等于它与零的距离。

其范数等于 1 的元素称为赋范的。

举例：

1) 如果规定 $\|x\| = \max |x(t)|$ ， $a \leq t \leq b$ ，空间 $C[a, b]$ 可变为赋范的。

2) 在 $C^2[a, b]$ 空间中可用如下方法确定范数：

$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt}$$

引入范数之后元素序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 可表示为

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (9-6)$$

这样确定的收敛称作依范数的收敛。

在应用任意度量空间给出的完备性定义时，如果它的元素的全部序列有极限，则我们将把赋范空间称为完备的巴拿赫 (Banach) 空间。

9.1.9 标量积

在线性系统中引用范数的最方便的方法之一就是在其中给定标量积。设 E 是线性系统，设用 (x, y) 表示的实数与该系统的任何两个元素 x 和 y 相对应 (其中也可以有 $x = y$)，并满足如下条件 (标量积公理)：

- 1) $(x, y) = (y, x)$;
- 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
- 4) 对任何 $x \in E$, $(x, x) \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, $(x, x) = 0$ 。

数 (x, y) 称作标量积。利用这个概念我们在系统 E 中确定元素的范数。为此采用下述规定是充分的，即

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)} \quad (9-7)$$

这样，在线性系统 E 中标量求积得范数，也就是把这个系统转变成了赋范空间。现设得到的空间是完备的。换言之在这个空间中每个基本序列都有极限。

在其中用标量积得到范数的完备赋范空间 H 称为希尔伯特 (Hilbert) 空间。

9.1.10 空间 $L_2(\Omega)$

我们研究 m 维欧氏空间在某个有限域 Ω 上所确定的函数 $\varphi(P)$ 的集，并且 $P \in \Omega$ 。如果函数取决于两个独立变量，则这个域将是平面的 ($m = 2$)，当 $m = 1$ 时变为直线段，若 $m = 3$ ，将是空间域。

假定，函数是可平方求和的，即存在积分 (按勒贝格 (Lebes-

gue)积分) ①:

$$\int_{\Omega} \varphi(P) d\Omega \quad (9-8)$$

我们来表示这样的函数空间 $L_2(\Omega)$ 。在其中按如下法则进行加法运算:

当 $P \in \Omega$ 时, $\varphi + \psi = \varphi(P) + \psi(P)$; $\lambda\varphi = \lambda\varphi(P)$ 。

线性系统定理得到满足。如果 $\varphi(P)$ 和 $\psi(P)$ 是可平方求和的, 则由不等式

$$|a\varphi + b\psi|^2 \leq (a^2\varphi^2 + b^2\psi^2)$$

和勒贝格积分的性质可以得到, 函数 $\varphi + \psi$ 和 $\lambda\varphi$ 也是可平方求和的。

我们用如下方法确定在 $L_2(\Omega)$ 中的标量积:

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(P)\psi(P) d\Omega \quad (9-9)$$

存在积分式 (9-9)。这可由勒贝格积分和不等式 $\varphi\psi \leq \frac{1}{2}$

$(\varphi^2 + \psi^2)$ 得出。

可以看出, 标量积公理得到了满足。在空间 $L_2(\Omega)$ 中的范数用如下等式确定:

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} \varphi^2(P) d\Omega$$

现在我们研究在 $L_2(\Omega)$ 中求极限的运算。如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [\varphi_n(P) - \varphi(P)]^2 d\Omega \rightarrow 0$$

则序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于元素 $\varphi \in L_2(\Omega)$ 。

这样的收敛称为平均收敛。

①勒贝格积分的概念比黎曼 (Riemann) 积分的概念更一般。与黎曼积分不同, 勒贝格积分实际上对每个有界函数都存在。此时可按黎曼积分的所有函数也必须按勒贝格积分, 并且它的两个积分彼此相等。详见文献[16]。

空间 $L_2(\Omega)$ 的完备性可由李奇 (Ricci)-费谢尔 (Fisher) 定理得到:

定理 9.1 如果在 Ω 上可平方求和的函数 $\varphi_n(P)$, $n=1, 2, \dots$ 满足条件

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [\varphi_k(P) - \varphi_n(P)]^2 d\Omega = 0$$

(即序列 φ_n 是基本序列), 则在 Ω 中存在可平方求和的函数 $\varphi(P)$, 序列 $\varphi_n(P)$ 平均收敛于 $\varphi(P)$ 。

这样, 空间 $L_2(\Omega)$ 是希尔伯特空间。

9.1.11 克莱姆 (Gramer) 行列式

在谈到线性系统时, 我们给出了线性相关的定义。按这个定义, 如果存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 不全为零, 且有

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n = 0 \quad (9-10)$$

则元素 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为线性相关的。

如果在 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ 时, 等式 (9-10) 才是可能的, 则称元素 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是线性无关的。存在如下的定理。

定理 9.2 为了使希尔伯特空间的元素 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是线性相关的必要和充分的条件是克莱姆行列式等于零, 即

$$\Delta = |(\varphi_m, \varphi_k)| \quad (m, k=1, 2, \dots, n) \quad (9-11)$$

9.1.12 希尔伯特空间的维数

如果在希尔伯特空间 H 中存在有限的元素 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, 任何元素 $\varphi \in H$ 都可以通过这些元素表示成它们的线性组合, 则希尔伯特空间 H 称为有限维空间。此时元素 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 可以认为是线性无关的。

实际上, 如元素 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是线性相关的, 则从其中连续去除可表示为其余元素的线性组合的哪些元素, 这样便可达到剩下的系统是由线性无关元素组成, 而每个元素 $\varphi \in H$ 仍然表示成它们的线性组合。

线性无关元素 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 的总和称为空间 H 的基底。

除了给定的基底外，在 H 中还可以找到许多另外的基底。在有限维的希尔伯特空间的所有基底中的元素数是相同的。这个数称为空间 H 的维数。如果维数等于 n ，则空间 H 称为 n 维的。

如果在希尔伯特空间 H 内存在不拘如何多的线性无关的元素数，则空间称为无限维的。

9.1.13 正交性

如果希尔伯特空间 H 的两个元素 φ 和 ψ 的标量积等于零，则称这两个元素是正交的（用 $\varphi \perp \psi$ 表示）。成对正交元素的有限或无限序列称为正交系统。此外，如果正交系统的元素是赋范的（即每个元素的范数等于1），则系统称为就范正交系统。

对就范正交系统 $\{e_k\}$ 有如下的关系：

$$(e_m, e_n) = \delta_{mn} \quad (9-12)$$

为了把正交系统化为就范正交系统，只要把系统的每个元素除以它的范数就可以了。由标量积的性质可以得到：

- 1) 零元素 0 与任何 $\varphi \in H$ 正交；
- 2) 仅当 $\varphi = 0$ 时， $\varphi \perp \psi$ ；
- 3) 若 $\varphi \perp \psi_n (n=1, 2, \dots)$ 和 $\psi_n \rightarrow \psi$ ，则 $\varphi \perp \psi$ 。

这可由标量积的连续性得出。

在希尔伯特空间内推广的毕达哥拉斯 (Pythagoras) 定理是正确的，此定理是若 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots$ （总和可以是有限的或无限的）且所有加数成对正交，则

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2 + \dots$$

设 e_1, e_2, \dots, e_n 是就范正交系统，它的克莱姆行列式为 $\Delta = |\delta_{ik}| = 1$ 。

这样，元素 e_1, e_2, \dots, e_n 是线性无关的。

9.1.14 施密特 (Schmidt) 正交化

设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是希尔伯特空间元素的有限或无限序列并设在任何 n 时元素 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是线性无关的。

我们在两个阶段内构成函数的就范正交系统。第一阶段先规定：

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_2 - \alpha_{2,1}\psi_1, \\ \psi_k &= \varphi_k - \alpha_{k,1}\psi_1 - \alpha_{k,2}\psi_2 - \cdots - \alpha_{k,n-1}\psi_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (9-13)$$

然后构成正交系统 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 。

我们求系数 α_{ik} 。为此把第二方程的两边标量地乘以 ψ_1 ：

$$(\psi_1, \psi_2) = (\varphi_2, \psi_1) - \alpha_{2,1}(\psi_1, \psi_1)。$$

因为系统 ψ_k 正交，所以 $(\psi_1, \psi_2) = 0$ 和

$$\alpha_{2,1} = \frac{(\varphi_2, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)} \textcircled{\bullet} = \frac{(\varphi_2, \psi_1)}{\|\psi_1\|^2}$$

在一般情况下，

$$\alpha_{mk} = \frac{(\varphi_m, \psi_k)}{\|\psi_k\|^2} \quad (9-14)$$

第二阶段，把正交系统 ψ_k 的每个函数除以它的范数：

$$e_k = \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|} \quad (9-15)$$

序列 e_1, e_2, \dots 是就范正交的，此时 e_k 可用 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 线性表示，而 φ_n 可用 e_1, e_2, \dots, e_n 线性表示。

9.1.15 子空间

如果由 $\varphi, \psi \in D$ 得到 $\varphi + \psi \in D$ 和在任何 λ 时，由 $\varphi \in D$ 得到 $\lambda\varphi \in D$ ，则希尔伯特空间 H 的元素的子集 D 称为线性的。

容易看出，如果 D 是线性子集且 $\varphi, \psi \in D$ ，则在任何 λ 和 μ 时 $\lambda\varphi + \mu\psi \in D$ 。把这个性质按归纳法推广到任何有限数目被加数的情况可以看出，若 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in D$ ，则它们的任何线性组合也包括在 D 内。显然， $0 \in D$ ，因为取任何元素 $\varphi \in D$ 后，我们可以把 0 看成 $0 = 0 \cdot \varphi$ 。

我们把它的所有极限元素合并到 D 。所形成的闭合线性子集称为子空间。

①原文误写为 φ_1 。——译者

和空间 H 一样, 子空间可以是有限维的或无限维的。每个子空间本身是某个新的希尔伯特空间。

9.1.16 子空间的基底

构成子空间的最简单的方法之一是形成给定元素系统的线性包。

设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是某个元素系统, 不限制通用性可以把它认为是线性无关的 (见 9.1 节)。把所有 (有限的) 线性组合

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n \quad (9-16)$$

称为系统 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 的线性包。

把它的极限元素合并到线性包中, 得到 n 维子空间 $H^{(n)}$ 。函数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在其中形成基底。任何元素 $\varphi \in H^{(n)}$ 可以表示成基底元素线性组合的形式:

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n$$

设 e_1, e_2, \dots, e_n 是在 $H^{(n)}$ 中任意的就范正交基底。每个元素 $\varphi \in H^{(n)}$ 可以表示成

$$\varphi = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \quad (9-17)$$

把等式 (9-17) 标量地乘以 e_i , 可以找到系数 α_i 的表达式:

$$\alpha_i = (\varphi, e_i)$$

我们把和式 (9-17) 称为函数 φ 的傅立叶级数的截断式, 而系数 α_i 称为元素 φ 相对于就范正交系统的傅立叶系数。

9.1.17 推广的傅立叶级数

我们研究无限维的希尔伯特空间 H 。在 H 中不存在任何与该系统所有元素正交的零元素, 则在空间 H 内的函数系统 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ 称为完备的。换言之, 如果从条件 $\varphi \in H, (\varphi, \psi_n) = 0 (n = 1, 2, \dots)$ 得出 $\varphi = 0$, 则系统 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 是完备的。

定理 9.3 在希尔伯特空间 H 内完备的就范正交系统 e_1, e_2, \dots, e_n 就如下方面来说是基底, 即对每个元素 $\varphi \in H$ 可分解成收敛 (按范数) 的傅立叶级数:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m \quad (9-18)$$

且

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \quad (9-19)$$

完备就范正交系统的例子如表4。

表4 坐标函数的某些完备的就范正交系统

表	示	域 Ω
三角系统		
	$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \right\} (m=1, 2, \dots)$	$[-\pi, +\pi]$
	$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos mx \right\} (m=1, 2, \dots)$	$[0, \pi]$
	$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mx \right\} (m=1, 2, \dots)$	$[0, \pi]$
	$\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos mx \right\} (m=1, 2, \dots)$	$[0, l]$
	$\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin mx \right\} (m=1, 2, \dots)$	$[0, l]$
	$\left\{ \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} \begin{matrix} m=1, 2, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{matrix}$	$\left[\begin{matrix} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{matrix} \right]$
	列然特尔多项式	
	$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n \right\} (n=0, 1, 2, \dots)$	$[-1, +1]$

9.1.18 算子

在写出数学物理学的经典方程（第八章）时，我们在方程的右边放上已知函数（在个别情况为零），而在左边放上由于完成某些运算（微分、加法、乘法等）从未知函数中得到的式子，并且对未知函数这些运算的结果仍是某个函数。研究上述式子的一

般性质可引出算子的概念，我们给出这个概念如下：如果希尔伯特空间一个且仅仅一个元素 ψ 按某一规律与每个元素 $\varphi \in D_A$ 相对应，则在希尔伯特空间 H 的元素的某一集 D_A 上就定义了算子 A 。我们把这个对应式写成如下形式

$$\psi = A\varphi \quad (9-20)$$

集 D_A 称为算子 A 的定义域，而所有可能的元素 ψ 的集 R_A 称为算子 A 的值域。

举例：从定义域的角度来说拉普拉斯算子 $\nabla^2 u$ 包括二次被微分函数的总和。但是在许多情况下，使它的定义域缩小是合理的，并且只对附加满足边值条件的函数研究这个算子。例如我们对泊松方程 $\nabla^2 u = f(x_1, x_2, x_3)$, $u|_s = 0$ 求解狄利克雷问题，合理的方式应当是一开始就不是在所有两次微分的函数上，而仅仅是在域的边界上变为零的函数上研究算子。与此相类似，对于

$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_s = 0$ 的诺伊曼边值条件，应该把域的边界上法向导数变为零的两次微分函数的总和认为是算子 ∇^2 的定义域。

应着重指出，算子的定义域本质上包含算子的定义。因此，为了使两个算子 A 和 B 相等，要求它们的定义域一致。此外，包括在它们的定义域中的每个元素 φ 应当满足等式 $A\varphi = B\varphi$ 。

如果 $D_A \subset D_B$ 且对每个 $\varphi \in D_A$, $A\varphi = B\varphi$, 则算子 B 称为算子 A 的扩展。

设 D_A 是线性系统且对任意常数 a_1 和 a_2 满足等式

$$A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1A\varphi_1 + a_2A\varphi_2 \quad (9-21)$$

式中 φ_1, φ_2 —— D_A 的两个任意元素。

此时算子 A 称为线性算子。

如果

$$\lim_{\varphi \rightarrow \psi} A\varphi = A\psi \quad (9-22)$$

则算子称为连续的。

若算子是线性的，且

$$\|A\varphi\| \leq C\|\varphi\|, \quad C = \text{常数} \quad (9-23)$$

则算子称为有界的。

满足不等式 (9-23) 的常数 C 中最小的称为有界算子 A 的范数, 并用 $\|A\|$ 表示。显然,

$$\|A\varphi\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi\| \quad (9-24)$$

线性有界算子是连续的。反过来线性的连续算子是有界的。

对于算子下面定理是正确的。

定理 9.4 (关于扩展的定理) 在完备的集上给定的线性有界算子可以扩展到具有恒定范数的整个空间。

9.1.19 逆算子、对称算子和自共轭算子

设 D 是算子 A 的定义域和 R_A 是它的值域。假定由算子 A 所规定的元素 D_A 和 R_A 之间的对应关系是互为单值的, 即 D_A 的每个元素对应 R_A 的一个元素, 反过来 R_A 的每个元素仅对应 D_A 的一个元素; 这个对应关系决定着某个算子 B , 它的定义域是 R_A , 值域是 D_A 。算子 B 对 A 而言称为逆算子。显然, 算子 A 对 B 而言也称为逆算子。我们将写作 $B = A^{-1}$ 。线性的逆算子也是线性的。

如果 D_A 是完备的, 并对任何 $\varphi, \psi \in D_A$ 有恒等式:

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) \quad (9-25)$$

则算子 A 称为对称的。

设 ψ 和 ψ^* 是 H 的元素, 它们具有这样的性质, 即对于任何元素 $\varphi \in D_A$ 下面的恒等式成立

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*) \quad (9-26)$$

其中 $\psi \in D_A$ 和 $A\psi = \psi^*$ (9-27)

对称算子若满足这样的条件则称其为自共轭的。

如果对于属于对称算子定义域的任何不等于零的函数 φ 而言, 下面的不等式是正确的:

$$(A\varphi, \varphi) > 0 \quad (9-28)$$

则该对称算子 A 称为正的。

如果对于属于对称算子定义域的任何的函数 φ 下面的不等式

是正确的

$$(A\varphi, \varphi) \geq \gamma^2 \|\varphi\|^2 \quad (9-29)$$

式中 γ ——正的常数。

那末，对称算子 A 就称作正定的。

9.1.20 投影算子

自共轭算子的简单例子是投影算子。设 L 是空间 H 的子空间。使每个元素 φ 与其在 L 空间上投影 ψ 相对应：

$$\psi = P\varphi \quad (9-30)$$

这样提出的算子称为在子空间 L 上的投影算子 P 或称在 L 上的正交投影。

正交投影是自共轭的，它的平方与它的本身相等，投影算子的范数等于 1，并且它是有界的。

9.1.21 泛函

可以发生这种情况，即对应于属于自己定义域的每个函数，算子可引出一个恒等于常数的函数。这类算子称为泛函。

将要说到，如果某个数 $l(\varphi)$ 对应于每个元素 $\varphi \in D_l$ ，则在属于希尔伯特空间 H 的集 D_l 上就定义了泛函 $l(\varphi)$ 。我们把集 D_l 称为泛函 l 的定义域。

举例：

1) $l(\varphi) = \|\varphi\|$ 也就是泛函是元素 φ 的范数。定义域是空间 H 。

2) 我们固定元素 ψ 并以如下方法来确定泛函：

$$l(\varphi) = (\varphi, \psi)$$

设 D_l 是线性的。若满足如下等式，则在 D_l 上指定的泛函 $l(\varphi)$ 称为线性的：

$$l(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1l(\varphi_1) + a_2l(\varphi_2) \quad (9-31)$$

若

$$|l(\varphi)| \leq N \|\varphi\| \quad (9-32)$$

则线性泛函称为有界的。

这里 a_1, a_2, N 是常数，而 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ 是希尔伯特空间

H 的元素。满足不等式 (9-32) 的数 N 中最小的称为有界函数 $l(\varphi)$ 的范数, 并用 $\|l\|$ 表示。不等式 (9-32) 可取如下形式:

$$|l(\varphi)| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\| \quad (9-33)$$

如果 $\lim l(\varphi) = l(\psi)$, $\varphi \rightarrow \psi$, 则泛函 $l(\varphi)$ 称为连续的。

举例: 用标量积所确定的泛函 $l(\varphi) = (\varphi, \psi)$ 是线性的和有界的。线性可由标量积的性质得出, 而有界性可由柯西-布尼亚柯夫斯基不等式: $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ 得到。

假定 $N = \|\psi\|$, 我们得到不等式 (9-33)。下面定理是正确的。

定理 9.5 在 H 内所有的有界线性泛函 l 有如下的标量积形式: $l(\varphi) = (\varphi, \psi)$, 式中 ψ 是空间 H 的固定元素。元素 ψ 用唯一的式方确定。

在很多问题中, 必须在更宽的集上定义泛函。此时可采用下面的定理。

定理 9.6 在完备集上给定的线性有界泛函可以并以唯一的方式扩展到具有恒定范数的整个空间上。

思 考 题

1. 度量空间公理系统是什么样的? 它反映欧化空间的什么样的性质?
2. 有理数的集是否是度量空间? 是否是闭集?
3. 均匀收敛和平均收敛之间的差别是什么?
4. 在赋范空间中用什么样的方式引入度量? 在希尔伯特空间用什么样的方式引入度量?
5. 某一三维向量空间是否是希尔伯特空间? 在这个空间中如何定义标量积和范数?
6. 对就范正交的函数系统如何写出克莱姆行列式?
7. 如何把希尔伯特空间 H 的元素投影到 n -维子空间 H^n ?
8. 算子和泛函间的差别是什么?

9.2 迭代法和投影法

9.2.1 近似解序列

利用泛函分析的基本概念可按如下方式表达边值问题的提法。

给出度量空间 X 和 Y 及算子 A ，算子 A 是在空间 X （具有在空间 Y 上的值的集）的集 D_A 上定义的。要求解方程

$$Ax = y^* \quad (9-34)$$

式中 y^* —— Y 的给定元素。

我们将假定问题提得恰当，即解 x^* 存在，对边值条件来说解是唯一的和稳定的。

为了找到边值问题的近似解，研究给出近似解序列 $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) 的算法。

在论证算法时，必须指出，有收敛于精确解的序列：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \quad (9-35)$$

此外，应该估计 n 阶近似的误差：

$$\delta_n = \rho_x(x_n, x^*) \quad (9-36)$$

式中 ρ_x —— 在度量空间 X 中的距离。

这样的估计可能有两种类型，即先验的和经验的。第一种使得有可能在建立近似解之前就给出误差估计。通常，他们对 n 有渐近的特点。经验估计是估计已经求得的近似解 x_n 的误差。

为了建立序列 x_n 曾提出了许多种方法，我们把这些方法主要分为两种，即逐次逼近的方法或迭代法和化为简单代数方程的所谓直接法。

9.2.2 迭代法

用迭代法求解问题时方程 (9-34) 可变换成

$$x = Q(x) \quad (9-37)$$

式中 Q —— 由 X 出发又映射到 X 的算子，且 x^* 是方程 (9-37) 的唯一解。

我们假定，算子 Q 在某个闭子集 $D_Q \subset X$ 给定，并且是连续的，而它的所有值也属于 D_Q 。满足方程 (9-37) 的点称为算子 Q 的不动点。因而，求解方程 (9-37) 可归结为求不动点。

我们取任意点 $x_0 \in D_Q$ ，并规定 $x_1 = Qx_0$ 。

可能有这样的情况，点 x_0 也是算子 Q 的不动点，此时我们得到， $x_1 = x_0$ 。但是，当任意选择 x_0 时，通常 $x_1 \neq x_0$ 。

进一步逐次假定： $x_2 = Qx_1$ ， $x_3 = Qx_2$ ，……或写成一般形式，

$$x_n = Qx_{n-1} \quad (9-38)$$

结果我们得到属于闭子集 D_0 的点列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 。如果过程收敛，即存在极限式 (9-35)，则由于 D_0 的闭合性 $x^* \in D_0$ 。

现在放下方程 (9-38) 不提，而求极限，并利用算子 Q 的连续性。

结果得到：

$$x^* = Qx^* \quad (9-39)$$

即 x^* 是算子 Q 的不动点。

如果在某个具体的空间中给出算子 Q ，则点 x_n 就是问题的近似解，而 $\rho(x_n, x^*)$ 给出误差的估计，依靠 n 的选择此误差可达到随便怎样的小。

如果存在这样的正的常数 $\alpha < 1$ ，在此常数下对 X 中任何的 x 和 y 有

$$\rho(Qx, Qy) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (9-40)$$

那末算子 Q 称为压缩算子。

显然，压缩算子总是连续的。因此，如果 x_n 和 x^* 属于算子的定义域且 $x_n \rightarrow x^*$ ，则由不等式 $\rho(Qx_n, Qx^*) \leq \alpha \rho(x_n, x^*)$ 可以得出 $Qx_n \rightarrow Qx^*$ 。

定理 9.7 (压缩映射原理) 如果压缩算子将完备度量空间映射为它的自身，则它有唯一的不动点 x^* ，这个点在任意原点 x_0 时可用逐次逼近法得到。

对于 n 阶近似，可由下式给出误差的估计：

$$\delta_n = \rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, Qx_0) \quad (9-41)$$

由公式的分析可得出重要结论：在同样的 n 时初始近似解越接

近于精确解 x^* ，近似解的精度就越高。

例题 9.1 关于不动点的定理

用逐次逼近法解方程

$$\sin x = 2x - 1/2 \quad (9-42)$$

解 把方程(9-42)写成如下形式： $x = 0.25 + 0.5 \sin x$ ；这可以组成迭代方程 $x_{r+1} = 0.25 + 0.5 \sin x_r$ ，此时 $\alpha = 0.5$ 。取 $x_0 = 0.5$ 。只限于四位有效数字，则得到：

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.4897, & x_2 &= 0.4852, & x_3 &= 0.4832, & x_4 &= 0.4823, \\ x_5 &= 0.4819, & x_6 &= 0.48175, & x_7 &= 0.48165, & x_8 &= 0.4816 = x_9 \\ &= x_{10}. \end{aligned}$$

9.2.3 投影法

投影法是属于近似求解边值问题的直接法。

取 $X = Y = H$ ，也就是具有定义域 D_A 的算子 A 作用在希尔伯特空间 H 。我们研究方程

$$Ax = y^* (y^* \in H) \quad (9-43)$$

假定， D_A 是线性系统，并存在唯一解 $x^* \in D_A$ 。

令 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ 是 D_A 的某一完备的线性无关的元素系统。我们把它称为坐标系，而它的元素称为坐标函数。

用 $H^{(n)}$ 表示元素 φ_i 的线性包。容易看出， $H^{(n)} \subset D_A$ 。我们将把空间 H 投影到 $H^{(n)}$ 上，并且在这个 n -维子空间中求近似解，其形如

$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (9-44)$$

边值问题的这种解法称为投影法。

元素 x_n 包括在算子 A 的定义域中。在任何固有的 n 和任何系数 $a_i (1 \leq i \leq n)$ 条件下， x_n 都属于 D_A 。选择系数 a_i 遵守的准则可能是不同的。因此，我们遇到投影法的各种不同形式。

9.2.4 矩法

这些不同形式中许多是矩法的特殊情况^①。我们来研究它的

① 矩法有时也称为衡量误差法。

图形。

除了坐标系统外，我们还引入一个完备的线性无关系统 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ 这个系统称为 投影系统。

与坐标系统不同，这个系统的元素是希尔伯特空间 H 的任意元素，并且在一般情况下不属于算子 A 的定义域。

设 $G^{(n)}$ 是元素 ψ_i 的线性包，而 P_n 是在这个子空间上正交投影算子。元素 ψ_i 是线性无关的，并在 $G^{(n)}$ 上形成基底。

我们将求出形如式 (9-44) 的近似解。因为在一般情况下， x^* 不属于子空间 $H^{(n)}$ ，所以在这个空间中就没有能保证方程式 (9-43) 左边和右边相等的元素。

同时，在 $H^{(n)}$ 上可以找到式 (9-43) 左边和右边在 $G^{(n)}$ 上投影相等的元素。为此，应当组成方程

$$P_n Ax = P_n y^* \quad (9-45)$$

并求出它在 $H^{(n)}$ 上的解。这个问题可归结为求如下方程的解 x_n 。

$$P_n (Ax_n - y^*) = 0 \quad (9-46)$$

这个方程表示对投影系统前 n 个元素的误差 $Ax_n - y^*$ 正交性的条件：

$$(Ax_n - y^*, \psi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9-47)$$

可利用下列的辅助定理来证明这个断言的正确性：

辅助定理 9.1 对希尔伯特空间 H 的任何元素 ψ 方程

$$P_n \psi = 0 \quad (9-48)$$

和方程组

$$(\psi, \psi_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9-49)$$

是等价的。

证 设式 (9-49) 是正确的。此时，由等式 $\psi_i = P_n \psi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 和算子 P_n 的自共轭性，我们得到 $(\psi, \psi_i) = (\psi, P_n \psi_i) = (P_n \psi, \psi_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，所以关系式 (9-48) 是正确的。现假定，方程 (9-48) 是正确的。因为 $P_n \psi \in G^{(n)}$ ，则

$$P_n \psi = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$$

于是

$$(P_n \psi, P_n \psi) = \left(P_n \psi, \sum_{i=1}^n a_i \psi_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i (P_n \psi, \psi_i) = \sum_{i=1}^n a_i (\psi, \psi_i) = 0$$

辅助定理得证。

如果算子 A 是线性的，则由式(9-47)可得到求系数 a_i 的线性代数方程组：

$$\sum_{k=1}^n a_k (A \varphi_k, \psi_i) = (y^*, \psi_i) \quad (9-50)$$

对于非线性算子，方程式(9-47)形成了由含有未知系数 a_1, a_2, \dots, a_n 的实数方程组成的方程组。

当近似求解边值问题时，投影序列可以用各种方法选择。

例如，若元素 ψ_i 借助等式 $\psi_i = A \varphi_i$ 按元素 φ_i 选择，则谈的是最小乘法。

在此情况下，方程组(9-47)可由近似残差的范数对 a_i 最小化的条件得到：

$$\|Ax_n - y^*\| = \min \quad (9-51)$$

在加廖尔金方法[●]中坐标系 φ_i 和投影系相一致，而方程组(9-47)形如

$$(Ax_n - y^*, \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9-52)$$

如果算子 A 是线性的，则为了确定 a_i ，我们得到如下的线性代数方程组：

$$\sum_{k=1}^n a_k (A \varphi_k, \varphi_i) = (y^*, \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9-53)$$

许多直接变分法也属于投影法(见9.5节)，例如里兹(Ritz)法以及有限元法。

有限元法的思想是足够简单的。把用连续介质充满的域划分

[●]这个方法常称为布勃诺夫(Бубнов) - 加廖尔金(Галеркин)或加廖尔金-彼得罗夫(Петров)方法。

成有限个单元（例如对平面情况为三角形，对空间情况为四面体）。采用如下的函数作为投影法的坐标函数：除了其中的一个单元（此单元中函数有很简单的形式如三次或四次多项式）以外，这些函数处处完全等于零。在单元边界的结点上多项式之值起着公式（9-44）中参数 a_i 的作用，此值单值地决定着上述多项式的系数。为了求参数 a_i ，可利用方程组（9-52）或里兹法的相应的方程组。

虽然有限元法的某些思想还在上世纪就由麦克斯韦尔（Maxwell）和卡斯契良诺（Castigliano）论证过，但是直到近二十年这个方法才在求解边值问题时得到广泛的采用。能够解大型代数方程组的大贮存量电子计算机的制造成功，促进了这个方法的发展。

目前，研究了高度自动化的电子计算机程序，其中包括《单元库》它能够正确指出所研究区域、记录单元的《形函数》即在单元内指定的坐标函数以及建立和求解相应的代数方程组的程序。此时把区域划成有限单元可用电子计算机自身实现。

在连续介质中应用有限元法、它们的数学论证和在电子计算机上的实现等问题在许多参考文献上均有报道。

9.2.5 加廖尔金法

我们比较详细地研究加廖尔金的普遍方法。要求找到如下方程的解

$$Ax = y^* (x \in D_A \subset H, y^* \in H) \quad (9-54)$$

选择函数的坐标系使其满足如下要求：

- 1) 在任何有限数量中所取的坐标系的元素是线性无关的；
- 2) 在域 D_A 上所确定的某一个度量内坐标系是完备的；
- 3) 在常数 a_1, a_2, \dots, a_n 为任何值时，元素

$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (9-55)$$

都属于 D_A ，且式 Ax_n 有意义。

对于前 n 个坐标函数写出方程 $Ax_n = y^*$ 残差的正交条件：

$$(Ax_n - y^*, \varphi_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (9-56)$$

这就意味着在具有基底 $\varphi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的子空间 $H^{(n)}$ 中式 $Ax_n - y^*$ 等于零, 也就是这个式子与这个子空间的基底函数和任何元素都正交。

结果得到为求系数 a_1, a_2, \dots, a_n 的由 n 个方程组成的方程组。如果算子 A 是线性的, 则此方程组是关于 a_i 的线性代数方程组。

解完得到的方程组, 并把系数 a_i 代入式 (9-55) 中, 我们便可得到元素 x_n 。此 x_n 称为按加廖尔金方法解该问题的第 n 个近似值。

选择坐标函数时, 变换问题的条件, 使 D_A 呈线性集 (线性系统), 并要求元素 φ_i 也属于 D_A , 则满足要求 3 是最简单的。如果式 (9-54) 的边值条件是齐次的, 也就是在域的边界上 (见例题 9-2) 未知函数变为零, 这一点容易做到。

对非齐次的边界条件可按加廖尔金方法找到形如下式的第 n 个近似值:

$$x_n = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (9-57)$$

式中元素 φ_0 满足给定的边界条件, 而 $\varphi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 满足相应的齐次边界条件。

显然, 如果这样选择, 不论 a_i 如何, x_n 都包括在算子 A 的定义域中。

我们研究下面的例题

例题 9.2 加廖尔金法

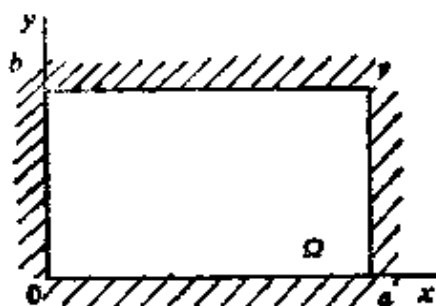
采用加廖尔金法对泊松方程

$$-\nabla^2 u = f(x, y) = 0, \quad u|_r = 0 \quad (9-58)$$

求解狄利克莱问题。

域 Ω ——边为 a 和 b 的矩形 (图 75)。

解 选如下系统作为函数坐标系 (见表 4) :

图75 域 Ω

$$\varphi_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9-59)$$

这个系统在域 Ω 中是完备和就范正交的。后一性质对加廖尔金法并不是必须的，但它大大简化问题的求解。

现以截断级数的形式表示近似解：

$$u_{kl} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9-60)$$

对任何常数值 a_{mn} 边界条件式 (9-58) 都满足，而函数 u_{kl} 存在必须数目的对 x, y 的连续导数。因而， u_{kl} 包括在算子 $(-\nabla^2)$ 的定义域 D_A 。

现对坐标系 (k, l) 头几个函数写出式 $[\nabla^2 u_{kl} + f(x, y)]$ 的正交条件：

$$(\nabla^2 u_{kl} + f, \varphi_{mn}) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, k; n=1, 2, \dots, l) \quad (9-61)$$

我们来计算 $\nabla^2 u_{kl}$ ：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x^2} &= -\frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial y^2} &= -\frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \nabla^2 u_{kl} &= -\frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (9-62)$$

利用坐标函数构成就范正交系，则

$$(\nabla^2 u_{k,l}, \varphi_{mn}) = - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] a_{mn}$$

结果系统式 (9-61) 取如下形式:

$$- \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] a_{mn} + (f, \varphi_{mn}) = 0$$

最后我们得到对系数 a_{mn} 的如下公式:

$$a_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (9-63)$$

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

可以证明, 当 $k, l \rightarrow \infty$ 时, 近似解式 (9-60) 收敛于精确解。

思 考 题

1. 近似解的序列收敛于精确解意味什么?
2. 什么叫算子的不动点?
3. 逐次逼近法的收敛条件是什么样的?
4. 投影法的名称与什么有关?
5. 对坐标系和投影系提出什么样的要求? 它们是否应当是就范正交的?
6. 按加廖尔金法第 n 个近似值有什么样的性质?
7. 算子方程的残差是什么样的?

9.3 分离变量法

关于坯料加热和冷却的两个问题 线性微分方程具有优越的解的叠加法, 即某些特解的总和仍是解。很明显, 对非线性方程说来这是不正确的。

构成特解的有限和、级数或积分可以得出连续介质力学线性方程的解, 其解包括任意函数, 还包括常数的总和, 依靠它们的选

择可以满足初始和边界条件。我们举分离变量法或傅立叶法作为例子来说明这一点,这个方法是数学物理方程最普遍的解法之一。我们来研究两个简单的热传导理论问题,即关于位于平板间的不均匀加热的坯料中温度分布的问题。

例题 9.3 在平模间热坯料的冷却

不均匀受热的扁坯在 $t = 0$ 时刻安放到平模之间。求在 t 时刻沿坯料厚度上温度的分布。

解 为使问题简化,认为坯料是不受限制的板 $0 < x < l$, 板的侧表面处于恒定的温度 $\vartheta = 0$ (I 类边界条件——见8.2节)。设沿板厚的温度的初始分布由函数 $g(x)$ 给出 (图76)。

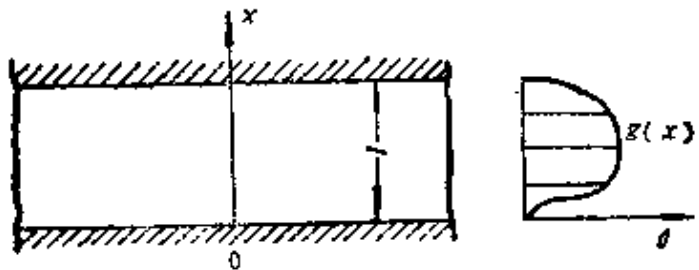


图76 在平模间扁坯的冷却

问题可归结为解微分方程

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t = 0) \quad (9-64)$$

具有初始条件为

$$\vartheta(x, 0) = g(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (9-65)$$

和边界条件为

$$\vartheta(0, t) = \vartheta(l, t) = 0 \quad (9-66)$$

开始研究如下的辅助问题: 求方程 $\partial \vartheta / \partial t = \kappa (\partial^2 \vartheta / \partial x^2)$ 不恒等于零的解, 此解满足边界条件 $\vartheta(0, t) = \vartheta(l, t) = 0$, 解的形式为

$$\vartheta(x, t) = X(x)T(t) \quad (9-67)$$

式中 $X(x)$ ——仅为变量 x 的函数; $T(t)$ ——仅为变量 t 的函数。

把式 (9-67) 代入式 (9-64) 后得到

$$XT' = \kappa X''T$$

等式两边除以 κXT , 则有

$$\frac{1}{\kappa} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

式中 $\lambda = \text{常数}$, 这是因为等式的左边仅取决于 t , 而右边仅取决于 x 。这就允许写出由两个常微分方程组成的方程组

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (9-68)$$

$$T' + \kappa \lambda T = 0 \quad (9-69)$$

求函数 $X(x)$ 。在边界条件 $X(0) = X(l) = 0$ 时方程式 (9-68) 的非零解仅仅对于等于 $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ ($n = 1, 2, \dots$) 的参数值 λ 存在, 此时

$$X_n = \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (9-70)$$

与这些值 λ_n 相应方程 (9-69) 的解为

$$T_n(t) = C_n \exp[-\kappa \lambda_n t]$$

式中 C_n —— 系数, 我们将在以后求这些系数。

这样, 辅助问题的特解有如下形式:

$$\vartheta_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n \exp[-\kappa \lambda_n t] \sin \frac{\pi n}{l} x。$$

现在把一开始提出的问题的解表示成以一定形式组成的级数

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp[-\kappa \lambda_n t] \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (9-71)$$

对于函数 $\vartheta(x, t)$, 边界条件得到满足, 因为级数的所有项满足这些条件。

●原书误写为(9-70)。——译者

我们写出初始条件:

$$g(x) = \vartheta(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

可见, C_n ——函数 $g(x)$ 的傅立叶系数, 当把它在 $(0, l)$ 间隔按正弦分解成级数时, 则

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$$

这样, 便得到了解。但必须证明, 由级数 (9-71) 所确定的函数 $\vartheta(x, t)$ 在 $0 < x < l, t > 0$ 域内是可以微分的, 并满足热传导方程 (9-64) 以及在该域边界点上 ($t = 0, x = 0, l = 0$ 时) 是连续的。

在数学物理学教程中可以得到证明。此时在函数 $g(x)$ 上加上某些限制。它应当是连续的、有分段连续的导数和满足 $g(0) = 0$ 和 $g(l) = 0$ 的条件。

现简要研究推证的过程。首先证明, 当 $t \geq \bar{t} \geq 0$ (\bar{t} ——任何辅助数) 时, 导数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \vartheta_n}{\partial t} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial x^2}$$

均匀收敛。

其次, 建立式 (9-71) 的强级数, 并证明它的收敛性。

由此得出级数式 (9-71) 在域 $t \geq \bar{t} > 0$ 内逐项微分任何次的可能性。

由于方程 (9-64) 是线性的, 按叠加原理, 由其特解所组成的级数也将是解, 因为它是收敛的, 且可对 x 逐项微分两次和对 t 微分一次。

余下可以证明, 在 $t = 0, x = 0, l = 0$ 的点上解的连续性。这可由如下的不等式得出:

$$|\vartheta_n(x, t)| < |C_n| \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq l \text{ 时})$$

此时事先对函数 $g(x)$ 加以限制, 因为这些限制保证由傅立叶

系数 C_n 的模形成的级数收敛。应指出，在热传导理论中常常研究间断解。此时不要求在初始瞬间杆端的温度为零。当 $t > 0$ 时在這些点上温度呈阶跃式变化。

例题 9.4 用内热源加热坯料

让我们稍微改变一下上述例题的条件。也就是说，令坯料的初始温度为零，而沿其厚度分布着强度为 $f(x, t)$ 的热源（例如用高频电流加热坯料时），试求在 t 时刻温度的分布。

解 问题归结为解如下的微分方程：

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (9-72)$$

具有初始条件 $\vartheta(x, 0) = 0$ 和边界条件

$$\vartheta(0, t) = \vartheta(l, t) = 0 \quad (9-73)$$

用按函数 $\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$ 展开的下述傅立叶级数表示解：

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

此时认为 t 是参数。求 $\vartheta_n(t)$ 。为此把函数 $f(x, t)$ 分解成傅立叶级数

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

式中 $f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi,$

并把解的预拟形式代入方程 (9-72)，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \kappa \vartheta_n(t) + \dot{\vartheta}_n(t) - f_n(t) \right\} = 0$$

式中点表示对 t 的微分。为了满足这个方程，使分解式的系数等于零便是充分的，即写成

$$\dot{\vartheta}_n(t) = -\kappa \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \vartheta_n(t) + f_n(t) \quad (9-74)$$

由初始条件得到, $\vartheta_n(0) = 0$

若在边界条件式 (9-73) 下, 解常微分方程 (9-74), 便得到

$$\vartheta_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \kappa (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

结果未知解为

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \kappa (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (9-75)$$

思 考 题

1. 如果坯料的外表面加热到 500°C 和加热到 700°C 时, 例题9-4的解各如何变化?
2. 用什么样的方法把偏微分方程 (9-64) 分解成两个常微分方程 (9-68) ~ (9-69)?
3. 按什么样的条件来求级数式 (9-71) 的系数?
4. 三角函数式 (9-70) 具有什么样的性质? 在求解中如何利用这些性质?
5. 什么样的函数可分解成傅立叶级数? 在什么样的意义上可以说这个级数收敛?

9.4 有限差分法

9.4.1 两个例题

在转向讲述有限差分法之前, 让我们先研究两个简单的例题。

例题 9.5 泊松方程的狄利克雷问题

用有限差分法解下列问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 \quad u|_L = \varphi(x, y) \quad (9-76)$$

解 在平面 (x, y) 上引直线:

$$x_i = ih \quad y_k = kh \quad i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9-77)$$

由于这些直线相交, 将可得到许多点——网格。单个的点称为网格的结点。这些网格是均布的。沿 Ox, Oy 中的任一个方向有相同的步长 h , 当然, 这不是必须的。

只限于分析域 D 的边界是由与构成网格线一致的直线段所组成的情况 (图77, a)。在 D 内的结点称为内部结点, 而它们的总和用 ω_h 表示。位于边界 S 上的结点称为边界结点, 所有边界结点的集用 γ_h 表示。

这样, 我们用网格 $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$, 也就是属于闭域 $\bar{D} = D + S$ 的有限点集来代替宗量变化域 (x, y) 。

研究网格函数 $u_h(x_i, y_k)$ 来代替连续宗量函数 $u(x, y)$, 亦即研究作为网格结点 $\bar{\omega}_h$ 的点 (x_i, y_k) 的函数。

取位于 D 域内的任意结点 (x_i, y_k) , 并分离出与它邻近的四个结点 (图77, b)。把这些点称为模式 (在本情况下为五个点)。模式将用于拉普拉斯微分算子的差分近似。

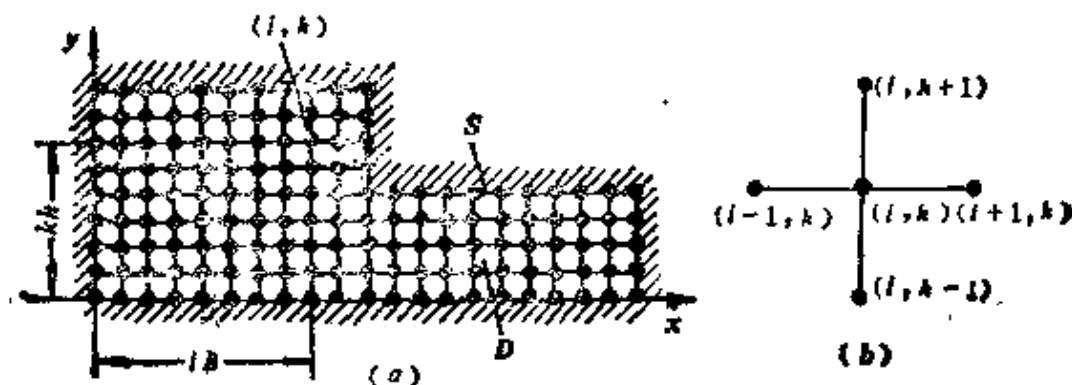


图77 用有限差分法解狄利克莱问题

(a) 网格; (b) 模式

大家知道, 在数学分析中可用如下方法求连续宗量函数的导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

对于在固定网格上的离散宗量函数，这种求极限的概念失去了意义。在求差商时用有限差分的比值代替无限小的比值。

这样，在结点 (x_i, y_k) 上可以规定：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ = \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h} \text{ 或 } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^- = \frac{u_{i,k} - u_{i-1,k}}{h}$$

这些式子称为单侧差商。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ \text{——右导数；} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^- \text{——左导数}$$

同样地，在结点 (x_i, y_k) 上其二阶导数可以写成如下的差分关系：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-}{h} = \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,k-1} - 2u_{i,k} + u_{i,k+1}}{h^2} \quad (9-78)$$

把这些式子代入方程 (9-76) 中得到代数方程：

$$4u_{i,k} - u_{i-1,k} - u_{i+1,k} - u_{i,k-1} - u_{i,k+1} + f_{i,k} = 0 \quad (9-79)$$

式中 $f_{i,k}$ ——在网格结点 (x_i, y_k) 的函数 $f(x, y)$ 的值。

如果某些结点位于域的边界 S 上，则函数的值应当用这些点中函数 $\varphi(x, y)$ 的已知值 $\varphi_{i,k}$ 来代替。对所有内部结点写出关系式 (9-78) 之后，可得到关于未知的 $u_{i,k}$ 的线性方程组，并且未知数恰等于方程的数（即内部网格结点数）。解这个方程组，可以找到未知函数的近似值 $u_{i,k}$ 。

例题 9.6 用内热源加热扁坯

试用有限差分法解扁坯用内热源加热的问题，但提法比例题 9.4 更一般，这里初始温度分布为 $\vartheta(x, 0) = \varphi(x)$ ，而边界条件为 $\vartheta(0, t) = \psi(t)$ 和 $\vartheta(l, t) = x(t)$ 。

解 选取如下的矩形（图78）作为定义域，

$$\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

把 x 轴的线段 $[0, l]$ 和 t 轴的线段 $[0, T]$ 相应地分成 N_1 和 N_2 部分, 并设 $h = l/N_1$ 和 $\tau = T/N_2$ 。通过分点

$x_i = ih, t_k = k\tau$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N_1; k = 0, 1, 2, \dots, N_2$), 引平行于坐标轴的直线, 由这些直线相交得到形成网格的结点 (x_i, t_k) , 此网格为

$$\bar{\omega}_{h,\tau} = \{(x_i, t_k) \in D\}$$

这样, 用网格 $\bar{\omega}_{h,\tau}$ 代替宗量的变化域 (x, t) 。还将研究网格函数 $\vartheta_{h,\tau}(x_i, t_k)$, 也就是作为网格 $\omega_{h,\tau}$ 结点的点 (x_i, t_k) 的函数代替连续宗量的函数 $\vartheta(x, t)$, 并表示为

$$\vartheta_{i,k} = \vartheta_{h,\tau}(x_i, t_k)$$

把结点 (x_i, t_k) 和与它邻近的三个结点 (x_{i-1}, t_k) , (x_{i+1}, t_k) , (x_i, t_{k+1}) 作为四结点模式 (图78b)。用它们的有限差分式代替方程 (9-76) 中的偏导数:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k}}{\tau}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\vartheta_{i-1,k} - 2\vartheta_{i,k} + \vartheta_{i+1,k}}{h^2}$$

把这些表达式代入方程 (9-72), 得到代数方程:

$$\frac{\vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k}}{\tau} = \kappa \frac{\vartheta_{i-1,k} - 2\vartheta_{i,k} + \vartheta_{i+1,k}}{h^2} + f_{i,k}$$

式中, $f_{i,k} = f(x_i, t_k)$ 。

也可以写成更紧凑的形式

$$\vartheta_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa}{h^2}\right)\vartheta_{i,k} - \frac{\tau\kappa}{h^2}(\vartheta_{i-1,k} - \vartheta_{i+1,k}) + \tau f_{i,k} \quad (9-80)$$

根据刚刚在前一横排 (k) 找到的 ϑ 值, 利用公式 (9-80) 可以算出在横排 ($k+1$) 结点上的 ϑ 值。因为由边值条件已知 Ox 轴 ($t=0$ 时) 结点上的温度值, 所以就可找到在第一横排 ($t=\tau$) 上的 ϑ 值, 往后按同样公式可找到第二横排 ($t=2\tau$) 上的 ϑ 值等等。

所描述的方法定名为显式法。因为可用 t 时刻的值表示 $t+\tau$

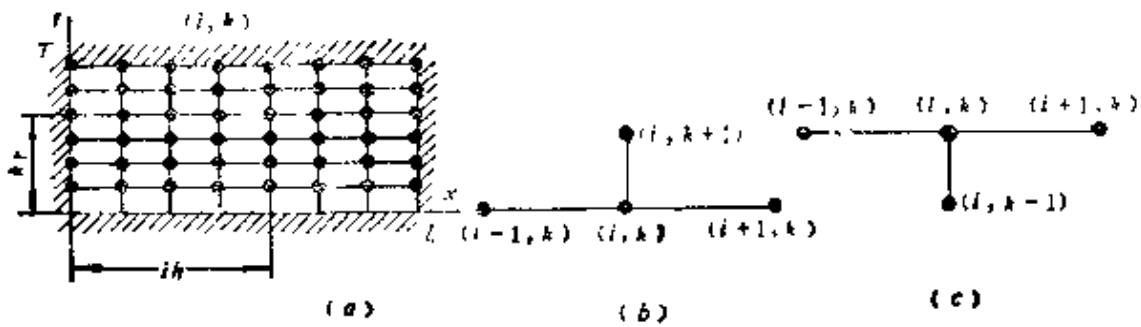


图78 关于坯料加热问题的解
(a)网格; (b)、(c)模式

时刻的 ϑ 值。在比较简单的情况，它的重大缺点是要求时间 τ 的步长为 h^2 这样的量级（上限的比值为 τ/h^2 时），即要求时间步长足够小。否则在给定的初始和边界条件下以及圆滑中间计算结果时不可避免的误差将在计算过程中增加，并导致结果失真。换言之，计算过程将是不稳定的。

采用更复杂的“追赶”法可以保证稳定性。关于追赶法将在后面讲述。

最后研究在文献[14]中引用的具体例子：假定 $f(x, t) = 0$ ， $\kappa = 1$ ，即在初始条件 $\vartheta(x, 0) = 4x(1-x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 和边界条件 $\vartheta(0, t) = 0$ 和 $\vartheta(1, t) = 0$ ($0 \leq t \leq \infty$) 下求解方程 $\partial\vartheta/\partial t = \partial^2\vartheta/\partial x^2$ 。应该指出，通过引入新的变量 $t' = \kappa^2 t$ ，总是可以化为 $\kappa = 1$ 的情况。

为了计算规定 $N_1 = 10$ 和 $h = 0.1$ 。如在[14]中指出，根据稳定性条件，必须取 $\tau = 1/6h^2 = 1/600$ 。对步长 $h = 0.1$ 和 $\tau = 1/600$ 的网格计算的结果如表 5。

这个表的开始一行是根据初始条件 $\vartheta(x_i, 0) = 4x_i(1-x_i) = 0.4i(1-0.1i)$ 填写的。

第一 ($i = 0$) 和最后 ($i = 10$) 一列中列出边界条件的数据：

$$\vartheta(0, t_k) = \vartheta(1, t_k) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

因为初始和边界条件对直线 $x = 1/2$ 是对称的，所以解 $\vartheta(x, t)$ 也对这个直线是对称的。

表5 用显式法解热传导方程^[14]

k	i										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.360	0.640	0.840	0.960	1.000	0.960	0.840	0.640	0.360	0
1	0	0.347	0.627	0.827	0.947	0.987	0.947	0.827	0.627	0.347	0
2	0	0.336	0.613	0.813	0.933	0.947	0.933	0.813	0.613	0.336	0
3	0	0.326	0.600	0.800	0.920	0.960	0.920	0.800	0.600	0.326	0
4	0	0.317	0.588	0.787	0.907	0.947	0.907	0.787	0.588	0.317	0
5	0	0.309	0.576	0.774	0.894	0.934	0.894	0.774	0.576	0.309	0
6	0	0.302	0.564	0.761	0.881	0.921	0.881	0.761	0.564	0.302	0

9.4.2 方法的结构

分析有限差分问题解的次序时，可以指出如下的步骤：

用有限多个称为网格的结点代替宗量的连续变化域。研究在网格结点定义的被称为网格函数的离散宗量函数，代替连续宗量的函数。

包括在微分算子中的导数可以用差商来近似，此时微分方程可用代数方程组（差分方程）来代替。边值条件也可用网格函数的差分边值条件来代替。

完成这个程序之后，可得到代数方程组。同时，关于原始微分方程数值解的问题可归结为求解得到的代数方程组。

9.4.3 网格

网格的选择虽然看起来似乎很简单，但有重大的意义。一方面，直观希望网格函数更好地逼近连续解，这就不得不选取数目很大的网格结点。关于解的收敛性的分析也规定应当无限增加结点数。但是，即使是现代化的电子计算机，其快速运算的可能性和存贮能力也是有限的，因此在解多维问题时必须化为结点数目不太大的网格。这样的网格称为“粗糙的”或“可行的”。合理折衷的选择常常是用“尝试和误差法”来确定。在许多情况下，必须

利用非均匀的网格，在解的可能比较特别的区域周围，网格要密一些。

在分析收敛性时，我们将假定，每个有限差分法可实现网格 ω_i 的无限总和，这些网格取决于表示网格结点分布密度的一个或某些正的参数。以后我们将用字母 h 表示这个参数或一组参数。 h （或对应于 h 的参数，例如例题 9-6 中的 h 和 τ ）越小，网格就越密。假定在网格的总和 $\{\omega_i\}$ 中可以分出这种 $h \rightarrow 0$ 的序列。

9.4.4 网格函数

在求解差分问题的过程中，求在引入网格上定义的并与相应边值问题的解接近的网格函数（用 y 表示它）。因为网格函数是离散宗量函数，而边值问题的解 u 是连续宗量的函数，所以它们属于不同的泛函空间。为了估计这些函数的接近度，可用如下方法处理：研究网格结点上的函数 u 。这给出了新的网格函数 u_k ，此函数是解 u 在网格函数空间的投影。当在网格函数空间引入某一范数 $\|\cdot\|$ 时，则函数 u 和 y 的接近度可以用值 $\|y - u_k\|$ 表示。在一般空间，例如在空间 $C[a, b]$ 或 L_2 上，拟范数一般可作为这样的范数。

网格分得无限小时，如果值 $\|y - u_k\|$ 无限减小，就可以说差分问题的解与原始微分问题的解接近。

9.4.5 微分方程的差分近似

现给出作用在函数 u 上的线性微分算子 L 。用差商代替包括在 Lu 中的导数，将可得到替换 Lu 的差分式 $L_k u_k$ ，该式是称为模式的网格的某一组结点网格函数 u_k 值的线性组合。此时我们允许有误差——近似的偏差，差分问题解的精度在很大的程度上取决于这个偏差的值。

为了估计偏差，一般是在所研究结点的周围把函数 u 分解成台劳级数。

差分方程同初始和边界条件的差分近似的总合组成差分格式。

9.4.6 差分格式的收敛性和稳定性

上面引出了在网格空间中的范数，用此范数估计网格函数 y （是差分问题的解）和函数 u_k （是相应微分问题的解在网格函数空间中的投影）的接近度。如果在某一网格范数中，对于任何固定的 $t = t_{k_0} = k_0 \tau$ 有如下的条件：

$$h \rightarrow 0, \tau > 0 (k_0 \rightarrow \infty) \text{ 时, } \|y^{k_0} - u_k^{k_0}\| \rightarrow 0$$

那末就说差分问题的解趋于微分问题的解（差分格式收敛）。

除收敛性外，还应检查差分格式的另一性质，即它的稳定性，也就是差分问题的解同初始和边界条件的连续关系。向希望更深入了解有限差分法的读者推荐参考文献 [14, 16]。

9.4.7 追赶法

用显式法分析求解热传导问题时，为了进行实际计算，提出了很不方便的要求，按此要求时间 τ 的步长应当是 h^2 这样的量级，也就是说量级很小。在举出的算例中，为了描述单位时间间隔 ($T = 1$) 的热传导过程，如果 $\tau = 1/600$ ，就要求含有 600 行的表。

研究另一个差分格式，对此格式比值 τ/h^2 不是上限，这就可能选择比较大的时间步长，并在计算过程中保持稳定。

现回到上面提出的无热源时的热传导方程的积分问题：

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (9-81)$$

其初始和边界条件为

$$\vartheta(x, 0) = \varphi(x), \quad \vartheta(0, t) = \psi(t) \text{ 和 } \vartheta(l, t) = \chi(t) \quad (9-82)$$

在 \bar{D} 域内作矩形网格：

$$x_i = ih, \quad t_k = k\tau (i = 0, 1, 2, \dots, N_1; k = 0, 1, 2, \dots, N_2)$$

设 $\vartheta_{i,k} = \vartheta(x_i, t_k)$ 。利用四点模式（图78, c）。采用公式 (9-78) 和有限差分式（“向后”微分）

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\vartheta_{i,k} - \vartheta_{i,k-1}}{\tau} \quad (9-83)$$

对 $k+1$ 层网格, 代替微分方程 (9-81), 将可得到如下的代数方程:

$$\frac{\vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k}}{\tau} = \frac{\vartheta_{i-1,k+1} - 2\vartheta_{i,k+1} + \vartheta_{i+1,k+1}}{h^2} \quad (9-84)$$

$$\text{或} \quad \vartheta_{i-1,k+1} - (2+s)\vartheta_{i,k+1} + \vartheta_{i+1,k+1} = -s\vartheta_{i,k} \quad (9-85)$$

式中, $s = h^2/\tau$

边界条件式 (9-82) 给出

$$\vartheta_{0,k+1} = \psi(t_{k+1}), \quad \vartheta_{n,k+1} = x(t_{k+1}) \quad (9-86)$$

用追赶法解方程组 (9-85)。令

$$\vartheta_{i,k+1} = a_{i,k+1}(b_{i,k+1} + \vartheta_{i+1,k+1}) \quad (9-87)$$

$$\text{此时,} \quad \vartheta_{i-1,k+1} = a_{i-1,k+1}(b_{i-1,k+1} + \vartheta_{i,k+1}) \quad (9-88)$$

把式 (9-88) 代入公式 (9-85), 则有

$$a_{i-1,k+1}(b_{i-1,k+1} + \vartheta_{i,k+1}) - (2+s)\vartheta_{i,k+1} + \vartheta_{i+1,k+1} = -s\vartheta_{i,k}$$

由此得

$$\vartheta_{i,k+1} = \frac{a_{i-1,k+1}b_{i-1,k+1} + s\vartheta_{i,k} + \vartheta_{i+1,k+1}}{2+s-a_{i-1,k+1}}$$

把此式和公式 (9-88) 加以比较, 得到

$$a_{i,k+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1,k+1}} \quad (9-89)$$

$$b_{i,k+1} = a_{i-1,k+1}b_{i-1,k+1} + s\vartheta_{i,k} \quad (i=2, 3, \dots, N_1) \quad (9-90)$$

当 $i=1$ 时, 式 (9-85) 和式 (9-87) 给出

$$\vartheta_{0,k+1} - (2+s)\vartheta_{1,k+1} + \vartheta_{2,k+1} = -s\vartheta_{1,k} \quad (9-91)$$

$$\text{和} \quad \vartheta_{1,k+1} = a_{1,k+1}(b_{1,k+1} + \vartheta_{2,k+1}) \quad (9-92)$$

利用边界条件式 (9-96)。由式 (9-88) 得到

$$\vartheta_{1,k+1} = \frac{\psi(t_{k+1}) + s\vartheta_{1,k} + \vartheta_{2,k+1}}{(2+s)} \quad (9-93)$$

因为式 (9-93) 和式 (9-92) 应当是恒等的, 所以对它们进

行比较就可以得出,

$$a_{1,k+1} = \frac{1}{2+s}, \quad b_{1,k+1} = \psi(t_{k+1}) + s\vartheta_{1,k}$$

利用式 (9-93) 和式 (9-92), 按“正向”进行“追赶”, 可确定两个数列:

$$a_{1,k+1}, a_{2,k+1}, \dots, a_{n-1,k+1}$$

$$b_{1,k+1}, b_{2,k+1}, \dots, b_{n-1,k+1}$$

现在采用式 (9-86) 和式 (9-87), 用“逆向”求得未知函数的值:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{n,k+1} &= x(t_{k+1}) \\ \vartheta_{n-1,k+1} &= (\vartheta_{n,k+1} + b_{n-1,k+1})a_{n-1,k+1} \\ \vartheta_{n-2,k+1} &= (\vartheta_{n-1,k+1} + b_{n-2,k+1})a_{n-2,k+1} \\ &\dots\dots\dots \\ \vartheta_{1,k+1} &= (\vartheta_{2,k+1} + b_{1,k+1})a_{1,k+1} \end{aligned} \right\} \quad (9-94)$$

这样, 就指出了由第 k 层过渡到第 $k+1$ 层的方法。零层上函数 ϑ 的值决定于初始条件。这可以作出所有网格结点上网格函数 $\vartheta_{i,k}$ 的值。

对所提出的差分格式的稳定性进行分析后指出, 在任何 $s > 0$ 的条件下, 它都是稳定的。

例题9.7 追赶法^[14]

用追赶法解热传导方程 $\partial\vartheta/\partial t = \partial^2\vartheta/\partial x^2$, 其初始和边界条件为

$$\vartheta(x, 0) = 4x(1-x), \quad \vartheta(0, t) = \vartheta(1, t) = 0 \textcircled{1}$$

解 取 $h = 0.1$; $\tau = 0.01$ 。此时 $s = h^2/\tau = 1$ 。按公式(9-87)

$$\vartheta_{i,k+1} = a_{i,k+1}(b_{i,k+1} + \vartheta_{i+1,k+1})$$

和由关系式 (9-89) 与式 (9-90)

$$a_{1,k+1} = \frac{1}{3}, \quad b_{1,k+1} = \vartheta_{1,k}$$

①原文误写为 $\vartheta/(0, t)$, $\vartheta/(1, t)$ 。——译者

和

$$a_{i,k+1} = \frac{1}{3 - a_{i-1,k+1}}, b_{i,k+1} = a_{i-1,k+1} b_{i-1,k+1} + \vartheta_{i,k} \quad (i > 1)$$

令 $k=0$, 对第一层则 $a_{1,1} = \frac{1}{3}$, $b_{1,1} = \vartheta_{1,0}$, $a_{i,1} =$

$$\frac{1}{3 - a_{i-1,1}}, b_{i,1} = a_{i-1,1} b_{i-1,1} + \vartheta_{i,0} \quad (i > 1)$$

其次, 按式 (9-94) 有

$$\vartheta_{n,1} = 0$$

$$\vartheta_{n-1,1} = (\vartheta_{n,1} + b_{n-1,1}) a_{n-1,1}$$

$$\vartheta_{n-2,1} = (\vartheta_{n-1,1} + b_{n-2,1}) a_{n-2,1}$$

.....

$$\vartheta_{1,1} = (\vartheta_{2,1} + b_{1,1}) a_{1,1}$$

(9-95)

公式 (9-95) 使得有可能计算出第一层 ($k=1$) 的未知函数值 $\vartheta_{i,1}$ 。得到的结果列入表 6

表 6 用追赶法时热传导方程的解^{〔14〕}

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\vartheta_{i,0}$	0	0.300	0.640	0.840	0.960	1.000	0.960	0.840	0.640	0.360	0
$a_{i,1}$	—	0.333	0.375	0.381	0.382	0.382	0.382	0.382	0.382	0.382	—
$b_{i,1}$	—	0.360	0.740	1.125	1.339	1.530	1.544	1.430	1.186	0.813	—
$\vartheta_{i,1}$	0	0.310	0.575	0.746	0.882	0.921	0.882	0.764	0.572	0.310	0
$\vartheta_{i,1}^*$	0	0.302	0.564	0.761	0.881	0.921	0.881	0.761	0.564	0.302	0

为了同按显式法计算做比较, 引出了上例中对第六层 ($t=6\tau=0.01$) 得到的值 $\vartheta_{i,1}^*$ 。分析指出, “追赶法” 允许取相当大的时间步长而不损失计算的稳定性。

9.4.8 局部一维法

用有限差分法求解多维方程时 (例如, 三个空间坐标 x_1, x_2, x_3 和时间 t 是自变量时), 总的计算工作量, 也就是为了求解指定

精度问题所需的算术运算次数有很大意义。

比较求解具有三个自变量 (x_1 , x_2 和 t) 的热传导方程的显式格式和隐式格式, A. A. 沙马尔斯基 (Самарский) 指出, 为了求新的一层 $t = t_{k+1}$ 的所有结点 ω_k 的温度需要的运算数正比于网格 ω_k 结点的数 $(N-1)^2$, 即有着 $1/h^2$ 的数量级。

在隐式格式的情况下, 为此必须解 $(N-1)^2$ 个方程组, 所需要的算术运算要比 $1/h^4$ 的数量级大的多。

同时, 隐式格式在任何的 τ 和 h 下都是稳定的, 而显式格式只在 $\tau \leq 1/4h^2$ 时是稳定的。这样, 造成一个封闭的范围: 采用显式格式时, 可赢得一层的计算时间, 但由于 t 的步长小而会失掉优越性; 采用隐式格式时, 可以有大的步长, 但是在计算下一层 $t = t_{k+1}$ 的温度时需要消耗相当大的计算时间。

近年来曾提出一些新的差分格式 (定名为经济格式), 这些格式兼有显式格式 (工作量的数量级为 $1/h^2$) 和隐式格式 (无条件的稳定性) 的优点。

我们研究最通用的局部一维法。设给出如下形式的热传导方程:

$$B \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} + A \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + F \quad (9-96)$$

式中 A , B 和 F —— 在一定的初始和边界条件下, 变量 φ 和 ψ 的某些函数。

塑性流动的平面和轴对称问题中温度场的计算可归结为求解这个方程。

采用局部一维法, 可以把方程 (9-96) 化为两个一维方程:

$$1/2 B \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + A \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + 1/2 F \text{ 和 } 1/2 B \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} + 1/2 F$$

采用前一解中所得到的上一层中温度分布作为后一解的初始值, 我们用追赶法在时间的半个步长 $\tau/2$ 时, 依次解这些方程。结果, 算术运算工作量便有数量级 $1/h^2$, 以代替隐式格式的

$1/h^4$ 。追赶法可保证解的无条件稳定性，而差分格式的累计误差是一维格式逼近误差的总和。

在第十一章中所描述的平面、轴对称和三维流动的数学模型中采用了局部一维法。

思 考 题

1. 什么叫网格、网格结点和模式？
2. 差商是什么样的？
3. 什么叫网格函数？
4. 什么叫差分格式？
5. 差分格式的稳定性是什么？
6. 追赶法比显式法有什么优点？有什么缺点？
7. 局部一维法有什么优点？

9.5 变 分 法

9.5.1 变分计算的最简单问题

变分计算是门数学学科，它研究求泛函极值（最大或最小）的方法。所谓泛函就是取决于一个或某些个函数的选择的变量。把数学物理边值问题的解归为泛函最小化求解的方法称为变分法。

我们研究如下问题，即研究下面类型泛函的极值

$$J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx \quad (9-97)$$

并且函数 $y(x)$ 应满足如下的边界条件（图79）：

$$y(a) = A \quad y(b) = B \quad (9-98)$$

假定两次可微函数 $y(x)$ 达到极值，此函数称为极值函数。

取任何接近于 $y(x)$ 的“比较函数” $\tilde{y}(x)$ ①。它也应当是两次可微并满足与极值函数 $y(x)$ 同样的边界条件。取差

①应当从泛函分析的角度研究“近似度”的概念。

$$\delta y = \tilde{y}(x) - y(x) \quad (9-99)$$

此差称为函数 $y(x)$ 的变分。显然，变分 δy 也同样是 x 的函数，而且在点 $x = a$ 和 $x = b$ 处， δy 等于零。一阶和二阶导数的变分为

$$\left. \begin{aligned} \delta y' &= \tilde{y}'(x) - y'(x) \\ \delta y'' &= \tilde{y}''(x) - y''(x) \end{aligned} \right\} \quad (9-100)$$

把函数 $\tilde{y}(x)$ 和 $y(x)$ 列入单参数的曲线族中，

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y \quad (9-101)$$

无论是极值函数，还是比较函数，都应当包含在这个曲线族中。实际上，当 $\alpha = 0$ 时， $y(x, 0) = y(x)$ 。

若 $\alpha = 1$ ，则按 (9-101)， $y(x, 1) = y(x) + \delta y = \tilde{y}(x)$ 。

现在仅仅在函数族 $y = y(x, \alpha)$ 上研究泛函的值。此时泛函可变换成 α 的函数：

$$J[y(x)] = \varphi(\alpha) = \int_a^b F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)] dx \quad (9-102)$$

并且在 $\alpha = 0$ 时，这个函数取极值。

在 $\alpha = 0$ 的点上这个函数的导数称为泛函式 (9-97) 的一阶变分，并用符号 δJ 表示：

$$\delta J = \left. \frac{d\varphi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (9-103)$$

同样，泛函式 (9-97) 的二阶变分 $\delta^2 J$ 按下法定义：

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \quad (9-104)$$

写出函数 (9-102) 极值的必要条件：

$$\delta J = \varphi'(0) = 0$$

计算函数 (9-102) 的导数，得到

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b \left[F_{, \frac{\partial}{\partial \alpha}} y(x, \alpha) + F_{, y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx$$

式中 $F_{, y} = \frac{\partial}{\partial y} F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)]$

$$F_{, y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)]$$

当 $\alpha = 0$ 时

$$F_{, y} = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}, \quad F_{, y'} = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \quad (9-105)$$

此时，假定 $F(x, y, y')$ 是对 x, y, y' 有二阶（包括二阶在内）连续偏导数的函数。其次

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (y + \alpha \delta y) = \delta y \quad (9-106)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (y' + \alpha \delta y') = \delta y' \quad (9-107)$$

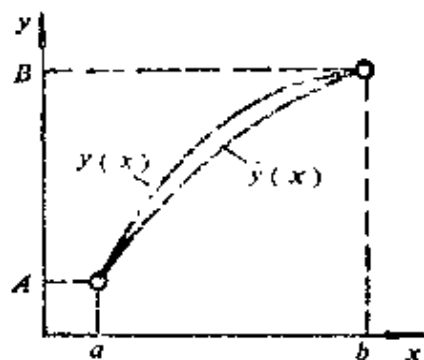


图79 变分计算的最简单问题

结果方程 (9-103) 取如下形式：

$$\delta J = \int_a^b (F_{, y} \delta y + F_{, y'} \delta y') dx = 0 \quad (9-108)$$

分部积分第二项，并考虑 $\delta y' = (\delta y)'$ ，则有

$$\int_a^b F_{y'} \delta y' dx = F_{y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx \textcircled{G}$$

