

高等学校
电子信息类 规划教材

机械工程测试技术基础

李迅波 编著

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书系统、全面地论述机械工程测试领域的基本测试理论、方法和测试手段。全书由五部分内容构成。第一章至第三章为机械工程测试技术基本理论和方法；第四章至第六章为机械工程测试系统；第七章为机械工程计算机辅助测试；第八章和第九章为机械量测试技术及机械噪声测量；第十章为机械设备的故障诊断技术。

全书有机地把机械工程测试理论、方法和应用结合在一起，内容新、覆盖面广，分析深入浅出，反映了该学科的技术发展。它适用于机械工程类教学，亦可作为测试技术有关专业的选课教材或教学参考用书，也可供有关教师科技人员参考。

声 明

本书无四川省版权防盗标识，不得销售；版权所有，违者必究，
举报有奖，举报电话：(028) 6636481 6241146 3201496

高等学校 规划教材
电子信息类

机械工程测试技术基础

李迅波 编著

出 版：电子科技大学出版社（成都建设北路二段四号） 邮编（610054）
责任编辑：舒 标 李 阳 周 立
发 行：新华书店
印 刷：峨眉电影制片厂印刷厂
开 本：787×1092 1/16 印张 26.25 字数 638.8 千字
版 次：1998 年 11 月第一版
印 次：1998 年 11 月第一次
书 号：ISBN 7—81065—003—3/TH·1
印 数：1—3000 册
定 价：28.00 元

出版说明

为作好全国电子信息类专业“九五”教材的规划和出版工作，根据国家教委《关于“九五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》和《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项、管理办法》，我们组织各有关高等学校、中等专业学校、出版社、各专业教学指导委员会，在总结前四轮规划教材编审、出版工作的基础上，根据当代电子信息科学技术的发展和面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求，编制了《1996—2000年全国电子信息类专业教材编审出版规划》。

本轮规划教材是由个人申报，经各学校、出版社推荐，由各专业教学指导委员会评选，并由我部教材办协商各专指委、出版社后，审核确定的。本轮规划教材的编制，注意了将教学改革力度较大、有创新精神、特色风格的教材和质量较高、教学适用性较好、需要修订的教材以及教学急需，尚无正式教材的选题优先列入规划。在重点规划本科、专科和中专教材的同时，选择了一批对学科发展具有重要意义，反映学科前沿的选修课、研究生课教材列入规划，以适应高层次专门人才培养的需要。

限于我们的水平和经验，这批教材的编审、出版工作还可能存在不少缺点和不足，希望使用教材的学校、教师、同学和广大读者积极提出批评和建议，以不断提高教材的编写、出版质量，共同为电子信息类专业教材建设服务。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系按电子工业部的《1996—2000年全国电子信息类专业教材编审出版规划》，由全国自动控制专业教学指导委员会编审、推荐出版。主审陈光祜教授，责任编委熊世和教授。

本教材的参考学时数为60学时，其主要内容可分为五部分共十章。第一部分包含第一、二、三章：信号描述及其分析，测试系统的特性分析，工程测量误差分析与数据处理；系统讲述了机械工程测试的基本理论和方法。第二部分包含第四、五、六章：传感器技术，传感器常用的中间变换电路，信号显示与记录仪器；该部分讲述了机械工程测试系统的组成及应用。第三部分包含第七章，机械工程计算机辅助测试技术，该章为工程信号的采集、恢复与传输，离散傅里叶变换、快速傅里叶变换基础知识，工程信号数字处理及自动测试系统等有关内容。第四部分包含第八章、第九章：机械相关量的电测量，机械噪声的测量；比较全面地介绍了机械量测试技术的方法和手段。第五部分包含第十章，机械设备的故障诊断技术，该章介绍了机械故障诊断原理与方法及应用。

本书在编写和出版过程中，得到了电子工业部教材办公室和电子科技大学教材办公室及机械电子工程系领导大力支持和帮助，在此表示诚挚感谢，同时还衷心感谢主审、责任编委、出版社编辑等同志们的辛勤工作和帮助。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编 者

1997年12月于电子科技大学

绪 论

一、测试技术在国民经济中的地位和作用

科学技术和生产的发展都离不开测试,任何科学理论的建立都要通过大量的试验与测量,对获取的数据进行分析来验证理论的正确性和可靠性。工业生产中的机械化、自动化,必须建立在生产过程中对种种参数的测量、分析基础上进行控制和监视,才能保证产品的质量 and 生产的效率。所以,测试技术是机械工业发展的一个重要基础技术。

测试技术在工业生产中的作用有如下几个方面:

1. 提供设备在运转过程中或其他情况下的有关信息,以便监视生产过程,使之保持在最佳工作状态运行;或将生产过程的种种数据信号测出,经处理后,分析工作状态是否正常,判断出故障位置和性质,以决定是否继续生产或进行维修。

2. 作为控制生产的依据。将生产过程中各种工艺参数即时测量出来,与要求的数值相比较,进行反馈,自动调节后使生产过程在符合规定要求的参数下工作,即所谓用信息流来控制物质流和能量流(见图0-1)。

3. 对工艺过程或设备的分析。机械工程中,对一些待改进的工艺过程、工艺设备需做系统的测试,才能对原有的状态作出分析、评价,找出改进措施。在改进措施实施后,是否达到了预期效果,仍需做系统的测试来进行分析和鉴定。这些测试结果也是今后改进新设备和工艺设计的依据(见图0-1)。

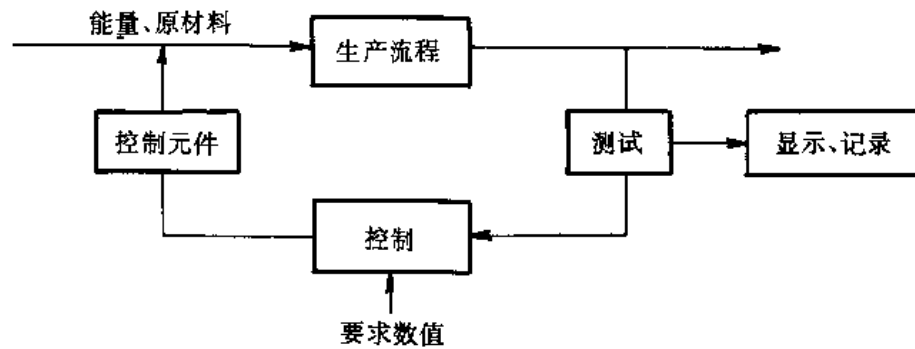


图0-1 工业控制框图

4. 作为线性系统及结构动力分析,机械工程测试大量采用频谱分析技术。线性系统的响应计算可归纳为频域内简单的乘法运算,利用线性系统的频率保持性,进行系统的频谱分析对每一个频率分别进行处理,而不必考虑在其他频率上所发生的情况。对系统结构动力学研究主要有以下三个方面:

- (1) 响应预估: 已知激励及系统特性, 研究响应。
- (2) 系统辨识: 已知激励及响应, 研究系统特性。
- (3) 载荷识别: 已知系统的特性和响应, 研究激励。

以上内容在频域内解决, 可将微分方程的求解变为代数方程的求解, 将卷积积分转变为普通乘法, 将多度耦合的复杂系统转变为单度独立的简单系统的叠加处理, 因此频谱分析在解决实际问题中获得了广泛的应用。

值得注意的是现在从事机械工程领域内工作的科技人员不仅面临一般的静态物理量的测量, 而且随着科技、生产的发展越来越多地面临着许多不可避免的动态物理量的测量。动态测试在研究的观点上和技术手段上与静态测量有很大差别, 这就需要在理论上和实践上进一步学习, 认识动态测量所遵循的特殊规律。因此测试技术所涉及的面极广, 有不断的测试新问题等待解决, 测试技术是否先进是国家科学技术水平的重要标志。

二、测试系统的组成和技术特性

工程信号测试系统, 可以分为以下两类:

1. 模拟信号测试系统

图0-2 给出了这类系统的原理框图。

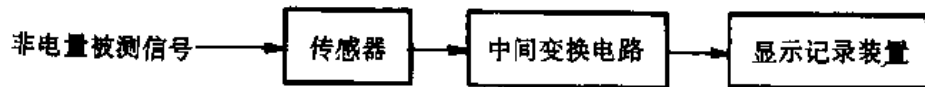


图0-2 模拟信号测试系统

2. 数字信号测试系统

数字信号测试系统是先把测试中获取的模拟信号变换成数字信号, 然后用计算机进行处理, 所以系统的输入是取自工程实际的模拟信号。图0-3 给出了这类系统的原理框图。各部分具体功能如下:

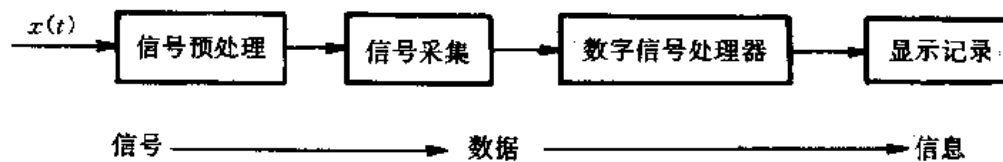


图0-3 数字信号处理系统

- (1) 预处理: 目的是把模拟信号变成适合于数字处理的形式, 以便进行数字信号处理。预

处理包括以下几个部分：Ⅰ、解调器。Ⅱ、输入放大器或衰减器。Ⅲ、抗混滤波器。Ⅳ、隔直装置。其中输入放大器或衰减器、抗混滤波器则是预处理部份的关键部件。

(2)信号采集：信号采集是将预处理后的模拟信号变为数字信号，其核心是模/数(A/D)转换器。信号处理系统的性能指标与A/D密切相关。信号采集部分包含以下几部分电路。

Ⅰ、采样保持电路。Ⅱ、时基信号发生器。产生定时脉冲信号，控制采样。Ⅲ、触发系统，决定采样的开始点。Ⅳ、控制器。对多道数据采集进行控制。

(3)数字信号处理器：这是整个系统的核心，它既可用硬件组成的数字信号处理器，也可用计算机来完成该系统所需要的各种分析和运算。

(4)显示结果：结果显示是为显示分析处理结果的数据、图形而设置的。一般采用CRT屏幕显示；打印机打印结果数据或图形，绘图机绘出相应的曲线等。

总之，原始信号输入无论是模拟信号处理系统或数字信号处理系统，在进行适当的变换后，即能输出所希望的结果——信息。

目前，国内外已生产了许多型号的数字信号处理系统，按其数字信号处理部分的形式，可以分为两类。一类是专用的信号处理机，另一类是以通用微型计算机为主的信号处理系统。专用的信号处理机，一般用下面三种方式之一进行工作。

其一为软件控制。根据输入的软件程序进行分析计算。这种机器理论上功能不受限制，适合于重复处理大量的实验数据。如日本生产的7T08S就是这种类型的产品。

其二为硬件控制。这种机器处理速度较快，但功能比较单一，只能作几种规定的分析处理工作。如丹麦“B&K”公司生产的2031等。

其三为软、硬结合控制。这种机器功能全面，处理速度快，即有专用程序，又可自编程序，使用方便，但操作复杂、价格昂贵。如美国“HP”公司生产的5451C就属此类。

以通用微机为主，配备部分外设组成信号处理系统，是近年发展起来的一种信号处理系统。系统中的微型计算机即可作信号处理、又可作一般科学计算，提高了微型计算机的利用率。对信号的分析处理程序可以自行编写，处理功能不受限制。随着计算机技术的高速发展，其CPU运算速度大大提高，信号处理速度大大加快，这类系统将得到较大地发展。

三、测试方法、计量标准、基本术语及其定义

测试是人们认识客观事物的一种方法，是从客观事物中摄取有关信息的认识过程。在这一过程中，需要专门设备，通过合适的测量方法和必要的数据处理，由测得的信号求取所研究对象的有关信息的量值。根据测量的对象不同，采用的测试方法也就不同。测试方法以测试实时性分，可分为在线测试、非在线测试；以测试信号分，可分为模拟信号测试、数字信号测试；以域来分，可分为时域测试、频域测试；以测试手段来分，可分为接触测试、非接触测试等。实际采用哪种测试方法，视具体情况而定。

测试最终结果是所研究对象的有关信息的量值。量值是否准确取决于测试系统的正确标定，而标定又涉及到计量标准。国际测量制(International Measuring Sys)的四个基本量是长度、时间、质量和温度。而其他所有量的单位和基准都是由这四个基本量导出的。例如在力的测量中，力是用方程 $F=MA$ 来定义的，因而力的基准量(标准力)取决于质量和加速

度的基准量,质量是基本量,以国际标准为依据,加速度不是一个基本量,而是由长度基本量和时间基本量导出的量。地球上的重力加速度 g 可方便地作为加速度的标准参考值。这样,地球上选取一个标准质量,标准力即可确定。为了保证国民经济各部门测力的准确一致性,国家在各地计量中心都设有一套计算基准和标准,以使根据基准——标准工作来进行工作系统量值的标定。不同物理量,有不同的标准,这在设计测试系统时,应该注意。

测试涉及到信号、信息这两个基本概念,所谓信号,是指传递某个实际系统状态或行为信息的一种物理现象或过程。它的基本表现形式是变化着的电压或电流。而信息是人类社会、自然界一切事物运动与状态的特征,是提供判断或决策的一种资料。信号是信息的实际载体,信息则是信号经过处理之后的有用部分,脱离信息的信号是毫无实际意义的。

四、现代测试技术的发展方向

现代测试技术是建立在新型传感器技术、计算机基础上的一种信号采集、处理的综合性技术。其发展方向有以下几个方面:

1. 传感器向新型、微型、智能型发展

现代的科学技术和工业自动化的发展,对测试技术提出了更高更新的要求。例如,在某些测试中提出双参数传感器问题,即同一个传感器同时测量两个不同的参数,如同时测量压力和温度、力和位移、压力和速度等。在机器人工程的发展中,需要研制灵敏度高的新型视觉、触觉、听觉、嗅觉传感器。在航空、宇航、生物医学工程中要求使用的传感器尺寸要尽量小、重量要尽量轻。如美国的航天飞机的控制系统就由几千个传感器组成,如果传感器不实现小型化或微型化,它是不可能应用的。

目前,许多传感器已向智能化方向发展。如现在已开发出一种电子测压器,它是集压力转换、信号放大、数据采集与储存于一体,组成一个智能传感器,其外型尺寸为 $20 \times 10 \times 10$ (mm)。

2. 测量仪器向高精度和多功能发展

测量仪器及测量系统的精度提高,使测得数据的可信度也相应提高,在产品的研制过程中可减小试验次数,从而缩短研制周期,降低产品成本,因此测量系统精度提高具有重要实际意义。

在提高测量仪器精度的同时应扩大仪器的功能。以前采用的测试系统是由多台仪器所组成;在使用中需对每台仪器进行调试,即不方便又容易出错。近几年来,出现一种计算机辅助测试系统(CAT),它是把诸如示波器、记录仪等多个测试仪缩小成一块一块的卡(一本书的大小),插在带格子的框架内,各卡通过连接器与计算机的母线相连,不仅可使各仪器的电源、旋钮、表头、显示屏大大简化,而且可通过计算机的键盘来操作各卡式仪器的功能,并按预定程序来控制复杂的测试系统。

3. 参数测量与数据处理向自动化发展

一个产品的大型、综合性试验,准备时间长、待测的参数多,少则几十,多则几百个数据通道。众多的数据若依靠手工处理,则是不可能的。随着现代测试技术的发展,越来越多的测试系统是采用以计算机为核心的多通道自动测试系统,这样的系统能实现自动校准,自动修正,故障诊断,信号调制,多路采集,自动分析、处理,并打印与绘图。这些功能都是通过计算机预定的程序来完成的。

五、课程研究对象和性质

综上所述,本课程所研究的对象是机械工程测试中常用的传感器,中间变换电路及记录仪的工作原理,测试系统的静、动态特性的评价方法,机械工程信号分析,测量误差及数据的处理,测试信号的计算机处理,以及常见的物理量的动态测试方法。

对高等学校机械工程各有关专业来说,《机械工程测试技术基础》是一门技术基础课。通过本课程学习,培养学生能正确地掌握测试系统(包括模拟系统和数字系统)的设计方法,掌握进行静态、动态测试所需要的基本知识和技能,为学生进一步学习、研究和处理机械工程测试技术问题打下基础。

从进行机械工程测试工作所必要的基本条件出发,学生在学完本课程后应具有下列几个方面的知识:

1. 掌握信号的时域和频域的描述方法,建立明确的信号频谱概念;掌握数字系统及信号分析的方法;掌握频谱分析和相关分析的基本原理和方法。了解功率谱分析原理及其应用。
2. 掌握测试装置和静、动态评价方法和不失真测试条件,并能正确地运用于测试装置的设计或选择;建立对机械工程测试工作的完整概念,并能运用于机械工程中某些参数的测试。
3. 掌握工程信号转换为数字信号的原理和方法,了解数字信号处理方法。
4. 了解传感器、中间变换电路、记录仪器的工作原理,并能正确地选用和组合。

本课程具有很强的实践性。教材编写着重理论联系实际。学生在学习过程中,必须参加必要的实验,并注意物理概念,这样,才能真正掌握有关知识,具有处理实际工作的能力。

第一章 信号描述及其分析

第一节 引言

机械工程信号,如力、加速度、温度、位移等信号大多表现为非电量信号,这类信号需要转换成电信号,才能被记录分析和处理。

工程测试包含了测量和试验,是从客观事物中获取有关信息的认识过程。而信息又蕴藏在电信号之中,人们常都通过它的载体——信号的分析,来获取工程信息。

第二节 信号及分类

在人类社会的发展过程中,离不开信号。信号是可以描述范围极为广泛的一类物理现象。它所含的信息总是寄寓在某种形式的波形之中。例如,人的声道系统所产生的语音信号就是一种声压的起伏变化。图1-1示出一个通过传感器感受的声压变化所转换成电的信号。由图可见,不同的语音对应不同的声压变化波形。又如,一幅黑白照片,照片上各点的亮度变化波形构成了影像信息。

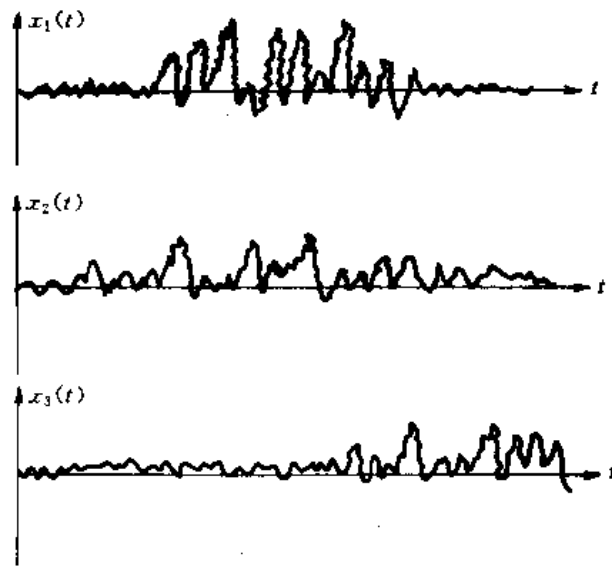


图1-1 不同语音所对应的不同声压波形

在数学上,信号可以表示为一个或多个变量的函数,称为信号函数。比如,上面所举的语音信号,就是时间一维函数;黑白照片图像就是两维空间变量的函数。为了方便,习惯上常用

“时间”这个术语表示信号函数的独立变量,它可以是多维的,虽然在事实上它不一定是时间。在上面的例子中信号是随时间连续变化的。在有些情况,信号则仅仅在离散时间点上有值。比如每周上海股票市场值就是离散时间信号的一个例子。又例如像交通事故率、年平均收入、受教育年数都可表示成离散时间信号;连续的电信号经A/D采样,亦变成离散时间信号。弄清楚自然界的信号的分类,为我们以后从信号分析中获取信息,是至关重要的。

根据信号的特性,信号可分为连续信号和离散信号两大类。连续信号是指信号函数的变量为连续的信号,而离散信号中的变量是离散变化的。连续信号又可以分为,可以用数学关系式确定其规律的确定性信号和其规律无法确定的随机信号。确定性信号又可分为周期信号和非周期信号。随机信号可分为平稳的和非平稳的两类信号。通过以上简要说明可把信号按图1-2所示进行分类。

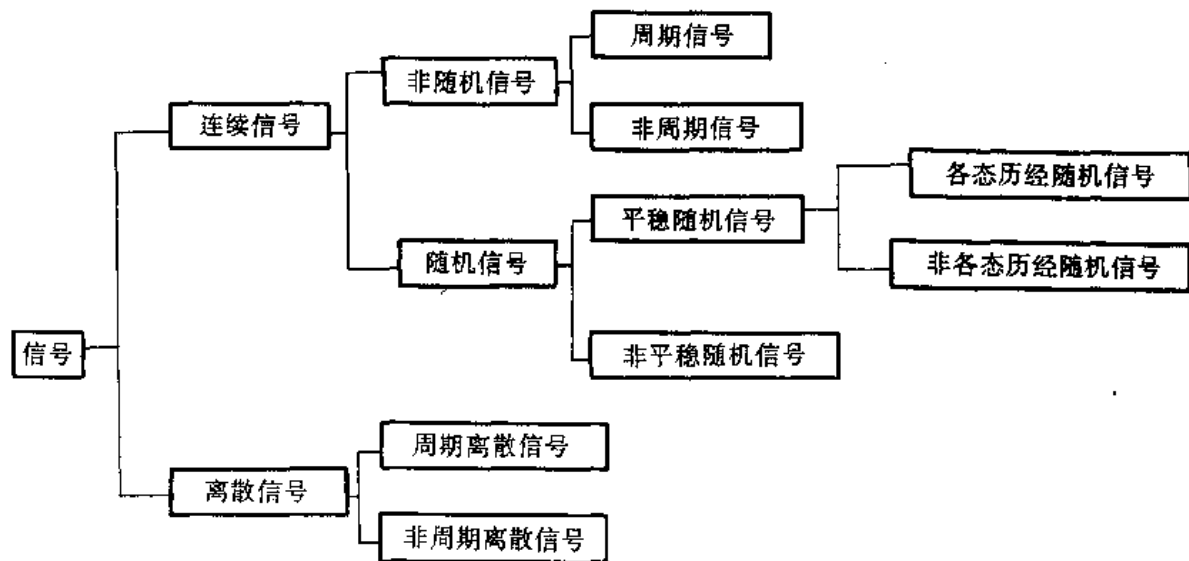


图1-2 信号分类

第三节 连续信号及幅值分布

一、确定性信号

确定性信号是指可用明确的数学关系来描述的信号,反之不能用精确的数学关系式描述的信号称之为随机信号。

在确定性信号中,信号的幅值是周期重复变化的,这种信号称之为周期信号。例如,单自由度振动系统(图1-3),作无阻尼自由振动时,其位移 $x(t)$ 就是确定性的,并可用数学表达式来描述振动质量的瞬时精确位置,即

$$x(t) = x_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{k}{m}} + \Phi_0\right) \quad (1-1)$$

式中： x_0 ——初始幅值 m ——质量
 Φ_0 ——初始相位角 t ——时间
 k ——弹簧刚度

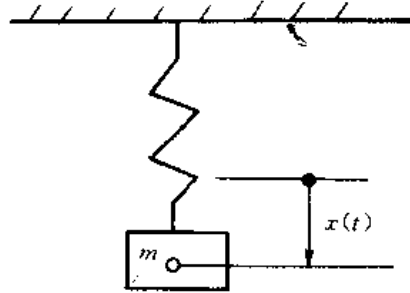


图1-3 单自由度振动系统

分析式(1-1)可知,当 $t=t+nT$ 。其中 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, n 为任意整数时,有:

$$x(t) = x(t + nT)$$

即 $x(t)$ 是一个周期重复出现的信号。所以,满足上式的信号称之为周期信号,其中 T 为周期,有关系式: $T=2\pi/\omega$, $f=1/T$ 。 ω 是角频率, f 为频率,单位是赫兹(Hz)。

非周期信号是一种信号取值时间有限的信号,其波形总可以以足够精确度用确切的数学表达式表达出来。物理和工程上很多现象都可看作非周期信号。如机械脉冲或电脉冲信号,阶跃信号和指数衰减信号等。

常见的非周期信号,表达如下:

1. 单位阶跃信号

$$\text{数学表达式为: } x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

图形见图1-4。

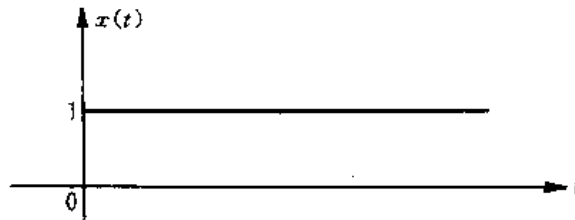


图1-4 阶跃信号

工程上,在某时刻给系统加载或卸载来实现,常采用这种信号来测试系统的动态特性,即分析其阶跃响应曲线等。

2. 单位脉冲信号

物理学中常运用质点、瞬时力的抽象模型。即视质点的体积为零,密度(质量/体积)为无限大,而总质量(密度的体积积分)为某一确定的单位值;视瞬时力的作用时间为零(无限小),力为无限大,冲量(力的时间积分)又为某一确定有限值。为描述这一类概念,物理学和控制工程中都定义了单位脉冲信号,简称为 $\delta(t)$ 函数,数学表达式为:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t - t_0 = 0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

且
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

若
$$t_0 = 0,$$

有
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

两者区别在函数的作用点产生的时刻不同(图1-5所示)。在实际应用中,常采用瞬时冲击来近似实现 $\delta(t)$ 信号(如图1-6所示)。

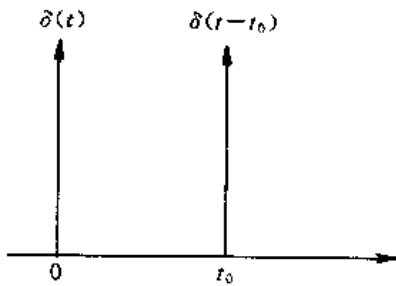


图1-5 δ 信号

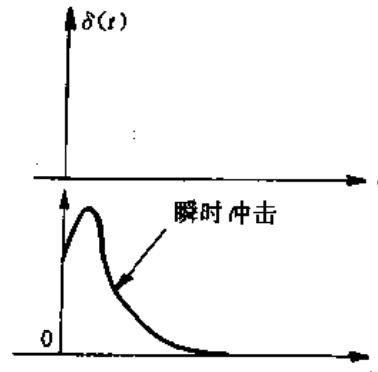


图1-6 瞬时冲击近似 $\delta(t)$ 信号

在工程测试中, $\delta(t)$ 信号非常有用,常用系统的单位脉冲响应来表征一个系统的动态特性。 $\delta(t)$ 函数有很多特殊性质,例如筛选性质。有延时的 δ 函数 $\delta(t-t_0)$,对于任意信号 $x(t)$,总有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

特殊地,当 $t_0=0$ 时,有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0) \cdot \delta(t) dt = x(0)$$

该性质可用来描述模拟信号的离散采样过程。

$\delta(t)$ 信号具有无限广的频谱, $\delta(t)$ 信号又称为理想的“白噪声”。

3. 方波信号(矩形脉冲信号)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

函数图形见图1-7 所示。

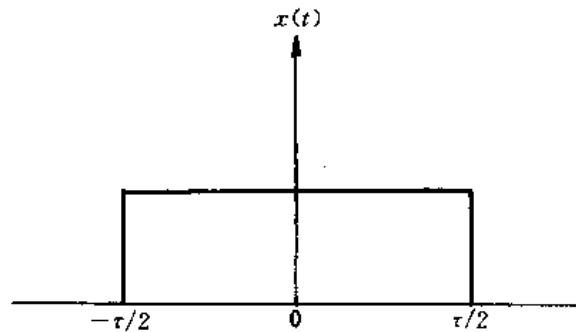


图1-7 方波信号

在实际应用中,该信号常用来对其它信号进行加权处理,即加窗处理。

二、非确定性信号

在工程测试领域中,存在大量非确定性信号,即随机信号。其特点为,它在各瞬时取值(幅值、相位或频率)无复现性,又无法预知其确切的瞬时值。如图1-8 所示。

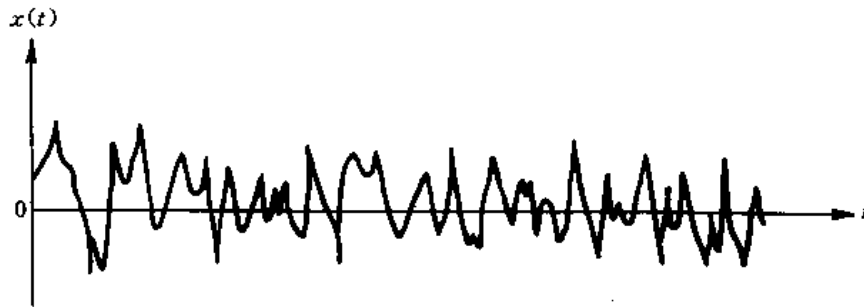


图1-8 随机信号

随机信号虽不能用严格数学公式表达,却可用统计方法描述。

判断随机信号统计特征参数是否是时间的函数,又可分为平稳随机信号(特征参数不随时间变化)和非平稳随机信号(特征参数随时间变化)。在平稳随机过程中,若任一个单个样本函数的时间平均统计特征等于该过程的集合平均统计特征,这样的平稳随机过程称为各态历经随机过程。这也就说明一个样本表现出各种状态都经历的特征,有充分的代表性。因此只要有一个样本函数就可以描述整个随机过程了。实际的测试工作一般把随机信号按各态历经过程来处理。

三、信号幅值描述

信号本身是一个时间历程 $x(t)$ ，在时域里对其进行描述和分析，简称“时域”分析。时域分析中的重要内容之一就是时间历程作狭义的或广义的取值——幅值描述。

1. 信号的均值 μ_x

均值是动态信号在整个时间坐标轴上的积分平均。表达式为：

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1-2)$$

它的物理含义是描述动态信号的中心趋势，即直流分量。

在实际测试中，所测得的均值是对某个样本在足够长时间内的积分平均，称为均值估计，记作：

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1-3)$$

其测试过程如图1-9所示。

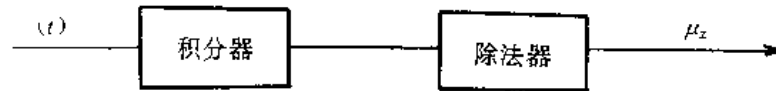


图1-9 均值的测量

对于周期信号， T 就是信号本身的一个周期长度。注意，均值相等的两个信号，仍可相差很大(如图1-14所示)。

2. 信号的均方值 Ψ_x^2

信号的均方值表达式为：

$$\Psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1-4)$$

其测试过程如图1-10所示。

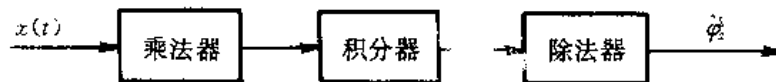


图1-10 均方值的测试

Ψ_x^2 的估值表达式为：

$$\hat{\Psi}_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1-5)$$

$\hat{\Psi}_x^2$ 为 Ψ_x^2 的估值, Ψ_x^2 是单位时间内信号所具能量的一种表示, 具有能量的量纲。
 Ψ_x^2 的平方根值称为有效值 \hat{x}_{rms} 。

$$\hat{x}_{rms} = \sqrt{\hat{\Psi}_x^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1-6)$$

\hat{x}_{rms} 与 $x(t)$ 同量纲, 它是信号平均能量(功率)的一种表示。例如振动测量中位移信号的有效值代表了振动系统的势能含量, 速度的有效值体现了振动系统动能含量, 而加速度有效值又是振动系统功率的反映。

信号的均方值 Ψ_x^2 或有效值 x_{rms} 都是信号强度的一种表示。

3. 信号的方差 σ_x^2

方差是动态信号 $x(t)$ 相对于其均值 μ_x 变化的均方值, 记作:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1-7)$$

其估值为:
$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1-8)$$

实际测试过程如图1-11所示。

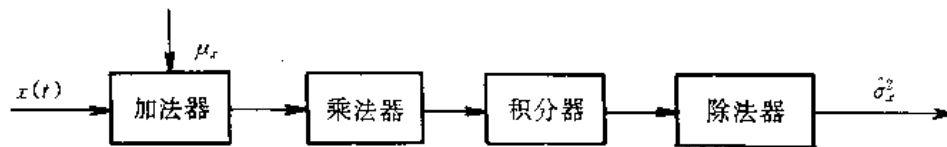


图1-11 方差的测量

将式(1-7)展开, 并整理后可得:

$$\sigma_x^2 = \Psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (1-9)$$

σ_x^2 描述了动态信号的纯波动分量(纯交流量)。

4. 信号的概率描述

动态信号瞬时取值规律可用密度 $p(x)$ 来描述, 其定义式为:

$$\Delta P = P[x \leq x(t) < x + \Delta x] = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \frac{1}{T} [\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n] \quad (1-10)$$

式中: ΔP —— $x(t)$ 在区间 $x \leq x(t) < x + \Delta x$ 取值概率;

$\sum_{i=1}^n \Delta t_i$ —— $x(t)$ 在区间 $x \leq x(t) < x + \Delta x$ 内取值的时间总和;

T ——总观测时间。

信号 $x(t)$ 在 x 处取值的概率密度函数为:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{\sum \Delta t_i}{\Delta x \cdot T} = \frac{dP}{dx} \quad (1-11)$$

其过程如图1-12所示。

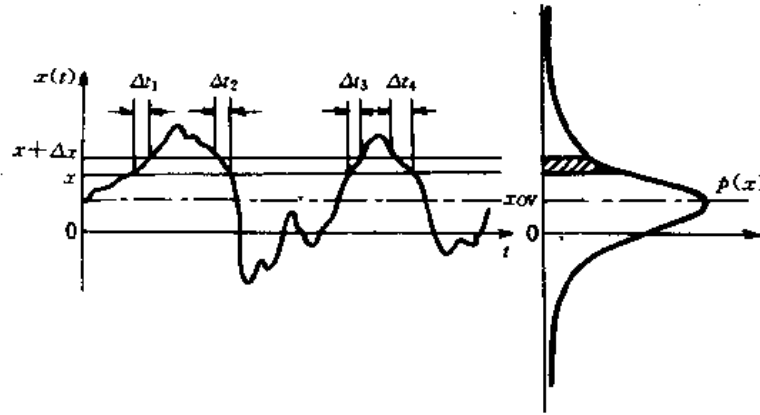


图1-12 信号的概率密度函数

图中 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$

概率密度 $p(x)$ 描述了信号 $x(t)$ 对指定幅值的取值机会。常见典型信号的概率密度曲线如图1-13所示。

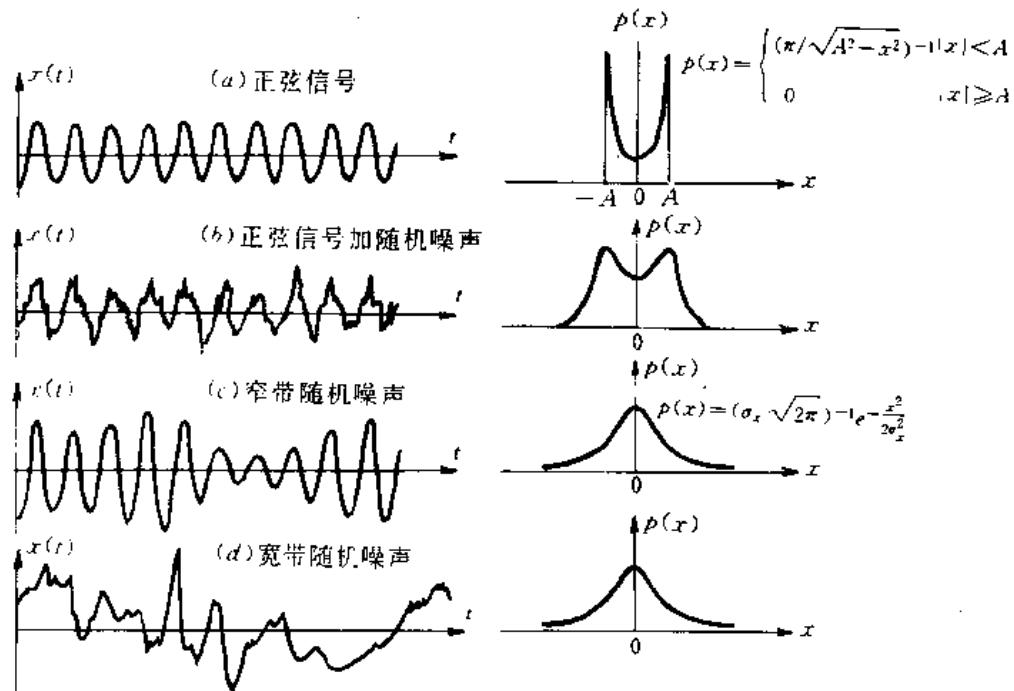


图1-13 四种不同信号的概率密度函数

以上四种对信号幅值的平均描述,显示了信号的一些特征,但作为描述是不充分和不精

细的。例如,图1-14 中的两个信号,波形和周期都大不相同,但它们的 $\mu_x, \Psi_x^2, \sigma_x^2$ 和 $\rho(x)$ 全都相等。为此,还需要对信号作相关分析。

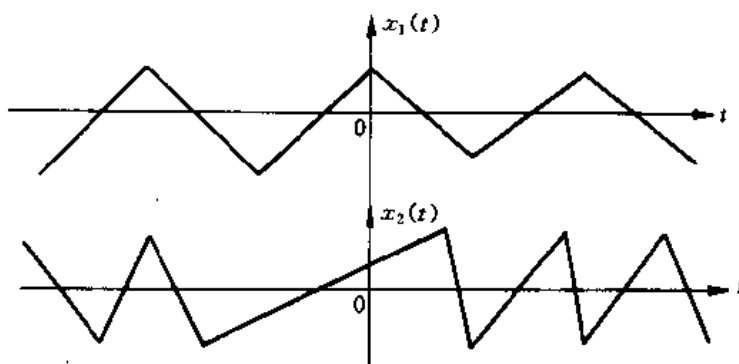


图 1-14

第四节 信号的相关分析

信号的相关又叫信号的时差(时延),它的特点是在广义积分平均时将信号作了恰当的时延 τ ,从而反映信号取值的大小和先后的影响,信号的相关分析进一步完善了信号的时域描述。

一、信号的自相关函数 $R_x(\tau)$

依据对信号的相关描述,信号 $x(t)$ 自相关函数 $R_x(\tau)$ 表达式为:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

式中: τ ——时差(延)(单位:S), $-\infty < \tau < \infty$

$R_x(\tau)$ 的估值表达式为:

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (1-12)$$

其测试过程如图1-15 所示。

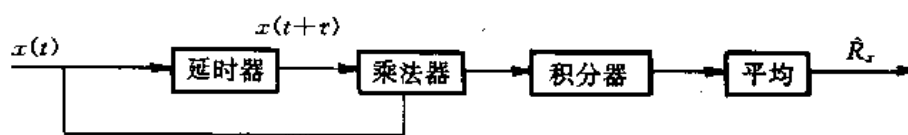


图1-15 信号自相关的测试

自相关函数有下列性质:

1. 当 $\tau=0$ 时,信号 $R_x(\tau)$ 就是信号的均方值 Ψ_x^2 。

$$R_x(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt = \Psi_x^2$$

2. $R_x(0) \geq R_x(\tau)$ 即在 $\tau=0$ 处取最大值。

3. $R_x(\tau)$ 为偶函数, 即 $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

令 $t - \tau = \xi$

$$R_x(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\xi+\tau) \cdot x(\xi)d\xi = R_x(\tau)$$

4. 周期信号的自相关函数必呈同周期性。

周期信号: $x(t) = x(t \pm nT)$

$$\begin{aligned} R_x(\tau \pm nT) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t \pm nT)x(t \pm nT + \tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau)dt \\ &= R_x(\tau) \end{aligned}$$

综上所述, 自相关函数 $R_x(\tau)$ 的一般图形如图1-16 所示。

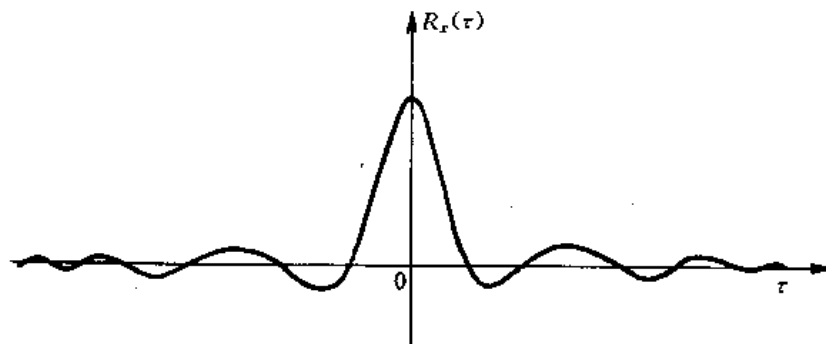


图1-16 自相关函数的性质

显然, 自相关函数描述了信号现在值与未来值之间的依赖关系, 能反映信号变化的剧烈程度, 也是信号的基本统计特征之一。信号如果越是“随机”, 则 τ 离开零点时, 因 $x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 两者相关性就越小, $R_x(\tau)$ 的衰减也越快。如图1-17 所示, 由信号的自相关函数, 可判断信号的随机程度。

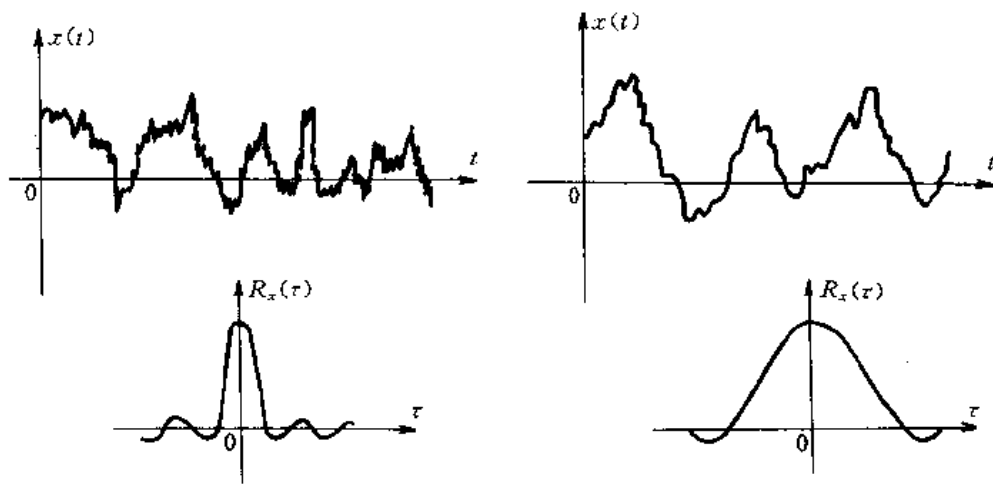


图1-17 变化迅速的和变化缓慢信号的自相关函数

自相关函数是区分信号类型的一个非常有效手段。利用其性质4,对信号作自相关处理,就可判断其信号的类型,即是否含有周期信号。图1-18是四种典型信号的自相关函数。

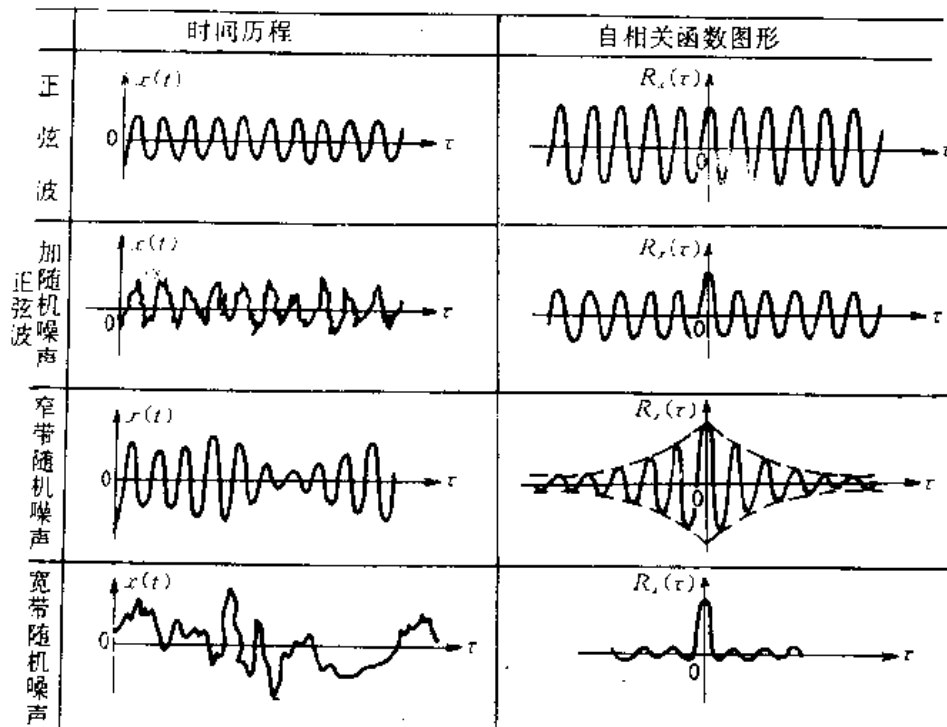


图1-18 四种典型信号的自相关

二、信号的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$

互相关函数是两个信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的广义积分平均的运算,定义式为:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (1-13)$$

其估值式为:

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (1-14)$$

它表征了一个信号 $y(t)$ 的取值对另一个信号 $x(t)$ 取值的依赖程度(相关性)。显然 $R_x(\tau)$ 是 $R_{xy}(\tau)$ 的一个特殊情况。 $R_{xy}(\tau)$ 越接近于 $R_x(\tau)$,则 $y(t)$ 与 $x(t)$ 波形就越相似。

互相关函数有如下基本性质:

1. $R_{xy}(\tau)$ 通常在时延 $t \rightarrow \tau$ 处,取最大值。
2. 为非偶函数,即 $R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$
3. $R_{xy}(\tau) \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)}$
4. 两个统计独立的随机信号,均值为零,则 $R_{xy}(\tau) = 0$ 。

综上所述,互相关函数一般图形如图1-19所示。

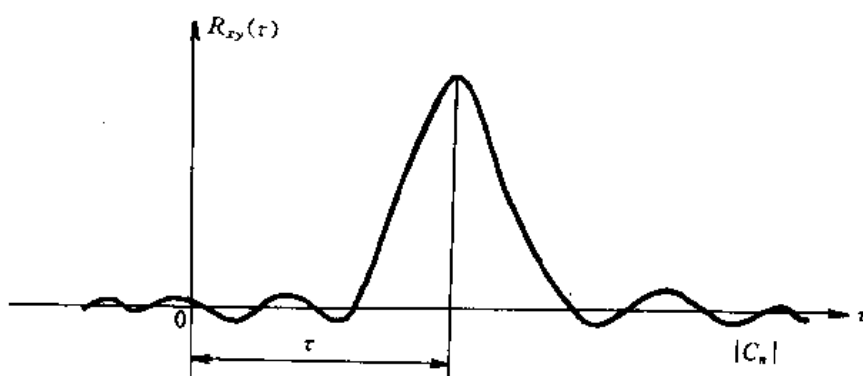


图1-19 互相关信号的基本性质

值得注意的是,对两个周期不等的周期信号,其互相关函数的求取至少需要相当于这两个周期的最小公倍数那样的“时长”才足以反映 $R_{xy}(\tau)$ 的全部特点。

例1: $x(t)=C=$ 常量, $y(t)=D=$ 常量, 则

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T CD dt = CD$$

例2: $x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$, $y(t)=y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)$ 求 $R_{xy}(\tau)$ 。

解: 按定义

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)] \cdot [y_1(t+\tau) + y_2(t+\tau) + y_3(t+\tau)] dt \\ &= R_{x_1y_1}(\tau) + R_{x_1y_2}(\tau) + R_{x_1y_3}(\tau) + R_{x_2y_1}(\tau) + R_{x_2y_2}(\tau) + R_{x_2y_3}(\tau) \\ &\quad + R_{x_3y_1}(\tau) + R_{x_3y_2}(\tau) + R_{x_3y_3}(\tau) \end{aligned}$$

若

$$x(t) = \sum_{i=1}^m x_i(t), y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$$

显然有

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n R_{x_i y_i}(\tau)$$

例3: $x(t)=C$, $y(t)=y_0 \sin(\omega_y t + \theta_y)$, 求 $R_{xy}(\tau)$ 。

解: 按定义

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C y_0 \sin[\omega_y(t+\tau) + \theta_y] dt \\ &= C y_0 \cos \theta_y \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin[\omega_y(t+\tau)] dt + (C y_0 \sin \theta_y) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos[\omega_y(t+\tau)] dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

即直流信号 $x(t)=C$ 和纯交流信号 $y(t)=y_0 \sin(\omega_y t + \theta_y)$ 不相关。

例4: 若 $x(t)=x_0 \sin(\omega_x t + \theta_x)$, $y(t)=y_0 \sin(\omega_y t + \theta_y)$, 求 $R_{xy}(\tau)$ 。

解: 令 $\theta_x = \theta$, $\theta_y = \theta_x + (\theta_y - \theta_x) = \theta_x + \phi$, $\phi = \theta_y - \theta_x$

① $\omega_x = \omega_y = \omega$, 两同谐波信号同频

$$\begin{aligned}
\text{则 } R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_0 y_0 \sin(\omega_x t + \theta_x) \sin[\omega_y(t+\tau) - \theta + \phi] dt \\
&= x_0 y_0 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t + \theta) \cdot \sin[(\omega t + \theta) + (\omega\tau + \phi)] dt
\end{aligned}$$

式中令 $\omega t + \theta = \alpha, \omega\tau + \phi = \beta$ 得:

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \frac{\omega}{2\pi} x_0 y_0 \int_0^{2\pi} \sin\alpha \sin(\alpha + \beta) \frac{d\alpha}{\omega} \\
&= \frac{\omega}{2\pi} x_0 y_0 \int_0^{2\pi} \sin\alpha [\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta] d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} x_0 y_0 [\cos\beta \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha d\alpha + \sin\beta \int_0^{2\pi} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha] \\
&= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos\beta \\
&= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos[\omega\tau + (\theta_y - \theta_x)]
\end{aligned}$$

上述计算中利用了三角函数的正交性 $\int_0^{2\pi} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha = 0$ 和 $\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha d\alpha = \pi$ 。

若 $x(t) = x_0 \sin(\omega t), y(t) = y_0 \cos(\omega t) = y_0 \sin(\omega t + \pi/2)$ 则

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos[\omega\tau + \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} x_0 y_0 \sin\omega\tau$$

若 $x(t) = y(t) = x_0 \sin(t + \theta_x)$, 则因为 $\theta_y - \theta_x = 0$, 有:

$$R_x(\tau) = R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega\tau + 0) = \frac{1}{2} x_0^2 \cos\omega\tau$$

以上说明, 两个有固定相位差的同频简谐信号, 其互相关函数反映了各自的幅值信息和相位信息; 而在自相关函数中, 只含有原信号的幅值信息, 丢掉了相位信息。

② $\omega_x = n\omega, \omega_y = m\omega$, 当 $m \neq n$ 时, 即不同频, 此时按定义有:

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_0 \sin(\omega_x t + \theta_x) y_0 \sin[\omega_y(t+\tau) + \theta_y] dt \\
&= x_0 y_0 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega_x t + \theta) \sin[\omega_y(t+\tau) + \theta + \phi] dt \\
&= x_0 y_0 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\sin\omega_x t \cos\theta + \cos\omega_x t \sin\theta) \\
&\quad \cdot [\sin(\omega_y t + \theta) \cos(\omega_y \tau + \phi) + \cos(\omega_y t + \theta) \sin(\omega_y \tau + \phi)] dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

即不同频的简谐信号不相关。

例5: 设 $x(t) = N_1(t) + \mu_x, y(t) = N_2(t) + \mu_y$, 式中 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 互为统计独立且均值为零的两个随机噪声, μ_x 和 μ_y 为 $x(t), y(t)$ 的均值。

解: 按定义

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [N_1(t) + \mu_x][N_2(t+\tau) + \mu_y] dt \\
&= R_{N_1 N_2}(\tau) + R_{N_1 \mu_y}(\tau) + R_{\mu_x N_2} + R_{\mu_x \mu_y}(\tau)
\end{aligned}$$

$$= 0 + 0 - 0 + \mu_x \mu_y = \mu_x \mu_y$$

上式说明,均值为零的随机噪声互不相关,即 $R_{N_1 N_2}(\tau) = 0$ 。

直流信号和随机噪声是本质不同的两类信号,也不相关,即 $R_{N_1 \mu_y}(\tau) = 0, R_{\mu_x N_2}(\tau) = 0$ 。

由以上例子,可得出以下结论:

(1) 常值(即直流)信号,只能和常值或复杂信号中的常值分量相关。

(2) 同频的简谐信号相关,不同频的简谐信号不相关。

(3) 两个或多个统计独立的随机信号,只有它们的均值即直流分量部份才可能相关,除此以外都不相关。

利用相关函数,用相关的方法来区分和处理不同结构(即具有不同的复杂分量)的各类信号。利用互相关函数可以测量系统的延时。例如,确定信号通过一给定系统所需的时间(输出滞后输入的时间)。若系统是线性的,则滞后时间可直接用输入、输出互相关图上峰值的位置来确定。利用互相关函数可识别、提取混淆在噪声中的信号。例如,对一线性系统进行激振,测得的振动信号中含有大量的噪声干扰。根据线性系统的频率保持性,只有与激振相同的成份才可能是由激振而引起的响应,只要将激振信号和测得信号进行互相关处理,因干扰信号与激振信号不同频(即不相关),这样可得到由激振引起的响应,消除了噪声干扰的影响。

在测试技术中,互相关技术也得到了广泛的应用。下面是应用互相关技术进行测试的几个例子。

1. 测运动速度

图1-20(a)为非接触测量高速飞行弹丸运动示意图。其测试系统由性能相同的两光源、光电元件,可调延时器及相关仪器组成。

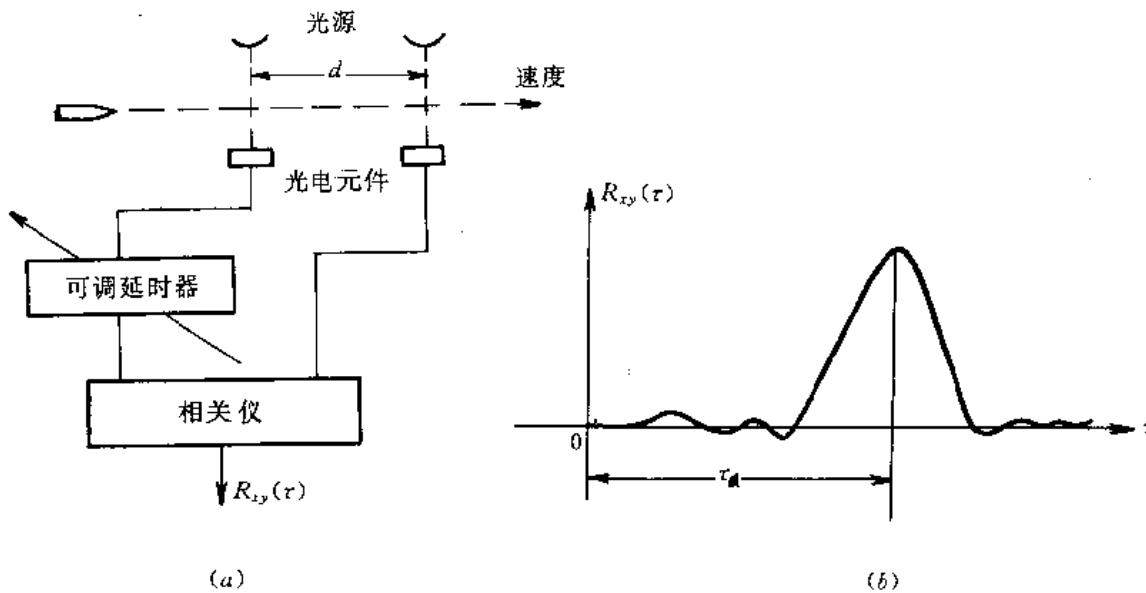


图1-20 弹丸飞行速度的非接触测量

当弹丸分别通过两光电元件时,光源被挡,光电元件产生电信号,经可调延时,进行互相关处理。当可调延时 τ 等于弹丸在两个测点之间经过所需的时间 τ_0 时,互相关函数为最大值,如图1-20(b)所示。弹丸飞行速度为: $V=d/\tau_d$ 。

2. 测定深埋地下的输油管道裂损位置

输油管道裂损示意如图1-21所示。

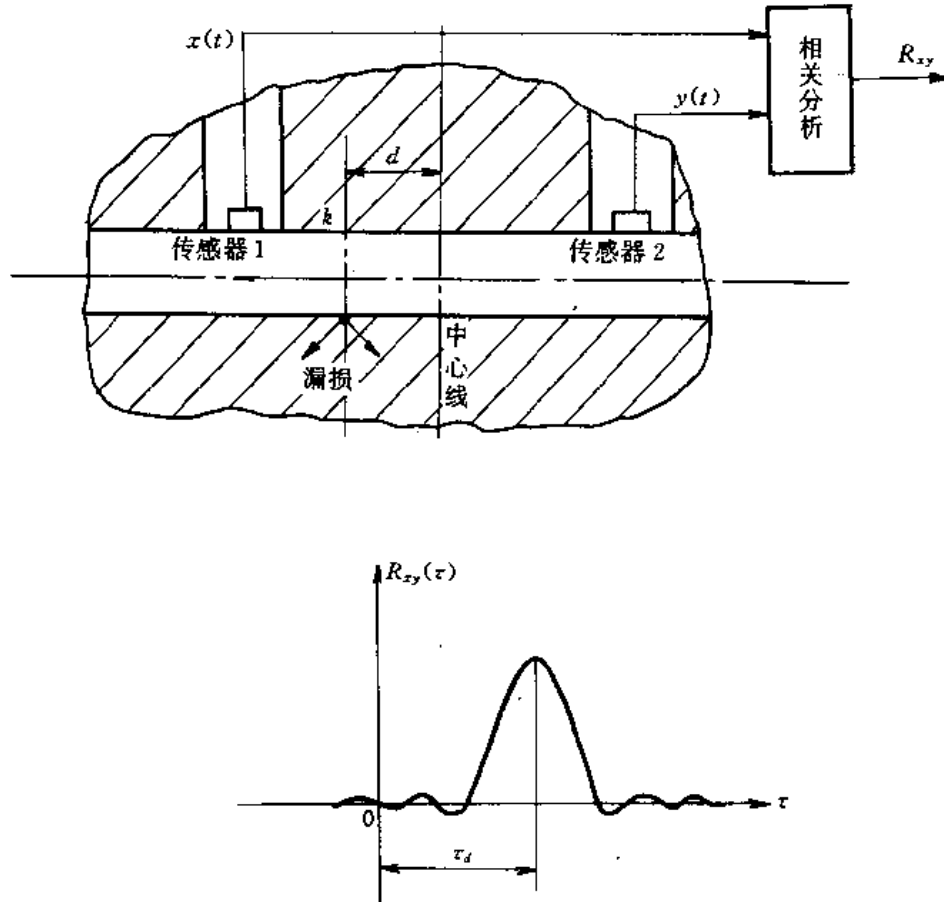


图1-21 确定输油管道裂损位置

图中,漏损处 K 视为向两侧传播声响的声源。传感器1和传感器2接收到从漏油处传来的声响时间就不相同,时差为 τ ,将两传感器转换的信号进行互相关处理,得出时差 $\tau=\tau_d$,由

下式可确定漏油处的位置: $d=\frac{1}{2}V\tau_d$

式中: d ——两传感器的中点至漏损处的距离

V ——声响通过管道的传播速度

3. 寻找振动源

汽车行驶在路面上,前、后轮的振动都可能导致驾驶室的振动。如能测出驾驶室振动哪

些成分是由前轮引起的,哪些成分是由后轮引起的,哪些是由前后轮共同引起的,对于汽车消振设计十分有用。

其测试的基本原理如图1-22所示。

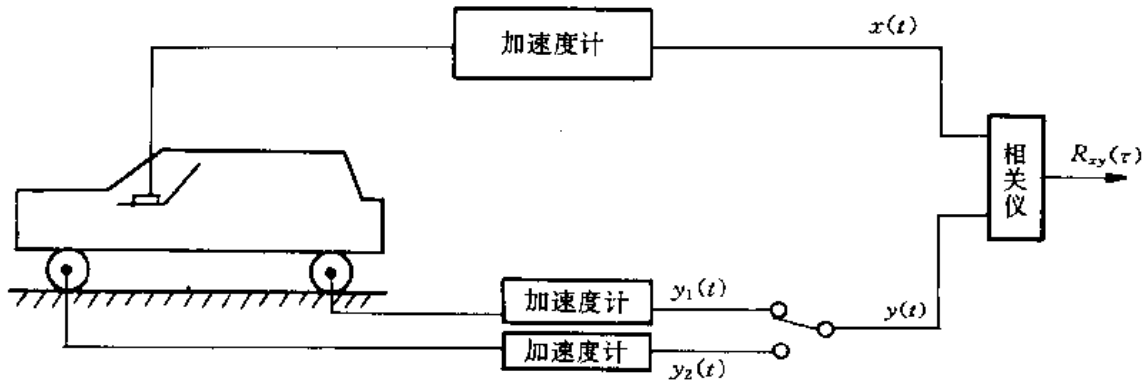


图1-22 测振动源

将用加速度传感器测出的座位与前轮的振动信号作相关处理,得相关函数 $R_{xy_1}(\tau)$ 。再用加速度传感器把后轮振动信号与座位振动信号测出送入相关仪器,得 $R_{xy_2}(\tau)$ 。从 $R_{xy_1}(\tau)$ 、 $R_{xy_2}(\tau)$ 的分析中,可以得到前、后轮振动对座位的影响,分析研究改进措施。

三、信号的互相关系数 $\rho_{xy}(\tau)$

由于信号的互相关函数的取值大小受信号的强弱的影响,为了排除这种影响,采用了与信号本身强度无关的无量纲系数——相关系数。

相关系数定义为:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)R_y(0)}} = \frac{R_{xy}(\tau)}{x_{rms}y_{rms}} \quad (1-15)$$

由于 $|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)}$,故 $|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1$

$\rho_{xy}(\tau) = 1$,说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 完全相关。

$\rho_{xy}(\tau) = 0$,说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 完全不相关。

$0 < |\rho_{xy}(\tau)| < 1$,说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 部分相关。

例6:求例4中两个信号的互相关系数。

解:对于给定的 $x(t) = X_0 \sin(\omega_x t + \theta_x)$ 和 $y(t) = Y_0 \sin(\omega_y t + \theta_y)$,仅在 $\omega_x = \omega_y = \omega$ 时,有:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos[\omega\tau + (\theta_y - \theta_x)]$$

$$R_x(0) = \frac{x_0^2}{2}, R_y(0) = \frac{y_0^2}{2}$$

所以

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)R_y(0)}} = \frac{1/2 \{x_0 y_0 \cos[\omega\tau + (\theta_y - \theta_x)]\}}{\sqrt{(x_0/2)^2 (y_0/2)^2}}$$

$$= \cos[\omega t + (\theta_y - \theta_x)]$$

可见相关系数实质上是一种归一化的互相关函数。

四、正交函数及正交函数集的基本概念

在工程信号分析中,为了使研究问题得到简化,常常将需要把一个复杂信号分解若干正交信号。例如在物体受力的分析过程中,常常将一个空间的力矢量分解成沿坐标轴的三个分量,显然这使力的研究得到简化。复杂信号怎样进行这种分解,是这节所要讨论的。

在指定区间 (t_1, t_2) ,考察两个函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是否相关,即

$$x_1(t) \approx C_{12}x_2(t) \quad t_1 < t < t_2$$

式中 C_{12} 是一个待定系数。

两个信号的均方误差(能量误差) ϵ 可用下式表示

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x_1(t) - C_{12}x_2(t)]^2 dt$$

使 ϵ 最小,系数 C_{12} 应满足:

$$\frac{d\epsilon}{dC_{12}} = \frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x_1(t) - C_{12}x_2(t)]^2 dt \right\} = 0$$

对上式化简可得最佳相似系数

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_2^2(t) dt} \quad (1-16)$$

若 $C_{12}=0$,则表明 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 是互不相关,彼此独立的两个函数,即 $x_1(t)$ 中不含有 $x_2(t)$ 的分量。因此两个函数为正交函数定义式为

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2(t) dt = 0 \quad t_1 < t < t_2 \quad (1-17)$$

式(1-17)表示的两个信号的乘积积分也可作为其线性相关的一种量度。 $\sin(n\omega_0 t)$ 与 $\sin(m\omega_0 t)$ 、 $\sin(n\omega_0 t)$ 与 $\cos(m\omega_0 t)$ 及 $\cos(n\omega_0 t)$ 与 $\cos(m\omega_0 t)$ 在 $(t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega})$ 区间上($n \neq m$),满足式(1-17),所以均为正交函数。

如图1-23所示,一个三维的坐标构成一个三维的矢量空间。设 a_x, a_y 和 a_z 分别为 x, y 和 z 轴上的单位矢量,则由原点至空间任一点 (x_0, y_0, z_0) 的矢量 A ,可写为

$$A = x_0 a_x + y_0 a_y + z_0 a_z$$

上述互相垂直的三个单位矢量 a_x, a_y, a_z 构成的矢量组称作正交矢量组。显然它们满足下述关系

$$\begin{aligned} a_x \cdot a_y &= a_y \cdot a_z = a_x \cdot a_z = 0 \\ a_x \cdot a_x &= a_y \cdot a_y = a_z \cdot a_z = 1 \end{aligned}$$

上式可简写成

$$a_m \cdot a_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (1-18)$$

若 $a_m \cdot a_n$ 不是单位矢量, 仍满足上式, 此时, 当 $m=n$ 时, $a_m \cdot a_n$ 等于不为 1 的常数 k_m 。

依次类推, 当矢量 x_1, x_2, \dots, x_n 满足

$$x_m \cdot x_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ k_m & m = n \end{cases} \quad (1-19)$$

时, 则为一个 n 维正交矢量组。若 n 维的正交矢量组构成正交矢量空间, 则任一个矢量 A 都可用沿 n 个正交矢量的分量精确地表示, 即

$$A = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1-20)$$

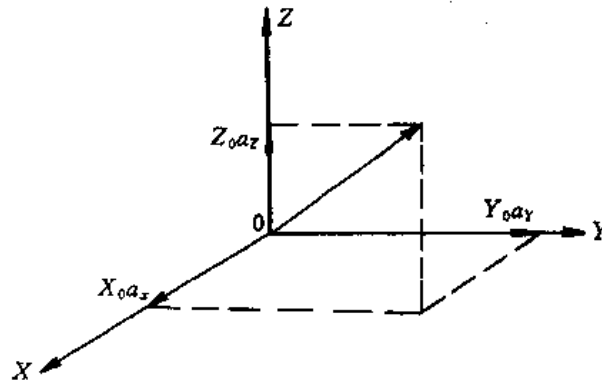


图 1-23

由上述的正交函数和正交矢量组的概念, 可引伸出正交函数集的定义。

设有 n 个函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 构成的函数集, 在区间 (t_1, t_2) 内有

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x_j(t) x_k(t) dt &= 0 & j \neq k \\ \int_{t_1}^{t_2} x_j^2(t) dt &= k_j & j = k \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

则称此函数集为正交函数集。

类似以正交矢量组表示矢量, 对任一函数 $Y(t)$ 也可用正交函数集中 n 个正交函数的线性组合在给定的区间 (t_1, t_2) 内加以近似, 即

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) = \sum_{r=1}^n c_r x_r(t) \quad (1-22)$$

其误差函数为

$$y_e(t) = y(t) - \sum_{r=1}^n c_r x_r(t)$$

与正交函数类似由其均方值的最小来确定系数 c_r 。 c_r 为:

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y(t) x_r(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_r^2(t) dt} \quad (1-23)$$

这样,任一函数 $y(t)$ 在指定区间就可以用正交函数集中各个正交函数的线性组合去近似。

若在正交函数集 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 之外,不存在函数 $f(t)$ 能满足

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)x_i(t)dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则此正交函数集即为完备正交函数集,此时任一函数 $y(t)$ 在指定区间上都可以表示为

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_rx_r(t) + \dots$$

其均方误差为

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [y(t) - \sum_{r=1}^n c_r x_r(t)]^2 dt$$

上式化简得

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt - \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r \right] \quad (1-24)$$

式(1-24)中 K_r 为

$$K_r = \int_{t_1}^{t_2} x_r^2(t) dt$$

若是完备正交函数集,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt - \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 K_r \right] = 0$$

所以

$$\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 K_r \quad (1-25)$$

如果 $K_r = 1$,则

$$\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \quad (1-26)$$

式(1-25)、(1-26)表明,在区间 (t_1, t_2) 内,信号的总能量等于此信号在完备正交函数集中各个正交分量的能量和。式(1-25)、(1-26)通常被称为能量等式或Parseval能量等式。

由以上讨论可知,一个函数可用它在完备正交函数集中各个正交函数的线性组合来表示,这种表示方法称作函数的广义傅里叶级数展开。应用最广泛的正交函数集有三角函数集和复指数函数集,它们是以正弦波的线性组合表示信号的。利用信号函数的完备正交函数集,可揭示信号的结构和组成,从而为信号分析提供更为有效的手段。此外,还有拉德马赫(Rademaher)函数集,哈尔(Haar)函数集和沃尔什(Walsh)函数集,它们是以矩形波或方波的线性组合表示信号。而一些多函数,如勒让德(Legendre)多项式、雅可比(Jacobi)多项式,切贝可夫多项式等也可以构成正交函数集。

下节中我们将介绍最常用的三角函数和复指数函数正交集表示信号的方法。

第五节 信号的频域描述

信号的时域描述,能够提供诸如信号的强弱大小,变化快慢,不同信号波形相似程度,相

互间的相位关系等。两个时域信号的统计特征参数可能相同,但实际作用效果的可能有较大不同。例如,同样通过25W 收录机输出的方差或均值都差不多的声信号,但因频率的高低和节奏的不同,给人的感受并不一样;同均方差、同均值的两个振动信号,如果频率高低悬殊,则它们对构件的损伤程度也不相同。这就是说,时域信号并不能明显表示出信号的频率构成,因此必须研究信号中蕴含的频率结构(频率分量)。描述和分析信号的频率结构的主要方法之一是傅里叶分析法,相应的描述和分析称为信号频率描述或频域分析。

本节将从周期信号的频域描述开始,运用数学手段(公式),逐一介绍不同信号的描述方法、物理意义及其应用。

一、周期信号的频域描述

1. 傅里叶级数和离散频谱图

周期函数 $x(t)$,其周期为 T ,若在 $[0, T]$ 区间内,完备的正交函数集由 $\sin n\omega_0 t$ 和 $\cos n\omega_0 t$ ($m, n=0, 1, 2, \dots$) 构成。函数满足下列狄里希利条件,即①信号在定义周期 $[0, T]$ 内单调连续或只有有限个第一类间断点;②在此定义周期内只有有限个极限点;③ $x(t)$ 是绝对可积的。

函数就可展开成傅里叶级数,记作:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-27)$$

式中, $n=1, 2, 3, \dots$

$\omega_0=2\pi/T$, 周期信号的角频率(又称“基频”)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1-28)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega_0 t dt \quad (1-29)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1-30)$$

a_0, a_n, b_n , 统称为傅里叶系数,它们与 t 无关。傅里叶系数取值大小,就确定了 $x(t)$ 的波形。确切地说,任何周期信号可以认为由两种基本信号所组成。一类是以 $a_0/2$ 描述的直流分量,一类是由许多正交的、幅值分别以 a_n 和 b_n 描述的、频率各为基频及其整倍数的余弦和正弦(纯波动)分量(即谐波)的迭加组成。因此傅里叶级数表达了组成周期信号的各分量的“频率结构”。

若期信号 $x(t)$ 为奇函数时, $a_n=0, a_0=0$

$$\text{此时} \quad x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (1-31)$$

若周期信号 $x(t)$ 即不是偶函数又不是奇函数时,可以把式(1-27)改写为:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_0 t \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cos \Phi_n \cos n\omega_0 t + \sin \Phi_n \sin n\omega_0 t] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos [n\omega_0 t + \theta_n] \tag{1-32}
\end{aligned}$$

式中： $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ——为谐波分量的幅值。

当 $n=1$ 时，称为一次谐波即基波，相应的频率即为基频 ω_0 ； $n=2, 3, \dots$ 时，依次称为二次、三次…谐波，相应的频率称为二次、三次…谐波频率。

$$\theta_n = -\Phi_n = -\cos^{-1} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = -\sin^{-1} \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n} \tag{1-33}$$

式中 θ_n 称为各次谐波的相位。

式(1-32)实际描述了周期信号 $x(t)$ 的频率结构。我们以幅值 A_n 为纵座标，以 ω 为横座标画出的 $A_n-\omega$ 图称为幅值频谱图，简称频谱图；以 θ_n 为纵座标， ω 为横座标画出的 $\theta_n-\omega$ 图称为相位频谱图，简称相位图。

由式(1-32)可看出，周期信号的频谱是离散的，即各次谐波频率都是基频 ω_0 的整数倍 $n\omega_0$ 。通过以下几个例子，不难看出，周期信号的谱图必以 $n\omega_0$ 为间隔作离散状排列。

例7：求如图1-24(a)所示的周期方波 $x(t)$ 的频谱，该方波表达式为：

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T/2 \\ 0 & t = 0 \text{ 及 } t = T/2 \\ -A & T/2 < t < T \end{cases}$$

解：由图可知，该信号为奇函数，因此 $a_0=0$ ， $a_n=0$ ， $\omega_0=2\pi/T$

据式(1-19)有：

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} A \sin n\omega_0 t dt = \frac{2A}{n\pi} [-\cos n\omega_0 t]_0^{T/2} \\
&= \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4A}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

该周期方波可写成：

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{4A}{\pi} (\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots) \\
&= \frac{4A}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1} \sin (2i-1)\omega_0 t
\end{aligned}$$

画出其频谱图如图1-24(b)所示。

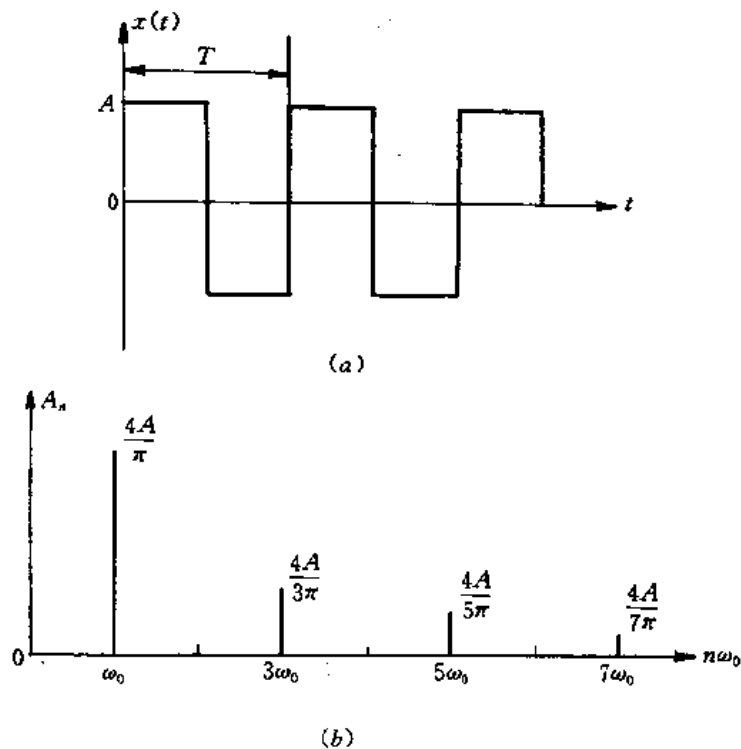


图1-24 周期方波及频谱

例8: 求图1-25(a)所示三角波的频谱, 其表达式为:

$$x(t) = \begin{cases} A + (2A/T)t & -T < t < 0 \\ A - (2A/T)t & 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$

解: 由图可知, $x(t) = x(-t)$, $x(t)$ 是偶函数。记 $\omega_0 = 2\pi/T$, 则

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} (1 - \frac{2}{T}t) dt = A$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} (1 - \frac{2}{T}t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2A}{(n\pi)^2} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \frac{4A}{(n\pi)^2} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

于是有

$$x(t) = \frac{4A}{\pi^2} (\cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0 t + \dots)$$

其频谱图如图1-25(b)所示。

从以上两列可看出, 三角波信号的频谱比方波信号的频谱衰减快得多, 这说明三角波的频率结构主要由低频成份组成, 而方波的高频成份比较大。这反映到时域波形上, 含高频成份多的时域波形变化比含高频成份少的时域波(三角波)要剧烈得多。因此, 可根据时域波形

变化的剧烈成度,可大概判断它的频谱成份。

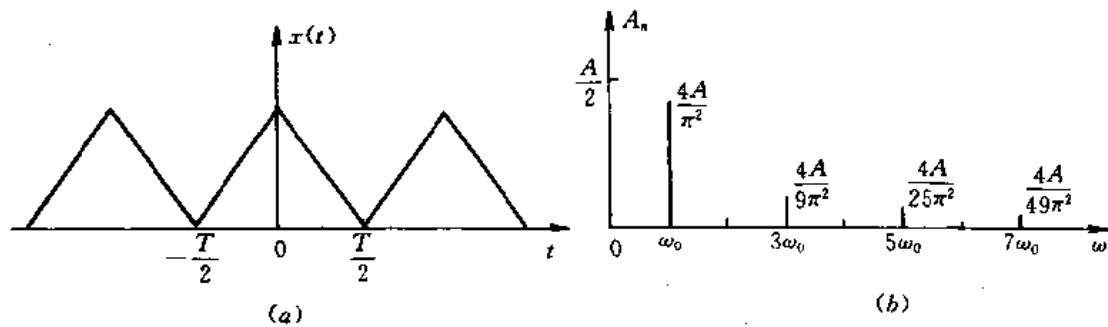


图1-25 三角波及其频谱

通过以上分析,我们可得出以下几个结论:

- ①周期信号的频谱是离散的;
- ②周期信号频谱中的谱线只能出现在基频的整数倍频率处;
- ③周期信号的频谱线是收敛的。

图1-26 所示三维图,表明了同一个周期信号方波(图中只画出一个周期)的时域描述和频域描述间的对应关系。时域描述、频域描述是同一个信号的不同描述,并没有改变信号本身的特性,它们只表征了信号的不同特征。

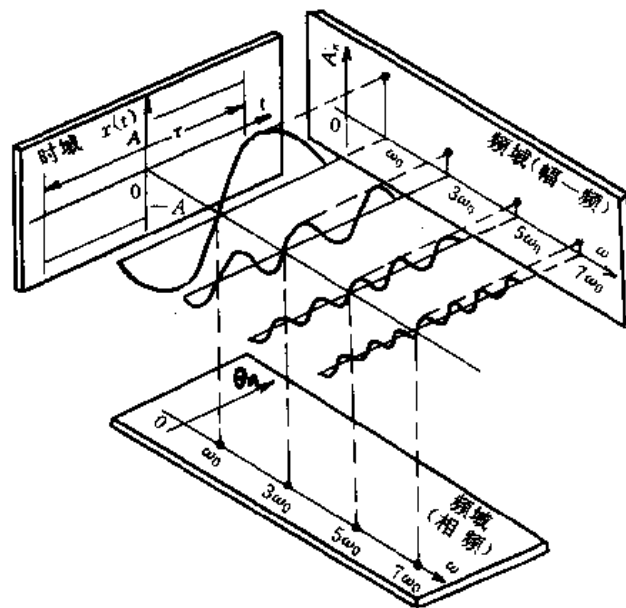


图1-26 周期方波的时频对应关系

2. 傅里叶级数展开的物理意义

任何一个周期信号只要满足狄里希利条件,就可展开如式(1-27)的傅里叶级数,即:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

其傅里叶系数又可写为如下三式:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$\frac{b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

设 $y_1(t)=1$, $y_2(t)=\cos n\omega_0 t$, $y_3(t)=\sin n\omega_0 t$ 注意观察上述三式,不难发现

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad R_{xy_1}(0) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \mu_x = \frac{a_0}{2} \end{aligned} \quad (1-34)$$

这说明信号 $x(t)$ 和单位直流分量 $y_1(t)=1$ 相关的结果,就是取出 $x(t)$ 的均值 μ_x ,在数值上为零阶傅里叶系数 a_0 的一半。或者说 $a_0/2$ 就是信号的均值即直流分量。

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad R_{xy_2}(0) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_0(t+0) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_0 t dt \right] = \frac{1}{2} a_n = R_{x \cos n\omega_0 t}(0) \end{aligned} \quad (1-35)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad R_{xy_3}(0) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin n\omega_0(t+0) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega_0 t dt \right] = \frac{1}{2} b_n = R_{x \sin n\omega_0 t}(0) \end{aligned} \quad (1-36)$$

这说明,求取傅里叶系数 a_n 和 b_n 的过程,就是求取信号 $x(t)$ 与单位余弦(或正弦)信号相关的过程。如果该信号 $x(t)$ 内存在与该单位余弦(或正弦)信号同频的分量,相关的结果就能取出非零的 a_n 或 b_n 来。否则就不相关即没有这一分量(成分)。所谓傅里叶级数展开,就是做信号 $x(t)$ 与单位简谐信号的相关,相关的结果就是——取出该 $x(t)$ 的谐波分量,并表达在频域上。

因此,傅里叶级数展开就是寻求波形的相关,这就是它的物理意义。

3. 复指数函数的傅里叶展开及频谱

欧拉公式表达式为:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{-j\omega t} + e^{j\omega t})$$

$$\sin \omega t = j \frac{1}{2} (e^{-j\omega t} - e^{j\omega t})$$

将欧拉公式代入式(1-16)得:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t}) + \frac{b_n}{n} j (e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} \right] \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad C_n = (a_n - jb_n)/2 \quad (1-37)$$

$$C_{-n} = (a_n + jb_n)/2 \quad (1-38)$$

$$C_0 = a_0/2 \quad (1-39)$$

$$\text{则} \quad x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-40)$$

$$\begin{aligned} \text{式中:} \quad C_n &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) [\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (1-41)$$

$$\text{因为} \quad e^{\pm jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t \pm j \sin n\omega_0 t$$

所以 C_n 可写成复数形式

$$C_n = \text{Re}(C_n) + j \text{Im}(C_n) = |C_n| e^{j\theta_n} \quad (1-42)$$

$$\text{其中} \quad |C_n| = \sqrt{[\text{Re}(C_n)]^2 + [\text{Im}(C_n)]^2} \quad (1-43)$$

$$\theta_n = \text{Arg}(C_n) = \text{tg}^{-1} \frac{\text{Im}(C_n)}{\text{Re}(C_n)} \quad (1-44)$$

以 $|C_n|$ 、 θ_n 为纵坐标, ω 为横坐标作图,得到复指数傅里叶级数展开式的频谱图。

例9:求例7中图1-24所示方法的复指数形式的傅里叶展开及其频谱图。

解:将 $x(t)$ 分为两个半周期代入式(1-41):

$$C_n = \frac{1}{T} \left[\int_{T/2}^0 -A \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_0^{T/2} A \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \frac{A}{T} [(1 - e^{-jn\pi}) - (e^{-jn\pi} - 1)] \frac{1}{jn\omega_0}$$

又 $e^{\pm jn\pi} = \cos n\pi \pm j \sin n\pi$ 代入上式可得:

$$C_n = \frac{A\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn\omega_0} [2 - 2(-1)^n] = \begin{cases} -j \frac{2A}{n\pi} & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0 & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

由于 C_n 是纯虚数,故 $|C_n| = (2A/n\pi)$, $\theta_n = \frac{\pi}{2}$

所以, $x(t)$ 的复指数傅里叶展开式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\omega_0 t} = j \frac{2A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot e^{j(2k+1)\omega_0 t}$$

可证明,复指数函数集 $\{e^{jn\omega_0 t}\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$,在 $[0, T]$ 区间也是一种完备正交函数集。函数 $x(t)$ 以 $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ 中各个正交分量的线性组合表示,即式(1-35)表示。

其频谱图如图1-27所示。

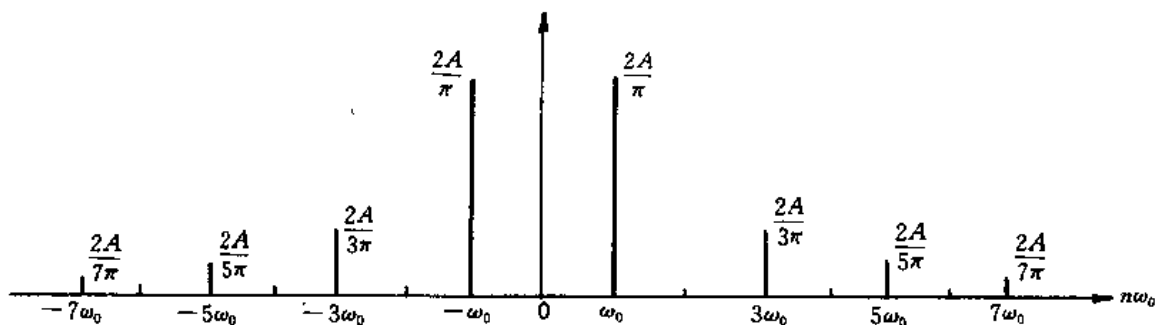


图1-27 周期方波的复数振幅频谱图

由式(1-37)~(1-39)可推出

$$|C_n| = (\sqrt{a_n^2 + b_n^2})/2 = \frac{1}{2}A_n \quad (1-45)$$

式(1-45)表明,用 $|C_n|$ 作为幅值谱表达的各次谐波分量幅值要比用 A_n 表达小一倍,且在对称的“负频率”处多了一个相应大小的幅值。也就是在 $|C_n|$ 谱图上,需要 $\pm n\omega_0$ 频率上两个向量幅值合起来才表示 A_n 谱图上的同一谐波幅值。

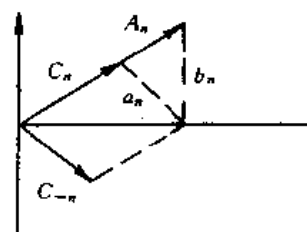


图1-28 C_n 和 a_n, A_n 的关系

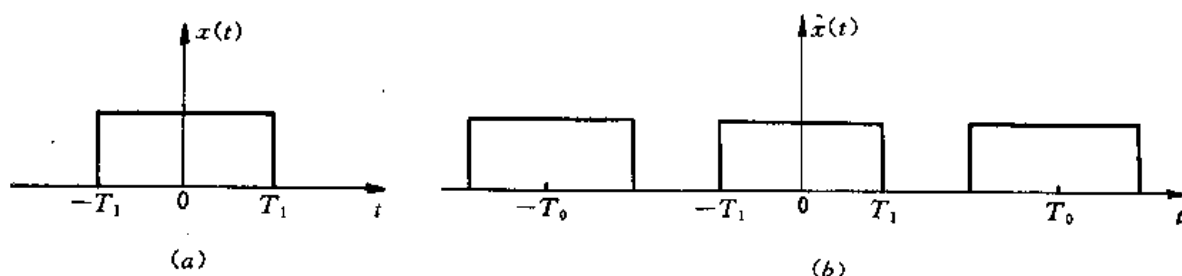
从式(1-37)~(1-39)可找出 $C_n, C_{-n}, a_n, b_n, A_n$ 之间的关系,如图1-28所示。

综上所述,周期信号频谱有两种表示方法,一种是画出 $0 \rightarrow \infty$ 频率的三角级数式的“单边谱”;一种是频率以 $-\infty \rightarrow +\infty$ 的复指数式的“双边谱”。工程应用上,大都使用简明的单边谱。

二、非周期信号与连续谱

1. 傅里叶变换

非周期信号一般指的是时域有限信号,即瞬变信号。它也可看成是周期无穷大的周期信号。图1-29(a)示出一个非周期信号 $x(t)$,对于某个 T_1 ,当 $|t| > T_1$ 时, $x(t) = 0$ 。从这个非周期信号出发,我们可以构成一个周期信号 $\hat{x}(t)$,使 $x(t)$ 是 $\hat{x}(t)$ 的一个周期,如图1-29(b)所示。当 T_0 比较大时, $\hat{x}(t)$ 就在一个较长时间间隔内与 $x(t)$ 相一致,当 $T_0 \rightarrow \infty$,对任意有限时间 t , $\hat{x}(t)$ 就等于 $x(t)$ 。



(a)非周期信号 $x(t)$ (b)由 $x(t)$ 构成的周期信号

图1-29 非周期信号与周期信号的关系

对周期信号 $\hat{x}(t)$,在 $(-T_0/2, T_0/2)$ 区间内其傅里叶级数展开为:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1-46)$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/T_0, C_n = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ (1-47)

在积分区间 $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$,有

$$x(t) = \begin{cases} \hat{x}(t) & |t| < T_0/2 \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases} \quad (1-48)$$

所以,式(1-47)可以重新写成:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

现定义 $T_0 C_n$ 的包络 $X(\omega)$ 为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-49)$$

此时,系数 C_n 可以写成

$$C_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) \quad (1-50)$$

将式(1-46)和式(1-50)比较一下, $\hat{x}(t)$ 就可以用 $X(\omega)$ 表示为

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad (1-51)$$

利用 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 的关系,上式又可表示为

$$\hat{X}(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0 t) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad (1-52)$$

随着 $T_0 \rightarrow \infty$, $\hat{x}(t)$ 趋于 $x(t)$,上式就变成 $x(t)$ 的表示式。又当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时,有 $\omega_0 \rightarrow 0$,于是式

(1-52)的右边就变为为一个积分,即:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-53)$$

称式(1-49)和式(1-53)为傅里叶变换对,即:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-54)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-55)$$

式中 $x(t)$ 在有限区间上满足狄里希利条件和在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积。式(1-54)和式(1-55)建立了 $x(t)$ 和 $X(\omega)$ 之间的对应关系。我们称式(1-55)为 $x(t)$ 的傅里叶变换,式(1-54)为傅里叶逆变换。两者统称傅里叶变换对。表示为: $x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$ 简写 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ 。记 $L[x(t)] = X(\omega)$, $L^{-1}[X(\omega)] = x(t)$ 。

一般 $X(\omega)$ 为复函数,可以写成:

$$X(\omega) = |x(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (1-56)$$

式中: $|X(\omega)| = \sqrt{R_e^2[X(\omega)] + I_e^2[X(\omega)]} \quad (1-57)$

$$\theta(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{I_e[X(\omega)]}{R_e[X(\omega)]} \quad (1-58)$$

以 $|X(\omega)|$ 或 $\theta(\omega)$ 为纵座标, ω 为横座标绘出的谱图称为幅值谱和相位谱。

由式(1-54)可看出, $x(t)$ 这一瞬变信号可表示为无数角频率正余弦分量与单位旋转矢量 $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ 迭加而成。在谱图中, ω 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续变化,每一分量幅值大小或相位大小都表示为 $X(\omega)d\omega$,因此, $X(\omega) = X(\omega)d\omega/d\omega$ 就具有谱密度的含义。

例10:求脉冲方波 $x(t) = \begin{cases} A & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$ 的频谱函数,设该方波纵轴对称,如图1-30

(a)所示。

解:由式(1-55)得:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} A e^{-j\omega t} dt = \frac{-A}{j\omega} [e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}] \\ &= 2AT_1 \frac{\sin\omega T_1}{\omega T_1} = 2AT_1 \text{Sa}(\omega T_1) \end{aligned} \quad (1-59)$$

$X(\omega)$ 示于图1-30(b)。其中 $\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$ 称为抽样函数(或插值函数),它具有下述性质:

- ① $\frac{1}{x} \cdot \sin x$ 是两个奇函数相乘,其结果为偶函数;
- ② 当 $x = (2n+1)\pi/2$ (n 为自然数)时, $\text{Sa}(x)$ 之值可查表得出;
- ③ 当 x 等于 π 的整数倍时, $\text{Sa}(x) = 0$,但在 $x \rightarrow 0$ 处 $\text{Sa}(x) \Big|_{x \rightarrow 0} = \frac{\sin x}{x} \Big|_{x \rightarrow 0} = 1$;
- ④ $\text{Sa}(x)$ 曲线下的总面积等于 π ,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

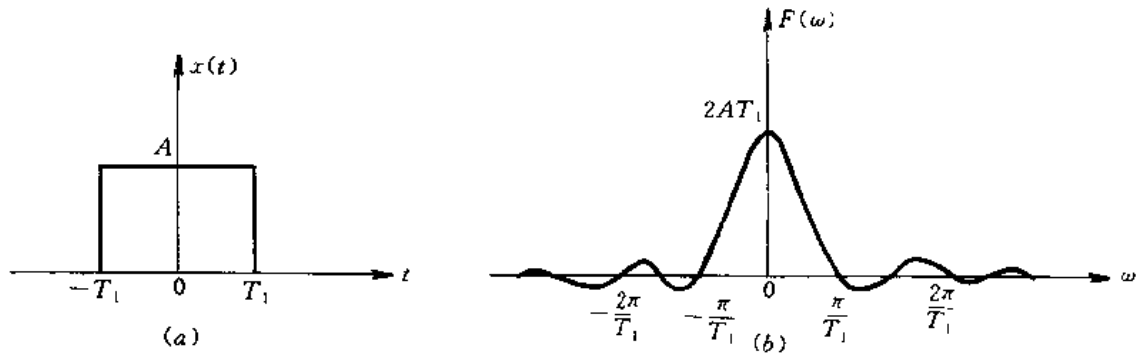


图1-30 脉冲方波时频关系图

由式(1-55)可写出:

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \\
 &= R_{\text{ccosar}}(0) - jR_{\text{rsinar}}(0)
 \end{aligned}$$

式中:

$$R_{\text{ccosar}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos \omega t dt \quad (1-60)$$

$$R_{\text{rsinar}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (1-61)$$

式(1-60)和式(1-61)说明,用单位正交正余弦密度信号去作能量信号条件下的 $\tau=0$ 时的相关,可得出瞬变信号的频谱分量。所以,建立信号时频转换关系的傅里叶级数展开或傅里叶积分变换,本质上都是作频谱分量的相关。根据同频才相关的原理来“取出”同频分量(包括“零频”的直流分量)。

2. 傅里叶变换的性质及应用

信号的时域、频域分析,以不同的角度揭示了信号的物理特征,傅里叶变换建立起它们之间的联系。作信号分析时,当在时域分析变得很困难时,可通过傅里叶变换将时域分析变换到频域分析,使之变得简单明了。因此,了解和掌握傅里叶变换的性质,有助于我们对信号分析、变换有更深刻的理解。下面我们讨论傅里叶变换的一些重要性质及其相应的物理意义。

(1) 线性叠加性

若

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega), y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$$

则

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega) \quad (1-62)$$

其中 a 和 b 均为常数。它表明两个信号线性组合的傅里叶变换是单个信号傅里叶变换的线性组合。这个性质可推广到任意多个信号的组合。

(2) 对称性

△变换式

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ (1-63)
 或 $F(t) \leftrightarrow f(-\omega)$

式(1-63)说明,信号的时域波形与信号频谱函数波形有着互相对应的关系。图1-31示出了对称性的例子。

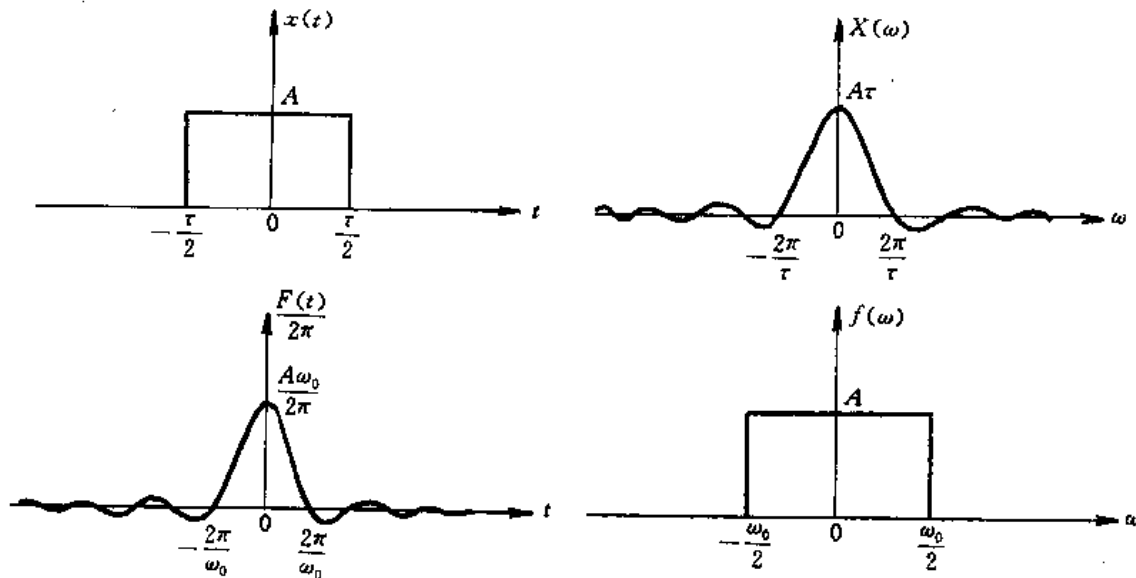


图1-31 方波信号的对称关系

(3) 奇偶虚实性

函数 $x(t)$ 的傅里叶变换为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j\omega t} dt = \text{Rm}[X(\omega)] + j\text{Im}[X(\omega)] \quad (1-64)$$

式中: 实部—— $\text{Rm}[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos\omega t dt$

虚部—— $\text{Im}[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sin\omega t dt$

由式(1-64)可知: 若 $x(t)$ 是实函数, 则 $X(\omega)$ 一般为具有实部和虚部的复函数;

若 $x(t)$ 是实偶数, 则 $X(\omega) = \text{Rm}[X(\omega)]$, 即为实偶数;

若 $x(t)$ 是实奇数, 则 $X(\omega) = j\text{Im}[X(\omega)]$, 即为虚奇函数;

若 $x(t)$ 是虚函数, 则式(1-54)中的虚实位置对称。

(4) 时间尺度改变特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 则对于常数 a , 有 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\omega/a)$ (1-65)

若 $a > 1$ 时, 时域波形被压缩 a 倍, 频域波形被扩展 a 倍; $a < 1$ 时, 时域波形被扩展 a 倍, 频域波形被压缩 a 倍。

尺度改变特性说明了时间和频率之间的反比关系。它说明了在时域中压缩信号的持续时间, 则对应于在频域中扩展了它的频率范围, 反之亦然。

(5)时延特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
 则 $x(t \pm t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$ (1-66)

式(1-66)说明,时域信号时延 t_0 ,则对应于其频谱在频域中产生附加相移 $-\omega t_0$,而幅度则保持不变。

(6)频移特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
 则 $x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$ (1-67)

式(1-67)说明, $F(\omega)$ 在频域中沿 ω 轴向右移动 ω_0 ,对应于 $x(t)$ 在时域中乘以 $e^{j\omega_0 t}$ 。也就是,函数 $f(t)$ 乘以 $e^{j\omega_0 t}$ 可使整个频谱 $F(\omega)$ 搬移到 ω_0 。在通信技术中,经常需要搬移频谱,通常是将信号 $x(t)$ 乘以正弦或余弦信号来完成频谱搬移,这个过程称为幅度调制。

(7)微分和积分特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
 则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow (j\omega)X(\omega)$ (1-68)

式(1-68)可推广到时域求 n 阶导数的情况,则有:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \quad (1-69)$$

又若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$,则有

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \cdot X(\omega) \quad (1-70)$$

以上表明,可以将微分、积分特性应用于当记录是另一记录的微分或积分的情况。例如,在振动的测试中,若能测得振动系统的位移、速度或加速度中任一参数,利用微分或积分特性就可以获得其它参数的频谱。

(8)频域卷积特性(又称调制特性)

两个函数 $x_1(t), x_2(t)$,定义 $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t-\tau)d\tau$ 为 $x_1(t), x_2(t)$ 的卷积,记为 $x_1(t) * x_2(t)$ 。

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega), x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$
 则 $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$ (1-71)

式(1-71)表明,在时域中两个函数的乘积对应于频域中它们频谱的卷积再除以 2π 。频域卷积特性又称为调制特性。

(9)能量积分(巴什瓦尔等式)

若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
 则 $\int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$ (1-72)

式(1-72)称为巴什瓦尔等式,也叫能量等式。它表明在时域中计算的信号的总能量等于在频率中计算的信号总能量。由于 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ 反映了信号的能量,所以 $|X(\omega)|^2$ 称为 $X(t)$

的能量谱密度,它决定信号沿频率轴能量密度的分布。

将傅里叶变换的基本性质列于表1-1中,以便查用。

表1-1 傅里叶变换的基本性质

性 质	时域 $x(t)$	频域 $X(\omega)$	时域频域对应关系
线性	$\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)$	$\sum_{i=1}^n a_i X_i(\omega)$	线性迭加
对称性	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$	对称
标尺变换	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	压缩与扩展
时 移	$x(t-t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$	时移与相移
	$x(at-t_0)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$	
频 移	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega-\omega_0)$	调制与频移
	$x(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)]$	
	$X(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{j}{2}[X(\omega+\omega_0)-X(\omega-\omega_0)]$	
时域微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$	
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$j(\omega)^n X(\omega)$	
频域微分	$-jtx(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$	
	$(-jt)^n x(t)$	$\frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$	
时域积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega)$	
频域积分	$\frac{1}{-jt} x(t)$	$\int_{\omega}^{\infty} X(\omega)d\omega$	
时域卷积	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$	乘积与卷积
频域卷积	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$	

三、典型信号的频谱

表1-2示出常见典型信号及频谱。

1. 单位脉冲信号

单位脉冲信号表达式为 $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

δ 函数(单位脉冲信号)的频谱由式(1-55)求出。

表1-2 常见典型信号及其频谱

信号名称	时域信号 $x(t)$	波形图	频谱函数 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt$	频谱图
矩形脉冲	A $ t < \frac{\tau}{2}$ 0 $ t \geq \frac{\tau}{2}$		$\frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ $= A\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
三角脉冲	$A\left(1 - \frac{2 t }{\tau}\right)$ $ t < \frac{\tau}{2}$ 0 $ t \geq \frac{\tau}{2}$		$\frac{8A}{\omega^2\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$ $= \frac{A\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$	
脉冲函数	$A\delta(t)$		A	
斜坡信号	$x(t)$		$j\pi\delta(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$	
阶跃信号	$Au(t)$		$\frac{A}{j\omega} + \pi A\delta(\omega)$	
直流信号	A		$2\pi A\delta(\omega)$	
冲激函数序列	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$		$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$ $(\omega_0 = \frac{2\pi}{T})$	
余弦信号	$A \cos \omega_0 t$		$A\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	

续表1-2

信号名称	时域信号 $x(t)$	波形图	频谱函数 $X(\omega) = X(\omega) e^{j\theta(\omega)}$	频谱图
正弦信号	$A\sin\omega_0 t$		$j\pi A[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
矩形调幅信号	$\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \cos\omega_0 t$		$\frac{\tau}{2} \left[\text{sinc} \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} + \text{sinc} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right]$	

$$\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^0 = 1 \quad (1-73)$$

上式表明,单位脉冲信号具有无限宽广的频谱,幅值谱密度在所有频段上都是等强度的。人们把具有这样频谱的信号类比为白色光是具有各种波长(频率)色光的全光谱,称这种信号为理想的“白噪声”。

由傅里叶变换性质,可得到如下傅里叶变换对:

时域	频域	
$\delta(t)$	1	
1	$2\pi\delta(\omega)$	
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	(1-74)
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	

2. 单位周期脉冲序列的频谱

单位周期脉冲序列的数学表达式为:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (1-75)$$

式中 T_s ——等间隔周期, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$,其图象见图1-32(a)所示。由式(1-40)可得出该周期函数的傅里叶级数的表达式为:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1-76)$$

式中:

$$\omega_0 = 2\pi/T_s$$

$$C_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_s}$$

所以代入式(1-76)得

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \quad (1-77)$$

上式的傅里叶变换

$$\delta_T(\omega) = L[\delta_T(t)] = \frac{1}{T_s} L\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (1-78)$$

又因 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_0$ 上式又可写成:

$$\delta_T(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \quad (1-79)$$

单位周期序列脉冲信号的时域和频域图象(频谱)都呈等间隔离散状。若时域脉冲幅值为1,频域脉冲幅值就为 $1/T_s$; 时域间隔为 T_s 时,频域间就为 $2\pi/T_s$ (以 ω 为变量)或 $1/T_s$ (以 f 为变量),其频谱如图1-32(b)所示。

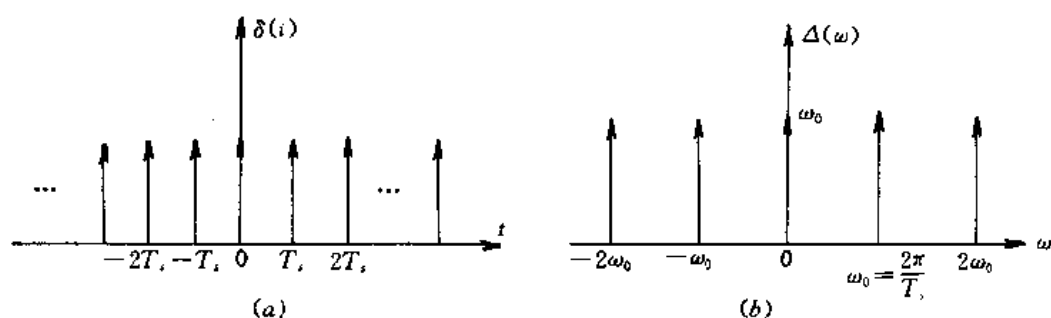


图1-32 周期单位脉冲序列及其频谱

3. 正弦和余弦信号的频谱

由于正弦和余弦信号不满足绝对可积的条件,所以我们引入 δ 函数和傅里叶变换性质求出其频谱。

我们知道 $L[\delta(t)] = \delta(\omega) = 1$

利用表1-1中的“对称性”即 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ 有 $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

所以 $L[1] = 2\pi\delta(\omega) = 2\pi\delta(-\omega) \quad (1-80)$

再据表1-1中的相移性质,有:

$$L[e^{\pm j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0) \quad (1-81)$$

把上列各式应用于(用欧拉公式表达的)正弦或余弦信号傅里叶变换中,便有:

$$\begin{aligned} L[\cos\omega_0 t] &= L\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right] = \frac{1}{2}L[e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}L[e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (1-82)$$

$$L[\sin\omega_0 t] = L\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})\right] = j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (1-83)$$

或
$$L[\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \quad (1-84)$$

$$L[\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2j}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \quad (1-85)$$

其频谱图如图1-33所示。

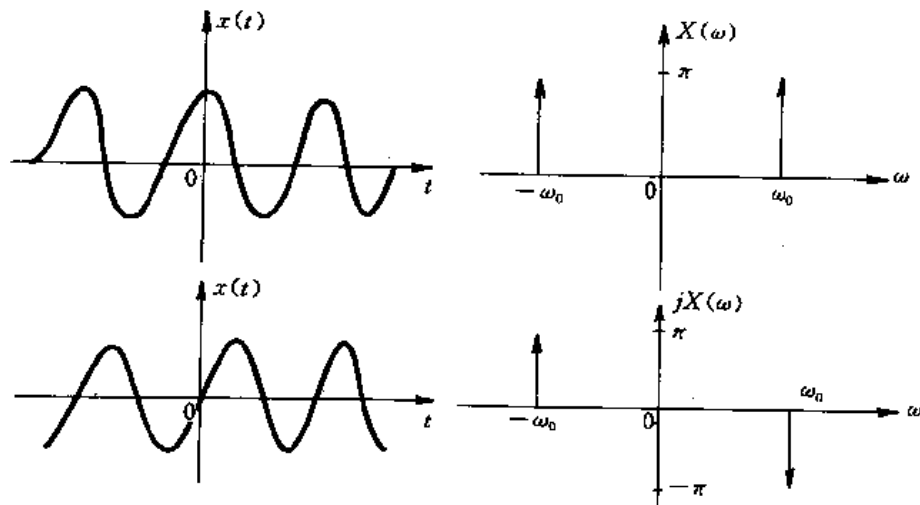


图1-33 正、余弦函数及其频谱

常见典型信号的频谱列在表1-2中,以便读者查阅。

四、随机信号的频域描述

1. 信号自功率谱

对确定性信号,都有确定时域波形和确定的频谱。信号在时域上的变化,必然引起频谱的相应变化。随机信号因为在时域上的波形是不确定的,因而也无法直接描述其确切的频谱。也就是说,它的频谱具有某种程度的不确定性。但工程测试需要了解如随机噪声、随机振动大致确定的谱描述。

随机信号是不可积的,即能量是无限的,但它的功率却是有限的,换句话说,它在不同时刻的取值虽不能确定,但在单位时间内所提供的能量——功率却基本确定。由此,就引出功率谱这一概念。

作为功率信号的随机信号不满足傅里叶变换所需要的前提——绝对可积充要条件,也就无法用傅里叶变换求其频谱。但随机信号 $x(t)$ 的自相关函数是随时差 τ 的增加而衰减的,即 $R_x(\tau)$ 是收敛的,满足可积条件。为此,取随机信号自相关函数的傅里叶变换并记作:

$$S_x(\omega) = L[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1-86)$$

对应有

$$R_x(\tau) = L^{-1}[S_x(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1-87)$$

显然, $S_x(\omega)$ 是一种频谱,它是随机信号的自相关函数的傅里叶变换,表征了随机信号的频域特征。

由式(1-87),取 $\tau=0$,得:

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega \cdot 0} d\omega$$

又,自相关函数的定义有

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t+0) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \Psi_x^2$$

比较上述两表达式,得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \Psi_x^2 \quad (1-88)$$

上式说明 $S_x(\omega)$ 是一种频谱曲线,曲线下的积分(面积)与表征信号 $x(t)$ 平均功率的均方值 Ψ_x^2 相当。因此,称 $S_x(\omega)$ 为自功率谱密度,简称自功率谱。

因为 $R_x(\tau)$ 是实偶函数,所以 $S_x(\omega)$ 也必为实偶函数,即:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau \end{aligned} \quad (1-89)$$

记

$$G_x(\omega) = \begin{cases} 2S_x(\omega) & 0 \leq \omega \leq \infty \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (1-90)$$

定义 $S_x(\omega)$ 为双边谱,且 $-\infty < \omega < +\infty$, $G_x(\omega)$ 为单边谱,且 $0 < \omega < \infty$,两者关系如图1-34所示。

自功率谱密度函数 $S_x(\omega)$ 或 $G_x(\omega)$,除了用于描述随机信号的谱结构,同样可用来描述确定性信号的总功率按频率分布,即频率结构。函数 $S_x(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 的关系如下:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(\omega)|^2 \quad (1-91)$$

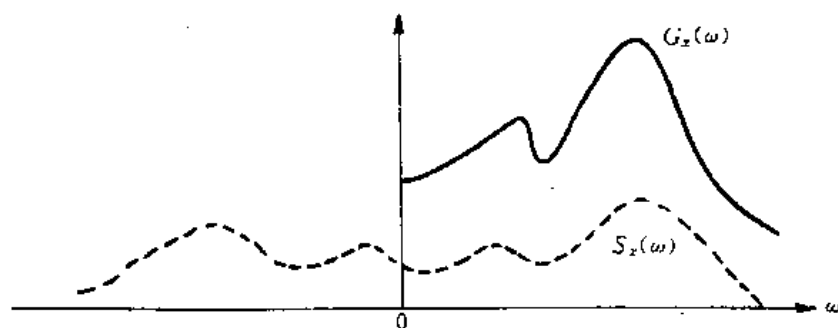


图1-34 双边和单边功率谱的关系

时域信号 $x(t)$ 的直接傅里叶变换所得的频谱为 $X(\omega)$,所对应的是 $x(t)$ 的量纲,而 $S_x(\omega)$ 或 $G_x(\omega)$ 对应的却是 $x^2(t)$ 的量纲。 $S_x(\omega)$ 和 $G_x(\omega)$ 反映的是信号取值的平方,具有突出主要成份的优点,所显示的频率成份更为明显。自功率谱和自相关函数一样,都失去了原信号的相位信息。

工程上还常采用 $\sqrt{G_x(\omega)} - \omega$ 谱图,称为有效值谱。显然, $\sqrt{G_x(\omega)}$ 与一般频谱 $X(\omega)$ 是等量纲的。

2. 信号的互功率谱

互相关函数的傅里叶变换称为互功率谱密度函数,简称互谱,记作:

$$S_{xy}(\omega) = L[R_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1-92)$$

其逆变换

$$R_{xy}(\tau) = L^{-1}[S_{xy}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1-93)$$

$S_{xy}(\omega)$ 与 $R_{xy}(\tau)$ 一样,反映了 $x(t)$ 、 $y(t)$ 两信号的同频分量。

因为, $R_{xy}(\omega)$ 不是偶函数,则 $S_{xy}(\omega)$ 也不是偶函数,它一般是复数,可写成

$$S_{xy}(\omega) = C_{xy}(\omega) - j\theta_{xy}(\omega) \quad (1-94)$$

式中: $C_{xy}(\omega)$ 是 $S_{xy}(\omega)$ 的实部,称为同相谱或共谱; $\theta_{xy}(\omega)$ 是 $S_{xy}(\omega)$ 的虚部,称为正交谱或重谱。

式(1-94)也可写成:

$$S_{xy}(\omega) = |S_{xy}(\omega)| e^{-j\theta_{xy}(\omega)} \quad (1-95)$$

其中:幅值谱

$$|S_{xy}(\omega)| = \sqrt{C_{xy}^2(\omega) + \theta_{xy}^2(\omega)} \quad (1-96)$$

相位谱
$$\theta_{xy} = \text{tg}^{-1} \frac{\theta_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)} \quad (1-97)$$

与自谱相比,互谱的最大特点是保留了幅值、频率和相位三个基本信息。

互功率谱密度函数,在工程测试中得到广泛的应用。例如,对于图1-35所示的线性系统,其输入为 $x(t)$,输出为 $y(t)$,系统的频率响应函数为 $H(\omega)$,则:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (1-98)$$

对于式(1-98)两边作互谱分析得:

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) \cdot S_x(\omega) \quad (1-99)$$

由式(1-99)可知,若已知输入信号的自谱和输出、输入信号的互谱,就可求出频率响应函数 $H(\omega)$ 。

应用互谱分析的测量结果可以排除噪声的影响,它提供了在频域内消除噪声影响的重要方法。

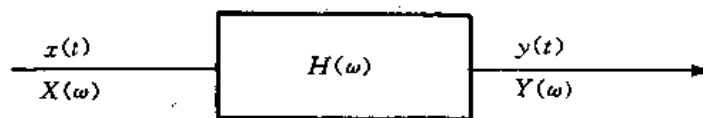


图1-35 系统的传输特性

3. 相干函数

相干函数是描述两个过程因果关系的度量。相干函数又称为凝聚函数,其定义为:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}, \quad 0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1 \quad (1-100)$$

如果信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 完全不相干,那么,对所有频率有 $\gamma_{xy}^2(\omega) = 0$;如果对所有频率有 $\gamma_{xy}^2(\omega) = 1$,那么,称 $x(t)$ 和 $y(t)$ 完全相干。

对于图1-35所示系统,相干函数 $\gamma_{xy}^2(\omega)$ 就反映了响应信号 $y(t)$ 在最大程度上来源于信号 $x(t)$,也就是说,输出信号的功率谱中有多少是由所测试的输入量引起的响应。它有如下三种情况:

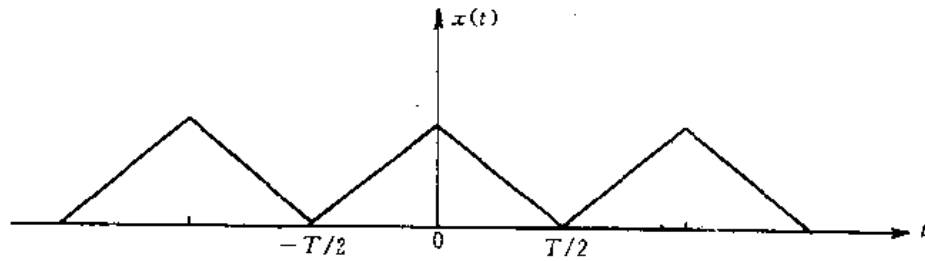
- ①当 $\gamma_{xy}^2(\omega) = 1$ 时,表示信号 $y(t)$ 完全源于 $x(t)$,系统作不失真测试;
- ②当 $\gamma_{xy}^2(\omega) = 0$ 时,表示信号 $y(t)$ 和 $x(t)$ 是统计独立的,即不相干;
- ③当 $0 < \gamma_{xy}^2(\omega) < 1$ 时,表示各频率范围内,信号 $y(t)$ 只有一部份来源于信号 $x(t)$,其余部分是来源于其它振源或外界噪声。

习 题 一

1-1 动态信号与静态信号各有什么特点?静态物理量给出的是否都是静态信号?

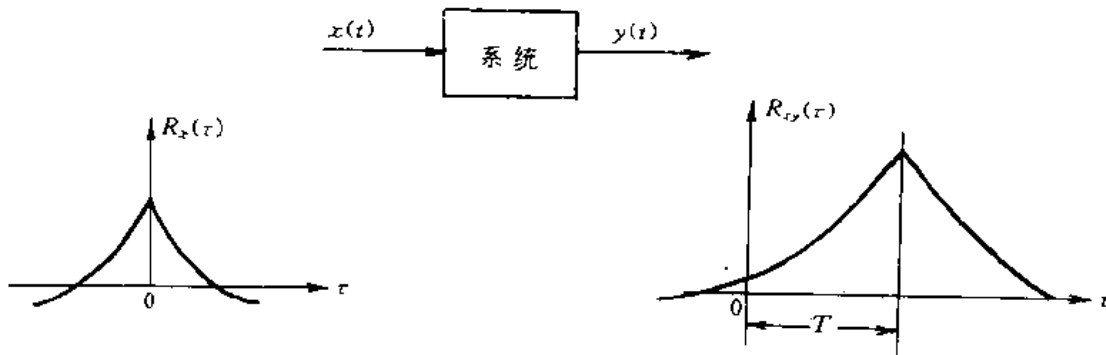
- 1-2 描述周期信号的频率结构可采用什么数学工具?如何进行描述?周期信号是否可以进行傅里叶变换?为什么?
- 1-3 概率密度函数的物理意义是什么?它和均值、均方值有何联系?
- 1-4 周期信号、非周期信号和随机信号在不同域的描述中有何不同?用什么方法可以鉴别混杂在一起的这三种信号?用什么方法可以它们分离开来?
- 1-5 求周期三角波(如题图1-1所示)的均值和均方值及傅里叶级数三角函数形式和复变指数函数形式,并画出频谱图。周期性三角波的数学表达式为:

$$x(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T}t & (-T/2) < t < 0 \\ A - \frac{2A}{T}t & 0 < t < (T/2) \end{cases}$$



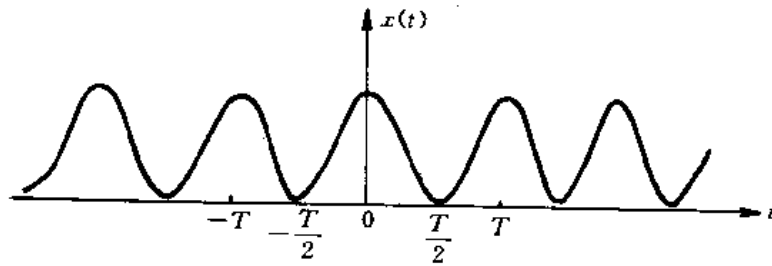
题图1-1 周期性三角波

- 1-6 某一系统的输入信号为 $x(t)$,输出信号为 $y(t)$,若已知该系统输入信号 $x(t)$ 的自相关函数 $R_x(\tau)$ 与输入、输出的互相关 $R_{xy}(\tau)$ 有关系 $R_x(\tau) = R_{xy}(\tau)$ (如题图1-2所示),试说明该系统的作用。



题图1-2 系统的输入、输出及相关

- 1-7 求作全波整流后余弦信号 $x(t) = A|\cos\omega_0 t|$ 的频谱(如题图1-3所示)。

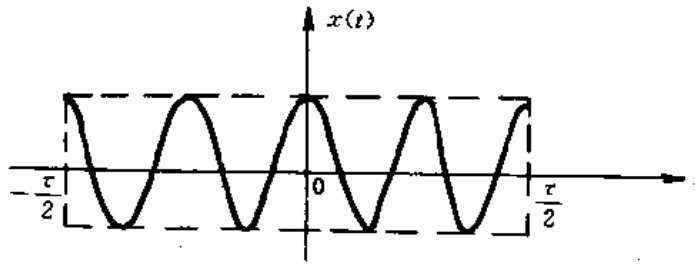


题图 1-3

1-8 求题图1-4所示有限长瞬变余弦信号 $x(t)$ 的频谱。

设

$$x(t) = \begin{cases} \cos\omega_0 t & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| \geq \tau/2 \end{cases}$$



题图 1-4

1-9 已知一个随机信号 $x(t)$ 的自功率谱密度函数为 $S_x(\omega)$,将 $x(t)$ 输入到传递函数为 $H(s)$ 的系统中,其传递函数为 $H(s) = 1/(1+s\tau)$,试求该系统的输出信 $y(t)$ 的自功率谱密度函数 $S_y(\omega)$,及输入、输出函数的互功率谱密度函数 $S_{xy}(\omega)$ 。

第二章 测试系统的特性分析

第一节 引言

测试系统依据被测信号是否为静态或动态分别表现为静态特性或动态特性。虽然描述测试系统的这种特性的静态特性与动态特性参数不一样,但它们是相互联系和影响的。一个静态特性差的测试系统,很难想象其动态特性会好。因此,测试系统的特性分析,实质上就是研究测试系统及其输入信号、输出信号三者之间的关系。

第二节 测试装置与线性系统

测试装置就是一个系统,所谓“系统”,通常是指相关事物按一定关系组成能够完成人们指定任务的整体。这里所说的测试系统,依据所研究对不同的,含义的伸缩性很大。例如,图0-2所示的测试系统,其本身各环节的组成就相当复杂。而简单的温度测试系统只有一个液柱式温度计。因此,本章中所称的“测试系统”即可能是在上述含义下所构成的一个复杂装置的测试系统,也可能是指该测试系统的各组成环节,例如传感器、放大器、中间变换电路、记录器,甚至一个很简单的RC滤波单元等。

理想的测试系统应该具有单值的、确定的输入输出关系。其中以输出与输入成线性关系为最佳。在输入信号取值基本不随时间而变化的静态测量中,测试系统的这种线性关系虽然总是所希望的,但不是必须的(因为用曲线校正或输出补偿技术作非线性校正尚不困难);在动态测试中,测试系统本身应该力求是线性系统。这不仅因为目前对线性系统能作比较完善的数学处理与分析,而且也因为在动态测试中作非线性校正目前还相当困难,即使可作这样的校正,费用也高。

实际测试系统大多不可能在整个工作范围内完全保持线性,而只能在一定范围内和一定的(误差)条件下作线性处理。因此,把测试系统在一定条件下,看成为一个线性系统,具有重要的现实意义。我们可以把对线性系统的分析、处理应用到测试系统上。

下面对线性系统及其主要性质进行讨论。

线性系统可以用线性方程来描述。在动态测量中通常用线性微分方程来描述,即

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

通常 $n > m$,表明系统是稳定的,即系统的输入不会使输出发散。系数 a_0, a_1, \dots, a_n 和 b_0, b_1, \dots, b_m 可能是 t 的函数,此时,式(2-1)为变系数方程,所描述的系统是时变的。若 a_0, a_1, \dots

a_n 和 b_0, b_1, \dots, b_m 均为常数, 该方程就是常系数微分方程, 所描述的是时不变线性系统, 简称定常系统。也就是说, 若系统的输入延迟某一段时间, 其输出也延迟相同时间。

若用 $x(t) \longrightarrow y(t)$ 表示上述系统的输入、输出的对应关系, 则线性时不变系统具有以下主要性质:

1. 叠加性

即符合叠加原理

若 $x_1(t) \longrightarrow y_1(t),$
 $x_2(t) \longrightarrow y_2(t),$
 则 $[x_1(t) \pm x_2(t)] \longrightarrow [y_1(t) \pm y_2(t)]$ (2-2)

2. 比例性

若 $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$, 对于任意常数 a , 则有

$$ax_1(t) \longrightarrow ay_1(t) \quad (2-3)$$

3. 微分特性

即系统对输入微分的响应等同于对原输入响应的微分。即:

若 $x(t) \longrightarrow y(t)$
 则 $\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow \frac{dy(t)}{dt}$ (2-4)

4. 积分特性

如果系统的初始状态为零, 则系统对输入积分的响应应等于原输入响应的积分。即:

若 $x(t) \longrightarrow y(t)$
 则 $\int_0^t x(t) dt \longrightarrow \int_0^t y(t) dt$ (2-5)

5. 频率保持性

若 $x(t) \longrightarrow y(t)$ 则

$$x_i(t) = X_i \sin(\omega_i t + \theta_x) \leftrightarrow y_i(t) = Y_i \sin(\omega_i t + \theta_y)$$

也就是经过测试装置后, 幅值可能放大或缩小, 相位也可能发生变化, 但频率不能变化。否则原信号 $x(t)$ 是高频声, 测得的却可能成为低频声。

判断一个系统是否是线性系统, 只要判断该系统是否满足上述1、2 两条性质, 即叠加性和比例性。若满足就是线性系统。

掌握线性时不变系统的这些性质, 对动态测试十分有用。例如, 知道了线性时不变系统的输入激励频率, 那末可以判断所测得的响应信号中只有与输入激励同频的分量才是输入所引起的, 而其它频率分量都是噪声。

与线性系统对应的是非线性系统。非线性系统是指不具有线性性质或者不能以线性微分方程描述的系统。例如下述系统均为非线性系统：

$$\frac{dy(t)}{dt} + y^3(t) = x(t)$$
$$\frac{d^2y(t)}{dt} + y(t) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

由于非线性系统不具有线性性质，对它的分析与求解就十分困难。然而，在许多情况下，非线性系统可以在一定范围内以线性系统去近似。这样，就使得对线性系统的研究变得更为重要。

第三节 测试系统的静态特性及其分析

测量系统的静态特性是指被测信号为静态信号(或信号变化极缓慢)时测试装置的输出与输入的关系。测试系统这种关系曲线称为定度曲线，它必须是用实验方法来求取的。

当输入信号为静态信号时，式(2-1)变为

$$y = \frac{b_0}{a_0} x = s_0 x \quad (2-6)$$

式中 a_0, b_0, s_0 都是常数。

式(2-6)表达了理想状态下作为线性时不变系统的测试装置应有的输入输出关系——线性关系。在实际工作中，这种线性关系是采用“最小二乘法”拟合标准直线来确定的。因此，用实验方法，确定出标准直线和定度曲线，比较这两种曲线，计算出各项静态特性指标(如图2-1所示)。由这些特征指标，就可以描述测量系统的静态特性。

静态特性主要有非线性度、灵敏度和回程误差三项。

1. 非线性度

测试系统的非线性度就是定度曲线与理想直线的接近程度。作为性能指标，它以定度曲线对理想直线的最大偏差 B (以输出量单位计算)同标称范围 A (如图2-1所示)的百分比表示。即：

$$\text{非线性度} = (B/A) \times 100\% \quad (2-7)$$

设计测试系统时，为了达到线性要求，可以把装置定度曲线中较理想的直线段取为标称输出范围(即工作范围)；也可以对定度曲线进行线性补偿(采用电路或软件补偿均可)。当测试系统的 $x(t), y(t)$ 为非线性关系时，在输入量变化范围很小的条件下，可认为 $x(t), y(t)$ 满足线性要求。这也是有些装置对工作范围限制很严格的原因之一。例如第四章中将要学的电容式位移传感器就是这种装置。

2. 灵敏度

系统的灵敏度定义为，在稳态情况下，输出信号变化量和输入信号变化量之比称为灵敏

度 S_0 。表达式为:

$$s_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2-8)$$

从式(2-6)可得:

$$S_0 = y/x = a_0/b_0 \quad (2-9)$$

例如,有一位移传感器,每给以 $1\mu\text{m}$ 的位移量(输入信号的变化量),能得到 0.2mV 的输出,则其灵敏度为 $S_0 = 0.2\text{mV}/\mu\text{m}$ 。

当输出信号与输入信号量纲相同时,常用“放大倍数”或“增益”代替“灵敏度”。由式(2-9)可知,灵敏度为常数是线性系统的特征。

灵敏度的高低由被测量的信号来决定。测试系统中要提高灵敏度一般并不困难,但是,灵敏度愈高就愈易引入外界干扰和噪声,使稳定性变差,使测量范围变窄。

3. 回程误差(滞后)

回程误差表示测量系统当输入量由小到大与由大到变化时,所得输出量不一致的程度,如图2-2所示。

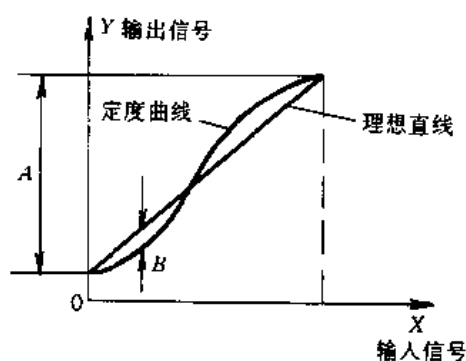


图2-1 定度曲线、理想直线确定系统、特性指标

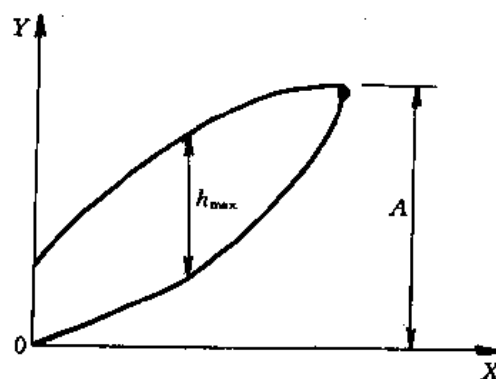


图2-2 回程误差的测量

回程误差在数值上是用同一输入量下所得滞后偏差最大值 h_{max} 与测量系统满量程输出值 A 之比百分数表示。即:

$$\text{滞后} = \frac{h_{max}}{A} \times 100\% \quad (2-10)$$

在实际测试中,滞后现象经常遇到。例如使用机械指示式测量仪,由于上行程或下行程方向不同,对同一测点的指示值会有所不同。其原因有材料受力作用后的变形以及机件之间的摩擦和游隙等。

4. 其他表征测试系统的指标

(1)重复性——在等精度测量(即在操作者、仪器、环境条件等所有因素不变情况下多次

重复测量)条件下,系统给出相同示值的能力,即系统的精密度。它表征了系统随机误差的大小,也称为重复精度。在工程测试中,它常用误差限表示。例如,用千分表重复测量1mm厚的量块,最大示值为1.001,最小示值为0.999,则该千分表重复性为 $\pm 1\mu\text{m}$ 或 $\pm 0.1\%$ 。也可用式(2-11)表示。

$$\text{重复性} = \frac{(2 \sim 3)\sigma}{A} \times 100\% \quad (2-11)$$

式中: σ ——测试值的标准偏差

A ——满量程

(2)测试系统的精度——表征测试系统给出示值与被测量真值的符合程度。作为技术指标,常用相对误差和引用误差来表示。

$$\text{系统的相对误差} = \frac{\text{系统示值} - \text{被测真值}}{\text{被测真值}} \times 100\% \quad (2-12)$$

$$\text{系统的引用误差} = \frac{\text{系统示值} - \text{被测真值}}{\text{系统的测量上限值}} \times 100\% \quad (2-13)$$

式(2-13)亦可表示为:

$$\text{系统的引用误差} = \frac{\text{量程} \times \text{精度等级}\%}{\text{系统的测量上限值}} \times 100\% \quad (2-14)$$

上述表达式中,真值通常以高一级精度仪器的量值作为基准,代表真值,即约定真值。例如精度为1级的100mA的表头,当测量100mA电流时,引用误差 $= \frac{100 \times 1\%}{100} = 1\%$,若测量10mA时,引用误差 $= \frac{100 \times 1\%}{10} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$;若测量90mA时,引用误差 $= \frac{100 \times 1\%}{90} = \frac{1}{90} = 1.1\%$ 。所以,在使用测试装置时,必须尽量避免在接近于测量上限的1/3的测量范围内工作,以免产生较大的相对误差。

(3)分辨率——系统可能检测到的输入信号的最小增量。可以用系统测量下限的具体数值表示,也可用测量下限对上限的比值来表示。例如,数字电压表的最大读数为999V,最小读数为1V,则其分辨率为1V或1/999。

(4)漂移——在无输入信号时,一段时间内输出信号的变化量。以输出量变化/小时数表示。工程测试中,又以零点(无输入时)的漂移进行度量,所以又叫零漂。

(5)信噪比(SNR)——信号功率与噪声功率之比,或信号电压与噪声电压之比,单位为分贝。即

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{N_s}{N_N} = 20 \log \frac{V_s}{V_n} \text{dB} \quad (2-15)$$

式中: N_s ——信号功率

N_N ——噪声功率

V_s ——信号电压

V_n ——噪声电压

(6)测量范围——指测试系统在测量时的正常工作量值范围。若为动态测量的系统,必须标明其正常工作的频率范围。

⑦动态范围(DR)——系统不受各种噪声影响而能获得不失真测量的范围。用测量上限比值的分贝值来表示,即:

$$DR = 20 \log \frac{x_{\max}}{x_{\min}} \quad (2-16)$$

式中: X_{\max} ——为装置的测量上限;
 X_{\min} ——为装置的测量下限。

以上所述的各项描述系统的静态特征参数,都是以理想的传输特性 $y = \frac{b_0}{a_0} x = s_0$ 为参考基准的性能指标,即都出源于对 $s_0 = \frac{b_0}{a_0}$ 是否为常值的考虑。而 b_0 、 a_0 不仅为考虑静态特性标时所必需,而且也是具体测试装置机械或电气结构参数的表征。它们必将参加到描述装置动态特性的微分方程式(2-1)中去而影响动态测试。所以良好的静态特性是实现不失真的动态测试的前提。图2-3就表明测试装置非线性度的存在对动态测试的影响。

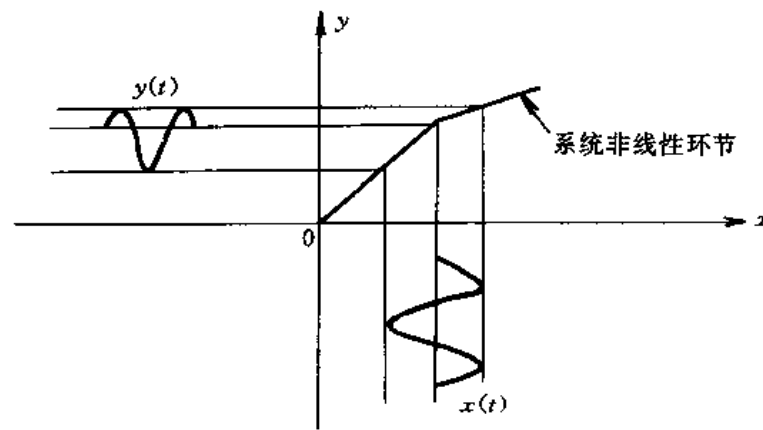


图2-3 非线性度对装置动态输出的影响

第四节 测试系统的动态特性及其分析

测试系统的动态特性是指测试系统对输入量随时间变化的响应特性。测试系统的动态特性的好坏不仅取决于测试系统的结构,而且与输入信号有关。所以描述测试系统动态特性实质上就是建立输入信号、输出信号和测试装置结构参数三者之间的关系。即把测试系统这个物理系统抽象成数学模型,而不管其输入输出量的物理特性(即不管是机械量、电量或热学量等),分析输入信号与响应信号之间的关系。

一、测试技术中常用的数学模型

1. 微分方程

测试系统被视为线性时不变系统,故可用式(2-1)常系数线性微分方程式表达。重写式

(2-1)如下:

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (2-17)$$

式中: a_0, a_1, \dots, a_n 和 b_0, b_1, \dots, b_m 都是与装置结构有关的常数。解微分方程,就可求得系统的动态特性。微分方程是一种基本的数学模型,在它的基础上较容易求出传递函数、频率响应函数。

2. 传递函数

传递函数是对式(2-17)的两边作拉普拉斯变换,得到的输出量和输入量二者的拉普拉斯变换之比。即:

$$X(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2-18)$$

传递函数 $H(s)$ 的优点是用代数方程式而不用微分方程式表达装置动态特性。这样就便于分析与计算。传递函数另外一个优点是除可用理论计算求取外,还可用实验方法获得,这对于复杂的不便于写出微分方程式的装置或系统更具有实际意义。如果得到装置的传递函数 $H(s)$,则将装置的输入经拉氏变换求得 $X(s)$,很方便就可求得输出信号的拉氏变换 $y(s) = H(s) \cdot X(s)$ (如图2-4所示)。将 $y(s)$ 经反拉氏变换就获得装置的输出 $y(t)$,这样就使动态特性的研究大为方便。值得注意的是,这里拉氏算子 $s = a + j\omega$ 是一个复数,故 $H(s)$ 是在复频域中表达装置动态特性的,而微分方程则是在时域中表达装置动态特性。以上两种动态特性的表达形式对于各种输入信号形式都适用。

应该指出,系统的传递函数 $H(s)$ 的反拉氏变换 $h(t)$ 就是系统的单位脉冲的响应。因此,单位脉冲响应 $h(t)$ 在时域中,也描述了系统的动态特性,即任何输入信号 $x(t)$,系统的响应 $Y(t)$ 等于系统的脉冲响应 $h(t)$ 与 $x(t)$ 的时域卷积的结果(图2-4所示)。

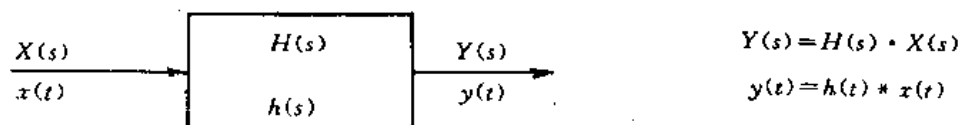


图2-4 系统传递函数 $H(s)$ 、脉冲响应函数 $h(t)$ 、对系统动态特性描述

3. 频率响应函数

对于线性时不变系统,如输入为一正弦信号,则输出必然是与输入同频的正弦信号,但输出输入信号的幅值比和相位差是输入信号频率的函数,用此幅值比和相位差也可表示系统的动态特性,即幅频函数和相频函数,统称频率响应函数 $H(j\omega)$ 。其计算方法可以用 $s = j\omega$

代入系统的传递函数 $H(s)$ 而变成 $H(j\omega)$ 。即：

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (2-19)$$

式中： $Y(j\omega)$ 是输出信号的傅里叶变换，记作 $Y(j\omega) = L[y(t)]$

$X(j\omega)$ 是输入信号的傅里叶变换，记作 $X(j\omega) = L[x(t)]$ 。

$H(j\omega)$ 是处理正弦输入输出信号及系统动态特性之间关系的有力工具。由于正弦型的信号易于产生和测量，并且其它复杂波形输入也可以分解为一系列正弦信号相迭加。用 $H(j\omega)$ 函数也可适用。所以 $H(j\omega)$ 在测试技术中应用极广泛。它是一个复变量函数，其表达式为：

$$H(j\omega) = \text{Re}[H(j\omega)] + j\text{Im}[H(j\omega)] \quad (2-20)$$

复指数形式为
$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (2-21)$$

式中：
$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{R_e^2[H(j\omega)] + I_m^2[H(j\omega)]} \quad (2-22)$$

$$\varphi(\omega) = -\text{tg}^{-1} \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \quad (2-23)$$

以 $A(\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$ 为直角坐标的纵轴、 ω 为直角坐标系的横轴，则曲线 $A(\omega)-\omega$ 称为系统的幅频特性； $\varphi(\omega)-\omega$ 称为系统的相频特性。通常 $H(j\omega)$ 简记为 $H(\omega)$ 。

综上所述，频率响应函数是在频域中表达测试系统的动态特性。

二、动态特性

1. 一阶系统的动态特性

在工程测试中，典型的一阶测量系统如图2-5所示的简单RC滤波电路和液柱式温度计等。下面以液柱式温度计为例进行分析。

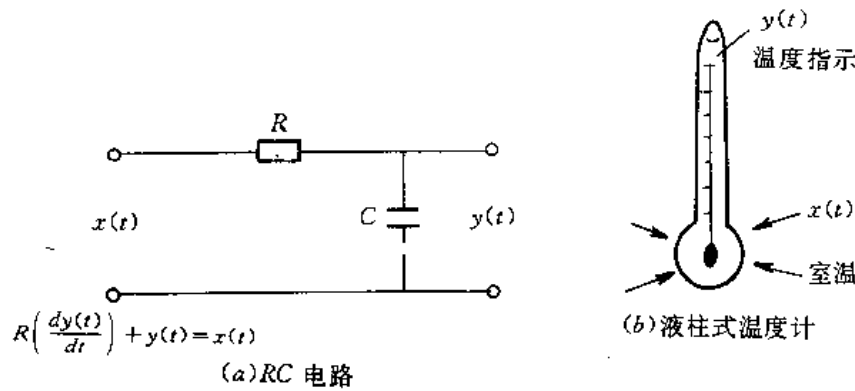


图2-5 一阶系统实例

设 $T_i(t)$ 为被测温度，即温度计的输入信号， $T_o(t)$ 为温度计的指示温度，即温度计的输出信号， C 表示温度计温包的热容量， R 表示温度从热源传给温包的液体之间传导介质的热

阻。根据热平衡方程可得：

$$\frac{T_i(t) - T_o(t)}{R} = c \frac{dT_o(t)}{dt}$$

即

$$RC \frac{dT_o(t)}{dt} + T_o(t) = T_i(t) \quad (2-24)$$

令 $\tau = RC$ ，用 $x(t)$ 代表输入 $T_i(t)$ ， $Y(t)$ 代表输出 $T_o(t)$ 。则式(2-24)变为：

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (2-25)$$

上式即为一阶线性分方程，它的拉氏变换为

$$\tau s y(s) + y(s) = X(s) \quad (2-26)$$

传递函数

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2-27)$$

① 频率响应

令 $s = j\omega$ 由式(2-27)可得一阶系统的频率响应函数

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \quad (2-28)$$

幅频特性为

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (2-29)$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}\omega\tau \quad (2-30)$$

对于式(2-29)和式(2-30)分别以 $\omega\tau$ 为横坐标，以振幅 $A(\omega)$ 和相角 $\Phi(\omega)$ 为纵坐标，画出系统的幅频曲线和相频曲线的波德图(如图2-6所示)。

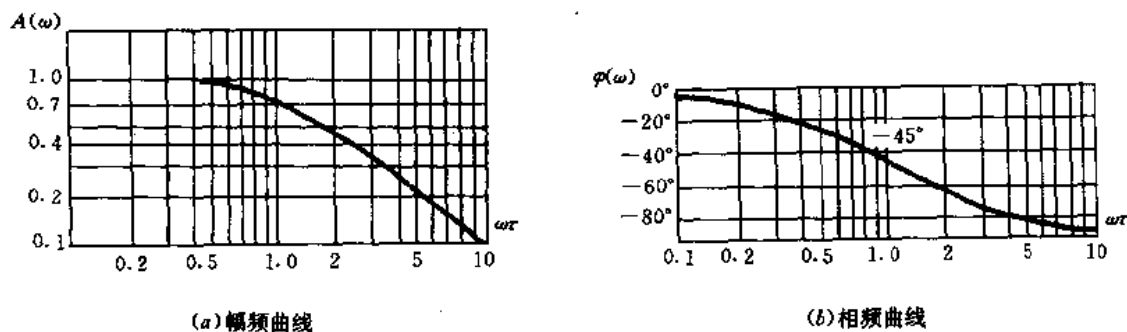


图2-6 一阶系统的幅频和相频曲线

观察图2-6，有 $\omega = 0$ 时， $A(0) = 1$ ； $\omega = \frac{1}{\tau}$ ， $A(\frac{1}{\tau}) = 1/\sqrt{2}$ 即 $20\log(1/\sqrt{2}) = -3\text{dB}$ ，通常把 $\omega = 1/\tau$ 处的频率(装置归一化后，输出频率分量下降至输入幅值的0.707倍处的频率)称为系统的“转折频率”(对滤波器，就是截止频率)，在该处， $\varphi(1/\tau) = -45^\circ$ ，即该处将把输入信号的频率分量滞后 45° 输出，这两点常常成为在波德图上判断一阶系统的特征。

一阶系统的动态特征参数为 τ ，称之为系统的时间常数，它决定了系统的动态特性。如图

2-6 所示,当 τ 越小,转折频率就越大,测试信号的动态范围就越宽;反之, τ 越大,则系统的动态范围也就越小。系统的频率响应,表达了系统的稳态响应,即在某一恒定频率下,系统当输出信号(响应信号)达到稳态后,响应信号幅值与输入信号的幅值相比与其对应频率的变化,没有涉入瞬态历程。

② 单位脉冲响应

据式(2-27) $y_{\delta}(t)$ 的复域表达式为

$$y_{\delta}(t) = H(s) \cdot \delta(s) = H(s) \cdot 1 = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2-31)$$

对上式进行反拉氏变换,得其时域响应

$$y_{\delta}(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2-32)$$

图2-7 表示一阶系统的单位脉冲响应。由图可见,输入 $\delta(t)$ 后,系统的输出突跃至 $1/\tau$,随后迅速衰减,衰减的快慢与 τ 的大小有关,一般经过 4τ 时间后,其响应衰减为零,达到了与输入 $t \neq 0$ 即消失的同一稳态。而在 $t \leq 4\tau$ 以前,则反映了系统以 τ 为表征的“惯性”,所以一阶系统又称为惯性系统。 τ 越小, $Y_{\delta}(t)$ 越接近于 $\delta(t)$ 。

③ 单位阶跃响应

阶跃输入信号的函数表达式为

$$x_u(s) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2-33)$$

阶跃函数 $x_u=1$ 的拉氏变换等于 $1/s$,将其代入式(2-27)得:

$$y_u(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

上式展开得

$$y_u(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2-34)$$

式(2-34)的反拉氏变换为

$$y_u(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2-35)$$

由图2-8 可见,当 $t > 4\tau$ 后,系统输出与输入基本相同(相差小于1.8%),可认为稳态误差为零。所以 τ 越小,一阶系统达到稳态值的时间就越小, τ 值是决定响应快慢的重要因素,所以称 τ 为时间常数。

④ 系统对其它信号的响应

系统对单位斜坡信号、单位正弦信号的响应列在表2-1 中。从表中可看出,系统的输出信号与上述输入信号总存在常值稳态误差。因此,在输出值加上这一稳态误差作修正值,才能得到正确的响应信号。值得注意的是,同样的系统对阶跃信号、脉冲信号等的响应不存在稳态误差。所以,稳态误差的存在与否,不仅取决于系统,也取决于信号。

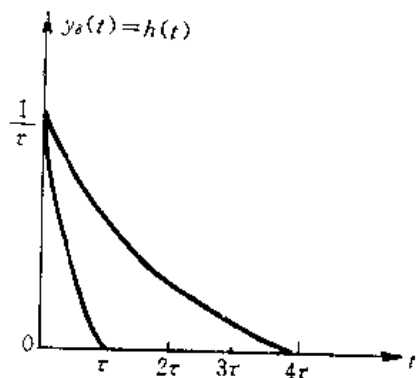


图2-7 一阶单位脉冲响应

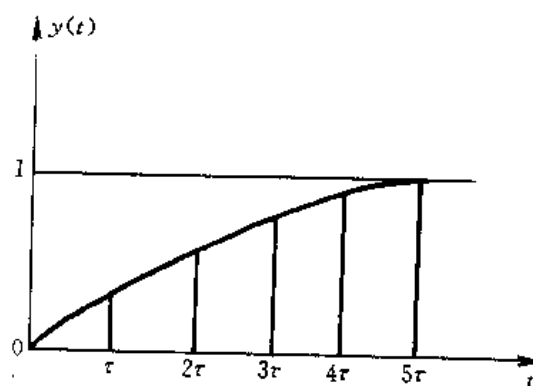


图2-8 一阶系统的阶跃响应

2. 二阶系统的动态特性

如图2-9所示的弹簧—质量—阻尼系统或RLC电路是典型的二阶系统。对弹簧—质量—阻尼系统来说,当该系统受外力 $x(t)$ 作用时,由力学定理可得:

$$x(t) - (c \frac{dy}{dt} + ky) = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

整理得

$$m \frac{d^2y}{dt^2} - c \frac{dy}{dt} + ky = x(t) \quad (2-36)$$

式中: m —系统的质量; c —阻尼器的阻尼系数; k —弹簧刚度。

式(2-36)为二阶微分,它的拉氏变换为

$$(ms^2 + cs + k)Y(s) = X(s) \quad (2-37)$$

其传递函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2-38)$$

令 $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\xi = c/2\sqrt{km}$, $K = \frac{1}{k}$ 代入上式(2-38)得

$$H(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-39)$$

对上式作归一化处理,令 $K=1$ 得

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-40)$$

(1) 频率响应

令 $s = j\omega$,由式(2-40)得

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\xi j(\frac{\omega}{\omega_n})} \quad (2-41)$$

幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}} \quad (2-42)$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (2-43)$$

相应的波德图如图2-9 和图2-10 所示。

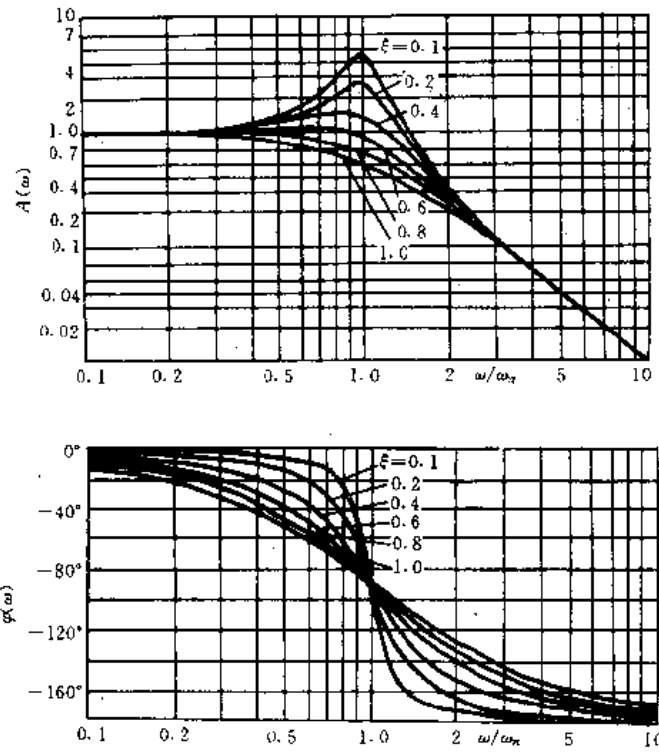


图2-9 二阶系统的频率响应

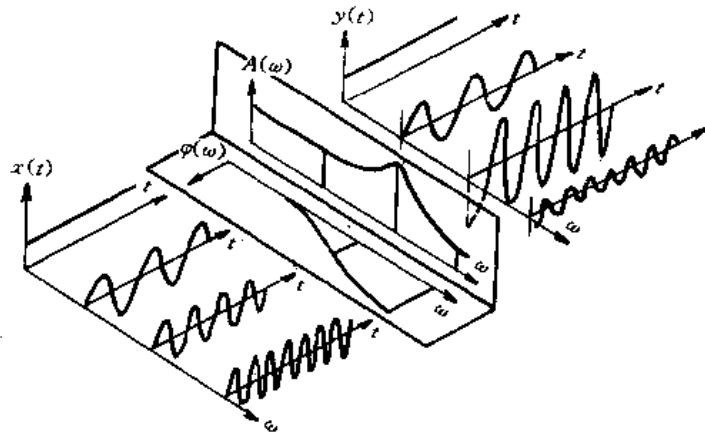


图2-10 二阶系统频率响应与输入输出关系图

由图可见,二阶系统的频率特性受两个参数 ω_n 和 ξ 的共同影响。当 ξ 即阻尼很大时($\xi > 1$),二阶系统时的频率特性和一阶系统的频率特性甚为接近,此时系统近似为一阶系统。当 ξ 很小时($0 < \xi \ll 1$)时,在 ω_n 处,系统响应幅值最大,即系统发生共振,此时相位滞后为 90° 。当选取 $\xi = 0.6 \sim 0.8$ 时, $A(\omega) \approx 1$ 对应的频率范围最大;在这个范围内, $\phi(\omega)$ 与 ω 近似线性关系。在这种情况下,系统的稳态响应的动态误差较小。另外,系统的频率响应随固有频率 ω_n 的大小而不同。 ω_n 越大,保持动态误差在一定范围内的工作频率范围就越宽;反之,工作频率范围越窄。

(2) 阶跃响应

系统动态特性的时域描述,可用阶跃响应来表达。其响应过程包括瞬态和稳态过程。由式(2-38)得:

$$y(s) = H(s)x_u(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (2-44)$$

将上式进行反拉氏变换可得:

$$y_u(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad (2-45)$$

式(2-45)用图2-11表示。图中横座标为 $\omega_n t$,纵座为系统的输出 $y(t)$ 。由图可知,二阶测量系统的阶跃响应具有以下性质:

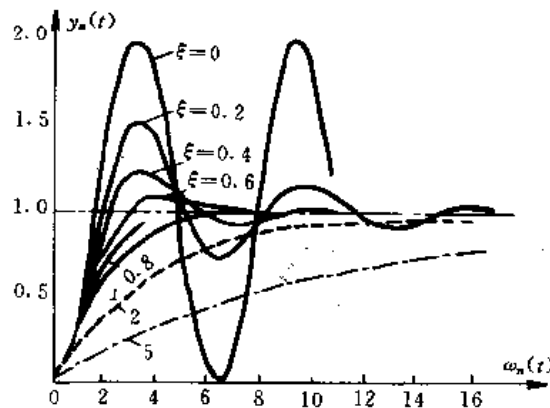


图2-11 单位阶跃响应

(A) 当 $\xi < 1$ 时,系统以 $\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$ 为角频率正弦振荡衰减。当 $\xi \geq 1$ 时,响应不出现振荡。无论哪种情况,响应都要经过一段时间才能达到阶跃输入值,该过程称为瞬态过程(动态过渡过程)。 $\xi > 1$,称为过阻尼; $\xi = 1$,为临界尼; $0 < \xi < 1$ 为欠阻尼。响应曲线形状由阻尼比 ξ 和固有频率 ω_n 所决定。

(B) 阻尼比 ξ 的取值决定了阶跃响应趋于最终值(稳态值)的长短, ξ 值过大或过小,趋于最终值的时间都过长。为提高响应速度,通常选取 $\xi = 0.6 \sim 0.8$ 较适宜。

(C) 测量系统的阶跃响应速度,随系统固有角频率 ω_n 的变化而不同。当 ξ 不变时, ω_n 越

大,响应速度越快; ω_n 越小,响应速度就越慢。

综上所述,二阶系统的固有频率 ω_n 和阻尼比 ξ 是二阶测试系统的重要特征参数,简称为二阶系统动态参数。

三、测试系统动态特性参数的测定

测试系统动态特性参数的测定,通常是用正弦信号或阶跃信号作为标准激励源,分别测出频率响应曲线或阶跃响应曲线,从中确定测试系统的时间常数、阻尼比和固有角频率等动态参数。下面分别就正弦信号、阶跃信号为激励源来进行分析。

1. 用频率响应法求测试装置的动态特性

对装置施以正弦激励,即 $x(t) = x_0 \sin \omega t$ 在输出达到稳态后测量输出和输入的幅值比和相角差,逐点改变输入的频率,即可得到幅频和相频特性曲线。

对于一阶装置,时间常数 τ 就是系统的动态参数。可以通过幅值或相频特性——式(2-29)和式(2-30),直接确定 τ 值。

对于二阶装置,可通过幅频曲线估计其动态参数。对于欠阻尼系统($\xi < 1$),幅频响应的峰值在稍偏离 ω_n 的 ω_1 处(参见图2-9),且:

$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ 或 } \omega_n = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (2-46)$$

$A(\omega_1)$ 和静态输出 $A(0)$ 之比为

$$\frac{A(\omega_1)}{A(0)} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2-47)$$

由式(2-47)就可确定参数 ξ ,其结果代入式(2-46)确定出系统固有频率 ω_n 。

2. 用阶跃响应法测试装置的动态特性

(1) 一阶装置动态特征参数 τ 的测定

从一阶装置的响应曲线上测取出输出值达到最终稳态值的68%所经过的时间即为时间常数 τ 。这种测取法,未考虑响应的全过程,所得结果不可靠。准确测定 τ 的方法如下。

根据式(2-25),一阶系统的单位阶跃响应函数为

$$y_u(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2-48)$$

上式移项后可改写成 $1 - y_u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$

两边取对数,有 $\ln[1 - y_u(t)] = -\frac{t}{\tau}$

令 $z = \ln[1 - y_u(t)]$

则 $z = -\frac{t}{\tau} \quad (2-49)$

上式表明, z 与 t 成线性关系。可根据测得的 $y_u(t)$ 作出 $z-t$ 曲线,如图2-12所示。从 $z-t$

曲线的斜率即可求得时间常数 τ ,即:

$$\tau = \frac{\Delta t}{\Delta z} \quad (2-50)$$

显然,这种方法考虑了瞬态响应的全过程。

(2)二阶系统阻尼比 ξ 和固有频率 ω_n 的测定

典型的欠阻尼($0 < \xi < 1$)二阶系统的阶跃响应曲线如图2-13所示。它的瞬态响应是以 $\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ 的角频率作衰减振荡的,记 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ 。

按照求极值的通用方法,可以求得各振荡峰值所对应的时间 $t_p = 0, \pi/\omega_d, 2\pi/\omega_d, \dots$ 。将 $t = \pi/\omega_d$ 代入式(2-43),则可求得最大超调量 M 和阻尼比 ξ 之间的关系,即

$$M_1 = e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \quad (2-51)$$

超调量 M 与阻尼比 ξ 之间的关系如图2-13所示。

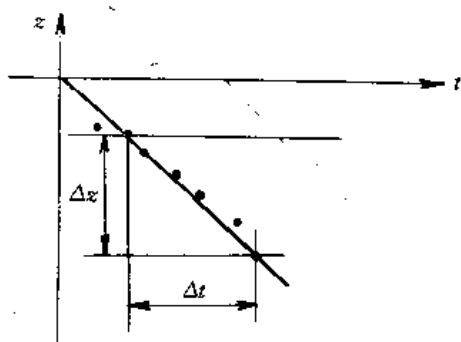


图2-12 一阶系统时间的测定

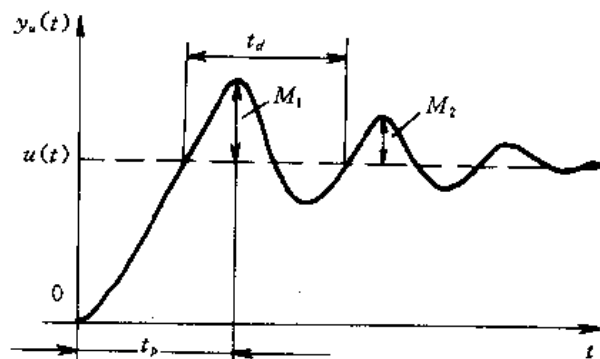


图2-13 二阶系统阶跃响应曲线

对式(2-51)整理得:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{\ln M_1}\right)^2 + 1}} \quad (2-52)$$

因此,从图2-13中测得 M_1 后,使通过上式求得阻尼比 ξ 。由衰减振荡角频率 ω_d ,可求出系统固有频率,即

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

由图2-13中的 t_p 或 t_d ($t_p = t_d/2$)代入上式得:

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} t_p} \quad (2-53)$$

或

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2} t_d} \quad (2-54)$$

从阶跃响应曲线测得 t_p 或 t_d ,以及式(2-50)计算出 ξ 值一并代入式(2-53)或(2-54),便

可求得二阶测量系统的固有频率。

若在二阶系统阶跃响应曲线上测得任意两个相隔的超调量,则可利用这两个超调量来求阻尼比。

四、装置与被测信号的适配

前面讨论测试系统的静态特性和动态特性以及典型信号输入的响应,实际测试工作中,不仅被测信号复杂,而且装置本身也相当复杂。

1. 测试装置的组合

实际使用的一般测试系统比较复杂。图2-14 表示一个动态应变测试系统的组成。

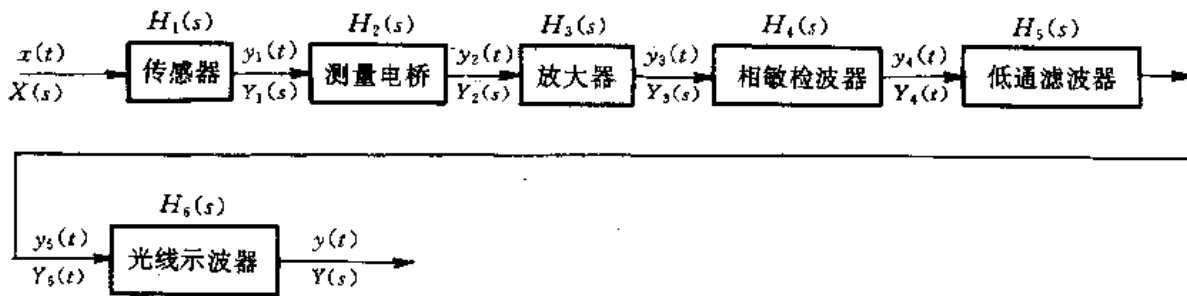


图2-14 动态应变测试系统的组成

由图可见,一个测试系统由许多测量装置所组成,每个测试装置常常又由许多环节组成。该动态应变测量系统——从传感器、动态应变仪到记录仪组成了相当复杂的高阶系统(不是一阶或二阶系统)。它至少可以分解成传感器、测量电桥、放大器、相敏波器、低通滤波器和示波器等多个装置。而各个装置的静动态特性各不相同。正确的设计或组合这些装置,使综合后系统总的静、动态特性符合测试要求就显得十分重要。

要从理论上阐明测试系统各装置怎样组合才最合理,是很困难的。两个装置相结合,其中一个装置对另一个装置就成了负载,产生了负载效应。如图2-15 所示的两个装置所组成的测试系统。

现在研究两个装置的最佳耦合关系。图2-15 中:

E ——信号源的等效电动势; Z_i ——信号源内阻抗, $Z_i = R_i + jX_i$; Z_L ——负载阻抗, $Z_L = R_L + jX_L$ 。

负载的有用功率为:

$$P_L = \frac{E^2 \cdot |Z_L|}{|Z_L + Z_i|^2} = \frac{E^2 |Z_L|}{(R_L + R_i)^2 + (X_L + X_i)^2}$$

式中,当 $|Z_i| = |Z_L|$, $\varphi_L = 180^\circ + \varphi_i$ 时,此时, P_L 取最大值,即负载的有用功率最大,若图2-15 所示回路为纯电阻回路,则

$$P_L = \frac{E^2 R_L}{(R_i + R_L)^2}$$

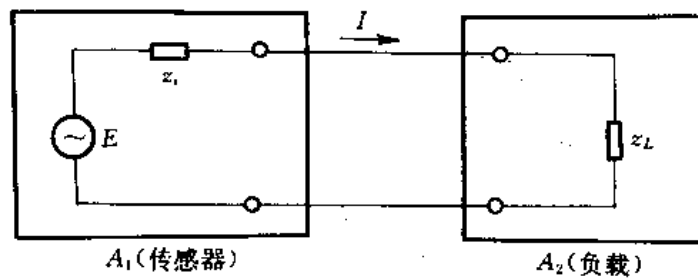


图2-15 测试系统中两个装置的耦合

当 $R_i = R_L$ 时, P_L 有最大值, 即

$$P_{L,max} = \frac{E^2}{4R_i}$$

可见, 测试系统中各组成装置(环节)之间, 存在阻抗匹配的关系, 在实际设计中是要考虑的。以下为了使讨论问题方便, 假设后一级装置对前一级装置无影响, 即认为后一级装置阻抗为无穷大。

装置(环节)的组合形式有以下几种:

(1) 串联组合

如图2-16所示, 两装置的传递函数分别为 $H_1(s)$ 、 $H_2(s)$ 。串接后, 测试系统的总传递函数为:

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{z(s)}{x(s)} \cdot \frac{y(s)}{z(s)} = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

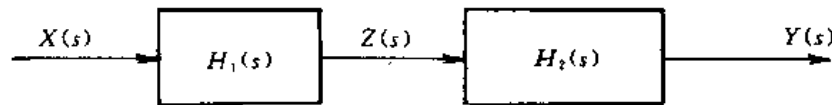


图2-16 测试系统的串联

推广到有 n 个装置的串联, 总传递函数为:

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)\cdots H_n(s) = \prod_{i=1}^n H_i(s) \quad (2-55)$$

总的频率响应函数为

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)\cdots H_n(\omega) = A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} \cdots A_n(\omega)e^{j\varphi_n(\omega)}$$

所以总的幅频率特性为

$$A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega)\cdots A_n(\omega) = \prod_{l=1}^N A_l(\omega) \quad (2-56)$$

$$\text{其相频特性为 } \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_n(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) \quad (2-57)$$

若各装置的灵敏度分别为 $S_{01}, S_{02}, S_{03}, \cdots, S_{0n}$, 则总灵敏度为

$$S_0 = S_{01} S_{02} S_{03} \cdots S_{0n} = \prod_{i=1}^n S_{0i} \quad (2-58)$$

实际的测试系统大都是由各装置串联而成, 因此各装置的静动态特性的好坏直接影响到所组成的总测试系统的测试性能。这里讨论如下:

(A) 静态特性

由前所述, 装置的静态特性(线性度、灵敏度和迟滞)都可以归结为灵敏度 S_{0i} 非常值所引起, 设串联中组成环节的灵敏度为 $S_{0i} + \delta S_i$, 其中 S_{0i} 为常值灵敏度, δS_i 为各环节灵敏度的(非常值)误差。而总测试系统的灵敏度的相对误差, 是误差连乘的结果。因此, 环节中只要有一个静态特性较差, 则总系统的静态特性也不会好。

(B) 幅频特性和相频特性

由式(2-56)可知, 测试系统总幅频特性是各环节幅频特性的连乘。因此, 若环节中有一个幅频特性较差, 则总的幅频特性也会变差。

由两个环节组成的测试系统, 各环节的幅频特性如图2-17所示。

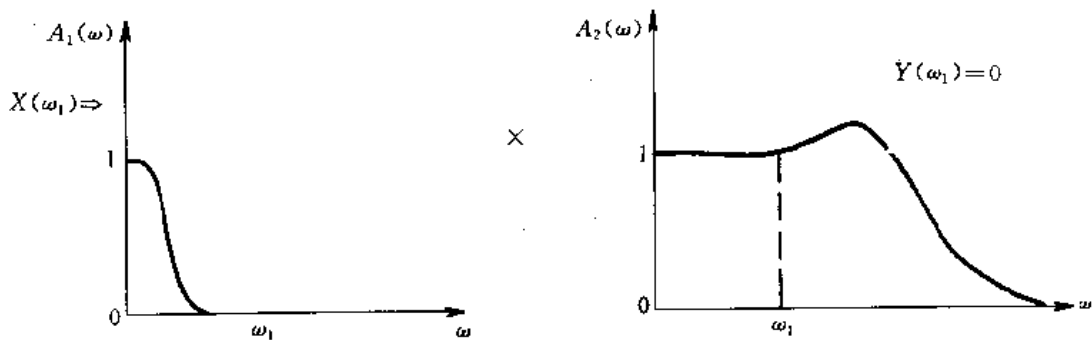


图2-17 两个环节的幅频特性

频率为 ω_1 的输入信号 $X(\omega_1)$, 经该测试系统后, 尽管第2环节的动态范围较宽, 但最后响应输出为0。因此, 测试组合系统中, 总是把通频带宽的环节置于前端, 而且以等精度组成各环节, 同时兼顾 $A(\omega)$ 和 $\Phi(\omega)$ 两方面的总效果, 改善系统的静、动态特性。

(2) 并联组合

如图2-18所示, 两个装置并联后, 总传递函数为

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{y_1(s) + y_2(s)}{x(s)} = H_1(s) + H_2(s)$$

扩展至 n 个装置并联, 有

$$H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s) \quad (2-59)$$

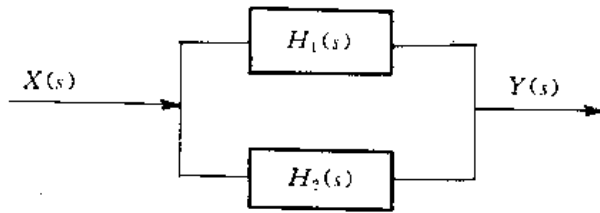


图2-18 测试装置并联

(3) 闭环组合

图2-19所示一闭环测试系统,若求总的传递函数,则可先断开反馈,求得系统的开环传递函数为 $H_1(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$;反馈环节的传递函数为 $H_F(s) = \frac{x_F(s)}{y(s)}$ 。

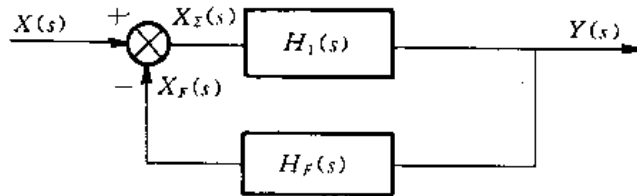


图2-19 测试系统的闭环组合

引入负反馈,使系统稳定性变好。由图可见,

$$X_z(s) = X(s) - X_F(s)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad y(s) &= H_1(s)X_z(s) = H_1(s)[X(s) - X_F(s)] \\ &= H_1(s)[X(s) - H_F(s)Y(s)] \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad [1 + H_1(s)H_F(s)]Y(s) = X(s)H_1(s)$$

则闭环系统总的传递函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_F(s)} \quad (2-60)$$

令 $s = j\omega$,得其频率响应函数为:

$$H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_F(\omega)} \quad (2-61)$$

当 $H_1(s)$ 很大时,有 $1 + H_1(s)H_F(s) = H_1(s)H_F(s)$

则式(2-60)变为 $H(s) = \frac{1}{H_F(s)}$ 。

测试系统的动态特性,取决于反馈环节 $H_F(s)$ 。

(4) 混合组合

复杂测试系统可能由多个环节串、并联和反馈闭环组成,象这样一个复杂系统的总特性(传递函数或频率响应函数)的求取,一般可根据其信号流图法得到。

实际测试系统一般都是高阶系统。如简单热电偶测温通过示波器记录,就是一个一阶装置和二阶装置串联组成的三阶系统。图2-14所示的系统至少在七、八阶以上。所以任何高阶系统,都可以分解成为低阶系统的组合来讨论。

2. 不失真测试条件

所谓测试系统作不失真测试,就是被测信号的波形通过测试系统,其波形形状不发生改变。图2-20所示的测试系统,输出信号与输入信号波形形状相同(大小可能不一致),则认为该测试系统作不失真测试。信号波形不失真, $x(t)$ 和 $y(t)$ 必满足下式:

$$Y(t) = S_0 X(t - \tau) \quad (2-62)$$

式中: S_0 为常值,即系统的灵敏度。由傅里叶变换性质,可得式(2-62)的频域表达式:

$$Y(\omega) = S_0 X(\omega) \cdot e^{-j\tau\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = S_0 e^{-j\tau\omega}$$

由上式可得其幅频特性和相频特性,即

$$A(\omega) = S_0 \quad (2-63)$$

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega \quad (2-64)$$

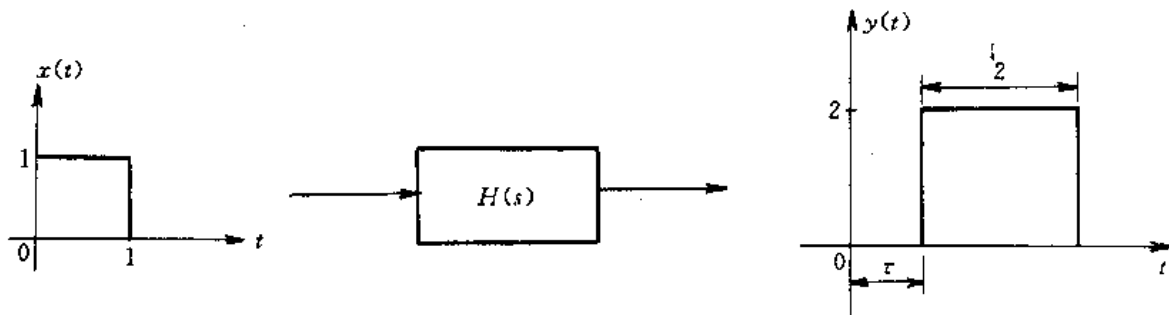


图2-20 信号波形不失真的条件

式(2-63)和式(2-64)称为测试系统不失真的条件。因此,不失真测试对测试系统的要求如下:

(1)装置的灵敏度在量程范围内要求为常值,即 $S_0 = \text{常数}$ 。任何非线性度、回差误差、漂移的存在,都会引起测试波形的失真。

(2)系统的频率要满足于式(2-63)和(2-64)。即幅频特性保持常值,相频特性为输入信号频率的线性函数。

(3)当对测试系统有实时要求时,则式(2-64)中 $\tau = 0$,式(2-63)和式(2-64)变为

$$\begin{cases} A(\omega) = S_0 \\ \Phi(\omega) = 0 \end{cases} \quad (2-65)$$

五、测试系统中装置的选择

要设计一个不失真式系统,一般要注意组成测试环节数尽可能少,以减小环节的非线

性的影响。

正确搭配组成测试系统的各个装置。为了避免各装置对被测信号的影响，一般把装置的输入阻抗作得很高，以保证测试信号波形幅值不失真。选择测试装置的依据是测试系统不失真的条件。在测试信号之前，要首先作如下考察。

1. 对信号的考察。即估计信号幅值变化的大小，波形变化剧烈与否，要求信号不失真的程度如何等。

2. 对装置的考察。装置的灵敏度、线性范围如何？即要注意避免过载和超出其工作线性范围又要避免在装置的测量上限 $1/3$ 范围内工作。

3. 考察装置的频率特性，使所测信号的频率范围落在装置的测试频率范围之内。

除此之外，要注意总的灵敏度、频率特性在各个环节上的分配，一个环节一个环节地适配信号。

举例说明上述过程。图2-21(a)所示， $x(t)$ 为被测信号，其频谱图为图2-21(d)所示。有两

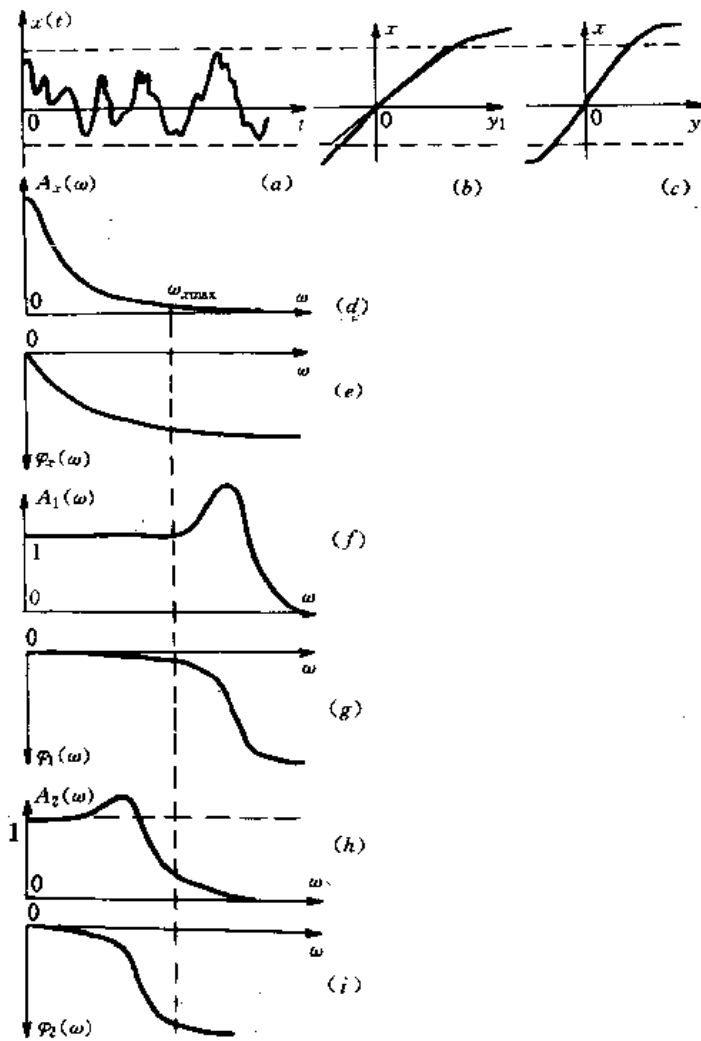


图2-21 装置与信号适配

种测试装置可供选择。装置1的静态定度曲线为图2-21(b)所示,频率特性为图2-21(f)所示;装置2的静态定度曲线为图2-21(c)所示,其频率特性如图2-21(h)所示。从静态特性看,在信号 $x(t)$ 取值的幅度变化范围内,装置1的灵敏度高于装置2的灵敏度,但线性却是装置2的好,装置2更符合波形不失真的测试条件。但装置1的频率特性,在 $0-\omega_{\max}$ 的范围内满足不失真测试条件,即 $A(\omega)=1, \Phi(\omega)=-\tau\omega$ 。装置2,在 $0-\omega_{\max}$ 不满足不失真测试条件。综合各装置的静、动态特性的利弊,在适当的保真条件下,选择装置1作 $x(t)$ 的测试装置。装置2的静态特性再好,也会引起输出信号幅值和相位严重失真。

习 题 二

- 2-1 测试装置的静态特性指标主要有哪些? 它们对装置的性能有何影响?
- 2-2 什么叫一阶系统和二阶系统? 纯放大系统是几阶系统? 它们的传递函数、频率响应函数及幅频和相频特性表达式是什么。
- 2-3 信号的频谱与装置的频率特性区别何在?
- 2-4 以测试波形不失真条件为前提的装置与信号适配中, 主要应注意什么?
- 2-5 某温度传感器的时间常数 $\tau=3\text{s}$, 当传感器受到突变温度作用后, 试求传感器指示出温度差的 $1/3$ 和 $1/2$ 所需的时间。
- 2-6 某传感器为一阶系统, 当受阶跃函数作用时, 在 $t=0$ 时, 输入 10mV ; $t \rightarrow \infty$ 输出 100mV , 在 $t=5\text{s}$ 时, 输出 50mV , 试求该传感器的时间常数。
- 2-7 求信号 $x(t)=10\sin(t+30^\circ)+20\sin(2t+60^\circ)+30\sin(4t+10^\circ)$, 通过一阶系统后输出 $Y(t)$, 设该系统时间常数 $\tau=1\text{s}$ 。
- 2-8 求频率传递函数为 $\frac{0.3155072}{(1+0.01j\omega)(1577536+1760j\omega-\omega^2)}$ 的系统对正弦输入 $x(t)=10\sin(62.8t)$ 稳态响应的绝对均值显示和均值显示。
- 2-9 试求传递函数分别为 $\frac{1.5}{3.5s+0.5}$ 和 $\frac{41\omega_n^2}{S^2+1.44\omega_n S+\omega_n^2}$ 的两个环节串联后组成系统的总灵敏度。
- 2-10 对一个二阶系统的装置输入一单位阶跃信号后, 测得其响应中产生了数值为1.5 的第一个超调量峰值。同时测得其周期为6.28s。已知该装置的静态增益为3, 试求该装置的传递函数和该装置在无阻尼固有频率处的频率响应。

第三章 工程测量误差分析与数据处理

第一节 概 述

人类就是通过测量来认识客观事物的,不管科学技术如何发达,任何测量都不能够完全准确地反映客观存在,也就是说任何测量都带有一定的测量误差。因此,对测量误差进行研究,其目的就是能够确切地了解测量误差的大小范围,把测量误差控制在能够满足需要的程度,并能以误差理论为依据对测量结果作出科学的、合理的评定。

第二节 测量误差的基本概念

一、真值

真值即真实值,是指被测量在一定条件下客观存在的、实际具备的量值。真值通常是个未知量,一般所说的真值是指理论真值、规定真值和相对真值。

理论真值:又称为绝对真值,即按一定的理论,在严格的条件下,按定义确定的数值。这种值实际上是测不到的,如平面三角形三内角之和恒为 180° 。

规定真值:又称为指定值或代替真值。即用约定的办法来确定真值,解决测量中的真值问题。如国际计量局规定“米等于氪-86灯在真空中相应于氪-86原子在 $2P_{10}$ 能级和 $5d_5$ 能级之间跃迁的辐射波长的 $1,650,763.73$ 倍的长度”。这个米基准就当作计量长度的规定真值。

相对真值:又称为传递真值,即计量器具按精度不同分为若干等级,上一等级的指示值即为下一等级的真值。例如,在力值的传递过程中,用二级标准测力机校准三级标准测力计,此时二级标准测力机的指示值即为三级标准测力计的相对真值。

二、误差

测量误差是指测量果与被测量真值之间的差别。测量误差通常分为绝对误差和相对误差两种。绝对误差是指被测量的测量测得值与被测量真值之差,用计算式表示为:

$$\delta = x - A \quad (3-1)$$

式中: δ ——绝对误差;

x ——被测量测得值;

A ——被测量真值。

通常用测量精度高一级以上的标准仪器或测量基准所得值来代真值(相对真值),即称

为实际值。只要标准仪器的误差与测量仪器的误差之比在 $1/3 \sim 1/20$ 范围内,实际值就可代替真实值。如一个一级的仪表至少应使用0.3级的仪表来标定,才有意义。

相对误差是指绝对误差与被测真值之比,常用百分数表示,即:

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{被测真值}} \times 100\%$$

用符号表示,即:

$$\gamma = \frac{\delta}{A} \times 100\% \quad (3-2)$$

对于不同的测量值,用测量的绝对误差往往很难评定其测量精度的高低,通常用相对误差来评定。

例如:测量一个电压 $U_1 = 1000\text{V}$,绝对误差 $\delta_1 = 1\text{V}$;

另一个电压 $U_2 = 10\text{V}$,绝对误差 $\delta_2 = 0.1\text{V}$,

尽管 $\delta_1 > \delta_2$,不能说 U_2 的测量较 U_1 测量准确。

其相对误差为:

$$\gamma_1 = \frac{\delta_1}{A_1} = \frac{\delta_1}{U_1} = \frac{1}{1000} \times 100\% = 0.1\%$$

$$\gamma_2 = \frac{\delta_2}{A_2} = \frac{\delta_2}{U_2} = \frac{0.1}{10} \times 100\% = 1\%$$

显然, U_1 测量比 U_2 准确。仪表的精度(准确度)就是仪表在整个量程内的相对误差,定义为:

$$\gamma_n = \frac{\Delta X}{X_m} \times 100\% \quad (3-3)$$

式中: γ_n ——相对误差;

Δx ——绝对误差;

X_m ——仪表的满度值。

常用仪表分为 ± 0.1 级、 ± 0.2 级、 ± 0.5 级、 ± 1.0 级、 ± 1.5 级、 ± 2.5 级和 ± 5.0 级共7级。

级别数值表示仪表的引用相对误差的最大值(百分数)。如使用S级的仪表进行测量,那么任何一次测量可能存在的绝对最大误差为:

$$\Delta x \leq X_m \cdot s\%$$

测量的相对误差为:

$$\gamma \leq \frac{\Delta X_{\max}}{X} = \frac{X_m \cdot s\%}{X}$$

三、误差的分类

按测量误差的性质和特点,测量误差可分为系统误差、随机误差和粗大误差。

1. 系统误差

在相同条件下,多次测量同一物理量时,误差的大小和正负在测量过程中恒定不变,或按一定规律变化的误差就称为系统误差。系统误差又可分为已定系统误差和未定系统误差。已定系统误差是指数值和符号已经确定的系统误差;未定系统误差指误差数值或符号变化不定或按一定规律变化的误差,未定系统误差也称为变值系统误差。未定系统误差根据它不同的变化规律,又可分为线性变化的、周期性变化的,以及按复杂规律变化的等。

系统误差是由于使用的测量方法不完善,读数方法不正确等原因产生的,例如,用铂电阻测量环境温度所产生的非线性读数误差,就是一种系统误差。

系统误差可通过实验的方法找出,并予以消除或加修正值对测量结果予以修正。在测量中使用微型计算机,系统误差原则上可以消除。

2. 随机误差

在相同条件下,对同一物理量进行有限次测量时,其绝对值和符号变化没有确定规律的误差称为随机误差(或称为偶然误差)。随机误差就单个而言,从单次测量结果来看是没有规律的。但就其总体来说,对一个量进行等精度的多次测量后就会发现,随机误差服从一定的统计规律,即符合概率论的一般法则,可通过理论公式计算它对测量结果影响的大小。

随机误差主要是由那些对测量值影响微小且又互不相关的变化因素产生的。

3. 粗大误差

明显偏离测得值的误差称为粗大误差。这类误差是由于操作错误、读数错误、记录错误等原因造成的,又叫疏失误差。

粗大误差由于误差数值特别大,容易从测量结果发现,一经发现粗大误差,可以认为该次测量无效,测量数据作废,即可消除它对测量结果的影响。

四、误差来源

分析误差产生的原因,可以指导我们改进测量方法,提高测量的精度。产生误差的原因是多方面的,可以归纳如下:

1. 方法误差

它是由于所采用的测量原理或测量方法本身所产生的测量误差。如压力表在水平位置读数时引起的误差,按规定应垂直安放压力表;航空用高度表,它是根据气压随高度改变的规律而确定高度的,但气压并不只受高度影响,还受温度、气体密度的影响,如不进行修正就会引起误差,这种误差又称为原理误差或理论误差。

2. 装置误差

它又称为工具误差,即试验装置、测量仪器表带来的误差。如装置安装调整不准确和摩擦间隙过大等,仪表的非线性、滞后、刻度不准等带来的误差。

3. 环境误差

周围环境对测量的影响,而产生的测量误差。周围的环境主要指温度、湿度、气压、电场、磁场以及振动、气流、辐射等。如环境温度的变化会引起传感器的零点漂移和灵敏度的漂移。微小振动或电信号干扰都会对电压毫伏表和光线示波器的振动产生扰动。

4. 主观误差

主观误差又称为人员误差,是由进行测量的操作人员素质条件所引起的误差。如测量者的感觉器官不正常,视觉的近视、斜视、色盲、听觉不良等,测量者的习惯和精神状态的变化也都会带来误差。

上述四种测量误差的来源是从参加测量的四个环节,即人员、设备、方法和条件概括出来的。在具体的测量过程中,各因素对测量的影响程度有所不同。

五、不确定度

不确定度是指由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度,可把不确定度按估计其数值所用的方法不同,归纳成两类。

*A*类分量:对一系列多次重复测量后,用统计方法计算出的标准偏差。

*B*类分量:用其它方法估算出的近似的标准偏差。

合成标准偏差的方法(方和根法)来合成*A*类分量和*B*类分量,合成后仍以标准偏差的形式表征,称为合成不确定度。该不确定度仍具有概率的概念。

上述合成不确定度,如按正态分布概率计算,其概率为68.27%。若要提高不确定度的置信程度,需将合成不确定度乘一系数,而得出总不确定度。用公式表示为:

$$U = k\Delta\Sigma \quad (3-4)$$

式中: $\Delta\Sigma$ ——由*A*分量或*B*分量合成的合成不确定度;

k——置信系数;

U——总不确定度。

当置信系数*k*=2时,置信概率*P*=95.45%;当置信系数*k*=3时,置信概率*P*=99.75%。

第三节 系统误差

在分析和研究测量误差时,必须把系统误差排除才能按随机误差理论对测量数据进行

处理,否则得到的结论将失去其可靠性。从测量误差对测量结果来看,通过多次重复测量,可以减小随机误差对测量结果的影响;而系统误差不容易从测量结果中发现它的存在和认识它的规律,因而系统误差往往比随机误差带来的危害更大。对系统误差,不可能象对待随机误差那样,用统计分析的方法去找出它的存在和影响,只能具体问题具体分析。研究系统误差的性质及其对测量结果的影响可得出一些一般原则,以便了解在存在典型系统误差的情况下,如何发现和消除它。

一、系统误差的分类

系统误差按其性质可分为已定系统误差和未定系统误差两大类。

1. 已定系统误差(恒系差)

已定系统误差是指在整个测量过程中,误差的符号和大小都是固定不变的系统误差。例如,需要调整零点的仪表,由于零点没调准,在使用时所造成的误差,称量天平的砝码或直接荷重传感器的砝码,由于制作好的砝码质量偏差是固定不变的,它会给测量结果带来固定的系统误差。

2. 未定系统误差(变化系统误差)

未定的系统误差是指在整个测量过程中误差的符号和大小是变化不定的,或按一定规律变化的。按其变化规律的不同可分为:

①线性变化(或累进变化)系统误差

线性变化系统误差是指在测量过程中,随着测量次数或测量时间的变化,误差值也成比例增大或减少的系统误差。例如动圈式测量仪表,经过长期使用永久磁铁的磁场强度也会逐渐减少,会造成测量值逐渐偏离的累进系统误差。

②周期性变化的系统误差

在测量过程中,随着测量值或测量时间的变化,误差值呈现周期性变化的系统误差皆属于周期性变化的系统误差。例如,园盘式仪表中的秒表、百分表、压力表等,由于指针安装与表盘不同心,指针指示读数误差是周期性变化的,并具有正弦函数的性质。

③复杂规律变化的系统误差

这类系统误差不是简单的随时间线性变化或周期性变化,而是比较复杂的变化规律。这类系统误差中,有的可用数学关系式表达其变化规律,如按对数曲线或指数曲线、抛物线曲线变化,或按某种形式的多项式变化等;有的难于用数学关系表达,这时可按不同的刻度位置,绘制出它的误差曲线。

二、系统误差对测量结果的影响

1. 已定系统误差的影响

设已定系统误差为 ϵ_0 ,含有误差的一系列测量值为 x_0 ,和算术平均值为 \bar{x}_0 ,不含系统误差

的测量值为 x_i , 算术平均值为 \bar{x} 。

由误差定义可得:

$$\begin{cases} x_{01} = x_1 + \epsilon_0 \\ x_{02} = x_2 + \epsilon_0 \\ \dots \\ x_{0n} = x_n + \epsilon_0 \end{cases} \quad (3-5)$$

将上式相加并除以测量次数可得:

$$\bar{x}_0 = \bar{x} + \epsilon_0 \quad (3-6)$$

残余误差定义为:

$$V_i = x_i - \bar{x}$$

据式(3-5)、式(3-6)可得:

$$V_i = (x_{0i} - \epsilon_0) - (\bar{x}_0 - \epsilon_0) \quad (3-7)$$

可见当未修正的测得值 x_{0i} 和未修正的算术平均值 \bar{x}_0 来计算残余误差时, 残余误差的数值保持不变。这就是说, 已定系统误差不影响残余误差的计算, 因而也不会影响标准偏差的计算, 即不影响测量结果的精密度。因此, 用处理随机误差的数学方法来处理测量数据时, 不可能发现固定系统误差的存在。

2. 未定系统误差的影响

设有一系列测得值 x_1, x_2, \dots, x_n , 并含有未定系统误差 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 则有

$$\begin{cases} x_{01} = x_1 + \epsilon_1 \\ x_{02} = x_2 + \epsilon_2 \\ \dots \\ x_{0n} = x_n + \epsilon_n \end{cases} \quad (3-8)$$

将式(3-8)中各项相加并除以测量次数 n 得:

$$\bar{x}_0 = \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \quad (3-9)$$

或

$$\bar{x}_0 = \bar{x} + \bar{\epsilon} \quad (3-10)$$

由残余公式有:

$$V_i = x_i - \bar{x}$$

将式(3-8)中的 x_i 和式(3-9)中的代入后得:

$$V_i = x_i - \bar{x} = (x_{0i} - \epsilon_i) - (\bar{x}_0 - \bar{\epsilon}) = (x_{0i} - \bar{x}_0) + (\bar{\epsilon} - \epsilon_i) = V_{0i} - (\epsilon_i - \bar{\epsilon})$$

整理得:

$$V_{0i} = V_i + (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \quad (3-11)$$

上式中 V_{0i} 称为含有未定系统误差测得值的残余误差。因 $\bar{\epsilon} \neq \epsilon_i$, 则 $V_{0i} \neq V_i$, 也就是说, 变化的系统误差直接影响残余误差的数值, 即影响测量结果的精密度。

三、系统误差的发现

为了在测量中消除或削弱系统误差对测量的影响, 首先要解决如何发现系统误差的问题, 下面归纳总结出一些发现系统误差存在的一般方法。

1. 残余误差观察法

重写式(3-11)有 $V_{\omega} = V_i + (\epsilon_i - \bar{\epsilon})$

由上式可看出:由测得值 x_{ω} 直接求得的残余误差 V_{ω} 应包括随机误差性质的剩余误差 V_i 和系统误差 $(\epsilon_i - \bar{\epsilon})$,对于一个给定的测量列, $\bar{\epsilon}$ 是一个确定值,而 ϵ_i 对每次测量可能是不同的数值。在测量中存在的系统误差远大于随机误差,或 V_i 可忽略的情况下,残余误差 V_{ω} 的变化主要取决于 ϵ_i 的变化,因此,可以观察残余误差变化来判断测量列是否存在系统误差。

残余误差观察法是将一系列的等精度测量,按测量的先后顺序把测量得值及其残余误差(残差) V_{ω} 列表。若残余误差的大小有规则的向一个方向变化,其符号为(---...++...)或(++...---...),则测量中含有线性变化的系统误差。若中间的微小的波动,则是随机误差的影响。画出 $n-V_{\omega}$ 曲线,如图3-1所示。

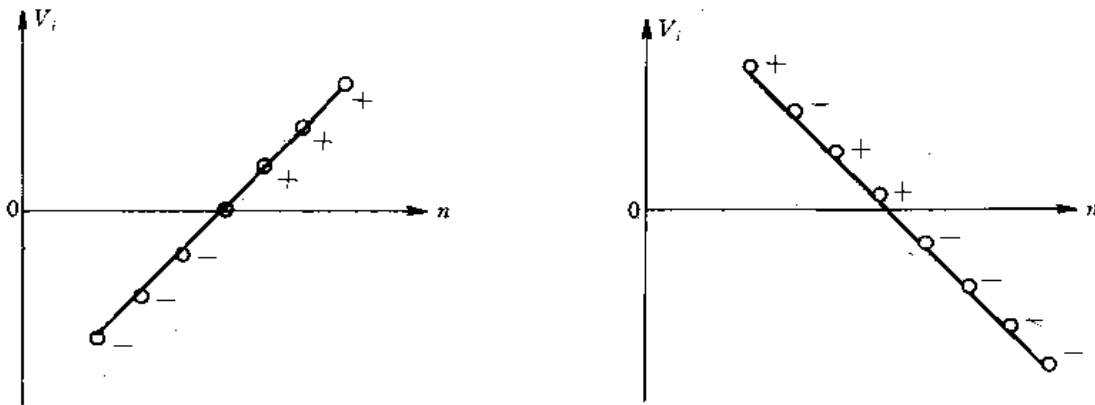


图3-1 测量中含有线性变化的系统误差

若残差的符号有规律由正变负,再由负变正,或循环交替变化多次,则可判断该测量列含有周期性系统误差。如图3-2所示,中间有微小波动,则是随机误差的影响。

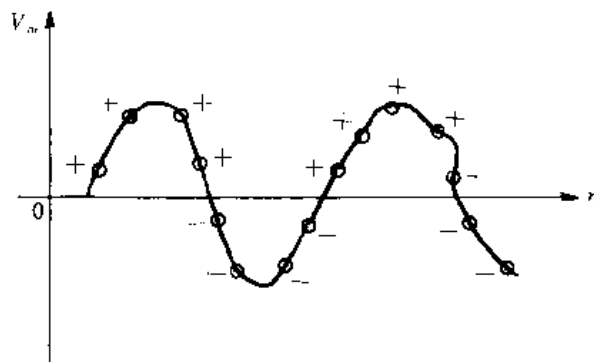


图3-2 含有周期误差的测量

例如,对恒温箱的温度进行了10次测量,测量数据和残差如表3-1所示。试判断有无系统误差有存在。

表3-1 测量数据及其残差

测量序号 <i>n</i>	测得值 <i>x_i</i> /°C	残差 <i>V_i</i> /°C
1	20.06	-0.06
2	20.07	-0.05
3	20.06	-0.06
4	20.08	-0.04
5	20.10	-0.02
6	20.12	0
7	20.14	0.02
8	20.18	0.06
9	20.18	0.06
10	20.21	0.09
<i>n</i> =10	$\bar{x}=20.12$	$\sum_{i=1}^5 V_i = -0.23$ $\sum_{i=6}^{10} V_i = 2.23$

由表3-1可知,残差符合由负到正,数值由小到大,则判断该测量中存在线性系统误差。

2. 残余误差核算法

如果测量过程中出现随机误差比较大,则上述残余误差观察法往往就检查不出系统误差,而用残差核算法比残差观察法灵敏。由式(3-11)得:

$$V_{or} = V_i + (\epsilon_i - \bar{\epsilon})$$

若测量列有*n*个残差,将顺序测量的残差分为前半组*k*个和后半组*k*个(若*n*为偶数, $k=n/2$,*n*为奇数, $k=(n+1)/2$),再两者相减得:

$$\Delta = \sum_{i=1}^k V_{or} - \sum_{i=k+1}^n V_{or} = \sum_{i=1}^k V_i + \sum_{i=1}^k (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) - \sum_{i=k+1}^n V_i - \sum_{i=k+1}^n (\epsilon_i - \bar{\epsilon})$$

当*n*足够大时,

$$\sum_{i=1}^k V_i = \sum_{i=k+1}^n V_i = 0$$

$$\text{则} \quad \Delta = \sum_{i=1}^k V_{or} - \sum_{i=k+1}^n V_{or} = \sum_{i=1}^k (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) - \sum_{i=k+1}^n (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \quad (3-12)$$

由式(3-12)可看出:前后两部分残差和的差值取决于系统误差,因线性系统误差前后两组符号相反,故Δ值也将随*n*的增大而增大。若Δ值显然不为零,则测量中有系统误差。

例如表3-1所列数据*n*=10则*k*=5。

由式(3-10)得:

$$\Delta = \sum_{i=1}^5 V_{or} - \sum_{i=6}^{10} V_{or} = (-0.23) - (+0.23) = -0.46 \neq 0$$

显然 Δ 显著不为零,则测量列中含有系统误差。该值又称为马利可夫判据,它适用于检查测量列中是否有线性系统误差的存在。

3. 阿贝-赫梅特判据

该判据适用于判断测量列是否有周期性系统误差的存在,该判据公式为:

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} V_i V_{i+1} \right| > \sqrt{n-1} \cdot \sigma^2 \quad (3-13)$$

若测量列满足式(3-13),就认为该测量列有周期性系统误差存在。

例如:对某电阻测量10次,测得结果列于表3-2中,试判断该测量列有无系统误差。

表3-2 系统误差判别方法

测量序号 <i>n</i>	测得值 <i>x_i</i>	残差 <i>V_i</i>	<i>V_i²</i>	<i>V_iV_{i+1}</i>
1	120.14	-0.06	0.0036	0.0024
2	120.16	-0.04	0.0016	0.0008
3	120.22	0.02	0.0004	0.0010
4	120.25	0.05	0.0025	0.0015
5	120.23	0.03	0.0009	-0.0018
6	120.14	-0.06	0.0036	0.0030
7	120.15	-0.05	0.0025	0.0005
8	120.21	0.01	0.0001	0.0004
9	120.24	0.04	0.0016	0.0004
10	120.26	0.06	0.0036	-0.0024
<i>n</i> =10	\bar{x} =120.20		$\sum V_i^2=0.0204$	$\sum V_i V_{i+1}=0.0076$

据表3-2可得:

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} V_i V_{i+1} \right| = 0.0076$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum V_i^2}{n-1} = \frac{0.0204}{9} = 0.00227$$

$$\sqrt{n-1} \cdot \sigma^2 = 0.0068$$

由式(3-13)有:0.0076>0.0068

所以,可判断该测量列中有周期性系统误存在。

四、系统误差的消除

1. 已定系统误差的消除方法

① 置换法(代替法)

对一未知物理量进行测量后,使仪器的指示保持不变,再用一已知标准量进行同样的测量,则认为已知标准量就是待测未知物理量。

例如,用天平称重物,设待测重量为 x ,天平达到平衡时所加砝码重量为 Q ,天平的两臂长度各为 l_1 及 l_2 ,当天平达到平衡时,有:

$$x = \frac{l_2}{l_1}Q \quad (3-14)$$

实际的天平,很难保证天平的两臂长度相等,即 $l_1 \neq l_2$ 。测量结果就会带来因天臂长不等而造成的系统误差,为了消除系统误差,可用已知标准砝码 P 代替 x ,使之达到原先的平衡,则

$$P = \frac{l_2}{l_1}Q \quad (3-15)$$

根据两次测量可得 $x=P$,即物体重等于标准砝码重量 P ,这就消除了系统误差。

②抵消法(相消法)

这种方法要求对被测量进行测量时要进行两次适当的测量,使两次测量结果所产生的系统误差大小相等,方向相反。取两次测量结果的平均值做为测量结果,从而消除系统误差。

如用螺旋测微仪测量零件长度,由于测微仪螺纹的间隙而引起的空行程误差,就可用正、反两个方向的两次读数的平均值来消除。

设 a —— 没有系统误差的读数;

A —— 有系统误差的读数;

ϵ_0 —— 空行程引起的系统误差。

则第一次测量(正行程)读数为: $A = a + \epsilon_0$

第二次测量(反行程)读数为: $A' = a - \epsilon_0$

两式相加后得: $A + A' = 2a$, 则 $a = \frac{A + A'}{2}$, 即消除了系统的系统误差。

③交换法(对换法)

交换法就是把待测量与标准量的位置互换进行两次测量,就可消除恒定系统误差。

例如,天平称重,待测量 x 放在天平左侧,标准砝码 Q 放在天平右侧,达到平衡,有:

$$X = \frac{l_2}{l_1}Q$$

x 与 Q 的位置到换,使天平达到平衡所需标准砝码 Q' ,则:

$$Q' = \frac{l_2}{l_1}X \quad (3-16)$$

两式相比,有:

$$\frac{X}{Q'} = \frac{Q}{X}$$

所以

$$X = \sqrt{QQ'} \quad (3-17)$$

若 C 表示 Q' 与 Q 之差,得: $Q' = Q + C$

代入式(3-17)有:

$$X = \sqrt{QQ'} = \sqrt{Q(Q+C)} = Q\sqrt{1 + \frac{C}{Q}}$$

由近似计算公式: $(1 \pm a^2)^{1/2} = 1 \pm \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{8}$

若 a 较小,高次项可忽略,上式变为:

$$(1 \pm a^2)^{1/2} = 1 \pm \frac{a^2}{2}$$

令 $a^2 = \frac{C}{Q}$ 则

$$X \approx Q(1 + \frac{c}{2Q}) = Q(1 + \frac{Q' - Q}{2Q}) = \frac{Q' + Q}{2} \quad (3-18)$$

即待测值可近似用两次测得值的平均值来表示。

2. 未定系统误差的消除方法

① 线性变化系统误差的消除

为了消除具有线性规律变化的系统误差,对称测量法是一种有效的方法。

图3-3 是随时间按线性规律变化的系统误差示意图。由图可知,在整个测量时间内, t_4 为时间对称中点,根据误差线性增加的特点,则对称于中点的各对系统误差的算术平均值彼此相等。即

$$\frac{\epsilon_1 + \epsilon_7}{2} = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_6}{2} = \frac{\epsilon_3 + \epsilon_5}{2} = \epsilon_4$$

根据这一特点,可采用对称取值的方法来消除线性系统误差。

例如,图3-4 所示, R_x 为被测电阻, R_0 为已知电阻,设回路电流 I 随时间而线性降低,为了消除系统的线性误差,可采用如下方法:

$$\text{第一次测 } R_x \text{ 两端电压降 } U_{x1} = I_1 R_x \quad (1)$$

$$\text{第二次测 } R_0 \text{ 两端电压降 } U_0 = I_2 R_0 \quad (2)$$

$$\text{第三次测 } R_x \text{ 两端电压降 } U_{x3} = I_3 R_x \quad (3)$$

将(1)和(3)式相加除2得:

$$\frac{1}{2}(U_{x1} + U_{x3}) = \frac{1}{2}(I_1 + I_3)R_x \quad (4)$$

因电流下降是线性变化的,则

$$\frac{1}{2}(I_1 + I_3) = I_2 \quad (5)$$

由式(5)、式(4)变为:

$$\frac{1}{2}(U_{x1} + U_{x3}) = I_2 R_x \quad (6)$$

将(2)式除以(6)得:

$$\frac{1}{2U_0}(U_{x1} + U_{x3}) = \frac{I_2 R_x}{I_2 R_0}$$

$$\text{最后得: } R_x = \frac{1}{2U_0}(U_{x1} + U_{x3})R_0$$

由上式可知,因电流变化而引起的系统误差已被消除。

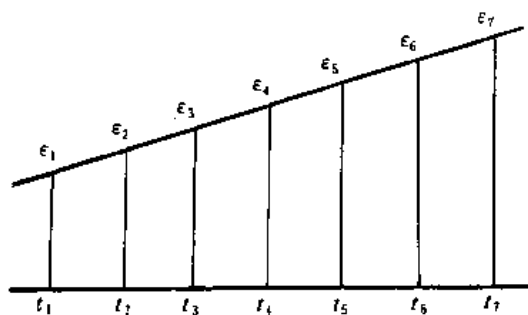


图3-3 线性变化系统的误差

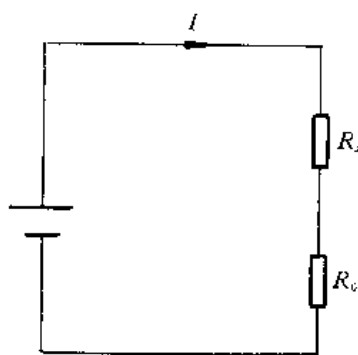


图3-4 消除线性变化的系统误差

②周期性变化系统误差的消除

周期性变化系统误差的特点是每隔半周期产生的误差大小相等、符号相反。因此,这类误差可表示为正余弦函数表达式。

周期性系统误差变化规律为:

$$\epsilon = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (3-19)$$

当 $t=t_0$ 时,系统误差值为

$$\epsilon_0 = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_0\right)$$

若经过时间 τ , 使误差的相位相差半个周期, 即 $t=t_0+\tau$ 时, 误差值为:

$$\epsilon_\tau = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_0 + \pi\right) = -a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_0\right) = -\epsilon_0$$

由于 $\frac{2\pi}{T}(t_0+\tau) = \frac{2\pi}{T}t_0 + \pi, \tau = T/2$

取 ϵ_0 和 ϵ_τ 的算术平均值, 可得: $\epsilon = \frac{\epsilon_0 + \epsilon_\tau}{2} = 0$

上式表明,对于周期性变化的系统误差,只要读取相隔半周期的两次测量值,然后取平均值就可得到正确的测量结果,消除系统误差。

五、系统误差已消除的准则

在实际测量过程中,无论采取何种方法,都不可能完全消除系统误差,只级把系统误差减少到某种程度,使残余的系统误差对测量结果的影响小到可忽略不计。这时我们就认为已消除了系统误差。

如果系统误差或残余误差代数和对值不超过测量结果误差绝对值最后一位有数字的一半,就认为系统误差已被消除。测量结果的总误差,一般只用一位或两位有效数字来表示,可用公式来表达上述过程。

设 $|\Delta x|$ 为测量结果的总误差绝对值,残余误差代数和对为 ϵ_r 。

当 Δx 用两位有效数字表示时有:

$$|\epsilon_x| \leq \frac{1}{2} \times \frac{|\Delta_x|}{100} = 0.005 |\Delta_x| \quad (3-20)$$

当 Δx 同一位有效数字表示时有:

$$|\epsilon_x| \leq \frac{1}{2} \times \frac{|\Delta_x|}{10} = 0.05 |\Delta_x| \quad (3-21)$$

凡满足上述条件者,就认为其系统误差已消除对测量结果的影响。

第四节 随机误差理论

在机械工程测量中,通常存在随机误差。由于它具有随机性质,必须经过多次重复测量得到,从中发现它所遵循的统计规律,借助概率论和数理统计学的原理来进行研究,从而得出正确的评定。在对机械工程测试中所得到的试验数据进行概率统计分析时,总是通过一定容量的样本来估计其总体。在一定条件下反复测量某一个量,其观测值为一随机变量,每一次观测值是一个个体,全部可能出现的测量值为其总体。但是通常只能测得有限(N 个)观测值,组成一个容量为 N 的样本。实际测量只能通过样本来估计总体,用样本的特征量来估计真值。

任何一个实验数据,实际上总是包含着随机误差、系统误差和粗大误差。然而考虑到其系统误差可以消除或补偿,防止粗大误差,所以对随机误差的研究就显得尤为重要。这里我们以测量中不包含系统误差和粗大误差为前提,而仅仅讨论与随机误差有关问题。

研究随机误差能够指导我们合理的安排测量方案。设法减少随机误差对测量结果的影响,充分发挥现有仪表的测量精度,从而对测量所得数据进行正确的处理,达到测量的预期目的。

一、随机误差的特性

举一个简单测量的例子,如用长300mm的钢尺测量已知长度为836mm的导线,在相同的测量条件下,共测量了150次,测得的中心值为 x_i ,对应的误差为 δ_i ,各误差出现的次数为 m_i ,相对次数(频率)为 f_i 。上述值列于表3-3中。

表3-3 长度测量及其误差、频率

区间号	中心值 x_i (mm)	误差 δ_i	次数 m_i	频率 f_i (%)
1	831	-5	1	0.66
2	832	-4	3	2.00
3	833	-3	8	5.33
4	834	-2	18	12.00
5	835	-1	28	18.66
6	836	0	34	22.66
7	837	1	29	19.33
8	838	2	17	11.33
9	839	3	9	6.00
10	840	4	2	1.32
11	841	5	1	0.66

如以 δ 为横座标,间距 $\Delta\delta_i=1\text{mm}$,以 $y_i=f_i/\Delta\delta_i$ 为纵坐标作图,所得图形为图3-5所示,该图称为统计直方图。

图中 $y_i=f_i/\Delta\delta_i$ 是对应区间为单位长度的频率,称为频率密度。显然,误差落在 $\Delta\delta_i$ 区间的频率为 $f_i=y_i\Delta\delta_i$,即图中小矩形的面积。统计直方图的总面积等于1。

如果测量次数 $n\rightarrow\infty$,区间 $\Delta\delta\rightarrow 0$,则无限多个直方图的顶点的连线就形成一条光滑连续曲线。该曲线称为随机误差的概率密度分布曲线,又称为高斯误差分布曲线或误差正态分布曲线。

图3-5中的误差分布曲线可表达成误差 δ 的函数 $y=f(\delta)$,其解析方程为:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3-22)$$

或
$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\delta^2} \quad (3-23)$$

上式称为误差方程,也称或然率方程。式中 h 称为精密度指数, σ 称为均方根偏差或标准偏差, h 与 σ 的关系为:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \quad (3-24)$$

大量实践和理论分析表明,大多数工程技术科学实验的测量,随机误差服从正态分布规律,因此对实验数据作这样处理有一定的实践和理论依据。当然并不是所有的误差分布规律都是正态的,在必要时,应对误差分布是否遵循正态分布进行统计检验。

随机误差正态分布具有以下特性:

1. 对称性

由式(3-22)可知, $y=f(\delta)$ 为偶函数,有 $f(\delta)=f(-\delta)$ 。即绝对值相等的正误差和负误差出现的机会相同。

2. 有界性

由式(3-22)可知,误差 δ 的区间为 $(-\infty, \infty)$,实际上误差 δ 只出现在一定的区间 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 内。可以证明,随机误差 $\delta > \pm 3\sigma$ 时的概率 $P=0.27\%$ 。也就是说,在1000次测量中,最多只有三次测量的误差超出 $\pm 3\sigma$ 范围。即在一定条件下,随机误差的绝对值不会超过某一界限。

3. 单峰值

绝对值小的误差出现的概率大于绝对值大的误差出现的概率。由式(3-22)可知,当 $\delta=0$ 时, $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 为最大值。

4. 抵偿性

随着测量次数 n 的增加,随机误差 δ_i 的代数和趋于零。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \delta_i = 0$$

抵偿性可由单峰性及对称性所确定。

二、测量列的精度参数与概率积分

在测量中,我们常用标准误差 σ 作为测量列的精度参数。 σ 定义为各个误差平方和的平均值的平方根,亦称为均方根偏差,用公式表示为:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}} \quad (3-25)$$

式中: δ_i ——各测量值的误差;

n ——测量次数。

随机误差 δ 服从正态分布。标准偏差 σ ,决定了该正态分布曲线,如图3-6所示。图中 $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, σ 值越小,其曲线峰值越大,分布曲线越陡,即小误差出现的概率大,大误差出现的概率小,测量列的精度高; σ 值增大,情况则与此相反。因此,常用标准偏差 σ 值来表征测量的精密度。

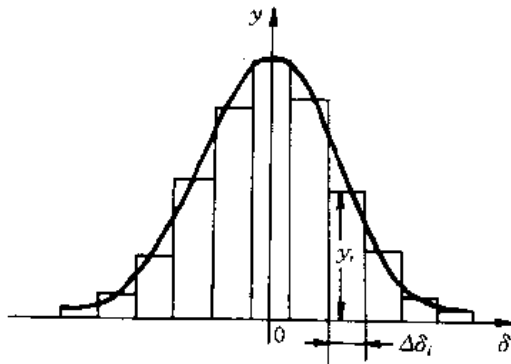


图3-5 统计直方图

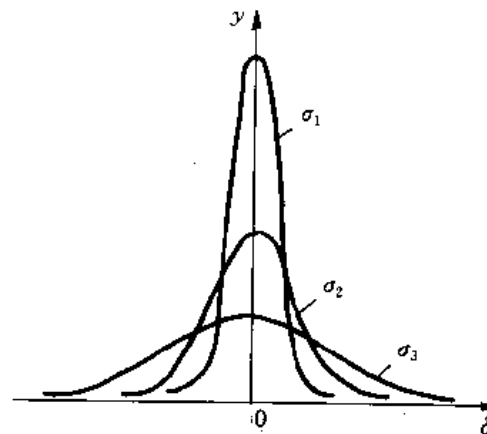


图3-6 σ 值对分布曲线的影响

由式(3-22)概率分布密度函数 $y=f(\delta)$ 可知,随机误差落在 $d\delta$ 区间的概率 $f(\delta)d\delta$ 。假设误差落在 $[-\delta, +\delta]$ 之间的概率为 $P[-\delta, +\delta]$,则:

$$P[-\delta, +\delta] = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta \quad (3-26)$$

令 $t = \frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma}$ 代入上式可得:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-t}^t e^{-t^2} dt \quad (3-27)$$

根据函数的幂级数展开式,得:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots \quad (3-28)$$

将(3-28)代入式(3-27),积分后得:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(t - \frac{t^3}{3 \times 1!} + \frac{t^5}{5 \times 2!} - \frac{t^7}{7 \times 3!} + \dots \right) \quad (3-29)$$

对于 $t = \delta / \sqrt{2}\sigma$, 误差 δ 介于 $\pm C\sigma$ 区间的概率可按下式计算:

$$t = \frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{C\sigma}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{C}{\sqrt{2}} \quad (3-30)$$

将(3-30)代入式(3-29)得:

C	1	1.96	2	2.58	3
P	0.6827	0.95	0.9545	0.99	0.9973

从上可看出, 误差 δ 于 $[-\sigma, \sigma]$, $[-2\sigma, 2\sigma]$, $[-3\sigma, 3\sigma]$ 区间时, 置信概率(产生误差的概率)分别为 68.27%、95.45%、99.73% 等。一般对于服从正态分布的随机误差, 常用三倍标准误差作为极限误差: $\delta_{\text{lim}} = 3\sigma$, 即在 1000 次测量中有三次测量的误差绝对值超出了 3σ 范围。所以 C 称为置信系数, $C\sigma$ 称为置信限; $\pm C\sigma$ 称为置信区间; P 称为置信概率或置信度。

第五节 标准偏差的计算方法

评定测量列随机误差, 可用以下几种计算公式:

(1) 标准偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}} \quad (3-31)$$

(2) 或然误差 ρ

$$\rho = 0.6745\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma \quad (3-32)$$

或然误差, 就是一组测得值测量误差得中位值, 也称为中误差。

(3) 算术平均值 θ

$$\theta = \frac{|\delta_1| + |\delta_2| + \dots + |\delta_n|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\delta_i|$$

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = 0.7979\sigma \approx \frac{4}{5}\sigma \quad (3-33)$$

因此, 评价一个测量列的精度高低, 就可用 σ 、 θ 、 ρ 这些参数作置信限。对同一测量列, 若按大小数值(即相同计量单位)进行排列, 则有: $\sigma > \theta > \rho$ 。

相应概率为: $68\% > 58\% > 50\%$ 。

以上三种方法中, 广泛采用第一种标准偏差法, 现就标准偏差的几种计算方法分类如下:

一、标准法——贝塞尔(Bessel)公式

根据标准偏差的定义, σ 是无法求取的。根据实际测量得到的数据, 能够求到剩余误差

V_i 去代替无法测量的真差 δ_i , 从而得到标准偏差的近似值 $\hat{\sigma}$, 即对 σ 的估值, 其计算表达式为:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n-1}} \quad (3-34)$$

式中: V_i 称为残余误差或残差, 即 $V_i = x_i - \bar{x}$ 。

上式称为贝塞尔公式, 根据该式可由残差求得一系列测得值中任一次测量的标准偏差。

二、绝对差法——佩特斯(Peters)公式

利用贝塞尔公式求标准偏差时, 要多次平方求和平均后再开方, 当数据较多时比较麻烦, 因此, 可利用较简单的算术平均误差来估算标准偏差。

由式(3-33)得:

$$\sigma = 1.2533 \frac{\sum |V_i|}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{5}{4} \frac{\sum |V_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (3-35)$$

上式是用各测得值残差绝对值之和来估算标准偏差公式, 也称佩斯特公式。

三、极差法

极差法是一种估算标准偏差的快速简便方法。所谓极差, 就是对一固定被测量进行 n 次等精度测量, 测得 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 中最大值与最小值之差, 并用符号 R 表示, 即:

$$R = X_{\max} - X_{\min} \quad (3-36)$$

利用极差估算标准偏差的公式为:

$$\sigma = \frac{R}{d_n} \quad (3-37)$$

式中: d_n ——极差系数, 与测量次数 n 有关, 如表3-4 所示。

表3-4 极差系数 d_n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$1/d_n$	0.886	0.591	0.486	0.430	0.395	0.370	0.351	0.337	0.325	0.288	0.267

利用极差 R 来估计标准偏差, 测量次数 n 不能太大, 一般取 $n < 5$, 如果 n 太大, 可把数据分成 n 个组, 分别对每组求极差, 然后求平均极差。若有 k 个组, 其平均标准偏差估计值为:

$$\bar{R} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k R_j \quad (3-38)$$

则标准偏差估计值为:

$$\sigma = \frac{\bar{R}}{d(n, k)} \quad (3-39)$$

式中 $d(n, k)$ ——分组极差数, 其值如表3-5 所示。

表3-5 分组极差系数 $d(n, k)$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1.41	1.28	1.23	1.21	1.19	1.18	1.17	1.17	1.16	1.16
3	1.91	1.81	1.71	1.75	1.74	1.73	1.17	1.72	1.72	1.72
4	2.24	2.15	2.12	2.11	2.10	2.10	2.09	2.08	2.08	2.08
5	2.48	2.40	2.38	2.31	2.36	2.35	2.35	2.34	2.34	2.33
6	2.67	2.60	2.58	2.57	2.56	2.56	2.55	2.55	2.55	2.55
7	2.83	2.77	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72	2.72	2.72	2.72

四、最大误差法

最大误差是指真误差的最大绝对误差 $|\delta_i|_{\max}$ ，若被测量的真值(约定真值)为已知时，有：

$$\sigma = \frac{|\delta_i|_{\max}}{k_n} \quad (3-40)$$

若被测量的真值(约定真值)为未知时，可用最大残差 $|V_i|_{\max}$ 代替真误差 $|\delta_i|_{\max}$ 计算标准偏差，即：

$$\sigma = \frac{|V_i|_{\max}}{k'_n} \quad (3-41)$$

式(3-40)中的 $1/k_n$ 值与式(3-41)中的 $1/k'_n$ 值可查表3-6。

表3-6 $1/k$ 与 $1/k'$ 值

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
$1/k_n$	0.88	0.75	0.68	0.64	0.61	0.58	0.56	0.55	0.53	0.49
$1/k'_n$	1.77	1.02	0.83	0.74	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.51

以上四种方法中，认为贝塞尔公式对测量数据的利用效率为100%，佩斯特法对数据的利用效率为88%，极差法当 n 大于15时，其效率低于80%；当 $n=2$ 时，其效率为100%；当 $n < 8$ 时，其效率大于90%。最大误差法当 $n < 10$ 时，其效率与贝塞尔公式相当；当 $n=1$ 时，只能用此法。

五、算术平均值的标准偏差

在确认随机误差服从正态分布的前提下，假设取 N 组，每组取 n 次等精度测量，则可测得 N 个平均值 $\bar{x}_i (i=1, 2, \dots, N \text{ 且 } N \rightarrow \infty)$ ，相应地可得 N 个平均值的真差 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, N \text{ 且 } N \rightarrow \infty)$ ，则 \bar{x}_i 与 δ_i 皆服从正态分布。

i 表示组数 $i=1, 2, \dots, N \text{ 且 } N \rightarrow \infty$ 。用 k 表示每组测量值的个数， $k=1, 2, \dots, n$ ，则：

$$\bar{x}_1 = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n}}{n}, \lambda_1 = \frac{\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n}}{n}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots + x_{2n}}{n}, \lambda_2 = \frac{\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots + \delta_{2n}}{n}$$

$$\bar{x}_n = \frac{x_{n1} + x_{n2} + x_{n3} + \dots + x_{nm}}{n}, \lambda_n = \frac{\delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{n3} + \dots + \delta_{nm}}{n}$$

求 λ_i^2 得:

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \delta_{1k}^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{j \neq k} \delta_{1j} \delta_{1k}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \delta_{2k}^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{j \neq k} \delta_{2j} \delta_{2k}$$

...