这里利用了, $x=a$ 和 $x=b$ 时变分 δy 等于零这一情况。

方程 (9-108) 可写成

$$\int_a^b \left(F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''} \right) \delta y dx = 0 \quad (9-109)$$

以后我们需要如下的辅助定理。

辅助定理9.2 (变分计算的基本辅助定理): 如果对每个连续函数 $\eta(x)$,

$$\int_a^b \Phi(x) \eta(x) dx = 0 \quad (9-110)$$

其中函数 $\Phi(x)$ 在线段 $[a, b]$ 上是连续的, 则在该线段上 $\Phi \equiv 0$ 。

现用反证法来证明这个定理。设在 $a \leq x \leq b$ 的线段上某一点 $x = x^*$ 处, $\Phi(x^*)$ 不为零。因为函数 $\Phi(x)$ 连续, 所以点 x^* 的某个邻域 $x_1 \leq x \leq x_2$ 上此函数不改变正负号。选取函数 $\eta(x)$, 它在此邻域上也不改变正负号, 并且在此邻域之外等于零(图80)。

于是

$$\int_a^b \Phi(x) \eta(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) \eta(x) dx \neq 0 \textcircled{H}$$

这是因为在线段 $(x_1 \leq x \leq x_2)$ 上 $\Phi(x) \eta(x)$ 之乘积不改变正负号, 并在此线段以外为零。这样, 就和原始论点相矛盾, 于是定理得证。

可以完全相同地证明, 在任意选择只满足某些一般条件(连续, 可微等)的函数 $\eta(x, y)$ 时, 若函数 $\Phi(x, y)$ 在平面 (x, y) 上

① 原文中误写为 $\dots - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} dx$ 。——译者

② 原文误写为 $\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) \eta(x) \neq 0$ 。——译者

的 D 域内连续和

$$\iint_D \Phi(x, y) \eta(x, y) dx dy = 0 \quad (9-111)$$

则在 D 域内 $\Phi(x, y) \equiv 0$ 。

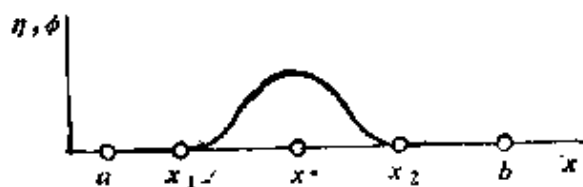


图80 辅助定理 9.2 的证明

9.5.2 欧拉方程

为了简化泛函的极值的必要条件，采用基本辅助定理。在式(9-110)中假设

$$\eta(x) = \delta y(x), \quad \Phi(x) = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$$

可见，辅助定理的条件得到满足： $\eta(x)$ 是任意连续函数，而 $\Phi(x)$ 也是连续的。因而在极值函数 $y(x)$ 上 $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$ 。换言之，实现泛函 $J[y(x)]$ 极值的函数 $y(x)$ 是如下二阶微分方程的解：

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (9-112)$$

此方程称为欧拉方程。

一般说来，这个方程的解取决于两个任意常数，这两个常数由如下的边界条件来确定：

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (9-113)$$

显然，方程(9-112)是极值的必要条件，但在一般情况下，并不是极值的充分条件。寻找极值充分条件的方法在变分计算的课程中叙述(也可参照9.5节)。但是，实际上在许多重要的情

况下，欧拉方程可给出问题的完全解。例如用连续介质力学定理可以证明所研究的泛函本身存在极值。如果此时只存在满足问题边界条件的唯一极值函数，则它将恰恰就是所求的极值，也就是变分问题的解。

例题 9.8 求极值函数

求可使下面泛函达到极值的曲线：

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx$$

$$y(0) = 2, \quad y(\pi/2) = 0 \quad (9-114)$$

解

$$F = (x, y, y') = (y')^2 - y^2$$

求导数：

$$F_y = -2y, \quad F_{y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = 2y''$$

欧拉方程可写成： $y'' + y = 0$ 。如果 $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 是通解。按边界条件式 (9-114) 可找到常数 C_1 和 C_2 ： $C_1 = 2$ ， $C_2 = 0$ 。

这样，仅在曲线 $y = 2 \cos x$ 上可以得到极值。

9.5.3 取决于两个自变量函数的泛函

现研究如下形式的泛函：

$$J(u) = \iint_{\Omega} F(x, y, u, p, q) dx dy \quad (9-115)$$

式中 $p = \partial u / \partial x$ ， $q = \partial u / \partial y$ 。

假定，必须求出函数 $u(x, y)$ ，此函数及其直到二阶的导数在域 Ω 内是连续的，在域的边界上取给定的值，并给出泛函式 (9-115) 的极值 (图81)。

构成一个单参数的表面族 $u(x, y, \alpha) = u(x, y) + \alpha \delta u$ ，式中 $\delta u = \tilde{u}(x, y) - u(x, y)$ 是函数 u 的变分。当 $\alpha = 0$ 时这个族包括极值 $u(x, y)$ ，而当 $\alpha = 1$ 时，这个族是某个许可的比较表面

$\tilde{u}(x, y)$ 。

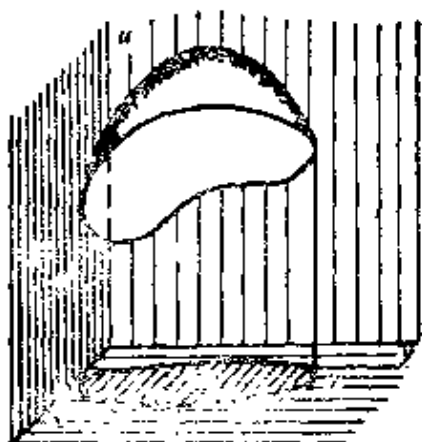


图81 奥斯特洛格拉得斯基-欧拉方程的推导

代入式(9-115)之后,泛函可化为 α 的函数 φ ,此函数应当在 $\alpha = 0$ 时有极值。由极值的必要条件 $\partial\varphi/\partial\alpha = 0$,可导出方程

$$\delta J = \iint_{\Omega} (F_u \delta u + F_p \delta p + F_q \delta q) d\Omega = 0$$

式中

$$\delta p = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}, \quad \delta q = \frac{\partial(\delta u)}{\partial y}$$

利用格林公式(在推导欧拉方程时的分部积分)和考虑在域 Ω 的边界上 $\delta u = 0$,则得到

$$\iint_{\Omega} \left[F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta u dx dy = 0$$

这里 $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$ 是所谓对 x 的完全偏导数。当计算它的时候,认为 y 固定不变,而考虑 u, p 和 q 与 x 的关系。类似的说明,也适用于 $\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\}$ 。

由于在被积式中的第一个乘子是 x 和 y 的连续函数,而变分 δu 是任意的,按变分计算的基本辅助定理可以得出,在实现极值

的表面 $u = u(x, y)$ 上满足如下的恒等式:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_x\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_y\} \equiv 0$$

因而, $u(x, y)$ 是下面的奥斯特洛格拉得斯基-欧拉方程的解:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_x\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_y\} = 0 \quad (9-116)$$

例题 9.9 奥斯特洛格拉得斯基-欧拉方程

对下列泛函推导奥斯特洛格拉得斯基-欧拉方程:

$$J[u(x, y)] = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2uf(x, y) \right] dx dy$$

在域的边界上函数 u 取给定的值。

解 在所研究的问题中 $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 - 2uf$ 和
 $F_x = 2p, F_y = 2q, F_u = -2f$

其次

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_x\} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \{F_y\} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

奥斯特洛格拉得斯基-欧拉方程是泊松方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 \quad (9-117)$$

或简写为

$$\nabla^2 u + f(x, y) = 0$$

例题 9.10 拉拔和挤压工具的孔型设计

拉拔模或挤压模的设计, 其中可归结为在平面外廓 γ_0 (坯料的外廓) 和 γ_1 (成品断面的外廓) 上拉过的表面构造 (图82)。

求保证工件和工具接触面积最小的, 因而也就是摩擦阻力最小的表面方程。

解 表面积按下式确定:

$$S[z(x, y)] = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

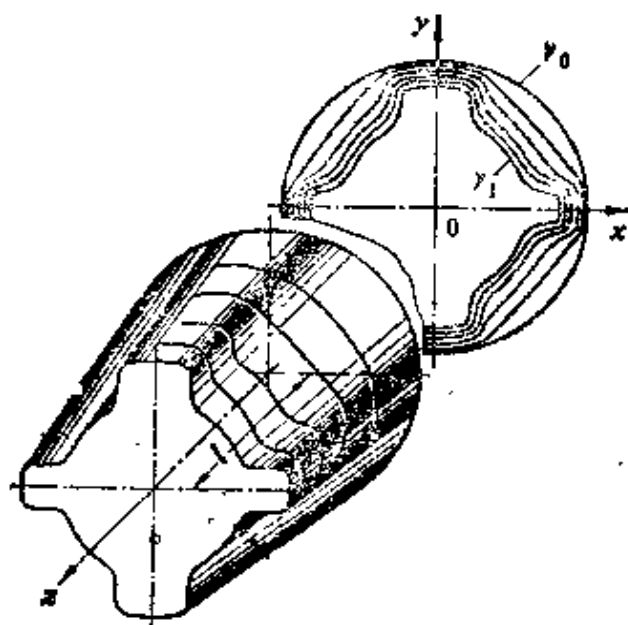


图82 拉拔模的孔型设计

式中 $z = z(x, y)$ —— 表面方程, $p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$, 并在外廓 γ_0 上 $z = 0$, 在外廓 γ_1 上 $z = l$, 在此情况下, 奥斯特洛格拉得斯基-欧拉方程形如:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\} = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0$$

可以证明, 这个方程是在表面每点上平均曲率为零的条件。

现在研究简化提法的问题。利用布尼亚柯夫斯基不等式并给出 S 值的上限估计:

$$S^2 \leq \iint_{\Omega} dx dy \iint_{\Omega} (1 + p^2 + q^2) dx dy$$

$$\text{此时 } \iint_{\Omega} dx dy = \Phi_0 = \text{常数}$$

式中 Φ_0 —— 域 Ω 的面积。

现在求面积 S 上限估计的最小值。在此情况下, 函数 $z(x,$

y) 是下面泛函的极值函数:

$$J[z(x, y)] = \iint_{\Omega} (1 + p^2 + q^2) dx dy$$

因为, $F_z = 0$, $F_p = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$, $F_q = 2 \frac{\partial z}{\partial y}$, 所以奥斯特洛格拉得

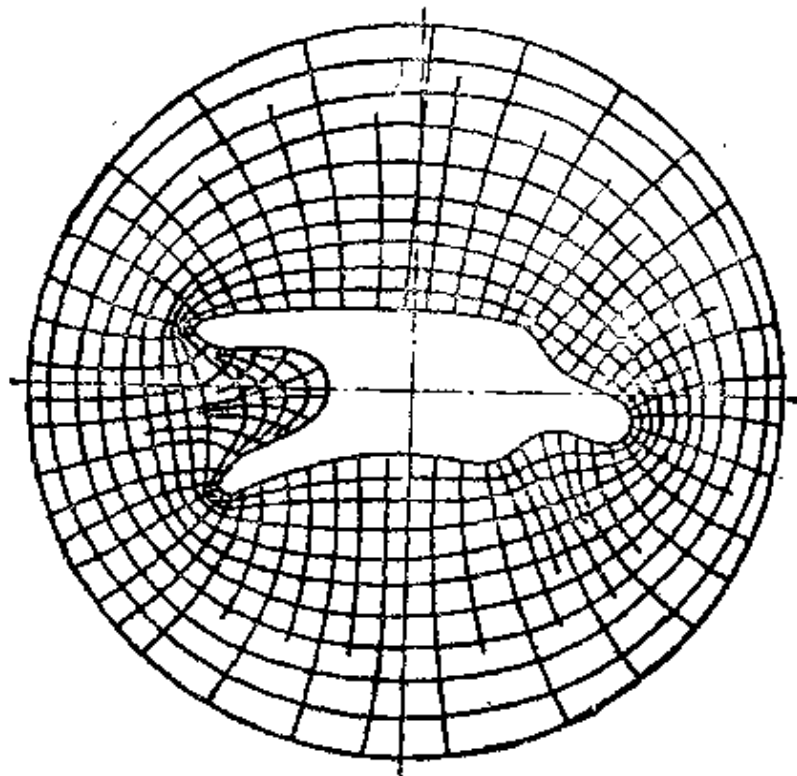
斯基-欧拉方程形式如下:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

这样, 函数 $z(x, y)$ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 z = 0$, 并且边界条件为

$$\left. \begin{array}{l} \text{在 } \gamma_0 \text{ 上 } z = 0 \\ \text{在 } \gamma_1 \text{ 上 } z = l \end{array} \right\} \bullet$$

在图83上对于用拉拔法作成的一系列断面画出曲线族 $z(x,$



● 原书误写为 $\varphi = 0$, $\varphi = l$ 。——译者

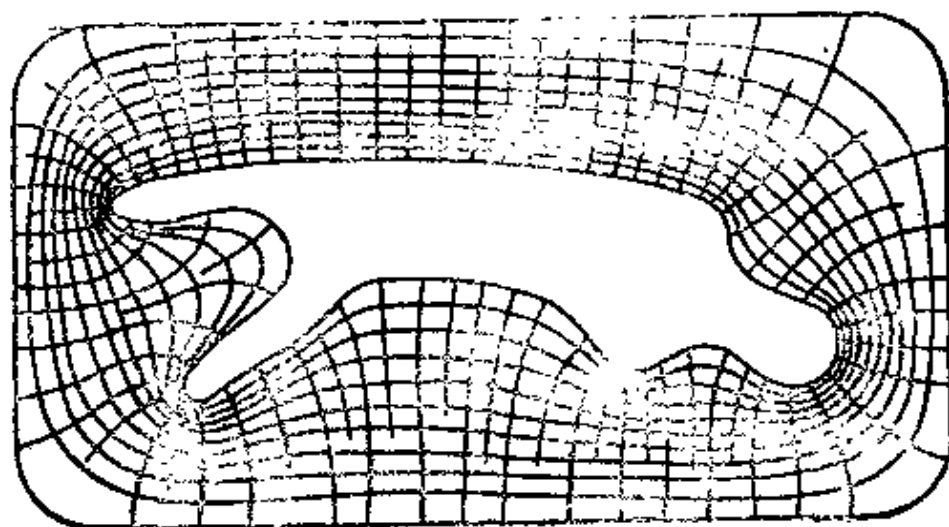
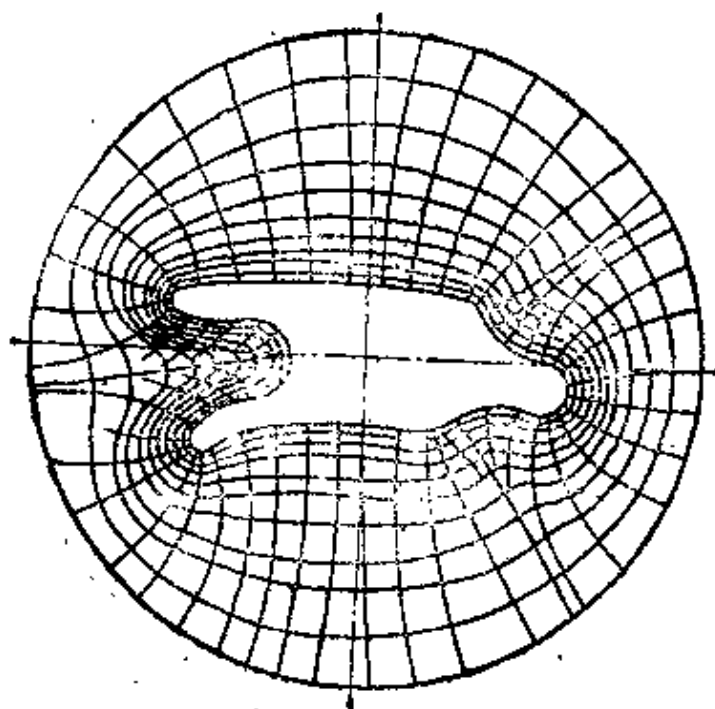


图83 拉拔模计算的孔型设计

$y) = \text{常数}$ 和与此线族正交的曲线族。为了比较,在图84上作出实际上所采用的拉拔模的过渡线。



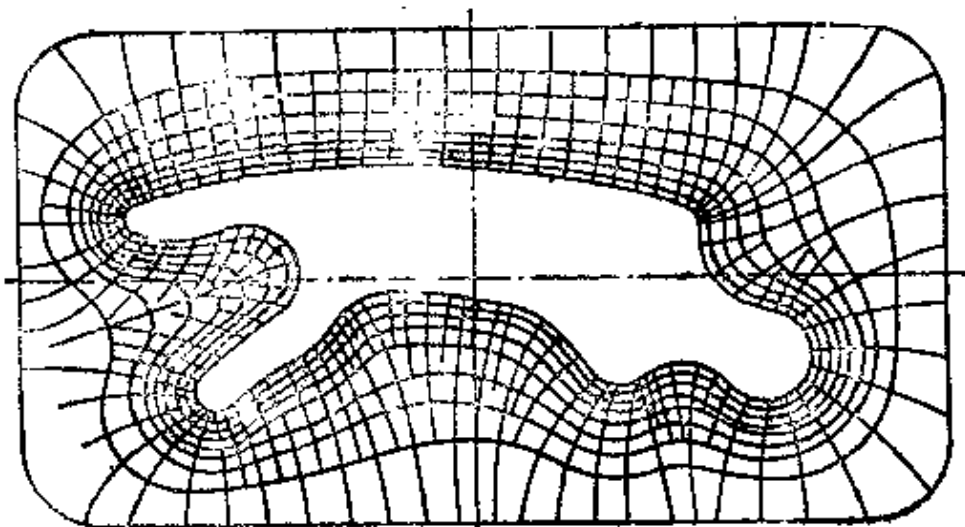


图8.4 实际上采用的拉拔模的孔型设计

9.5.4 关于泛函的极小值（极大值）*

到现在为止，我们说的是关于泛函的极值，并没有精确论及极大值或极小值。从泛函分析的角度，来研究使泛函达到极小值（极大值）的必要和充分的条件。

1) 在分析中已知的外尔斯特拉斯 (Weierstrass) 定理断言，在闭区间 $[a, b]$ 连续和有定义的函数 $f(x)$ 是有界的，并且在此区间内达到自己的真实上限和下限。这些定理可用如下方式推广：

定理 9.8 在闭合的致密集上给定的连续函数是有界的，并且在它的值中间存在着最大值和最小值。

2) 引入可微的泛函概念^[15]。设 X ——赋范空间和 $J(x)$ ——在 X 上定义的泛函。

由点 $x \in X$ 过到相邻点 $x+h$, $h \in X$ 。如果泛函的增量 $\Delta J = J(x+h) - J(x)$ 表示成

$$\Delta J = l_1(h) + \alpha \|h\|, \text{ 当 } \|h\| \rightarrow 0 \text{ 时, } \alpha \rightarrow 0$$

式中, $l_1(h)$ ——线性泛函。那末, $l_1(h)$ 称为强微分或称为泛函 $J(x)$ 在点 x 上的弗雷谢 (Fréchet) 微分, 并用 $dJ(x, h)$ 表示。

我们给出弱微分的概念, 如果存在极限,

$$DJ(x, h) = \frac{d}{d\alpha} J(x + \alpha h) \Big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(x + \alpha h) - J(x)}{\alpha}$$

则它称之为弱微分或泛函 $J(x)$ 在点 x 上的嘎托 (Gateaux) 微分。

强可微性和弱可微性是不同的概念,甚至在有限-度量空间的情况下也是如此。这样,由分析可知,对于数量函数 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 如果 $n \geq 2$, 在任何固定的 h 下, 还不能由导数 $\frac{d}{d\alpha}$

$(x + ah)$ 的存在得出, 它的增量 $f(x+h) - f(x)$ 可以表示成线性部分 (对 h) 和对 h 高于一阶微小项的和的形式, 即函数 $f(x)$ 是可微的。同时, 若存在泛函的强微分, 则也存在弱微分, 并且 $DJ(x, h) = dJ(x, h)$ 。相反的情况则远非经常是正确的。

容易看出, 得到的泛函式 (9-97) 和式 (9-115) 的变分可以做为上述泛函的弱微分。

3) 如果泛函, 对其每个宗量是线性泛函, 则 $f(x, y)$ 的泛函称为双线性的。

在双线性泛函中若规定 $x = y$, 则得到二次泛函。

如果对所有的 $x \neq 0$, $f(x, x) > 0$, 则把二次泛函称为正的。

若存在这样的常数 $C > 0$, 使对所有的 x , $f(x, x) \geq C \|x\|^2$, 则把二次泛函称为强正的。

设泛函 $J(x)$ 的增量可表示为 $\Delta J = l_1(h) + l_2(h) + \beta \|h\|^2$, 并且当 $\|h\| \rightarrow 0$ 时, $\beta \rightarrow 0$, 其中 $l_1(h)$ 是线性的, 而 $l_2(h)$ 是二次的泛函。在此情况下, $l_1(h)$ 是弗雷谢微分, 而 $l_2(h)$ 称为泛函 $J(x)$ 的二阶微分 (强的), 并用 $d^2J(x, h)$ 表示。

4) 我们给出如下的定义, 如果对于充分接近于 x_0 (就空间 X 的范数而言) 的所有 x , 满足不等式:

$$\Delta J = J(x) - J(x_0) \geq 0 (\Delta J = J(x) - J(x_0) \leq 0),$$

则点 x_0 称为泛函的相对极小值 (极大值) 点。

如果对所有的 $x \in X$, 满足上述的不等式, 则点 x_0 称为绝对极小值 (极大值) 点。

极值的必要条件: 如果点 y_0 是可微泛函 $J(y)$ 的极值点, 则

它的强微分等于零：

$$dJ(x_0, h) = 0 \quad (9-118)$$

为了证明，我们研究某一 $h = h_0$ 时泛函的增量。假定 α 足够小，则有

$$\Delta J = dJ(x_0, \alpha h_0) + o(\|\alpha h_0\|) = \alpha dJ(x_0, h_0) + o(|\alpha| \cdot \|h_0\|) \quad (9-119)$$

式中 $o(\alpha)$ ——量级为 α 的无穷小的量。

假设， $dJ(x_0, h) \neq 0$ 。显然 ΔJ 的符号与 α 的符号一致，并且当 $|\alpha|$ 不论如何小时，式 (9-119) 可以是正的和负的，也就是在此情况下不可能有极值。余下的一个就是满足等式 (9-118)。

极小值（极大值）的必要条件：如果点 x_0 是两次可微泛函 $J(x)$ 的极小值（极大值）点，则

$$d^2J(x_0, h) \geq 0 \quad (d^2J(x_0, h) \leq 0) \quad (9-120)$$

为了明确起见，我们讨论极小值，并假设不满足式 (9-120) 的条件，即当某个 h_0 时， $d^2J(x_0, h_0) = C < 0$ 。

泛函的增量

$$\begin{aligned} \Delta J = J(x_0 + \alpha h_0) - J(x_0) &= dJ(x_0, \alpha h_0) + d^2J(x_0, \alpha h_0) + \\ &+ o(\|\alpha h_0\|^2) = \alpha^2 d^2J(x_0, h_0) + o(\alpha^2) = \alpha^2 C + o(\alpha^2) \end{aligned}$$

当 α 足够小时，此增量可以是负的，这和极小值的定义相矛盾。

极小值的充分条件：如果点 x_0 是两次可微泛函 $J(x)$ 的驻点，即 $dJ(x_0, h) = 0$ ，而在该点处二阶微分 $d^2J(x_0, h)$ 是对 h 的强正的二次泛函，则 x_0 使泛函 $J(x)$ 得到极小值。

对泛函的极大值也可以叙述类似的条件。

9.5.5 里兹法

近似解边值问题的很大一类方法是变分法。其主要之点归纳如下。为了近似地解方程

$$Ax = y^*, \quad x \in D_A \subset H, \quad y^* \in H \quad (9-121)$$

构造某一泛函 J ，将实数映射于集 D_A 的元素。可以证明， $J \geq J_0 > -\infty$ ，并且 J 在唯一点，即在方程式 (9-121) 的解 x^* 点上达到本身的最小值 J_0 。其次，构造最小化序列 $x_1, x_2, \dots, x_n,$

使得

$$\lim J(x_n) = J_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

在许多重要的情况下, 此时按空间 H 的范数最小化序列 $\{x_n\}$ 收敛于一点 x^* , 这就是收敛于边值问题的解。

里兹法是建立最小化序列的著名方法之一。

设需要求具有定义域 D_1 的某一泛函 $J(x)$ 的极小值。

我们选择满足如下要求的函数坐标系 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$:

- 1) 在任何有限数中所取的坐标系的元素是线性无关的;
- 2) 在域 D_1 上定义的某一度量中坐标系是完备的;
- 3) 在任何常数值 a_1, a_2, \dots, a_n 下元素

$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (9-122)$$

是属于 D_1 , 且表达式 $J(x_n)$ 有意义。

把它作为有限个变量 a_1, a_2, \dots, a_n 的函数来研究, 我们求出 $J(x_n)$ 达到极小值时的值。为此, 我们解如下的方程组:

$$\frac{\partial J(x_n)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9-123)$$

〔函数 $J(x_n)$ 极值的必要条件〕。确信求得的常数值 a_i 实际上可使 J 的值达到极小值之后, 我们把这些值代入式 (9-122) 中。结果, 我们得到用里兹法求解该变分问题的第 n 级近似值的元素 x_n 。

应当指出, 在假定 D_1 是线性集和要求元素 φ_i 也属于 D_1 后, 仅仅满足要求 3 是比较简单的。例如, 在变分例题 9-9 中, 当域的边界上函数 u 变为零时 D_1 是线性集。

对于非齐次的边界条件, 可以用里兹法求出如下形式的第 n 级近似值:

$$x_n = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (9-124)$$

式中元素 φ_0 满足给定的边界条件, 而 φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

满足相应的齐次边界条件。显然，如果这样选择，无论 a_i 为何值 x_i 都包括在泛函的定义域内。

在一般情况下，求解方程组 (9-123) 是一个极为复杂的问题。如果 $J(x)$ 是二次泛函，它就可以大为简化，此时，相对于 a_i 的方程 $\partial J / \partial a_i = 0$ 是线性的。

实际上在许多情况下，必须限制级数式 9-122 和 9-124 的项数不要太多，因此坐标函数的成功选择具有决定意义。在求解金属压力加工理论的变分问题时，为了选择坐标函数（常称为适合函数）一般利用实验研究的结果。

我们研究下面的例题。

例题 9.11 里兹法

采用里兹法对泊松方程解狄利克莱问题：

$$\nabla^2 u + f(x, y) = 0, \quad u \Big|_{\Gamma} = 0$$

域 Ω 是边为 a 和 b 的矩形（见图 75）。

解 前面曾指出，这个问题可化为如下泛函的最小化问题：

$$J[u(x, y)] = \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2uf(x, y) \right] dx dy \quad (9-125)$$

其边界条件为

$$u \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (9-126)$$

选择如下的方程组作为函数的坐标系：

$$\varphi_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (9-127)$$

正如我们已经知道的那样，这个方程组在域 Ω 中是完备和就范正交的（见表 4）。

在一般情况下最后一个性质对里兹法来说是没有必要的，但它可以使计算结果大为简化。

我们以级数截断式的形式表示近似解：

$$\tilde{u} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l a_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

容易证明，无论变分参数为何值时，都满足边界条件式 (9-126)。这样，在 OA 和 OB 边上 x 或 y 分别等于零，因而 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 或 $\sin \frac{n\pi y}{b}$ 也变为零。

$$\begin{aligned} \text{其次，在 } BC \text{ 边上 } x=a \text{ 和 } \sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0 \\ (m=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同样，在 } AC \text{ 边上 } y=b \text{ 和 } \sin \frac{n\pi y}{b} = \sin n\pi = 0 \\ (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

我们求导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \frac{m\pi}{a} a_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \frac{n\pi}{b} a_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

代入积分号内之后，泛函式 (9-125) 的形式为

$$\begin{aligned} \tilde{J} = J[\tilde{u}(x, y)] = \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 - 2\tilde{u} f(x, y) \right] dx dy \\ (9-128) \end{aligned}$$

可以证明下面的关系式是正确的：

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] a^2 a_{m,n}^2 \\ (9-129) \end{aligned}$$

实际上，和系统式 (9-127) 一样，函数系统

$$\psi_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

在域 Ω 内是就范正交的。计算积分式 (9-129) 时, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 dx dy &= \int_0^a \int_0^b \left(\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \frac{m\pi}{a} a_{mn} \psi_{mn} \right)^2 dx dy = \\ &= \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^l \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{a} a_{mn} a_{pq} (\psi_{mn}, \psi_{pq}) = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \\ &\quad \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 a_{mn}^2 \end{aligned}$$

同样,

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 dx dy = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 a_{mn}^2$$

由此也可得到式 (9-129)。

泛函式 (9-128) 可写成如下形式:

$$\begin{aligned} J(a_{mn}) &= \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] a_{mn}^2 - \\ &\quad - \frac{4}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

极值的必要条件可写成 $\partial J / \partial a_{pq} = 0$

微分后得到

$$\begin{aligned} 2 \left[\left(\frac{p\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b} \right)^2 \right] a_{pq} - \frac{4}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{p\pi x}{a} \\ \times \sin \frac{q\pi y}{b} dx dy = 0 \end{aligned}$$

由此得到

$$a_{pq} = \frac{\frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} dx dy}{\left(\frac{p\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b} \right)^2}$$

(9-130)

这个解和用加廖尔金法得到的问题的解相一致(例题 9-2)。

9.5.6 泛函的数值最小化

用里兹法求解变分问题时,归结到求与 n 个变量 a_1, a_2, \dots, a_n 有关的函数 $J(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 极小值的问题。如果原始泛函是二次的,则方程组 (9-123) 相对于 a_i 是线性的,一般很好确定,而当 $n \leq 100$ 时,在电子计算机上求解它并不会引起困难。

遗憾的是,塑性流动问题通常是非线性的,而与它相应的泛函是非二次的。当列出并求解方程组 (9-123) 时,这会引起数学上的很大困难。

问题的线性化可以避免上述困难。与此同时,为用里兹法找到 n 阶近似值,而广泛采用搜索函数 $J(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 极小值的数值法。

我们研究与求解相应的多维问题有关的基本问题。

9.5.7 函数的凹凸

例如让两个变量函数 $\Phi(x, y)$ 最小化。在具有坐标 x, y, Φ 的三维空间上,函数描写某个曲面。寻找函数 Φ 极小值的问题就意味搜索这个曲面的最低点。

我们使用地形学中所采用的方法,利用函数 $\Phi(x, y)$ 的等高线表示它的凹凸性(图85)。按等高线的形式约定分成三种凹凸类型:盆地型,谷地型和无规则型^[16]。

盆地型凹凸的等高线类似于椭圆(图85 a)。应当指出,在极小值附近即使变量明显变化函数变化也不大。

谷地型凹凸,在等高线上存在大曲率的区段;具有最大曲率点的几何位置称为谷底,或峰顶(图85 b, c)。

无规则凹凸(图85 d)的特征是存在许多极大值、极小值和鞍型部。

搜索极小值的数值法可归结为构成轨迹,沿此轨迹函数减小。

各种搜索法的效果取决于最小化函数的凹凸程度。例如,盆地型凹凸时,沿坐标下降法和梯度法可保证快速收敛。谷地型凹

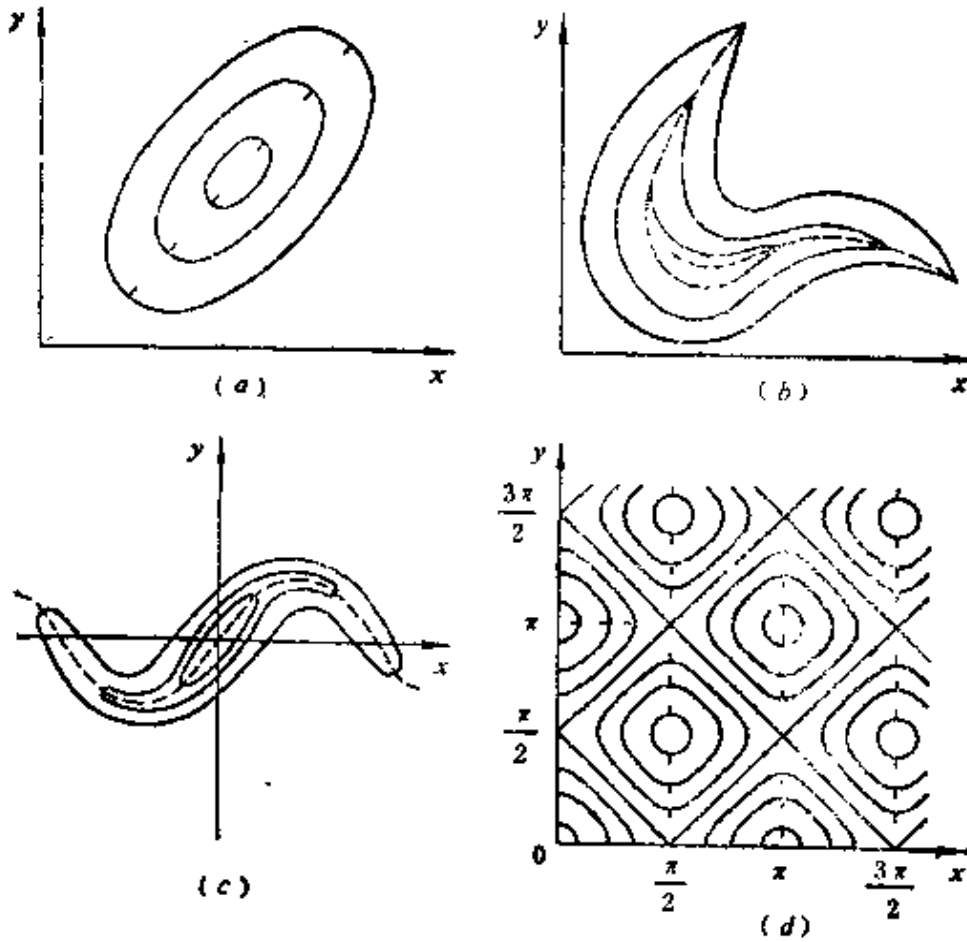


图85 函数的凹凸

(a)盆地型; (b)、(c)谷地型;
 (d)无规则型[函数线图 $\Phi(x, y) = (1 + \sin^2 x)(1 + \sin^2 y)$]

凸时, 必须采用比较麻烦的“冲沟法”。最后, 无规则凹凸时, 可采用偶然搜索法。上述的各种方法已在文献[16]中详细描述。

作为例子我们讲述其中最简单的方法——沿坐标下降法 [高斯 (Gauss) - 塞德尔 (Seidel) 法], 使三个变量的函数 $\Phi(x, y, z)$ 最小化。

我们选择零级近似值 x_0, y_0, z_0 ; 并固定两个变量值 $y = y_0$ 和 $z = z_0$ 。于是函数仅将取决于一个变量 x , 用 $f_1(x) = \Phi(x, y_0, z_0)$ 表示它。求这个函数的极小值, 并用 x_1 表示它。由点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 向点 $B(x_1, y_0, z_0)$ 沿平行于 x 轴方向作步长; 在此步长上函数值减小。

沿平行于 y 轴方向, 由新的点下降, 即研究 $f_2(y) = \Phi(x_1, y, z_0)$, 求出它的极小值并用 y_1 表示它。第二步达到点 $C(x_1, y_1, z_0)$ 。由此点做第三步——平行于 z 轴下降, 并求出函数 $f_3(z) = \Phi(x_1, y_1, z)$ 的极小值。落到点 $D(x_1, y_1, z_1)$, 便完成了一个下降循环。

重复进行这些循环。每一次下降函数不增加, 并且此时函数值都是以它的极小值 $\bar{\Phi} = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为界的。因此, 积分收敛到某个极限 $\tilde{\Phi} \geq \bar{\Phi}$ 。分析收敛过程表明, 盆地型凹凸时, 若等高线类似于其轴与坐标轴平行的椭圆, 则下降很快收敛于极小值, 即 $\tilde{\Phi} = \bar{\Phi}$ 。

9.5.8 非线性问题中的变分法^[17]

最后引出属于非线性边值问题的某些结果, 遗憾的是这些边值问题还研究得很不够。

设 H 是希尔伯特空间, D_A 是在 H 上的致密集。研究一般情况下的非线性算子 A , 此算子是由 D_A 映射到 H 的。

如果在给定点 $x \in D_A$, $A(x+h) - A(x) = U(x, h) + \omega(x, h)$, 式中 $U(x, h)$ ——对 $h \in D_A$ 的线性算子, 且 $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\omega(x, h)}{\|h\|} = 0$, 则 $U(x, h)$ 称为在 x 点 $A(x)$ 的弗雷谢微分, 并用 $dA(x, h)$ 表示。

如果在点 x 上对一切 $h \in D_A$, 存在极限

$$\left. \frac{d}{d\alpha} A(x + \alpha h) \right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A(x + \alpha h) - A(x)}{\alpha} = DA(x, h)$$

那末, $DA(x, h)$ 称为在点 x 上算子 A 的嘎托 (Gato) 变分或微分。

假定, 嘎托微分是线性算子; 因此它可以写成 $DA(x, h) = A'(x)h$ 的形式, 其中 $A'(x)$ 称为在点 x 上算子 A 的导数。

下面定理是正确的。

定理 9.9 试求下面方程的解

$$Ax = y^*, \quad y^* \in H$$

(9-131)

设算子 A 满足如下的条件: 1) $AO = 0$; 2) 嘎托微分 $A'(x)h$ 对任何 $x, h \in D_A$ 存在, 对 h 是线性的, 并且作为 H 的元素对包含点 x 在内的任何二维平面在固定 h 时是连续的; 3) 对任何 $x \in D_A$, 算子 $A'(x)$ 是对称的, 并且是正的。

如果在所列举的条件下方程 (9-131) 的解存在, 则这个解是唯一的, 并可实现如下泛函的极小值:

$$\Phi(x) = \int_0^1 (A\alpha x, x) d\alpha - 2(y^*, x) \quad (9-132)$$

相反, 如果存在实现泛函式 (9-132) 极小值的集 D_A 的元素, 则这个元素满足方程 (9-131)。

这样, 定理证明了如下两个问题的等价性, 即关于方程 (9-131) 的可解性和泛函式 (9-132) 最小化的等价性。关于变分问题解的存在可由如下定理得出。

定理 9.10 设满足前一定理的条件 1—3, 此外还设存在常数 γ , 它使得

$$(A'(x)h, h) \geq \gamma^2 \|h\|^2 \quad x, h \in D_A$$

于是, 1) 泛函式 (9-132) 有下限; 2) 对于这个泛函任何最小化的序列在空间 H 的度量上收敛于某个极限。

这个极限称为泛函式 (9-132) 最小化问题的通解。

设算子 A 是线性的并满足定理 9.9 的条件。于是 $(A\alpha x, x) = (\alpha Ax, x) = \alpha(Ax, x)$, 且泛函式 (9-132) 可写成

$$2\Phi(x) = (Ax, x) - 2(y^*, x) \quad (9-133)$$

例题 9.12 泛函的构成

假定满足定理 9-9 的条件, 来构成泛函, 其最小化与解 8.1 节中提出的泊松方程的狄利克莱问题相等价。

解 由拉普拉斯线性算子可得

$$2\Phi(u) = (-\nabla^2 u, u) - 2(f, u)$$

利用格林公式, 我们将可得到

$$(-\nabla^2 u, u) = - \iint_{\Omega} u \nabla^2 u d\Omega = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega -$$

$$- \int_{\gamma} u \frac{\partial x}{\partial n} d\gamma$$

因为在边界上 $u=0$ ，可消去沿边界 γ 的积分，且

$$2\Phi(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right] dx dy$$

(与例题 9.9 的解相对照)。

9.5.9 关于里兹法的收敛性*

如果 A 是线性正定算子，则如下方程求解的问题：

$$Ax = y^*, \quad x \in D_A \subset H, \quad y^* \in H \quad (9-134)$$

与如下能量泛函最小化的问题相等同：

$$2\Phi(x) = (Ax, x) - 2(y^*, x) \quad (9-135)$$

定理 9.11 如果 A 是正定算子，则按里兹法求得的方程 (9-134) 的近似解在空间 H 的度量上收敛于这个方程的精确的通解。

如果 A 仅仅是正的，而且仅仅是线性算子，则解答里兹法收敛性的问题已相当复杂，随着过渡到非线性算子，困难就更大。

按照定理 9.9，如果关于算子 A 的性质作了一定的假设，则问题 (9-131) 式与由公式 (9-132) 定义的泛函 $\Phi(x)$ 的最小化等价。

如果

$$\lim \Phi(x) = +\infty$$

$$\rho(x, 0) \rightarrow \infty$$

则把泛函 $\Phi(x)$ 称之为在该度量 $\rho(x, y)$ 上增加的。

如果按任何给定的数 $\varepsilon > 0$ ，可以找到这样的 $\delta > 0$ ，使得若 $\rho(x, y) < \delta$ ，而 $\Phi(x) - \Phi(y) > -\varepsilon$ ，那末泛函 $\Phi(x)$ 就称之为在 x 点和在度量 $\rho(x, y)$ 上从上面半连续的，如果在任何点 $x \in D_{\Phi}$ 上这个泛函是从上面半连续的，则此泛函简称为从上面半连续的（在度量 ρ 上）。

我们叙述如下的定理:

定理9.12 设泛函 $\Phi(x)$ 是从上面半连续的, 并且在某度量 ρ 上是增加的; 还假定在其定义域中任何有限维的线性系统上这个泛函是连续可微的。于是1) 泛函 $\Phi(x)$ 有下限; 2) 对任何 n 按里兹法可作近似解; 3) 里兹法确定的近似解的序列对于泛函 $\Phi(x)$ 是最小化的。

思 考 题

1. 什么叫函数的变分? 它满足什么样的条件?
2. 如何确定泛函的一阶和二阶变分?
3. 欧拉方程是否是泛函极值的充分条件?
4. 如何计算完全偏导数?
5. 如何表达泛函极值存在的充分条件?
6. 最小化序列是什么样的?
7. 里兹法与加廖尔金法有什么不同? 它们之间的共同点是什么?
8. 在里兹法中函数的坐标系应满足什么样的条件?
9. 沿坐标下降法的算法是什么样的? 函数的什么样的凹凸性可保证它收敛?

9.6 局部变分法

9.6.1 问题的提法

我们研究如下的问题: 给定下面类型的泛函:

$$J = \iint_D f(x, y, u, p, q) dx dy \quad (9-136)$$

式中 $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ 。

需要求出在具有边界 S 的域 D 中定义的函数 $u(x, y)$, 此函数满足约束条件

$$u^-(x, y) \leq u(x, y) \leq u^+(x, y) \quad (9-137)$$

且使泛函式 (9-136) 最小化。

函数 $u^-(x, y)$ 和 $u^+(x, y)$ 在 $\bar{D} = D + S$ 域中给定, 并且在 \bar{D} 域中处处 $u^+ \geq u^-$ 。容易看出, 没有约束的变分问题 (9.5 节) 是本问题的特殊情况 (此时 $u^+ = +\infty$, 而 $u^- = -\infty$)。

对于函数 $u(x, y)$ 可以给出如下的边界条件:

$$u \Big|_S = g(x, y) \quad (9-138)$$

假定它包括在约束条件式 (9-137) 中, 为此只要做出如下的假定便足够了:

$$u^+(x, y) \Big|_S = u^-(x, y) \Big|_S = g(x, y) \quad (9-139)$$

在平面 (x, y) 上作矩形网格, 并通过点

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad y_k = y_0 + k\Delta y \quad (i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

引平行于坐标轴的直线。

这里 $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$ —— 一些足够小的数。假定, x_0 , y_0 , Δx 和 Δy 的选择可使 D 域包括在由如下不等式确定的矩形 Q 中:

$$x_0 \leq x \leq x_n = x_0 + m\Delta x, \quad y_0 \leq y \leq y_n = y_0 + n\Delta y \quad \bullet$$

设 $P_{i,k}$ —— 具有坐标 (x_i, y_k) 的网格结点。如果结点和以该点为顶的四个网格都位于闭域 $\bar{D} = D + S$ 中, 则此结点称为内结点。其余位于 \bar{D} 中的结点 $P_{i,k}$ 称为边界结点, 而 \bar{D} 域之外的结点称为外结点 (图86)

用 $u_{i,k} = u(x_i, y_k)$ 表示网格函数之值。由外廓 S 向边界点转移边界值式 (9-139), 并对它们假定 $u_{i,k} = g(\xi_i, \eta_k)$ 。这里 (ξ_i, η_k) 是在某种意义上与 (x_i, y_k) 接近的外廓 S 的点。

常常把与 (x_i, y_k) 最接近的外廓 S 的点取作点 (ξ_i, η_k) 。

约束条件式 (9-137) 用如下的约束条件代替:

$$u^-(x_i, y_k) \leq u_{i,k} \leq u^+(x_i, y_k) \quad (9-140)$$

9.6.2 差分格式

可以近似把积分式 (9-136) 表示成对整个属于 \bar{D} 域的网 格

●原书误写为 $\dots = y_0 + n + n\Delta y$ 。——译者

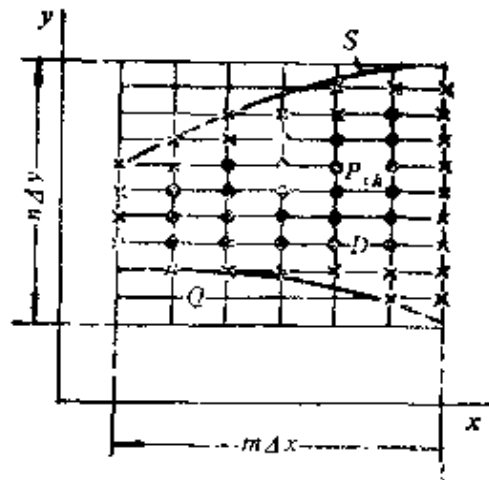


图86 局部变分法

的积分之和:

$$J = I = \sum I_{i,k} \quad (9-141)$$

式中, $I_{i,k}$ ——具有顶点 $P_{i,k}$, $P_{i+1,k}$, $P_{i,k+1}$, $P_{i+1,k+1}$ 的网格的近似积分值:

$$I_{i,k} = f(x_i^*, y_i^*, u_i^*, p_i^*, q_i^*) \Delta x \Delta y \quad (9-142)$$

这里带星号的量表示在各网格中函数的均值。我们提出如下问题: 在约束条件 (9-140) 下对所有内结点 $P_{i,k}$ 确定网格函数值 $u_{i,k}$, 使其总和 (9-141) 取最小值。可以预料所提出的问题解将接近于原来变分问题的解。

9.6.3 计算方法

为了求 $u_{i,k}$, Н.В. 巴尼丘克 (Баничук) 和 Ф.Л. 切尔诺乌斯克 (Черноуско) 提出下列的计算方法。

1) 对所有内结点给出满足约束条件式 (9-140) 的初始近似值 $u_{i,k}^0$ 。

2) 选取足够小的数 $h > 0$ 。

3) 按一定顺序 (例如, 从左向右, 从下向上轮流通过网格横行) 通过向各内部结点加上或减去 h 来依次改变所有内部点的 $u_{i,k}$ 值。

用 $\Phi_{i,k}$ 表示式 (9-142) 型的四个被加数的和, 它们包括在总和 (9-141) 中并与有顶点 $P_{i,k}$ 的网格相对应, 这里

$$\Phi_{ik} = I_{ik} + I_{i-1,k} + I_{i,k-1} + I_{i-1,k-1} \quad (9-143)$$

把值 $u_{ik} + h$ 代入式(9-143)替换 u_{ik} 时, 函数 Φ_{ik} 取值 Φ_{ik}^+ , 而当把 $u_{ik} - h$ 代入时, 则取值 Φ_{ik}^- 。包括在总和式(9-141)中的其余被加数, 当改变 u_{ik} 时不发生变化。于是, 若用 $u_{ik} + h$ 代替 u_{ik} 时, 不违背约束条件(9-140), 而值 Φ_{ik} 减少, 即 $\Phi_{ik}^+ < \Phi_{ik}$, 那末我们在新的近似中取函数 u_{ik} 等于 $u_{ik} + h$ 。

否则, 在这些约束条件中哪怕有一个不满足, 就要类似地检验 $u_{ik} - h$ 的值。如果两个变分都违背约束条件式(9-140)或不减少和值式(9-143), 则保持原值 $u = u_{ik}$ 。为了减少迭代次数, 建议采用下面的实际方法: 对一定的结点 P_{ik} , 它的变化(增加或减少 h) 应使在前一结点上泛函减少。

4) 越过所有的内结点之后就使迭代结束。至此表 u_{ik} 中将保存满足约束条件式(9-140)的新的近似值。如由前述的计算方法得出的那样, 与这个近似相应的泛函值不大于初始近似的泛函。转移到用类似方法实现的下一次迭代, 等等, 直到泛函实际上不再减少, 而解 u_{ik} 在为数不多的点上变化或完全不变。

5) 减少步长 h (例如减少一半), 并按上面所描述的格式使迭代过程进行, 直到步长 h 达到解的要求精度所需的数量级。

6) 在域 \bar{D} 中增加结点数 (例如加倍减小 Δx 或 Δy , 或同时减小 Δx 和 Δy)。同时增加 m 数以使矩形 Q 不变。在新的结点上网格函数值 u_{ik} 用对邻近的点的插值法求得。返回到第3项。

7) 当 Δx 和 Δy 足够小时, 以至继续减少它们不会引起泛函的明显减少以及在某一小 h 下达到迭代的完全收敛, 这时就结束计算过程。

按方法的收敛条件, 每个值 Δx , Δy , 步长 h 在迭代进程中应趋于零, 以使

$$\max(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0, \quad h/\Delta^\alpha \rightarrow 0$$

式中 $\Delta = \min(\Delta x, \Delta y)$, $\alpha \geq 2$ 。

局部变分法的优点是这种方法比较简单, 而且可能是一个统一的方法, 即用一个标准的程序便可以解决一类足够广泛的具有

约束条件的变分问题。

但是无约束的线性边值问题，用有限差分法求解要有效得多（根据消耗的机时）。

例题9.13 局部变分法

用局部变分法解如下的边值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0, \quad u|_S = 0 \quad (9-144)$$

附加的约束条件为

$$u(x, y) \leq a, \quad a \geq 0 \quad (9-145)$$

域 $\bar{D} = D + S$ 是正方形 $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$ ，函数 $f(x, y) = 1$ 。

解 所提出的问题可描述为沿边缘固定均匀受载的正方形膜的挠度。与膜的轮廓平行且与它距离为 a 的刚性平板阻碍挠度。

当 $a = \infty$ 时，所提出的问题可化为在边界值式 (9-144) 下，对于泊松方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0$ 的狄利克莱问题。当 $a < \infty$ 时，

得出实质上更为复杂的边值问题，因为在其中需要在事先不知道的边界上把两类解 ($u < a$ 和 $u = a$) 合在一起，正是这个未知边界将这些解分开的。

我们提出下述的变分问题 (9.5节)：求使如下泛函最小化的函数 $u(x, y)$

$$J = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right] dx dy$$

并满足条件式 (9-144) 和 (9-145)。

按上面所描述的格式用局部变分法求解这个问题在 H·B·巴尼丘克和 Ф·Л·切尔诺乌斯克的著作中列举过。给出的初始近似值形如 $u \equiv a/b$ 。间隔数 n 由 8 到 32 加倍变化，而变化的步长 h 对每个 n 由 0.01 减少到 10^{-6} 。方法的收敛性说明如下：

	$n = 8$		
h	—	1.6×10^{-2}	5×10^{-3}
$-100J$	1.441	1.738	1.740
	$n = 16$		
h		1.6×10^{-3}	5×10^{-4}
$-100J$		1.750	1.752
	$n = 32$		
h		4×10^{-4}	6.1×10^{-5}
$-100J$		1.753	1.7538

对于某些 n , h 在没有约束条件式 (9-145) 的情况下, 给出泛函 J 的值。第一栏对应初始近似值 $u = 0.01$ 。在此情况下精确解给出值 $J = -0.01753$ 。由所引的数据可见, 在 n 不大的情况下, 数值解已经收敛到泛函的精确解。

这种情况下最大挠度是 $u(1/2, 1/2) = 0.07410$; 精确解为 $u(1/2, 1/2) = 0.07367$ 。

在图87上对不同的 α 值给出用平面 $y = 1/2$ 所截的曲面截面。

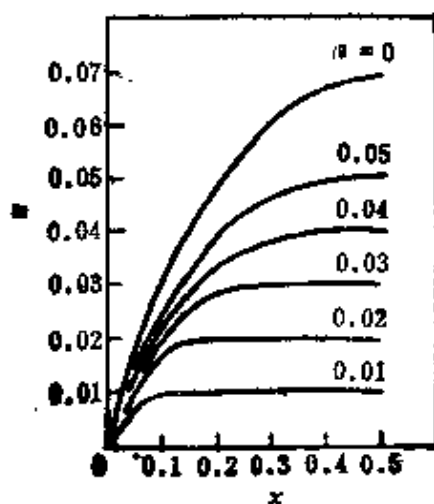


图87 对于例题9.13

9.7 复变函数、保角映射

9.7.1 复数及其运算

把下式称为复数 z ：

$$z = x + iy \quad (9-146)$$

式中 x 和 y ——实数； i ——虚数单位； $i^2 = -1$ 。

数 x 称为 z 的实部，数 y 称为 z 的虚部；此时采用符号 $x = \operatorname{Re}z$ ， $y = \operatorname{Im}(z)$ ，式中 Re 是拉丁字 *realis* (实的) 开头两个字母； Im 是 *imag-inarius* (虚的) 开头两个字母。

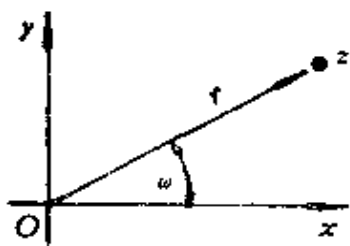


图88 复数的概念图

复数可用平面的点或矢量表示；为此，在平面上定出直角笛卡儿坐标系 xOy ，而数 z 用具有坐标 x 和 y 的点 (图88) 或由坐标原点向点 (x, y)

引的矢径表示。

矢量 Oz 的长度 r 称为数 z 的模并用 $|z|$ 表示，矢量 Oz 与 x 轴正向的夹角 ω (弧度) 称为复数 z 的辐角并用 $\operatorname{Arg} z$ 表示。

显然，因为 $x = r \cos \omega$ ， $y = r \sin \omega$ ，则 $z = x + iy = r(\cos \omega + i \sin \omega)$ 。

我们得到了描述复数的三角学形式。复数的模可以唯一确定，而辐角的确定可精确到 π 的偶数倍的弧度；在数 $z \neq 0$ 的辐角值中间，存在一个且仅仅存在一个包含在 $-\pi$ 和 $+\pi$ 之间的值 (可以包含后者)。称它为辐角的主值，并用 $\arg z$ 表示。这样，

$$-\pi \leq \arg z \leq \pi, \text{ 且 } \operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi$$

式中 n 取所有整数 ($0, \pm 1, \pm 2$)。

如果它的模等于零，则复数等于零。如果它们的实部和虚部都相等，则两个复数相等。

复数 $z = x + iy$ 和 $z = x - iy$ 称互为共轭的。它们以对称于实轴的点表示。仅当为实数时，彼此才相等。

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的加减用下式确定

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)。$$

下面的数称为两个复数 z_1 和 z_2 的乘积

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)。$$

除法可作为乘法的相反运算:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (x_2^2 + y_2^2 \neq 0)$$

9.7.2 函数和映射的概念

设属于某个集 D 的每个复数 $z = x + iy$ 与属于集 E 的一个或某些个复数值 $w = \varphi + i\psi$ 相对应。在此情况下 w 是 z 的函数:

$$w = f(z) \quad (9-147)$$

以后将假定点集 D 和 E 是域, 数 z 称之为自变量 (宗量), 而域 D 是 $f(z)$ 的定义域。

为了研究多值函数, 而研究它们的单值分支有重大的意义。

如果在每个点 z 上 $f(z)$ 的值与 $F(z)$ 值中的一个值相一致, 则单值函数 $f(z)$ 称为多值函数 $F(z)$ 的单值分支。

显然, 如果给出函数式 (9-147), 则也可建立相反的对应关系, 即每个点 $w \in E$ 与域 D 的一个或几个 z 点相对应。这就意味在域 D 中给出 (单值或多值的) 复变量 w 的函数: $z = g(w)$ 。这个函数称为 $f(z)$ 的反函数。显然, 给出函数的域 E 是函数 $g(w)$ 的定义域。

如果在域 D 中给出的单值函数 $f(z)$ 的反函数 $g(w)$ 是域 E 中的单值函数, 则在 D 和 E 域间可建立互为单值的对应关系。此时函数 $f(z)$ 称为单叶函数。

这样, 对于函数 $w = z^2$, 其反函数将是双值函数 $z = \pm \sqrt{w}$, 并且 $z = +\sqrt{w}$ 是它的单值分支, 后者在 D 和 E 域间建立互为单值的对应关系 (图89)。

既然按照函数的定义实数 φ 和 ψ 对应于每对实数 (x, y) , 所以指定复变函数与指定依赖于两个实宗量的如下两个实函数是等价的:

$$\varphi = \varphi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y) \quad (9-148)$$

为了由形为式 (9-147) 的描述过渡到式 (9-148) 的描述形式, 即分成函数的实部和虚部, 必须用 $\varphi + i\psi$ 代替 w , 而用 $x + iy$ 代替 z , 并完成上述的运算, 然后实部等于 φ , 虚部等于 ψ 。

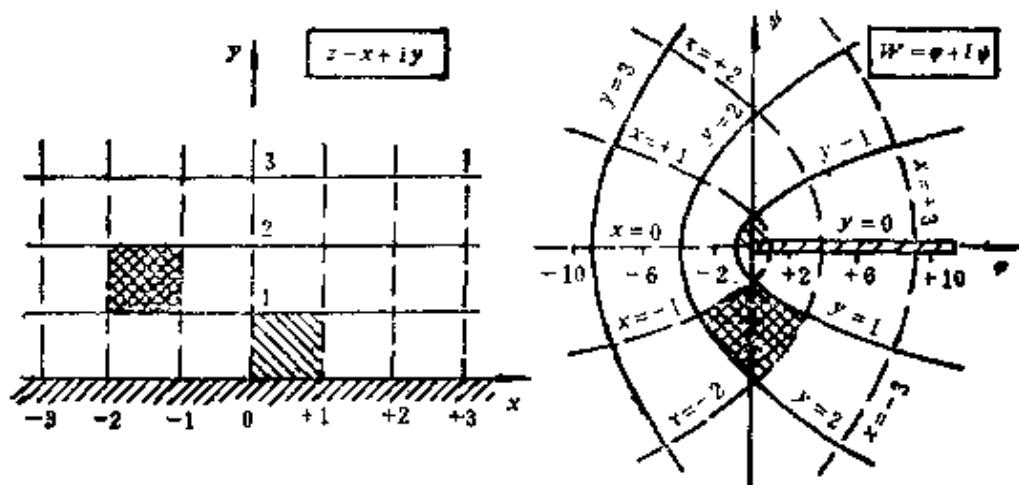


图89 由函数 $w = z^2$ 实现的映射

例如，关系式 $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ，与下式是等价的： $\varphi = x^2 - y^2$ ， $\psi = 2xy$ 。

在许多情况下利用三角函数形式描述变量 z 是方便的。

例如，对函数 $w = z^n$ ，将有

$$w = \varphi + i\psi = [r(\cos\omega + i\sin\omega)]^n = r^n(\cos n\omega + i\sin n\omega)$$

由此， $\varphi = r^n \cos n\omega$ ， $\psi = r^n \sin n\omega$

9.7.3 可微性和解析性

设 $w = f(z)$ 是在某个域 D 内定义的单值复变函数，而且点 z_0 属于这个域。

我们构成差商 $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\Delta w}{\Delta z}$ 。显然它是取决于 z 的函数，并在除 z_0 以外的 D 域内的所有点有定义。

如果存在极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

则它称为函数 $f(z)$ 在 z_0 处的导数，并用下面的符号之一表示：

$$w'(z_0); f'(z_0); \left. \frac{df(z_0)}{dz}, \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0}$$

具有导数的函数 $f(z)$ ，称为在该点是可微的或单演的。

表 7 对最常碰到的复变量 $z = x + iy$ 的函数 $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ 的实部和虚部、零点和奇点

函数 $f(z)$	$\varphi(x, y)$	$\psi(x, y)$	零点 (m -阶数)	孤立奇异性
z	x	y	$z = 0 \quad m = 2$	$z = \infty$ 时的极点 ($m = 1$)
z^2	$x^2 - y^2$	xy	$z = 0 \quad m = 2$	同上
$\frac{1}{z}$	$\frac{x}{x^2 + y^2}$	$-\frac{y}{x^2 + y^2}$	$z = \infty \quad m = 1$	同上: $z = 0$
$\frac{1}{z^2}$	$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$	$-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$	$z = \infty \quad m = 2$	$z = 0$ 时的极点 ($m = 2$)
$\frac{1}{z - (a + ib)}$	$\frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$	$-\frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$	$z = \infty \quad m = 1$	$z = a + ib$ 时的极点 ($m = 1$)
(a, b -实数) \sqrt{z}	$\pm \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right)^{1/2}$	$\pm \left(\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right)^{1/2}$	$z = 0$ 时的一阶零点 (支点)	$z = 0$ 时的支点 ($m = 1$)
e^z	$e^x \cos y$	$e^x \sin y$	—	$z = \infty$ 时的支点 ($m = 1$) $z = \infty$ 时的本性奇点

续表 7

函数 $f(z)$	$\varphi(x, y)$	$\psi(x, y)$	零点 (m -阶数)	孤立奇异性
$\sin z$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\cos x \operatorname{sh} y$	$z = k\pi, m = 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	$z = \infty$ 时的 ± 1 奇点
$\cos z$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$-\sin x \operatorname{sh} y$	$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, m = 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	同上
$\operatorname{sh} z$	$\operatorname{sh} x \operatorname{cos} y$	$\operatorname{ch} x \operatorname{sin} y$	$z = k\pi i, m = 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	同上
$\operatorname{ch} z$	$\operatorname{ch} x \operatorname{cos} y$	$\operatorname{sh} x \operatorname{sin} y$	$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i, m = 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	同上
$\operatorname{tg} z$	$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$\frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$z = k\pi, m = 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时的极点 ($m = 1$)
$\operatorname{th} z$	$\frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$	$\frac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$	$z = k\pi, m = 1$	$z = \infty$ 时本性奇点
$\ln z$	$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$	$\operatorname{arg} z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	$z = 1, m = 1$ (对应 $k = 0$ 时分支)	$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时的极点 $z = 0, z = \infty$ 时无限阶的支点, 两个本性奇点

如果单值函数不仅在给定点是可微的,而且在给定点的某邻域也是可微的,那末它称为在该点是解析的。

如果函数 $w = f(z)$ 在域 D 每点是解析的,则它称之为在该域是解析的(表7)。

微分计算已知的基本规则可以移用到复变函数上。

我们来求复变函数 $w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ 的可微性条件。

这个条件可归结为如下极限的存在:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta \varphi + i \Delta \psi}{\Delta x + i \Delta y}$$

定理9.13 为了在某个域 D 中定义的函数 $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ 作为复变函数在这个域的 z 点上可微的,必要和充分的条件是函数 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 在同一点是可微的(作为两个实变函数),此外还要满足柯西-黎曼(达朗倍尔-欧拉)条件:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9-149)$$

在满足定理的所有条件时,导数 $f'(z)$ 可以是如下形式之一:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (9-150)$$

在域 D 内解析的函数 $f(z) = \varphi + i\psi$ 的实部和虚部是拉普拉斯方程的解,即调和函数。

9.7.4 保角映射

每个形如 $w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ 的复变函数存在着 z 平面上某个集 D 向 w 平面上某个另外的集 E 的映射。

最有意义的是用解析函数实现的那些映射的个别情况,即所谓保角映射。

设给定在域 D 内单叶的函数 $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ 。通常自变量 $z = x + iy$ 将用平面 z 的点表示,而函数值 $w = \varphi + i\psi$

用 w 平面上的点表示。

在 xOy 平面上 z 点沿着某位于域 D 内由 z_0 点引出的曲线 C 运动时，在 $\varphi O\psi$ 平面上它的相应映象 w 描写为由某一点 w_0 引出的曲线 γ 。

这样，任何连续函数可把每个 z 点映射到某个 w 点，而每个曲线 C 可映射到某个曲线 γ (图90)。

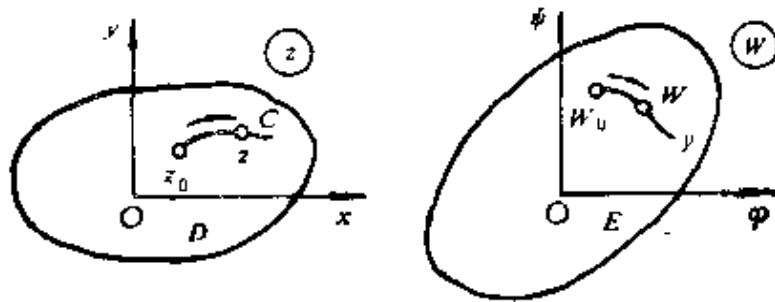


图90 域的映射

如果映射函数不仅是连续的，而且也是解析的，则在函数导数 $f'(z) \neq 0$ 的点的邻域内，映射将具有下述的重要性质。由这个点引出的所有方向的无限小单元：1) 其长度以等于导数的模 $|f'(z)|$ 的同一倍数增加（或减少）；2) 以等于导数的辐角 $\arg f'(z)$ 的同样的角度转动。

因此，在无穷小域中的图形可变换成与本身相似的图形，即保留着形状 (图91)。 这样的变换称为保角映射。

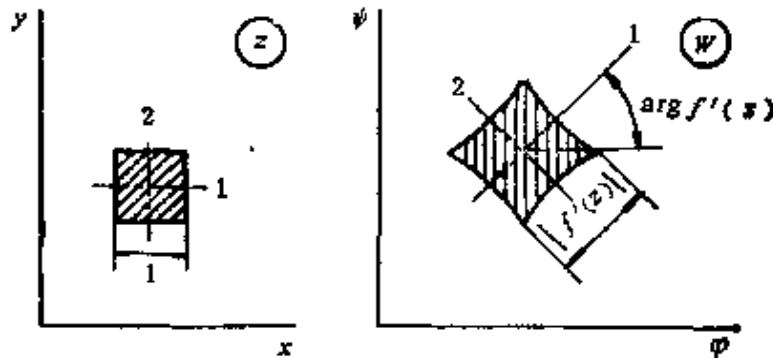


图91 单元图形的保角映射

按柯西-黎曼条件得出，面积收缩系数，也就是映射的雅可

比式等于导数模的平方。

虽然终了尺寸的图形歪曲了，但两个曲线间的夹角并没有改变（角的保守性）。特别是，坐标 $x = \text{常数}$ 和 $y = \text{常数}$ 在保角映射中可变换成两族互相正交的曲线。借助解析函数可以得到许多正交曲线坐标系。

9.7.5 保角映射理论的一般原理

以后我们将局限于研究互为单值的保角映射。有各种不同的解析函数，可以借助于这些函数来研究能实现的保角映射。但是为了实际的目的，相反的问题，即所谓的保角映射理论的如下基本问题有着重大意义。这个问题就是给出两个域 D 和 E ，要求作出这些域中之一向另一个域实现保角映射的函数。

显然，在上述的一般形式下，这个问题是无法解决的。不能把全的或开式的平面 z 保角地映射到平面 w 的有界域 E 上去。事实上，甚至假如存在这种映射，则函数 $w = f(z)$ 在所有的开式平面上会是解析的，并同时也是有界的，因为这个函数的所有值会位于域 E 。因而，由于刘维尔 (Liouville) 定理，这个函数应当是常数，这是不可能的。

其次，多连域不能互为单值且连续地映射到单连域上。

保角映射理论的发展可归结为分析保角映射的存在和它的唯一性以及对某些个别情况的研究，在这些情况下映射可归结为单元函数的连续应用。将要详细研究保角映射的近似方法。

让我们来叙述保角映射理论的基本定理（黎曼定理）：

定理 9.14 设 D 和 E 是任意的单连域，它既不同于全平面也不同于具有删去点的平面， z_0 和 w_0 是它们的任何的内部点，而 θ_0 是任何的实数。存在着域 D 的 $w = f(z)$ 向域 E 的唯一的保角映射，它满足如下的条件：

$$f(z_0) = w_0, \quad \text{Arg} f'(z) = \theta_0. \quad (9-151)$$

如关系式 (9-151) 所指出，给定域向另一个域的保角映射取决于三个实参数〔式 (9-151) 的第一个方程表示两个复数相等，并可化为两个实数方程〕，为了单值的确定保角映射常常利用也

包括三个实参数的另外条件，而不用式 (9-151)。

例如，给出 D 的一个内部点和一个边界上的点的映象：

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1 \quad (9-152)$$

(z_0, w_0 —— D 和 E 的内部点； z_1, w_1 —— D 和 E 的边界点。)

可以要求位于 D 边界上的三个任意点 z_1, z_2 和 z_3 映射到域 E 上任意给定的边界点 w_1, w_2 和 w_3 。

单值确定映射单值性的条件称为正规化条件或正规保角映射。

还要谈及对于实际建立保角映射关系至为重要的两个原理。

边界对应原理 设单连域 D 和 E 分别用曲线 S 和 γ 所包围，并且函数 $w = f(z)$ 在域 D 上是解析的，在闭域 $\bar{D} = D + S$ 上是连续的，此函数建立 S 和 γ 间互为单值的对应关系。于是 $w = f(z)$ 也可实现域 D 向域 E 的单叶保角映射（边界 S 和 γ 可以通过无穷远点 $z = \infty$ ）。

域的保守原理 如果在域 D 中函数 $w = f(z)$ 在解析上不为常数，则此函数将 D 映射于其上的点集 E 也是域，并且域 E 和 D 的边界绕行方向保持不变。

9.7.6 与保角映射有关的曲线坐标

设给定解析函数

$$w = w(z) \quad (9-153)$$

式中 $w = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$ ，此函数实现 z 平面的域 D 向 w 平面的域 E 的保角映射。

方程式 (9-153) 与下面的两个关系式是等价的：

$$x = x(\varphi, \psi), \quad y = y(\varphi, \psi) \quad (9-154)$$

因此， φ 和 ψ 值可以看作 z 平面的点 (x, y) 的曲线坐标来研究。 $\varphi(x, y) = \text{常数}$ 和 $\psi(x, y) = \text{常数}$ 的曲线形成正交网，所以曲线坐标系是正交的。

因为此时 $dz^2 = dx^2 + dy^2 = |z'(w)|^2 (d\varphi^2 + d\psi^2)$ ，所以拉梅系数等于 (9-153) 式逆函数 $z = z(w)$ 的导数的模： $H_\varphi = H_\psi = |z'(w)|$ 。

设给定域 D 的任何一点 M 。通过它我们引出 $\varphi = \text{常数}$ 和 $\psi = \text{常数}$ 的曲线 (图92) 并采用如下标记: b_φ ——单位矢量, 它切于 $\varphi = \text{常数}$ 的曲线, 并指向 φ 增大的方向; b_ψ ——单位矢量, 它切于 $\psi = \text{常数}$ 的曲线, 并指向 ψ 增大的方向。因此, 矢量 b_φ 和 b_ψ 在 M 点形成局部基底 (见1.1节)。在 M 点有笛卡儿坐标 (a_x, a_y) 的任何矢量 \vec{a} , 在局部基底上将有投影 (a_φ, a_ψ) , 并且

$$a_\varphi + ia_\psi = e^{-i\alpha} (a_x + ia_y),$$

式中 α ——单位矢量 b_φ 与 Ox 轴的夹角, 并从 x 轴起沿正向计。

为了计算 $e^{i\alpha}$, 我们在单位矢量 b_ψ 方向给 z 点位移 dz 。于是相应点 w 在水平方向移动, 并且 $dz = e^{i\alpha} |dz|$, $dw = |dw'|$, 由此