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \delta_{nk}^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{j \neq k} \delta_{nj} \delta_{nk}$$

把上列各式求和取平均,得:

$$\frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \delta_{ik}^2}{n^2 N} + \frac{2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq k} \delta_{ij} \delta_{ik}}{n^2 N}$$

因随机误差具有低偿性,当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq k} \delta_{ij} \delta_{ik} = 0$, 所以

$$\frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}{nN}$$

算术平均值 \bar{x} 的标准误差:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}{nN}}$$

据式(3-25)标准偏差的定义为:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}$$

所以

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n(n-1)}} \quad (3-42)$$

第六节 测试系统误差的综合方法

工程测量系统通常由一系列元件组成,每个元件都有自己的误差。那么各元件的误差是如何影响系统的总误差?在一些工程测量中,测量系统是由多种不同的仪器所组成来测量某一量值,也将出现类似的情况。如果已知系统中各元件(或仪表)的误差,如何估值计算总误差?反之,如果测量误差必须满足一定的精度,那系统中各元件(或仪表)元件的误差量又是怎样确定的。这节就是要解决上述问题。

在很多实际工程测量中,必须通过测量其它的一量而得到需要的被测量。假设被测量值为 Y ,它是 n 个独立变量 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ 的一个函数,即可表达为 $Y = F(x_1, x_2, x_3, \dots)$

x_m)。如果函数关系已知,则各量直接测量的误差是以某种形式传递给被测量的误差,这类误差的合成称之为误差的传递。例如,测量一个圆柱体体积 V ,可通过直接测量圆柱体的直径 D 和高度 H ,然后依据公式 $V = \pi D^2 H / 4$ 计算而得,显然体积 V 的误差由直径 D 和高度 H 的误差决定。当这个函数关系未知时,测量误差将由各分项(单项)误差的合成来评定。现就这两类误差的合成方法介绍如下:

一、已知函数关系的测量误差的合成

这类误差测量的一般表达式:

$$Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3-43)$$

$$\begin{cases} \delta_{y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_{21} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \delta x_{m1} \\ \delta_{y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_{12} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_{22} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \delta x_{m2} \\ \cdots \\ \delta_{y_n} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_{1n} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_{2n} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \delta x_{mn} \end{cases} \quad (3-48)$$

将式(3-48)方程组各式平方后相加得:

$$\sum_{i=1}^n \delta_{y_i}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sum_{i=1}^n \delta_{x_{1i}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sum_{i=1}^n \delta_{x_{2i}}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sum_{i=1}^n \delta_{x_{mi}}^2 + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{j \neq i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_{x_{jk}} \delta_{x_{ik}}\right)$$

将上式各项除以 n 得:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \delta_{y_i}^2\right)/n &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_{1i}}^2\right)/n + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_{2i}}^2\right)/n + \cdots + \\ &\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_{mi}}^2\right)/n + 2 \sum_{j \neq i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_i} [\delta_{x_{jk}} \delta_{x_{ik}}]/n \end{aligned}$$

若各直接测量参数的随机误差相互独立,并根据随机误差的对称性,则上式中有:

$$\frac{\sum_{k=1}^n \delta_{x_{jk}} \delta_{x_{ik}}}{n} = 0$$

则:
$$\frac{\sum \delta_{y_i}^2}{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\sum \delta_{x_{1i}}^2}{n} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{\sum \delta_{x_{2i}}^2}{n} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \frac{\sum \delta_{x_{mi}}^2}{n}$$

由式(3-25)可得:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2$$

或
$$\sigma_{y_{rms}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2} \quad (3-49)$$

式(3-49)为间接测量时用标准偏差表示的误差传递公式的一般表达式。该表达式又称为方和根公式(root-sum square formula)。总误差 $\sigma_{y_{rms}}$ 的含意和组成误差一样,算出的总误差总是小于按式(3-45)算出的总误差。据此,式(3-49)修改为

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{y_{rms}}}{\sqrt{n} (\partial f / \partial x_i)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3-50)$$

三、误差传递公式的应用

1. 相加减函数关系

设间接测量函数关系为: $Y = C_1 x_1 + C_2 x_2$ (C_1, C_2 为常数), 由式(3-49)可得:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= \sqrt{C_1^2 \sigma_{x_1}^2 + C_2^2 \sigma_{x_2}^2} \end{aligned} \quad (3-51)$$

2. 相乘积的函数关系

设函数关系为: $y=cx_1x_2$ (c 为常数), 由式(3-49)得:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= \sqrt{(cx_2)^2 \sigma_{x_1}^2 + (cx_1)^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= c \sqrt{x_2^2 \sigma_{x_1}^2 + x_1^2 \sigma_{x_2}^2}\end{aligned}\quad (3-52)$$

3. 相除的函数关系

设函数关系为: $y=c \frac{x_1}{x_2}$ (c 为常数), 由式(3-49)得:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{c}{x_2}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(-c \frac{x_1}{x_2^2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= \frac{c}{x_2} \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + x_1^2 \sigma_{x_2}^2}\end{aligned}$$

4. 指数函数关系

设间接测量函数关系为: $y=cx_1^a x_2^b$ (c, a, b 为常数), 由式(3-49)得:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= \sqrt{(cx_1^{a-1} x_2^b)^2 \sigma_{x_1}^2 + (cbx_2^{b-1} x_1^a)^2 \sigma_{x_2}^2}\end{aligned}$$

上式两边都除以 y 得:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_y}{y} &= \sqrt{\left(\frac{cx_1^{a-1} x_2^b}{cx_1^a x_2^b}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{cbx_2^{b-1} x_1^a}{cx_1^a x_2^b}\right)^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= \sqrt{(ax_1^{a-2})^2 \sigma_{x_1}^2 + (bx_2^{b-2})^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= \sqrt{\left(a \frac{1}{x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(b \frac{1}{x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2} \\ &= \sqrt{a^2 \left(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2}\right)^2}\end{aligned}$$

用相对偏差表示得:

$$\rho_y = \sqrt{a^2 \rho_{x_1}^2 + b^2 \rho_{x_2}^2} \quad (3-53)$$

绝对偏差为:

$$\sigma_y = y \rho_y \quad (3-54)$$

二、未知函数关系误差的合成

测量系统误差的合成结果的作用, 是能够确切的表示测量结果与被测量真值的接近程

度。就目前普遍采用方法介绍如下：

1. 随机误差的合成与随机不确定度

设随机变量 Y 为 m 个随机变量 x_i 之和,即 $Y = \sum_{i=1}^m X_i$

根据概率方差性质, Y 的方差为:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \neq j=1}^m \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

即

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \neq j=1}^m \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (3-55)$$

式中: σ_i^2 ——为 x_i 的方差;

σ_i —— x_i 的均方根差;

ρ_{ij} —— x_i 与 x_j ($i \neq j$)的相关系数。

当 $\rho=0$ 时,表示两个随机变量之间互不相关,即它们之间相互独立而不存在任何依赖关系,则(3-55)变为:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_m^2} \quad (3-56)$$

式(3-56)就是随机误差的合成按方和根法。式(3-55)对各分项为正态分布的随机误差进行合成,得到的总合误差 σ_y 。

当各分项随机误差是服从非正态分布时,同样可按正态分布来理解。此时,以各种分布的标准差 σ 作置信区间,所对应的置信概率会因分布的不同有不同取值。例如,均匀分布以其标准 σ 为置信区间,对应的置信概率为57.7%;三角形分布以其 σ 作置信区间,对应的置信概率为64.9%。这样按式(3-55)进行误差合成就遇到困难。所以,在误差合成中为了解决不同分布的置信概率问题,通常采用人为规定的办法,把置信概率划一,称为约定概率,约定概率多采用0.9973,即相当于正态分布置信区间取 $\pm 3\sigma$ 所对应的置信概率。

为了把不同分布的均方根差折算成同一约定概率下的极限误差,引入置信系数 K

$$\delta_j = K_j \sigma_j \quad (3-57)$$

式中: δ_j ——由约定概率决定的极限误差;

σ_j ——各种分布的均方根差;

K_j ——对应各种分布的置信系数。

式(3-57)也称为随机不确定度,它表示随机误差在给定概率条件下不确定的程度。对同一约定概率,随机误差所服从的正态分布规律不同,置信系数也不同。利用方差合成原理进行随机误差合成的计算公式(3-57)可改写成:

$$\delta_y = \pm K \sigma_y = \pm K \sqrt{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2 + 2 \sum_{i \leq j \neq k \leq m} \rho_{jk} \sigma_j \sigma_k} \quad (3-58)$$

式中: δ_y ——总合成的极限误差;

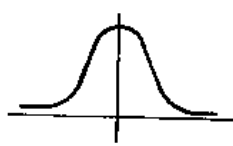
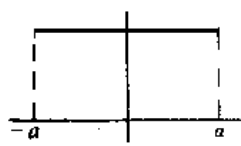
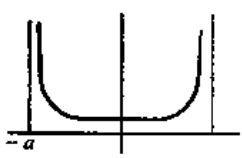
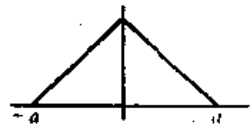
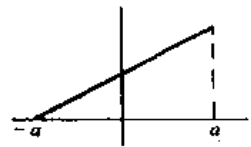
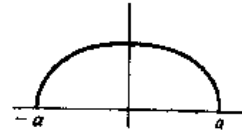
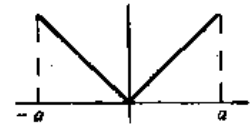
K ——总合成误差的置信系数。

当分项误差个数 $m > 4$ 时,取 $k=3$,能满足一般精密测量的要求,代入式(3-58)得:

$$\delta_y = \pm 3 \sqrt{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2 + 2 \sum_{i \leq j \neq k \leq m} \rho_{jk} \sigma_j \sigma_k} \quad (3-59)$$

常见的误差分布及其对应的置信概率与置信系数列于表3-7中。

表 3-7

分布名称	分布图形	方差	置信概率P	置信系数K
正态分布		σ^2	0.9973	3.00
			0.99	2.58
			0.95	1.96
均匀分布		$\frac{a^2}{3}$	1	$\sqrt{3}$
			0.99	$0.99 \times \sqrt{3}$
			0.95	$0.95 \times \sqrt{3}$
反正弦分布		$\frac{a^2}{2}$	1	$\sqrt{2}$
			0.99	1.414
			0.95	1.410
三角形分布		$\frac{a^2}{6}$	1	$\sqrt{6}$
			0.99	$0.9 \times \sqrt{6}$
			0.95	$0.776 \times \sqrt{6}$
直角形分布		$\frac{2a^2}{9}$	1	$\sqrt{4.5}$
			0.99	$0.99 \times \sqrt{4.5}$
			0.95	$0.95 \times \sqrt{4.5}$
椭圆形分布		$\frac{a^2}{4}$	1	2
			0.99	0.99×2
			0.95	0.88×2
双三角形分布		$\frac{a^2}{2}$	1	$\sqrt{2}$
			0.99	$\sqrt{0.99 \times 2}$
			0.95	$\sqrt{0.95 \times 2}$

当测量次数 n 是有限次(>10 次),算术平均值的随机不确定度可表示为:

$$\delta_X = t_\alpha(n-1)\sigma_X = t_\alpha(K) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3-60)$$

式中: $\alpha=1-P$ ——信度或显著水平;

$P=1-\alpha$ ——置信概率;

$K=n-1$ ——自信度;

$t_\alpha(n-1)$ —— t 分布的置信系数。

$t_\alpha(K)$ 值分别列入表3-8中。

表3-8 t 分布的置信系数 $t_\alpha(K)$ 数值表

K	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	K	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$
1	63.66	12.71	11	3.11	2.20
2	9.92	4.30	12	3.06	2.18
3	5.84	3.18	13	3.01	2.16
4	4.60	2.78	14	2.98	2.14
5	4.03	2.57	15	2.95	2.13
6	3.71	2.45	16	2.92	2.12
7	3.50	2.36	17	2.90	2.11
8	3.36	2.31	18	2.88	2.10
9	3.25	2.26	19	2.86	2.09
10	3.17	2.23	20	2.84	2.09

对于 t 分布,当置信概率 $P=0.99$ 时, $n=14$,置信系数 $t_\alpha(K)=3.0$ 。对于正态分布,当 $n \rightarrow \infty$,置信概率 $P=0.9973$ 时, $K=3.0$ 。 t 分布的置信系数除与置信概率有关外,还与自由度 K 关,当 $K \rightarrow \infty$ 时, t 分布趋于正态分布。因此, t 分布对于研究有限次测量时,是一个很有用的理论分布。

2. 已定系统误差的合成

对于已定系统误差,无论是不变的,还是按线性规律、周期性规律和复杂规律变化的系统误差,用代数和的方法计算其合成误差。即

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n = \sum_{j=1}^n \epsilon_j \quad (3-61)$$

式中: ϵ ——已定系统误差的合成;

ϵ_j ——各分项已定系统误差 $J=1,2,\dots,r$

3. 未定系统误差的合成

未定系统误差是指误差数值大小和符号正负都不确定或其中之一不确定者,该系统误

差表现出一定的随机性。在许多实际测量过程中,只需估计出它的极限变化范围 $(-e_i, e_i)$ 就可以了。未定系统误差 e_i 以极限误差 e_i 的形式给出误差的最大变化范围,表示为:

$$e_i = k_i \sigma_i \quad (3-62)$$

式中: σ_i ——未定系统误差的标准偏差;

k_i ——对应未定系统误差概率分布的置信系数。

对未定系统误差可用下述方法合成:

设有 n 个未定系统误差分量 $e_i (i=1 \sim n)$,相应地有 n 个系统误差限 $e_i (i=1 \sim n)$,则:

(1)绝对值和法

$$e = |e_1| + |e_2| + |e_3| + \dots + |e_n| = \sum_{j=1}^n |e_j| \quad (3-63)$$

上述合成方法估计的误差偏大,这是从最不利的情况出发,采取最简便计算,进行误差合成的方法。它适合各分项误差的项数 $n < 10$ 。

(2)方和根法

此法又称几何和法,当各分项误差数较多,各分项未定系统误差之间的抵偿有所加强,这时用绝对值和法所得结果偏大,且过于保守,则可用方和根法,即

$$e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2} = \left(\sum_{j=1}^n e_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-64)$$

(3)广义方和根法

为了解决各分项未定系统误差服从不同分布规律的误差合成,各未定系统误差分量的置信系数是不同的,在这种情况下,未定系统误差的合成可采用广义方和根法,即

$$e = K \sqrt{\left(\frac{e_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{e_2}{k_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{e_n}{k_n}\right)^2} \quad (3-65)$$

也可用下式表达:

$$e_y = \pm K \sigma_y = \pm K \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{e_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{e_2}{k_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial X_m} \frac{e_m}{k_m}\right)^2} \quad (3-66)$$

式中 $k_1 \sim k_n$ 为对应未定系统误差概率分布的置信系数,可查表3-7。 K 为 n 个未定系统误差之和的置信系数。在选取 $k_1 \sim k_n$ 和 K 值时,应使各系统误差分量和总和系统误差的置信概率相等,当各个系统误差分量具有相同概率分布时,则各系统误差分量的置信系数相等。

4. 总不确定度

系统的总不确定度就是综合极限误差,即随机不确定度与系统的不确定度总合,用符号 U 表示,其合成方法如下:

(1)绝对值和法

$$U = |\Delta| + |e| \quad (3-67)$$

(2)方和根法

$$U = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + \sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (3-68)$$

(3) 广义方和根法

$$U = k_a \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{k_i}\right)^2} \quad (3-69)$$

上式中 k_a 为 m 个随机误差与 n 个未定系统误差之和的概率分布对应的置信系数。根据以上分析,测量结果的准确度可表示为:

准确度=已定系统误差±总不确定度,即

$$A = \epsilon_0 \pm u \quad (3-70)$$

如果已定系统在测量中已被消除或修正,则准确度就用总不确定度表示。

例1 用测功计来测量通过转轴传输的平均功率。计算功率的公式为

$$\text{功率}(W) = \frac{2\pi NFL}{t}$$

式中: N ——在时间 t 内转轴的转数;

F ——在转功臂端部作用的力(N);

L ——转动臂长度(m);

t ——运转时间(s)。

对于某次测量,取三倍标准方差 3σ 作为极限误差,得测量数据为:

$$N = 1202 \pm 1.0(r)$$

$$F = 45.02 \pm 0.178(N)$$

$$L = 0.40 \pm 0.001(m)$$

$$t = 60.0 \pm 0.50(s)$$

求功率的总误差及标准偏差。

解:由题意得各自变量的标准偏差

$$\sigma_N = 1.0, \sigma_F = 0.178, \sigma_L = 0.001, \sigma_t = 0.5$$

计算各自变量的偏导数

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{2\pi LN}{t} = \frac{2 \times 3.14 \times 0.40 \times 1202}{60} = 50.324(W/N)$$

$$\frac{\partial W}{\partial N} = \frac{2\pi FL}{t} = \frac{2 \times 3.14 \times 45.02 \times 0.40}{60} = 1.885(W/r)$$

$$\frac{\partial W}{\partial L} = \frac{2\pi FN}{t} = \frac{2 \times 3.14 \times 45.02 \times 1202}{60} = 5663.936(W/m)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{2\pi FL}{t^2} = -\frac{2 \times 3.14 \times 45.02 \times 1202 \times 0.40}{60^2} = -37.760(W/s)$$

所测功率值为:

$$W = \frac{2 \times 3.14 \times 45.02 \times 0.40 \times 1202}{60} = 2265.57$$

由式(3-45)得总误差

$$e_y = 50.324 \times 0.178 + 1.885 \times 1.0 + 5663.936 \times 0.001$$

$$+ 37.760 \times 0.50 = 35.387(\text{W})$$

最后测量结果为

$$W = 2265.57 \pm 35.387(\text{W})$$

或

$$W = 2265.57 \pm 1.56\%$$

由式(3-49)得方和根法的总误差

$$e_{\text{总}} = \sqrt{(8.9577)^2 + (1.885)^2 + (5.6639)^2 + (18.8800)^2} = 21.733(\text{W})$$

利用方和根法,测量结果为

$$W = 2265.57 \pm 21.733(\text{W})$$

或

$$W = 2265.57 \pm 0.96\%$$

由比较 e_y 和 $e_{\text{总}}$ 可看出, $e_{\text{总}}$ 比 e_y 明显地小。这可解释为本次功率的测量误差最大可能达到35.387,若各自变量误差能准确地落在 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 内,则功率测误差不超过21.733W。

在本例中若希望功率测量的精度为0.5%,那么各自变量测量值的精度应是多大呢?如果保守一点可用式(3-47);若对自变量的测量值只是想表明它是可能的话,则可用式(3-50)。由式(3-50)得到

$$\Delta F = \frac{2265.57 \times 0.005}{\sqrt{4} \times 50.324} = 0.113(\text{N})$$

$$\Delta N = \frac{2265.57 \times 0.005}{\sqrt{4} \times 1.885} = 3.00(\text{r})$$

$$\Delta L = \frac{2265.57 \times 0.005}{\sqrt{4} \times 5663.933} = 0.001(\text{m})$$

$$\Delta t = \frac{2265.57 \times 0.005}{\sqrt{4} \times 37.760} = 0.150(\text{s})$$

若发现其中一个变量所要求的误差不能满足,这并不一定意味着功率不可能测到0.5%的精度。但这表明其他量值的测量必须保证有一个或多个应测要比这个变量的测量精度还高才行。

例2 ADC80-12 12位A/D转换器具有如下参数:

增益误差	满刻度的 $\pm 0.1\%$
调零误差	单极性 满刻度的 $\pm 0.05\%$
	双极性 满刻度的 $\pm 0.1\%$
线性误差	满刻度的 $\pm 0.012\%$
本征量化误差	$\pm \frac{1}{2}\text{LSB}$
微分线性误差	$\pm \frac{1}{2}\text{LSB}$
增益温度系数	$\pm 30\text{PPM}/\text{C}$

设定双极性为 $\pm 5\text{V}$,用来测量一个4.5V的电压,如果不考虑测量时存在共模和常模干扰,问当温度在 $0^\circ\text{C} \sim 50^\circ\text{C}$ 变化时可获得的误差不确定度是多少?

解:ADC80—12A/D 转换器误差源中,本征量化误差和微分线性是平均分布的,其它误差有平均分布的也有不平均分布的,暂作平均处理。

增益误差是线性分布的,对4.5V 变换亦为±0.1%,调零误差是线满刻度来说的,4.5V 时为:

$$\frac{5}{4.5} \times (\pm 0.1\%) = \pm 0.111\%$$

最大增益温度误差为:

$$(\pm 25^\circ\text{C}) \times 30 \times 0.0001\% = \pm 0.025\%$$

本征量化误差的方差为:

$$\sigma(\delta_1) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{2.44 - (-2.44)}{\sqrt{12}} = 1.408\text{mV}$$

微分线性误差的方差为:

$$\sigma(\delta_1) = 0.704(\text{mV})$$

总误差的不确定度为:

$$e = \pm \frac{2}{1.73} \sqrt{(0.001)^2 + (0.00111)^2 + (0.00025)^2 + (0.0014)^2 + (0.0007)^2}$$

$$= \pm 0.23\%$$

第七节 测量数据处理方法

测量数据处理是指对测量的数据进行计算和分析,找出变量之间相互制约、相互联系的依存关系,得出正确的精确的和科学的测试结果。

把测量数据处理成一定的函数关系,通常采用方法有列表法、图示法和经验公式。

一、列表法

根据测试的目的和内容,设计出合理的表格,把测量数据列入其中,然后再进行其它处理。列表法简单、方便,数据易于参考比较,但要进行深入的分析,表格就不能胜任了。它对数据变化的趋势不如图解法明了和直观,但列表法是图示法和经验法的基础。

二、图示法

在选定的坐标体系中,根据测试数据画出几何图形表示测试结果。它能直观、形象地反映出数据变化的趋势和函数变化关系。对同样的数据,选取不同的坐标系,就会画出不同的图形。常用坐标系有:直角(笛卡尔)坐标,半对数坐标,全对数坐标和极坐标。

在直角坐标系中绘制测量数据的图形时,一般以横坐标为自变量,纵坐标为与其对应的函数值,将各测量数据点描绘成曲线时,应该使曲线通过尽可能多的数据,曲线以外的数据尽可能靠近曲线,两侧的数据点数目大致相等,最后应得到一条平滑曲线。值得注意的是曲线是否真实反映出测试数据的函数关系,在很大程度上取决于坐标的分度是否适当。例如测量

获得如下数据:

x	2	4	6	8
y	90	95	110	140

将表中所列数据绘成图,可得两种情况,如图3-7所示。

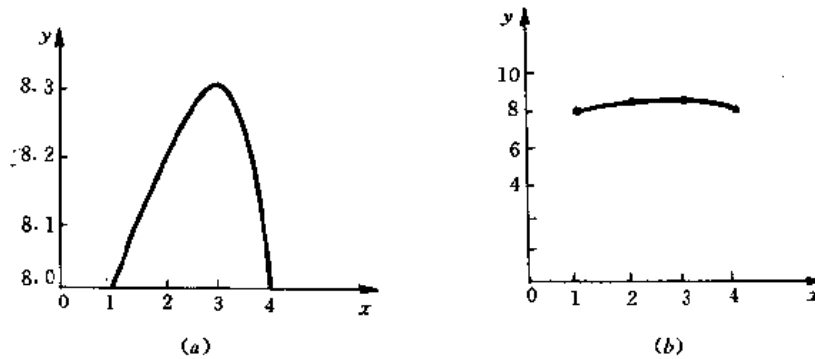


图3-7 测量数据图示法

对同一组数据,在图(b)中,由于Y轴的分度过大,画出的图形近似于直线关系;而在图(a)中,Y轴的分度缩小,使图形为一曲线。相互比较,(a)图能清楚反映了 x 与 y 之间存在的曲线关系。

坐标比例尺的选取没有严格的规定,应当以能够表示出极值的确切位置和曲线急剧变化的确切趋势为准。另一种分度方法是使所绘制的曲线主要部分的斜率接近 45° 。

三、经验公式

经验公式法就是通过对实验数据的计算,求出表示各变量之间关系的经验公式。其优点是具有结果的统一性,克服了图解法存在的主观因素影响。

在实际测试中,由测量数据正确描绘出 x 与 y 的曲线,就是所谓曲线拟合的问题。当前解决曲线拟合的比较好的办法,就是把曲线关系转化成直线关系来解决。在求经验公式时,选用合适的数学模型,是用经验公式较好拟合实验数据的前提。下面就几种典型曲线和对应的经验公式以及它们转化成直线关系。

1. 双曲线

经验公式为:
$$\frac{1}{Y} = b_0 + \frac{b_1}{X}$$

曲线形状如图3-8(a)所示

令 $Y = 1/y, X = 1/x$

则原方程变为: $Y = b_0 + b_1 X$

即为直线方程。

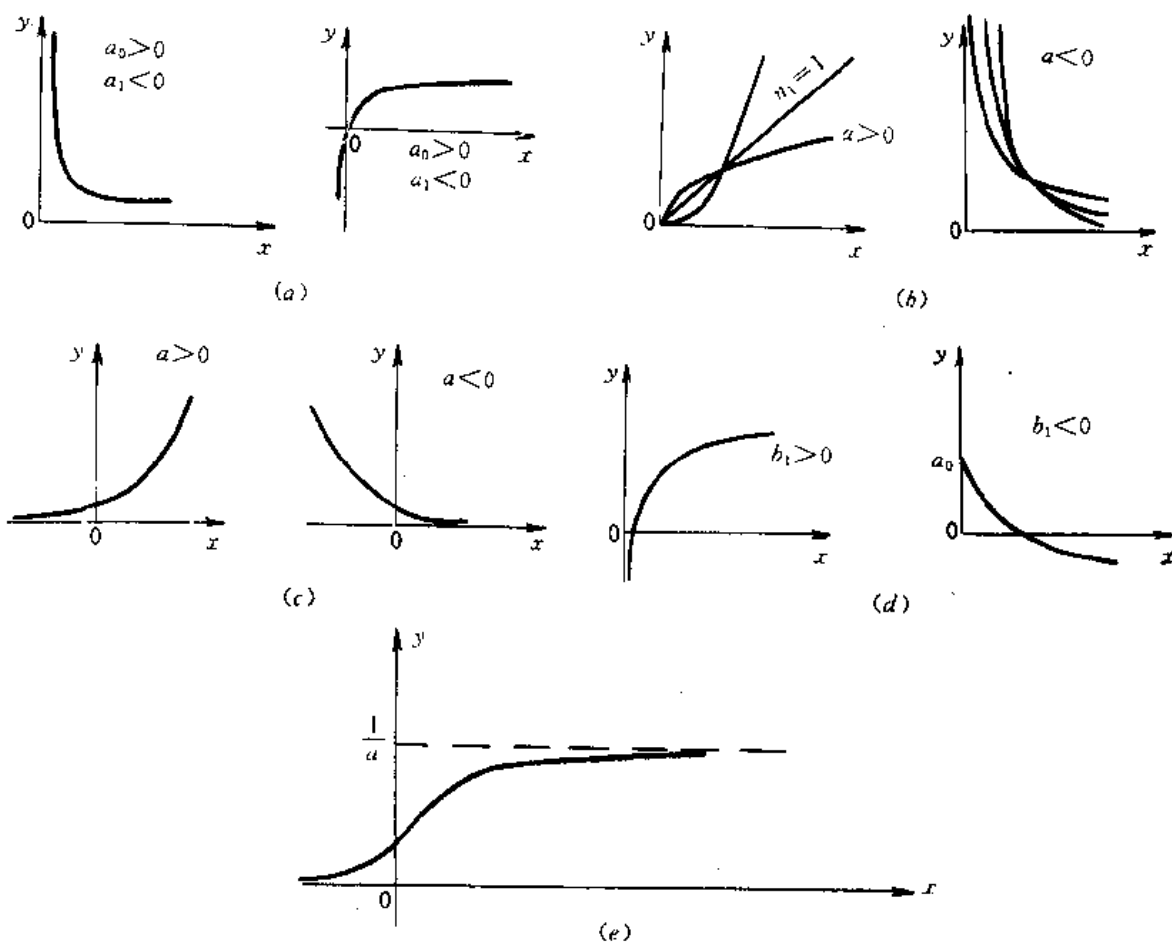


图3-8 常见经验公式表示的曲线

2. 幂函数

其经验公式为：

$$Y = aX^{b_1}$$

典型形状如图3-8(b)所示。

令

$$Y = b \log y, X = \log x, b_0 = \log a$$

则原方程转化为：

$$Y = b_0 + b_1 X$$

3. 指数函数

数学模型为：

$$Y = ae^{b_1 x}$$

曲线形状如图3-8(c)所示。

令

$$Y = \ln y, \bar{b}_0 = \ln a$$

则原方程变为: $Y = b_0 + b_1 x$

4. 对数曲线

其经验公式为: $Y = b_0 + b_1 \lg x$

曲线形状如图3-8(d)

令 $X = \lg x$

则原方程变为: $Y = b_0 + b_1 x$

5. S型曲线

其经验公式为: $Y = \frac{1}{b_0 + b_1 e^{-x}}$

曲线形状如图3-8(e)所示

令 $Y = \frac{1}{y}, X = e^{-x}$

则方程变为: $Y = b_0 + b_1 x$

以上介绍的这些典型曲线,经过转换都可变成直线方程 $Y = a_0 + a_1 x$ 。这时,可根据一系列测量数据确定中的常量 a_0 和 a_1 ,其方法有图解法、端值法、平均法和最小二乘法等。最后,检验所确定的公式的准确性,即用测量数据中自变量值代入公式,计算出函数值是否与实测值一致,若差别很大,说明所确定的公式基本形式可能有错误,则应另选择经验公式。

四、直线拟合——一元线性回归方程

根据测量数据来分析两个变量 x 和 y 之间的相互关系的方法称为回归分析法,即工程上所说的拟合问题,所得关系称为经验公式,或称拟合方程。

如果两变量之间的关系是线性关系,就称为直线拟合或一元线性回归。如果变量之间关系是非线性关系,则称为曲线拟合或一元非线性回归。对于典型的曲线方程通过曲线化直法,转换为直线方程,结果还是直线拟合问题。

设两变量之间关系为 $y = f(x)$,并有一系列测量数据:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

若 x, y 之间关系基本为线性关系时,则可用一个线性方程来表示,即:

$$y = a_0 + a_1 x \quad (3-71)$$

式(3-71)直线方程就称为上述测量数据的拟合方程。实际上就是通过测量数据的数学处理,确定出拟合直线方程中的系数 a_0, a_1 ,其拟合方法有如下几种。

1. 端直线

将测量数据中的起点和终点值 (x_1, y_1) 和 (x_n, y_n) 代入式(3-71)中,求常数 a_0, a_1 ,即两端点连成的直线来代表所有测量数据。即

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1$$

$$y_n = a_0 + a_1 x_n$$

解上述联立方程得:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{Y_1 - Y_n}{X_1 - X_n} & (3-72) \\ a_0 = Y_n - a_1 X_n & (3-73) \end{cases}$$

得拟合的线性方程为: $y = a_0 + a_1 x$ 。

2. 平均法

将全部测量数据分别代入式(3-71)中,得:

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_2$$

...

$$y_n = a_0 + a_1 x_n$$

将上面 n 个方程分成两组,前半组 k 个,后半组 k 个, [n 为偶数时, $k = n/2$; n 为奇数时, $k_{\text{前}} = (n+1)/2, k_{\text{后}} = (n-1)/2$], 分别相加后得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k y_i &= k a_0 + a_1 \sum_{i=1}^k x_i \\ \sum_{i=k+1}^n y_i &= k a_0 + a_1 \sum_{i=k+1}^n x_i \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{k} &= a_0 + a_1 \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} \\ \frac{\sum_{i=k+1}^n y_i}{k} &= a_0 + a_1 \frac{\sum_{i=k+1}^n x_i}{k} \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{k1} &= \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{k} & \bar{X}_{k1} &= \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} \\ \bar{Y}_{k2} &= \frac{\sum_{i=k+1}^n y_i}{k} & \bar{X}_{k2} &= \frac{\sum_{i=k+1}^n x_i}{k} \end{aligned}$$

得

$$\bar{Y}_{k1} = a_0 + a_1 \bar{X}_{k1} \quad (3-74)$$

$$\bar{Y}_{k2} = a_0 + a_1 \bar{X}_{k2}$$

$$a_1 = \frac{\bar{Y}_{k2} - \bar{Y}_{k1}}{\bar{X}_{k2} - \bar{X}_{k1}} \quad (3-75)$$

$$a_0 = \bar{Y}_{k1} - a_1 \bar{X}_{k1} \quad (3-76)$$

最后得出拟合直线方程: $y = a_0 + a_1 x$ 。

3. 最小二乘法

具有等精度的多次测量中,以其残差平方和(或残差平方的加权和)为最小的条件来确

定估计值的方法,称为最小二乘法。

最小二乘法表示为:

$$\sum_{i=1}^n V_i^2 = \min \quad (3-77)$$

最小二乘法的几何意义可用图3-9表示。图中实心园点代表测得数据点,实线为最小二乘法拟合的直线。实心园点与拟合直线之间在Y轴方向的距离代表残差 V_i 。根据式(3-71)和最小二乘法拟合原理,图形中以残差为边长的各个正方形面积的总和应为最小。反之,用其它方法拟合的直线所得的面积总和都会比它大。

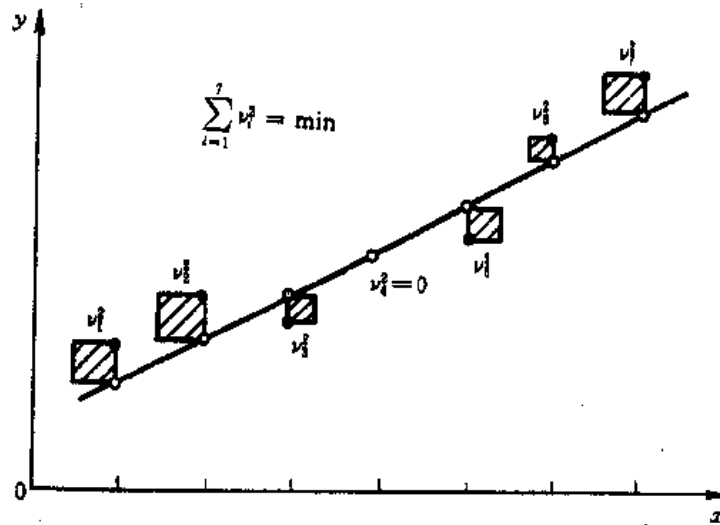


图 3-9

对线性方程 $y = a_0 + a_1x$ 按式(3-74)残差平方和为最小,根据所有测量数据可得:

$$U = \sum [Y_i + (a_0 + a_1x_i)]^2 = \min \quad (3-78)$$

将上式分别对 a_0 和 a_1 取偏导数得:

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} = -2(Y_1 - a_0 - a_1X_1) - 2(Y_2 - a_0 - a_1X_2) - \dots - 2(Y_n - a_0 - a_1X_n)$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = -2X_1(Y_1 - a_0 - a_1X_1) - 2X_2(Y_2 - a_0 - a_1X_2) - \dots - 2X_n(Y_n - a_0 - a_1X_n)$$

为了满足式(3-75),其必要条件是:

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial U}{\partial a_1} = 0$$

则有: $(y_1 - a_0 - a_1x_1) + (y_2 - a_0 - a_1x_2) + \dots + (y_n - a_0 - a_1x_n) = 0$

$$x_1(y_1 - a_0 - a_1x_1) + x_2(y_2 - a_0 - a_1x_2) + \dots + x_n(y_n - a_0 - a_1x_n) = 0$$

$$na_0 + (\sum x_i)a_1 = \sum y_i$$

整理后得:

$$(\sum x_i)a_0 + (\sum x_i^2)a_1 = \sum x_i y_i \quad (3-79)$$

式(3-79)称为正规方程组,联立求解得:

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (3-80)$$

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (3-81)$$

将式(3-80)和式(3-81)代入式 $y=a_0+a_1x$, 即可得用最小二乘法拟合的线性方程。

例3 对量程为10MPa 的压力传感器,用活塞式压力计进行标定,输出由数字电压表读数,共进行五次加压、卸压循环,所得各校准点输出值及平均值列于表3-9 中。试作端直法、平均法、最小二乘法拟合线性方程 $y=a_0+a_1x$, 并比较各种拟合方法的拟合精度。

表3-9 压力测量数据

输出(mV)		压力(MPa)					
		2	4	6	8	10	
校 准 数 据	1	正行程	10.01	20.06	30.14	40.09	50.01
		反行程	10.05	20.10	30.15	40.09	
	2	正行程	10.01	20.04	30.09	40.08	50.04
		反行程	10.06	20.12	30.16	40.14	
	3	正行程	10.02	20.05	30.11	40.12	50.06
		反行程	10.06	20.14	30.19	40.15	
	4	正行程	10.02	20.06	30.12	40.11	50.11
		反行程	10.09	20.14	30.21	40.14	
	5	正行程	10.02	20.06	30.14	40.14	50.14
		反行程	10.09	20.16	30.22	40.22	
正行程平均值		10.016	20.054	30.120	40.108	50.072	
反行程平均值		10.070	20.132	30.186	40.148		
总平均值		10.043	20.093	30.153	40.128	50.072	

解:(1) 端直法拟合线性方程

线性方程 $y=a_0+a_1x$ 中 x 为校准压力, y 为输出值。由表3-9 可知,其端点值为:

$$x_1 = 2 \quad y_1 = 10.043$$

$$x_n = 10 \quad y_n = 50.072$$

将上述数据代入式(3-72)和式(3-73)得:

$$a_1 = \frac{50.072 - 10.043}{10 - 2} = 5.0036$$

$$a_0 = 50.072 - 5.0036 \times 10 = 0.036$$

得拟合的线性方程为: $y=0.036+5.004x$ 。

(2) 平均法拟合线性方程

由于校准数 $n=5$,取平均值时,前一组取3个数,后一组取2个数,则式(3-74)中的平均值为:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{*1} &= \frac{2+4+6}{3} = 4, \bar{X}_{*2} = \frac{8+10}{2} = 9 \\ \bar{Y}_{*1} &= \frac{10.043+20.093+30.153}{3} = 20.096 \\ \bar{Y}_{*2} &= \frac{40.128+50.072}{2} = 45.100\end{aligned}$$

将上述数据代入式(3-80)和式(3-81)得:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{45.100 - 20.096}{9 - 4} = 5.0008 \\ a_1 &= 20.096 - 5.0008 \times 4 = 0.0928\end{aligned}$$

得拟合的线性方程为: $y=0.093+5.001x$ 。

(3) 最小二乘法拟合线性方程

由表3-9中的数据,可计算出:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 x_i &= 30, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 220 \\ \sum_{i=1}^5 y_i &= 150.489, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 y_i = 1103.120\end{aligned}$$

将上面数据代入式(3-80)、式(3-81)得:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{5 \times 1103.12 - 30 \times 150.489}{5 \times 220 - 30^2} = 5.0005 \\ a_0 &= \frac{150.489 \times 220 - 1103.12 \times 30}{5 \times 220 - 30^2} = 0.0699\end{aligned}$$

得拟合的线性方程为: $y=0.070-5.005x$ 。

上述三种方法,可分别求出各自对应的残差值,列于表3-10中。贝塞尔公式(3-34)可得拟合曲线的标准偏差为:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n-m}} \quad (3-82)$$

式中: m 为拟合曲线未知量个数; n 为测量次数。

由式(3-82)可得,各拟合方法的拟合精度(即用标准偏差表示)如下:

$$\textcircled{1} \text{端直法 } \sigma = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n-m}} = \sqrt{\frac{0.013947}{5-2}} = 0.068$$

$$\textcircled{2} \text{平均法 } \sigma = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n-m}} = \sqrt{\frac{0.007326}{5-2}} = 0.049$$

$$\textcircled{3} \text{最小二乘法 } \sigma = \sqrt{\frac{0.006815}{5-2}} = 0.048$$

由以上结果说明,用最小二乘法拟合的线性方程误差最小,平均法次之,端直法最差。

表3-10 三种数据拟合方法的比较

较准压力		2	4	6	8	10
端直法	拟合方程	$y=0.036+5.004x$				
	理想直线 Y_i	10.044	20.052	30.060	40.068	50.076
	残差 $Y_i - Y_i$	-0.001	0.041	0.093	0.060	-0.004
平均法	拟合方程	$y=0.093+5.001x$				
	理想直线 Y_i	10.095	20.097	30.099	40.101	50.103
	残差 $Y_i - Y_i$	-0.052	-0.004	0.054	0.027	-0.031
最小二乘法	拟合方程	$y=0.070+5.005x$				
	理想直线 Y_i	10.080	20.090	30.100	40.110	50.120
	残差 $Y_i - Y_i$	-0.0337	0.003	0.053	0.018	-0.048

习 题 三

- 3-1 说明随机误差与系统误差的性质,及其对测量结果的影响。
- 3-2 置信系数的意义是什么?它与什么有关?
- 3-3 不确定度的意义是什么?它与误差有何区别?
- 3-4 现有一测量系统,对某量只测一次,能否确定其标准偏差大小?若该量只允许测量一次,要确定测量结果的标准偏差,应怎么办?
- 3-5 对某长度测量数据如下:

n (次)	1	2	3	4	5	6	7
L (cm)	25.3	25.2	24.9	25.0	25.1	24.7	24.8

- (1)求测量结果长度及标准偏差(概率95%)。
- (2)第5次测量的长度及标准偏差(概率95%)。
- 3-6 一节流孔的出流系数 C_d 可以用在恒定水头 h 情况下,在一定时间内所收集的流过的水量来求得。所用公式为

$$C_d = \frac{W}{t\rho A \sqrt{2gh}}$$

如各参数为 $W=392 \pm 0.23\text{kg}$; $A=\pi d^2/4$; $d=12.7 \pm 0.025\text{mm}$; $t=600.0 \pm 2\text{s}$; $g=9800 \pm 0.1\% \text{mm/s}^2$; $\rho=1 \times 10^{-6} \pm 0.1\text{kg/mm}^3$; $h=3660 \pm 3\text{mm}$

试求 C_d 及其可能的误差,考虑下面两种情况:

- (a)误差为绝对极根误差;
- (b)误差为 $\pm 3s$ 极限误差。

第四章 传感器技术

第一节 概 述

传感器技术、计算机技术、通信技术被誉为现代信息技术三大支柱,其中传感技术的发展,直接影响到其它技术的应用和发展。因此传感技术是现代信息技术的基础。现代的信息社会要求所检测的物理量之广、之多前所未有,只有不断地发展、完善传感器技术,才能促进人类社会科技的进步。

本章从应用角度出发,介绍各类常用的传感器原理,并注重传感器的实际应用。

第二节 传感器发展近况及其分类

传感器就是把需要感知的信息转换成另一种容易被度量或处理的物理量的转换装置。这个物理量就是信息的载体,这种载体就是电信号。准确地说,根据中华人民共和国国家标准(GB7665-87)传感器(transducer/sensor)的定义:“能感受规定的被测量并按照一定的规律转换成可用输出信号的器件或装置。”通过传感器,可检测出物体位移、速度、加速度、力、温度等物理量。在50、60年,工业生产中引入了传感器,对生产过程的物理量进行检测,并引入工业生产的自动控制环节,使工业发生一次产业革命,生产效率大大提高,成本却显著下降。通过位移传感器,能检测出几微米的物体位移。通过力传感器,能检测量上百兆帕到几微帕的压力等等。这些都远远超出人类五官的感觉能力和范围。

传感器技术和现代半导体技术、生物技术相结合,产生出许多新型传感器,它不仅能检测出诸如光、色、声音、气味、温度、酸碱度、人体的心电、脑电、脉相等信息,还能检测出物体结构、组成(如利用超声波探伤仪检测)等信息。特别是,传感器技术和计算机技术相结合,使传感器具有智能功能,大大扩大了传感器的应用范围。传感器也从单一结构型传感器,即利用传感器结构的几何尺寸的变化而检测出所需信息开始向固态型传感器,即利用半导体材料、分子材料对物理量、化学生物信息的检测演变。应用光电技术、半导体技术、集成电路技术、微处理技术,把传感部份、中间变换电路及微处理器、电源和驱动部分都集在一块芯片上,使传感器达到微型、智能化,这是传感器发展的方向。

传感器的分类大概有二类分法。一类是按照传感器的使用目的来分,即按位移、速度、压力、加速度、温度等来分类。另一类分法是按传感器的原理来分,如电阻式、电感式、电容式、压电式、磁电式等来分。本章是按传感器的使用目的来分。

第三节 位移传感器

一、电阻式传感器

电阻式传感器是把被测的物理量转换成电阻变化的一种传感器。按其工作原理可分为

电位器式、电阻应变片式和其它电阻式。敏感元件为热敏电阻、光敏电阻、磁敏电阻、压敏电阻、气敏电阻、湿敏电阻等。该类传感器能检测出位移、压力、温度、加速度、气体、磁等物理量,是应用最广的一类传感器,现就其主要的电阻式传感器工作原理介绍如下。

1. 电位器式电阻传感器

电位器式传感器主要用于中小位移(偏差量或几十毫米内的位移量)和角度位置、位移量的测量,适用于要求不高的场合。优点是结构简单、成本低。

电位器式传感器通常由骨架、电阻元件及电刷等组成。如图4-1所示。当A、C两端接上电,电压表接至电刷,则电刷移动时,就有电压输出 U_o ,其电路模型示于图4-2。

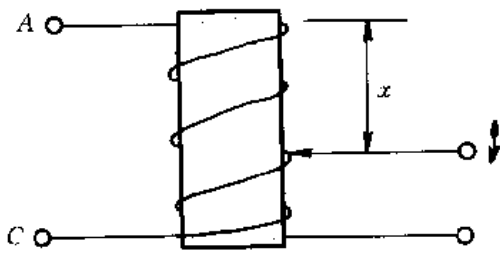


图4-1 电位器式传感器

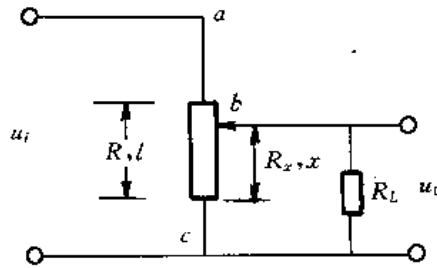


图4-2 电位器式传感器电路模型

图4-2中,激励电压 U_i ,电位器总电阻 R ,电位器长度为 l ,电刷位移 x ,相应电阻为 R_x ,负载电阻 R_L ,输出电压 U_o 。

电路分压定理可得:

$$u_o = u_i = \frac{R_x R_L / (R_x + R_L)}{R - R_x + R_x R_L / (R_x + R_L)} \quad (4-1)$$

式中令 $k = \frac{R_x}{R}$, $m = R/R_L$, (4-1)式变为:

$$U_o = U_i \frac{k}{1 + mk(1 - k)} \quad (4-2)$$

当 $R_L \rightarrow \infty$, $m = R/R_L \rightarrow 0$ 时,有

$$U_o = U_o' = U_i \cdot k = U_i \cdot \frac{R_x}{R} = U_i \cdot \frac{x}{l} \quad (4-3)$$

此时输入与输出具有线性关系。

当 R_L 为有限值时,由式(4-2)可知,输入与输出是非线性关系。

非线性误差为:

$$E_L = \frac{u_o' - u_o}{u_o'} \times 100\% = \left[1 - \frac{1}{1 + mk(1 - k)} \right] \times 100\%$$

所以

$$E_L = \frac{mk(1 - k)}{1 - mx(1 - k)} \times 100\% \quad (4-4)$$

当 $k=0$ 或 $k=1$ 时, $E_L=0$ 。令 $E_L(k)$ 的一阶导数为零,找出 E_L 的最大值所对应的 k 值。即令 $E_L'(k)=0$ 可解得 $k=0.5$ 时, E_L 有最大值 E_{Lm} 。

图4-3给出了非线性误差 E_L 与 m 及 x 的函数关系。为了减小非线性误差 E_L ,可在电位器

滑动触头与负载 R_L 之间接一个低噪声、低漂移的电压跟随器。

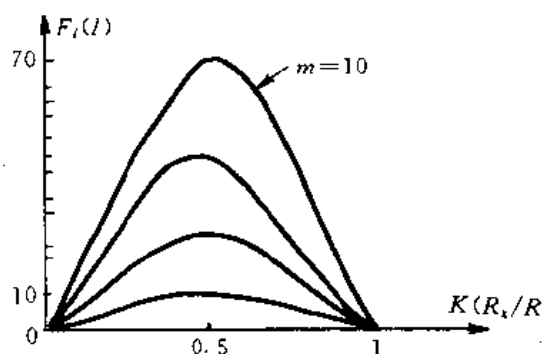


图4-3 非线性误差与负载电阻的关系

线绕电位器式传感器在电刷移动过程中,要产生脉冲噪声,影响仪表的输出;此外电刷、电阻丝要磨损,会降低它的使用寿命。

为了克服上述缺点,发明了非线绕式电位器,它通常由金属陶瓷或导电塑料(由可塑树脂和适量导电粉来混合制成)做成扁平的条状或薄膜状结构,从而给电刷提供光滑的接触表面,因此,它能提供高的分辨力和长的寿命,但对温度较为敏感。表4-1给出了三种电位器的参数。

表 4-1

名称	精密线绕电位器	精密合成膜电位器	导电塑料电位器
型号	WX74A	WHJ	WDD65
总阻值偏差	$\pm 5\% \sim \pm 2\%$	$\pm 10\%$	$\pm 15\%$
线性度	$\pm 0.5\% \sim \pm 1\%$	$\pm 0.5\% \sim \pm 0.1\%$	$0.1\% \sim 0.03\%$
寿命	2万次 $\frac{\Delta R}{R} \leq 2\%$	20万次 $\frac{\Delta R}{R} \leq 1.5\%$	1千万次 $\frac{\Delta R}{R} \leq 1\%$
分辨率	$\frac{u}{n}$		直线 0.01mm
使用后的噪音系数	2万次40%	20万次20%	30万次1%

图4-4所示为一直滑式电位器外型图。

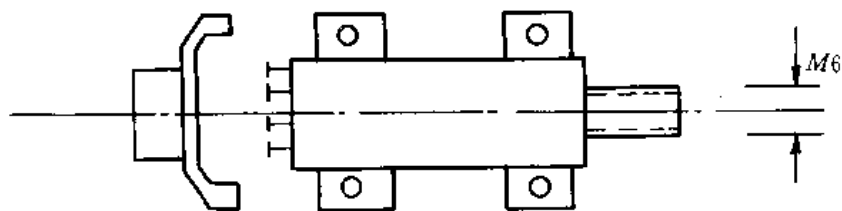


图4-4 直滑式电位器外型图

电位器式传感器型号中文字符号代表的意义:

W——电位器。左起第一个字母。

第二字母表材料:

X——线绕; H——合成膜; S——有机实蕊;

I——玻璃轴; D——导电塑料。

第二个字母后,表型号,数字:

D——表示多圈、或单圈; L——表直滑式; W——微调。

如:WDL-25 表示行程为25mm 直滑式导电塑料电位器;

WDD-30 表示外为30mm 的单圈导电塑料电位器;

WXW1 表示微调线绕电位器。

2. 电阻应变传感器

电阻应变式传感器的工作原理就是利用金属应变效应。设一金属导线,其均匀横截面为 A ,长度为 l ,电阻率为 ρ ,此导线的电阻为:

$$R = \frac{\rho l}{A} \quad (4-5)$$

当导线在外力的作用下,其阻值将发生变化。式(4-5)表明,电阻 R 是电阻率 ρ 、长度 l 、横截面 A 的函数,为了找出 R 的变化量 dR 是怎样取决于导线各基本参数(ρ 、 L 、 A)的,对式(4-5)进行微分,得:

$$dR = \frac{A(\rho dL) + A(Ld\rho) - \rho L dA}{A^2}$$
$$dR = \frac{\rho}{A} dL + \frac{L}{A} d\rho - \frac{\rho L}{A^2} dA \quad (4-6)$$

式(4-6)两边同除 $R = \frac{\rho L}{A}$ 得:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L} + \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dA}{A} \quad (4-7)$$

式中 $A = \pi r^2$,设单位轴向应变为 ϵ ,泊松比为 γ ,则 $\epsilon = \frac{dL}{L}$, $\frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = \frac{2dr}{r} = -2\epsilon\gamma$

代入式(4-7)中得:

$$\frac{dR}{R} = \epsilon + 2\epsilon\gamma + \frac{d\rho}{\rho} \quad (4-8)$$

所以

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\gamma)\epsilon + \frac{d\rho}{\rho} \quad (4-9)$$

式(4-9)中的第一项为导线的几何尺寸(长度和截面改变)变化所引起的电阻的变化,第二项为压阻效应引起的电阻变化。由式(4-9)可得出灵敏度系数 S 。

$$S = \frac{dR/R}{\epsilon} = 1 + 2\gamma + \frac{d\rho/\rho}{\epsilon} \quad (4-10)$$

对于多数金属材料,泊松比 $\gamma = 0.3 \sim 0.5$,所以 S 值在1.6~2.1 之间,而 $\frac{d\rho/\rho}{\epsilon}$ 对多数金属来说近似等于零。所以式(4-9)可变为:

$$\frac{dR}{R} = S\epsilon \quad (4-11)$$

而对于半导体材料制成的压阻式电阻传感器,式(4-10)中的 $(1+2\gamma)\epsilon$ (几何变形量)近似等于零。所以式(4-9)变为:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (4-12)$$

这里我们主要讨论由金属材料制成的电阻应变片位移传感器。

应变片位移传感器主要用于由力而产生变形的位移测量。图4-5 为应变式线位移传感器的原理图。当被测物体产生位移时,悬臂梁随之产生与位移相等的挠度,因而应变片产生相应的应变。在小挠度情况下,挠度与应变成正比。将应变片接入桥路,输出与位移成正比的电压信号。

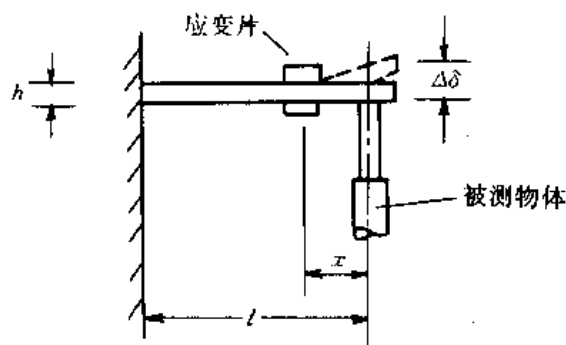


图4-5 应变式线位移传感器原理图

这种传感器精度高,测量范围较窄。主要性能如下:

- 动态范围:1~50mm;
- 线性度:0.1~0.5%;
- 分辨率:1 μ m。

电阻应变片的基本结构见图4-6 所示。它一般由敏感栅、基底、盖片、引线等组成。敏感栅由直径约0.01~0.05mm 高电阻率金属的细丝弯曲而成栅状或由0.008~0.01mm 的金属箔片经光刻而成。它实际上就是一个电阻元件,是应变片传感器的敏感元件。



图4-6 电阻应变片结构示意图

它通常分为金属式和半导体式。金属式分为体型(包括丝式和箔式)和薄膜型(真空镀膜

制成),它大都是由康铜材料制成。

应变片型号命名规则:应变片的型号由汉语拼音字母和数字组成,共7项。第一项为应变片类别,其符号为:*S*——丝绕式;*B*——箔式;*D*——焊接式;*T*——特殊用途;*A*——半导体式。第二项为基底材料种类,其符号为:*Z*——纸;*H*——环氧类;*F*——酚醛类;*J*——玻璃纤维布浸胶;*P*——金属薄片;*L*——临时基底。第三项为标称电阻值(Ω)。第四项为应变片的栅长(mm)。第五项为敏感栅的结构形状。第六项为极限工作温度($^{\circ}\text{C}$)。第七项为可温度自补偿的材料线膨胀系数($\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)。

例如:BJ120—6CA150(11)

B——箔式应变片;*J*——基底材料为聚酯类;120——标称阻值为120 Ω ;

6——应变片栅长6mm;*CA*——敏感栅形状符号;150——极限工作温度150 $^{\circ}\text{C}$;

11——温度自补偿的材料线膨胀系数。

二、电感式传感器

主要用于小位移量的测量,如尺寸偏差、形状误差、位置误差、表面粗糙度测量等。测量精度高,可达亚微米精度。传感器输出阻抗小,有较强抗干能力,广泛用于各种测量包括加工中测量。能用于几至几百赫兹变化量的测量,量程可达几至几十毫米。也可用于能转换为位移量的各种物理量测量。

1. 自感式电感传感器

电感式位移传感器是利用线圈的自感或互感(即电磁感应),将位移转换为自感或互感系数变化,通过测量电感量的变化确定位移量。

图4-7是电感式传感器原理图。传感器主要由线圈、可动衔铁、铁芯和支撑件组成。铁芯与衔铁空气隙长度为 δ 。衔铁与被测物体通过测杆接触,当被测物体位移发生变化时,引起传感器磁路磁阻的变化,从而线圈电感值变化。

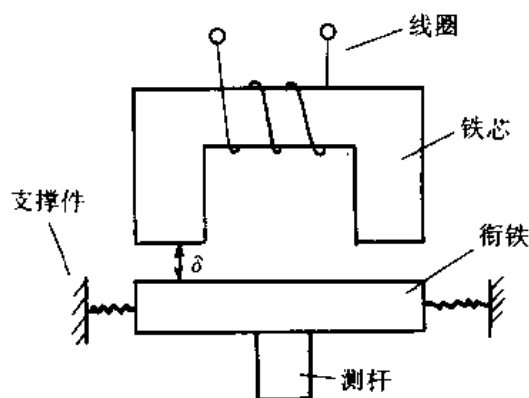


图4-7 电感式传感器原理图

由于空气中的磁导率远远大于铁芯的磁导率,则可得间隙式电感传感器的电感计算公

式:

$$L = \frac{N^2 \mu_0 A}{2\delta} \quad (4-13)$$

式中: N ——线圈匝数;

μ_0 ——空气磁导率;

A ——气隙磁通截面积。

传感器灵敏度 S 为:

$$S = \frac{dL}{d\delta} = -\frac{N^2 \mu_0 A}{2\delta^2} \quad (4-14)$$

显然,灵敏度 S 与变量 δ 的关系是非线性的。气隙变化为 $\Delta\delta$, 若 $\Delta\delta \ll \delta_0$, 则由泰勒级数可把非线性变为线性。由式(4-14)得:

$$S = -\frac{N^2 \mu_0 A}{2(\delta_0 + \Delta\delta)^2} \approx -\frac{N^2 \mu_0 A}{2\delta_0^2(1 + \frac{\Delta\delta}{\delta_0})^2} \approx -\frac{N^2 \mu_0 A}{2\delta_0^2}(1 - 2\frac{\Delta\delta}{\delta_0})$$

因为 $\frac{\Delta\delta}{\delta_0} \ll 1$ 所以:

$$S = -\frac{N^2 \mu_0 A}{2\delta_0^2} \quad (4-15)$$

$$\Delta L = S \Delta\delta \quad (4-16)$$

在实际应用中,常采用差动结构,即该结构具有两个线圈,当衔铁位移时,一个线圈电感量增加,另一个线圈电感量减小,其总电感量的变化为单圈二倍。即

$$S_{\text{差}} = 2S = -\frac{N^2 \mu_0 A}{\delta_0^2} \quad (4-17)$$

$$\Delta L_{\text{差}} = S_{\text{差}} \Delta\delta = 2\Delta L \quad (4-18)$$

图4-8 为差动电感传感器原理图。

图4-9 为差动电感变压器式电桥电路。电桥由交流电压 U 供电,电桥的两臂 Z_1 和 Z_2 为传感器中两个线圈的阻抗,另两臂各为电源变压器次级线圈的一半,电桥的对角线上 A 、 B 两点的电位差为输出电压 U_0 。

A 点的电位为:

$$U_A = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot U \quad (4-19)$$

B 点的电位为:

$$U_B = \frac{1}{2}U \quad (4-20)$$

所以
$$U_0 = U_A - U_B = (\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} - \frac{1}{2})U \quad (4-21)$$

当传感器的衔铁处于中间位置时,有 $Z_1 = Z_2 = Z$, 由式(2-21)可得: $U_0 = 0$, 即电桥处于平衡,没有电压输出。

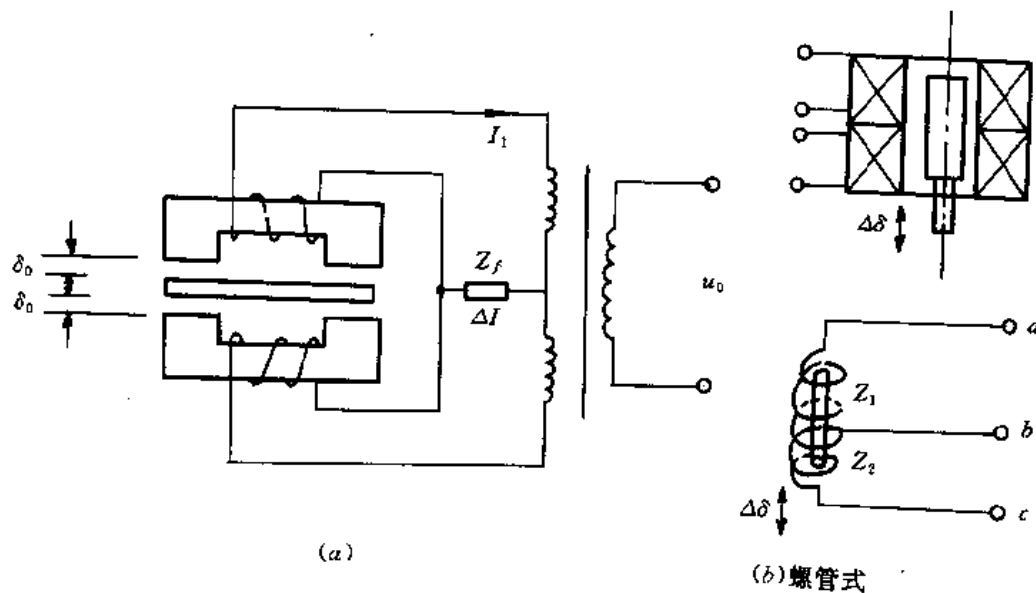


图4-8 变气隙式差动电感传感器原理图

当衔铁向下移动时,有 $Z_1=Z+\Delta Z$, $Z_2=Z-\Delta Z$,将其代入式(4-21)得:

$$U_0 = \left(\frac{Z + \Delta Z}{2Z} - \frac{1}{2} \right) U = \frac{\Delta Z}{2Z} U \quad (4-22)$$

U_0 的有效值为:

$$U_0 = |U_0| = \frac{\omega \Delta L}{2 \sqrt{R_s^2 + (\omega L)^2}} U \quad (4-23)$$

式中: ω ——激励电源角频率; R_s ——线圈电阻。

当衔铁向上移动时,同理可得:

$$U_0 = - \frac{\Delta Z}{2Z} U \quad (4-24)$$

$$U_0 = |U_0| = - \frac{\omega \Delta L}{2 \sqrt{R_s^2 + (\omega L)^2}} U \quad (4-25)$$

由式(4-23)、(4-25)两式可知,若只采用交流电桥,则无法判别极性。为了判别衔铁位移的大小和方向,可采用图4-10(a)所示的带相敏整流的交流电桥。图中 Z_1 、 Z_2 即为差动电感传感器两线圈的阻抗, R_1 和 R_2 ($R_1=R_2$)是电桥平衡电阻, $D_1 \sim D_4$ 为四个二极管组成相敏整流器。电桥由A、B端输入交流电压 U ,C、D端输出电压 U_0 。

采用带相敏整流的交流电桥,输出电压的大小和极性,能反映衔铁位移(输入信号)的大小和方向,输出特性如图4-10(b)所示。

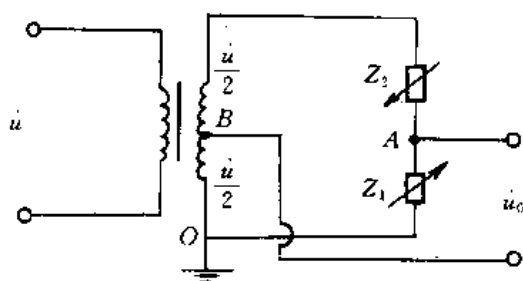


图4-9 差动电感传感器电桥电路

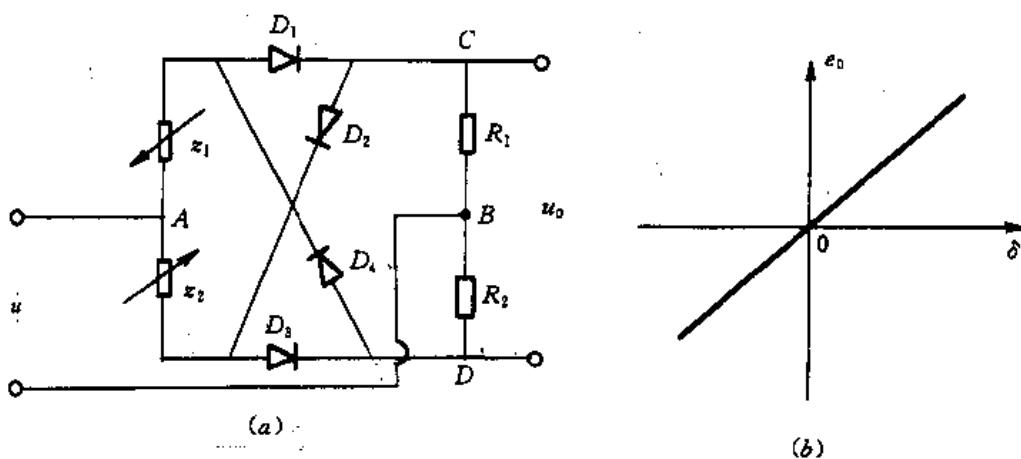


图4-10 带相敏整流的电桥电路及输出特性

电感式传感器若采用螺管结构,则它的测量范围大约为2.5mm到5m,其理论分辨力无限大,线性度为0.02%~1%,其灵敏度的量级为0.2~1.6V/mm。

2. 差动变压器式传感器

该类传感器的特点与应用范围大致与电感式传感器相同。日本、美国多用变压器式传感器,欧洲多用电感式传感器。我国两种传感器均有生产,但高精度场合下用电感传感器为多。

差动变压器式传感器一般采用螺管式差动变压器式结构[如图4-11(a)所示]。图中W为变压器初级线圈,W₁和W₂为结构参数相同的两个次级线圈,当初级线圈由交流电压激励时,根据变压器工作原理,在两个次级线圈中就会产生感应电势e₂₁和e₂₂。当衔铁在线圈中心位置时,两线的感应电势相等,即e₂₁=e₂₂,因两线圈是反向串接,此时输出电压为e₀=e₂₁-e₂₂=0(见图4-11(b)的电路模型)。

当衔铁向上、向下移动时,次级线圈的互感系数M₁、M₂要发生变化,此时输出电压e₀=e₂₁-e₂₂≠0,此输出电压接入相应的处理电路(相敏检波电路)后,就能读出衔铁位移的大小

和方向。

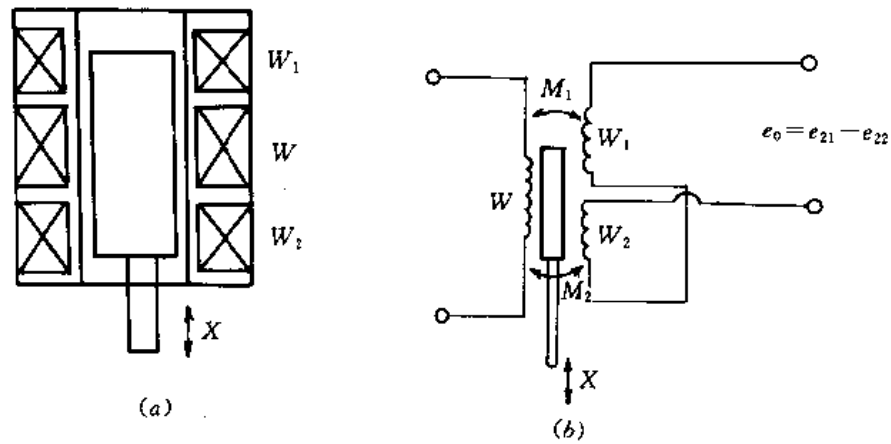


图4-11 差动变压器传感器工作原理

差动变压器的电路模型示于图4-12。

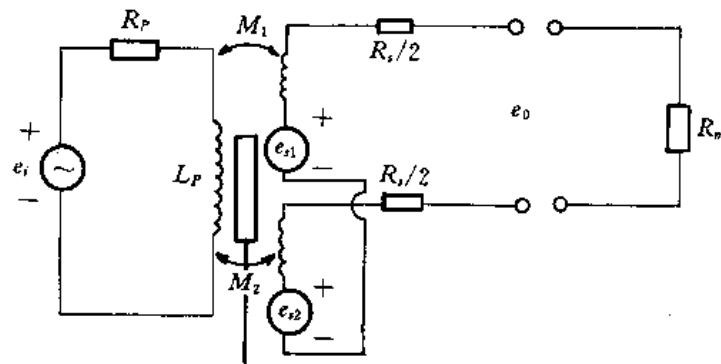


图4-12 电路模型

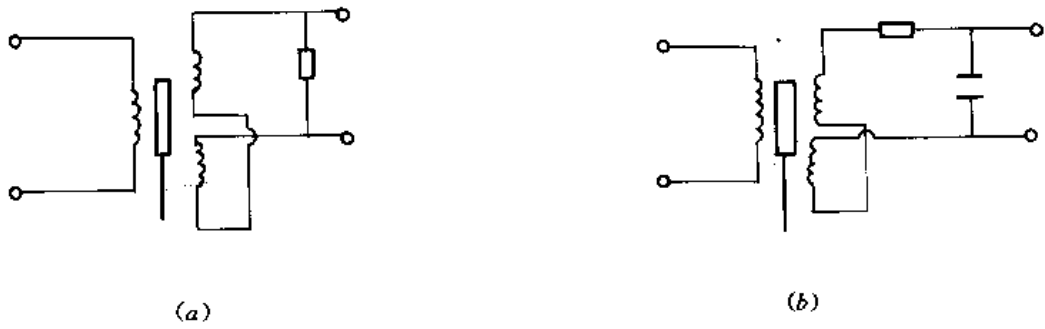
图中激励电源为 e_i ，传感器的输出电压为 e_0 。此电路的频率特性为：

$$A(\omega) = \frac{e_0}{e_i}(\omega) = \frac{\omega(M_1 - M_2)/R_p}{\sqrt{(\omega\tau_p)^2 + 1}} \quad (4-26)$$

$$\Phi(\omega) = 90^\circ - \arctg^{-1}\omega\tau_p \quad (4-27)$$

式中： ω ——激励电源角频率； τ_p ——时间常数， $\tau_p = \frac{L_p}{R_p}$ 。

式(4-27)表明，在低频段，频响具有 $+90^\circ$ 的相角，在高频段具有 -90° 的相角，因此，可选择在低频区和高频区这之间的某频率作为激励源频率，此时角相将为零。若因某种原因，激励电源频率不能使相角为零，则可采用图4-13所示的任一种方法，在给定的频率上达到同样效果。



减小超前相角的两种方法



减小迟后相角的两种可能方法

图4-13 相角调整电路

激励电源中各种谐波成分和原、副边之间的杂散电容耦合通常会造一个很小的非零的输出电压,该电压一般不到满刻度输出电压的1%。若不允存在零位输出电压,则可采取图4-14所示的方法。

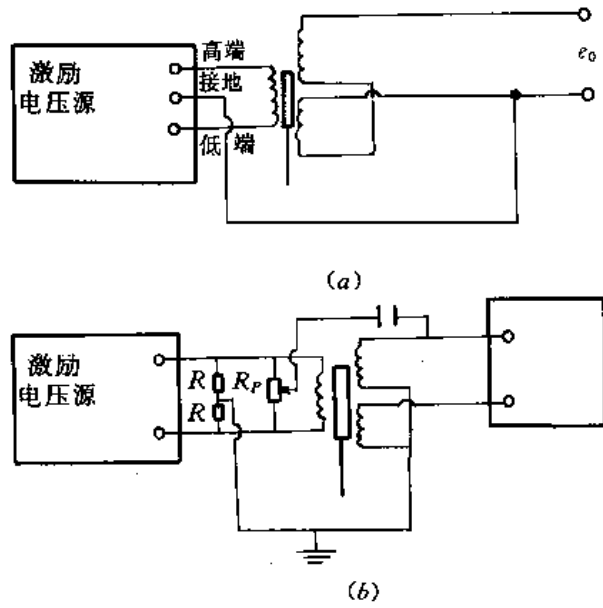


图4-14 减小零位输出的方法

图4-14(a)所示,采用具有平衡式的(即具有中间抽头的)激励源电压。对于一般的激电压源,则可采用图4-14(b)中的电路,调整电位器,可获得最小的零位读数。

为了测得铁蕊运动的输出电压曲线,必须采用相敏检波电路(详细讨论见第五章)。

图4-15 示出了使用半导体二极管的相敏检波电路。

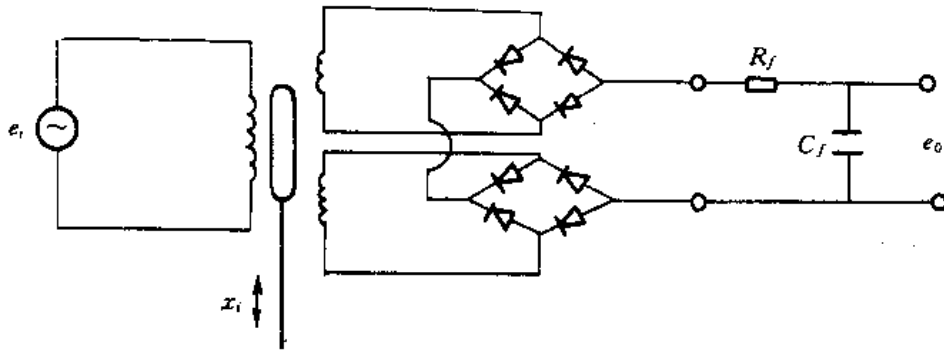


图4-15 相敏检波电路

图4-15 适合用于激励源频率与铁蕊运动的频率比为10:1。若低于该比例,将使被测信号的高频分量产生畸变。此时可采用选频特性更好(锐截)的滤波器,就可避免这种情况。

用上述方法制成的差动变压器式电感传感器,测量范围大约为0.1~76mm,线性度为满刻度的0.5%,分辨率为0.01 μ m。

3. 电涡流传感器

该类传感器主要用于尺寸和位移参数的偏差测量。可用于不接触测量,精密可达微米级。用于形位与轮廓误差测量较少。

将一扁平线圈1 置于金属导体2 附近,如图4-16(a)所示,当线圈中通以正弦交变电流 I_1 时,线圈1 周围空间就间生了正弦交变磁场 H_1 ,处于 H_1 中的金属导体2 内就会产生涡流 I_2 , I_2 将产生交变磁场 H_2 , H_2 与 H_1 方向相反。由于 H_2 的作用,涡流损耗一部分能量,从而使产生磁场的线圈阻抗发生变化。其等效电路如图4-16(b)所示。

线圈阻抗变化的大小与金属导体的电导率 σ 、磁导率 μ 、厚度 h 、线圈激励电流 I 和角频率 ω 以及位移 x 等参数有关。线圈阻抗 z 表示为:

$$z = (\sigma, \mu, h, I, \omega, x) \quad (4-28)$$

当 σ 、 μ 、 h 、 I 、 ω 参数不变,阻抗 z 与位移 x 成单值函数关系。

电涡流传感器通常采用电桥、调频调幅变换电路。图4-17 所示一种电桥变换电路。探头具有两个线圈,一个为测量线圈,能感受测导电目标的存在;另一个为平衡线圈,其作用是帮助构成一完整的电桥并提供温度补偿。电桥的激励电源为1MHz 的高频交流电。桥路输出的电压幅值随传感器线圈阻抗变化而变化。

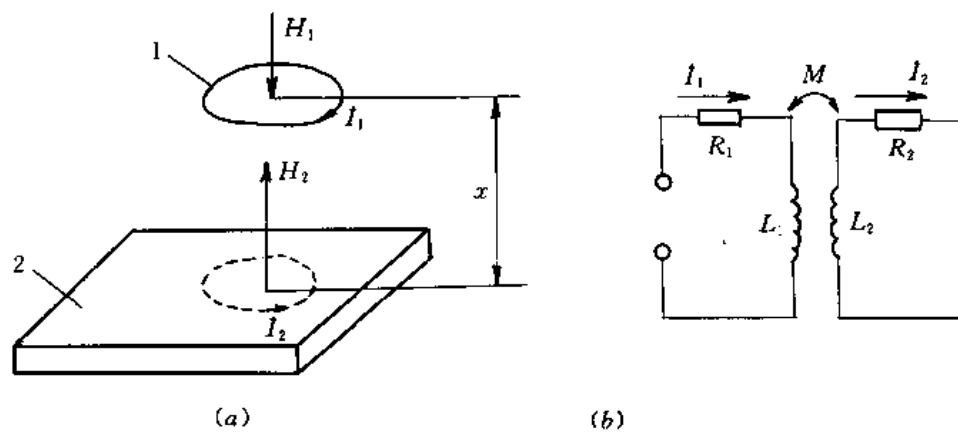


图4-16 涡流作用原理

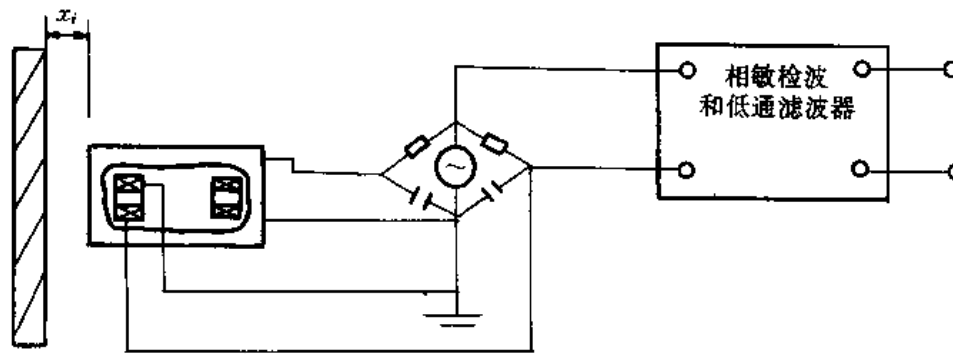


图4-17 涡流式传感器电桥

该电桥的输出电压为调幅波,需经交流放大、相敏检波、低通滤波后,输出的电压值正比于被测位移 x 的大小。

电涡流式位移传感器,测量范围约为 $0.25\text{mm} \sim 30\text{mm}$,线性度为 0.5% ,最大分辨率为 $0.05\mu\text{m}$ 。在实际使用中,由于被测目标的材料、形状等影响其输出,所以通常都必须把被测的具体目标和探头一起进行系统的静态标定。

三、电容式传感器

主要用于小位移、尺寸偏差等测量。可实现不接触测量,频率响应高(可达数千赫),在机床轴系测量中得到广泛应用。输出阻抗高,传感器电容值小,易受外界干扰,需采取屏蔽措施。灵敏度高,在采取屏蔽措施条件下可达很高精度(微米至几十纳米)。采用接触式传感器可用于测量形位误差,也可用于加工测量。利用容栅可实现大位移测量(量程达数百毫米)。容栅结构简单,尺寸小(与光栅等相比),常用于数显量具中,精度可达几微米。

电容式传感器是将被测量的变化转换成电容量变化的一种传感器。图4-18所示平板电

容器,忽略其边比缘效应,电容量为:

$$C = \frac{\epsilon A}{\delta} \quad (4-29)$$

式中: ϵ ——极板间介质的介电常数; $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ (ϵ_r 为极板间介质的相对介电常数, ϵ_0 为真空介电常数, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$);

A ——极板的覆盖面积;

δ ——极板之间的距离。

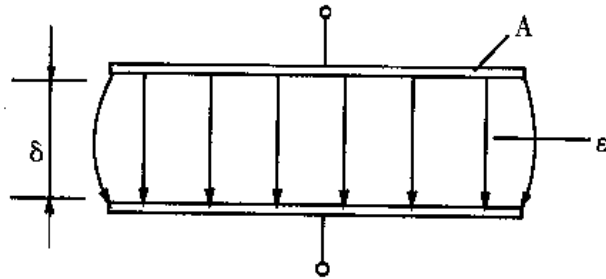


图4-18 平板电容器

从式(4-29)可看出,当被测值变化时可引起电容传感器的 ϵ 、 A 、 δ 中任何一个参数变化,则其电容量将发生变化。因此电容传感器可分为三种类型:变极距型、变面积型、变介质常数型。

作为位移测量,电容传感器通常为变极距型、变面积型两种。

从式(4-29)可知,电容随极板间距 d 的变化是非线性的,其灵敏度为:

$$S = \frac{dC}{d\delta} = -\frac{\epsilon A}{\delta^2} \quad (4-30)$$

当极板变化位置很小时有,即 $\Delta\delta \ll \delta_0$ ($\Delta\delta$ 小于 δ_0 的 $1/5 \sim 1/10$)

$$S = \frac{dC}{d\delta} = -\frac{\epsilon A}{(\delta_0 + \Delta\delta)^2} = -\frac{\epsilon A}{\delta_0^2}$$

所以

$$S = -\frac{C_0}{\delta_0} \quad (4-31)$$

$$dC = S \cdot \Delta\delta \quad (4-32)$$

若采用差动形式,可改善线性,且灵敏度提高一倍。该类传感器只能测微小变化量($0.01\mu\text{m}$ 至零点几毫米的线位移)。

从原理上具有很好的线性,容栅传感器就是在变面积型电容传感器基础上发展而成的一种新型传感器。它可分为长容栅和园容栅两种,如图4-19所示。图A、B中1是固定容栅,2是可动容栅,在A、B面上分别刻划一系列均匀分布并互相绝缘的金属(如铜箔)栅极。固定容栅与可动容栅极面相对,中间留有间隙 δ ,形成一对电容。当可动容栅相对固定容栅位移时,形成一对对电容。当可动容栅相对固定栅容栅位移时,每对电容面积发生变化。因而电容值随之变化,即测出线位移或角位移。

忽略电容边缘效应,长容栅最大电容量为:

$$C_{\max} = n \frac{\epsilon ab}{\delta} \quad (4-33)$$

式中: n ——可动容栅极数;

a, b ——分别为栅极的宽度和长度(m)。

容栅传感器因多极电容平均效应,分辨力高,精度高,量程大,对刻制精度和安装要求不高,是一种很有发展前途的传感器。

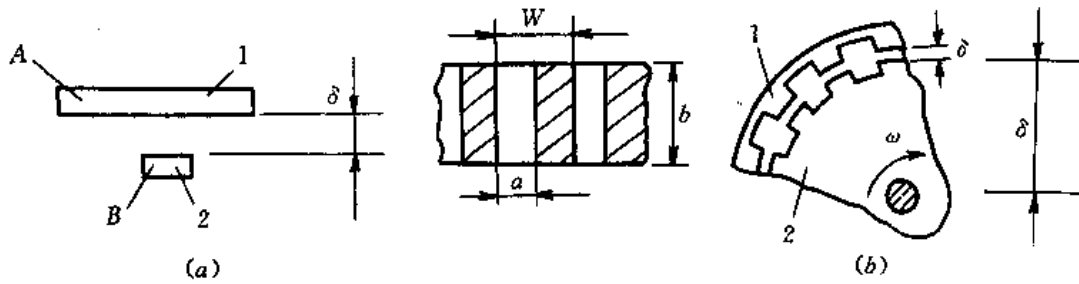


图4-19 容栅传感器结构

电容式传感器的基本转换电路有电桥电路、差动脉冲调宽电路、运算放大器式电路等。

图4-20所示一种电容式差动测量电路方框图。电容传感器接入交流电桥相邻的两个臂 C_1, C_2 。输出采用相敏解调和滤波处理,就能得到被测的位移大小和方向。

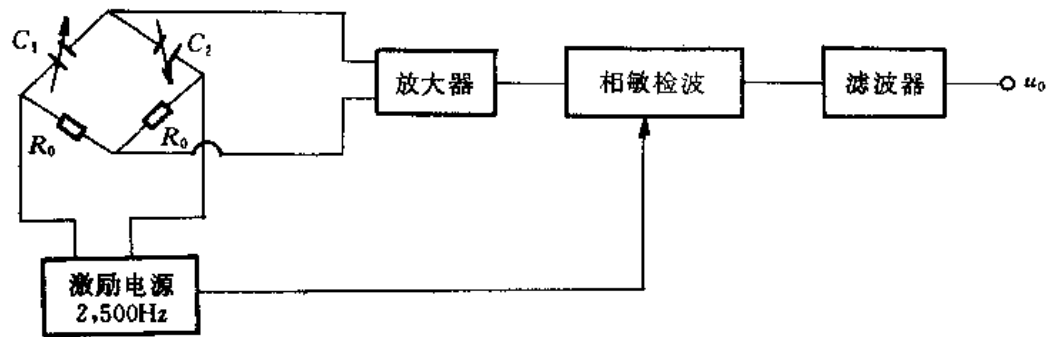


图4-20 电容式差动电桥测量电路方框图

图4-21为差动脉冲调宽电路图。 C_1, C_2 为差动电容式传感器两电容, N_1, N_2 为电压比较器, R_S 触发器为电子开关。电路输出电压为:

$$U_0 = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} U \quad (4-34)$$

图中: U ——为恒定直流电压。

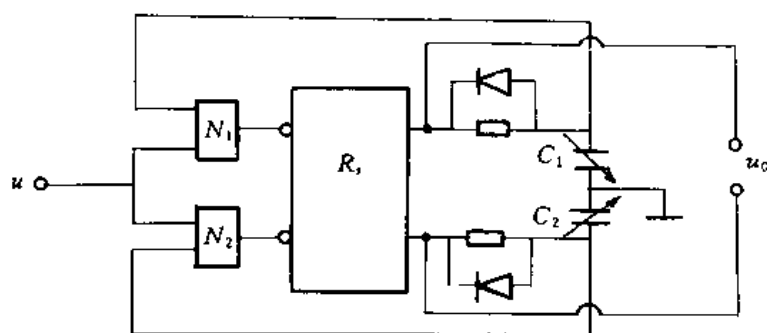


图4-21 差动脉冲调宽电路

图4-22 为运算放大器式电路。将电容传感器接入运算放大器电路的反馈回路中， U_i 为恒定电压流， C 为已知电容， C_x 为传感器电容。运算放大器输出电压为：

$$U_o = -\frac{U_i C}{\epsilon \cdot A} \cdot \delta \quad (4-35)$$

这样就可消除 δ 与 C_x 之间的非线性关系。

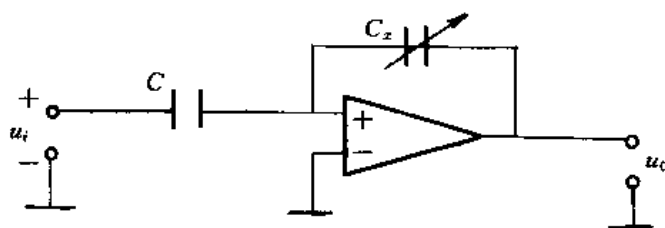


图4-22 运算放大器式电路原理图

电容式传感器的转换电路还有调频电路等。

四、感应同步器

该类传感器适用于大线位移与角位移测量，可测量长达几米的线位移与 360° 内角位移的测量。输出阻抗低，抗干扰能力强，对环境要求不高，广泛应用于各种数控机床与机床的数显装置上。精度可达每米几个微米或几秒。通过接长或采用三重型感应同步器可实现长几千米的线位移测量。一般感应同步器为增量码系统，即它测量移过的线位移和角位移。三重型感应同步器为绝对码系统，位置与编码有一一对应关系，有很强抗干扰能力，不受移动速度限制，停电后能恢复读数。下面主要以直线感应同步器为例进行分析。

直线式感应同步器由定尺和动尺组成(如图4-23)。定尺和动尺通常都是用钢板做基体，用绝缘粘结剂把铜箔贴在钢板上，用照像腐蚀的方法制成折线式印刷线圈。在定尺表面上涂一层耐冷却液的涂层。动尺表面上用绝缘粘结剂贴上一层铝箔，以防止静电感应。定尺一般为连续绕组；动尺为分段绕组，且分两组，在空间差 90° 相角(即 $1/4$ 节距)，称为正、余弦绕

阻。

长感应同步器分为标准型、窄型、带型、三重型几种。标准型是应用最广、精度最高的一种,若测量范围超过150mm,可几根接长使用。

标准型感应同步器的定尺长为150mm,折线式印刷线圈的节距为2mm。动尺比定尺短。动尺的折线式印刷线圈分成A、B两组,节距也是2mm。安装时,应保证定尺与动尺两者有印刷线圈的表面平行相对,两表面之间的间隙,在全部行程上应保持 $0.25 \pm 0.05\text{mm}$ 。

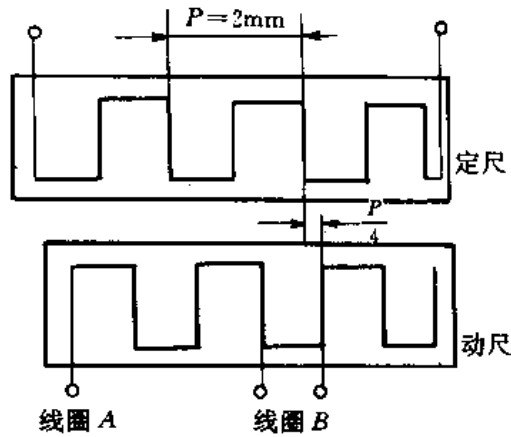


图4-23 直线式感应同步器

感应同步器测量直线位移时,根据对动尺激磁绕组供电方式不同,可分为鉴相测量方式和鉴幅测量方式两种。

鉴相测量方式,对动尺的两组印刷线圈分别供给同振幅、同频率相位差 90° 的交流电压,即:

$$U_A = U_m \sin \omega t \quad (4-36)$$

$$U_B = -U_m \cos \omega t \quad (4-37)$$

式中: U_m ——激磁电压的幅值(v)。

定尺上总感应电动势为:

$$U = K_v U_m \sin(\omega t + \theta_x) \quad (4-38)$$

式中: K_v ——电磁耦合系数;

$$\theta_x \text{——} 2\pi x/P \quad (4-39)$$

在一个节距之内,动尺与定尺的相对位置和定尺线圈感应电动势的相位 θ 有严格的对应关系。即动尺相对定尺从0移动一个节距 P 时,感应电动势的相位由0变到 2π 。所以只要知道了定尺感应电势的相位 θ ,就可以知道动尺相对定尺的位移了。

鉴幅方式:加至动尺正弦、余弦绕组的交流激磁电压为:

$$U_s = U_s \sin \omega t \quad (4-40)$$

$$U_c = -U_c \sin \omega t \quad (4-41)$$

且使:

$$U_s = U_m \cos \theta_d \quad (4-42)$$

$$U_c = -U_m \sin \theta_d \quad (4-43)$$

式中： θ_d ——激磁电压电相角。

则总感应电动势：

$$U = K_v V_m \cos \omega t \sin(\theta_x - \theta_d) \quad (4-44)$$

若原始状态 $\theta_d = \theta_x$ ，则 $U = 0$ 。然后动尺相对定尺有一位移，仅 $\theta_x \rightarrow \theta_x + \Delta\theta$ ，则感应电势增量为：

$$\Delta U = K_v U_m \frac{2\pi}{P} \Delta x \sin \omega t \quad (4-45)$$

上式说明，在位移增量很小的情况下，定尺上感应电动势幅值与 Δx 成正比。所以通过鉴别定尺感应电势的幅值，就可以知道动尺在定尺之间相对运动的位移增量 Δx 的大小。

五、光栅传感器

光栅传感器用于大线位移与 360° 内角位移的测量。测量精度高，可达每米 $0.5 \sim 2 \mu\text{m}$ 。常用于各种精密机床，坐标测量机，测角仪器与传动链测量仪器。对环境有较高的要求。量程常为 1m 左右。接长不如感应同步器方便，长光栅刻划较困难。圆光栅测角可达 $1'$ 更高精度。光栅为增码测量系统。可以刻制零位标志，使断电后能恢复原读数，并形成绝对坐标系，这类光栅称为零位光栅。

测量直线位移的长光栅由两块光栅组成。较长的一块叫标尺光栅，短的叫指示光栅。标尺光栅是在玻璃尺上，精确而均匀地刻上一定数量的线纹，每毫米刻成25、50、100条刻线，并且线纹本身的宽度与线纹之间的距离相等。指示光栅是用一块较短的玻璃刻制成的，其刻线情况与标尺光栅完全一样。图4-24(a)为长光栅示意图，图4-24(b)为光栅刻线放大图。

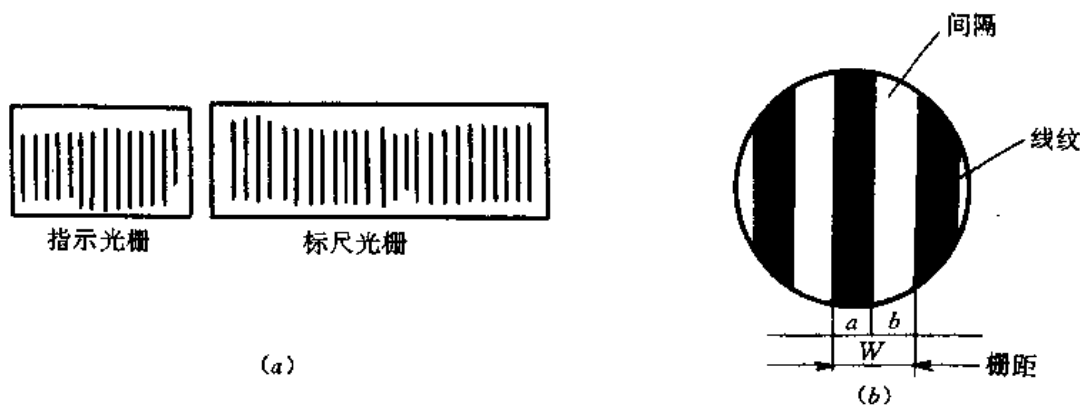


图4-24 光栅示意图

以 a 表示栅线的宽度， b 表示刻线间隔，刻线时要保证 $a = b$ 。而 $W = a + b$ ， W 称为光栅栅距。

两块栅距相等的光栅重叠在一起，并使它们相互倾斜一个很小的角度 θ 。这时将在两块光栅重叠的区域内，看到较粗的亮暗相间的条纹，这种条纹叫莫尔条纹。如图4-25所示。它

近似垂直于栅线方向上显现出比栅距宽得多的明亮相间的条纹。相邻两莫尔条纹的间距为 $B = \frac{W}{\theta}$ ，当两光栅在栅线垂直方向相对移动一个栅距 W ，莫尔条纹则在平行栅线方向移动一个莫尔条纹间距 B ，即光通量分布曲线就变化一个周期，光电元件输出的电信号变化一个周期，这样就完成了光电转换。放一个光电元件，只能产生一个正弦波电信号，不能辨别移动方向。为了辨别方向，即辨别是左移还是右移，可将两个光电元件按图4-26(a)所示位置安装，即使二元件 P_1 、 P_2 相隔 $1/4$ 莫尔条纹宽度($B/4$)。当两光栅相对移动时， P_1 与 P_2 变换出的波形相位差 90° 。 P_1 变换出的电流为正弦波， P_2 变换出的余弦波形，如图4-26(b)所示。若指示光栅右移时， P_1 的电流比 P_2 滞后 90° 。反之，指示光栅左移，莫尔条纹下移， P_1 的电流比 P_2 超前 90° 。若用 P_1 的正弦信号经放大、整形后作为选通，控制与门的“开”“闭”，将 P_2 的信号放大、整形反向、微分而得到电流脉冲信号，分清左、右移，进行适当的逻辑组合，使它们分别送入可逆计数器，进行适当的加减计算，这可逆计数器就可以正确地反映位移有大小和方向了。

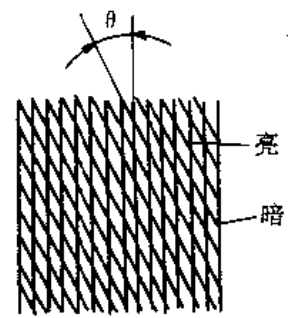


图4-25 长光栅的莫尔条纹

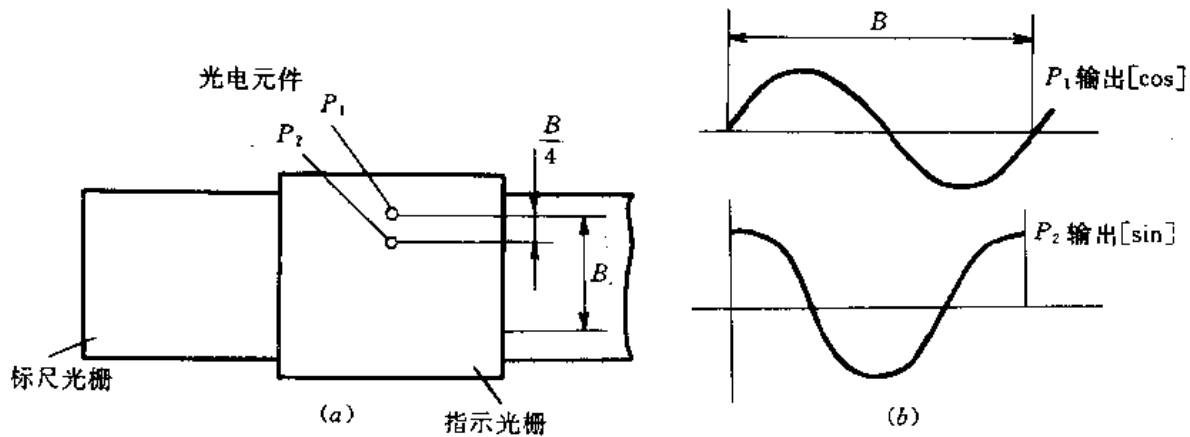


图 4-26

利用上述原理，通过对莫尔条纹信号内插细分和辨向，即可检测出比光栅距还小的正、反向位移。

六、光纤式传感器

光纤式传感器利用光纤可方便地将光束引到测量部位，如加工区域，或实现内尺寸的测量，常用于小位移的测量和表面粗糙度测量。

电荷藕合器件(CCD)可方便地构成图象传感器，实现视觉传感，进行图象识别，轮廓测量等。

1. 光导纤维结构与传输原理

光导纤维是由石英玻璃(纯SiO₂)制成的传输光线的导光纤维细丝,直径在φ5~125μm范围。它由两层组成,内层为光芯,外层为包层,包层的材料折射率略低于纤芯材料,其外径在φ125~325μm范围。包层外涂敷硅树脂之类的缓冲层,最外面有起保护作用的屏蔽套管(一般用塑料或橡胶等材料制成)。其结构如图4-27所示。

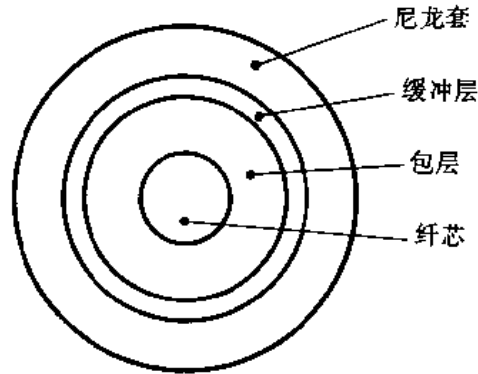


图4-27 光纤结构

光传播路径是直线的,经过不同介质的介面时,会发生折射和反射,如图4-28(a)所示。图中 α_1 为入射角, α_1' 为反射角, α_2 为折射角,根据光的折射定律可得:

$$\begin{aligned} n_1 \sin \alpha_1 &= n_2 \sin \alpha_2 \\ \alpha_1 &= \alpha_1' \end{aligned} \quad (4-46)$$

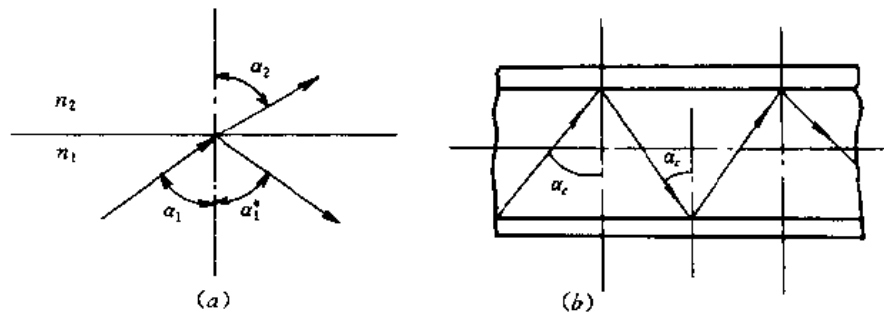


图4-28 光纤传输原理

当 $n_1 > n_2$,由式(4-46)可知,当 α_1 的正弦值大于等于 n_2/n_1 时,光束出现全反射。反射光的强度等于入射光强度,此时,入射角 α_1 称为全反射临界角 α_c ,由式(4-46)可得:

$$\alpha_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1} \quad (4-47)$$

光导纤维就是利用全反射原理,使光在光导纤维芯线与包层的界面上多次发生反射而

向前传播,如图4-28(b)所示。

2. 光纤的主要参数

(1) 数值孔径 NA

一个点光源以光纤端面中心点 O 以 θ 角射入光纤端面(如图4-29所示),出射角 γ 进入纤芯,经折射后到达光纤界面的人射角为 α ,如图4-29所示。由折射定理可知:

$$n_0 \sin \theta = n_1 \sin \gamma \quad (4-48)$$

对空气,折射率 $n_0 = 1$ 。

发生全反射应有: $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha_c$ 此时,对应的 θ 为 θ_c ,代入式(4-48)有:

$$\sin \theta_c = n_1 (1 - \sin^2 \alpha_c)^{\frac{1}{2}} \quad (4-49)$$

又
$$\sin \alpha_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (4-50)$$

则
$$\sin \theta_c = n_1 \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4-51)$$

λ ——光波长(μm)。

N 值愈大,光传输模数愈多,当 N 值较大时,这种光纤称为多模光纤。当 N 值小于2.405 时,光纤为单一的基本模式,这种光纤称为单模光纤。图4-30 为多模和单模光纤。

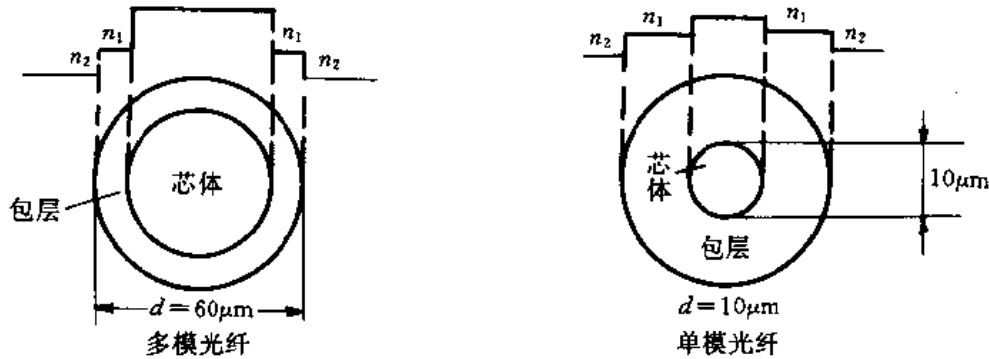


图4-30 多模光纤与单模光纤

图中,多模光纤 $N=42.9$,光模数超过900,单模光纤 N 值为2.26,光模数为1。

通常希望光纤中模式数越小越好,因为在光导纤维中有多种传播模式存在,就会使同一光信号沿多种途径传播,而以不同的光程到达接收端,导致合成信号的畸变。所以要 N 小,则 d 不能太大,一般 d 为几个微米至几十个微米。另外, n_2 与 n_1 之差也应小,要求不大于1%。

(3) 传输损耗与传输波长

光沿光纤传输过程中,由于纤蕊材料的吸收、散射、光纤弯曲处的辐射损耗的影响,可产生光纤传输损耗,简称光纤损耗,一般用dB/m 或dB/km 表示。

$$\text{光纤损耗} = \frac{10}{L} \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (4-55)$$

式中: L ——光纤长度(m 或km);

I, I_0 ——分别为输入、输出光强度(光功率)。

光纤损耗与传输波长有关,最低损耗波长大约为1.5~1.6 μm ,现在制造光纤最低损耗为0.2dB/km,已接近固有损耗(0.18dB/km),

(4) 光纤传输频带

各频率分量的光传输存在时间差,因而造成光脉冲扩展(色散现象)。色散效应大小取决于传输模式、材料、材料折射率及光纤构造。阶跃型、渐变型、单孔型光纤的允许频带宽度分别为20~40MHz·km、200~800kHz·km、1~20GHz·km。

3. 光导纤维类型

(1) 阶跃纤维光纤

在光纤的截面上,纤蕊与包层的折射率是阶跃突变的,如图4-31(a)所示。纤蕊的直径较大,大约为50~150 μm 。这种光纤频带窄,信号畸变大。但光纤纤蕊直径大,制造、连接、耦合

较容易,适用于1km以下短距离传输或用于光纤传感器。

(2) 渐变型光纤

在光纤的截面上,纤蕊中心处的折射率最大,往两侧逐渐变小,折射率按抛物线变化,在边界处 $n_1=n_2$,如图4-31(b)所示。由于光纤中心轴附近折射率变化梯度大,而两侧变化梯度小,当光射入光纤后,连续不断的折射,使光束能集中在中心轴附近前进,具有聚焦作用。这种光纤频带很宽,信号畸变小,但与光源耦合特性较差,适用于中、长距离传输。

(3) 单孔光纤

单孔光纤又称为单模光纤,它是指只能传播一种模式的光纤,其光纤内蕊直径很小,通常只有 $5\sim 10\mu\text{m}$ 。这种光纤传输性能好,频带宽,信号畸变小。用它耦合的光纤传感器其线性、灵敏度和动态特性都较好。但单模光纤由于纤蕊小,制造、连接、耦合都很困难。

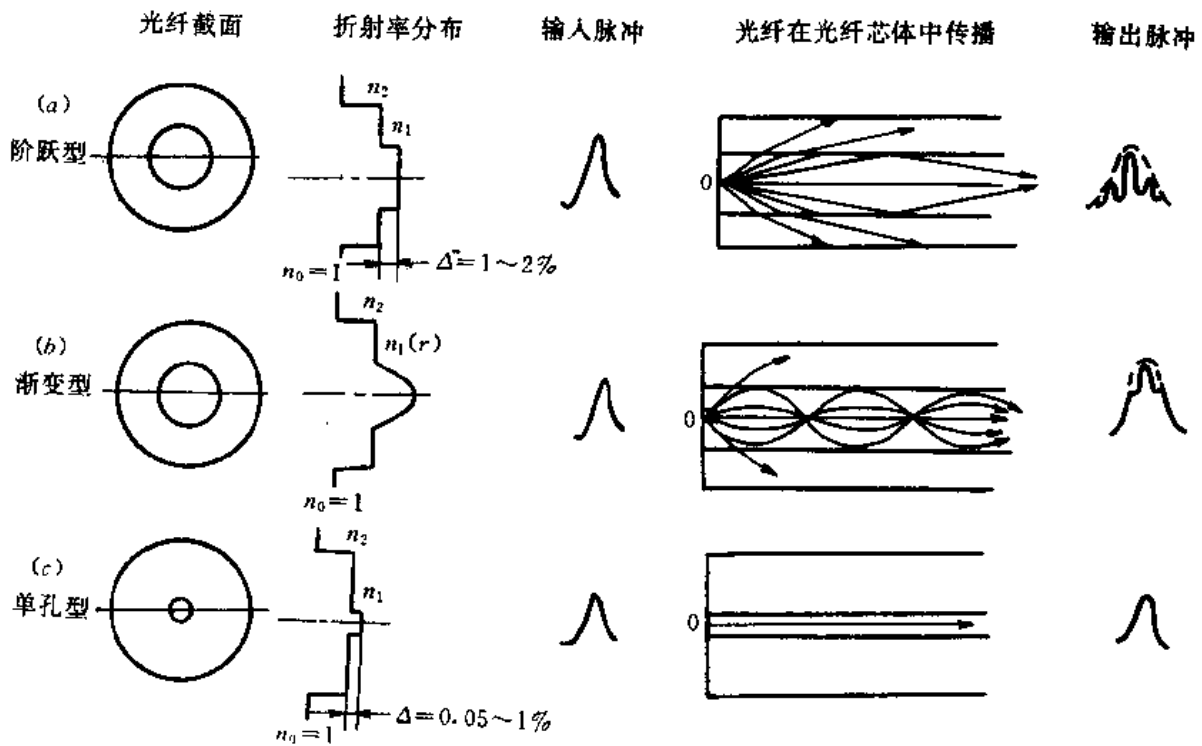


图4-31 光纤结构、折射率及光传播情况

4. 光纤位移传感器

光纤位移传感器可分为传感型和传光型两种,前者用光纤作敏感元件,后者是利用光纤的端面前放置光学材料或其它敏感元件来感受被测量的变化。

传感型光纤传感器使用单模光纤,它是通过压力和应变等机械量使光纤特性发生变化来检测位移,其工作原理如图4-32所示。图4-32(a)示出由于光纤长度和纤径等变化,使光在光纤中传播的相位发生变化。该相位发生变化的光与通过参考光纤的未发生相位变化的

光发生干涉。根据干涉光强度的变化即可检测位移。图4-32(b)是将位移转换成光纤弯曲应变的例子,弯曲使损耗增加,故输出光强度发生变化。图4-32(c)示出高灵敏度位移传感器的结构,用这种线状形光纤,很小的力即能产生较大位移。光纤传感器可在恶劣环境中工作。

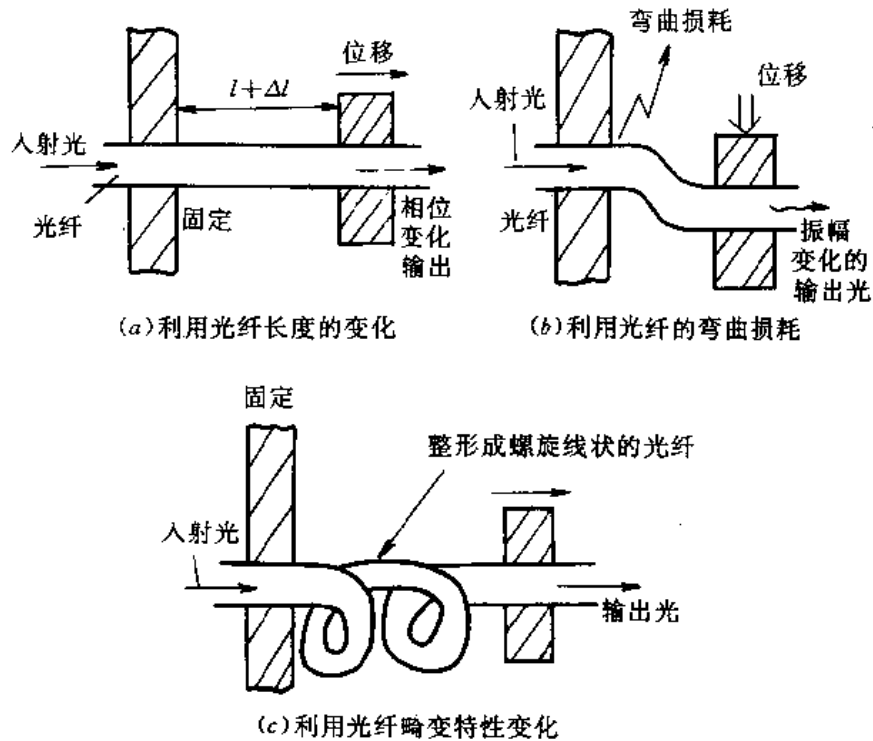


图4-32 传感型光纤位移传感器

传光型光纤传感器中的光纤不起敏感作用,而起传输光信号的作用。这类光纤使用的是数值孔径和光蕊直径都较大的多模光纤,可以得到较大的传输光功率。

传光型光纤位移传感器的工作原理如图4-33所示。当光纤探头端部紧贴被测物体时,发射光纤的光不反射到接收光纤中,没有光电流。当被测表面逐渐远离光纤探头时,发射光纤照亮被测表面的面积 A 越来越大,相应的发射光锥和接收光锥重合面积 B_1 越来越大,故接收光纤端面上被照亮的 B_2 区也逐渐增大,有一个线性增加的输出信号。当整个接收光纤端面上被全部照亮时,输出信号即达到图4-34所示位移输出信号曲线上的“曲锋点”,曲锋点以前的曲线称为前坡区。当被测表面继续远离时,被反射光照亮的 B_2 面积大于 C ,即部分反射光没有反射进接收光纤,故光敏元件的输出信号逐渐减弱,位移输出信号曲线进入后坡区。曲线 I 段灵敏度高,线性好,但范围窄,适于测微小位移。实用位移传感器发射和接收光纤分布方式有随机式、半球式、同心轴外发射式、同心轴内发射式四种。随机式灵敏度最高,线性度好。

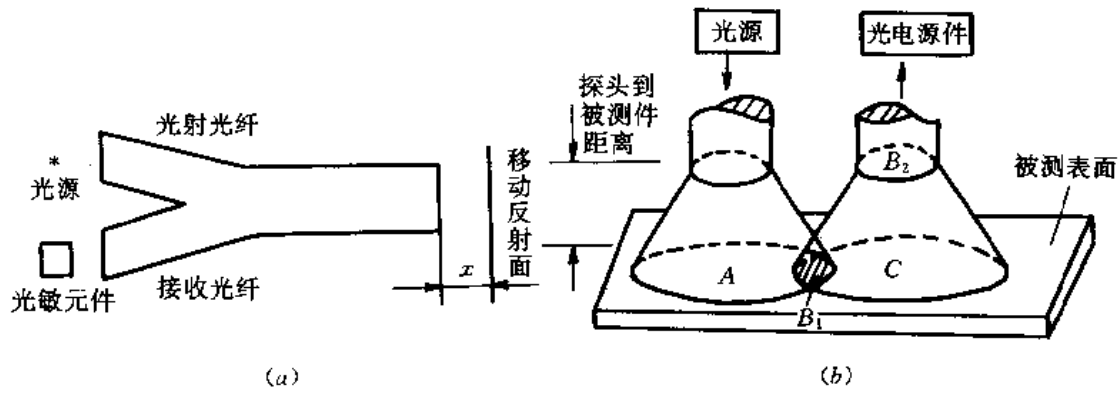


图4-33 传光型光纤位移传感器的工作原理

标准光纤位移传感器由600根光纤组成 $\phi 0.762\text{mm}$ 的光缆。内芯是折射率为1.62的火石玻璃,包层是折射率为1.52的玻璃,光缆的后部分成发射光和接收光两支。光源是2.5V的白炽灯泡。接收光信号的是光敏电池。光敏检测器的输出电信号与接收光的光强成正比。灵敏度为 $6\text{mV}/\mu\text{m}$,线性($\pm 1\%$)工作范围为 $0.025\sim 0.1\text{mm}$,静态分辨力为 $0.025\mu\text{m}$,从直流到 50kHz 频响特性平直度为 $\pm 3\text{dB}$ 。由于被测面是传感器的一部分,因而要求对所用具体表面进行探头的静态标定。

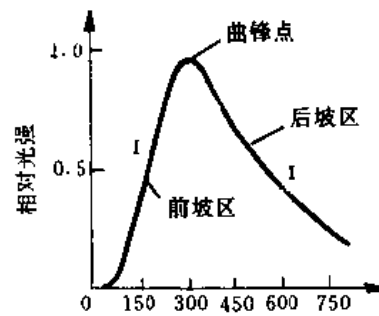


图4-34 反射光强与位移的关系

七、压电式位移传感器

由于压电元件的特性,压电位移传感器的基本工作原理是将位移转换为力的变化,然后利用压电效应将它转换为电信号。它适用于不断变化的位移测量。在几何测量中主要用于表面粗糙度与圆度测量。精度比电感传感器低,但成本较低廉。

1. 压电效应

(1) 正压电效应

当某些晶体沿一定方向受外力作用而变形时,内部产生极化现象,在其相应的两个相对表面上产生符号相反的电荷,去掉外力时电荷立即消失,这种物理现象称为正压电效应。晶体所产生的电荷量与外力的大小成正比,电荷的极性取决于变形的形式(压缩或伸长)。某些晶体的这种机械输入/电气输出的特性可用于测量加速度、力、压力和位移。

(2) 逆压电效应

上述的机电能量转换是可逆的,对于压电晶体存在电输入/机械输出特性。在某些晶体的极化方向(受力能产生电荷的方向)施加外电场,晶体本身将产生机械变形,当外电场撤去后,变形也随之消失,这种物理现象称为逆压效应。其逆压电效应可用于小型振料器、声学法测距和测向的声纳系统,工业用超声无损探伤设备,超声流量计以及微动作器等。

2. 压电晶体及材料

具有压电效应(正、逆压电效应的统称)的晶体称为压电晶体。它可分为两大类:①天然晶体,如石英、酒石酸钾钠;②合成晶体,如硫酸锂、磷酸二氢氨、钛酸钡压电陶瓷、锆钛酸铅系压电陶瓷(PZT)以及新型高分子材料,如聚偏二氟乙烯(PVDF)等。

3. 压电式传感器的转换电路

压电晶体传感器的构造是金属电极涂覆在压电材料选定的晶面上,在引出供电荷输入或输出用的引出导线。由于压电材料是绝缘体,电极也就成了电容器的极板,因此,把机械运动转换为电信号的一个压电元件便可看成是一个电荷发生器和一个电容器的组合,压电传感器可等效为一个电荷源与一个电容的并联,其等效电路如图4-35所示。

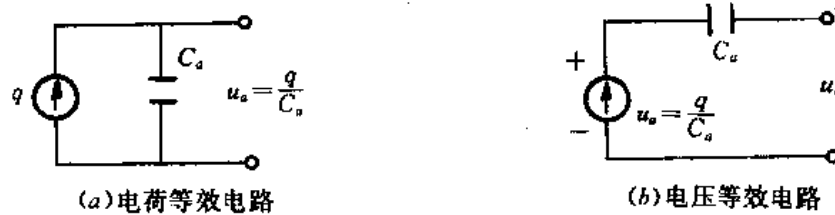


图4-35 压电传感器的等效电路

图中, C_a 为压电元件的电容量,

$$C_a = \frac{\epsilon A}{\delta} \quad (4-56)$$

式中: ϵ ——压电晶体的介电常数,石英介电常数为 $4.06 \times 10^{-11} \text{F/M}$;

A ——晶体片构成极板面积;

δ ——晶体片的厚度。

压电晶体上的电荷、电压遵循电容器定律,

$$U_a = \frac{q}{C_a} \quad (4-57)$$

压电晶片的连接方法有并联、串联两种接法。如图4-36所示,对于并联连接有: $C_B = 2C$, $U_B = U$,则 $Q_B = 2Q$,它的特点是输出电荷量大,电容也大,时间常数大,适用于测量缓变信号,并以电荷作为输出量的场合。

对于串联连接有: $C_B = C/2$, $Q_B = Q$,则 $U_B = 2U$ 。它的特点是输出电压高,自身电容小,适用于以电压作为输出量以及后接输入阻抗很高的电压放大器测量电路。

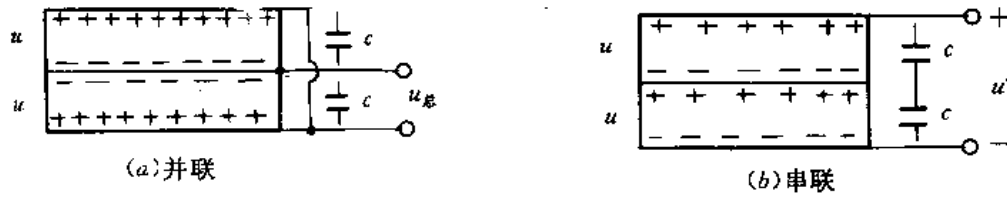


图4-36 压电晶片连接方法

采用压电晶体元件的最终目的是进行力、压力或加速度测量(位移也是通过转换为力来测量),而这些非电量的物理量是通过压电晶体转变成晶体的机械变形。因此只需要研究如何用晶体把位移转换成电压。为了达到分析的目的,有必要把压电晶体、连接电缆、以及配用的放大器作为一个组合体来考虑。压电晶体的阻抗通常很高,因此通常使用高阻抗的缓冲放大器。图4-37 为压电式传感器的等效电路。

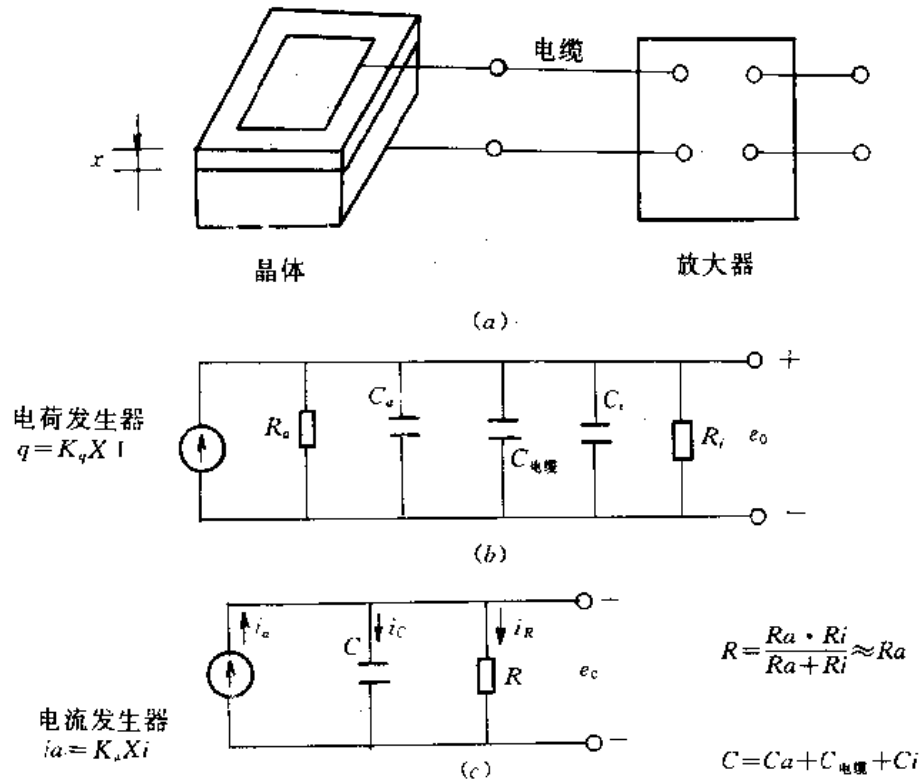


图4-37 压电式传感器的等效电路

晶体所产生的电荷可表示为:

$$Q = K_q X_i \quad (4-58)$$

式中: K_q ——灵敏度(C/cm);

X_i ——变形(cm)。

图4-37中的电阻和电容可以等效成图4-37(c)所示。将电荷发生器变换成大家熟悉的电流发生器：

$$i_a = \frac{dQ}{dt} = K_Q \left(\frac{dx_i}{dt} \right) \quad (4-59)$$

由图4-37(c)可写出：

$$i_a = i_c + i_R \quad (4-60)$$

$$e_0 = e_c = \frac{\int i_c dt}{C} = \frac{\int (i_a - i_R) dt}{C} \quad (4-61)$$

所以：
$$C \left(\frac{de_0}{dt} \right) = i_a - i_R \quad (4-62)$$

将(4-59)代入上式得：

$$C \left(\frac{de_0}{dt} \right) = K_Q \left(\frac{dx_i}{dt} \right) - \frac{e_0}{R} \quad (4-63)$$

对式(4-59)两边取拉氏变换可得：

$$\frac{e_0}{x_i}(s) = \frac{K\tau S}{\tau S + 1} \quad (4-64)$$

式中： K ——灵敏度(V/cm)；

τ ——时间常数， $\tau = RC$ (s) (4-65)

由式(4-64)可知，压电式传感器对常值 x_1 的稳态响应为零，因此它不适于测量静态位移。为了获得5%以内的平坦的幅频响应特性，由式(4-64)可得：

$$(0.95)^2 = \frac{(\omega_1 \tau)^2}{(\omega_1 \tau)^2 + 1} \quad (4-66)$$

所以：
$$\omega_1 = 3.24/\tau \quad (4-67)$$

由式(4-67)可知，时间常数 τ 越大， ω_1 就越小，传感器的通频带就越宽。若要增加 τ ，则可通过增加 R 或 C 。

在一般情况下，压电晶体传感器不允许静态测量。但用石英晶体的传感器(其泄漏电阻很高)和输入阻抗很大的放大器的测量系统，可使工作时所产生的电荷通过其泄漏电阻时，衰减非常缓慢，从而允许进行静态测量。压电传感器为了在机械结构上易于实现，通常采用有较大的压缩预载荷的压电元件传感器。

压电式传感器配用的前置放大器有电压放大器和电荷放大器两种，如图4-38所示。图4-38(a)电路输出电压与压电元件的输出电压成正比。但其灵敏度将因电缆电容的改变而改变。电压放大器的输入阻抗尽可能高。图4-38(b)电路输出的电压与压电元件的输入电荷成正比。其灵敏度不随电缆电容的影响。

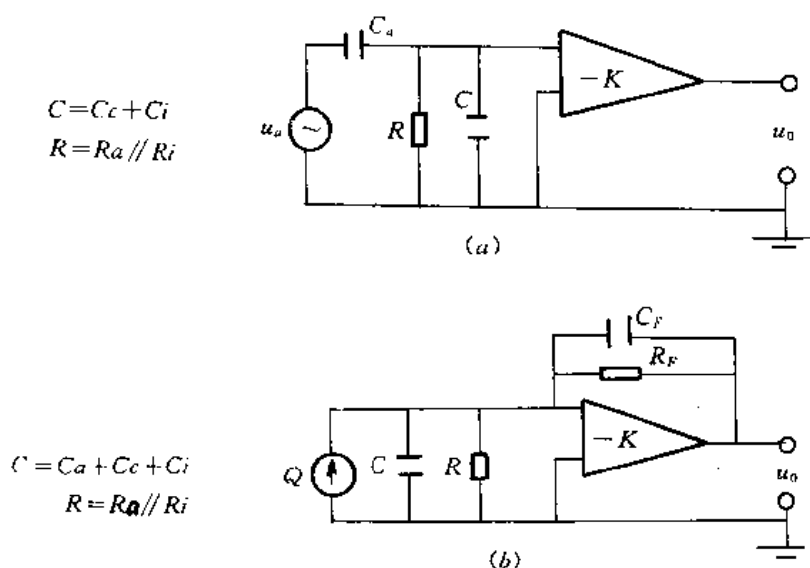


图4-38 与压电传感器配用的前置放大器

八、霍尔式传感器

利用半导体器件制作的霍尔传感器,具有结构简单、体积小、坚固、频带宽、动态特性好、寿命长的特点,主要用于一些特殊场合,如测振动位移及接近开关等。

1. 工作原理

将半导体薄片置于垂直于磁感应强度为 B 的磁场中,如图4-39所示。当沿导线方向通过控制电流 I_c 时,则载流子受垂直于 I_c 和 B 的洛伦兹力的作用而向半导体两侧偏转,从而在垂直于 I_c 和 B 的方向产生电动势 U_H ,这种物理现象称为霍尔效应,半导体薄片称为霍尔片。

霍尔电压为:

$$U_H = K_H B I_c \quad (4-68)$$

式中: K_H 称为霍尔元件的灵敏度,

$$K_H = R_H / d \quad (4-69)$$

式(4-69)中 $R_H = -\frac{1}{ne}$,称为霍尔系数,它由半导体的物理性质决定,其中 n 为 N 型半导体中的电子浓度,即单位体积中的电子浓度(单位体积中的电子数), e 为电子电荷量, $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$,负号表示电子运动速度方向与电流方向相反。

由于霍尔传感器中的霍尔元件由半导体制成,因此霍尔元件可作成很薄,薄膜霍尔元件只有 $1\mu\text{m}$, d 越小, K_H 就越大。当霍尔元件在一个线性梯度磁场中移动时,输出的霍尔电势反映了磁场变化,由此可测微小位移。

霍尔元件一般是用锗(Ge)、硅(Si)、砷化镓(InAs)、锑化铟(InSb)等半导体材料制成。其中InAs霍尔器件的温度特性和线性都好,而Ge易加工,输出特性、线性度较好,这种霍尔元件适用测量指示仪表。图4-40为霍尔元件的基本电路。图中电源 E 是供给元件的控制电

压,可调电阻 R 用来调节电流的大小, R_f 为霍尔电势输出端的负载电阻,通常它是放大器或记录仪表的输入阻抗。

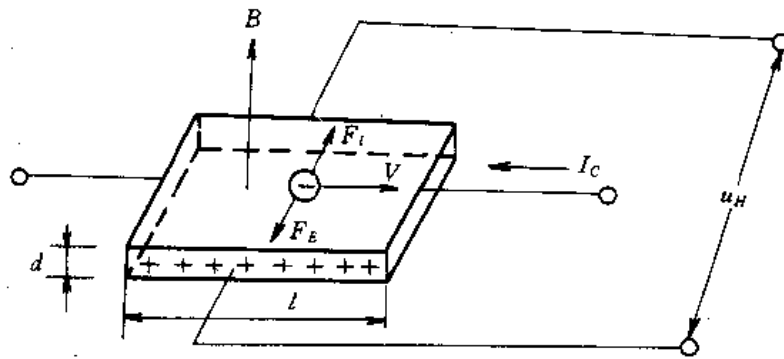


图4-39 霍尔效应原理图

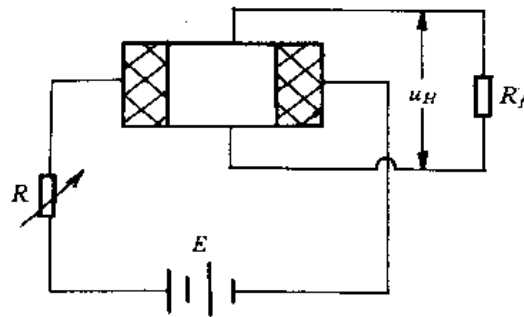


图4-40 霍尔元件的基本电路

霍尔元件的外形、结构、符号如图4-41所示。霍尔元件由霍尔片、4根引线和外壳组成,霍尔片是一块矩形半导体晶片(一般为 $4 \times 2 \times 0.1 \text{mm}^3$),其壳体是非导磁金属陶瓷或环氧树脂封装,4根引线中,通常2根红色引线是控制电流导线,焊接在图中 a 、 b 处; c 、 d 霍尔电极引出的导线常为绿色。

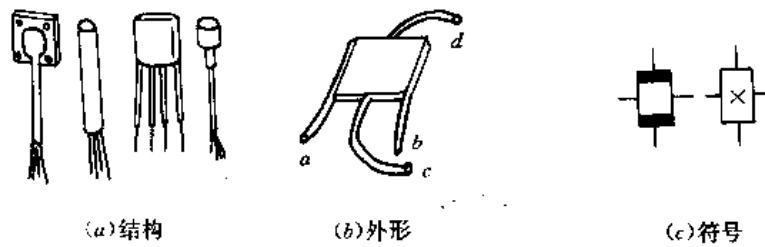


图4-41 霍尔元件

2. 霍尔元件误差补偿

半导体对温度很敏感,霍尔元件的载流子迁移率、电阻率和霍尔系数都随温度而变化,因此霍尔元件系数都随温度而变化,因此霍尔元件的霍尔电势和输入、输出电阻等为温度的函数,导致霍尔传感器温度误差。为了减小温度误差,提高测量精度,可采用温度误差补偿方法。

霍尔元件的温度误差可以采用多种方法进行补偿,最常用的方法是采用恒流源激励。由式(4-68) $U_H = K_H B I_C$ 可知,当磁感应强度不变时, U_H 是 K_H 和 I_C 的函数,由于温度变化使元件的输入电阻 R_i 发生变化,从而影响 I_C 和 K_H 。为了提高霍尔电势 U_H 与温度的稳定性,可采用图4-42所示电路。该电路的温度补偿效果取决于电阻 R 值的选择。

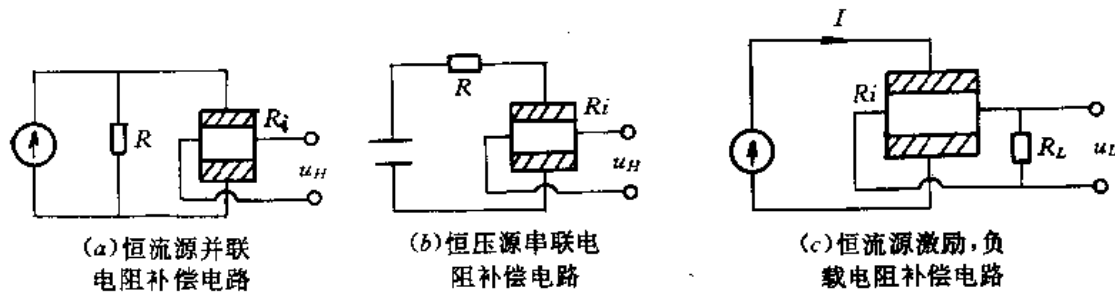


图4-42 霍尔元件温度补偿电路

图4-42(a)所示电路中,激励电流 I 为恒定电流。并联电阻 $R \approx \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha} R_{i0}$;可获得最佳补偿效果。图(b)中,串联电阻 $R = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} R_{i0}$,可获得最佳补偿效果。激励电压 E 为恒定电压。图(c)中,负载电阻 $R_L = R_{o0} (\frac{\beta}{\alpha} - 1)$ 可获得最佳温度补偿效果,激励电流 I 为恒定电流。其中, α 为霍尔元件灵敏度温度系数; β 为霍尔元件电阻温度系数,通常 $\beta \gg \alpha$; R_{i0} 为霍尔元件在温度为 $t_0 = 0^\circ\text{C}$ 时的输入电阻; R_{o0} 为霍尔元件在温度为 $t_0 = 0^\circ\text{C}$ 时的输出电阻。以上参数值在产品说明书中给出。

由于霍尔元件材料的电阻率不均匀,基片宽度、厚度不一致、电极与基片接触不良等原因,造成霍尔元件在预定的控制电流作用下,不加外磁场时霍尔电极间的空载电势不为零,此电势称为不等位电势,它可采用图4-43所示的电路进行补偿。

图4-43所示三种电路都是对称电路,当温度在一定范围内变化时,补偿的稳定性较好。但图(a)、(b)两种电路减小了霍尔元件的输入电阻,降低了霍尔电势的输出。图(c)要求霍尔元件必须做成五端元件,电路的缺点是输出电阻增大。

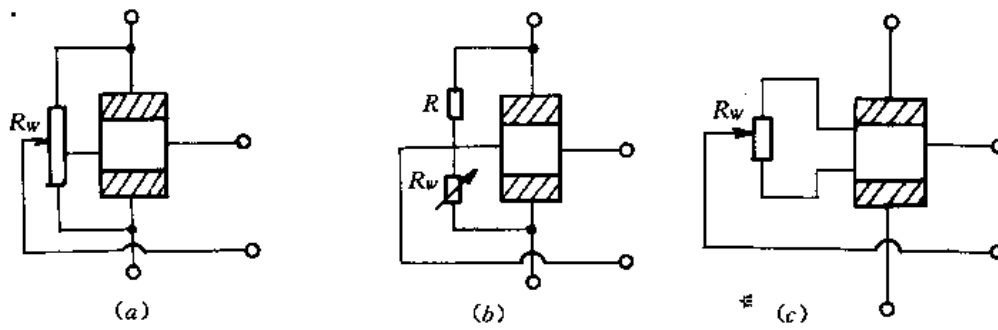


图4-43 不等位电势的补偿电路

第四节 速度传感器

一、磁电感应式速度传感器

磁电感应式速度传感器灵敏度较高,性能稳定,中频响应好(10~500Hz),不需要外加电源,输出为电压,可直接与通用电子放大器联接,使用方便,但体积、重量(约1kg)较大。

1. 工作原理

图4-44 所示磁电式传感,当线圈作切割磁力线运动时,由电磁感应定律得:

$$e_0 = NB l V \quad (4-70)$$

或
$$e_0 = NBA \omega \quad (4-71)$$

式中: e_0 ——输出端电压(V);

B ——磁感应强度(T);

l ——每匝线圈的平均长度(m);

V ——线圈相对磁场的运动速度(m/s);

ω ——线圈相对磁场的运动的角速度(rad/s);

A ——每匝线圈的平均截面积(m²)。

当传感器结构选定后,其 B 、 l 、 N 、 A 均为常量,所以输出电压将随输入速度(或角速度)而线性变化;当速度反向,输出电压的极性也将变号。

磁电式速度传感器的结构有两种,若线圈动、磁铁不动,称之为动圈式如图4-44(a)所示;若线圈固定,磁铁活动,则称之为动铁式。这类结构统称为恒定磁通式,它广泛用于振动速度的测量,一般通过增加线圈的匝数(长度)来提高其灵敏度,因而导致线圈电阻增加,为了阻抗匹配,需配接高输入阻抗的放大器,把高阻抗变换为低阻抗输出,减小负载的作用。如一台典型的动圈式传感器,电阻约为500 Ω ,其灵敏度为0.006V/(mm/s),非线性度为 $\pm 1\%$,

满刻度位移为3.8mm；若更换更加灵敏度的线圈，以适用于测震需要，其电阻为500,000Ω，其灵敏度为4.5V/(mm/s)。

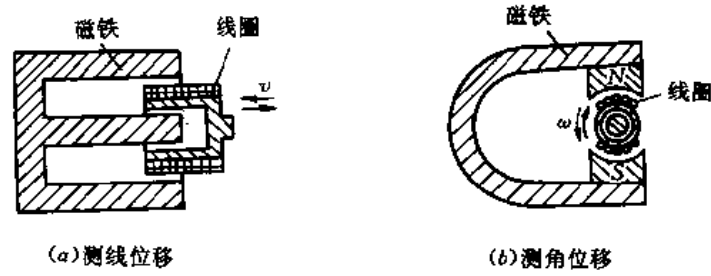


图4-44 磁电式速度传感器工作原理

对于角速度的测量，可采用变磁阻式转速传感器。图4-45(a)所示其结构原理，在永久磁铁组成的磁路中，若改变磁阻(如空气、气隙)的大小，则磁通量随之改变。磁路通过的感应线圈，当磁通量发生突变时，感应出一定幅度的脉冲电势。该脉冲电势的频率等于磁阻变化的频率。将传感器固定不动，在待测轴上装上一个由软磁材料做成的齿盘。当待测轴转动时，齿盘也跟随转动，盘中的齿和间隙交替通过永久磁铁的磁场，从而不断改变磁路的磁阻，使铁芯中的磁通量发生变化，在线圈内产生一个脉冲电动势，其频率跟待测转轴的转速成正比。图4-45(b)为闭磁路变磁通感应式转速传感器，转子与转轴固紧并随被测轴转动，转子、定子和永久磁铁组成磁路系统。上述测转速的电磁感应角速度传感器又称之为变磁通感应式转速传感器。

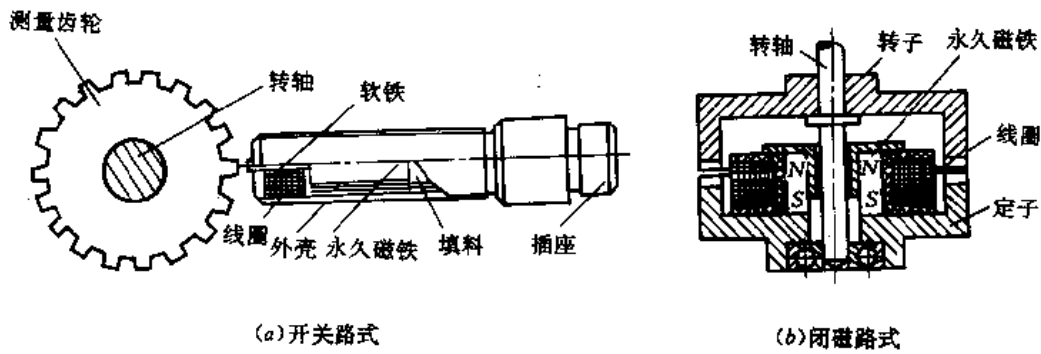


图4-45 磁电式转速传感器

磁电式转速传感器配上数字测速仪即可直接出转速和频率，检测范围达0~4000r/min。这类传感器也可检测导磁材料的齿轮、叶轮、带孔圆盘等的转速。

二、差动变压器式速度传感器

差动变压器式传感器除了可测量位移以外,还可测量速度。其工作原理如图4-46所示。差动变压器的原次线圈同时供以交流和直流电流,即

$$i(t) = I_0 + I_m \sin \omega t \quad (4-72)$$

式中: I_0 ——直流电流(A);

I_m ——交流电流的幅值(A);

ω ——交流电的角频率(rad/s)。

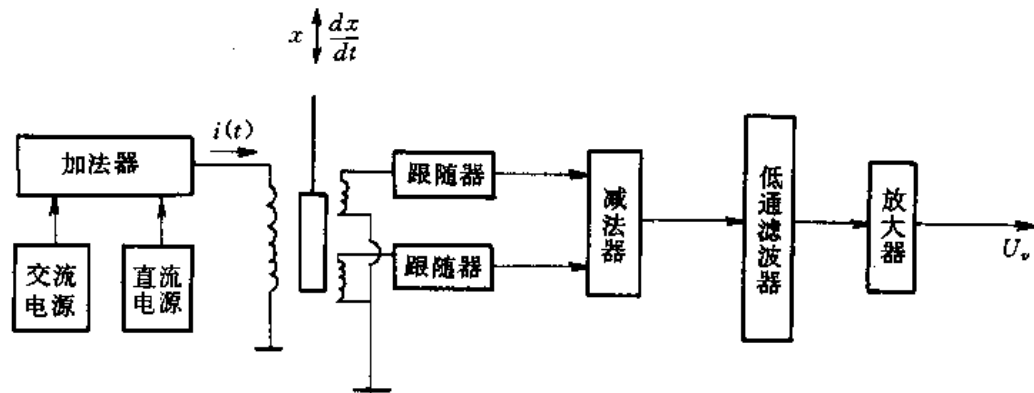


图4-46 差动变压器测速原理

当差动变压器磁芯以被测速度 $V = dx/dt$ 移动时,则其副边感应的电势:

$$E = - \frac{d[M(x)i(t)]}{dt} \quad (4-73)$$

式中 $M(t)$ 是原、副边互感系数,两个次级线圈和原边的互感系数分别为:

$$\begin{aligned} M_1(x) &= M_0 - \Delta M(x) \\ M_2(x) &= M_0 + \Delta M(x) \end{aligned} \quad (4-74)$$

式中 M_0 是 $x=0$ 时互感系数; ΔM 是到感系数的增量,是磁芯位移量 x 的线性数,即

$$\Delta M = kx \quad (4-75)$$

式中: k ——磁芯单位位移互感系数的增量(H/m)。

将式(4-75)代入式(4-74),则:

$$\begin{aligned} M_1(x) &= M_0 - kx \\ M_2(x) &= M_0 + kx \end{aligned} \quad (4-76)$$

将式(4-72)和式(4-76)分别代入式(4-73)得:

$$\begin{aligned} E_1 &= kI_0 \frac{dx}{dt} + kI_m \frac{dx}{dt} \sin \omega t - (M_0 - kx)I_m \omega \cos \omega t \\ E_2 &= -kI_0 \frac{dx}{dt} - kI_m \frac{dx}{dt} \sin \omega t - (M_0 + kx)I_m \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

两式相减得：
$$\Delta E = 2kI_0 \frac{dx}{dt} + 2kI_m \frac{dx}{dt} \sin \omega t + 2\omega kI_m x \cos \omega t \quad (4-77)$$

用低通滤波器滤除励磁高频角频率，则可得到与速度 v (m/s)相对应的电压输出，即

$$E_v = 2kI_0 v \quad (4-78)$$

差动变压器漂移小($\leq 0.1\%C$ 、 $\leq 0.1\%8h$)，其主要性能为，测量范围10~2000mm/s(可调)，输出电压 $\pm 10V$ (max)，输出电流 $\pm 10mA$ (max)，频带宽度 $\geq 500Hz$ 。

三、光电式速度传感器

图4-47为一测速示意图。物体以速度 v 通过光电池前的遮挡板时，光电池输出阶跃电压信号，经微分电路形成两个脉冲输出，除测出两脉冲间的时间间隔外，还可测速度 v 。

$$v = \Delta x / \Delta t \quad (4-79)$$

式中： Δx ——光电池档板上两孔间距(m)。

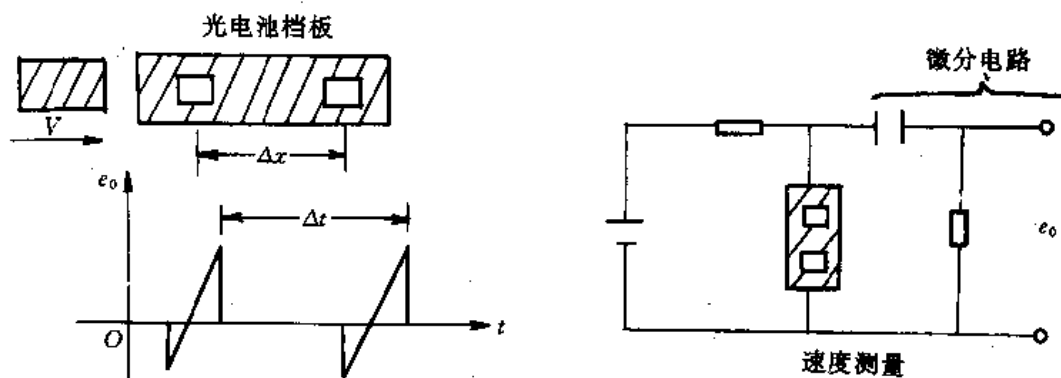


图4-47 光电式速度传感器原理图

图4-48为一种光电式转速传感器。它由装在被测轴上的带缝隙圆盘、光源、光电器件等组成。光源发出的光通过缝隙，照射到光电器件上，当缝隙圆盘随被测轴转动的一周时，光电器件输出与圆盘缝隙数相等的电脉冲，则可测出转速为：

$$n = \frac{60N}{zt} \quad (4-80)$$

式中： N ——测量时间 t 内的脉冲数；

n ——转速(r/min)；

t ——测量时间；

z ——圆盘的缝隙数。

若想辨别出圆盘的旋转方向，则在缝隙圆盘处加一个指示缝隙盘，两组缝隙间距 W 相同，位置相差 $(i/2 + 1/4)W$ 。

四、其它测速方法

测量角速度，还可采用陀螺式传感器。它的工作原理是利用陀螺原理。这类传感器包括

转子陀螺、压电陀螺和光纤陀螺。其中转子陀螺成本高,重量较重,寿命低,测量范围为 $(\pm 80^\circ \sim \pm 120^\circ)/s$,但它安装简单。压电陀螺寿命长,体积小,重量轻,广泛用于角速度测量中。激光陀螺灵敏度、分辨力比上述两种陀螺高,达 $10^{-4} \sim 10^{-5} \text{rad/s}$ 但成本高,当测角速度 $< 100^\circ/h$ 时,会发生锁定现象。光纤陀螺精度可达 $(0.03 \sim 0.04)^\circ/h$,分辨力达 10^{-8}rad/s ,重量轻,体积小,无闭锁现象,是一种有发展前途的传感器。除此之外还可采用电容式、电涡流式、霍尔式转速传感器。

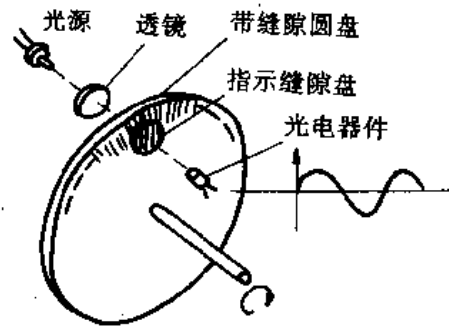


图4-48 光电式转速传感器

对有特殊要求的速度,如超低速 1cm/h 、超音速测量,则可采用多普勒效应测速传感器。若要求时大行程物体测速,如测量冷、热轧钢带速度、车辆速度,可采用相关法测速。而采用栅格式空间滤波器可用于航空摄影检测地速,检测汽车对地速度。日本LC-660型空间滤波器速度计的主要性能为:检测范围 $1.5 \sim 250 \text{km/h}$,线性度 $\pm 0.2\%$,重复性 $\pm 0.3\%$,精度 $\pm 0.5\%$ 。

第五节 力传感器

一、电阻应变式力传感器

电阻应变式测力传感器测量范围宽(测力为 $10^{-3} \text{N} \sim 10^3 \text{N}$,测压力为几十帕至 10^{11}Pa),精度高,动态性能好(几十至几百千赫兹),寿命长,体积小,价格便宜,可在恶劣条件下工作。它在现代动态测量中占有很重要的位置。

电阻应变式力传感器又称为弹性变形传感器,它是利用弹性敏感元件将被测力、压力、扭矩转换为应变或位移(挠度)等,然后通过粘贴其表面的电阻应变片转换成电阻值,由转换电路(通常为桥路)输出电压或电流信号。图4-49为弹性敏感元件。

图4-49(a)为梁式(变截面)弹性敏感元件,它的特点是灵敏度高,加工容易,易粘贴应变片,适用于小载荷($1 \sim 10^3 \text{N}$)测量;图(b)为环形弹性敏感元件,它的特点是稳定性好,有较高灵敏度。但结构较复杂,工艺性较差,适用于测量中等大小的力;图(c)为八角环弹性敏感元件,它可以完成三个分力的测量(如直角坐标系中 x, y, z),它常用于机械加工中对机床切削力的测量;图(d)为柱形弹性敏感元件,它适用于拉(或压)力测量和称重系统,能承受 10^7N 的大载荷。

弹性敏感元件、电阻应变片、转换电路就构成了电阻应变片式力传感器。图4-50所示电阻应变片力传感器原理图,图(a)为应变片贴在圆环弹性敏感元件弯矩较大处的内外表面上,当圆环受压时,贴片处的外表面产生正应变,内表面产生负应变,这四个应变片电阻可连接成图b所示全桥差动电路,此时电桥电压输出正比于压力 F 。

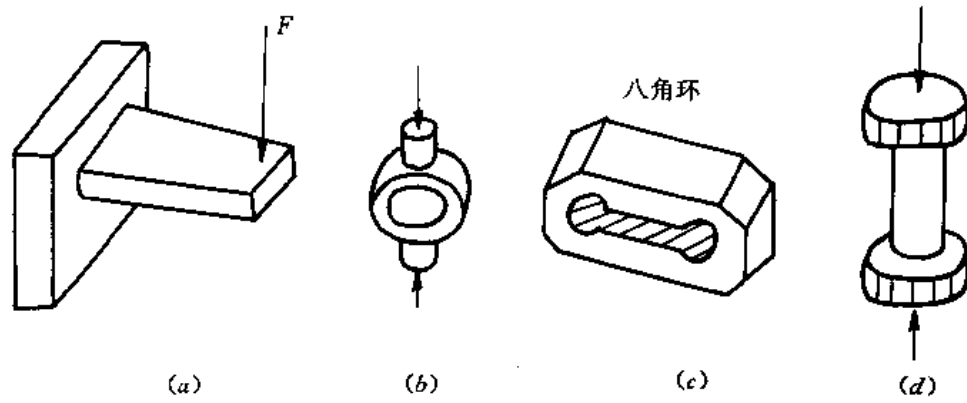


图4-49 常用弹性敏感元件

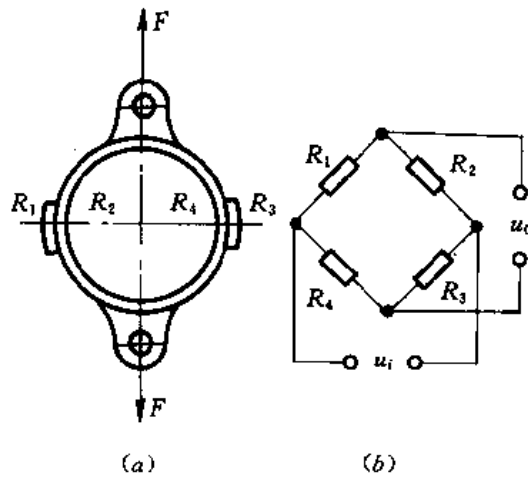


图4-50 电阻应变片力传感器原理图

电桥的输出电压

$$U_0 = \frac{\Delta R}{R} U_i \quad (4-81)$$

式中

$$\frac{\Delta R}{R} = (1 + 2\mu)\epsilon = S\epsilon \quad (4-82)$$

(4-82)代入(4-81)中有:

$$U_0 = S U_i \epsilon \quad (4-83)$$

式中 ϵ 为正应变,其值为:

$$\epsilon = \frac{1.092FR}{bt^2E} \quad (4-84)$$

式(4-84)代入式(4-83)中得:

$$U_0 = SU_i \frac{1.092R}{bt^2E} \cdot F \quad (4-85)$$

式中: R ——园环半径;

t ——园环厚度;

b ——园环宽度(m);

E ——弹性模量。

式中 S, U_i, R, b, t^2 都为常量, 令 $C = SU_i \frac{1.092R}{bt^2E}$, 则

$$U_0 = CF \quad (4-86)$$

二、压阻式力传感器

压阻式力传感器是根据半导体材料的压阻效应而制成的。由式(4-9)可写出在外力作用下, 体型导体应变片的电阻相对变化为:

$$\frac{\Delta R}{R} = (1 - 2\mu)\epsilon + \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

对于半导体单晶体沿纵向受力时, 其电阻率的变化可表示为:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \pi\sigma \quad (4-87)$$

式中: π ——半导体材料的纵向压阻系数;

σ ——纵向应力。

又

$$\sigma = E\epsilon$$

所以

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \pi E \cdot \epsilon \quad (4-88)$$

式中: E ——材料弹性模量;

ϵ ——纵向应变。

将(4-88)代入式(4-9)得:

$$\frac{\Delta R}{R} = (1 + 2\mu)\epsilon + \pi E\epsilon = (1 + 2\mu + \pi E)\epsilon \quad (4-89)$$

因此, 半导体的灵敏度系数可表示为:

$$K = 1 + 2\mu + \pi E \quad (4-90)$$

其中 πE 为半导体压阻效应引起的, 其值为式中前两项之和的50~70倍, 故前项(1+2 μ)可忽略, 半导体电阻相对变化率为:

$$\frac{\Delta R}{R} = \pi E \cdot \epsilon = K\epsilon \quad (4-91)$$

显然, 半导体应变片受力作用产生电阻率变化, 从而导致电阻值相对变化, 这种现象称之为压阻效应。

常用材料硅(Si)和锗(Ge)具有较大的灵敏度系数。表4-2列出以Si、Ge和金属为原料构

成的应变片的灵敏度系数。

表4-2 半导体晶体灵敏度

取向	晶体			
	Ge		Si	
	类型			
	n	p	n	p
[100]	-2	-5	-132	+10
[110]	-97	+67	-52	+123
[111]	-147	+103	-13	+177
电阻应变计	+2			

表中符号“+”表示拉伸使电阻增加，“-”表示电阻减少。从表中可看出，灵敏度与半导体的类型和取向有关。

半导体应变片的外形如图4-51的示。它由p型硅单晶片和胶膜衬底、引线等组成。

半导体应变片频率响应高、灵敏度大，比金属应变片高几十倍，机械滞后小，易集成，体积小，功率小，但有较大的非线性误差和温度误差，目前主要用来测量压力，如流体的压力、差压及血管压等。

三、压电式力传感器

压电式力传感器的工作原理是利用压电元件的压电效应(如4-3节所述)。

压电式力传感器较普遍采用 α -SiO₂晶体，利用它的纵向和剪切压电效应，作为其敏感元件。在实际应用中，压电式力传感器的结构可分为单分量 and 多分量两大类。常见的单分量及多分量压电式力传感器见表4-3和表4-4所示。

表4-3 单分量(单向)压电式力传感器

型式	负荷垫圈式	微型	力接头	高灵敏度
量程 (KN)	系列产品 7.5 15 35 60	系列产品 2.5 5	系列产品 ±2.5 ±5	系列产品 0.1 0.5
	90 120 200...		±20 ±30...	1.5
典型产品	9001~9091 YSL75~100	9211 9213	9301A~9371A	9201~9203 YDL-1
特点用途	测量轴向力,用于动态测量	测量10 ⁻³ N与5KN的力	便于安装测量张力和压缩力	用于小力值精密测量

表4-4 多分量压电式力传感器

分量	形式	量程	典型产品	特点用途	应用举例
二分量	F_z	-5~20KN	9063B	测量动态双向力及扭矩	机床加工力的测量
	M_z	$\pm 100\text{KN}_m$	9065 7271A		
三分量	F_x	$\pm 2.5\sim 20\text{KN}$	9067	测量任何方向的力分量	切削力测量
	F_y		9251		
	F_z		YDL-2		

单分量压电式力传感器的结构如图4-52 所示。

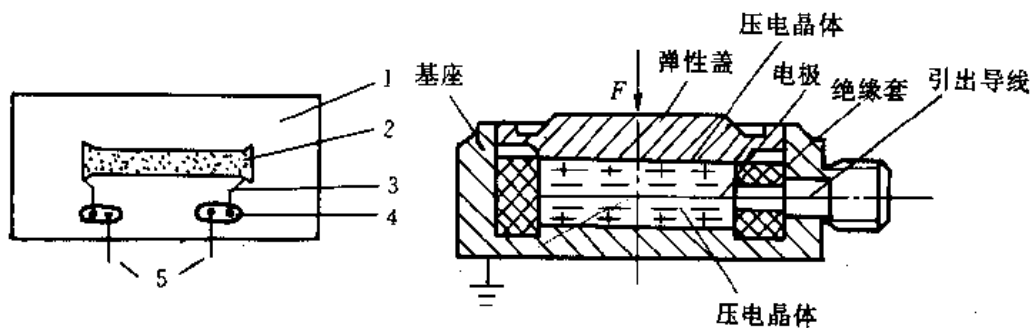


图4-51 半导体应变片

图4-52 单向压电式力传感器

1—胶膜衬底 2—p-Si片 3—内引线 4—焊接电极 5—外引线

图中所示的压电式力传感器,选用晶片为 O_xX 切石英晶片,尺寸为 $\phi 8 \times 1\text{mm}$ 。上盖为传力元件,其变形壁的厚度为 $0.1\sim 0.5\text{mm}$,由测力范围($F_{\max} = 500\text{kg}$)决定。绝缘套用来绝缘和定位。基座内外底面对其中心线的垂直度、上盖以及晶片、电极的上下底面的平行度与表面光洁度都有极严格的要求,否则会使横向灵敏度增加或使片子因应力集中而过早破碎。为提高绝缘阻抗,传感器装配前要经过多次净化(包括超声波清洗),然后在超净工作环境下进行装配,加盖之后用电子束封焊。该结构适于机床动态切削力的测量,型号为YDS-78。

图4-53 为多分量(三分量)压电式力传感器。

压电式力传感器,线性好,频响范围宽($10^{-6}\sim 50\text{kHz}$),灵敏度高,迟滞小,无需外加电源,抗声、磁干扰能力强,温度系数低($< 0.02\%/^{\circ}\text{C}$),适用测量准静态力至动态力、压力等。特别适合于在动态和恶劣工作环境中的力的测量,如机械设备的冲击力,振动台的激振力等。

四、压磁式传感器

压磁式力传感器功率大,信号强,抗干扰能力和过载能力强,寿命长,能在恶劣条件下工作,但精度较低(约1%),反应速度低。常用于机械、冶金、矿山、运输等部门测力、测扭矩和称重。

压磁式力传感器是利用铁磁材料的压磁效应而工作的。在外力作用下,铁磁材料由于内

部的应力的作用,而使铁磁材料的磁导率及磁阻发生变化,这种现象称之为压磁效应。

当压磁元件绕有一、二次线圈,并在一次线圈加以激励电压,其时有外力作用压磁元件,由压磁效应,将导致圈间耦合系数变化,从而在二次线圈中有电势输出。这就是压磁式力传感器的工作原理。

图4-54 为压磁式力传感器结构图。

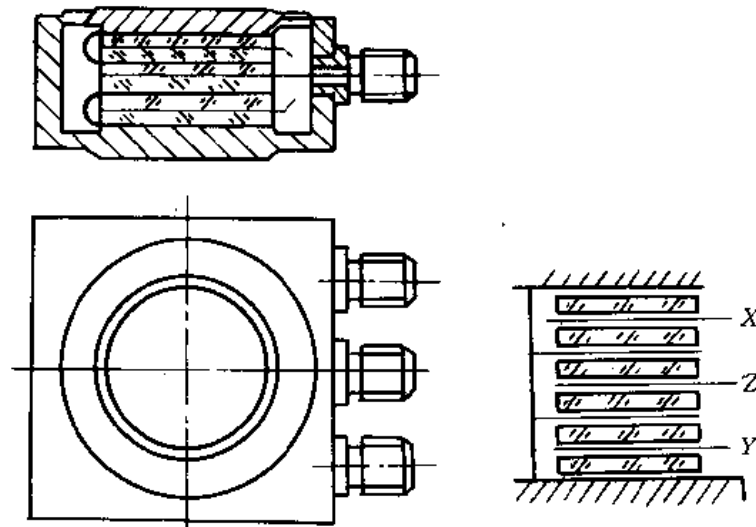


图4-53 多用压电式力传感器

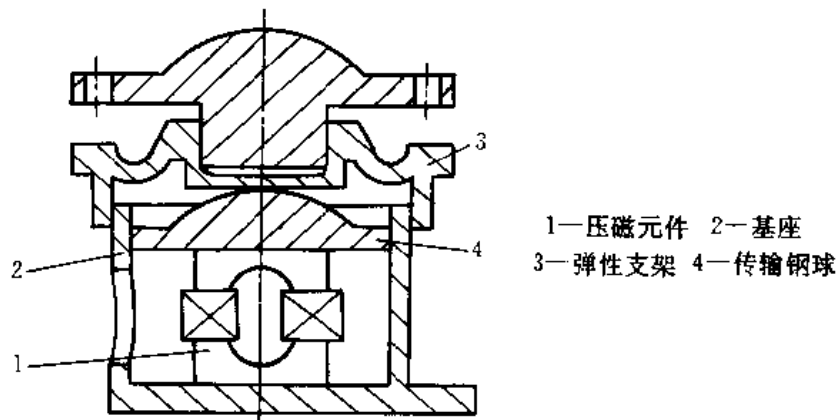


图4-54 压磁式力传感器结构简图

五、其它类型力传感器

谐振式力传感器的基本结构如图4-55 所示。它的基本原理是长度为 L ,单位长度上的质

量为 m_l 的弦,在待测力 F 作用下(张紧),其第一自然频率(固有频率)为:

$$f = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{m_l}} \quad (4-92)$$

输出的 f 随 F 而变化。图中所示结构称之为振弦式力传感器。

该类传感器还可利用膜片、筒式压电晶体等的谐振频率随被测力、压力等而变化,而制作出振筒式、振膜式、振梁式或石英晶体谐振式传感器。此类传感器的共同特点是分辨力和精度高,抗干扰能力强。其中振弦式可测量大压力,可达几十兆帕,精度较低(约±1.5%满量程);振筒式可测量气体压力;振膜式测量大压力,精度高;振梁式可测量静态力和缓变力(0~50Hz),但输出信号有一定的非线性;石英晶体可用来测静压力和准静压力,精度高,线性好,但价格较贵。

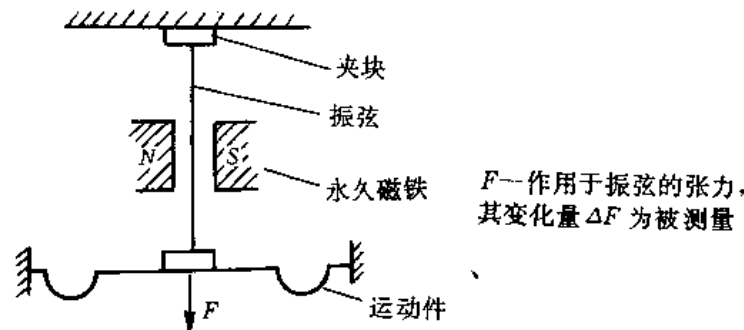


图4-55 谐振式力传感器基本结构

还可利用位移式传感器来测量力,即位移式力传感器,它是利用弹性敏元件将力的变化转换成位移而进行测量的。它包括有电位器式、霍尔式、电容式、自感式、变压器式及电涡流式力传感器。其中电容式、霍尔式动态特性好,适合测动态信号;而电位器、自感、变压器及电涡流不宜作快速动态测量。

第六节 加速度传感器

机器中的破坏力常常与加速度密切相关,对振动、冲击运动量的测量,常常采用加速度传感器(加速度计)。

一、压电加速度传感器

压电元件受力而变形常见的有厚度变形、长度变形、体积变形和厚度剪切变形四种。对这四种变形对应传感器结构也有四种。目前最常见的是基于厚度变形的压缩式和基于剪切变形的剪切式两种,前者使用更为普遍。

图4-56示出常用的两种传感器的典型结构。图4-56(a)是压缩型结构的振动传感器结构原理,调整硬弹簧质量块,对压电元件施加预压力。以使压电元件工作在线性部分,这种预

压力也能使压电元件在不受拉力的情况下进行正和负的加速度测量。这种结构简单、坚固，其灵敏度也高，能测出微小的加速度。图4-56(b)是剪切的振动传感器结构原理。它的底座向上延伸，如同一根圆柱，管式压电元件上再套上惯性质量环。这种结构忽略横向加速度的影响，声学噪声和温度冲击等环境的影响也较小。这种结构的传感器特别适用于测量高频振动。它的体积和重量都可做得很小，有助于实现传感器的微型化。

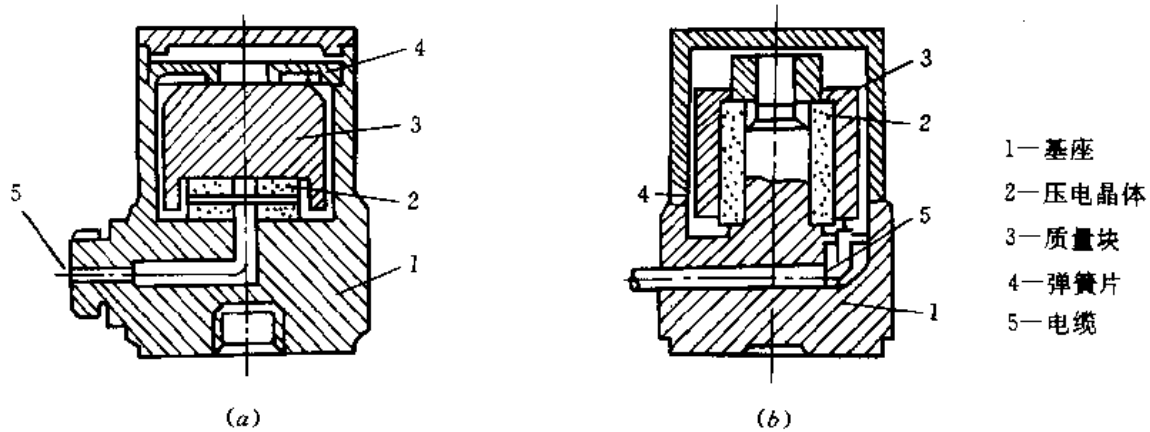


图4-56 压电加速度传感器结构图

图4-57是汽车安全系统用压缩式振动加速度传感器结构示意图，其中圆筒形质量块通过弹簧压在压电元件上。装有这种传感器的安全系统能迅速检测出汽车发动机的异常振动，并使其恢复到正常状态。通常，当发动机达到点火状态时，其功率和油耗都最大，若高负载时超前进入点火状态，会引起异常振动，安全系统的作用则是使发动机在引起异常振动的临界状态之前进入点火状态。

二、压阻式振动加速度传感器

利用半导体应变片的压阻效应可构成多种振动加速度传感器。图4-58所示应变片式三维振动加速度传感器的结构。图中相互垂直的三块弹簧钢制作的振动板的板面分别平行于 x 、 y 、 z 轴，振动板的顶端安装铅制的质量块，半导体应变片粘于振动板原点附近。质量块重 $10mg$ ，尺寸 $4.5 \times 1 \times 0.1mm$ 。应变片内阻值约为 1000Ω ，尺寸 $1 \times 0.3 \times 0.03mm$ 。外壳为半球形的玻璃罩。

图4-59为悬臂梁压阻式加速度计的典型结构。在悬臂梁的上下两侧分别粘贴两片导体应变片，构成桥式电路。灵敏度的温度补偿用热敏电路。这种传感器的最大特点是低频响应可以到直流，适用于测量持续时间长的振动式冲击，体积小，重量轻($<130g$)，谐振频率在 $2.5 \sim 70kHz$ 范围内，电压灵敏度变化范围为 $0.1 \sim 20.0mV/9.8m/s^2$ 之间。

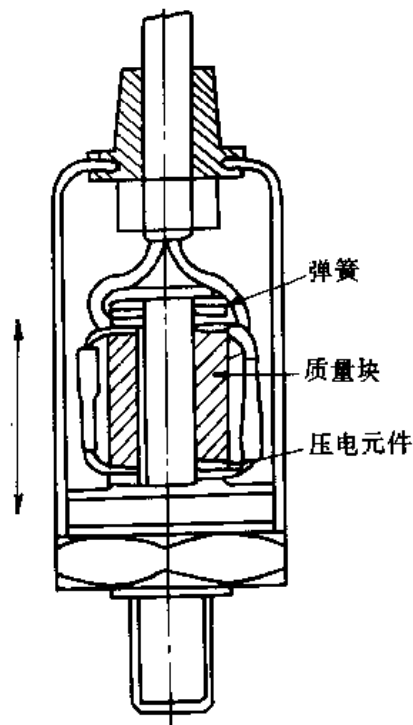


图4-57 压缩式振动传感器

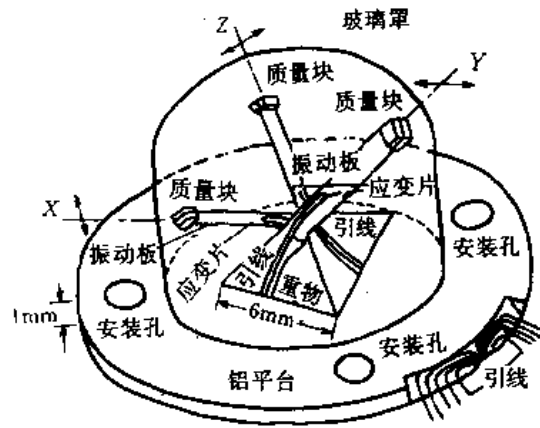


图4-58 三维加速度传感器结构

三、其它类型加速度传感器

可以利用各种位移传感器来测量加速度。使用电阻式电位器的加速度计，可用来测量慢变的加速度和低频振动。量程满刻度为 $\pm 1g$ 到满刻度 $\pm 50g$ ，其自然频率范围为 $12\sim 86Hz$ ，其尺寸约为 $51mm^3$ ，重约 $4.45N$ 。应变片式加速度计，即可以测量一般的运动，也可用于测量比较高频的振动，量程为满刻度 $\pm 0.5g$ 到满刻度 $\pm 200g$ 。自然频率为 $17\sim 800Hz$ ，分辨力高于 0.1% ，外形尺寸为 $13\times 13\times 51mm$ ，重量为 $26g$ 。液体阻尼的差动变压器式加速度计，测量范围为 $\pm 2g\sim \pm 700g$ ，自然频率为 $35\sim 620Hz$ ，非线性度为 1% 。其尺寸为 $51mm^3$ ，重量为 $1.11N$ 。

作为特殊场合的加速度测量，如爆震测量，则可选用磁致伸缩式振动加速度传感器，爆炸震动引起磁致伸缩效应通过其周围的线圈以电抗变化形式检测出来，该传感器结构图如图4-60所示。

对心音脉搏的测量，可选择PVDF心音脉搏传感器。该传感器采用PVDF压电薄膜作为换能元件，通过特殊的匹配层，把信号转换成换能元件上的电荷量，再经过转换电路输出放大的电压信号。PVDF心音脉搏传感器的结构如图4-61所示。

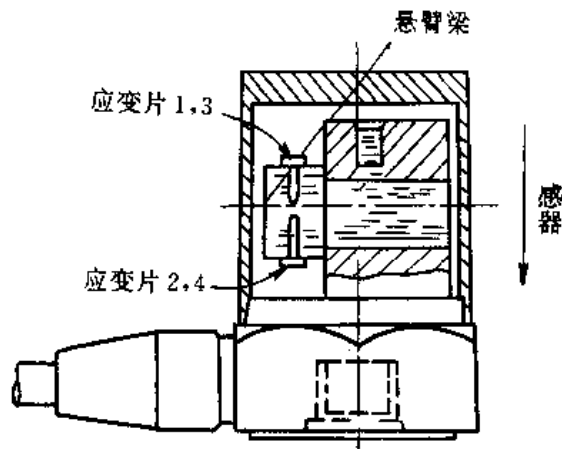


图4-59 压阻式加速度计

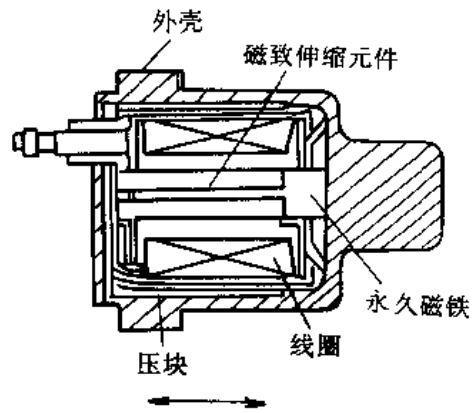


图4-60 磁致伸缩式振动加速度传感器

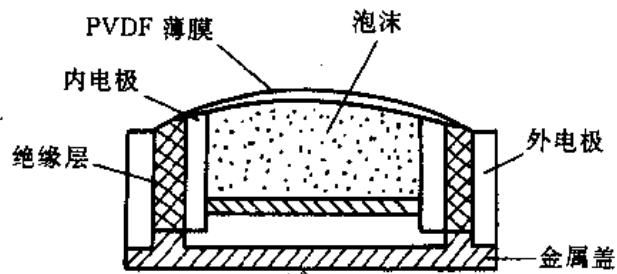


图4-61 PVDF薄膜心音脉搏传感器

第七节 传感器的选用原则

设计一个测试系统,首要考虑的是传感器的选择,其选择正确与否直接关系到测试的成败。

选择合适传感器是一个较复杂的问题,现就其一般性讨论如下。

第一,首先要仔细研究所测试信号,确定测试方式和初步确定传感器类型。例如是位移测量还是速度、加速度、力的测量,再确定传感器类型。

第二,要分析测试环境和干扰因素,测试环境是否有磁场、电场、温度的干扰,测试现场是否潮湿等。对环境有一个基本的了解,再选择有不同防干扰的传感器。例如,感应同步器对环境要求不高,而光栅传感器对环境要求就高。

根据测试范围确定什么样的传感器,例如位移测量,要分析是小位移测量,还是大位移测量。若是小位移测量,是加工误差的测量还是工件误差的测量,是振动还是非振动。则有相应的电感传感器、电容传感器、霍尔传感器等供选择;若是大位移测量,有感应同步器、光

栅传感器等供选择。

第三,确定测试方式。在测试过程中,是接触还是非接触法。例如对机床主轴的回转误差的测量,就必须采用非接触测量。

最后要考虑到传感器的体积,被测位置是否能安下,传感器的来源、价格等因素。当考虑到上述问题之后,就能确定选用什么类型的传感器,然后再考虑以下的一些问题。

传感器的灵敏度的选择:一般选择信噪比高的传感器,这样才能保证传感器灵敏度在测量范围内(即线性范围)保持不变。传感器的灵敏度是有方向性的,当测量是单向量时,就选择横向灵敏度小的传感器;若被测量是多维的,则要求传感器的交叉灵敏度愈小愈好。

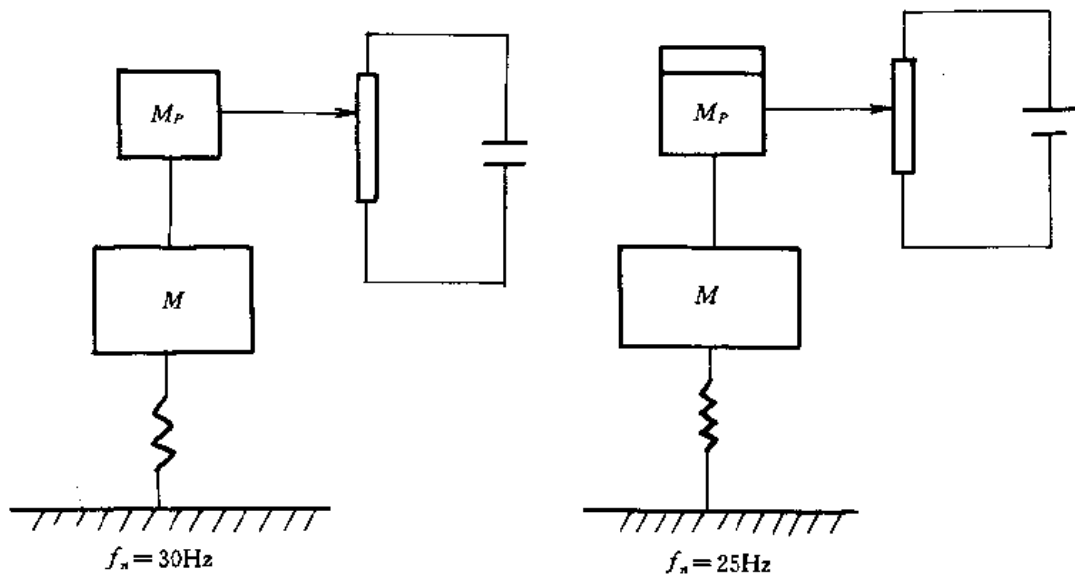
传感器频率响应特性的选择:传感器的频响特性必须覆盖被测信号的带宽,传感器响应的延迟时间越短越好。通常利用光纤、光电、压电、压阻等传感器,响应时间短,力测量范围宽。而如电感、电容、电磁感应、电位器等传感器,由于受结构特性的影响,机械系统惯性大,自然频率低,测量范围窄。

稳定性的选择:传感器在使用一段时间后,其性能不发生变化的性质称为稳定性。影响稳定性的因素一般是指时间。传感器的稳定时间越长,当然就越好。例如,天然石英晶体制成的压电式传感器就比用电压陶瓷制作的稳定性要好。传感器的稳定性有定量指标,超过使用期应及时进行标定。例如压电瓷制作的压电传感器最好每年标定一次。

传感器精度的选择:传感器的精度是保证整个测试系统精度的必要条件。选择传感器的精度要与后序测试环节相匹配,这样才能满足测试要求。若测试是作定性分析,选用重复精度高的传感器即可;而不宜选用绝对量值精度高的。若为了定量分析,需获得准确的测量值,就需选用精度等级高的传感器。例如,精密切削机床,对其运动上的定位、主轴回转运动误差、振动及变形等,往往要求测量精度在 $0.01\sim 0.1\text{mm}$ 范围内,此时必需选用高精度的传感器。

习 题 四

- 4-1 若一电位器的电阻值随温度的变化而变化,这对位移的测量会产生什么影响?
- 4-2 一台行程为 25.4cm 的直滑式线绕电位器由电压为 100V 的电源激励(供电),其输出由一灵敏度为 0.5mV/cm 的示波器来读数。这种配置能否测出 $25.4\times 10^{-5}\text{cm}$ 的位移,解释原因。
- 4-3 在题图4-1中示出一电位器,其运动部分重 0.0445N ,用来测量一受到阶跃输入作用的弹簧—质量系统的位移。测得该系统的自然频率为 30Hz 。若该系统的弹簧常数和质量 M 均为不知,试问能从上述数据推算出真实的自然频率?假定在电位器上又加上 0.0445N 的一个重量并重复一次试验,测得自然频率为 25Hz ,试计算出该系统真实的自然频率,即未装电位器之前的自然频率。



题图 4-1

- 4-4 在一惠斯登电桥中,桥臂1为应变片构成的工作臂,其它阻材料为阿范斯合金(Advance alloy,含铜56%,锰1.5%,其余为镍),阻值为 120Ω 。桥臂4为由一不感受应变的温度补偿电阻应变片(与工作应变片相同)构成。桥臂2和3为 120Ω 的固定电阻器。应变片的最大允许工作电流 0.030A 。
- 试求最大允许的直流激励电压,并将此值用在本题的其余部分;
 - 如果工作应变片贴在一钢件上,试求每 6.89MPa 应力电桥的输出电压;
 - 如果没有采用温度补偿,而应变片又贴在钢件上,当工作应变片温度升高至 37.8°C 所造成的电桥的输出电压为多少?这一输出电压所代表的应力值为多少?钢和阿范斯合金的热膨胀系数分别为 $11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 和 $26.82 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。阿范斯合金的电阻温度系数为 $10.8 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$;
 - 试计算这样一个分流标定电阻器的阻值,该阻值使电桥输出与钢件上 68.95MPa 应力所产生的同样的电压。
- 4-5 令有一压电式传感器,其电容量为 1000pF ,且 $K_q = 0.394 \times 10^{-5}\text{C/cm}$ 。连接导线具有的电容量为 300pF ,而用于读出的示波器的输入阻抗为 $1\text{M}\Omega$ 加一并联的 50pF 的电容。试问:
- 传感器单独的灵敏度(V/cm)为多少?
 - 整个测量系统的高频灵敏度(V/cm)为多少?
 - 整个系统幅值误差为5%时的最低可测频率为多少?
 - 为了把量程扩展到当频率下降到 10Hz 时幅值误差为5%,必须并联的电容值 C 应为多少?

(e)若采用(d)中求出的 c 值,试问该系统的高频灵敏度将变得如何?

4-6 一压电式传感器的输入为

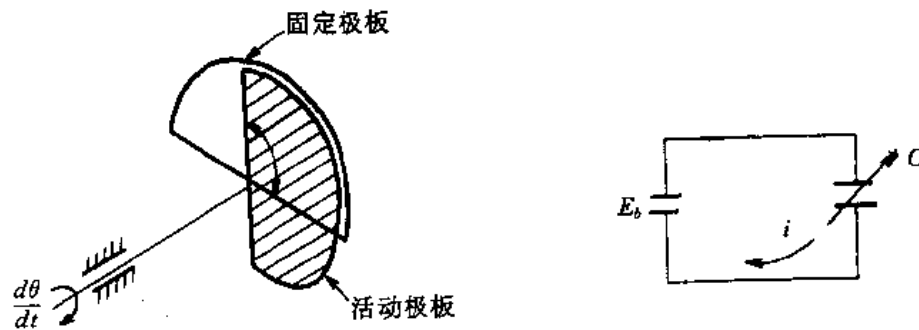
$$x = \begin{cases} At & 0 \leq t \leq T \\ 0 & T < t < \infty \end{cases}$$

试解微分方程以求出 e_o ,对于 $t=T$,求出其误差 $[(e_o \text{ 的理想值}) - (e_o \text{ 的实际值})]$ 使用下面的截断级数来近似地求出此误差

$$e^{-T/\tau} \approx 1 - \frac{T}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{T}{\tau}\right)^2$$

并用理想值 e_o 的百分数来表示这一近似误差。如果误差为5%, T/τ 必须为多少?对于所求得的 T/τ 值,试计算由截断级数所造成的误差(利用交错级数的余项定理)

4-7 在题图4-2所示的可变电容器式速度传感器中,试证明电流 i 与角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ 成正比。因为电压信号更容易处理,试问如何将电流信号变换成正比的电压信号?你所用的变换方法会影响传感器的基本工作方式吗?如果只允许基本工作方式稍受影响,应提出什么要求?



题图 4-2

4-8 选用传感器的基本原则是什么?在实际中如何运用这些原则?试举一例说明。

第五章 传感器常用的中间变换电路

第一节 概 述

被测物理量经过传感器变换后,成为各种电路性参数(如电阻、电容和电感)或电源性参数(如电压、电荷)。一般来讲,这些参数是不能直接推动显示记录仪、控制器,或输入计算机作信号的分析 and 处理等。例如,将电阻、电容及电感等电路性的参数的变化转换成可供传输、显示和运算的电压、电流信号;若转换后的电压、电流信号过小,则需要放大;若信号中混有噪声,则需排除噪声;若信号需要输入计算机进行处理,则要对信号的输入和输出作特殊处理。这些对信号的进一步处理的环节统称为中间变换电路。

中间变换电路涉及面很广,内容也是及其丰富的。但本章就是常用的电桥、放大器、与调制解调、滤波器等电路转换环节进行讨论。

第二节 电桥电路

电桥电路是将参量型传感器的电参量电阻、电容及电感变换为电压或电流信号的电路。其输出即可推动记录仪直接记录,也可以输入放大器进行放大。电桥电路以其结构简单、可靠并可获得高精度和高灵敏度,在实际测量中得到广泛的应用。

电桥按其激励电源类型可分为直流电桥和交流电桥两种,按其工作状态分为零值法和偏值法两种。

一、直流电桥

电桥线路是由连接成环形的四个电阻所组成,如图5-1所示,电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 和 R_4 处称为桥臂, C 、 D 对角线接仪表或负载,其阻值为 R_L ;

U_E 是电桥的激励直流电源, u_e 是电桥的输出电压。

图5-1中,设 $R_L = \infty$,由电路分压定理可得:

$$\begin{aligned} u_e &= u_{CD} = u_{AD} - u_{AC} \\ &= \frac{R_4}{R_3 + R_4} u_E - \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_E \\ &= \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} u_E \quad (5-1) \end{aligned}$$

由式(5-1)可知,电桥的输出电压 U_e 是电桥激励电压 U_E 的线性函数,但一般说来却是电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 及 R_4 的非线性函数。

显然,若 $R_1 R_3 = R_2 R_4$,即 $U_e = 0$,则电桥处于平

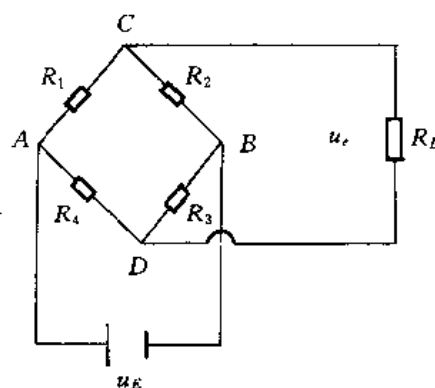


图5-1 直流电桥

衡。所以,电桥的平衡条件为 $R_1R_3=R_2R_4$ 或

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} = n \quad (5-2)$$

式中, n 为桥臂的比例常数。

当桥臂一的电阻发生变化时,即 $R_1+\Delta R$,则打破式(5-2)所示的平衡条件,此时 $U_e \neq 0$,由式(5-1)、(5-2)有:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{(R_1 + \Delta R)R_3 - R_2R_4}{(R_1 + R_2 + \Delta R)(R_3 + R_4)} U_E = \frac{\Delta R \cdot R_3}{(R_1 + R_2 + \Delta R)(R_3 + R_4)} \cdot U_E \\ &= \frac{\frac{\Delta R}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_4}}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{\Delta R}{R_1}\right)\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)} = \frac{\frac{\Delta R}{R_1} \cdot n}{\left(1 + \frac{\Delta R}{R_1} + n\right)(1 + n)} \cdot U_E \end{aligned} \quad (5-3)$$

在实际应用中, ΔR 很少超过 R 的1%,即 $\frac{\Delta R}{R_1} \ll 1$,上式中 $\frac{\Delta R}{R_1}$ 可忽略,式(5-3)变为:

$$u_e = \frac{n}{(1+n)^2} \cdot \frac{\Delta R}{R_1} \cdot U_E$$

$$\text{令} \quad S = \frac{U_e}{\Delta R/R_1} = \frac{n}{(1+n)^2} \cdot U_E \quad (5-4)$$

根据式(5-4)的含意, S 为电桥电压灵敏度。当桥臂比为常数时, U_E 愈大,则 S 也愈大。但电源电压 U_E 不能无止境提高。另一方面,当电桥电压 U_E 是一定时,令 $\frac{dS}{dn} = 0$,电桥灵敏度

S 为最大,即对式(5-4)微分,得: $\frac{(1-n)^2}{(1+n)^4} = 0$

求得 $n=1$ 时, S 为最大。因此,在电桥设计中,常取 $R_1=R_2=R_3=R_4=R$ 。

若四个桥臂的电阻都发生变化,变化量为 ΔR ,显然,由式(5-1)可知,输出电压 U_e 是各桥臂电阻的函数,即可写成 $U_e = f(R_1, R_2, R_3, R_4)$,此时对于微小变化量 ΔR ,则 U_e 的变化量为:

$$\Delta u_e \approx \frac{\partial u_e}{\partial R_1} \Delta R_1 + \frac{\partial u_e}{\partial R_2} \Delta R_2 + \frac{\partial u_e}{\partial R_3} \Delta R_3 + \frac{\partial u_e}{\partial R_4} \Delta R_4 \quad (5-5)$$

式中: $\Delta R_1 = \Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = \Delta R$

$$\frac{\partial u_e}{\partial R_1} = U_E \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{1}{4R_0} U_E \quad (5-6)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial R_2} = -U_E \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} = -\frac{1}{4R_0} U_E \quad (5-7)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial R_3} = U_E \frac{R_4}{(R_3 + R_4)^2} = \frac{1}{4R_0} U_E \quad (5-8)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial R_4} = -U_E \frac{R_3}{(R_3 + R_4)^2} = -\frac{1}{4R_0} U_E \quad (5-9)$$

式(5-6)~(5-9)代入式(5-5)得:

$$\Delta U_e = \frac{1}{4R_0} U_E (\Delta R_1 - \Delta R_2 + \Delta R_3 - \Delta R_4) \quad (5-10)$$

若取 $\Delta R_1 = -\Delta R_2, \Delta R_3 = -\Delta R_4$,则式(5-10)变为:

$$\Delta U_e = \frac{1}{4R_0} U_E (\Delta R_1 + \Delta R_1 + \Delta R_3 + \Delta R_4) = \frac{\Delta R}{R_0} U_E \quad (5-11)$$

此时,电桥灵敏度为

$$S_4 = \frac{\Delta U_e}{\Delta R/R_0} = U_E \quad (5-12)$$

此电桥结构,称之为全桥差动。

当仅有两个相邻臂电阻变化,且变化趋势相反,即 $\Delta R_1 = -\Delta R_2 = \Delta R, R_3 = R_4 = R_0$ 。由式(5-10)得:

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} U_E (\Delta R_1 + \Delta R_2) = \frac{U_E}{2R_0} \cdot \Delta R \quad (5-13)$$

此时,电桥灵敏度为

$$S_2 = \frac{\Delta u_e}{\Delta R/R_0} = \frac{1}{2} U_E \quad (5-14)$$

此电桥结构,称之为半桥差动。

当仅有一个臂电阻变化,其余为固定电阻,即 $\Delta R_1 = \Delta R, R_2 = R_3 = R_4 = R_0$ 代入式(5-10)得:

$$\Delta U_e = \frac{U_E}{4R_0} \cdot \Delta R \quad (5-15)$$

电桥灵敏度为

$$S_1 = \frac{1}{4} U_E \quad (5-16)$$

由式(5-12)、(5-14)、(5-16)可知,全桥差动电桥灵敏度最大,半桥次之,单臂电桥最小。

以上的讨论是建立在负载电阻为无穷大即 $R_L = \infty$ 的基础上。当负载电阻为有限值时,研究电桥灵敏度又如何变化。由戴维宁(Thevenin)定理,把图5-1所示电路转化为图5-2所示的等效电路,流经负载的电流为 i_L ,输出电压为 U_{EL} 。

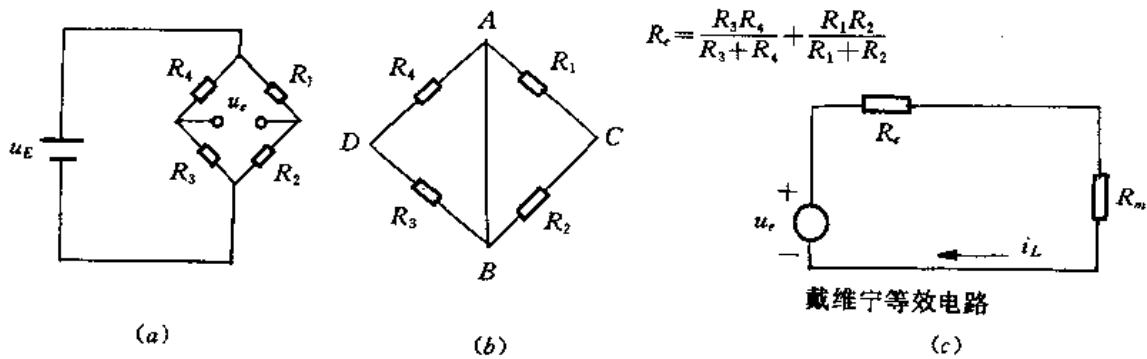


图5-2 用戴维宁定理来分析电桥

由图5-2(c)可得:

$$i_L = \frac{u_e}{R_e + R_m} = U_e \frac{\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_m} \quad (5-17)$$

$$U_{eL} = i_L \cdot R_L = \frac{u_e (R_1 R_3 - R_2 R_4)}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2) + \frac{(R_3 + R_4)R_1 R_2 + (R_1 + R_2)R_3 R_4}{R_m}} \quad (5-18)$$

又
$$u_e = U_e \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (5-19)$$

负载对电桥输出电压的影响,用 U_{eL} 与 U_e 之比来表示。即

$$\frac{U_{eL}}{U_e} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R_L} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)} \quad (5-20)$$

显然,式(5-20)中,若 $R_L = \infty$,则 $U_e = U_{eL}$ 。

若 R_L 为有限值,则输出信号将减小,减小量取决于 R_L 和电桥“等效电阻” R_e 的比值。

由图5-2(b)可知,

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (5-21)$$

代入式(5-20)得:

$$\frac{U_{eL}}{U_e} = \frac{1}{1 + R_e/R_L} \quad (5-22)$$

若 $R_L = 10R_e$,则

$$\frac{U_{eL}}{U_e} = \frac{1}{1.1} = 0.909 \approx 9\% \quad (5-23)$$

式(5-23)说明,输出信号有9%的损失。这种损失通常称之为负载影响>Loading effect)。这就是说,当负载为有限值时,使电桥输出下降,降低了电桥的灵敏度。

当实际测试中,大多数测量电压的仪器(数字式电压表,示波器等)都具有 $1M\Omega$ 或更高的输入电阻的输入放大器,故流入测量仪的电流很小,即负载影响可忽略不计。

在实际测量中,上述的电桥一个或多个桥臂可能就是应变片、电阻式感温元件或热敏电阻器。假设桥臂电阻已调好,电桥处于平衡状态,即 $U_e = 0$ 。这时,若 R_1 发生变化,使电桥失去平衡,则有 $U_e \neq 0$ 输出,使表头产生某一读数,该读数则是电阻 R_1 的变化量的示值,即表头指针的偏转便指示出电阻的变化。这种方法在测量中称为偏值法。

上述电桥是在不平稳平衡条件下工作的,当电源电压不稳定,或者环境温度变化时,电桥都会有输出,从而造成测量误差。为了克服偏值法测量的不足,可采用图5-3所示电桥电路。工作原理是当被测量等于零,电桥处于平衡状态,此时指示仪表头 G 及可调电位器 W 指零。当某一桥臂随被测的量变化时,电桥失去平衡,仪表指针偏转。此时,可调整 W ,直到 W 的变化抵消了该桥臂的变化量,使电桥平衡,仪表指针回到零位。电位器 G 的标度与桥臂电阻值的变化成比例,这样 G 的指示值可以直接表达被测物理量的数值。这种桥路的特点是桥路输出始终为零,即仪表指零,所以此法称为“零测法”。

由于电桥最终输出为零,测量误差仅取决于可变电位器的精确度,而与电桥电源电压无

关,在一般的静态应变仪或X-Y记录仪中,以伺服电机来调整电位器的位置,实现自动调平衡。

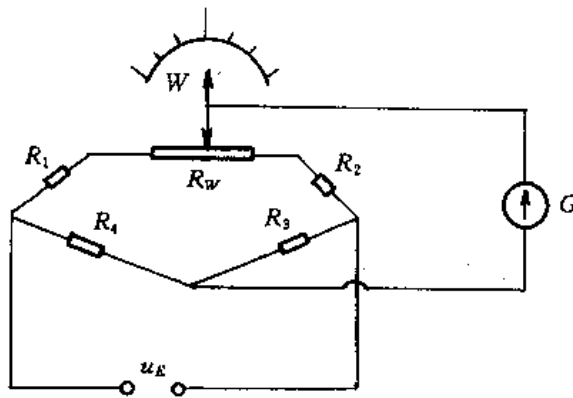


图5-3 平衡电桥

采用直流电桥,测量电路结构简单,仅需对纯电阻加以调整就可预调电桥平衡,电路可用直流电表测量,精度高,中间环节少。其连接导线要求低,不会引进分布参数。因此,直流电桥在实际应用中较广泛。直流电桥主要缺点是,对直流电源要求高,且容易引入工频干扰;另外在工程上进行动态试时 ΔR 是一随时间变化的信号。信号的频率从零开始直到几百赫兹。电桥的输出电压一般由一放大器放大后才可进一步推动后续仪器,要选用一个放大器适于如此宽的频带而保持增益是常值很困难,所以直流电桥通常用于作静态测量,而在作动态测量时需用交流电桥,将频率变化较大的信号,调制成频率相对变化较小的信号,移到放大器常值增益的频带上工作,其工作原理将在交流电桥中讨论。

图5-4 所示为一实际直流电桥电路。该电路有如下特点:

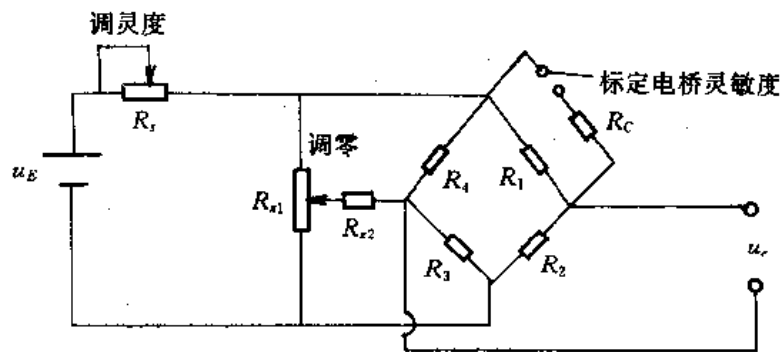


图5-4 可调灵敏度,可调电桥平衡和可标定灵敏度的电桥电路

1. 调节 R_s , 可改变输入电桥的电流大小, 从而可调节总灵敏度而不必改变 u_E 。

2. 当被测物理量为零时,调整电阻 R_{z1} ,将输出电压精确调零。

3. 可采用分流电阻 R_C ,来标定电桥的灵敏度。即

$$S = \frac{U_c}{\Delta R} (\text{V}/\Omega) \quad (5-24)$$

式中:

$$\Delta R = R_4 - \frac{R_4 R_C}{R_4 + R_C}$$

若 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 < 1000\Omega$ (通常为应变片式传感器中应变片阻值)

则选 $R_{z2} = 100R_1, R_{z1} = 25,000\Omega$

二、交流电桥

交流电桥如图5-5所示,其电路结构形式与直流电桥相同。激励电源是交流电压(电源频率一般是被测信号频率的十倍以上),交流电桥的桥臂可以是纯电阻,也可以是含有电容、电感的交流阻抗。

交流电桥的平衡条件,其推导过程与直流电桥基本相同,在此省略。仅就其相对于交流电桥的特点讨论如下:

交流电桥平衡条件为:

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \quad (5-25)$$

式中: $z = |z|e^{j\varphi}$, φ ——复数阻抗的阻抗角。

式(5-25)又可表示为:

$$|z_1|e^{j\varphi_1} \cdot |z_3|e^{j\varphi_3} = |z_2|e^{j\varphi_2} \cdot |z_4|e^{j\varphi_4} \quad (5-26)$$

对上式进行整理,得:

$$|z_1| \cdot |z_3|e^{j(\varphi_1+\varphi_3)} = |z_2| \cdot |z_4|e^{j(\varphi_2+\varphi_4)} \quad (5-27)$$

若式(5-27)成立,需同时满足下面两个条件:

$$|z_1| \cdot |z_3| = |z_2| \cdot |z_4| \quad (5-28)$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4 \quad (5-29)$$

式(5-28)、式(5-29)就是交流电桥的平衡条件,即电桥中,对边阻抗的模乘积相等,对边阻抗角之和相等。

由电工学知识,得:纯电阻元件的阻抗角 $\varphi=0$;

电容性元件的阻抗角 $\varphi<0$;

电感性元件的阻抗角 $\varphi>0$ 。

交流电桥中若有二相邻桥臂,如图2.2桥臂为纯电阻,有 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$,则式(5-29)可知,由

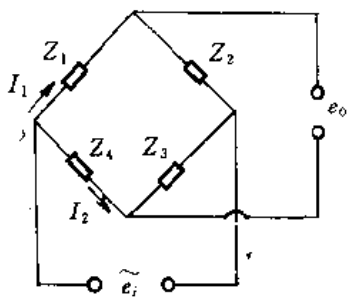


图5-5 交流电桥

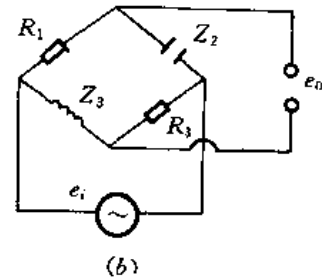
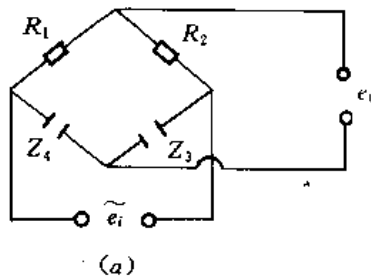


图5-6 交流电桥的平衡

交流电桥在工程测试中得到广泛应用,它不仅能测量动态信号,也能测静态信号。交流电桥的电源必须具有良好的电压波形和频率稳定度,一般采用(5~10kHz)作为电桥激励电源。这样,电桥输出将为被测信号的调制波,外界工频干扰不易从线路中引入,后接交流放大器电路易于实现且无零漂。但此调制信号还需解调、滤波后才能记录。因此,交流电桥的后续处理电路比直流电桥复杂得多。另外,由式(5-28)、式(5-29)可知,交流电桥除了电阻平衡外,还须有电容平衡,因此较之直流电桥,它的预调平衡电路较复杂。图5-7表示一种用于动态应变仪中的具有电阻、电容平衡的纯电阻电桥。

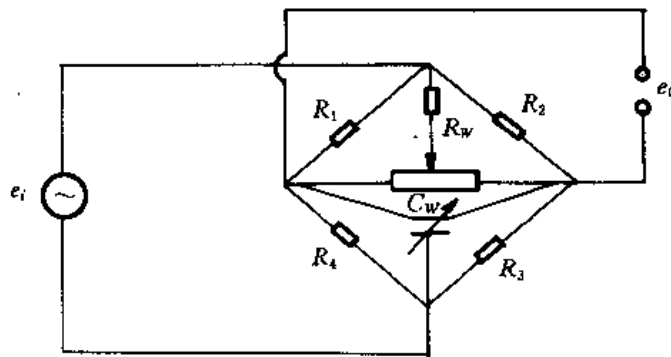


图5-7 具有电阻、电容平衡的交流电阻电桥

交流电桥可用于电抗型传感器,如电容或电感传感器,此时,电容或电感一般作成差动接入电桥的相邻臂,如图5-6(a)所示。为了进一步提高电路性能,在实际测量中,还常采用紧耦合电感电桥,就这类电桥的基本原理及特点介绍如下。

三、紧耦合电感电桥

紧耦合电感电桥常用于差动式电感和电容传感器。它是以差动形式工作的传感器的两个阻抗作电桥的工作臂。而紧耦合的两个电感作固定臂,其电桥电路如图5-8所示。

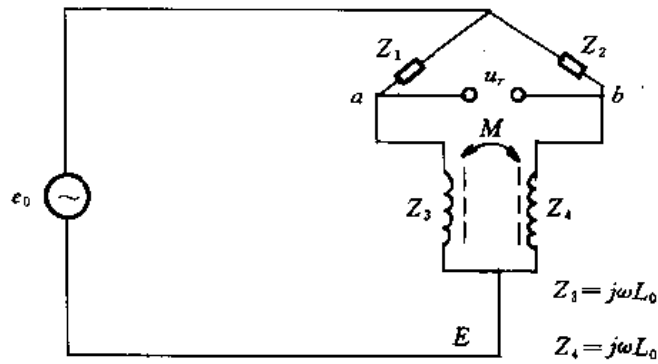


图5-8 紧耦合电感电桥

图中, Z_1 、 Z_2 为差动传感器的可变阻抗, Z_3 及 Z_4 为紧耦合的两个电感, 作为固定臂。

紧耦合电感可用 T 形等效电路表示, 见图[5-9(a)]所示, 则耦合电感电桥可用一般电桥来等效, 见图[5-9(b)]。

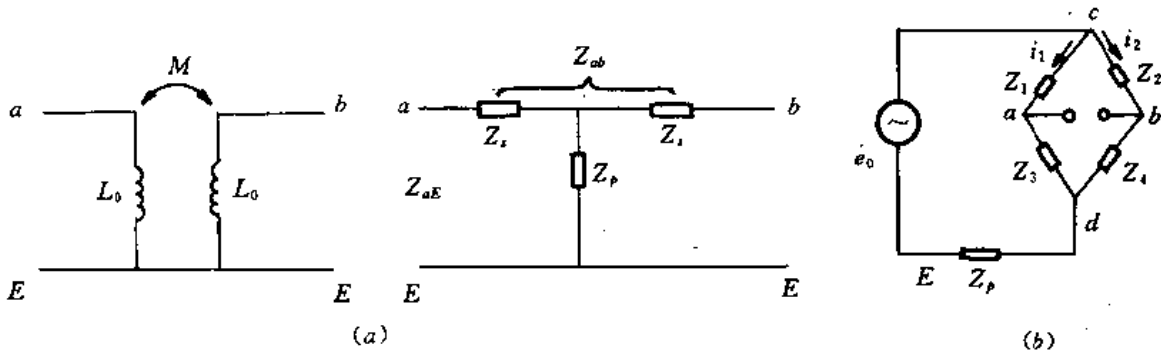


图5-9 紧耦合电感电桥等效电路

由 T 形变换可得:

$$Z_s = j\omega(L_0 - M) \quad (5-30)$$

$$Z_p = j\omega M \quad (5-31)$$

$$Z_{aE} = Z_s + Z_p = j\omega(L_0 - M) + j\omega M = j\omega L_0 \quad (5-32)$$

$$Z_{ab} = 2Z_s = 2j\omega(L_0 - M) = 2j\omega(1 - M/L_0) \cdot L_0 \quad (5-33)$$

设耦合系数为 $K = \pm \frac{M}{L_0}$

当两电感内电流同时流向节点 E 或流出节点 E 时, K 取正值; 反之取负值。

$$Z_{ab} = Z_{aE} - Z_p = j\omega L_0 - j\omega M = j\omega L_0 \left(1 - \frac{M}{L_0}\right) = j\omega L_0(1 - k) = Z_{aE}(1 - k) \quad (5-34)$$

电桥平衡时有 $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$, 所以 $Z_1 = Z_2$ 。设 $Z_1 = Z_2 = Z$, 两个耦合桥臂的支路电流 $i_1 = i_2$,

大小相等,方向相同。在紧耦合时, $K=1$,由式(5-34)得 $Z_s=0$ 。

$$\text{所以} \quad Z_{ab} = 2Z_s = 0 \quad (5-35)$$

由式(5-35)可知, a, b 两端短路,所以任何并联在 a, b 两端的分布电容被短路了。

当电桥工作时, $z_1 = z + \Delta z$, $z_2 = z - \Delta z$

$$e_y = U_{bd} - U_{ad} = \frac{z_s}{z - \Delta z + z_s} U_{cd} - \frac{z}{z + \Delta z + z_s} U_{cd} \quad (5-36)$$

$$\text{又} \quad U_{cd} = \frac{e_0 \cdot Z_{cd}}{Z_{cd} + Z_p}$$

$$\text{其中} \quad Z_{cd} = \frac{(Z + \Delta Z + Z_s)(Z - \Delta Z + Z_s)}{Z + \Delta Z + Z_s + Z - \Delta Z + Z_s}$$

忽略 $(\Delta Z)^2$ 项,得: $Z_{cd} = \frac{Z + Z_s}{2}$

所以 $U_{cd} = \frac{Z + Z_s}{Z + Z_s + 2Z_p} \cdot e_0$ 代入式(5-36)得:

$$e_y = \left(\frac{z_s}{z - \Delta z + z_s} - \frac{z}{z + \Delta z + z_s} \right) \cdot \frac{Z + Z_s}{Z + Z_s + 2Z_p} \cdot e_0 \approx \frac{2Z_s \Delta Z}{Z + Z_s + 2Z_p} \cdot e_0 \quad (5-37)$$

式(5-37)中: $z = j\omega L$ $\Delta z = j\omega \Delta L$

工作时,差动电感传感器的变化为:

$$L_1 = L + \Delta L$$

$$L_2 = L - \Delta L$$

此时桥臂上的电流发生变化, L_1 所在支路电流减小, L_2 所在支路电流增加。这等同于一个电流 ΔI 由 b 端经 E 端流向 d 端,所以耦合臂的电流不同时流向或离开节点 E ,耦合系统 $k = -1$,故:

$$Z_{ab} = 2Z_s = 2Z_{aE}(1 - k) = 4Z_{aE} = 4j\omega L_0$$

$$Z_{aE} = \frac{4j\omega L_0}{2(1 - k)} = j\omega L_0$$

$$Z_p = Z_{aE} - Z_s = j\omega L_0 - 2j\omega L_0 = -j\omega L_0$$

将 $Z, \Delta Z, Z_s, Z_p$ 代入式(5-37)得:

$$e_y = \frac{4 \frac{\Delta L_0}{L}}{1 + \frac{L_0}{L}} \cdot e_0 \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (5-38)$$

通常 $L_0 \gg L$,上式变为

$$e_y = 4e_0 \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (5-39)$$

根据分析,非耦合电感电桥的输出电压为

$$e_y = \frac{2 \frac{\Delta L}{L}}{(1 + \frac{L_0}{L})^2} \cdot e_0 \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (5-40)$$

因 $L_0 \gg L$ 由式(5-40)得:

$$e_y = 2e_0 \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (5-41)$$

由式(5-40)和式(5-41)作出图5-10 所示曲线。

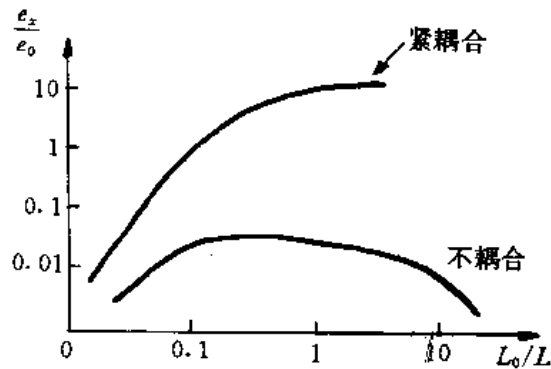


图5-10 灵敏度曲线

综上所述,该紧耦合电桥的优点为:

1. 与电感臂并联的任何分布电容对电桥平衡时输出无影响,电桥平衡稳定,简化了桥路接地和屏蔽的问题,改善了电桥的零位稳定性。
2. 提高了电桥的灵敏度。
3. 当 L_0/L 超过一定值时,灵敏度与桥臂电感的变化无关,从而增加了电桥的稳定性。

第三节 调制与解调

对于直流电桥,输出信号是与被测量直接对应的信号,称为非调制信号,它不需解调,电路简单,但抗干扰性能差。为了提高测试系统选择信号、排除干扰的能力,尽可能减小各种干扰的影响,希望在形成测量信号同时就对它进行调制,因此常常在传感器中实现调制。例如,图5-5中,利用载波信号对传感器供电,实现了信号调制。在电容、互感、感应同步器和磁栅式传感器中均采用了类似的方法实现信号调制。

一、基本概念

调制:用一个低频信号对一高频信号的某一参数进行控制。通常称低频信号为调制波,高频信号为载波或称为被调制信号,而调制出来的信号为已调制波。所以调制过程就是高频载波的某一个参数随低频调制波的规律而变化的过程。载波若用一高频正(余)弦波,则可调制的参数可以是幅值、频率和相位,从而可形成幅值调制、频率调制和相位调制等三种调制形式。载波若用高频周期方波脉冲,则又可能有脉宽调制和脉冲位置调制等类型的调制形式。

解调:从已调制信号中提取或恢复原有的低频调制信号。

解调是调制的逆过程。调制与解调技术在工程测试技术中得到广泛应用。

二、幅值调制

调幅就是用调制信号 x (这里是被测量)去控高频振荡的振幅,使高频振荡的振幅按调制信号的规律变化,如图5-11所示。

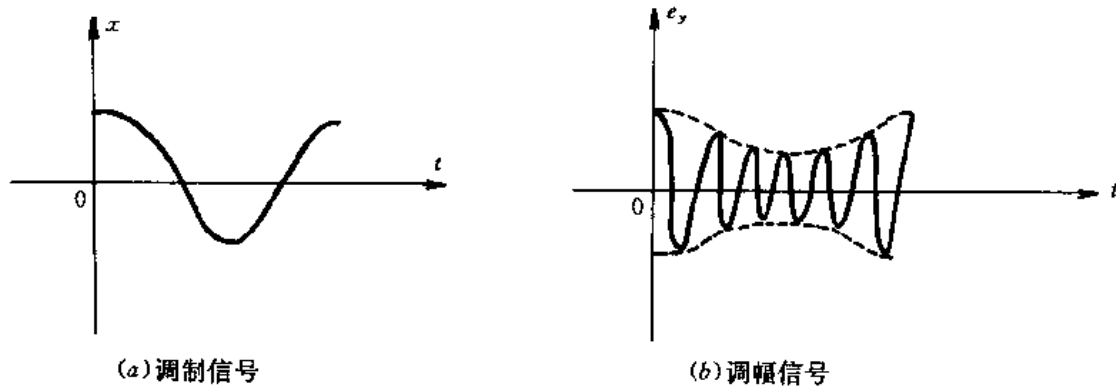


图5-11 调幅的信号

由图5-11可知,实现幅值调制就是实现调制波与载波之间在时域内的乘法运算。

调幅波的表达式:

$$e_y = (U_m + mx)\cos\omega_c t \quad (5-42)$$

式中: ω_c ——载波及信号角频率;

U_m ——零点时的输出值;

m ——调制灵敏度。

当测量信号(调制信号)为 $x = x_m \cos\Omega t$ 时,式(5-42)变为:

$$\begin{aligned} e_y &= U_m \cos\omega_c t + mx_m \cos\Omega t \cdot \cos\omega_c t \\ &= U_m \cos\omega_c t + \frac{mx_m}{2} \cos(\omega_c + \Omega)t + \frac{mx_m}{2} \cos(\omega_c - \Omega)t \end{aligned} \quad (5-43)$$

上式中有三个不同频率的成份,第一项 $U_m \cos\omega_c t$ 不含信息成份,二、三两项即 $\frac{mx_m}{2} \cos(\omega_c \pm \Omega)t$ 含有用信息,通常称为上、下边带。

在实际的测试系统中,都有预调平衡装置,使在测试系统在工作零点时输出为零,即式(5-43)中, $U_m = 0$ 。此时,式(5-43)变为:

$$\begin{aligned} e_y &= m \cdot x(\Omega) \cos\omega_c t \\ &= mx_m \cos\Omega t \cdot \cos\omega_c t \\ &= \frac{mx_m}{2} \cos(\omega_c + \Omega)t + \frac{mx_m}{2} \cos(\omega_c - \Omega)t \\ &= \frac{k}{2} \cos(\omega_c + \Omega)t + \frac{k}{2} \cos(\omega_c - \Omega)t \end{aligned} \quad (5-44)$$

式中: $k = mx_m$

式(5-44)说明,调幅波信号中只含两个边频信号,这种调制常称为双边带调制。

根据 X 、 $\cos\omega_c t$ 、 e_y ,绘出三者的频谱,如图5-12所示。由图可见, x 的频谱在 Ω 处,载波频率在 ω_c 处,而 e_y 的频率则是在以 ω_c 为中心加减 ω 处的两条谱线,而其幅值则是载波幅值乘积之半。所以幅值调制过程在时域是调制波与载波相乘的过程;而在频域则是将调制波的频谱(以坐标原点为中心)搬移到以载波频谱为中心处,所以是一频移过程。这一点是幅值调制得到广泛应用的最重要的理论依据。

图5-5中所示的交流电桥就是利用载波信号供电,对测量信号实现相乘调制。若图中为纯电阻电桥,其阻值经预调后,达到平衡。如果单臂阻值变化使电桥失衡,由式(5-15)可得,输出电压为:

$$e_y = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta R}{R_0} \cdot e_0$$

若激励电压为高频余弦变化, $e_0 = E_0 \cos\omega_c t$,有:

$$e_y = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta R}{R_0} \cdot E_0 \cos\omega_c t \quad (5-45)$$

ΔR 发生变化, e_y 将作如下变化:

1. 若 ΔR 是一常值(即交流电桥作静态测量),设 $\Delta R = K$,式(5-45)变为:

$$e_y = \frac{1}{4} \cdot \frac{k}{R_0} \cdot E_0 \cos\omega_c t = C \cdot e_0 \quad (5-46)$$

式中 $C = \frac{k}{4R_0}$,电桥输出 e_y 与 e_0 仅有一倍数之差,当 $\Delta R > 0$, e_y 与 e_0 同相,见图5-13中实线;当 $\Delta R < 0$,则 e_y 与 e_0 反相,见图5-13中虚线。

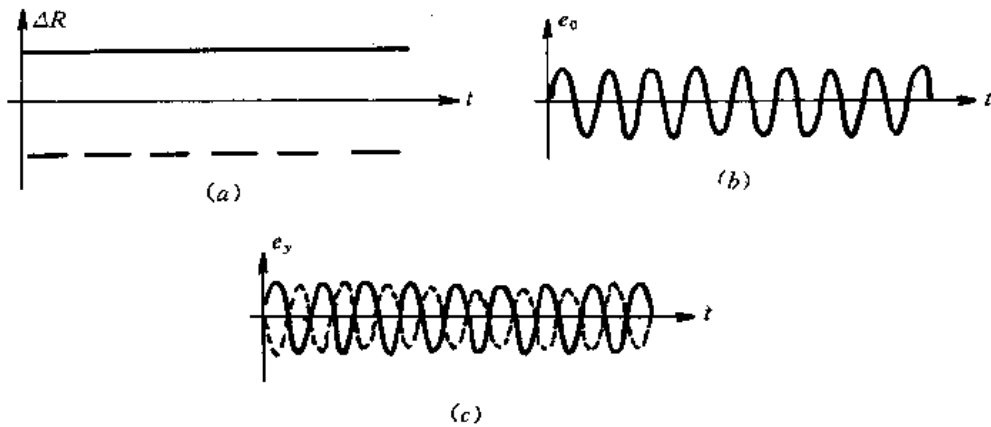


图5-13 常值调幅

2. 若 ΔR 是一个高频的余弦变化量, $\Delta R = R_1 \cos\Omega t$ 时,则输出信号为

$$e_y = \frac{1}{4} \cdot \frac{R_1}{R_0} \cos\Omega t \cdot E_0 \cos\omega_c t \quad (5-47)$$

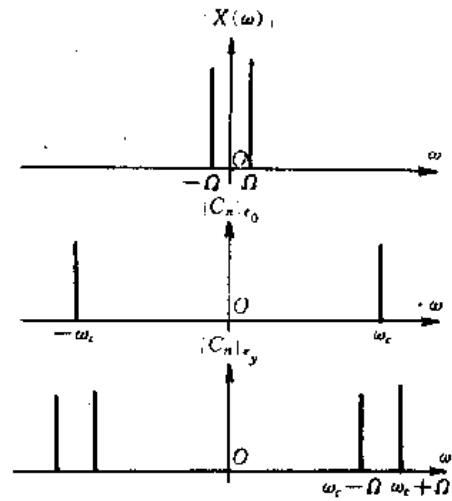


图5-12 幅值调制频谱

令 $\frac{1}{4} \cdot \frac{R_1}{R_0} E_0 = C$, 则

$$e_y = C \cdot \cos \Omega t \cdot \cos \omega_c t \quad (5-48)$$

式(5-48)与式(5-44)相同,因此电桥输出为调幅波。其波形如图5-14所示。

值得注意的是,当调制波为正时,则调幅波与载波同相;当调制波为负时,则调幅波与载波反相,即可视为有 180° 的相移。根据这一特性,可制成相敏检波电路。

除了交流电桥能提供信号调幅信号,许多由电容、电感的特性决定的这类传感器输出亦为调幅信号以外,还采用下述方法产生调幅信号。

- ①乘法电路完成
- ②含开关元件的相加电路

三、幅值的解调

幅值的解调过程是将已调制波恢复为原调制波的过程。实现这一过程有如下几种主要方法。

1. 同频解调

由式(5-44)有调幅波 $e_y(t)$, $e_y(t) = x(t) \cos \omega_c t$ 上式两端同乘以 $\cos \omega_c t$ 有

$$e_y(t) \cos \omega_c t = x(t) \cos^2 \omega_c t$$

由三角公式得:

$$x_m(t) \cos^2 \omega_c t = x(t) \cdot \frac{1 + \cos 2\omega_c t}{2} = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos 2\omega_c t \quad (5-49)$$

由式(5-49)可知,调幅波信号再乘以载波信号,所得信号中包含了原调制波信号 $x(t)$ 和高频信号 $x(t) \cdot \cos 2\omega_c t$ 两部份,再采用适当的技术手段将后者滤除,则留下的就是所需恢复的原调制波了。上述过程可用图5-15表示。

2. 检波解调

检波解调全过程如图5-16所示。在进行幅值调制前,先将调制波叠加一个直流分量 U_m ,使偏置后的信号具有正电压,如图5-16(b)所示。然后再与高频载波相乘得已调制波,见图5-16(c)所示,此调幅波表达式为:

$$e_y(t) = [U_m + x(t)] \cos \omega_c t$$

或

$$e_y(t) = U_m [1 + mx(t)] \cos \omega_c t$$

式中 $m \leq 1$,称为调制系数。在解调时,只需对调幅波作整流和检波,最后再进行隔直处理,去除直流偏置(参见图(d)、(e)及(f)),就可恢复原调制波 $x(t)$ 。

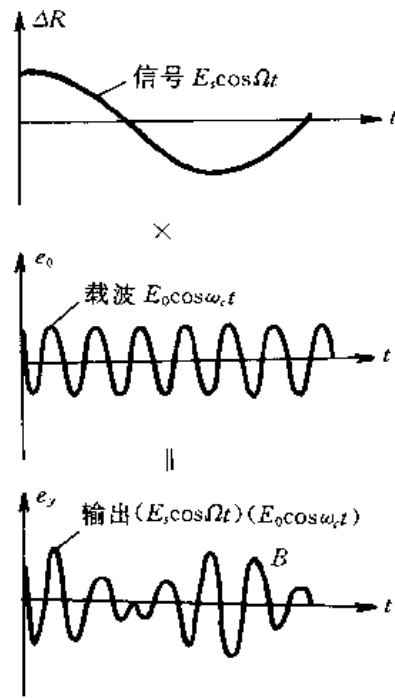


图5-14 调幅信号的时域波形

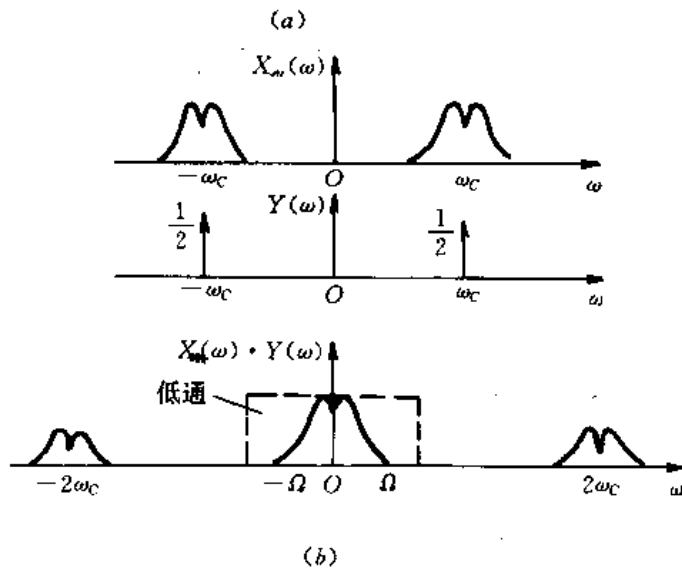
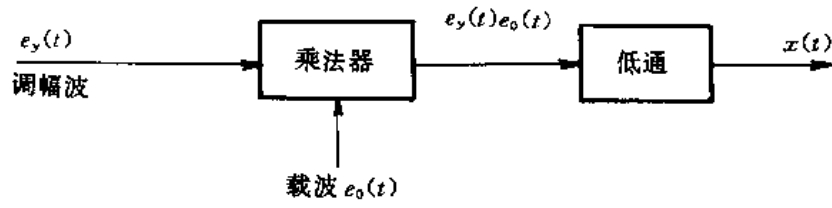


图5-15 同步解调

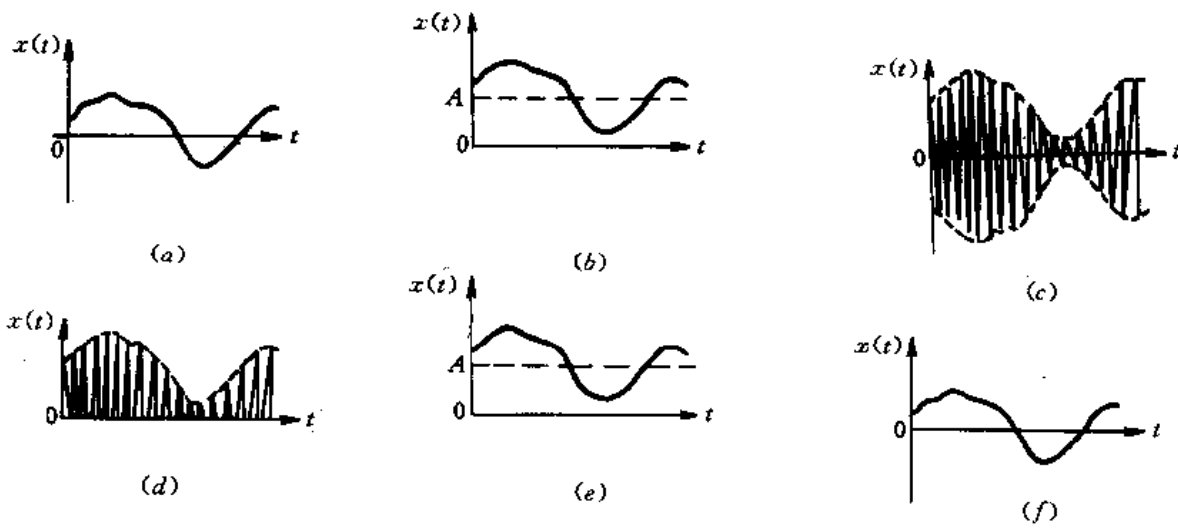


图5-16 检波整流调制

值得注意的是,许多传感器输出都带有直流分量,解调后得到的交流与直流分量,可分别有不同的含义,例如在振动测量中,直流分量对应于振动中心位置,而交变成份反映振动的频率与幅值。因此,不一定对解调后的信号都要进行隔直处理。图5-17所示电路为包络检波电路。

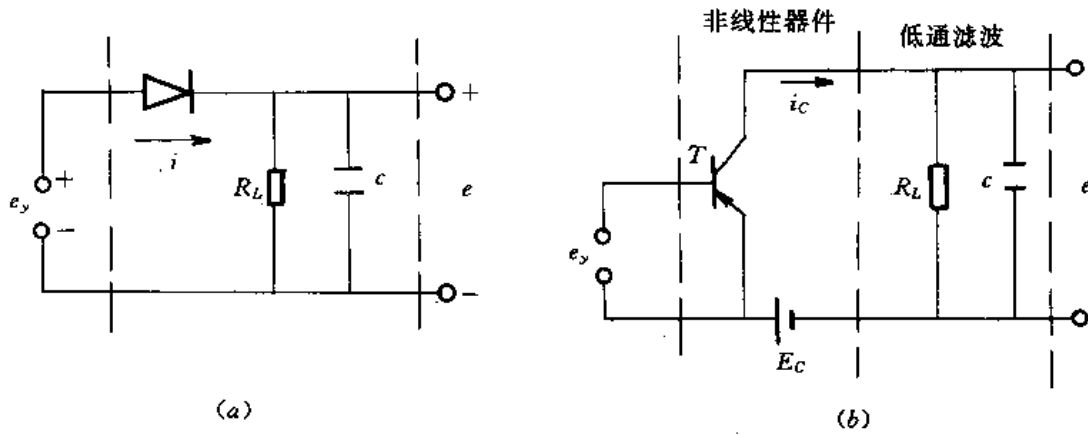


图5-17 包络检波电路

图5-17是两种包络检波电路。图(a)采用二极管 D 作为整流用非线性元件,调幅波只用二极管单向导电性能截去其下半部,然后用滤波器滤去其高频成份,剩下按已调波包络线变化的低频成份,就可恢复调制信号,这种检波,称之为峰值检波。图(b)所示晶体管检波器与图(a)所示电路的第一个区别是晶体管有放大作用。其次是在晶体管检波电路中,集电电压的变化对集电极电流 i_c 影响小,因此 i_c 基本上由 e_y 确定,而与 $R_L C$ 上的输出电压 e 无关。由于晶体管 T 只在半个周期导通,对电容 C 充电,另半个周期电容向电阻 R_L 放电,流过 R_L 的平均电流只有 $i_c/2$,这种检波电路称为平均值检波,其输出波形如图5-18(c)所示。

上述的解调方法虽可恢复原调制波的波形,但对原波形正负变化部份却难以精确恢复,为解决这一问题,通常采用下面的一种方法。

3. 相敏解调

在机械量的测量中,常采用双边调制,即表达式为式(5-44)。由上述讨论可知,当调制信号改变符号时,调幅波相位改变 180° 。解调电路应能鉴别这一相位变化,这种解调电路称为相敏检波电路。

如果将式(5-44)的双边带调幅信号再乘以单位幅度的载波信号 $\cos\omega_c t$,得到:

$$e_d = K\cos\Omega t \cdot \cos^2\omega_c t = \frac{1}{2}K\cos\Omega t + \frac{1}{2}K\cos\Omega t \cdot \cos 2\omega_c t \quad (5-50)$$

用低通滤波器滤除高频分量后,即可得到被测信号 $\frac{1}{2}K\cos\Omega t$ 。由此可见,相敏检波与幅值调制一样,可用相乘电路来实现,也可用含开关元件(非线性元件)来实现,其作用实质均

是乘以 $\cos\omega_c t$ 。

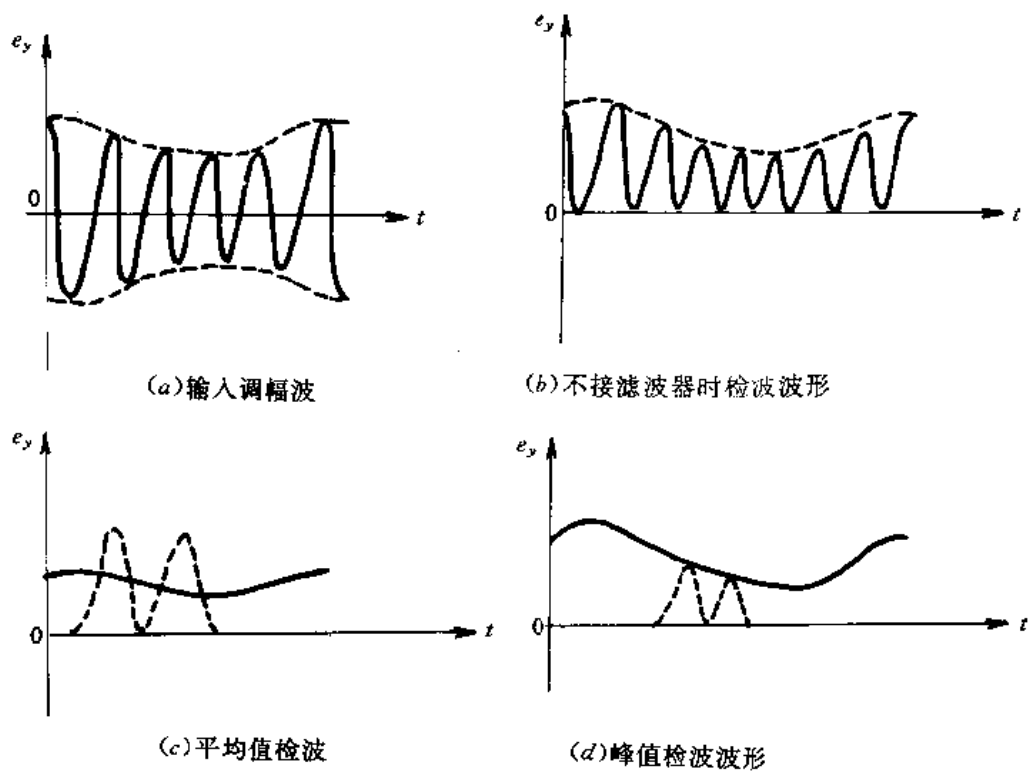


图5-18 包络检波中各点波形

(1) 全波相敏检波电路

图5-19 是实现相敏解调的环形相敏检波电路原理图。四个特性一致的晶体二极管组成一个桥式电路，各桥臂上的附加电阻可将此电桥预调平衡，桥路的两对角线通过两个变压器分别输入上述的调制中的已调制波(调幅波) e_y 和参考电压 U (与载波同相、同频)。