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{z'(w)dw}{|z'(w)||dw|} = \frac{z'(w)}{|z'(w)|}$$

最后, 意味着

$$a_\varphi + ia_\psi = \frac{\overline{z'(w)}}{|z'(w)|} (a_x + ia_y) \quad (9-155)$$

这样, 连续介质平面流动时, 曲线坐标 (φ, ψ) 中的速度矢量的分量与笛卡儿坐标 (x_1, x_2) 中的速度矢量的分量可用如下形式联系起来:

$$v_\varphi + iv_\psi = \frac{\overline{z'(w)}}{|z'(w)|} (v_1 + iv_2) \quad (9-156)$$

对于应力将有如下的关系:

$$\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\psi\psi} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad (9-157)$$

$$\sigma_{\varphi\psi} - \sigma_{\psi\varphi} + 2i\sigma_{\varphi\psi} = (\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12})e^{2i\alpha} \quad (9-158)$$

并且

$$e^{2i\alpha} = \frac{[z'(w)]^2}{z'(w)\overline{z'(w)}} = \frac{z'(w)}{\overline{z'(w)}}$$

9.7.7 向圆域上的映射

现在我们研究位于 z 平面上的域 D 向 ζ 平面上域 Δ 的映射，域 Δ 或者是圆，或者是圆环，且 $\zeta = 0$ 的坐标原点位于中心。

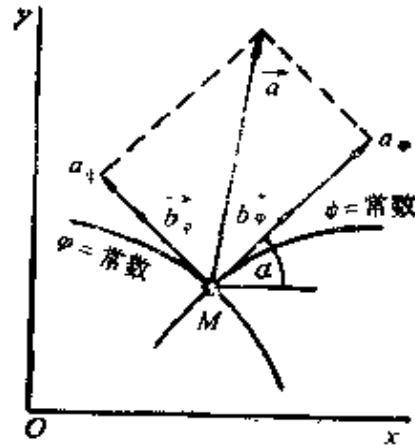


图92 与保角映射有关的曲线坐标

若取 $\zeta = re^{i\omega}$ ，则我们将 ζ 平面上的极坐标 r 和 ω 引到研究中来。

ζ 平面 $r = \text{常数}$ 和 $\omega = \text{常数}$ 的圆周在 z 平面上与某些曲线相对应，我们把这些曲线也标记为 $r = \text{常数}$ 和 $\omega = \text{常数}$ 。

设 D 是由封闭外廓 S 包围的有限单连域，而 Δ 是以 $\zeta = 0$ 点为中心 $r = 1$ 为半径的圆。假定 $z = 0$ 和 $\zeta = 0$ 的点彼此互相对应，我们可求出 z 平面上 $r = \text{常数}$ 的曲线是一族环绕 $z = 0$ 点的闭合曲线。 $\omega = \text{常数}$ 的曲线由 $z = 0$ 的点引出，到外廓 S 终结。外廓 S 本身对应于 $r = 1$ (图93)。

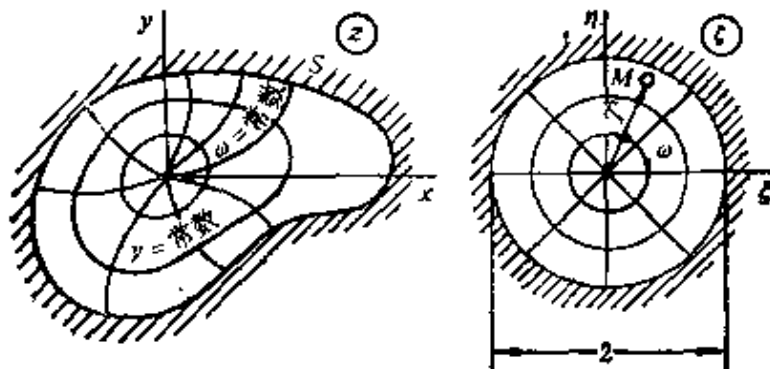


图93 向圆域上映射

当域 D 是由两个封闭外廓 S_1 和 S_2 所包围时, 也可以得到类似的景象, 且映射到圆环 $a < r < 1$ 上。

r 和 ω 的数值可以看作 z 平面的点 (x, y) 的曲线坐标。

因为 $dz^2 = dx^2 + dy^2 = |z'(\zeta)|^2 (d\xi^2 + d\eta^2) = |z'(\zeta)|^2 \cdot (dr^2 + r^2 d\omega^2)$, 所以这种正交坐标系的拉梅系数等于 $H_r = |z'(\zeta)|$, $H_\omega = r |z'(\zeta)|$, 并对于在域 D 的 M 点上给出的任意矢量:

$$a_r + ia_\omega = \frac{\bar{\zeta}}{r} \frac{\overline{z'(\zeta)}}{|z'(\zeta)|} (a_x + ia_y)$$

与式 (9-156)~(9-158) 的关系类似, 可以写成

$$v_r + iv_\omega = \frac{\bar{\zeta}}{r} \frac{\overline{z'(\zeta)}}{|z'(\zeta)|} (v_1 + iv_2) \quad (9-159)$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\omega\omega} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad (9-160)$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\omega\omega} + 2i\sigma_{r\omega} = (\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12}) e^{2i\alpha} \quad (9-161)$$

式中, $e^{2i\alpha} = \frac{\bar{\zeta}^2 z'(\zeta)}{r^2 z'(\zeta)}$

9.7.8 多边形映射

如上面已指出的, 黎曼定理证实了解析函数的存在和唯一性, 而此解析函数可实现一个单连域向另一个保角映射, 然而没有给出实际建立这个函数的方法。但是从应用的观点, 对于重要的一类由直线段组成的多边形域, 许瓦兹 (Schwarz) 和克里斯托弗尔 (Christoffel) 已成功地得到了精确的公式, 通过这些公式可实现多边形内部向单个圆或上半平面的映射。

我们来研究位于 z 平面上的多边形域 (图94a)。首先假定按边的绕行正向编号的多边形的顶点 $A_k (k=1, 2, \dots, n)$ 是复平面的有限个点。

令 α_k 是所表示的顶角, 其值是 π 或 180° 的一部分, 且解析函数 $z = z(\zeta)$ 可实现复变量 $\zeta = \xi + i\eta$ 的上半平面 $Im \zeta > 0$ 向多边形内部映射。此时实轴 ξ 的点 a_k 将与角顶 A_k 相对应。

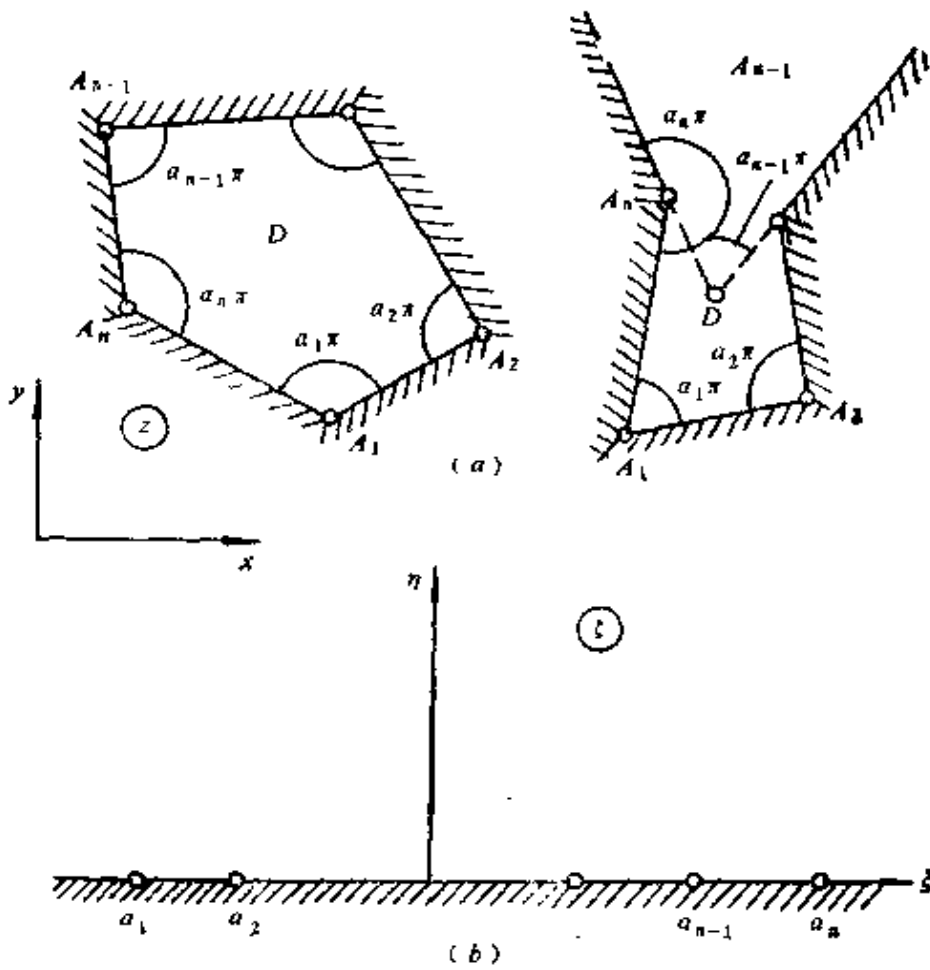


图94 多边形映射

以后将把映射参数写成表的形式

k	A_k	a_k	a_k
-----	-------	-------	-------

在此表中列入复数 A_k 及实数 a_k 和 α_k 。

显然，并不是它们都能够任意给出。例如，角 α_k 应当满足已知的关系式

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2 \quad (9-162)$$

其次，点 a_k (例如 a_1, a_{n-1}, a_n) 中可以任选三个 (见本节)，其余应当由问题的条件确定。

实现上述映射的许阔兹-克里斯托弗尔公式形如：

$$z(\zeta) = C_1 \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

$$\times d\xi + C_2 \quad (9-163)$$

如果多边形 D 的一个顶点 (例如, 顶点 A_m) 与无穷远的点 $a_m = \infty$ 相对应, 则在许阔兹-克里斯托弗尔公式中关于这个顶点的乘子便消失。

在此情况下,

$$z(\xi) = C_1 \int_{\xi_0}^{\xi} (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (\xi - a_{m-1})^{\alpha_{m-1} - 1} \\ \times (\xi - a_{m+1})^{\alpha_{m+1} - 1} (\xi - a_n)^{\alpha_n - 1} d\xi + C_2$$

对于一个或几个顶点位于无穷远的点的多边形来说, 公式(9-163)仍然有效。顶点在无穷大的两直线间的夹角可以定义为这两条直线在有限远交点处的一个负角 (图94, b)。

最后, 一个圆的内部向多边形内部的映射也可用公式(9-163)来完成。这里 a_k , $|a_k| = 1$ 是与顶点 A_k 相对应的一个单位圆的点。

例题 9.14 四边形向半平面的映射

顶角为 0 , $(1+\alpha)\pi$, $(1-\alpha)\pi$, 0 的四边形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ (图95) 向上半平面上的保角映射。

解 映射参数由标准格式给出 (见表8)

表 8 映射参数

k	A_k	a_k	α_k
1	∞	0	0
2	—	$1+\alpha$	α
3	0	$1-\alpha$	1
4	∞	0	∞

由许阔兹-克里斯托弗尔公式得到,

$$z(\xi) = C_1 \int_{\xi_0}^{\xi} (\xi - 0)^{\alpha - 1} (\xi - a)^{1+\alpha - 1} (\xi - 1)^{1-\alpha - 1} d\xi + C_2$$

$$= C_1 \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left(\frac{\zeta - a}{\zeta - 1} \right)^{\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta} + C_2$$

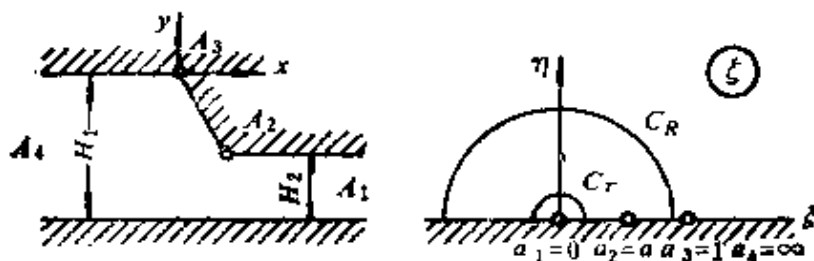


图95 四边形向半平面上的映射

把 z 平面上的坐标原点放到 a_3 点上，并取 $\zeta_0 = 1$ ，则有 $C_2 = z(\zeta_0) = 0$

为了确定 C_1 和 a ，我们分别引出半圆周 C_R 和 C_r ，它们的中心为 $\zeta_0 = 0$ 的点，半径分别为无穷大和无穷小（图95）。

在 z 平面上圆周 C_r 对应于射线 $A_2 A_1$ 向射线 $A_1 A_4$ 的过渡，且增量

$$\Delta z = -iH_2 + O(r) \tag{9-164}$$

式中， $O(r)$ —— r 的无穷小量。圆周 C_R 对应于射线 $A_3 A_4$ 向射线 $A_1 A_4$ 过渡，且增量

$$\Delta z = -iH_1 + O(1/R)$$

我们研究沿 C_r 的积分。在此情况下， ζ 很小并且积分号内的式子有如下形式：

$$\left(\frac{\zeta - a}{\zeta - 1} \right)^{\alpha} \frac{1}{\zeta} = \frac{a^{\alpha}}{\zeta} + O(r)$$

由于代入式 (9-163) 得到

$$\Delta z = C_1 \int_{C_r} \left(\frac{\zeta - a}{\zeta - 1} \right)^{\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta} = C_1 \int_{C_r} a^{\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta} = C_1 a^{\alpha} i\pi$$

与式 (9-164) 对比，则有 $H_2 = -C_1 a^{\alpha} \pi$

同样，在周线 C_R 上，积分号内的公式有如下形式：

$$\left(\frac{\zeta - a}{\zeta - 1} \right)^{\alpha} \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\zeta} + O(1/R)$$

和 $\Delta z = C_1 \int_{c_R} \frac{d\xi}{\xi} = C_1 i\pi$, 这给出 $H_1 = -C_1 \pi$

因而, $C_1 = -\frac{H_1}{\pi}$, $a = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{1/a}$ 和

$$z(\xi) = -\frac{H_1}{\pi} \int_1^\xi \left[\frac{\xi - \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{1/a}}{\xi - 1} \right]^a \frac{d\xi}{\xi} \quad (9-165)$$

思考题

1. 什么样的复变函数称为单叶的?
2. 如何描述柯西-黎曼条件?
3. 什么样的函数称为在点上解析的? 什么样的函数称为可在域上解析的?
4. 什么是保角映射? 什么样的复变函数可实现保角映射?
5. 保角映射理论的基本问题是什么?
6. 用什么样的方法使保角映射产生曲线的正交坐标? 它具有什么样的性质?
7. 许瓦兹-克里斯托弗尔公式可实现什么样的保角映射?

9.8 复 势

9.8.1 平面流动, 物理平面

连续介质平面流动的特征是所有流线与固定平面平行, 并且在相应的 (也就是位于上述平面的一个法线上的) 点的所有速度具有相同的大小和方向 (图96)。

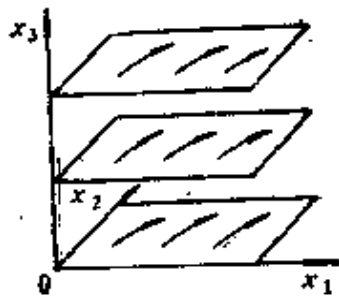


图96 平面流动

因此研究一个平行平面上的运动就足够了，这个平面称为流动平面，或物理平面。我们在此平面上固定笛卡儿坐标系 $x_1 O x_2$ 。在 $x_1 O x_2$ 平面上引出的每条线，实际上是其母线垂直于平面的圆柱表面的导路。尽管实际上发生的是无限圆柱体的包绕，但包绕物体的围线是用平面上的某条线表示。

作用于包绕物体的力和连续介质的通量 (9.1节) 等等的 所有值将指的是在垂直于 $x_1 O x_2$ 平面方向上的单位长度。

速度场可用下面形式表示：

$$v_1 = v_1(x_1, x_2), v_2 = v_2(x_1, x_2), v_3 = 0$$

我们将假定满足不可压缩性条件

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (9-166)$$

9.8.2 流函数

我们引入流函数，并假设

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (9-167)$$

容易看出，此时恒能满足不可压缩方程 (9-166) (见例题 3-4)。

函数 $\psi(x_1, x_2)$ 有着简单的物理意义，沿着流线流函数 ψ 保持常数。换言之流线的总和是函数的等高线族

$$\psi(x_1, x_2) = C \quad (9-168)$$

在流动平面上我们取出一个由线 $\psi = \psi_1$ 和 $\psi = \psi_2$ (图97) 包围的流管，并引出某个围线 $A_1 A_2$ ，也就是流管的断面。

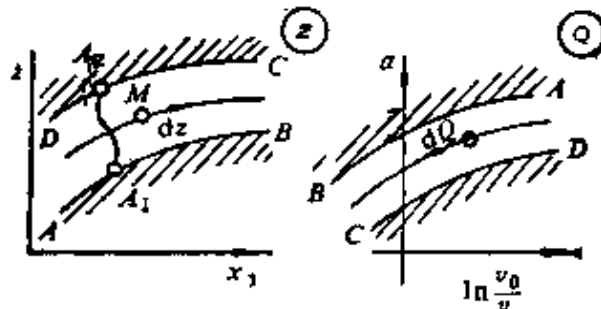


图97 连续介质通量的计算

通过这个断面，连续介质的通量（即与流动平面垂直的方向上单位长度的秒体积流量 B ）为

$$B = \int_{A_1}^{A_2} v_n dl = \int_{A_1}^{A_2} (v_1 n_1 + v_2 n_2) dl = \int_{A_1}^{A_2} [v_1 (n_1 dl) + v_2 (n_2 dl)] = \int_{A_1}^{A_2} (v_1 dx_2 - v_2 dx_1) \textcircled{\bullet}$$

式中 n_1, n_2 ——围线 $A_1 A_2$ 的微元 ds 法线的方向余弦。

把式 (9-167) 的速度分量代入这个公式后，得到

$$B = \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{A_1}^{A_2} d\psi = \psi(A_2) - \psi(A_1) \quad (9-169)$$

这样，在速度场的任何两个点上流函数值的差等于连续介质流过流管截面的通量。这个流管由通过所选择点的流线所包围。

以后我们将任意地把流线中的一条看作是零点，只须假设，沿着这个流线 $\psi(x_1, x_2) = 0$ 。可以这样做的原因在于，按等式 (9-167) 确定的流函数只差一个附加常数。在此情况下，在某条流线上公式 (9-168) 中的任意常数值将等于通过流管的连续介质的通量，这个流管是由这个流线形成的，并且是任意选择零线的。

9.8.3 复势

对于平面流动的情况，有势向量场 $\vec{v} = \text{grad}\varphi$ 有如下的分量

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \text{ 和 } v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad (9-170)$$

同时 $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$, $v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ 。因而在流动域内势函数 $\varphi(x_1, x_2)$ 和流函数 $\psi(x_1, x_2)$ 可用达朗培尔-欧拉(柯西-黎曼) 关系联

① 原书误写为 $\int_{A_1}^{A_2} v_1 dx_2 - v_2 dx_1$ 。——译者

系起来:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (9-171)$$

$$\text{而函数 } w(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2) \quad (9-172)$$

其中 $z = x_1 + ix_2$, 是在该域解析的。

函数 $w(z)$ 称为特征函数, 或复势。

我们通过速度 \vec{v} 与 x_1 轴形成的角 α 表示, 于是则有

$$\vec{v} = v_1 + iv_2 = ve^{i\alpha} = w'(z) \quad (9-173)$$

以后还将利用“复速度”的概念

$$v_1 - iv_2 = \overline{w'(z)} \quad (9-174)$$

显然, $\varphi = \text{常数}$ 的曲线 (等势线) 与 $\psi = \text{常数}$ 的流线正交, 在速度矢量方向上势 $\varphi(x_1, x_2)$ 增加。

9.8.4 应变速率分量

在有势流动的条件下, 我们求应变速率分量。

由式 (9-169) 和 (9-170) 可以得到

$$\xi_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \text{Re}w''(z)$$

$$\xi_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = -\text{Re}w''(z)$$

$$\xi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = -\text{Im}w''(z)$$

其中符号 $\text{Re}w''(z)$ 和 $\text{Im}w''(z)$ 表示复量 $w''(z)$ 的实部和虚部。

因而, 除了复速度式 (9-173) 外, 还要研究“复应变速率”

$$\Xi = \xi_{11} - i\xi_{12} = w''(z) \quad (9-175)$$

它的模的二倍等于切应变速率强度

$$H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{12}^2} = 2|w''(z)| \quad (9-176)$$

对 x_1 轴的倾角, 也就是二倍的 ω 角, 决定着应变主轴

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\xi_{12}}{\xi_{11} - \xi_{22}} = \frac{\operatorname{Im} w''(z)}{\operatorname{Re} w''(z)}$$

9.8.5 应变分量

我们还要研究一个函数，也就是复应变：

$$E = \varepsilon_{11} - i\varepsilon_{12}$$

应变分量由如下关系确定： $\xi_{11} = d\varepsilon_{11}/dt$ ， $\xi_{12} = d\varepsilon_{12}/dt$ 。

因而 $dE = w''(z)dt$ 和 $2|dE| = 2|w''(z)|dt = H dt$ 。

在流动域中，取任意质点（见图97）。在 dt 时间内这个质点的位移由矢量 $\overrightarrow{dz} = \overrightarrow{v}dt = \overline{w'(z)} dt$ 来描述。

考虑到， $\overline{w'(z)} = ve^{i\alpha}$ 和 $w'(z) = ve^{-i\alpha}$ ，其中 v ——速度矢量的模， α ——速度矢量对 x_1 轴的偏角，则有 $dt = \frac{dz}{w'(z)} e^{-2i\alpha}$ 。

结果

$$dE = e^{-2i\alpha} \frac{w''(z) dz}{w'(z)} = e^{-2i\alpha} d \ln w'(z)$$

我们引入新的解析函数 $Q = \ln \frac{v_0}{w'(z)} = \ln \frac{v_0}{v} + i\alpha$ ，其中 v_0 ——某一正数。在 Q 平面上，质点的映象移动了矢量 dQ ，通过的路程为 $|dQ|$ （见图97）。

因为 $dQ = -d \ln w'(z)$ ，所以我们得到如下的关系： $dE = -e^{-2i\alpha} dQ$ 。

回忆起 $|e^{-2i\alpha}| = 1$ ，求得

$$dA = 2|dE| = 2|dQ| \quad (9-177)$$

式中 A ——由公式 (3-47) 确定的切变形程度。

沿质点运动的轨迹完成积分。

这样，在平面无旋流动的条件下，质点在平面上运动时，切变形程度的增量等于质点的映象在 Q 平面上所通过路程的二倍。

举例：研究对应于各种特征函数不可压缩介质的平面无旋流动。

1) 线性函数

$$w = Az \tag{9-178}$$

这里 $A = a_1 + ia_2$, 其中 a_1 和 a_2 —— 实数; 附加常数, 以后处处都省略。

速度场 $\vec{v} = \overline{w'(z)} = \overline{A} = a_1 - ia_2$ 决定着平行于矢量 \overline{A} 的连续介质的均匀运动 (图98)。

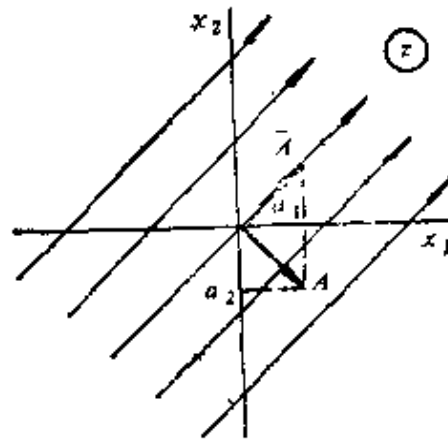


图98 连续介质的均匀运动

应变速率分量等于零:

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{12} = H = 0$$

2) 二次函数

$$w = Az^2 \tag{9-179}$$

式中, A —— 实数, 它确定速度场 $\vec{v} = \overline{w'(z)} = 2\overline{A}z$, 该速度场具有分量 $v_1 = 2Ax_1$ 和 $v_2 = -2Ax_2$ 以及在流动域内不变的应变速率分量: $\xi = \xi_{11} - i\xi_{12} = w''(z) = 2A$ 。由此 $\xi_{11} = -\xi_{22} = 2A$, $\xi_{12} = 0$, $H = 4|A|$ 。

流线 $\psi(x_1, x_2) = 2Ax_1x_2 = \text{常数}$ 是等边双曲线。对于这些双曲线坐标轴是渐近线; 等势线 $\varphi(x_1, x_2) = A(x_1^2 - x_2^2) = \text{常数}$ 也是双曲线, 其渐近线是转 45° 的坐标轴 (图99)。

3) 对数函数

$$w = A \ln z \tag{9-180}$$

规定 A 是实数。假定 $z = r(\cos\omega + i\sin\omega) = re^{i\omega}$, 得到 $w = \varphi + i\psi = A \ln r + iA\omega$, 由此 $\varphi = A \ln r$ 和 $\psi = A\omega$ 。

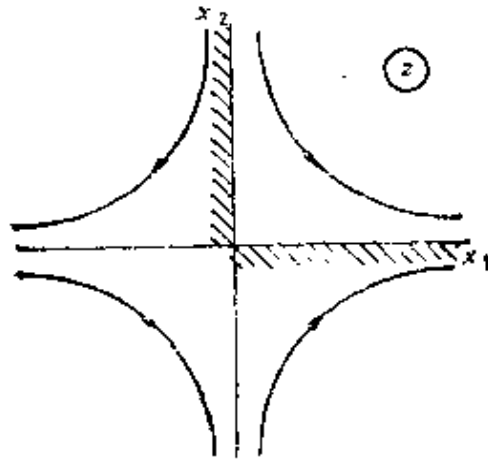


图99 直角绕流

流线是由坐标原点出来的 $\omega = \text{常数}$ 的射线；等势线是与它正交的圆（图100）。

$$\text{流动速度等于： } \vec{v} = \frac{A}{z} = \frac{Ae^{i\omega}}{r}$$

流动景象与连续介质在位于坐标原点的点源 ($A > 0$) (图100, a) 或洞 ($A < 0$) (图100, b) 流出流入的平面流动相对应。

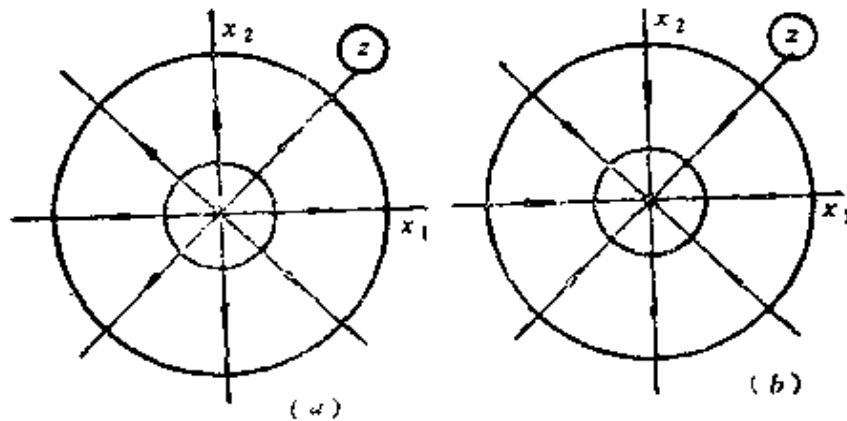


图100 由点源流动(a)和向点洞流动(b)

对于复应变速率的表达式取如下形式：

$$\Xi = \xi_{11} - i\xi_{12} = w''(z) = -\frac{A}{z^2} = -\frac{A[(x_1^2 - x_2^2) - 2ix_1x_2]}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

切应变速率强度与半径 r 的平方成反比：

$$H = 2 |w''(z)| = \frac{2 |A|}{r^2}$$

我们寻求常数 A 的物理意义。为此目的我们引入源或洞的出量（强度） B ，这就要把这个量确定为连续介质沿封闭围线的秒体积流量，此封闭围线包含源或洞，对于源秒体积流量是正的或对于洞为负的。

选择半径为 R ，中心为坐标原点的圆周作封闭围线 l ，得到

$$B = \int_l v_n ds = \int_0^{2\pi} -\frac{A}{R} R d\omega = 2\pi A$$

由此得到， $A = B/2\pi$ 。

因而，对于在坐标原点上分布的出量为 B 的源或洞，其复势将为

$$w(z) = \frac{B}{2\pi} \ln z \tag{9-181}$$

如果源和洞不是位于坐标原点，而是在具有复坐标 z_0 的某一点 M_0 上，则复势的表达式将为

$$w(z) = \frac{B}{2\pi} \ln(z - z_0) \tag{9-182}$$

可以研究在无限平面上由若干源或洞所形成的流动，这些源或洞位于 z_1, z_2, \dots, z_n 的点上。合成速度场的复势将为

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z) + \dots + w_n(z)$$

式中， $w_k(z) = \frac{B_k}{2\pi} \ln(z - z_k)$ ，而在 z 点的速度，定义为分流

速度的总和： $\vec{v} = \overline{w'(z)} = \overline{w'_1(z)} + \overline{w'_2(z)} + \dots + \overline{w'_n(z)}$ 。

当建立复杂流动的复势时常常采用这种方法。

例题 9.15 由点源产生的在上半平面上的流动

源位于点 $z = ia$ 并具有出量 B ，试确定它在上半平面 $\text{Im}z > 0$ 所产生的无旋流动复势。

解 在点 $z = ia$ 和 $z = -ia$ (图101) 处，我们配置出量相等的源。复势等于

$$w(z) = \frac{B}{2\pi} \ln(z - ia) + \frac{B}{2\pi} \ln(z + ia) = \frac{B}{2\pi} \ln(z^2 + a^2) \quad (9-183)$$

因为速度矢量与流线相切，沿其中的任何一条可以确定连续介质不能渗透的刚性壁，并研究有界域中较狭小区域的流动。

沿 x_1 轴确定刚性壁。公式(9-183)可求出在上半平面由于点 $z = ia$ 的源所产生的通量，这就是问题的解(图101)。

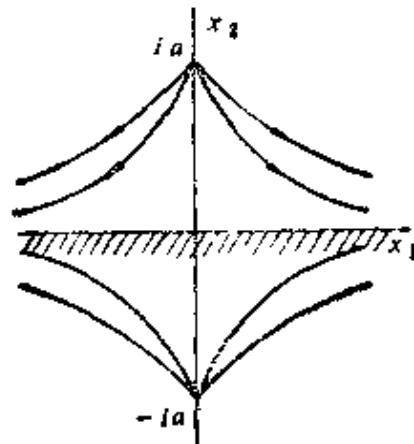


图101 例题9.15的图示

9.8.6 对于复势的边值问题

在上面所举的例子中采用所谓的逆法，即选择基本函数，并研究了与它相应的无旋速度场。

但是，实用的问题通常归结为按流动域给定的边界条件求复势。我们来研究在实用上更重要的一系列边值问题的提法。

沿封闭曲线外表的通量 设域包含无穷远的点，并由围线 S 所包围。 S 是被包绕物体的边界(图102)。假定流以速度 v_0 冲击静止的物体，而环量等于零。

边界条件有如下的形式：在围线 S 上 $\psi(x_1, x_2) = \text{常数}$ ，实际上根据围线 S 任何点上的绕流条件速度的方向应当是切于围线。因而围线应当属于流线族式(9-168)。复势 $w(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$ 可实现域 D 向平行于 φ 轴的某一线段外部的互为单值的映射(图102)。

脱体绕流 现在我们来研究如下情况，即当流线中的一条流线由无穷远处接近包绕物体某一点 B 的情况，这条流线可分成两

部分，其中的每一条沿着物体的边界流到某些点 C_1 和 C_2 ，然后由壁上脱开重新通向无穷远（图103）。

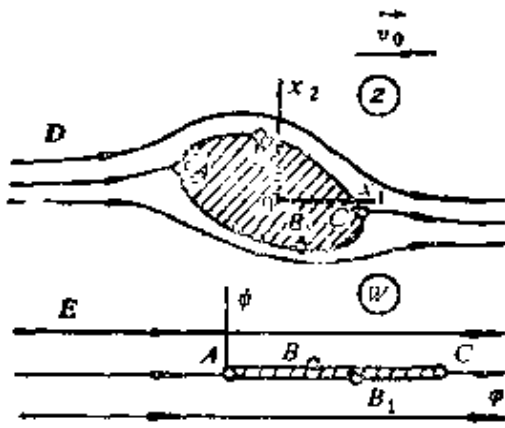


图102 封闭围线的绕流

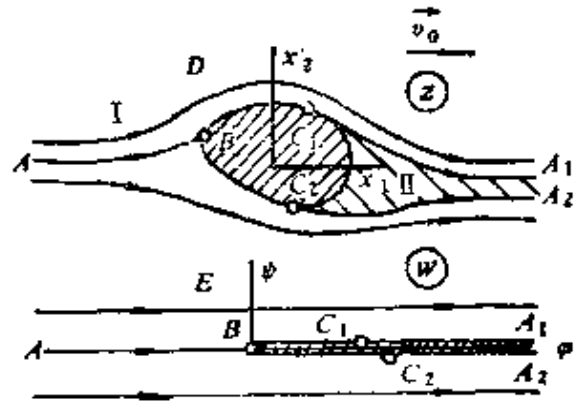


图103 脱体绕流

域 II 可为静止的连续介质所充满，此时沿着流股 C_1A_1 和 C_2A_2 发生切向速度分量的间断。

如果所研究的介质是理想的无重量的液体，则在域 II 中的压力应当是常数。由伯努利-欧拉方程得到，沿着自由流股 C_1A_1 和 C_2A_2 ， $v = \text{常数} = v_0$ 。

应当把运动学要求合并到这个条件中：在区段 C_1BC_2 上 $\psi(x_1, x_2) = \text{常数}$ 。

未知复势 $w(z)$ 把流动域映射到具有无限切口的平面上，此切口与 φ 轴平行，并由 B 点出来（见图103）。

在曲线半平面上流动 域 D 的边界是没有本身交点的线 S ，此线包含无穷远的点（图104）。在域 D 中要求得出包绕曲线 S

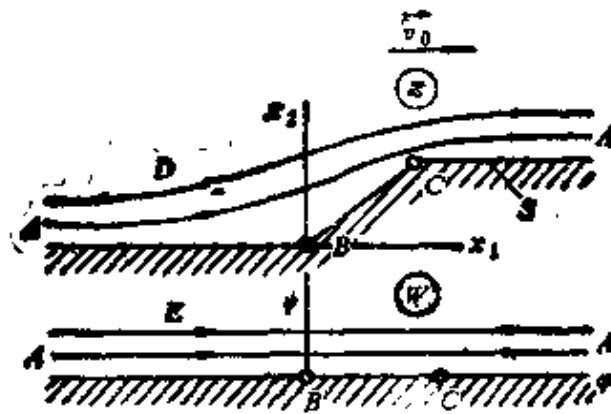


图104 在曲线半平面上流动

（零流线）的通量，并在无穷远处具有数量上给定的速度 v_0 。

在 $w(\infty) = \infty$, $|\overline{w}'(\infty)| = v_0$ 的条件下, 复势 $w(z)$ 实现域 D 向上半平面 E 的映射。

在曲线带中的流动 现令域 D 位于两条曲线 S^+ 和 S^- 之间, 这两条线仅在位于 $z = \infty$ 之点有它们的公共端 (图105)。

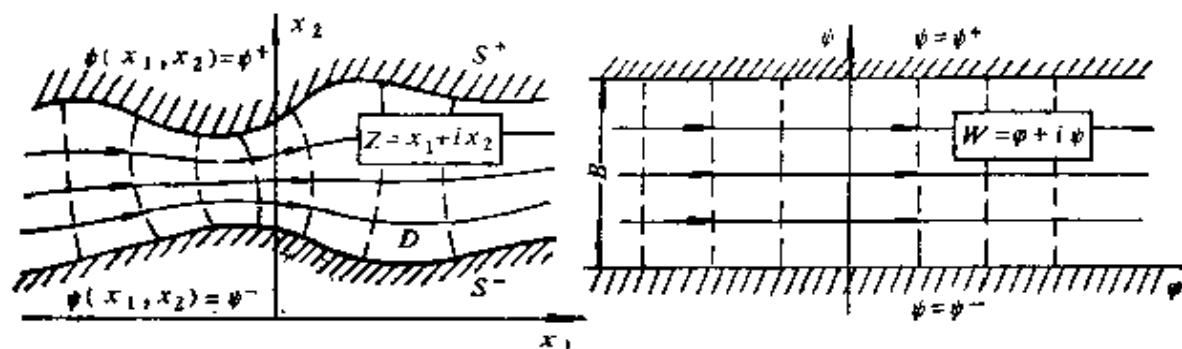


图105 在曲线带中流动

由绕流条件得出, 在曲线 S^+ 和 S^- 上函数 $\psi(x_1, x_2)$ 是复势的虚部, 它取常量:

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \psi^+, & \text{在 } S^+ \text{ 上} \\ \psi^-, & \text{在 } S^- \text{ 上} \end{cases}$$

按公式(9-169), 流量为 $B = \int_s v_n ds = \psi^+ - \psi^-$ 。

因而, 差值 $\psi^+ - \psi^-$ 是已知的。显然, 经常可取 $\psi^- = 0, \psi^+ = B$ 。

对于在无穷远处受到速度限制的流动, 利用某些补充的假设可以证明, 所提出的问题有唯一解, 而未知的复势可实现域 D 向符合无穷远处 $w(\pm\infty) = \pm\infty$ 的带 $0 < \psi < B$ 上互为单值的保角映射。

思 考 题

1. 平面流动的流函数具有什么样的性质?
2. 流函数与势函数有什么样的联系?
3. 如何证明复势在流动域内是解析函数?
4. 在理想液体的流股表面上速度的模是常量。在平面 Q 上如何表示出边界的这个区段?
5. 你知道对于复势的边值问题是什么样的?

参 考 文 献

- Вулик Б.З.* Введение в функциональный анализ. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1967. 415 с. с ил.
- Гавурич М.К.* Лекции по методам вычислений. М., «Наука», 1971. 248 с. с ил.
- Годунов С.К., Рябенкий В.С.* Разностные схемы. Изд. 2-е. М., «Наука», 1977. 439 с. с ил.
- Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. Изд. 4-е. М., «Наука», 1970. 664 с. с ил.
- Зенкевич О.З.* Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975. 542 с. с ил.
- Калиткин Н.Н.* Численные методы. М., «Наука», 1978. 512 с. с ил.
- Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. Изд. 2-е. 1977. М., «Наука», 742 с. с ил.
- Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Мир», 1969. 447 с. с ил.
- Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е. М., «Наука» 1973. 736 с. с ил.
- Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев, «Наукова думка», 1970. 252 с. с ил.
- Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965. 520 с. с ил.
- Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. Изд. 4-е. М., «Наука», 1978. 415 с. с ил.
- Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. Изд. 2-е. М., «Наука», 1970. 512 с. с ил.
- Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966. 432 с. с ил.
- Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., «Мир», 1976. 464 с. с ил.
- Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972. 418 с. с ил.
- Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971. 552 с. с ил.
- Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М., «Мир», 1979. 392 с. с ил.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Изд. 5-е. М., «Наука», 1977. 735 с. с ил.
- Шевченко К.Н.* Основы математических методов в теории обработки металлов давлением. М., «Высшая школа», 1970. 351 с. с ил.
- Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965. 424 с. с ил.

第三篇 塑性流动

下面转向研究塑性流动理论边值问题的提法和解法。作为反映压力加工时金属与合金行为最重要方面的最简单的模型，我们将研究理想刚-塑性介质模型。在塑性流动域内屈服极限保持常量是该域中工件力学性质的主要特征。

滑移线法是求解理想刚-塑性介质平面流动边值问题的最为大家熟悉的方法之一。许多近似方法是以极值原理为基础的，这些原理可以给出对力能参数两方面界限的估算以及确定应力场和速度场。

在许多情况下，如果要进行金属压力加工工艺过程的研究和使其实现最优化，必须考虑许多因素的影响，诸如温度的连续分布、应变速率和热金属的软化。这就导致研究更复杂的流变模型，例如具有变形硬化和继承性质的粘-塑性介质模型，还必须求解描述连续介质运动和热传导过程的有关边值问题。这种情况下，要采用虚速度原理作为基本“工具”，这个原理能够从许多运动学许可的速度场中确定既满足运动学关系又满足静力学关系的真实速度场。可以用保角映射法和积分热传导方程的有限差分的数值方法来求解问题。最终可建立过程的数学模型，这个数学模型可以用电子计算机成套程序的形式实现，还可以计算基本工艺参数并使其最优化。

第10章 理想塑性介质

塑性（源于希腊词汇“plasticos”，意为适于塑造的、柔顺的、可塑的）是固体具有残余变形的性质，也就是物体在机械载荷作用下，不可逆地改变其尺寸和形状的性质。如同在恒定应力

下发生流动硬化消失物体的概念一样，关于理想塑性物体的概念是把物体超过屈服极限的行为大大地理想化了。同时，这个模型能够得到有意义的实用问题的解，在许多情况下这些解已被实验研究很好地证实。

在金属压力加工理论中，问题可进一步理想化，由于和塑性变形相比弹性变形很小，所以可完全忽略弹性变形。结果我们得到理想刚-塑性介质模型。

10.1 理想塑性

10.1.1 基本假设

在建立最简单的理想刚-塑性介质模型时，我们采用下述假设（见6.3节）：

- 1) 介质均匀且各向同性；
- 2) 没有硬化；
- 3) 材料的塑性行为与静水压力无关；
- 4) 介质是不可压缩的；变形具有刚-塑性的特点（与塑性变形相比，弹性变形小到可以忽略）。

应当指出；关于材料各向同性的假设，不允许存在初始的和在变形中形成的各向异性。此外，这时还假设材料性质对于拉伸或压缩应力的等价性。下面的胡别尔-密塞司（Huber-Mises）理想塑性条件完全满足上述要求：

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ik} s_{ik}} = \tau, \quad (10-1)$$

我们根据理论确定了这个条件。

10.1.2 边值问题

利用欧拉变量来写出描述理想塑性介质行为的闭合方程组。此时，由于不可压缩性条件， $\dot{\epsilon}_{ik} = \eta_{ik}$ ，即应变速率张量与其偏差张量一致。

在方程组中包含：

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0 \quad (10-2)$$

粘塑性流动理论的本构方程

$$\sigma_{ik} - \sigma_0 \delta_{ik} = \frac{2T}{H} \xi_{ik} \quad (10-3)$$

式中
$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (10-4)$$

$$H = \sqrt{2\xi_{ik}\xi_{ik}} \quad (10-5)$$

理想塑性条件

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ik}s_{ik}} = \tau_s \quad (10-6)$$

应变速率的运动学关系

$$\xi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (10-7)$$

不可压缩性条件

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (10-8)$$

关于18个函数, 即 v_i , σ_{ik} , ξ_{ik} , σ_0 , T , H , 方程组含有18个独立方程。

设表面 S 围出的刚-塑性体 D 处于外载的作用下。取

$$S = S_v + S_\sigma + S_r$$

并用星号表示边界点 M 的已知函数, 这时我们固定时间 t 并研究边界条件(图106)。

在 S_v 上, 边界速度已知:

$$\vec{v}|_{S_v} = \vec{v}^*(M) \quad (10-9)$$

在 S_σ 上, 应力已知:

$$\vec{\sigma}^*|_{S_\sigma} = \vec{\sigma}^*(M) \quad (10-10)$$

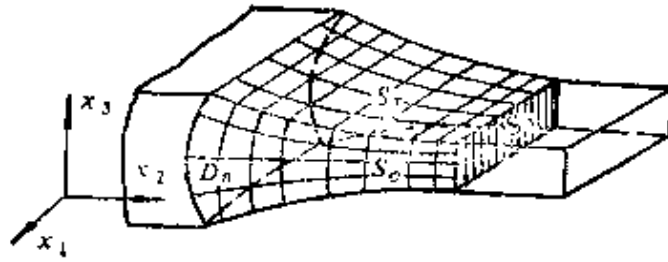


图106 关于边值问题的提法

最后，在接触表面 S_r 上，边界条件具有混合的性质。边界包绕条件

$$v_n|_{S_r} = v_n^*(M) \quad (10-11)$$

和摩擦定律

$$\vec{\tau}|_{S_r} = -\tau^*(M) \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{|\Delta \vec{v}|} \quad (10-12)$$

就属于这种边界条件。

式中 $\Delta \vec{v}$ —— 在 S_r 上的滑动速度矢量。

对于 $\tau^*(M)$ ，采用摩擦定律

$$\tau = f\sigma, \quad (10-13)$$

并且 $0 \leq f \leq 0.5$ 。

如果域 S_r 与所有表面 S 一致，则给定的表面速度应当满足关于整个物体的不可压缩性条件：通过表面 S 的速度矢量的通量等于零。如果域 S_o 与所有表面一致，则给定的表面载荷应当满足某个关于整个物体的平衡条件。

理想塑性理论的边值问题可用如下方式表述：在处于外载作用下的刚-塑性体 D 中确定塑性流动区 D_n 并在这个区中求出函数 v_i, σ_{ik}, \dots ，这些函数将式(10-2)~(10-8)变为关于自变量 x_i 的恒等式并保证满足与刚性区交界处的运动学和动力学条件，以及边界条件式(10-9)~(10-13)（见图106）。

必须确定塑性流动区与刚性（未变形的）区的交界面是所研究的边值问题提法的特点。因为在这些区域内，应力始终是不确

定的（仅仅假设 $T < \tau_s$ ），所以为了求解同一问题可能有各种运动学方案。换言之，解运动学方案的非唯一性是刚-塑性介质所固有的。这个问题我们暂且放下，而先来研究下述简单问题的解。

例题10.1 平行六面体的墩粗

由理想塑性材料制成的平行六面体在光滑平板间压缩，在平行六面体的侧面上作用有均匀分布的正应力 $\overline{q_1}$ 和 $\overline{q_2}$ （图107）。

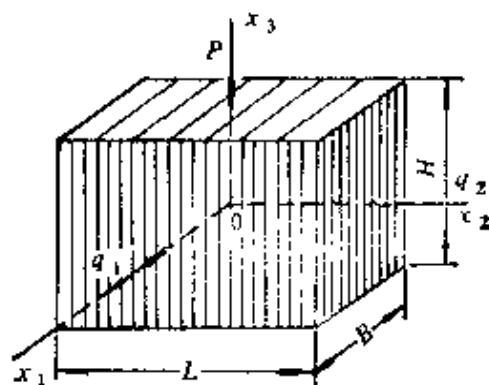


图107 平行六面体的墩粗①

试求出应力和应变速率的分布，并确定平行六面体的终了尺寸。

解 1) 边界条件 我们将用半逆解法解这个问题，这是因为已规定物体的全部体积均处于屈服状态，并事先局部地确定了应力状态。平行六面体的表面 S 是由两部分组成的（ $S = S_o + S_r$ ）。

在 S_o 上（平行六面体的侧面）作用着已知的应力： $x_1 = \pm l_1$ ， $\sigma_{11} = \overline{q_1}$ ； $x_2 = \pm l_2$ ， $\sigma_{22} = \overline{q_2}$ 。

在 S_r （接触表面）上已知：在 $x_3 = \pm l_3$ 处，法向速度分量 $v_n = -v_0$ ，式中 v_0 ——平板的位移速度；无摩擦条件 $\tau = 0$ 。

2) 应力 以如下方式给定应力：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \overline{q_1}, \quad \sigma_{22} = \overline{q_2}, \\ \sigma_{33} &= -\overline{p} = \text{常数}, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \end{aligned} \quad (10-14)$$

①原书中 B, L 标号颠倒，与叙述不一致。——译者

p 值应在求解问题的进程中确定。

容易看出，此时应力边界条件也满足平衡方程。

今后，为了方便采用无量纲的量：

$$p = \frac{\bar{p}}{\sigma_s}; \quad q_1 = \frac{\bar{q}_1}{\sigma_s}; \quad q_2 = \frac{\bar{q}_2}{\sigma_s} \quad (10-15)$$

为了求得接触面上的正应力，可以利用塑性条件式(10-1)。考虑到式(10-14)和(10-15)，并经过某些变换，就可得到

$$p^2 + p(q_1 + q_2) - [1 - (q_1^2 - q_1q_2 + q_2^2)] = 0$$

解这个方程给出

$$p = -\frac{q_1 + q_2}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}(q_1 - q_2)^2}$$

对于所研究的压缩情况，在这个公式中相应为“正号”。最后，

$$p = -\frac{q_1 + q_2}{2} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}(q_1 - q_2)^2} \quad (10-16)$$

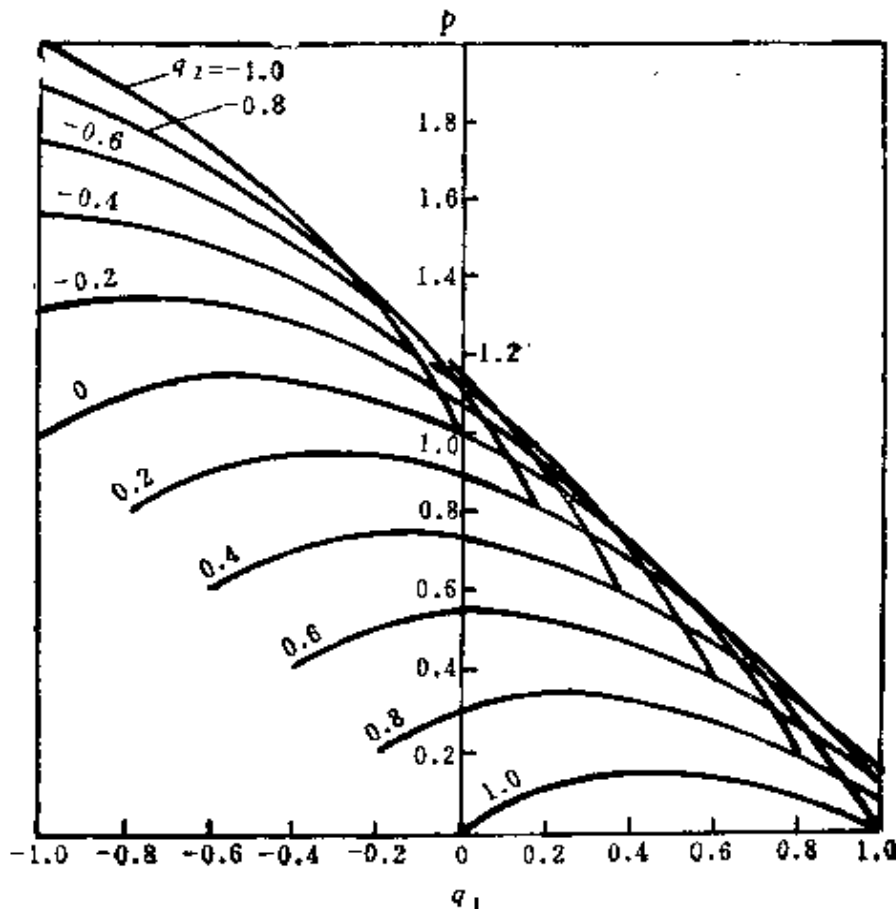


图108 p 与 q_1 和 q_2 的关系

在图108中作出了 p 与 q_1 和 q_2 的关系图。特别当 $q_1 = q_2 = 0$ 时, $p = 1$ (正压力等于屈服极限)。

3) 运动学 运动学边界条件可写作: $x = \pm l_3$ 时, $v_3 = \mp v$, 其中 v ——平板的接近速度。

由应力偏差张量和应变速率成比例可以得到: 均匀的无剪切的变形 (对所取的坐标系) 与应力式 (10-14) 均匀分布相对应, 应变速率张量与其偏差张量一致。

它的分量是常数并应当满足不可压缩性条件:

$$\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 0 \quad (10-17)$$

在 ξ_{ik} 为常数时, 协调方程式 (3-58) 和 (3-59) 恒能满足。速度分量与坐标成线性关系, 因此 ξ_{33} 的值依赖于平板的接近速度:

$$\xi_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{(v_3)_{x_3=l_3} - (v_3)_{x_3=-l_3}}{2l_3} = -\frac{v_0}{l_3}$$

令 $v_0/l_3 = \dot{\epsilon}$ 。设 $\xi_{11} = a\dot{\epsilon}$, 则由不可压缩性条件式 (10-17) 得到

$$\xi_{22} = (1-a)\dot{\epsilon} \quad (10-18)$$

切应变速率强度为

$$H = 2\dot{\epsilon} \sqrt{1-a+a^2} \quad (10-19)$$

为了确定应变速率, 我们可利用由应力偏差张量和应变速率的比例关系得出的连等式:

$$\frac{\xi_{11} - \xi_{22}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{\xi_{22} - \xi_{33}}{\sigma_{22} - \sigma_{33}} = \frac{\xi_{33} - \xi_{11}}{\sigma_{33} - \sigma_{11}}$$

这个连等式给了我们两个独立方程。以式 (10-18) 的形式写出速度分量之后, 我们就可以满足不可压缩性条件, 取它作为第三个独立方程。

将式 (10-14)、(10-18) 代入第二个连等式之后, 以公共乘子 $\dot{\epsilon}/\sigma$, 除方程两边, 便得到

$$\frac{1+a}{q_1+p} = \frac{2-a}{q_2+p}, \text{ 由此 } a = \frac{p+2q_1-q_2}{2p+q_1+q_2}$$

利用公式 (10-16), 求得

$$a = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3(q_1 - q_2)}{\sqrt{4 - 3(q_1 - q_2)^2}} \right] \quad (10-20)$$

a 与 q_1 和 q_2 的关系示于图 109。由关系式 $\xi_{11} = \partial v_1 / \partial x_1$; $\xi_{22} = \partial v_2 / \partial x_2$; $\xi_{33} = \partial v_3 / \partial x_3$ 和对称条件 $x_1 = 0, v_1 = 0; x_2 = 0, v_2 = 0; x_3 = 0, v_3 = 0$, 可得到速度矢量 \vec{v} , 它作为坐标的线性函数:

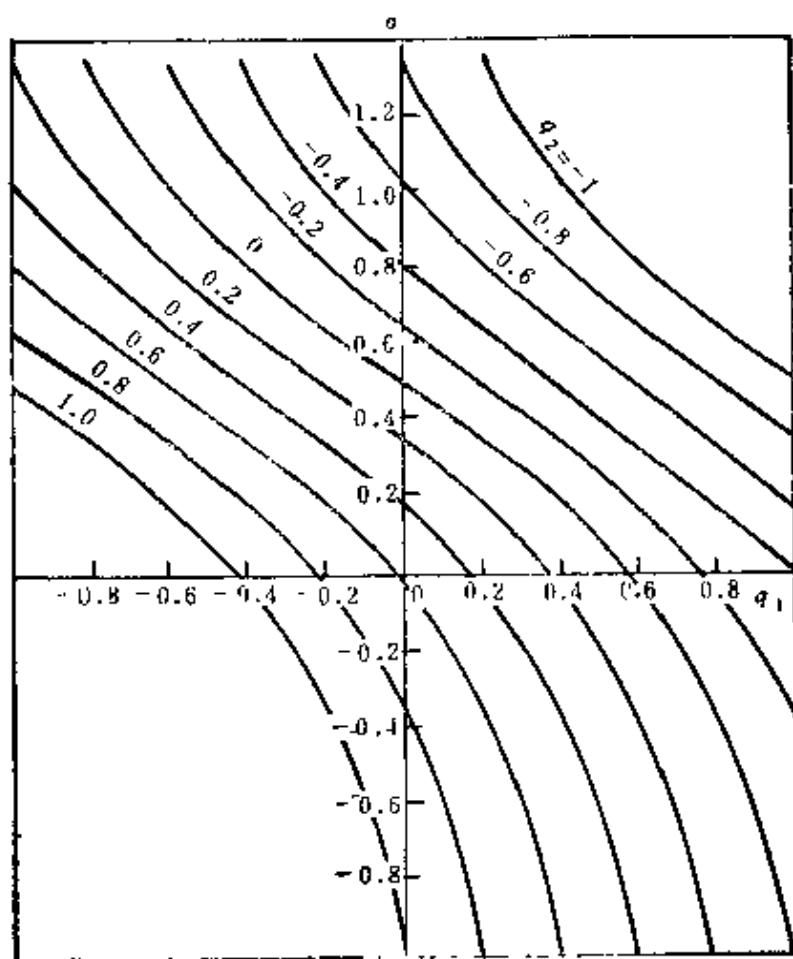


图109 a 与 q_1 和 q_2 的关系

$$v_1 = a \dot{\epsilon} x_1, \quad v_2 = (1-a) \dot{\epsilon} x_2, \quad v_3 = -\dot{\epsilon} x_3$$

我们来确定平行六面体的最终尺寸。在 dt 时间内, 尺寸 l_3 改变量为 $-v dt = -\dot{\epsilon} l_3 dt$ 。在这段时间内, 平行六面体侧面位移是

$$v_1 |_{x_1 - l_1} dt = a \dot{\epsilon} l_1 dt \quad \text{和} \quad v_2 |_{x_2 - l_2} dt = (1-a) \dot{\epsilon} l_2 dt$$

由此得到微分关系,

$$\frac{dl_1}{l_1} = -a \frac{dl_3}{l_3}, \quad \frac{dl_2}{l_2} = -(1-a) \frac{dl_3}{l_3} \quad (10-21)$$

我们分别用 $B = 2l_1$, $L = 2l_2$ 和 $H = 2l_3$ 表示平行六面体的宽、长和高。积分关系式(10-21), 有

$$\ln \frac{B}{B_1} = a \ln \frac{H}{H_1}, \quad \ln \frac{L}{L_1} = (1-a) \ln \frac{H}{H_1} \quad (10-22)$$

在指数化之后, 得到

$$B = B_1 \left(\frac{H}{H_1} \right)^a, \quad L = L_1 \left(\frac{H}{H_1} \right)^{1-a} \quad (10-23)$$

这里足标“1”指的是平行六面体的初始尺寸。

思 考 题

1. 怎样表述理想塑性理论的基本假定?
2. 怎样描述接触表面的边界条件?
3. 接触切应力能超过 $0.57\sigma_s$ 这个值吗?
4. 解理想塑性边值问题的方式不是唯一的, 这与什么有关?

10.2 平面塑性流动

10.2.1 基本关系

我们研究不可压缩非硬化刚-塑性介质的流动。

速度场为 $v_1 = v_1(x_1, x_2, t)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2, t)$, $v_3 \equiv 0$ 。

由应力与应变速率关系式(10-3)我们得到 $\sigma_{33} - \sigma_0 = 0$, 因而有

$$\sigma_{33} = \sigma_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (10-24)$$

特征方程可以用下列方式变换:

$$(\sigma_{33} - \lambda) \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

显然, σ_{33} 是主应力中的一个, 为求得其它两个主应力, 我

们有如下方程：

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

最大切应力

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

算出切应力强度：

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\times \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

因为 $\sigma_{22} - \sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11})$ 和 $\sigma_{33} - \sigma_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11})$ ，而 $\sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$ ，有：

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = \tau_{max} \quad (10-25)$$

当不可压缩性介质平面流动时，切应力强度的大小与最大切应力一致。

我们来确定应力张量主轴的方位。显然，其中一个主轴方位与 x_3 轴重合。

另外两个主轴的方位由下式确定：

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \lambda)n_1 + \sigma_{12}n_2 &= 0 \\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \lambda)n_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-26)$$

对第一个主方向

$$n_1 = \cos(\overbrace{e_1^0, e_1}) = \cos\gamma, \quad n_2 = \cos(\overbrace{e_1^0, e_2}) = \sin\gamma$$

在代入到式(10-26)后，方程组可写成

$$(\sigma_{11} - \lambda)\cos\gamma + \sigma_{12}\sin\gamma = 0$$

$$\sigma_{21}\cos\gamma + (\sigma_{22} - \lambda)\sin\gamma = 0$$

我们在第一个方程两边逐项乘以 $\sin\gamma$ ，而在第二个方程两边逐项乘以 $\cos\gamma$ ，然后由第一式减去第二式，结果得到： $(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin\gamma\cos\gamma + \sigma_{12}(\sin^2\gamma - \cos^2\gamma) = 0$ ，这样，最后给出

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (10-27)$$

10.2.2 滑移线

切应力取最大值的截面对主应力的倾角为 $\pm \pi/4$ (参见 4.2 节)。这些方向场形成了由两族滑移线构成的正交网格，滑移线的切线与最大切应力的方向一致。

我们将滑移线的方程写作

$$x_1 = x_1(\alpha, \beta), \quad x_2 = x_2(\alpha, \beta)$$

式中 α, β ——某些参数。

沿着第一族滑移线 (将称它们为 α 线)，参数 β 保持恒定值。与此相类似，沿着 β 线， α 的大小恒定不变。滑移线的方向构成右手坐标系并用下述方法定向 (图 110)： α 线向右偏离第一主方向 45° 角， β 线向左偏离第一主方向同样角度。这样选择位向时，切应力 τ 是正的。

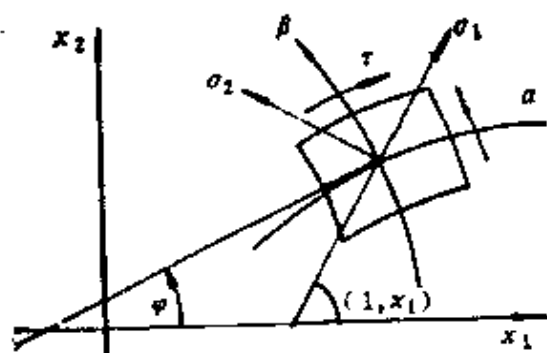


图 110 滑移线的方位

我们引入量 φ ，它是 α 线切线由 x_1 轴正向算起的倾斜角。

很明显，对 α 和 β 滑移线，分别得到下述关系式：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\operatorname{ctg}\varphi \quad (10-28)$$

10.2.3 屈服状态

对于介质处于理想塑性状态的域内的应力，我们可以写出其

基本方程。

因为在平面流动时切应力强度值 T 与最大切应力 τ_{max} 一致，所以塑性条件式 (6-37) 和 (6-40) 也一致，并可写成

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4\tau_s^2 \quad (10-29)$$

我们将下述两微分方程与它联立，

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-30)$$

此时规定，惯性力小到可以忽略，且没有质量外力。

我们转入分析速度场。速度分量用不可压缩性条件联系起来。应变速率张量主轴的方向由下面方程确定：

$$\left. \begin{aligned} (\xi_{11} - \lambda)n_1 + \xi_{12}n_2 &= 0 \\ \xi_{21}n_1 + (\xi_{22} - \lambda)n_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

设确定第一主方向的单位矢量 \vec{e}_1^0 ，同单位矢量 \vec{e}_1 的夹角为 γ' 。则

$$n_1 = \cos(\vec{e}_1^0, \vec{e}_1) = \cos\gamma', \quad n_2 = \cos(\vec{e}_1^0, \vec{e}_2) = \sin\gamma'$$

和推导公式(10-27)一样，消去 λ ，得到

$$\operatorname{tg}2\gamma' = \frac{2\xi_{12}}{\xi_{11} - \xi_{22}} \quad (10-31)$$

应力张量和应变速率张量同轴的条件可写作 $\operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\gamma'$

这样，为了求出五个未知函数 σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{12} 、 v_1 和 v_2 ，得到了由五个方程构成的方程组：

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 &= 4\tau_s^2 \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-32)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} &= \frac{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}}{\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-33)$$

前三个方程仅含有三个未知量 σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{12} ，这种情况乃是这个系统的基本特点。因此，如果在物体的全部边界上应力给定，则我们仅只处理确定应力状态的全部方程组而不涉及速度方程组(10-33)。这种问题称为静定问题。但是在大多数情况下，部分边界上给出的是运动学边界条件，如果不同时分析速度场，就不可能得到问题的完全解。此时，常常采用半逆解法：适当地选择滑移线场，使之不仅满足应力边界条件，而且也满足速度边界条件。我们来研究下述问题。

例题10.2 圆孔附近的塑性变形

半径为 R 的圆孔以均匀压力 p 加载(图111)。试作出滑移线族并求出塑性域内的应力和速度。

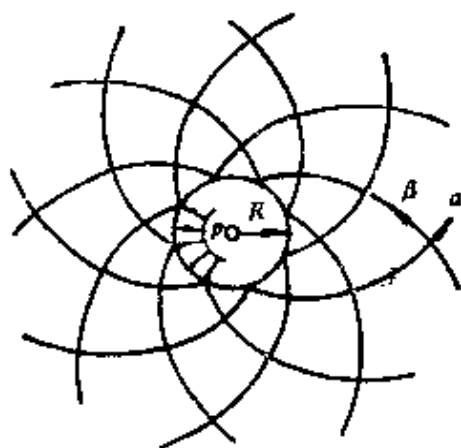


图111 圆孔附近的塑性变形

解 问题是静定的。我们引入极坐标系 r, ω 。在孔的周边上有 $\sigma_{r\omega} = 0$ 。根据平衡条件，在 $r > R$ 的任何圆周上 $\sigma_{r\omega} = 0$ ，也就是主平面在径向和周向。滑移线与由圆心引出之射线的交角为

$\pm \pi/4$ 。具有这种性质的曲线称为对数螺线。对于这些曲线，下述方程得到满足：

$$\omega - \ln \frac{r}{R} = \beta \quad \omega + \ln \frac{r}{R} = \alpha$$

我们转而计算应力 $\sigma_{r,r} = \sigma_{r,r}(r)$, $\sigma_{\omega,\omega} = \sigma_{\omega,\omega}(r)$ 。在极坐标系中塑性条件形为： $(\sigma_{\omega,\omega} - \sigma_{r,r})^2 + 4\sigma_{r,\omega}^2 = 4\tau_s^2$ 。因为 $\sigma_{r,\omega} = 0$ ，所以得到 $\sigma_{\omega,\omega} - \sigma_{r,r} = \pm 2\tau_s$ 。

在孔周边附近， $\sigma_{r,r} < 0$ （压缩）， $\sigma_{\omega,\omega} > 0$ （拉伸）

$$\sigma_{\omega,\omega} - \sigma_{r,r} = 2\tau_s \quad (10-34)$$

对于我们的问题，平衡方程可以由式(5-20)得到。其形式为：

$$\frac{d\sigma_{r,r}}{dr} + \frac{\sigma_{r,r} - \sigma_{\omega,\omega}}{r} = 0$$

利用式(10-34)●，有 $\frac{d\sigma_{r,r}}{dr} - \frac{2\tau_s}{r} = 0$ 或 $d\sigma_{r,r} = 2\tau_s \frac{dr}{r}$

在 $r=R$ 条件下， $\sigma_{r,r} = -p$ ，积分，最终求得

$$\sigma_{r,r} = -p + 2\tau_s \ln \frac{r}{R} \quad (10-35)$$

$$\sigma_{\omega,\omega} = \sigma_{r,r} + 2\tau_s \quad (10-36)$$

我们来确定速度场。由对称条件，有 $v_r = v_r(r)$, $v_\omega = 0$ 。

不可压缩性方程写作 $dv_r/dr + v_r/r = 0$ 。积分这个微分方程，得到

$$v = v_0 \frac{R}{r} \quad (10-37)$$

式中 v_0 ——在圆孔周边上的径向速度。

思 考 题

1. 在不可压缩介质平面流动时，切应力强度和最大切应力彼此怎样联系

●原书误为(10-32)。——译者

起来? 此时符合什么样的塑性条件?

2. 什么是滑移线?
3. 什么样的问题是静定的?
4. 什么样的曲线称为对数螺线?
5. 接近圆孔的滑移线形状如何?