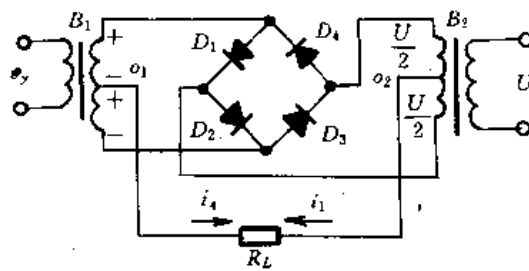


图5-19 环形相敏检波器

在图中标注的极性下，加在 D_1 上反向电压最小，它等于 $U/2 - U_0 - e_y/2$ ，为了保证 D_1 可靠截止，要求：

$$U/2 > (1 + \frac{R_L}{R_0/2 + R_L}) \cdot e_y/2$$

常取:

$$U > 2e_y \quad (5-51)$$

图中 O_1 、 O_2 分别为二变压器的中心抽头, R_L 为负载电阻,它与 C 并联形成低通滤波器。二极管两端加上正向电压时导通,反向电压时就截止。

当 ΔR 为正极性时($\Delta R > 0$), e_y 与 U 同相。由线路图中可鉴别出, D_1 和 D_4 导通, D_2 和 D_3 截止,电路可简化成图5-20(a),此时电路中的电流可由两个回路流动,一是沿 $C \rightarrow D_4 \rightarrow a \rightarrow O_1 \rightarrow R_L \rightarrow O_2 \rightarrow$ 。回路流动的电流 i_4 ,在此回路中起作用电势是 $(U/2 - e_y/2)$;另一是沿 $O_2 \rightarrow R_L \rightarrow O_1 \rightarrow a \rightarrow D_1 \rightarrow d$ 回路流动电流 i_1 ,在此回路中起作用电势是 $(U/2 + e_y/2)$ 。这两路电流在负载 R_L 上的方向是相反的,其最终表现结果是数值大的电势引起的电流占优势,即 R_L 上流过电流为 $(i_1 - i_4)$ 。

当 e_y 与 U 同为负半周时(同相),先鉴别出二极管 D_3 与 D_2 两者处于导通状态,也可分析出 R_L 上的总电流与上述情况完全相同,见图5-20(b)。

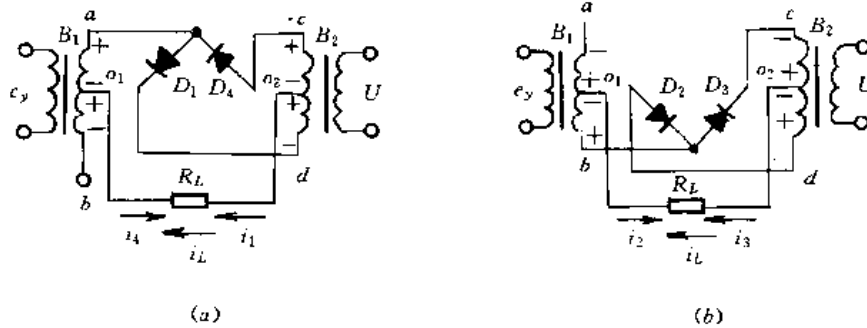


图5-20 环形相敏检波工作原理图

当 ΔR 为负极性时($\Delta R < 0$), U 与 e_y 反相,无论是此正彼负或是此负彼正的情况时,流过 R_L 总电流均与前两种情况相反。这样如在 R_L 两端取电压输出,其波形如图5-21所示,即经 $R-C$ 低通滤波后,得到与原来调制波 ΔR 的幅值、正负完全一致的波形。

在环形相敏检波器中,引入电阻 $R_1 \sim R_4$,可以减小二极管内阻 r 变化的影响;通过调节 $R_1 \sim R_4$ 参数,可以补偿电桥的不对称的影响;通过适当选择 $R_1 \sim R_4$ 的值,可使二极管工作在线性段。常取 $R = (0.7 \sim 2)R_L$ 。

(2) 集成电路相敏检波器

电路的小型化、集成化发展趋势要求少用变压器。下面介绍一种集成电路相敏检波器。图5-22为一实际相敏检波器的电路原理图。

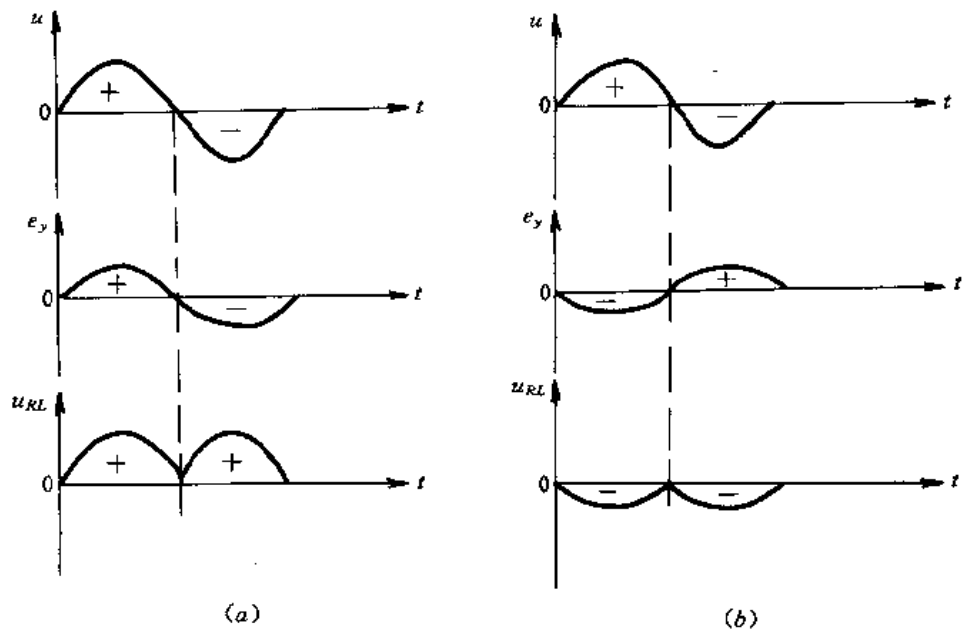


图5-21 相敏检波器的鉴相与选频特性

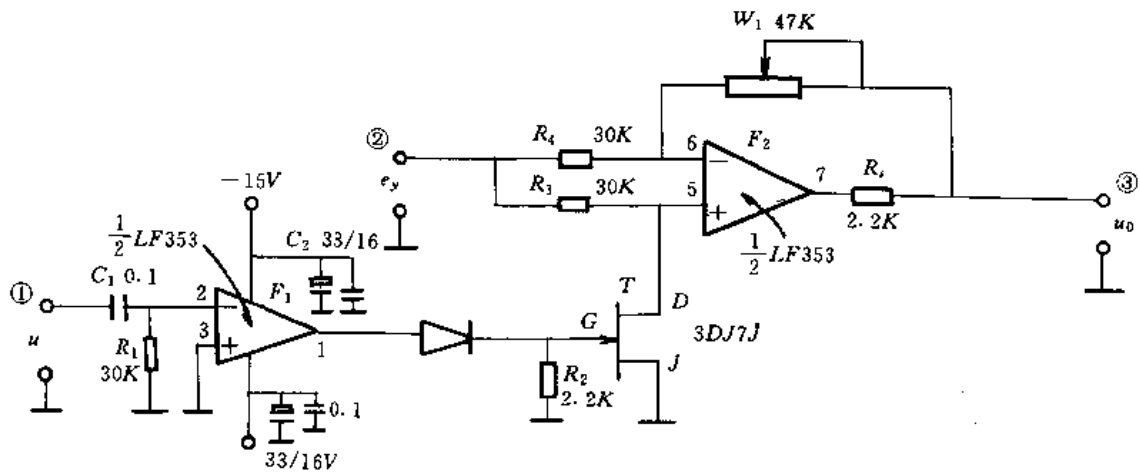


图5-22 集成电路相敏检波电路

图中,在 U 的正半周期,经放大器反相放大后,输出端1为负电压输出,则有电流经过 R_2 至 D, T 截止。 e_y 同时从同相和反相输入端输入,放大倍数为+1, U 与 e_y 同相,如图5-23(a)所示。在 U 的负半周期,经放大器输出后,输出端1为正电压,此时靠二极管正向电压,使 T 导通,此时放大器 F_2 的同相输入端被接地, e_y 只从反相输入端输入,放大器的放大倍数为负值,输出信号 U_0 。如图5-23(a)所示。

当 U 与 e_y 反相时,分析同上,其输出结果为图5-23(b)所示。

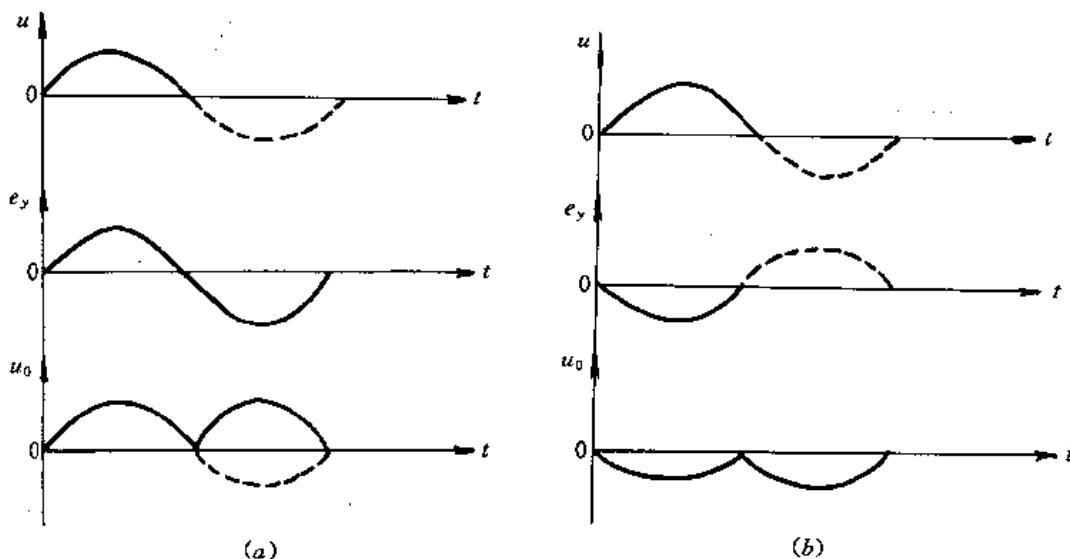


图5-23 相敏检波器输出波形

由图5-23可知,此电路同环型相敏检波电路一样,具有相敏检波作用。

信号的调制与解调对提高信噪比的作用表现在两个方面。一方面信号经过调制后,可以用通带很窄的选频放大器进行放大,用以抑制噪声。另一方面,在解调过程中,利用相敏检波器的选频特性,又能进一步抑制噪声的影响,有利于提高信噪比,提高测量精度。因此,这种技术在工程技术上得到广泛应用。动态应变仪就是利用交流电桥作调幅,又利用相敏检波作解调的典型实例,现介绍如下:

图5-24所示是国产 Y_{60} 型动态应变仪的原理方框图,振荡器产生的高频等幅正弦信号作为电桥的激励,即载波信号;同时,该激励源信号又输入相敏解调电路,作参考信号;工程构件需测的应变是以贴在构件上的应变片来测量,应变片电阻变化 ΔR 反映了构件上的应变 ϵ 的变化,将电阻应变片作为交流电桥的一个桥臂接入电桥,在没有应变时预调电桥平衡,一旦有应变时,桥臂电阻变化,使电桥失衡,产生电压,这一输出电压是电阻变化(也就是应变变化)对高频载波作幅值调制后的已调波。已调波经交流放大器进行幅值放大,然后送入相敏检波解调器与滤波器,就可将已调波恢复成原来的调制波(ΔR)的波形。最后送至记录器将波形记录下来,所记录的波形反映了调制波(ΔR)的情况,也就是反映了构件应变变化的情况,包括应变的大小和正负都能准确无误地体现出来。

四、频率调制与解调

1. 调频原理与方法

调频是用低频调制信号去控制高频载波的频率变化。其波形如图5-25所示。

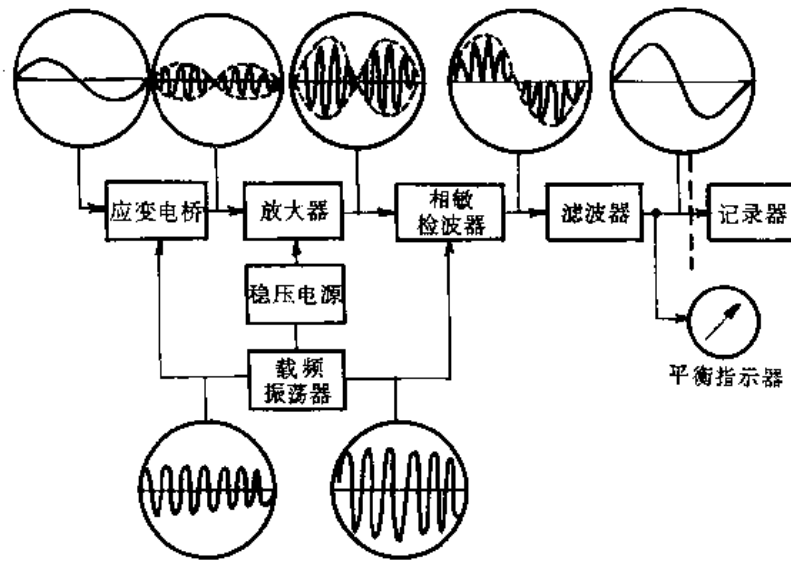


图5-24 动态应变仪原理方框图

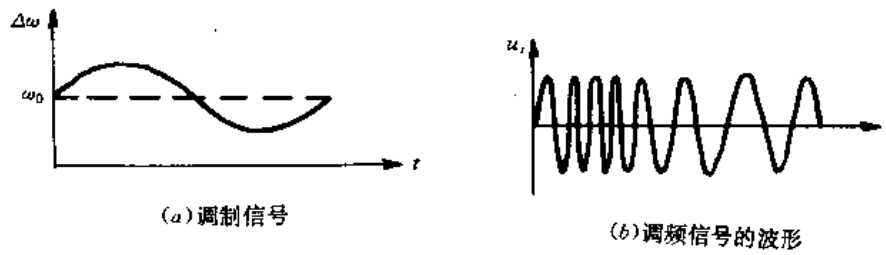


图5-25 调频信号的波形

已调频信号具有较强的抗干扰能力。调频信号的数学表达式为：

$$U_s = U_m \cos(\omega_c + mx)t \quad (5-52)$$

式中： U_m 、 ω_c ——分别为载波信号的幅值与角频率；

m ——调制灵敏度；

x ——被测量信号(调制信号)。

许多传感器输出信号就是调频信号。图5-26所示是测量力或压力的振弦式传感器。振弦3的一端与支承4相连，另一端与膜片1相连接，振弦3的固有频率随张力 T 变化。振弦3在磁场内振动时产生感应电势，其输出信号为调频信号。

如果把电感传感器的线圈或电容接入振荡器内，那么振荡器输出调频信号。因此，在工程测试系统中常用的调频方法有：

(1)直接调频法

被测参数的变化直接引起传感器输出信号频率的改变。图5-26所示振弦式传感器就是采用这种方法。

(2) 参数调频法

其基本原理是首先将被测参数转换为传感器的参数,例如 L 、 R 、 C 的变化。传感器的线圈、电容或电阻接在一定的振荡回路中。这样被测参数的变化就会引起振荡器振荡频率的变化而输出调频信号。振荡器可采用 LC 振荡、 RC 振荡、多谐振荡等。

图5-27是将传感器电容 C_s 的变化转换为频率变化的调频电路。它是一个电容三点式振荡器。通常 $C_1 \gg C_s$ 、 $C_2 \gg C_s$,其振荡频率是:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_s}} \quad (5-53)$$

它随传感器的电容量的改变而变化。在测试被测物理量时,传感器的电容就有一个随被测物理量变化的附加电容变化 ΔC ,所以在回路中的电容就变为 $C_s + \Delta C$,此时回路中的振荡器频率为:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L(C_s + \Delta C)}} \quad (5-54)$$

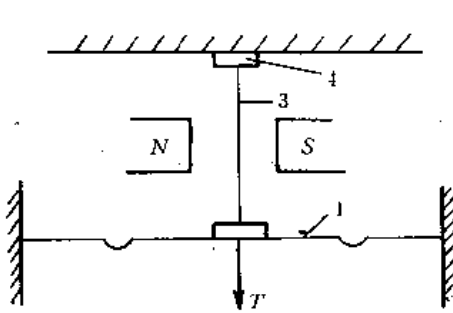


图5-26 振弦式传感器

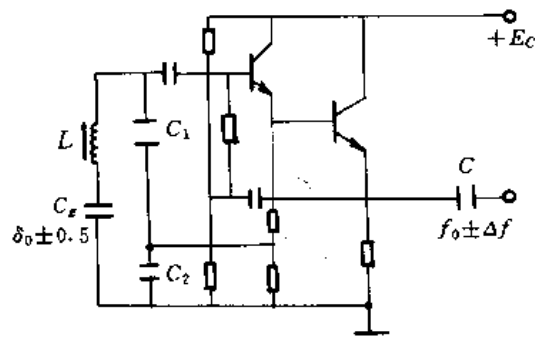


图5-27 电容式调频电路

将此公式进一步变化

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_s(1 + \frac{\Delta C}{C_s})}} = \frac{1}{\sqrt{LC_s} \sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C_s}}} = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C_s}}} \quad (5-55)$$

式(5-55)中 $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C_s}}}$ 用级数展开,并忽略高阶项得: $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C_s}}} = 1 - \frac{\Delta C}{2C_s}$

代入式(5-55)中得:

$$\omega = \omega_0(1 - \frac{\Delta C}{2C_s}) = \omega_0 - \Delta\omega \quad (5-56)$$

式中:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta C}{2C_0}\omega_n$$

此公式物理含义是当被测物理量变化引起振荡回路中电容变化时,振荡回路的角频率由原来的 ω_n 叠加了一个频率偏移量 $\Delta\omega$,此频率偏移量随 ΔC ,即被测物理量而变化。所以振荡回路角频率受控于被测物理量,这一过程就是调频过程。图5-28 所示上述电容的调频过程。图中 ΔC 的变化代表了被测物理量的变化,从而导致了振荡回路中 ω 的变化。即在 ω_n 的基础上增减 $\Delta\omega$,当 $\Delta\omega$ 为正时,因 $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ 而使振荡频率下降;当 $\Delta\omega$ 为负时,使振荡频率提高。在图中就是振荡波的疏密变化。振荡波变稀疏,表示振荡频率下降;变密则表示振荡频率的提高。图5-28 表示了调频波的时域波形。

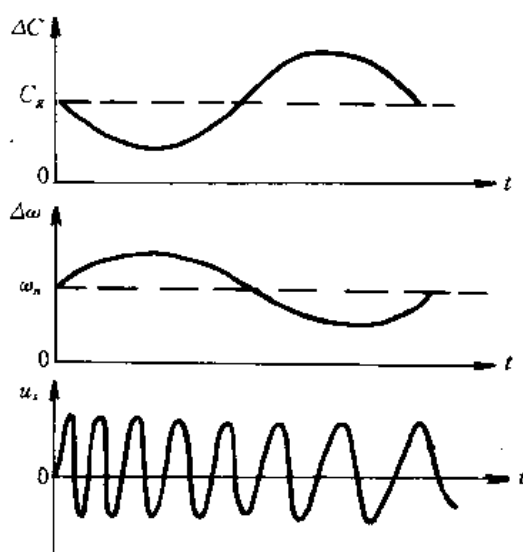


图5-28 频率调制波

图5-27 所示电路可以将传感器电容的变化转换为频率变化,也可以将传感器的电感变化转为频率变化,同理也分析出对于电感作为变化量的调频输出。

$$\omega = \omega_n \left(1 - \frac{\Delta L}{L_g}\right) = \omega_n - \Delta\omega \quad (5-57)$$

式中:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta L}{2L_g}\omega_n$$

L_x ——为电感传感器的初始电感;

ΔL ——为电感传感器的电感变化。

所以通过图5-27 所示电路,也可实现电感的变化得到调频输出。

值得注意的是,当被测参数本身就是频率,例如振动频率时,测量输出信号不一定是调频信号。例如,在利用电容传感器测量振动时,其输出信号的形式由所用转换电路决定。在采用差动式、电桥或运放式转换电路情况下,输出为图5-16(c)所示双边调幅信号。经相敏检

波后检出的解调信号如图5-16(f)所示。解调信号的频率变化代表振动频率。

2. 解调电路

频率调制后的解调电路称为鉴频器,其作用是将已调频波的频率变化转成电压的变化,恢复出原被测信号的波形。常用的鉴频电路有以下几类。

(1) 微分鉴频

由式(5-52),调频信号表达式为 $U_s = U_m \cos(\omega_c + mx)t$

对上式取时间导数可得:

$$\frac{dU_s}{dt} = -U_m(\omega_c + mx) \cdot \sin(\omega_c + mx)t \quad (5-58)$$

式(5-58)表示一个调频调幅信号利用包络检波器检出它的幅值变化,即获得信号 $U_m(\omega_c + mx)$,再通过零点和灵敏度的标定就可进一步获得所需示值 x 。

图5-29 为一级分鉴频电路的基本原理。电容 C_D 与晶体管 T 的发射结正向电阻 r_e 组成微分电路,微分电流 $i_s = C \frac{dU_s}{dt}$,为了实现正确的微分, C_D 不能太大,要求 $C_D \ll \frac{1}{\omega_c r_e}$ 。二极管 D 一方面给晶体管提供直流偏压;另一方面为 C_D 提供放电回路。电容 C 作用是滤除高频信号。

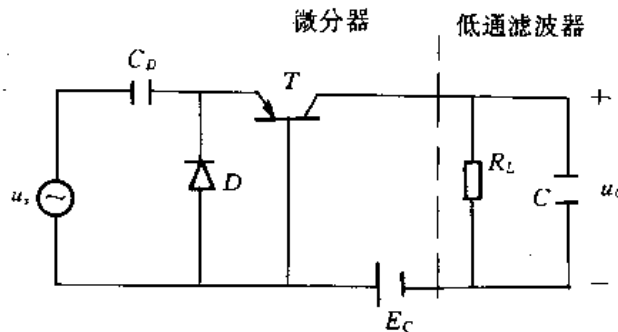


图5-29 微分鉴频电路

(2) 谐振回路鉴频器

LC 线性谐振回路(如图5-30(a)所示)对不同频率的输入信号都具有不同的传输特性,即回路具有图5-30(b)所示幅频特性 $K(\omega)$ 。调频信号 U_s 经过这一网络输出调频调幅信号 U'_s ,如图5-30(c)所示,再经过包络检波就可以检出所需的调制信号。调频波的中心频率 ω_c (即载波频率)设置在位于幅频特性线性段 AB 的中点 O 。因为 ω_c 不在 LC 回路的谐振点上,所以这种鉴频器称为失谐回路鉴频器。其电路原理图如图5-31 所示。

该鉴频器分为两部分,一部分为频率线性变换部份,它的作用是把调频信号变换为调频调幅信号;另一部分是幅值检波部份,它是最常见的整流滤波部份,它将调频幅值波变换成含有被测信息 x 的电压变换波形。该电路的缺点是线性范围较窄。为了改善其线性特性,可以采用双头谐回路鉴频器。

调频技术的主要优点在于信号经调频后具有抗干扰能力强、便于远距传输、不易错乱、跌落和失真等。调频信号很容易转化为脉冲信号与计算机相连。

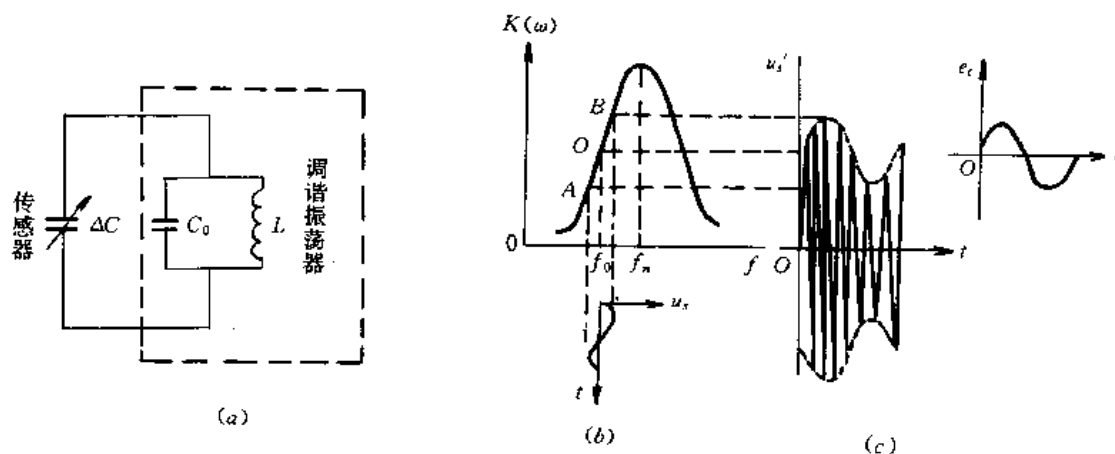


图5-30 谐振振幅鉴频器

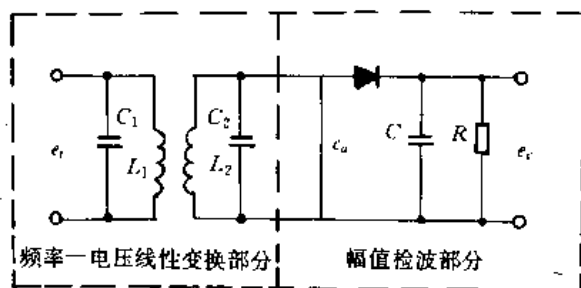


图5-31 失谐回路鉴频器

第四节 运算放大器

运算放大器是使用最广的模拟电子器件。它是仪器放大器、滤波器，以及混合型模拟和数字式数据处理设备的基本单元。对测试技术中所应用放大器的要求是应对输入环节的正常工工作没有干扰；放大器的工作应不受所接负载的影响；最重要的是应当在需要的工作频带内符合不失真测试条件。

一、理想运算放大器及其主要特性

典型的运算放大器如图5-32所示。图中， e_A 和 e_B 为输入电压。 i_A 和 i_B 称为偏置电流， Z_D 为差动输入阻抗， A 为开环增益(放大倍数)， Z_0 为输出阻抗， V_{OS} 为失调电压，而 $\pm V_S$ 则为电

源电压。在常温下,当输入信号为零,运算放大器两个输入端的静态偏置电流 i_A 和 i_B ,称为偏置电流。当运算放大器在开环条件下,由两个差动输入端输入的动态电阻,称为差动阻抗 Z_D 。当运算放大器在没有加外部反馈时,输出电压的增量与输入差动电压增量之比定义为开环电压增益 A 。在运算放大器开环时,其输出级的输出阻抗,即为运算放大器的输出阻抗。在常温(25℃)下,当输入信号为零,运算放大器的输出端存在的直流电压折合到输入端的电压值,称为输入失调电压 V_{os} 或者说 V_{os} 是为了使运算放大器输出为零,在输入要加入的一个直流补偿电压。而 $\pm V_s$ 则为电源电压。为了便于分析和理解,我们通常利用理想运算放大器的模型,表5-1为理想和实际值的比较。

表5-1 理想运算放大器与实际运算放大器比较

特性	理想值	典型实际值
开环增益 A	∞	100,000V/V
失调电压 V_{os}	0	$\pm 1\text{mV}$ (25℃)
偏置电流 i_A, i_B	0	$10^{-6} \sim 10^{-14}\text{A}$
输入阻抗 Z_D	∞	$10^5 \sim 10^{11}\Omega$
输出阻抗 Z_o	0	1~10 Ω

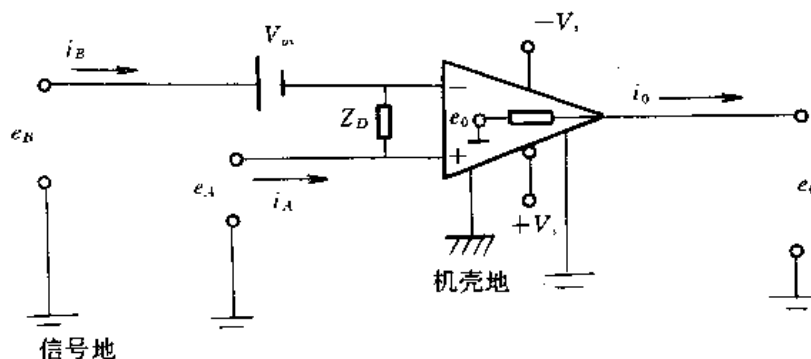


图5-32 实际运算放大器模型

理想模型还假定运算放大器具有瞬时的响应特性(即从零频到无穷大的频率范围内均具有平直的频响特性)。理想运放是设想中的一种完美无缺的电子放大器。图5-33是表示理想运放的一种符号,它是一个三端器件;输入端中3为同相输入端,常标以“+”号;2为反相输入端,常标以“-”号。信号由同相输入端输入,在输出端6得到与之相同相位的信号;若信号由反相端输入,则在输出端6得到与之反相位信号。当两输入端分别送入不同信号时,由输出端得到的就是与二输入信号的差值成比例的信号,所以集成运放又称为差动(或差分)放大器。

由表5-1可知,理想运放的输入阻抗 $Z_D = \infty$,其输入端即不取入电压,也不吸收电流,二输入端始终处于等电位状态。

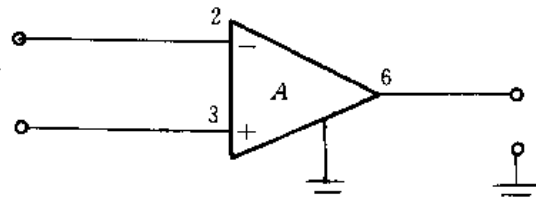


图5-33 理想运算放大器

有了理想运算放大器特性的假设,使运放电路分析得到了简化。

二、典型放大器的设计

1. 电压跟随器及比例放大器

如图5-34(a)所示的电压跟随器,由运放特性可得:

$$e_o = (e_A - e_B - V_{OS})A \quad (5-59)$$

式中: $A = \infty, V_{OS} = 0, e_A = e_i, e_B = e_o$ 代入得: $e_i - e_o = e_o/A = 0$

所以: $e_o = e_i \quad (5-60)$

实际电压跟随器电路如图5-34(b)所示,图中, R_f 电阻的作用是减小实际运放的失调电压 V_{OS} 。 R_p 电阻,在电路发生堵塞时,对电路有限流保护作用。

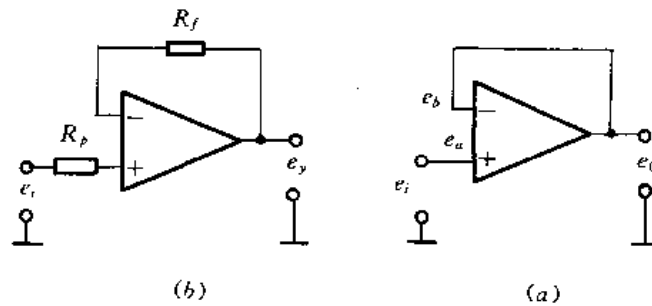


图5-34 电压跟随器

由此可得出,图5-34中的运算放大器在其输出端复现它的输入端的电压,这时信号源 e_i (可看成一台传感器)工作在“无穷大”的阻抗上。运放输出不从信号源取用任何电流和功率。而输出电压 e_o 可以在一个负载电阻两端,负载则能取用电流和消耗功率。这种电子装置又称为缓冲(或隔离)放大器。

实际运算放大器的输出能力是有限的,但它和理想模型得出的值是很接近的。

图5-35中的(a)、(b)分别为电压的同相放大和反相放大电路。

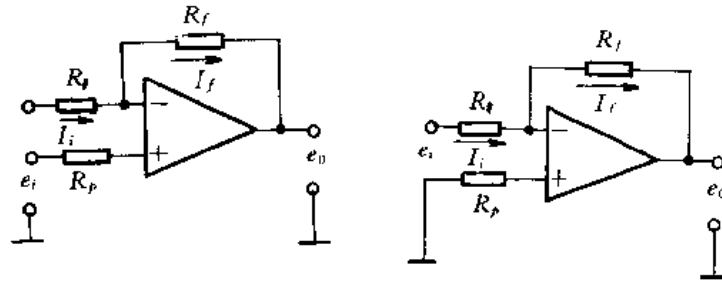


图5-35 比例放大器

通过分析,对于同相放大器,其输入输出关系为:

$$e_i = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_f} \right) e_o$$

$$e_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_1} \right) e_i \quad (5-61)$$

增益

$$A = 1 + \frac{R_f}{R_1} \quad (5-62)$$

同理,对于反相放大器有

$$e_o = - \frac{R_f}{R_1} e_i \quad (5-63)$$

增益

$$A = - \frac{R_f}{R_1} \quad (5-64)$$

很显然,放大器的增益,完全由电阻比 R_f/R_1 决定,因此此类放大器称为比例放大器。

根据这一结论可以引伸出一个加法器电路,电路图如图5-36所示。该线路与反相比例放大器线路基本构造相同,在反相输入端同时具有多个输入信号电压,各输入端具有自己的回路。此运放电路可看成是线性系统,由线性叠加原理,得各输入同时输入时所引起的总电压输出

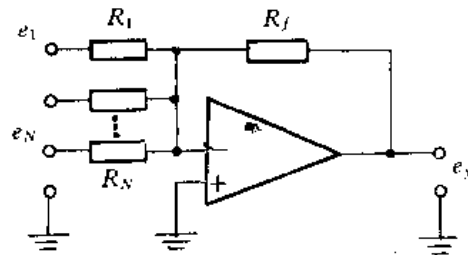


图5-36 加法器

$$e_o = - R_f \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{R_i} \quad (5-65)$$

这样就实现了各输入电压作相加运算的功能。

2. 差动放大器

运算放大器的另一种基本电路为图5-37(a)所示的差动放大器。信号源是平衡接地式

的,应变片桥式力传感器的变换电路如图5-37(b)所示。由***b***、***d*** 两端输出接入到差动放大器的两输入端。电桥为直流激励,直流源一端***C*** 接地,另一端电位为10V,若电桥预调平衡,则***b***、***d*** 两点电位皆应为5V,电桥输出为零。若测量对象有应变变化,引起某桥臂电阻变化,使电桥失衡,输出对角线***b***、***d*** 有电位差,例如***e_b***=5.01V, ***e_d***=4.99V,则***e_b***-***e_d***=0.22V,此电压输入到差动放大器上,放大器对该微弱信号进行放大。在图5-37(a)中原始电压5V(也就是电桥失衡后,放大器两端输入端电压平均值)是两路共有的,称为共模电压(Common-mode voltage) ***e_{CM}***,而图5-37(a)中***e₁*** 和***e₂*** 代表电桥两输出端电压***e_b*** 和***e_d*** 的变化量,***e₁***-***e₂*** 代表放大器两输入端电压的差值,称为差模电压***e_{DM}***。由于放大器具有线性特性,把前面导出的反相和同相接法的结果叠加起来,便可写出:

$$e_0 = -\frac{R_f}{R_1}(e_{CM} + e_1) + e_3(1 + \frac{R_f}{R_1}) \quad (5-66)$$

式中
$$e_3 = (e_{CM} + e_2) \frac{R_p}{R_2 + R_p} \quad (5-67)$$

式(5-67)代入式(5-66)得:

$$e_0 = -e_1 \frac{R_f}{R_1} + e_2 \frac{R_p}{R_2} \frac{R_f/R_1 + 1}{R_p/R_2 + 1} + e_{CM} (\frac{R_p}{R_2} \frac{R_f/R_1 + 1}{R_p/R_2 + 1} - \frac{R_f}{R_1}) \quad (5-68)$$

为了消除共模误差***e_{CM}***,即使上式第三项为零,我们设定 $\frac{R_p}{R_2} = \frac{R_f}{R_1}$ 代入式(5-68)得:

$$e_0 = \frac{R_f}{R_1}(e_2 - e_1) \quad (5-69)$$

注意***R₁*** 和***R₂*** 应包括信号源的内阻(在本例中,即为应变片电桥的电阻)。由式(5-59)可见,放大器的输出电压仅反映了两输入端电压变化的差值,而消除了原始电压信号***e_{CM}***,即共模误差。

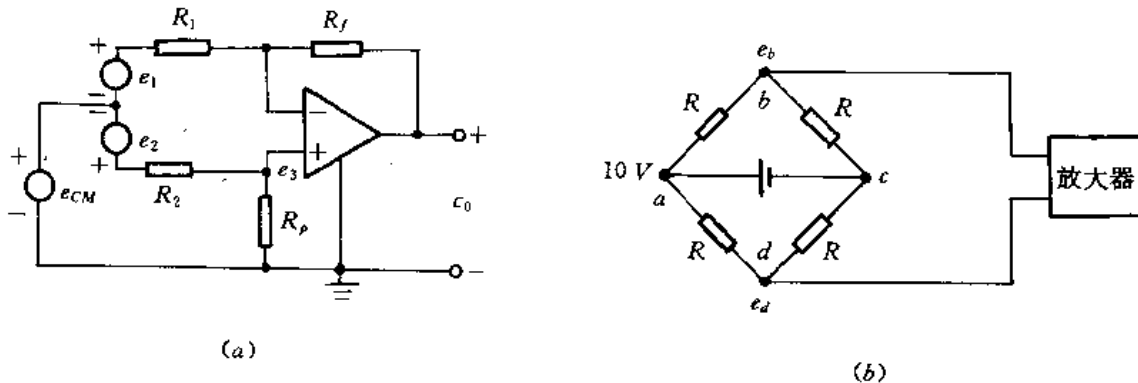


图5-37 差动放大器

式(5-69)假定放大器的正和负输入通道具有理想相同的增益。但实际的放大器却不能达到。共模抑制CMRR 来确定偏离理想情况的程度

$$\text{CMRR} = \frac{A_{dM}}{A_{CM}} \quad (5-70)$$

式中： A_{dM} ——为放大器对差模电压放大的增益；

A_{CM} ——为放大器对共模电压放大的增益。

上式也可用分贝值来表示共模抑制比

$$\text{CMRR}(\text{dB}) = 20 \lg \frac{A_{dM}}{A_{CM}} \quad (5-71)$$

理想运放为无限大，实际的运放CMRR 是一有限值，故总会引入残存误差。例如，CMRR 为80dB($10^4 : 1$)，差模增益 R_f/R_1 为100， e_{CM} 为1V，此时由式(5-70)可得到0.01V 的虚假输出，即共模误差电压。产生共模误差的原因是，电阻不匹配，即 $R_p/R_2 \neq R_f/R_1$ 和放大器的正、负通道的增益不相等。图5-37(b)的电桥激励电压产生了共模电压 e_{CM} ，除此之外，共模电压常常是放大电路从其周围环境拾取的虚假的噪声电压。在实际使用中，常常选取高共模抑制比的放大器和确保引线和放大器阻抗的对称性，将有助于减小共模误差。要使运放接近理想模式，即要求获得高的输入阻抗，这就要求图5-37(a)中的差模输入电阻 $R_1 + R_2$ 及 e_1 和 e_2 处的有效共模输入电阻 $R_1 + R_f$ 和 $R_2 + R_p$ 的各电阻值要大。而电阻值太大，由偏置电流所引起的失调误差以及在高频下的共模抑制比将减小(由寄生电容引起)。这将限制这种放大电路的使用。但下面描述的仪器放大电路却能满足这样的要求。

3. 仪器放大电路

典型的仪器放大电路如图5-38 所示。

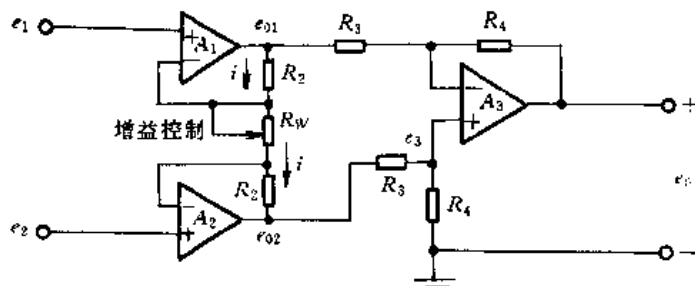


图5-38 仪器放大电路

由于同相放大器的输入阻抗高，所以输入信号引入同相端，可获得很高的输入阻抗。图中：差模输入电阻 $R_{id} = 2r_c$ ，共模输入电阻 $R_{ic} = \frac{1}{2}r_c$ 。式中， r_c 为运放的共模输入电阻。

因为运算放大器输入端不吸收电流，故只有 i 流过 R_L 、 R_W 和 R_2 ，由 e_{01} 流向 e_{02} 。由运放特性可得：

$$i = \frac{e_{01} - e_1}{R_2} = \frac{e_1 - e_2}{R_W} = \frac{e_2 - e_{02}}{R_2} \quad (5-72)$$

从而导出
$$e_{o1} - e_{o2} = (e_1 - e_2) \left(1 + 2 \frac{R_2}{R_w}\right) \quad (5-73)$$

由式(5-69)可得:

$$e_o = (e_{o1} - e_{o2}) \frac{R_4}{R_3} = (e_1 - e_2) \frac{R_4}{R_3} \left(1 + 2 \frac{R_2}{R_w}\right) \quad (5-74)$$

由式(5-73)得前级差模增益

$$K_{f_{12}} = \frac{e_{o1} - e_{o2}}{e_1 - e_2} = 1 + 2 \frac{R_2}{R_w} \quad (5-75)$$

由式(5-74)得后级差模增益

$$K_{f_3} = \frac{e_o}{e_{o1} - e_{o2}} = \frac{R_4}{R_3} \quad (5-76)$$

总的差模增益

$$K_f = K_{f_{12}} \cdot K_{f_3} \quad (5-77)$$

由于前级运放 A_1 和 A_2 把共模输入信号按1:1地传到其输出端,即前级共模增益 $K_{f_{c12}}$ 为1,所以总的共模增益为

$$K_{f_c} = K_{f_{c12}} \cdot K_{f_{c3}} = K_{f_{c3}} \quad (5-78)$$

电路总的共模抑制比为

$$\text{CMRR} = \frac{K_f}{K_{f_c}} = \frac{K_{f_{12}} \cdot K_{f_3}}{K_{f_{c3}}} = K_{f_{12}} \text{CMRR}_3 \quad (5-79)$$

对前级调节 R_w ,对后级差动放大器四个电阻、两个 R_3 ,两个 R_4 严格地匹配。这种电路可获得很大的共模抑制比,克服了基本差动放大器的缺点。下面给出了一个实际的测量放大器电路(如图5-39所示)。

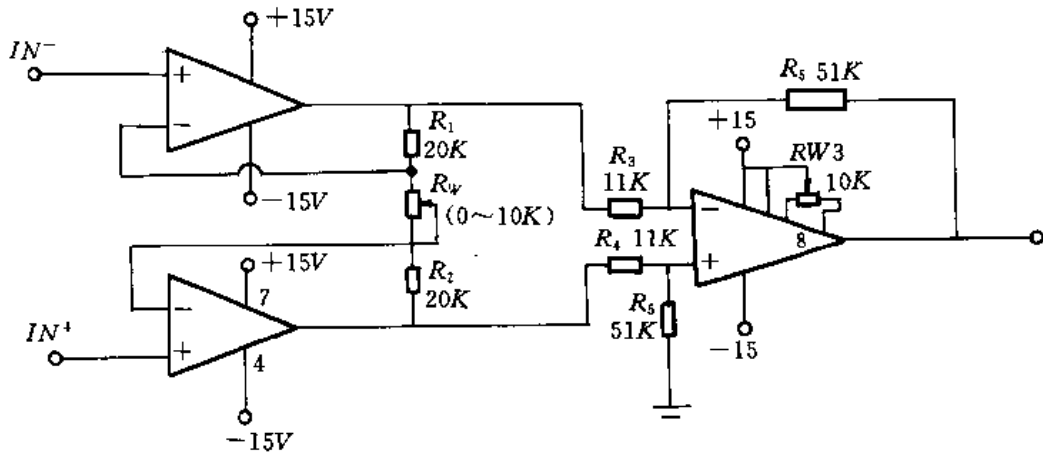


图 5-39

电路中, R_w 用于调节差动增益, R_{w3} 用于调节输入失调电压,使输出调零。

4. 积分、微分放大器

积分放大器的线路结构与反比例放大器类似,主要区别在于其反馈回路采用了电容元件。积分放大器的线路如图5-40所示。

由运算放大器特性得:

$$I_i = e_i/R_1 = I_f \quad (5-80)$$

而 $I_f = \frac{dQ_f}{dt} = -\frac{d(C_f \cdot e_o)}{dt} = -C_f \frac{de_o}{dt}$ 得

$$e_o = -\frac{1}{C_f} \cdot \int I_f dt = -\frac{1}{R_1 C_f} \int e_i dt \quad (5-81)$$

由上式可以看到,图5-40所示放大器电路的输出电压与输入电压的积分成正比,所以称它为积分放大器。式中 $R_1 C_f$ 称为积分放大器的时间常数。

微分放大器电路如图5-41所示。

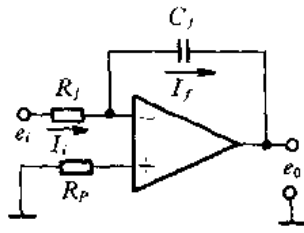


图5-40 积分放大器

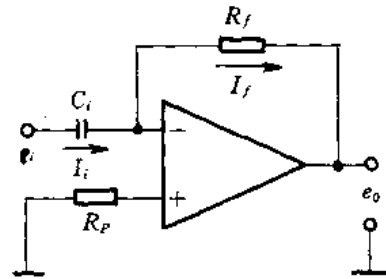


图5-41 微分放大器

由运放特性可得:

$$I_i = \frac{dQ}{dt} = \frac{C de_i}{dt} \quad (5-82)$$

$$I_f = -\frac{e_o}{R_f}$$

又 $I_i = I_f$ 所以

$$\frac{c de_i}{dt} = -\frac{e_o}{R_f}$$

$$e_o = -\frac{CR_f de_i}{dt} \quad (5-83)$$

由上式可知此放大器的输出正比于其输入的微分,因此称之为微分放大器。

微分、积分放大器电路在实际的测试中,可完成某些物理量的转换,使一种传感器具有多个物理量的测量功能。

例如图5-42为两个一阶积分器级联构成的二阶积分器。

该积分电路用于加速度动态信号的变换。输入信号为加速度信号,则经一阶积分变换后的输出信号 e_{o1} 为速度信号,经二阶积分变换的输出 e_{o2} 则为位移信号。

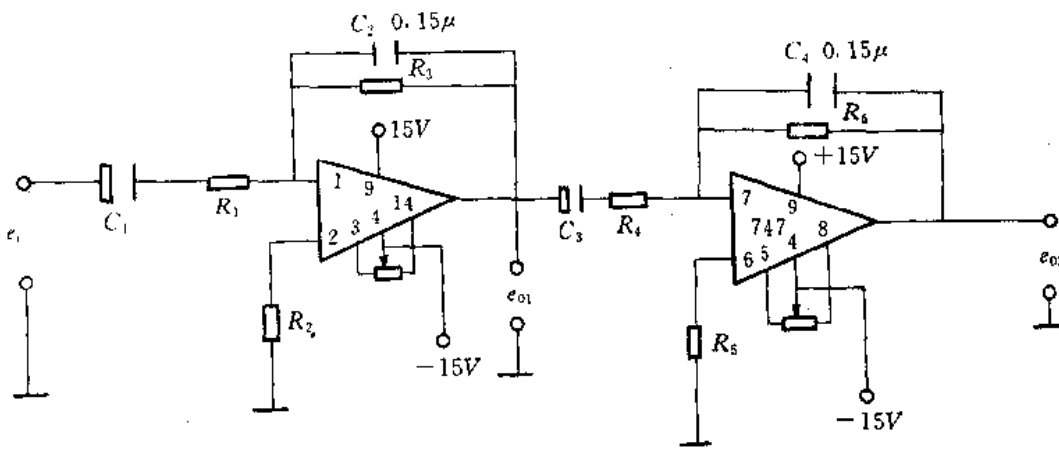


图5-42 二阶积分器

图中电容 C_1 或 C_3 为隔直电容,保证输入信号为纯动态信号; R_3 或 R_6 作用是,防止 U_{in} 等引起的漂移使积分器阻塞,为了减小该并联电阻带来的误差,时间常数 R_3C_2 要远大于输入信号的周期。

5. 阻抗变换器和电荷放大器

对有些传感器(例如压电传感器),其输出阻抗很大,可达 $10^8\Omega$ 以上,这就要求其处理电路也应具有很高的输入阻抗和低的输出阻抗,即进行阻抗变换后,再进行处理。对这类传感器,也可采用电荷放大器处理电路。这两类处理电路的原理及应用介绍如下。

阻抗变换是将输入的高阻抗转化为低阻抗输出,对于压电式传感器来讲,就是把传感器的电荷量变化转换为电压量变化。阻抗变换要求测量电路具有很高的输入阻抗。因此放大器的输入级常常采用高输入阻抗的场效应管,并采用自举电路。

图5-43为阻抗变换电路原理图。该电路输出可接一般放大器或记录器,其电路分析如下。

BG_1 采用MOS场效应管构成源极输出器, BG_2 用锗管提供串联电压负反馈,提高输入阻抗(反馈调整 R_4)。 R_1 和 R_2 是 BG_1 的偏置电阻。 R_3 、 C_2 和 R_4 构成自举电路, BG_2 不仅对 BG_1 提供负反馈,并通过 R_4 加强了自举的作用,其自举过程如下。

当输入端 B 点电位增大, BG_1 的源极电流增加,使得 R_4 上的压降增大,此增大电压通过电容 C_2 使 A 点的电位增高。若各元件调节的好,使 B 、 A 两点的电位升高同样的值。反之,当 B 点电位降低, A 点的电位也随之降低。在整个工作过程中, R_3 两端的电位近似相等, R_3 上只有极小的电流通过。这就相当于输入阻抗无穷大。即: $R_i = \frac{U_A}{I_3}$, $I_3 \approx 0$, U_A 为有限值,所以 $R_i \rightarrow \infty$ 。

二极管 D_1 有两个作用:(1)保护场效应管,防止 BG_1 栅—源极击穿。(2)温度补偿作用,当温度升高时,场效应管的泄漏电流 I_{SG} 和 I_{DG} 随温度增加而增加,而 D_1 反向电流随温度

增而增加,起到了补偿作用。

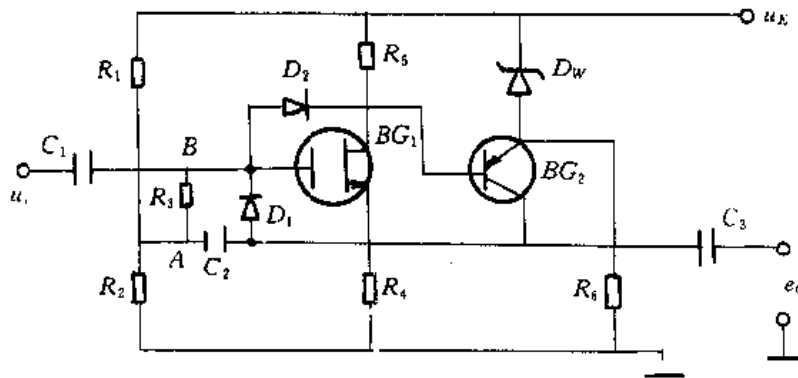


图5-43 ZK-1 阻抗变换器原理图

图5-44 为阻抗变换器电路图。该电路主要性能指标:

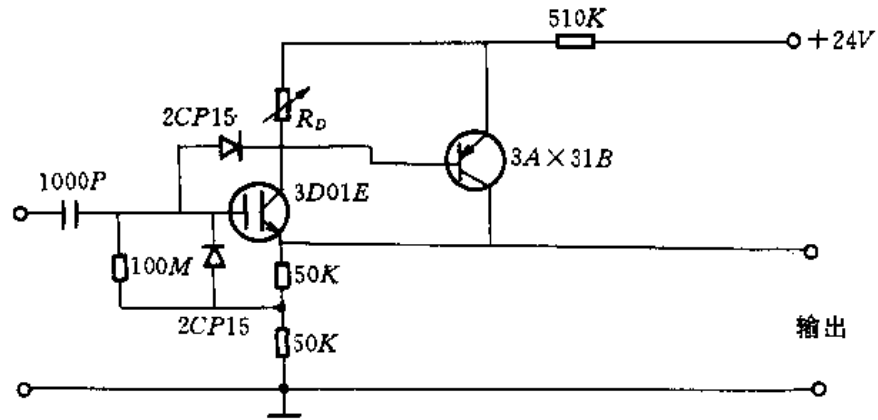


图5-44 阻抗变换器

输入阻抗: $>200\text{M}\Omega$;

输出阻抗: $<100\Omega$;

频率范围: $2\text{Hz} \sim 100\text{kHz}$;

电压增益: $K_v \pm 0.05\text{dB}$;

动态范围: $200\mu\text{V} \sim 5\text{V}$ 。

上述阻抗变换器电路简单,元件少,价格便宜,工作可靠。但输入变换器电缆长度对传感器性能影响很大。解决的办法是将小型阻抗变换器装在传感器内。

阻抗变换器也可采用电压跟随器式电路,图5-45 示出一种阻抗变换电路。

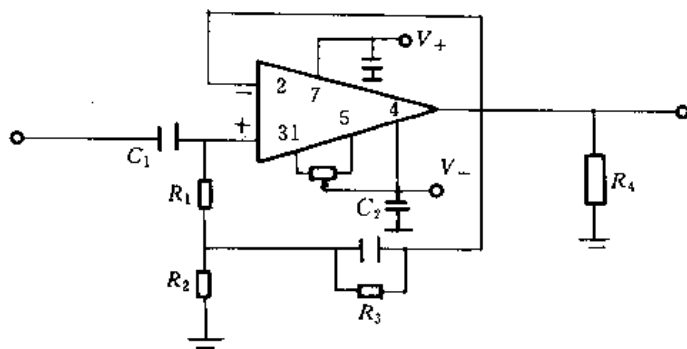


图5-45 运放阻抗变换器

图中运放选用F3140 高阻运放, R_1 、 R_2 用来降低运放的失调电压, R_3 、 C_2 作用是保证放运不发生堵塞, 基本电路是电压跟随器。

对于压电传感器, 也可采用电荷放大器, 即它将压电传感器的电荷量变化直接转换为电压量变化, 若幅值不够, 还可接一般放大电路。

电荷放大器是利用电容负反馈的一种高增益运算放大器, 其原理如图5-46(a)所示。

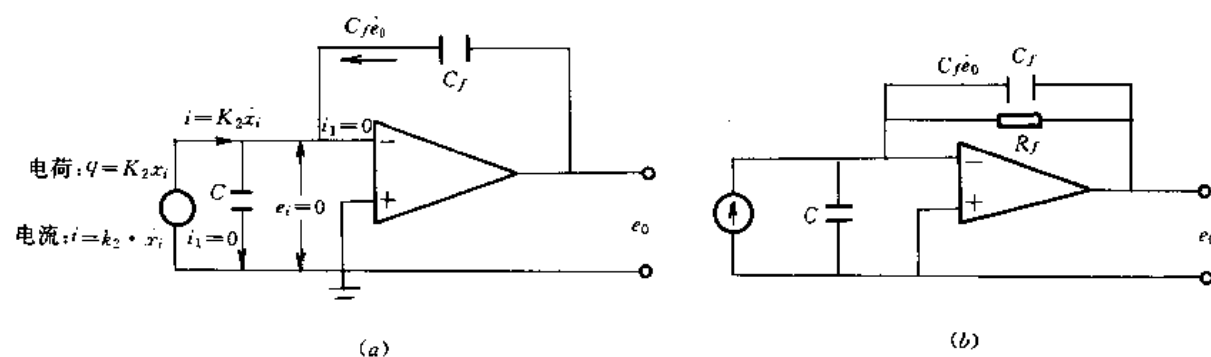


图5-46 电荷放大器电路

图中 C 为压电晶体和电缆的电容, 运算放大器和电容器 C_f 接在一反馈回路, 我们设定运算放大器为理想模式, 即输入电压 e_i 和输入电流 i_i 为零, 于是有:

$$K_q x_i = -C_f e_0 \quad (5-84)$$

所以

$$e_0 = -\frac{K_q x_i}{C_f} \quad (5-85)$$

式(5-85)中可看出, e_0 与位移 x_i 这间具有瞬变和线性关系, 但在实际使用中, 由于运算放大器的偏置电流不为零, 将出现偏置电流对 C_f 不断充电, 直到放大器饱和。所以 e_0 与 x_i 之间的这种关系实际上是不能实现的。为了解决这个问题, 在电路中再加一个反馈电阻 R_f , 防止该小电流在 C_f 上产生电荷量。图5-46(b)为改进电路。对该电路进行分析, 可得:

$$K_q x_i = -C_f e_0 - \frac{e_0}{R_f} \quad (5-86)$$

$$K_q R_f x_i = -C_f R_f e_0 - e_0 \quad (5-87)$$

对上式取拉氏变换,整理可得:

$$\frac{e_0(s)}{x_i(s)} = \frac{k\tau s}{\tau s + 1} \quad (5-88)$$

式中: $K = \frac{K_q}{C_f} \quad (\text{V/mm}) \quad (5-89)$

$$\tau = R_f C_f \quad (\text{s}) \quad (5-90)$$

从式(5-88)到(5-90)可看出,灵敏度 K 和时间常数 τ 与压电晶体本身电容和连接电缆的电容无关,大大提高了电路的稳定性。电容 C_f 取 $10 \sim 10^5 \text{pF}$, R_f 取 $10^{10} \sim 10^{14} \Omega$ 若 $C_f = 10^5 \text{pF}$, $R_f = 10^{14} \Omega$,则 $\tau = 10^6 \text{s}$,这表明此时它几乎具有直流响应特性,可以进行静态标定和静态测量。

第五节 滤波器

一、概述

滤波器在机械式程测试技术领域中的应用极为广泛,它可在噪声背景下提取有用的信号。滤波器可看成是一种“频率筛子”,通过它就可以筛选出信号中人们所需要的频率成分。它是各种频谱分析仪的基础部份;是各种模拟信号输入数字信号处理系统前为解决“混叠”问题必不可少的预处理装置。滤波器可以应用各种物理原理来实现,除了电气滤波器外,还有机械、液压、声学等形式的滤波器,这些非电类型的滤波器在特定的场合中也能提供所需的滤波作用。

对于一个滤波器,能通过它的频率范围称之为该滤波器的频率通带,被它所抑制或极大地衰减的信号频率范围称之为频率阻带。通带与阻带的交界点称之为截止频率。

滤波器的种类很多,亦有不同的分类方法。按能通过的信号频率范围来分,滤波器有低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器及带阻滤波器等几种形式;按处理信号的性质来分有模拟滤波器和数字滤波器两大类。随着计算机科学的发展,数字滤波器有了很大的发展,但其基本原理仍基于模拟滤波器,若按滤波器电路中是否带有源器件来分则有有源滤波器和无源滤波器两种。其它还有按阶次、按何种方法逼近理想滤波器等方面进行的分类方法,这里不一一赘述。

滤波器发展的初级阶段采用了如电阻、电容和电感等元件组成的无源网络实现滤波功能。无源滤波器电路简单,易于制作调试,但由于能量损耗,而使带负载能力下降,又因要达到低频性需用很多电感、电容等无件,显得笨重,限制了它的应用。在半导体集成电路发展起来后,用 RC 无源网络和运算放大器结合构成的有源滤波器已发展成为目前滤波器的主要实用形式。有源滤波器体积小,重量轻,带负载能力强,在通带内不但能减小损耗,还能获得一定的增益。

二、理想滤波器

滤波器功能的实现主要是利用滤波器的频率特性,一个理想滤波器在通带内幅频特性为常值,相频特性为通过原点的直线;在通带外幅频特性值为零。在通带内输入信号的频率成分不失真通过,而在通带外的频率成分全部衰减掉。

图5-47 是一理想低通滤波器的频率特性和相频特性图。其频率响应函数、幅频特性、相频特性分别为:

$$H(f) = |H(\omega)| e^{j\varphi(f)} \quad (5-91)$$

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, & -f_c < f < f_c \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (5-92)$$

$$\varphi(f) = -\tau_0 f \quad (5-93)$$

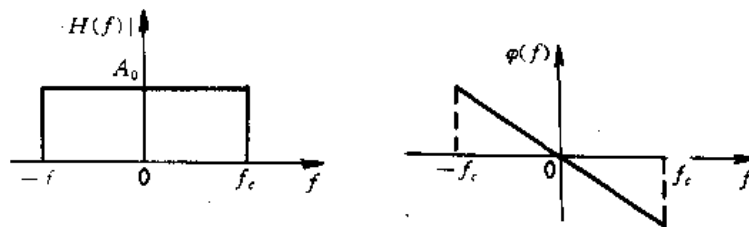


图5-47 理想滤波器模型

由图5-47 可知,通过该滤波器的信号中低于 f_c 的频率成份无任何失真地通过,而高于 f_c 的频率成份则完全衰减掉, f_c 称为截止频率。

图5-48(a)是一高通滤波器特性,它使信号中高于某一频率 f_{c1} 的频率成分通过,称为下截止频率。图5-48(b)是一带通滤波器特性,它是仅让高于某一频率 f_{c1} 和低于一频率 f_{c2} 的频率成分通过。 f_{c1} 、 f_{c2} 分别称为此带通滤波器的下、上截止频率, f_0 称为带通滤波器的中心频率,中心频率定义为上下截止频率的几何平均值。即:

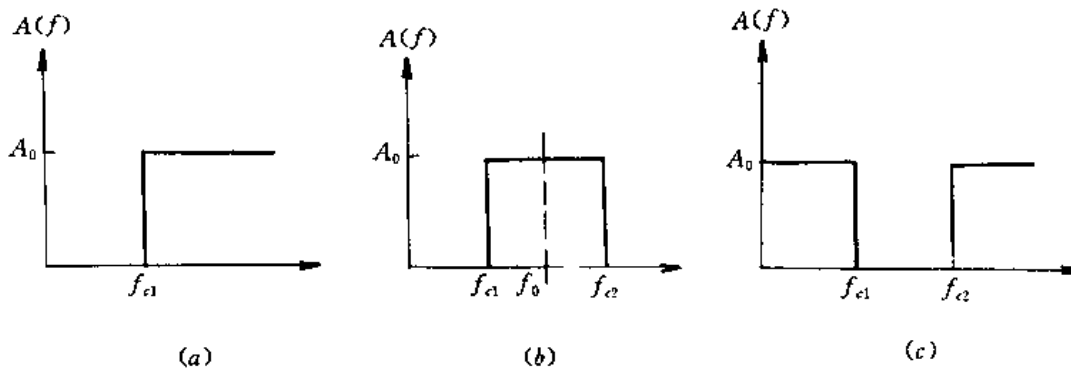


图5-48 理想滤波器幅频特性

$$f_c = \sqrt{f_{c1} \cdot f_{c2}} \quad (5-94)$$

$f_{c2} - f_{c1} = B$ 称为为此带通滤波器的带宽,并定义带通滤波器的品质因数为:

$$Q = \frac{f_0}{f_{c2} - f_{c1}} = \frac{f_c}{B} \quad (5-95)$$

图5-48(c)是一带阻滤波器的特性,它仅让两截止频率之间的频率成分不通过。

三、实际滤波器

图5-49为一实际带通滤波器的幅频特性图。细实线表示理想带通滤波器的幅频特性,其特性尖锐、陡峭,故各项指标如截止频率等都比较明确。实际滤波器特性不如理想的那样尖锐、陡峭、顶部平坦,需要用更多的参数来描绘:滤波器顶部幅值波动量为波纹幅度,记为 d ;幅频特性顶部平均值为 A_0 ;取幅频特性值为 $A_0/\sqrt{2}$ 的相应频率值,即图中以 $A_0/\sqrt{2}$ 作平行于横座标的直线与幅频特性曲线相交两点的横座标值 f_{c1}, f_{c2} 为上下截止频率。

因为
$$20 \lg \frac{A_0/\sqrt{2}}{A_0} = -3 \text{dB} \quad (5-96)$$

故称 $f_{c1} - f_{c2}$ 为“负3分贝带宽”,以此作为实际带通滤波器的截止频率、带宽的定义。

选择性是滤波器的一个重要指标,有两种定义方法:一是用幅频特性,即幅频特性图上的纵座标来定义倍频程选择性,其含义是频率在 $f_{c1}/2$ 与 $2f_{c2}$ 处的幅频特性值 $A(f_{c1}/2)$ 和 $A(2f_{c2})$ 分别与 $A(f_{c1})$ 和 $A(f_{c2})$ 比值的分贝数:

$$20 \lg \frac{A(f_{c1}/2)}{A(f_{c1})} \text{ (dB)} \quad (5-97)$$

或
$$20 \lg \frac{A(2f_{c2})}{A(f_{c2})} \text{ (dB)} \quad (5-98)$$

称为该滤波器的倍频程选择性用分贝表示;另一是用带宽值,即幅频特性图上的横座标值来定义的滤波器因数 λ ,其含义是滤波器幅频特性起为 -60dB 处的带宽 $B_{-60\text{dB}}$ 与 -3dB 处的带宽 $B_{-3\text{dB}}$ 的比值。

$$\lambda = \frac{B_{-60\text{dB}}}{B_{-3\text{dB}}} \quad (5-99)$$

倍频程选择总是小于等于零,其值越接近于零,表明该滤波器选择性越接近理想滤波器的频率选择性;反之,滤波器频率选择性差。滤波器因素 λ 总是大于等于1,其值为1时,表示幅频特性曲线的两侧边下降沿是陡直的,是理想滤波器的选择性。

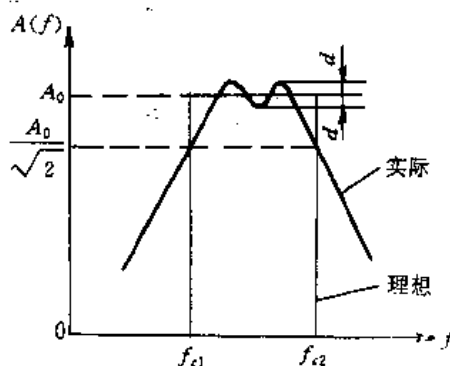


图5-49 实际带通滤波器特性

四、RC 滤波器原理及特性

1. 无源滤波器

这种滤波器仅由电阻、电容等无源元器件组成。

(1)一阶低通RC滤波器,其原理线路如5-50(a)所示,由电路原理可得出电路输入、输出电压间的微分方程式为:

$$RC \frac{de_y}{dt} + e_y = e_x \quad (5-100)$$

令 $RC=\tau$,称为时间常数。并对上式求傅里叶换得频响函数:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\tau\omega + 1} = \frac{1}{j2\pi RCf + 1} \quad (5-101)$$

这是一个典型的一阶系统,其幅频特性、相频特性如图5-50(b)所示。由此特必曲线可以看出:

当 $f \ll \frac{1}{2\pi RC}$ 时 $A(f)=1$ 信号几乎不衰减地通过, $\phi(f)$ 特性曲线近似于一条通过原点的直线。

当 $f = \frac{1}{2\pi RC}$ 时 $A(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,即在此频率时相当于幅频特性值为-3dB点,此频率即为其上截止频率,因此改变RC参数,就能改变截止频率。

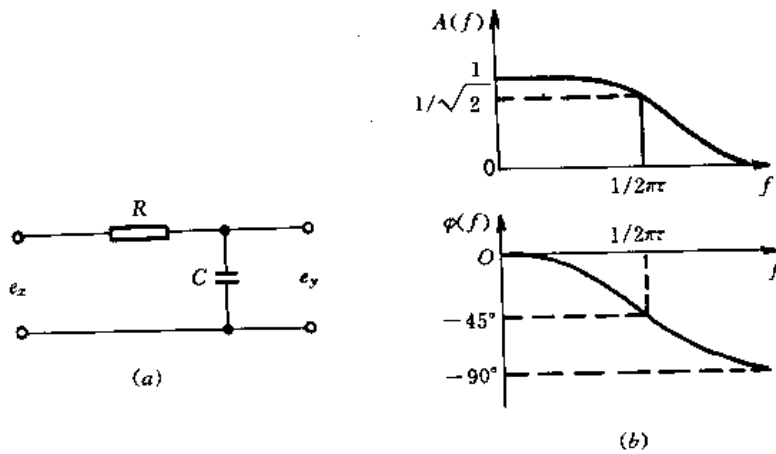


图5-50 RC低通滤波器及其频率特性

(2)一阶RC高通滤波器

其电路原理如图5-51(a)所示,根据电路原理可以同样分析出此电路的输出、输入电压间的微分式为:

$$e_y + \frac{1}{RC} \int e_y dt = e_x \quad (5-102)$$

对此式两边求傅里叶变换,可得其频响函数

$$H(j\omega) = \frac{\pi(j\omega)}{\tau(j\omega) + 1} \quad (5-103)$$

该系统的幅特性、相频特性如图5-51(b)所示。此滤波器的-3dB截止频率为 $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$,这个电路是一阶高通滤波器。

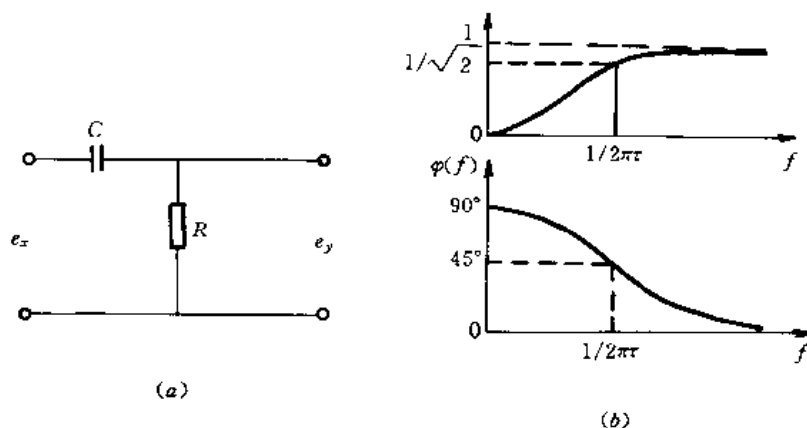


图5-51 RC高通滤波器及其频率特性

(3) 一阶带通滤波器

由一阶低通滤波器和一阶高通滤波器的幅频曲线可看出,RC带通滤波器可由一阶高通滤波和一阶低通两个滤波器串联而成,串联所得的带通滤波器以原高通滤波器的下截止频率和原低通滤波器上截止频率为其的下、上截止频率。但须注意的是,后一级将成为前一级的负载,而前一级又是后一级的信号源内阻,改变了原电路的参数。所以实际的带通滤波器作成有源的,将两串联的高、低通滤波器作隔离处理。

2. 有源滤波器

上述一阶无源滤波器的幅频特性的衰减都很缓慢,滤波器在通带的衰减特性,反映到其选择性指标,而滤波器的衰减特性主要由滤波器的频响函数的阶次所决定。经计算,一阶滤波器的幅频特性在截止频率外为-6dB/倍频程,在过渡区域衰减缓慢,选择性不理想。为了克服无源的RC滤波器串联所带来的级间耦合的影响,就需采用有源滤波器。

有源滤波器由RC调谐网络和运算放大器组成,运算放大器是有源器件,即可作极间隔离作用又可起信号幅值放大作用。

(1) 一阶有源滤波器

这种滤波器是将前述的无源RC滤波网络接入到运算放大器的输入端或接入运算放大器电路的反馈回路上而形成。

图5-52(a)是将RC无源低通滤波器网络接到运算放大器的输入端,运放起到隔离、增益和提高带负载能力作用。其截止频率仍为 $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$,放大倍数为 $k = 1 + \frac{R_F}{R_1}$ 。

图5-52(b)是把高通网络作为运算放大器的负反馈,根据控制理论对反馈传递函数的分析,结果是获得低通滤波器的作用,其截止频率为 $f_c = \frac{1}{2\pi R_F C}$,直流放大倍数 $K = \frac{R_F}{R_1}$ 。

(2)把较为复杂的滤波网络与运算放大器组合就可以得到二阶的有源滤波器。该类滤波器的两种基本形式:

①多路负反馈型

它是把滤波器网络接在运算放大器的反相输入端,其线路结构图图5-53。图中 Y_i 是各元件的导纳。假设运算放大具有理想参数,由克希霍夫定律可写出图中各节点的电流方程:

节点1 的电流方程为:

$$(e_x - e_1)y_1 = (e_1 - e_2)y_4 + (e_1 - e_2)y_3 + e_1 y_2 \quad (5-104)$$

节点2 的电流方程为:

$$(e_1 - e_2)y_3 = (e_2 - e_y)y_5 \quad (5-105)$$

根据理想运放特性

$$e_2 = 0 \quad (5-106)$$

联解(5-104)、(5-105)、(5-106)三方程,可得出 e_x 、 e_y 的关系,然后取傅里叶变换,得此电路的频响应函数:

$$H(j\omega) = \frac{E_y(\omega)}{E_x(\omega)} = \frac{-y_1 y_3}{y_5(y_1 + y_2 + y_3 + 1/4) + y_3 y_4} \quad (5-107)$$

这是多路负反馈二阶滤波器原型表达式,若将 y_1 至 y_5 各用电阻、电容替换可组合出二阶低通、高通、带通和带阻等不同类型的滤波器。

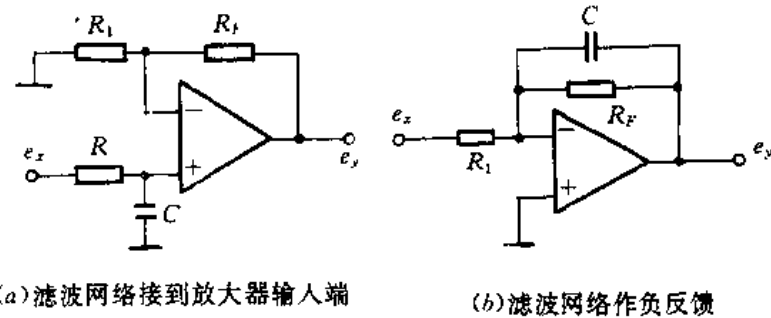


图5-52 一阶有源低通滤波器

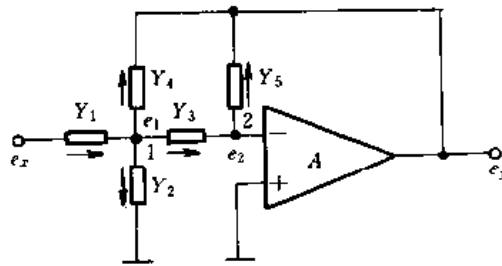


图5-53 多路负反馈有源滤波器

若将图5-53 中的 y_1 、 y_3 、 y_4 用电阻元件代替, y_2 、 y_5 用电容元件代替,组成如图5-54(a)所示电路,将 $y_1 = \frac{1}{R_1}$, $y_2 = j\omega C_2$, $y_3 = \frac{1}{R_3}$, $y_4 = \frac{1}{R_4}$, $y_5 = j\omega C_5$ 代入式(5-107)中,得频响应函数为:

$$H(j\omega) = \frac{-R_4/R_1R_3R_4C_2C_5}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega}{C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) + \frac{1}{R_3R_4C_2C_5}} \quad (5-108)$$

其幅频特性如图5-54(b)所示,这是具有低通特性的幅频特性,电路的电流增益 $k = -\frac{R_4}{R_1}$,同理可以构成多路负反馈的高通、带通滤波器。

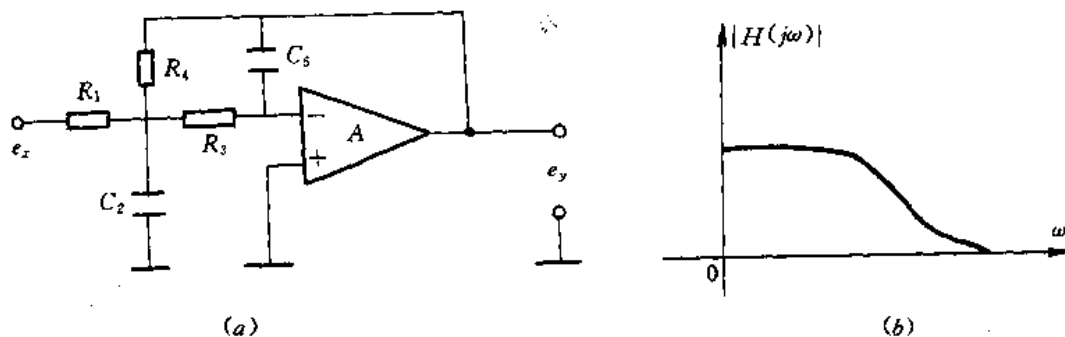


图5-54 二阶低通滤波器

②有限电压放大型

它是把滤波网络接在运算放大器的同相输入端,如图5-55所示,这种线路可以得到较高的输入阻抗。根据与多路负反馈类似的方法同样可推导出该电路的频响函数。

$$H(j\omega) = \frac{E_y(\omega)}{E_x(\omega)} = \frac{A_F y_1 y_3}{y_4(y_1 + y_2 + y_3) + y_3[y_1 + y_2(1 - A_F)]} \quad (5-109)$$

式中 $A_F = R_F/R_5$ 为运放的闭环增益。

按上述同样分析方法,用不同元件按此电路作各种组合也会具有相应不同的滤波特性。

3. 最佳逼近滤波器的设计

实际滤波器的设计,要尽量做到与理想滤波器的逼近。实际滤波器与理想滤波器的差别在于一是通带和阻带内幅频特性的平直程度;二是过渡带的陡直程度,实际滤波器特性逼近理想滤波器特性,目前有两种主要的逼近方法,即最平幅度逼近法(又称巴特沃斯型滤波器)和等波纹逼近(又称为切比雪夫型滤波器)。

给出滤波器传递函数 $H(s)$, $H(s)$ 是 s 的一个有理函数,它的幅值平方是 ω^2 的函数,定义成 $A(\omega^2)$,有:

$$A(\omega^2) = H(s)H(-s)|_{s=j\omega} \quad (5-110)$$

为了方便, $A(\omega^2)$ 可写成如下形式:

$$A(\omega^2) = \frac{1}{1 + F(\omega)^2} \quad (5-111)$$

式中, $F(\omega^2)$ 是 ω^2 的有理函数,因为 $A(\omega^2) \geq 0$ 。

所以

$$F(\omega^2) \geq -1$$

选择不同形式的 $F(\omega^2)$,就决定了是巴特沃斯型滤波器,还是切比雪夫型滤波器。

(1)巴特沃斯滤波器

对这类滤波器, $F(\omega^2)$ 定义为:

$$F(\omega^2) = \omega^{2n} \quad n = 1, 2, 3 \quad (5-112)$$

由式(5-111)可得出这类滤波器的幅值平方频率响应为:

$$A(\omega^2) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (5-113)$$

取 $n=3, 5, 7$,画出其响应曲线(图5-56)。

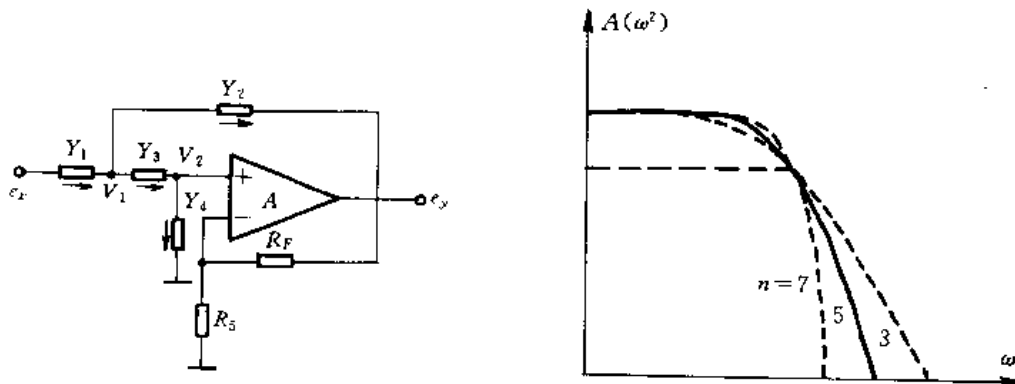


图5-55 有限电压放大型有源滤波器

图5-56 巴特沃兹滤波函数幅值平方频响特性

当 $\omega=1$ 时, $A(\omega^2)=0.5$,所以该函数3dB点为 $\omega=1$ 。 $A(\omega^2)$ 是单调递减函数。由图5-56可知,巴特沃兹滤波器具有最大平坦幅度特性,其截止频率为 ω_c 。则:

$$A(\omega_c^2) = \frac{1}{1 + \omega_c^{2n}} \quad (5-114)$$

式(5-114)决定滤波器阶数,以满足阻带($|\omega| > \omega_c$)内幅值衰减率的要求。

为了确定传递函数 $H(s)$ 表达式,式(5-114)中的 ω^2 用 $-s^2$ 置换,有:

$$A(-s^2) = 1/[1 + (-s^2)^n]$$

其极点由 $1 + (-s^2)^n = 0$ 给出。这些极点位于单位圆上。

图5-57为 $n=4$ 的极点示意图。实际滤波器传递函数 $H(s)$ 的四极点是 $-\alpha + j\beta$, $-\alpha - j\beta$, $-\beta + ja$ 和 $-\beta - ja$,这里 $\alpha = \cos 22.5^\circ$, $\beta = \sin 22.5^\circ$ 。

该滤波器的传递函数表达式为:

$$H(s) = \frac{1}{B_n(s)} \quad (5-115)$$

式中: $B_n(s)$ 为 S 的 n 次多项式,其根为 $e^{j(\frac{1}{2} + \frac{K}{n})\pi}$, $K=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 。表5-2列出 $B_n(s)$ 表达式($1 \leq n \leq 5$)。

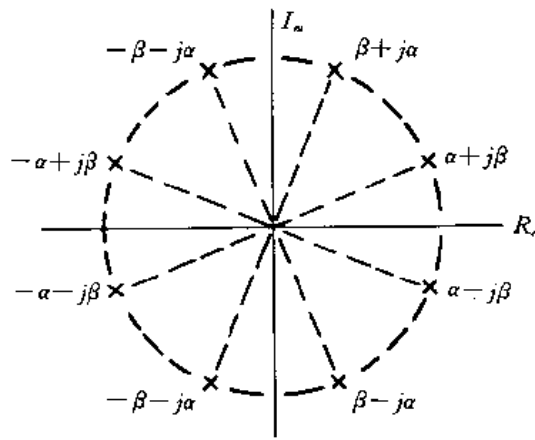


图5-57 四阶巴特沃兹低通 $A(-s^2)$ 的极点

表 5-2

n	$B_n(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+1.4142s+1$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0.7645s+1)(s^2+1.8478s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0.6180s+1)(s^2+1.6180s+1)$

(2)切贝雪夫滤波器(Chebyshev Filters)

式(5-111)中 $F(\omega)$ 取如下形式:

$$F(\omega^2) = \epsilon^2 C_n^2(\omega) \quad (5-116)$$

式中为 $C_n(\omega)$ 为 n 阶切贝雪夫cosine多项式。

$$C_n(\omega) = \begin{cases} \cos(ncos^{-1}\omega), & |\omega| \leq 1 \\ \cosh(ncosh^{-1}\omega), & |\omega| \geq 1 \end{cases} \quad (5-117)$$

由上式可得出: $C_0(\omega)=1, C_1(\omega)=\omega, C_2(\omega)=2\omega^2-1, C_3(\omega)=4\omega^3-3\omega$ 。

高阶 $C_n(\omega)$ 可由递推关系推出: $C_{n+1}(\omega)=2\omega C_n(\omega)-C_{n-1}(\omega)$ 。 (5-118)

由方程(5-117)可看出:

当 $|\omega| \leq 1$ 时, $|C_n(\omega)| \leq 1$;

$$C_n(-1) = \cos[ncos^{-1}(-1)] = \cos(-n\pi/2) = (-1)^n$$

$$C_n(1) = \cos(n\pi/2) = 1$$

当 ω 从-1变到1时, $C_n(\omega)$ 在 ± 1 之间振荡,变化 $n+1$ 次。图5-58画出了 $C_4(\omega)$ 及 $C_5(\omega)$ 。

将式(5-116)代入(5-111)得:

$$A(\omega^2) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (5-119)$$

当 $0 \leq \omega \leq 1$ 时, $C_n(\omega)$ 在 0 和 1 之间振荡变化, 所以 $A(\omega^2)$ 的振荡波形在 $\frac{1}{1+\epsilon^2}$ 和 1 之间变化; 当 $\omega > 1$ 时, $A(\omega^2)$ 单调衰减为 0。

图 5-59 画出了 $n=4, \epsilon^2=0.2$ 的 $A(\omega^2)$ 图, 图中同时画出了 4 阶巴特沃斯滤波器。

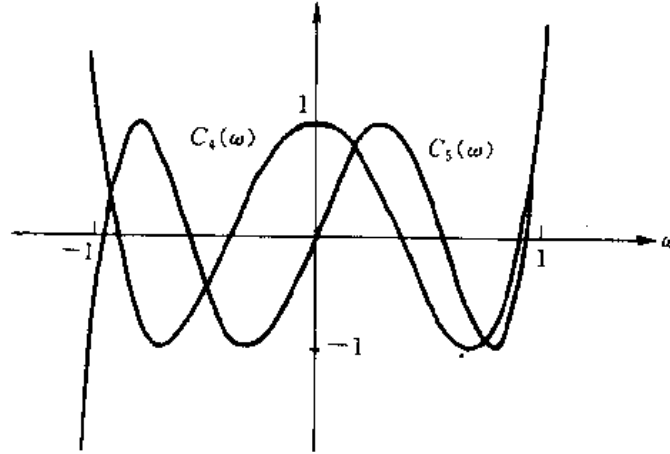


图 5-58 切比雪夫 4 阶、5 阶多项式

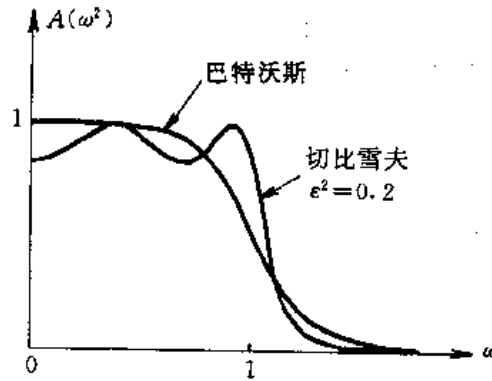


图 5-59 4 阶切比雪夫和 4 阶巴特沃斯滤波器幅值平方频率响应

该滤波器的传递函数 $H(s)$ 可由 $A(\omega^2)$ 推出。 $H(s)$ 的极点位于椭圆长半轴 $\cosh \alpha_n$ 和短半轴 $\sinh \alpha_n$, 得 n 个极点为:

$$P_k = \sinh \alpha_n \sin[(2k-1)\pi/2n] + j \cosh \alpha_n \cos[(2k-1)\pi/2n] \quad (5-120)$$

式中: $k=1, 2, \dots, n$ 。

阻带的截止频率为: $\omega = \omega_c$

$$A(\omega_n^2) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega_n)} \quad (5-121)$$

当 $\epsilon^2 C_n^2(\omega_n) \gg 1$ 时, $C_n(\omega_n)$ 近似等于 $2^{n-1} \omega_n^n$ 。

所以得:
$$A(\Omega_n^2) \approx \epsilon^{-2} 2^{-2n+2} \Omega_n^{-2n} \quad (5-122)$$

方程(5-122)决定切比雪夫滤波器的阶数 n ,以满足在阻带衰减率的要求。

巴特沃斯滤波器与切比雪夫滤波器进行比较,巴特沃斯滤波器在通带内有最大平坦幅度特性,而切比雪夫滤波器的通带有 $1 \sim 3\text{dB}$ 的等纹波,在阻带内仍为平直幅频特性,但其过渡带衰减陡峭。

习 题 五

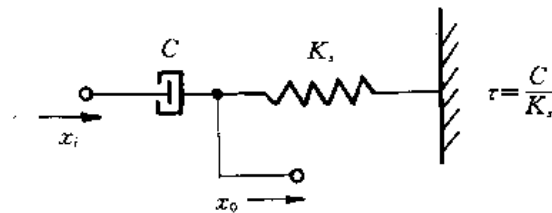
- 5-1 已知电阻丝应变片的阻值 $R=120\Omega$,灵敏度 $K=2$,使之与阻值为 120Ω 的固定电阻组成电桥。供电桥电压 $e_0=3\text{V}$,并假设负载电阻为无穷大,当所测应变分别为 $\epsilon_1=2\mu\epsilon$ 和 $\epsilon_2=2000\mu\epsilon$ 时,试求出:(1)组成单臂电桥时的输出电压 $e_{y,单}$;(2)组成双臂电桥时的输出电压 $e_{y,双}$;(3)试比较两种电桥的灵敏度。
- 5-2 有人在使用电阻应变仪时,发现灵敏度不够,于是,试图在工作电桥上增加电阻应变片数,以提高灵敏度。试问,在下列情况下,是否可提高灵敏度?说明为什么。
(1)半桥双臂各串联一片;(2)半桥双臂各并联一片。

5-3 已知调幅波

$$x_a(t) = (100 + 30\cos\Omega t + 20\cos 3\Omega t)(\cos\omega_c t)$$

其中, $f_c=10\text{kHz}$; $f_\Omega=500\text{Hz}$ 。试求:(1) $x_a(t)$ 所包含的各分量的频率及幅值;(2)绘出调制信号与调幅波的频谱。

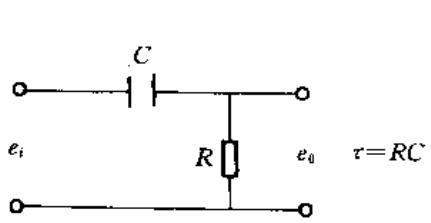
5-4 试推导出题图5-1所示液压机械式滤波器的传递函数。



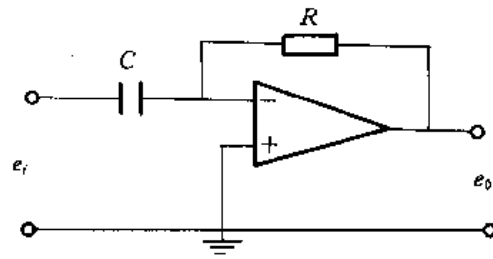
题图 5-1

- 5-5 在题图5-2所示电路中,设 e_i 由一正弦信号发生器提供。该信号发生器的内阻为 1000Ω ,开路电压的峰-峰值为 10V 。并设 $C=10\mu\text{F}$, $R=10\Omega$,如果 e_o 为开路,试问在频率为 $0, 100\text{Hz}, 1000\text{Hz}, 10\text{kHz}, 100\text{kHz}$ 时在 e_i 的两接线端上实际上出现多大的电压?
- 5-6 对于题图5-3所示电路,设 $e_i=e_{\text{信号}}+e_{\text{噪声}}$,其中 $e_{\text{信号}}=10\sin 20t$ 和 $e_{\text{噪声}}=0.1\sin 377t$ 。

试问在微分前和微分后的信噪比各为多少?

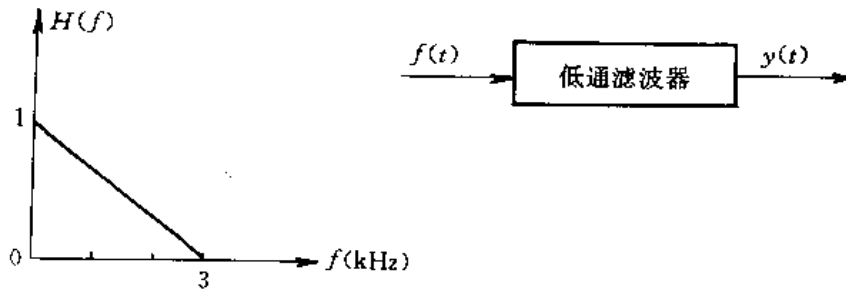


题图 5-2



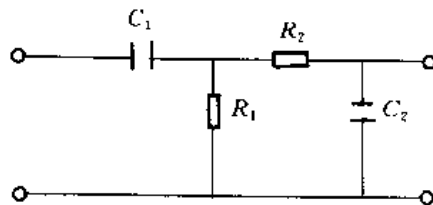
题图 5-3

- 5-7 输入信号 $f(t)$ 为周期 $T=1\text{ms}$, 幅度为 1 的方波, 低通滤波器幅频特性如题图 5-4 所示, 且相频特性 $\phi(\omega)=0$, 试求滤波器输出 $y(t)$ 及其频谱, 绘出 $y(t)$ 波形及频谱图。



题图 5-4

- 5-8 已知低通滤波器的频率响应函数 $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$, 式中 $\tau=0.05\text{s}$, 当输入信号 $x(t) = 0.5\cos(10t) + 0.2\cos(100t-45)$ 时, 求其输出 $y(t)$, 并比较 $y(t)$ 与 $x(t)$ 的幅值与相位有何区别。
- 5-9 若将高、低通网络直接串取如题图 5-5 所示, 问是否能组成带通滤波器? 请写出网络的传递函数, 并分析其幅、相频率特性。



题图 5-5

第六章 信号显示与记录仪器

第一节 概 述

测试系统所获取的信号最终都表现为电压(或电流)信号。因为电压或电流信号是看不见的,所以必须将其转换成操作人员能够理解的形式。信号提供的形式通常分为显式和隐式两种。显式是指数据是通过指针在一刻度盘上运动;一记录笔在记录纸上描绘(包括光束在感光纸上描绘和电子束在阴极射线管上描绘);一组有序数位的目测显示(数字电压表)。这类装置可直接显示信号的大小或波形。隐式是指这类记录仪器不能直接提供可供观察的结果,还需要通过其它设备才能显示出现。如磁带记录仪,数字记录装置等,它们通常是由打印机、绘图仪或类似设备将数据或波形打印出来。下面就这类指示和记录装置的工作原理介绍如下。

第二节 模拟式电压表

模拟式电压表读数是连续的,且不需要电源,可以醒目地观察被测电压信号的变化和变化趋势,电噪声影响小,结构简单,价格低廉。

通常模拟表是机电的结构方式,表针依据通过表的电压或电流信号而摆动,分度盘上印有刻度,因而指针指到读数上。图6-1所示直流模拟表头。其结构分为达松伐俄尔(D·Arsonvol)机构[图6-1(a)]和张紧弹簧扭带式悬挂支承[图6-1(b)]两种结构,(c)为表面。

采用张紧弹簧扭带式悬挂支承可以完全消除轴承摩擦,减小转动模量和温度影响,增加结构的坚固性,给被测电路加上的负载也减小了,这种结构可以提高仪表的精度。

一般电压表为晶体管电压表,表头前加了放大电路,这样增加了电压表的输入阻抗和总灵敏度,这种电压表通常可测多个量程交、直流输入电压,其静态误差均为满刻度的1—3%。

采用图6-1所示的表头来测交流电压(不一定是正弦电压),就必须进行整流。视所用电路不同,这种表头可以感测输入波形的平均值、峰值或均方根值(即有效值,记RMS)。一般把表头的刻度标定来读均方根值,这种方法对测量系统的正弦波才准确,因为在这种情况下,峰值、平均值和均方根值之间具有固定的常数关系,因而可把这种关系考虑在刻度盘的标定特性中,而对于非正弦波形,表的读数将是无效的,这时,感测峰值和平均值的电压表可经标定而用来读出均方根值,这样的电压表使用广泛,一般来说,结果是令人满意的。

图6-2示现了感测峰值、平均值和均方根值的电压表用的几种电路。在峰值电路中[图6-2(a)]电容器将充电到一周输入电压的峰值,由于二极管的单向导通作用和电压表的高输入阻抗,所充电荷将不可能迅速漏掉。所以,电压表两端的电压将维持接近输入电压的峰

值。此时,电压表示出的就是输入电压的峰值。

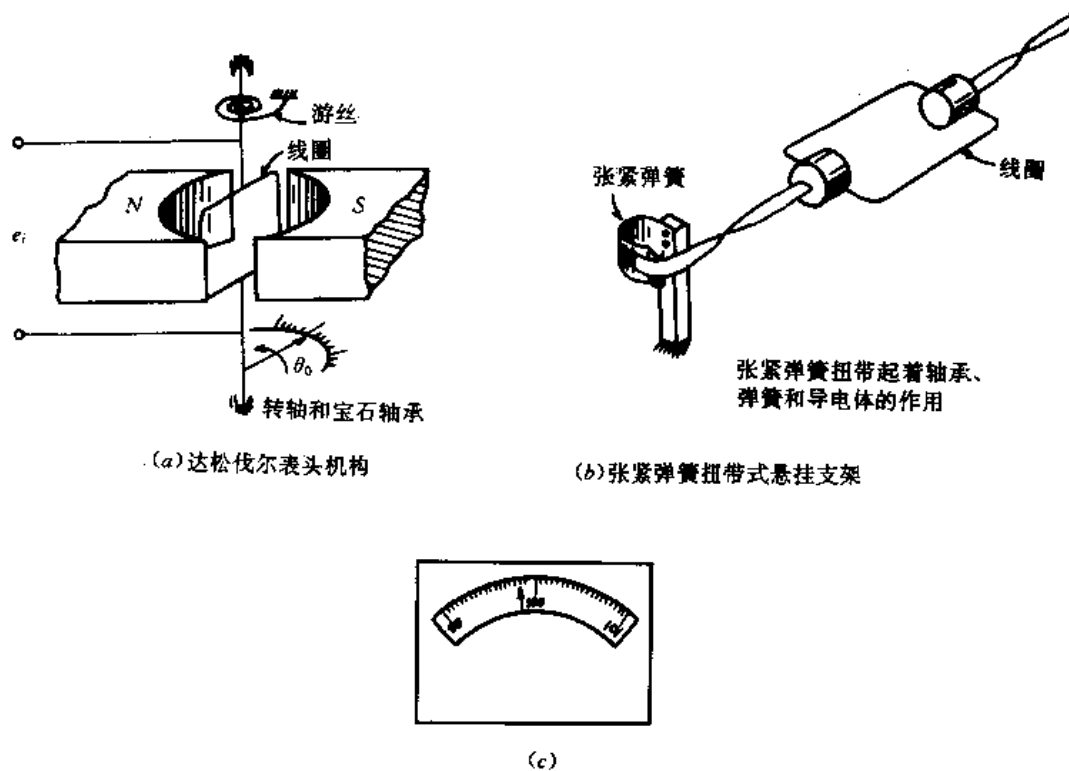


图6-1 直流式模拟表头

图6-2(b)示出了感测平均值的电压表用的电路,输入信号经过全波整流,并利用表头机构的低通滤波特性来提取平均值。

图6-2(c)示出了感测均方根值的电路,该电路类似于二极管式函数发生器,采用若干直线段来近似代表所需平方关系的抛物线。电容器上的平均电压被用来给此函数发生器中的二极管提供可变的偏置,这样就可获得比采用同样数量二极管的固定偏置函数发生器所能达到的精度要高。获得均方根值所需要的平均作用将由表头机构的低通滤波特性来提供,而平方根运算则通过表头刻度盘的非均匀刻度来完成。

在峰值读数表中,则不论波形的形状如何,测量值是精确的。而均值响应表对正弦波形,测量精确,对其它波形进行测量时,就会发生误差,一般厂家对每种波形提供校正因子,使得均值——响应表可以测量其它波形。对波形的均方根值响应的表又称为真均方根(RMS)表,这类表不论波形如何,可读出正确的RMS电压。

在进行AC测量时,必须考虑表的带宽。对于正弦波,带宽至少必须高于波形的频率;对于含有谐波的其它波形,则必须包括各次谐波频率。

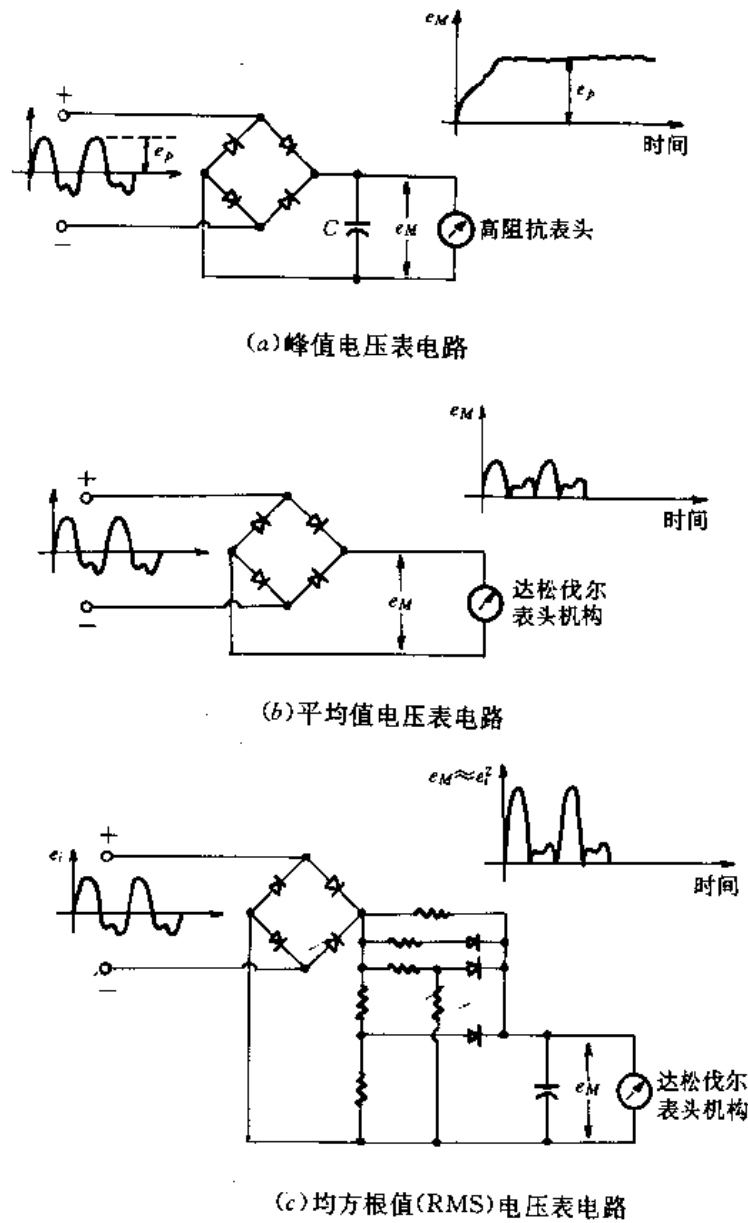


图6-2 电压表的几种用途

第三节 数字万用表

数字万用表与模拟表相比,具有更高的精度和更大的输入阻抗,目视距离较远且不易造成误读,尺寸小,能提供数字式的电输出(用于与外部设备接口)。数字电压表的三种主要类型是:面板式、台式和系统式。各种数字电压表都采用了某种类型的A/D转换器(通常是双斜积分式),而且具有目视的读出装置来显示转换器(LED数码管)的输出。一般,面板式数

字电压表只用于完成一种功能(甚至量程也固定不变),而台式和系统式数字电压表则大多为万用表型,它们即可测量交流和直流电压和电流,也可在几个量程上测量电阻。

台式数字电压表主要供独立使用和目视读数。系统式数字电压表则可提供二进制编码的十进制电输出,也可具有复杂的连线和控制功能(例如IEEE-488 接口)和具有基于使用微处理机的计算能力。

现在已有了具有各种专门功能的面板式数字电压表可资选用。其读出范围可由基本型的3位(显示屏有3位数字,即具有999个数码,精度为读数的 $\pm 0.1\% \pm 1$ 个数码)到高精度的 $4\frac{3}{4}$ 位(表示电压表有4位十进制数字加1位前导数字3,即具有 ± 39999 个数码,精度为读数的 $\pm 0.005\% \pm 1$ 个数码)。

台式数字电压表也有多种,有廉价的手持型的 $3\frac{1}{2}$ 位读出,精度为0.5%的电压表,到 $\frac{1}{2}$ 位读出(200000个数码),分辨率为 $1\mu\text{V}$ 的电压表。

系统式数字电压表,可用在数据采集系统中以提供基本的A/D转换功能,只需用数字电压表(DVM)来和各外部设备接口,即可组成这种数据采集系统。图6-3所示系统式数字万用表的构成方框图。

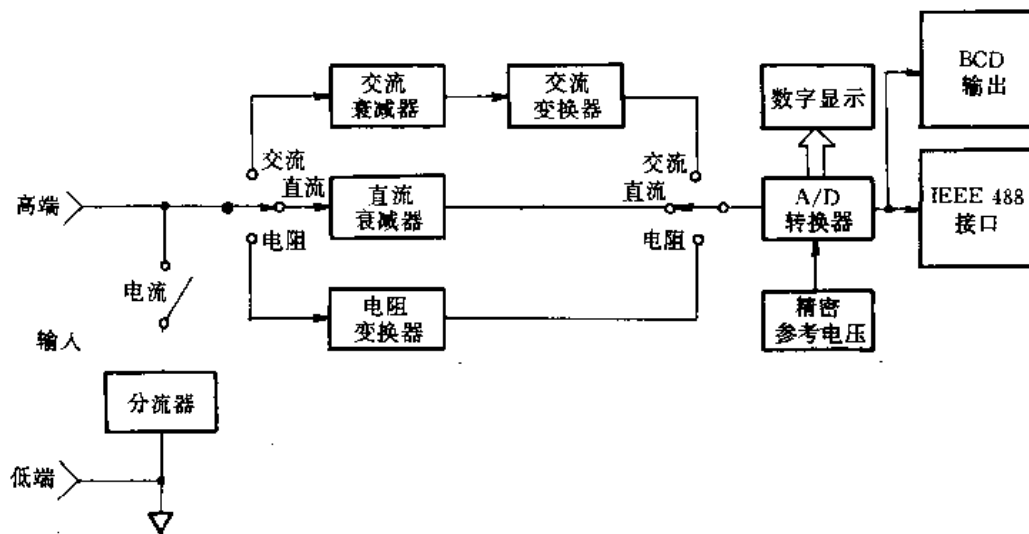


图6-3 数字万用表构成方式

图6-3所示的测量框图,其基本电路是测电压的电路。测电流时,让电流通过一精密的低阻的分流电阻器,就可把电流转换成电压;测交流,则把交流转换成直流,即采用整流器和滤波器。为了测量电阻,这种数字表采用了一个精密的小电流源,加在被测电阻器的两端,这样产生的直流电压,经转换成数字量后,作为电阻的欧姆数而读出。

除了测量电压、电流和电阻,数字万用表一般还具有二极管、三极管测试,导通指示器(即当连接电路的电阻)小于几个欧姆时,可发出嘟嘟声,这样,用户无需看表可集中注意力

进行电路检查。

在测量时,为了使测量精度达到最大,电表测量档最好用比被测电压大但量档最小的档,否则,会使测量精度降低;若电表的测量档比被测电压低,会使电表过荷从而可能损坏电表。若不知道被测电压的大概值,最好开始时,用最大档测量。

第四节 笔式记录仪

笔式记录仪是测量模拟信号时,使用的一种记录装置,记录纸作匀速运动,笔受被测电信号驱动,便能描绘出被测量信号随时间变化的状况。

笔式记录仪具有工作性能稳定、可靠、结构简单,使用方便等特点,通常用于长时间、变化较缓慢信号的记录。其主要缺点是活动部分惯性大,使用频率范围小;笔尖与记录纸间摩擦大,需要相当大的驱动力矩;摩擦形成的摩擦静区,在此区域内记录笔可能占有任意位置,而造成精度损失。

在动态信号测试中常用到笔式记录仪有检流计式记录仪、函数记录仪等。

一、检流计式记录仪

检流计式记录仪可用于记录诸如机械动态检测及工程动态检测时载荷变化历程及应力和应变历程等。目前最高工作频率在笔尖幅值为10mm 范围内可达150Hz,一般可以用于测量100Hz 以下的动态过程。检流计式笔式记录仪的结构原理如图6-4 所示。它主要由磁电式

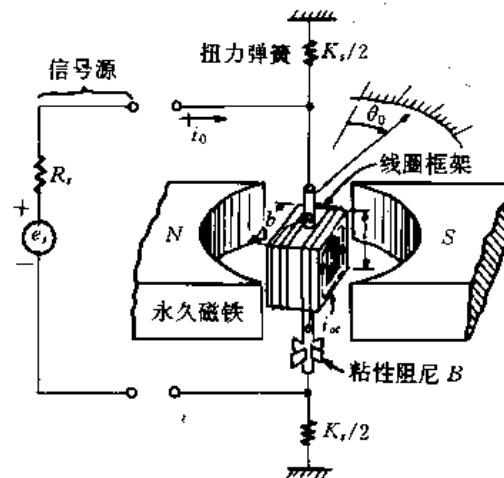


图6-4 检流计式记录仪

检流计、记录部分与传动机构等组成。为了达到较高的响应速度,采取如下措施:“使用直接驱动”(不需齿轮传动机构)的转角有限的电机机构,采用先进的书写系统(其中,使用具有特殊复层的记录纸,加压笔芯及粘性墨汁或采用流体动态补偿);采用无接触的位移传感器(如旋转式差动变压器和旋转电容式位移传感器。其工作原理是,当被记录的电流信号输入检流

计的线圈时,受磁场力的作用,线圈产生偏转,相应的弹簧产生与转角成正比的弹性恢复力矩,并与电磁力矩相平衡。由于线圈的偏转角度与输入电流的幅值成正比,在线圈轴上安装的记录笔便在记录纸上作大幅值的移动,当记录纸作匀速走纸运动时,笔在记录纸上就描绘出记录信号随时间的变化情况。

二、电气机械伺服式X-T 和X-Y 记录仪

图6-5 所示为改进型伺服式X-T 记录仪(X-T recorder)的工作原理。这种记录仪用来同时记录输入电压 $e_i(x)$ 相对于时间(T)的变化关系。记录笔的位移X。在整个设计频率范围内能精确跟踪电压 e_i 变化。以前的记录仪是通过恒速同步电机和按键式的机械变速齿轮机构来实现的,现在则大都采用如图6-5 所示的步进电机走纸动,基于同样基本原理的各种仪表伺服系统的改型,这包括采用交流式直流放大器,交流式直流电动机,旋转式或直线式电动机,各种机械传动机构(钢琴用钢丝和滑轮等),各种笔写手段,以及各种位移传感器(电位器、旋转式差动变压器,电容式位移传感器等)。可调的走纸速度(据此建立记录曲线的时基)。

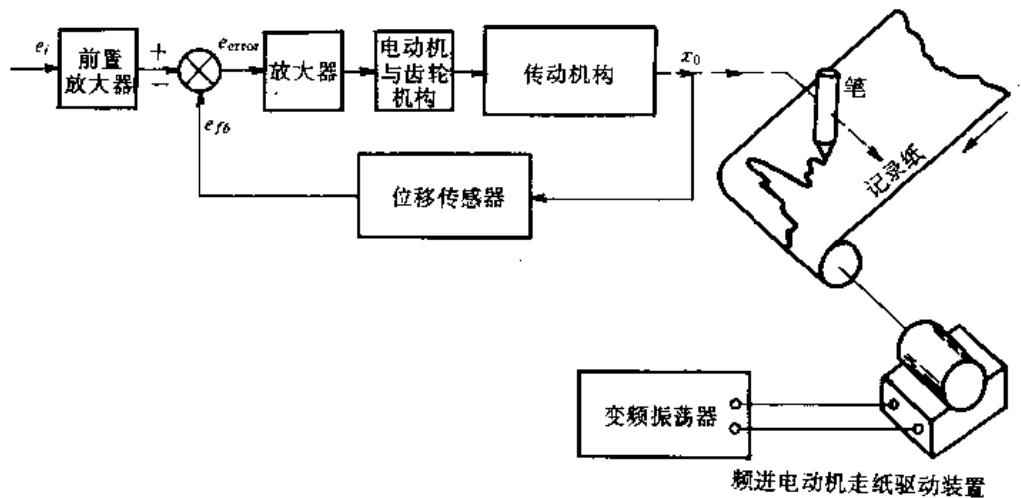


图6-5 伺服式笔录器

这类记录仪中有一类是采用较宽的记录纸(254mm),用于慢变的输入信号(对于满刻度行程来说,小于1Hz),最常用的是更替式纤维蕊墨水笔,但有的记录器则采用加温的笔尖和热敏记录纸。只需配用合适的前置放大器,这种记录仪几乎适用所需任何范围内的电压记录,而可实现的分辨力通常则可达几微米。多通道记录(每个记录笔使用一个单独的伺服系统)也是可能的,这时可通过各通道的记录宽度缩减或让各记录笔在整个记录宽度上重叠工作(如果各笔能够错开工作以避免机械冲突)来实现,但最多只能用到大约六支笔。实现多通道记录的另一途径就是,用多路切换器把各输入电压切换给一套伺服系统,并采用已编号的打印轮(或热敏式点阵打印头),以打印出通道识别或打出代表每一通道数据的符号(实际使

用限制20或30个通道)。这类记录器的静态精度都约为满刻度的0.1%。

为了描绘一个变量相对于另一个变量的关系曲线,可使用图6-6所示的 $x-y$ 记录装置(或称为绘图仪)。在这种绘图仪(plotter)中,记录纸固定不动(通道真空吸引力或静电吸引力而吸

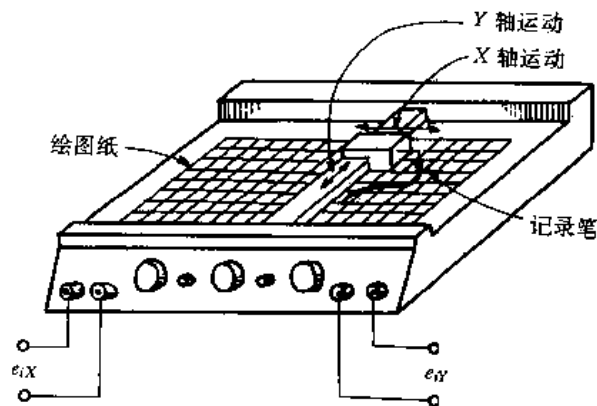


图6-6 $x-y$ 记录仪

附在工作平面上),这两类独立的伺服系统则使记录笔沿水平和垂直方向运动。记录纸的标准尺寸为 $216 \times 280\text{mm}$ 和 $280 \times 432\text{mm}$ 。 $x-y$ 绘图仪的性能与前面刚介绍过的 $x-t$ 记录器很相似,因为它们的机械运动比例尺相似。多数 $x-y$ 绘图仪都具有一斜坡电压发生器,它可以作为一个输入电压加在两套伺服系统中的任一套中,从而构成一个时基,以便进行 $x-y$ 记录。图6-7示出了一种典型的 $x-y$ 绘图仪的内部构造细节。具有数字输入的 $x-y$ 绘图仪,可用于计算机绘图工作。它可以采用开环线性进步电动机驱动系统,再加上具有比较复杂的压电式加速度计构成的阻尼装置和使用由程序控制的自动换笔机构,故可进行多种颜色的绘图工作。