10.3 滑移线法

10.3.1 特征线

利用恒能满足塑性条件式 (10-29) 的下述代换:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_0 - \tau_s \sin 2\varphi \\ \sigma_{22} &= \sigma_0 + \tau_s \sin 2\varphi \\ \sigma_{12} &= \tau_s \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (10-38)$$

式中 σ_0 —— 平均应力, 而角 φ 与式 (10-27) 的角 γ 以下述关系相联系:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{2\tau_s \cos \varphi}{-2\tau_s \sin \varphi} = -\operatorname{ctg} 2\varphi$$

这就给出

$$\gamma = \varphi - \frac{\pi}{4} + m \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

设 $m = 0$ 。角 φ 表示 α 线的方向, 它向右偏离第一主方向 45° , 这也就是 α 线的切线由 x_1 轴正向算起的倾角。

将式 (10-38) 代入平衡方程, 经过简单的变换, 我们将可得到关于函数 $\sigma_0(x_1, x_2)$ 、 $\varphi(x_1, x_2)$ 的两个非线性偏微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_1} - 2\tau_s \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_2} - 2\tau_s \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-39)$$

以后将用特征线法解这个方程组。特征线按下述方式确定。

我们研究在平面 x_1, x_2 上的某一曲线 L 。曲线的方程可以以参数的形式给出： $x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s)$ 。

这里 s ——沿曲线 L 由某点 O 量出的弧长。

设在曲线 L 上已知未知函数 $\sigma_0 = \sigma_0(s), \varphi = \varphi(s)$ 的值。

把下述显而易见的关系补充到方程组 (10-39) 中：

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_0 &= \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_2} dx_2 \\ d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 \end{aligned} \right\} \quad (10-40)$$

如果由方程组 (10-39)、(10-40) 不能单值地确定线 L 上的全部导数 $\frac{\partial \sigma_0}{\partial x_1}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ ，则称线 L 为特征线。

如果两类不同的特征线通过某个域的每个点，则这个域的方程组属于双曲型的；如果一类特征线通过某个域的每个点，则该域的方程组属于抛物型的；如果在该域中不存在特征线，则属于椭圆型的。这个分类与前面研究过的等效（参见第八章）。

沿着线 L ，方程式 (10-39)、(10-40) 构成关于函数 $\sigma_0(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)$ 的一阶偏导数的非齐次线性代数方程组。如果沿着 L 方程组在克莱姆公式中的行列式 Δ 及相应分子 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ 变为零，则偏导数可以用非唯一的方式确定。

我们写出第一个条件：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2\tau, \cos 2\varphi & -2\tau, \sin 2\varphi \\ 0 & 1 & -2\tau, \sin 2\varphi & 2\tau, \cos 2\varphi \\ dx_1 & dx_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx_1 & dx_2 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式并用 2τ 除所得方程式的两边，有

$$\sin 2\varphi \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)^2 - 2\cos 2\varphi \frac{dx_2}{dx_1} - \sin 2\varphi = 0$$

相对于特征方向 $\frac{dx_2}{dx_1}$ ，这个方程的解可写作

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\cos 2\varphi \pm 1}{\sin 2\varphi}$$

经过简单的三角变换，可得

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_1 = \operatorname{tg}\varphi \quad \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_2 = -\operatorname{ctg}\varphi \quad (10-41)$$

[试与关系式 (10-28) 相比较]

这样，在整个塑性域内方程组 (10-39) 是属于双曲型的，而它的特征线与滑移线重合。

使克莱姆公式中的分子等于零 ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$)，可以得到沿特征线得出的未知函数 σ 和 φ 之间的关系。

让我们以更简单的方式来确定这个关系。为此，我们在某点 M 沿滑移线 α 和 β 的方向取坐标轴，引入局部坐标系 s_α 和 s_β (图 112)。在这个坐标系中，在点 M 处 $\varphi = 0$ ，但在一般情况下 $\partial\varphi/\partial s_\alpha \neq 0$ ， $\partial\varphi/\partial s_\beta \neq 0$ 。

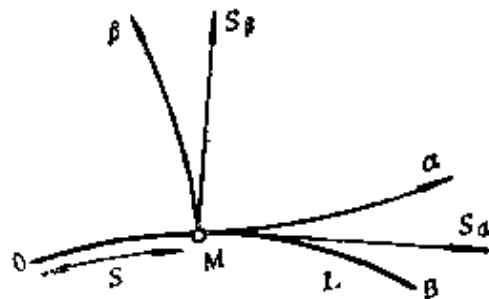


图112 局部坐标系

微分方程式 (10-39) 取简单的形式:

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} (\sigma_0 - 2\tau, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s_\beta} (\sigma_0 + 2\tau, \varphi) = 0 \quad (10-42)$$

式中 $\partial/\partial s_\alpha$ 、 $\partial/\partial s_\beta$ —— 沿线 α 、 β 的导数。

它们是用滑移线网分离出来的塑性介质的无限小微元的平衡方程 (图113)。

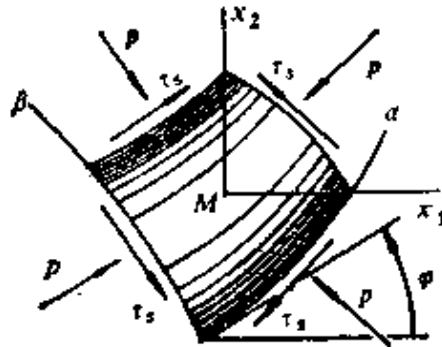


图113 用滑移线分离出来的体元

因为M是滑移线上的任意点，所以沿α族滑移线应满足如下的关系式：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \text{tg}\varphi, \quad \frac{\sigma_0}{2\tau_s} - \varphi = \text{常数} = \xi \quad (10-43)$$

同样，沿β族滑移线有

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\text{ctg}\varphi, \quad \frac{\sigma_0}{2\tau_s} + \varphi = \text{常数} = \eta \quad (10-44)$$

式中，ξ对α线来说是常数，但在一般情况下，对不同的α线是不同的；η值沿β线保持不变，但当由β族的一条滑移线过渡到另一条时，在一般情况下要发生变化。

10.3.2 滑移线的性质

我们来研究滑移线的某些性质（所谓汉基(Hencky)定理）。

1) 沿滑移线平均应力σ₀与滑移线同x₁轴的夹角成正比。

实际上，沿α线有线性关系：σ₀ = 2τ_sφ + 常数，而沿β线有σ₀ = -2τ_sφ + 常数。

2) 当沿着β^①族的任何滑移线由α^①族的一条滑移线过渡到另一条时，σ₀和φ的变化与沿哪一条滑移线完成这种过渡无关（汉基第一定理）。

我们由关系式 $\frac{\sigma_0}{2\tau_s} - \varphi = \xi$ 和 $\frac{\sigma_0}{2\tau_s} + \varphi = \eta$ 解出σ₀和φ^②，σ₀ =

①原文中α与β颠倒，不妥。——译者

②原文中φ误作ω。——译者

$$\tau_s(\xi + \eta), \varphi^{\text{①}} = \frac{1}{2}(\eta - \xi).$$

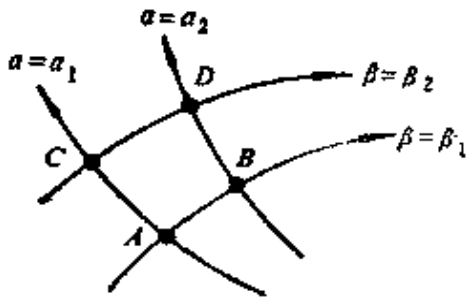


图114 关于汉基定理的证明

设给定 α 族的两条滑移线 AC 和 BD 以及 β 族的两条滑移线 AB 和 CD (图114)。在这些线上分别用 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ 表示参数 ξ 和 η , 则

$$\sigma_A = \tau_s(\xi_1 + \eta_1),$$

$$\sigma_B = \tau_s(\xi_2 + \eta_1)$$

$$\sigma_C = \tau_s(\xi_1 + \eta_2), \quad \sigma_D = \tau_s(\xi_2 + \eta_2)$$

容易看出

$$\sigma_B - \sigma_A = \sigma_D - \sigma_C = \tau_s(\xi_2 - \xi_1)$$

同样,

$$\varphi_A = -\frac{1}{2}(\eta_1 - \xi_1), \quad \varphi_B = \frac{1}{2}(\eta_1 - \xi_2)$$

$$\varphi_C = -\frac{1}{2}(\eta_2 - \xi_1), \quad \varphi_D = \frac{1}{2}(\eta_2 - \xi_2)$$

和
$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_D - \varphi_C = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)$$

3) 如果滑移线的某一线段是直线, 则沿这部分滑移线应力分量是常数。

实际上, 如果滑移线段是直线的, 则沿着这个线段, 角 $\varphi = \text{常数}$ 。由式 (10-43) 和 (10-44) 可以得出, 沿着线段 $\sigma_0 = \text{常数}$ 。因而按式 (10-38), 沿着直线段应力是常数。

4) 如果在某个域中两族滑移线都是直线, 则在这个域中应力是均匀分布的 (这样的应力状态称为均匀的)。这个性质可由前一个性质得出。

5) 如果一族滑移线的某个线段被另一族的两条滑移线所截,

①原文中 φ 误作 ω 。——译者

且被截线段是直线，则被第二族的上述两条滑移线所截的第一族滑移线的所有线段都是直线的。

这个结论可以由滑移线的第一个性质得出，因为第一族滑移线的所有上述线段当沿第二族滑移线运动时 φ 角的变化是相同的，且等于零。

在这样的域内，应力 σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{12} 沿着滑移线的直线段保持常数，但是当由一条线段过渡到另一条时它们发生变化。类似的应力状态称为简单应力状态。

由一点引出的直线和一族同心圆周构成的有心滑移线场，是简单应力状态的重要情况。

10.3.3 应力边界条件

设在周线 C 上给定正压力 p 和切向应力分量 τ 。我们假定满足不等式 $|\tau| \leq \tau_0$ 。

我们将局部坐标系置于周线的某点 M 上。轴 x_1' 和 x_2' 与周线的法线和切线重合（图115）。

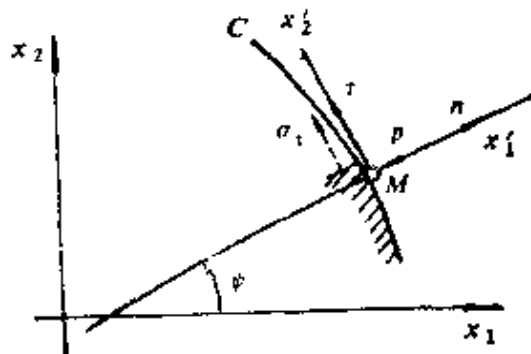


图115 物体边界上的应力

介质处于塑性状态，因此由式 (10-38) 得到

$$\left. \begin{aligned} -p &= \sigma_{11}' = \sigma_0 - \tau_0 \sin 2\varphi'; \\ \tau &= \sigma_{12}' = \tau_0 \cos 2\varphi' \end{aligned} \right\}$$

α 族滑移线对 x_1' 轴的倾角 φ' 与角 φ 用下面关系式联系起来，即 $\varphi' = \varphi - \psi$ ，式中 ψ ——周线 C 的法线与 x_1 轴的夹角。最后给出

$$\left. \begin{aligned} -p &= \sigma_0 - \tau_s \sin 2(\varphi - \psi) \\ \tau &= \tau_s \cos 2(\varphi - \psi) \end{aligned} \right\}$$

由这些方程解出 φ 和 σ_0 , 得到:

$$\varphi = \psi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\tau}{\tau_s} + m\pi \quad (10-45)$$

$$\sigma_0 = -p + \tau_s \sin 2(\varphi - \psi) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10-46)$$

其中 \arccos 是反三角函数的主值。对 σ_0 、 φ 存在两个解可用屈服条件的平方特点来解释。通常在式(10-45)中的正负号根据问题的提法来选择。

让我们谈谈对某些特殊情况的分析。

1) 在周线上没有切应力, 即 $\tau = 0$ 。在这种情况下

$$\varphi = \psi \pm \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad \sigma_0 = p \pm \tau_s, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

滑移线与周线成 45° 角 (图116, a)。

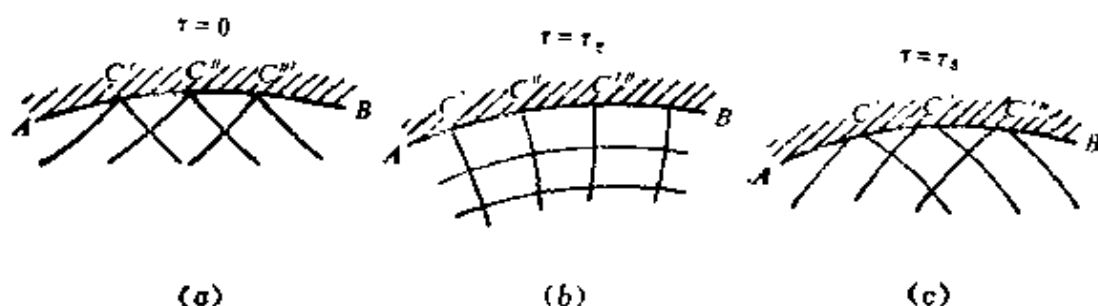


图116 接近边界处的应力状态

2) 切应力达到极限值: $\tau = \tau_s$,

滑移线倾斜角由下式确定:

$$\varphi = \psi + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

在这种情况下, 有一组滑移线与周线正交。也可能有边界是滑移线包络线的情况 (图116b, c)。

例题10.3 直线边界附近的应力

边界的直线段没有载荷。研究边界附近的塑性区中应力的分布 (图117)。

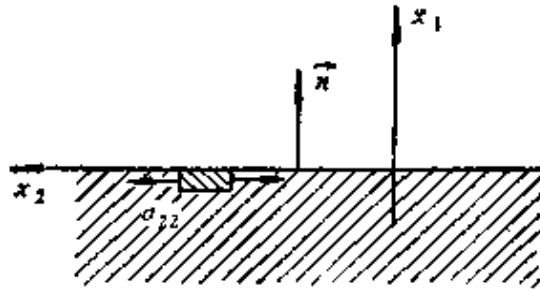


图117 自由直线边界附近的应力

解 如图所示放置坐标轴。在边界上, $\psi = 0, p = 0, \tau = 0$ 。

所以, 按式 (10-45) 和 (10-46), $2\varphi = \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ ($m = 0,$

$\pm 1, \pm 2, \dots$) ; $\sigma_0 = \pm \tau_0$ 。

根据公式 (10-38) :

$$\sigma_{11} = \sigma_0 - \tau_0 \sin 2\varphi = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_0 + \tau_0 \sin 2\varphi = \pm 2\tau_0;$$

$$\sigma_{12} = \tau_0 \cos 2\varphi = 0$$

因此, 在边界附近沿 x_2 方向有拉伸和压缩现象产生。

10.3.4 边值问题

平衡方程 (10-39) 和边界条件的总体构成边值问题。最重要的边值问题是:

柯西问题 光滑的弧 AB (图118), 此弧的任何地方都不与特征线方向一致, 且与每条特征线仅相交一次, 沿此弧给出具有连续的一阶和二阶导数的连续函数 σ_0 和 φ 。需要求出在弧 AB 上, 取给定值的方程 (10-39) 的解。

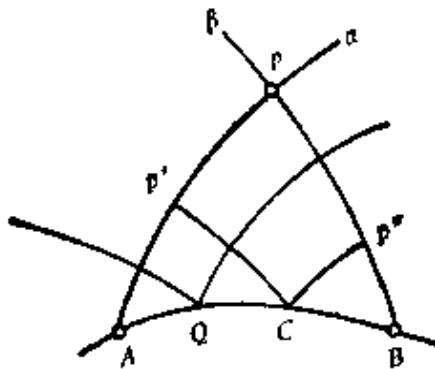


图118 柯西问题

未知解及其直到二阶的导数都是连续的, 此未知解存在于由弧 AB 和由该弧端点引出的 α, β 滑移线构成的

的曲边三角形 APB 中且是唯一的。

例题10.4 自由边界附近的应力

试证明边界自由区段处的应力场仅仅决定于边界的形状。

解 滑移线与边界的自由区段成 45° 角，因此周线在任何一点都不与特征线的方向一致。因而存在柯西问题，它的解是唯一的。

如果自由边界是直线（图119,a），则在这个边界附近将有均匀的单轴拉伸或压缩场，其平行于边界的应力值是 $2\tau_0$ 。

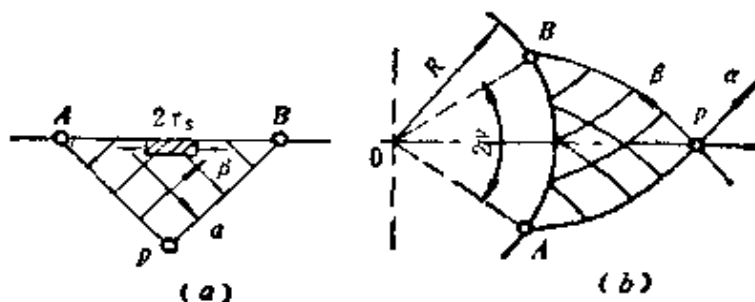


图119 自由边界附近的应力

如果自由边界是一段圆周（图119,b），则滑移线族形成对数螺线。

用式(10-35)和(10-36)可以得到 $p=0$ 时的应力：

$$\sigma_{rr} = \pm 2\tau_0 \ln \frac{r}{R}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2\tau_0$$

初始特征值问题 沿滑移线段 OA 、 OB 给定满足式(10-43)和(10-44)的 σ_0 和 φ ，并且在 O 点处 OA 和 OB 上的条件是一致的。要求确定满足方程(10-43)和(10-44)的解。

在由滑移线所限定的域 $OACB$ 内，存在着解而且是唯一的（图120）。

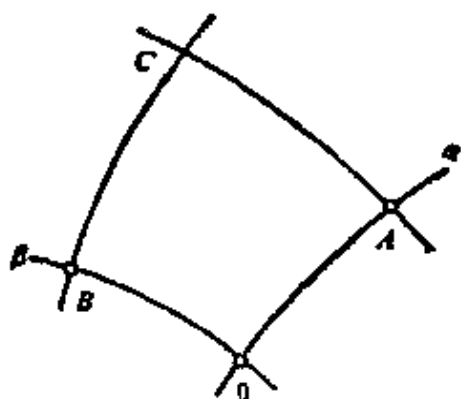


图120 初始特征值问题

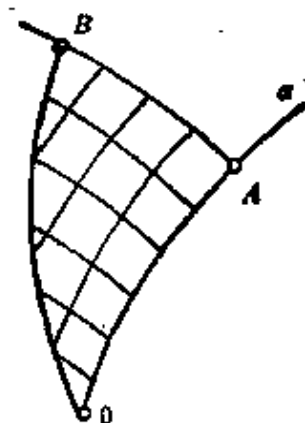


图121 混合问题

混合问题 在滑移线段 OA 上(图121)给定满足式(10-43)和(10-44)中一个关系式的函数 σ_0 、 φ ，而在不具有特征线方向的光滑曲线 OB 上给定角 φ 。假定角 AOB 是锐角。由弧 OB 和滑移线 OA 、 BA 限定的域 OAB 中存在着解而且是唯一的。

10.3.5 速度场

当求解静定问题时，可以不与速度场发生关系而求出应力场。为了建立速度场(式10-33)，可以利用以下形式写出的方程组：

$$\left. \begin{aligned} \left(-\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \operatorname{tg} 2\varphi + \left(-\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-47)$$

因为应力已求出， $\operatorname{tg} 2\varphi$ 值是已知的，所以方程组关于速度是线性的。这个方程组属于双曲型，它的特征线同滑移线重合。

实际上，设沿着某条曲线 L 给定连续的速度分量 v_1 和 v_2 。除 L 和滑移线重合的情况外，这些函数对坐标 x_1 和 x_2 的导数可以沿曲线由方程组来求得，该方程组由式(10-47)和下面两个方程组成：

$$\begin{aligned} dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 \\ dv_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_2 \end{aligned}$$

为了证明这一点，我们使 L 同滑移线重合。既然坐标系的选择是任意的，所以我们在某点 P 使 x_1 轴沿着 L 的切向方向。这时 $\varphi = 0$ ， $dx_2 = 0$ ，方程组形为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad -\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\ dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 \quad dv_2 = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 \end{aligned} \right\} \quad (10-48)$$

显然, 由这个方程组不能确定 $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ 。因此, 事实上滑移线就是方程组 (10-47) 的特征线。

下一步, 解方程组 (10-48) 的头两个方程, 得到 $\xi_{11} = \partial v_1 / \partial x_1 = 0$, $\xi_{22} = \partial v_2 / \partial x_2 = 0$ 。

因此, 沿滑移线相对伸长的速度等于零。

我们引入曲线坐标 $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$, $\beta = \beta(x_1, x_2)$ 。沿着 α 线的速度分量用 v_α 表示, 沿着 β 线的速度分量用 v_β 表示。

在 α 方向, 精确到二阶无穷小的速度 v_1 的增量为 (图122) :

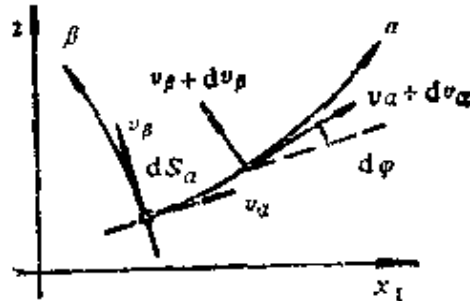


图122 关于盖林格方程的推导

$$(v_\alpha + dv_\alpha - v_\beta d\varphi) - v_\alpha$$

因为 $dv_1 = 0$, 所以沿 α 线应当满足关系式

$$dv_\alpha - v_\beta d\varphi = 0 \quad (10-49)$$

同样, 对 β 线有:

$$dv_\beta + v_\alpha d\varphi = 0 \quad (10-50)$$

这两个方程称为盖林格 (Geiringer) 方程。

10.3.6 速度边值问题

方程 (10-47) 和边界条件的总体构成边值问题。属于边值问题的有:

柯西问题 光滑的弧 AB , 此弧的任何一点均不与特征线的方向一致, 每条特征线仅与此弧相交一次, 沿此弧给定速度分量 v_α 和 v_β 。要求建立满足方程组 (10-47) 和边界条件的速度场 (图118)。

初始特征线问题。在滑移线段 OA , OB 上给定 OA 上的法向

速度分量 v_β 和 OB 上的法向速度分量 v_n 。(参见图120)。切向分量由方程(10-49)和(10-50)求出。当然也可能给定满足方程(10-49)和(10-50)的两个分量。

混合问题 沿 α 线段 OA (参见图121)给定法向速度分量 v_β ,而在曲线 OB 上,确定了形如 $av_n + v_\beta = 0$ 的速度分量间的关系,式中 $a = \text{常数}$ 。

边值问题的数值解法在文献[19]中已有详细叙述。应当指出,在塑性区中耗散功率应当是正的,即 $\sigma_{ik}\dot{\epsilon}_{ik} > 0$ 。

由于这个条件要求应力场和速度场是协调的,所以它对解的结构施加了约束。

10.3.7 应力和速度的间断

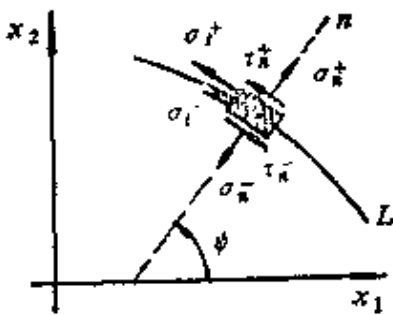


图123 应力的间断

在许多情况下,要想求出应力和速度连续分布的解是非常困难的,但求出满足边界条件的间断解却是简单得多的问题。

在间断面上应当满足由连续介质力学基本理论得出的一般条件(见5.4节)。对理想塑性介质,可以附加约束条件。设 L 是应力间断线。我们来研究在 L 上无限小微元的平衡(图123)。

在单元的界面上,作用有正应力 σ_n 、 σ_l 和切向应力 τ_n 。使受力在 L 的法线和切线上的投影和等于零,我们得到:

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^- = \sigma_n, \quad \tau_n^+ = \tau_n^- = \tau_n$$

式中的上标“+”、“-”用于区分间断线的不同方面的应力。

因而,仅仅允许法向应力 σ_l 有间断。

利用塑性条件 $(\sigma_l - \sigma_n)^2 + 4\tau_n^2 = 4\tau_s^2$ 。

由它解出 σ_l ,则得到

$$\sigma_l = \sigma_n \pm 2\sqrt{\tau_s^2 - \tau_n^2}$$

因此,阶跃 σ_l 将为 $4\sqrt{\tau_s^2 - \tau_n^2}$ 。

这时，平均应力 $\sigma = (\sigma_n + \sigma_t)/2$ 的阶跃是 $2\sqrt{\tau_t^2 - \tau_n^2}$ 。

可以证明，在应力间断线上滑移线的倾角 φ 发生突变，在滑移线上应力间断是不可能的。

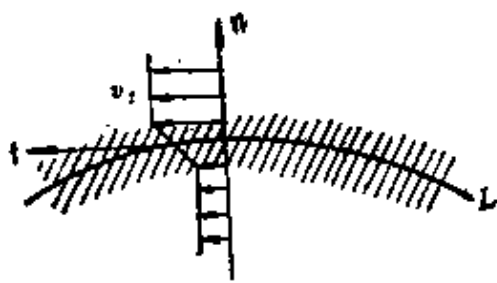


图124 速度的间断

在应力间断线上，法向和切向速度分量也不可能间断。

我们来分析速度间断线上应当满足的条件。L 的法向速度分量 v_n 不可能有间断(参见5.5节)。因此，仅仅切向速度分量 v_t 可以间断。线 L 可以看作速度 v_t 的急剧变化层的极限位置(图124)。

随着该层厚度的减小，导数 $\partial v_t / \partial n$ 无限增大。

使 x_1, x_2 轴与曲线 L 的法线 n 和切线 t 的方向一致，并将(10-47)式写成：

$$\left(\frac{\partial v_t}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) \operatorname{tg} 2\varphi + \left(\frac{\partial v_t}{\partial t} - \frac{\partial v_n}{\partial n} \right) = 0$$

在这个方程中， $|\partial v_t / \partial n| \rightarrow \infty$ ，而其余项保持有限值。所以当该层厚度趋向于零时， $\varphi \rightarrow 0$ 或 $\varphi \rightarrow \pi/2$ ，速度间断线与滑移线或滑移线的包络线重合。沿着 α 线，分量 v_α 可以间断；沿着 β 线，分量 v_β 可以间断。

在 $\varphi = 0$ 或 $\varphi = \pi/2$ 时，沿间断线的切向应力用式(10-38)确定，且绝对值等于 τ_t 。

例题10.5 板料的挤压

以等于 2 的延伸无摩擦挤压时，滑移线网是有心扇形(图

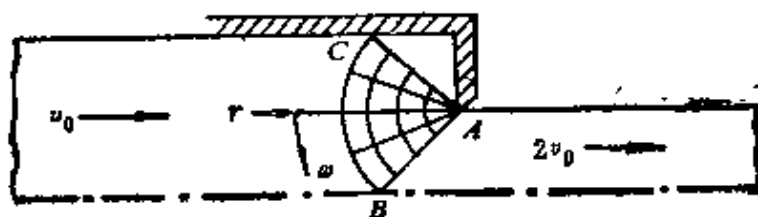


图125 板料的挤压

125) , 它由径向直线 (β 线) 和圆周线 (α 线) 组成。试研究速度场。

解 沿径向直线 $d\varphi = 0$, 以及按关系式 (10-50)

$$dv_{\beta} = 0, v_{\beta} = \text{常数}$$

按连续性条件, 在速度间断线 BC 上, 法向速度分量 $v_{\beta} = v_0 \cos \omega$ 。沿着圆周线 $d\varphi = d\omega$ 且 $dv_{\alpha} = v_{\beta} d\omega = v_0 \cos \omega d\omega$ 。

当边界条件为 $\omega = -\pi/4$ 时 $v_{\alpha} = 0$, 这种情况下积分这个方程, 得到

$$v_{\alpha} = \int_{-\pi/4}^{\omega} v_0 \cos \omega d\omega = v_0 (\sin \omega + 1/\sqrt{2})$$

10.3.8 速端图

除了物理平面 x_1, x_2 外, 求解问题时还可以利用速端图平面 v_1, v_2 (图126)。在这个平面上, 速度分量 v_1, v_2 是自变量。物理平面上的每一点都对应于速度矢量 $\vec{v}(v_1, v_2)$, 因而也对应于速端图平面上的某个点。

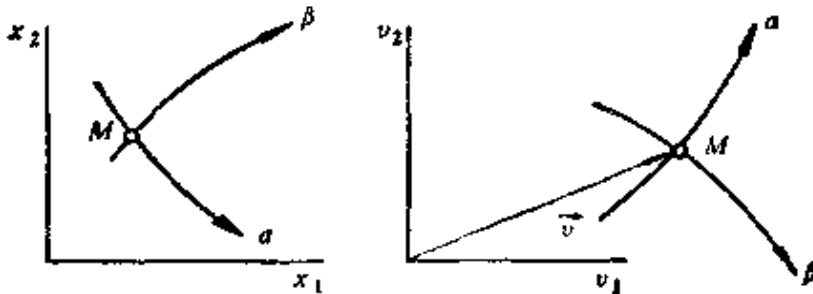


图126 速端图

如果在某个域内介质象刚体一样地平动, 则整个域在速端图上用一个点表示。

正如我们前面已经确定的那样, 沿着相应的滑移线伸长或压缩的应变速率等于零。由此得出, 当沿着滑移线移动速度矢量时, 它的无穷小增量应当与滑移线正交。如果沿滑移线 α 或 β 运动, 当由平面 v_1, v_2 上坐标原点连续地作速度矢量时, 则矢量的端点便描绘出与相应滑移线正交的轨迹 (图126)。

例题10.6 平压模的压入

绝对刚性的平压模以速度 v 压入刚-塑性半平面（图127）。压模宽度为 $2a$ ，无摩擦。试研究压入初始阶段的塑性流动。

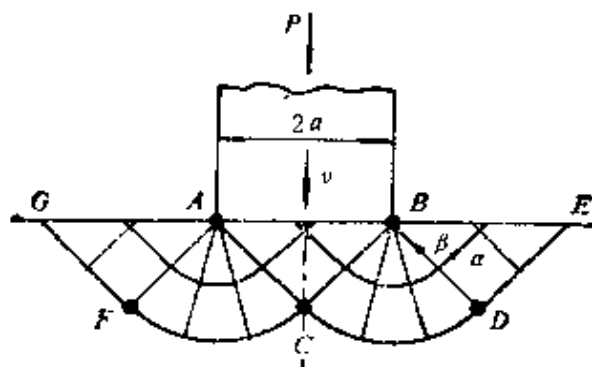


图127 平压模的压入（普朗特解）

解 1) 由普朗特所提出的滑移线网如图所示。它包含用两个有心扇形场连结起来的三个三角形。

在三角形中两族滑移线是直线段，因此应力状态是均匀的。滑移线与半平面的边界成 $\pm\pi/4$ 角（在边界上切应力等于零）。

在有形扇形场中，其中一族滑移线是由 A 和 B 点引出的直线段，第二族是以这两点为圆心的圆周。在这些域内，应力状态是简单的。

我们转而计算应力。

在三角形 ABC 中 $\varphi = -\pi/4$ ，平均应力 σ 未知。在三角形 BED 中， $\varphi = +\pi/4$ 。在边界上正应力 $\sigma_{22} = 0$ 。按公式（10-38），

$$\sigma_{22} = \sigma_0 + \tau_s \sin 2\varphi$$

由此得出 $\sigma_0 = -\tau_s$ ，

按下述公式确定三角形 BED 中的应力，

$$\sigma_{11} = \sigma_0 - \tau_s \sin 2\varphi = -2\tau_s$$

$$\sigma_{22} = \sigma_0 + \tau_s \sin 2\varphi = 0$$

$$\sigma_{12} = \tau_s \cos 2\varphi = 0$$

因此，它经受着平行于边界的简单压缩。

引出通过上述三角形的任意 α 线。沿它 $(\sigma_0/2\tau_s) - \varphi = \xi = \text{常数}$ 。

对所研究的三角形，将 σ 和 φ 值代入公式中，得到

$$\frac{(\sigma)_{\triangle ABC}}{2\tau_s} + \frac{\pi}{4} = \frac{-\tau_s}{2\tau_s} - \frac{\pi}{4} \text{ 和 } (\sigma)_{\triangle ABC} = -\tau_s(1+\pi)$$

因此，对三角形 ABC 有

$$\sigma_0 = -\tau_s(1+\pi), \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_0 - \tau_s \sin 2\varphi = -\tau_s \pi$$

$$\sigma_{22} = \sigma_0 + \tau_s \sin 2\varphi = -\tau_s(2+\pi)$$

$$\sigma_{12} = \tau_s \cos 2\varphi = 0$$

沿 x_3 轴属于单位长度的力等于 $P = 2a\tau_s(2+\pi)$ 。

让我们来求速度分布。三角形 ABC 作为刚体以压模速度 v 向下移动。沿着 BC ，法向速度分量等于 $(1/\sqrt{2})v$ ，而切向分量有间断。沿着 CD ，法向速度分量等于零，而切向速度分量产生间断。按式(10-49)①，在有尖扇形场中 $v_a = (1/\sqrt{2})v$ ， $v_b = 0$ 。三角形 BDE 象刚体一样移动。因为在滑移线 BD 上 v_a 不发生间断，所以在整个域内 $v_a = (1/\sqrt{2})v$ 。这样一来，三角形在 DE 方向上将以速度 $(1/\sqrt{2})v$ 滑动。

2) 希尔(Hill)提出了另一个滑移线网(图128)。对于力 P 给出完全相同的解，这一点容易确信。实际上，在希尔解中，压模下的压力分布是均匀的。在 $OCDEB$ 域中的应力分布与普朗特解的 $ACDEB$ 域中相同(图127)。在 $OFGHA$ 域内的应力分布与在 $BCFGA$ 域内的应力分布一致，这同样也是精确的。因而，在边界区段 AB 上，应力 σ_{22} 等于 $-\tau_s(2+\pi)$ 且 P 值由公式 $P = 2a\tau_s(2+\pi)$ 确定。

我们来分析速度场。三角形 OCB 作为绝对刚体沿 OC 以速度 $\sqrt{2}v$ 运动。

可以作出无限多的解，它们都是普朗特解和希尔解的组合。

①原文式(10-50)，系(10-49)之误。——译者

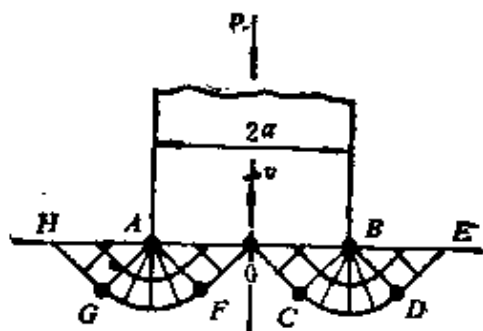


图128 平压模压入 (希尔解)

10.3.9 关于解的非唯一性

压模压入半平面问题的解表现出非唯一性。应力场和速度场的这个非唯一性是实行刚-塑性体简化的特点并与选择塑性域的任意性有关。

解应当满足应力和速度的边界条件，并且塑性域内每个点的耗散功率应当是正的，即 $\sigma_{ik}\dot{\epsilon}_{ik} > 0$ 。然而，由于刚性区中应力是不确定的，可以用各种方式分离出塑性区，这就导致不同的解。

自然会提出这样的问题，什么样的解应该被认为是正确的？利用极值原理（参见10.4节）可以回答这个问题。其中包括如果不同的运动学方案给出不同的极限载荷，则选择极限载荷最小的解。

在压模压入问题中，所研究的解归结为同一 P 值。由实验以及弹性理论可知，塑性区由 A 和 B 周围开始发生，然后向中心扩展。因此，在压模压入时，希尔解可给出开始进入极限状态的较正确图景。

例题10.7 理想塑性问题解的非唯一性

关于带圆孔平板拉伸问题，在图129作出了两个可能解的滑移线场。其中有一个解是正确的。

在 ABC 域内的应力按下式求出（图129, a）：

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 2\tau,$$

在 DEF 域内的应力（图129, b）为

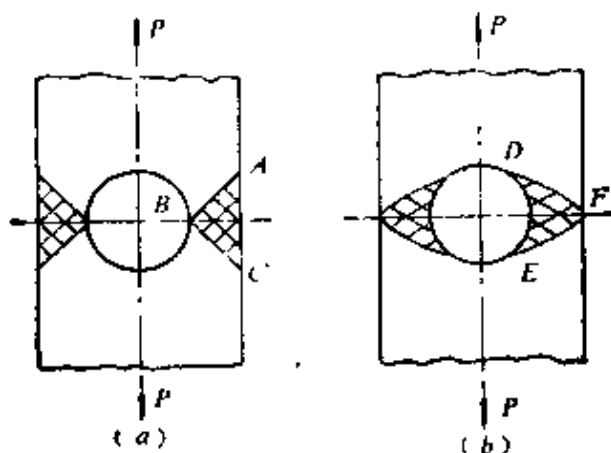


图129 带圆孔的平板的拉伸

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2\tau_s$$

在这两个解中速度场和应力场均满足边界条件；在塑性区中耗散功率也是正的，试选择正确的解。

解 我们来计算极限载荷。对于第一个解，

$$P_1 = 2\tau_s \times 2(h - r_0) = 4\tau_s(h - r_0)$$

第二个解给出：

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \int_{r_0}^h \sigma_{\theta\theta} dr = 2 \int_{r_0}^h 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right) dr \\ &= 4\tau_s(h - r_0) + 4\tau_s \int_{r_0}^h \ln \frac{r}{r_0} dr \end{aligned}$$

因为 $r \geq r_0$ ，所以积分号内的式子是非负的，则 $P_2 > P_1$ 。

第一个解是正确的。

思 考 题

1. 什么是特征线？特征线与滑移线有什么区别？
2. 方程组 (10-39) 和 (10-47) 是属于什么类型的？
3. 滑移线具有什么样的性质？
4. 什么样的应力状态称为简单的？
5. 在自由边界附近发生什么样的应力状态？滑移线怎样接近这个边

界?

6. 你都知道什么样的应力边值问题?
7. 滑移线的相对伸长速度等于什么?
8. 速度间断线满足什么样的条件?
9. 边值问题的解应当满足什么条件?

10.4 极值原理

10.4.1 能量方程

首先假定物体 D 的形状事前已知, 且它完全处于屈服状态. 研究前面 (见10.3节) 提出的边值问题. 我们也将认为没有质量外力, 且忽略惯性力.

写出机械能守恒方程 (5-34) (今后简称为能量方程). 在采用的假设下, 它成为

$$\iint_S \vec{\sigma}^* \cdot \vec{v} \, dS = \iiint_D \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} \, dW \quad (10-51)$$

这个等式左边的积分在数值上等于单位时间内表面外力所做的功, 也就是由表面外力达到的功率. 我们把它表示成沿表面 S_σ , S_v 和 S_τ 的积分和. 对于其中沿 S_τ 的积分有如下的分解式:

$$\iint_{S_\tau} \vec{\sigma}^* \cdot \vec{v} \, dS = \iint_{S_\tau} p |v_n| \, dS - \iint_{S_\tau} \tau \cdot v_\tau \, dS \quad (10-52)$$

这里, p ——在 S_τ 上的正压力, 而 v_τ ——速度矢量在相对滑动方向上的投影 (与矢量 τ 方向相反)。

因此, 单位时间内接触力所做的功是正压力 p 所做的功与由摩擦应力 τ 引起的滑动阻力功之差。

我们研究方程式 (10-51) 右边的表达式. 在单位体积内应力 σ_{ik} 所达到的功率可以表示成与体元形状变化有关的功率 $s_{ik} \eta_{ik}$ 和与体元体积变化有关的功率 $3\sigma_0 \dot{\xi}_0$ 之和.

$$\sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} = (s_{ik} + \sigma_0 \delta_{ik})(\eta_{ik} + \dot{\xi}_0 \delta_{ik}) = s_{ik} \eta_{ik} + 3\sigma_0 \dot{\xi}_0$$

由不可压缩性条件, $\dot{\xi}_0 = 0$, $\dot{\xi}_{ik} = \eta_{ik}$. 利用本构方程, 得到: $\sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} = s_{ik} \dot{\xi}_{ik} = \tau_i H_0$

在表面 S_r 上的正压力 p 和在表面 S_v 上的表面应力 $\vec{\sigma}^n$ 属于解边值问题进程中必须求的未知量。

用 I 表示给定速度下这些应力所发出的功率，则有

$$I = \iint_{S_v} \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} \, dS + \iint_{S_r} p |v_n| \, dS \quad (10-53)$$

以下述形式写出能量方程

$$\dot{I} = \iiint_D \tau_i H \, dW - \iint_{S_v} \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} \, dS + \iint_{S_r} \tau \cdot v_r \, dS \quad (10-54)$$

10.4.2 静力许可场和运动许可场

我们给出如下的定义：

1) 如果应力场 σ_{ik}^0 在物体内处处满足平衡方程和屈服条件，在物体表面上满足边界条件式(10-10)和(10-12)，则把整个体内定义的这个应力场称为静力许可的(对某场 \vec{v})。

2) 如果速度场 v^0 在物体内处处满足不可压缩性条件，在物体表面上满足运动学边界条件式(10-9)、(10-11)，则把在整个物体定义的这个速度场称为运动许可速度场。

按这些定义，真实的应力场将是静力许可的，而真实的速度场是运动许可的。同时，这些场彼此间用本构方程 $s_{ik} = (2\tau_i/H)\xi_{ik}$ 补充而联系起来。这就把它们同简单的许可应力场和速度场区别开来。

当推导能量方程(10-51)时，没有利用任何本构方程。由此可以得出重要结论，这个方程对任何静力许可应力场(不一定满足塑性条件)和运动许可应力场都是正确的，即

$$\iint_S \vec{\sigma}_0^n \cdot \vec{v}_0 \, dS = \iiint_D \sigma_{ik}^0 \xi_{ik}^0 \, dW \quad (10-55)$$

方程式(10-55)常常称为虚功(虚功率)方程，它是推导第11章中所研究的连续介质力学变分原理的基础。

10.4.3 极值原理

叙述两个定理：

定理10.1 在所有静力许可的应力场 σ_{ik}^0 中，使表达式

$$I_0 = \iint_{S_v} \sigma_{ik}^0 v_i^* dS + \iint_{S_r} p^0 v_r^* dS \quad (10-56)$$

取最大值的场将是真实的。

定理10.2 在所有运动许可的速度场 v^0 中，使表达式

$$I^0 = \iiint_D \tau_i H^0 dW - \iint_{S_\sigma} \sigma_{ik}^0 v_i^0 dS + \iint_{S_r} \tau_r^0 v_r^0 dS \quad (10-57)$$

取最小值的场将是真实的。

应当指出，式 (10-57) 右边的表达式称为全功率，定理 10.2 表述了真实速度场全功率最小原理。

因为式 (10-53) 和 (10-54) 中的 I 值，对应于真实的应力场和速度场，所以所研究的定理对于该 I 值给出了两个方面界限的估计

$$I_0 \leq I \leq I^0 \quad (10-58)$$

对在给定速度下未知表面力所发出功率的上限和下限进行估算，可以在不求解全部应力和速度方程的情况下确定实际应力所处的范围。

现证明第一个定理。应当证明，对任何静力许可的应力场，不等式 $I_0 \leq I$ 应该得到满足。因为在 S_σ 上， $\sigma_{ik}^0 n_k = \sigma_{ik} n_k = \sigma_{ki}$ ，而在 S_r 上， $\tau_r^0 = \tau_r$ ，差 $I - I_0$ 可以写成 $I - I_0 = \iint_S (\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^0) \times v_k n_i dS$ ，这里积分是沿整个物体表面完成的。利用虚功方程 (10-55)，得到

$$I - I_0 = \iiint_D (\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^0) \xi_{ik} dW$$

式中 ξ_{ik} —— 真实的应变速率场。

按式 (10-8)， $\sigma_{ik} \xi_{ik} = s_{ik} \xi_{ik}$ ， $\sigma_{ik}^0 \xi_{ik} = s_{ik}^0 \xi_{ik}$

其次，按流动理论， $s_{ik} = 2g \xi_{ik}$ ，因此

$$I - I_0 = \iiint_D 2gs_{,k}(s_{ik} - s_{ik}^0) dW \quad (10-59)$$

我们利用许阔兹不等式：

$$s_{ik}s_{ik}^0 \leq \sqrt{s_{ik}s_{ik}} \sqrt{s_{ik}^0 s_{ik}^0} \quad (10-60)$$

这个不等式可用如下方式说明。在九维空间中两个矢量的数量积小于它们的模的乘积。等号对应于两个矢量即 $s_{ik}^0 = \lambda s_{ik}$ 平行，又因为 s_{ik} 和 s_{ik}^0 满足屈服条件，所以 $\lambda = 1$ ，即矢量 s_{ik}^0 和 s_{ik} 相等。

由屈服条件 $\sqrt{\frac{1}{2}s_{ik}s_{ik}} = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ik}^0 s_{ik}^0} = \tau$ ，得出，不等式

(10-60) 的右边等于 $2\tau^2$ 。因此

$$s_{ik}(s_{ik} - s_{ik}^0) = 2\tau^2 - s_{ik}s_{ik}^0 \geq 0 \quad (10-61)$$

且当 $s_{ik} = s_{ik}^0$ 也就是应力 σ_{ik}^0 与真实应力 σ_{ik} 仅静水压力值相差 σ_0' 时才用等号。

因为分量 σ_{ik} 满足平衡方程，

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial x_k} \delta_{ik} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

所以所提及的附加压力 σ_0' 应满足方程 $\text{grad} \sigma_0' = 0$ ，即 σ_0' 应为常数。当不可压缩介质变形时，通常 $S_0 \neq 0$ ，这时按照边界条件附加压力等于零，应力状态 σ_{ik}^0 与真实的一致。

因为 g 是正的，所以由式 (10-59)、(10-61) 可得出 $I_0 \leq I$ 。定理得证。

我们来对第二个定理进行证明。写出真实应力场和运动许可速度场的虚功方程

$$\iint_S \vec{\sigma}^n \vec{v}^0 dS = \iiint_D \sigma_{,k} \xi_{ik}^0 dW$$

或写出与式 (10-54) 相似的方程

●原书误印为 σ_{ik}^0 ，——译者

$$I = \iiint_D \sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik}^0 dW - \iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^0 \cdot \vec{v}^0 dS + \iint_{S_\tau} \vec{\tau} \cdot v_i^0 dS$$

和前面一样，用九维空间的矢量表示应力 s_{ik} 和速率 ξ_{ik} 、 $\dot{\xi}_{ik}^0$ 。

由本构方程 (10-3) 可得出，矢量 (ξ_{ik}) 和 (s_{ik}) 是平行的，因此它们的乘积等于它们的模的乘积。

$$\sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik} = s_{ik} \dot{\xi}_{ik} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ik} s_{ik}} \cdot \sqrt{2 \dot{\xi}_{ik} \dot{\xi}_{ik}} = TH$$

矢量 (s_{ik}) 和 $(\dot{\xi}_{ik}^0)$ 在一般情况下是不平行的，故它们满足不等式 $\sigma_{ik} \dot{\xi}_{ik}^0 = s_{ik} \dot{\xi}_{ik}^0 \leq TH^0$ 。

在塑性域中，等号对应于 (ξ_{ik}) 和 $\dot{\xi}_{ik}^0$ 平行，即 $\dot{\xi}_{ik}^0 = \lambda \xi_{ik}$ 。但是，在这种情况下按本构方程与运动许可速度场相适合的运动学应力状态 σ_{ik}' 与真实应力状态 σ_{ik} 仅仅静水压力值不同。因为 σ_{ik} 满足平衡方程，所以象证明上个定理一样可以证明，所提及的附加方程是不变的。如果 $s_\nu \neq 0$ (在表面某处给定速度)，则 $\lambda = 1$ ，且速度场 v_i 和 v_i^0 一致。

如果在表面的某一部分给定应力，即 $s_\sigma \neq 0$ ，则按边界条件，附加压力等于零。

如果式 (10-57) 中改换为较大的值，便得到要求的不等式

$$I \leq I^0 \quad (10-62)$$

第二个定理的证明完成。

例题10.8 微粗平行六面体 (运动学解)

利用全功率最小原理，得出关于微粗平行六面体问题的解 (参见例题10.1)。

解 我们给出满足不可压缩性条件和运动学边界条件的运动许可速度场，其形式为

$$v_1 = a \varepsilon x_1; \quad v_2 = (1-a) \varepsilon x_2; \quad v_3 = -\varepsilon x_3$$

式中 $\dot{\varepsilon} = v_0/l_3$, 此时 $H = 2\dot{\varepsilon}\sqrt{1-a+a^2}$ 。

我们计算包含在全功率式 (10-57) 中的各项

$$\iiint_D \tau_s H dW = 2\tau_s \dot{\varepsilon} \sqrt{1-a+a^2} BLH_0$$

前侧面上的应力 q_1 所发出的功率等于应力 σ, q_1 与侧面面积 LH_0 以及它的移动速度 $\dot{a}eB/2$ 的乘积。

对于两个相对的侧面, 这个功率等于 $2q_1\sigma_s LH_0 \dot{a}eB/2 = \dot{a}e q_1 \sigma_s BLH_0$ 。

与此相类似, 应力 q_2 所发出的功率为 $(1-a)\dot{e}q_2\sigma_s BLH_0$ 。

全功率为

$$\begin{aligned} I^0(a) &= \iiint_D \tau_s H dW - \int_S \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v}_0 dS \\ &= \dot{\varepsilon} \sigma_s BLH_0 \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1-a+a^2} - aq_1 - (1-a)q_2 \right] \end{aligned}$$

这个表达式仅仅依赖于一个参数 a , 对于真实的速度场, 该式达到最小值。利用极值的必要条件 $\partial I^0/\partial a = 0$, 得到

$$\frac{2a-1}{\sqrt{3(1-a+a^2)}} - q_1 + q_2 = 0$$

对于 a 解这个方程, 得到公式

$$a = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3(q_1 - q_2)}{\sqrt{4 - 3(q_1 - q_2)^2}} \right] \quad (10-63)$$

这个解与解式 (10-20) 是一致的。

求压力 p , 该应力所发出的功率等于 σ, p 与接触表面面积 BL 及其位移速度 v_0 的乘积。对两个接触面积, 这个功率为

$$I = 2p\sigma_s BLv_0 = \dot{\varepsilon} p\sigma_s BLH_0$$

并且式 (10-57) 给出这个量的上限估计。由此有

$$p \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1-a+a^2} - aq_1 - (1-a)q_2 \quad (10-64)$$

等号对应于 a 用式 (10-63) 确定的真实速度场。将它代入到

式(10-64)内, 则有

$$p = -\frac{q_1 + q_2}{2} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}(q_1 - q_2)^2}$$

在求解例题10.1时, 也曾得到过这个公式。因此, 用两个不同的方法得到的解完全一致。

10.4.4 间断场

无论是真实的还是许可的应力场和速度场都可能是间断场。此时, 个别区域的速度场可以描述成作为绝对刚体的介质的刚性移动。在这种情况下应变速率等于零, 并恒能满足不可压缩性条件。

研究了间断场的守恒定律(见第五章第5节), 就确定了, 对于整个物体可以写出机械能守恒方程, 其中包括刚性区。存在应力间断, 并不改变能量方程的表达形式。但是存在速度场间断面就会导致在能量方程中出现附加项

$$\dot{A}_k = \iint_{\Sigma_k} \tau_v [v] d\Sigma$$

式中 $[v]$ ——切向速度分量间断的绝对值; τ_v ——切应力分量在矢量 $[v]$ 方向上的投影。

对于理想塑性介质, 速度场间断面上的切应力达到极限值 τ_s 。仿效熟知的塑性理论教程, 我们指出这一点。

10.4.5 剪切面上的应力

设在刚-塑性体中存在切向速度分量有间断的表面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ 。我们取其中的一个面 Σ_k , 并将局部坐标系 x_i 置于该面上某点, 使 x_3 轴沿间断面的法线方向, 面轴 x_1 沿相对速度矢量 $[v] = \vec{v}^- - \vec{v}^+$ (这里 \vec{v}^+, \vec{v}^- ——分别为表面 Σ_k 的“正”面或“负”面上的速度矢量值, 见5.5节) 的方向。我们将把间断面看作某个薄层的极限情况, 这个薄层给出了由一个速度场向另一个速度场的连续过渡(图130)。速度分量 v_1 通过薄层时发生很大的变化, 而 v_2 和 v_3 沿薄层厚度却几乎不变。显然, 切应变速率 ξ_{13} 远大于其它的应变速率分量。在薄层厚度趋于零时, 我们发现 $H = 2 |\xi_{13}| \rightarrow$

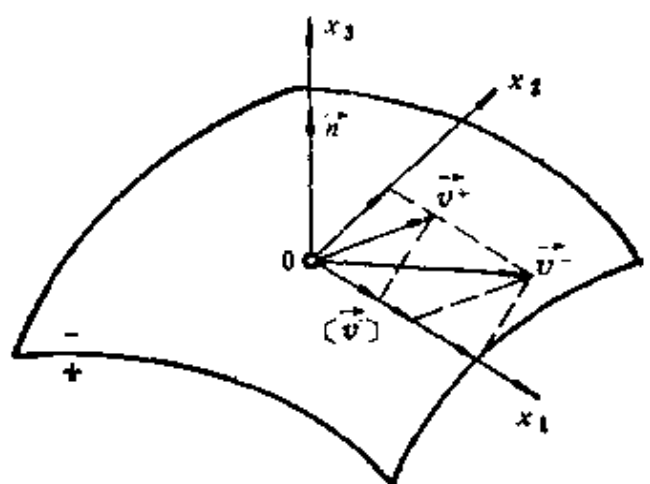


图130 剪切面

∞ ，而其余的张量分量仍是有界的。由式 (10-3) 得出，此时

$$T_{\sigma} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & \tau_s \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ \tau_s & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

即应力状态是纯剪。

因此，速度间断面是最大切应力面（剪切面）。应力和应变速率可用关系式 (10-3) 联系起来，所以剪切发生在真实切应力方向，矢量 $\vec{\tau}$ 和 $[\vec{v}]$ 是平行的，且 $\tau_s [\vec{v}] = \tau_s [\vec{v}] > 0$ 。

10.4.6 向间断场的推广

我们来研究一下，间断场极值原理的表述将如何变化，并对其证明。

首先指出，应力间断不影响能量方程的表述形式，也不会引起定理10.1和10.2的公式和证明发生变化。

当考虑速度间断时，我们指出，对于间断场在方程(10-56)的右边出现了附加项

$$\iint_{\Sigma_k} (\tau_s - \tau^0) [\vec{v}] d\Sigma_k$$

因为 $\tau_s \geq \tau^0$ ，而 $\tau_s [\vec{v}] > 0$ ，所以这一项是非负的。当证明定理10.1时，我们将它们略去，而仅仅强调 $I_0 \leq I$ 。

因此,定理10.1不作任何改变就适用于间断场。而对于定理10.2,情况就是另外一个样子。 I 的表达式取下述形式

$$I = \iiint_W \tau_s H dW - \iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^n \vec{v} dS + \iint_{S_\tau} \tau \cdot v_r dS + \iint_{\Sigma_k} \tau_s [v] d\Sigma_k$$

沿全部间断面按 k 求和。全功率的表达式也有类似的变化。

$$I^0 = \iiint_D \tau_s H^0 dW - \iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^n \vec{v}^0 dS + \iint_{S_\tau} \tau \cdot v_r^0 dS + \iint_{\Sigma_k} \tau_s [v^0] d\Sigma_k^0$$

这里 Σ_k^0 是运动许可速度场 v^0 的间断面。

当对于间断场证明定理10.2时,在方程(10-57)的右边出现附加项 $\iint_{\Sigma_k^0} \tau_s [v^0] d\Sigma_k^0$, 这里 τ_s —— 沿矢量 $[v^0]$ 方向作用在速度场 v^0 的间断面上的真实切应力。

将 $\tau_s [v^0]$ 改换成 $\tau_s [v]$, 我们仅仅是强调不等式 $I \leq I^0$ 。因而定理10.2 (当对于全功率采用变化了的公式时) 对于间断场也是适用的。

思 考 题

1. 什么样的应力场称为静力许可的?
2. 什么样的速度场称为运动许可的?
3. 真实的应力场和速度场与许可场有什么不同?
4. 怎样叙述极值原理?
5. 在速度间断面上作用什么样的切应力?

10.5 近似解法

10.5.1 解近似平衡方程和塑性方程的方法

由于理论分析塑性流动边值问题时发生很大的数学方面的困难,所以提出许多能够得到这些问题简化解的工程方法。

联解近似平衡方程和塑性条件的方法得到广泛的应用。它用于求解平面问题和轴对称问题,其要点归结为:

- 1) 用两个靠近的坐标面分离出变形体的单元体。
- 2) 采用沿上述坐标面正应力均匀分布的假定，因此这些应力仅仅依赖于一个坐标。
- 3) 写出分离出的单元体的平衡条件，并化为将正应力和作用在接触表面上的应力联系起来的常微分方程。
- 4) 为了使方程组闭合，采用近似的塑性条件。在一定的边界条件下求解得到的方程组，我们便可求得接触表面上的应力分布。

研究下面的例题。

例题10.9 棒的拉拔

通过锥形模孔拉拔棒材，试求拉拔力的值（图131）。

解 如图所示，我们引入圆柱坐标系。用两个坐标面 z 和 $z + dz$ 分离出厚度 dz 的棒材的单元体，并研究它的平衡条件。

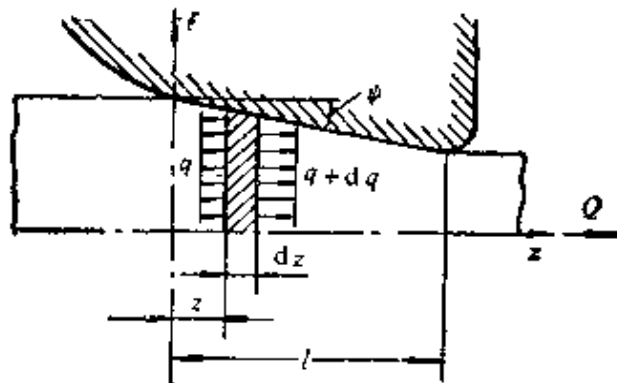


图131 棒的拉拔

接触面的面积为 $dF = 2\pi R \frac{dz}{\cos\psi}$ ，其中 ψ ——模子母线的倾角。

将作用在分离出的单元体上的正应力 \bar{p} 组成的合力向 z 轴投影，则有 $\bar{p}dF \sin\psi = 2\pi R \operatorname{tg}\psi dz \bar{p}$ ，其中 R 是截面半径。

将摩擦应力之合力向 z 轴上投影，得到 $\tau dF \cos\psi = 2\pi R dz \tau$ 。

我们假定存在摩擦定律 $\tau = f\bar{p}$ ，则摩擦力和正压力在 z 轴上的总的投影为 $2\pi R \operatorname{tg}\psi dz (1 + f \operatorname{ctg}\psi) \bar{p}$ 。

平衡方程 $\Sigma z = 0$ 写作

$$dQ = 2\pi R \operatorname{tg}\psi dz (1 + f \operatorname{ctg}\psi) \bar{p} \quad (10-65)$$

式中 Q —— 与横截面垂直的轴向应力的合力。

我们引入如下的无量纲参数

$$q = \frac{Q}{\Phi \sigma_s}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\sigma_s}, \quad \theta = 1 + f \operatorname{ctg}\psi$$

其中 $\Phi = \pi R^2$ —— 棒材的横截面积, σ_s —— 屈服极限, 在横截面上为常数, 沿棒材轴线变化。

这样, 就引入了沿横截面平均了的轴向应力 $q(z)$, 它通过除以屈服极限而无量纲化。应当指出,

$$dQ = d(q\sigma_s\Phi) = \sigma_s\Phi dq + q\Phi d\sigma_s + q\sigma_s d\Phi$$

且 $\operatorname{tg}\psi = -dR/dz$ (当沿 z 轴正向运动时, 棒材半径减小, 故取负号)。

用 σ_s 除式 (10-65) 的两边。结果, 平衡方程的形式为

$$\Phi dq + q\Phi d \ln \sigma_s + q d\Phi = -2\pi R \theta p dR \quad (10-66)$$

假定材料按指数规律硬化,

$$\sigma_s = (\sigma_s)_1 \left(\frac{\Phi_1}{\Phi} \right)^m$$

其中 m —— 某个常数; $(\sigma_s)_1$ 和 Φ_1 —— 分别为棒材屈服极限和横截面积的初始值。当 $m=0$ 时, 介质是理想塑性的。

$$\text{这时 } d \ln \sigma_s = -m d \ln \Phi \quad (10-67)$$

将式 (10-65) 两边除以 $\pi R dR$ 并考虑到式 (10-66), 得到

$$\frac{dq}{d \ln R} + 2(1-m)q = -2\theta p \quad (10-68)$$

用塑性条件补充这个方程, 并假定

$$\sigma_1 = q\sigma_s; \quad \sigma_2 = -p\sigma_s; \quad \sigma_3 = -p\sigma_s$$

结果将有下列方程: $p+q=1$

由式 (10-68) 中消去 p , 就得出关于函数 $q(z)$ 的常微分方程

$$\frac{dq}{2d\ln R} + (1 - m - \theta)q = -\theta \quad (10-69)$$

令 $\xi = \ln \frac{R_1^2}{R^2}$, $\alpha = f \operatorname{ctg} \phi$

则 $1 - m - \theta = -(a + m)$, $\theta = 1 + a$, $2d\ln R = -d\xi$ 且方程 (10-69) 写成

$$\frac{dq}{d\xi} + (a + m)q = 1 + a$$

它的通解是

$$q = Ce^{-(a+m)\xi} + \frac{1+a}{a+m}$$

由条件 $\xi = 0$, $q = 0$ 求出常数 C , 由此得出 $C = -\frac{1+a}{a+m}$

返回到变量 R , 则有

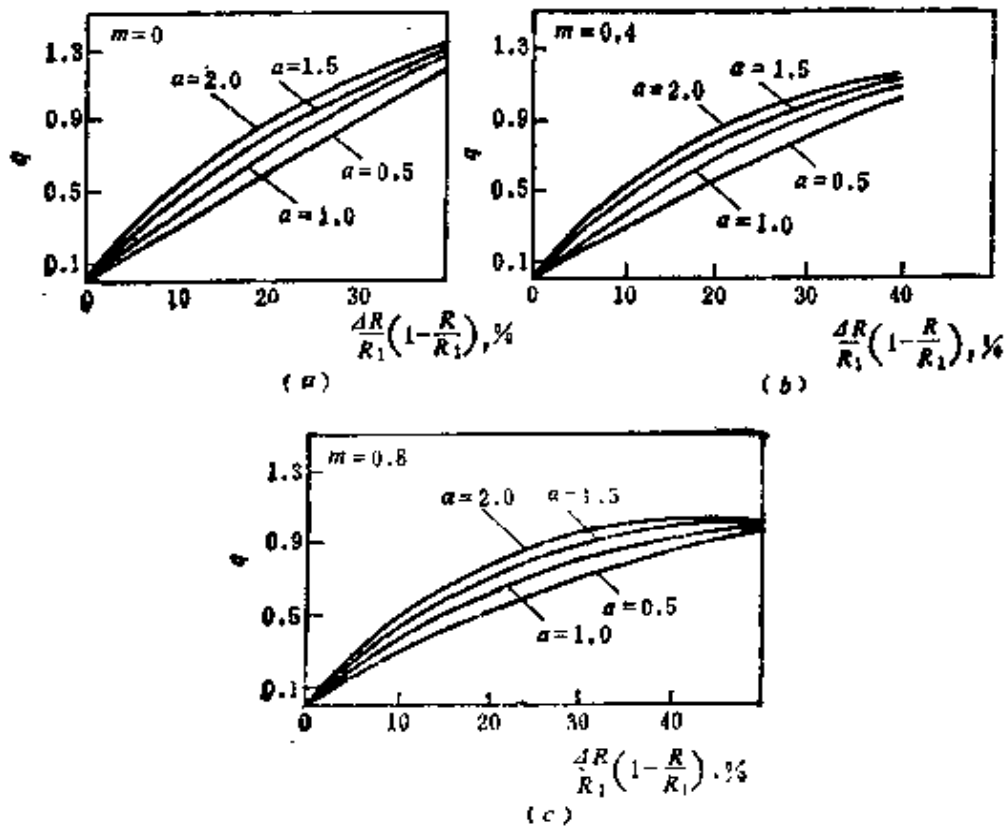


图132 q 与 $\Delta R/R$ 、 α 及 m 的关系

$$e^{-(m+\alpha)t} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^{2(m+\alpha)} \text{ 和 } q = \frac{1+\alpha}{m+\alpha} \left[1 - \left(\frac{R}{R_1}\right)^{2(m+\alpha)}\right] \quad (10-70)$$

在图132中列出了关系 $q = q(\Delta R/R, \alpha, m)$ 。

10.5.2 塑性层沿刚性表面的流动^[18]

仿效依留申，我们研究在两个刚性平板间压缩薄层时的塑性流动。平板间距离为 $h(x, t)$ 。如图133那样布置坐标系并采用如下的假定：

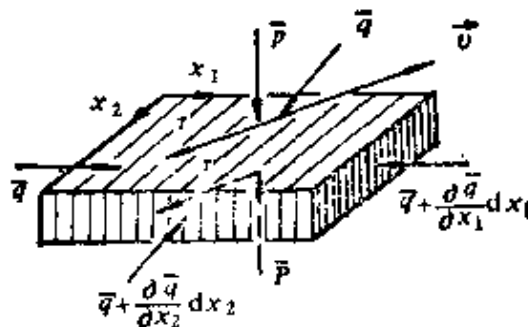


图133 塑性层的压缩

- 1) 应力张量主轴同坐标轴一致；
- 2) 与薄层表面垂直的应力 $-\sigma_3$ 沿薄层厚度方向不变且等于工具对薄层的正压力 \bar{p} ，即 $\sigma_3 = -\bar{p}$ ；
- 3) 垂直截面上的应力 σ_1 和 σ_2 沿厚度不变且相等，即 $\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{q}$ ；
- 4) 塑性介质的横向流动速度沿薄层厚度不变。

以后化为无量纲的量是方便的，

$$p = \frac{\bar{p}}{\sigma_s}, \quad q = \frac{\bar{q}}{\sigma_s} \quad (10-71)$$

其中 $\sigma_s = \sqrt{3} \tau_s$ —— 屈服极限。

显然，第一条假定认为在薄层中的切向应力 σ_{12} 与 σ_{11} 和 σ_{22} 相比较很小，可将它们忽略。

利用塑性条件式 (6-39)，把关系式 (10-71) 代入这个方程，得到

$$p + q = 1 \quad (10-72)$$

这个条件将无量纲量 p 和 q 联系起来。

在平面图上分离出尺寸为 dx_1 、 dx_2 的单元，其高为 h 。写出分离体的平衡条件。可以认为在平面 $x_1 O x_2$ 上流动速度的分量 v_1 、 v_2 沿薄层厚度不变，面摩擦力的方向与滑动方向相反。

由此得出，摩擦应力 $\overline{\tau}$ 在单元体的上下表面大小相等，指向相同。

我们引入无量纲的量 $\tau = \overline{\tau} / \sigma_r$ 。

将作用到分离出的单元体上的力向 Ox_1 、 Ox_2 轴投影，有下述平衡条件：

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} \sigma_r dx_1 h dx_2 - 2\tau \sigma_r dx_1 dx_2 \frac{v_1}{v} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} \sigma_r dx_1 h dx_2 - 2\tau \sigma_r dx_1 dx_2 \frac{v_2}{v} = 0$$

这里 $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ —— 在平面 $x_1 O x_2$ 上的流动速度。

将所得方程两边除以 $\sigma_r dx_1 dx_2$ ，得到

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{2\tau}{h} \frac{v_1}{v}, \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{2\tau}{h} \frac{v_2}{v} \quad (10-73)$$

平方并相加，有

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x_2} \right)^2 = \frac{4\tau^2}{h^2}$$

利用塑性条件式 (10-72)，得到关于压力 p 的微分方程

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^2 = \frac{4\tau^2}{h^2} \quad (10-74)$$

这个方程与薄层周边的边界条件及摩擦定律 $\tau = \tau(p)$ 一起，确定着接触面上的单位压力分布。

因为由塑性条件式 (10-72) 有 $\partial q / \partial x_1 = -\partial p / \partial x_1$ ， $\partial q / \partial x_2 = -\partial p / \partial x_2$ ，所以将应力和速度联系起来的方程可写为

$$h \text{grad } p = -2\tau \vec{v}^0 \quad (10-75)$$

式中 \vec{v}^0 —— 平面 $x_1 O x_2$ 上的单位流动速度矢量。

现在研究基本的边界条件。

如果变形材料的周边不承受载荷，则其上 $q = 0$ 且由条件式 (10-72) 得出 $p = 1$ 。

这样，在自由边界上 $p = 1$ 。

如果运动的材料遇到不动的障碍物，则平面 $x_1 O x_2$ 上与边界垂直的流动速度分量变为零。因此，在刚性边界上 $\partial p / \partial n = 0$ 。

现在我们来谈谈砂丘比拟。将干燥的砂撒到有限尺寸的水平板上，一直撒到通过板边或框开始散落为止（如果板外廓安放了框的话）。由散落介质力学已知，砂丘表面方程形为

$$\left(-\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(-\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 = f^2 \quad (10-76)$$

其中 z —— 由平板表面算起的垂直距离， $O x_1$ 、 $O x_2$ 轴放置在平板表面上； f —— 砂的内摩擦系数。

如果在 $\tau = \text{常数}$ ， $h = \text{常数}$ 时，将式 (10-74) 和 (10-76) 加以比较，则可以得出结论，压力 p 的分布的形式和砂丘表面散落分布的形式相同，因此 $p = 2\tau z / fh$ 。

自由周边上的边界条件写成： $z = fh/2\tau = \text{常数}$ ，即在板的周边必须放置恒定高度的框。

在刚性边界上 $\partial z / \partial n = 0$ 。

在这种情况下，在平板的周边应该放置足够高的框，以避免砂越过此框撒落。

砂丘比拟可以推广到塑性流动运动学上去。例如，砂丘表面

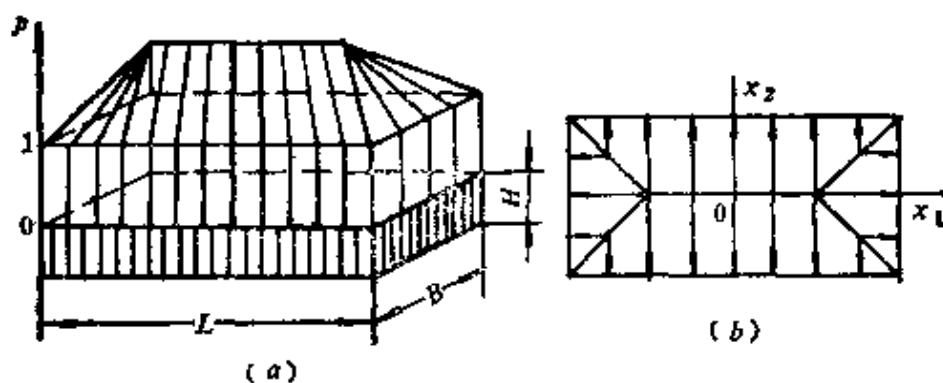


图134 粗糙平行六面体时的正应力 (a) 和流线 (b)

将有与 $z = \text{常数}$ 的水平线正交的直线母线。由式 (10-75) 可得出, 在 $x_1 O x_2$ 平面上塑性介质流动的直线流线与这些母线相对应。砂丘的顶点或锥点的投影是塑性流动分界线或点 (图134)。

例题10.10 镦粗圆板

厚为 h 的圆板在两平板间进行塑性变形 (图135), 试作出正压力分布图。

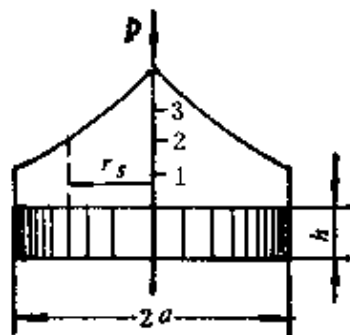


图135 圆板的镦粗

解 我们将式 (10-74) 写成 $|\text{grad } p| = 2\tau/h$

变换为极坐标 (r, w) , 利用对称条件并考虑到 $dp/dr < 0$, 则得到

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{2\tau}{h}$$

在边界条件 $r=a, p=1$ 的条件下积分这个方程。

在库仑摩擦区 $a \geq r \geq r_s$, $\tau = fp$, $dp/dr = -2fp/h$ 。由此得到 p 按指数规律变化:

$$p_r = e^{\frac{2f}{h}(a-r)} \quad (10-77)$$

在 $r=r_s$ 时, 摩擦应力取极限值 $\tau = fp \approx 0.5$, 在代入到式 (10-77) 后给出^[18]

$$r_s = h \left[\frac{a}{h} + \frac{\ln(2f)}{2f} \right]$$

在普朗特摩擦区, $r_s \geq r > 0$, $dp/dr = -1/h$ ^①, 因此在此区

①原书误为 $-2f/h$ 。——译者

内压力 p 按线性规律变化。

$$p_n = \frac{r_1 - r_2}{h} + \frac{1}{2f} = \left[\frac{1}{2f} (1 + \ln 2f) + \frac{\sigma_0 r}{h} \right]$$

10.5.3 上限估计法

应用运动许可速度场计算外力功率的上限估计，可以得到建立工程解的简单而有效的方法。

如果间断的运动许可速度场是由刚性块组成，并且在这些块的内部金属象绝对刚体一样地运动，而在表面 S_0 上应力等于零，则可得到特别简单的解。在这种情况下，式 (10-58) 成为

$$I \leq I^0 = \iint_{\Sigma_k^0} \tau_i [v_i^0] d\Sigma_k^0 \quad (10-78)$$

即将切向速度分量的间断面上的剪切功率求和就得到了上限。

特别是，当与以速度 v 平动的光滑工具 ($\tau = 0$) 相互作用而在变形体内发生平面塑性流动时更是如此。在给定的速度下外力所发出功率的表达式 (10-53) 为

$$I = \iint_{S_v} \vec{\sigma}^T \vec{v} dS = q 2\tau_i b c v \quad (10-79)$$

其中 q ——工具表面平均正压力与 $2\tau_i$ 之比； b ——接触面向平行于工具运动方向的平面上投影的宽度； c ——在与平面 $x_1 O x_2$ 垂直的方向上接触表面的尺寸。

不等式 (10-78) 右边以下述形式写出：

$$I^0 = \iint_{\Sigma_k^0} \tau_i [v_i^0] d\Sigma_k^0 = \tau_i c ([v_1] l_1 + [v_2] l_2 + \dots + [v_n] l_n)$$

(对全部间断面求和)。

这里， l_i ——各刚性块边界的长度； $[v_i]$ ——沿刚性块边界的速度间断量。

由式 (10-79) 得到

$$q \leq \frac{[v_1]l_1 + [v_2]l_2 + \dots + [v_n]l_n}{2bv} \quad (10-80)$$

例题10.11 刚性模压入塑性半空间

试用上界估计法求例10.6的近似解

解 作出如图136所示的运动许可速度场（根据对称条件可以仅仅研究域的右半部）。

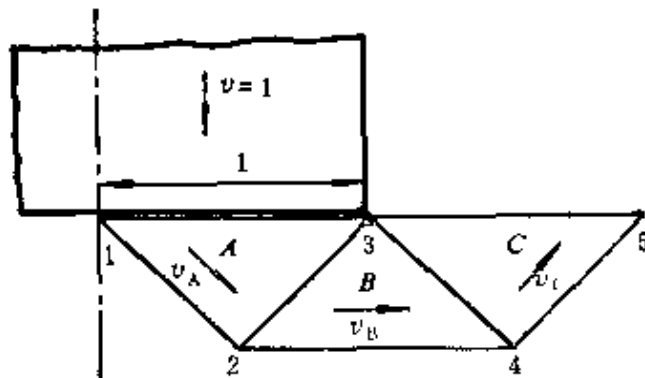


图136 平压模的压入，按上限估计法求解

在刚性块 A 、 B 、 C 中金属象绝对刚体一样地运动。在刚性块的直线边界上允许速度在边界切向的分量间断，但法向速度分量仍保持连续。后一个条件可单值地确定每个刚性块的速度场。

作为例子，研究刚性块 A 的运动。沿线段 12 ，刚性块 A 与不动的金属交界，因此 $v_{n_{12}} = 0$ ，而位于刚性块内的材料质点速度 \vec{v}_A 的方向与这个线段平行。其次，沿线段 13 ，法向速度分量的绝对值等于压模的位移速度。

取 $v = 1$ ， $b = 2$ 。因为 $v_{n_{13}} = -v_A \cos \frac{\pi}{4}$ ，所以 $v_A = \sqrt{2}$ 。

最后，在线段 23 上切向速度分量等于零（速度矢量垂直于边界），而法向速度分量等于 v_A 。

对刚性块 B 、 C 重复上面的讨论，计算结果以表格形式在表 9 中给出(19)。

表 9 上限估计法求解

边界线段	l_i	(v_i)	$l_i(v_i)$
12	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
24	1	2	2
45	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
23	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
34	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

$$v_A = \sqrt{2}, v_B = 2, v_C = \sqrt{2}$$

按式 (10-80), $q \leq 3$ 。与例题10.6得到的解比较可见, 上限估计法比精确解2.57高出17%。

思 考 题

1. 如何表述联解近似平衡方程和塑性方程方法的假设?
2. 在塑性层流动时, 与砂丘的相似点是什么?
3. 上限估计法的基础是什么?