第五节 光线示波器

光线示波器是动态测量中广泛使用的记录仪器,用来记录工作频率从零到数千Hz($0 \sim 25\text{kHz}$)之间的动态变化过程。它具有很多优点,如多线同步记录、直接显示、灵敏度高、使用方便。但它不能与计算机相配,进行数据处理。

一、原理与组成

光线示波器一般由振子(简称振子)、磁系统、光学系统、电器控制系统和传动系统等几部分组成,其中振子是光线示波器的核心部件。其工作原理如图6-8所示。在振子内,处于由电磁铁9形成的磁场中的线圈6上,当有被测信号电流流过时,线圈便带动反射镜5产生相应的偏转;由高压小银灯强光源1发出的光经光学系统投射到振子的反射小镜片上,于是

光线也随之偏转,偏转的光线经另一组光学系统,照射在感光记录纸8上,光点便在记录纸的垂直方向随镜片的偏转而上下运动,与此同时,记录纸在传动系统的带动下匀速运动;这样,光点在记录纸上便形成被测量信号随时间变化的模拟曲线。

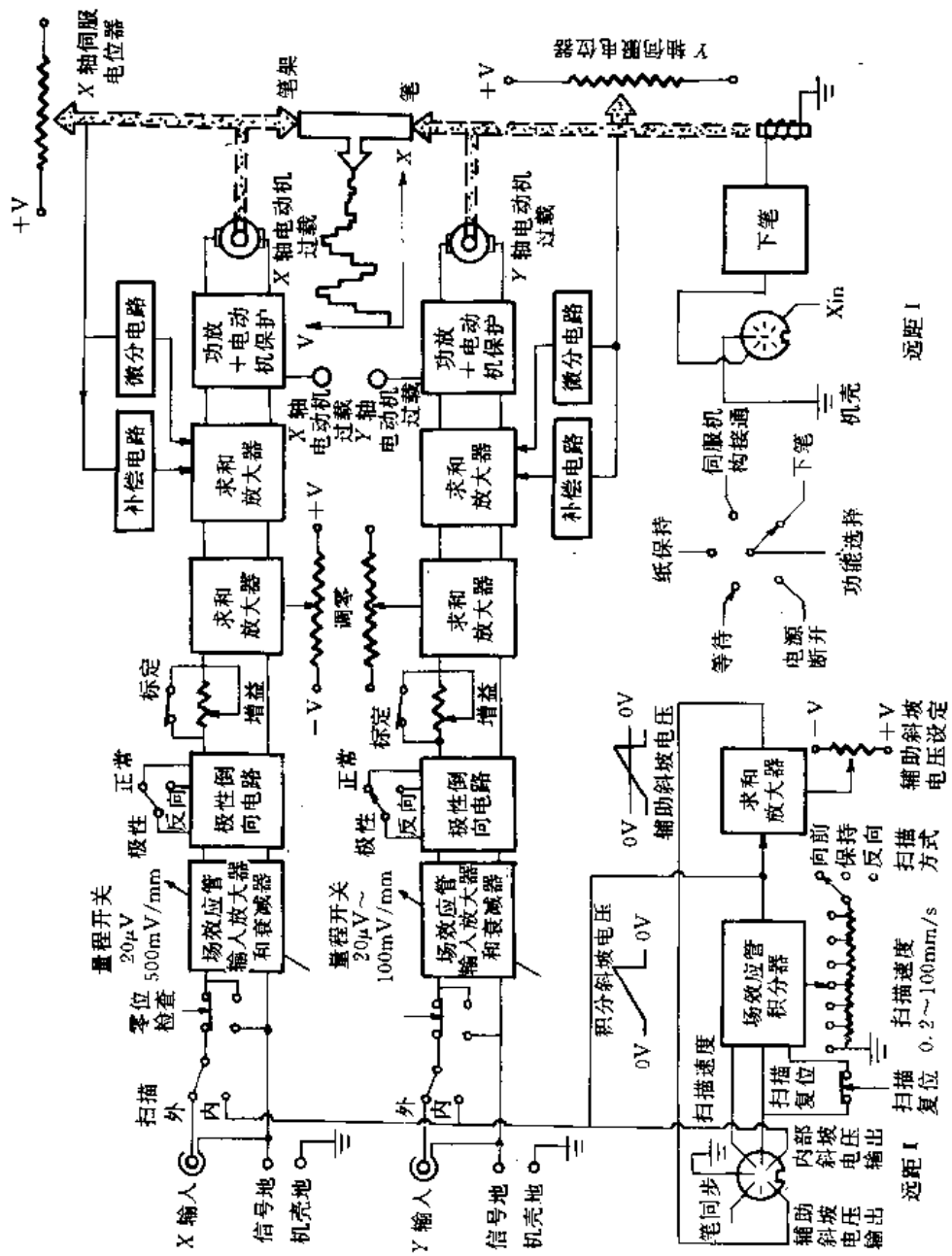


图6-7 x-y绘图仪内部构造

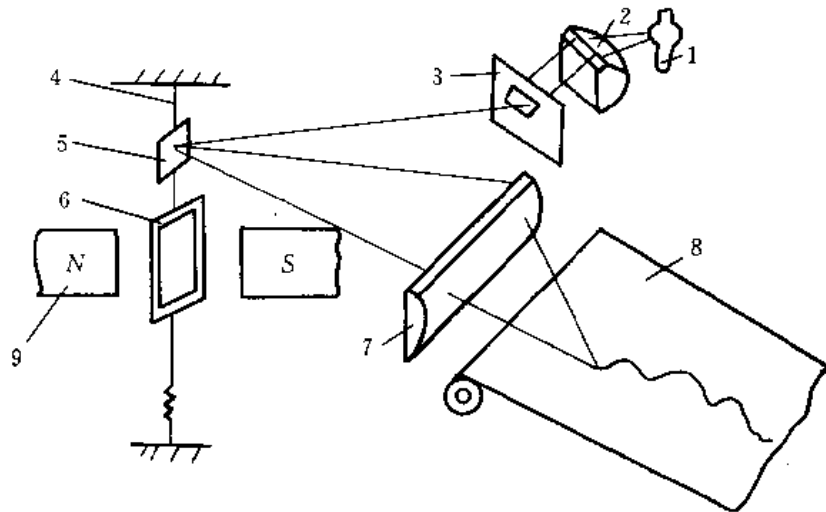


图6-8 光线示波器的工作原理

- | | | | |
|--------|------|------|---------|
| 1—光源 | 2—透镜 | 3—光栅 | 4—张丝 |
| 5—反射镜 | 6—线圈 | 7—透镜 | 8—感光记录纸 |
| 9—永久磁铁 | | | |

二、振子的结构及其特性

图6-9 示出了振子的结构细节。图中：1—线圈；2—张丝；3—镜片；4—弹簧；5—支承块；6—支架；7—壳体；8、9—接线插头。振子的基本模型是图6-4 所示的检流计的结构。在这一

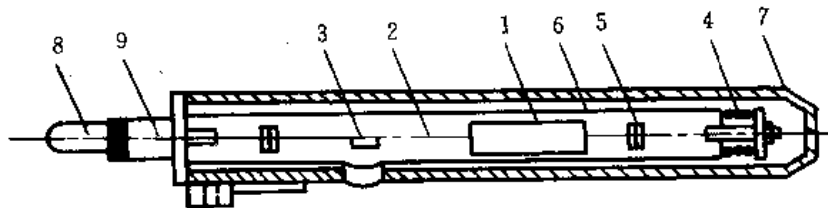


图6-9 动圈式振子

给定的结构中，粘性阻尼 B 可有可无，考虑到一般性，粘性阻尼存在。检流计是一种电气机械式变换器，可以用两个方程，一个电气方程、一个机械方程描述其动态特性，建立其数学模型。它的基本工作原理是，信号源的输入电压 e ，将导致线圈中有电流 i_c 流过。载流的线圈在磁场中将会受到一电磁力的作用。此电磁力产生一转矩，使线圈转动直到扭力弹簧的恢复转矩与电磁转矩平衡的位置上。对于恒定的 e ，输出指针（或反射镜片）将停在一确定的转角 θ 上。只要通过正确设计， θ 和 e 之间的静态关系就可保持线性关系。

对于图6-4 所示电路，由基尔荷夫电压回路定律，可写出：

$$i_g(R_s + R_g) + Lg \frac{di_g}{dt} + HNlb \frac{d\theta}{dt} - e_s = 0 \quad (6-1)$$

式中： $HNlb \frac{d\theta}{dt}$ 线圈运动时所产生的反电势。

H ——磁通密度； R_g ——线圈电阻； N ——线圈匝数；
 R_s ——信号源内阻； l ——线圈长度； b ——线圈宽度；
 Lg ——线圈电感。

由力学牛顿定律，可写出机械方程：

$$HNlb i_g - \frac{(Hlb)^2}{R_f} \frac{d\theta}{dt} - k_s \theta - B \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (6-2)$$

式中： B ——粘性阻尼系数； K_s ——扭力弹簧常数；

J ——线圈绕转轴旋转的转动惯性矩。

$HNlb i_g$ 为电磁转矩， $Hlb(\frac{d\theta}{dt})$ 为线圈在磁场转动时所感应的电动势，且在框架中将有涡流 $i_{ec} = (Hlb/R_f) \frac{d\theta}{dt}$ 流过，其中 R_f 为框架(线圈)电阻。此涡流在磁场作用下，会使框架受到负电磁转矩($-Hlb i_{ec}$)的作用。

解方程(6-1)和(6-2)可得：

$$i_g = \frac{e_s - HNlb(d\theta/dt)}{R_s + R_g} \quad (6-3)$$

上式代入式(6-2)，整理后可得：

$$\frac{\theta_0}{e_s}(s) = \frac{k}{s^2/\omega_n^2 + 2\xi s/\omega_n + 1} \quad (6-4)$$

式中：

$$k = \frac{HNlb}{K_s(R_s + R_g)} \text{ (rad/v)} \quad (6-5)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{J}} \text{ (rad/s)} \quad (6-6)$$

$$\xi = \frac{B + (Hlb)^2/R_f + (HNlb)^2/(R_s + R_g)}{2\sqrt{K_s J}} \quad (6-7)$$

由式(6-4)可知，振动物是一种系统仪表，只要增加 H 、 N 、 l 和 b 或减小 K_s 、 R_s 和 R_g 就可以提高其灵敏度。但这样做，会使 ω_n 减小，响应速度将变慢。值得注意的是，振子灵敏度随信号源内阻 R_s 而变。

式(6-7)表明机械粘性阻尼 B 可以完全去掉，而系统仍然保持有一定阻尼。余下的阻尼作用却是电磁阻尼性质的，是由与 $\frac{d\theta}{dt}$ 成正比的反电势所引起的。在低频率、高灵敏度的振动物子中，电磁阻尼就足够达到 0.65 的最佳 ξ 值，而不必要机械阻尼 B 了。这种振动物子也可在其线框架上设置切口，以便 $R_f = \infty$ ，从而有：

$$\xi = \frac{(HNlb)^2}{2\sqrt{K_s J}(R_s + R_g)} \quad (6-8)$$

这样 ξ 取决于信号源内阻 R_s 。为了便于 ξ 到达 0.65 的最佳值，在传感器和振动物子之间应

接入一合适的电阻网络。如果传感器的电阻(即 R_s)过大,则需要接一个分流电阻器;如果过小,则接一个串联电阻(参看图6-10)。对于高频率,低灵敏度的振动物,电磁阻尼是不够的,需要有机粘性阻尼。此时,电磁阻尼只是总阻尼的一个很小的百分数,可忽略不计。

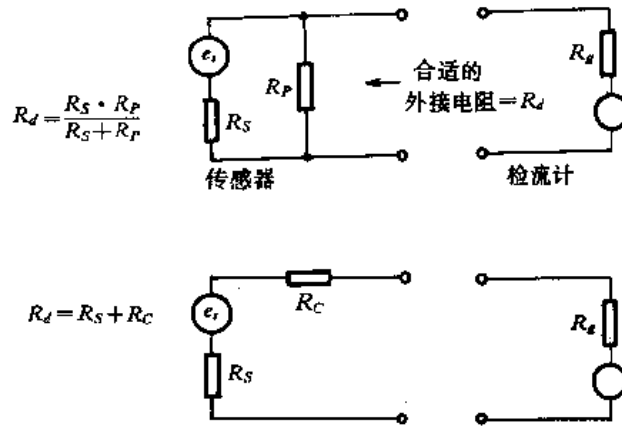


图6-10 阻尼网络

表6-1 列出了具有代表性的各种振动物的工作参数。这些振动物可很方便地从光线示波器的永磁块中取出,并换上适合具体工作需要的其它振动物。因为光束不会像机械传动臂那样相互阻碍,故多通道示波器的每一通道都可记录记录纸的全部宽度。光线示波器也可产生较大的偏移,现已有满刻度偏移为100~200mm(即记录纸宽度)的商品光线示波器。在305mm宽的记录纸上可以同时记录42个通道的信号。光线示波器具有按键,可供选择走纸速度。现在最高走纸速度已达5m/s。由于走纸传动机构所提供的时基一般不够精确,所以光线示波器内部都装有一个精确的时基格线发生器,能在记录纸上(用光学方法)打印出精确的格线(例如每0.01s打出一条格线)。

表6-1 FC6型动圈式振动物技术参数

型号	固有频率 Hz	工作频率 Hz	电流灵敏度 S_i (mm/mA)		内阻 R_f (Ω)	要求的外阻 (R_d) (Ω)	光点最大允许偏移量 (mm)
			$I_B=30\text{cm}$	$I_B=100\text{cm}$			
FC6-10	10	0~5	2000	6500	120	2000	± 80
FC6-30	30	0~10	3000	1000	120	900	± 100
FC6-120	120	0~60	840	2800	50	275	± 100
FC6-400	400	0~200	72	250	55	275	± 10
FC-1200	1200	0~400	12	40	20	粘性阻尼	± 50
FC-2500	2500	0~800	2.45	8.1	16	粘性阻尼	± 50
FC-5000	5000	0~1700	0.45	1.4	12	粘性阻尼	± 30

第六节 数字式存储示波器

数字式示波器和模拟示波器都可用来显示电压波形。模拟示波器运用传统的电路技术在阴极射线管上显示波形。而数字示波器是把原来的模拟信号转换成数字形式(一串二进制数),才能进行显示或进行存储。这意味着数字示波器是存储式示波器,把它和模拟示波器对照,模拟示波器上的电压波形显示时间是短暂的,当输入信号消失时,显示的波形也消失。而数字示波器的波形是用数字方式存储的,波形就可保留在荧光屏上,可供用户仔细进行分析。

一、原理与组成

数字式存储示波器的基本工作原理如图6-11所示。

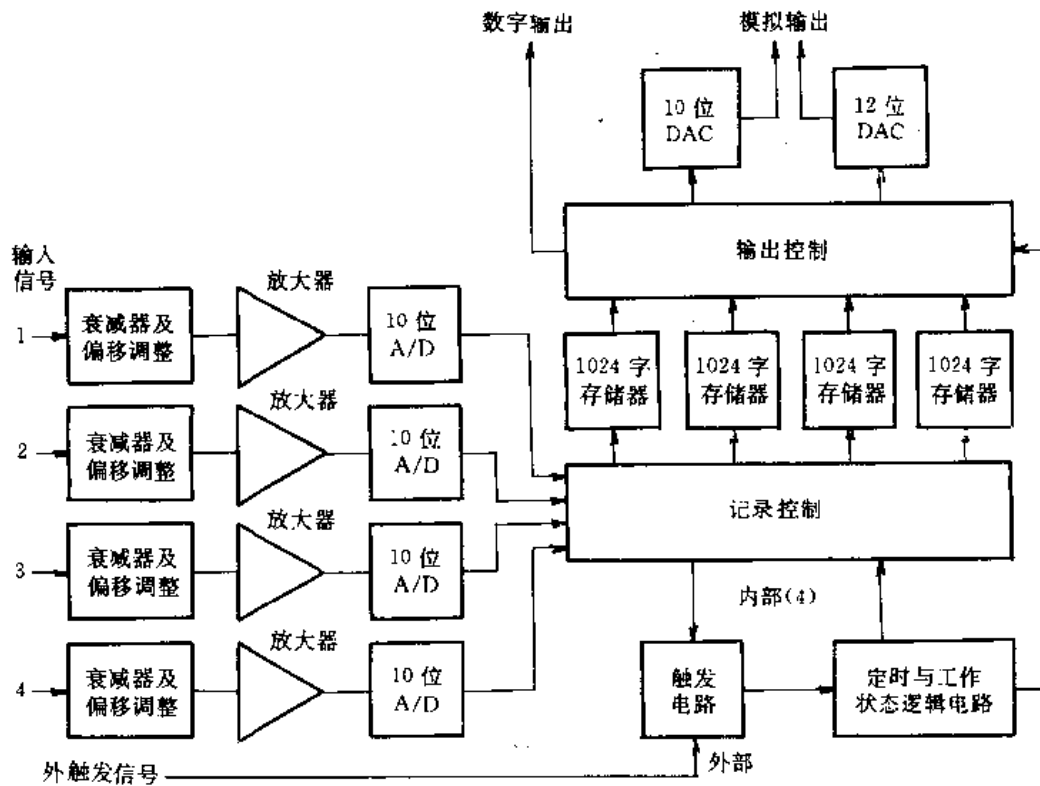


图6-11 数字式存储示波器的工作原理

此数字示波器可以同时记录四个独立的信号。数字式示波器主要由A/D转换器、时钟发生器和控制电路、存储器、D/A转换器四个部分组成。其工作过程是:被测信号经过相传感,转换成模拟电压时域信号,经衰减器和放大器以及极性变换电路的处理,以合适的电平加至A/D变换器,通过A/D变换器,以一定的速率采样,并进行比较后,模拟量转换为离散的数字信息。A/D变换器的数字输出由控制电路发出的指令脉冲控制,逐一地存入数字存储

单元中,直到存储器满容量为止。也可同时输入到计算机进行处理。

重放时,将存储单元和D/A 变换器对应相接,指令脉冲通过控制电路加在存储器和D/A 变换器上,一一提取所存储的数字信息转换为电压模拟信号,并经零偏处理后,复原为原输入波形,该波形便可在各种模拟量记录仪(如阴极射线示波器、检流计 x - y 记录仪和光线示波器)上显示出来,也可通过CRT 显示屏显示出波形。

我们以一个通道详细说明其工作原理。被测信号由相应传感器转换成模拟的电压信号,经前置放大器放大后的输出信号,由跟踪——存储式取样——存储电路(即取样保持电路)进行取样,并由一个12 位的A/D 转换器转换成数字信号,此A/D 转换器的分辨率为0.0025% (实际上为1/4096),频响可达100kHz,用于单独一个通道,数字式存储器总共可以储存4096 个字;若用四个通道,则存储器可以储存1024 个字。模拟输入电压被可调的采样(最高可达每秒100,000 次采样)的A/D 进行采样。将所测点的数据读入存储器,故这台记录仪中最大可储存4096 个测点。(采样频率和存储器的容量必须选得适应所记录的物理事件的持续时间和波形。)当信号采集到存储器中,便可以进行多种用途的处理。通过D/A 转换器对存储器进行读出,就可用慢变的电压信号来复现原来的物理信号(它原来可能变化极快)。数字存储器中的数据还可直接读入到一台计算机,从而可用计算机中所存放的程序来对数据进行几乎任何所需的处理。

一般数字记录仪都具有触发功能,可方便地捕捉各种瞬变信号。其触发方式一般有三种:①内触发,它是由输入信号的幅值上升到超过某一预调的阈值(thrashed value)即则触发数字记录仪作为记录的起始点。②外触发,它是由输入一外部脉冲来触发记录仪的工作。③人工触发,它上由人直接操纵记录仪工作。

上述的数字存储式波形记录器(或称数字式录波)与模拟输出信号的记录装置相组合,就可得到商品化的数字式录波器(oscillograph)和示波(osilloscope)器。只在采用这种波形数字化原理的记录仪,可以使直接书写式记录器(显示记录器)在很广的频率范围内方便地和高质量地进行记录。例如,频响仅为40Hz 的笔式记录仪,与数字存储式波形记录相组合,则频响可扩展到20kHz。如果这种记录与计算机、显示器、打印机(或绘图仪)相结合,更可构成能对信息进行采集、分析和输出的一个完整的信息处理系统。假设在这个系统中采用12 位的A/D 转换器、高分辨力的显示器,这时其电压和时间读数值的分辨力可达0.0025%,精度可达0.1%。这就比拟式示波器的具有代表性的2~5%的精度高多了。该系统还具有“分屏”(split-screen)显示功能(即同时在一个幕上显示实时的模拟示迹和回放被存储的模拟示迹),可很方便地实现信号之间的比较。这样的系统具有在CRT 显示器中使用快速存储器读出功能,能对信号进行动态快速显示处理,也能实现慢速读出,以便在外接打印机(或绘图仪)上获得硬拷贝,其信号可存储在磁盘上,其存储容量可达1.4Mbit。

二、数字示波器技术性能及选用原则

数字记录仪与示波器组合可构成数字示波器,因此数字示波器性能好坏关键决定于A/D 变换器和存储器。数字示波器的主要性能指标为:

1. 取样率(或采样频率、采样速度)

一般以单位时间内的采样次数,即采样频率给出;另一种常用表示方法为采样一次或一个字节所需的时间,这由A/D 变换器所决定。

在实际的使用中, A/D 变换器的采样率必需远大于信号带宽(BW)的两倍, 即

$$f_s > 2BW \quad (6-9)$$

式中: f_s ——A/D 的采样率; BW ——信号的带宽。

式(6-9)中, A/D 转换器的最小采样率称为尼奎斯特(Nyquist)率。上述关系保证频率处于带宽极限的正弦波每周需进行两次以上的采样。这一方程确定了理论上的最小采样定率。实际上, 需要较高的采样率来精确呈现原来的信号, 一般选取被测信号最高频率的3~5倍以上。

数字示波器的采样率和带宽有时容易混淆, 比如100MHz 的数字示波器, 指的是它的采样频率为100MHz, 还是带宽为100MHz; 为了不混淆, 数字示波器制造厂将采样率用每秒取样次数规定, 带宽则以赫规定, 即采样率用MSa/S(每秒兆次), 带宽用MHz(兆赫)。

2. 垂直分辨力

数字示波器中的A/D 转换器把输入电压转换成二进制数, 这一过程产生信号的量化, 即连续变化的输入波形被转换成一串不连续数值。

n 位的二进制数可代表 2^n 个不同值或不同码。对于 $V_{范围}$ 的电压范围, 四位转换器的电压分辨力为:

$$V_{分辨} = \frac{V_{范围}}{2^n} \quad (6-10)$$

例1 具有8 位模—数转换器的示波器, 当它的灵敏度为200mV/分度, 其电压分辨力为多少? (假设, 模—数转换范围有8 个垂直分度)。

模—数转换器转换的电压范围是 $8 \times 200\text{mV} = 1.6\text{V}$, 其分辨力可计算如下:

$$V_{分辨} = \frac{1.6}{2^8} = 6.3(\text{mV})$$

电压分辨力也可用全刻度电压范围的百分数表示。表6-2 为模数转换器位数不同时的垂直分辨力。

表6-2 模—数转换位数和垂直分辨力

位 数	分辨力
6	1.56%
7	0.28%
8	0.39%
9	0.20%
10	0.098%
11	0.049%
12	0.024%

3. 存储容量

存储器的容量常以可存储的字数或采样点数表示。如1K 表示可存储1024 个采样点或称为1024 个字, 2K 为2048 个字, 4K 为4096 个字符。容量的选择取决于被测信号的延续时间, 在采样率确定的前提下, 容量越大, 数据采集的时间长度即采样周期就越长。具体容量大小则要依据采集必要数据的需要而定。一般来讲, 容量大, 可以存储较多的数据, 但容量增大

会增加仪器的造价,过多的数据也会增加结果处理时的工作量。常用的容量为1K、2K 和4K。

4. 输入特性

输入信号的电压幅度应与所选的输入量程相匹配;输入带宽,主要由采集速率、输入放大器的带宽所决定;输入阻抗,一般为 $1M\Omega$ 左右。

输入特性的其它内容,如放大器线性、零点漂移等,应根据被测信号的要求进行选择。

5. 通道数

数字式示波器的通道设置方式有两类。一类是每个通道都配置一套放大、采样、A/D 变换器及数字存储器记录装置,它们主要用于需要同时测量多路信号的测试中。另一类是各路共用一套A/D 变换器及数字存储器,在信号输入端增加一套多路转换开关,以切换方式记录多路信号。

除上述性能指标外,其它如触发方式、输出信号的类型与方式,有无通用接口等也应注意到。

第七节 磁带记录仪

磁带记录仪具有许多特点。它能够记录信号电压,储存电压信号可任意长时间,然后再复制成基本上与原来的电压相同的电压信号。它能够连续记录快变的输入信号,其记录信号的频宽(从直流到兆赫);存储信息密度大;重放速度可以与记录时的速度不同,从而实现信号的时基的变化。这些特点是其它记录仪较难具备的。磁性记录方法有直接记录、调频(FMT)记录、脉宽调制(PDM)记录及数字记录等,下面主要讨论直接记录和调频记录的工作原理。

磁带记录仪的组成如图6-12 所示。图6-13 为记录磁头和复制磁头的局部放大原理图。

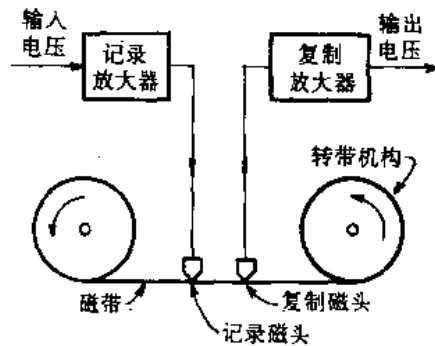


图6-12 磁带记录仪工作原理

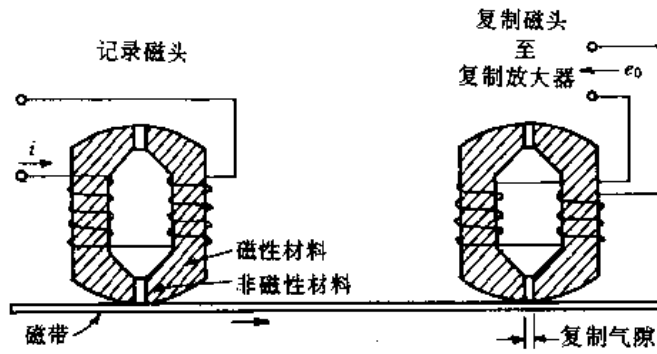


图6-13 记录磁头和复制磁头

工作原理是,与输入电压成正比的电流*i*流过记录磁头上的绕组,从而在记录气隙处产生磁通 $\phi = K_i i$;磁带(为涂有氧化铁微粒的塑料薄带)在此气隙下面通过,氧化铁微粒将保持与其刚离开气隙瞬间存在的磁通成正比的永久磁化状态。实际中,所加磁通与所引起的磁化强度因磁滞回线的非线性关系而并非成正比。但是,可通过高频偏置技术而有效地获得接近线性的关系,其理如图6-14所示。

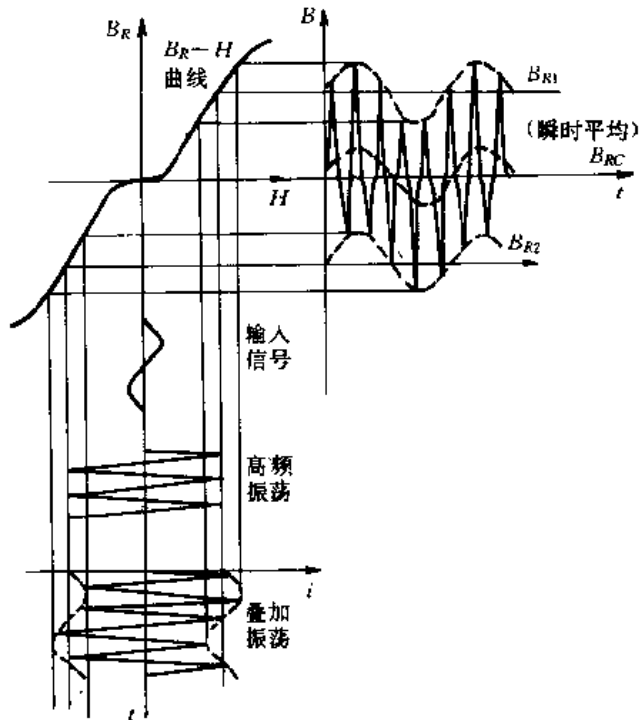


图6-14 采用高频偏置时磁带的磁化响应

如果输入信号为正弦量,即 $i = i_0 \sin 2\pi f t$ 。假定磁带速度为每秒(1in=24.5mm)记为 V ,磁化强度则沿磁带以正弦方式随位移 x 按下式而变:

$$\text{磁化强度} = m = K_m k_i i_0 \sin\left(\frac{2\pi f}{v} x\right) \quad (6-11)$$

所以,磁化强度变化的波长为 v/f 。例如,磁带速度为60in/s,60Hz的信号将产生1in的磁化变化的波长。如果具有这种信号的磁带在复制磁头下面通过,那么在线圈中将产生与通过气隙的磁通的变化成正比的电压。

即
$$U_{\text{气}} = K(d\Phi/dt) \quad (6-12)$$

由式(6-12)可知,输出电压取决于磁通的变化速度,故对输入直流电流所造成的恒定的磁化强度,复制磁头将不会产生任何输出。

上面所介绍的磁带记录仪的工作原理,就是所谓的直接磁带记录法。该法只能用于变化的输入信号,而以50Hz为常用的下限。此外,因为复制磁头具有微分特性,故复制放大器必须具有积分特性,以使系统的输出能正比于其输入,图6-15表示了重放磁头及其放大器的特性。

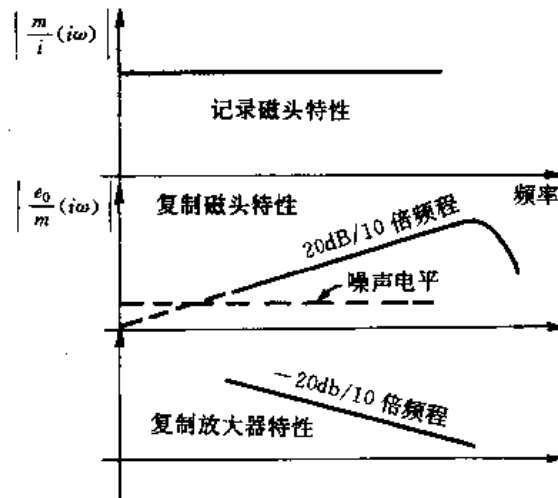


图6-15 重放磁头及其放大器特性

采用该方式的记录仪,存在一个上限频率,这是因为在足够高的频率上,对于一给定的复制气隙和磁带速度,若磁化强度的一个波长变得等于或小于气隙宽度,则气隙处的平均磁化强度将为零,而不会产生输出电压信号。

例如,一磁带记录仪,其磁带速度为240in/s,气隙宽度为0.00008in,其上限频率为

$$f = \frac{v}{d} = \frac{240}{0.00008} = 3(\text{MHz})$$

一般情况下,直接记录法的可用频率范围大约在100Hz到2MHz的频带内。这种记录仪的信噪比大约为25dB,即18:1。

直接记录法对磁带表面磁性涂层的微小缺陷很敏感,使得噪声电平比较高。因此,直接记录法的精度并不高。

采用调频(FM)系统,可精确地记录和响应输入电压信号。在这种系统中,输入信号被用来对一载波进行调频,然后再用通常的方法把它记录在磁带上。这时,记录信号的好坏只与有记录信号频率有关,而与造成瞬时幅值误差的磁带的缺陷无关。调频式记录器的信噪比可以达到40~50dB(即100:1~330:1),这表明其误差一般都小于1%。若载波频率足够高(432kHz),调频式记录器的平直(± 1 dB)的频响特性就可在120in/s的带速下延伸到高达80kHz。由于该磁带记录仪在载波频率两边的频偏为 $\pm 40\%$ 。因此,带速度变化与载波频率成正比变化。这样,信号就可以在一种带速下记录,而在任何其它带速下回放,而不致改变信号的幅值。此时,时间比例尺却压缩或扩展了。该磁带记录仪的技术指标如表6-3所示。

表 6-3

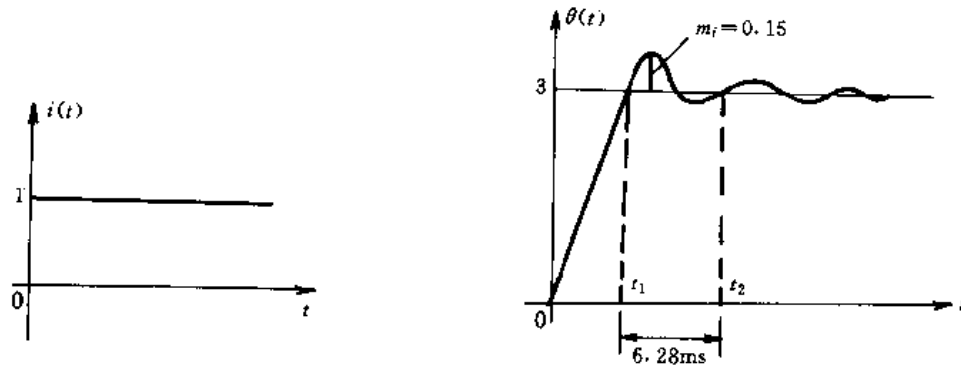
带速 (in/s)	载波频率 (kHz)	平直的频响特性 (± 0.5 dBHz)	信噪比 (均方根值)
120	108	0~20000	50
60	54	0~10000	50
30	27	0~5000	49
15	13.5	0~2500	47
$7\frac{1}{2}$	6.75	0~1250	47
$3\frac{3}{4}$	3.38	0~625	46
$1\frac{7}{8}$	1.68	0~312	45

该表中所示的最大时基变化约为 $60:1(120/1\frac{7}{8})$,它不可以通过信号的再录而得到进一步提高。例如,原始信号可用120in/s的带速来记录,再以 $1\frac{7}{8}$ in/s的带速来回放,然后复制放大器的输出信号馈入以120in/s的带速运转的另一台磁带记录器的记录放大器的输入端。如果此时,后一台磁带记录器再以 $1\frac{7}{8}$ in/s的带速回放,使可获得总减速比为4096:1。磁带减速应用的另一个例子是,以120in/s的带速记录20,000Hz的信号,再以 $7\frac{1}{2}$ in/s的带速将其回放到一个频响达2,000Hz的光线示波器,以获得长久保存记录。此回放的技术在仿真技术中得到应用。例如,飞机上的振动,便可在真实的环境条件下,进行测量和作磁带记录。然后再把磁带拿回仿真实验室,通过把磁带信号回放到一振动台中,便可在实验室中复现环境参数(如振动参数)。

磁带记录仪也可采用高精度的脉宽调(PDM)法和数字记录法,详细介绍请参阅有关文献。

习 题 六

- 6-1 试分析光线示波器、磁带记录仪、数字记录仪及检流计式记录仪的使用特性及通常的使用范围。
- 6-2 SC16 型光线示波器的振动物输入 $i(t)$ 为单位阶跃, 输出 $\theta(t)$ 如题图 6-1 所示。求振动物的阻尼率 ξ 及固有频率 ω_0 , 并写出其频率特性表达式。



题图 6-1

- 6-3 如果要用几个振动物记录几个不同频率的正弦信号, 并需观察分析各路信号之间的相到关系, 试问如何选择各个振动物?
- 6-4 现用 FC6-30 型振动物记录 10Hz 正弦信号, 信号幅值为 2V, 要求在记录纸上偏转 $\pm 50\text{mm}$, 求电阻网络的电阻值 (设信号源内阻为 200Ω)。
- 6-5 现用固有频率为 1200Hz 的振动物记录基频为 600Hz 的方波信号, 试分析记录结果, 并绘出记录波形的示意图。
- 6-6 被测信号为一周期变化的位移量, 其有效频率成分可达 500Hz; 并令电源激励频率为 10kHz。输出电压接到一示波器的检流计, 后者为二阶系统, 其 $\xi = 0.65$, 自然频率为 1000Hz。这种组合能得到令人满意的测量系统吗? 试用数值结果来说明你的回答。

第七章 计算机辅助测试技术

第一节 概 述

一、基本概念

随着计算机技术的日益成熟和飞跃发展,工程测试系统越来越普遍地采用计算机技术和数字技术。数字信号处理技术就是利用计算机或专用处理设备,以数值计算的方法对信号进行分析、变换、综合、估计、识别等加工处理,借以达到提取信息和便于利用的目的。这些信号的加工及处理可采用软件方法,也可采用硬件方法,或软、硬结合的混合方法。由于计算机对数字信号处理具有灵活、精确、稳定、抗干扰性好,以及在设备上尺寸小、造价低、易于集成化和便于程控。因此在工程测试上得到广泛应用。

现代微型计算机,可以储存大量的数据、信息,运算速度(时钟频率)可达每秒几百兆比特,这样可快速对所测的数据进行分析、综合处理(甚至实时处理)。采用计算机技术的测试系统,极大提高测试效率。由于计算机引入测试系统,使测试系统中对传感器特性能自动作非线性校正或温度校正,可以充分地、最大限度地发挥测试设备的潜力作用,在保证测试结果仍具有较高精度情况下,极大降低对设备的要求,大大促进了测试仪器和测试系统向智能化发展的进程。在不少场合,例如动态测试、瞬态信号测试等,它还使测试达到了仅仅依靠原测试系统不能达到或难以达到的水平。显然,许多工程测试只有在计算机的辅助下才能正确地或实时完成。这是近年来计算机辅助测试得到重视和发展的主要原因。这种借助于计算机来实现测试任务的手段和方法,称之为计算机辅助测试,简称为CAT(Computer-Aid ed TesTing)。

计算机辅助测试大概包括以下几个方面:

- ①对已测得的信号作数字信号分析处理,以获取有用信息。例如以FFT 为核心内容的数字式频谱分析,现代谱分析及模态分析。
- ②改善测试系统的特性或功能。改善的传感器的动态特性,例如使测试系统能自动地做非线性校正、零点漂移校正、自动切换量程、自动进行测量顺序的切换。
- ③在计算机应用程序的辅助下,开发各种用途的测试方法,进行在线测量。
- ④以微机为核心组成自动测试系统,完成非人工所能胜任的测试工作。

二、研究内容

计算机辅助测试技术包括计算机技术和数字信号处理技术。它是一门新兴的技术,涉及面广,本章限于篇幅,就其基础知识、基本构成从以下四个方面作出介绍。

1. 数据转换与采集技术

计算机只能识别和处理数字量,而几乎所有工程信号都是以连续可变的模拟量形式出现的,因此要测量和处理这些物理量,必须要把模拟量转换成数字量,这就涉及到信号的采样与量化的基本原理,即经过模-数转换,用符号A/D表示。另一方面,由计算机输出的处理结果,则需要通过数-模转换,才能适合实际的需要。因此须对A/D器件、D/A器件的基本工作原理了解,才能清楚数据转换的过程。

2. 频谱分析技术和模态分析

频谱分析是从频域上来处理信号。它可分经典的和现代的两大类。前者指以快速傅氏变换(FFT)为基础的谱分析。它至今仍能满足多数工程信号的处理,获得广泛应用。为了克服FFT技术中的泄漏和主瓣加宽现象,70年代以来兴起现代频谱分析技术,如最大熵谱分析、ARMA谱分析等。这些技术近年来在测试领域得到发展和应用。

模态分析则是从时域对信号序列进行分析和处理。它和现代谱分析技术一样,都是以对信号序列建立参数模型为基础。

3. 数字滤波技术

它包括有限冲激响应型(FIR)和无限冲激响应型(IIR)线性数字滤波。此外,如同态滤波、自适应滤波等非线性数字滤波在工程测试中也得到应用。

4. 计算机自动测试技术

它包括测试系统的各种误差的修正以及由微机、测量仪器和接口组成自动测试系统。

三、计算机辅助测试系统的概念模型和测试算法

将计算机应用于工程测试领域,是将人类的聪明才智和计算机巨大的计算机能力和数据处理能力结合起来,更有效地完成测试任务。图7-1示出了CAT的结构模型,图7-1(a)是一个概念模型,图7-1(b)是一个实用结构模型。

计算机辅助测试有三个基本任务,即输入矢量的产生 x ,输出矢量的响应 y 和测试 T 的获得。图7-1所示的结构模型,可完成上述三项任务。首先,根据测试算法编制出测试软件,经计算机运行后产生测试矢量,该矢量被作为被测系统的输入矢量 x 加到其原始输入端。经被测系统响应后输出其响应 y ,计算机接收响应 y 后,即进行计算和比较判断,从而得到一个测试 T ,并在CRT显示器或打印机上显示或打印测试结果。

测试算法的目的在于测试矢量的生成,它与被测系统的结构密切相关。例如,一种基于结构描述的测试算法,这种算法必须知道被测系统的逻辑结构。

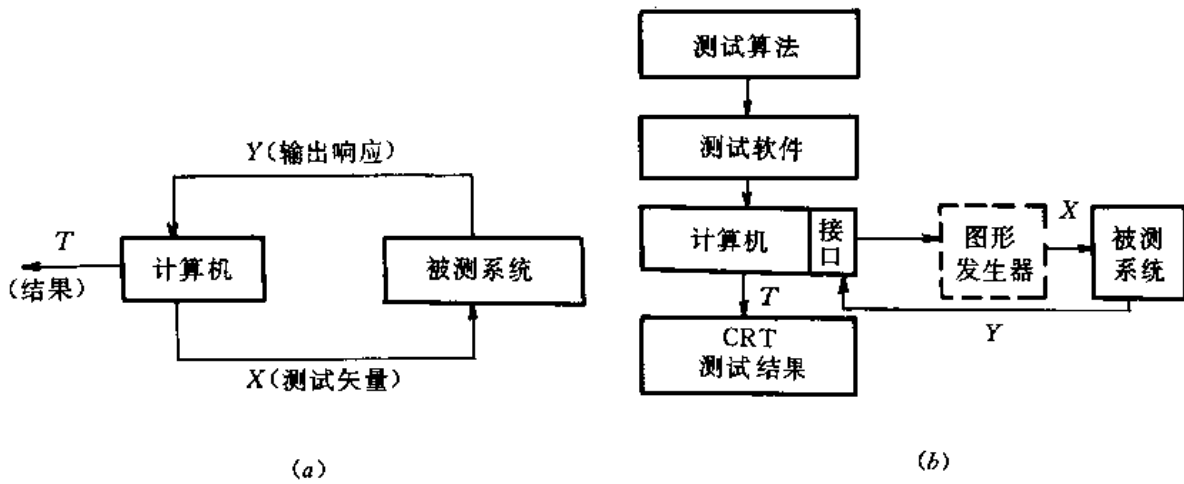


图7-1 CAT 结构模型

第二节 工程信号的采集

计算机辅助测试过程就是在计算机的辅助下,完成对连续模拟信号的采集、处理的过程。在各类电子计算机中,以微机的发展最快。微机是指以微处理器(一种具有CPU功能的大规模集成电路)为核心,加上系统总线,以及存储器、输入/输出(I/O)接口及其它配套电路组成,其基本结构如图7-2所示。

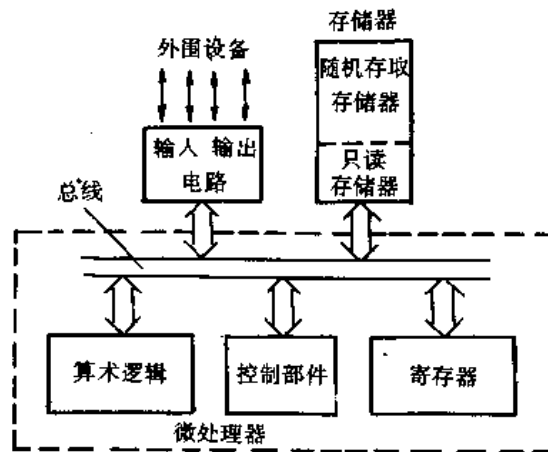


图7-2 微机基本结构框图

微型计算机配上所需的外围设备和电源等辅助电路,以及系统软件等构成微机系统。显然,微处理器只有控制和计算部分,它不是计算机。微机系统才是具有完整运行功能的计算

机系统。图7-3 表示出微处理器、微型计算机、微型计算机系统三者之间的关系。

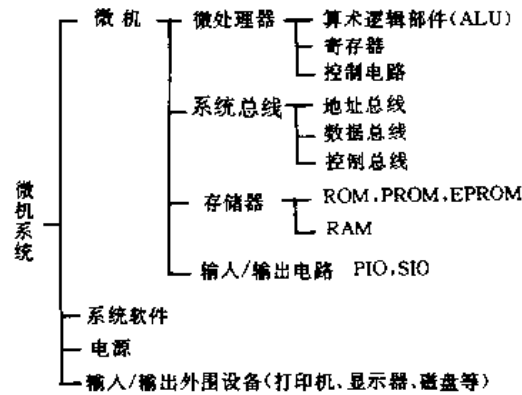


图7-3 微处理器、微型计算机与微型计算机系统的关系

数据采集就是在计算机的控制下，通过A/D 器件，把连续变化的模拟量转换为离散量。近年来，随着计算机的发展，出现如图7-4 所示的微机数据采集系统。

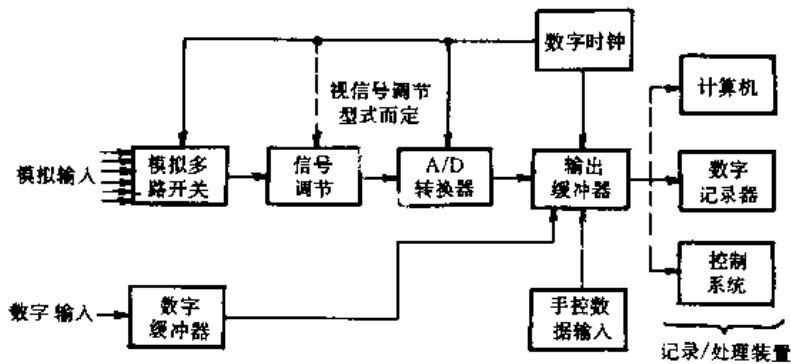


图7-4 微机数据采集系统

由软件支持，计算机通过键盘和显示终端可直接控制数据的采样。这种系统的优点是能进行多参量可编程处理。

一、数据采集基本原理

数据采集实际上是一种信号处理过程，它将时间连续的模拟信号按一定的时间间隔抽取其瞬时值，从而把一个连续时间函数信号变成每隔一定时间间隔才有函数的离散信号样本集。

典型的数据采集/采样系统如图7-5 所示，它包括采样、量化、数字处理和恢复。

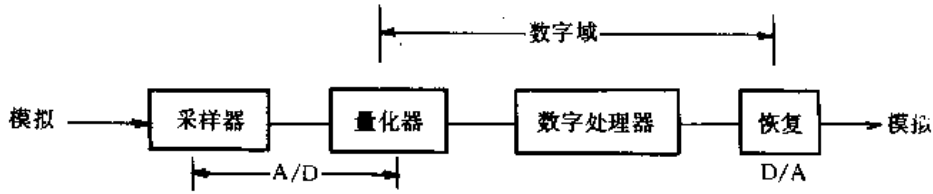


图7-5 数据采集系统

1. 采样定理

采样是以离散时间间隔对连续时间信号进行测量。在采样过程中，采样所用的装置称为采样器，又称为采样开关，即只在开关闭合的短时间内允许输入信号通过，其作用相当于用去乘输入信号、输出函数值等于此刻相应的输入函数值，如图7-6所示。所以采样开关输出

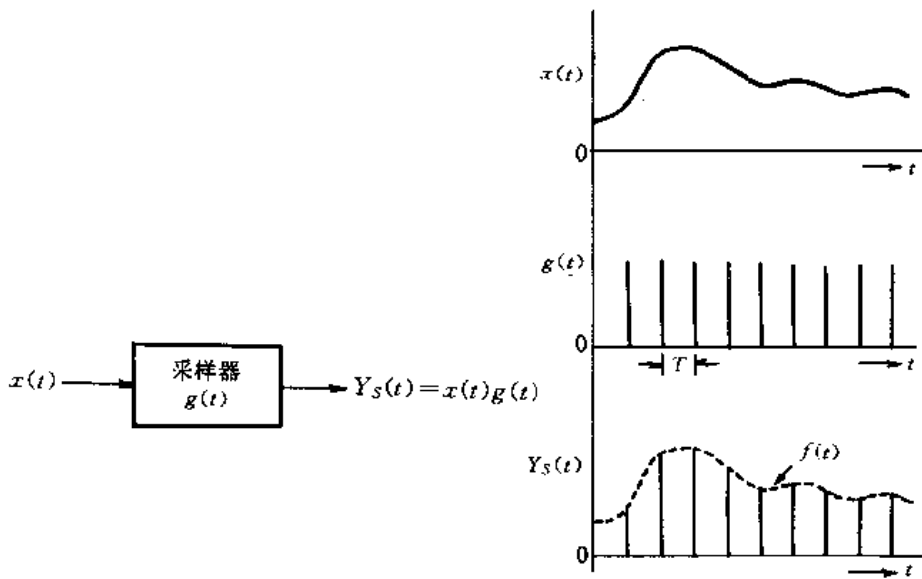


图7-6 采样器的作用

的信号 $Y_s(t)$ 是一系列很窄的脉冲列，它的包络与输入信号相同。采样过程可以看作将连续信号变换为窄调幅脉冲列的脉冲调制过程，采样开关可看作为调制器，它的载波就是采样函数 $g(t)$ ，即为具有单位幅度的等间隔窄脉冲列。两个相邻脉冲的时间间隔 T 称为采样周期， $f_s = 1/T$ 称为采样率或采样频率。采样开关输入信号与输出信号的关系可表达为：

$$Y_s(t) = x(t) \cdot g(t) \quad (7-1)$$

式中： $x(t)$ 为采样 $g(t)$ 开关的输入连续信号， $g(t)$ 为一系列冲激函数。

$$g(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (7-2)$$

所以式(7-1)可写为：

$$y_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (7-3)$$

式中： T_s ——采样周期。

只有当 $t=nT_s$ 时，式(7-3)中的 $x(t)$ 值才有意义，则式(7-3)可改写为：

$$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (7-4)$$

所以，在冲激采样情况下，采样信号 $y_s(t)$ 由一系列冲激函数构成，每个冲激间隔为 T_s ，而强度等于连续信号的样值 $x(nT_s)$ 。

冲激序列 $\delta_T(t)$ 是周期函数，其傅里叶展开式为：

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t}, \omega_s = 2\pi/T \quad (7-5)$$

式中：
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) \cdot e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

所以
$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \quad (7-6)$$

代入(7-3)得：

$$Y_s(t) = x(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} = \frac{1}{T} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \quad (7-7)$$

式(7-7)两边取傅里叶变换，由频移特性可得理想冲激采样信号频谱为：

$$Y_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \quad (7-8)$$

由上述过程可知：冲激信号的频谱是频率的周期函数，其频率周期就是采样频率 f_s 。时域内的采样过程形成频域内的周期函数。图7-7表明，理想冲激采样信号的频谱 $Y_s(\omega)$ 包括

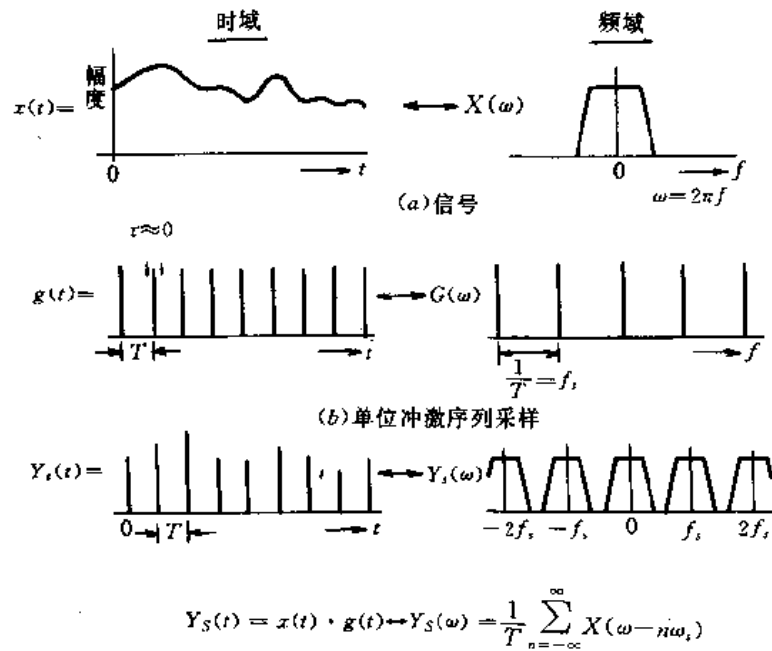


图7-7 采样过程时域与频域对应关系

信号频谱 $X(\omega)$ 以及无数个原信号频谱的复制谱,复制频谱间隔等于采样频率及其各次谐波频率。

在采样过程中,利用有限的样本值能否无失真地恢复信号即不掉失原信号的信息,这与原始信号 $x(t)$ 以及采样频率 f_s 有直接关系。

由理想采样信号频谱结构的特点,如果原信号 $x(t)$ 是带限信号即有限频谱($0 \sim f_c$),最高频率为 f_c ,当采样频率为 $f_s \geq 2f_c$ 时,则采样信号各频谱互不混叠,因而可利用截止频率为 f_c 的理想低通滤波器无失真地恢复原信号。如图7-8所示。

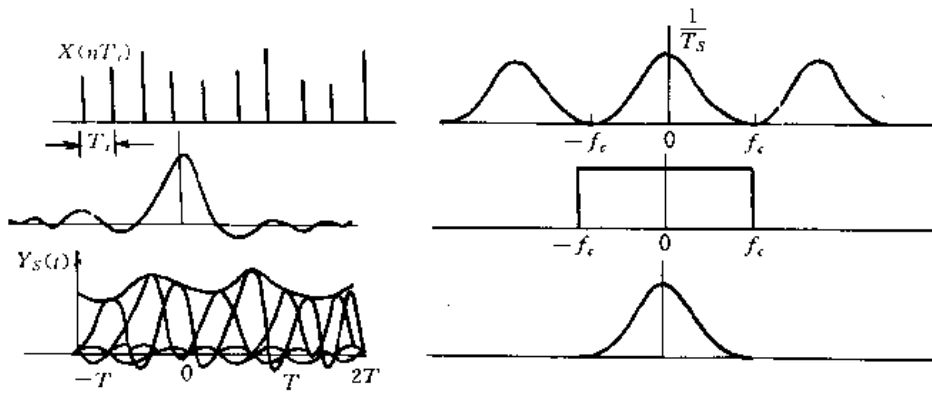


图7-8 采样定理

基于上述讨论,采样定理归纳如下:

一个频谱在区间 $(0, f_c)$ 以外为零的带限信号 $x(t)$,只要按采样率 $\frac{1}{T_s} \geq 2f_c$,或 $f_s \geq 2f_c$ 进行等间隔采样,也就是说,一个周期的间隔内至少抽样二次,那么抽样序列 $f_s(t)$ 就包含了原信号 $x(t)$ 的全部信息。当这些抽样序列通过一个截止频率大于等于 f_c ,小于 $f_s - f_c$,且增益为 $\frac{1}{T_s}$ 的理想低通滤波器,就能完全地将 $x(t)$ 恢复出来。以上又称为均匀采样定理或山农(Shannon)抽样定理。采样率 $f_s \geq 2f_c$,称为奈奎斯特(Nyquist)采样率。由图7-8可知恢复信号 $Y_s(t)$ 为:

$$x(t) = Y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s) \frac{\sin \omega_c(t - nT_s)}{\omega_c(t - nT_s)} \quad (7-9)$$

式(7-9)说明,在满足采样定理的条件下,若已知 $X(nT_s)$, ω_c 及 T_s ,就可以唯一地把 $f(t)$ 确定下来。

若原信号不是带限信号,或采样率 $f_s < 2f_c$,则采样器输出的原频率的复制频率发生重叠,这种现象称之为混淆现象,如图7-9所示。开始了生混淆的频率为二分之一采样频率($f_s/2$),通常称为折叠频率。高于 $f_s/2$ 的所有频率都被“折叠”到它的低端谱内。

克服混淆的对策是采用足够高的采样率。另一方面,信号中通常会有噪声,而噪声带宽比有效带宽高得多,这些噪声成分将反复不断地折叠到有用频谱中,发生混淆。对于这些情况,通常中在采样前设置抗混淆滤波器,并选择适当的采样率来加以解决。

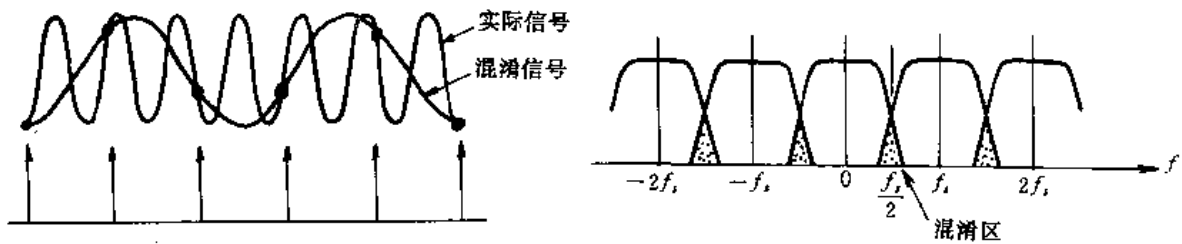


图7-9 混淆现象

上面讨论的是低通信号,而对另一类从某一低频 f_L 开始,持续到某一高频 f_H 的带通信号的采样定理表述如下:

对于低频为 f_L ,高频为 f_H 的带通信号,其最低采样率 f_s 中满足下列不等式的最大整数, k 确定:

$$\frac{2f_L}{k} > f_s > \frac{2f_H}{k+1} \quad (7-10)$$

式中: f_L ——低3dB频率;
 f_H ——高3dB频率;
 f_s ——采样频率。

$$K_{\max} < \frac{f_L}{f_H - f_L} = \frac{f_L}{B} \quad (7-11)$$

式中: B ——带宽($B = f_H - f_L$)。在 K_{\max} 时,

$$f_s = \frac{2f_L}{k} = \frac{2f_H}{k+1} = 2B \quad (7-12)$$

带通信号采样过程示于图7-10。

例:一带通信号 $f_H = 250\text{kHz}$, $f_L = 210\text{kHz}$, $B = f_H - f_L = 40\text{kHz}$

由式(7-11)得: $K_{\max} = \frac{f_L}{B} = \frac{210}{40} = 5.25 \approx 5$ (圆整为整数)

由式(7-10)得: $\frac{420}{5} > f_s > \frac{500}{6}$, $84\text{kHz} > f_s > 83.3\text{kHz}$

取 $f_s = 83.5\text{kHz}$

当 $k = 5$ 时,采样率为最低 $f_s = 83.5\text{kHz}$

当 $k = 4$ 时,采样率为 $f_s = 104\text{kHz}$

当 $k = 1$ 时,采样率为 $f_s = 180\text{kHz}$

当 $k = 0$ 时,采样率最高 $f_s = 600\text{kHz}$

2. 频率分辨率

数据采集的一个常见的任务是频谱分析,在这种场合下,感兴趣的是的频率分辨率即从若干频率中区分某个频率。

图7-10所示一采样过程,模拟信号(原信号)为确定频率 f_0 的正弦信号,经过宽度为 K 的非周期脉冲(矩形窗)采样,其频谱为 $(\sin x)/x$ 函数。对原信号进行频谱分析,其频谱应在确定频率 f_0 处有一谱线。但由于矩形窗函数截取有限长度信号,结果得到的是中央位于 f_0 的 $(\sin x)/x$ 谱,除频谱主辨宽度约为 $0.866/K$,还出现了许多旁瓣,使能量不能集中于确定频率,部分能量泄漏到其它频率,该过程示于图7-11。

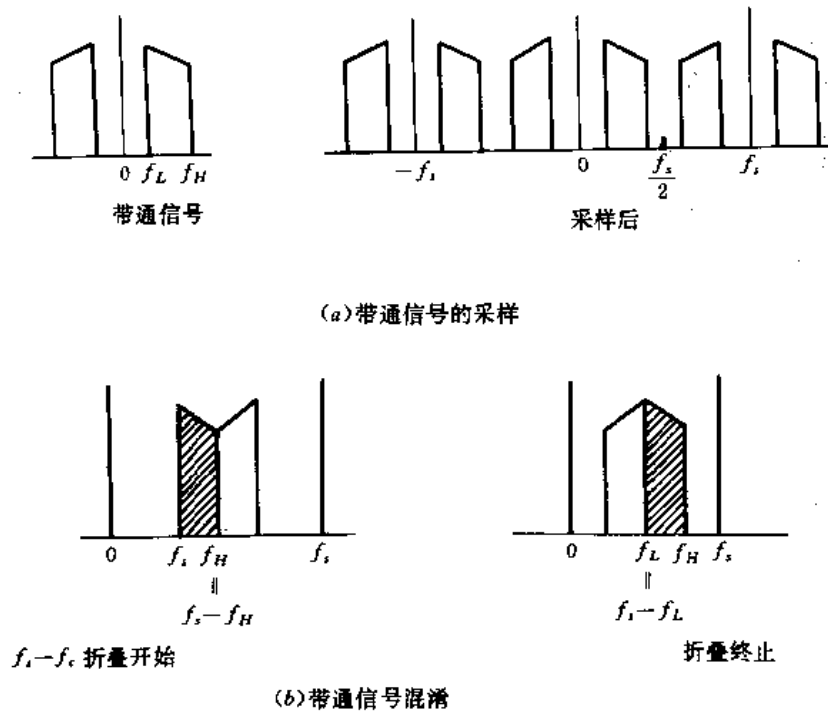


图7-10 带通信号的采样

显然,通过以上分析,频率分辨率取决于观察时间(窗口长高)和观察窗口的形状。

例1:观察时间:100s

采样率:1000 样点/s

折叠频率:500Hz

分辨率:1/100Hz

例2:观察时间:100s

采样率:5000 样点/s

折叠频率:2500Hz

分辨率:1/100Hz

可见,采样率只影响混淆效应,但不影响分辨率。

为了提高频率的分辨力,减小因窗函数带来的泄漏误差,应该选择旁瓣峰值衰减较大的窗函数。根据采样数据频率分析的具体要求,选择适当的时窗函数。如测量物体的自振频率时,不考虑幅值准确度,可选用主瓣宽度窄,有利于分辨的矩形窗函数。若选用旁瓣峰值衰减大的窗函数,可减少所分析频率处的幅值不确定性误差,如汉明窗。常见的窗函数及其频谱

如下:

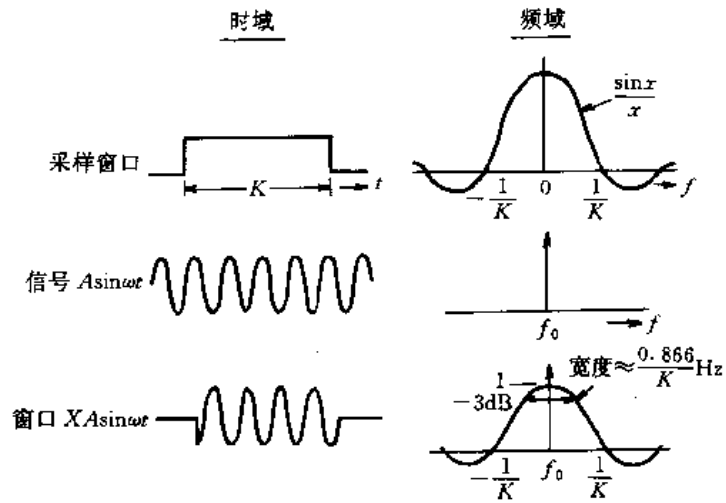


图7-11 对单一正弦数的矩形窗采样

(1) 矩形窗

$$W_Q(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (7-13)$$

$$W_Q(f) = \frac{\sin 2\pi f T}{T f} \quad (7-14)$$

(2) 海宁窗(Hannign)

$$W_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi t}{T}), & |t| \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (7-15)$$

$$W_T(f) = \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} \cdot \frac{1}{1 - (2Tf)^2} \quad (7-16)$$

(3) 汉明窗(Hamming)

$$W_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi t}{T}), & |t| < T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases} \quad (7-17)$$

$$W_B(f) = \frac{1}{2} Q(f) + \frac{1}{4} [Q(f + \frac{1}{2T}) + Q(f - \frac{1}{2T})] \quad (7-18)$$

式(7-18)中

$$Q(f) = 2T \sin(2\pi f T) \quad (7-19)$$

(4) 钟形窗

$$W_B(t) = \begin{cases} e^{-a(\frac{t}{T})^2}, & |t| \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (7-20)$$

$$W_B(f) = \frac{\sqrt{\pi} T^2}{\alpha} e^{-\frac{\pi^2 T^4 f^2}{\alpha^2}}, (\alpha = 4 \sim 7) \quad (7-21)$$

(5) $\frac{1}{10}$ 余弦坡度窗

$$W(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{10\pi t}{T}) & (t < \frac{T}{10}) \\ 1 & (\frac{T}{10} \leq t \leq \frac{9}{10}T) \\ \frac{1}{2}[1 + \cos \frac{10\pi(t - 9/10T)}{T}] & (t > \frac{9}{10}T) \end{cases} \quad (7-22)$$

上述常用窗函数的时域和频域图如图7-12所示。

由图可知,矩形窗的主瓣宽度最小旁瓣较大,其等效带宽为 $1/T$,即频率分辨率为 $1/T$ 。海宁(Hanning)窗的旁瓣很小,主瓣宽度扩展为 $1.5/T$,频率分辨率为 $1.5/T$ 。显然,总希望得到的窗函数主瓣宽度要尽可能小,其旁瓣衰减快,但这两个要求往往相到矛盾,需要适当兼顾。

二、模-数(A/D)和数-模(D/A)转换器、采样-保持放大器

大多数传感器的输出量是模拟量。而计算机辅助测试的大量数据处理工作是用计算机来完成的,而计算机只能对数字信号进行处理。因此,模-数(A/D)转换器实现从模拟量到数字量进行转换的装置。

1. 数-模(D/A)转换器

由于某些(模-数)(A/D)转换器,内部含有数模(D/A)转换器,因此,首先介绍数-模(D/A)转换器的工作原理。

现在使用的D/A转换器大多数是 $R-2R$ 梯形网络,如图7-13所示。这种(D/A)转换器精度取决于参考电压值和所用电阻值的稳定性,这些D/A转换器需要定期较准,以保证其性能在技术指标规定的范围之内。

该电路从 a, b, c, d 节点分别对地的等效电阻值均为 $2R$,而由开关的位置由 $S_0 \sim S_3$ 控制,设 $a_i = 0$ 接地, $a_i = 1$ 接参考电压 E_R 。当输入的二进制数量为 $a_3 a_2 a_1 a_0 = 1000$ 时,即只有 S_1 接入参考电压 E_R ,其余各开关 S_2, S_1, S_0 接地,则节点 a 的电压为:

$$e_a = \frac{1}{2} E_R = \frac{E_R}{2^1}$$

当输入二进制数字量为 $a_3 a_2 a_1 a_0 = 0100$ 时,开关 S_2 接入参考电压 E_R ,其余接地。从 b 点向左等效接地电阻为 $3R$,则节点 b 的电压为

$$e_b = \frac{3}{8} E_R$$

$$e_a = \frac{1}{4} E_R = \frac{1}{2^2} E_R$$

同样方法可求得,当输入的二进制数字量为 $a_3 a_2 a_1 a_0 = 0010$ 时,则节点 a 的电压为:

$$e_a = \frac{1}{2^3} E_R$$

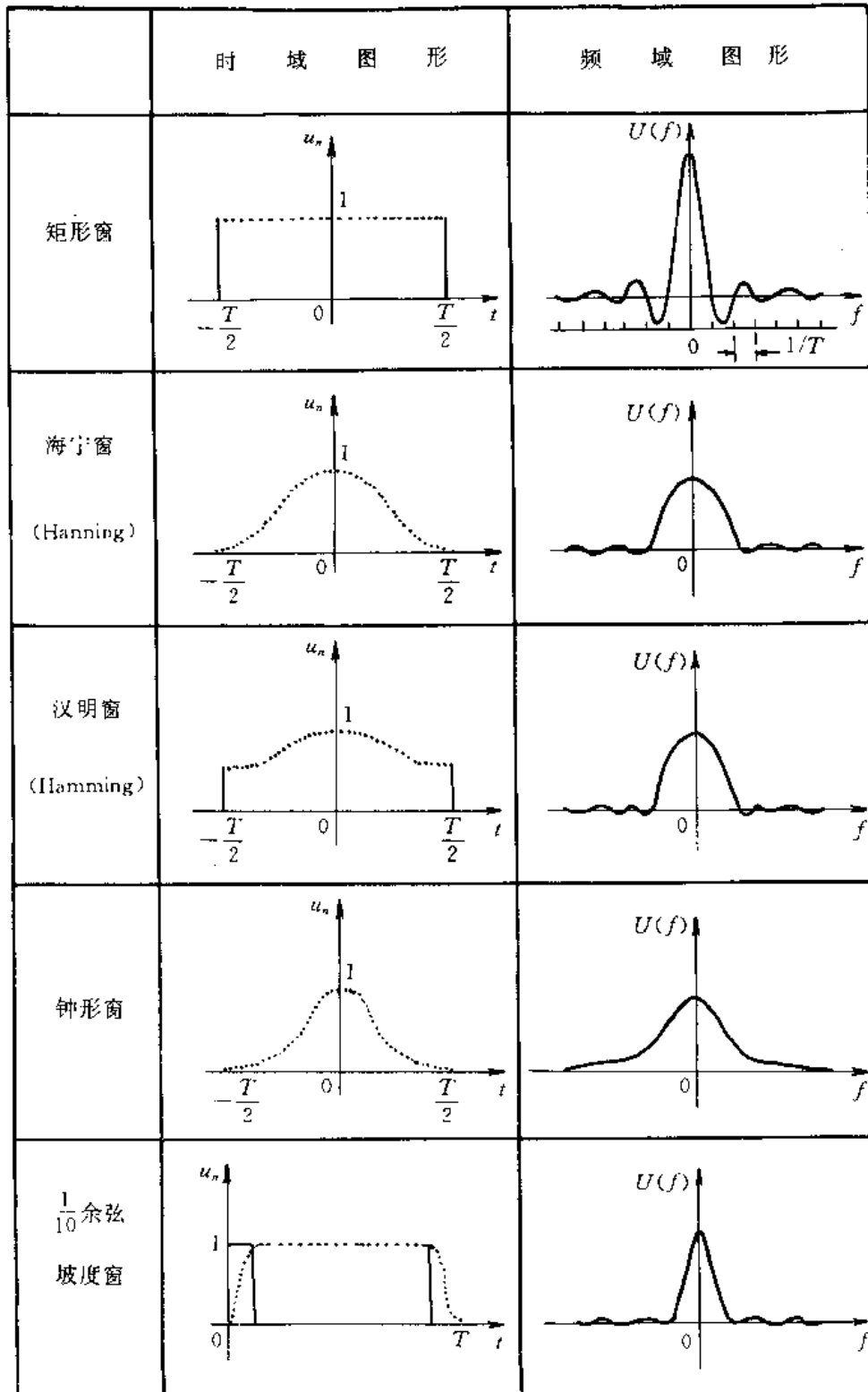


图7-12 常用的窗函数图

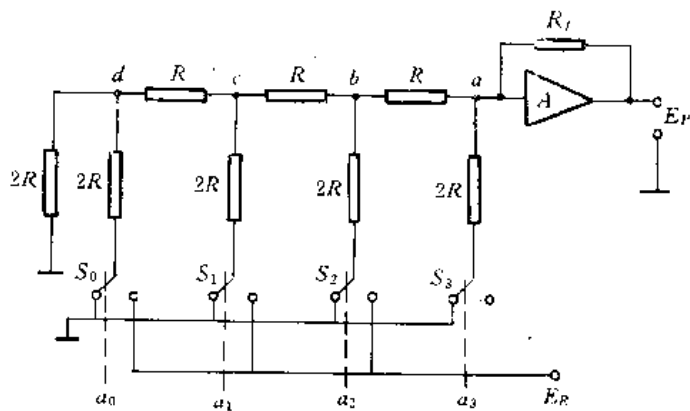


图7-13 R-2R 梯形网络接反相运放

当输入量为 $a_3a_2a_1a_0=0001$ 时,节点 a 的电压为 $e_a = \frac{1}{2^4}E_R$ 。

当输入量全为1码时,即 $a_3a_2a_1a_0=1111$ 时,可运用叠加原理得节点 a 的电压为:

$$e_a = \frac{1}{2}E_R \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)$$

可推广到 n 位,则输出电压为:

$$e_a = \frac{E_R}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2} + \dots + \frac{a_1}{2^{n-2}} + \frac{a_0}{2^{n-1}}\right) \quad (7-23)$$

式中: $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ 为输入二进制数字量。

式(7-23)说明输出电压 e_a 与输入的二进制数字量成正比,即D/A转换器的输出模拟电压与输入的二进制数字量成正比。

从D/A转换器得到的输出量 e_a 是采样时刻的瞬时值,仍然是离散量。一般采用零阶或一阶低通滤波器来还原原信号。

D/A转换器的主要技术指标如下:

(1)分辨率:由D/A转换器的位数来表示,位数越多分辨率就越高。分辨率为满量程 $\frac{1}{2^n}$, n 为位数。

(2)转换时间:阶跃满刻度输入情况下,输出信号达到1/2个最低有效位(LSB)所需的时间。它反映了D/A变换的速度,常用的D/A转换器,该时间范围为 $3 \sim 30\mu s$,而对8位的“视频”D/A转换器则可达大约10ns的转换时间。

(3)线性误差:它是实际输出电压与对应理想传递特性曲线上的电压之差。D/A转换器线性误差应远小于它的分辨率。

例如8位DAC的分辨率为 $1/256$,而线性误差可达11位即约0.05%,图7-14所示DAC的线性误差。

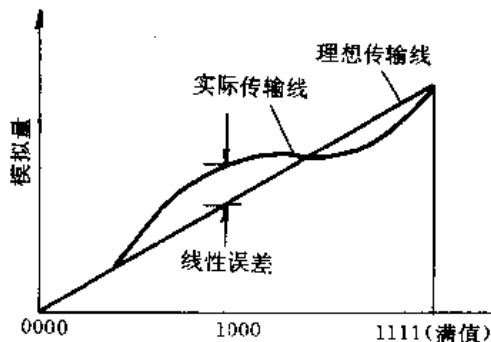


图7-14 DAC 的线性误差

2. 模数(A/D)转换器

实际应用中的大多数A/D转换器的工作原理不外乎是逐位逼近式或双(斜)积分式两种。

图7-15示出双积分工作原理图。这里,模拟输入要首先转换成一时间间隔,然后再用一计数器使它转换成数字量。因此,A/D转换是间接的,这样就限制了它的转换速度。

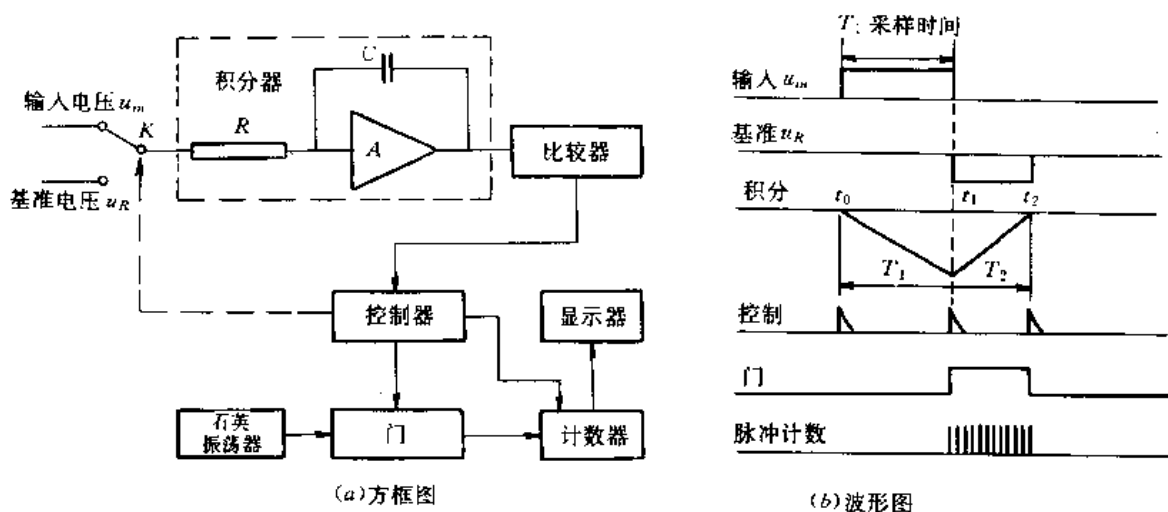


图7-15 双积分式A/D转换器

图中电阻 R 、电容 C 与运算放大器 A 构成积分器。在初始状态下,电容 C 的电荷为零。其工作过程主要分为采样时间和比较时间两个阶段。工作时,开关 k 接通,模拟输入信号电压 U_m 加在一积分器上,同时触发一计数器(用以记时脉冲)。经过一固定时间 T_1 后,所积电荷使电容充电,这时积分器输出电压 U_c 是输入电压 U_m 的积分,即

$$U_c = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_0+T_1} U_m dt \quad (7-24)$$

在 T_1 时间内,对应于预定脉冲数。然后,将开关 k 接通基准电压 U_R , U_R 与 U_{in} 是极性相反的参考电压。在此转换的瞬间,计数器被置零,且又开始计数。此时电容 c 上电荷按一固定速率放电,经过 T_2 时间放电完毕。此时, T_2 (也就是计数器的输出)将与时间间隔 T_1 内 U_{in} 的平均值成正比。因为在电容 c 充电结束与放电开始的 t_1 时刻其电压值相等,即:

$$U_c = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_0+T_1} U_{in} dt = \frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_0+T_2} (-U_R) dt \quad (7-25)$$

令 \bar{u}_{in} 为 U_{in} 在 T_1 时间内的平均值,即

$$U_{in} = \frac{1}{RCT_1} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_1} U_{in} dt \quad (7-26)$$

由式(7-25)、式(7-26)得:

$$\frac{\bar{U}_{in} T_1}{RC} = \frac{U_R T_2}{RC} \quad (7-27)$$

所以
$$T_2 = \frac{T_1 \bar{U}_{in}}{U_R} \quad (7-28)$$

式(7-28)说明积分器电容 C 放电时间 T_2 与被测电压在 T_1 时间内的平均值 \bar{u}_{in} 成正比。若在 T_2 时间内由比较器通过控制器发生开门与关门信号,计数器精确测得在 T_2 时间内的电压平均值, T_1 愈小,所测得电压值愈接近瞬时值。

双积分A/D转换器的精度不受电容、电阻或钟频的影响。而积分的作用有利于抑制高频噪声和把 U_{in} 积分周期(T_1)内的变化平均化。只要把 T 选为最常出现的噪声周期的整数倍[如对50Hz的噪声, $T=(1/50)s$],使可在50Hz、100Hz、150Hz上获得噪声的抑制。由于它的转换速度低,通常低于每秒30次,限制了它在许多场合上的应用,这类A/D转换器一般不需要在输入端接S/H电路。许多数字面板表(DPM)采用3位和4位BCD输出的双积分A/D转换器。

图7-16所示是目前最流行的逐位比较法A/D转换技术。当给A/D转换器发出“启动转换”命令时,转换器内部的D/A转换器便输出最高有效位(MSB)去和模拟,若输入大于MSB,MSB将保持打开状态(在输出寄存器中为1),然后再比较次低位,若没有超过输入,则第二位就保持打开状态,若超过输入,就将此位关闭,然后比较第三位。上述过程将读到最低有效位(LSB),直到各位全部判断完毕,此时状态线将改变状态以指出输出寄存器中的内容已完成了一次有效的转换。这种A/D转换器不允许在转换过程中模拟输入发生剧烈变化,因而要精确地转换快变信号,就必须在转换口之前使用S/H电路(采样保持器)。此类转换器已可作到大约16位(转换时间 $\approx 30\mu s$);8位的A/D转换器的转换速度可达1或 $2\mu s$ 。

A/D转换器的主要技术指标如下:

- (1)分辨率:与D/A转换器相同;
- (2)转换时间:ADC完成一次完整的测量所需的时间。即从输入端加入信号的時刻到输出端出现相应数码的时间。
- (3)量化误差:它是A/D转换器的固有误差,即存在半个量化单位绝对的误差,即 $LSB/2$ 。

(4)线性误差:它是实际A/D转换器的传递特性曲线与理想传递特性曲线之间的差值。

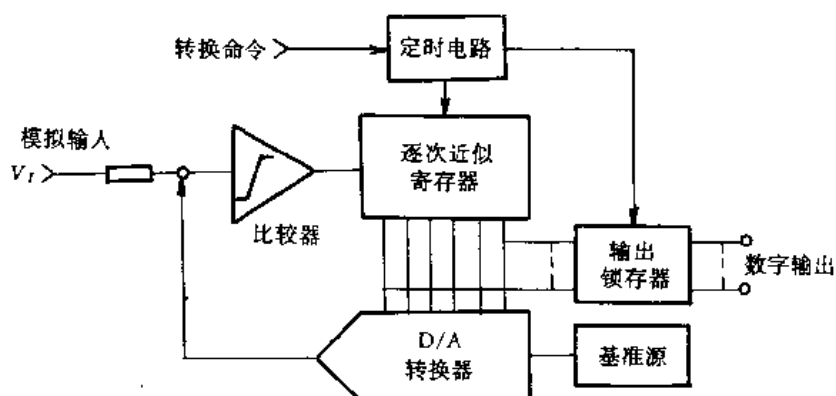


图7-16 逐位逼近式A/D转换器

3. 采样保持电路(简写S/H)

如果采用逐位逼近式A/D转换器来转换快变信号时,通常需要采用采样保持电路,它可精确地存储模拟电压,存储时间范围为微秒至毫秒之间。

S/H电路基本上是一个“电压存储器”,它的工作原理如图7-17(a)所示。当开关 S 闭合,保持电容 C_H 充电,对输入电压采样;开关打开,电容器可在一定时间内保存充电电荷,从而保持所存储的电压。图7-17示出增益为1的输入、输出缓冲器及开关驱动电路的实际S/H电路。

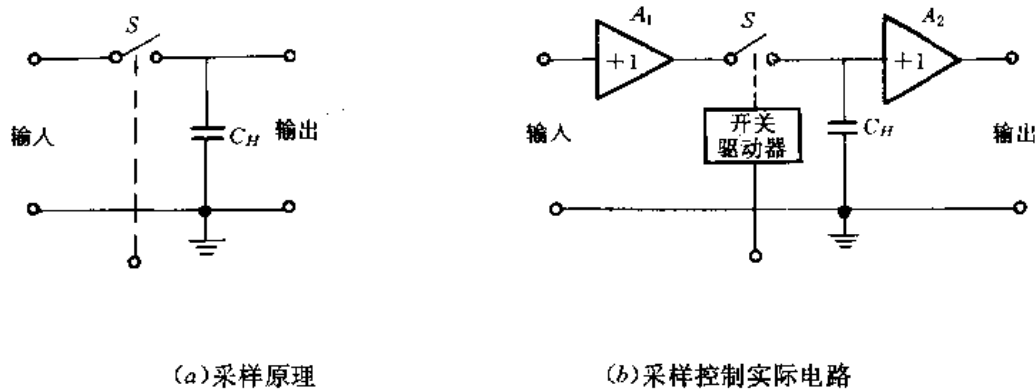


图7-17 采样保持电路

S/H电路的工作过程可分三个阶段:

第一阶段当它处于采样(跟踪)状态时,采样开关合并,即从保持切换到采样,保持电容 C_H 逐渐充电到输入电压。通常规定刻度跃变电压为10V,经过一段采集时间,通常为 $5\mu\text{s}$,使S/H电路的输出落入 $\pm 0.01\%$ 的误差带范围。

第二阶段在经过采集时间后, S/H 电路输出值跟随输入值直到进入保持状态。在从采样到保持的过程中, 将存在一定延迟, 称之为保持命令和开关实际断开之间的孔径时间 (aperture time), 一般为 50ns。由于开关开启时间的不定性反映了孔径不定性或孔径跳动, 称之为孔径不确定度 (一般为 0.5ns), 若孔径时间小于被采样最高频率周期, 则可以用孔径不确定度取代孔径时间。孔径不确定度约为孔径时间的 10% 或更小。

第三阶段是指在开关断开之后 (孔径延迟时间之后), 必须等待一个开关过渡过程的输入时间 (一般为 $1\mu\text{s}$), 以便让采样/保持放大器的输出在其稳定值的 $\pm 0.003\%$ 的误差范围内, 然后才让 A/D 转换器开始转换。在保持状态下, 由于保持电容的泄漏的影响, 它所保持的电压一般以 $1\mu\text{V/s}$ 的斜率随时间逐渐衰减。图 7-18 所示采样/保持放大器的工作过程。

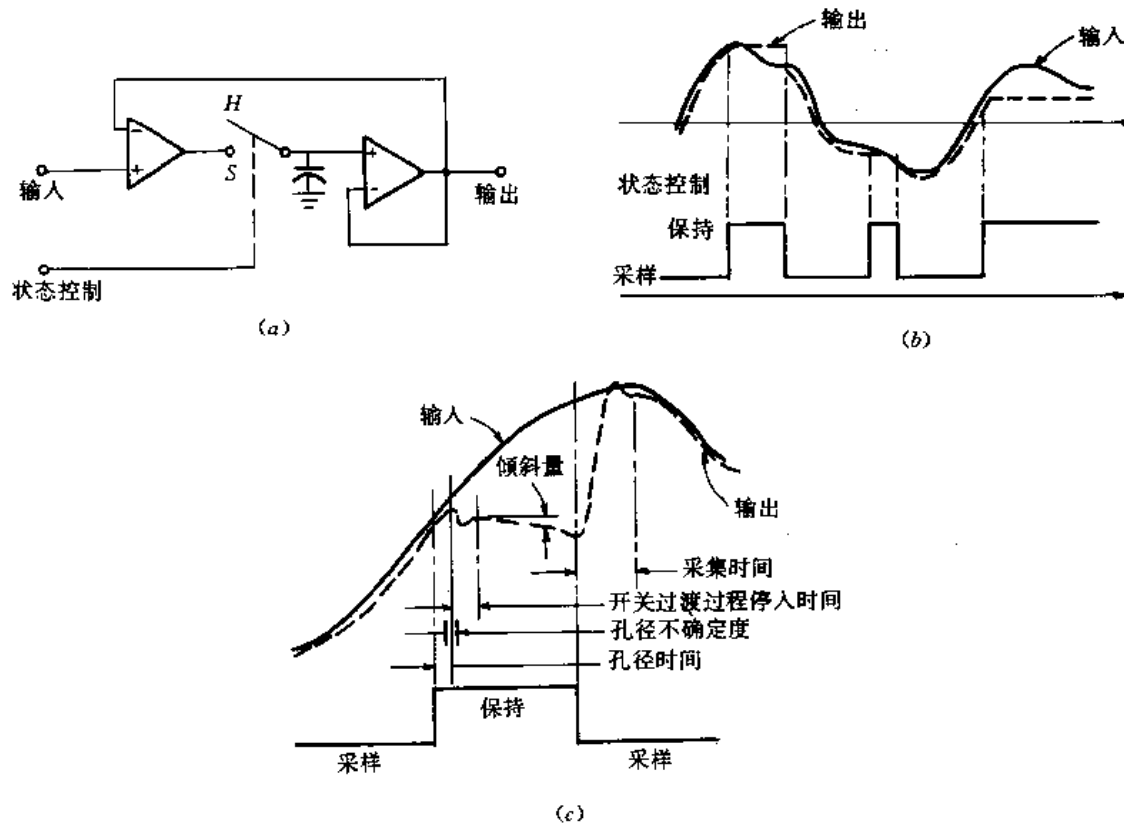


图7-18 采样/保持放大器

图7-19 示出采样/保持作用对A/D 转换过程的影响, 图中A/D 转换周期误差为 $12\mu\text{s}$ 。

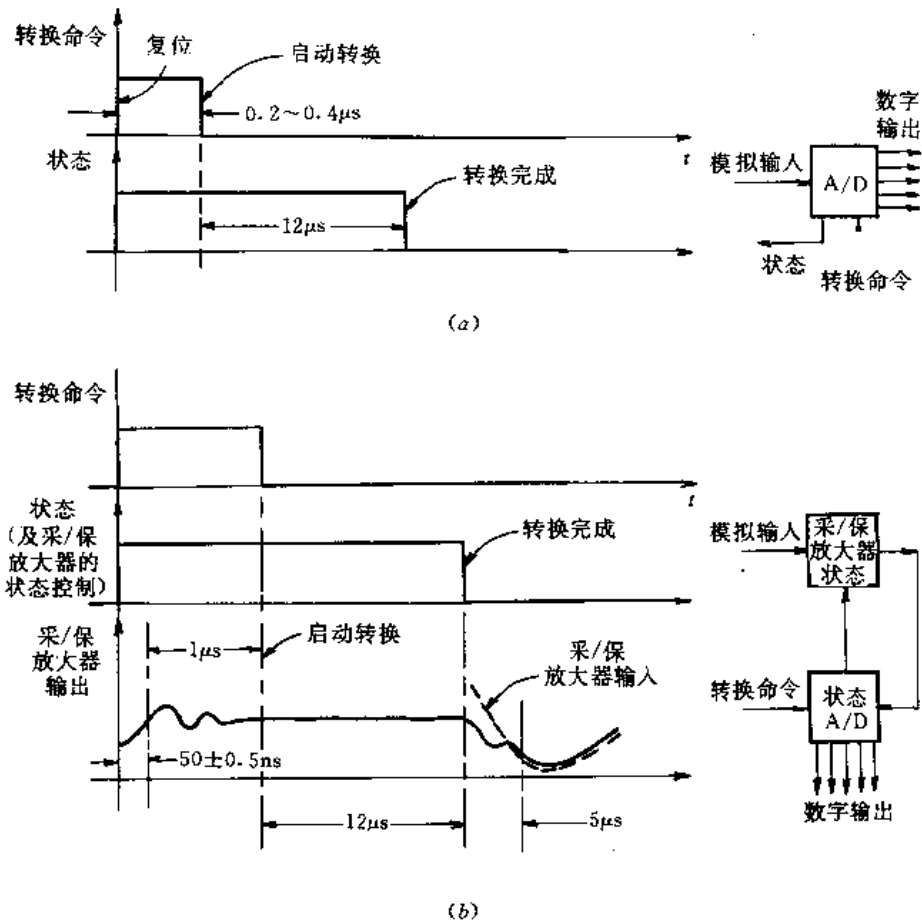


图7-19 采样/保持作用对A/D转换过程的影响

第三节 信号恢复与传输

一、有限宽度采样

理想冲激采样在实际系统环境中是无法实现的。实际A/D转换器是在一个转换周期 τ 内完成一次采样的。这相当采样函数是有限宽度的矩形脉冲列。在一个转换周期 τ 内,任何输入信号的幅值变化都会造成数字输出的不确定性。图7-19(a)所示,在转换周期 τ 内,A/D转换器输入信号幅值变化了 ΔV ,幅度误差表达如下:

$$\Delta V = \tau \frac{dv}{dt} \quad (7-29)$$

式中: τ ——转换周期;

dv/dt ——输入信号时间变化率。

在数据采集系统中,采样器输出要通过量化后变换为数字形式。在二进制编码的情况下,A/D 所能分辨的最小幅值为(即最小有效位,记为LSB)。

$$\Delta V = \frac{V}{2^n} \quad (7-30)$$

式中:V——满刻度电压;

n——A/D 的位数。

将式(7-30)代入(7-29)得:

$$\tau = \frac{V}{2^n (dv/dt)} \quad (7-31)$$

A/D 转换器的固有量化不确定度(误差)为 $\pm \frac{1}{2}$ 个最低有效位(LSB),则式(7-31)可改写成:

$$\tau = \frac{V}{2^{n+1} (dv/dt)} \quad (7-32)$$

对于正弦信号,其最大速率在过零点,由式(7-29)得:

$$\Delta = \tau \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{2} V \sin \omega t \right]_{t=0}$$

上式整理得:

$$\Delta V = \frac{\tau \omega V}{2} \quad (7-33)$$

式中V 为峰-峰信号值。

由式(7-30)、式(7-32)得:

$$\tau = \frac{2\Delta V}{\omega V} = \frac{1}{2^n \pi f} \quad (7-34)$$

若以 $\pm \frac{1}{2}$ LSB 表示A/D 不确定度,则

$$\tau = \frac{1}{2^{n+1} \pi f} \quad (7-35)$$

由式(7-35)可知,在给定 $\pm \frac{1}{2}$ LSB 误差,A/D 转换周期和位数,就能够确定A/D 采样的最高频率。

$$f = \frac{1}{2^{n+1} \pi \tau} \quad (7-36)$$

例:一个A/D 转换器的转换周期为 $12\mu\text{s}$,转换位数为14 位,不确定度为 $\pm \frac{1}{2}$ LSB,根据采样周期,由式(7-36),该A/D 转换器能够准确分析输入信号的最高频率

$$f = \frac{1}{2^{n+1} \pi \cdot \tau} = \frac{1}{2^{15} \cdot \pi (12 \times 10^{-6})} = 0.8\text{Hz}$$

若在A/D 转换器输入端接上一个如上所述的采样/保持放大器,则可采用采样/保持放大器的孔径不确定度来代替式(7-36)中的A/D 转换器的采样周期。

选用的采样/保持放大器的孔径时间为 50ns ,孔径不确定度 $\tau_a = 0.5\text{ns}$,则将 τ_a 代入式

(7-36), 得:

$$f = \frac{1}{2^{15}\pi \cdot (0.5 \times 10)^9} = 19\text{kHz}$$

加入采样/保持放大器后, 严格的频率限制便可大大放宽, A/D 转换器允许的输入信号的最高频率原来的 0.8Hz 变为 19KHz, 改进效果 24000 : 1。

二、信号恢复方法

信号恢复就是重建原时间信号。原信号经过采样, 得到的是一系列的离散的样点值, 如图 7-20, 其中, 虚线是表示原时间函数的包络, 经过量化后, 这些样点只能取规定的离散值, 省略了大量的信号趋势信息。同时, 信号经过采样, 原信号频谱还叠加了在采样频率的各次谐波位置所形成一系列附加频谱。只有除去这些附加成份, 才能在数据处理中得到正确的结果。

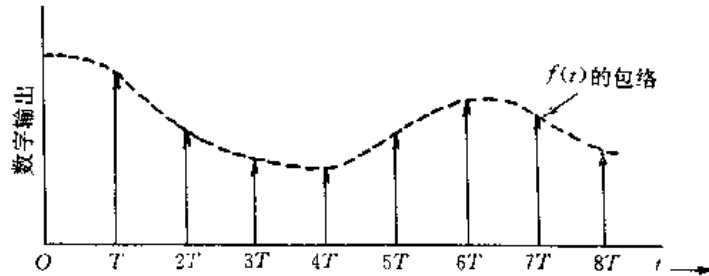


图 7-20 采样后的离散信号

信号恢复可采用不同的恢复算子。理想恢复函数在频域内为矩形, 时域内为 $j(\sin x)/x$ 形式的理想低通滤波器。如 7-2 节图 7-8 所示。

而理想的低通滤波器在实际中不可能实现。实际使用的最常用的恢复函数有如下几种:

图 7-21 为零阶保持函数。零阶保持函数在时域内为矩形, 而在频域内为 $(\sin x)/x$ 形, 由图 7-21 可看出, 零阶保持是理想低通滤波器的近似。图 7-21(b) 为时域内的最终卷积结果。显然, 零阶保持输出是一种对原信号的近似, 而用不着附加任何低通滤波器。采用零阶保持恢复在重建过程中引入了相当大的误差。

零阶保持误差函数如图 7-22 所示。以原信号为正弦波为例。正弦波 $x(t) = A \sin \omega t$ 的最大斜率位于 $t=0$ 处, 即:

$$\text{最大斜率} = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = A\omega = \frac{V_{\text{error}}}{T} \quad (7-37)$$

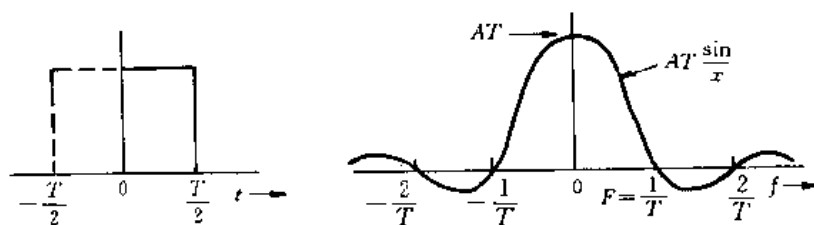
式中: T 为采样周期。

由式(7-37)得: $V_{\text{error}} = A\omega T$

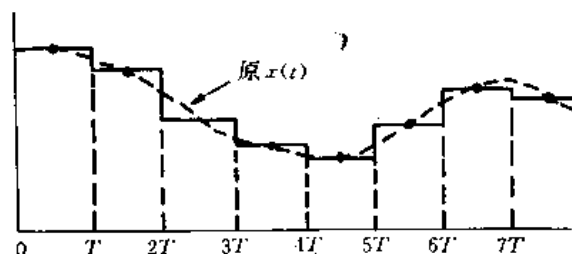
百分误差 = $\frac{V_{\text{error}}}{A} \times 100 = 100\omega T$ 或写成:

$$\text{百分误差} = 200\pi fT$$

(7-38)



(a) 零阶保持函数时域与频域图



(b) 恢复信号 $x(t)$

图7-21 零阶保持恢复

由于 $1/fT = \text{样点数/周波}$, 所以

$$\text{样点数/周波} = \frac{200\pi}{\text{百分误差}} \quad (7-39)$$

由式(7-39)可知, 要获得小于百分之一(百分误差为一)的瞬时重建误差, 至少要以每周波628个样点对原波形进行采样。

恢复原信号常采用数字计算机在样点间进行填充式或插值。图7-23(a)所示方法称为预测一阶保持, 它的恢复算子表达式为:

$$X(t) = \frac{[X(n) - X(n-1)]}{T} [t - nT] + X(n)$$

(7-40)

式(7-40)说明, 在任一给定样点, 计算机算出前次样点与当前样点间的斜率, 并假定下二点之间的斜率仍然相同。若原信号的斜率发生变化, 就会发生误差。如在正弦波顶部, 就会引入很大误差。对于预测一阶保持恢复算子, 每周样点数与瞬时百分误差关系式如下:

$$\text{样点数/周波} = \frac{62.8}{\sqrt{\text{百分误差}}} \quad (7-41)$$

与式(7-39)相比预测一阶保持恢复算子其结果大大优于零阶保持。

另一种一阶恢复算子是线性一阶保持, 如图 7-23(b)所示, 其恢复函数表达式为:

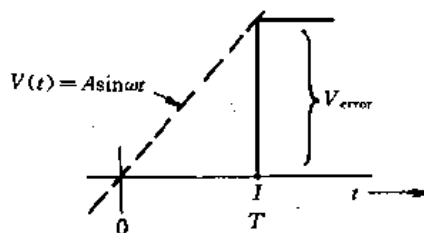


图7-22 零阶保持误差函数

$$X(t) = \frac{[X(n) - X(n-1)]}{T} [t - nT] + X(n-1) \quad (7-42)$$

线性一阶保持,就是用直线连接已知两点的值,在此过程中不涉及预测,但输出始终落后一个采样周期。每周样点数与瞬时百分误差的关系式如下:

$$\text{样点数 / 周波} = \frac{22.3}{\sqrt{\text{百分误差}}} \quad (7-43)$$

由式(7-39)、(7-41)、(7-43)可知,采样率的选择直接受到所采用的恢复算子形式的影响。为了形成平滑的恢复信号,通常要求在实际样点之间插值,使用二阶以上的恢复函数。在实际应用中,多用均方根误差取代百分误差。均方根误差是瞬时误差的时间平均。表7-1列出了采样频率, f_{3dB} 为输入频谱的3dB带宽。该表是根据输入数据为4阶巴特沃兹(Butternorth)谱计算的结果,表中数值的单位是3dB带宽每周的样点数。

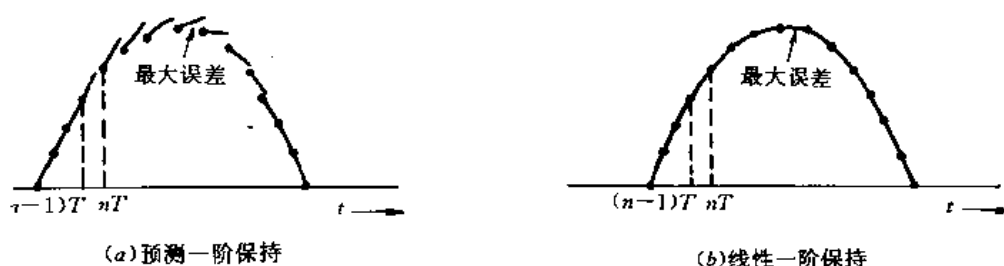


图7-23 一阶保持函数

表7-1 恢复误差与 f_s/f_{3dB}

恢复算子	均方根恢复误差(%)		
	0.01	0.1	1.0
零阶保持(阶跃)	12000	1200	120
一阶线性	160	108	16
巴特沃兹($n=2$)	1920	240	80
巴特沃兹($n=3$)	280	72	18
巴特沃兹($n=4$)	108	36	12

三、数据采集系统设计举例

根据测试的具体要求,综合运用本节的一些重要概念,确定出其A/D转换器主要技术指标,选择正确的A/D转换器。通过以下示例,说明选择步骤及方法。

设输入模拟信号(原信号)的频谱如图7-24所示,其频谱表达式为 $X(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_{3dB}})^8}}$,关心的最高频率为29kHz,数据采集系统要求如下:

动态范围 > 70dB;
 混淆误差 < 0.1%;
 恢复误差 < 0.1% RMS;
 孔径误差 < 0.1% 平均值;
 试确定 A/D 转换器: 量化层位数、采样率、采样孔径、恢复算子。

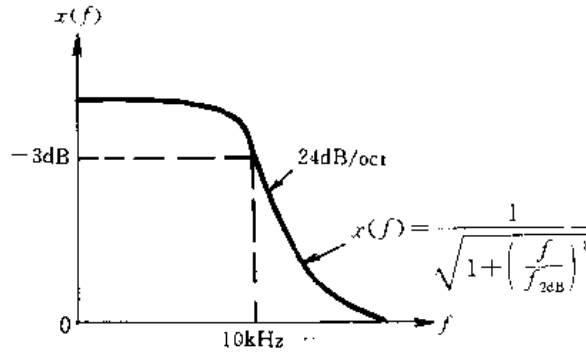


图7-24 原信号频谱特性

由系统的动态范围,可确定出需要的量化层。已知系统动态范围为70dB,相当于3162:1。最接近的二进制数为4096,即12位,动态范围为72dB。

由混淆误差和恢复误差,确定出采样率。先考虑混淆问题。根据系统要求,在最感兴趣频率处,混淆产生的误差应小于0.1%。在29kHz时,信号电平为直流电平值的1.4%,要求一次谐波谱的混淆不超过百分之1.4的0.1%,即折叠频率 $f_s/2$ 处的淆误差不得超过0.0044%。该值所对应频率为165kHz 由采样定理可得,采样率应满足:

$$f_s \geq 2 \times 165 = 320\text{kHz}$$

在确定采样率之前,再考察恢复算子的影响。由表7-2,选择巴特沃兹滤波器,从表7-2可知,对应0.1%恢复误差有: $\frac{f_s}{f_{3dB}} = 36$

$$\text{所以 } f_s = 36 \times f_{3dB} = 360\text{kHz}$$

显然,恢复误差限定了采样率。在 $f_s = 360\text{kHz}$ 时,混淆可忽略。这里,选用12位500kHz逐次逼近A/D转换器。选定之后,尚需判断在A/D之前是否使用S/H。500kHz A/D转换器的转换周期为:

$$\tau = \frac{1}{500\text{kHz}} = 2\mu\text{s}$$

由式(7-36)可知,该转换器允许的输入信号最高频率为:

$$f = \frac{1}{(2^{13}) \times 3.14 \times (2 \times 10^{-6})} = 19\text{Hz}$$

显然不能满足采样系统提出的最高频率29kHz的要求,所以需要接S/H电路。若选孔径为100ns,孔径不确定度为1ns的S/H电路,则由式(7-36)得:该A/D接口,所能分析的最高输入输出频率为

$$f = \frac{1}{(2^{13}) \times 3.14 \times (0.5) \times 10^{-9}} = 39\text{kHz}$$

该S/H 电路满足要求。最终系统结构如图7-25 所示。

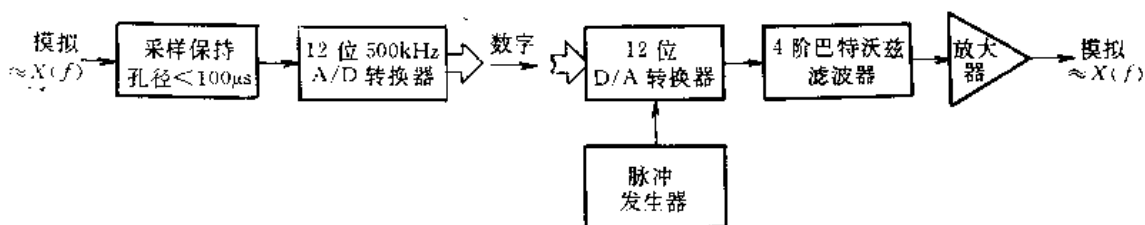


图7-25 数据采集系统

第四节 频谱分析技术

一、离散信号傅里叶变换

计算机对工程的辅助测试,其核心是对由传感器检测到的信号通过A/D 转换成数字信号,传输到计算机,计算机对这些数字信号进行处理。计算机只能处理有限长序列,这决定了有限长序列处理在数字信号处理中的地位 and 意义,离散傅里叶变换是有限长序列的傅里叶表达式,其本身也是一个序列,在离散域中作用类似于傅里叶变换在连续域中的作用。离散傅里叶变换一个显著的特点是把时域的有限长序列变换成频域的有限长序列。加上其快速算法,使得它在数字信号处理技术中越来越起核心的作用。

1. 离散傅里叶变换定义

设离散时域信号 $x(n)$ 为若干个复变数, $n=0,1,\dots,N-1$,则定义

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot (W_N)^{kn} \quad (7-44)$$

式中 $W_N = e^{j2\pi/N}$,由式(7-44)可得出 N 个复变数 $X_p(k)$ 、 $X_p(k)$ 就叫作序列 $X(n)$ 的离散傅里叶变换,简称DFT。

由 $X(k)$ 通过式(7-45)也可求出 $x(n)$ 。

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot (W_N)^{-nk} \quad (7-45)$$

式(7-45)称为离散傅里叶级数的反变换,简称IDFT。式(7-44)、(7-45)称为离散傅里叶变换对。

由式(7-44)可看出,若 k 在 $\{0,1,\dots,N-1\}$ 范围外取值,则 $X(k)$ 呈现周期性。

即:

$$X(k + mN) = X(k), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7-46)$$

由式(7-45)有

$$x(n + mN) = x(n) \quad (7-47)$$

式中 $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

由式(7-46)、(7-47)可知, $X(k)$ 、 $X(n)$ 都为延拓的周期函数。换句话说, 右长度列可当成

$$= \frac{1 - e^{jaN}}{2j[1 - e^{j(a-2k\pi/N)}]} - \frac{1 - e^{-jaN}}{2j[1 - e^{-j(a+2k\pi/N)}]}$$

式中 $a \neq 2k\pi/N$

图7-26 所示其幅值谱 $|x(k)|$, 取 $a=1, N=30$ 。

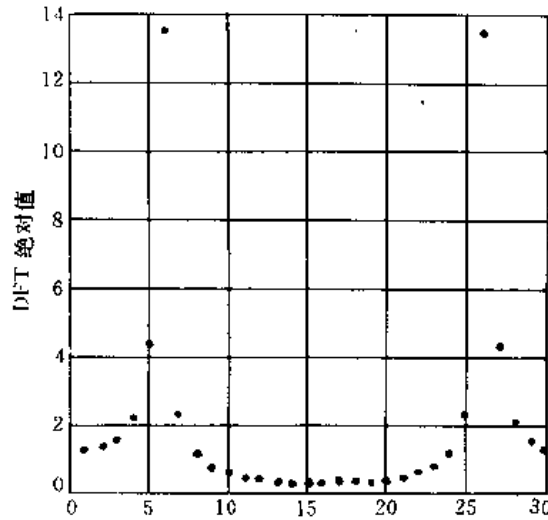


图7-26 $X(n)=\sin(an)$ 的幅值谱

3. 周期卷积

周期卷积定理: 如果 $x(n)$ 、 $y(n)$ 都是周期为 N 的周期序列, 其傅里叶变换:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} Y(n)W_N^{nk}$$

且
则

$$U(k) = x(k)y(k)$$

$$U(n) = \text{IDFT}[U(k)]$$

$$U(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} y(m)x(n-m) \quad (7-48)$$

若
则

$$U(n) = X(n)Y(n)$$

$$U(k) = \sum_{m=0}^{N-1} X(m)Y(k-m) \quad (7-49)$$

式中: $k=0, 1, 2, \dots, N-1$

式(7-48)中, $y(n-m)$ 、 $x(m)$ 都是变量 m 的周期序列, 周期为 N , 卷积结果 $U(n)$ 是以 N 为周期的周期函数。由于求和仅在一个周期内进行, 因此称为周期卷积。

序列 $\{u(n)\}$ 由下式给出:

$$U(n) = X(n)y(n) \quad (7-50)$$

序列 $\{u(n)\}$ 的离散傅里叶变换为序列 $\{U(k)\}$, 有:

$$U(k) = \sum_{m=0}^{N-1} X(k)Y(k-m) = \sum_{m=0}^{N-1} X(k-m) \cdot Y(m) \quad (7-51)$$

式中: $k=0,1,2,\dots,N-1$

由式(7-50)、式(7-51),令 $x(n)=y(n)$,可推导出帕斯互尔(Parseval)定理:

$$N \sum_{n=1}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 \quad (7-52)$$

公式(7-52)表明:在一个频率带限之内的有限时间信号 $x(n)$ 的能量与功率谱之和成正比。

4. 用DFT 计算傅里叶变换

在这里,采用DFT 的方法,计算傅里叶积分,即 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ 。由于DFT 只能处理有限点。因此,设处理信号 $f(t)$ 谱 $F(\omega)$ 为有限值。假设 $f(t)$ 被采样周期为 T 的A/D 转换器采样,而转换为间隔 T 的一组有限序列 $f(nT)$,如图7-27(a)所示;其频率函数 $F(\omega)$ 亦为间隔为 Ω 的一组离散谱 $F(n\Omega)$,如图7-27(b)所示。

定义:
$$f(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(nT + kNT) \quad (7-53)$$

$$F(n\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n\Omega + kN\Omega) \quad (7-54)$$

式中: $n=0,1,2,\dots,N-1; k$ 为整数。

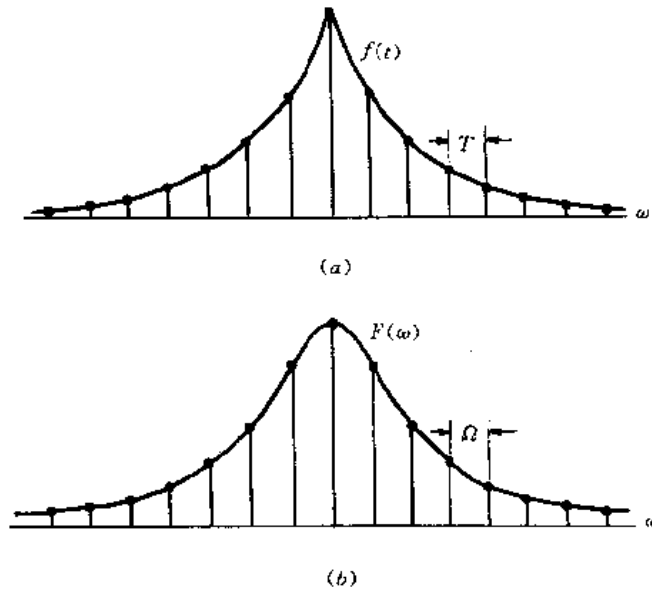


图7-27 通过DFT 计算傅里叶积分

采样周期与频率间隔 Ω 的关系为:

$$T\Omega = 2\pi/N \quad (7-55)$$

则序列 $Tf(nT)$ 与 $F(n\Omega)$ 为一对离散傅里叶变换对,分别简记为 $Tf(n)$ 、 $F(k)$ 。即表达式为:

$$F(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2j\pi kn/N} \quad (7-56)$$

$$Tf(n) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} F(k) e^{2j\pi kn/N} \quad (7-57)$$

式中: $k=0, 1, 2, \dots, N-1$

若 T, Ω 越小, 即 $NT, N\Omega$ 足够大, 则 $f(n), F(k)$ 与实际信号 $f(t)$ 及 $F(\omega)$ 越接近。式(7-56)、(7-57)证明如下:

由傅里叶积分式可得:

$$\begin{aligned} f(nT) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{jnT\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k2\pi/T}^{(k+1)2\pi/T} F(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi/T} F(\omega + 2\pi K/T) e^{jnT(\omega + 2\pi k/T)} d\omega \end{aligned}$$

即
$$f(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2\pi K/T) \right] e^{jnT(\omega + 2\pi k/T)} d\omega \quad (7-58)$$

式中 $\sum F(\omega + 2\pi P/T)$ 是 ω 的周期函数, 其周期为 $2\pi/T$, 它的傅里叶级数的展开式为:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2\pi P/T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jnT\omega}, P = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (7-59)$$

式中傅里叶系数 C_n 为:

$$C_n = (T/2\pi) \int_0^{2\pi/T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2\pi P/T) \right] e^{jnT\omega} d\omega = Tf(nT) \quad (7-60)$$

由式(7-55)及 $\omega = k\Omega, k$ 为整数, 代入式(7-59)得:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} F(k\Omega + PN\Omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-jkn2\pi/N} \quad (7-61)$$