10.6 保角映射法

10.6.1 在曲边带域中的流动

我们来研究理想刚-塑性介质在曲边带状域 D 中的平面流动。域 D 位于两条曲线 S^+ 和 S^- 之间, 这两条曲线仅仅在位于点 $z = \infty$ 处的端点有公共点 (图137)。连续介质包绕边界 $S = S^+ + S^-$, 并有给定的流量 B 。在刚性域中, 介质象绝对刚体一样地移动, 而在塑性域中满足屈服条件 $T = \tau_s$ 。

为了简化问题, 假设给定表面应力的边界区段 S 是自由表面 (即在 S_0 上 $\sigma^n = 0$)。对于平面流动, 可以以下述形式写出全功率表达式 (10-57):

$$I^0 = \iint_D \tau_s H^0 dx_1 dx_2 + \int_S \tau v_i^0 dS \quad (10-81)$$

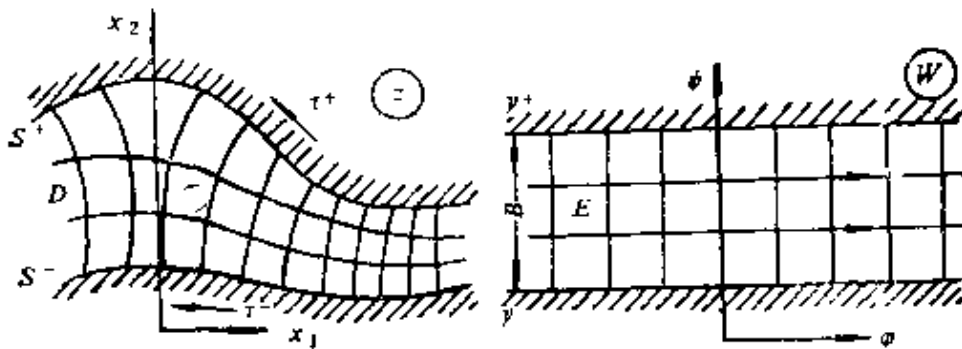


图137 在曲边带状域中的塑性流动

按定理10.2, 在所有的运动许可速度场 \vec{v}^0 中, 真实的速度场将使全功率 I^0 取最小值。

10.6.2 可行解和修正解

前面(见3.2节)业已指出, 在有界的单连域内速度场可以表示为下述形式:

$$\vec{v} = \nabla\varphi + \nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2 + \nabla\Phi \quad (10-82)$$

其中 ∇ ——哈密顿算子; $\varphi, \Psi_1, \Psi_2, \Phi$ ——欧拉变量 x_i 及 t 的标量函数, 且 $\nabla^2\varphi = 0$ 。

在描述可压缩介质的运动时利用函数 Φ (例如用粉末冶金法得到的具有不可逆改变体积能力的空隙材料发生塑性流动时)。对于不可压缩介质, 应取 $\Phi \equiv 0$ 。

在研究平面流动时, 引入解析函数——复势:

$$w(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2) \quad (10-83)$$

这个函数可以实现曲线带状域 D 向复势平面中直线带上的保角映射。

我们把在 D 域中描述连续介质有势流动的速度场

$$\vec{v}^0 = \overline{w'(z)} \quad (10-84)$$

称为可行速度场。

在具有边界为 γ_1 的矩形域 D_1 内 ($0 < \varphi < A, 0 < \psi < B$) (图138), 为了使此域中的可行解精确化, 利用修正的流函数, 为此令公式 (10-82) 中 $\Psi_1 = \Psi(\varphi, \psi), \Psi_2 = x_3$, 结果

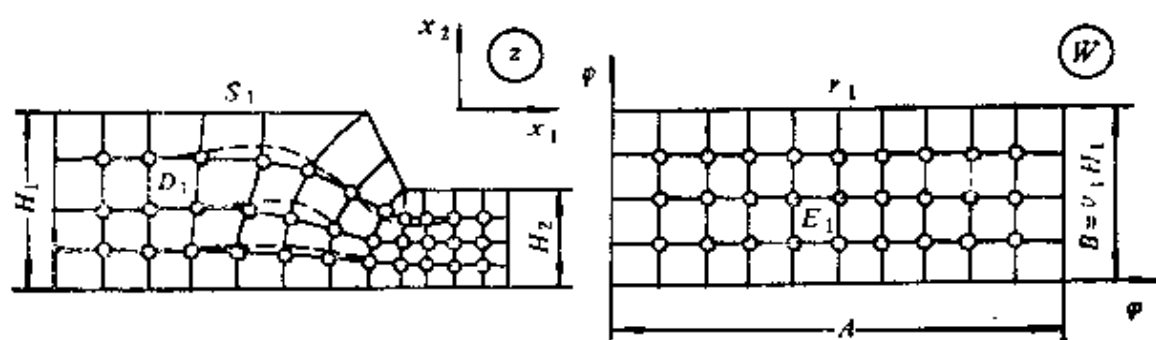


图138 可行解的精确化

$$v_{\psi'} = \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \psi}, \quad v_{\phi'} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad (10-85)$$

这里 $h = |z'(w)|$ 。

这样，在所研究的情况下， $\phi = \operatorname{Re} w(z)$, $\Psi_1 = \Psi$, $\Psi_2 = x_3$, $\Phi \equiv 0$, 且在域 D_1 内 $\vec{v} = \vec{w}'(z) + \nabla \Psi \times \nabla x_3$ 。

因此，所求的速度场 \vec{v} 以下述形式表示：

$$\vec{v}(z) = \vec{v}^0(z) + \vec{v}'(z) \quad (10-86)$$

这里， $\vec{v}^0(z)$ ——可行的运动许可速度场。

采用包绕 S^+ 和 S^- 并具有给定流量 B 的不可压缩介质的无旋速度场作为可行速度场。以前我们曾指出过，对于在无限远处具有有界速度的流动来说，这样的场可用唯一的方法作出，且复势 $w(z)$ 可互为单值地将域 D 保角映射到带状域 E 上： $0 < \psi < B$ ，这相应于无穷远处 $w(\pm\infty) = \pm\infty$ 。

修正速度场 $\vec{v}'(z)$ 亦即函数 Ψ 将由变分方程 $I^0 = \min$ 求出。很明显，这个场同样应该满足不可压缩性条件。但是，这个场的旋度可能不等于零。对于具有复杂特性的介质，修正速度场可应用虚速度原理来建立（参见第11章）。

这样，一般情况下域 D 中有方程

$$\operatorname{rot} \vec{v}^0 = 0; \quad \operatorname{div} \vec{v}^0 = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{v}' \neq 0; \quad \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \quad (10-87)$$

将速度场表示为可行速度场和修正速度场之和，就可以给出如下的求解问题的顺序：

- 1) 建立可行解。
- 2) 建立修正解。

求可行解的过程包括:

- 1) 将曲线带状域 D 保角映射到复势平面上的直线带状域 E ;
- 2) 建立可行的有势速度场;
- 3) 计算力能参数的上限估计值;
- 4) 由条件 $I^0 = \min$ 近似地确定边界待定区段的形状;
- 5) 通过积分有势流动热传导方程近似研究温度分布。

这时要利用最简单的理想刚-塑性介质模型 ($T = \tau_s$)。

建立修正解可以归结为以一整套电子计算机程序的形式实现数学模型, 该模型能够确定速度场、应力场、温度场和断裂概率场 (参见11章)。

此时可以设想介质具有复杂的流变性质。

10.6.3 可行解

在建立可行解时, 我们将假定边界 S 的某个部分事先是未定的并且可以待定。

复势 $\vec{v}^0 = \overline{w'(z)}$ 将域 D 映射到无限的直线带状域 E 上, 在平面 w 上 $0 < \psi < B$, 利用复势 $\vec{v}^0 = \overline{w'(z)}$ 可以求出无旋的运动许可速度场 $\vec{v}(z)$ 。让我们来考虑变量 φ, ψ 。这时有如下的关系:

$$v_r^0 dS = d\varphi, \quad w'(z) = \frac{1}{z'(w)}, \quad w''(z) = -\frac{z''(w)}{[z'(w)]^3}$$

第一个关系式反映了无旋场的熟知的性质, 即切向速度分量 v_r^0 沿任意曲线 l 积分等于曲线端点势 φ 值的差:

$$\int_l v_r^0 dS = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$$

如果在边界的任何一处 S_i 上切应力 τ 是常数, 则它所发出的功率等于 τ 与势的增量的乘积,

$$\int_l \tau v_r^0 dS = \tau \Delta\varphi$$

此外, 对于面元有 $dx_1 dx_2 \longleftrightarrow |z'(w)|^2 d\varphi d\psi$

结果, 我们得到

$$H^0 dx_1 dx_2 = 2 |w''(z)| \cdot |z'(w)|^2 d\varphi d\psi = \left| \frac{z''(w)}{z'(w)} \right| d\varphi d\psi$$

这就可以用如下形式写出方程 (10-81) :

$$I^0 = \left(2\tau, \iint_E \left| \frac{z''(w)}{z'(w)} \right| d\varphi d\psi + \int_{\gamma} \tau d\varphi \right) = \min \quad (10-88)$$

这里 γ —— 域 E 的边界, 整个的无限的带状域作为积分域。

设域 E 的边界 γ 是由 m 个区段组成, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$, 则在 γ_k 上有: $\tau = \tau_k = 2f_k \tau_0 = \text{常数}$ 。

于是

$$\int_{\gamma} \tau d\varphi = 2\tau_0 \sum_{k=1}^m f_k \Delta\varphi_k$$

这里 $\Delta\varphi_k$ —— 在 γ_k 上 φ 的增量。

式 (10-88) 可以用如下方式变换:

$$I^0 = 2\tau_0 (J + \sum_{k=1}^m f_k \Delta\varphi_k) = \min \quad (10-89)$$

$$\text{其中 } J = \iint_E \left| \frac{z''(w)}{z'(w)} \right| d\varphi d\psi \quad (10-90)$$

10.6.4 参数半平面

在很多情况下, 不是直接求出 z 与 w 的关系, 而是通过在上半平面 $Im\zeta > 0$ 变化的参变量 $\zeta = \xi + i\eta$ 表示两个函数, 这样更为合理。如果 $z(\zeta)$ 和 $w(\zeta)$ 已知, 则可以消去 ζ 而得到函数 $z = z(w)$ 。但是, 这个运算带来了数学上的困难, 按实质说没有它也可以。

我们将证明, 知道了函数 $z(\zeta)$ 和 $w(\zeta)$, 就可以通过 ζ 计算出塑性变形功率。实际上

$$\frac{z''(w)}{z'(w)} = \left(\frac{d}{d\zeta} \ln \frac{dz}{dw} \right) \frac{d\zeta}{dw} = \left(\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} - \frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)} \right) \frac{1}{w'(\zeta)} \quad (10-91)$$

这给出

$$J = \iint_B \left| \frac{z''(w)}{z'(w)} \right| d\varphi d\psi = \iint_A \left| \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} - \frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)} \right| |w'(\zeta)| d\xi d\eta \quad (10-92)$$

有的情况下域D是在顶点 A_1, A_2, \dots, A_n 处(图139)顶角为 $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ 的多边形, 我们来研究这种情况。应用许瓦兹-克里斯托弗尔公式(9-163), 可以将多边形的内部映射成上半平面,

$$z = C_1 \int (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + C_2$$

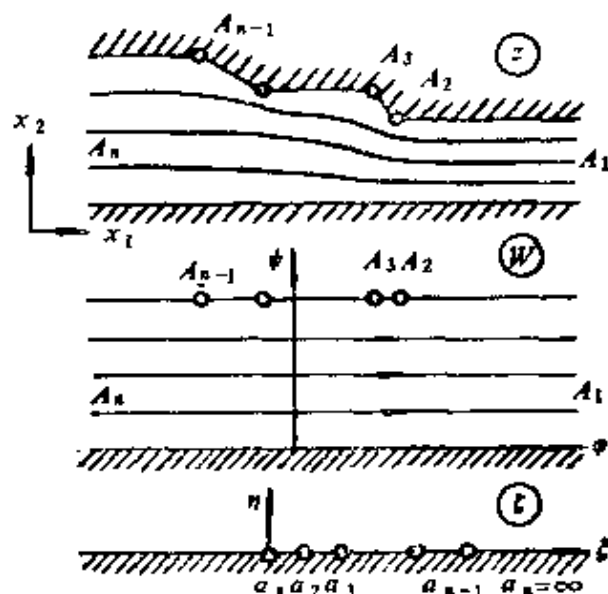


图139 在多边形中的流动

多边形的边界映射成平面 ζ 的实轴 ξ , 且点 a_1, a_2, \dots, a_n 是多边形顶点的映象, 常数 C_1, C_2 取决于多边形在 z 平面上的布置和取向。如果 $a_n = \infty$, 则积分号下的相应乘子 $(\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}$ 将等于1。参数 a_k 中有三个可以任意选择。

因此假定 $a_1 = 0, a_n = \infty$ 。

由式(10-91)得到

$$\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} = \frac{d}{d\zeta} \ln z'(\zeta) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{\zeta - a_k}$$

设单位时间内在域的每一个单位深度上(沿与平面 z 垂直的方向测量得到)域D的速度矢量通量等于B单位体积。

无限的直线带 E 向上半平面的映射用下述公式实现:

$$w(\zeta) = -\frac{B}{\pi} \ln \zeta + iB \quad (10-93)$$

对 ζ 微分

$$|w'(\zeta)| = \frac{B}{\pi} \left| \frac{1}{\zeta} \right|$$

$$\left| \frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)} \right| = \left| \frac{1}{\zeta} \right|$$

公式(10-92)以如下方式变换:

$$J = \frac{B}{\pi} \iint_D \left| \frac{a_1}{\zeta} + \sum_{k=2}^n \frac{\alpha_k - 1}{\zeta - a_k} \right| \left| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta|} \right| \quad (10-94)$$

例题10.12 板材挤压 (可行解)

试建立挤压板材平面问题的可行解 (图140)

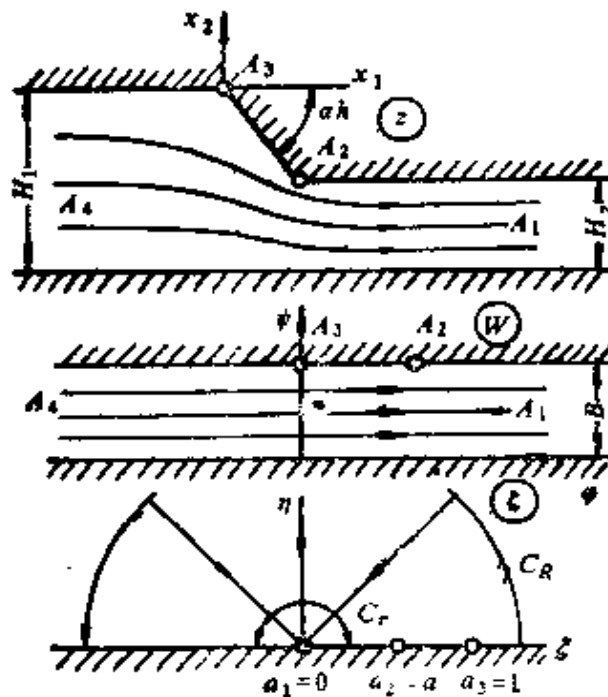


图140 板材挤压 (可行解)

解 变量 z 的变化域 D 表示成四边形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的形式。顶角为 $0, (1+\alpha)\pi, (1-\alpha)\pi, 0$, 结果 $\alpha_1=0, \alpha_2=1+\alpha, \alpha_3=1-\alpha, \alpha_4=0$ 。

“停滞区”的角 $\beta = \alpha\pi$ 用作待定参数。

以下述方式给定三个参数 a_i : $a_1 = 0$, $a_3 = 1$, $a_2 = \infty$ 。

按公式 (9-163), 许瓦兹-克里斯托弗尔公式为

$$z(\zeta) = -\frac{H_1}{\pi} \int_1^\zeta \left(\frac{\zeta - a}{\zeta - 1} \right)^\alpha \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad \text{其中 } a = \left| \frac{H_2}{H_1} \right|^{1/\alpha}$$

同时, 按式 (10-93), $w(\zeta) = -\frac{B}{\pi} \ln \zeta + iB$ 。建立速度场

$$\vec{v}^0 = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{dz}{d\zeta}$$

由此有
$$\vec{v}^0 = \frac{B}{H_1} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta - a} \right)^\alpha$$

下面研究得到的关系。在 $\zeta = \infty$ (点 A_4) 时, $\vec{v} = B/H_1 = v_1$; 在 $\zeta = 0$ (点 A_1) 时, $v = B/H_2 = v_2$; 在 $\zeta = 1$ 时, 速度变为零 (点 A_3); 在 $\zeta = a$ (点 A_2) 时, 速度等于无限大。

假定在 A_2A_3 上 $\tau = 2\tau, f$, 而在 A_3A_4 上, $\tau = 0$ 。由式 (10-93) 可知, 在边界段 A_2A_3 上势 φ 的增量是:

$$\Delta\varphi = w(a) - w(1) = -\frac{B}{\pi} \ln a = \frac{B}{\pi\alpha} \ln \frac{H_1}{H_2}$$

压力 $p_{c, \tau}$ 的上界估计公式为

$$p_{c, \tau} = 2\tau, \left[\frac{\alpha(1-a)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{d\xi d\eta}{|\xi(\xi-a)(\xi-1)|} + \frac{f}{\alpha\pi} \ln \frac{H_1}{H_2} \right] \quad (10-95)$$

在推导这个关系时, 我们考虑了 $\alpha_1 = 0$, 且按式 (10-94),

$$\begin{aligned} I &= \int_l p v_n dl = p_{c, \tau} \int_l v_n dl = p_{c, \tau} B \\ \frac{J}{B} &= \frac{1}{\pi} \iint_d \left| \frac{(1+\alpha)-1}{\zeta-a} - \frac{(1-\alpha)-1}{\zeta-1} \right| \frac{d\xi d\eta}{|\xi|} \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_d \frac{\alpha(1-a) d\xi d\eta}{|\xi(\xi-a)(\xi-1)|} \end{aligned}$$

这个积分不能解析计算。对它给出了两方面的估计，即当 $\frac{2\ln 2}{\pi} \leq k \leq \frac{2\ln 2 + 8G/\pi}{\pi}$ 时， $\frac{J}{B} = \ln \frac{H_2}{H_1} + \alpha\pi k$ ，式中 $G = 0.915965\cdots$ ——卡塔兰 (Каталан) 常数。

结果得到

$$p_{c\beta} = 2\tau_s \left[\left(1 + \frac{f}{\beta}\right) \ln \frac{H_2}{H_1} + k\beta \right] \quad (10-96)$$

式中 $\beta = \alpha\pi$ ——停滞区的待定角。由压力 $p_{c\beta}$ 最小条件确定 β ，即由式 $\partial p_{c\beta} / \partial \beta = 0$ ，因此

$$\beta = \sqrt{\frac{f}{k} \ln \frac{H_2}{H_1}} \quad (10-97)$$

将 β 代入表达式 (10-96) 后，将有：

$$p_{c\beta} = 2\tau_s \left(\ln \frac{H_2}{H_1} + 2\sqrt{f k \ln \frac{H_2}{H_1}} \right) \quad (10-98)$$

10.6.5 热传导方程

我们写出平面问题的热传导条件

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \right) + \nu \tau_s H \quad (10-99)$$

式中 κ 和 ν ——常数。

我们将忽略温度应力。

在给定的初始和边界条件下解这个方程非常困难，原因在于域 D 形状复杂，且在很多条件下它的边界没有充分确定。如果采用保角映射法，可以克服这个困难。过渡到平面 w ，我们有

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = \frac{1}{|z'(w)|^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} \right)$$

$$H = 2 |w''(z)| = 2 \left| \frac{z''(w)}{z'(w)} \right| \frac{1}{|z'(w)|^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial\psi} \frac{d\psi}{dt}$$

因为有势流动时沿流线 $\psi = \text{常数}$ ，所以 $\frac{d\psi}{dt} = 0$ 。此外，

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{|z'(w)|^2}$ 。将这些关系代入到方程 (10-99)，并将方程

两边乘以 $|z'(w)|^2$ ，得到

$$|z'(w)|^2 \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = \kappa \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2} \right) + 2\nu\tau_s \left| \frac{z''(w)}{z'(w)} \right| \quad (10-100)$$

对于稳定的温度场， $\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ ，且方程可写成更简单的形式

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = \kappa \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2} \right) + 2\nu\tau_s \left| \frac{z''(w)}{z'(w)} \right| \quad (10-101)$$

因为变量 (φ, ψ) 的变化域是直线带状域，所以方程 (10-100) 和 (10-101) 的边值问题比式 (10-99) 要简单得多。

10.6.6 布希聂斯克 (Буссинеск) 假定

布希聂斯克曾假定，忽略在介质运动方向上由于热传导而发生的热量迁移，只保留在此方向上的热量的对流迁移。这就能够简化定常温度场的方程 (10-101)，将它写成

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = \kappa \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} + 2\nu\tau_s \left| \frac{z''(w)}{z'(w)} \right|$$

为了比较，我们引入一个方程，它描述侧面有绝缘、内部有强度为 $f(x, t)$ 的热源时细杆中的温度分布： $\frac{\partial\theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + f(x, t)$

因此，布希聂斯克假定能够确定有势流动中的二维稳定温度分布和杆中一维不稳定分布之间的相似关系。

10.6.7 可行解的精确化

用两条等势线 $\varphi = \varphi_1$ 和 $\varphi = \varphi_2$ 分割出一个曲边四边形 D_1 (见

图138), 并提出这样问题: 要求利用全功率最小原理使该域中的有势速度场精确化, 使其逼近真实流动。

此时, 合理的方法是利用正交曲线坐标 $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $\psi = \psi(x_1, x_2)$, 通过保角映射将曲边带状域 D 映射为直线带状域 E 。这个坐标系的拉梅系数为 (见9.7节) $H_1 = H_\varphi = h$, $H_2 = H_\psi = h$, 其中 $h = |z'(w)|$ 。

精确解的流函数写作可行有势流动流函数 ψ 和修正流函数 $\Psi = (\varphi, \psi)$ 的和。

根据公式 (3-68)

$$v_\varphi' = \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \psi}, \quad v_\psi' = -\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad (10-102)$$

计算速度修正矢量的分量, 并考虑关系式 (10-102), 将公式 (3-60) ~ (3-61) 变换, 利用变换的公式则可以求出应变速率张量的分量:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\varphi\varphi}' &= -\xi_{\psi\psi}' = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial \psi} - \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right) \right] \\ \xi_{\psi\psi}' &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right) - \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (10-103)$$

在这些公式中令 $\Psi = \psi$, 得到了以曲线坐标 (φ, ψ) 写出的相应于可行解的变形速率分量: $v_\varphi^0 = 1/h$, $v_\psi^0 = 0$

$$\xi_{\varphi\varphi}^0 = -\xi_{\psi\psi}^0 = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \ln h}{\partial \psi}, \quad \xi_{\psi\varphi}^0 = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} \quad (10-104)$$

并且 $H^0 = \frac{2}{h^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \psi} \right)^2}$

在实行精确化之后，切变形速度强度将为：

$$H = 2\sqrt{(\xi_{\psi\varphi}^0 + \xi_{\varphi\psi}^1)^2 + (\xi_{\varphi\psi}^0 + \xi_{\psi\varphi}^1)^2}$$

10.6.8 函数 $\Psi(\varphi, \psi)$ 的边界条件

在平面 ω 上，矩形 E_1 对应于域 D_1 。如图138所示那样布置坐标原点，要求精确速度场与域 D_1 以外的可行解连续连接，而在边界区段 $\psi=0$ 和 $\psi=B$ 上，满足边界的包绕条件，即 $v_n=0$ 。这可化为如下的边界条件：

$$\text{当 } \varphi=0 \text{ 和 } \varphi=A \text{ 时, } v_{\varphi}' = v_{\psi}' = 0$$

$$\text{当 } \psi=0 \text{ 和 } \psi=B \text{ 时, } v_{\psi}' = 0$$

为了满足这些条件，只需在域 D_1 的周线 γ_1 上取常数值（例如取零），而它对 φ 的导数在 $\varphi=0$ 和 $\varphi=A$ 时变为零。因此，修正流函数的边界条件可以以下述形式写出：

$$\Psi \Big|_{\gamma_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi=A}} = 0 \quad (10-105)$$

如果附加地要求应变速率场连续，则边界条件可写成

$$\Psi \Big|_{\gamma_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi=A}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi=A}} = 0 \quad (10-106)$$

我们谈谈对称性的问题。在建立相对 φ 轴对称的速度场时，应该满足下述关系：

$$v_{\varphi}(\varphi, \psi) = v_{\varphi}(\varphi, -\psi), \quad v_{\psi}(\varphi, \psi) = -v_{\psi}(\varphi, -\psi)$$

为了满足后一个条件，只要函数 $\Psi(\varphi, \psi)$ 对变量 ψ 是奇次的便足够了。

应当指出，满足条件式(10-105)或(10-106)的函数 $\Psi(\varphi, \psi)$ 不能附带地使在可行解范围内所确定的流动域边界精确化。如果在边界的自由区段取消 $\Psi=0$ 这一限制条件，则有可能更精确地确定这个区段的形状。

10.6.9 变态的里兹(Ritz)法

我们引入无量纲的变量 $\tilde{\varphi} = \varphi/A$ ， $\tilde{\psi} = \psi/B$ ，并将以 φ 轴对称流动的流函数表示成按指数函数系统展开二重级数的截断式

$$\Psi(\varphi, \psi) = [\tilde{\varphi}(1 - \tilde{\varphi})]^2 (1 - \tilde{\psi}^2) \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn} \tilde{\varphi}^m \tilde{\psi}^{2n+1} \quad (10-107)$$

乘子 $[\tilde{\varphi}(1 - \tilde{\varphi})]^2$ 保证在矩形 E_1 侧面满足边界条件。变量 $\tilde{\psi}$ 的奇指数级数配合乘子 $1 - \tilde{\psi}^2$ 可以满足对称条件和域 E_1 边界水平区段上的边界条件。

函数的坐标系满足完备条件，而表示成式(10-107)的流函数 $\Psi(\varphi, \psi)$ ，保证不论系数 b_{mn} 为何值都满足修正速度场的边界条件。

按公式(10-103)和(10-104)计算速度分量 v_φ 、 v_ψ 和应变速率分量 $\xi_{\varphi\varphi}$ 、 $\xi_{\psi\psi}$ 后，把这些式子代入泛函 I^0 并利用取极值的必要条件

$$\frac{\partial I^0}{\partial b_{mn}} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots, M; n=0, 1, 2, \dots, N)$$

由式(10-81)得到，这个方程组的形式应该是

$$\iint_{E_1} \frac{\tau_s}{2H} \frac{\partial H^2}{\partial b_{mn}} h^2 d\varphi d\psi + \int_0^A \left[\tau^+ \frac{\partial}{\partial b_{mn}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right)^+ + \tau^- \frac{\partial}{\partial b_{mn}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right)^- \right] d\varphi = 0 \quad (10-108)$$

$$(m=0, 1, 2, \dots, M; n=0, 1, 2, \dots, N)$$

其中“+”号和“-”号表示相应于 $\psi=B$ 和 $\psi=0$ 的值。

因为 H^2 相对于系数 b_{mn} 是平方型的，所以导数 $\partial H^2 / \partial b_{mn}$ 相对于这些量是线性的。其次，函数 $\partial \Psi / \partial \psi$ 相对于 b_{mn} 是线性的，因此这个函数的导数与 b_{mn} 无关。使求解方程组(10-108)造成巨大困难的非线性问题，与积分表达式(沿域 E_1 积分)分母上出现函数 $H(b_{mn})$ 有关。

为使方程组(10-108)线性化，采用了已知的逐次逼近方法

(见9.2节)在第 k 次迭代中，我们将把位于分母上的 H 值看作是前一次迭代解方程组(10-108)得到的系数 b_{mn}^{k-1} 的函数。我们选可行解作为零次近似，即取 $b_{mn}^0 = 0$ 。

在零级近似时，速度场描述 D 域内理想的不可压缩液体的运动，而在作随后的近似时，则描述沿域 D 有可变粘性系数

$$g_k(x_1, x_2) = \frac{\tau_s}{H(b_{mn}^{k-1}, x_1, x_2)}$$

的线-粘性介质的运动。

在每次近似中，系数 b_{mn} 可由解线性代数方程组求得，这时，出现可变的粘性系数 g_k 仅仅使数值积分计算稍微复杂化。

所描述方法的宝贵特点是随着过渡到下一次迭代解的形式保持不变（仅仅系数 b_{mn} 变化），这可以大大简化电子计算机程序并可减少大量的运算。

一般没有从理论上证明方法的收敛性，但是根据实际计算可以认为它完全适用于工程问题。

例题10.13 板材挤压（使可行解精确化）

试将挤压板材平面问题的可行解精确化，材料可认为是理想塑性的，即 $T = \tau_s$ 。

解 我们利用上而所述的方法使例题10.11中得到的可行解精确化。

在图141上作出 $\beta = 45^\circ$ 、 $H_1/H_2 = 2$ 、 $f = 0.25$ 时挤压铅-铋

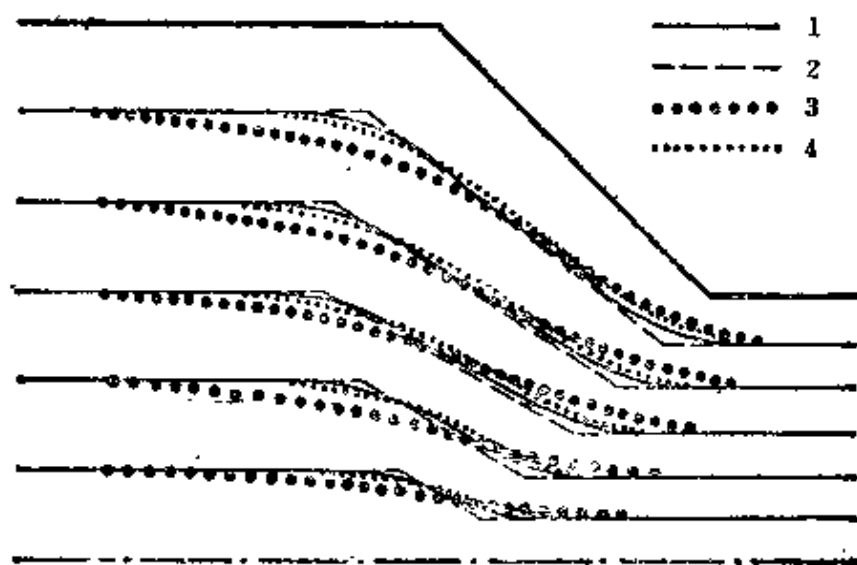


图141 流线的比较

1—实验结果；2—用滑移线法计算结果；3—可行解；4—精确解

合金实验获得的流线，并将它与用特征线法计算的流线、可行解得到的流线以及使其精确化之后得到的流线进行了比较^①。

容易看出，如果塑性变形区域稍有一点是有势速度场，增大该区域的长度比真实场增大，则滑移线场解相反会使这个区域增大受限。依据精确解作出的流线能与实验结果很好的一致。

10.6.10 应力的计算

知道了应变速率 ξ_{ik} ，就能够按式 (10-3) 计算不可压缩介质的应力偏差张量分量： $s_{ik} = \frac{2T}{H} \eta_{ik}$ 。

因此，用速度场可以确定应力状态，其精度可达到平均应力 σ_0 。为了求 σ_0 ，我们采用平衡方程 (10-30)，对于平面变形状态，这个平衡方程可在正交坐标系 (φ, ψ) 中以如下形式写出：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} &= - \left[\frac{\partial s_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_{\varphi\psi}}{\partial \psi} + 2 \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \psi} s_{\varphi\psi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} s_{\varphi\varphi} \right) \right] \\ \frac{\partial \sigma_0}{\partial \psi} &= - \left[\frac{\partial s_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial s_{\varphi\psi}}{\partial \varphi} + 2 \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} s_{\varphi\psi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \psi} s_{\psi\psi} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (10-109)$$

积分第一个方程，给出

$$\sigma_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[\frac{\partial s_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_{\varphi\psi}}{\partial \psi} + 2 \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \psi} s_{\varphi\psi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} s_{\varphi\varphi} \right) \right] d\varphi + \Phi(\psi)$$

这里， $\Phi(\psi)$ 是某一函数，就其物理意义而言，这个函数与 $\varphi = \varphi_0$ 线上 σ_0 的分布相对应。

如果函数 $\Phi(\psi)$ 不能由边界条件求出，则可利用第二个平衡方程来求它。为此，取 $\varphi = \varphi_0$ ，并对 ψ 积分方程 (10-109)，结果得到

^①程序是在作者指导下由 В.И. 科斯秋宁 (Косцюнин) 编制的。

$$\Phi(\psi) = - \int_{\psi_0}^{\psi} \left[\frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \psi} + \frac{\partial s_{\varphi\phi}}{\partial \varphi} + 2 \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} s_{\varphi\phi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \psi} s_{\phi\phi} \right) \right] d\psi \Big|_{\varphi=\varphi_0} + c$$

最后，得到平均应力值 σ_0 ：

$$\begin{aligned} \sigma_0(\varphi, \psi) = & - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[\frac{\partial s_{\varphi\phi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_{\varphi\phi}}{\partial \psi} + 2 \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} s_{\varphi\phi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \psi} s_{\varphi\phi} \right) \right] d\varphi - \int_{\psi_0}^{\psi} \left[\frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \psi} + \frac{\partial s_{\varphi\phi}}{\partial \varphi} + 2 \left(\frac{\partial \ln h}{\partial \psi} s_{\phi\phi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} s_{\varphi\phi} \right) \right] d\psi \Big|_{\varphi=\varphi_0} + C \end{aligned} \quad (10-110)$$

利用式 (10-110) 可以计算域 E 任何点的平均应力值，这个计算可归结为沿坐标线 $\varphi = \text{常数}$ 和 $\psi = \text{常数}$ 依次积分平衡方程。积分由平均应力已知的点 (φ_0, ψ_0) 开始。

如果在物体的一部分边界上给定外力的合力，并由式 (10-110) 所确定的应力状态出发计算这个合力，则可以求出 C 。

例如，对于挤压的情况，当金属由模孔中出来时，轴向力的合力等于零。由此可得到求常数 C 的方程：

$$\int_0^b \sigma_{\varphi\varphi}(a, \psi) h d\psi = 0$$

在图142上作出了按上述方法计算的应力 σ_{11} 的分布（改换为

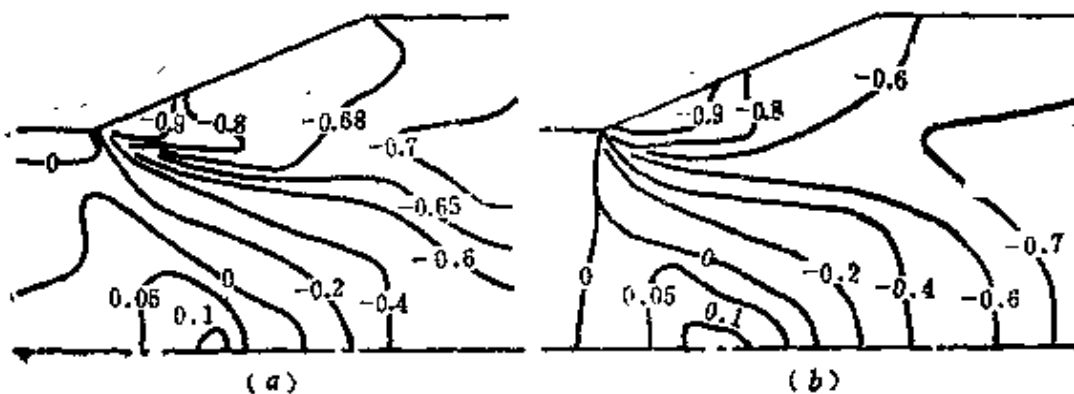


图142 挤压时应力的分布
(a)按所述的方法；(b)用有限元法计算 (S,小林)

笛卡儿坐标 x_1, x_2), 并与S. 小林用有限元方法得到的解进行了对比 ($\beta = \pi/4, T = \tau_s$)。

10.6.11 断裂条件分析

利用式 (7-25) 来分析塑性变形时金属的断裂条件。近似地取可行速度场 $\psi = \psi_0 = \text{常数}$ 的流线作为质点移动的轨迹。如果采用下述关系式, 则对时间 t 的积分可以用对变量 φ 的积分代替:

$$dt = \frac{dS}{v(\varphi, \psi_0)} = \frac{h d\varphi}{v(\varphi, \psi_0)} = \sqrt{\frac{h^2 d\varphi}{\left(1 + \frac{\partial \Psi}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

如7.3节那样地写出断裂条件:

$$\omega = \int_0^1 \frac{H dt}{A_p[k(t)]} = \int_0^\varphi \frac{H(\varphi, \psi_0) h^2 d\varphi}{A_p[k(\varphi, \psi_0)] \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \Psi}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right)^2}} = 1$$

其中 $k = \sigma_0/T$ —— 应力状态刚性系数。

作为例子, 在图143上作出了板材挤压时 ω 的等值线 ($H_1/H_2 = 2, \beta = \pi/4, f = 0$ 和 $f = 0.25$)。

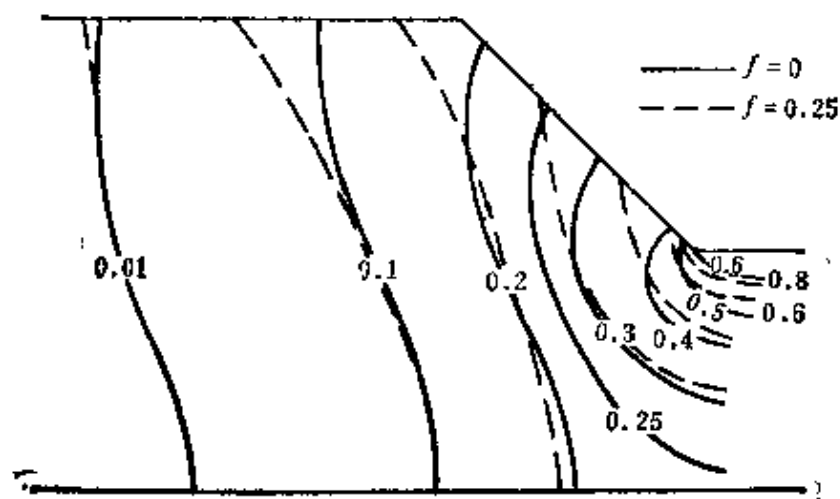


图143 ω 为常数的等值线

10.6.12 关于塑性流动综合数学模型

这样, 在分析理想塑性介质平面流动的例子中, 我们曾研究了与速度场、温度场、应力的计算以及与断裂条件分析有关的主

要问题。我们已作好准备来解难度更大的具有复杂流变性质的材料的塑性变形问题，这个问题同时也是非常有意义的问题。

实际上，理想塑性是抽象化的概念。实际金属远非总能归入到这个狭窄的范围内，变形的温度、速度和变形程度以及被研究的物体或体元的加载历史，对实际金属的性质和行为有重大的影响。因此，面临的问题是必须从这个现象的所有方面来研究塑性流动过程。是否已准备好来解决这个问题呢？

我们将是乐观的，并将肯定地回答这个问题。

第一，具有能够将有着足够复杂性材料的真实流动和运动许可流动区别开来的判据。虚速度原理就可以起到这种独特的“试金石”的作用。

第二，拥有诸如加廖尔金法或里兹法这样的作出近似解的数学上有根据的方法。

第三，能够利用有限差分方法计算温度场。

第四，可以利用保角映射将流动域映射成经典域——直线带状域、圆形域或圆环域，这些各种各样的塑性流动问题的解不仅可以简化，而且可以划成统一形式。

此外，有现代化的高速运算的电子计算机，这使得能够利用机器来承担巨大规模的人工计算。

利用所有这些强大的武器，可以过渡到对塑性流动过程的综合数学模型进行叙述，即过渡到下一章——本书的最后一章。

最后，还要提出一个问题，即利用保角映射是否可以不仅描述平面流动，而且也可以描述轴对称或三维流动呢？在下一章将给出这个问题的肯定的回答，暂且引用下述的远非普通的三维问题的解作为例子。

例题10.14 在具有跨接部分的模中挤压薄壁型材

从圆的挤压缸中通过平模挤压薄壁型材。模槽用薄的跨接部分分为几个单元（图144）。试计算型材单个部分的流出速度并确定挤压力。

解 1) 可行速度场 设模子的工作表面是多连域

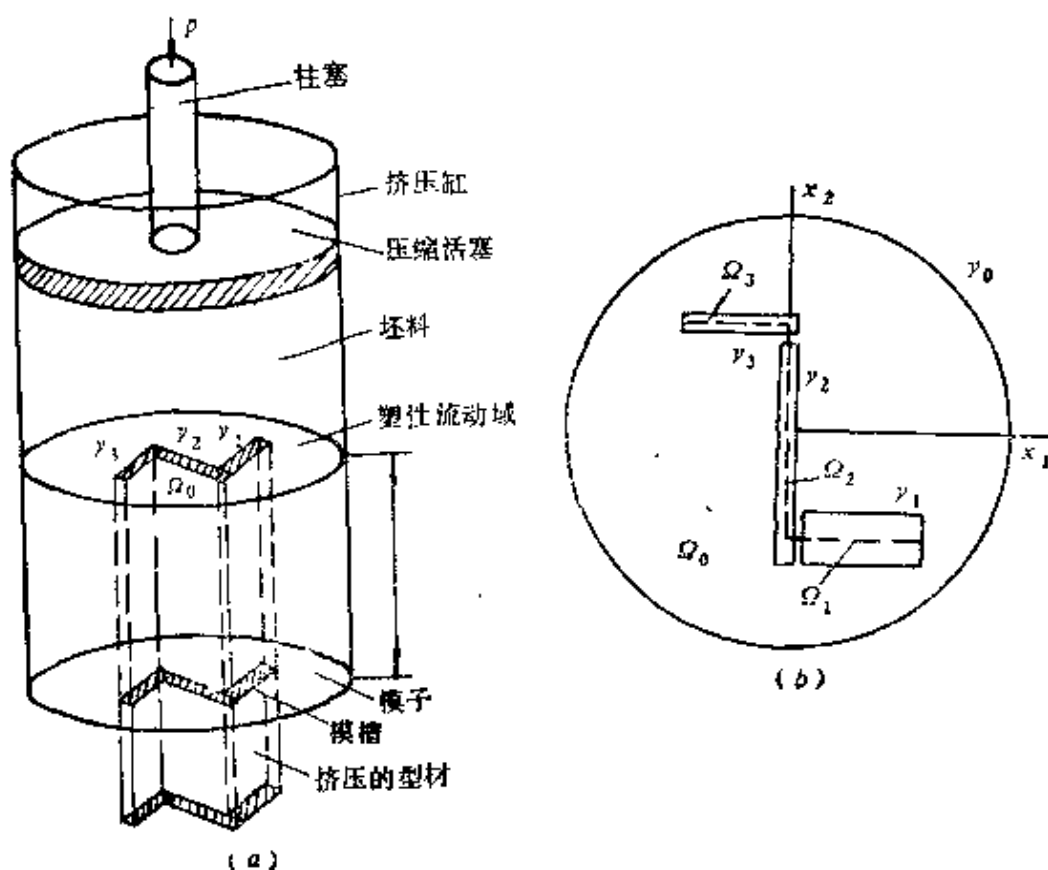


图144 挤压薄壁型材
(a)流动图; (b)域 Ω

$$\Omega_0 = \Omega - (\Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_n)$$

它由围线 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ 所围定。

这里 Ω ——半径为 R 的圆; γ_0 ——围定它的圆周; Ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) ——模槽, 它由围线 γ_k 所围定并与型材单元形状相对应。

运动边界条件是坯料的刚性部分沿 x_3 轴以速度 v_0 移动, 在平面 $x_3 = l$ 将塑性流动域 D 与坯料刚性部分分开, 在此平面上速度 $v_3 = -v_0$ 。

在挤压缸的侧表面上 $v_1 = v_2 = 0$; 在域 Ω_0 内在模面 $x_3 = 0$ 上有 $v_3 = 0$, 而在域 Ω_k 内 ($k = 1, 2, \dots, n$) $v_3 = c_k = \text{常数}$ 。因此, 型材的单元 Ω_k 以速度 c_k 由槽中流出。

将变形区 D (半径为 R 长为 l 的圆柱体) 分为下述区域: D_k ——在围线 γ_k 上作出的母线平行于挤压缸轴线的柱体 (一般情况下不是圆的) 和区域

$$D_0 = D - \sum_{k=1}^n D_k$$

然后作满足平断面假定的运动许可速度场。

变形区的横断面，即前面所研究的用平面 $x_3 = \text{常数}$ 所截的断面 Ω 将模槽叠置在模面上 (图144, b)。

由平断面假定可以得出，三维速度场 v 在域 D 中相当于平面平行速度场 $\vec{V} = v_1 + iv_2$ ，在域 Ω 内将认为它是连续的，分量 v_1 和 v_2 不依赖于 x_3 。很明显， $\text{div} \vec{V} \neq 0$ 。

采取下述的简化假定。将跨接部分看成是无限薄的，而将模槽整个骨架 $\Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_n$ 即被挤压型材的中心线看成是切口 (见图144)。将由此得到的二连域 (有切口的半径为 R 的圆) 映射成复平面 $\zeta = re^{i\omega}$ (图145) 上的圆环 $a < r < 1$ 。此时，在域 D_0 我们引入正交曲线坐标系 $\beta_1 = r, \beta_2 = \omega, \beta_3 = x_3$ ，拉梅系数为 $H_1 = H_r = h, H_2 = H_\omega = rh, H_3 = 1$ ，其中 $h = |z'(\zeta)|$ 。

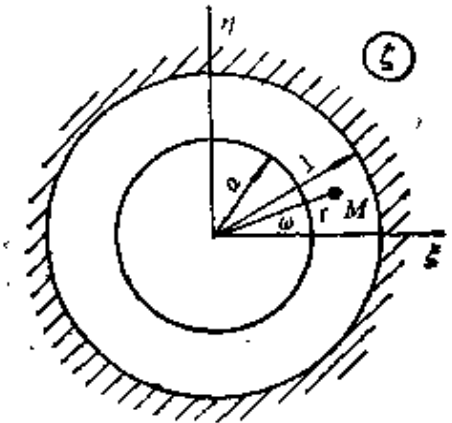


图145 域 Ω 映射成圆环

令 $v_\omega^0 = 0, v_r^0 = -Ax_3$ ，其中 $A = v_0/l$ ，我们来建立域 D_0 内的可行速度场。不可压缩性方程 (3-66) 可写作

$$\frac{\partial}{\partial r} (rhv_r^0) - \frac{\partial}{\partial x_3} (rh^2 Ax_3) = 0$$

由它可求出不依赖于变量 x_3 的分量 v_r^0 。

考虑到在圆周 $r=1$ 上， $v_r = 0$ ，得到

$$v_r^0(r, \omega) = -\frac{A}{rh} \int_r^1 h^2 r dr$$

因此，在域 Ω_0 沿流线 $\omega = \text{常数}$ 发生了速度为 $v_r^0(r, \omega)$ 的流动，在挤压缸表面速度 $v_r^0(r, \omega)$ 变为零。流线与挤压缸壁及切口的棱正交（图146）。

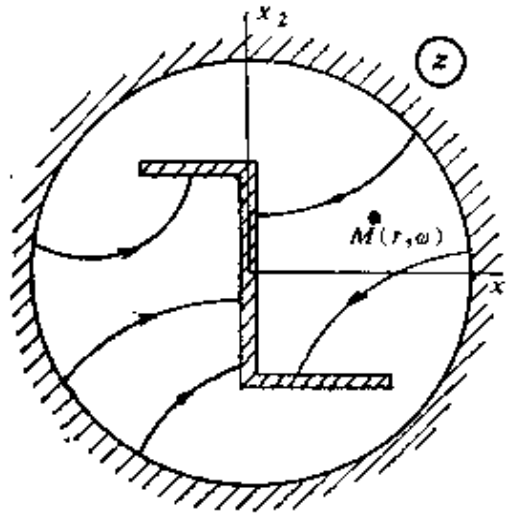


图146 实验的流动图

在单位时间内通过所有模槽流出的金属体积，亦即通过挤压缸的连续介质的通量为 $B = v_0 \Phi$ ，其中 $\Phi = \pi R^2$ 即域 Ω 的面积。引入下述的无量纲参数：

$$\lambda_k = \frac{\Phi_k}{\Phi}, \quad \mu_k = \frac{b_k}{b}, \quad v_k = \frac{\Pi_k}{\Pi_0}$$

$$v_k' = \frac{\Pi_k'}{\Pi_0}, \quad h_k = \frac{H_k}{R}$$

其中 Φ_k —— 域 Ω_k 的面积， Π_k —— 包围这个域的围线 γ_k 的周长； Π_k' —— 周长 Π_k 除了跨接部与宽度所余的部分； b_k —— 矢量 \vec{V} 通过围线 γ_k 的通量； H_k —— 制动区的长度

$$\Pi_0 = 2\pi R, \quad b = B/l = A\Phi$$

无量纲参量 λ_k 和 μ_k 表示模槽的相对面积和沿这些模槽通量的分布。因为 $\sum_{k=1}^n \Phi_k = \Phi$ ，所以参数 λ_k 满足条件 $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 - \lambda_0$ 。

由格林公式

$$\iint_{\Omega_0} \operatorname{div} \vec{V} dx_1 dx_2 = \int_{\gamma} V_n d\gamma$$

和连续介质围线 γ_0 的非多孔性可以得出, 对参数 μ_k 要加上条件

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = \mu_0 \quad (10-111)$$

在柱状域 D_k 中速度分量 v_1 和 v_2 与对域 Ω_0 所建立的速度场连续地连接, 而速度分量 v_3 为

$$v_3 = - \left[v_0 + \frac{b_k}{\Phi_k} (l - x_3) \right] = -v_0 \left[1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k} \left(1 - \frac{x_3}{l} \right) \right]$$

且由模槽流出的速度为 $c_k = v_0 (1 + \mu_k / \lambda_k)$ 。

在柱体表面 s_k 上 ($k = 1, 2, \dots, n$) 金属的相对滑动速度为

$$\Delta v_k = v_0 \left(1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right) \left(1 - \frac{x_3}{l} \right)$$

最后, 型材两相邻单元间边界上的相对滑动速度可由下述关系式确定:

$$\Delta v_{k, k+1} = v_0 \left| \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right| \left(1 - \frac{x_3}{l} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10-112)$$

2) 速度场的精确化 以如下形式确定修正速度分量:

$$v_r' = \frac{1}{rh} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega}, \quad v_\omega' = -\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v_s' = 0$$

之后, 我们在域 Ω_0 引入修正流函数 $\Psi(r, \omega)$ 。

因为 $v_r'(1, \omega) = 0$, 所以在 $r = 1$ 时 $\partial \Psi / \partial \omega = 0$ 和 $\Psi(1, \omega) = C = \text{常数}$ 。此外, 考虑到关于流动特征的实验数据 (图146), 要求在域 Ω_0 精确化流动的流线应当与围线 γ_0 及切口棱正交。因此, 在 $r = 1$ 和 $r = a$ 时, $v_\omega' = 0$ 和 $\partial \Psi / \partial r = 0$ 。设 $C = 0$, 得到修正流函数的下述边界条件:

$$\Psi(1, \omega) = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0$$

如下函数在系数 a_{mn} 和 b_{mn} 为任何值时满足这些条件:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \omega) = & A \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (a_{mn} \sin m\varphi + b_{mn} \cos m\varphi) \\ & \times \sin \left[(2m+1) \frac{\pi}{2} \left(\frac{1-r}{1-\alpha} \right)^2 \right] \quad (10-113) \end{aligned}$$

3) 全功率 我们写出全功率的表达式 (10-57)。在域 D_0 内

$$\dot{A}_0 = \iiint_{D_0} \tau, H dW = l \iint_{\Omega_0} \tau, H dx_1 dx_2 = l \int_0^1 \int_0^{2\pi} \tau, H_0 h^2 r dr dW$$

式中

$$\begin{aligned} H_0(r, \omega) \\ = 2\sqrt{(\xi_{r,r}^0 + \xi_{r,r}^1)^2 - A(\xi_{r,r}^0 + \xi_{r,r}^1) + A^2 + (\xi_{r,\omega}^0 + \xi_{r,\omega}^1)^2} \end{aligned}$$

此外, 对于域 D_k ($k=1, 2, \dots, n$)

$$\dot{A}_k = \iiint_{D_k} \tau, H dW = l \iint_{\Omega_k} \tau, H_k d\Omega_k$$

且 $H_k = 2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2} \leq 2(|\xi_1| + |\xi_2|)$

其中 ξ_1 和 ξ_2 —— 主应变速率, 且 $\xi_1 + \xi_2 = \xi_{11} + \xi_{22} = -A$ 。

我们推断 ξ_1 和 ξ_2 是负的。换言之, 在域 D_k 中沿平面 $x_3 =$ 常数上的两个主轴发生压缩, 而沿轴 x_3 发生伸长。因而 $H_k \leq 2|\xi_1 + \xi_2| = 2|\xi_{11} + \xi_{22}|$

如果 $\xi_1 = \xi_2$, 则 $H_k = \sqrt{3} |\xi_1 + \xi_2| = \sqrt{3} |\xi_{11} + \xi_{22}|$ 。

应用格林公式, 求得

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_k} \tau, H_k d\Omega_k &= \beta\sigma, \left| \iint_{\Omega_k} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) d\Omega_k \right| \\ &= \beta\sigma, \int_{\gamma_k} v, dy = \beta\sigma, \mu_k b \end{aligned}$$

其中参数 β 满足不等式 $1 \leq \beta \leq 1.15$ 。按公式 (10-111), 表达式 \dot{A}_k 之和为

$$\sum_{k=1}^n \dot{A}_k = \beta\sigma, B\mu_0$$

因此对于整个域 D ,

$$\dot{A} = \iiint_D \tau_i H dW = \sigma_s B (J_1 + \beta \mu_0)$$

其中 $J = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{A\Phi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} H_0 h^2 r dr d\omega$

域 Ω 内剪切面 $x_3 = l$ 上消耗功率为

$$I_1 = \iint_{\Omega_0} \tau_i V d\Omega = \sigma_s B \frac{R}{l} J,$$

其中

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{AR\Phi} \iint_{\Omega_0} |\vec{V}| dx_1 dx_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{AR\Phi} \times \\ \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\vec{V}| h^2 r dr d\omega$$

同样, 我们将可算出模子表面上摩擦力 $\tau = f_1 \sigma_s$ 发出的功率

$$I_2 = \sigma_s B f_1 \frac{R}{l} J_2.$$

应该指出, 因为可行和修正速度场的分量有公因子 A , 所以积分 J_1 和 J_2 不依赖于这个因子 (因而也就不依赖于变形区的长度 l)。

对于在剪切表面 Ω_k 上所消耗的功率可以给出上限估计

$$I_3^k = 2 \iint_{\Omega_k} \tau_i |v| dx_1 dx_2 \leq 2\tau_i \frac{b_k}{\Pi_k} \Phi_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s B \frac{R}{l} \frac{\mu_k \lambda_k}{2\lambda_k}$$

其中, 如我们已指出的, Π_k —— γ_k 围线的周长, $\nu_k = \Pi_k / \Pi_0 = \Pi_k / 2\pi R$ 。

表面 S_k 上的相对滑动速度由式 (10-112) 确定, 而相应的剪切功率为

$$I_4^k = \iint_{S_k} \tau_i \Delta v dS = \tau_i \Pi_k' \int_0^l \Delta v dx_3 \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s B \frac{l}{R} \nu_k' \left(1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right)$$

其中 Π_k' —— 周长 Π_k 上发生剪切的部分, $v_k' = \Pi_k'/\Pi_0$

变形区中在挤压缸侧表面上由摩擦力 $\tau = f_2\sigma_s$ 所发出的功率为

$$I_5 = \int_{S_0} \tau v_3 dS = \sigma_s B f_2 \frac{l}{R}$$

在型材相邻两单元之间的剪切面上发出的功率用下式计算:

$$\begin{aligned} I_6^{k, k+1} &= \int_{S_k^{k+1}} \tau_s \Delta v_{k, k+1} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s B \frac{1}{R} \alpha_{k, k+1} \left| \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right| \end{aligned}$$

其中 $\alpha_{k, k+1}$ —— 在型材 $(k-m)$ 和 $[(k+1)-m]$ 单元间跨接部分的宽度与圆周长 $\Pi_0 = 2\pi R$ 之比。

最后, 由于坯料刚性部分在挤压缸 (长为 H_0 , $\tau = f_2\sigma_s$ 的区段) 上的摩擦和模具校准带 (长 H_k , $\tau = f_3\sigma_s$) 消耗的功率为

$$I_7 = f_2\sigma_s v_0 H_0 2\pi R = 2\sigma B f_2 h_0$$

和

$$I_8^k = f_3\sigma_s c_k H_k \Pi_k = 2\sigma_s B f_3 h_k v_k \left(1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right)$$

其中 $h_k = H_k/R$ ($k=0, 1, \dots, n$)

结果, 全功率为

$$\begin{aligned} I^0 &= \sigma_s B \left\{ J_1 + \beta\mu_0 + \frac{R}{l} \left[(1+f_1)J_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k \lambda_k}{v_k} \right] \right. \\ &\quad + \frac{l}{R} \left[f_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^n v_k' \left(1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k, k+1} \left| \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} \right| \right] + 2 \left[f_2 h_0 + f_3 \sum_{k=1}^n h_k v_k \left(1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right) \right] \right\} \quad (10-114) \end{aligned}$$

4) 塑性流动区的长度 我们由条件 $\partial I^0 / \partial l = 0$ 确定变形区的长度。此时, 如我们上面业已指出的, 考虑到积分 J_1 、 J_2 与 l 无关。

结果得到

$$\frac{l}{R} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} (1+f_1) J_2 + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k \lambda_k}{v_k}}{\sqrt{3} f_2 + \sum_{k=1}^n v_k' \left(1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k, k+1} \left| \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right|}}$$

将这个式子代入式 (10-114) 并考虑到 $I^0 = qB$ (式中 q ——挤压压力的上限估计), 则得到

$$q = \sigma_s \left\{ J_1 + \beta \mu_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left[\sqrt{3} (1+f_1) J_2 + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k \lambda_k}{v_k} \right]} \right. \\ \left. \times \left[\sqrt{3} f_2 + \sum_{k=1}^n v_k' \left(1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k, k+1} \left| \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right| \right] \right. \\ \left. + 2 \left[f_2 h_0 + f_3 \sum_{k=1}^n h_k v_k \left(1 + \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right) \right] \right\} \quad (10-115)$$

系数 f_1 、 f_2 、 f_3 相应地表示模子、挤压缸和制动区表面上的摩擦条件。

5) 流出速度 为了计算流出速度, 采用下述程序:

- (1) 将域 Ω_0 映射成圆环 Δ ;
- (2) 在域 Δ 内作出具有结点 ξ_i 的网格;
- (3) 在网格节点上计算坐标值 (x_1, x_2) 、导数的模 $h = |z'(\xi)|$ 、可行解的速度分量值和应变速率分量值;
- (4) 以级数截断式 (10-113) 的形式给出修正流函数;
- (5) 求出流入模槽的通量 b_k 的分布, 将其作为待定参数 $a_{m,n}$ 、 $b_{m,n}$ 的函数;

(6) 通过使全功率值相对参数 $a_{m,n}$ 、 $b_{m,n}$ 取最小值求出这些参数、型材各单元的流出速度以及挤压力;

(7) 选定型材在模面上的位置和制动区的长度, 从而确定能保证挤压时金属均匀流出的挤压工具的最佳几何形状。

图147给出了计算结果, 并与实验数据进行了比较^①。

①由O.H.洛什卡列夫 (Лощкарев) 在电子计算机上完成计算。

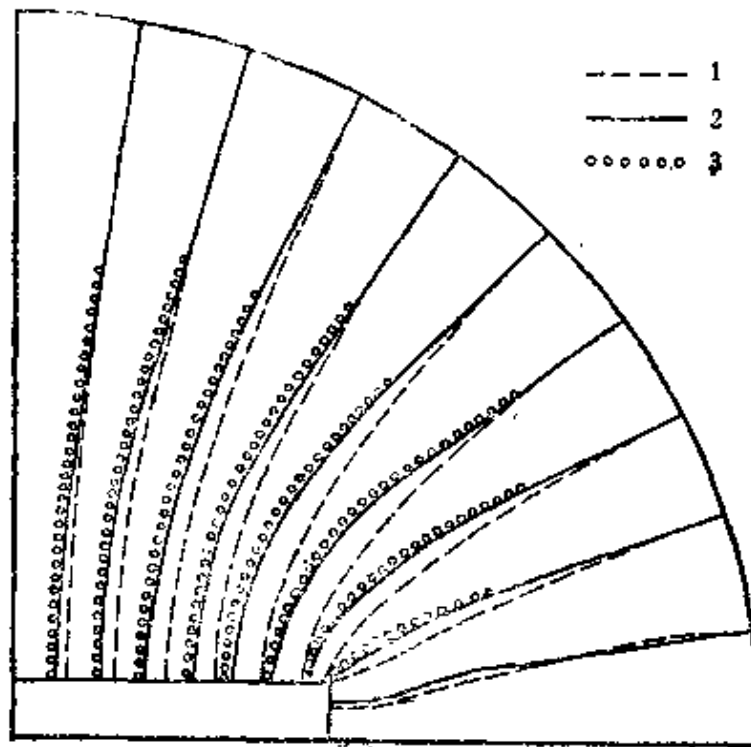


图147 计算流线和实验流线的比较

1—实验流线；2—理论流线（可行解）；3—理论流线（修正解）

思考题

1. 什么是可行速度场？它满足什么条件？
2. 哪些条件可加到修正解上？用什么方式求出这些条件？
3. 在求解时转换到复平面上有什么优点？这时利用什么样的曲线坐标？
4. 在计算温度场时布希聂斯克假定得出什么样的类比关系？
5. 变态里兹法的内容是什么？

参考文献

Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959 371 с. с ил.

Пластическое формоизменение металлов М, «Металлургия», 1968. 416 с. с ил. Авт: Г. Я. Гув, П. И. Полухин, В. П. Полухин, Б. А. Прудковский.

Прагер В., Ходж Ф. Г., Тсория идеально пластических тел,

М., ИЛ, 1956 398 с. с ил.

Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов, М., «Металлургия», 1972, 408с. с ил.

Томсен Э., Ян Ч., Кобалши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов, М., «Машиностроение», 1969, 496с. с ил.

Шевченко К. Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением, М., «Высшая школа», 1970, 352с. с ил.

第11章 粘-塑性继承硬化介质

理想塑性介质模型把超出弹性极限的金属行为大大地理想化了。实际的金属与合金具有变形(冷加工时)或粘性(热加工时)硬化的能力。在某些情况下(例如,加热金属的分散变形)还必须考虑介质的继承性质。这就必须采用具有变形硬化和继承性质(见第六章第五节)的更复杂的粘-塑性介质模型,同时还要分析物质体元变形的历史。最简单的形式是将分析归结为在任意时刻 t 对连续介质所充满的每一点计算累积切变形程度 Δ 、相对体积变化 Δ (对塑性可压缩介质)、温度 θ 和切应力强度 T 。在连续介质稳定流动的情况下,材料质点的轨迹与流线重合,此时可以比较简单地进行上述运算。取出一束轨迹并跟踪沿这些轨迹运动的质点的变形过程,便可以计算位于流动域中网格节点的上述参数值。

对于非稳定的流动,相似地分析导致必须将过程分解为与足够小时间间隔相对应的阶段,并对每一个阶段重复求解边值问题。

11.1 边值问题

11.1.1 方程组

设在表面 S 围定的域 D 中,应力、速度、应变速率和温度满足下述方程:

运动方程

$$\operatorname{div} T_{\alpha} + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (11-1)$$

本构方程

$$s_{ik} = \frac{2T}{H} \eta_{ik} \quad (11-2)$$

$$\sigma_{\theta} = k\Delta \quad (11-3)$$

$$\text{式中 } k = k(\theta, \Lambda, \xi_0, A, \dots, t) \quad (11-4)$$

$$T = T(\theta, H, \Lambda, \Delta, \dots, t) \quad (11-5)$$

$$\text{并且 } T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ik} s_{ik}}, \quad H = \sqrt{2\eta_{ik} \eta_{ik}}.$$

$$\Delta = \int_0^t \xi_0 dt, \quad A = \int_0^t H dt$$

积分沿质点轨迹进行，而 k 和 T 与时间 t 的关系特别规定要考虑材料的强化性质。

此外要遵循应变速率的运动学关系：

$$\xi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (11-6)$$

和热传导方程

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa \nabla^2 \theta + vTH \quad (11-7)$$

11.1.2 边界条件

设 $S = S_v + S_o + S_r + S_o$ ，固定时间 t 并研究力学边界条件。

表面 S_v 和 S_o 将域 D 与刚性域 D_1 和 D_2 分开 (图148)，且在這些表面上应该满足某些连接条件 (见8.3节)。一般说来，可以认为在 D_1 和 D_2 中连续介质象绝对刚体那样发生平动，并且对域 D_1 给定了移动速度 \vec{v}_1 ，而对域 D_2 给定了平动位移方向 \vec{e}_0 和合外力 $\vec{Q} = Q\vec{e}_0$ 。

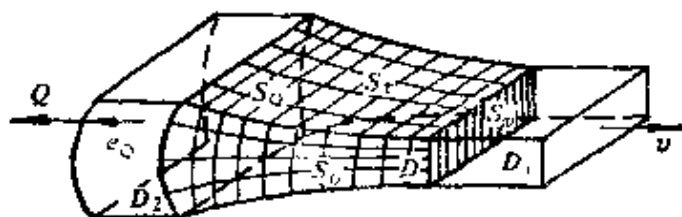


图148 关于边值问题

在 S_o 上给定了表面应力矢量 $\vec{\sigma}$ ，而在接触表面 S_r 上给定

了速度的法向分量 v_n 和应力的切向分量 $\vec{\tau} = \tau \cdot \vec{e}_\tau$ ，此切向分量的方向与金属质点沿工具表面相对滑动矢量 Δv 方向相反。

因此，若用星号表示边界 S 上 M 点的给定函数，则将有如下的力学边界条件：

在 S_v 上给定速度

$$\vec{v} \Big|_{S_v} = \vec{v}^*(M) \quad (11-8)$$

在 S_σ 上给定应力

$$\vec{\sigma}^n \Big|_{S_\sigma} = \vec{\sigma}^{n*}(M) \quad (11-9)$$

在接触表面 S_r 上，边界条件具有混合的特性。它包括边界包绕条件

$$v_n \Big|_{S_r} = v_n^*(M) \quad (11-10)$$

和摩擦规律

$$\vec{\tau} \Big|_{S_r} = \tau^*(M) \vec{e}_\tau, \quad \vec{e}_\tau = - \frac{\vec{\Delta v}}{|\Delta v|} \quad (11-11)$$

其中 $\vec{\Delta v}$ —— S_r 上滑动速度矢量。

对 $\tau^*(M)$ 采用普朗特摩擦定律 $\tau^* = f \sigma_s$

最后，在表面 S_0 上

$$\iint_{S_0} \vec{\sigma}^n dS = \vec{Q} = Q \vec{e}_0 \quad (11-12)$$

$$\vec{v} \Big|_{S_0} = v \vec{e}_0 \quad (11-13)$$

如果域 S_v 同整个表面 S 重合，而且介质是不可压缩的，则给定的表面速度应该满足整个物体上的不可压缩性条件，即通过表面 S 的速度矢量的通量等于零。

除了力学边界条件外，还要知道决定初始温度分布和边界表面热交换条件的温度边值条件。

我们设想存在某个程序，如果知道了任何中间时刻 ($0 \leq t' < t$) 的速度场，就能利用它单值地确定任意时刻 t 整个变形体的

外形、其刚性部分的外形、温度场和包含在本构方程中的全部参数。

我们以下述方式提出边值问题：为了求出外载作用下物体的瞬时外形，试确定流动域 D 中满足边界条件并能将方程 (11-1) ~ (11-6) 变为关于自变量 x_i 的恒等式的函数 v_i, σ_{ik}, \dots 。

为了解这个问题，可以利用连续介质力学的变分原理。

思 考 题

1. 应该怎样考虑变形历史对变形抗力的影响？
2. 以什么方式将物体表面的热交换条件化为第一类和第三类边界条件？
3. 怎样叙述边值问题？

11.2 虚位移原理、质点系

11.2.1 关于变分原理

如所周知，有一些基本原理反映了力学现象的相当普遍的规律性，以至于可以由这些规律性得出确定力学系统运动和平衡的全部方程，这样的基本原理一般称为力学原理。

在力学发展的进程中曾经定义了一系列这样的原理，可将它们分为非变分原理（例如牛顿第二定律或达朗倍尔原理）和变分原理。

力学的变分原理确立了一些标志，利用它们可以将真实的（即在给定力作用下实际发生的）力学系统的运动与该系统运动学许可的（即某些约束所允许的）运动区别开来。此时，微分变分原理对每一个给定的时刻确立了这些标志，而积分变分原理则对于某个有限的时间间隔内系统所完成的位移确定了这些标志。虚速度（位移）原理就是熟知的微分力学原理之一。

泛函乃是依赖于一个或几个函数选择的变量，在很多情况下力学变分原理就是指某个泛函的极小（极大）条件。对于理想塑性介质流动时的实际速度场全功率取最小值就是这种泛函的例子

(见第十章)。利用全功率最小化能够近似地建立金属压力加工时的速度场。

研究求泛函极值方法的数学学科称为变分计算(见第九章)。

11.2.2 质点系的运动

接着研究动量守恒和动量矩守恒时所采取的叙述顺序,我们也是从建立质点系虚速度变分原理开始。

按〔20〕,我们研究质点系 P_i ($i=1, 2, \dots, N$) 相对某笛卡儿坐标的运动。将 k 个几何特征的约束

$$f_\alpha(t, \vec{x}_i) = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, k) \quad (11-14)$$

和 m 个关于速度 v_i 为线性的运动学特点的约束

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{i\beta} \vec{v}_i + D_\beta = 0 \quad (\beta=1, 2, \dots, m) \quad (11-15)$$

叠加到质点系的位置和速度上。

这里, t ——时间; \vec{x}_i ——点 P_i 的矢径; $\vec{v}_i = d\vec{x}_i/dt$ ——它的速度。 $\alpha_{i\beta}$ 和 D_β 规定为依赖于 t 和所有 x_k ($k=1, 2, \dots, N$) 的函数。

上述限制称为约束,即有限约束式(11-14)和微分约束式(11-15)。

很明显,有限约束也可以将限制加到速度 \vec{v}_i 上。为了确信这一点,只要把式(11-14)两边对时间 t 微分就足够了。结果得到下述方程组:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \vec{v}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (11-16)$$

与此相似,经过再一次对时间 t 微分后,就可得到加到点 P_i 的加速度 w_i 上的限制:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \vec{w}_i + \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) \vec{v}_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \\ \sum_{i=1}^N \alpha_{i\beta} \vec{w}_i + \sum_{i=1}^N \frac{d\alpha_{i\beta}}{dt} \vec{v}_i + \frac{dD_\beta}{dt} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-17)$$

11.2.3 运动许可速度和位移

如果矢量 \vec{v}_i 满足 $k+m$ 个线性方程 (11-15)、(11-16)，则我们就把矢量系 v_i 称为对某时刻 t 和该时间某可能位置的 运动许可速度。利用这个概念，除了系统的真实运动外，我们还可研究约束所允许的各种速度。

给定时间增量 dt 。此时运动许可的无限小位移系或简称运动许可位移系

$$\vec{dx}_i = \vec{v}_i dt \quad (11-18)$$

与许可速度 v_i 相对应。

很明显，它们应该满足式 (11-15)、(11-16) 逐项乘以 dt 而得到的约束方程

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \vec{dx}_i + \frac{\partial f_a}{\partial t} dt &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \alpha_{i\beta} \vec{dx}_i + D_\beta dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-19)$$

11.2.4 虚速度和虚位移

设 \vec{v}_i 和 \vec{v}'_i 是同一时刻 t 在系统同一位置上的两个运动许可速度系统。它们的差

$$\vec{\delta v}_i = \vec{v}'_i - \vec{v}_i \quad (11-20)$$

满足齐次方程

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \vec{\delta v}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_{i\beta} \vec{\delta v}_i = 0 \quad (11-21)$$

将满足齐次方程 (11-21) 的整个矢量系统 $\vec{\delta v}_i$ 称为 虚速度系统。

此外，设可能位移为 $\vec{dx}_i = \vec{v}_i dt$ 和 $d'x_i = \vec{v}'_i dt$ 。

无论 \vec{dx}_i 还是 $d'x_i$ 都满足方程 (11-19)，而它们的差 $\vec{\delta x}_i = d'x_i - dx_i$ 满足齐次方程：

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \vec{\delta x}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_{i\beta} \vec{\delta x}_i = 0 \quad (11-22)$$

将满足齐次方程 (11-22) 的整个矢量系统 $\vec{\delta x}_i$ 称为虚位移系统。我们将指出虚速度 (位移) 与许可速度 (位移) 的基本区别, 它们是虚速度 (位移) 须满足齐次方程 (11-21)、(11-22), 而许可速度 (位移) 应该满足非齐次方程 (11-15)、(11-16)、(11-19)。如果引入“冻结约束”的概念, 则容易理解其区别。对于有限约束, 这意味着式 (11-14) 中的 t 固定, 而约束似乎冻结到时刻 t 时所具有的外廓上。这时 $\partial f / \partial t = 0$ 。对于微分约束, “冻结”意味着约束方程左边的 D_t 被去掉, 且固定显然包含在系数 α_{ij} 中的 t 。

这样, 由于“冻结”, 方程组 (11-15)、(11-16) 与系统的相应方程 (11-21) 是一致的。因此可以说, 虚速度 (位移) 与“冻结”约束时的许可速度 (位移) 是一致的。

11.2.5 基本问题

设在点 P_i 作用事先给定的主动力 \vec{F}_i ($i = 1, 2, \dots, N$)。用 \vec{R}_i 表示约束的反作用力。这时按与牛顿第二定律相应的方程

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (11-23)$$

所确定的加速度 w_i 应当满足关系式 (11-17)。

我们来叙述非自由系统动力学的基本问题: 给定主动力 $\vec{F}_i = \vec{F}_i(t, \vec{x}_k, \vec{v}_k)$ 并给出与约束相协调的系统点的初始位置 \vec{x}_i^0 和初始速度 \vec{v}_i^0 ($i = 1, 2, \dots, N$)。要求确定系统的运动和约束的反作用力 R_i 。

11.2.6 普遍变分方程

在一般情况下, 提出的问题是不确定的。但是对于一类理想约束, 问题将成为是确定的。如果在任意虚位移上约束反作用力的功之总和恒等于零, 即

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \vec{\delta x}_i = 0 \quad (11-24)$$

则按定义把这种约束称为理想的。

将由式 (11-23) 得到的 R_i 的表达式代入上式以代替 R_i 。

结果得到质点系动力学的普遍变分方程（虚位移原理）

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \delta \vec{x}_i = 0 \quad (11-25)$$

当系统运动时，任意时刻在任意虚位移上主动力和惯性力做功之和等于零。

因此，对于任何与约束协调并与给定主动力 \vec{F}_i 相适合的运动，普遍变分方程总可得到满足。

反之，现在假设系统的某个与约束相协调的运动已经给定，且它满足动力学普遍方程（11-25）。

$$\text{设 } \vec{R}_i = m_i \vec{w}_i - \vec{F}_i \quad (11-26)$$

将有等式（11-24）、（11-23）。

因而，在任何时刻都可以选择适当的反作用力 \vec{R}_i ，由于等式（11-22），这些反作用力对于给定的约束是许可的，在这些反作用力的作用下由牛顿第二定律所得到的方程（11-23）成立。如果认为反作用力 \vec{R}_i 实际上已经实现（即采用“许可反作用力实现假定”），那就可得出结论，即所研究的运动与给定的主动力 $\vec{F}_i(t, \vec{x}_i, \vec{v}_i)$ ($i=1, 2, \dots, N$) 相适应。

所以，动力学的普遍变分方程表示与约束相容的运动适合于给定的主动力系 \vec{F}_i ($i=1, 2, \dots, N$) 的必要和充分条件。

最后应该指出，约束理想化的条件并不会造成很大的限制。例如，已知摩擦约束并不是理想化的。但是，在写出某个摩擦物理定律后，就可以将摩擦反力归入主动力之列，将约束化为理想约束。

思考题

1. 什么样的原理称为力学原理？
2. 对质点系的坐标和速度有什么限制？
3. 质点系中什么样的速度（位移）称为虚速度（位移）？它们与运动许可的速度（位移）有什么区别？
4. 怎样叙述非自由质点系的动力学基本问题？

5. 怎样写出非自由系统的普遍变分方程?

11.3 关于连续介质力学的变分原理

11.3.1 边值问题的最简单的提法

让我们来分析连续介质的运动。为了不采用繁杂的计算结果就能研究证明变分原理的基本结构，我们将11.1节提出的边值问题进行简化。特别是，要假定不存在带有混合力学边界条件的边界区段。我们还将忽略质量外力和惯性效应。因此，运动方程(11-1)可变换为平衡方程：

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (11-27)$$

或用张量写法：

$$\operatorname{div} T_{\sigma} = 0 \quad (11-27a)$$

固定时间 t 并研究域 D 瞬时外形下的力学边界条件，令 $S = S_v + S_{\sigma}$ ，并用星号表示边界点 M 上的已知函数：在 S_v 上已知速度

$$\vec{v} \Big|_{S_v} = v^*(M)$$

在 S_{σ} 上已知应力

$$\vec{\sigma}^n \Big|_{S_{\sigma}} = \vec{\sigma}_*^n(M)$$

如果域 S_v 与整个表面 S 重合，而介质是不可压缩的，则给定的表面速度应当满足关于整个物体的不可压缩性条件，即通过表面 S 的速度矢量通量等于零。如果 S_{σ} 同整个表面重合，则给定的表面载荷应当满足关于整个物体的平衡条件。

象以前一样，将假定存在某个程序，利用它可在任意时刻 t 单值地确定域 D 的边界 S 、温度场和全部包括在本构方程中的参数。

我们以如下方式提出准静态边值问题：对于外载作用下处于平衡的物体的瞬时外形，试确定流动域 D 中满足边界条件并将

方程 (11-2) ~ (11-6)、(11-28) 变为关于自变量 x_i 的恒等式的函数 v_i, σ_{ij}, \dots 。

可压缩介质 将时间 t 固定, 研究瞬时的流动情景和与之相应的域 D 的瞬时外形。在域 D 中将研究某些矢量场和张量场。象通常那样, 将假定相应的标量函数在 \bar{D} 中连续且可微, 而且在 D 中有必要数目的关于自变量的连续和可微的导数。我们引入下述定义, 它们将概括第十章第四节的概念。

1) 如果应力场在域 D 中处处满足平衡方程 (11-27), 而在表面 S 上满足边界条件式 (11-9), 则称其为静力许可的。

2) 如果速度场在 S_0 上满足运动学边界条件 (11-8), 则称其为运动许可的。如果对于应变速率场存在某个与以关系式 (11-6) 联系起来的运动许可速度场, 则称其为运动许可的应变速率场。

3) 对称张量场 $T_{\sigma\sigma} = [\delta\sigma_{ij}]$ 在域 D 中满足方程

$$\operatorname{div} T_{\sigma\sigma} = 0 \quad (11-28)$$

而在 S_0 上满足齐次条件

$$\delta\sigma^n \Big|_{S_0} = 0 \quad (11-29)$$

其中 $\delta\sigma^n = \vec{n} T_{\sigma\sigma}$, 则称其为虚应力场。

4) 满足齐次边条件

$$\delta\vec{v} \Big|_{S_0} = 0 \quad (11-30)$$

的矢量场 $\delta\vec{v}$ 称为虚速度场。

5) 以本构方程 (11-2) ~ (11-3) 与运动许可速度场相适合的应力称为运动学应力。

6) 以本构方程 (11-2) ~ (11-3) 与静力许可应力场相适合的应变速率称为静力学应变速率。

7) 如果运动许可速度场的运动学应力是静力许可的, 则称这个运动许可速度场为真实速度场。

8) 如果静力许可应力场的静力学应变速率是运动许可的, 则

称这个静力许可应力场为真实应力场。

我们来证明下述辅助定理：

辅助定理11.1 设在封闭域 D 中给定矢量场 \vec{b} 和对称张量场 $T_A = [a_{ik}]$ 。此时有关系式

$$\iiint_D \operatorname{div} T_A \vec{b} \, dW = \iint_S \vec{\sigma}^n \vec{b} \, dS - \iiint_D a_{ik} \beta_{ik} \, dW \quad (11-31)$$

其中 $\vec{\sigma}^n = T_A \vec{n} = a_{ik} n_k \vec{e}_i$, $\beta_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_k} + \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right)$

证明

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} T_A \vec{b} \, dW &= \iiint_D \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} b_i \, dW \\ &= \iiint_D \frac{\partial (a_{ik} b_i)}{\partial x_k} \, dW - \iiint_D a_{ik} \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \, dW \\ &= \iint_S a_{ik} b_i n_k \, dS - \iiint_D \frac{1}{2} a_{ik} \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_k} + \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right) \, dW \\ &= \iint_S \vec{\sigma}^n \vec{b} \, dS - \iiint_D a_{ik} \beta_{ik} \, dW \end{aligned}$$

辅助定理11.2 对称应力张量场 $T_\sigma = [\sigma_{ik}]$ 成为静力许可场的必要和充分条件是：对于任何虚速度都满足方程

$$\iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^n \delta \vec{v} \, dS = \iiint_D \sigma_{ik} \delta \xi_{ik} \, dW \quad (11-32)$$

其中 $\delta \xi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta v_k}{\partial x_i} \right)$

证明：为使张量场 T_σ 满足方程 (11-27) 和 (11-9)，必要和充分条件是：对于虚速度 $\delta \vec{v}^*$ 满足这些方程的残差的正交性条件^①：

①必要性很明显，而充分性由辅助定理9.2得出。——译者

$$\iiint_D \operatorname{div} T_0 \delta \vec{v} dW + \iint_{S_0} (\vec{\sigma}^n - \vec{\sigma}^s) \delta \vec{v} dS = 0$$

利用式 (11-31), 假定其中 $T_A = T_0$, $\vec{b} = \delta \vec{v}$, 则得到式 (11-32)。

辅助定理 11.3 为了使对称应变速度场 $T_\xi = [\xi_{i,k}]$ 是运动许可速度场, 其必要和充分条件是对于任何虚应力都满足方程

$$\iint_{S_v} \delta \vec{\sigma}^n \vec{v}^* dS = \iiint_D \delta \sigma_{i,k} \xi_{i,k} dW \quad (11-33)$$

证明: 为了存在某个以方程 (11-6) 与张量 T_ξ 相联系并满足条件 (11-8) 的速度场 \vec{v} , 必要和充分条件是, 对于虚应力满足这些方程的残差的正交性条件:

$$\iiint_D \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \xi_{i,k} \right] \delta \sigma_{i,k} dW + \iint_{S_v} (\vec{v}^* - \vec{v}) \delta \vec{\sigma}^n dS = 0 \bullet$$

利用方程 (11-31) (其中设 $T_A = T_{\delta \sigma}$, $\vec{b} = \vec{v}$) 并考虑到 $\operatorname{div} T_{\delta \sigma} = 0$, 则得到式 (11-33)。

上述定理的直接推论是辅助定理 11.4。

辅助定理 11.4 为使对称的应力张量 T_0 和应变速度张量 T_ξ 分别是静力许可应力场和运动许可速度场, 必要和充分条件是, 对于任何虚速度和虚应力都满足方程

$$\iint_{S_0} \vec{\sigma}^s \delta \vec{v} dS + \iint_{S_v} \delta \vec{\sigma}^n \vec{v}^* dS = \iiint_D (\sigma_{i,k} \delta \xi_{i,k} + \delta \sigma_{i,k} \xi_{i,k}) dW \quad (11-34)$$

11.3.2 定理

设给定某个运动许可速度场, 并设利用本构方程可在域 D 内每一点计算与这个场相应的值 σ_0 和 T_0 。

• 原文漏印 dS 。——译者

令

$$\delta H = -\frac{2\eta_{ik}\delta\eta_{ik}}{2\sqrt{\eta_{pa}\eta_{pe}}} = \frac{2\eta_{ik}\delta\eta_{ik}}{H} \quad (11-35)$$

$$\delta T = \frac{s_{ik}\delta s_{ik}}{2\sqrt{\frac{1}{2}s_{pa}s_{pe}}} = \frac{\frac{1}{2}s_{ik}\delta s_{ik}}{T} \quad (11-36)$$

$$\delta\xi_0 = \frac{1}{3}(\delta\xi_{11} + \delta\xi_{22} + \delta\xi_{33})$$

$$\delta\sigma_0 = \frac{1}{3}(\delta\sigma_{11} + \delta\sigma_{22} + \delta\sigma_{33})$$

其中 $[\delta\eta_{ik}] = [\delta\xi_{ik} - \delta\xi_0\delta_{ik}]$ 和 $[\delta S_{ik}] = [\delta\sigma_{ik} - \delta\sigma_0\delta_{ik}]$, 它们分别是虚应变速率和虚应力的偏差张量; δ_{ik} ——克罗内克尔记号。

下面的定理是正确的。

定理11.1 (虚速度原理) 运动许可速度场是真实场的必要和充分条件是: 对任何虚速度都满足方程

$$\iint_{S_\sigma} \vec{\sigma} : \delta \vec{v} \, dS = \iiint_D (3\sigma_0 \delta\xi_0 + T\delta H) \, dW \quad (11-37)$$

必要性 设速度场 \vec{v} 是真实速度场。则以本构方程与场 \vec{v} 相适合的运动学应力。

$$\sigma_{ik} = \frac{2T}{H}\eta_{ik} + \sigma_0\delta_{ik} \quad (11-38)$$

是静力许可应力, 按辅助定理 11.2, 它们满足方程 (11-32)。利用公式 (11-35), 得到

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}\delta\xi_{ik} &= s_{ik}\delta\eta_{ik} + 3\sigma_0\delta\xi_0 = \frac{2T}{H}\eta_{ik}\delta\eta_{ik} + 3\sigma_0\delta\xi_0 \\ &= T\delta H + 3\sigma_0\delta\xi_0 \end{aligned} \quad (11-39)$$

将这个式子代入式 (11-32)，得到方程 (11-37)。

充分性 设某个运动许可速度场满足方程 (11-37)。按式 (11-38) 计算运动学应力 $\sigma_{,k}$ 并利用关系式 (11-39)，则有：

$$T\delta H + 3\sigma_0\delta\xi_0 = \sigma_{,k}\delta\xi_{,k}$$

因此，张量 T_0 满足方程 (11-32)。按辅助定理 11.2，张量 T_0 是静力许可的且场 v 是真实场。

设给定某静力许可应力场 $[\sigma_{,k}]$ ，并设利用本构方程可以求出域 D 每一点与这个场相应的值 ξ_0 和 H 。下述定理是正确的。

定理 11.2 (虚应力原理) 静力许可应力场成为真实场的必要和充分条件是：对任何虚应力都满足方程

$$\iint_{S_v} \delta\sigma_{,k} v^k dS = \iiint_D (3\delta\sigma_0 \xi_0 + \delta TH) dW \quad (11-40)$$

必要性 设应力场 $[\sigma_{,k}]$ 是真实场，以本构方程与场 $[\sigma_{,k}]$ 相适合的静力学应变速率 $[\xi_{,k}]$ 满足方程

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{,k}\xi_{,k} &= \delta s_{,k}\eta_{,k} + 3\delta\sigma_0\xi_0 = -\frac{1}{2}\frac{H}{T}s_{,k}\delta s_{,k} + 3\delta\sigma_0\xi_0 \\ &= \delta TH + 3\delta\sigma_0\xi_0 \end{aligned} \quad (11-41)$$

将这个式子代入方程 (11-33)，就得到式 (11-40)。

充分性 设某个静力许可应力场 $[\sigma_{,k}]$ 满足式 (11-40)。借助本构方程，计算它的静力学应变速率 $[\xi_{,k}]$ ，并利用关系式 (11-41)，将有 $\delta TH + 3\delta\sigma_0\xi_0 = \delta\sigma_{,k}\xi_{,k}$ 。

因而，张量 T_0 满足式 (11-33)。按辅助定理 11.3，张量 T_0 是运动许可的，且场 $[\sigma_{,k}]$ 是真实场。

定理 11.3 是所证明定理的明显推论。

定理 11.3 为了使运动许可速度场 v 和静力许可应力场 $[\sigma_{,k}]$ 是真实场，其必要和充分条件是：对于任何的虚速度和虚应力都满足方程。

$$\iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^n \cdot \vec{\delta v} \, dS + \iint_{S_v} \delta \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} \, dS = \iiint_D [\lambda(\sigma_0 \delta \xi_0 + \delta \sigma_0 \xi_0) + (T \delta H + \delta T H)] \, dW \quad (11-42)$$

11.3.3 不可压缩介质

让我们转而分析不可压缩介质的运动。要稍微改变一下定义，即要求运动许可速度场和虚速度场满足不可压缩性条件。

在这种情况下，利用本构方程仅仅能计算应力偏差张量的分量。利用运动方程和边界条件，可以求出应力的球张量。如果某个偏差张量可以用某个球张量 $\sigma_0 I$ 予以叠加而成为静力许可应力场，则称这个偏差张量场为静力许可的偏差张量场。

对于真实速度场 \vec{v} ，以本构方程 (11-2) 和 (11-5) 与场 \vec{v} 相适合的运动学应力偏差张量，是静力许可的应力偏差张量。

对于不可压缩性介质，定理11.1~11.3的表述保持不变，但相应的方程稍有改变：

方程 (11-37) 写作

$$\iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^n \cdot \vec{\delta v} \, dS = \iiint_D T \delta H \, dW$$

方程 (11-40) 变为

$$\iint_{S_v} \delta \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} \, dS = \iiint_D \delta T H \, dW$$

最后，方程 (11-42) 将对应于

$$\iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^n \cdot \vec{\delta v} \, dS + \iint_{S_v} \delta \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} \, dS = \iiint_D (T \delta H + \delta T H) \, dW$$

为了确信这一点，我们来研究在不可压缩介质运动的条件下怎样表述基本辅助定理。

辅助定理11.5 为了使对称偏差应力张量场 (s_{ik}) 是静力许可场，其必要和充分条件是对于任何虚速度都满足方程：

$$\iint_{S_\sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta v} dS = \iiint_D s_{ik} \delta \eta_{ik} dW \quad (11-43)$$

必要性 设偏差张量场 D_0 是静力许可的, $\vec{\delta v}$ 是虚速度场。补充 D_0 使之成为辅助定理11.2中的静力许可应力场 T_0 , 则有方程 (11-32)。因为 $\delta \xi_0 = 0$, 所以 $\sigma_{ik} \delta \xi_{ik} = s_{ik} \delta \eta_{ik}$, 这就得到方程 (11-43)。

充分性 设某对称的偏差张量 D_0 和某个速度场 \vec{v} , 在任何虚速度下都满足方程 (11-43)。利用拉格朗日乘子法, 在式 (11-43) 右边引入一项加数 $3 \iiint_D \lambda \operatorname{div}(\vec{\delta v}) dW$, 现设量 $\delta \vec{v}$ 是自

变量。这时,

$$s_{ik} \delta \eta_{ik} + 3\lambda \operatorname{div}(\vec{\delta v}) = s_{ik} \delta \eta_{ik} + 3\lambda \delta \xi_0 = \sigma_{ik} \delta \xi_{ik}$$

其中 $\sigma_{ik} = s_{ik} + \lambda \delta_{ik}$, 且满足式 (11-32)。

这就允许利用辅助定理11.2, 根据这个定理, 对称张量 $T_0 = [\sigma_{ik}]$ 对速度场 v 来说是静力许可的, 此外球张量 λI 补充偏差张量 D_0 而成为 T_0 。定理因而得证。

辅助定理11.6 为了使对称的应变速率偏差张量 (因为介质是不可压缩的, 也就是应变速率张量) 场是运动许可的, 其必要和充分条件是任何虚应力都满足方程

$$\iint_{S_\nu} \vec{\delta \sigma} \cdot \vec{v} dS = \iiint_D \delta s_{ik} \eta_{ik} dW$$

该定理的正确性可直接由辅助定理11.3得出, 因为对于不可压缩介质

$$\delta \sigma_{ik} \xi_{ik} = \delta s_{ik} \eta_{ik}$$

与此相类似, 可以改变辅助定理11.4的叙述。

辅助定理11.7 为了使对称的应力偏差张量场 D_0 和应变速率偏差张量场分别是静力许可的和运动许可的, 其必要和充分条件是对于任何虚速度和虚应力都满足方程

$$\iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^n \cdot \delta \vec{v} \, dS + \iint_{S_v} \delta \vec{\sigma}^n \cdot \vec{v} \, ds = \iiint_D (s_{ik} \delta \eta_{ik} + \delta s_{ik} \eta_{ik}) \, dW$$

这个定理是辅助定理11.5和11.6的推论。

考虑到方程 (11-39) 和 (11-41) 可写作

$$s_{ik} \delta \eta_{ik} = T \delta H, \quad \delta s_{ik} \eta_{ik} = \delta TH$$

则关于不可压缩介质的相应定理的证明, 实际上是重复定理 11.1~11.3 的证明。

思 考 题

1. 在提出最简单的问题时采用了什么假定?
2. 静力许可应力和运动许可速度满足什么条件? 它们与真实应力和真实速度有什么区别?
3. 什么是运动学应力? 它们满足平衡条件吗?
4. 什么是静力学应变速率? 它们是不是以关系式 (11-6) 与速度场联系起来?
5. 速度场或应力场是真实场的必要和充分条件是什么?

11.4 虚速度原理

11.4.1 可压缩介质

重新转向本章开始时提出的边值问题。容易证明, 在这种情况下上述所有定理都是适用的, 仅仅在相应方程的写法上有些区别。作为例子, 谈谈实用中最重要的虚速度原理。

规定固定时间 t , 同时研究瞬时的流动情景和与之相应的域 D 的瞬时外形。一般假定所研究的标量场、矢量场、张量场具有正规性 (见11.3节), 这时我们引入如下定义:

1) 若对于应力张量 $T_\sigma = [\sigma_{ik}]$ 表面应力矢量 $\vec{\sigma}^n = \vec{n} T_\sigma$ 满足边界条件式 (11-9)、(11-11) 和 (11-12), 而在域 D 中运动方程 (11-1) 是正确的, 则称此应力张量为 动力许可的 (对于场 \vec{v})。

2) 在域 D 中给定并在表面 S 上满足边界条件式 (11-8)、

(11-10) 和 (11-13) 的速度矢量场 $\vec{v} = (v_i)$ ● 称为 运动许可的速度矢量场。

3) 在域 D 中给定并在表面 S 上满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} \vec{\delta v} \Big|_{s_v} = \delta v_n \Big|_{s_r} = 0 \\ \vec{\delta v} \Big|_{s_\sigma} = \delta v e_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (11-44)$$

的矢量场 $\vec{\delta v} = (\delta v_i)$ 称为 虚速度场。

4) 以本构方程与速度场 \vec{v} 相适合的应力张量场称为 运动学应力张量场。

5) 若对于运动许可速度场 \vec{v} ，运动学应力张量是动力许可的，则称此运动许可速度场为 真实场。

下述辅助定理与辅助定理 11.2 相似。

辅助定理 11.8 对于场 \vec{v} ，对称应力张量场 $T_\sigma = [\sigma_{ik}]$ 是动力许可场的必要和充分条件是对于任何虚速度都满足方程

$$\begin{aligned} \iint_{s_\sigma} \vec{\sigma}^* \cdot \vec{\delta v} \, dS &= \iint_{s_r} \tau^* \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{\delta v}_r \, dS + Q \delta v + \iiint_D \rho \vec{F} \cdot \vec{\delta v} \, dW \\ &= \iiint_D \sigma_{ik} \delta \xi_{ik} \, dW + \iiint_D \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\delta v} \, dW \end{aligned} \quad (11-45)$$

其中
$$\delta \xi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta v_k}{\partial x_i} \right)$$

证明：为使张量场 T_σ 满足运动方程 (11-1) 和边界条件式 (11-9)、(11-11) 和 (11-12)，必要和充分条件是这些方程关于虚速度 $\vec{\delta v}$ 的残差的正交性条件得到满足，

$$\iiint_D \left[\text{div} T_\sigma + \rho \left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \right] \cdot \vec{\delta v} \, dW + \iint_{s_\sigma} (\vec{\sigma}^* - \vec{\sigma}^*) \cdot \vec{\delta v} \, dS +$$

●原文为 (v_i) 系 (v_i) 之误。——译者

$$+ \iint_{S_v} (\tau \cdot \vec{e}_v - \vec{\tau}) \delta \vec{v} dS + \left(\vec{Q} \cdot \iint_{S_Q} \vec{\sigma} dS \right) \delta \vec{v} = 0 \quad (11-46)$$

利用方程 (11-31), 设其中 $T_A = T_\sigma$, $\vec{b} = \delta \vec{v}$, 则可得到式 (11-45)。

设给定某运动学许可的速度场, 并设在域 D 中每一点可利用本构方程计算与此场相应的量 σ_0 和 T 。

利用10.3节采用的符号, 来表述如下定理:

定理11.4 (虚速度原理) 为了使运动许可速度场是真实场, 其必要和充分条件是: 任何虚速度都满足方程

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\sigma} \vec{\sigma} : \delta \vec{v} dS + \iint_{S_\tau} \tau \cdot \vec{e}_v \cdot \delta \vec{v}_\tau dS + Q \delta v + \iiint_D \rho \vec{F} \delta \vec{v} dW \\ & = \iiint_D (T \delta H + 3\sigma_0 \delta \xi_0) dW + \iiint_D \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \delta \vec{v} dW \quad (11-47) \end{aligned}$$

这里 δv_τ —— 是 $\delta \vec{v}$ 与表面相切的分量。

对于辅助定理11.8的证明, 逐字逐句地重复着定理11.1的证明。

11.4.2 不可压缩介质

在转而分析不可压缩介质运动时, 附带地要求运动许可速度场和虚速度场满足不可压缩性条件。

在这种情况下, 利用本构方程 (11-2) 和 (11-5) 仅仅能计算应力偏差张量的分量。利用运动方程和边界条件可以求出应力球张量。如果应力偏差张量可以叠加某个球张量 $\sigma_0 I$ 面成为动力可能应力场, 则称其为动力许可场。

对于实际的速度场 \vec{v} , 以本构方程 (11-2) 和 (11-5) 与速度场 \vec{v} 相适合的运动学应力偏差张量场是动力许可场。

我们引用关于不可压缩介质的基本结果。

辅助定理11.9 为了使对称的应力偏差张量场 $[S_{ij}]$ 是动力许可场, 其必要和充分条件是任何虚速度都满足方程

$$\begin{aligned} & \iint_{S_o} \vec{\sigma}^T \delta \vec{v} dS + \iint_{S_r} \vec{\tau}^* \vec{e}_r \delta v_r dS + Q \delta v + \iiint_D \rho \vec{F} \delta \vec{v} dW \\ &= \iiint_D s_{ijk} \delta \eta_{ijk} dW + \iiint_D \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \delta \vec{v} dW \bullet \end{aligned}$$

定理11.5 运动许可速度场是真实场的必要和充分条件是任何虚速度都满足方程

$$\begin{aligned} & \iint_{S_o} \vec{\sigma}^T \delta \vec{v} dS + \iint_{S_r} \vec{\tau}^* \vec{e}_r \delta v_r dS + Q \delta v + \iiint_D \rho \vec{F} \delta \vec{v} dW \\ &= \iiint_D T \delta H dW + \iiint_D \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \delta \vec{v} dW \quad (11-48) \end{aligned}$$

辅助定理11.9和定理11.5的证明实际上是重复了在11.3节进行的讨论。

思 考 题

1. 什么样的应力称为动力许可的？它与静力许可应力有什么区别？
2. 什么样的速度称为运动许可的？
3. 在与刚性区交界处应当满足什么条件？
4. 对于虚速度提出了什么条件？它们必须是微小的量吗？
5. 真实的应力场和速度场与许可场的区别是什么？
6. 怎样叙述关于虚速度原理的定理？

11.5 塑性理论的泛函

11.5.1 初步评述

综上所述，虚速度（位移）原理确定了将连续介质真实流动与运动许可流动区别开来的必要和充分条件。应当指出以下几点：

• 原文最后一项漏印 δv 。——译者

1) 在证明定理时, 实际上不必假定塑性流动域 D 或围出这个域的表面 S 的方程事先以某种方式给定。我们仅仅假定存在某域 D 及在该域中给定的速度场 \vec{v} , 它们的综合才是欲求的问题的解。

2) 我们也没有假定虚速度 δv_i 是微小的; 在一般情况下, 它们不是速度 v_i 的变分, 同样, 量 $\delta \xi_{ik}$ 和 δH 也相应地不是 ξ_{ik} 和 H 的变分。

3) 借助本构方程, 建立与运动许可速度场相适合的运动学应力场, 在一般情况下, 我们并不满足运动方程和动力学边界条件。方程 (11-46) 是这些方程关于某个完备的虚速度系 δv^i 的残差的推广正交性条件; 完备的虚速度系 \vec{v}^i 起投影系的作用 (见 9.2 节)。仅仅满足这个条件的速度场和域 D 才是真实的, 这时相应的残差等于零。

4) 对于不可压缩介质运动许可速度场应当满足条件 $\text{div } \vec{v} = 0$ 。但是这个条件对于投影场 δv 来说并不是必须的, 如果放弃要求 $\text{div}(\delta v) = 0$, 我们就得到方程 (11-47), 利用它既可以求得应力张量的偏差分量, 也可以求出球分量。

11.5.2 关于塑性理论的泛函

现在假定由于某种原因, 塑性流动域 D 事先已经确定, 而惯性力象质量外力一样皆可忽略。设 δv_i 是微小量, 因而我们将认为这个函数是真实速度场的变分。方程 (11-47) 可写成某可微泛函 $J(\vec{v})$ 的变分等于零的条件, 即

$$\begin{aligned} \delta J(\vec{v}) = & \iiint_D (T \delta H + 3\sigma_0 \delta \xi_0) dW - \iint_{S_v} \vec{\sigma} : \delta \vec{v} dS - \\ & - \iint_{S_r} \vec{\tau} \cdot \vec{e}_r \delta v_r dS - Q \delta v = 0 \end{aligned} \quad (11-49)$$

这个式子表明, 在实际的速度场上这个泛函 (如果一般它存在的话) 得到驻值。换言之, 它有可能取极值。

例题11.1 变分计算

已知速度场 v_i 的变分 δv_i 。试求应变速率张量和偏差张量以及切应变速率强度的一阶和二阶变分。

解 除了研究真实速度场 v_i 外，我们还将研究与它接近的运动许可速度场 $v_i + dv_i$ ，这两个场都包括在单参数族 $v_i + \alpha \delta v_i$ 中，其中 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。

设 $\varphi(v_i)$ 是某个依赖于 v_i 的函数。这个函数及其对 v_i 的偏导数都是连续的。以下述方式确定它的一阶和二阶变分：

$$\delta\varphi = \left. \frac{\partial\varphi(v_i + \alpha\delta v_i)}{\partial\alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (11-50)$$

$$\delta^2\varphi = \left. \frac{\partial^2\varphi(v_i + \alpha\delta v_i)}{\partial\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \quad (11-51)$$

相似地，可写出泛函的一阶和二阶变分的表达式〔公式 (9-103)、(9-104)〕。

特别是如果函数 $\varphi(v_i + \alpha\delta v_i)$ ，关于 α 或关于变分 δv_i 是线性的，则按式 (11-51)，它的二阶变分等于零。

因此得到

$$\begin{aligned} \delta\xi_{ik} &= \left. \frac{\partial}{\partial\alpha} \right|_{\alpha=0} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(v_i + \alpha\delta v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(v_k + \alpha\delta v_k)}{\partial x_i} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\delta v_k)}{\partial x_i} \right] \textcircled{1} \end{aligned} \quad (11-52)$$

$$\delta\eta_{ik} = (\delta\xi_{ik} - \delta\xi_{0i}\delta_{ik}) \quad (11-53)$$

其中 $3\delta\xi_0 = \delta\xi_{11} + \delta\xi_{22} + \delta\xi_{33}$ \textcircled{2}

此外

$$\delta H = \left. \frac{\partial}{\partial\alpha} \right|_{\alpha=0} \sqrt{2(\eta_{ik} + \alpha\delta\eta_{ik})(\eta_{ik} + \alpha\delta\eta_{ik})}$$

\textcircled{1} 原书括号中第二项分子漏印 δ 。——译者

\textcircled{2} 原书等号左边漏印 δ 。——译者

$$= \frac{2\eta_{ik}\delta\eta_{ik}}{H} \quad (11-54)$$

且 $\delta H^2 = 2H\delta H = 4\eta_{ik}\delta\eta_{ik}$

在转向计算二阶变分时，我们注意到速度 v_i 和应变速率 ξ_{ik} 、 η_{ik} 关于变分 δv_i 都是一次的，由此得到它们的二阶变分等于零。

对于切应变速率强度，二阶变分为：

$$\begin{aligned} \delta^2 H &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} \left\{ \sqrt{2(\eta_{ik} + \alpha\delta\eta_{ik})(\eta_{ik} + \alpha\delta\eta_{ik})} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \left\{ \frac{2(\eta_{ik} + \alpha\delta\eta_{ik})\delta\eta_{ik}}{\sqrt{2(\eta_{pk} + \alpha\delta\eta_{pk})(\eta_{pk} + \alpha\delta\eta_{pk})}} \right\} \\ &= \frac{2\delta_{.ik}\delta\eta_{ik}}{\sqrt{2\eta_{pk}\eta_{pk}}} - \frac{(2\eta_{ik}\delta\eta_{ik})^2}{(\sqrt{2\eta_{pk}\eta_{pk}})^3} \\ &= \frac{1}{H} \left\{ H^2(\delta\eta_{ik}) - \frac{1}{4H^2} [\delta(H^2)]^2 \right\} \quad (11-55) \end{aligned}$$

11.5.3 全功率最小原理

设力学状态方程为

$$T = T(H), \quad \sigma_0 = \sigma_0(\xi_0) \quad (11-56)$$

$$\text{令} \quad F = \int_0^H T(H) dH + 3 \int_0^{\xi_0} \sigma_0(\xi_0) d\xi_0 \quad (11-57)$$

按公式 $\delta F = \frac{\partial F}{\partial H} \delta H + \frac{\partial F}{\partial \xi_0} \delta \xi_0$ 计算 F 的变分，求得

$$\delta F = T\delta H + 3\sigma_0\delta\xi_0 \quad (11-58)$$

还假定在采纳的坐标系 x_i 下工具的速度等于零，在接触表面上摩擦应力矢量 $\vec{\tau}$ 与相对滑动矢量 \vec{v}_r 方向相反，且 $\vec{\tau} \cdot \vec{v}_r = -\tau v_r$ 。

设运动许可速度场 \vec{v} 是真实场。因此，对于它满足方程

$$\delta I = 0 \quad (11-59)$$

其中泛函

$$I = \iiint_D F dW - \iint_{S_\sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dS + \iint_{S_\tau} \vec{\tau} \cdot \vec{v}_i dS - Qv \quad (11-60)$$

象理想塑性介质的泛函式 (10-57) 那样, 也称之为全功率。

我们来研究泛函 I 二阶变分的符号。首先应当指出, 在计算二阶变分时, 式 (11-59) 中的表面积分项不再出现。这是因为速度相对于变分是线性的, 而它的二阶变分等于零 (见例题 11.1)。因此, 研究可以归结为计算三重积分的二阶变分。对它有:

$$\begin{aligned} \delta^2 F &= \delta(\delta F) = (\delta T \delta H + T \delta^2 H) + 3(\delta \sigma_0 \delta \xi_0 + \sigma_0 \delta^2 \xi_0) \\ &= T'(H)(\delta H)^2 + T \delta^2 H + \sigma_0'(H)(\delta \xi_0)^2 + \sigma_0 \delta^2 \xi_0 \end{aligned}$$

我们将假定当 $T'(H) > 0$ 时 $\sigma_0'(\xi_0) > 0$, 即随着应变速率的增加, 应力也增加 (满足材料的“稳定性”条件)。由此得出, 凡是以它们作为乘子的那些项都是非负的。

此外, 按式 (11-55), 有

$$\delta^2 H = \frac{1}{H} \left\{ H^2 (\delta \eta_{i,k}) - \frac{1}{4H^2} [\delta(H^2)]^2 \right\}$$

在大括号内的值是非负的。实际上, $H^2 = \frac{2}{3}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)$,

其中 η_i 是主切应变速率。

经过简单的变换, 有

$$\{\dots\} = \frac{2}{3} \frac{(\eta_1 \delta \eta_2 - \eta_2 \delta \eta_1)^2 + (\eta_2 \delta \eta_3 - \eta_3 \delta \eta_2)^2 + (\eta_3 \delta \eta_1 - \eta_1 \delta \eta_3)^2}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2} \geq 0$$

类似地还证明了量 $\delta^2 \xi_0$ 也是非负的。所以 $\delta^2 F$ 是变分 $\delta \xi_{i,k}$ 的正定二次型, 且 $\delta^2 F > 0$, 于是 $\delta^2 I > 0$, 即条件 (11-59) 是泛函 (11-60) 的极小条件:

$$\delta I = 0, \quad \delta^2 I > 0 \quad (11-61)$$

因此, 在上面作出的假定下, 下述定理得到了证明。

定理11.6 真实速度场与所有运动许可速度场的区别在于它使全功率达极小值。

11.5.4 全能最小原理

全能最小原理与塑性变形理论中的全功率最小原理相似。也就是说，设力学状态方程为

$$T = T(\Gamma), \quad \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_0) \quad (11-62)$$

且这些函数满足稳定性条件：

$$T'(\Gamma) > 0, \quad \sigma_0'(\varepsilon_0) > 0 \quad (11-63)$$

令

$$\Pi = \int_0^{\Gamma} T(\Gamma) d\Gamma + 3 \int_0^{\varepsilon_0} \sigma_0(\varepsilon_0) d\varepsilon_0 \quad (11-64)$$

泛函

$$\Theta = \iiint_D \Pi dW - \iint_{S_u} \vec{\sigma}_0^* \cdot \vec{u} dS + \iint_{S_\tau} \vec{\tau} \cdot \vec{u}_\tau dS - Qu \quad (11-65)$$

称为全能。重复讨论并利用粘-塑性流动理论和小弹-塑性变形理论之间的相似性，可以证明下述定理。

定理11.7 真实位移场与所有运动许可位移场的区别在于它使全能取最小值。

换言之，对真实位移场，有关系式

$$\delta\Theta = 0, \quad \delta^2\Theta > 0 \quad (11-66)$$

例题11.2 连续弯曲角材〔4〕

试研究由宽为 $2b$ 、厚为 h 的带材连续弯曲角材的过程（图149）。材料按指数规律硬化。

解 我们来研究连续弯曲的稳定过程。宽为 $2b$ 长为 L 的带材在多辊轧机上加工成某空间体形状。

取两对轧辊之间的一段轧件。假设轧件由前一对轧辊中轧出时具有弯曲成 φ_0 角的翼缘，而由后一对轧辊轧出时，弯曲角为 $\varphi_0 + \Delta\varphi$ 。已知由辊中轧出时轧件断面有一段不再改变。接着开始使弯曲角 φ 由初始值 φ_0 均匀地变化到终了值 $\varphi_0 + \Delta\varphi$ 。这一

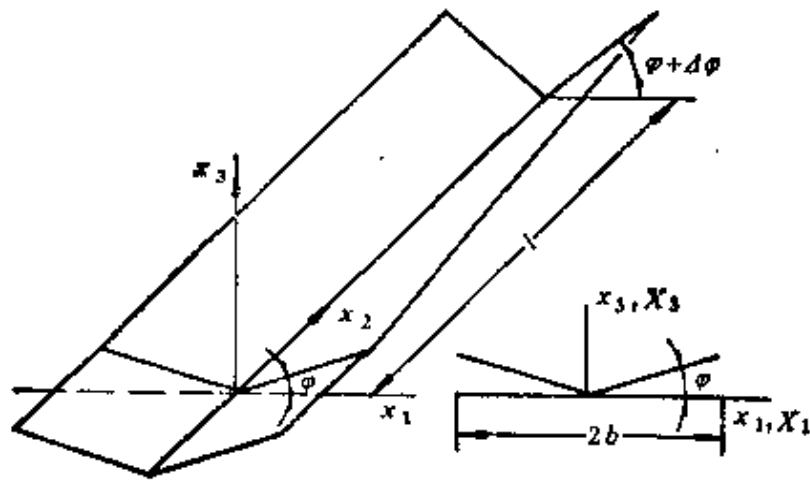


图149 连续弯曲角材

段的长度 l (“变形区”长) 事先未知且通常小于机架间距离。它取决于带材的性质、它的相对厚度和总弯曲角。

将坐标原点置于点 A 。弯曲角的变化由函数 $\varphi = \varphi(x_2)$ 决定, φ 满足下述边界条件: $x_2 = 0$ 时 $\varphi = \varphi_0$; $x_2 = l$, $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ 。

为了在变形区中建立运动许可位移场, 采取与纯弯曲理论假定相类似的下述简化假定:

- 1) 坯料的横断面仍保持平面, 且与成形轴线垂直;
- 2) 在每个与成形轴垂直的截面上, 中心线的长度不变且等于板材的初始宽度。

由此得到角材边缘的初始坐标和瞬时坐标之间的如下关系:

$$x_1 = X_1 \cos\varphi, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_1 \sin\varphi。$$

度量张量的分量为:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1 + X_1^2 \left(\frac{d\varphi}{dX_2} \right)^2$$

在 $g_{22} > g_{11}$, $g_{12} = 0$ 时, 对数变形分量由下述各式确定:

$$\bar{\epsilon}_1 = \ln\sqrt{g_{22}}, \quad \bar{\epsilon}_2 = \ln\sqrt{g_{11}} = 0, \quad \bar{\epsilon}_3 = -\bar{\epsilon}_1$$

切应变强度为

$$\Gamma = 2\sqrt{\bar{\epsilon}_1^2 - \bar{\epsilon}_1\bar{\epsilon}_3 + \bar{\epsilon}_3^2} = 2\ln\sqrt{g_{22}}$$

$$= \ln \left[1 + X_1^2 \left(\frac{d\varphi}{dX_2} \right)^2 \right] = X_1^2 \left(\frac{d\varphi}{dX_2} \right)^2$$

在遵循指数规律硬化时, $T = B\Gamma^m$ 。设介质是不可压缩的, 则我们得到:

$$\Pi = \int_0^r T d\Gamma = \frac{B\Gamma^{m+1}}{m+1} = \frac{B}{m+1} \left[X_1^2 \left(\frac{d\varphi}{dX_2} \right)^2 \right]^{m+1}$$

对于角材的顶部, 当横截平面中心层之曲率半径为 R 时, 近似有:

$$x_1 = (R + X_3) \sin \frac{X_1}{R}, \quad x_2 = X_2,$$

$$x_3 = R - (R + X_3) \cos \frac{X_1}{R}$$

由此可知度量张量的分量为:

$$g_{11} = \left(1 + \frac{X_3^2}{R^2} \right)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1$$

$$\text{且 } \Gamma = 2 \left| \ln \frac{R + X_3}{R} \right|$$

$$\Pi = \int_0^r T d\Gamma = \frac{B\Gamma^{m+1}}{m+1} = \frac{B}{m+1} \left| 2 \ln \frac{R + X_3}{R} \right|^{m+1}$$

写出泛函表达式:

$$\begin{aligned} \Theta(\varphi) &= \iiint_D \left(\int_0^r T d\Gamma \right) dX_1 dX_2 dX_3 \\ &= \frac{B}{m+1} \int_0^{b/2} \int_0^b \left\{ 2 \int_0^b X_1^2 \left(\frac{d\varphi}{dX_2} \right)^2 dX_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^b \left[\left(2 \ln \frac{R + X_3}{R} \right)^{m+1} + \left(2 \ln \frac{R}{R - X_3} \right)^{m+1} \right] dX_3 \right\} dX_2 dX_3 \end{aligned}$$

其中 $2b'$ —— 角材顶部弯曲段的宽度 ($b' = \varphi R$)。

因为

$$\left(2 \ln \frac{R+X_3}{R}\right)^{m+1} + \left(2 \ln \frac{R}{R-X_2}\right)^{m+1} = 2 \left(2 \frac{X_3}{R}\right)^{m+1}$$

得到

$$\partial(\varphi) = k_1 \int_0^l \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{2m+2} + k(\varphi - \varphi_0) \right] dx$$

其中采用符号:

$$x = X_2, \quad k_1 = \frac{2Bhb^{2m+3}}{(m+1)(2m+3)}$$

$$k = \frac{(2m+3)h}{(m+2)b^{2m+3}} \left(\frac{h}{R} \right)^m \quad (11-67)$$

由于我们对这个问题采用了简化做法, 即成形件的边部在到达轧辊出口平面之前不承受载荷, 因此得到下述变分问题:
 $\delta \partial(\varphi) = 0$ 。

由于长度 l 事先未知, 所以上限是可动的。这个问题的解归结为积分欧拉方程: $\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) = 0$, 此时对上限附加条件^[21]

$$\left[F - \varphi' \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) \right] \Big|_{x=l} = 0 \quad (11-68)$$

式中 $F(x, \varphi, \varphi') = (\varphi')^{2m+2} + k(\varphi - \varphi_0)$ 。

因为 F 明显地不依赖于 x , 所以欧拉方程经第一次积分后为^[21]: $F - \varphi' (\partial F / \partial \varphi') = C_1$, 而由条件式 (11-68), 得到 $C_1 = 0$ 。

在已知的边界条件下积分这个方程, 得到下述对于函数 $\varphi(x)$ 和变形区长度 l 的表达式 (图150):

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \Delta \varphi \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{2m+1}{2m+2}} \quad (11-69)$$

$$\frac{l}{b} = 2(m+1) \left[\frac{m+2}{2m+3} \frac{b}{h} \left(\frac{R}{h} \right)^m \right]^{\frac{1}{2m+2}} \left(\frac{\Delta\varphi}{2m+1} \right)^{\frac{2m+1}{2m+2}}$$

(11-70)

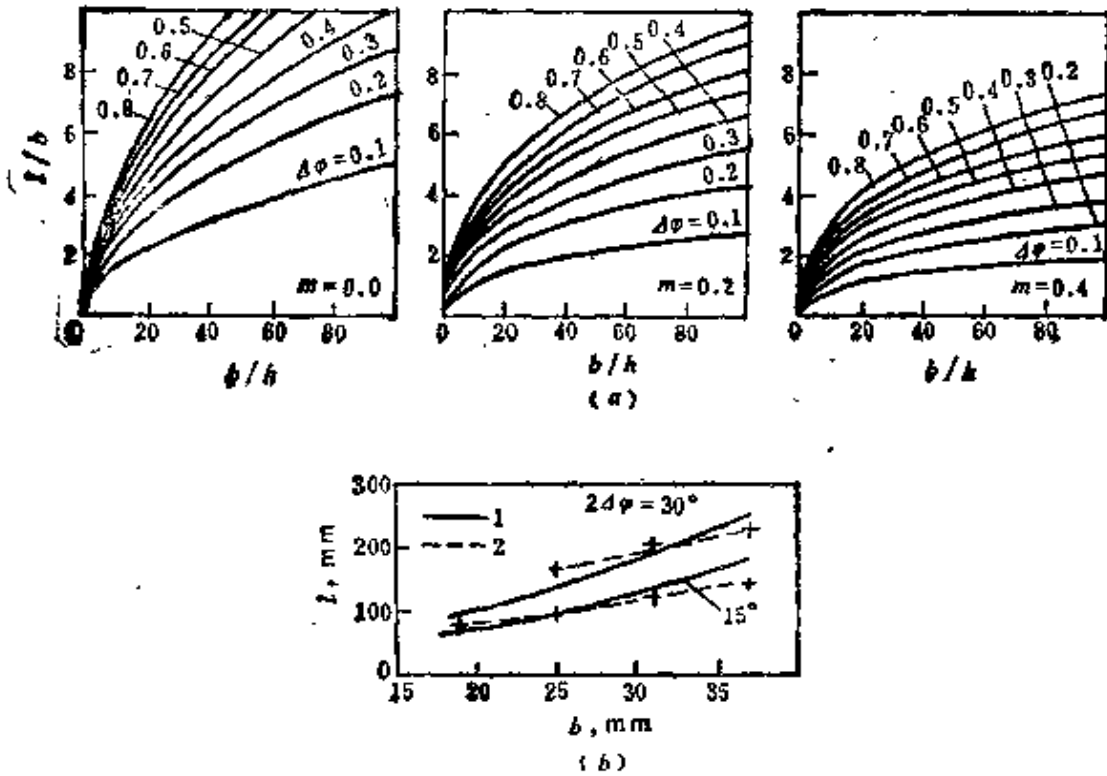


图150 连续成形时变形区的长度

(a) l/b 与 b/h , $\Delta\varphi$, m 的关系; (b) 计算数据; (1)和实验数据; (2)的比较

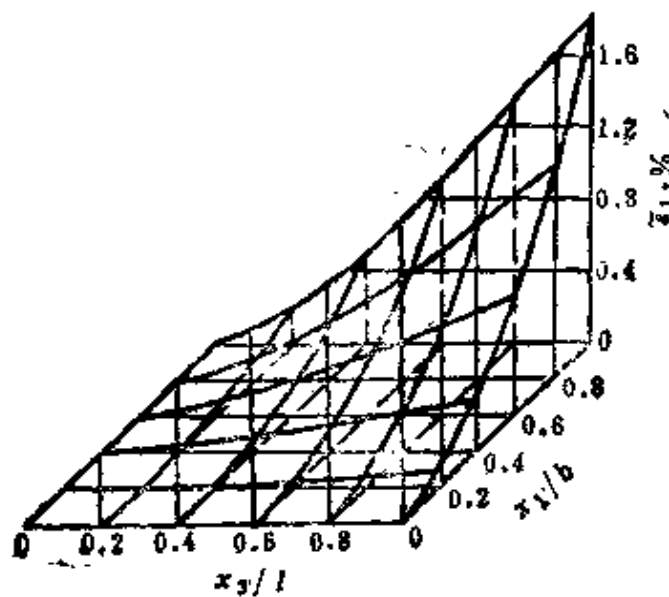


图151 角材边缘的变形状态

知道了关系式 $\varphi = \varphi(x)$ ，求得轧件边缘的伸长为

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2m+2}{2m+1} \frac{b}{l} \Delta\varphi \frac{X_1}{b} \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{2m+1}} \right]^2 \quad (11-71)$$

特别是，最大伸长为（图151）

$$(\bar{\varepsilon}_1)_{\max} = 2 \left(\frac{m+1}{2m+1} \frac{b}{l} \Delta\varphi \right)^2 \quad (11-72)$$

思 考 题

1. 什么是泛函？它与函数的区别是什么？
2. 什么样的泛函称为可微的？
3. 怎样确定函数的变分？怎样确定泛函的变分？
4. 泛函极小条件如何？极小的必要条件与充分条件有何区别？

11.6 虚速度原理的数值实施

11.6.1 运动许可速度场

我们回到11.1节提出的连续介质的运动问题。假定由于某种原因事先已确定了塑性流动域 D 。来研究希尔伯特空间 \bar{L}_2 ，它的元素是在域 D 中给定的矢量函数 $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ ，该函数应使

$$\iiint_D |\vec{v}|^2 dW = \iiint_D (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) dW < \infty$$

在这个空间中，标量积由下式确定：

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \iiint_D \vec{u} \cdot \vec{v} dW = \iiint_D u_i v_i dW$$

其中 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 表示矢量 \vec{u} 、 \vec{v} 的普通的标量积。

在空间 \bar{L}_2 中选择某个元素 \vec{v}^0 ，它满足运动学边界条件 (11-7)、(11-9)，并且在闭域 $\bar{D} = D + S$ 中是连续的和连续可微的。这个元素是运动许可速度场之一，在一般情况下它与真实场不同，我们称它为可行速度场。

我们来研究线性系统 $E \subset \vec{L}_2$ ，它的元素是矢量场，也在域 D 内连续和连续可微，且满足齐次边界条件式 (11-30)。很明显，真实速度场 \vec{v} 可以表示为可行场 \vec{v}^0 和修正场 \vec{v}' 之和

$$\vec{v} = \vec{v}^0 + \vec{v}' \quad (11-73)$$

其中 $\vec{v}' \in E$ 。

如果介质是不可压缩的，则附加要求可行解 \vec{v}^0 和线性系统 E 的元素满足不可压缩条件，即它们是无源矢量场。

设 v^1, v^2, \dots, v^m 是 E 的元素的线性无关完备系统。我们称其为坐标系，而它的元素称为坐标函数。我们用 $F^{(m)}$ 表示元素 v^i 的线性包。容易看出， $F^{(m)} \subset E$ 。

将集 E 投影到 $F^{(m)}$ 上，并以级数截断式的形式求出近似解：

$$\vec{v}^{(m)} = \vec{v}^0 + \sum_{i=1}^m a_i v^i \quad (11-74)$$

这样，我们可利用求解连续介质运动问题的投影方法（见第九章第二节）。

在 m 为任意自然数、系数 a_i 为任意值时，速度场 $\vec{v}^{(m)}$ 都是运动许可的。在选择系数 a_i 时可以遵循各种各样的准则。因此，我们转而研究不同种类的投影方法。

11.6.2 矩法

在引入坐标系的同时，我们还引入一个完备的与线性无关的矢量函数系 $\delta v^1, \delta v^2, \dots, \delta v^m$ ，它们同属于线性集 E ，即它们是连续的和连续可微的，并且满足齐次边界条件式 (11-44)。称它们为投影系统。设 $G^{(m)}$ 是元素 δv^i 的线性包。以下述形式表示虚速度场 $\delta v \in G^{(m)}$

$$\delta v = \sum_{i=1}^m b_i \delta v^i \quad (11-75)$$

因为虚速度原理方程 (11-47) 对于任何场 δv 都应满足，

●原书误作 v_0 。——译者
●原书误作 δv^i 。——译者

所以对于投影系的每一个元素也都应满足。

将 $\delta v^1, \delta v^2, \dots, \delta v^m$ 代替 δv , 依次代入方程 (11-47), 就得到用于求系数 a_i 的 m 个方程组成的方程组:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^0 \delta v^i dS + \iint_{S_\tau} \vec{\tau} \cdot \vec{e}_\nu \delta v^i dS \textcircled{\bullet} + Q \delta v^i + \iiint_D \rho \vec{F} \delta v^i dW \\ &= \iiint_D \left(\frac{2T}{H} \eta_{\nu\alpha} \delta \eta_{\nu\alpha}^i + 3\sigma_0 \delta \xi_{\nu\nu}^i \right) dW + \iiint_D \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \delta v^i dW \\ & \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (11-76)$$

一般, 选择投影系统 δv^i 要使其同坐标系 \vec{v}^i 一致。因此, 如同第九章第二节所指出的, 矩法可以归纳到加廖尔金法中去。如果连续介质的运动问题可以化为某泛函 I 最小化的变分问题, 则里兹法的应用以及由条件 $\partial I / \partial a_i = 0$ 确定系数 a_i , 同样也可以

化为方程组 (11-76)。为了确信这一点, 只需考虑 $\frac{\partial \vec{v}^{(m)}}{\partial a_i} \equiv \vec{v}^i \equiv \delta v^i$ 就足够了。

与此同时, 在后一种情况下, 关于解的近似序列收敛到精确解的证明也大大地变得容易了。

11.6.3 线性化

一般情况下, 方程组 (11-76) 关于系数 a_i 是非线性的。为了使方程组线性化, 可将第十章所述的逐次逼近法稍加推广。在第 k 次迭代中, 我们将把量 $g = T/H$ 、 σ_0 、 e_ν , 以及描述边界 S 上待定区段形状的函数, 看成为前一次迭代中解方程组 (11-76) 时所得到的系数 $a_i^{(k-1)}$ 的函数。可以取系数的初始值 $a_i = a_i^0$ 为零。在零级逼近中, 速度场由可行解确定。在求以后各级近似解时, 要描述沿 D 域具有变粘性系数的线-粘性介质的运动。在各级逼近中系数 $a_i^{(k)}$ 可通过解线性代数方程组而求得, 变粘性系数的存在仅仅使积分的数值计算稍微复杂一些。

①原文误作 $\vec{\tau} \cdot \vec{e}_\nu$ 。——译者

所描述的方法对于用电子计算机解题很方便, 它的宝贵特点之一是: 随着过渡到下一次迭代, 解的形式保持不变 (仅仅系数 $\alpha_i^{(k)}$ 发生变化), 这就大大地简化了电子计算机程序, 并减少了庞杂的运算。在迭代循环中包括计算温度场时, 可以考虑压力加工时金属和合金所呈现的复杂的流变性质。

这个方法的收敛性, 没有从理论上以普遍的形式得到证明, 但是通过计算实践和与实验的比较, 可以认为它完全适用于工程计算。

11.6.4 关于建立运动许可速度场的方法

综上所述, 采用虚速度原理求解 D 域内的塑性流动的问题可归结为: 建立可行解及函数的坐标系和投影系; 近似地将速度场表示成级数截断式 (11-74), 应用线性化方法由方程组 (11-76) 确定级数的系数。

解题的一个最困难的阶段是确立“适合”的函数 \vec{v}^0 、 \vec{v}^i 、 δv^i 。因为限制级数式 (11-74) 项数不能太多, 所以研究者在求解具体问题时, 一般利用实验数据去确定这些函数的个别分量, 然后再求其余的分量, 以便满足不可压缩性条件和运动学边界条件。

更普遍的方法是, 将速度场表示成三个矢量场之和 (见 3.2 节), 即 $\vec{v} = \nabla\varphi + \nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2 + \nabla\Phi$ 。

这里函数 φ 是势, 它用于描述不可压缩介质的无旋运动, 并在域 D 中满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 。函数 Ψ_1 和 Ψ_2 是不可压缩介质三维流动的流函数, 在一般情况下是涡流。最后, 函数 Φ 是不可压缩介质的运动势。如果速度场是无源的, 则认为 $\Phi \equiv 0$ 。

选取不可压缩介质的有势速度场 $\vec{v}^0 = \nabla\varphi$ 作为可行解。

如果在域 D 的整个边界上给定速度的法向分量 v_n , 则建立可行解可归结为: 由求解拉普拉斯方程的诺伊曼问题求出势 φ 。

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \partial\varphi/\partial n|_s = f(M)$$

此时, 借助于修正流函数 Ψ_1 、 Ψ_2 及势 Φ 确定修正的速度

矢量 v' ，且满足齐次边界条件 $v'_n = 0$ 。这种方法的一个例子是一种平面问题的解法，它的基础是用保角映射法建立可行无旋速度场，并接着应用修正流函数 $\Psi(x_1, x_2)$ 使解精确化（见 9.3 节）。

但是，一般仅仅在表面 S 的一部分上给定分量 v_n 。此时，选择最简单的运动许可速度场作为可行解，例如选择描述物体均匀变形的有势场。

作为例子，我们研究下述例题。

例题 11.3 冷却中的圆柱体的镦粗

由粘-塑性材料制成的圆柱形坯料均匀地加热到温度 ϑ_{10} ，在时刻 $t = 0$ 放到温度为 ϑ_{20} 的压力机锤头之间。延迟 Δt 后，坯料被以速度 v_0 运动的锤头压缩（图 152, a）。试确定坯料中的速度分布。介质性质用方程 $T = \tau_s(1 + b_1 H^{b_2})e^{-b_3 t}$ 来描述，其中 b_1, b_2, b_3 是某个常数。

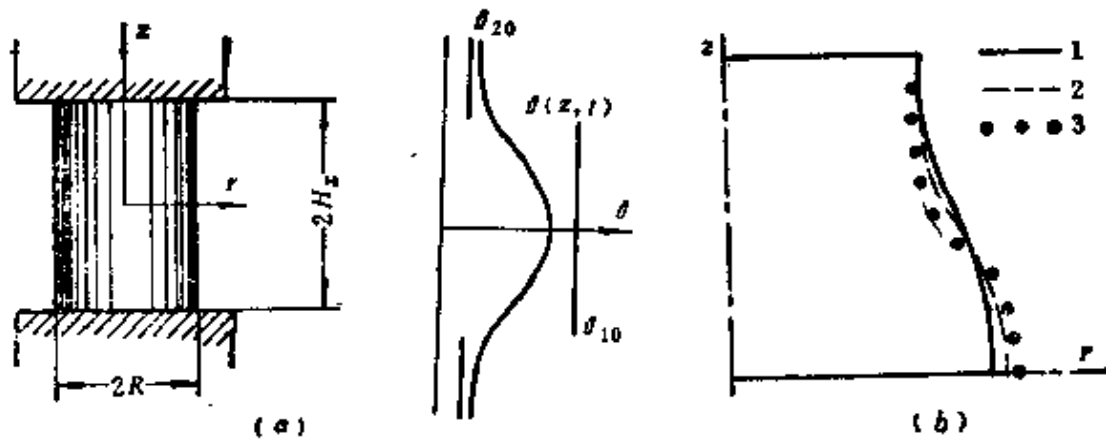


图 152 冷却中的圆柱体的镦粗

(a) 镦粗的示意图；(b) 计算数据和实验数据的比较，
1—实验曲线；2—矩法计算曲线；3—用加廖尔金法计算的曲线

解 1) 温度场 我们忽略圆柱体侧表面上的热损失，近似地将温度场的计算归结为解如下的热传导理论边值问题：长为 $2H$ 的杆（即被变形的圆柱体）侧表面绝热，在初始时刻 $t = 0$ 加热到温度 ϑ_{10} ，使其与两个半无限的杆（压力机锤头）接触。假

设热接触是理想的，我们来求任何时刻的温度分布。

引入柱坐标系 (r, ω, z) (见1.1节)。足标“1”指变形物体，而足标“2”指工具，设 $\vartheta = \vartheta(z, t)$ ，有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} &= \kappa_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial z^2} \quad (t > 0, -H_1 < z < +H_1), \\ \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} &= \kappa_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial z^2} \quad (t > 0, H_1 < z < +\infty), \\ \vartheta_1(z, 0) &= \vartheta_{10}, \quad \vartheta_2(z, 0) = \vartheta_{20}, \\ \pm k_1 \frac{\partial \vartheta_1(\pm H_1, t)}{\partial z} &= \pm k_2 \frac{\partial \vartheta_2(\pm H_1, t)}{\partial z} \\ \vartheta_1(\pm H_1, t) &= \vartheta_2(\pm H_1, t), \quad \frac{\partial \vartheta_1(0, t)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \vartheta_2(\pm \infty, t)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-77)$$

用积分变换方法得到的这个问题的解载于〔12〕，它可以用如下方式写出：

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z, t) &= \vartheta_{20} + \Delta\vartheta \left\{ 1 - \frac{1}{1+K} \sum_{n=1}^{\infty} (-h)^{n-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\operatorname{erfc} \frac{(2n-1)H_1 - z}{2\sqrt{\kappa_1 t}} + \operatorname{erfc} \frac{(2n-1)H_1 + z}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (11-78)$$

此时在接触表面上的温度为：

$$\vartheta_n = \vartheta_{20} + \Delta\vartheta \left[\frac{K}{1+K} - \frac{2K}{(1+K)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-h)^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{nH_1}{\sqrt{\kappa_1 t}} \right]$$

这里采用了下述代号：

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta &= \vartheta_{20} - \vartheta_{10}; \quad K = \frac{b_1}{b_2}; \quad h = \frac{1-K}{1+K}; \quad b_1 = \sqrt{k_1 c_1 \rho_1}; \\ b_2 &= \sqrt{k_2 c_2 \rho_2} \end{aligned}$$

其中 b ——热活动系数； κ ——导温系数； k ——热传导系数；

c ——热容量； ρ ——介质的密度。

函数 erfc 的定义见 8.2 节。

这样，在延迟 Δt 之后，坯料中温度的分布可由式 (11-78) 确定，但在该式中应该令 $t = \Delta t$ 。

2) 力学边界条件 在接触表面上采用摩擦规律 $\tau = \sigma_s f$ ，来表示根据对称性条件由域 $D_1 (0 < r < R, 0 < z < H_1)$ 所构成的力学边界条件。它们是

① 运动学条件

$$v_z(r, H_1) = -v_0 \quad (11-79)$$

由对称性条件

$$v_r(0, z) = v_z(r, 0) = 0, \quad \xi_{r,z}(0, z) = \xi_{r,z}(r, 0) = 0 \quad (11-80)$$

② 静力学条件

$$\sigma_{r,z}(r, H_1) = -\tau, \quad \sigma_{r,r}(R, z) = \sigma_{z,z}(R, z) = 0$$

由对称性条件

$$\sigma_{r,z}(0, z) = \sigma_{r,z}(r, 0) = 0$$

3) 可行的速度场 采用最简单的运动许可场作为可行的速度场：

$$v_r^0 = \dot{\epsilon} r; \quad v_\theta^0 = 0; \quad v_z^0 = -2\dot{\epsilon} z \quad (11-81)$$

与它对应的可行的流函数是 $\psi(r, z) = \dot{\epsilon} r^2 z$ [或可行势 $\varphi(r, z)$

$= \dot{\epsilon} \left(-\frac{1}{2} r^2 + z^2 \right)$]。由条件式 (11-79)，在接触面上

$$\dot{\epsilon} = v_0 / H \quad (11-82)$$

容易看出，对称性条件 (11-80) 得到满足。计算应变速率，有：

$$\xi_{r,r}^0 = \frac{\partial v_r^0}{\partial r} = \dot{\epsilon}; \quad \xi_{\theta,\theta}^0 = \frac{v_\theta^0}{r} = \dot{\epsilon}; \quad \xi_{z,z}^0 = \frac{\partial v_z^0}{\partial z} = -2\dot{\epsilon}$$

$$\xi_{r,z}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r^0}{\partial z} + \frac{\partial v_z^0}{\partial r} \right) = 0$$

切应变速率强度为

$$H^0 = 2\sqrt{\xi_{rz}^0{}^2 + \xi_{rz}^0 \xi_{\theta z}^0 + \xi_{\theta z}^0{}^2} = 2\sqrt{3} \varepsilon$$

利用流动域的对称性, 写出机械能守恒方程

$$\int_0^R p v_0 r dr = \int_0^{H_1} \int_0^R T H^0 r dr dz + \int_0^R \tau v_z(r, H_1) r dr \quad (11-83)$$

在最简单的理想塑性介质 ($b_1 = b_3 = 0$) 的情况下, 由式 (11-83), 对于可行速度场可得到平均压力的上限估计值:

$$p_{c, s} = \sigma_s \left(1 + \frac{1}{3} \int \frac{R}{H_0} \right) \quad (11-84)$$

其中 $H_0 = 2H_1$ —— 圆柱体的高度。

4) 修正速度场 可行速度场并不满足接触表面上的静力边界条件 $\tau = \text{const}$, 这是因为 $\xi_{rz}^0 = 0$, 因此需要精确化。

引入修正流函数 $\Psi(r, z)$, 将精确化的速度场 \vec{v} 表示成可行速度场和修正速度场: $\vec{v} = \vec{v}^0 + \vec{v}'$, 这里按公式(3-70), 有:

$$v'_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v'_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

容易看出, $\text{div} \vec{v} = \text{div} \vec{v}^0 + \text{div} \vec{v}'$, 即精确化的速度场 \vec{v} 满足不可压缩性条件。

我们来描述函数 $\psi(r, z)$ 的边界条件。由条件式 (11-79) 和 (11-80) 得出: 在接触表面和对称轴上, $v'_z(r, \pm H_1) = v'_z(0, z) = v'_z(r, 0) = 0$, 因而 $\Psi = C = \text{常数}$ 。因为所确定的流函数仅仅相差一任意常数, 所以我们取 $C = 0$ 。

此外, 由对称性条件式 (11-80), 要求流函数关于变量 z 是奇函数, 而关于变量 r 是偶函数。不论系数 a_{mn} , 为何值, 下述表达式能满足上述条件:

$$\Psi(r, z) = \varepsilon r^2 z \left[1 - \left(\frac{z}{H_1} \right)^2 \right] \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \left(\frac{r}{R} \right)^{2m} \left(\frac{z}{H_1} \right)^{2n} \quad (11-85)$$

可用三种不同的方法确定系数 a_{mn} , 即矩法、加廖尔金法、里

兹法。

5) 矩法 借助下述完备的流函数系, 引入完备的线性无关投影系 δv^{mn} :

$$\delta \Psi^{mn} = r^2 \left(\frac{r}{R} \right)^{2m} \sin \frac{n\pi z}{H}, \quad (11-86)$$

由下述关系式确定速度矢量分量,

$$\delta v_r^{mn} = \frac{n\pi}{H} r \left(\frac{r}{R} \right)^{2m} \cos \frac{n\pi z}{H},$$

$$\delta v_z^{mn} = -2(m+1) \left(\frac{r}{R} \right)^{2m} \sin \frac{n\pi z}{H},$$

我们以下述形式写出虚速度方程,

$$\int_0^H \int_0^R \frac{1}{2} g \delta H^2 r dr dz + \int_0^R \tau \delta v_r r dr = 0 \quad (11-87)$$

其中 $g = \frac{T(\vartheta, H)}{H}$, $\delta H^2 = 4(2\xi_{rr} \delta \xi_{rr} + \xi_{rr} \delta \xi_{\theta\theta} + \xi_{\theta\theta} \delta \xi_{rr} + 2\xi_{\theta\theta} \delta \xi_{\theta\theta} + 2\xi_{rz} \delta \xi_{rz})$ 。

应变速率 ξ_{ik} 和 $\delta \xi_{ik}$ 由相应的速度场确定, 且 ξ_{ik} 是系数 a_{mn} 的线性函数。

固定 M, N 。在零级近似时取 $a_{mn}^0 = 0$, $H = H^0$, $T = T(\vartheta, H^0)$, 我们将认为量 $g = g^0 = \frac{T(\vartheta, H^0)}{H^0}$ 为坐标的给定函数。

接着取 $\delta v_r = \delta v_r^{mn}$, $\delta H^2 = \delta H_{mn}^2$, 由 (11-87) 得到关于系数 a_{mn} 的线性方程组, 解这个方程组就可求得一级近似 a_{mn}^1 。

为这些系数值确定了流函数和速度分量之后, 就得到了下一级近似值 H, g , 并重新回到式 (11-87), 取 $\delta v_r = \delta v_r^{mn}$, $\delta H^2 = \delta H_{mn}^2$ 等等。因此, 建立了迭代过程。作为收敛准则, 要求流函数沿域 D 的均方差不超过给定的值 $\varepsilon > 0$:

$$\frac{2}{HR^2} \iint_0^R \left(\frac{\Psi^{k+1} - \Psi^k}{\Psi^k} \right)^2 r dr dz < \varepsilon$$

在图 152 b 上引用了计算结果, 并同实验数据进行了比较。

6) 加廖尔金法 取下述函数系作为完备的流函数投影系:

$$\Psi^{m\pi} = \varepsilon r^2 z \left[1 - \left(\frac{z}{H_1} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{2m} \left(\frac{z}{H_1} \right)^{2n}$$

容易看出, 这个投影系同与级数的截断式 (11-85) 对应的坐标系一致, 且有下列关系:

$$\delta \Psi^{m\pi} = -\frac{\partial \Psi}{\partial a_{m\pi}}; \quad \delta v_r = \frac{\partial v_r}{\partial a_{m\pi}}; \quad \delta H^2 = \frac{\partial H^2}{\partial a_{m\pi}}$$

结果, 式 (11-87) 成为:

$$\int_0^{H_1} \int_0^R 1/2g \frac{\partial H^2}{\partial a_{m\pi}} r dr dz + \int_0^R \tau \frac{\partial v_r}{\partial a_{m\pi}} r dr = 0 \quad (11-88)$$

利用上述的迭代过程解这个方程组, 可得到与矩法求解相近的结果 (图 152 b)。

7) 里兹法 写出全功率表达式:

$$I = \int_0^{H_1} \int_0^R \left[\int_0^H T(\vartheta, H) dH \right] r dr dz + \int_0^R \tau v_r r dr \quad (11-89)$$

借助流函数式 (11-85) 将运动许可速度场表示成级数截断式, 并将相应的 v_r 和应变速率的表达式代入到泛函式 (11-89) 中, 我们就得到了作为参数 $a_{m\pi}$ 函数 I 的极值条件: $\partial I / \partial a_{m\pi} = 0$ 。

完成微分之后, 就可求出方程组, 它与用加廖尔金法所得到的方程组 (11-88) 是一致的。这个方程组的解法上面已给出。

思 考 题

1. 什么样的速度场称为运动许可的?
2. 边值问题的何种解法属于投影法?
3. 在矢量函数的坐标系和投影系上附加了什么条件?
4. 采用什么方法可以使问题线性化?