式(7-61)左边即是 $F(k)$, 把式(7-61)右边的 n 用 $m + PN$ 取代, 其中 $m = 0, 1, \dots, N-1$ 。当 m 从 0 变到 $N-1$ 时, P 就从 $-\infty$ 变到 ∞ 。式(7-61)右边变为:

$$\begin{aligned} & T \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{P=-\infty}^{\infty} f(mT + PNT) e^{-j(m+PN)k2\pi/N} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left[T \sum_{P=-\infty}^{\infty} f(mT + PNT) e^{2j\pi km/N} \right] = T \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \cdot e^{-2j\pi km/N} \end{aligned} \quad (7-62)$$

所以
$$F(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-2j\pi kn/N}$$

式(7-56)得证。

将 $\omega = k\Omega$ 及式(7-55)代入(7-58)可得:

$$Tf(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{2j\pi kn/N}$$

式(7-57)得证

例: $f(t)$ 为一单边信号, $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0.5, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, 其傅里叶变换为: $F(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ 。

设采样时间为 $T=0.5\text{s}$, 采样点数 $N=20$ 。

则 $\Omega=2\pi/NT=\pi/5$ 。注意到当 $t>NT=10$ 时, $f(t)$ 可忽略不计, $f(nT)$ 可用有限序列 $f(n)$ 代替。其中 $n=0, 1, \dots, 19$ 。且 $f(0)=0.5$, 序列 $\{f(n)\}$ 为 $\{0.50000, 0.60653, 0.36788, 0.22313, 0.13534, 0.08208, 0.04979, 0.03020, 0.01832, 0.01111, 0.00674, 0.00409, 0.00248, 0.00150, 0.00091, 0.00055, 0.00034, 0.00020, 0.00012, 0.00008\}$ 。

其离散傅里叶变换(DFT)为 $\{F(k)\}$, 且 $k=0, 1, \dots, 19$ 。因为 $n>10$, $\{f(n)\}$ 为实数, 由傅里叶性质①有, $F(k)=F^*(19-k)$ 又因为DFT具有周期性, 即 $F_{19}=F_{-1}, F_{18}=F_{-2}$ 等。 $F_{19}, F_{18}, \dots, F_{11}$ 在负频率轴上近似于 $F(\omega)$ 。把 $F(k)$ 和 $F(n\Omega)$ 列入表7-2。从表中可看出, $F(k)$ 与 $F(n\Omega)$ 能很好保持一致。为了得到更好的精度, 应该增大采样点数 N 和减少采样时间 T 。

表 7-2

$F(k)$	$F(n\Omega)$
$1.0207 + j0.0000$	$1.0000 + j0.0000$
$0.7378 + j0.4275$	$0.7170 + j0.4505$
$0.4089 + j0.4672$	$0.3877 + j0.4872$
$0.2413 + j0.3746$	$0.2196 + j0.4140$
$0.1591 + j0.2964$	$0.1367 + j0.3435$
$0.1155 + j0.2217$	$0.0920 + j0.2890$
$0.0907 + j0.1655$	$0.0657 + j0.2478$
$0.0759 + j0.1174$	$0.0492 + j0.2162$
$0.0673 + j0.0759$	$0.0381 + j0.1914$
$0.0627 + j0.0372$	$0.0303 + j0.1715$
$0.0612 + j0.000$	$0.0247 + j0.1552$

二、离散傅里叶变换的计算及软件实现

用离散傅里叶变换的计算公式(7-44)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot (W_N)^{kn} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

直接计算 $X(k)$ 值工作量太大。对于 n 个 $x(k)$ 中的每一个必须作 N 次 $x(n)$ 乘以 $e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$, 所以总共有 N^2 次复数乘法运算, 而且还要作 $N(N-1)$ 次复数加法运算。例如, 计算 $N=1024$ 点信号的DFT, 大约需要200万次的运算量, 即便使用大型计算机也非常耗时。这限制了它的实际应用。

快速傅里叶变换(FFT)是1965年美国学者库利-图基(Cooley-Tukey)提出的计算 $x(t)$ 的有限离散傅里叶变换 $X(k)$ 的一种快速算法。FFT算法使DFT运算大大简化, 运算时间可缩短一、二个数量级。该算法使离散傅里叶变换才真正在实际中得到广泛应用。使实时频谱分析成为可能, 并且为非频域(时域或空域)信号快速处理开辟了道路。因而FFT的

提出极大地推动了信号处理技术的发展,被视为现代信息处理技术的开端。

FFT 算法有许多种,这里主要介绍“基2-FFT”算法,即时间抽选奇偶分解FFT 算法,并详细地介绍其软件程序。

1. 提高DFT 运算速度的主要途径

序列 $X(n)$ 的DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot (W_N)^{kn} \quad n, k = 0, 1, 2, \dots (N-1) \quad (7-63)$$

设, $0 \leq i \leq N-1, k=i$, 计算 $X(i)$ 的展开式如下:

$$X(i) = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^i + x(2)W_N^{2i} + \dots + x(N-1)W_N^{(N-1)i} \quad (7-64)$$

完成上述计算需要 N 次复数乘法, $N-1$ 次复数加法运算。计算整个 $X(k)$,需进行 N 次式(7-64)计算,即完成 N 点DFT 运算要进行 N^2 次复数乘法, $N(N-1)$ 次复数加法运算,可见DFT 运算冗长。

提高DFT 的计算速度,目前主要采用以下两种方法:

(1)把长为 N 的DFT,逐次分解成长度较短的DFT 计算。例如长为 N 的DFT,分解成两个长为 $N/2$ 的DFT 来计算。需要 $2 \times (\frac{N}{2})^2 = N^2/2$ 次复数乘法和 $\frac{N}{2}(\frac{N}{2}-1) = N(\frac{N}{2}-1)$ 次复数加法运算。这样分解后DFT 的计算工作量比直接计算DFT 的工作量大约要减少一半。

(2)利用 W_N^r 的周期性和对称性,在DFT 运算中进行归类,提高运算速度。

周期性: $W_N^r = W_N^{r(k+N)}$

当 r 为任意整数,有 $W_N^{rN} = 1$

运用此式,当 $N=4$ 时,有 $W^2 = W^6, W^1 = W^5$

对称性: $W_N^{(r+\frac{N}{2})} = -W_N^r \quad (W_N^{N/2} = -1) \quad (7-65)$

运用此式,当 $N=4$ 时, $W^3 = -W^1, W^2 = -W^0$

2. 基2FFT 快速傅里叶变换算法

这种算法要求 N 为2的幂次方,即 $N=2^M, M$ 为正整数。这里将 $x(n)$ 按 n 为奇数、偶数分成两组,用两个 $N/2$ 点DFT 完成一个 N 点的DFT 运算。由于是时域分解,所以称其为“时间抽选”。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad k = 0 \sim N-1$$

将 $x(n)$ 分解成偶数点和奇数点,得到:

$$X(k) = \sum_{n \text{ 为偶数}} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n \text{ 为奇数}} x(n)W_N^{nk} \quad (7-66)$$

令偶数 $n=2r$,奇数 $n=2r+1, r=0 \sim \frac{N}{2}-1$ 代入上式得:

$$x(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(W_N^2)^{rt} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(W_N^2)^{rt}W_N^k$$

由于 $W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k} = W_{N/2}^k$ 所以

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) \cdot W_{N/2}^{rt} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rt} \quad (7-67)$$

设
$$X_1(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) \cdot W_{N/2}^{rt} \quad (7-68)$$

$$X_2(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) \cdot W_{N/2}^{rt} \quad k = 0 \sim \frac{N}{2} - 1 \quad (7-69)$$

$X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 均为 $N/2$ 点的 DFT, 式(7-67)变为:

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0 \sim \frac{N}{2} - 1 \quad (7-70)$$

上述 $k = 0 \sim \frac{N}{2} - 1$ 仅能表示 $N/2$ 点 $X(k)$ 对于 $X(k)$, $k = \frac{N}{2} \sim N-1$ 可利用 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 、 W_N^k 的周期性来获得。 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 是周期为 $\frac{N}{2}$ 的周期函数, 所以

$$X_1\left(\frac{N}{2} + k\right) = X_1(k), X_2\left(\frac{N}{2} + k\right) = X_2(k), W_N^{N/2+k} = -W_N^k$$

将 $k = (N/2) + k$ 代入式(7-70)得:

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0 \sim \frac{N}{2} - 1$$

因此, 将整个 $X(k)$ 用 $N/2$ 点 DFT $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 表示。

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad (7-71)$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad (7-72)$$

式中: $k = 0 \sim \frac{N}{2} - 1$

例: 设有限序列 $x(n)$ 长度 $N=4$, 将其按式(7-68) ~ (7-72) 所述算法展开, 得:

$$\begin{cases} X_e(0) = x(0) + W_4^0 x(2) \\ X_e(1) = x(0) + W_4^2 x(2) = x(0) - W_4^0 x(2) \end{cases} \quad (7-73)$$

$$\begin{cases} X_o(0) = x(1) + W_4^0 x(3) \\ X_o(1) = x(1) + W_4^2 x(3) = x(1) - W_4^0 x(3) \end{cases} \quad (7-74)$$

由式(7-72)、式(7-71)得:

$$\begin{cases} X(0) = x_1(0) + W_4^0 x_2(0) \\ X(1) = x_1(1) + W_4^1 x_2(1) \end{cases} \quad (7-75)$$

$$\begin{cases} X(2) = x_1(0) - W_4^0 x_2(0) \\ X(3) = x_1(1) - W_4^1 x_2(1) \end{cases} \quad (7-76)$$

观察式(7-73)结构, 可画出它们的运算关系图7-28。

图7-28 所示的运算关系称为蝶形计算对于 $N=4$ 点的全部 DFT 计算, 由式(7-73) ~ (7-76) 表示, 运算关系可用图7-29 表示。

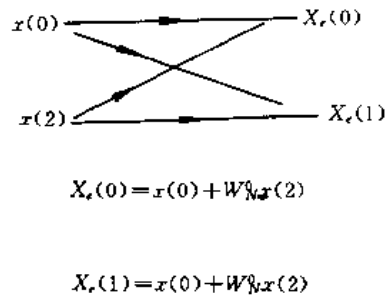


图7-28 基本蝶形计算

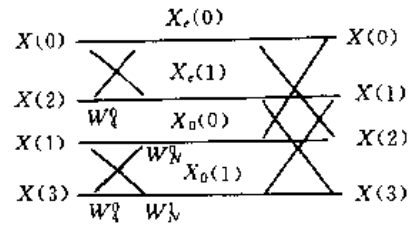


图7-29 $N=4$ 时蝶形图

整个运算需要完成4个基本蝶形计算。每个蝶形运算需要一次复乘，两次复加。完成整个运算共需4次复乘，8次复加。而直接计算4点DFT，共需16次复乘，12次复加。这说明分解对提高运算速度十分有效。

对于 $N=8$ 点的DFT，必须把 $N/2$ 点DFT进一步用 $N/4$ 点DFT来表示。其方法是设 $g(r)=x(2r)$ 然后将 $g(r)$ 再进行奇偶分解。这样对于式(7-68)有：

$$x_e(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r) W_{N/2}^{rk}$$

用 $2l$ 表示 r 中的偶数，用 $2l+1$ 表示 r 中的奇数， $l=0 \sim \frac{N}{4}-1$ ，则：

$$x_e(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{N/2}^{2lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{N/2}^{(2l+1)k}$$

又由于

$$W_{N/2}^2 = W_{N/4}$$

所以

$$x_e(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{N/4}^{lk}$$

设

$$x_{ee}(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{N/4}^{lk} \quad (7-77)$$

$$x_{eo}(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{N/4}^{lk} \quad b = 0 \sim N/4 - 1 \quad (7-78)$$

式中: $k=0 \sim N/4-1$

同理将 $N/2$ 点DFT $X_0(k)$ 可用两个 $N/4$ 点DFT $X_{0e}(k)$ 、 $X_{0o}(k)$ 表示:

$$X_0(k) = X_{0e}(k) + W_{N/2}^k X_{0o}(k) \quad (7-83)$$

$$X_0(k + \frac{N}{4}) = X_{0e}(k) - W_{N/2}^k X_{0o}(k) \quad (7-84)$$

式中: $k=0 \sim N/4-1$

设 $j(r) = x(2r+1)$, r 的偶数用 $2l$ 表示, r 的奇数用 $(2l+1)$ 表示, $l=0 \sim N/4-1$, 由式(7-69)得:

$$X_{0e}(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} j(2l) W_{N/4}^{lk} \quad (7-85)$$

$$X_{0o}(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} j(2l+1) W_{N/4}^{lk} \quad (7-86)$$

式中: $k=0 \sim N/4-1$

至此, 对于时间抽选奇偶分解法, 得到如下方程用 $N/2$ 点DFT 计算 N 点DFT。

$$\begin{cases} X(k) = X_r(k) + W_N^k X_0(k) \\ X(k + \frac{N}{2}) = X_r(k) - W_N^k X_0(k) \end{cases} \quad (7-87)$$

式中: $k=0 \sim N/2-1$

用 $N/4$ 点DFT 计算DFT。

$$\begin{cases} X_r(k) = X_{re}(k) + W_{N/2}^k X_{ro}(k) \\ X_r(k + \frac{N}{4}) = X_{re}(k) - W_{N/2}^k X_{ro}(k) \\ X_0(k) = X_{0e}(k) + W_{N/2}^k X_{0o}(k) \\ X_0(k + \frac{N}{4}) = X_{0e}(k) - W_{N/2}^k X_{0o}(k) \end{cases} \quad (7-88)$$

式中: $k=0 \sim N/4-1$

用 $x(n)$ 表示 $N/4$ 点DFT, 根据式(7-68)、(7-69)、(7-86)、(7-87), 并且 $g(r) = x(2r)$, 所以 $g(2r) = x(4l)$, $g(2l+1) = x(4l+2)$, $j(r) = x(2r+1)$, 所以:

$$j(2l) = x(4l+1), j(2l+1) = x(4l+3)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{re}(k) &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4l) W_N^{4lk} \\ X_{ro}(k) &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4l+2) W_N^{4lk} \\ X_{0e}(k) &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} j(2l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4l+1) W_N^{4lk} \\ X_{0o}(k) &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} j(2l+1) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4l+3) W_N^{4lk} \end{aligned} \right\} \quad (7-89)$$

因此

式中: $k=0 \sim N/4-1$

例: 设 $x(n)$ 长度为 $N=8$, 将其按上述算法展开, 并画出蝶形图。由(7-89)方程组用 $x(n)$ 表示 $N/4$ 点DFT 得:

$$\left. \begin{aligned} X_{ee}(0) &= x(0) + W_8^0 x(4) \\ X_{ee}(1) &= x(0) - W_8^0 x(4) \\ X_{eo}(0) &= x(2) + W_8^0 x(6) \\ X_{eo}(1) &= x(2) - W_8^0 x(6) \\ X_{oe}(0) &= x(1) + W_8^0 x(5) \\ X_{oe}(1) &= x(1) - W_8^0 x(5) \\ X_{oo}(0) &= x(3) + W_8^0 x(7) \\ X_{oo}(1) &= x(3) - W_8^0 x(7) \end{aligned} \right\} \quad (7-90)$$

由式(7-88)方程组, 用 $N/4$ 点DFT 表示 $N/2$ 点DFT 方程为:

$$\left. \begin{aligned} X_e(0) &= X_{ee}(0) + W_8^0 X_{eo}(0) \\ X_e(1) &= X_{ee}(1) + W_8^2 X_{eo}(1) \\ X_e(2) &= X_{ee}(0) - W_8^0 X_{eo}(0) \\ X_e(3) &= X_{ee}(0) - W_8^2 X_{eo}(1) \\ X_o(0) &= X_{oe}(0) + W_8^2 X_{oo}(0) \\ X_o(1) &= X_{oe}(0) + W_8^4 X_{oo}(1) \\ X_o(2) &= X_{oe}(0) - W_8^0 X_{oo}(0) \\ X_o(3) &= X_{oe}(1) - W_8^2 X_{oo}(1) \end{aligned} \right\} \quad (7-91)$$

由式(7-88)方程组, 用 $N/2$ 点DFT 表示 N 点DFT 方程:

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= X_e(0) + W_8^0 X_o(0) \\ X(1) &= X_e(1) + W_8^1 X_o(1) \\ X(2) &= X_e(2) + W_8^2 X_o(2) \\ X(3) &= X_e(3) + W_8^3 X_o(3) \\ X(4) &= X_e(0) - W_8^0 X_o(0) \\ X(5) &= X_e(1) - W_8^1 X_o(1) \\ X(6) &= X_e(2) - W_8^2 X_o(2) \\ X(7) &= X_e(3) - W_8^3 X_o(3) \end{aligned} \right\} \quad (7-92)$$

以上三个方程组, 可用图7-30 所示的 $N=8$ 点DFT 的蝶形运算图。

图中第一级是根据方程组(7-90)画出的, 图中第二级运算是根据(7-91)方程组画出的。图中第三级是根据(7-92) 方程组画出的。若对 $N=2^M$ 点时间抽选奇偶分解DFT 计算, 需要进行 M 级计算, 每级 $N/2$ 个蝶。每级进行 $N/2$ 次复乘、 N 次复加, 所以总共需要进行:

$$\text{复乘:} \quad \frac{N}{2} M = \frac{N}{2} \log_2 N$$

$$\text{复加:} \quad NM = N \log_2 N$$

而直接计算 N 点DFT, 要次复乘, $N(N-1)$ 次复加, 表7-3 列出了直接计算DFT 时间抽

选奇偶分解计算DFT 的运算次数比较。

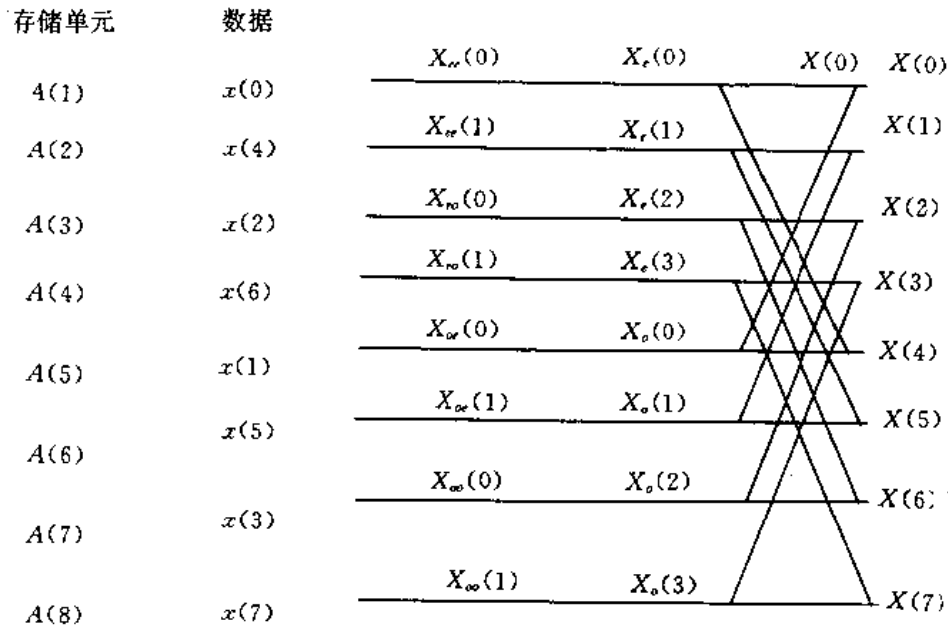


图7-30 $N=8$ 点时抽DFT 蝶形流程图

表7-3 直接DFT 与FFT 所需乘法次数比较

M	N	直接DFT (N^2)	FFT ($\frac{N}{2} \log_2 N$)	改善比值 ($\frac{2N}{\log_2 N}$)
1	2	4	1	4
2	4	16	4	4
3	8	64	12	5.3
4	16	256	32	8
5	32	1024	80	12.8
6	64	4096	192	21.3
7	128	16384	448	36.6
8	256	65536	1024	64

3. 时间抽选奇偶分解FFT 计算的一般规则

为了编制时间抽选奇偶分解FFT 计算通用程序,从方程组(7-90)、(7-91)、(7-92)及图7-30 中总结出适用 $N=2^M$ 点数一般计算规则,现综述如下:

(1) 当 $x(n)$ 长为时 $N=2^M$,要进行 M 次奇偶分解,进行 M 级计算。

(2) 从图7-30 可知,时间抽选奇偶分解FFT 运算输入序列 $x(n)$ 为倒位序,输出序列 $X(k)$ 为自然顺序。

图7-30中,输入序列排列顺序为 $x(0)$ 、 $x(4)$ 、 $x(2)$ 、 $x(6)$ 、 $x(1)$ 、 $x(5)$ 、 $x(3)$ 、 $x(7)$,称这种排列方式为倒位序。所谓“倒位序”是将序号的排列倒顺序。表7-4列出 $N=8$ 的两种排列顺序码的互换规律。

表7-4 倒位序的产生过程

读入值(自然顺序)	二进制	倒位二进制数	读出值(倒位序)
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

(3) 即位运算

“即位运算”是指当把数据存入输入存储器中后,每一次运算的结果都存入在相应的输入存储器中,直到最后计算结果。

例如图7-30中,首先将输入数据 $x(0)$ 、 $x(4)$ 、 $x(2)$ 、 $x(6)$ 、 $x(1)$ 、 $x(5)$ 、 $x(3)$ 、 $x(7)$ 分别存入 $A(1) \sim A(8)$ 存储单元中,在第一级运算中,首先将 $A(1)$ 、 $A(2)$ 中的数 $x(0)$ 、 $x(4)$ 送入运算器,进行蝶形计算,蝶形运算后 $x(0)$ 、 $x(4)$ 数据不再需要保持,蝶形运算结果 $X_{\infty}(0)$ 、 $X_{\infty}(1)$ 就直接存储在 $A(1)$ 、 $A(2)$ 单元中。第二级同样采用这种即位运算的方法。这样三级完成后, $A(1) \sim A(8)$ 存储单元中存储的就是最终的计算结果 $X(0) \sim X(7)$ 。

(4) 每级运算包括 $N/2$ 个基本蝶形计算。

图7-30中, $N=8$,因此每一级都包括4个基本蝶形计算。

(5) 第 l 级运算包括 $\frac{N}{2^l}$ 个“群”,第 L 级“群”之间间隔为 2^L 。

所谓“群”是指蝶形图中任一级互相交叉在一起的蝶形。群间隔是指图中,按从上到下的顺序,上下两个群之间对应元素序号的增量。例如图7-30中第二级,第一个群输入的第一个元素为 $A(1)$,第二个群的第一个元素为 $A(5)$,序号增量 $5-1=4$,为第二级的群间隔。

对于 $M=3$ 用公式分别计算出各级的群数,群间隔如表7-5所示,其数据与图7-30完全相符。

表7-5 $M=3$ 群间隔分布

级数 L	群数 $N/2^L$	群间隔 2^L
1	4	2
2	2	4
3	1	8

(6) 同一级各个群的乘数 W 分布相同,每级共有 2^{L-1} 个乘数。如图7-30所示,第二级有 $2^{2-1}=2$ 个乘数 W_N^0 、 W_N^2 ,各群分布相同。

(7) 基本蝶形计算单元,如图7-31所示,第 L 级蝶形计算输入序列间隔为 2^{L-1} 。

图7-31中, $A_L(\quad)$ 表示第 $L+1$ 级运算输入, $A_{L+1}(\quad)$ 表示第 $L+1$ 级运算输出, 基本蝶形运算关系为:

$$A_{L+1}(p) = A_L(p) + W_N^p A_L(p + 2^{L-1})$$

$$A_{L+1}(p + 2^{L-1}) = A_L(p) - W_N^p A_L(p + 2^{L-1})$$

例如, 第一级蝶形输入间隔 2^{L-1} , 令 $p=3$, 根据上两式有:

$$A_1(3) = A_0(3) + W_N^3 A_0(4)$$

$$A_1(4) = A_0(3) - W_N^3 A_0(4)$$

第二级蝶形输入间隔 $2^{L-1}=2$, 令 $P=2$ 有:

$$A_2(2) = A_1(2) + W_N^2 A_1(4)$$

$$A_2(4) = A_1(2) - W_N^2 A_1(4)$$

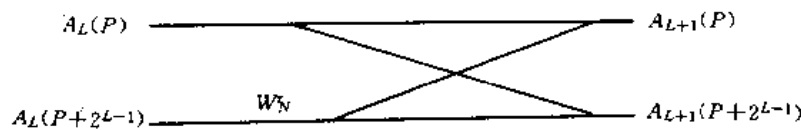


图7-31 基本蝶形单元

4. 基2FFT 算法软件实现

上面所讨论的时间抽取奇偶分别FFT 算法一般规则是编程序的主要依据。首先我们必须把经A/D 转换器或其它方法产生按自然顺序的时间抽样序列, 转换成FFT 所要求的倒位序输入。以 $N=8$ 为例加以说明, 图7-32 所示其倒位序存储过程。

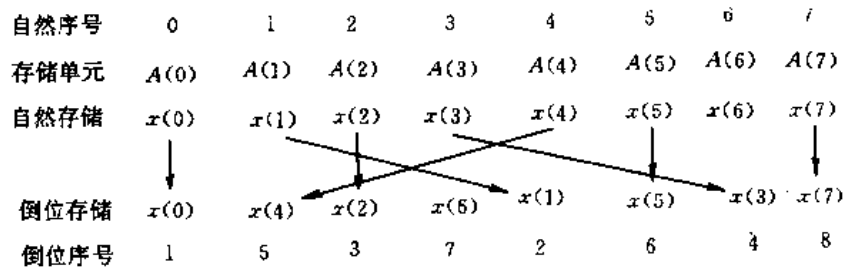


图7-32 倒位序存储

从图中可看出, 倒位序程序功能就是将自然顺序存储在数据 $A(0) \sim A(7)$ 中的 $x(n)$, 改变成按 $x(n)$ 的倒位序存储在 $A(0) \sim A(7)$ 中。

观察图7-32, 可以得出以下两条倒位序规则:

第一, 当 $I=J$ 时, $A(I)$ 中数不变;

第二, 当 $J>I$ 时, $A(I)$ 与 $A(J)$ 中内容互换。

观察表7-5 可知, 在已知一个倒位序号 J , 求下一个倒位序号的方法是反向加法, 即高

位加1 向右进位。例如,已知倒位序号000,求下一个倒位序号,就是在其高位加1 为100。又如已知倒位序号为110,则在其高位加1 向右进位,即

$$\begin{array}{r} 110 \\ +1 \\ \hline 001 \end{array}$$

计算机实现反向加法的程序框图如图7-33 所示。

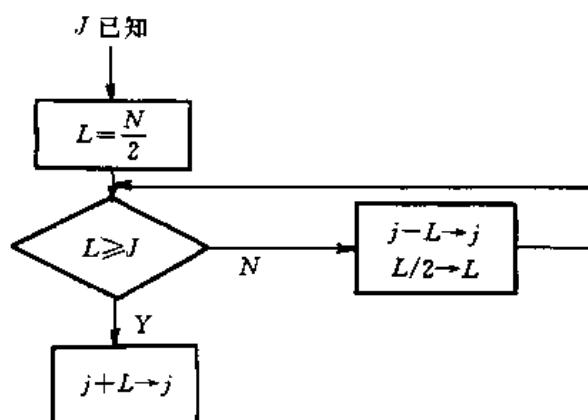


图7-33 倒位序号产生

图中,已知某个倒位序号 J 条件下,求下一个倒位序号。首先把 $N/2 \rightarrow L$, $N/2$ 相当于二进制数100(设 $N=8$),刚好表示最高位权极值,然后判定了最高位是否为零,判定方法是 J 与 L 相比, $J < L$ 则 J 最高位为零, $J > L$ 则 J 最高位为1。若 J 最高位为零(即 $J < L$), J 高位加1(即 $J + L \rightarrow J$)就得到下一个倒位序号;若 J 最高位为1(即 $J > L$),则 $J - L \rightarrow J$ 产生次高位, $L/2 \rightarrow L$ 产生次高位权值,再判定 J 次高位为零,方法仍用 J 与 L 相比,若 $J < L$ 则以高位为零。这是一种循环处理的方法,现举例加以说明。

例:设 $N=8$,已知倒位序号为5,求下个倒位序号。

首先 $N/2=4 \rightarrow L$,然后 $J(=5) > L(=4)$, ($J - L \rightarrow J$ 产生次高位), $5 - 4 = 1 \rightarrow J(k/2$ 产生次高位权值), $k/2 = 4/2 = 2 \rightarrow k$,再判 $J(=1) < k(=2)$,则($J + L \rightarrow J$) $1 + 2 = 3 \rightarrow J$ 产生下一个倒位序号3。

图7-34 是倒位序程序框图。执行程序前题条件是 $x(n)$ 按自然顺序已存入 $A(I)$ 中。在“设置初始值”一框中, $N-1 \rightarrow N1$ 置的是例位序循环执行次数,从图7-32 知道 $A(N)$ 中的数是不需要交换的。因此设循环 $N-1$ 次。紧接是比较 I, J 值与交换,顺后是产生倒位序号,最后两框是判定倒位是否完成,程序输出结果是 $A(I)$ 中存有倒位序的 $x(n)$ 。

基2FFT 程序是根据时间抽选奇偶分解算法及基本规则编制的。它的基本思想是用三层循环实现全部运算。

第一层循环:由于 $N=2^L$ 需要 L 级计算,第一层循环对运算的级数进行控制,保证第二层循环进行 L 次。

第二层循环:由于 L 级有 2^{L-1} 个乘数(即不同的 W 数目)。第二层循环根据乘数进行控制,保证对于每一乘数第三层循环要循环计算一次,这样第三层循环在第二层循环控制下,每一级要进行 2^{L-1} 次循环计算。

第三层循环:由于第 L 级共有 $\frac{N}{2^L}$ 个群,并且同一级内不同群乘数分布相同,当第二层循环确定某一乘数后,第三层循环保证将这一级中每一个群中具有这一乘数的蝶计算一次。第三层循环每执行完一次要进行 $\frac{N}{2^L}$ 个蝶形计算。

综上所述,在第三层循环完成时,共进行 $\frac{N}{2^L}$ 个基本蝶形计算;第二层循环又使第三种循环进行 2^{L-1} 次。因此,第二层循环完成时,共进行 $2^{L-1} \cdot \frac{N}{2^L} = \frac{N}{2}$ 个基本蝶形,可以得出结论,根据规则,每一级共有 $N/2$ 个基本蝶形,第二层循环与第三层循环实质是完成了第 L 级计算。第一层循环又将第二层循环进行 M 次,因此第一层循环全部运算结束后共进行 $MN/2$ 次基本蝶形计算。根据规则,若 $N=2^M$,要进行 M 级计算,每级有 $N/2$ 个基本蝶形,所以完成全部运算总共需要进行 $MN/2$ 基本蝶形计算。这样三层循环的内在关系就保证了完成蝶形图规定的全部运算。其程序框图如图7-35所示。

三、FFT 的实际应用

1. 离散信号功率谱的计算

FFT 算法的重要应用之一是离散信号的功率谱的计算,功率谱的计算一般有两种方法,即自相关和快速傅里叶变换(FFT)法,现介绍如下:

用自相关函数估计功率谱密度函数,一般分以下步骤。

第一步,求长为 N 的随机序列 $x(n)$ 的相关函数的值,即

$$r_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(n)x(n+m), 0 \leq m \leq N-1 \quad (7-93)$$

式中,求和上限为 $N-1-m$,由于 $x(n)$ 和长为 N ,当 $n \geq N$ 时, $x(n)=0$,所以要保证 $x(n+m)$ 不为零,就得保证 $n+m \leq N-1$,所以, $n \leq N-1-m$ 。

第二步,求功率谱密度 $P_N(\omega_i)$

$$P_N(\omega_i) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_N(m)e^{-j\omega m} \quad (7-94)$$

相关函数的描述,实际上只取了随机序列的 N 个观测值。显然, N 个观测值估计的自相关函数 $r_N(m)$ 不会等于理论上的 $r(m)$ (序列无限长)。通常称 $r_N(m)$ 为样本自相关函数,它对 $r(m)$ 的偏离带有随机性。由随机理论可证明,样本自相关函数 $r_N(m)$ 是 $r(m)$ 的渐近无偏一致估计。

对信号的功率谱分析,也可以直接从离散序列 $X(n)$ 的快速傅里叶变换求得,由功率谱的定义可直接写出:

$$P_N(\omega) = \frac{1}{N} \cdot |X_N(e^{j\omega})|^2 \quad (7-95)$$

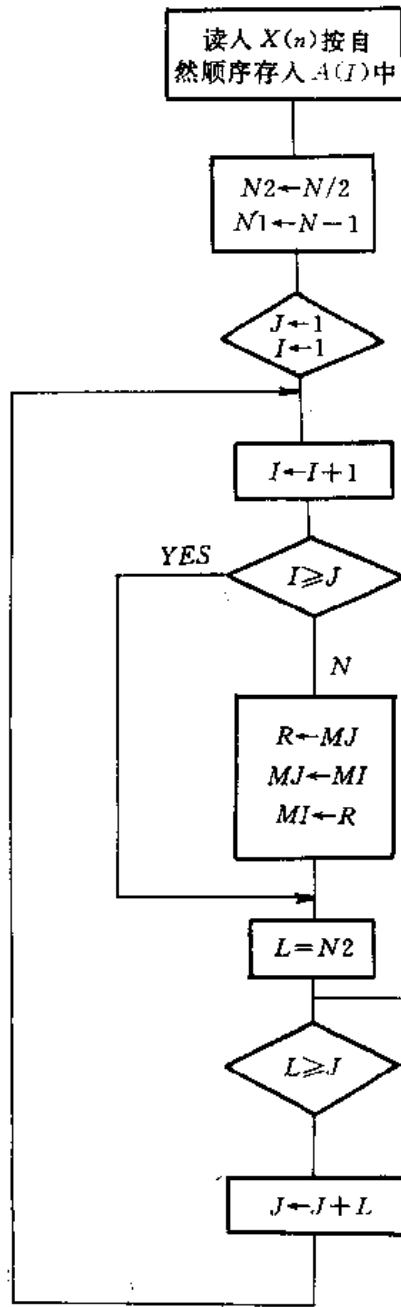


图7-34 倒位序程序框图

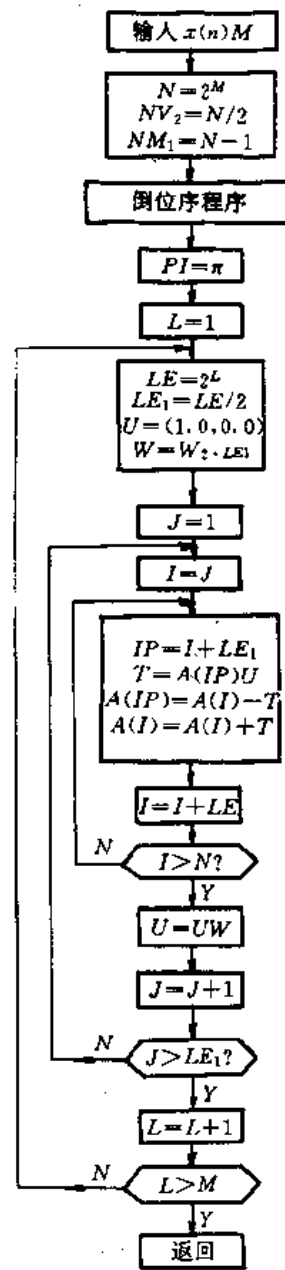


图7-35 基2FFT 程序框图

由于序列的傅里叶变换 $X_N(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数。所以 $P_N(\omega)$ 也是 ω 的周期函数，称之为序列长为 N 的实平稳序列 $x(n)$ 的周期图。习惯上用 $I_N(\omega)$ 表示周期图功率谱估计，因此：

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2} \cdot |X_N(e^{j\omega})|^2 \quad (7-96)$$

由于 $X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$ ，令 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ ，则：

$$X_N(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \text{FFT}[x(n)] = X_N(k)$$

所以式(7-96)变为:

$$I_N(k) = \frac{1}{N} \cdot |X_N(k)|^2 \quad (7-97)$$

因此,周期图法求信号序列功率谱,只需对信号序列 $x(n)$ 进行FFT运算,然后取其绝对值平方,再进行序列长度范围内的平均即可。因此,采用FFT算法可以直接估计一个实随机序列的功率谱的近似值。周期图法不满足一致估计。

为了减小周期图估计功率谱的误差,可采用平滑周期图平均法。

对长度为 N 的序列 $x(n)$,平均分成每段长为 J 的部分组成,其每段起始间隔为 M 。 J 为2的幂次方。每段都有一部份重叠,重叠长度为 M , $M < J$,取 $M = J/2$ 。为此,整个序列 $x(n)$ 分成长为 J 个 K 重叠段,每段重叠 M 个样值,且 $k = 2N/J$ 。上述过程示于图7-36。

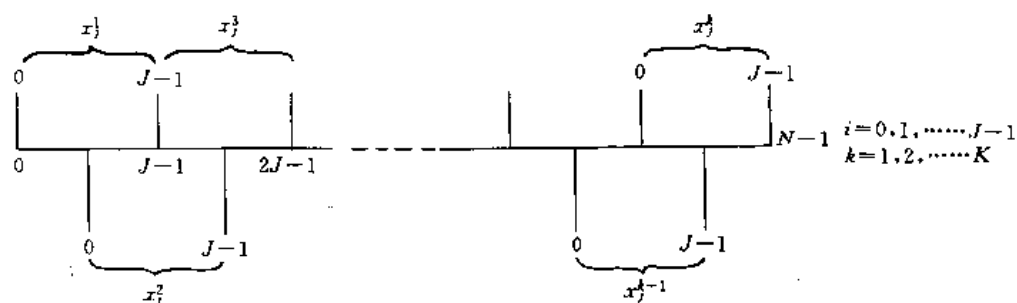


图7-36 N 点序列分成长为 J ,相互重叠的 K 段

图中每段的序列值 $X_k(i)$ 定义为:

$$X_k(i) = X[k + (k-1)J/2] \quad (7-98)$$

式中: $i=0,1,\dots,J-1$;

$k=1,2,\dots,K$ 。

为了避免Gibbs现象,对输入序列加时间窗,以减少因序列截断而产生的泄漏。选择合适的窗函数是克服吉布斯效应的有效方法。这类窗函数通常选择Parzen窗,其定义为:

$$W(i) = 1 - \frac{|i - (J-1)/2|}{|(J+1)/2|} \quad (7-99)$$

式中: $i=0,1,\dots,J-1$ 。

另一广泛使用的窗为Hamming窗、三角窗函数等。对各段进行加窗,即 $X_k(n)W(n)$,其数字傅里叶变换为:

$$X_k(P) = \left(\frac{1}{J}\right) \sum_{n=0}^{J-1} x_k(n) \cdot w(n) \cdot e^{-jnP(2\pi/J)} \quad (7-100)$$

式中: $P=0,1,\dots,J-1$;

$k=0,1,\dots,K$ 。

定义归一化频率 $f(P) = PJ$, $P=0,1,\dots,J/2$ 。其功率谱估计为 $S[f(p)]$,注意到 $f(p) =$

0.5 对应于采样频率的一半。功率谱估计 $S[f(p)]$ 由下式给出:

$$s[f(p)] = \left(\frac{J}{kE}\right) \sum_{k=1}^K |A_p^k|^2 \quad (7-101)$$

式中常量 E 表示窗口能量,它定义为:

$$E = \frac{1}{J} \sum_{n=0}^{J-1} W^2(n) \quad (7-102)$$

要得到功率谱,首先在进行适当窗处理的序列后,进行 K 次的 J 个点的FFT变换,然后再进行平方和平均处理。

实用的平滑周期图平均估计计算程序设计步骤如下:

①将长为 N 的序列 $x(n)$ 分成长为 J 的 K 个重叠段,每段重叠 $M=J/2$ 个样值,序列段总数

$$K = [(N - J/2)/(L/2)] \quad (7-103)$$

式中 N 为 $L/2$ 的整数倍(M, N 为2的整数幂)。第 i 段序列表示为:

$$x_i(n) = x(i \cdot J/2 + n), 0 \leq n \leq L - 1, 0 \leq i \leq k - 1 \quad (7-104)$$

采用每段重叠 $L/2$ 个样点,在相同段数情况下,加长了每一段的长度,这样提高分辨率,而不影响其精度。

②求序列 $x(n)$ 均值 E

$$E = \frac{1}{n} \sum_{N=0}^{n-1} x(n) \quad (7-105)$$

③每段序列减均值并加窗

$$x_i(n) = [x(iJ/2 + n)]W(n) \quad (7-106)$$

式中 $0 \leq n \leq j-1, 0 \leq i \leq k-1$

周期图法处理的序列均值应为0,否则造成低频混叠。

④求第 i 段 G 点离散傅里叶变换($G \geq J$)

$$X_i(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{G}nk} \quad (7-107)$$

式中: $0 \leq k \leq G-1, 0 \leq i \leq k-1$

这里 G 是人为选定的, $G \gg J$ 时, $x_i(n)$ 要补 $G-J$ 个0样值,其目的是用补零法进一步提高分辨率。

⑤求每段周期图

$$P_i(k) = |x_i(k)|^2 \quad (7-108)$$

式中: $0 \leq k \leq G-1, 0 \leq i \leq k-1$

⑥求功率谱

$$P_N(k) = \frac{1}{kU} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} P_i(k) \quad (7-109)$$

式中: $0 \leq k \leq G-1, U = \sum_{m=0}^{L-1} W^2(n)$

2. 快速卷积

数字信号处理往往涉及到两序列的线性卷积。通常,一个序列为有限短序列,例如,数字

滤波器的脉冲响应序列 $h(n)$ ；而另一个为相对较长的数字序列，实际上这个长的序列可看成以一定采样率采样后，连续的无限长序列。设定短序列为 $\{h(n)\}_{n=0}^{N-1}$ ，长数字序列为 $\{x(n)\}$ ，其线性卷积结果为 $\{y(n)\}$ ，由卷积定义有：

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (7-110)$$

式(7-110)直接计算卷积 $y(n)$ ，要求进行 N 次乘法运算， $N-1$ 次加法运算。在许多情况下， N 为一个较大数，其计算量很大。为了节省大量计算时间，可采用FFT法计算线性卷积。

这里，把数据序列 $x(n)$ 分成长度为 L 的许多小段，如图7-37所示，设 $X_m(n)$ 表示第 m 段序列

$$x_m(n) = \begin{cases} x(n), & mL \leq n \leq (m+1)L - 1 \\ 0, & n \text{ 为其它} \end{cases} \quad (7-111)$$

式中： $m = \dots -1, 0, 1, \dots$

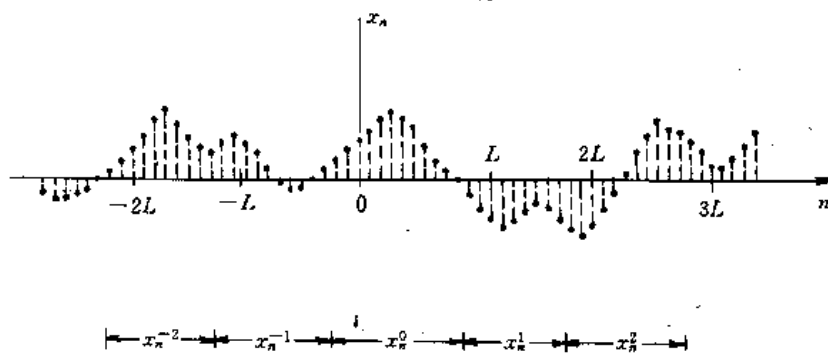


图7-37 输入数字序列分为长度为 L 的许多小段

由图7-38可知，原始序列 $x(n)$ 可看成是 m 个无重叠序列段 $\{x_m(n)\}$ 所组成。

设 $\{q_m(n)\}$ 是 $h(n)$ 与第 m 个数字序列 $X_m(n)$ 的卷积，则式(7-110)变为：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} X_m(n-j) \cdot h(j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m(n) \quad (7-112)$$

式中序列 $\{q_m(n)\}$ 的长度为 $L+N-1$ 。两个相邻序列，即 $\{q_0(n)\}$ 、 $\{q_{m+1}(n)\}$ 有 $N-1$ 个点重叠。

例如：设 $N=4$ ， $L=9$ ，则序列 $\{q_m(n)\}$ 可由序列 $\{x_0(0), x_0(1), \dots, x_0(8)\}$ 与 $\{h(0), h(1), h(2), h(3)\}$ 卷积得到，其卷积结果为 $\{q_0(0), q_0(1), q_0(2), q_0(3), q_0(4), q_0(5), q_0(6), q_0(7), q_0(8), q_0(9), q_0(10), q_0(11)\}$ （即长度为 $L+N-1=9+4-1=12$ ）。同理序列 $\{q_1(n)\}$ 可由 $\{x_1(9), x_1(10), x_1(11), x_1(12), x_1(13), x_1(14), x_1(15), x_1(16), x_1(17)\}$ 与 $\{h(0), h(1), h(2), h(3)\}$ 卷积得到，其结果为 $\{q_1(9), q_1(10), q_1(11), \dots, q_1(19), q_1(20)\}$ 。由此可看出，结果序列 q_0, q_1 有 $4-1=3$ 个点重叠，即发生在 $n=9, 10, 11$ 处。为了得到正确的结果 $y(n)$ ，必须对重叠部分求和。

由式(7-112)得：

$$Y(10) = q_0(10) + q_1(10) \quad (7-113)$$

由 $q_m(n)$ 及数字段序列得:

$$\begin{aligned} q_0(10) &= x_0(10)h(0) + x_0(9)h(1) + x_0(8)h(2) + x_0(7)h(3) \\ &= 0 \times h(0) + 0 \times h(1) + x_0(8)h(2) + x_0(7)h(3) \\ &= x(8)h(2) + x(7)h(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1(10) &= x_1(10)h(0) + x_1(9)h(1) + x_1(8)h(2) + x_1(7)h(3) \\ &= x(10)h(0) + x(9)h(1) \end{aligned}$$

将 $q_0(10)$ 、 $q_1(10)$ 代入式(7-113)得 $y(10)$ 正确答案。

$$y(10) = x(10)h(0) + x(9)h(1) + x(8)h(2) + x(7)h(3)$$

上述过程可用图7-38表示。

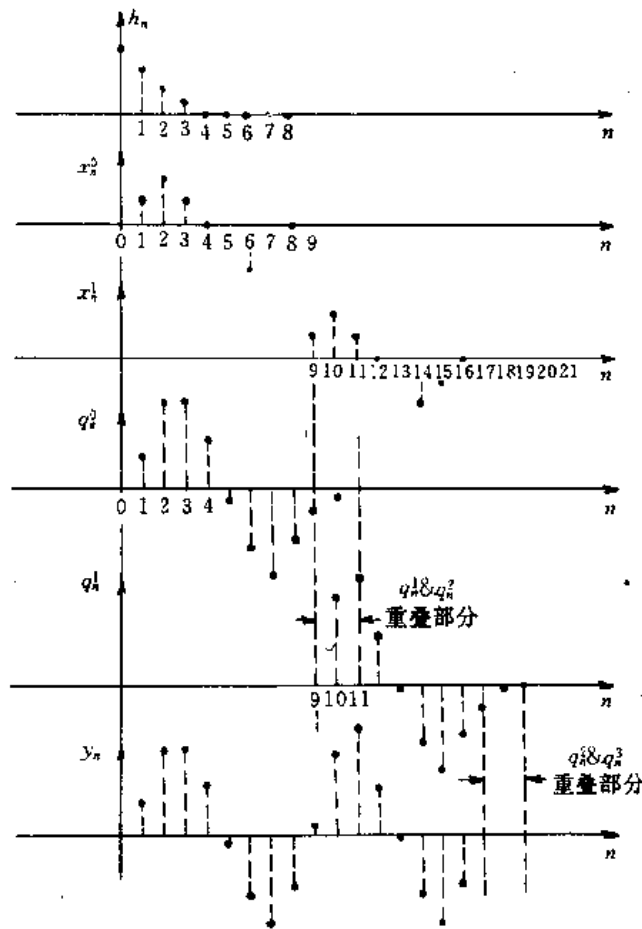


图7-38 重叠相加法举例

这种把输入数字序列分成互不重叠的许多小段,通过各段进行线性卷积,并对重叠部分求和的方法称为“重叠相加法”。整个过程用图7-39表示。“重叠相加法”用FFT计算,其过程总结如下:

$$\textcircled{1} H(k) = \text{FFT}[h(n)] \quad \text{即} \quad H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)W^{nk}$$

$$\textcircled{2} X_m(k) = \text{FFT}[x_m(n)] \quad \text{即} \quad X_m(k) = \sum_{n=0}^{L-1} X_m(n+mL)W^{nk}$$

$$\textcircled{3} q_m(k) = H(k)X_m(k) \quad q_m(n) = \text{IFFT}[y_m(n)]$$

$$\textcircled{4} q_m(n+mL) = \frac{1}{N+L-1} \sum_{k=0}^{N+L-1} q_m(k) \cdot W^{nk}$$

⑤将 $q_m(n)$ 重叠部分相加得 $y(n)$ 。

上面各式中 $W = e^{-2\pi j/(N+L-1)}$

以上过程的数字傅里叶变换均采用快速傅里叶算法(FFT)。对每个输出样本,其乘法运算只需作 $(N+L-1)(1+\log_2 N)/L$ 次,而直接用式(7-110)计算线性卷积,需作 N 次乘法运算。例如取 $N=32, L=481$,则直接卷积运算每个输出样本需 N 次乘法运算,而采用“重叠相加FFT算法”仅需6.43次。每个输出样本为原来运算量的5分之一。若取 $N=128, L=1921$,则前者为128次乘法运算,而后者仅需8.56次乘法运算,计算量为原来的16分之一。

可见采用FFT“重叠相加法”,可充分发挥循环卷积的优越性,计算量大大下降。该方法对处理无限长信号例如语言信号、地震波信号等十分有效。

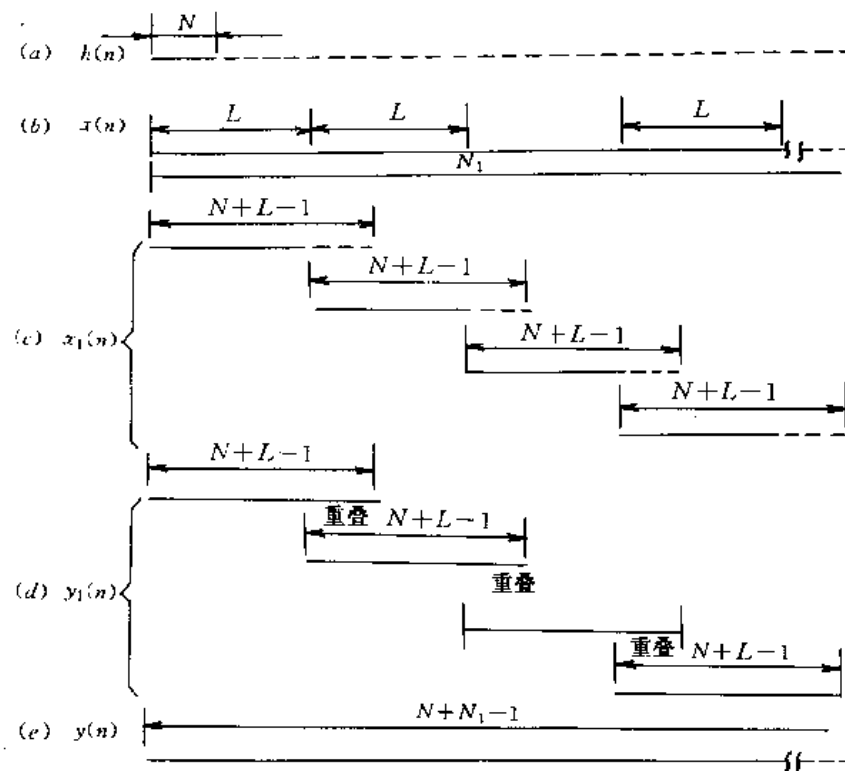


图7-39 两序列差别很大时快速卷积重叠相加法

3. FFT 技术在测试中的应用

FFT 技术日益成为数字信号处理的核心,是动态测试最常用和有效的手段。目前,已有几十种动态测试仪和实时分析都采用FFT 技术。如丹麦BK2033,美国HP5451,日本7T17

等。一些复杂的动态测试系统也配置FFT 软件,如英国Talysurf-5T 轮廓仪。FFT 技术现已广泛应用于功率谱估计、系统分析、匹配滤波等领域。它成功应用于平面粗糙度综合评估、随机振动测量、热工参量动态测试,超低频失真检测,传感器动态参数判别等。

第五节 数字滤波

数字滤波是数字信号处理的一个重要技术分支。它可以在形形色色的信号中提取所需要的信号,抑制不需要的信号(干扰、噪声)。现代科学技术的高速发展,对信号处理要求越来越高,要求滤波过程是尽可能地恢复被噪声干扰的信息源。

所谓数字滤波器实质是用一有限精度算法,通过计算机将输入序列 $x(n)$ 按要求转换成输出序列 $y(n)$ 。数字滤波的突出优点是高精度、高稳定性,没有匹配问题,易于小型化和集成化。因此它受到广泛的重视和应用。

本节讨论一维数字滤波器原理与结构及数字滤波器设计。

一、数字滤波器原理及结构

数字滤波器实际上就是一个线性时不变离散系统,一般可用下式表达:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k X(n-k) - \sum_{k=1}^L a_k y(n-k) \quad (7-114)$$

式中 $x(n)$ 为输入序列, $y(n)$ 是输出序列, $b_0, b_1, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_k$ 为系数。设计数字滤波器,就是如何选择这些系数,使滤波器具有所期望对数字信号处理的特征。通过A/D 转换器和D/A 转换器,利用数字滤波器可完成对模拟信号进行处理。图7-40 为数字滤波器对模拟信号进行处理的过程。图中模拟信号 $x(t)$ 被采样时间 T 的模/数转换器进行采样,转换为数字信号 $X(nT)$ 。该数字信号 $X(nT)$ 被传递函数为 $H(z)$ 的线性时不变数字滤波器系统处理后,产生预期的输出信号 $y(n)$, $y(n)$ 与 $x(m)$ 的关系用式(7-114)表示,该信号再经过传递函数 $G(w)$ 的模拟低通重建滤波器后,产生所需的模拟信号输出 $y(t)$ 。

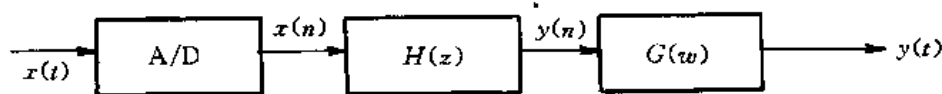


图7-40 模拟信号的数字滤波处理过程

模拟信号的数字滤波处理过程如下:

模拟 $x(t)$ 经采样时间为 T 的A/D 转换器,变为数字信号 $x(nT)$,其 z 变换为 $X(z)$,模拟信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X^*(\omega)$,这里上标 a 代表信号是模拟的,则:

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT)z^{-n} \quad (7-115)$$

令: $z=e^{j\omega}$ 代入上式得:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^a(u) e^{jnT u} du \cdot e^{-jn\omega}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^a(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn(uT-\omega)} du \quad (7-116)$$

由离散傅里叶变换性质可得:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn(uT-\omega)} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - \omega/T + 2\pi k/T) \quad (7-117)$$

式(7-117)代入式(7-116)得:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^a[(\omega + 2\pi k)/T] \quad (7-118)$$

由式(7-118)可知, $X(e^{j\omega})$ 为周期是 2π 的周期函数, 数字滤波器的输入与输出为:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (7-119)$$

重建滤波器输出的傅里叶变换为:

$$y^a(\omega) = G(\omega)y(e^{j\omega T}) = G(\omega)H(e^{j\omega T})X(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{T}G(\omega)H(e^{j\omega T}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^a[(\omega + 2\pi k)/T] \quad (7-120)$$

由式(7-120)可知, 重建滤波器输出的傅里叶变换为 $\frac{1}{T}G(\omega)H(e^{j\omega T})$ 与 $X^a(\omega)$ 的卷积, 且 $X^a(\omega)$ 的周期为 2π , 故重建滤波器输出的傅里叶变换也是周期为 2π 的函数。

式(7-124)左边就是序列 $\{y(n)\}$ 的 z 变换。由 Z 变换的移拉性质,可得序列 $\{y(n-k)\}$ 的 z 变换为 $z^{-k}y(z)$,序列 $\{x(n-k)\}$ 的 z 变换为 $z^{-k}X(z)$,这里, $X(z)$ 就是序列 $\{X(n)\}$ 的 z 变换。式(7-124)变为:

$$y(z) = \left[\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right] X(z) - \left[\sum_{k=1}^L a_k z^{-k} \right] y(z) \quad (7-125)$$

把式(7-125)写成一种简式:

$$y(z) = X(z) \cdot H(z) \quad (7-126)$$

式中:

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^L a_k z^{-k}} \quad (7-127)$$

$H(z)$ 称为数字滤波器的传递函数。

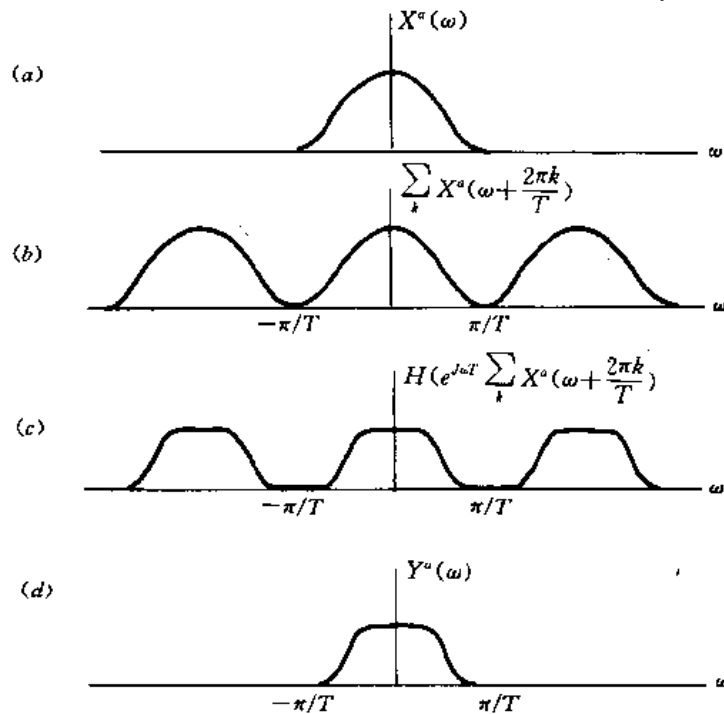


图7-41 模拟信号数字滤波处理谱分析

对于式(7-114)、式(7-127), $a_k \neq 0, b_k \neq 0$,特别是 $a_k \neq 0$ (a_k 不全为零)时,序列 $y(n)$ 取决于现在的输入序列 $x(n)$ 和过去的输入 $x(n-1), x(n-2) \dots$ 及过去输出序列 $y(n-1), y(n-2) \dots$,这种关系在计算机中采用递归方法(recursive)加以实现。即将过去的输入、输出值存在存储器中,根据这些值和当前输入值计算当前输出值,而计算结果又成为下一轮计算的过去输入值。从而实现递归计算滤波。这类滤波器称为递归滤波器。

当 $b_k \neq 0, a_k = 0$,则式(7-114)、式(7-127)变为:

$$y(n) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x(n-j) \quad (7-128)$$

$$H(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} \quad (7-129)$$

式(7-128)、式(7-129)说明:当前输出序列仅与现在和过去的输入序列有关,而与过去的输出序列无关,不需要将结果重新作为输入,因此,此类滤波器称为非递归数字滤波器。

通常,非递归滤波器又称为有限冲激响应(简记FIR)滤波器;递归滤波器称为无限冲激响应(简记IIR)滤波器。

在实际应用中,一般根据实际情况,来确定使用什么类型的滤波器。式(7-114)可用图7-42所示递归数字滤波器结构来实现,该结构又称为直接形式。当 $L=M$ 时,另一种直接形式

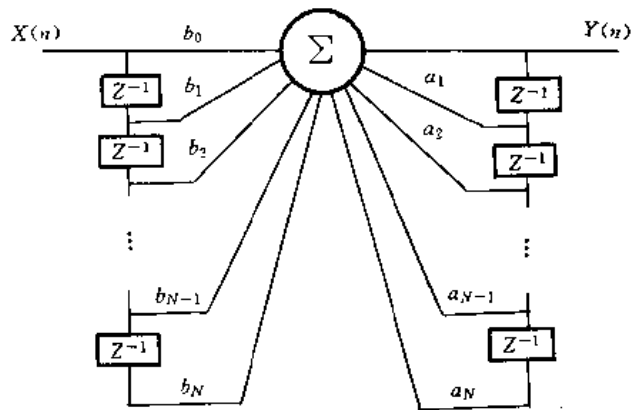


图7-42 递归型数字滤波器结构

可由图7-43所示结构来实现。这两种直接形式的结构,在实际应用中,滤波器的传递函数的阶数一般不超过2阶,对于高阶情况,通常采用把 $H(z)$ 分解成低阶的组合,然后分别加以实现。 $H(z)$ 分解的方法分为并联和级联的形式。当滤波器实现采用并联的形式时,其传递函数 $H(z)$ 为:

$$H(z) = \sum_{i=1}^k H_i(z) \quad (7-130)$$

式中, $H_i(z)$ 是一阶或二阶传递函数。

该滤波器的结构示于图7-44。

滤波器的传递函数 $H(z)$ 可写成低阶传递函数的乘积。其表达式为:

$$H(z) = \prod_{i=1}^k H_i(z) \quad (7-131)$$

式中 $H_i(z)$ 是子滤波器的传递函数。它可表示成 z^{-1} 的一阶或二阶多项式之比。其结构示于图7-45中。

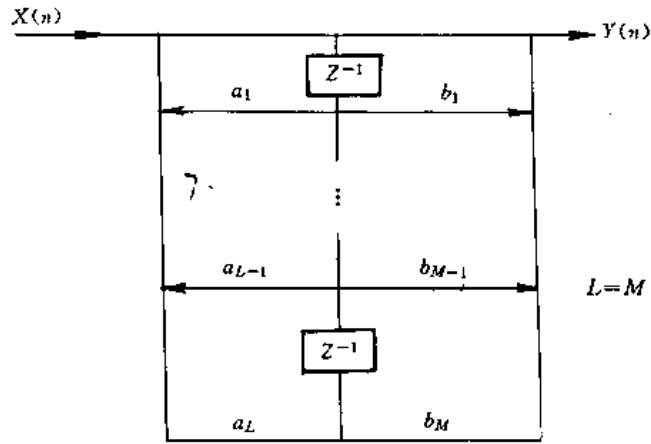


图7-43 数字滤波器直接形式结构

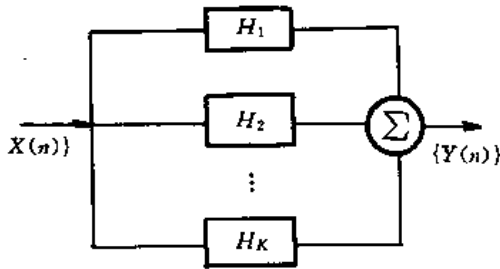


图7-44 数字滤波器并联结构

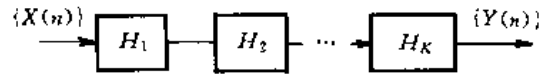


图7-45 数字滤波器串联结构

观察传递函数为 $H(z)$ 的数字滤波器对正弦信号的响应。

离散正弦信号表达式为：

$$X(n) = \begin{cases} A\sin(cn), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (7-132)$$

$X(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \frac{Az^{-1}\sin(c)}{(1 - e^{jc}z^{-1})(1 - e^{-jc}z^{-1})}$$

由式(7-127)响应函数的 z 变换可写成部分分式，即：

$$y(z) = \frac{AH(e^k)}{2j(1 - e^kz^{-1})} - \frac{AH(e^{-k})}{2j(1 - e^{-k}z^{-1})} + [\text{由 } H(z) \text{ 点所决定的边界项}] \quad (7-133)$$

当 $n \rightarrow \infty$ ，存在阻尼时，由 $H(z)$ 的极点所决定的项趋于零。所以，式(7-124)变为：

$$Y(z) = \frac{Az^{-1}\sin(c)[H(e^k) + H(e^{-k})] - j[1 - z^{-1}\cos(c)][H(e^k) - H(e^{-k})]}{2[1 - 2\cos(c)z^{-1} + z^{-2}]}$$

其 z 的逆变换为：

$$y(n) = A \left[\frac{H(e^{j\lambda}) + H(e^{-j\lambda})}{2} \sin(nc) + \frac{H(e^{j\lambda}) - H(e^{-j\lambda})}{2j} \cos(nc) \right]$$

$$= A |H(e^{j\lambda})| \sin[nc + \text{Arg}H(e^{j\lambda})] \quad (7-134)$$

由式(7-134)可知,数字滤波器对频率为 c 的正弦信号的稳态响应,其频率仍为 C ,幅值为输入信号幅值的 $|H(e^{j\lambda})|$ 倍;其相位差为 $\text{Arg}H(e^{j\lambda})$ 。通常称 $H(e^{j\lambda})$ 为数字频率响应。当 $-\pi \leq \lambda < \pi$ 时,数字滤波器的幅频特性为 $|H(e^{j\lambda})|$,其相频特性为 $\text{Arg}H(e^{j\lambda})$, λ 称为数字频率。

$H(z)$ 在单位圆 $|z|=1$ 上的特性具有重要意义。

数字滤波器的传递函数的零点不影响系统的稳定性,但决定系统的频率响应。例如, $H(z)$ 在单位圆上有一零点,即 $z=e^{j\lambda}$,系统在该数字频率 λ 处,响应输出为零。当 $H(z)$ 的幅频特性 $|H(e^{j\lambda})|$ 在所有的数字频率上,为一常量时,该滤波器所有极点和零点互为倒数,即对每个极点 P_i ,就有一个零点 b_i ,使其 $P_i b_i=1$ 。

二、数字滤波器的设计

数字滤波器分为递归型(IIR)滤波器和非递归型(FIR)滤波器两大类。对于IIR 滤波器的设计,主要决定其传递函数 z^{-1} 的有理式;而对FIR 滤波器的设计,决定其传递函数 z^{-1} 的多项式。

目前,IIR 数字滤波器设计主要有两种方法,即利用模拟滤波理论来设计数字滤波器和利用计算机优化辅助技术进行设计。

对于FIR 数字滤波器设计主要也有两种方法,即窗口函数法和最小误差准则计算机辅助设计方法。

1. 利用模拟滤波器理论设计IIR 数字滤波器

(1)低通IIR 数字滤波器的设计

典型低通滤波器的幅频图如图7-46所示。通频带的截止频率为 $\lambda=\Lambda_c$,通频带为 $0 < \lambda < \Lambda_c$,阻带为 $\Lambda_s < \lambda < \pi$,过渡带为 $\Lambda_c < \lambda < \Lambda_s$ 。通频带内,纹波幅度小于 δ_1 。阻带内,纹波幅小于 δ_2 ,滤波器设计就是决定其传递函数,使其在单位圆 $|H(e^{j\lambda})|$ 上,幅频特性值满足:

$$\text{当 } 0 \leq \lambda \leq \Lambda_c, 1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\lambda})| \leq 1 + \delta_1$$

$$\Lambda_s \leq \lambda \leq \pi, |H(e^{j\lambda})| \leq \delta_2$$

建立数字频率和模拟频率之间的关系。若模拟信号的采样频率为 $F_s=1/T$ 。由(7-123)可得数字截止频率 Λ_c 与模拟信号截止频率 f_c 的关系为:

$$f_c = \Lambda_c F_s / 2\pi \quad (7-135)$$

阻带起始频率 Λ_s 与 f_s 的关系为:

$$f_s = \Lambda_s F_s / 2\pi \quad (7-136)$$

上述关系示于图7-46。

现在,选择合适的模拟低通滤波器,逼近所期望的频率响应特性。有三大常见的低通滤波器设计方法,即巴特沃兹、切比雪夫、考尔式椭圆滤波器等。它们都是根据幅度平方函数来确定。巴特沃兹滤波器具有最平坦的幅频响应。它的极点均匀分布在 s 平面的单位圆上。切比雪夫滤波器在通频带上或阻带上具有纹波的幅频响应,且极点位于 s 平面的椭圆上。而考

尔滤波器在通频带上和阻带上具有等纹波的幅频响应。

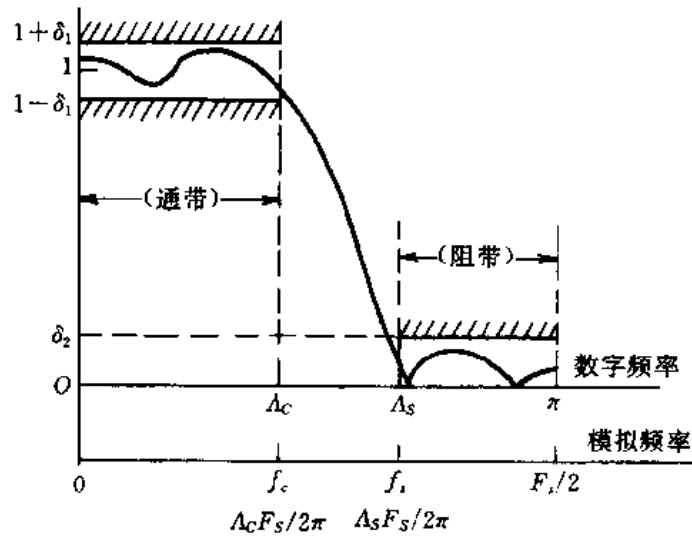


图7-46 低通滤波器幅频特性

若选择3阶的巴特沃思滤波器,其传递函数为:

$$H^a(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \quad (7-137)$$

它的幅频响应(如图7-47所示)为:

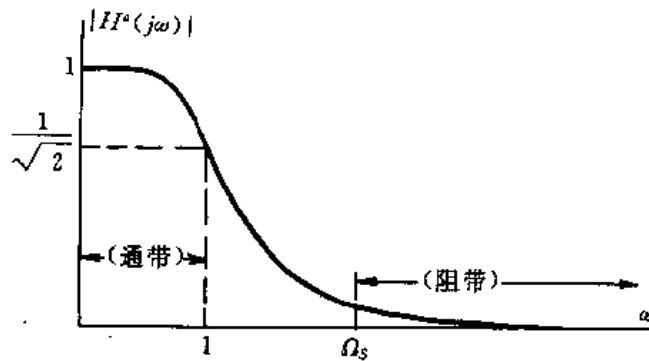


图7-47 3阶巴特沃思低通滤波器幅频响应

$$|H^a(j\omega)| = (1 + \omega^6)^{-1/2} \quad (7-138)$$

这里,3dB的截止频率为 $\omega_c=1$ 。

设滤波器的阻带为 $\Omega_s \leq \omega < \infty$,此时,幅频响应 $|H^a(j\omega)| = (1 + \Omega_s^6)^{-1/2}$

考虑 ω 和 λ 的关系有:

$$\omega \operatorname{tg}(\lambda_c/2) = \operatorname{tg}(\lambda/2) \quad (7-139)$$

数字频率 λ 与模拟频率 ω 为一种单调递增非线性关系,如图7-48所示。单边模拟频率变

化范围为 $0 \leq \omega \leq \infty$, 与之相对应的数字频率变化范围为 $0 \leq \lambda < \pi$,。模拟截止频率 $\omega_c = 1$, 对应的数字频率为 $\lambda = \Lambda_c$ (如图7-48 所示)。

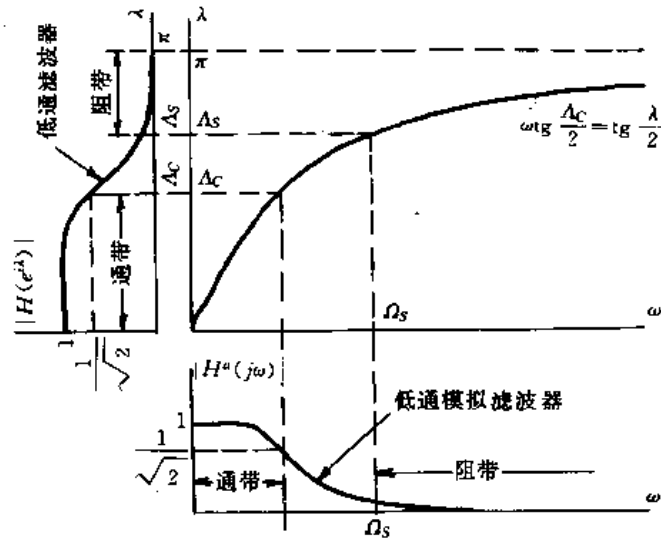


图7-48 模拟低通与数字低通对应关系

用 $s = j\omega, z = e^{j\lambda}$ 代入式(7-139)得:

$$S = j \cot(\Lambda_c/2) \frac{\sin(\lambda/2)}{\cos(\lambda/2)} = j \cot(\frac{\Lambda_c}{2}) \frac{(e^{j\lambda/2} - e^{-j\lambda/2})/2j}{(e^{j\lambda/2} + e^{-j\lambda/2})/2} = c \frac{z - 1}{z + 1} \quad (7-140)$$

式中: $C = \cot(\Lambda_c/2)$

式(7-137)的传递函数 $H^a(s)$ 写成 z 域函数:

$$H^a\left[c \frac{(z - 1)}{(z + 1)}\right] = \frac{(z + 1)^3}{c_1(z + p_1)(z^2 + b_1z + d_1)} = H(z) \quad (7-141)$$

式中系数为:

$$\begin{aligned} c_1 &= (1 + c)(1 + c + c^2) & P_1 &= (1 - C)/(1 + C) \\ b_1 &= \frac{2 - 2c^2}{1 + c + c^2} & d_1 &= \frac{1 - c + c^2}{1 + c + c^2} \end{aligned}$$

由式(7-141)可知 $H(z)$ 是 z 的有理函数, 即为IIR 数字滤波器的传递函数。

数字滤波器的阻带为 $\Lambda_c \leq \lambda \leq \pi$, Λ_c 对应于模拟滤波器阻带频率 Ω_s 。

由式(7-139)得:

$$\Omega_s \operatorname{tg}(\Lambda_c/2) = \operatorname{tg}(\Lambda_c/2) \quad (7-142)$$

在阻带内, 数字滤波器的频率响应满足:

$$|H(e^{j\lambda})| \leq (1 + \Omega_s^2)^{-1/2} \quad (7-143)$$

式中: $\Lambda_c \leq \lambda \leq \pi$

式(7-140)称为 S 平面与 z 平面的双线性变换映射关系。 S 平面的左半平面, 映射到 z 平面的单位圆内; S 平面的右半平面, 映射到 z 平面的单位圆外; S 平面整个虚轴映射到 z 平面单位圆上。式(7-140)反映了 s 平面的单值映射关系。因此, 如果模拟滤波器是稳定的, 则对应

的数字滤波器也是稳定的。下例说明如何由模拟滤波器设计数字滤波器。

系统采样频率 F_s : 8kHz

通频带 f_c : $0 \leq f \leq 1.3\text{kHz}$

通频带内纹波最大误差(δ_1): 0.1dB

阻频带 f_s : $2.6\text{kHz} \leq f < \infty$

阻带内衰减倍数: 33.5dB

对应的数字频率为: $\Lambda_c = 2\pi f_c/F_s = 1.0210$, $\Lambda_s = 2\pi f_s/F_s = 2.042$

由式(7-140)、式(7-142)得:

$$c = \cot(\Lambda_c/2) = 1.7856$$

$$\Omega_s = \frac{\text{tg}(\Lambda_s/2)}{\text{tg}(\Lambda_c/2)} = \frac{1.6319}{0.5600} = 2.9139$$

因此,选择一个模拟滤波器满足设计要求,即通频带内 $0 < \omega < 1$, $|H^a(j\omega)| < 0.1\text{dB}$,阻频带内 $2.9139 < \omega < \infty$, $|H^a(j\omega)| < 33.5\text{dB}$ 。

由设计手册,选择3阶椭圆滤波器即可满足要求,其传递函数为:

$$H^a(s) = \frac{s^2 + 10.2089}{5.88(s + 1.0398)(s^2 - 0.8700s + 1.6674)}$$

双线性变换: $S = 1.7856 \frac{z-1}{z+1}$ 代入上式,整理得:

$$H(z) = \frac{0.1256(1 + 1.0478z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.2640z^{-1})(1 - 0.4748z^{-1} + 0.5153z^{-2})}$$

其幅频响应曲线示于图7-49。

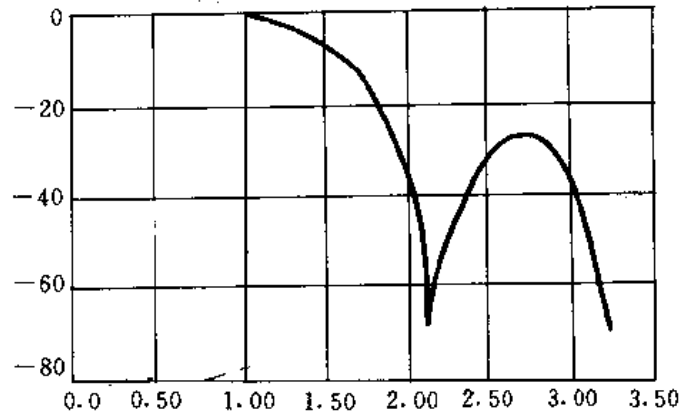


图7-49 低通滤波器幅频响应

低通滤波器的设计步骤总结如下:

①由模拟信号的采样频率 F_s 、截止频率 f_c 及阻带起始频率 f_s ,通过关系式 $\Lambda_c = 2\pi f_c/F_s$, $\Lambda_s = 2\pi f_s/F_s$,找出对应的数字频率 Λ_c 、 Λ_s 。

②由式(7-142)确定模拟滤波器的阻带频率 Ω_s 。

③由设计要求,选择合适的模拟滤波器传递函数 $H^a(s)$ 。

④由双线性变换式(7-140),把 $H^a(s)$ 转化为数字滤波器传递函数 $H(z)$ 。

(2) 高通IIR 滤波器的设计

典型高通滤波器幅频特性如图7-50 所示。高通数字滤波器的设计步骤类似于低通数字滤波器的设计,其唯一差别在于模拟频率 ω 与数字频率 λ 的关系不同,其关系为:

$$\omega \operatorname{tg}(\lambda/2) = \operatorname{tg}(\Lambda_c/2) \quad (7-144)$$

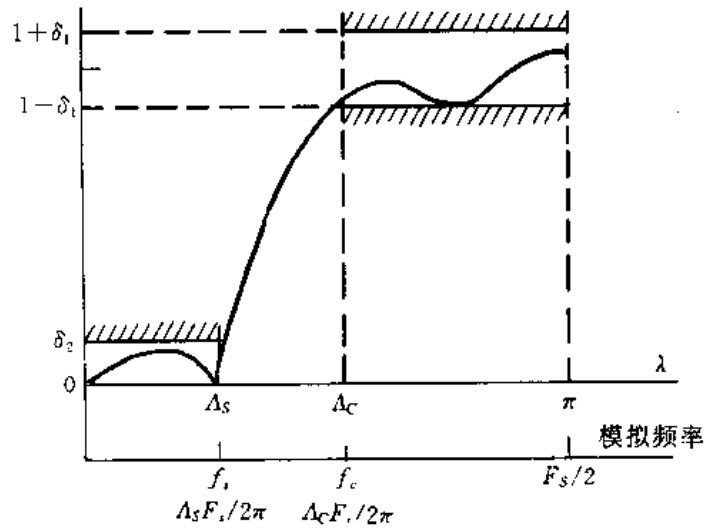


图7-50 高通滤波器的幅频响应特性

模拟频率变化范围为 $0 \leq \omega < \infty$,对应数字频率 $0 \leq \lambda \leq \pi$,模拟通带为 $1 < \omega < \infty$,数字通带为 $\Lambda_c < \lambda < \pi$ 。数字阻带频率 Λ_s 与模拟阻带频率 Ω_s 关系为:

$$\Omega_s \operatorname{tg}(\Lambda_s/2) = \operatorname{tg}(\Lambda_c/2) \quad (7-145)$$

令 $s = j\omega, z = e^{j\lambda}$ 代入式(7-144)得:

$$S = c' \frac{z+1}{z-1} \quad (7-146)$$

式中: $c' = \operatorname{tg}(\Lambda_c/2)$ 。(7-146)为高通双线性变换法。其传递函数为:

$$H(z) = H^a\left[c' \frac{1+z}{1-z}\right] \quad (7-147)$$

举例说明设计步骤。

模拟信号采样频率 F_s : 15kHz

通频带 f_c : 4.5kHz $\leq f \leq$ 7.5kHz

通带内最大纹波误差: 0.1dB

阻带(f_s): 0 < $f \leq$ 3.4kHz

阻带衰减倍数 30dB

以上所对应的数字频率为: $\Lambda_c = 2\pi f_c / F_s = 1.8850, \Lambda_s = 2\pi f_s / F_s = 1.4242$

系数 $c' = \operatorname{tg}(\Lambda_c/2) = 1.3764$

阻带数字频率 Λ_s 对应模拟频率 $\Omega_s = \frac{\operatorname{tg}(\Lambda_c/2)}{\operatorname{tg}(\Lambda_s/2)} = 1.5946$,模拟四阶椭圆滤波器能满足设

计要求,其传递函数为

$$H^*(s) = \frac{(s^2 + 2.8598)(s^2 + 14.0262)}{38.2880(s^2 + 0.3702s + 1.269)(s^2 + 1.3869s + 0.8342)}$$

将式(7-146)代入上式,整理得z域数字滤波器的传递函数

$$H(z) = \frac{0.09421(1 - 0.1174z^{-1} + z^{-2})(1 - 1.3868z^{-1} + z^{-2})}{(1 + 0.5873z^{-1} + 0.7316z^{-2})(1 + 0.6114z^{-1} + 0.2085z^{-2})}$$

其幅频响应示如图7-51。

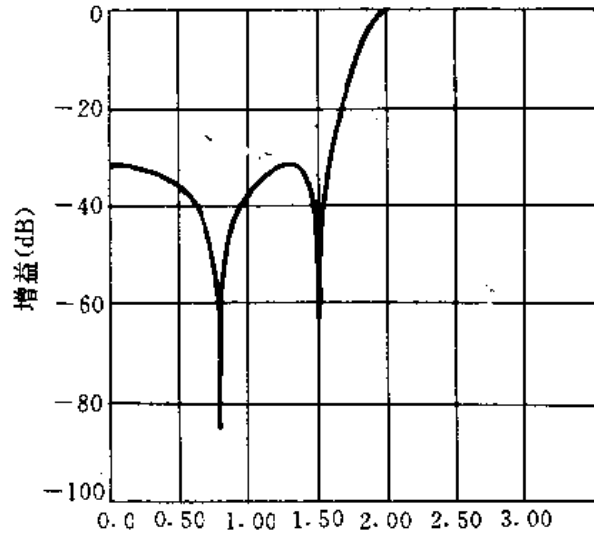


图7-51 高通滤波器频率响应

(3)带通和带阻滤波器设计

典型带通滤波器的幅频特性如图7-52所示。通频带范围为 $\Lambda_c' < \lambda < \Lambda_r'$,阻带范围为 $0 \leq \lambda \leq \Lambda_s'$ 和 $\Lambda_s'' \leq \lambda < \pi$ 。模拟频率 ω 与数字频率 λ 关系为:

$$\omega = \alpha(\beta - \cos \lambda) \sin \lambda \quad (7-148)$$

其中:

$$\alpha = \cot[(\Lambda_r' - \Lambda_s')/2] \quad (7-149)$$

$$\beta = \frac{\sin(\Lambda_r' + \Lambda_s')}{\sin \Lambda_s' + \sin \Lambda_r'} \quad (7-150)$$

两者变化关系如图7-53所示。由图看出,模拟频率变化范围为 $-\infty < \omega < \infty$,而数字频率变化只为正值,即 $0 < \lambda < \pi$ 。模拟滤波器的通带为 $-1 \leq \omega \leq 1$,对应其数字滤波器的带通为 $\Lambda_c' \leq \lambda \leq \Lambda_r'$,两阻带数字频率 Λ_s' 和 Λ_s'' 对应模拟频率 $\frac{\alpha(\beta - \cos \Lambda_s')}{\sin \Lambda_s'}$ 和 $\frac{\alpha(\beta - \cos \Lambda_s'')}{\sin \Lambda_s''}$ 。模拟频率满足以下条件。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha(\beta - \cos \Lambda_s')}{\sin \Lambda_s'} &\leq -\Omega_s \\ \frac{\alpha(\beta - \cos \Lambda_s'')}{\sin \Lambda_s''} &\geq \Omega_s \end{aligned} \right\} \quad (7-151)$$

S 与 z 的变化关系,由式(7-149)可得:

$$S = \alpha \cdot \frac{z^2 - 2\beta z + 1}{z^2 - 1} \quad (7-152)$$

由式(7-152)可知,当模拟滤波器为 N 阶时,对应的数字滤波则为 $2N$ 阶。

举一例,说明数字带通滤波器的设计步骤。

数字带通滤波器技术要求为:通带3分贝点为 Ω_c' 和 Ω_c'' ,其值为 $\Omega_c' = 1.0, \Omega_c'' = 2.0$ 。阻带内幅值衰减率为25dB,阻带数字频率为 $\Omega_s' = 0.5, \Omega_s'' = 2.5$ 。由模拟频率特性及采样频率 F_s ,确定出数字频率特性,其步骤如下:

由式(7-149)、式(7-150)及 $\Omega_c' = 1.0$ 和 $\Omega_c'' = 2.0$ 可计算出 $\alpha = 1.8306$ 和 $\beta = 0.08059$ 。再由式(7-151)得: $1.8306(0.08059 - 0.8776)/0.4794 \leq -\Omega_s$, 化简得: $\Omega_s \leq 3.043$

$$1.8306(0.08059 + 0.8012)/0.5983 \geq \Omega_s, \text{ 化简得: } \Omega_s \leq 2.6971$$

所以选择 $\Omega_s = 2.6971$

选择在阻带幅值衰减率为25dB的巴特沃思低通滤波器,由条件可得:

$$20 \log_{10}(1 + \Omega_s^{2n})^{1/2} \geq 25$$

由此可得: $n = 3$

模拟低通滤波器的传递函数为:

$$H^a(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

将式(7-152)代入上式,经整理可得数字滤波器的传递函数为:

$$H(z) = H^a \left[\frac{1.8306(z^2 - 0.1612z + 1)}{z^2 - 1} \right] \\ = \frac{0.05715(1 - z^{-1})^3(1 + z^{-1})^3}{(1 - 0.1042z^{-1} + 0.2934z^{-2})(1 - 0.2225z^{-1} + 0.7747z^{-2} - 0.127z^{-3} + 0.4077z^{-4})}$$

该滤波器的幅频响应曲线如图7-53所示。由图可看出,在所要求的截止频率 $\Omega_c' = 0.5$ 之前,幅值衰减率小于-25dB。

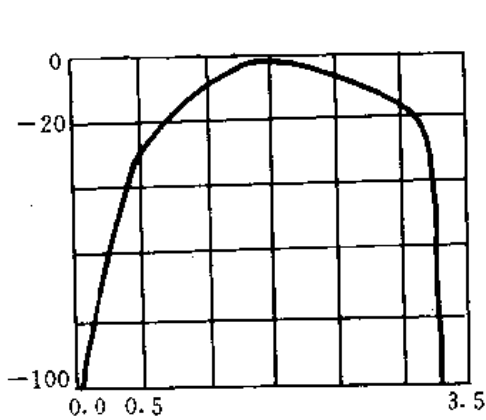


图7-52 带通频率响应曲线

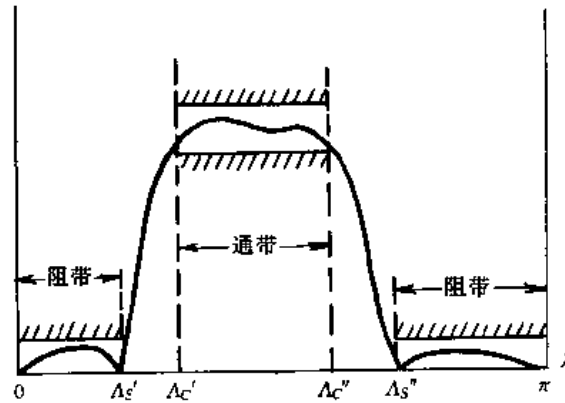


图7-53 带通幅频特性曲线

阻带滤波器的幅频响应曲线如图7-54所示,其变换关系为:

$$\omega = \frac{\alpha \sin \lambda}{\beta - \cos \lambda} \quad (7-153)$$

式中:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\cos \Lambda_c' - \cos \Lambda_c''}{\sin \Lambda_s' + \sin \Lambda_s''} \\ \beta = \frac{\sin(\Lambda_c' + \Lambda_c'')}{\sin \Lambda_s' + \sin \Lambda_s''} \end{cases} \quad (7-154)$$

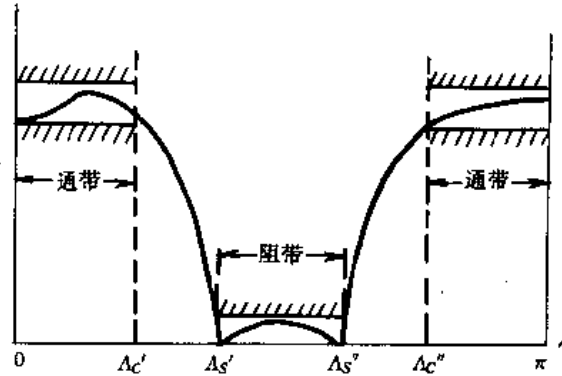


图7-54 带阻幅频特性曲线

模拟阻带滤波器阻带为 $|\omega| > \Omega_s$, 则对应的数字滤波器的阻带满足下列条件:

$$\frac{\alpha \sin \Lambda_s'}{\beta - \cos \Lambda_s'} \leq -\Omega_s \quad (7-155)$$

$$\frac{\alpha \sin \Lambda_s''}{\beta - \cos \Lambda_s''} \geq \Omega_s \quad (7-156)$$

实际从 s 到 z 的变换关系为:

$$S = \frac{\alpha(z^2 - 1)}{z^2 - 2\beta z + 1} \quad (7-157)$$

数字阻带滤波器的设计步骤类似其它数字滤波器的设计, 这里不再赘述。

2. 数字滤波器计算机辅助设计

以上讨论的数字滤波器设计能满足大多数实际要求, 但当通带、阻带不止一个时, 上述设计方法就不适用了。这时可以借助计算机进行优化设计, 以得到任意特殊的幅频响应以及尽可能逼近所需的频率响应。

(1) IIR 数字滤波计算机辅助设计

所采用的优化方法有最小均方根误差法、最小 P 法、最小平方逆设计法、线性规划法等。其中, 最小均方根误差法应用最广泛, 现介绍如下。

设 $\lambda(n), 1 \leq n \leq N$ 是一组范围在 $[0, \pi]$ 上在为数字频率。 $H^*(e^{j\lambda})$ 是所期望的幅频响应。为了使网络对系统变化的灵敏度低和在最优化过程中计算导数方便, 所设计的滤波器采用级联形式结构, 设其系统函数为:

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} = AG(z) \quad (7-158)$$

其中

$$G(z) = \prod_{k=1}^K \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} \quad (7-159)$$

实系数 $A, a_k, b_k, c_k, d_k, 1 \leq k \leq K$ 待定, 以使 $H(z)$ 的幅值在 $z_n = e^{j\lambda_n}$ 处, 尽可能接近 $H^*(e^{j\lambda_n})$ 。

在给定的离散频率 λ_n 所设计的滤波器频率响应 $H(e^{j\lambda_n})$ 与要求频率响应 $H^*(e^{j\lambda_n})$ 的均方误差 $E(\theta)$ 为:

$$E(\theta) = \sum_{n=1}^M [|H(e^{j\lambda_n})| - |H^*(e^{j\lambda_n})|]^2 = \text{最小} \quad (7-160)$$

方程(7-160)中共有 $4k+1$ 个未知数, 即

$$\theta = [a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_k, b_k, c_k, d_k, A] \quad (7-161)$$

设 $\Phi = [a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_k, b_k, c_k, d_k]$ 表示除 A 之外 $4k$ 个未知数, 则式(7-160)变为:

$$E(\theta) = E(\theta, A) = \sum_{i=1}^N [|AG(e^{j\lambda_i}, \Phi)| - |H^*(e^{j\lambda_i})|]^2 = \sum_{i=1}^N [|A||G| - |H^*|]^2 \quad (7-162)$$

要求误差 $E(\theta)$ 为最小, 必须将 $E(\theta)$ 对每个参数进行一次偏微分并令导数为零, $4k+1$ 个未知数有 $4k+1$ 个方程, 即

$$\frac{\partial E[\Phi, A]}{\partial |A|} = 0 \quad (7-163)$$

$$\frac{\partial E[\Phi, A]}{\partial \Phi_n} = 0 \quad n = 1, 2, \dots, k \quad (7-164)$$

式中, Φ_n 是 Φ 中第 n 个分量, Φ_n 又表示 a_n, b_n, c_n, d_n 一组参数, 因此, 上两式表示 $4k+1$ 个偏微分方程。

先求使 $E[\Phi, A]$ 最小的最佳增益 A 值, 设其为 A_0 。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[\Phi, A]}{\partial |A|} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^M [|A||G| - |H^*|]^2}{\partial |A|} \\ &= \frac{\partial \sum_{i=1}^M [|A|^2 |G|^2 - 2|A||G||H^*| + |H^*|^2]}{\partial |A|} \\ &= \sum_{i=1}^M [2|A||G|^2 - 2|G||H^*|] = 0 \end{aligned}$$

所以,

$$|A_0| = \frac{\sum_{i=1}^M |G||H^*|}{\sum_{i=1}^M |G|^2} \quad (7-165)$$

式中 $|A_0|$ 为使 $E[\Phi, A]$ 为最小的最佳增益模值。将 $|A_0|$ 代入式(7-163), $E(\theta)$ 对 A 的最佳值, 用 $\hat{E}[\varphi]$ 表示

$$\hat{E}[\varphi] = E[\Phi, A_0] \quad (7-166)$$

在此基础上求其它 $4k$ 个未知数最佳值。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}[\Phi]}{\partial \Phi_n} &= \frac{\partial E[\Phi, A_0]}{\partial \Phi_n} = \frac{\partial \sum_{i=1}^M [|A_0| |G| - |H|^*]^2}{\partial \Phi_n} \\ &= \frac{\partial \sum_{i=1}^M [|A_0|^2 |G|^2 - 2|A_0| |G| |H|^* + |H^*|^2]}{\partial \Phi_n} \\ &= 2|A_0| \sum_{i=1}^M [|A_0| |G| - |H^*|] \frac{\partial |G|}{\partial \Phi_n} \end{aligned} \quad (7-167)$$

式中 Φ_n 含 a_k, b_k, c_k, d_k $4k$ 个未知数, 由式(7-167)化简整理可得:

$$\frac{\partial G}{\partial a_k} = |G| R_c \left[\frac{z^{-1}}{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}} \right] \quad (7-168)$$

$$\frac{\partial G}{\partial b_k} = |G| R_c \left[\frac{z^{-1}}{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}} \right] \quad (7-169)$$

$$\frac{\partial G}{\partial c_k} = |G| R_c \left[\frac{z^{-1}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} \right] \quad (7-170)$$

$$\frac{\partial G}{\partial d_k} = |G| R_c \left[\frac{z^{-1}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} \right] \quad (7-171)$$

把式(7-168)~(7-171)代入式(7-167)就可求出误差函数对 $4k$ 个未知数参数 Φ_n 的偏导, 从而得到 $4k$ 个非线性方程。这些方程用[Fletcher-powell]算法求解。计算误差函数 $\hat{E}[\varphi]$ 的梯度, 由此搜索误差函数 $\hat{E}[\varphi]$ 的最小值, 从而可以确定最佳值参数。当两个相邻的 $\hat{E}[\varphi]$ 值的差值落在 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 以内时, 就认为误差函数收敛到最小值, 寻找程序终止。

在这种程序寻找过程中, 由于计算机对系统函数为零、极点位置未加任何限制, 有可能零点或极点位于单位圆外, 为了保证滤波器的稳定性, 必须对不稳定极点加以修正。假设极点 $z = p_i$, p_i 为实数 $|p_i| > 1$, 可以用 $z = 1/p_i$ 极点代替。因为这种处理方法等于将原函数乘以分式 $\frac{z - p_i}{z - 1/p_i}$ 。该分式是一个全通函数, 所以极点作这样调节除了可能相差一个比例常数外, 并不影响幅度响应变化规律。同理对于不稳定的复数极点由于都是共轭成对存在, 所以在单位圆外极点 $z = p_i/\theta_i$, 可以用镜像极点 $z' = \frac{1}{p_i} \theta_i$ 来代替。如果设计的指标还要求是最小相位滤波器, 则对圆外零点同样可以采用这种方法重新确定零点位置, 并将倒置后的极、零点再施行最优化程序, 把所获得 A_0 作为新的初始值进一步改进设计。

IIR 滤波器优化设计程序框图如图7-55所示。

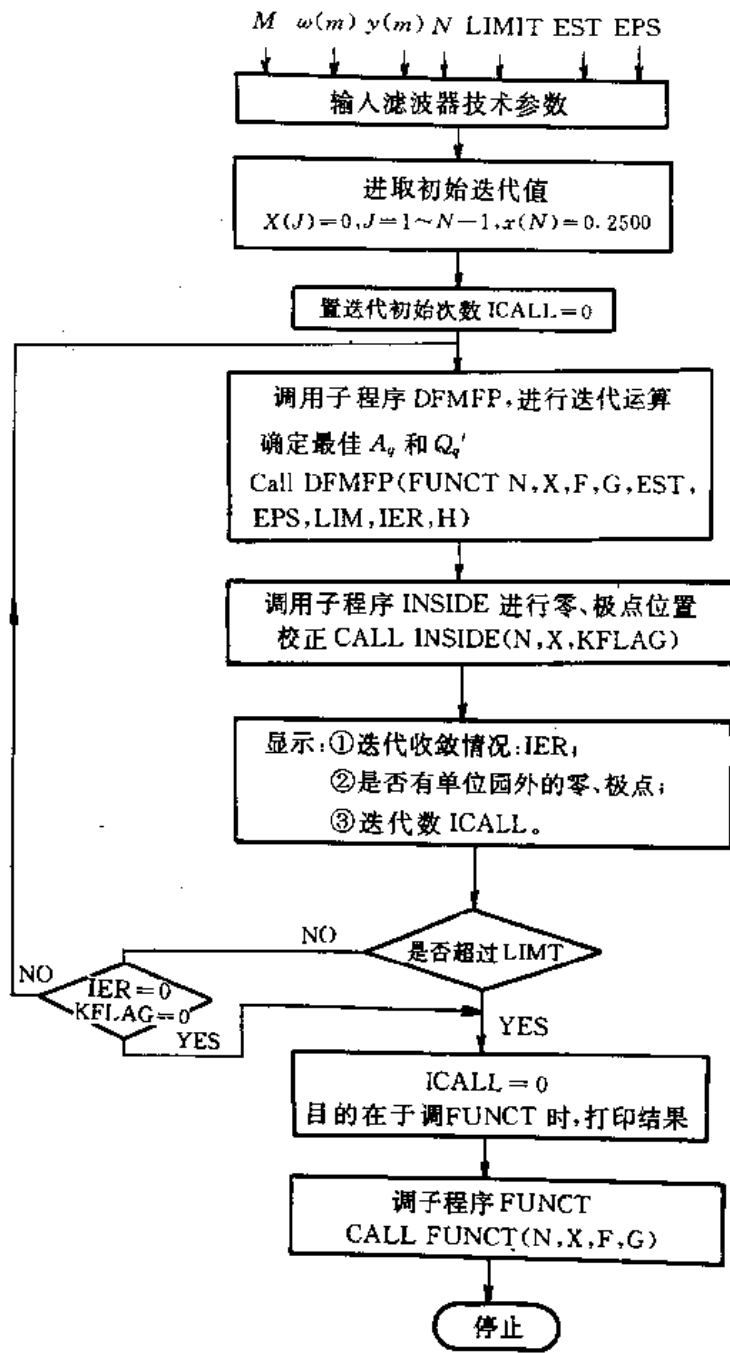


图7-55 IIR 滤波器优化设计程序框图

(1) 程序说明

- a. 主程序: IRF
- b. FP 算法子程序 DFMFP FP=Fletcher-Powell
- c. 函数子程序段 FUNCT

d. 反演子程序段 INSIDE

e. 求根子程序段 ROOLS

(2) 参数说明

M ——频率点数;

W ——存放频率值的数组(100 维);

Y ——存放频率点上振幅值的数组(100 维);

N ——变量数($N=4k$);

LIMIL——迭代的最大次数;

EST——最小函数估, $\frac{\partial E}{\partial p_k} = \text{EST} = 0$;

EPS——表示所希望的绝对误差的试验值 $|E| \leq \text{EPS}$;

IER——迭代判别函数;

IER=0——表示收敛完成;

IER=1——表示在最大的迭代次数中不收敛;

IER=-1——表示梯度计算出错。

KFLAG——判定单位圆外无外是否有零、极点;

KFLAG=0——单位无外无零、极点;

KFLAG=1——单位圆外有零、极点。

ICALL——调用次数;

XQUNT——迭代次数;

H ——工作数组(624 维);

X ——迭代开始时的初始变量值的 N 维向量 $(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_{N/4}, b_{N/4}, c_{N/4}, d_{N/4})$

G ——包括对应于最小值的梯度向量的 N 维向量。(32 维)

$$\left(\frac{\partial E}{\partial a_1}, \frac{\partial E}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial E}{\partial c_{N/4}}, \frac{\partial E}{\partial d_{N/4}} \right)$$

F ——误差函数 E 。

(1) 按 2F3.2 格式输入 $W(M)$ 和 $Y(M)$ 。

(2) $W(M)$ 频率归一化为 1 (1 相应于数字频率 π)

(3) 按 2I5, 2F10.7 输入 N 、LIMT、EST 和 EPS。通常 $\text{LIMIT} = 1500$, $\text{EST} = 0$, $\text{EPS} = 10^{-4}$ 。

(4) 所有运算采用双精度、复数运算。

IIR 计算机设计举例

设计一个二阶低通数字滤波器, 要求具有矩形幅度特性, 截止频率 $\omega_c = 0.1\pi$, 如图 7-55 (a) 所示, 图中:

$$|H^n(e^{j\omega_i})| = \begin{cases} 1.0 & \omega_i = 0, 0.01\pi, 0.02\pi, \dots, 0.09\pi & i = 0 \sim 9 \\ 0.5 & \omega_i = 0.1\pi & i = 10 \\ 0.0 & \omega_i = 0.1\pi, 0.12\pi, \dots, 0.19\pi & i = 11 \sim 19 \\ 0.0 & \omega_i = 0.2\pi, 0.3\pi, \dots, \pi & i = 20 \sim 29 \end{cases}$$

由题意: $N=30, k=1$, 所求传递函数为:

$$H(z) = A \frac{1 + a_1 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{1 + c_1 z^{-1} + d_1 z^{-2}} = AG \quad (7-172)$$

优化设计目的是为了确定上式参数 $A, \Phi = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, 将 $H_d = (e^{j\omega})$ 值与初始值 $\Phi = (-0.25, 0, 0, 0)$ 送于计算机F-P子程序进行迭代计算, 大约经过90次迭代至收敛, 求得误差函数 $E = 1.2611$, 系统函数极点位置为 $0.7657793, 1.321396$, 零点位置为 $0.6783443 \pm j0.78474415$ 。

显然其中存在着位于单位圆外不稳定极点 1.321396 。现将该点按上述方法倒置, 再进行优化, 经过62次迭代, 新的极点位置为 $0.82191163 \pm j0.19181084$ 。新的零点位置为: $0.82191163 \pm j0.56961501$ 。

$$A = 0.11733973, E = 0.56731.$$

可见, 极点在经过倒置后, 全落在单位圆内, 系统是稳定的, 误差 E 降低到 0.56731 。其幅频特性如图7-56(b)所示。

该计算机程序的计算步骤如下:

① 不考虑零、极点位置, 经Fletcher-Powell算法程序计算出优化参数 ϕ 和 A 。

② 完成第一步后, 将所有在单位圆外的极、零点倒置。

③ 将新的 ϕ 和 A 值作为起始点, 再经Fletcher-Powell算法程序进行迭代计算, 得到新的优化值 ϕ 和 A , 从而完成数字滤波传递函数的设计。

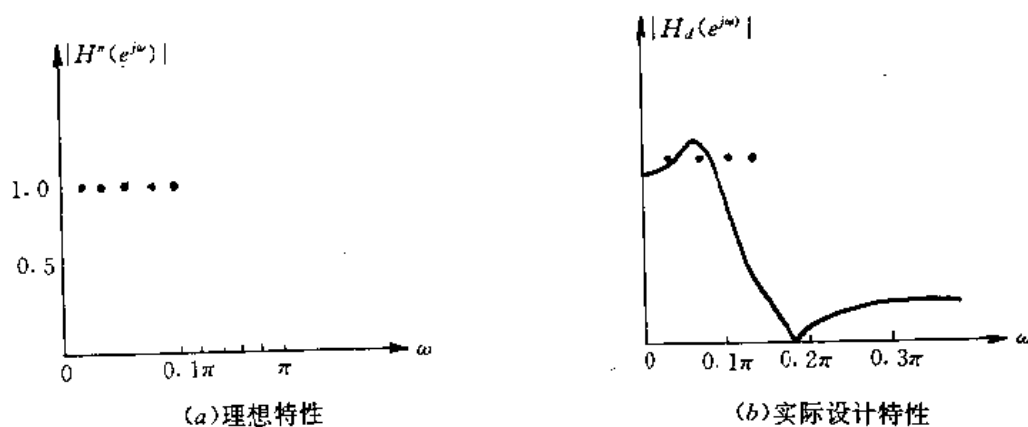


图7-56 数字滤波器的设计

表7-6 IIR 设计程序输出结果

```

*****
IIR 滤波器
递归滤波器阶数    2
边带范围  0.01    0.09    期望值 = 1.00
边带范围  0.10    0.10    期望值 = 0.50
边带范围  0.11    1.00    期望值 = 0.0
最终误差函数值:    0.56731

```

通带内最大绝对偏离值: 2.67358 dB

阻带最小衰减值: -9.40726 dB

增益值: 0.11733978

IIR 滤波级联系数

A(1,1)=-0.16482248D+01 A(2,1)=0.99999992D+00

B(1,1)=-0.18000412D+01 B(2,1)=0.84813514D+00

零点: 0.82191162±j0.56961501

极点: 0.89176390±j0.19191084

实际运用该优化程序时,应先把所期望的频响特性,以数据文件形式存于DATA. IIR 文件中,其中频率归一化为1,即1 对应数字频率的 π ,模拟域中采样频率的一半。如上例中的期望频率响应,存入DATA. IIR 文件为:

DATA

1-10CoL	H-20
0.01	1.0
0.02	1.0
0.03	1.0
...	...
0.09	1.0
0.1	0.5
0.11	0.0
0.12	...
...	...
0.20	0.0
0.30	0.0
...	...
1.0	0.0

以上数据以格式F10.5 存入。

随后输入N,LIMIT,EST 和EPS 的值。

N 为极连的二阶系数个数的4 倍,最大值不超过32。该列中,N=4。

LIMIT 一般以1500,EST 设置为0,EPS 设置为 10^{-4} 。

将上述值输入计算机,最后结果如表7-6 所示。该表给出了最终误差结果,与期望的频率相比的最大偏差(单位dB)。系数A 值,以二阶系统各系数的值。

即
$$H(z) = A \frac{1 + A(1,1)z^{-1} + A(2,1)z^{-2}}{1 + B(1,1)z^{-1} + B(2,1)z^{-2}}$$

同时,列出了系统的零点、极点的值,其频率响应值被列入结果数据文件H. DAT 中。

(2) FIR 数字滤波器的设计

设FIR 滤波器单位冲激响应为 $h(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 则FIR 滤波器系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (7-173)$$

该式表明, FIR 滤波器系统函数是 z^{-1} 的多项式, 而IIR 滤波器系统函数是 z^{-1} 的有理分式形式。因此, FIR 滤波器在 S 平面上找不到与之相对应的模拟系统函数 $H(s)$ 。也就是说, FIR 滤波器设计不能借用模拟滤波器设计的一套成熟方法。

把 $z = e^{j\lambda}$ 代入(7-173)中, 得到滤波器频率响应

$$H(e^{j\lambda}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot e^{-jn\lambda} = |H(e^{j\lambda})| e^{j\Phi(\omega)} \quad (7-174)$$

式中 $|H(e^{j\lambda})|$ 与 $\Phi(\omega)$ 分别表示幅度与相位特性。

数字滤波器的相位特性与离散信号时延 τ 有如下关系:

$$\text{相对时延:} \quad \tau_p = \frac{-\theta(\lambda)}{\lambda} \quad (7-175)$$

$$\text{群时延:} \quad \tau_g = \frac{-d\theta(\lambda)}{d\lambda} \quad (7-176)$$

若要求滤波器具有严格的线性相位特性, 则应有: $\theta(\omega) = -\tau\lambda$ (τ 为常数)

此时相时延与群时延必定相等, 且为常数, 由式(7-175)、式(7-176)得:

$$\tau_p = \tau_g = \tau = \text{常数}$$

由式(7-174)、式(7-175)的相位条件可得出:

$$\tau = (N-1)/2 \quad (7-177)$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7-178)$$

图7-57(a)所示为 $h(n)$ 偶对称的线性相位特性, 图7-57(b)为 $h(n)$ 偶对称, N 为奇数的相位特性, 图7-57(c)为 $h(n)$ 偶对称, N 为偶数的相位特性。

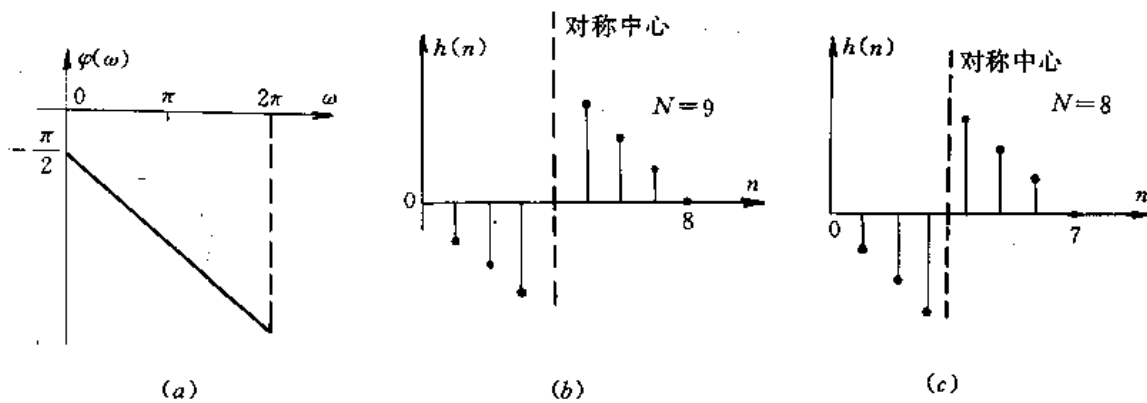


图7-57 $h(n)$ 为偶对称时, FIR 滤波器特性

式(7-177)是FIR 滤波器具有严格线性特性的充要条件, 要求 $h(n)$ 必须满足(7-178)的对称性, 即 $h(n)$ 以 $(N-1)/2$ 点为偶对称; 它的相位延时等于 $h(n)$ 长度的一半, 即 $(N-1)/2$

个抽样周期。

线性相位滤波器要求即有恒定的群时延又有恒定的相时延。但工程中往往要求恒定的群时延,相位特性还可以写成:

$$\theta(\lambda) = \theta_0 - \tau\lambda \quad (7-179)$$

式中, θ_0 为常数,因此系统函数的频率响应特性为:

$$H(e^{j\lambda}) = |H(e^{j\lambda})| e^{j(\theta_0 - \tau\lambda)} \quad (7-180)$$

具有恒定群时延的滤波器(或称第二类线性相位滤波器)满足下列关系:

$$\tau = (N - 1)/2 \quad (7-181)$$

$$\theta_0 = \pm \pi/2 \quad (7-182)$$

$$h(n) = -h(N - 1 - n) \quad (7-183)$$

图7-58(a)所示 $h(n)$ 为奇数对称的线性相位特性,图(b)为 $h(n)$ 奇对称 N 为奇数,(c)为 $h(n)$ 奇对称 N 为偶数。

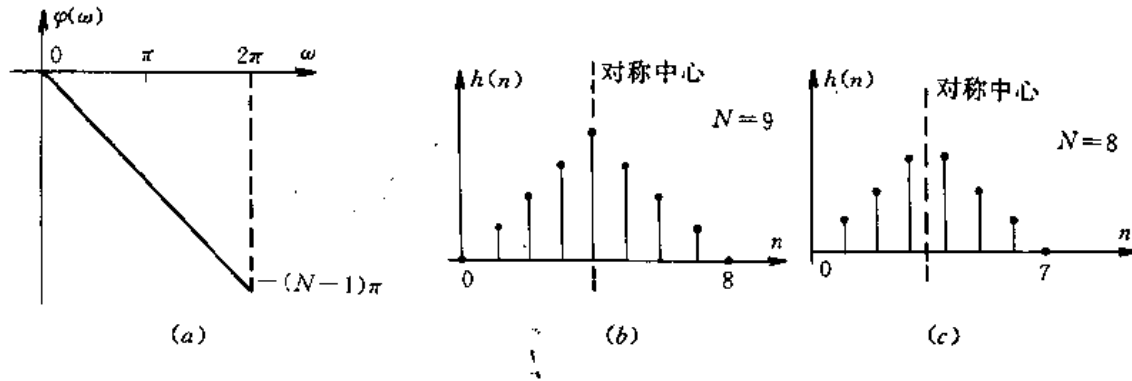


图7-58 $h(n)$ 为奇对称时,FIR 滤波器特性

此时相位特性仍然是一条直线,信号通过滤波器不仅有 $(N-1)/2$ 个抽样周期的群时延而且有 $\pi/2$ 的相移。(7-182)表示 $h(n)$ 以 $(N-1)/2$ 点奇对称。因此,线性相移FIR 滤波器分为两大类。