11.7 推广的平面流动*

11.7.1 边值问题

我们研究无限长圆柱体，其横断面是有界的，且一般情况下是多连域 Ω 。后者的边界 γ 是由有限数目的，分段光滑封闭围线 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ 所组成，这些围线没有公共点，并且围线 γ_0 包含所有其余的围线（图153）。

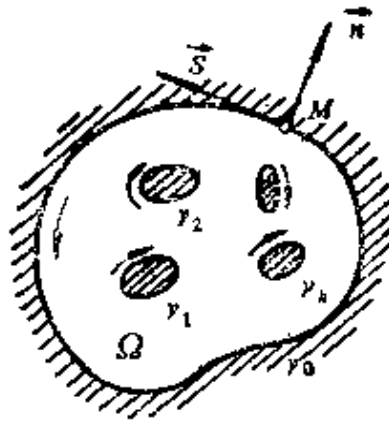


图153 推广的平面流动

当 $k=0$ 时边界是由一个封闭围线组成，且域不是单连域；在一般情况下它是 $(k+1)$ 连域。其域在观察者的左边时围线的绕行方向取正，围线的法线 \vec{n} 和切线 \vec{S} 的相应指向如图 153 所示。

如图所表示那样，布置笛卡儿坐标系 x_i 。设方向平行于 $x_1 O x_2$ 平面，且与变量 x_3 无关的表面外力系以及轴向力作用在物体上。结果，物体完全转入塑性状态。

速度场可用如下方式作出，其精度只差一个刚性移动量：

$$v_1 = v_1(x_1, x_2); \quad v_2 = v_2(x_1, x_2); \quad v_3 = \xi x_3 \quad (11-90)$$

式中 $\xi = \xi_3$ 是平面变形时等于零的某个常数。

在一般情况下， ξ 不等于零，并且速度分量 v_3 满足平断面假定，即垂直于 x_3 轴的任何断面中， v_3 与变量 x_1 和 x_2 无关。

于是我们就说在域 D 中发生推广的平面流动。

应变速率张量和应力张量可用如下形式写出：

$$T_{\dot{\xi}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_{11} & \dot{\xi}_{12} & 0 \\ \dot{\xi}_{21} & \dot{\xi}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\xi}_{33} \end{pmatrix} \quad T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (11-91)$$

并满足如下的关系式：

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (11-92)$$

本构方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_0 &= -\frac{2T}{H} \dot{\xi}_{11} & \sigma_{22} - \sigma_0 &= -\frac{2T}{H} \dot{\xi}_{22} \\ \sigma_{33} - \sigma_0 &= -\frac{2T}{H} \dot{\xi}_{33} & \sigma_{12} &= \frac{2T}{H} \dot{\xi}_{12} \end{aligned} \right\} \quad (11-93)$$

式中 $T = (\vartheta, A, H)$ (11-94)

$$H = 2\sqrt{\dot{\xi}_{11}^2 + \dot{\xi}_{11}\dot{\xi}_{22} + \dot{\xi}_{22}^2 + \dot{\xi}_{12}^2} \quad (11-95)$$

$$A = \int_0^t H dt \quad (11-96)$$

(沿着材料质点轨迹对时间 t 进行积分)

温度 ϑ 分布满足热传导方程

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) + \nu TH \quad (11-97)$$

并且温度 ϑ 是时间和坐标 x_1, x_2 的函数。

由方程式 (11-90) 和 (11-93) 得到，

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{3T}{H} \dot{\xi} \quad (11-98)$$

和平面变形的情况一样，应力 σ_{33} 是主应力中的一个，而另外两个由下式求出

①原书误为 ξ 。——译者

$$\sigma_{1,1} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm 1/2\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

相应的主轴方向可由下式求得：

$$\operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (11-99)$$

应力 σ_{ik} 与作用在围线 γ 上的表面应力，用柯西方程联系起来：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n,1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ \sigma_{n,2} &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{aligned} \right\} \quad (11-100)$$

式中 n_1 和 n_2 是法线 n 的分量。

写出边界条件。圆柱体塑性变形过程是非定常的。研究即时时刻 t 的金属流动时，将假定物体的形状（即横断面围线 γ ）及其上的温度分布，在问题求解的前一阶段已求出。

设给定轴向应力的合力为

$$\iint_D \sigma_{33} dx_1 dx_2 \bullet = Q^* \quad (11-101)$$

面围线 γ 一般情况是由两个无关的部分组成：

$$\gamma = \gamma' + \gamma''$$

在 γ' 上，给定与 γ 垂直的速度分量 v_n 和与 γ 相切的应力 $\vec{\tau}$ ，而围线 γ'' 不承受载荷（即在其上给定的应力等于零）：

$$v_n \Big|_{\gamma'} = v_n^*(M) \quad (11-102)$$

$$\vec{\tau} \Big|_{\gamma'} = \vec{\tau}^*(M) \quad (11-103)$$

$$p \Big|_{\gamma''} = \tau \Big|_{\gamma''} = 0 \quad (11-104)$$

式中 M ——围线 γ 的点； p 和 τ ——分别为作用在 γ 上的法向应力和切向应力。

我们提出如下的边值问题：求在域 D 中恒满足方程式 (11-

●原文误为 dx_3 。——译者

92)~(11-96), 而在圆柱的围线 γ 和两端上满足边界条件式 (11-101)~(11-104) 的速度和应力的分布。

11.7.2 虚速度原理

用两个横断面 $x_3 = 0$ 和 $x_3 = l$ 分离出有限段圆柱体, 并对它写出机械能守恒方程。考虑到应力和应变速率与变量 x_3 无关, 对于所研究的情况, 能量方程

$$\iint_S \vec{\sigma}^* \cdot \vec{v} \, dS = \iiint_D T H \, dW \quad (11-105)$$

可写成如下形式

$$\int_{\gamma'} \rho |v_*|^2 \, d\gamma + Q^* \dot{\xi} = \iint_D T H \, dx_1 \, dx_2 + \int_{\gamma'} \vec{\tau}^* \cdot \vec{v} \, d\gamma \quad (11-106)$$

因此, 如果速度场已知, 则由式 (11-106) 可求出作用在接触表面上的应力所发出的功率。

让我们从大量的运动许可速度场中, 找出既满足运动学关系又满足静力学关系的真实场。为此, 利用虚速度原理。对于推广的变形状态, 这个原理可用如下方式表述: 为使运动许可速度场是真实的, 必要且充分的条件是对任何虚速度场满足如下方程式:

$$Q^* \delta \xi = \iint_D T \delta H \, dx_1 \, dx_2 + \int_{\gamma'} \vec{\tau}^* \cdot \delta \vec{v} \, d\gamma \quad (11-107)$$

虚速度场应当属于式 (11-90) 的一类流动, 并满足不可压缩性条件和在 γ' 上的齐次边界条件:

$$\delta v_* \Big|_{\gamma'} = 0 \quad (11-108)$$

把包含真实场本身在内的一族运动许可速度场表示成

$$\vec{v} = v(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (11-109)$$

利用如下方程组求出参数 a_i

$$Q^* \frac{\partial \xi}{\partial a_i} = \iint_D T \frac{\partial H}{\partial a_i} \, dx_1 \, dx_2 + \int_{\gamma'} \vec{\tau}^* \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial a_i} \, d\gamma \quad (11-110)$$

例题11.4 管的推广平面流动〔4〕

受轴向力 Q 拉伸的无限长圆管，在均匀分布的外压力 \bar{p} 作用下塑性变形。外表面的径向位移速度给定且等于 v_0 。认为材料是不可压缩的粘-塑性介质 $T = \tau_s(1 + bH)$ ，试求压力 p 和管壁的变形。

解 我们引入如图 154 所示的圆柱坐标系，域 Ω 是由外围线 $\gamma_0 (r = R)$ 和内围线 $\gamma_1 (r = R_0)$ 所围的圆环。

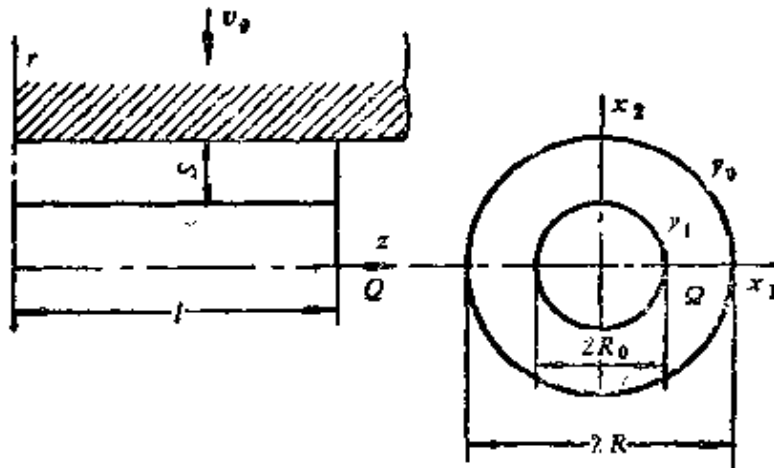


图154 管的推广的平面流动

在 γ_0 上给定法向速度分量 $v_n|_{\gamma_0} = -v_0 = \text{常数}$ 和等于零的应力 $\tau|_{\gamma_0} = 0$ 。围线 γ_1 不受载荷。

管的变形对 r 轴是对称的，并且不伴随发生横断面的歪扭。速度场可写成如下形式：

$$v_r = \varphi(r) \quad v_\theta = 0 \quad v_z = f(z)$$

式中 $\varphi(r)$ 和 $f(z)$ 分别是关于 r 和 z 的某个函数。

我们写出如下形式的不可压缩性条件： $\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = -\partial v_z / \partial z$ 。

因为在此等式的左边是 r 的函数，而在右边为 z 的函数，所以得到

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 2C \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2C \quad (11-111)$$

式中 C —— 某一常数。

对方程式 (11-111) 积分后, 则

$$v_r = C \left(\frac{C_1}{r} + r \right), \quad v_z = -2Cz + C_2$$

我们认为横断面 $z=0$ 不运动, 于是 $v_z(0) = 0$ 和 $C_2 = 0$ 。

设在外表面上给定径向速度 $v_r(R) = -v_0$ (负号对应于管的压缩)。

利用这个条件得到

$$C = -v_0(R + C_1/R)$$

引入如下的无量纲参数:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{v_0}{R}, \quad \alpha = \frac{C_1}{R^2}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad \lambda = \frac{R_0}{R}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\sigma_s},$$

$$q = \frac{Q}{\Phi \sigma_s}$$

式中 σ_s ——屈服极限; $\Phi = \pi R^2(1 - \lambda^2)$ ——横断面面积。

无量纲的坐标 x 变化的范围是 $\lambda \leq x \leq 1$ 。

$$\text{结果, } C = -\frac{\dot{\varepsilon}}{1 + \alpha} \text{ 和 } v_r = -\dot{\varepsilon}R \cdot \frac{x + \alpha/x}{1 + \alpha}, \quad v_z = \xi z$$

$$\text{式中 } \xi = \frac{2\dot{\varepsilon}}{1 + \alpha}.$$

应变速率分量为

$$\left. \begin{aligned} \xi_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\dot{\varepsilon} \frac{1 - \alpha/x^2}{1 + \alpha} \\ \xi_{\theta\theta} &= \frac{v_r}{r} = -\dot{\varepsilon} \frac{1 + \alpha/x^2}{1 + \alpha} \\ \xi_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{2\dot{\varepsilon}}{1 + \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (11-112)$$

切应变速率强度为

$$H = \left| \frac{2\dot{\varepsilon}}{1 + \alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{x^4} + 3} \right| \quad (11-113)$$

应当指出, 当 $\lambda = 0$ 时, 厚壁管变为实体圆柱。此时变量 x 在 $0 \leq x \leq 1$ 的范围内变化。为了使公式 (11-112) 所确定的应变速率 $\dot{\xi}_{r,r}$ 和 $\dot{\xi}_{\theta,\theta}$ 是有界的, 必须使 a 等于零。此时 $\dot{\xi}_{r,r} = \dot{\xi}_{\theta,\theta} = -\dot{\epsilon}$, $\dot{\xi}_{z,z} = 2\dot{\epsilon}$ 。

但是, 在一般情况下, a 值事先未知。我们将把它看作由虚速度原理确定的参数。为了简化, 令 $b = 0$, 在著作〔1〕中列有考虑到材料粘性的更详细的解析。

用断面 $z = 0$ 和 $z = l$ 分割出一段管, 并对它计算外力和内力功率。

正应力 \bar{p} 所发出的功率为

$$\dot{A}_p = 2\pi R l \bar{p} v_0 = 2\pi R^2 l \dot{\epsilon} \sigma_s \bar{p}$$

在沿 z 轴以速度 $v_z(l)$ 移动的断面 $z = l$ 上, 轴向力 Q 所发出的功率为

$$\dot{A}_q = Q v_z(l) = q \Phi \sigma_s \frac{2\dot{\epsilon} l}{1+a} = 2\pi R^2 l \dot{\epsilon} \sigma_s \frac{1-\lambda^2}{1+a} q$$

内力功率

$$\dot{A}_0 = \iiint_V T H dW = 2\pi l \tau_s \int_{R_0}^R H(r) r dr = 2\pi R^2 l \dot{\epsilon} \sigma_s \frac{1}{\sqrt{3} \dot{\epsilon}} \int_{\lambda}^1 H(x) x dx$$

这里引入如下的代换 $r = Rx$, $dr = R dx$ 。

机械能守恒方程可写成

$$\dot{A}_p + \dot{A}_q = \dot{A}_0$$

这个方程的两边除以公因子 $2\pi R^2 l \dot{\epsilon} \sigma_s$, 并考虑到式 (11-113), 则得到:

$$p + \frac{1-\lambda^2}{1+a} q = \frac{2}{1+a} \int_{\lambda}^1 \sqrt{\frac{a^2}{3x^4} + 1} x dx \quad (11-114)$$

容易相信, 这个方程可由方程组 (11-106) 和 (11-110) 的第一个方程直接得到。为此, 考虑到

$$\int_{r'}^{\cdot} |v_r| dy = 2\pi R v_0 \quad \xi = \frac{2\varepsilon}{1+a} \quad \Phi = \pi R^2 (1 - \lambda^2)$$

就足够了。

把这些关系代入式 (11-106), 并进行基本变换后就得到方程式 (11-114) (建议读者自己去做)。

对于实体圆柱 $\lambda = a = 0$, 并且能量平衡方程取如下形式:
 $p + q = 1$ 。

当 $\lambda \neq 0$ 时, 参数 a 由方程 (11-110) 确定, 类似于式 (11-114), 此方程可写成

$$-\frac{1-\lambda^2}{(1+a)^2} q = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{2}{1+a} \int_1^{\cdot} \sqrt{\frac{a^2}{3x^4} + 1} x dx \right) \quad (11-115)$$

计算包含在方程组 (11-114)、(11-115) 中的积分, 经某些变换后, 得到

$$\begin{aligned} \ln \left(\lambda^2 \frac{\sqrt{a^2+3} - a}{\sqrt{a^2+3\lambda^4} - a} \right) - (\sqrt{a^2+3} - \sqrt{a^2+3\lambda^4}) \\ = \sqrt{3} q (1 - \lambda^2) \end{aligned} \quad (11-116)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\lambda^2 \frac{\sqrt{a^2+3} - a}{\sqrt{a^2+3\lambda^4} - a} \right) \quad (11-117)$$

这些方程中的第一个方程, 把待定参数 a 同管的相对壁厚 $\lambda = R_0/R$ 以及轴向张力 q 联系起来。

方程式 (11-117) 表示单位压力 p 与参数 a 和 λ 的关系, 或借助公式 (11-116) 而表示 p 与 q 和 λ 的关系。

图155给出了在电子计算机上数值求解方程 (11-116) 得到的函数 $a = a(\lambda, q)$, $p = p(\lambda, q)$ 的图线。

上述关系的很好的逼近式 (见图 155) 可由下面公式^[4]给出:

$$a = 3\lambda^2 \frac{1 - q\sqrt{1 + 3\lambda^4(1 - q^2)}}{1 - 3\lambda^4 q^2} \quad (11-118)$$

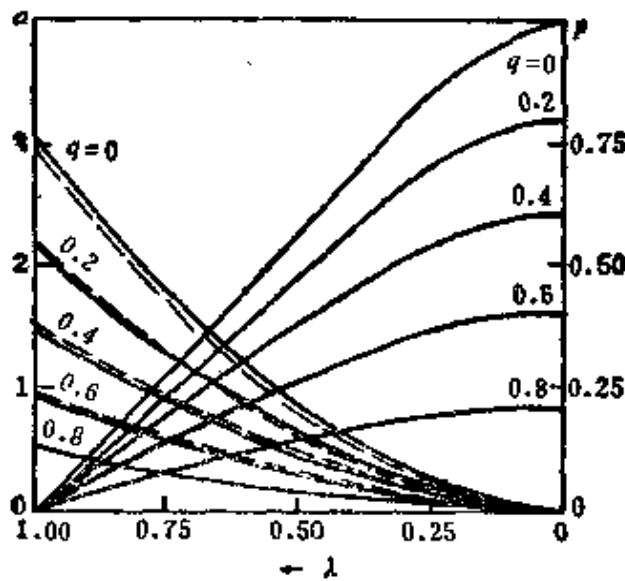


图155 $a = a(\lambda, q)$ 和 $p = p(\lambda, q)$ 的关系

实线——按公式(11-116), (11-117)计算; 虚线——按公式(11-118)计算

$$p = \frac{1 - \lambda^2}{1 + 3\lambda^4} \left[\sqrt{1 + 3\lambda^4(1 - q^2)} - q \right] \quad (11-119)$$

我们来求管壁厚度 S 的变化。在 dt 时间内壁厚的相对变化为

$$\frac{dS}{S} = \frac{[v_r(R) - v_r(R_0)]dt}{R - r} = \dot{\epsilon} \frac{\alpha - \lambda}{\lambda(1 + \alpha)} dt$$

半径 R 的相对变化为 $\frac{dR}{R} = \frac{v_r(R)dt}{R} = -\dot{\epsilon} dt$.

由此得到未知的关系:

$$d \ln S = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda(1 + \alpha)} d \ln R \quad (11-120)$$

我们以计算管材在减径机上轧制时的变形为例, 说明所得结果的应用。

减径理论基本问题之一是在给定的张力 q 、外径压下率 $\Delta D/D_1$ 和壁厚度 S_1/D 时计算管壁厚度变化。这里 S_1 和 D_1 分别是管的壁厚和管直径的初始值。

利用上面研究过的以轴向力 Q 拉伸的管子的压缩过程可以

近似地模拟减径过程，研究无张力减径的最简单情况，此时 $Q = q = 0$ 。

由公式 (11-118) 找到

$$a = 3\lambda^2 \quad (11-121)$$

于是关系式 (11-120) 可取如下形式：

$$\frac{dS}{S} = \frac{1-3\lambda}{1+3\lambda^2} \frac{dR}{R} \quad (11-122)$$

计算精轧孔型中壁厚的变化。在减径机精轧孔型中不超过 10% 的小的相对压下量，允许把方程 (11-120) 写成有限差分的形式。考虑到符号 dR (管子半径减小且 $dR < 0$)，并用 ΔD 表示外径的减小，则得到

$$\frac{\Delta S}{S_1} = \frac{3\lambda_1 - 1}{3\lambda_1^2 + 1} \frac{\Delta D}{D_1} \quad (11-123)$$

并且 $\lambda_1 = \frac{R_0}{R_1} = 1 - \frac{S_1}{R_1} = 1 - \frac{2S_1}{D_1}$

式中 R_1 和 S_1 —— 分别为管的外半径和壁厚的初始值。

在图 156~158 上作出了 ΔS 与外直径相对压下量 $\Delta D/D_1$ 、管的初始直径 D_1 和相对壁厚度 S_1/D_1 的理论的 (按公式 11-123) 及实验的 [按 Г.И. 古里亚耶夫 (Гуляев) 和 В.А. 尤尔格列纳斯 (Юргеленас)] 关系曲线。分析曲线可以证明，计算数据与实验数据充分接近。指出存在管壁厚度保持不变的所谓临界比值 $(S_1/D_1)_{KP}$ 是有意义的。

如果 $S_1/D_1 < (S_1/D_1)_{KP}$ ，则无张力减径时管壁厚度增加；如果 $S_1/D_1 > (S_1/D_1)_{KP}$ ，则管壁厚度减小 (见图 156)。当 $\Delta S = 0$ 时，由公式 (11-123) 可得到， $\lambda_{KP} = 1/3$ 和

$$\left(\frac{S_1}{D_1}\right)_{KP} = \frac{1 - \lambda_{KP}}{2} = 0.333$$

按 А.П. 契克马咯夫 (Чекмарев) 和 Г.И. 古里亚耶夫的实验资料， $(S_1/D_1)_{KP} = 0.325$ 。

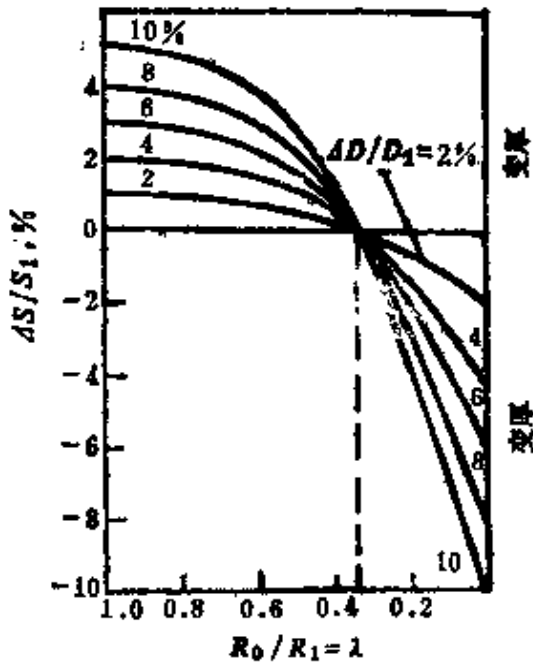


图156 $\Delta S/S_1$ 与 λ 和 $\Delta D/D_1$ 的关系

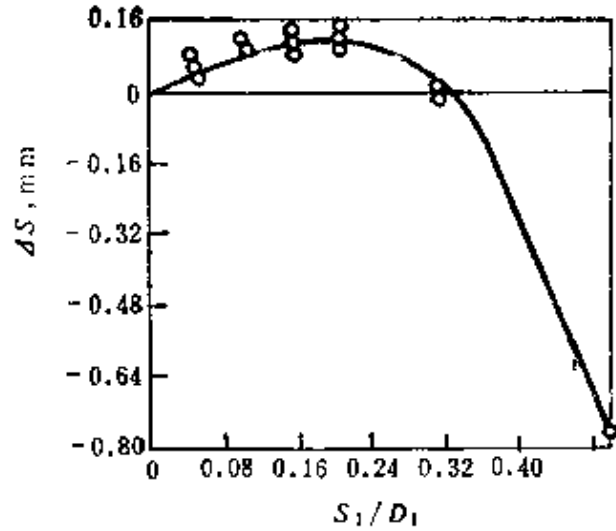


图157 按公式 (11-123) 计算的数据与实验数据比较 (○点是实验数据)

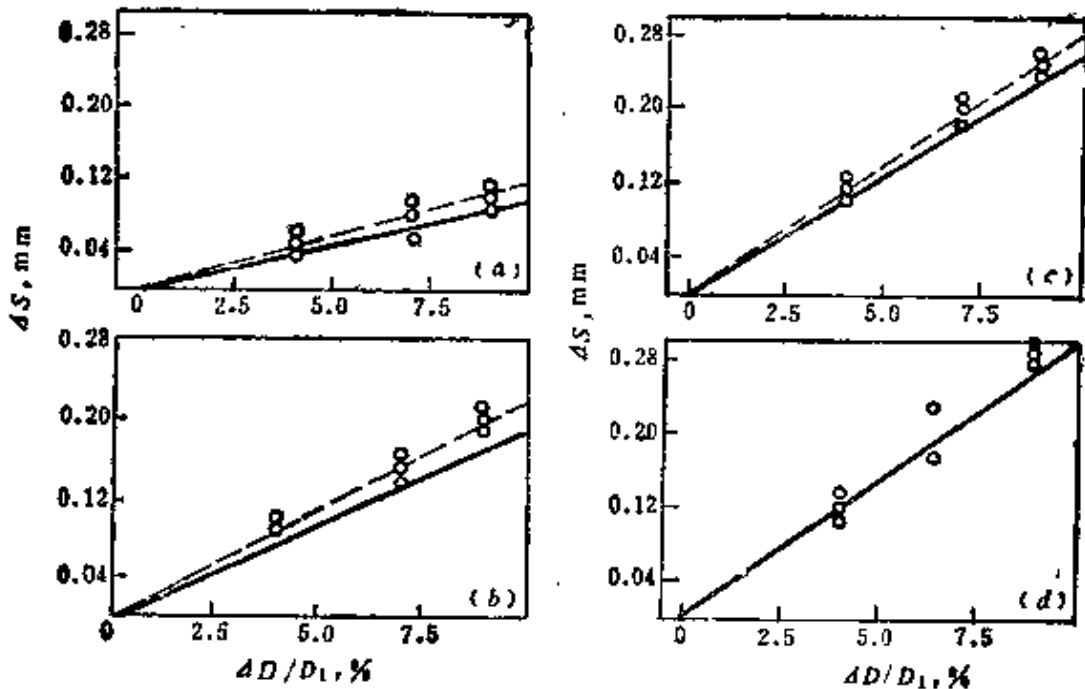


图158 按公式 (11-123) 计算的数据 (实线) 与实验数据 (虚线) 的比较

(a) 38 × 2; (b) 38 × 4; (c) 38 × 6; (d) 38 × 8

思考题

1. 推广的平面流动和平面流动之间有什么区别?
2. 推广的平面流动时, 什么样的速度分量沿 x_3 轴发生变化? 按照什么规律变化?
3. 如何表达运动学边界条件和静力学边界条件?
4. 运动许可速度场属于每一类流动吗? 虚速度场属于每一类流动吗?
5. 参数 Q 有什么样的意义?

11.8 定常的三维流动*

11.8.1 前言

我们研究粘-塑性硬化材料的缓变流流动理论。

研究的总纲如下。研究任意的, 一般情况为多连的流管横断面。平衡方程之一可写成积分形式; 其余的平衡方程与塑性条件和连续介质力学的运动学关系联立, 可用于推导关于被分离出的断面的虚速度原理。

积分参数——沿外廓的平均截面 γ 、正压力 p 、沿域 Ω 的平均轴向应力 q 等等包含在所得到的方程组内。

推导方程组时, 所采用的关系和假定决定着被研究的那一类问题的边界。特别是, 用第十章第五节所描述的方法求解的平面和轴对称问题就属于这类。

11.8.2 流管

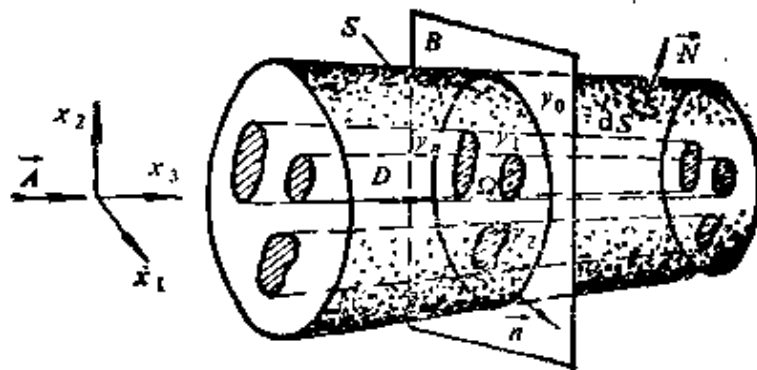


图159 定常三维流动

按照文献[4]，我们研究粘-塑性硬化介质的定常三维流动（图159）。以后将把流动域 D 称为“流管”，而把包围域 D 的分段光滑的表面 S 称为“流管的表面”。

将假设，流管的入口和出口处连续介质的运动是均匀和直线的，且对应于介质作为绝对刚体与固定方向 \vec{A} 平行的位移。

我们引入笛卡儿观察者坐标系 x_i ，且 x_3 轴平行于矢量 \vec{A} 。假定，用任意布置的垂直于 x_3 轴的流管截面 C ，在一般情况下是用围线 γ 包围的有界的多连域 Ω 。 γ 是由没有公共点的有限多个分段-光滑的封闭围线所组成，即 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ ，并且 γ_0 包括所有其余的（图160）。

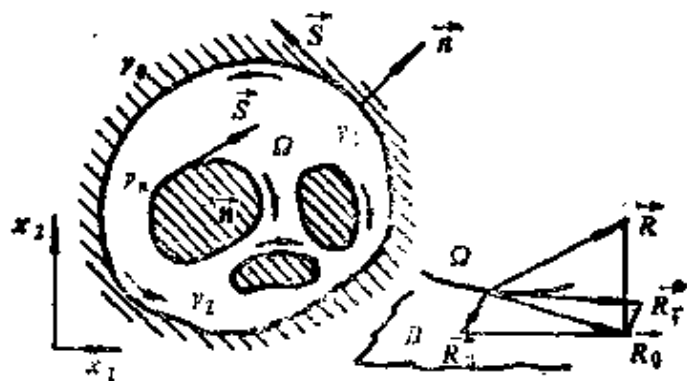


图160 流管的横断面

当 $k=0$ 时，边界由一个封闭围线组成，且域 γ_0 是单连域，而在一般情况下它是 $(k+1)$ 连域。域在观察者左边时绕行围线的方向取正值，围线法线 \vec{n} 和切线 \vec{S} 的相应取向表示在图160上。

因为域 Ω 的形状取决于平面 C 的位置，所以围线 γ 包含在单参数的曲线族 $\gamma = \gamma(x_3)$ 中。

当位移的方向与法矢量 \vec{n} （见图160）一致时，围线点正的法向位移 δn 将对应于截面坐标 x_3 的变分 δx_3 。

此时，域 Ω 的面积 Φ 的变化为

$$\delta\Phi = \delta \iint_{\Omega} d\Omega = \int_{\gamma} \delta n d\gamma$$

顺着 x_3 轴沿域 Ω 平动的平均速度用 $v = B/\Phi$ 求出, 式中量

$$B = \iint_{\Omega} v_3 d\Omega$$

对于任何断面 Ω 都是常数, 且是通过流管的连续介质的“通量”。

在取 $v_3 = v(x_3)$ 之后, 我们在所研究的域中作满足“平断面假定”的运动许可速度场。

此时, 可满足关系式 $\delta n = v_n \delta t = v_n (\delta x_3 / v)$, 式中 v_n ——对围线垂直的速度分量; δt ——材料断面行进路程 δx_3 所用的时间。

我们研究管流中的某些运动学和静力学的流动参数。

具有分量为 v_i 的速度场 \vec{v} 满足不可压缩性条件 $\partial v_1 / \partial x_1 + \partial v_2 / \partial x_2 + \partial v_3 / \partial x_3 = 0$, 而在表面 S 上满足使法向速度分量 v_N 变为零的条件。

在流管表面上作用有应力 $\vec{\sigma}^n (\sigma_{ni})$, 它与应力张量分量 σ_{ik} 用如下关系式联系起来:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n1} &= \sigma_{11}l_1 + \sigma_{12}l_2 + \sigma_{13}l_3 \\ \sigma_{n2} &= \sigma_{21}l_1 + \sigma_{22}l_2 + \sigma_{23}l_3 \\ \sigma_{n3} &= \sigma_{31}l_1 + \sigma_{32}l_2 + \sigma_{33}l_3 \end{aligned} \right\}$$

式中 l_i 是表面 S 的法线 \vec{N} 的方向余弦: $l_i = \cos(\widehat{N}, x_i)$ 。

在表面 S 的单位面积上作用的力 $\vec{\sigma}^n$ 与具有分量 (p_i) 的正压力 \vec{p} 和具有分量 (τ_i) 的单位摩擦力 $\vec{\tau}$ 的矢量等效。矢量 \vec{p} 与法线 \vec{N} 平行且方向相反, 而矢量 $\vec{\tau}$ 与矢量 \vec{N} 正交: $\vec{p} = -\bar{p}\vec{N}$, $\vec{\tau} \times \vec{N} = 0$ 。

同时, 矢量 $\vec{\tau}$ 的方向与流管表面上具有分量 (Δv_i) 的相对滑动速度矢量 $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}'$ 的方向相反 (\vec{v}' ——外介质的速度)。

此时, $\tau_i = -\bar{\tau} \frac{\Delta v_i}{\Delta v}$, 这里 \bar{p} 和 $\bar{\tau}$ 是矢量 \vec{p} 和 $\vec{\tau}$ 的模。

11.8.3 流管的横断面

在域 Ω 的边界上给定的弧线 γ 的任何空间的矢量函数 $\vec{R} =$

$\vec{R}(\gamma)$, 可表示成两个矢量的总和, $\vec{R} = \vec{R}_0(\gamma) + \vec{R}_\perp(\gamma)$ 。

这里 \vec{R}_0 是矢量 \vec{R} 在平面 $x_1 O x_2$ 上的投影, 而矢量 R_\perp 与这个平面垂直 (见图160)。

矢量 \vec{R}_0 还有与围线垂直和相切的分量 R_n 和 R_s ; 当与 \vec{n} 和 \vec{S} 轴方向一致时, 这两个分量是正的。围线 γ 的法线 \vec{n} 在一般情况下不和表面的法线 \vec{N} 一致, 而具有方向余弦 $n_1 = \cos(n, x_1)$, $n_2 = \cos(n, x_2)$ 。

这些方向余弦与表面 S 的法线 \vec{N} 的方向余弦, 用如下关系式联系起来:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= n_1 \sin(\widehat{N, x_3}) = n_1 \cos\psi \\ l_2 &= n_2 \sin(\widehat{N, x_3}) = n_2 \cos\psi \\ l_3 &= \sin\psi \end{aligned} \right\} \quad (11-124)$$

式中 ψ 角可以把 x_3 轴和 N 间的角一直补充到直角, 并且表示表面 S 对 x_3 轴的倾斜。特别是, 对于其母线平行于矢量 \vec{A} 的圆柱表面 (例如, 连续介质的均匀平动的流管表面), ψ 角等于零。

因此, 正压力矢量 \vec{p} 有如下的分量:

$$p_n = -\bar{p} \cos\psi; \quad p_s = 0; \quad p_3 = -\bar{p} \sin\psi \quad (11-125)$$

在平面 $x_1 O x_2$ 上的流动矢量 \vec{v}_0 有分量 v_n 和 v_s 。

应指出, 与围线 γ 垂直的速度分量 v_n 不同于垂直于表面 S 的速度分量 v_N , v_n 在一般情况下不等于零。

11.8.4 平衡方程

我们研究平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

沿着用表面 S 和平面 $x_3, x_3 + dx_3$ 包围的体积 ΔW , 对上式积分, 并采用体积积分变换成表面积分的公式, 得到

$$dQ = - \iint_{\Delta S} (p_3 + \tau_3) dS \quad (11-126)$$

这里 Q ——轴向正应力的合力, ΔS ——用平面 $x_3, x_3 + dx_3$,

截断的部分表面。

应指出，用另外方法也可得到这个关系式。为此，只要研究体元 ΔW 在施加于其上的外力作用下的平衡条件就足够了；方程式 (11-126) 与这些力在 x_3 轴上的投影和为零相对应。

将其积分

$$\iint_S p_3 dS = \iint_{\Delta S_3} p_3 \frac{dS_3}{l_3}$$

作某些变换。

式中 ΔS_3 —— 单元 ΔS 在 $x_1 O x_2$ 平面上的投影，而微分 dS_3 为 $dS_3 = dn dy$ 。

由于 $p_3 = -\bar{p} l_3$ ， $dn = v_n \frac{dx_3}{v}$ ，因而得到

$$\iint_{\Delta S} p_3 dS = - \iint_{\Delta S_3} \bar{p} dn dy = - dx_3 p_{CP} \int_{\gamma} \frac{v_n}{v} dy$$

式中 p_{CP} —— 沿围线 γ' 上的平均积分正压力； γ' —— 围线 γ 的一部分，其上的正压力不等于零。

其次，因为在所研究的流动中 ψ 角不超过 20° 和 $\cos\psi = 1$ ，故有 $dS = dy dx_3$ ，这就给出

$$\iint_{\Delta S} \tau_3 dS = - dx_3 \tau_{CP} \int_{\gamma'} - \frac{\Delta v_3}{\Delta v} dy$$

式中 τ_{CP} —— 围线 γ' 上的平均积分摩擦应力。

我们引入如下的无量纲参数：

$$q = \frac{Q}{\Phi \sigma_s}, \quad p = \frac{p_{CP}}{\sigma_s}, \quad \tau = \frac{\tau_{CP}}{\sigma_s}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\sigma_s} \quad (11-127)$$

参数 q 、 p 和 τ 分别是沿 Ω 平均的轴向正应力、沿 γ' 平均的正压力和沿 γ' 平均的切应力同沿 Ω 上平均化了的屈服极限 σ_s 之比。

结果平衡方程式可用如下方式写出：

$$\Phi \left[\frac{dq}{dx_3} + q \left(\frac{d \ln \phi}{dx_3} + \frac{d \ln \sigma_s}{dx_3} \right) \right] = p \int_{\gamma} \frac{v_x}{v} d\gamma + \tau \int_{\gamma} \frac{\Delta v_3}{\Delta v} d\gamma \quad (11-128)$$

11.8.5 某些假定, 推广的平面流动方程

在对运动学和静力学参数加上某些限制之后, 我们可分出“缓变流流动”这样一个类别。也就是在研究断面 Ω 上的速度场时, 将认为

1) 和应力张量的其他分量相比, 切应力 σ_{13} 和 σ_{23} 是很小的;

2) 速度场满足平断面假定。

结果应变速率张量和应力张量可写成

$$T_{\dot{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & 0 \\ \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} \quad T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

这里当固定 x_3 时, 轴向应变速率 $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{33} = \text{常数}$, 并在域 Ω 内满足如下的方程组:

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

本构方程

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_0 &= \frac{2T}{H} \dot{\epsilon}_{11} & \sigma_{22} - \sigma_0 &= \frac{2T}{H} \dot{\epsilon}_{22} \\ \sigma_{33} - \sigma_0 &= \frac{2T}{H} \dot{\epsilon}_{33} & \sigma_{12} &= \frac{2T}{H} \dot{\epsilon}_{12} \end{aligned}$$

式中 $T = T(\beta, A, H)$; $H = 2\sqrt{\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{11}\dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{12}^2}$
 $A = \int_0^t H dt$ 。

当工具(拉拔模、轧辊、挤压模等等)的几何形状给定时, 材料的平断面 Ω 沿 x_3 轴的位移可决定与围线垂直的速度分量 v_{γ}

和切应力分量 $\vec{\tau}_0$:

$$v_n \Big|_{\gamma} = v_n^*(M) = v \frac{dn}{dx_3}$$

$$\vec{\tau}_0 \Big|_{\gamma} = \vec{\tau}_0^*(M)$$

最后, 平衡方程 (11-128) 积分后, 可以对断面 Ω 给出轴向应力的合力 $Q = q\Phi\sigma_s$, 并且

$$\iint_{\Omega} \sigma_{33} dx_1 dx_2 = Q$$

这样, 我们可引出在11.7节对于推广的平面流动所提出的边值问题。因而, 建立 Ω 内的速度场和求出变为无量纲参数的参数 p 可归结为解如下的方程组:

$$p \int_{\gamma} |v_n| d\gamma + q\Phi\xi = \iint_{\Omega} \bar{T} H dx_1 dx_2 + \tau \int_{\gamma} \frac{v_1 \Delta v_1 + v_2 \Delta v_2}{\Delta v} d\gamma \quad (11-129)$$

$$q\Phi \frac{\partial \xi}{\partial a_i} = \iint_{\Omega} \bar{T} \frac{\partial H}{\partial a_i} dx_1 dx_2 + \tau \int_{\gamma} \frac{\frac{\partial v_1}{\partial a_i} \Delta v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial a_i} \Delta v_2}{\Delta v} d\gamma$$

$$(i = 1, 2, \dots, m) \quad (11-130)$$

我们把平衡方程

$$\Phi \left[\frac{dq}{dx_3} + q \left(\frac{d \ln \Phi}{dx_3} + \frac{d \ln \sigma_s}{dx_3} \right) \right] = p \int_{\gamma} \frac{v_n}{v} d\gamma + \tau \int_{\gamma} \frac{\Delta v_3}{\Delta v} d\gamma \quad (11-131)$$

合并到这里, 并按如下公式写出接触面上的摩擦条件

$$\tau = \begin{cases} fp & fp < 1/\sqrt{3} \text{ 时} \\ f & fp \geq 1/\sqrt{3} \text{ 时} \end{cases} \quad (11-132)$$

相对于参数 p , q 和 τ 的线性闭合方程组 (11-129) ~ (11-132) 含有相对于 $(n+3)$ 个变量 p , q , τ , a_1 , a_2 , \dots , a_n 的 $n+3$ 个方程。

11.8.6 形变硬化

如前面已经指出那样， σ_s 是断面 Ω 的平均屈服极限。由关系式 (11-129)，(11-130) 得出，无量纲参数 p ， q 和 τ 间的关系以及在断面平面 Ω 上的变形状态（速度场）与在该断面上的 σ_s 大小无关。沿变形区长度上屈服极限的变化仅仅以一项 $d \ln \sigma_s / dx_3$ ，反映在方程 (11-131) 中。

假设断面 Ω 的变形状态足够均匀，我们来建立断面 Ω 沿流管运动时，屈服极限与断面 Ω 的变形之间的关系。

为此，我们固定位于断面上的某个点 M ，并计算 dt 时间内切变形程度增量： $dA = H dt$ 。

沿断面 Ω 上参数 A 的平均增量：

$$d\bar{A} = \frac{1}{\Phi} \iint_{\Omega} (dA) d\Omega = \frac{1}{\Phi} \iint_{\Omega} (H dt) d\Omega$$

引入参数

$$\beta = \frac{\iint_{\Omega} H d\Omega}{\sqrt{3} |\dot{\Phi}|} \quad (11-133)$$

这里面积 Φ 的变化速率用如下关系求出：

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = v \frac{d\Phi}{dx_3} = \int_r v_n dy$$

由此 $dA = \sqrt{3} \beta |d \ln \Phi|$ 。

如果把断面 Ω 上的平均屈服极限认为是沿断面将切变形程度平均化 \bar{A} ，则由 $\sigma_s = F(\bar{A})$ 得到

$$d \ln \sigma_s = \frac{F'(\bar{A})}{F(\bar{A})} d\bar{A}$$

其中，关系式 $\sigma_s = \sigma_{s1} \exp(m\bar{A}/\sqrt{3})$ (式中 m ——表示材料硬化的常数) 对应于等式 $d \ln \sigma_s = -m\beta d \ln \Phi$ 。

结果平衡方程取如下形式:

$$\Phi \left[\frac{dq}{dx_3} + (1 - m\beta)q \frac{d \ln \Phi}{dx_3} \right] = p \int_{r'} \frac{v_n}{v} d\gamma + \tau \int_{r'} \frac{\Delta v_3}{\Delta v} d\gamma \quad (11-134)$$

我们将可得到 β 值的近似估算。设 ξ_1 和 ξ_2 是主伸长速度 (对于平面 $x_1 O x_2$)。参数 H , $(\xi_{11} + \xi_{22})$ 在断面的平面上对于坐标变换是不变的。由此得到如下的估算:

$$H = 2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2} \leq 2(|\xi_1| + |\xi_2|)$$

特别是, 如果 ξ_1 和 ξ_2 有相同符号, 并且在域 Ω 中它们不变化, 就有 $H \leq 2|\xi_1 + \xi_2| = 2|\xi_{11} + \xi_{22}|$ 。

利用格林公式, 得到

$$\iint_{\Omega} H d\Omega \leq \left| \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \right| = 2 \left| \int_{\gamma} v_n d\gamma \right| = 2 |\dot{\Phi}|$$

由此并考虑到关系式 (11-133), 则得到

$$\beta \leq 1.15 \quad (11-135)$$

如果 $\xi_1 = \xi_2$, 则 $H = \sqrt{3} |\xi_1 + \xi_2|$, 这就给出 $\beta = 1.00$ 。

对于平面变形状态 ($\xi_3 = 0$), 不等式 (11-135) 变成等式 $\beta = 1.15$ 。在一般情况下

$$1.00 \leq \beta \leq 1.15 \quad (11-136)$$

11.8.7 温度场

我们研究热传导方程:

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \right) + vTH \quad (11-137)$$

对于缓变流流动, 速度分量 v_3 比 v_1 和 v_2 大得多。流动是定常的, 且 $\partial\theta/\partial t = 0$ 。因此

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial\theta}{\partial x_3} v_3 = \frac{\partial\theta}{\partial x_3} v$$

此外, 在这些条件中沿着 x_3 轴的热迁移主要是对流, 这就可以采用并用如下方法近似写出热传导方程:

$$v \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} = \kappa \left(-\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) + \nu T H \quad (11-138)$$

再讲一下温度问题的一个简化方案。引入沿断面 Ω 上的平均温度 $\bar{\vartheta}$ ：

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{\Phi} \iint_{\Omega} \vartheta d\Omega \quad (11-139)$$

沿 Ω 对方程 (11-137) 两边进行积分并除以面积 Φ ，得到

$$v \frac{d\bar{\vartheta}}{dx_3} = \kappa \frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dx_3^2} + \frac{\kappa}{\Phi} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) d\Omega + \frac{\nu}{\Phi} \iint_{\Omega} T H d\Omega$$

由格林公式得到

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\gamma} \frac{\partial \vartheta}{\partial n} d\gamma \quad (11-140)$$

利用第三类边界条件式 (8-30)： $-k \partial \vartheta / \partial n = \alpha (\vartheta - \vartheta_c)$ ，并引入沿外廓 γ 上的平均化了的温度差

$$\Delta \vartheta = \frac{1}{\Pi} \int_{\gamma} (\vartheta - \vartheta_c) d\gamma \quad (11-141)$$

式中 Π —— Ω 的周长。

考虑到式 (11-140)，(11-141) 的热传导方程可写成

$$v \frac{d\bar{\vartheta}}{dx_3} = \kappa \frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dx_3^2} - \frac{\alpha \Pi}{c \rho \Phi} \Delta \vartheta + \frac{\nu}{\Phi} \iint_{\Omega} T H d\Omega \quad (11-142)$$

例题11.5 拔管〔4〕

试计算通过锥形模拔管时的力和变形 (图161)。

解 当描述横断面上的速度场时，我们采用例题11.4中得到的结果，并在其中利用所取的符号系统以及利用描述域 Ω 中推广的平面流动运动学的表达式。

域 Ω 的围线 γ 由两个相关的部分组成，即 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ 。断面面积为 $\Phi = \pi R^2 (1 - \lambda^2)$ 。

此外， $\xi = \xi_{33} = 2e / (1 + \alpha)$ 。从而

$$\Phi_Q \dot{\xi} = 2\pi R^2 \dot{\varepsilon} q (1 - \lambda^2) / (1 + \alpha)$$

$$\text{其次, } \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \alpha} = -\frac{2\dot{\varepsilon}}{(1+\alpha)^2} \text{ 和 } \Phi_Q \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \alpha} = -2\pi R^2 \dot{\varepsilon} q \frac{1-\lambda^2}{1+\alpha}$$

在圆周 γ_0 上, 与围线垂直的速度分量 $v_n = v_r \Big|_{r=R} = -\dot{\varepsilon} R$, 且 $v_n/v = dR/dx_3$.

$$\text{因此, } p \int_{\gamma_0} |v_n| d\gamma = p \int_0^{2\pi} \dot{\varepsilon} R R d\omega = 2\pi R^2 \dot{\varepsilon} p$$

$$p \int_{\gamma_0} \frac{v_n}{v} d\gamma = p \int_0^{2\pi} \frac{dR}{dx_3} R d\omega = 2\pi R \frac{dR}{dx_3} p$$

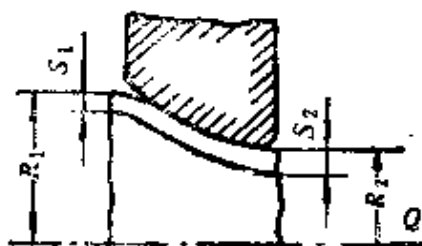


图161 拔管

在考虑摩擦影响的情况下进行积分。将坐标系与工具固定在一起。于是得到 $\Delta v_1 = v_1$; $\Delta v_2 = v_2$; $\Delta v_3 = v_3$ 和 $v_1 \Delta v_1 + v_2 \Delta v_2 = v_1^2 + v_2^2 = v^2$ 。

在接触表面上 $\Delta v^2 = \Delta v_1^2 + \Delta v_2^2 + \Delta v_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2 + v_3^2 = v^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) = v^2 \sec^2 \psi$ 。

由此

$$\tau \int_{\gamma} \frac{v_1 \Delta v_1 + v_2 \Delta v_2}{\Delta v} = \tau \int_0^{2\pi} \frac{v^2 \operatorname{tg}^2 \psi R d\omega}{v \sec \psi} = 2\pi R^2 \dot{\varepsilon} r \sin \psi$$

$$\tau \int_{\gamma} \frac{\Delta v_3}{\Delta v} d\gamma = \tau \int_0^{2\pi} \frac{v R d\omega}{v \sec \psi} = 2\pi R \tau$$

假定, 沿断面 Ω 平均的屈服极限 σ_s 按 $d \ln \sigma_s = -m d \ln \Phi$ 的规律变化, 约去公因子和忽略与 1 比较为 $f \operatorname{tg} \psi$ 量级的小量之后, 得到如下的方程组:

$$p + \frac{1-\lambda^2}{1+a}q = \frac{2}{1+a} \int_1^1 \sqrt{\frac{a^2}{3x^4} + 1} x dx \quad (11-143)$$

$$-\frac{1-\lambda^2}{1+a^2}q = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{2}{1+a} \int_1^1 \sqrt{\frac{a^2}{3x^4} + 1} x dx \right) \quad (11-144)$$

$$\frac{dq}{d \ln R} + (1-m)q \frac{d \ln \Phi}{d \ln R} = -\frac{2\theta p}{1-\lambda^2} \quad (11-145)$$

在推导平衡方程 (11-145) 时, 采用摩擦规律 $\tau = fp$, 并引入表示工具几何形状和接触摩擦条件的参数 $\theta = 1 + f \operatorname{ctg} \psi$ 。对于锥形模母线的倾角 ψ 是常数, 因此以后将认为 $\theta = \text{常数}$ 。

这个方程组的前两个方程式是描述管推广的平面塑性流动, 并曾在例题 11-4 中详细研究过。

因为 $\Phi = \pi R^2(1-\lambda^2)$,

$$\frac{d \ln \Phi}{d \ln R} = \frac{d \ln[\pi R^2(1-\lambda^2)]}{d \ln R} = 2 - \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} \frac{d\lambda}{d \ln R}$$

其次, $\lambda = R_0/R = 1 - S/R$ 和

$$\frac{d\lambda}{d \ln R} = R \frac{d\lambda}{dR} = (1-\lambda) \left(\frac{d \ln S}{d \ln R} - 1 \right) \quad (11-146)$$

利用公式 (11-120)。将式 (11-120) 代入式 (11-146) 之后, 则有

$$\frac{d\lambda}{d \ln R} = \frac{a(1-\lambda^2)}{\lambda(1+a)} \text{ 和 } \frac{d \ln \Phi}{d \ln R} = \frac{2}{1+a}$$

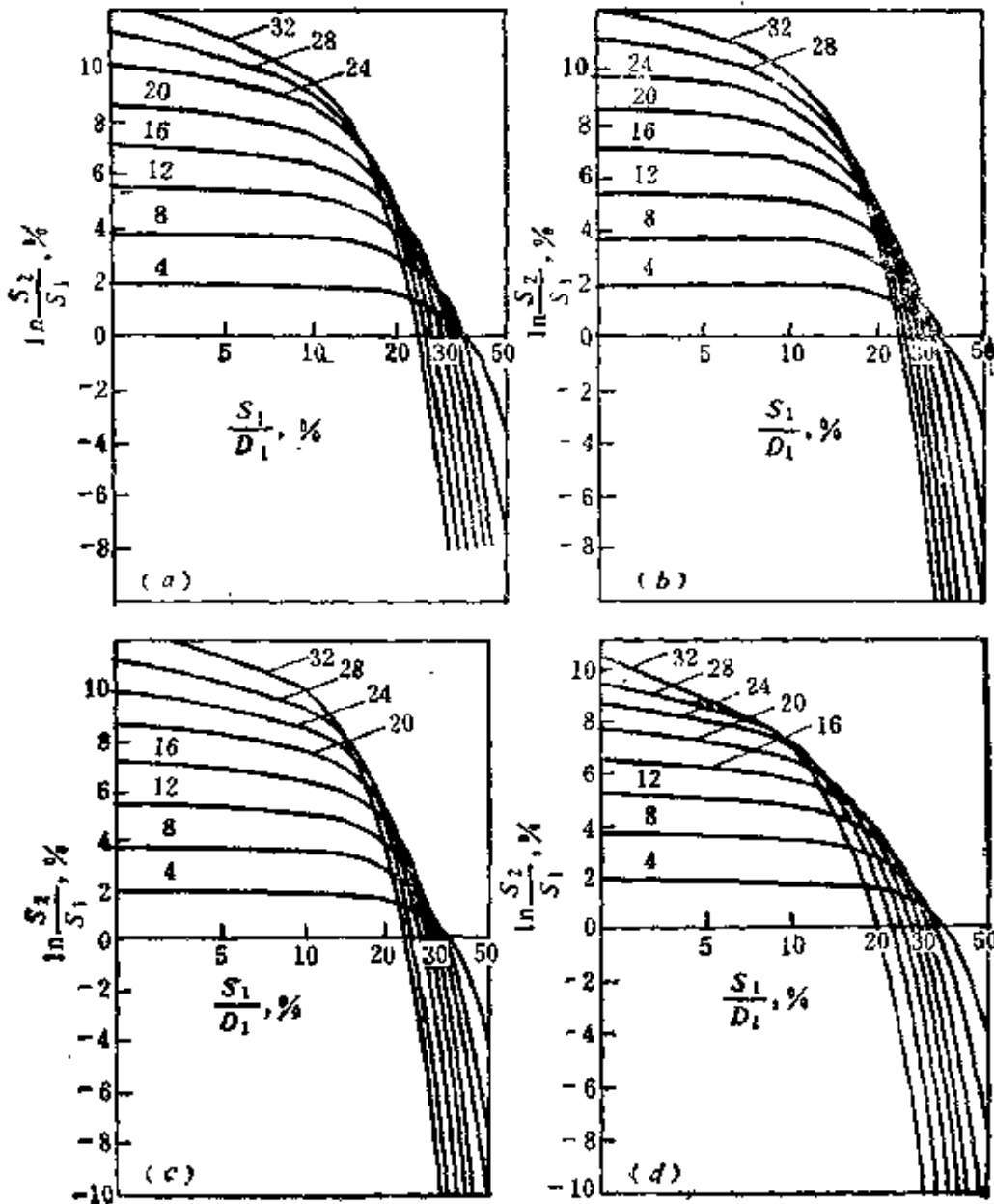
这样, 为了计算拔管时的力和变形, 得到如下的方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{d \ln R} + \frac{2(1-m)q}{1+a} &= -\frac{2\theta p}{1-\lambda^2}, \quad \frac{d\lambda}{d \ln R} = \frac{a(1-\lambda^2)}{\lambda(1+a)} \\ \frac{d \ln S}{d \ln R} &= \frac{\lambda-a}{\lambda(1-a)}, \quad a = 3\lambda^2 \frac{1-q\sqrt{1+3\lambda^4(1-q^2)}}{1-3\lambda^4q} \\ p &= \frac{1-\lambda^2}{1+3\lambda^4} \left[\sqrt{1+3\lambda^4(1-q^2)} - q \right] \end{aligned} \right\} \quad (11-147)$$

并将在如下的边界条件下解这个方程组: 即 $R = R_1$, $\lambda = \lambda_1$,

$$S = S_1, q = q_1。$$

图162所示是管壁厚度变化同初始壁厚度 S_1/D_1 (硬化系数 m)、用参数 $\theta = 1 + f \operatorname{ctg} \psi$ 表示的摩擦条件和工具几何形状以及管的压下程度 $\ln R_1/R_2$ 的关系曲线。计算是在电子计算机《Минск-32》上用龙格-库塔法按常微分方程组的标准积分程序完成的。为了进行对比,还列出了实验曲线(图163)。和减径时一样,薄壁管的变形会伴随着管壁增厚。当拉拔厚壁管时,管壁变薄。对一般遇到的 $\ln R_1/R_2$,“临界”比值 $(S_1/D_1)_{KP}$ 在 $0.2 \sim 0.33$ 的范围内。



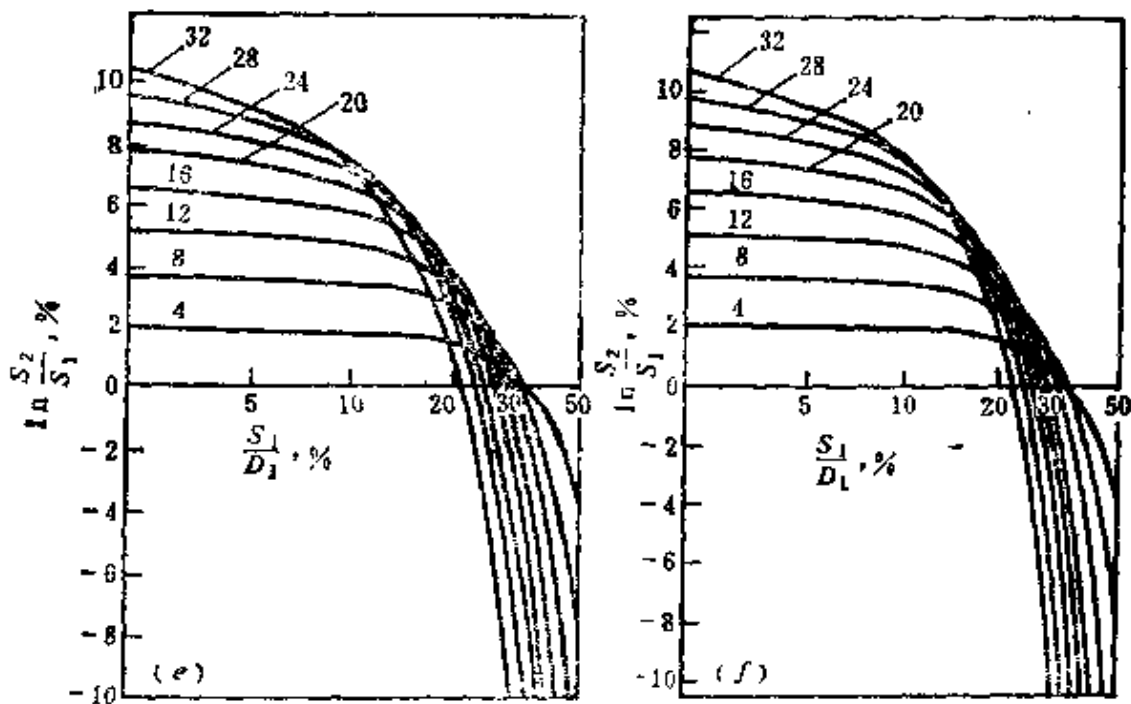


图162 管壁厚度变化同比值 S_1/D_1 、 $\Delta D/D_1$ 、 θ 和 m 的关系，曲线上的数字是 $\ln(R_1/R_2)$

曲线图	θ	m	曲线图	θ	m	曲线图	θ	m
(a)	1.0	0.0	(b)	1.0	0.5	(c)	1.0	1.0
(d)	1.5	0.0	(e)	1.5	0.5	(f)	1.5	1.0

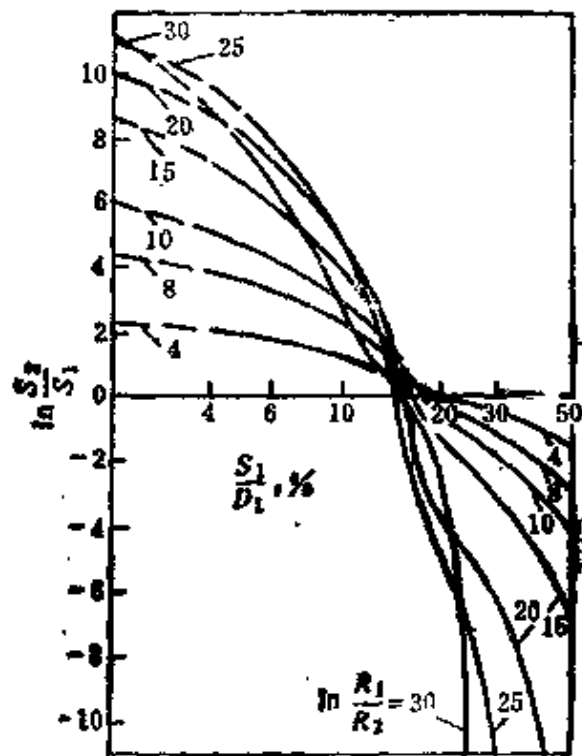


图163 拔管时壁厚变化的实验曲线 (按B·波契塔(Почта))

例题11.6 宽展轧制^[4]

矩形横断面的轧件在圆柱形轧辊上宽展轧制 (图164, a)。求正压力和切应力沿接触面上的分布, 并确定轧件的宽展。

解 作流管时, 忽略轧件侧表面的歪曲, 在此情况下, 流管的任意横断面是高为 $2h$ 和宽为 $2b$ 的矩形件 (图164, b)。

在域 Ω 上的速度场应保证这个域沿流管运动时的仿射变换, 在例题中得到的速度场

$$v_1 = a\dot{\varepsilon}x_1 \quad v_2 = -\dot{\varepsilon}x_2 \quad v_3 = (1-a)\dot{\varepsilon}x_3$$

可满足所说的要求, 并且 $\xi_{11} = a\dot{\varepsilon}$; $\xi_{22} = -\dot{\varepsilon}$; $\xi_{33} = (1-a)\dot{\varepsilon}$ 。

在 dt 时间内断面 Ω 沿 x_3 轴移动的距离为 $u = v dt$, 并且它的点在 $x_1 O x_2$ 平面上得到位移为 $u_1 = a\dot{\varepsilon}x_1 dt$, $u_2 = -\dot{\varepsilon}x_2 dt$, 这对应于域 Ω 以系数 $k_2 = \dot{\varepsilon} dt$ 沿 x_2 轴的均匀压缩和以系数 $k_1 = a\dot{\varepsilon} dt$ 沿 x_1 轴的均匀伸长。 $a = k_1/k_2$ 的值表示所取出的断面周边处轧件的宽展。

我们求参数 $\dot{\varepsilon}$ 。在接触表面上分量 v_2 取决于断面 Ω 沿 x_3 轴的位移速度 v 和工具的几何形状:

$$v_2 \Big|_{x_2=h} = -v \operatorname{tg} \psi = v \frac{dh}{dx_3}$$

$$\text{因此 } \dot{\varepsilon} = \frac{v \operatorname{tg} \psi}{h} = -v \frac{d \ln h}{dx_3}$$

对于切应变速率强度有下式

$$H = 2\dot{\varepsilon} \sqrt{1-a+a^2}$$

组成基本方程组。断面 Ω 的面积等于 $\Phi = 4bh$ 。此外, $\xi_{33} = (1-a)\dot{\varepsilon}$, $\partial \xi / \partial a = -\dot{\varepsilon}$ 。

在由矩形上下底组成的围线的负荷区段 γ' 上

$$v_n = -\dot{\varepsilon}h \quad v_n/v = -\operatorname{tg} \psi$$

由此^[4]

$$p \int_{\gamma'} |v_n| d\gamma = 4b\dot{\varepsilon}ep \quad (11-148)$$

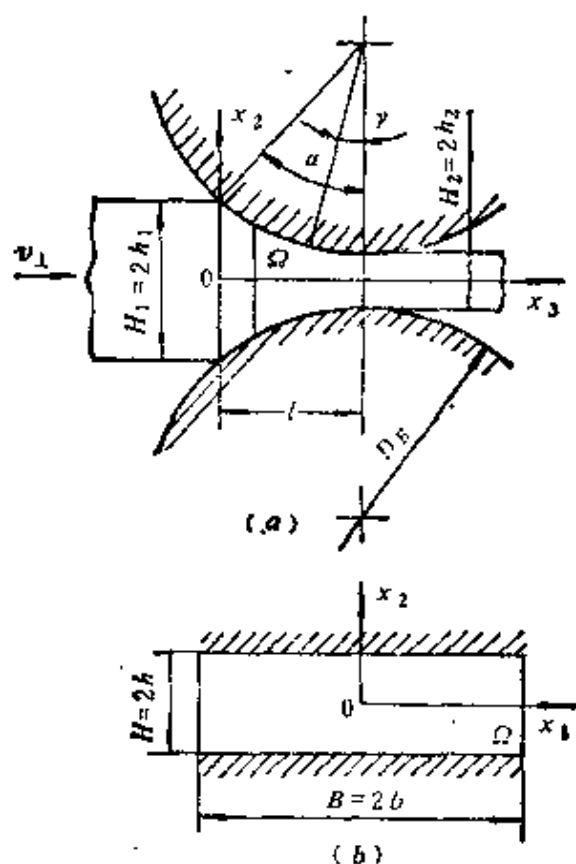


图164 轧件的轧制

和
$$p \int_{r'} \frac{v_2}{v} dy = -4btg\psi p$$

其次，因为沿着 x_1 轴工具的速度分量等于零，所以在接触表面上 $\Delta v_1 = v_1$ ，而 $\Delta v_2 = \Delta v_3 tg\psi$ 。将积分 $\tau \int_{r'} \frac{v_1 \Delta v_1 + v_2 \Delta v_2}{\Delta v} dy$ 表示成两个加数之和。其中第一个给出如下的估算：

$$\begin{aligned} \tau \left| \int_{r'} \frac{v_2 \Delta v_2}{\Delta v} dy \right| &\leq \tau \left| \int_{r'} \frac{v_2 \Delta v_2}{\Delta v} dy \right| \\ &= 4\tau \int_0^b c h t g \psi dx_1 = 4\tau b h e t g \psi \end{aligned}$$

将它和式 (11-148) 的值加以比较，并采用不等式 $\tau \leq f p$ 之后，上述式子和 1 相比时约为 $f t g \psi$ 量级，因其量小而可以忽略。计算第二个积分

$$\int_{\gamma'} \frac{v_1 \Delta v_1}{\Delta v} d\gamma = 4 \int_0^b \frac{a^2 \dot{\varepsilon}^2 x_1^2 dx_1}{\sqrt{a^2 \dot{\varepsilon}^2 x_1^2 + (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) \Delta v_3^2}} =$$

$$= 4bh\dot{\varepsilon} \left[\frac{b}{h} - a \left(\sqrt{1 + v^2} - v^2 \operatorname{Arsh} \left| \frac{1}{v} \right| \right) \right]$$

式中 $v = \Delta v_3 / a\dot{\varepsilon}b$ 。

v 值是纵向相对于工具的滑动速度与位于轧件边上的点的横向位移速度之比。

与此类似，可求出

$$\int_{\gamma'} \frac{\frac{\partial v_1}{\partial a} \Delta v_1}{\Delta v} d\gamma = 4bh\dot{\varepsilon} \left[\frac{b}{h} \left(\sqrt{1 + v^2} - v \operatorname{Arsh} \left| \frac{1}{v} \right| \right) \right]$$

和
$$\int_{\gamma'} \frac{\Delta v_3}{v} d\gamma = v \operatorname{Arsh} \left| \frac{1}{v} \right|$$

我们引入如下的符号： $\eta = \frac{1}{2} f \frac{b}{h}$ ， $F(v) = \sqrt{1 + v^2} - v^2 \operatorname{Arsh} \left| \frac{1}{v} \right|$ ， $\delta = f / \operatorname{tg} \psi$ 。

经过不复杂的变换后，方程组 (11-129) ~ (11-131) 有如下形式：

当 $\tau = f\rho$ 时，

$$q = \frac{1}{\sqrt{3(1-a+a^2)}} \left[(1-2a) - \frac{(1+a)\eta F(v)}{1-\eta F(v)} \right] \quad (11-149)$$

$$p = \frac{1+a}{\sqrt{3(1-a+a^2)}} \frac{1}{1-\eta F(v)} \quad (11-150)$$

$$\frac{dq}{d \ln h} + (1-a)(1-m)q = -p \left(1 - \delta v \operatorname{Arsh} \left| \frac{1}{v} \right| \right) \quad (11-151)$$

当 $\tau = f$ 时，

$$q = \frac{1 - 2a}{\sqrt{3(1 - a + a^2)}} - \eta F(v) \quad (11-152)$$

$$p = \frac{1 + a}{\sqrt{3(1 - a + a^2)}} + \eta F(v) \quad (11-153)$$

$$\frac{dq}{d \ln h} + (1 - a)(1 - m)q = -p + \delta \gamma \text{Arsh} \left| \frac{1}{v} \right| \quad (11-154)$$

并且参数 p 和 q 可用如下关系式联系起来:

$$p + q = \frac{2 - a}{\sqrt{3(1 - a + a^2)}} = k(a)$$

由分析函数 $k(a)$ 曲线图可得出, 在参数 a 位于 $0.00 \sim 0.30$ 的范围时, 近似等式 $dp + dq \approx 0$ 是正确的。在这个间隔内 $k(a)$ 值的变化为 4.5% 。

待定参数 a 表示在断面 Ω 周边上的宽展:

$$\frac{db}{b} = -a \frac{dh}{h} \text{ 或 } d \ln b = -a d \ln h \quad (11-155)$$

由式 (11-149) 和 (11-152) 可得到, 在一般情况下参数 a 是沿变形区长度变化的量, 并取决于 q 、 η 和 $M = \frac{\Delta v}{\epsilon b}$ 。

在图 165 上作出了 $q = 0$ 时函数 $a = f(M, \eta)$ 的曲线图, 而在图 166 上则给出 $M = 0$ 时参数 a 和 p 与 q 的关系。

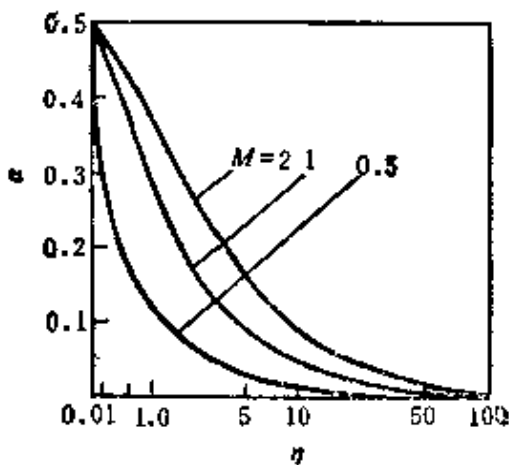


图 165 $q = 0$ 时 a 与 M 和 η 的关系

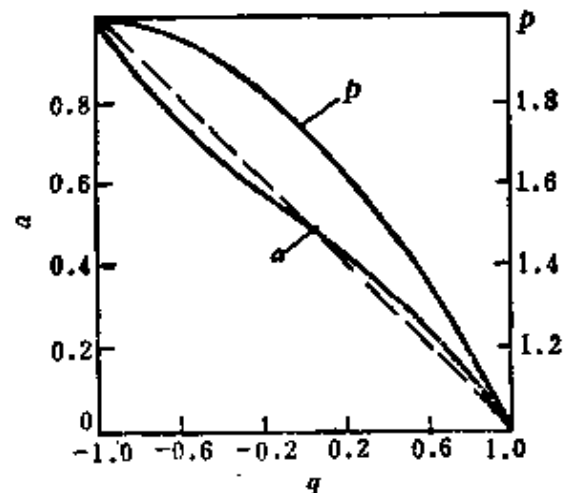


图 166 $M = 0$ 时 a 和 p 同 q 的关系

根据对式 (11-149) 和 (11-152) 的分析和根据曲线图可做出如下的结论:

1) 当 $\eta = \frac{1}{2} f \frac{b}{h} \rightarrow \infty$ 时宽展趋于零 (轧制宽板);

2) 张力 q 使宽展减少. 并且当 $q > 1/\sqrt{3}$ 时轧件开始拉缩;

3) 随着向临界断面 ($\Delta v \rightarrow 0$) 的接近, 有两个相反的因素影响着参数 a 的值: 推力 $q (q < 0)$ 增加引起参数 a 增大, 而随 $M = \frac{\Delta v}{\epsilon b}$ 减小摩擦力在 x_2 轴上的投影增加, 并阻碍宽展。

因而, 可以设想, 在一般轧制条件下, 参数 a 沿变形区长度上变化不大。实验研究也证实了这一点。因此, 除参数 a 外, 引入平均宽展 A 的概念是合理的, A 沿变形区长度上恒定不变, 即 $A = a_{CP} = \text{常数}$ 。

此时由关系式 (11-155) 可得出方程式:

$$\ln \frac{b_2}{b_1} = A \ln \frac{h_1}{h_2}$$

$$\text{或} \quad b_2 = b_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^A \quad (11-156)$$

现来研究无宽展轧制 (轧制宽板), 此时 $\eta = \frac{1}{2} f \frac{b}{h} \rightarrow \infty$ 。

在此情况下 $\nu = \frac{h}{a} \rightarrow \infty$ 和 $\nu \text{Arsh} \left| \frac{1}{\nu} \right| \rightarrow \pm 1$, 因此, 方程组 (11-149) ~ (11-151) 有如下的简单形式:

$$p + q = 1.15 \quad (11-157)$$

$$\frac{dq}{d \ln h} + 1.15 = \pm p \delta \quad (11-158)$$

积分这些关系式可导致轧制理论平面问题的一些已知方程。其中, B.C. 斯米尔诺夫曾对 $m \neq 0$ 的情况进行过详细的研究。

当 $m=0$ 时，由式 (11-157) 和 (11-158) 可得出有名的 A.И.采里柯夫公式：

$$p = \frac{1.15}{\mp \delta} \left[(1 \pm \delta) \left(\frac{h}{h_1} \right)^{1.6} - 1 \right]$$

式中 正号对应前滑区，负号对应后滑区。

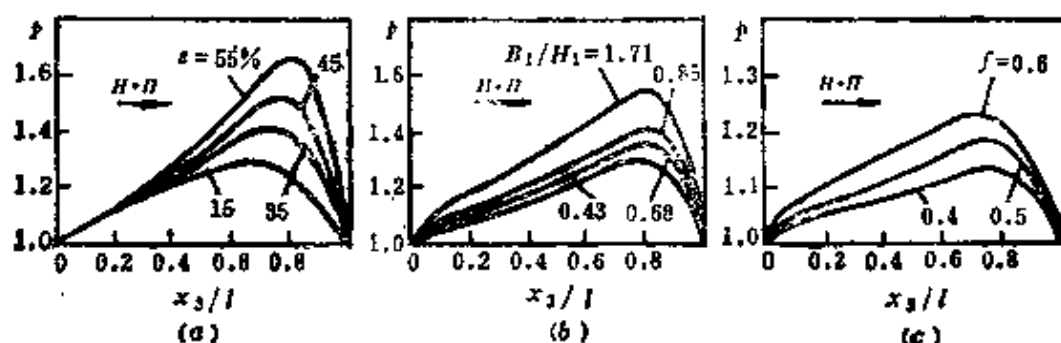


图167 压力 p 的分布图与下列因素的关系
(a) 压下率 $\varepsilon = \Delta H/H_1$; (b) B_1/H_1 ; (c) 系数 f

B.Т.约丹 (Жадан) 在一定边界条件下曾利用 龙格-库塔法完成了对方程组 (11-152), (11-154) 的积分, 这些边界条件是

$$\begin{aligned} x_3 = 0; & \quad h = h_1; \quad b = b_1; \quad q = q_1 = 0; \\ x_3 = l; & \quad h = h_2; \quad q = q_2 = 0 \end{aligned}$$

由于在积分时必须知道速度 v 沿变形区长度上的分布, 所以曾研究了计算方法, 按此算法依次平分步长 Δv 使之满足对于 q 值的边界条件以求得速度 v_0^0 的初始值。此时作为零次近似值取 $v_0 = 0.95 \pi D_B n_B / 60$, $\Delta v = 0.05 v_0$, 式中 D_B ——轧辊直径, n_B ——轧辊每分钟的转数。

在曲线图 167~169 上指出了过程的基本参数对压力 p 的分布、宽展系数 $\beta = B_2/B_1$ 和宽展指数 $\Delta B/\Delta H$ 的影响。在表10-12中按 B.Т.约丹的数据进行了宽展系数的计算值与实验值的比较。

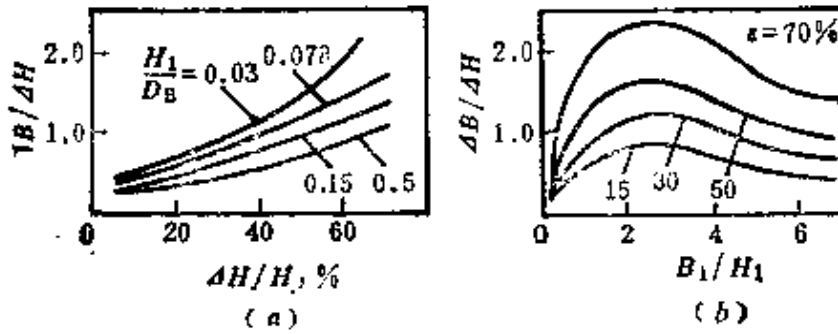


图168 $\Delta B/\Delta H$ 与下列因素的关系
(a) $\Delta H/H_1$ 和 H_1/D_B ; (b) $\epsilon = \Delta H/H_1$ 和 B_1/H_1

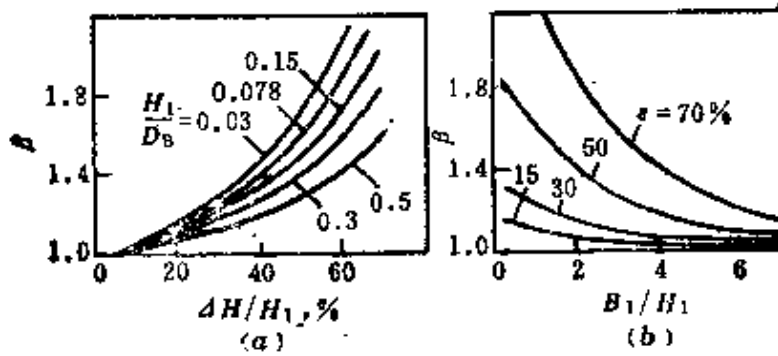


图169 扩展系数 β 与下列因素的关系
(a) $\Delta H/H_1$ 和 H_1/D_B ; (b) $\epsilon = \Delta H/H_1$ 和 B_1/H_1

表10 σ_{T1} 的扩展系数的计算值 β_P 与齐日柯夫 (Чижиков) 的实验数据 β 的比较

$\frac{H_1}{D_B}$	$\frac{B_1}{H_1}$	$\frac{\Delta H}{H_1}(\%)$	β	β_P	$\Delta(\%)$
0.031	2.99	25.6	1.083	1.099	-1.47
0.039	2.44	38.3	1.176	1.199	-1.99
0.044	2.15	45.2	1.234	1.268	-2.79
0.055	1.72	55.2	1.323	1.397	-5.61
0.093	1.00	5.0	1.010	1.020	-1.02
		15.0	1.066	1.074	-0.73
		35.0	1.262	1.224	3.02
		45.0	1.378	1.327	3.75
		55.1	1.507	1.455	3.46
		65.1	1.638	1.614	1.48
		72.4	1.753	1.714	2.25
0.117	0.79	15.0	1.070	1.078	-0.68
0.070	1.33	25.1	1.129	1.135	-0.58
0.050	1.85	35.0	1.186	1.195	-0.76
0.039	2.39	45.2	1.244	1.261	-1.35
0.032	2.91	55.1	1.285	1.305	-1.53
0.027	3.46	65.4	1.378	1.371	0.51

表11 45#钢宽展系数的计算值 β_P 与A.И.格里什柯夫
(Гришнов) 的实验数据 β 的比较

B_1/H_1	β	β_P	Δ (%)	B_1/H_1	β	β_P	Δ (%)
$H_1/D_B = 0,084; \Delta H/H_1 = 15,0\%$				$H_1/D_B = 0,084; \Delta H/H_1 = 42,5\%$			
0,67	1,085	1,084	0,07	0,67	1,400	1,346	3,86
1,00	1,060	1,076	-1,49	1,00	1,340	1,300	2,99
1,33	1,035	1,066	-2,96	1,30	1,262	1,262	-0,05
1,60	1,025	1,060	-3,39	1,60	1,200	1,235	-2,88
2,00	1,013	1,050	-3,61				
3,00	1,006	1,031	-2,54				

表12 12X18 H10T 钢宽展系数的计算值 β_P 与B.T.
约丹的实验数据 β 的比较

H_1 (mm)	B_1 (mm)	H_1/D_B	B_1/H_1	$\Delta H/H$ (%)	β	β_P	Δ (%)
13,9	14,0	0,060	1,007	10,8	1,010	1,054	-4,39
13,9	14,0	0,060	1,007	50,8	1,671	1,585	5,16
13,9	9,8	0,060	0,705	12,2	1,055	1,071	-1,50
13,9	9,8	0,060	0,705	49,6	1,533	1,518	1,00
13,9	28,0	0,060	2,014	46,8	1,228	1,260	-2,60
10,2	7,0	0,044	0,686	53,9	1,794	0,684	6,14
10,2	20,3	0,044	1,990	12,7	1,020	1,049	2,85
10,2	20,0	0,044	1,961	52,9	1,367	1,373	-0,44
10,2	7,1	0,044	0,696	13,7	1,053	1,088	-3,32
10,3	30,1	0,045	2,922	51,5	1,173	1,235	-5,30
10,3	30,3	0,045	2,942	13,6	1,021	1,033	-1,18
8,1	40,1	0,035	4,901	48,1	1,100	1,140	-3,64
8,1	40,0	0,035	4,938	9,9	1,005	1,010	-0,49

思 考 题

1. 什么是流管？它和流管元有什么区别？
2. 在什么样的流动情况下，流管的表面不随时间而变？
3. 速度分量 v_N 和 v_n 之间有什么差别？
4. 什么是平断面假说？它是否可完全确定流管中的流动？

5. 在缓变流流动理论中采用什么样的假定?
6. 对于近似求解三维问题, 为什么一个平衡方程(11-128)是不够的?
7. 参数 p , q , τ 有什么样的意义? 它们的量纲是什么?
8. 根据什么说方程组 (11-129)~(11-132) 对于变量 p , q , τ 是线性的?
9. 对热传导方程积分时可能采用什么样的简化?

11.9 在电子计算机上塑性流动过程的数学模拟*

11.9.1 关于数学模拟

在研究连续介质的流变性质以及讲述边值问题的提法和求解时, 我们曾不只一次地利用了作为某个对象的模型的概念, 在这个对象上可近似地再现物理现象或过程的最重要的特征以便研究它。

模拟是科学抽象的强有力的工具。划分为具体模拟和抽象模拟。

在具体模拟时, 用再现“原物”的主要几何学、物理学、动力学和函数特征的物理模型来进行过程的研究。如果模型和被模拟的对象有同一物理性质, 那末就称之为物理上的具体模拟或简称为物理模拟。

在实验轧机上轧制金属锭和在试验机上拉拔型材等等都属于这种类型的模拟。与实物实验相比, 物理模拟的优点在于实现模拟过程的条件可以与原始过程所固有的条件大不相同以及可以根据研究的方便性和简单性来进行选择。必须着重指出, 不能无条件任意选择模拟条件。原始过程和模型过程之间应当保持某些相似关系, 此关系可由现象物理本质的规律性得出, 并要保证可以利用靠模拟方法得到的资料去估计原始过程的性质。

通过考察具有不同物理内容但可用同一数学关系描述的现象来研究各种过程的方法, 可理解为数学上的具体模拟。为达到此目的最简单情况是利用机械的、电力的和其它的现象之间已知的相似性。

在均匀的各向同性体内，电势 u 的分布和温度 ϑ 的稳定分布或理想不可压缩液体运动时势 φ 的稳定分布之间（所谓电液动力学模拟——缩写为 $\Theta\Gamma\Pi A$ ）的相似性就是这种相似关系的例子。在所有这些情况下，可用如下的拉普拉斯方程来描绘现象：

$$\nabla^2 u = 0, \nabla^2 \vartheta = 0, \nabla^2 \varphi = 0$$

因此，连续介质运动或热的传播的规律性，可用电模型来研究。

不仅可能借助于物理对象，而且也可能借助于抽象对象来实现模拟。其中包括描绘模拟对象特征的数学式和图表形式的模型——曲线图、图表、插图以及电子计算机的算法框图和计算程序。这样，我们可得出广义数学模拟的概念——借助于数学符号来近似地描述物理现象或过程的最重要特征。数学模拟的现代型式就是在通用的或专业化的数字电子计算机上进行这个模拟。

数学模拟是完善和有效的模拟方法，并为研究和优化工艺过程时采用强有力的数学分析方法开辟了道路。

金属塑性加工时所发生现象的复杂特点，使得必须建立考虑到所研究过程许多方面的复杂而精确的数学模型。描绘和优化金属压力加工过程时所采用的数学模型的完善程度以及用于研究这些模型的数学机器，在某种程度上可表征作为科学的金属压力加工理论的发展水平。

11.9.2 数学模型及其算法

塑性变形过程的数学模型是这个过程的近似描述，这种描述使得能够求出塑性流动域内的速度、变形、温度和应力的分布，计算金属破坏的概率以及其变形的优化条件。采用虚速度原理求解提出的边值问题就是数学模型的基础。

数学模型可以以电子计算机计算方法的形式拟制出来。所以计算方法可以理解为完成某一计算过程的精确的指令，这个计算过程可以通过有限的步数，或者得到问题的解，或者得出不可能求解的结论。

在制订计算方法时通常采用框图，也就是计算方法的图解表

示。求解问题的单个阶段——在框图中把框画成简单的几何外形。各框用表示单个阶段间的关系的箭头来联结。在框内指明该计算阶段的简要内容或完成这些计算的公式。

例题11.7 算法及其框图

编出计算二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的算法框图

解 按如下方程求方程的根

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (11-159)$$

令 $D = b^2 - 4ac$ 。如果 $D \geq 0$ ，则实根 x_1, x_2 按公式 (11-159) 计算。如果 $D < 0$ ，则必须算出共轭复根 $x_{1,2} = A \pm iB$ ，式中 $A = -b/2a$ ， $B = \sqrt{|D|}/2a$ 。

我们约定，共轭复根时机器开始应当打上复根的标记（例如，打零），然后打上根的实部，而后打虚部的系数。

对于所研究的问题，其算法框图如图170所示。

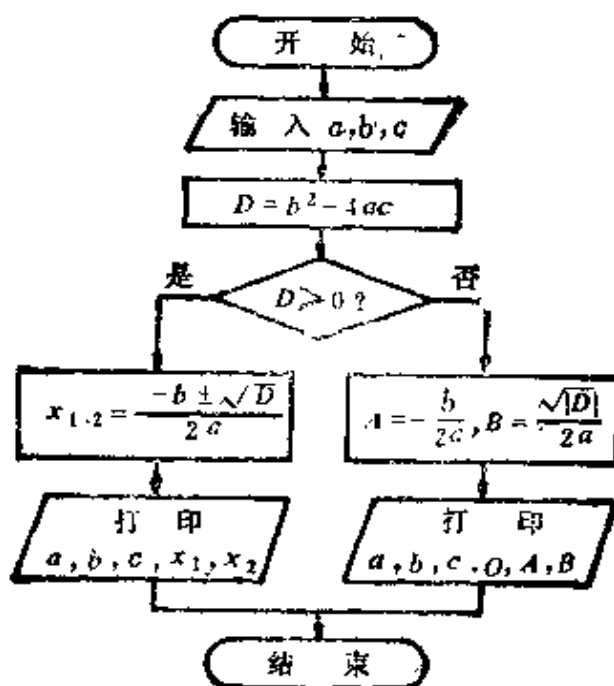


图170 例题11.7的图示

为了实现算法须编制程序，即发给机器的一连串指令。此时在电子计算机上完成的每个基本运算，对应于指明运算形式的专

门指令和完成这个运算的数值。所有的数字资料以及程序本身都存入机器的存贮装置中。也向这里存入标准子程序，它们用于计算三角函数、求根、由十进位数值变换为二进位计数以及相反的变换等等。

实现算法时，如果必须进行标准计算，那就转向标准的子程序，然后借助相应的指令重新返回执行实现算法的程序。

因为直接编制程序是工作量很大的，所以在求解工程问题时通常采用算法语言——用句法结构联系起来的符号和术语，它们包含为了实现算法需要在什么样的条件下以什么样的次序来执行何种运算的详细信息。算法语言可借助于专门的程序——编译器，把算法记述，自动编译成任何计算机都已具备的机器程序。

为了描述计算过程，目前最为普遍的算法语言是ALGOL-60和FORTRAN。

11.9.3 数学模型的结构

求解边值问题可归结为如下的基本阶段：

1) 进行坐标变换，并把域 D 映射到其边界与速度场无关的经典域 E 上。同时引入方便的曲线正交坐标系使域 D 的边界是由分段光滑的坐标面所组成。

2) 在域 E 内作网格，并在它的结点上把计算结果（拉梅系数、温度、应力等等）进行随后的叠加和平滑[●]。

3) 对理想的塑性介质作可行的速度场 \vec{v}^0 。用全功率泛函最小化的方法求出塑性流动域的边界。

4) 按公式 (3-72)： $\vec{v}^k = \nabla \Psi^k \times \nabla \Psi$ ，借助修正流函数作出完备的线性无关的坐标函数系统 \vec{v}^k 。

5) 把速度场的第 m 次逼近表示成式 (11-74) 的形式。

6) 按10.6节所述的方法对方程式 (11-76) 线性化，并建立迭代过程，其中包括：

①求解线性化了的方程 (11-76) 时要考虑到： $g = T/H$

●在10.9节进行过平滑操作的叙述。——译者

和 e_i 是前一次迭代时在网络结点上求出的坐标的已知函数（利用可行解作为零次逼近）；

②算出内部和表面的热源，用局部一维追赶法求解热传导方程；

③划分出轨迹的“线束”并在网络结点上计算描绘质点形变历史的参数（变形程度、切应力强度、裂隙等等）；

④使塑性流动域的边界精确化；

⑤分析迭代过程的收敛性。

7) 分析速度场的第 m 次逼近序列的收敛性。

8) 当满足收敛条件时，在网络的结点上计算应力和断裂概率。

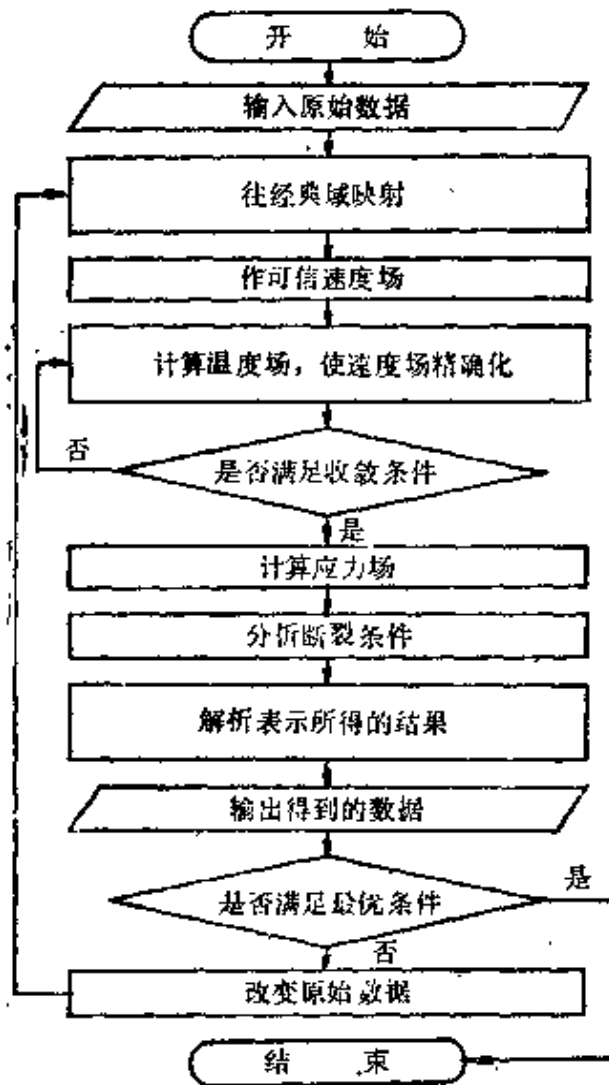


图171 综合数学模型的算法框图

9) 打印输出或显示未知的信息。

10) 改变边值条件, 并返回到第一项。

11) 分析工艺过程的主要参数对应力-应变状态和断裂条件的影响。

算法框图如图171所示。

11.9.4 算法的实现

对于平面、轴对称和三维定常塑性流动, 所述的计算方法用算法语言 ALGOL-60、FORTRAN 和 PL以综合程序的形式实现。不定常塑性变形过程的求解方法也已经研究过, 并已建立了模型。

采用上述模型已研究过挤压和切削金属、滚压齿轮、拉拔和轧制复杂形状的型材时金属的流动过程。

体积不可逆变化的粉末材料的塑性变形的数学模型, 可用以计算许多金属压力加工工艺过程中的密度、温度、变形程度和应变的分布。在作者指导下工作的一批研究生完成了这些工作。

11.9.5 平面流动的模拟

我们简要地叙述一下平面的、轴对称的和三维的塑性流动模型的算法, 并将主要注意力, 放到定常的和准定常的(不稳定温度场)过程。

在第10章已经详细研究了理想塑性介质的平面流动。对于具有更复杂流变性质的介质, 模型的计算方法可归结为如下几个阶段:

1) 借助于复势 $W(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$, 并利用将变量 (φ, ψ) 作为曲线正交坐标把流动域(曲线带状域 D) 保角映射到经典域——直线带状域 E 上。

2) 在域 E 内划分出包括塑性流动域的矩形 E_1 。在 E_1 内作网格。在网格的结点上计算和平滑拉梅系数 $h = |z'(W)|$ 以及在 z 平面上结点 (x_1, x_2) 的坐标。

3) 借助于复势作可行的速度场 $\vec{v}^0 = \overline{W'(z)}$ 。

对于理想塑性介质利用全功率泛函(式10-57)最小化的方

法, 求出塑性流动域边界的待定区段。

4) 把修正的流函数 $\Psi(\varphi, \psi)$ 表示成按某个完备的线性无关的函数系统展开的级数的截断式

$$\Psi^{(n)}(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^m a_k \Psi^k(\varphi, \psi) \quad (\text{在域 } E_1 \text{ 边界上的函数 } \Psi^k$$

和在边界的垂直区段上它们对 φ 的导数应当等于零)。

5) 按如下的公式作速度场的第 m 次逼近:

$$v_{\varphi}^{(m)} = v_{\varphi}^0 + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial \Psi^k}{\partial \psi}, \quad v_{\psi}^{(m)} = v_{\psi}^0 - \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial \Psi^k}{\partial \varphi}.$$

6) 建立第十章第六节所述的迭代过程, 包括关于系数 a_k 解非线性方程

$$\iint_{E_1} \left[\frac{1}{2} \frac{T}{H} \frac{\partial H^2}{\partial a_k} - h^2 d\varphi d\psi + \int_{\varphi}^A \left[\tau^+ \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right)^+ + \right. \right. \\ \left. \left. + \tau^- \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right)^- \right] d\varphi = 0 \right. \\ (k=1, 2, \dots, m)$$

用有限差分法对变换为变量 (φ, ψ) 的热传导方程进行积分, 计算描绘质点形变历史的参数, 使塑性流动域的边界精确化。

7) 分析速度场第 n 次逼近的序列的收敛性。

8) 在结点上计算应力、应力状态的刚性系数, 分析破坏条件。

9) 打印输出或显示计算结果。

当求解非定常问题时, 要对上述算法作某些改变。利用矩形、单位圆或圆环 (对双连域) 作为经典域。因为流动域的几何形状不断改变, 所以要对一连串的时间间隔 $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_m$ 用几个阶段来完成求解。

满足非定常运动学边界条件 ($v_n \neq 0$) 和不可压缩性条件的速度场选做可行解。按一般方法完成解的精确化。

11.9.6 轴对称流动的模拟

研究在曲线带 D 绕 x_1 轴回转而成的 (图172) 域中塑性介质

的轴对称流动。我们引入正交回转-对称曲线坐标系 (φ, ψ, ω) 此坐标系是由曲线带保角映射到宽为 B 的 $W = \varphi + i\psi$ 平面内的直线带 E 上而产生的, 结果 $x_1 = x_1(\varphi, \psi)$, $x_2 = x_2(\varphi, \psi)$ 。

这里 B ——在带状域 D 内平面有势流动的通量值, 拉梅系数为 $H_\varphi = H_\psi = |z'(W)| = h(\varphi, \psi)$, $H_\omega = x_2(\varphi, \psi)$ 。

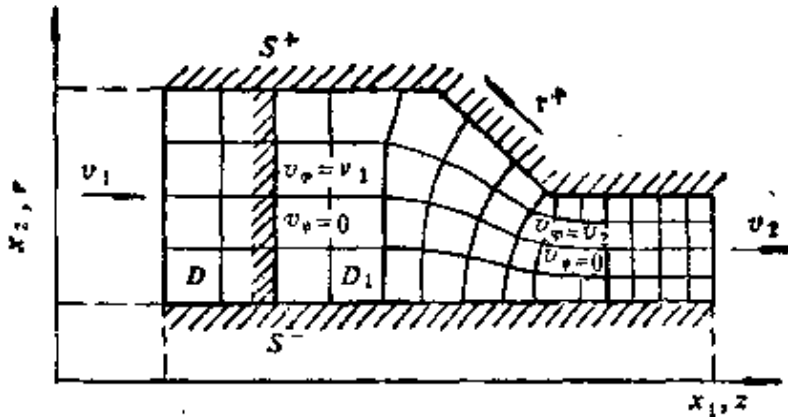


图172 轴对称流动

轴对称流动的速度矢量分量 $v_\varphi, v_\psi, v_\omega \equiv 0$, 使得能够利用这些分量算出按式 (3-60) 和 (3-61) 用如下关系式确定的应变速率,

$$\xi_{\phi\phi} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \psi} v_\phi \right)$$

$$\xi_{\psi\psi} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial \ln h}{\partial \varphi} v_\psi \right)$$

$$\xi_{\omega\omega} = \frac{1}{x_2 h} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} v_\varphi + \frac{\partial x_2}{\partial \psi} v_\psi \right)$$

$$\xi_{\varphi\psi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v_\psi}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{v_\phi}{h} \right) \right]$$

设 $\Psi(\varphi, \psi)$ ——轴对称流动的流函数 (见第 3 章例题 3.6)。

速度矢量分量等于: $v_\varphi = \frac{1}{x_2 h} \frac{\partial \Psi}{\partial \psi}$, $v_\psi = \frac{1}{x_2 h} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$ 。

显然，当任意选择流函数时，将恒满足不可压缩性条件：

$$\xi_{\varphi\varphi} + \xi_{\psi\psi} + \xi_{\omega\omega} = 0。$$

我们分离出域 E_1 —— 在平面 ω 上并包括塑性流动域的矩形 ($0 < \varphi < A$, $0 < \psi < B$) (图173)。在域 E_1 之外，会发生连续介质的均匀直线运动。此时，在域的边界上应当满足如下的运动学条件： $v_\varphi(0, \psi) = v_1$, $v_\varphi(A, \psi) = v_2$, $v_\psi(0, \psi) = v_\psi(A, \psi) = v_\psi(\varphi, 0) = v_\psi(\varphi, B) = 0$ ，而函数 $\Psi(\varphi, \psi)$ 应满足边界条件：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi=A}} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\psi=0 \\ \psi=B}} = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} &= -\frac{2q}{B} \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\psi}{B} \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} \right) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \Big|_{\psi=B} &= -\frac{2q}{B} \left(\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} + \frac{\psi}{B} \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11-160)$$

式中 $\lambda_1 = r_1/R_1$, $\lambda_2 = r_2/R_2$; $2\pi q$ —— 轴对称流动时在圆柱域内连续介质的通量。

我们把流函数表示成两个函数的总和的形式：

$$\Psi = \Psi^0 + \Psi^1$$

式中 Ψ^0 —— 可行解的流函数； Ψ^1 —— 修正的流函数。

我们选择流函数 Ψ^0 ，使它满足边界条件式 (11-160)，特别是，如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (流动域是实体圆柱)，则函数 Ψ^0 有简单的形式：

$$\Psi^0 = q\psi^2/B^2$$

此时， $v_\psi^0 = 0$ ，并且轴对称问题可行解的流线族与平面有势流动的流线族一致。

和平面流动情况一样，修正流函数应当满足齐次边界条件：

$$\Psi^1 \Big|_{\gamma_1} = \frac{\partial \Psi^1}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\psi=0 \\ \psi=B}} = 0$$

这里 γ_1 —— 域 E_1 的边界。

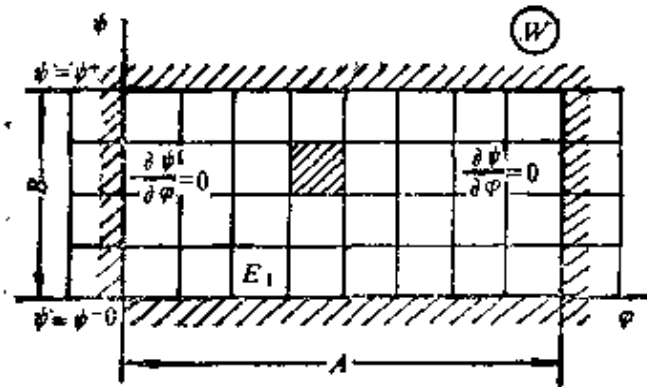


图173 更准确说明的域

把流函数表示成按某个完备的线性无关的函数系统展开的级数截断式 $\Psi^k(\varphi, \psi)$ ，我们便可由如下的方程组求出展开系数 a_k ：

$$\iint_{E_1} \frac{1}{2} \frac{T}{H} \frac{\partial H^2}{\partial a_k} - x_2 h d\varphi d\psi + \int_0^A \left[\tau^+ \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right)^+ + \tau^- \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right)^- \right] d\varphi = 0 \quad (k=1, \dots, m) \quad (11-161)$$

用迭代法求解线性化了的方程组 (11-161)，并在相应的初始和边界条件下把变换为变量 (φ, ψ) 的如下热传导方程的数值积分，包括在迭代循环中去：

$$h^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \psi^2} \right) + \left(\kappa \frac{\partial \ln x_2}{\partial \varphi} - h v_\varphi \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \left(\kappa \frac{\partial \ln x_2}{\partial \psi} - h v_\psi \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} + \nu T H \quad (11-162)$$

其余的算法与前面所述的平面流动模型的算法（其中包括非定常模型的算法）的差别很小。

11.9.7 三维流动的模拟①

我们来研究塑性介质定常的三维流动（见图159）。以后将把

① 根据同 A. Я. 古恩一起完成的研究成果。

流动域 D 称为“流管”（见3.1节），而把包围域 D 的分段光滑的表面 S 称为流管的表面。

将假设，在流管的入口和出口处，连续介质的运动是均匀直线运动，它对应于介质作为绝对刚体与固定方向 A 平行的位移。

我们引入固定在观察者空间的笛卡儿坐标系 x_1, x_2, x_3 ， x_3 轴的方向与矢量 \vec{A} 平行（见图159）。

设表面 S 由 $m+1$ 连表面组成，即 $S = S_0 + S_1 + \dots + S_m$ 。

具有与 x_3 轴垂直的平面 $C(x_3 = c)$ 的流管断面 D ，在一般情况下是有界的多连域 Ω 。域 Ω 的边界 γ 是由有限数目的分段光滑的封闭围线 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ 组成，这些封闭围线没有公共点，并且 γ_0 包含其余所有围线。

当 $k=0$ 时，边界是由一个封闭围线 $\gamma = \gamma_0$ 组成，并且域 Ω 是单连域。

在一般情况下，它也是 $(k+1)$ 连域。域 Ω 在观察者的左边时绕行围线的方向取正的；围线的法线 \vec{n} 和切线 \vec{S} 的相应取向表示在图上。

因为域 Ω 的形状取决于平面 C 的位置，所以边界 γ 包含在单参数的曲线族 $\gamma = \gamma(x_3)$ 中。

断面 Ω 的坐标 x_3 的变分—— δx_3 将与边界质点的法向位移 δn 相对应，当位移的方向与法向矢量 \vec{n} 一致时（见图160）此位移是正的。此时域 Ω 的面积 Φ 的变化为

$$\delta\Phi = \delta \iint_{\Omega} dx_1 dx_2 = \int_{\gamma} \delta n d\gamma$$

具有分量 v_i 的速度场 \vec{v} 满足不可压缩条件 $\text{div } \vec{v} = 0$ ；在表面 S 上法向速度分量 v_N 变为零（ N —— S 的外法线的单位矢量）。

在塑性流动区的边界上应当满足同刚性区连续连接的条件：

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = B/\Phi = \text{常数},$$

式中 B ——在域 D 内连续介质的通量。

流函数 我们把速度场表示成式 (3-72)；

$$\vec{v} = \nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2 \quad (11-163)$$

式中 $\Psi_1 = \Psi_1(x_1, x_2, x_3)$ 和 $\Psi_2 = \Psi_2(x_1, x_2, x_3)$ —— 三维流动的流函数。与质点轨迹重合的流线（定常的流动）是两族流面的交线：

$$\Psi_1(x_1, x_2, x_3) = \text{常数} \text{ 和 } \Psi_2(x_1, x_2, x_3) = \text{常数} \quad (11-164)$$

假设横断面 Ω 是双连域，我们来研究函数 Ψ_1 和 Ψ_2 满足的条件，在此情况下边界 S 由两个分段光滑的连接面 S_0 和 S_1 组成。将假定它们包含在其中的一个流面族中（例如在 $\Psi_1 = \text{常数}$ 的族中）。在单连域中的流动是这个解析的特殊情况。当边界 S 是由两族流面式 (11-164) 组成时，其处理方法将单独进行研究。既然，速度分量可由公式（见关系式 3-73） $v_3 = D(\Psi_1, \Psi_2) / D(x_1, x_2)$ 求出，那么在刚性移动域内函数 Ψ_1 和 Ψ_2 不应当与变量 x_3 有关，而雅可比行列式 $D(\Psi_1, \Psi_2) / D(x_1, x_2)$ 恒等于常数值 B/Φ 。

此外，还应满足把流函数增量同域 D 中连续介质的通量联系起来正规化条件式 (3-74)。

11.9.8 在断面 Ω 上的曲线网

我们回到断面 $\Omega(x_3 = \text{常数})$ 上来。与这个断面相交时，流面形成曲线网

$$\Psi_1(x_1, x_2) = \text{常数}, \Psi_2(x_1, x_2) = \text{常数} \quad (11-165)$$

若沿着 $\Psi_2 = \text{常数}$ 的一条流线划出一个切口，使流函数作正规化：在域 Ω 内围线 γ_1 上流函数 Ψ_1 取零值和在外围线 γ_0 上等于 B 。又令在切口的上壁上 Ψ_2 等于零，而在下壁上等于 1（图 174）。

在 Ω 上参数 Ψ_1 和 Ψ_2 的变化域在平面 (Ψ_1, Ψ_2) 上是底为 B 和高度等于 1 的矩形，通过断面 Ω 流过的连续介质的通量等于矩形的面积（见 3.2 节）。

容易看出，按公式 (11-163) 作流函数 $\Psi_1(x_1, x_2, x_3)$ ， $\Psi_2(x_1, x_2, x_3)$ 的问题，也就是作速度场的问题，与当 x_3 取值为由 1 到 l 时对每个断面 $\Omega(x_3)$ 作曲线网式 (11-165) 等价。

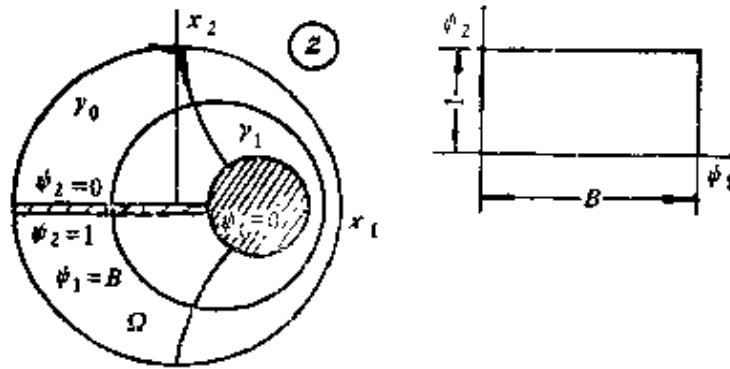


图174 流动域

实际上, 知道通过断面 $\Omega(x_3)$ 任意点 $M(x_1, x_2)$ 的流线式 (11-165), 就可建立关系式 $\Psi_1(x_1, x_2, x_3)$ 和 $\Psi_2(x_1, x_2, x_3)$, 也就可以求出流函数。

实验是作曲线网式 (11-165) 的可能方法之一。如果在未变形的坯料上 (在介质的刚性移动域) 在 $t=0$ 时刻, 引入用如下方程同质点的初始坐标 X_1, X_2, X_3 联系起来的拉格朗日曲线坐标 Ψ_1, Ψ_2, X_3 :

$$\Psi_1 = \Psi_1(X_1, X_2), \quad \Psi_2 = \Psi_2(X_1, X_2), \quad X_3 = X_3, \quad (11-166)$$

那末, 关系式 (11-165) 将是固定在连续介质上并与它一起变形的坐标面 $\Psi_1 = \text{常数}$ 和 $\Psi_2 = \text{常数}$ 与平面 $x_3 = \text{常数}$ 的交线 (见 3.1 节)。

理论上求出函数 Ψ_1 和 Ψ_2 之后, 可以把相应的网格式 (11-166) 同实验网格进行比较, 以便分析理论解的误差。

11.9.9 保角映射

借助于解析函数 $z = z(\zeta)$, 把域 Ω 保角映射成 $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\omega}$ (图175) 上的圆环 $a < |\zeta| < 1$ 。由于域 Ω 的形状沿 x_3 轴连续变化, 所以这个映射包含在单参数的解析函数族 $z = z(\zeta, x_3)$ 中, 此解析函数用坐标变换 $(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (r, \omega, x_3)$ 实现流动域 D 映射到中空圆柱 $\Delta(a < r < 1, 0 \leq \omega < 2\pi, 0 < x_3 < l)$ 上。

在平面域 Ω 内, 变量 (r, ω) 是正交的曲线坐标

$$x_1 = x_1(r, \omega), \quad x_2 = x_2(r, \omega) \quad (11-167)$$

并具有拉梅系数

$$H_r = |z'(w)| = h(r, \omega); \quad H_\omega = rh(r, \omega)。$$

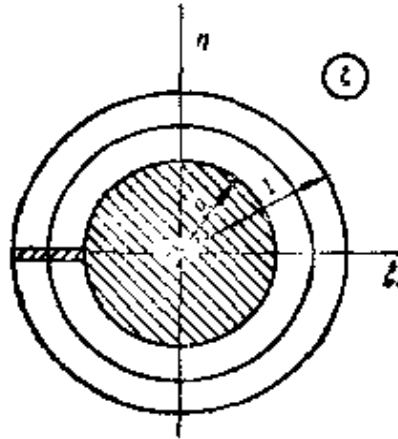


图175 把断面 Ω 映射到圆环上

同时，在域 D 内的曲线坐标 (r, ω, x_3) 在一般情况下不是正交的，并且 $a = a(x_3)$ 。

我们选出一类缓变流流动，对于这类流动，当计算体积或表面积分以及计算温度场时，可以在一般计算误差范围内把这个坐标系看作是“准正交”的（也就是接近正交系）。如轧制或拉拔复杂形状的型材过程时，金属的流动就属于上述这类流动。

11.9.10 可行速度场

如同建立任何运动许可场一样，我们建立满足边界 S 的绕流条件 $(v_N = 0)$ 和不可压缩性条件的可行速度场 \vec{v}^0 。补充要求速度场 \vec{v}^0 满足平断面假定： $v_3 = B/\Phi = f(x_3)$ 。

这就使得能自动满足和工件刚性部分的连接条件。借助于两个“可行”的流函数 $\Psi_1^0(x_1, x_2, x_3)$ 和 $\Psi_2^0(x_1, x_2, x_3)$ 按公式 (11-163) 作速度场：

$$\vec{v}^0 = \nabla \Psi_1^0 \times \nabla \Psi_2^0$$

函数 Ψ_1^0 和 Ψ_2^0 可用不同方法给出。例如取 $\Psi_1^0 = R(r, \omega)$ ， $\Psi_2^0 = G(\omega)$ 是方便的，这样一来把 $\Psi_2^0 = \text{常数}$ 的线包括在曲线 $\omega = \text{常数}$ 的族中，并把如下的约束加到 R 和 G 上：

$$\frac{D(R, G)}{D(x_1, x_2)} = \frac{B}{\Phi} \quad (11-168)$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \omega} > 0, \quad R(a, \omega) = 0, \quad R(1, \omega) = B,$$

$$G(0) = 0, \quad G(2\pi) = 1.$$

十分明显, 这些约束可由实行正规化和采用平断面假定的流函数的一般性质得出。

我们用如下的方式写出包括在方程式 (11-168) 中的雅可比行列式:

$$\begin{aligned} \frac{D(R, G)}{D(x_1, x_2)} &= \frac{D(R, G)}{D(r, \omega)} \frac{D(r, \omega)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(x_1, x_2)} \\ &= \frac{D(R, G)}{D(r, \omega)} \cdot \frac{1}{h^2 r} \end{aligned}$$

由此

$$\frac{D(R, G)}{D(r, \omega)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial r} & \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ 0 & G'(\omega) \end{vmatrix} = \frac{B}{\Phi} h^2 r$$

在 $R(a, \omega) = 0$ 的条件下, 展开行列式和对 r 完成积分, 得到:

$$R(r, \omega) = \frac{B}{\Phi G'(\omega)} \int_a^r h^2(r, \omega) r dr$$

其次, 由 $R(1, \omega) = B$ 的条件, 有

$$G'(\omega) = \frac{1}{\Phi} \int_a^1 h^2(r, \omega) r dr \quad (11-169)$$

这给出

$$\Psi_1^0 = R(r, \omega) = \frac{B \int_0^r h^2(r, \omega) r dr}{\int_0^1 h^2(r, \omega) r dr} \quad (11-170)$$

在 $G(0) = 0$ 的条件下, 对方程式 (11-169) 进行积分, 得到

$$\Psi_2^0 = G(\omega) = \frac{1}{\Phi} \int_0^\omega \int_0^1 h^2(r, \omega) r dr \quad (11-171)$$

因为当 $\omega = 2\pi$ 时二重积分等于 Φ ，所以满足 $G(2\pi) = 1$ 的条件。

应当指出，变量 x_3 显然不包括在式 (11-170) 和 (11-171) 中。流函数 Ψ_1^0 和 Ψ_2^0 与 x_3 的关系表现为这个变量在映射式

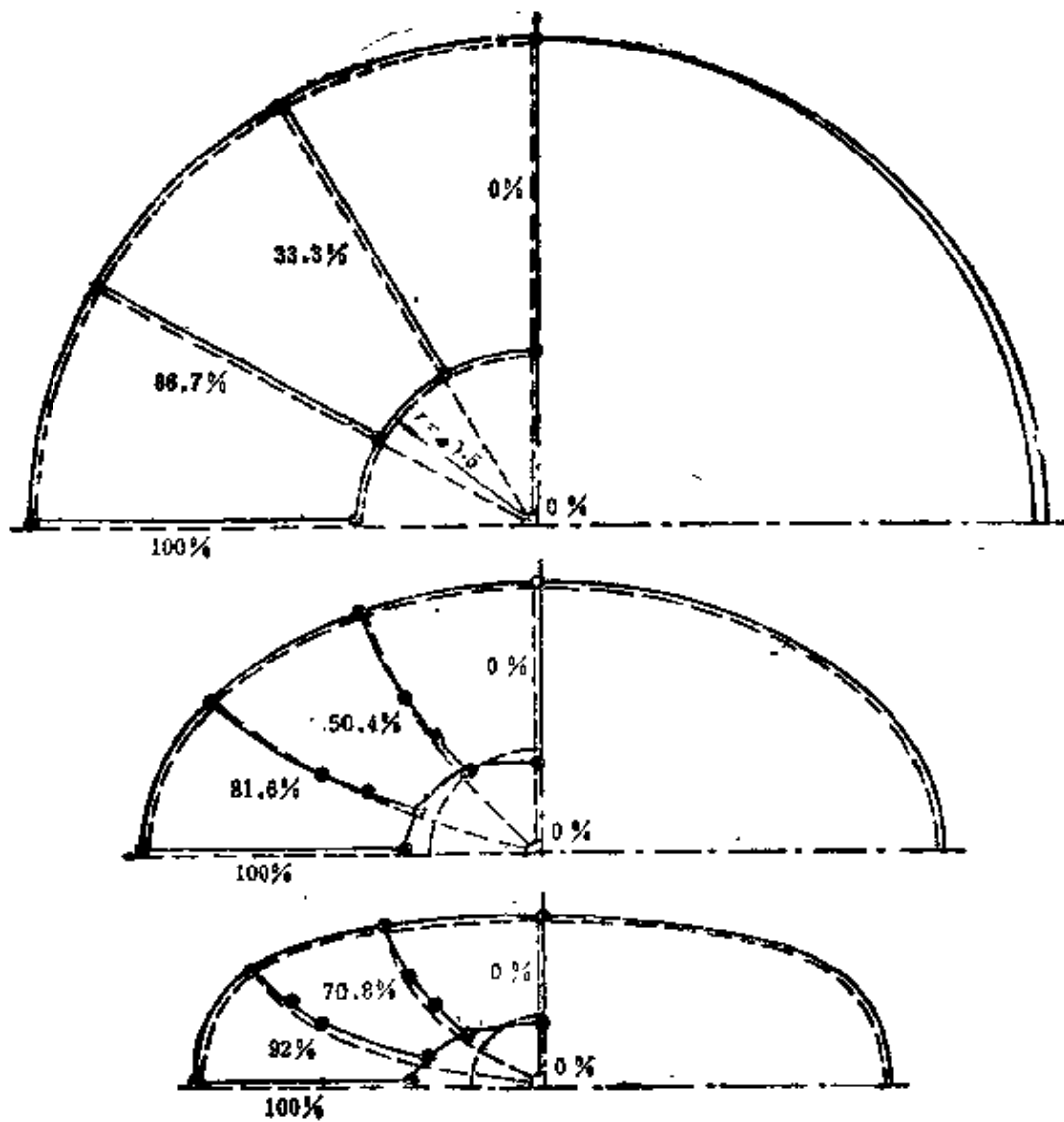
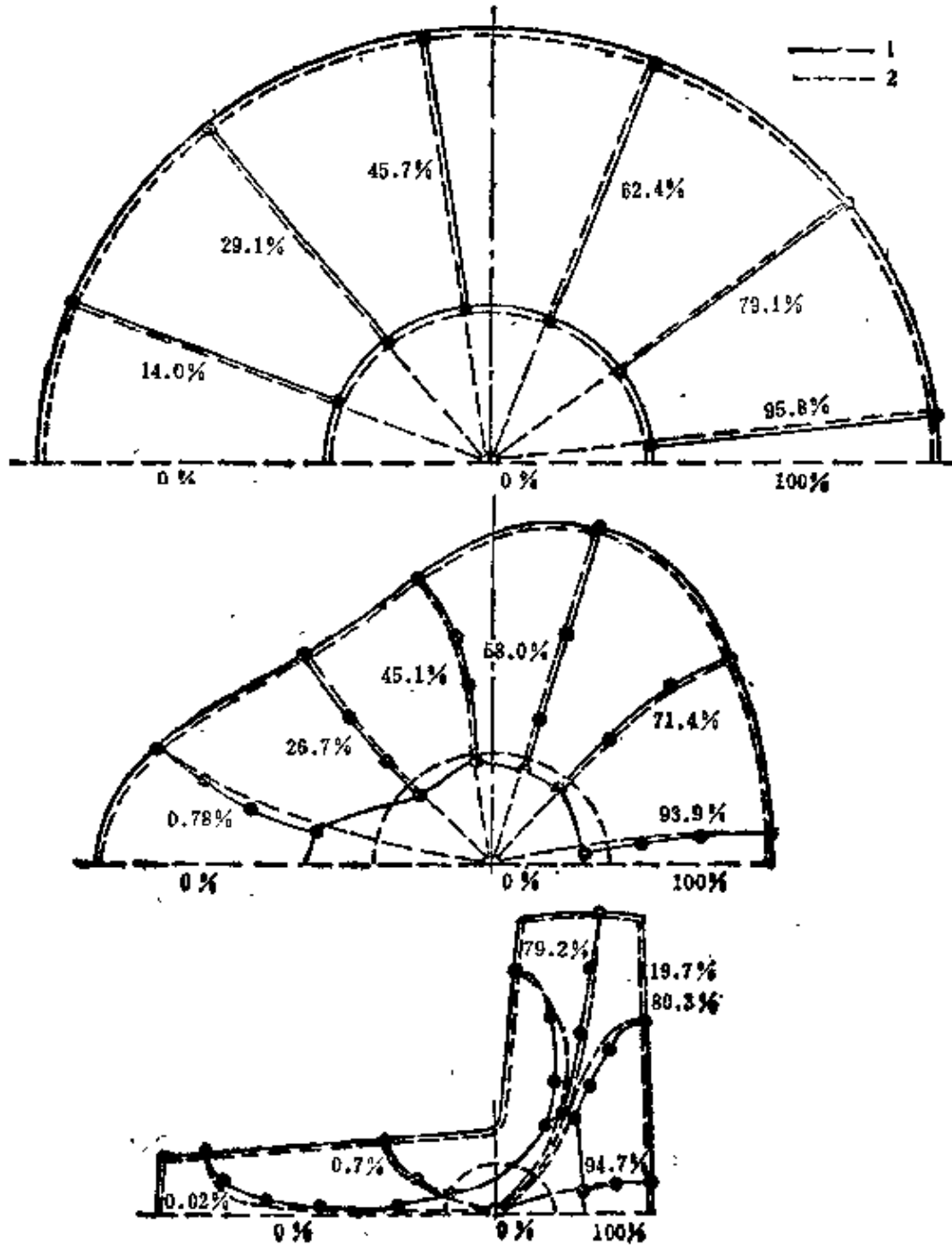


图176 复杂形
1—实验；

(11-167) 中起着参数作用。

在图176上列出了由Г.Я.古恩和К.巴依尔(Баир)完成的拉拔复杂断面型材的实验结果,并与按所述方法(公式11-170和11-171)作出的可行解的网格线 $\Psi_1^0 = \text{常数}$, $\Psi_2^0 = \text{常数}$



状型材的拉拔
2—理论曲线

进行了比较。

11.9.11 局部逼近和平滑

综上所述，流函数 $\Psi_1^0(r, \omega)$ 和 $\Psi_2^0(r, \omega)$ 已被确定。由于 r 和 ω 取决于变量 x_k ，所以原则上可以解析地把这些函数表示成式 (11-164)，并按式 (11-163) 计算速度分量。但是，采用局部逼近和平滑 (JIAC) 的程序更为合理。此程序可归结如下。

在域 Δ 内作出网格，在网格的结点上算出函数 Ψ_1^0 和 Ψ_2^0 的值。对于每个结点可以作 n 次幂的近似多项式，

$$\Psi_1^0 = \sum_{m, k, l} a_{mkl} x_1^m x_2^k x_3^l, \quad \Psi_2^0 = \sum_{m, k, l} b_{mkl} x_1^m x_2^k x_3^l \quad (11-172)$$

根据在邻近结点 (模式) 的某一总体上函数 Ψ_1^0, Ψ_2^0 的值采用最小二乘法可求出多项式系数。选择多项式的幂次和模式应能保证函数及其导数的足够逼近精度。一般采用不太高的幂次——二次或三次多项式。

结果、按式 (11-163) 计算变形速度可归结为对多项式 (11-172) 进行积分的最简单运算。

所述的程序广泛用于对实验结果的逼近和平滑。因为在公式 (11-170) 和式 (11-171) 中进行数值积分时或近似作保角映射时不可避免会有误差，所以可以几次调用的 JIAC 程序允许计算导数时减少这些误差的影响。

求出网格结点上的速度分量值 v_i 之后，我们重新调用 JIAC 程序并计算应变速率

$$\xi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

在利用可行速度场作为运动许可速度场时，计算力能参数，并把能量方程写成如下形式：

$$\Delta q B = \iiint_D T H dx_1 dx_2 dx_3 + \iint_S \tau v_n dS$$

由于改换为域 Δ 并利用准正交坐标系 (r, ω, x_3) ，从而使包含在上述公式右边的积分计算大为简化。

在域 Δ ——中空圆柱域内建立网格，在此网格上用局部一维法 (9.4节) 及准正交坐标 (r, ω, x_3) 来计算温度场。

变换为这些坐标的热传导方程有如下形式：

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa \left[h^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \omega^2} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \right] + \nu TH$$

在给定的初始 (对非定常温度场) 和边界条件下对这个方程积分，就可找到在域 D 内温度 θ 的分布。在其它方面，数学模型的计算方法近似于前面所述的方法。

11.9.12 样条函数及其在逼近和平滑中的应用

作为逼近和平滑工具的多项式法具有许多缺点，这是因为多项式在任何一点邻域的行为决定着它的整个行为。正因为如此，上面所研究的 JIAC 程序便有其局限性。如果对整个流动区提出逼近和平滑的问题，则必须采用近几年来研究出来的所谓样条函数这一数学工具 [22, 23]。

由不同的分段多项式按固定格式构成的函数称为样条函数。简单的例子是折线函数。我们用一个变量函数的例子来研究样条函数理论的基本概念。

设在线段 $[a, b]$ 上给出间距 Δ_n ：

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b \quad (11-173)$$

令 P_m ——幂次不大于 $m (m > 0)$ 的多项式的集， $C^{(k)} = C^k[a, b]$ ——在 $[a, b]$ 上连续，且有 k 阶连续导数的函数的集。

如果，

1) 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上 $S_m(x) \in P_m$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

2) $S_m(x) \in C^{m-1}[a, b]$,

则把函数 $S_m(x) = S_m(x, \Delta_n)$ 称为具有结点式 (11-173) 的多项式样条函数。

点 $\{x_i\}$ 称为样条函数的结点。

因此，在所研究的例子中，所谓样条函数就是在每一线段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上由不超过给定幂次的多项式所构成的函数，整个

说来这个函数在 $[a, b]$ 上具有很大的光滑性，即它的直到 $(m-1)$ 阶的导数是连续函数。

我们研究自然得出样条函数的平滑问题的提法。

设在线段 $[a, b]$ 上给出间距 Δ_n ： $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 并在点 x_i 上给出某个函数 $f(x)$ 的近似值 y_i 。

按测量数据修改函数 $f(x)$ ，在改正测量数据的同时，必须注意在所有线段上函数 $f(x)$ 是样条函数，特别是，此函数本身及其导数在两个邻近的测量之间没有激烈的变化（图177）。

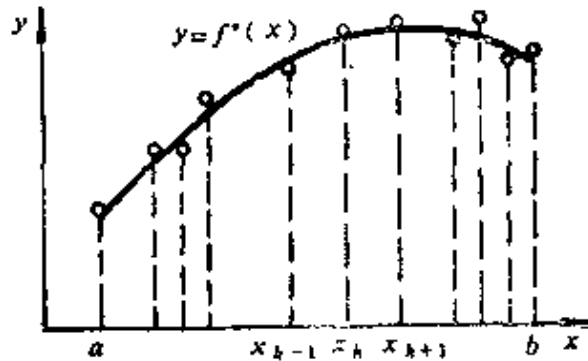


图177 用样条函数逼近实验数据

设 W_2^m 是一类函数 $f(x)$ ，它在 $[a, b]$ 上具有绝对连续的 $(m-1)$ 阶导数而超出 $L_2[a, b]$ 具有 m 阶导数。

我们提出如下问题：寻找使如下函数取最小的函数 $f^*(x) \in W_2^m$ ：

$$\min \left\{ \sum_{i=0}^n p_i [y_i - f(x_i)]^2 + p \int_a^b [f^{(m)}(t)]^2 dt \right\}^{1/2}$$

式中 $p (p \geq 0)$ —— 辅助参数， $p_i (p_i > 0)$ —— 给定的数。

因此，我们希望在接近测量值 y_i 的条件下，引入逼近的函数，使它在 $L_2(a, b)$ 中有尽可能小的 m 阶导数。解这个问题，可保证这个函数接近于测量值，并保证在测量值之间函数没有激烈的变化。 p_i 值起着权重系数的作用；如果认为某测量比较重要，则在相应点上选取大的值 p_i 。

令 $n \geq m$ ，我们在空间 W_2^m 引入标量积

$$(f, g) = \sum_{i=0}^n p_i f(x_i) g(x_i) + \int_a^b f^{(m)}(t) g^{(m)}(t) dt$$

结果, 空间 W^m 成为希尔伯特空间, 并且可以证明, 在这个空间内所提出的问题有唯一解。

设 S_{2m-1}, Δ_n —— 满足如下条件的样条函数 $S_{2m-1}(x)$ 的总合:

- 1) $S_{2m-1}(x) \in C^{(2m-2)}[a, b]$;
- 2) $S_{2m-1}(x) \in P_{2m-1}, x \in [x_i, x_{i+1}] (i=0, 1, \dots, n-1)$;
- 3) $S_{2m-1}^{(j)}(x) \equiv 0, x \in [a, x_0], x \in [x_n, b] (j=m, m+1, \dots, 2m-2)$ 。

于是, 下面定理是正确的。

定理11-8 在所提出的问题中, 唯一函数, 即由一类 S_{2m-1}, Δ_n 组成的样条函数 $f(x) = S_{2m-1}(x)$ 达到最小。

一般, 在平滑时采用幕次不太高的样条函数, 特别是二次的和三次的。为了在平滑问题中求出这些样条函数的参数, 应组成具有三对角线矩阵的线性方程组, 在这个矩阵中主对角线是主元。这就使得能在解方程组时利用经济的追赶法 (详见所推荐的参考文献)。同样, 提出可化为多维样条函数的多变量函数的平滑问题。

目前, 数学程序设计人员正在进行紧张的工作, 以使用多维样条函数建立逼近和平滑的标准程序, 并随后把这些程序存入电子计算机 ECΘBM 的数学保证系统中。

思 考 题

1. 你知道哪些类型的模拟? 它们之间的区别是什么?
2. 什么叫塑性变形过程的数学模型? 什么样的边值问题是这个模型的基础?
3. 什么是模型的算法? 用什么样的方法来实现它?
4. 你熟悉什么样的算法语言?
5. 塑性变形过程数学模型的一般结构是什么样的? 平面和轴对称流动模型间有什么区别?

6. 用什么样的方法来描述三维流动? 此时应采用几个流函数?
7. 研究三维流动时, 用什么样的方式引入准正交坐标系?

推荐的参考文献

- Пластическое Формоизменение металлов. М., «Металлургия», 1968. 416 с. с ил. Авт.: Г. Я. Гун, П. И. Полухин, В. П. Полухин, Б. А. Прудковский.
- Прессование алюминиевых сплавов (математическое моделирование и оптимизация). М., «Металлургия», 1974. 336 с. с ил. Авт.: Гун Г. Я., Яковлев В. И., Прудковский Б. А. и др.
- Добронравов В. В. Основы аналитической механики. М., «Высшая школа», 1976. 264 с. с ил.
- Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
- Применение теории ползучести при обработке металлов давлением. М., «Металлургия», 1973. 192 с. с ил. Авт.: А. А. Поздеев, В. И. Тарновский, В. И. Ерсмеев, В. С. Баакашвили.
- Полухин П. И., Гун Г. Я., Галкин А. М. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М., «Металлургия», 1976. 488 с. с ил.

参 考 文 献

- [1] Гольденблат И. И. Нелинейные проблемы теории упругости. М., «Наука», 1969. 336 с. с ил.
- [2] Смирнов-Аляев Г. А., Розенберг В. М. Теория пластических деформаций металлов. М., Машгиз, 1956. 368 с. с ил.
- [3] Ильющин А. А. Механика сплошной среды. Изд. 2-е. М., Изд-во МГУ, 1978. 288 с. с ил.
- [4] Пластическое формоизменение металлов. М., «Металлургия», 1968. 416 с. с ил. Авт.: Г. Я. Гун, П. И. Полухин, В. П. Полухин, Б. А. Прудковский.
- [5] Томас Г. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964. 308 с. с ил.
- [6] Базаров И. П. Термодинамика. М., Физматгиз, 1961. 292 с. с ил.

- [7] *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М., «Мир», 1974. 319 с. с ил.
- [8] *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963. 248 с. с ил.
- [9] *Полухин П. И., Гуш Г. Я., Галкин А. М.* Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М., «Металлургия», 1976. 488 с. с ил.
- [10] *Гребский М. В.* Структурная сверхпластичность металлов. М., «Металлургия», 1975. 270 с. с ил.
- [11] *Колмогоров В. П.* Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
- [12] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967. 600 с. с ил.
- [13] *Карслоу Г., Елер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 488 с. с ил.
- [14] *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э.* Численные методы анализа. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967. 368 с. с ил.
- [15] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. Изд. 2-е. М., «Наука», 1977. 742 с. с ил.
- [16] *Колиткин Н. Н.* Численные методы. М., «Наука», 1978. 512 с. с ил.
- [17] *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956. 344 с.
- [18] *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959. 371 с. с ил.
- [19] *Томленов А. Д.* Теория пластического деформирования металлов. М., «Металлургия», 1972. 408 с. с ил.
- [20] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966. 300 с. с ил.
- [21] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965. 424 с. с ил.
- [22] *Алберт Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972. 380 с. с ил.
- [23] *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплаины в вычислительной математике. М., «Наука», 1976. 248 с. с ил.

- [7] *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М., «Мир», 1974. 319 с. с ил.
- [8] *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963. 248 с. с ил.
- [9] *Полухин П. И., Гуш Г. Я., Галкин А. М.* Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М., «Металлургия», 1976. 488 с. с ил.
- [10] *Гребский М. В.* Структурная сверхпластичность металлов. М., «Металлургия», 1975. 270 с. с ил.
- [11] *Колмогоров В. П.* Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
- [12] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967. 600 с. с ил.
- [13] *Карслоу Г., Елер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 488 с. с ил.
- [14] *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э.* Численные методы анализа. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967. 368 с. с ил.
- [15] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. Изд. 2-е. М., «Наука», 1977. 742 с. с ил.
- [16] *Колиткин Н. Н.* Численные методы. М., «Наука», 1978. 512 с. с ил.
- [17] *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956. 344 с.
- [18] *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959. 371 с. с ил.
- [19] *Томленов А. Д.* Теория пластического деформирования металлов. М., «Металлургия», 1972. 408 с. с ил.
- [20] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966. 300 с. с ил.
- [21] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965. 424 с. с ил.
- [22] *Алберт Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972. 380 с. с ил.
- [23] *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплаины в вычислительной математике. М., «Наука», 1976. 248 с. с ил.

- (7) *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М., «Мир», 1974. 319 с. с ил.
- (8) *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963. 248 с. с ил.
- (9) *Полудин П. И., Гуи Г. Я., Галкин А. М.* Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М., «Металлургия», 1976. 488 с. с ил.
- (10) *Гребский М. В.* Структурная сверхпластичность металлов. М., «Металлургия», 1975. 270 с. с ил.
- (11) *Колмогоров В. П.* Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
- (12) *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967. 600 с. с ил.
- (13) *Карслоу Г., Елер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 488 с. с ил.
- (14) *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э.* Численные методы анализа. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967. 368 с. с ил.
- (15) *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. Изд. 2-е. М., «Наука», 1977. 742 с. с ил.
- (16) *Колиткин Н. Н.* Численные методы. М., «Наука», 1978. 512 с. с ил.
- (17) *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956. 344 с.
- (18) *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959. 371 с. с ил.
- (19) *Томленов А. Д.* Теория пластического деформирования металлов. М., «Металлургия», 1972. 408 с. с ил.
- (20) *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966. 300 с. с ил.
- (21) *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965. 424 с. с ил.
- (22) *Алберт Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972. 380 с. с ил.
- (23) *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплаины в вычислительной математике. М., «Наука», 1976. 248 с. с ил.

- [7] *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М., «Мир», 1974. 319 с. с ил.
- [8] *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963. 248 с. с ил.
- [9] *Полухин П. И., Гуш Г. Я., Галкин А. М.* Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М., «Металлургия», 1976. 488 с. с ил.
- [10] *Гребский М. В.* Структурная сверхпластичность металлов. М., «Металлургия», 1975. 270 с. с ил.
- [11] *Колмогоров В. П.* Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
- [12] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967. 600 с. с ил.
- [13] *Карслоу Г., Елер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 488 с. с ил.
- [14] *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э.* Численные методы анализа. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967. 368 с. с ил.
- [15] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. Изд. 2-е. М., «Наука», 1977. 742 с. с ил.
- [16] *Колиткин Н. Н.* Численные методы. М., «Наука», 1978. 512 с. с ил.
- [17] *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956. 344 с.
- [18] *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959. 371 с. с ил.
- [19] *Томленов А. Д.* Теория пластического деформирования металлов. М., «Металлургия», 1972. 408 с. с ил.
- [20] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966. 300 с. с ил.
- [21] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965. 424 с. с ил.
- [22] *Алберт Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972. 380 с. с ил.
- [23] *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплаины в вычислительной математике. М., «Наука», 1976. 248 с. с ил.

- [7] *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М., «Мир», 1974. 319 с. с ил.
- [8] *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963. 248 с. с ил.
- [9] *Полудин П. И., Гуш Г. Я., Галкин А. М.* Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М., «Металлургия», 1976. 488 с. с ил.
- [10] *Гребский М. В.* Структурная сверхпластичность металлов. М., «Металлургия», 1975. 270 с. с ил.
- [11] *Колмогоров В. П.* Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
- [12] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967. 600 с. с ил.
- [13] *Карслоу Г., Елер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 488 с. с ил.
- [14] *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э.* Численные методы анализа. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967. 368 с. с ил.
- [15] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. Изд. 2-е. М., «Наука», 1977. 742 с. с ил.
- [16] *Колиткин Н. Н.* Численные методы. М., «Наука», 1978. 512 с. с ил.
- [17] *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956. 344 с.
- [18] *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959. 371 с. с ил.
- [19] *Томленов А. Д.* Теория пластического деформирования металлов. М., «Металлургия», 1972. 408 с. с ил.
- [20] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966. 300 с. с ил.
- [21] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965. 424 с. с ил.
- [22] *Алберт Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972. 380 с. с ил.
- [23] *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплаины в вычислительной математике. М., «Наука», 1976. 248 с. с ил.

- [7] *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М., «Мир», 1974. 319 с. с ил.
- [8] *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963. 248 с. с ил.
- [9] *Полухин П. И., Гуш Г. Я., Галкин А. М.* Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М., «Металлургия», 1976. 488 с. с ил.
- [10] *Гребский М. В.* Структурная сверхпластичность металлов. М., «Металлургия», 1975. 270 с. с ил.
- [11] *Колмогоров В. П.* Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
- [12] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967. 600 с. с ил.
- [13] *Карслоу Г., Елер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 488 с. с ил.
- [14] *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э.* Численные методы анализа. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967. 368 с. с ил.
- [15] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. Изд. 2-е. М., «Наука», 1977. 742 с. с ил.
- [16] *Колиткин Н. Н.* Численные методы. М., «Наука», 1978. 512 с. с ил.
- [17] *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956. 344 с.
- [18] *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959. 371 с. с ил.
- [19] *Томленов А. Д.* Теория пластического деформирования металлов. М., «Металлургия», 1972. 408 с. с ил.
- [20] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966. 300 с. с ил.
- [21] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965. 424 с. с ил.
- [22] *Алберт Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972. 380 с. с ил.
- [23] *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплаины в вычислительной математике. М., «Наука», 1976. 248 с. с ил.