第一类,满足(7-177)、(7-178)条件, $h(n)$ 以 $(N-1)/2$ 点奇对称。即: $h(n) = h(N-1-n)$ 。

第二类,满足式(7-181)、(7-182)、(7-183)条件 $h(n)$ 以 $(N-1)/2$ 点奇对称,即: $h(n) = -h(N-1-n)$ 。

这里主要讨论第一类FIR 滤波器。

若希望得到的滤波器理想特性为 $H^n(e^{j\lambda})$,那么FIR 滤波器设计就是寻求一个系统函数 $H(z)$,用其频响 $H(e^{j\lambda}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\lambda n}$ 去逼近 $H^n(e^{j\lambda})$ 。

理想特性的单位冲激响应 $h^n(n)$ 可由傅里叶反变换求出,即:

$$h^n(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^n(e^{j\lambda}) e^{j\lambda n} d\lambda \quad (7-184)$$

这样,设计数字滤波器就是解决 $h(n)$ 与 $h^*(n)$ 的逼近问题。由式(7-184)可知, $h^*(n)$ 是一个无限长非因果序列,而根据线性相位FIR理论, $h(n)$ 应是有限长的因果序列。因此,用 $h(n)$ 逼近 $h^*(n)$,采用以下两个步骤:

第一步,无限长 $h^*(n)$ 变成有限长 $h^N(n)$ 。

理想特性系统函数为:

$$H^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*(n)z^{-n} \quad (7-185)$$

将 $h^*(n)$ 直接截短成有限项 N ,即

$$h^N(n) = h^*(n)W_R(n) \quad (7-186)$$

$$\text{式中 } W_R = \begin{cases} 1 & -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases} \quad (7-187)$$

截短后系统函数为:

$$H_N(z) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h^N(n)z^{-n} \quad (7-188)$$

式中, $h^N(n)$ 为非因果序列, $H_N(z)$ 为非因果系统。

第二步,把 $h^N(n)$ 变成因果序列 $h(n)$ 。

将有限长序列 $h^N(n)$ 通过 $(N-1)/2$ 的时延,将其变成因果序列,具体方法是将 $H_N(z)$ 乘以 $z^{-\frac{N-1}{2}}$ 进行时延。即

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} H_N(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h^N(n)z^{-n} = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h^N(n)z^{-(n+\frac{N-1}{2})}$$

令 $m = n + (N-1)/2$ 则

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h^N(m - \frac{N-1}{2})z^{-m} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (7-189)$$

$$\text{式中 } h(n) = h^N(n - \frac{N-1}{2}) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7-190)$$

式(7-189)表明, $H(z)$ 是一个因果系统,其相应单位冲激响应 $h(n)$ 是一个长为 N 的有限长序列。

这样就得到了理想滤波器 $h^*(n)$ 与设计滤波器 $h(n)$ 之间的关系,如式(7-186)、(7-190)所示。

以上整个过程可以用下式一并完成:

$$h(n) = h^N(n - \frac{N-1}{2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^*(e^{j\lambda}) e^{j\lambda(n - \frac{N-1}{2})} d\lambda \quad (7-191)$$

式中: $n=0,1,2,\dots,N-1$ 。

例:设计一个线性相位滤波器,其理想特性如图7-59所示。通带内幅度为1,阻带内幅度为0。数字截止频率为 λ_c 。采样频率 $\lambda_s=10$ 。

解:由题意得:

$$H^*(e^{j\lambda}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\lambda| \leq \lambda_c \\ 0, & \lambda_c < |\lambda| < \lambda_c/2 \end{cases}$$

将 $H^*(e^{j\lambda})$ 代入式(7-191)得:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^*(e^{j\lambda}) e^{j(n - \frac{N-1}{2})\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} e^{j(n - \frac{N-1}{2})\lambda} d\lambda$$

$$h(n) = \frac{\sin[\lambda_c(n - \frac{N-1}{2})]}{\pi(n - \frac{N-1}{2})} \quad (7-192)$$

式(7-192)即为所求的数字滤波器单位冲激响应,取 N 为奇数, $N=17$, $\omega_c=0.2\pi$,代入上式得:

$$h(n) = \frac{\sin[0.2\pi(n-8)]}{\pi(n-8)} \quad (7-193)$$

图7-60 形象地描述了设计线性相位FIR 滤波器的基本理论过程。

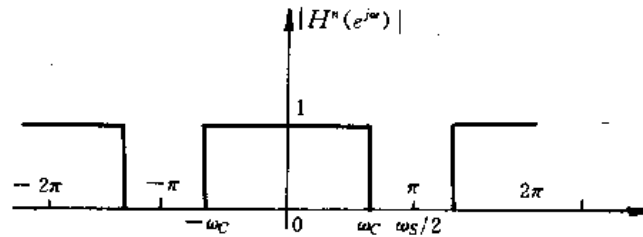


图7-59 理想特性图

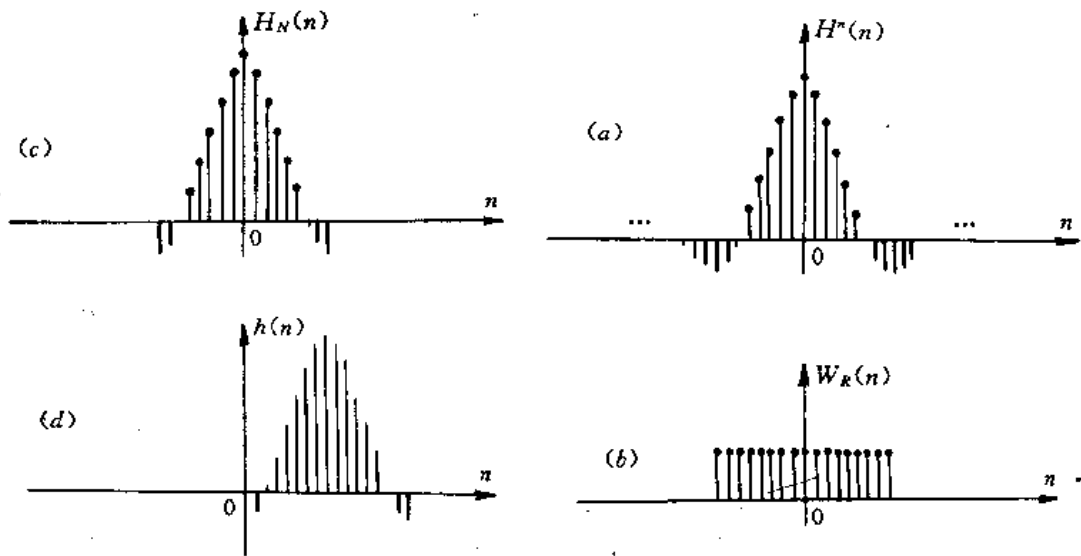


图7-60 $h(n)$ 产生过程

(a)理想单位冲激响应 $h^*(n)$ (b)矩形窗函数 $W_R(n)$

(c)截短单位冲激响应 $h^N(n)$ (d)延迟 $(N-1)/2$ 的实际单位冲激响应 $h(n)$

FIR 计算机辅助设计:

据以上讨论可知,具有系数 $h(k)$ 的FIR 滤波器的频域响应函数为:

$$H(e^{j\lambda}) = \sum_{k=0}^K h(k)e^{-jk\lambda} \quad (7-194)$$

因为FIR 滤波器的相频是 λ 的线性函数,所以其脉冲响应必是偶对称,即

$$h(k) = h(K - k) \quad (7-195)$$

此时,(7-194)可写成:

$$H(e^{j\lambda}) = \left[\sum_{n=0}^N a(n)\cos(n\lambda) \right] e^{-jk\lambda/2} \quad (7-196)$$

若 k 为偶数,有 $N=k/2$

$$\begin{aligned} a(0) &= h(N) \\ &\vdots \\ a(n) &= 2h(N - n) \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7-197)$$

若 k 为奇数,式(7-194)写成:

$$H(e^{j\lambda}) = \left\{ \sum_{n=0}^N a(n)\cos[n - 1)\lambda/2] \right\} e^{-jk\lambda/2} \quad (7-198)$$

其中

$$N = (k + 1)/2, a(n) = 2h(N - n) \quad (7-199)$$

暂不考虑式(7-196)、式(7-198)中的线性相移项 $e^{-jk\lambda/2}$,可看出滤波器的频率响应由实余弦序列所决定,其系数仅取决于脉冲响应,滤波器的线性相位延迟仅由脉冲响应长度所决定。所以设计这类滤波器的问题就变成了如何寻找 $h(k)$ 值,以便在式(7-196)、(7-198)中的余弦序列尽可能与所期望的频率响应函数便接近。麦克劳伦等人据此设计出了非常实用的FIR 计算机辅助设计。该程序能自动设计多通带或多阻带的FIR 滤波器,微分器及Hibbert变换器。

最优FIR 滤波器设计程序说明。

①参数说明

a. 滤波器长度(称为NFILT)的范围 $3 \leq \text{NFILT} \leq 256$

b. 滤波器类型(称为JTYPE)

多带带通或带阻 JTYPE=1

数字微分器 JTYPE=2

希尔伯特变换器 JTYPE=3

c. 上限和下限截止频率规定的频带最多到10个

d. 每一频带中希望的频响由使用者独立规定

e. 每一频带中的加权函数由使用者独立规定

②设计举例试

试设计一个低滤波器,其通带为 $0 \sim 0.14$,幅频值为1,阻带为 $0.19 \sim 0.5$,幅频值为0。

运行FIR 设计程序,则屏幕显示:

INPUT YOUR DATA

滤波器长度,滤波器类型,通阻带数

24, 1, 2
 输入滤波器边带值
 0,0.14,0.19,0.5
 通阻带所对应的幅频值
 1,0
 通阻带加极值
 1,10
 Working...
 work ok
 计算机结果列入表7-7 中

表7-7 FIR 低通滤波器计算结果

```

*****
FIR 线性相位数字滤波器设计
带通滤波器
滤波器长度: 23
***** 冲激响应 *****
H( 1) = -0.61297640E-02 = H( 23)
H( 2) = -0.14092118E-01 = H( 22)
H( 3) = -0.35473555E-01 = H( 21)
H( 4) = -0.48743814E-01 = H( 20)
H( 5) = -0.33617824E-01 = H( 19)
H( 6) = -0.11127114E-01 = H( 18)
H( 7) = -0.56752473E-01 = H( 17)
H( 8) = -0.57823956E-01 = H( 16)
H( 9) = -0.14385510E-01 = H( 15)
H(10) = -0.14293462E-00 = H( 14)
H(11) = -0.26699775E-00 = H( 13)
H(12) = -0.31825352E-00 = H( 12)
      带 1      带 2
下边带      0.0      0.189999998
上边带      0.139999986  0.500000000
期望值      1.00000000  0.0
加权        1.00000000  10.0000000
偏离值      0.167077422  0.016707744
分贝表示偏离值 2.92989731  -35.5416260
*****

```

幅频相频图如图7-61 所示。

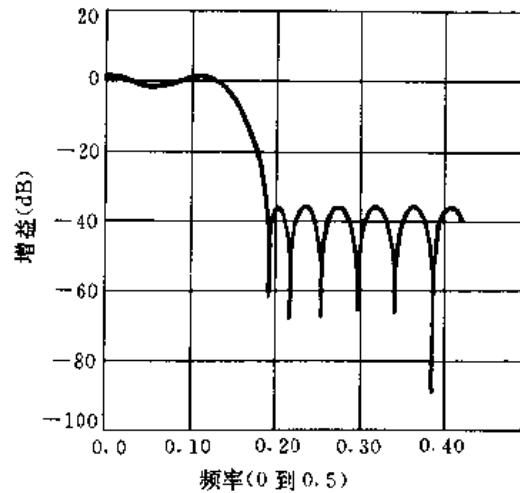


图7-61 FIR 低通滤波器频率响应

第六节 自动测试系统

一、自动测试系统的基本组成

自动测试系统就是利用计算机“智能”来提高测试准确度,扩大功能提高测试速度,做许多“人工”做不了的事情。

一个自动测试系统,一般由四个部分组成:第一是微机或微处理器,它是整个系统的核心;第二是被控制的测量仪器或设备,作为可编程仪器;第三是接口;第四是软件。其作用介绍如下。

1. 微机

它是整个系统的核心,在软件控制下,微机控制整个自动测试系统正常运行,并完成对测量数据的处理,将处理结果通过打印机、显示器、磁盘等方式输出。

2. 可编程仪器或设备

这类仪器的显著特点是必须具备一个(接口),计算机可以通过这个接口将各种程控指令送入仪器调节和控制仪器的工作状态。因此,所谓程控仪器是指测量仪器能接受计算机的编程控制。显然程控仪器组成自动测试系统的基本部分。目前,国际上多数工厂都尽量按照统一标准生产具有独立功能的可编程仪器,以使纳入自动测试系统。

3. 接口

接口(Interface)的英文直译就是“交界面”。在自动测试系统中,其仪器的工作完全是在

计算机控制下进行的。但是,各仪器同计算机之间是不能直接进行信息交换的。因此,仪器接口不仅包括与外界所必须的电路接插件、信号线等物理实体,而且还包含数据格式、数据编码等必须的信息性内容。

一个自动测试系统中,各仪器这间的接口的总体称之为该自动测试系统的接口系统。显然,接口系统是自动测试系统达到自动测试目的,使自动测试系统各仪器之间进行有效通信的重要环节。各个仪器的接口之间必须满足下列条件:

(1)电气相容

包括在电平、极性、负载能力、驱动能力等一系列电参量之间必须相容或匹配,否则会导致各仪器不能顺利运行,严重时,还会导致器件的损坏。

(2)功能相容

在功能上,各仪器之间必须相互配合,如一台仪器具有发送数据的功能,则另一台仪器必须具有接收数据的功能。这样互联在一起的仪表才能正常通信。

(3)机械相容

机械相容是指各仪器接插头的形式、尺寸、接线位置等各方面要互相配合,使仪器之间相互接通,顺利实现通信。

(4)运行相容

相到传递信息的仪器之间,在诸如编码格式、语言种类、数据格式、运行速度等几个方面必须相容。

上述四个方面的要求通常称为接口的四个要素。

现在接口系统都做成统一、通用的标准化接口系统,以使能适用于任何一个自动测试系统中联接任何类型的仪器或设备,从而可任意组成所需的自动测试系统,最常用的接口系统为GPIB(在美国称为HP-IB或IEEE-488)。与此同时,国际是还出现了另一种标准接口系统——CAMAC,它特别适用于参数众多的大系统。

标准接口的出现极大地推动了程控仪器和自动测试技术的发展。人们称之为GPIB和CAMAC系统为“第二代自动测试系统”。

4. 软件

随着自动测试技术的发展,软件所占比重愈来愈大。除了传统的汇编语言和BASIC语言外,还发展了诸如ATLAS、COLT测试语言及CIL计算机接口语言。

二、可编程仪器

可编程仪器是组建自动测试系统的基础。它通过接口接收外来的数据(数字式指令),据此改变仪器自身内部工作状态,如改变工作方式,更换量程、频段、输出电平、输出数据等。

一个仪器是通过其接口的“听”功能来接收数据,经由其装置功能(次接口)来加以处理,或转为该仪器的机器语言,从而使仪器完成一定的动作。仪器所得到的测量数据,则由其装置功能以适当格式编成数字式代码,通过接口的“讲”功能发送到接口母线上。

自动测试系统是通过“装置消息”和“接口消息”来实现仪器的程控。所谓“装置消息”是指与仪器本身的特性密切相关,由接口收发的消息(指令和数据)。所谓“接口消息”就是管理

接口本身工作所用的消息。

1. 通用接口GPIB 的组成

可编程仪器通常由初级接口、次级接口和仪器本体三个部分组成,其中次级接口与仪器本体是与仪器特性紧密相关,这两部分合在一起称为器件功能,其结构如图7-62 所示。

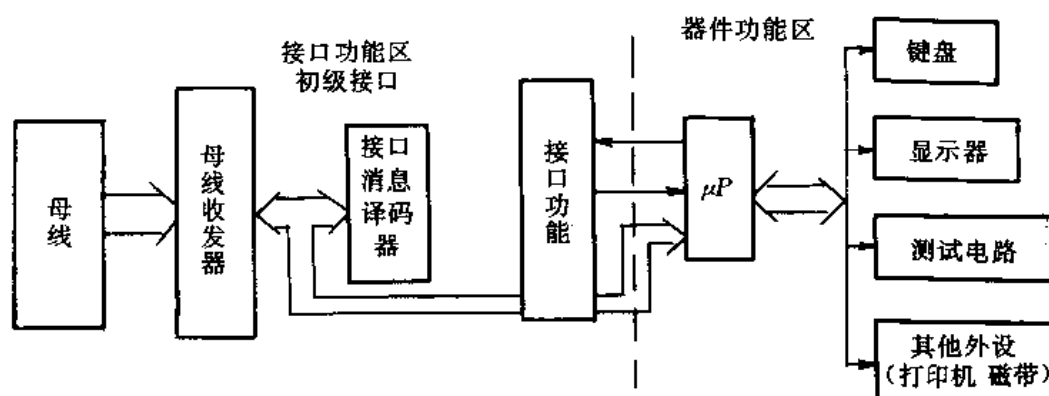


图7-62 程控仪器示意图

图中所示的初级接口又称为接口功能,对它的设计必须符合有关标准的规定,设计者无权自由行事。而次级接口设计不受接口标准的约束。带通用接口的仪器,其接口部分已装在仪器内部,使用者仅能看见接口插头。

初级接口一般由母线收发器、接口消息译码器、接口功能三部分组成。

母线收发器就是远地消息的接收和发送器。通常由专门的集成电路块来完成。如Motorola公司生产的MC3448 GPIB收发门,每个MC3448中有四对收发门,一台仪器需四片MC3448,共16对收发门。除MC3448之外,GPIB收发器还有INTEL公司生产的8293集成电路,一片8293共有8对收发门,一台带GPIB接口的仪器仅需要两片8293集成块。

多线消息译码器的作用就是将母线上传来的多线接口消息变成单线信号,然后再送往接口功能的其它部分去利用。多线消息包括地址、通令、专令、副地址和副令。多线消息译码器由地址译码器、命令译码器组成。

在接口系统中,为了进行有效地信息传递,一般要包括三种基本的接口功能要求,即讲者、听者和控者。控者是对系统进行控制的设备,能管理GPIB上的通信,使系统接收适当的命令正确运行。它能发出接口消息,如各种命令、地址,也能接收仪器发来的请求和信息。讲者是发出装置消息的设备,即能输出数据,如简单的数字电压表。在一个系统中,可以有一个或几个讲者,但某瞬时只能有一个讲者在工作。听者是接收讲者所发出的装置消息的设备,即只能从GPIB接收数据,如打印机、绘图仪等。在一个系统中可以有几个听者,且可以有一个以上的听者同时工作。在一个GPIB系统中至少应具有一个讲者功能和一个听者功能,用以传递信息。在自动测试系统中还应具备控者功能。一台仪器可具备上述一、二或三个功能。

由于微处理器(μp)大量应用于仪器之中,大规模集成电路GPIB接口芯片取代了以前

的中、小规模集成电路。Motorola 公司生产的MC68488 接口芯片具有除控者功能之外的其它9 个接口功能,适合于非控者仪器使用,若加一些逻辑电路或软件,MC68488 也可完成控者功能的任务。一台程控仪器仅需一片MC68488 和4 片MC3448 便能完成接口的全部硬件功能。

2. 可编程仪器的组成

在物理结构中,含有微处理器的电子仪器从电路方式、控制方式到机械结构等各个方面都发生了根本性的变化。图7-63 是带微处理器的可编程仪器的方框图。该仪器可以划分成数字和模拟两大部分。

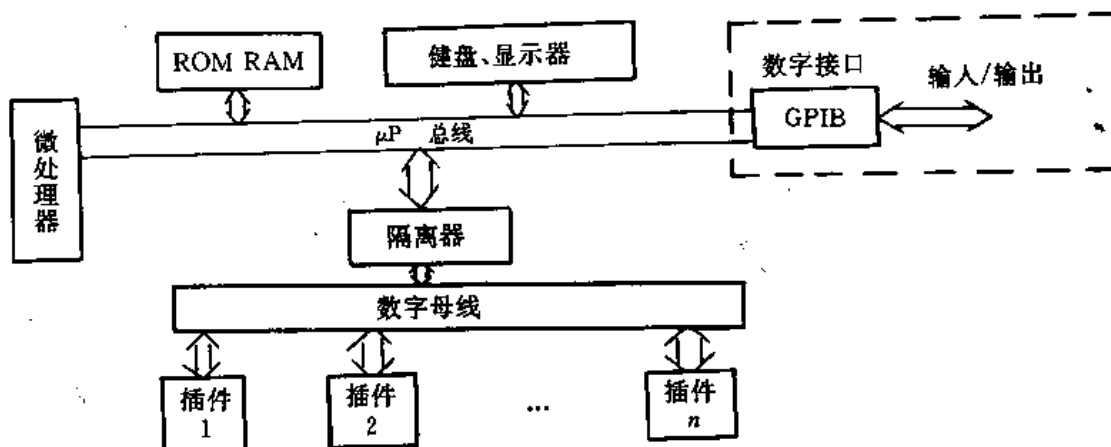


图7-63 可编程仪器的基本组成

数字部分包括微处理器、ROM、RAM、面板和显示器以及仪器的GPIB 接口等多个单元。其模拟部分包括测试所需的传统电路。数字部分与模拟部分之间通过数字总线联接。由于模拟部分负载很重以及两部分的地电平不一致,因此微处理器的总线须经过缓冲器或隔离器与仪器的数字总线相联。

从图7-63 中可以清楚看出程控仪器实质上就是计算机系统。与一般计算机系统的差别在于它多了一个测试电路插件,同时,它与外界的通信通常都通过GPIB 接口进行。可编程仪器的工作方式和计算机一样,而与传统的测量仪器差别很大。微处理器是整个仪器的核心,用以管理和控制仪器的全部操作。仪器的管理程序、计算程序、数据处理程序放入只读存储器ROM 中,而仪器采集的数据、输入输出的数据或运算的中间数据放入随机存储器中,即RAM 中。通过键盘、操作人员可以将各种指令和数据送入仪器,以调整和控制仪器的工作状态和特性,通过显示器,可以观察到仪器的工作状态和测试结果,并能显示和记录数据。仪器接口通常为GPIB 接口,用以接收传输各种数据。

为了便于微处理器对各部分电路进行管理和控制,各单元电路或部件都采用插件式和总线结构并能接受数字程控。在仪器内部微处理器将各个插件当作存贮单元对待。

三、自动测试系统的组建和软件编制

组建自动测试系统,一般适合下列情况之一:

- ①重复次数较多的测试或多项测试;
- ②需要对数据作实时处理或需要根据测试数据进行判断的测试;
- ③激励—响应之类的测试;
- ④人工测试非常困难的场合。

1. 组建自动测试系统应考虑的主要问题

首先要根据测试任务的要求,确定其系统的硬件以及软件、系统最终的测试能力要靠软件来发挥。因此,组建一个自动测试系统,应考虑解决以下八问题:

- ①测试任务分析;
- ②选择仪器;
- ③选择控制器;
- ④解决接口问题;
- ⑤建立所需测试系统;
- ⑥编制软件系统;
- ⑦编制测试程序;
- ⑧编制测试系统的文件。

(1)测试任务分析

测试任务分析主要是:一是测试任务能否适合自动测试,是否与自动测试设备相容;二是预测可能发生的测试问题,是否需用特殊的测试技术来解决;三是是否需设计专门的测试接口(适配器)或信号调节器等。

根据测试任务分析结果,拟订最佳的测试方案。

(2)仪器的选择

由于接口母线系统已解决了在机械、电气和功能上的相容性问题,所以尽量选择带通用接口(GPIB)的仪器。详细了解每台仪器的程控指令系统及数据输出格式,以避免不必要的错误。

(3)控制器的选择

判断自动测试系统采取的控制方式,一般有如下几种方式:

①无控者的自动测试系统

在系统中不存在单独的控制器,控者的功能由系统内的某个器件来承担。如图7-64所示,测量仪器工作于“只讲”模式,打印机工作于“只听”模式,每当测得一个数据时,立即自动打印。这里无需寻址和程控,测量的定时由测量仪器或打印机来控制。接口中的三线挂钩过程自动管理信息流通。

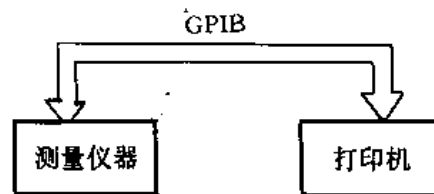


图7-64 无控者自动测试系统

②有简单控制器的系统

通常是一个顺序器、扫描器等,仅对系统控制,不进行数据处理,图7-65 示出这样的系统。在测量过程中,无需改变各仪器的工作模式。

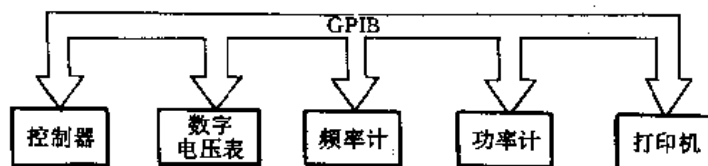


图7-65 简单控制器的自动测试系统

③使用复杂控制器的系统

当测量过程需要进行数据处理或根据测量数据作出自动判决时,则要使用复杂的控制器。一般可选用微型计算机、特殊情况甚至可选用大型计算机作为控者,例如各类PC机、HP9836、IBM-PC/XT、HP9825等,其外设(打印机、绘图仪、CRT显示终端等)视具体情况而定。可连接到母线上或接到计算机相应的外围I/O通道上。

(4)接口问题

测试系统的仪器都选为可编程的仪器,这时仪器上已配有通用接口,只须用标准的无源母线电缆连接,即可构成系统。

若所用仪器未配有通用接口时,可根据具体情况,选用D/A、A/D变换器、定时装置器、编码器、开关器等,利用这些附件,就有可能把一些不可能程控的测量设备连接到自动测试系统中。如图7-66所示。这里利用一个D/A变换器把一个不可程控的普通的X-Y记录仪连接到系统中。

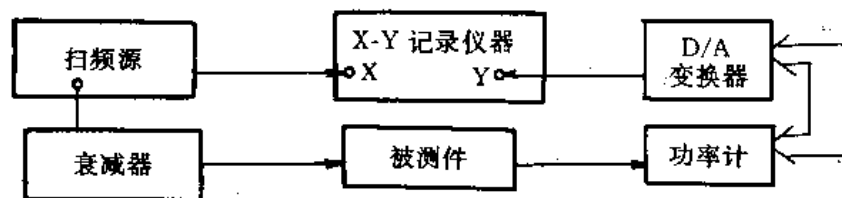


图7-66 自动测试系统接口设计

(5)建立自动测试系统

通过上述步骤后,建立所需的自动测试系统,就十分简单。用母线电缆把所选的各器件连接起来,并分配其适当地址,就建成了所需的系统。

(6)准备软件系统

选择合适的语言进行编程,如Basic、ATLAS语言、HPL语言或汇编语言。

在确定软件系统后,就可着手编制测试程序。测试程序的编制,可分以下几个步骤:

- 一是分析测试要求,制定最佳测试方案;
- 二是制定测试流程图,用合适的语言编写完整的测试程序;

三是调试测试程序。一般情况下,调试可在计算机仿真模式下进行,调通后,再在实际系统中调试。

四是调试通过后,存盘保存。

在自动测试系统建立之后,应编写使用说明书、验证方法及维修手册和自动测试系统结构方面的资料。

第七节 计算机辅助测试举例

一、零漂或非线性校正

如图7-67所示,对任意输入值 x ,其仪器的输出值 y 成线性关系时,其一般表达式为:

$$y = kx + d \quad (7-200)$$

式中, k ——测量系统的灵敏度;

d ——测量系统的零漂值,即输入 $x=0$ 时系统的输出。

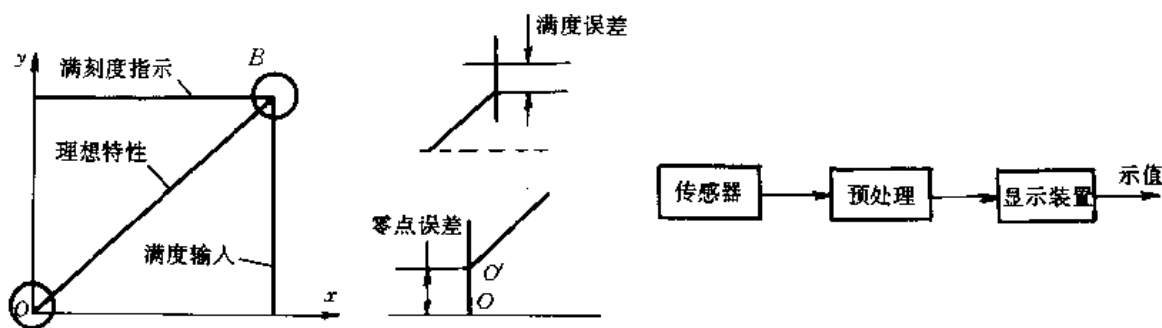


图7-67 系统输入输出特性

通常希望式(7-200)无零点漂移,即 $d=0$,且 k 是一个常数。但对一个实际的测试系统,其输入与输出关系为:

$$y_r = (k_0 + \Delta k)x + \Delta d \quad (7-201)$$

式中: k_0 ——理想灵敏度;

Δk ——灵敏度误差;

Δd ——零点漂移;

y_r ——实际读数值。

测量系统实际输出为:

$$y_r = y + \Delta y = kx + \Delta kx + \Delta d \quad (7-202)$$

在实际测试仪器中,要尽量降低仪器的 Δk 和 Δd 。引入微机来进行自动校正,则其相应误差可减少几个数量级。

图7-68 为用微机作上述误差校正的原理框图。

在实际测试仪器中,要尽量降低仪器的 Δk 和 Δd 。引入微机来进行自动校正,则其相应误差可减少几个数量级。

微机按程序在所给定的周期内把指令信号先传送到输出寄存器和读数装置中,经过预处理系统的输入口将由多路选择开关选入的设定在基准设定器中的某一标准值(如零点标准值)通过A/D转换进入微机内,以和传感器实际输入相比较,比较了几个标准值并经微机运算后,即可计算出上述的 Δk 和 Δd ,并以此来校正传感器的输出,实现抑制零点和满度误差的目的。由于微机作上述简单运算十分迅速,一般为几至几十微秒,故自动校正几乎是实时的。

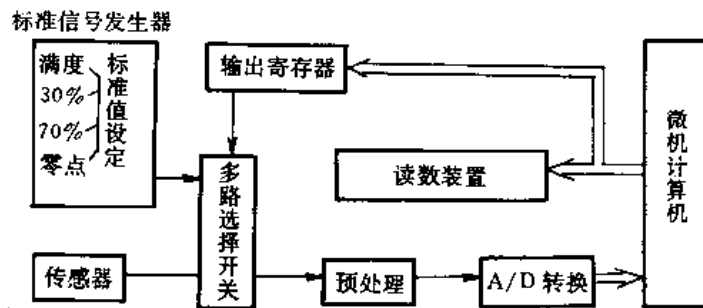


图7-68 计算机误差校正原理图

上述校正方法也可以推广到对传感器或测量系统进行静态特性的非线性校正。如图7-69所示。

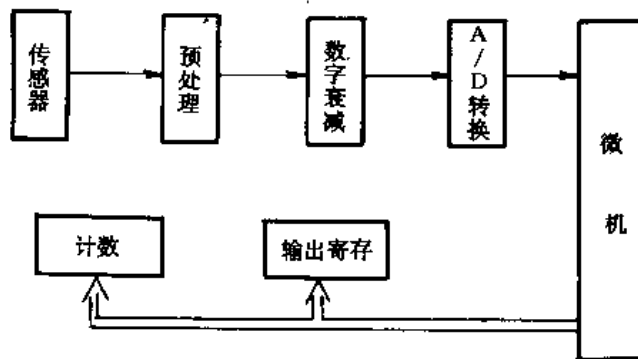


图7-69 测量系统静态特性非线性校正

图中采样速度越高,校正精度也越高。采用上述方法,可使较低精度的仪器进行较高精度的测量成为可能。

二、自动测试系统举例

三角波线性度的自动测量。

1. 线性度的表示

用幅度偏离理想直线的大小对信号源输出三角波峰——峰值之比的百分数表示(指0%到90%的最佳直线)。

2. 测试系统方框图

由图7-70所示,测量系统由HP3437A系统电压表和HP9825B计算机组成。在进行测量时,被测函数发生器接入系统,例如HP3325A函数发生器,将发生器同步输出(TTL电平)连接到M3437A的外触发输入,函数发生器输出10kHz,10V_{P-P}三角波经30Ω、20Ω两个电阻组成的分压器加到3437A的输入,系统在计算机程序控制下即能获得测试结果。

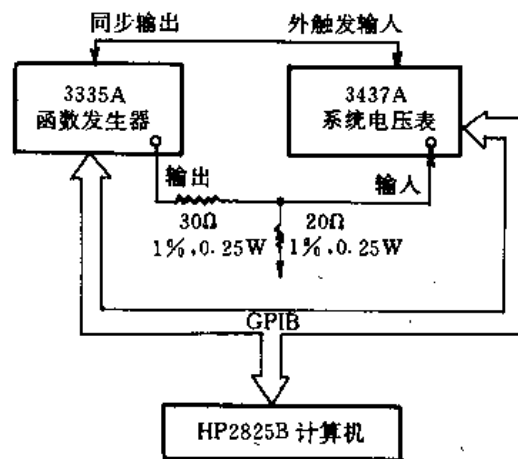


图7-70 自动测试系统方框图

为实现计算机对仪器的控制,设置在HP3325A函数发生器后面板上的地址开关为十进制数17(即二进制0001),系统电压表地址设置为十进制数24(即二进制数11000),且计算机接口选择码设置为7。

3. 源程序

源程序用HPL语言编制而成,其程序如下:

```
0:"Triangle Linearity Test";
1:dsp "3325A SYNC OUT to 3437 EXT Trig input";stp
2:dim A[9],B[9],C[9],Y[9],D[9]
3:wrt 724,"R2T2"2
4:wrt 717,"FU3 FR 10 KH AM 10 VO"
5:wait 1000
6:0.000 025→R
7:fxd 6
8:prt "Trlanguy Linearity"
• 292 •
```

```

9:prt" * * * * * "
10:for I=1 to 9
11:0.000 005+R→R
12:wrt 724,"D" R,"S"
13:red 724, A[I]
14:next I
15:0.000 075→R
16:for I=1 to 9
17:0.000 005+R→R
18:wrt 724,"D" R; "S"
19:red 724,A[I]
20:next I
21:45→X;2025→N;285→M
22:for I=1 to 9
23:A[I]+S→S
24:next I
25:X * S→Q
26:for I=1 to 9
27:I * A[I]→C[I]
28:next I
29:for I=1 to 9
30:C[I]+H→H
31:next I
32:(H-X * S/9)/(M-N/9)→A
33:S/9-A * (S/9)/(M-M/9)→A
34:for I=1 to 9
35:A * I+B→y[I]
36:next I
37:for I=1 to 9
38:(A[I]-Y[I])/10→D[I]
39:next I
40:abs(D[I])→R
41:for I=2 to 9
42:ifabs (D[I])<R or abs(D[I])=R;gto"B"
43:abs(D[I])→R
44:"B";next I
45:prt "L=",R
46:0→R
47:for I=1 to 9;B[I]+S→S,next I
48:X * S→Q
49:for I=1 to 9;l * B[I]→C[I];next I
50:0→H

```

```

51:for I=1 to 9;C[I]+H→H;next I
52:(H-X * S/9)/(M-N/9)→A
53:S/9-A * (X/9)→B
54:for I=1 to 9;A * I+B→Y[I];next I
55:for I=1 to 9;(B[I]-Y[I])/10→D[I];next I
56:abs(D[I])→R
57:for I=1 to 9
58:if abs (D[I])<R or abs(D[I])=R;goto "A"
59:abs(D[I])→R
60:"A";next I
61:prt "L=" ,R

```

程序第0条说明本程序是三角波线性度测试程序。

程序第1条说明HP 3325A 与HP 3437A 系统电压表的连接。

程序第3条是置HP3437A 电压表到1V 量程,外触发。

程序第4条是控制HP 3325A 信号源输出三角波10kHz,10V_{p-p}信号。

程序第12条、13条、18条和19条分别控制3437A 触发测量的延迟时间和计算机读取测量值。

程序第21条以后为计算最佳直线值和线芭,并打印输出结果。例如正斜率线的线性为:L=0.00030,负斜率线的线性L=-0.00031。

习 题 七

7-1 设
$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} 1, & 4 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+7r), y_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(n+7r)$$

求 $x_p(n)$ 与 $h_p(n)$ 的周期卷积

7-2 已知有限序列 $x(n)$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ -1 & n = 2 \\ 4 & n = 3 \end{cases}$$

求DFT[$x(n)$],求再IDFT[$x(k)$]并验计算。

7-3 已知 $x(n)$ 是长为 N 的有限长序列并且 $x(k)=\text{DFT}[x(n)]$,设

$$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} x(n+rN)$$

求DFT[$y(n)$]与 $x(k)$ 之间关系。

7-4 把 $N=16$ 点 $x(0), x(1), x(2), \dots, x(15)$ 排成倒位序列。

7-5 某台计算机平均一次复乘需要 $10\mu\text{s}$,一次复加需 $2\mu\text{s}$,今用来进行 $N=1024$ 点DFT计算。问直接算法需要多少时间? 时间抽奇偶分解FFT 算法需要多少时间?

7-6 用C 语言编制时间抽偶分解FFT 程序。

7-7 用双线性变换法,把下列模拟系统 $H_a(s)$ 转换成数字系统函数 $H(z)$

$$(1) H_a(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)} \quad T=0.5$$

$$(2) H_a(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \quad T=2$$

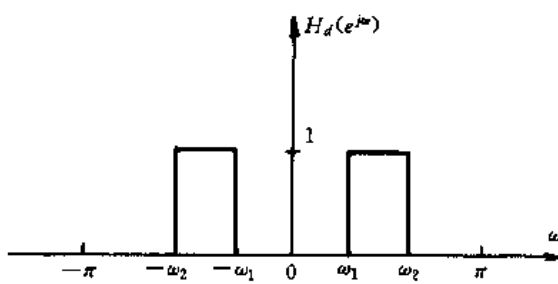
$$(3) H_a(s) = \frac{3s+2}{2s^2+3s+1} \quad T=0.1$$

7-8 处理模拟信号的数字滤波器,系统函数 $H(z)$ 呈低通特性,其数字截止频率 $\omega_c = 0.2$,若采样频率为 $f_s = 1\text{kHz}$,问数字滤波器等效模拟滤波器截止频率 Ω_c 是多少?若系统不变,如果采样频率 f_s 分别为 200Hz , 2000Hz , 500Hz ,试问等效模拟低通滤波器截止频率是多少?

7-9 如题图7-1所示,要求设计一个线性相位数字滤波器(矩形窗)

(1) N 为奇数,求 $h(n)$ 。

(2) N 为偶数,求 $h(n)$ 。



题图 7-1

7-10 设计一个本节所定义的切比雪夫(Chebyshev)滤波器,画出其幅频响应,并与考尔(Cauer)滤波器和巴特沃斯(Butterworth)滤波器作比较。

7-11 计算下列离散时间序列的DFT

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

7-12 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长度序列, $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$,现将长度扩大 r 倍,得到长度为 rN 的有限长度序列 $y(n)$

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (N \leq n \leq rN-1) \end{cases}$$

求 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

7-13 作单一频正弦信号谱处理时,需不需要加窗?

7-14 如果在截断样本长度内,一周期信号和一瞬变信号波形完全一致,则在后续处理中两者结果是否一样?

7-15 已知一信号的最高频率含量为 1kHz ,记录长度 $T = 40\text{s}$,今对该信号进行数字化

处理,已决定采样频率为2kHz,采样点数为2048点,问

(1)所得数字信号有无功率泄漏现象,为什么?

(2)所得信号有无频率混叠现象,为什么?

- 7-16 为提高处理速度,使磁带机回放信号的速度比记录速度快一倍,问这和原速回放时同作信号数字分析时,在样本截断长度、采样频率、抗混滤波器截止频率及处理结果上需要不需要作相应的变化,为什么?
- 7-17 什么是接口?什么是接口系统?接口系统的四要素是什么?
- 7-18 通用接口与专用接口有何区别?各有什么优缺点?
- 7-19 什么是三线挂钩?它与两线挂钩相比有何优缺点?
- 7-20 什么是器件功能?它为什么不能实现标准化?
- 7-21 如何为一台仪器配置接口功能?如何实现经济实用?

第八章 机械相关量的电测量

第一节 概 述

机械相关量的测量,涉及的范围很广,在工程设计、科研及各生产实际中起着重要的作用。例如,在设计过程中,有许多基础数据要用实验测量的方法取得,设计装置的工作精度及可靠性要用实验的方法进行验证。机械相关量的测量,如力、力矩、位移、速度、加速度、温度等的测量,在国民经济各个领域应用非常广泛。

测力及力矩在机械加工、冶金、能源、交通运输、国防等部门中已成为不可缺少的环节。如建筑工程和机械制造中所需的各种金属和非金属材料机械性能的测定中力的测量,冶金部门各种轧机轧制力的测量,机车车辆牵引力的测量;飞机、火箭推力大小的测量;自动化生产过程中各种力值的在线检测,等等。

位移、速度、加速度是振动测量的主要内容及对象,振动现象存在的范围也相当广泛,在各种民用机械、交通运输机械及武器系统中几乎都涉及到振动问题。

位移测量是线位移和角位移测量的统称。在机械工程中不仅经常要精确测量零部件的位移和位置,而且在力、压力、转矩、速度、加速度、强度、流量等参数的测量中,常常是以位移测量为基础。位移是向量,它表示物体上某一点在一定方向上的位置变动。位移的度量,除了确定其大小之外,还应确定其方向。

速度测量有两种情况,一是飞行装置的速度测量,一种是机构运动或振动速度的测量。

加速度测量包括振动加速度和冲击加速度的测量。振动加速度在旋转机械、传动机械、机床、流体管路、车辆、火箭等方面都大量存在,主要是测量其加速度的幅度、相位和频率。除了测量振动参数,还有结构和部件的运行状态特性测量,确定被测的物体的固有频率、阻尼、刚度和振型动态参数,这类试验被称为“频率响应试验”或“机械阻抗试验”。

机械装置运行正常与否与温度有着非常密切的关系,装置工作异常通常表现在温度的升高。因此,在工农业生产和科学研究中,经常会遇到温度的测量和控制问题,它对保证产品质量,提高生产效率,节约能源,促进国民经济的发展起着非常重要的作用。

第二节 力的测量

一、基本概念

力是一个物体对另一个物体的作用或反作用。力的作用可使物体改变机械运动状态而产生加速度,也可以使物体产生变形而产生内应力,这就是力的动力效应和静力效应。

由力的动力效应可引出力的单位。根据牛顿第二定律,力是由公式 $F=ma$ 定义的,由此可知,力取决于质量和在此力作用下该质量所产生的加速度。若要确定标准力,就需先确定

标准质量和加速度。根据国际单位制的规定,质量是基本量,而加速度不是基本量。质量是以国际标准和国家的各级标准作依据;而加速度是长度和时间两基本量的导出量。地球的重力加速度 g 可方便地作为加速度的标准参考值。所谓 g 的标准值是指它在纬度为 45° 的海平面上的值,在数值上为 980.665cm/s^2 ,任意纬度(ϕ)上的重力加速度可由下式计算:

$$g = 978.049(1 + 0.0052884\sin^2\phi - 0.0000059\sin^2 2\phi) \text{ cm/s}^2 \quad (8-1)$$

高于海平面 $h(m)$ 上的重力加速度的修正量为:

$$- (0.00030855 + 0.00000022\cos 2\phi)h + 0.000072\left(\frac{h}{1000}\right)^2 \text{ cm/s}^2 \quad (8-2)$$

这样,地球上某点的 g 就可确定,在此点上选取一个标准质量,标准力即可确定。从而引出力的单位(国际单位)是牛顿或牛(N),1牛(N)是指作用在1千克(kg)质量的物体上产生1米/秒²(m/s^2)加速度的力。

力的测量的广泛含义包括对力矩(以力和长度确定)、轴功率(以力矩和角速度确定)、压力(以力和面积确定)等项的测量。

力测量的基本方法有如下几种:

1. 平衡比较法:将所测力与标准质量所受重力相比较,直接通过一杠杆来平衡,如图8-1(a)所示。
2. 测量未知力作用于已知质量上的加速度来实现力的测量如图8-1(b)所示。
3. 将被测力转化成一液体压力,然后再测此压力如图8-1(c)所示。
4. 将被测力作用在某些特殊元件上,以产生可测的物理效应。最常用的是利用机械弹性元件将被测力转化成位移如图8-1(d)所示。另外,如压电晶体受力后表面产生电荷,压磁元件受力后磁阻发生变化,张紧的金属弦在轴向受力后自然频率的变化等均可用来测量未知力。

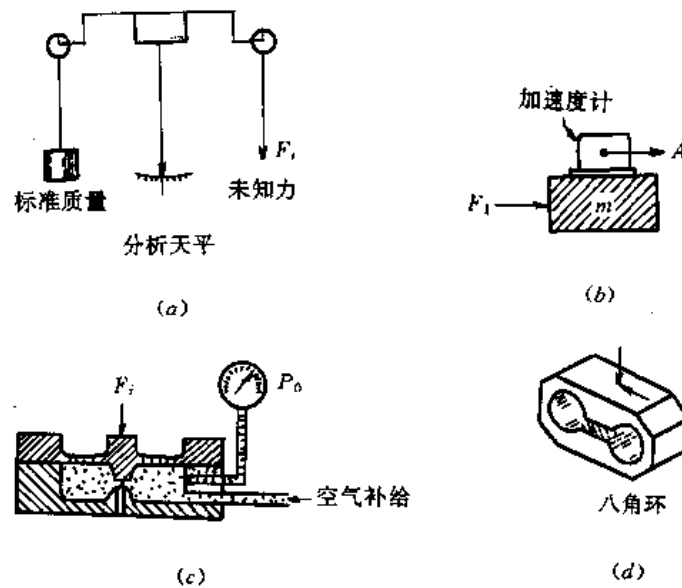


图8-1 力的基本测量方法

二、测力传感器

目前在测力中,常常要求能自动显示、记录并与计算机相连进行数据处理。因此,力传感器的好坏直接影响整个测力系统工作的好坏,成为测力系统中不可缺少的重要组成部分。例如:各种小型自动台秤到大型火车车轨道衡,它们的称重都是利用测力传感器的输出信号转变成数字量,进行自动显示或记录;在飞机、火箭发动机的地面记录中,也是利用力传感器来测量所产生的推力大小及其随时间的变化规律,以提供准确的特性参数供分析研究,等等。

测力传感器种类很多,如第五章所述的电阻应变片式、电感式、电容式、压电式、压磁式等各种传感器。其中,电阻应变片式力传感器应用最为广泛。它是一种将被测力作用于弹性敏感元件,使力转化为弹性元件的应变,然后再用应变片及后续电路将应变转化为电压输出,最后由显示、记录仪器读出对应的力值。这类传感器依据弹性敏感元件的不同类型,分为柱型如图8-2(a)所示、梁型如图8-2(b)所示和环型如图8-2(c)、(d)所示等几种形式。

柱型弹性元件有圆柱、圆筒及方柱等几种型式。作用力沿柱的轴心线作用,所产生的应变为:

$$\varepsilon = F/SE \quad (8-3)$$

式中: F ——沿柱的轴心线作用力;

E ——弹性元件的弹性模量;

S ——弹性元件的横截面积。

梁形弹性元件有悬臂型和两端固定型。对于矩形截面等强度的悬臂梁,上、下表面的应变相等,且符号相反。

$$|\varepsilon| = GFl/Ebh^2 \quad (8-4)$$

对于矩形截面两端固定梁,上下表面的应变为:

$$|\varepsilon| = 3Fl/4Ebh^2 \quad (8-5)$$

两式中, l ——梁的长度;

b ——梁的宽度;

h ——梁的厚度。

对于环形弹性元件的应变计算较为复杂,就园环形弹性元件来说,在受轴向力[图8-3(a)中的 F 力]时,在园环的两个截面A、B应变最大,分别为:

$$\varepsilon_A = 1.910FR_0/Ebh^2 \quad (8-6)$$

$$\varepsilon_B = 1.090FR_0/Ebh^2 \quad (8-7)$$

式中: R_0 ——园环的平均半径;

b ——园环的宽度;

h ——园环的厚度。

在 c 截面上应变为零。根据理论推导,各截面上的弯矩分布如图8-3(b)所示, C 截面与轴线夹角等于 39.6° 。

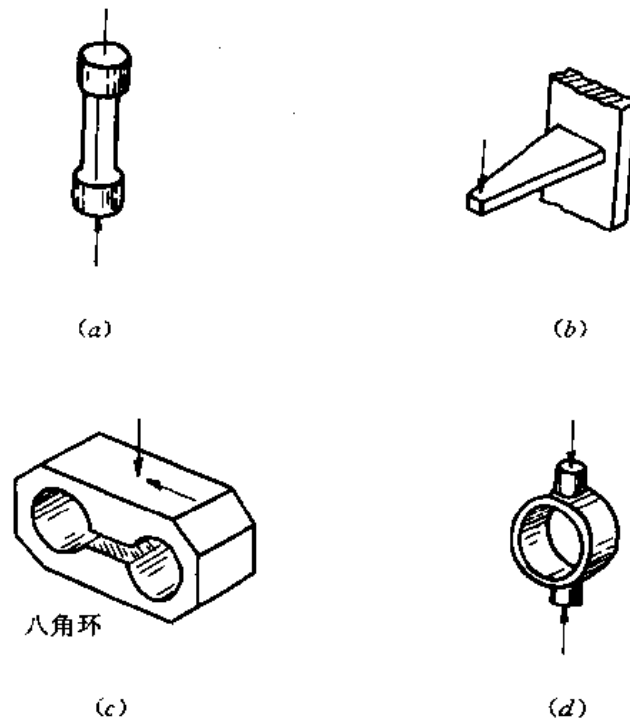


图8-2 常用弹性敏感元件

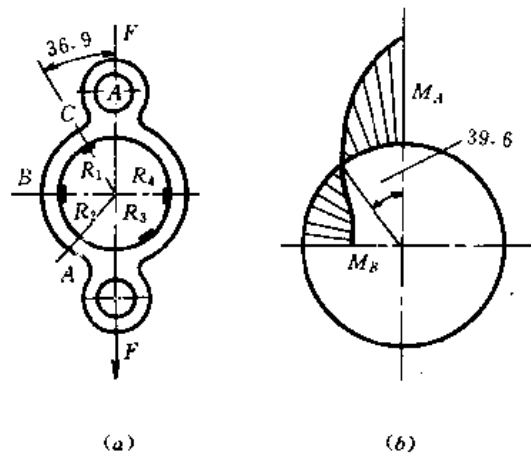


图8-3 圆环受轴向力各截面弯矩分布图

因 A 、 B 处内表面的应变符号相反,可组成差动电桥,应变片大多粘贴在环的内表面 A 、 B 处。

前面所介绍的园柱型、园环型、梁形弹性元件构成的测力传感器都有一个共同缺点,即在相同载荷下作用力点位置的变化会引起较大的输出变化,且它们的抗侧向力及抗偏心载

荷的能力差。而剪切应变轮辐式力传感器,简称轮辐形力传感器,可以克服上述缺点。

轮辐形弹性敏感元件的简单结构如图8-4(a)所示,在轮圈与轮毂之间成对地并相互对称地连接着轮辐,被测力作用在轮毂的上端面及轮圈的下端面(受压缩力时),在轮辐上由于被测力的作用产生与被测力成比例的切应力。应变片贴在与轮辐轴成45°方向的轮辐侧面,感受和切应力对应的正应力大小而获得被测力。

图8-5中(a)和(b)是轮辐的弯矩和剪切分布图,梁45°方向上的正应变为:

$$\varepsilon = \frac{3(1 + \mu)F}{8bhE} \quad (8-8)$$

式中: μ ——材料的泊松比;

F ——被测力;

b ——截面宽度;

h ——轮辐的高度;

E ——材料的弹性模量。

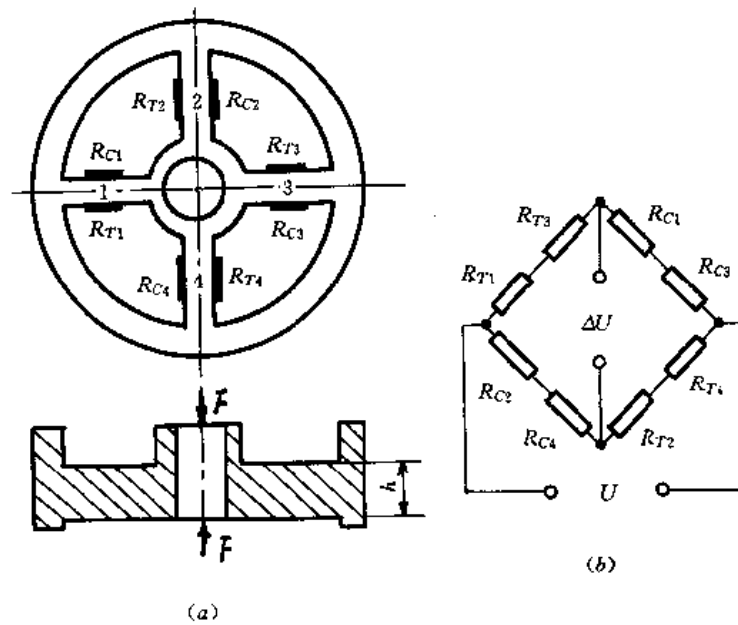


图8-4 轮辐形力传感器结构示意图

在四个轮辐的侧面粘贴四片(或八片)应变片,粘贴方向和组成的电桥如图8-4(b)所示。图中电阻 R 的注脚为 T 者(R_T)表示拉伸应变片,注脚为 C 者(R_C)表示压缩应变片。

轮辐形力传感器由于结构简单、线性好、输出灵敏度高,并且具有抗偏心截荷、侧向截荷能力强,以及安全的过载能力等许多特点,现已在大力值测量(10KN)中广泛采用。

利用弹性元件将被测力转化成位移后,可以用不同类型的位移传感器(如差动变压器式、电感式、电容式等)来测量这一位移,从而可做成不同类型的力传感器。如图8-5所示为差动变压器式力传感器。它是具有筒状空心截面的弹性元件,高度与直径的比值较小,以减小横向偏心分力的影响,在受轴向力时应力分布均匀。差动变压器式力传感器实质上是利用

弹性元件将被测力转换成位移,而后用差动变压器来测出这一位移。这样,它的精度、线性度等技术指标就主要取决于弹性元件和差动变压器的性能了。其动态性能,则取决于可活动部分的频率响应特性。

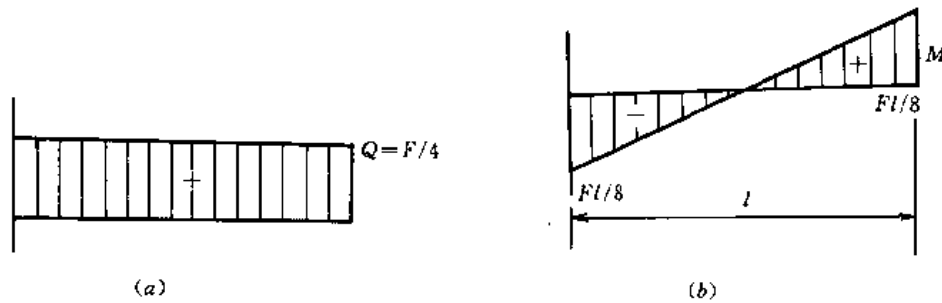


图8-5 轮辐的弯矩和剪力分布图

另一类常用的力传感器为压电式力传感器,其工作原理在传感器技术一章中作了论述。这种传感器近年来在国内的研制和使用有较大发展。在机械制造中用它来监测切削力的变化;在控制系统中用它作为反馈检测元件;在航天工业中对火箭发动机大推动的测试充分发挥其作用。它利用压电材料制成压电式力传感器,消除在动态测量时所感受加速度的惯性质量 m 。它可制成多向力传感器(如三向),这样,它可测量出多向力的作用。例如在金属切削机床上测量车削、铣削等三个互相垂直的切削力,就可采用这种类型的力传感器。压电式力传感器的刚度好、灵敏度高、频响范围宽、稳定性好,特别适合于瞬态力与交变力的测量。

三、切削力的测量

切削力是机械加工中的一个重要参数,研究机械加工切削力的大小、对改善加工质量,提高生产效率,检查刀具磨损,防止机床过载,以及进行机床结构的优化设计等都具有重要意义。切削力的测量是一种比较典型的多向动态力测量。下面就切削中最为典型的车削力测量作多向动态测量进行讨论。

1. 切削测力仪

车削中的外圆加工,切削力如图8-6所示。切削力 R 分解为进给抗力(走刀抗力) F_x 、吃刀抗力 F_y 和主切削力 F_z 。对此已知方向的三个分力的测量可采用前述压电式三分力传感器,也可采用电阻应变式测力仪将这些力转换成可以显示记录的电信号。下面就其工作原理讨论如下。

(1) 电阻应变式测力仪

电阻应变式测力仪灵敏度高,可测切削力的瞬时值。应用电补偿原理,可以消除切削分力的相互干扰,使切削测力仪大大简化,因此在车、铣、钻磨中均有采用。应变式车削测力仪中,八角环式车削测力仪效果最好,应用最广泛。图8-7是八角环车削测力仪的结构图,它是在一块整体钢材上加工出相当于四个八角形环面结构,在适当的截面上贴应变片。

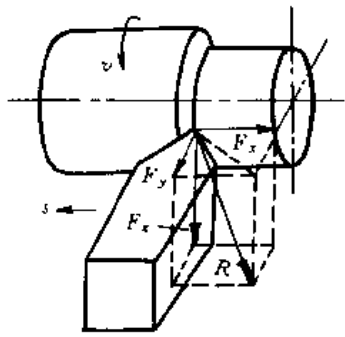


图8-6 车削时的切削力

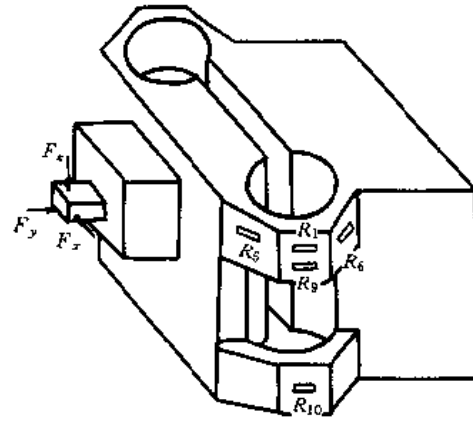


图8-7 八角环式车削测力仪

从图8-7中受力分析可知,进给抗力 F_x 使四个环都受到切向力;吃刀抗力 F_y 使四个环都受到压缩力;而主切削力 F_z 则使上面环受到拉伸,下面环受到压缩。在上述三向力作用下,若合理布置应变片可以减少互相干扰。

八角环弹性元件是由圆环演变来的,如图8-8所示。在圆环上施加单向径向力 F_y ,如前

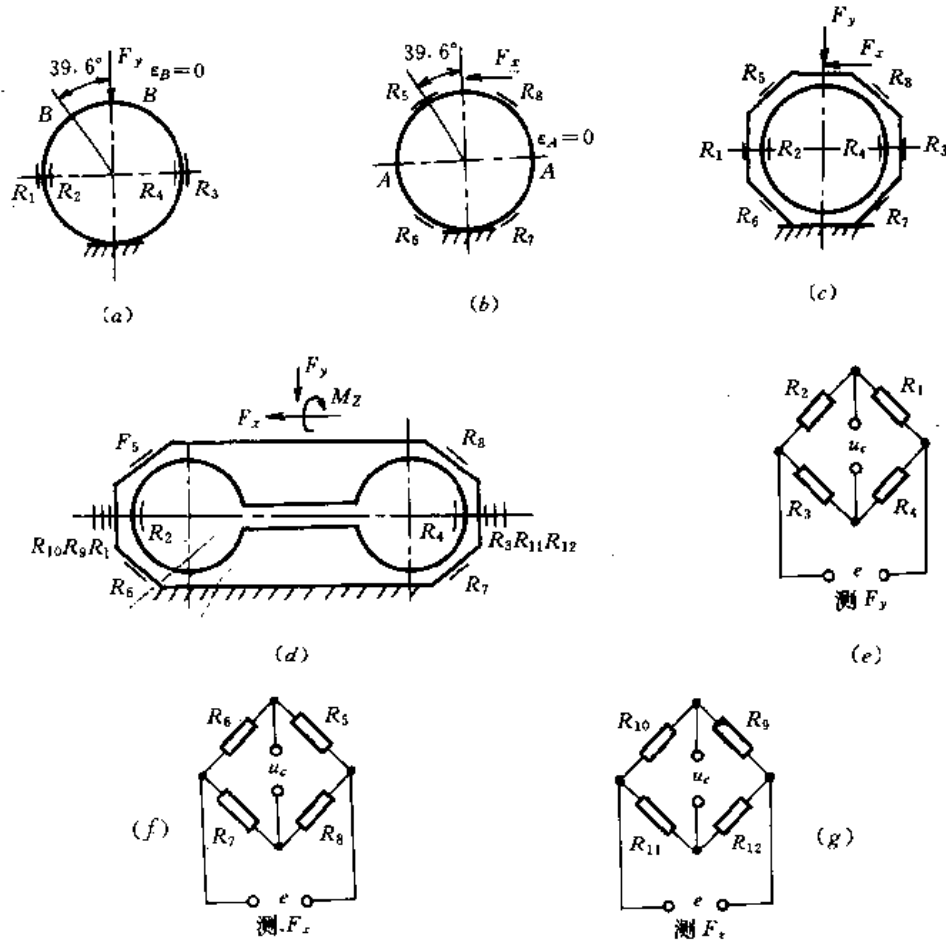


图8-8 圆环与八角环

分析,在与作用力成 39.6° 处应变为零,称为应变节点如图8-8(a)所示。在水平中心线上则有最大应变,故将应变片贴在水平中心线上, R_1 、 R_3 受张应力, R_2 、 R_4 受压应力。

若园环一侧固定,另一侧受切向力 F_x 如图8-8(b)所示,应变节点在与着力点成 90° 处,即图中的A点,若将应变片贴在 39.6° 处,则 R_5 、 R_7 受张应力, R_6 、 R_8 受压应力。这样,当园环上同时作用有 F_x 和 F_y 时,将应变片 $R_1\sim R_4$ 组成电桥如图8-8(e)所示, $R_5\sim R_8$ 组成另一种电桥如图8-8(f)所示,则可互不干扰地测出 F_x 和 F_y 二力。

由于园环不易固定、夹紧,实际用八角环代替如图8-8(c)所示,当八角环的 h/r 较小时,(h 为环的厚度, r 为环的平均半径),应变节点在 39.6° 处。随 h/r 比值的增大,此角度也较大,当 $h/r=0.4$ 时,应变节点在 45° 处,故一般八角环的一部份应变片贴在 45° 处。

图8-7的测力仪在受主切削力 F_x 时,将此力简化到两园中心连线上,八角环即受上方向的正压力 F_x ,又受到变矩 M_x 。 F_x 与各应变片贴片方向垂直,对应变片不影响; M_x 使上部环受张应力,下部环受压应力,因此可将 $R_9\sim R_{12}$ 组成电桥以测量 F_x 如图8-8(g)所示。

(2)压电式切削测力仪

各类压电测力仪是以压电石英晶体配电荷放大器所组成的测力传感器。

石英压电传感器的刚性好、灵敏度高、线性好、频响范围宽、性能稳定,由它作为力传感元件的测力仪在测量切削力的应用上是很有发展前途的。目前出现的高刚度的多向压电传感器后,测力仪的刚度可以提高,结构大大简化,日益趋近实际刀架或装卡工件的工作台。

图8-9所示是压电式测力仪的原理示意图。图8-9(a)为压电式测力仪的结构示意图,车

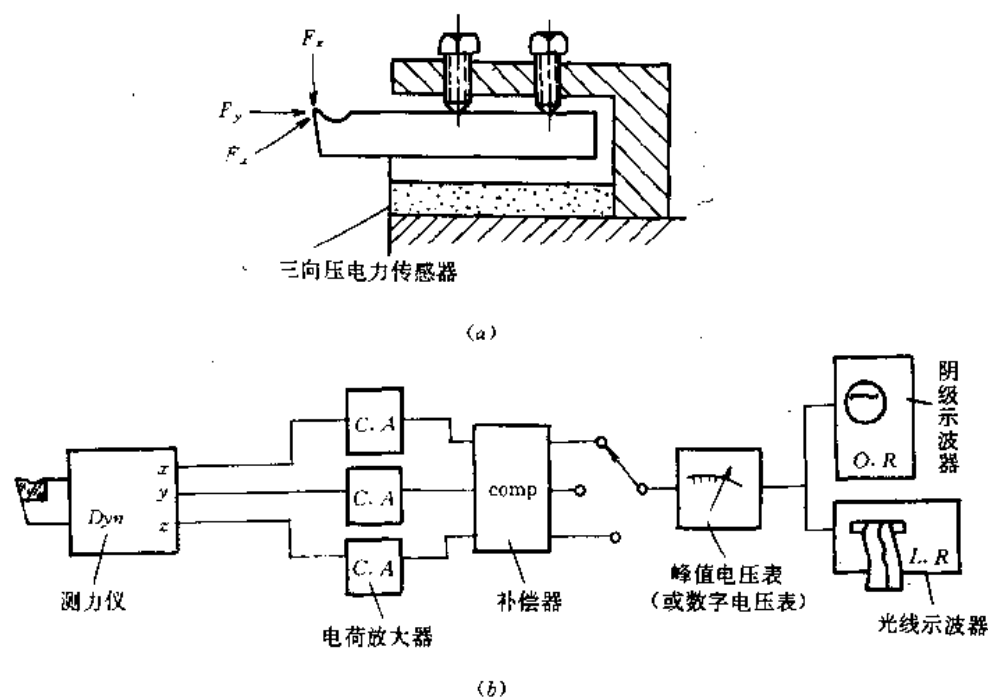


图8-9 压电式测力仪

削力的三个分力作用在车刀上,在车刀下有一个三向压电测力传感器,该传感器的结构见图

5-52, 传感元件是由三对不同切型的石英片组成, 中间一对由于有纵向压电效应, 可以测得主切削力 F_r , 另外两对具有切向压电效应, 方向互成 90° , 可以测得吃刀抗力 F_f 与进给抗力 F_x 。所以当空间任何方向的力作用在传感器上时, 便能自动分解出三个互相垂直分力的电荷信号, 然后各自经过电荷放大器后续电路, 即可显示或记录各切削分力随时间变化的情况如图8-9(b)所示。

2. 测力仪的误差及补偿

(1) 动态误差

测力仪都是将被测力作用在弹性体上使之产生变形, 然后测定这些弹性体的变形或弹性力, 若被测力是一种动态力, 需对弹性体的弹性力或弹性变形与被测动态力之间的关系作一分析。

对测力仪的弹性元件可近似简化为一单自由度振动的力学模型。如图8-10(a)所示。其中, m 、 k 、 c 分别为等效质量、等效刚度和等效阻尼系数。作用在测力仪上的待测力为 F_c , 测力仪的弹性力(即直接对输出起作用的力)为 F_d , 二者之间要符合不失真测试条件, 输出才能正确地反映被测作用力 F_c 。

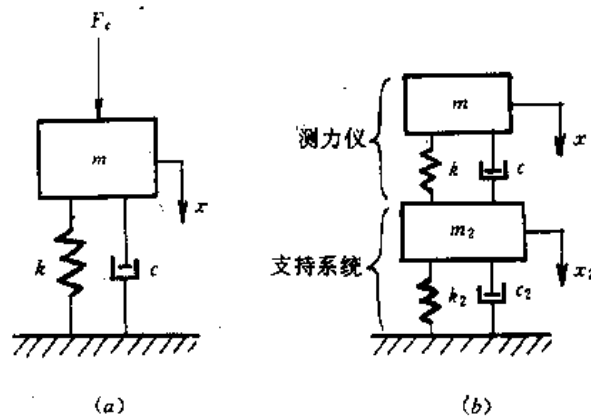


图8-10 测力仪的力学模型

若测力仪置钢体上, 此系统的运动方程式为:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_c \quad (8-9)$$

假定被测力 F_c 是简谐的, 即 $F_c = F_{c0}\sin\omega t$, 上式即为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{c0}\sin\omega t \quad (8-10)$$

此微分方程的稳态解为:

$$x = \frac{F_{c0}}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2) + 4\xi^2\eta^2}} \quad (8-11)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{2\xi\eta}{1-\eta^2} \quad (8-12)$$

式中: $\eta = \frac{c}{c_0}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 测力仪活动部份的固有频率;

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \text{ 阻尼率。}$$

所以,测力仪中直接引起输出的力,即弹性元件所受力为:

$$F_d = kx = F_{c0} \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2) + 4\xi^2\eta^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (8-13)$$

由式(8-13)可知, F_d 与 F_c 之间即存在幅值误差,又存在相位误差,而且这些值还是被测力频率的函数,只有 $\eta \ll 1$ 即 $\omega \ll \omega_n$, 即被测量力的频率远小于传感器的固有频率时,传感器输出的弹性元件上的力才能接近被测动态力。

若支持系统不是刚性的,测力仪可简化成等效的 m_2, k_2, c_2 。这样测力仪及其支持系统即组成一个两自由度系统如图8-10(b)所示。

若作用力仍然作用在测力仪的等效质量 m 上,由力学定律可得下列微分方程式:

$$F_c = m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_2) + k(x - x_2) \quad (8-14)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = c(\dot{x} - \dot{x}_2) + k(x - x_2) \quad (8-15)$$

若 $\xi \ll 1$, 忽略阻尼项,上式可简化为:

$$F_c = m\ddot{x} + k(x - x_2) \quad (8-16)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 = k(x - x_2) \quad (8-17)$$

由此可见,测力仪引起输出的弹性力为 $k(x - x_2)$, 与被测力 F_c 之间的误差为 $m\ddot{x}$ 。为补偿这一误差,应在测定 F_d 的同时,测定测力仪等效质量的加速度 \ddot{x} , 经过适当标定,以测力仪的输出 F_d 进行补偿,即可较正确地反映输入的动态力 F_c 。

若阻尼项不能忽略,则误差除了 $m\ddot{x}$ 外,还有 $c(\dot{x} - \dot{x}_2)$ 项。这样,除加速度补偿外还需作速度补偿。这称为全补偿法。其补偿系统原理如图8-11所示。

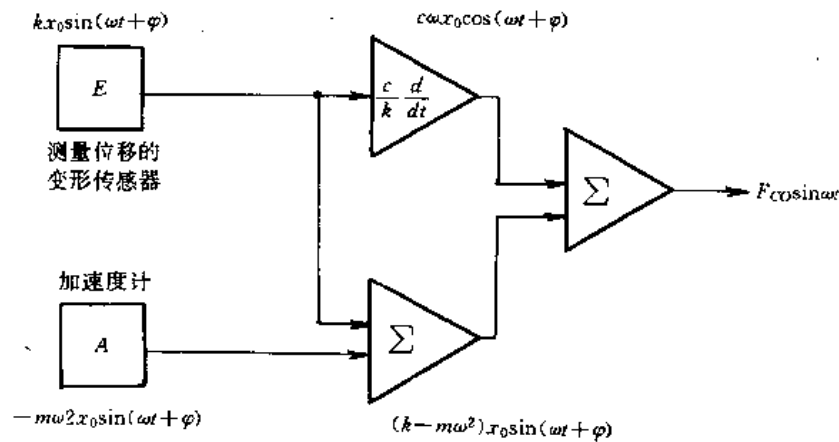


图8-11 全补偿法测力系统原理图

(2)交叉误差

在实际的多向测力仪,在*x*、*y*、*z*三个互垂直的方向中任何一个方向受到力的作用时,在其余两个方向上有输出,即各向之间的干扰是存在的,为了得到切削过程中切削力在各方向上的真实分力,可用下列方法修正。

①计算法:用分别施加*F_x*、*F_y*、*F_z*的方法进行静态标定,测得某一方向载荷除去本方向输出外,在其它两方向的交叉干扰输出。图8-12即为所测定的结果。图中各条曲线代表加载

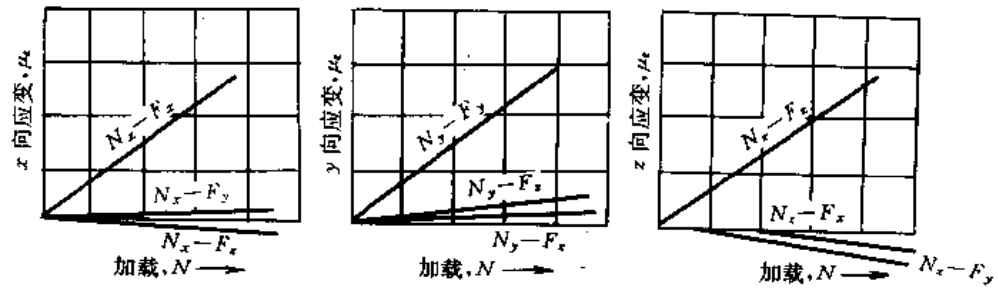


图8-12 三向测力仪各向静态标定曲线

与输出的关系,如*N_x-F_x*代表在*x*方向加载在*x*方向的应变输出,其斜率为*a_{xx}*; *N_x-F_y*代表在*y*方向加载在*x*方向的应变输出,而*x*载荷引起*y*方向的干扰,其斜率为*a_{xy}*;同理可从各标定曲线中得到斜率*a_{yx}*、*a_{yy}*、*a_{yz}*及*a_{zx}*、*a_{zy}*、*a_{zz}*等,因此可建立下列关系式:

$$\begin{cases} N_x = a_{xx}F_x + a_{xy}F_y + a_{xz}F_z \\ N_y = a_{yx}F_x + a_{yy}F_y + a_{yz}F_z \\ N_z = a_{zx}F_x + a_{zy}F_y + a_{zz}F_z \end{cases} \quad (8-18)$$

式中:*N*——各方向的输出指示值;

F——各方向所加权的力值。

解方程(8-18)得:

$$F_x = \begin{vmatrix} N_x & a_{xy} & a_{xz} \\ N_y & a_{yy} & a_{yz} \\ N_z & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix} \Delta \quad (8-19)$$

$$F_y = \begin{vmatrix} a_{xx} & N_x & a_{xz} \\ a_{yx} & N_y & a_{yz} \\ a_{zx} & N_z & a_{zz} \end{vmatrix} \Delta \quad (8-20)$$

$$F_z = \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & N_x \\ a_{yx} & a_{yy} & N_y \\ a_{zx} & a_{zy} & N_z \end{vmatrix} \Delta \quad (8-21)$$

式

$$\text{中 } \Delta = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \quad (8-22)$$

在切削过程中,由仪表读得各向示值 N 后,即可根据定标时得到的系数,即各个 a 值,按上式计算出各方向的真实分力 F 。

②电路修正法

由静态标定曲线可见,各向的互相干扰度在线性范围内是一常数,这样可以通过电路修正方法来修正。图8-13为一电阻应变式三向车削力仪交叉干扰电路修正方法的原理示意图。

图中将各向的输出经可调电位器进行分压,即是把 N 乘以符合要求的 a 值加到需要修正的另一向输出中去。 a 值的正负可通过倒相器来决定,以符合标定曲线中的要求。加法放大器将各修正值与原向输出值相加后得到经过修正的输出值。

在动态测量中,多向测力仪交叉干扰度确定比较困难,特别在共振频率附近,交叉干扰又非常大,难以进行修正,只能控制交叉干扰度。所以测力仪的工作频率只能低于测力仪各向最低的一阶共振频率。

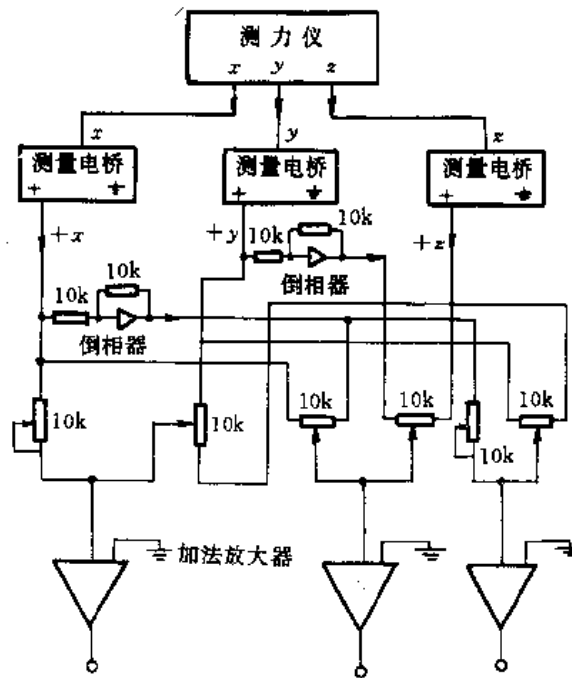


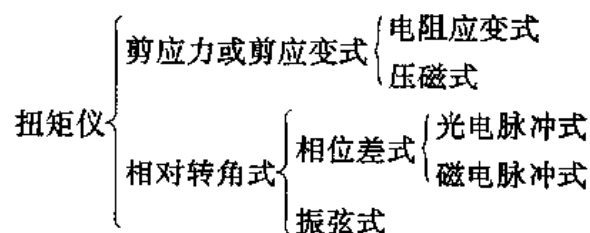
图8-13 交叉干扰电路修正法

四、扭矩的测量

扭矩是各类工作机械传动轴的基本载荷形式。在设计机械传动系统的各零部件时,必须

满足强度或刚度要求。另外在确定原动机时,为了合理选择容量,都需要测量扭矩,特别是运行过程中传动轴上所受的扭矩。因此转轴上扭矩的测量具有重要意义。

测量扭矩的方法是把转轴上的扭矩转化为与其有一定函数关系的物理量,然后再转化成相应的电量。根据转换关系可分为下列几种扭矩测量方法。



本节对这几种测量方法分别介绍如下:

1. 电阻应变式扭矩仪

转轴上受扭矩作用后,在其表面产生剪切应变,这一应变可用电阻应变片来测量。应变片可以贴在需测扭矩的传动轴上,也可贴在另外专用的传动轴上,制成一个应变式扭矩传感器。

由材料力学理论分析可知,轴体在扭矩 M 作用下,表面沿着与轴线成 45° 和 135° 斜角方向产生主应力,如图8-14所示。这一应力所对应的主应变分别为:

$$\epsilon_1 = -\epsilon_3 = \left(\frac{1+\mu}{E}\right) \frac{M}{W} = K_t M \quad (8-23)$$

式中: E ——轴的弹性模量;

μ ——轴的泊松比;

ϵ_1, ϵ_3 ——与主应力 σ_1, σ_3 对应的主应变;

W ——轴的扭转断面系数。

如果在主应变 ϵ_1, ϵ_3 方向上贴以应变片,测出主应变,即可间接测出轴上所受的扭矩 M 。

图8-15为一种应变式扭矩传感器。这种测量装置具有温度补偿性的,且对弯曲应力和轴向应力不敏感。四个应变片必须准确与转轴成 45° 粘贴,而且应变片1和3,2和4必须在直径方向上相对粘贴,可采用特殊型式的应变花可使应变片的准确粘贴得到简化。四个应变片接成全桥回路,这样可提高灵敏度。集流环是将转动中轴体上的电信号与固定测量电路装置相联系的专用部件。四个集流环中的两个用于接入激励电压,两个用于输出信号。集流环按工作原理分有电刷-滑环式、水银式和感应式几种。集流环的转动部份和固定部份的接触器电阻应当变化很小,如果接触电阻不稳定,则这种变化会作为较大的噪声信号被记录下来,产生测量误差。为了避免集流环带来的弊病,国内已研制出遥测应变仪,它是在应变电桥后,将电桥输出电压通过压控振荡器转换为矩形波频率变化的信号,从而将应变信号载于脉冲波上,这一频率调制信号经发射片耦合到固定的接收片上,实现无接触输信号的要求。接收的信号经鉴频电路将频率调制信号复原为与原应变信号成比例的电压信号,然后再记录、显示。

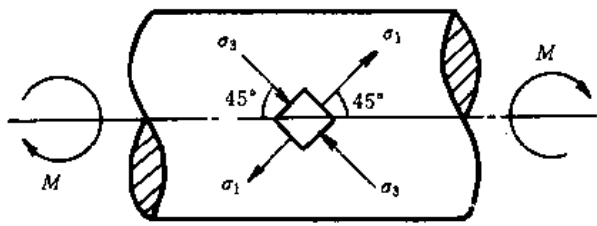


图8-14 轴表面应力应变计算

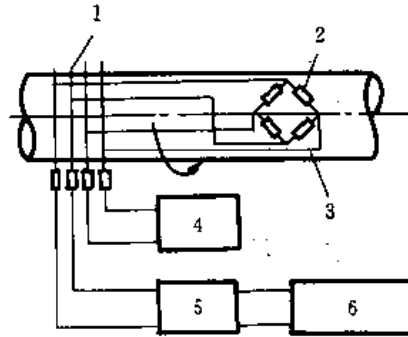


图8-15 电阻应变式扭矩传感器

1—集流环;2—应变片;3—轴;4—振荡器;
5—放大器;6—显示记录器

2. 压磁式扭矩传感器

图8-16 是一压磁式扭矩传感器,它采用的是一种非接触式的测量方法。铁磁材料制做的钢轴具有压磁效应,使用前先使它在磁场中沿轴向磁化。两固定环由硅钢片制成,上面各绕以 W_1 和 W_2 绕组。使用时磁性钢轴与固定环形成磁通路,钢轴在不受扭矩时,调整桥路平衡,电桥输出为零;钢轴上若有扭矩作用时,导磁率发生变化,使线圈电感变化,电桥输出与扭矩成一定关系的电压输出。这种方法抗干扰能力强、可靠性高、使用寿命长、输出较大。但其线性较差,往往需要线性补偿电路,其动态品质与激磁频率有关。压磁式扭矩传感器的应用仅限于铁磁材料轴体,对于不锈钢及其它非磁性材料的轴体就难以适用。这种方法多用于大型旋转轴,如飞机螺旋桨主轴、轧钢机主轴以及船用轴等的扭矩测量。

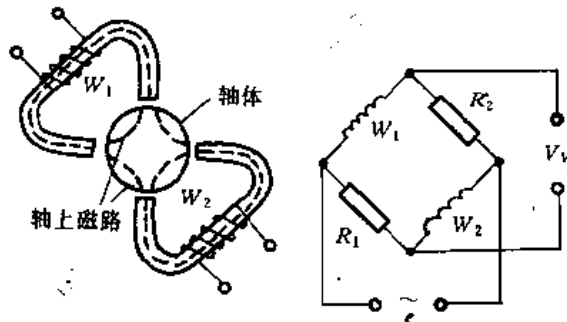


图8-16 压磁式扭矩传感器

3. 轴变型扭角扭矩测量仪

轴体若受扭矩作用,将产生扭转变形,如图8-17所示。由材料力学的理论,沿轴向相距为 l 的任意两截面间,由于扭转变形所立生的相对扭转角 ϕ ,可按式计算:

$$\phi = \frac{Ml}{GJ_p} \quad (8-24)$$

式中： G ——轴的剪切弹性模数；

J_p ——轴截面的极惯性矩。

由上式可知，扭角 ϕ 与扭矩 M 成正比，如能测出此扭角，即可间接测得轴体上所受的扭矩。轴体扭角的测量有应变梁式、振弦式及脉冲电液式等几种方法。

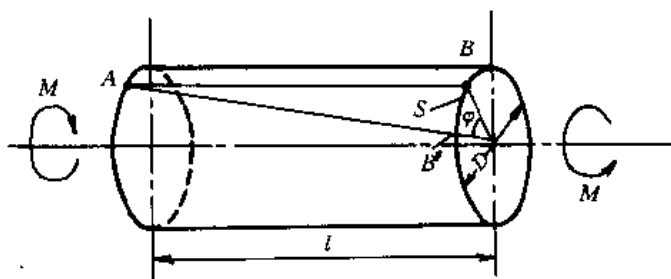


图8-17 轴体在扭矩作用下的扭转角

图8-18 是利用振弦式传感器测量轴体扭转角的一种方法。在被测轴体上相隔一定距离 l 的两个截面上固定安装着两个套筒体1，两根振弦3分别夹在套筒体的支架2上。当轴体受扭矩作用产生相应的扭转角时，两套筒相对随之转过同一角度。此时两根振弦中的一根张力增大，另一根张力减小，引起振弦振动频率的变化。振弦的张力随扭角而变化，所以振弦的固有频率随外加扭矩而变化。该振弦式力传感器，以激励器激振，以拾振器测量两振弦的振动频率信号，然后以后续电路来测量二者的差频，从而得到随扭矩大小变化的输出。

由于轴有受扭时，两根振弦所受的力相反，使一根振弦变紧，另一根变松，因此安装时必须使它们有一定的预紧力。

光电式扭力传感器是利用光电效应来测量旋转中的相对扭转角。其结构如图8-19所

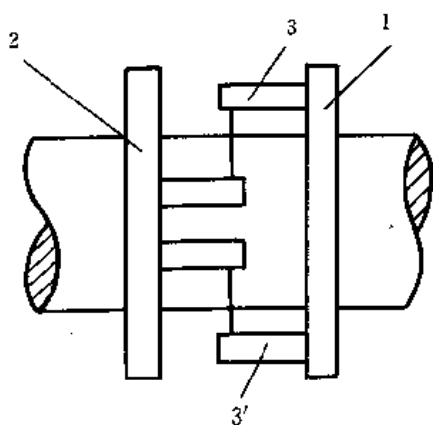


图8-18 振弦式扭矩传感器

1—套筒；2—支架；3—振弦

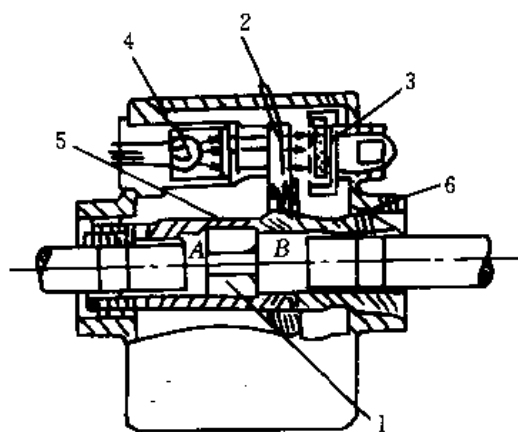


图8-19 光电式扭力传感器

1—扭力棒；2—光栅盘；3—光电管；4—光源；5、6—套筒

示。两个圆盘形光栅盘2分别通过套筒5、6固定在扭轴1的两端A、B处，3为对光通量有灵敏反映的光电管。光栅盘用两片直径相同的透明圆盘制成，其上有沿径向分布的准确等分放射状黑白相间的刻线，如图8-20(a)所示。在扭轴未受扭矩作用时，一光栅盘的透光部份正好与另一光栅盘的不透光部份相重叠如图8-20(b)所示。当光源发出的光，照射不到光电管上时，光电管输出电流为零；当扭轴受到扭作用，产生扭转角时，两光栅盘相对错开一个位置，从而形成一透光口，光束穿过透光口照射到光电管上，扭矩愈大，透光口应愈大，光电管被照射的时间也就愈长，通过后续电路使输出愈大。这样通过输出的大小，就可判断轴上所受扭矩的大小。

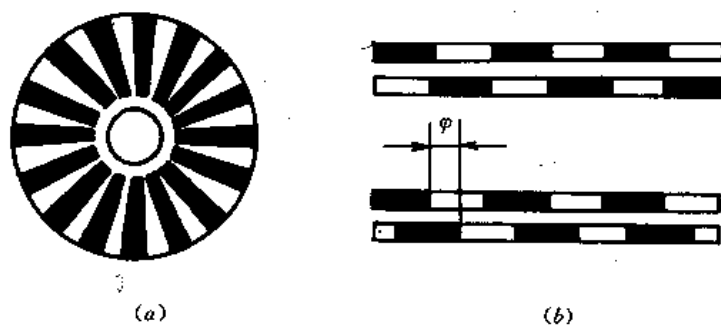


图8-20 光栅盘

数字式光电扭矩仪采用数字显示，直接读出扭矩值的大小，它是测量扭矩大小使用最方便的一种仪器，其原理如图8-21所示。在扭杆上有一定距离的两个圆柱面上，制作出准确等

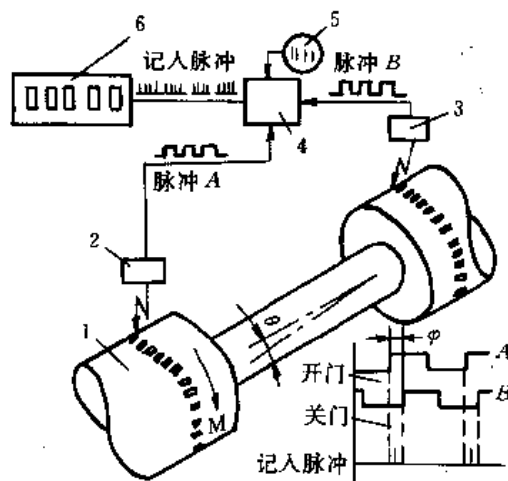


图8-21 数字式光电扭矩仪

1—扭杆；2、3—光电管；4—逻辑电路；5—同步脉冲源；6—数字计数器

分黑白相间的反射环，光源发出的光(图中未绘出)照射在两反射环上，由它们发射到光电管A、B上，两光电管各产生一组连续方波脉冲信号A、B。扭杆未扭矩时，A、B两组脉冲信号的相位差为零。两路信号同时馈入逻辑电路4内，由于相位差为零，逻辑电路中的“门”关闭，

由同步脉冲源发出的脉冲不能进入数字计数器6,显示为零。当扭杆受扭矩 M 作用时,两反射环之间有一相对扭角 θ ,方波脉冲 A 、 B 之间产生了相位差,脉冲波 A 前沿将“门”打开,同步脉冲进入计数器,直至脉冲打开的时间间隔与相位差 ϕ 成正比,打开的时间愈长,计数器所记脉冲数愈多。所以计数器的显示值亦反映了扭矩的大小。

$$U_{R1} = K_e U_{S1} \cos\theta \quad (8-25)$$

$$U_{R2} = -K_e U_{S1} \sin\theta \quad (8-26)$$

式中, $K_e = W_1/W_2$ ——旋转变压器的变比;

W_1, W_2 ——转子、定子绕组的匝数;

U_{S1} ——加于激磁绕组的交流电压(V)。

输出电压为调幅波。

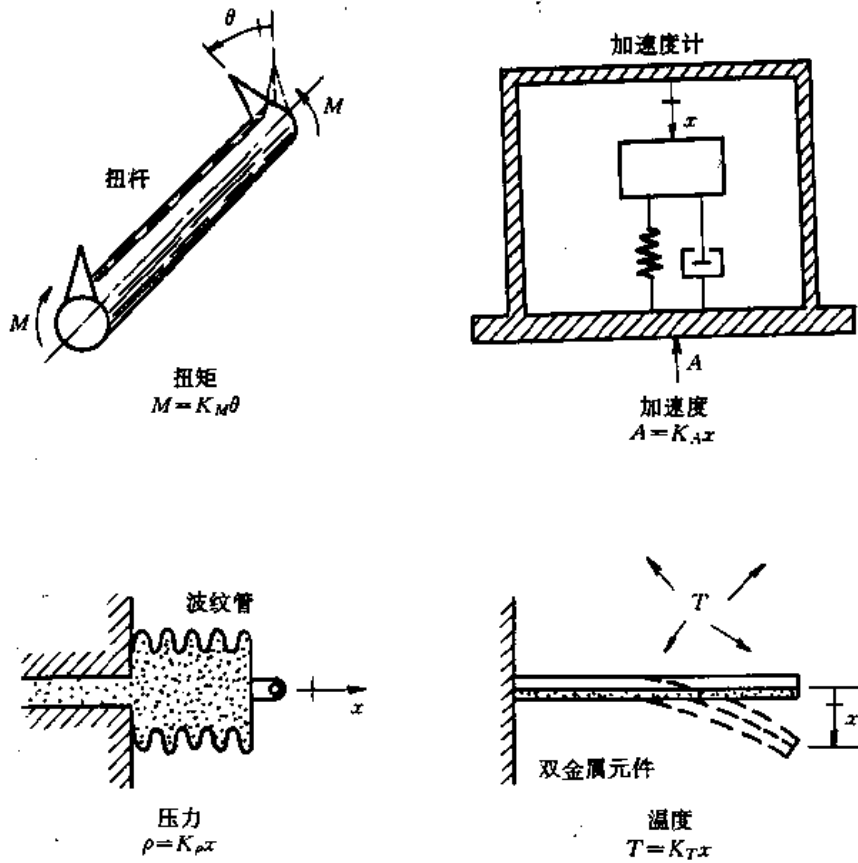


图8-22 位移测量传感器的应用

当输出绕组接有负载时, 转子转动就有电流通过输出绕组并产生电枢反应磁通, 使气隙中磁场发生畸变, 从而使输出电压发生一些不希望有的变化。为了减小这种变化, 旋转变压器在工作时, 应将辅助绕组 D_3D_4 短接, 或在 Z_1Z_2, Z_3Z_4 两输出绕组上接对称负载。为了提高旋转变压器的工作精度, 负载阻抗应尽量大。

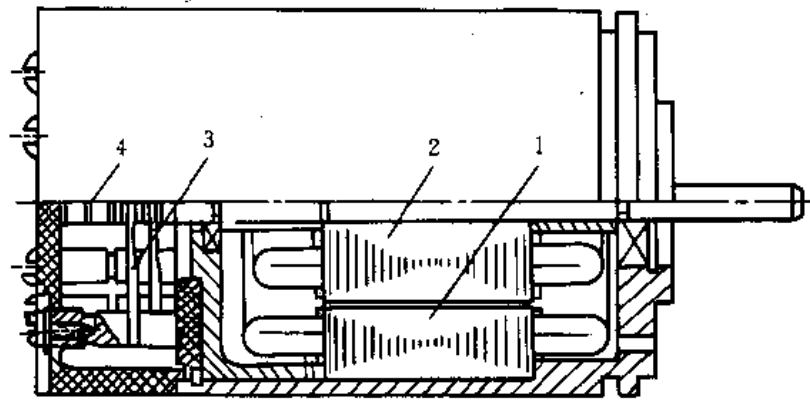


图8-23 旋转变压器式角位移
1—定子;2—转子;3—电刷;4—滑环

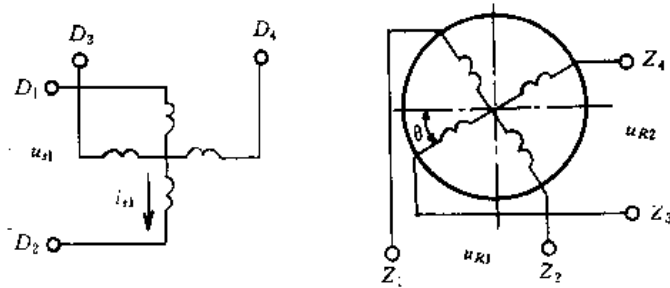


图8-24 正余弦旋转变压器原理图
 D_1D_2 —激励绕组; D_3D_4 —辅助绕组; Z_1Z_2 —余弦输出绕组; Z_3Z_4 —正弦输出绕组

线性旋转变压器实际上是正余弦旋转变压器,不同的是线性旋转变压器采用了特殊的变比 K_s 和接线方式,如图8-25所示。这样使得在一定转角范围内(一般为 $\pm 60^\circ$)输出电压与转子转角 θ 成线性关系,如图8-26所示。输出电压 U_{R1} :

$$U_{R1} = KU_{S1} \frac{\sin\theta}{1 + K_s \cos\theta} \quad (8-27)$$

由此式,选定变比 K_s 及允许的非线性,就可推算出满足线性关系的转角范围。如取 $K_s = 0.54$,非线性不超过 $\pm 0.1\%$,则转子的转角范围可达 $\pm 60^\circ$,在此范围内,输出电压与转角呈线性关系。

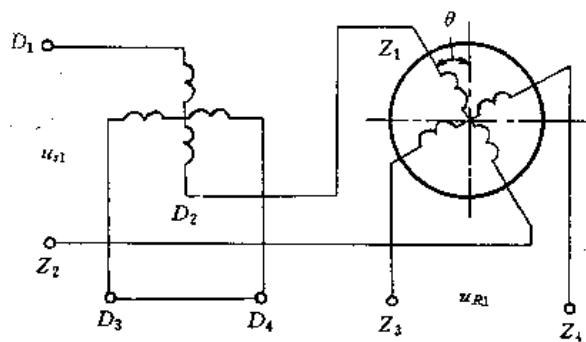


图8-25 线性旋转变压器原理图

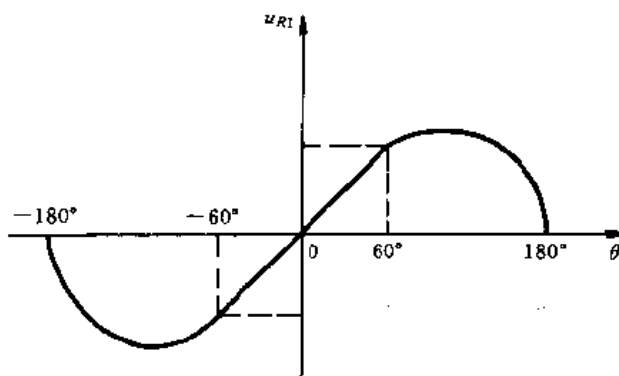


图8-26 转子转角 θ 与输出电压 U_{R1} 的关系曲线

2. 微动同步器式角位移传感器

微动同步器是一种变磁阻型旋转变压器，分为力矩型和信号型两种，力矩型是一种力矩输出装置，信号型是一种高精度的角位移测量传感器。在一定的转子转角范围内，当激磁电压和频率一定时，它的输出电压正比于转子转角。微动同步器的灵敏度大约为每度 $0.2 \sim 5V$ ，非线性为 $0.1 \sim 1.0\%$ ，通常采用的激磁电压为 $60 \sim 5000Hz$ ， $5 \sim 50V$ 。

微动同步器结构原理如图8-27所示，由四极定子和两转子组成。在定子的每个极点上绕有两个线圈将各极中的一个线圈串联成初级激磁回路，将各极中的另一个线圈串联成次级感应回路。激磁回路四个线圈的连接原则是当等幅交流电压加上时，在激磁电流的某半周内各极上的磁通方向如图中的箭头所示，次级感应回路的连接原则是使总的输出电压是 I、II 级和 III、IV 级上感应电压之差。当转子转到如图所示的对称于定子的位置时，定子和转子之间的四个气隙几何形状完全相同，各极的磁通相等，从而使 I、II 极上的感应电压与 III、IV 级上的感应电压相等，总的输出电压为零，转子被看成是处于零位。若转子偏离零位一个角度，则四个气隙不再相同，造成各极磁通的变化量不同，其中一对磁级的磁通量减小，另一对

磁极的磁通量增加。这样,次级就有一个正比于转子角位移的电压输出。当转动方向改变时,输出电压也有 180° 的相位跃变。

微动同步器的输入电压也是一种调幅波,需要配上必要的解调与检波功能的测量电路与记录显示装置。微动同步器位移传感器与差动变压器一样,也具有零位输出要采取适当的措施加以消除和补偿。

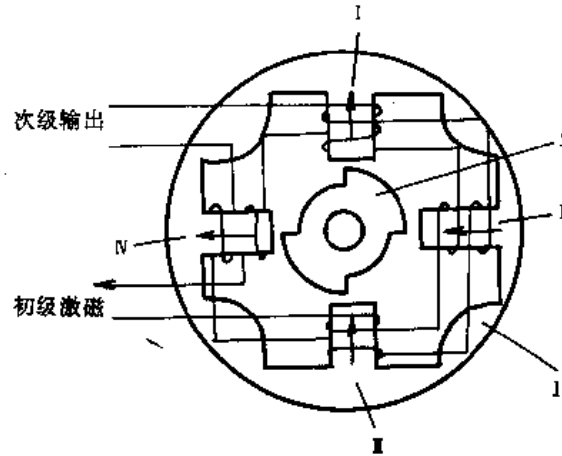


图8-27 微动同步器式角位移传感器
1—定子;2—转子

二、速度测量

物体运动速度的测量方法有以下几种:

1. 通过电气微分位移电压信号来测量速度

这种方法是把位移传感器的输出电压加在一适当的微分电路的输入端,以获得与速度成正比的电压信号。但微分作用将增强存在于位移信号中的低幅而高频的噪声,这是采用这种方法存在的主要问题,当用这种方法设计速测系统时,要特别注意。

2. 通过所测的 Δx 和 Δt 来测量平均速度

在许多情况下,测得一段短距离或短时间间隔内的平均速度值就能满足要求了。这种测量方法是,当运动物体通过间距为精确已知的两个位置时,用某种方法(光学的,电磁的,等等)产生脉冲。当运动速度不变,选用大的间距将可获得较高的测量精度;若速度是变化的,间距 Δx 就应选得足够小,才能保证测量的精度。这种方法也适用于转动情况。

3. 闪光测速法

用工作频率已知且可调的电子闪光灯可方便地测量物体的转速。其方法是,在构件上贴

一张黑白相间的纸作为目标。调整闪光灯的闪光频率,直到“目标”看起来静止不动。在这个调整位置上,闪光灯的频率便等于被测运动的频率。

4. 采用磁电式、光电式测速方法

此类方法见传感器技术一章中速度传感器。

5. 激光多普勒测速方法

激光多普勒测速法是测量目标运动速度的一种新方法。利用激光器作为光源,当运动物体与光波有相对运动时,就会产生多普勒效应,采用光电外差技术即可检测出多普勒频率,从而计算出被测物体的运动速度。这种方法也可以用来测量流体或粒子的运动速度、湍流速度等。激光多普勒测速法,简称为LDV。

激光多普勒测速的主要优点如下:空间分辨力高,探测光点是一个椭球形,短轴小到数十微米,长轴小到数百微米;测得速度的准确度高;频率响应快;动态范围广,为非接触测量。其原理如下:

激光器 S 发射的激光速度为 C ,波长为 λ ,以 V_p 表示被光源 S 照射的物体 P 相对于光源的运动速度, α 表示物体运动方向和光速传播方向之间的夹角,如图8-28(a)所示。对于物体 P ,光的传播速度为:

$$V' = C - V_p \cos \alpha \quad (8-28)$$

式中: C ——激光传播速度, $C = \lambda f$ 。

由于光源发出的光的波长 λ 没有变化,所以运动物体 P 接到的光波的频率 f_1 由式(8-28)可以算出,即:

$$f_1 = \frac{V'}{\lambda} = f_0 \left(1 - \frac{V_p \cos \alpha}{C}\right) \quad (8-29)$$

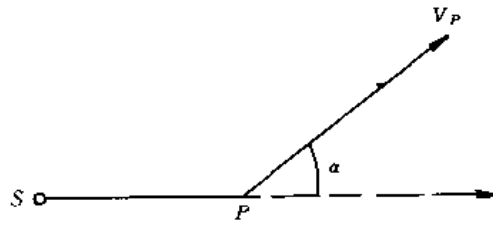
$$\text{当 } \alpha = 0 \text{ 时,} \quad f_1 = f_0 \left(1 - \frac{V_p}{C}\right) \quad (8-30)$$

$$\text{或} \quad f_d = f_0 - f_1 = \frac{V_p}{\lambda} \quad (8-31)$$

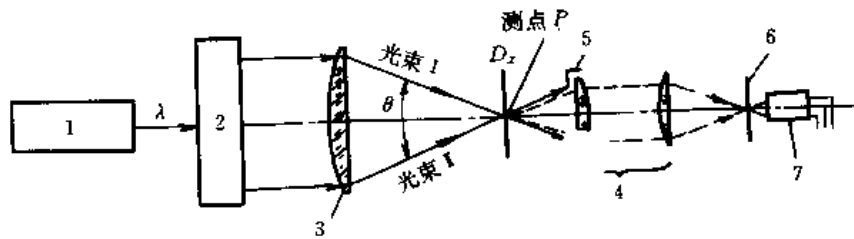
f_d 称为多普勒频率,物体的运动速度为:

$$V_p = f_d \lambda \quad (8-32)$$

图8-28(b)为前向接收光路示意图。激光器发出的一束光,给分束器分为光强相等的两束光,经发射透镜后相交于测点 P (即透镜焦点)。运动物体经过该两光相交区时会发出散射光,产生多普勒效应。因此,相对于光束I和光束II运动的物体所分别发出的两种散射光的光波频率已不再是激光器发出的光波频率,而是分别发生了第一次多普勒频移后的光波频率。这种频率的散射光的一部分经接收透镜后会聚到针孔光阑面上,经过一个很小的针孔(比成像光斑直径略小一些)把杂散光滤掉,以减小光电检测器(光电倍增管或光电管)产生的噪声。通过针孔进入光电倍增管的表面的两路散射光发生第二次多普勒频移。在光电倍增管的每一点处,这两次的散射光发生混频,产生差频响应的电信号,这正是我们需要的多普勒信号频率。



(a)多普勒频率产生示意图



(b)一维双光束(条纹)系统前向接收光路示意图

图8-28 激光多普勒测速

其基本关系式推导如下:

图8-28(b)的光路可简化为图8-29。根据式(8-28)及(8-29), P 处运动物体所接收到的光束 I 和光束 II 的频率(此时发生了第一次频移)分别为:

$$f_{1P} = f_0 \left(1 + \frac{V_{x1}}{C}\right) \quad (8-33)$$

$$f_{2P} = f_0 \left(1 - \frac{V_{x2}}{C}\right)$$

式中: V_x —— P 点运动物体的速度;

V_{x1}, V_{x2} —— V_x 分别在光束 I 和光束 II 方向上的投影。

V_{x1}, V_{x2} 的符号正好相反, 正号表示相对于光源移近, 负号表示相对于光源移远。

根据光的散射理论, 运动物体在 P 处以接收到的光波的相同频率发出散射光, 在光电接收器表面的 A 点接收到两种不同频率的散射光, 一种是由光束 I 产生的, 另一种是由光束 II 产生的, 其频率分别为:

$$f_{1A} = f_{1P} \left(1 + \frac{V_{xA}}{C}\right) \quad (8-34)$$

$$f_{2A} = f_{2P} \left(1 - \frac{V_{xA}}{C}\right)$$

式中: V_{xA} —— V_x 在线段 PA 方向上的投影。

V_{xA} 前的符号是一致的,均为正。如果在 B 点接收,则 V_{xB} 前的符号均为负。这就是第二次频移,即第二次产生的多普勒频率。

在 A 点处发生混频,两者的差频即为所求的信号频率,即:

$$f_{1A} - f_{2A} = (f_{1P} - f_{2P}) \left(1 + \frac{V_{xA}}{C}\right) \quad (8-35)$$

将式(8-33)代入上式,忽略高阶微量后可得:

$$f_{1A} - f_{2A} = \frac{f_0}{C}(V_{x1} + V_{x2})$$

同理,可得光电检测器上任一点 B 处的信号频率为:

$$f_{1B} - f_{2B} = \frac{f_0}{C}(V_{x1} + V_{x2}) = f_{1A} - f_{2A} = f_1 - f_2$$

由此可见,检测器接收的信号频率与接收方位无关。

若 V_x 反向,则

$$f_1 - f_2 = -\frac{f_0}{C}(V_{x1} + V_{x2})$$

或

$$f_d = |f_1 - f_2| = \frac{f_0}{C}(V_{x1} + V_{x2})$$

由图8-29可知, $V_{x1} - V_{x2} = V_x \sin \frac{\theta}{2}$ 又因 $C = \lambda f_0$,故最终可得多普勒测速的基本关系式为:

$$|V_x| = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}} f_d \quad (8-36)$$

式中: λ ——激光器发出的光波波长(m);

θ ——两束入射光之间的夹角(rad);

f_d ——多普勒频率(Hz);

V_x ——运动物体(或运动粒子)在 x 轴方向的速度分量(m/s), x 轴位于两光束决定的平面内且与 θ 角的平分线垂直。

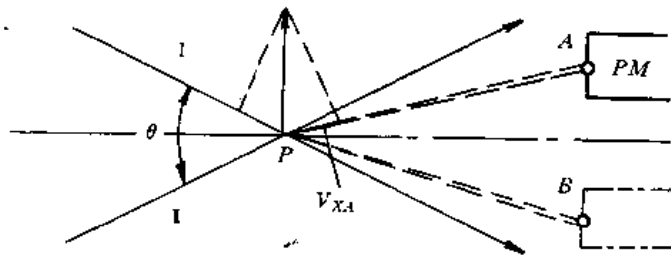


图8-29 测点和光电检测器的光场

前述把激光器发出的光分为两束,它们的偏振方向相同,相交于经 P 为中心的一个区域,相互干涉形成明暗相交的干涉条纹,亮条纹和暗条纹相互平行并与 x 轴平行。理论上可

证明,在干涉场中,相邻两亮条纹之间或暗条纹之间的距离 d 相等,其表达式为:

$$d = \frac{\lambda}{2\sin \frac{\theta}{2}}$$

若被测物体或粒子以 V_x 的速度经过两条纹的时间为 T ,则 $T = \frac{d}{V_x}$,此即多普勒频率对应周期,所以也有

$$f_d = \frac{1}{T} = \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2} |V_x|$$

或

$$V_x = \frac{\lambda}{2\sin \frac{\theta}{2}} f_d \quad (8-37)$$

在实际的测速系统中,可以用多种方法得到多普勒频率 f_d 。

三、加速度测量

加速度测量在振动、冲击以及结构动力学研究中有着非常广泛的应用。对振动、冲击等运动量的测量主要是采用加速度传感器(加速度计)。这是由于加速度计的频响范围宽(从零频到某一极高值),比位移或速度传感器更能方便地进行暂态(冲击)运动测量。机器中的破坏力常常是更加与加速度密切相关,而不是与速度或位移密切相关。由测得的加速度可通过电气积分获得位移和速度信号,这大大优于微分法。因此加速度的测量在诸多领域得到广泛应用和重视,其主要应用于振动测试,振动测试是机械工程测试的重要内容之一。本节将介绍振动、冲击测量及结构动力学分析的有关问题。

1. 振动测试内容和测试系统

机械工程振动测试主要有三个方面的内容

(1) 基本振动参数的测试

研究、分析物体的振动情况,要求对描述振动的基本时域信号进行测试,这类信号可以是振动的位移信号、振动速度信号、振动加速度信号。其中振动加速度信号更具有意义。有了这些信号,可以确定振动的强度、频率相位等其它导出参数。

测量加速度,其加速度计一般选为压电式与压阻式两类。

压电式加速度测量系统如图8-30所示。由压电式加速度计、电荷放大器、记录或显示仪器组成,若需进行数据处理,还需接计算机。

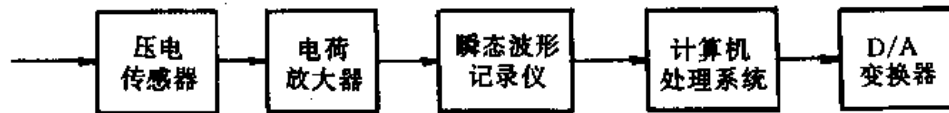


图8-30 压电式加速度测量系统

(2) 振动系统的结构动力学分析

对一个振动系统,需要通过试验方法确定其结构参数或模态参数,如确定其固有频率、阻尼及振型。实验时要对结构进行激振,分别测量输入和响应,需要使用双通道的测试系统及分析仪器。图8-31所示的测试系统为用压电式力传感器测量激励(输入),用压电式加速度计测量其响应(输出),然后用瞬态记录仪或磁带机进行记录,用计算机或动态分析仪计算结构的参数。

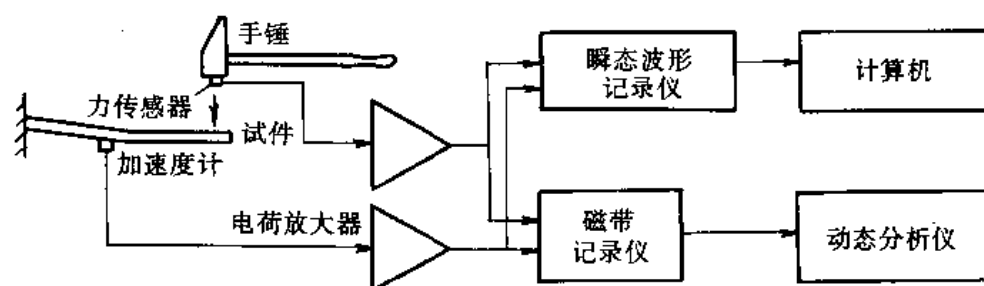


图8-31 结构动力学测试系统

机械系统动力学分析的另一内容是机械阻抗的测试,机械阻抗是机械结构在受激振动时,简谐激振力和结构上各点响应之比。机械结构的响应有位移、速度和加速度。所以机械阻抗定义有下列三种:位移阻抗=力/位移又称动刚度,其倒数称动柔度;速度阻抗=力/速度,又称机械阻抗,其倒数称机械导纳;加速度阻抗=力/加速度,又称表观质量,其倒数为惯性率。

(3) 振动信号的分析 and 处理

对振动所检测的信号进行进一步的分析和处理,从中提取人们所需要的有用信息,这也是振动测试任务之一。现举两例说明:

① 磨床振源分析

在金属切削机床中磨床是属精密加工机床,磨削过程中的振动往往使加工的精度下降和粗糙度增大。造成加工质量下降的主要原因是工件与轮间的相对振动,它可以用测量振动的传感器及后读测试系统进行振动信号的检测。所测出信号是由机内机外各种振动干扰源共同作用的结果。借助于频谱分析方法,将信号的频率结构分离出来,则就可以进一步找出不同频率的振源所在,根据影响主次,采取消除振动的措施。

② 金属结构动态响应的测定

机械工程中的各种机械构件如金属加工机床、汽车底盘、壳体、火箭发射架以至火箭本身等在振动条件下工作,其各部份的相对运动即所谓“振型”常需进行测定,以找出动态下的薄弱环节,加以改进。该类测试实验系统如图8-32所示。信号发生器给出某种激励信号,通过功率放大器推动激振器对机械构件激振,然后对构件的不同点进行振动信号检测,这样就可以绘制出在不同频率下构件的相对运动即振型,根据振型中的幅值最大点处做构件上的改进,就可获得最佳结构。这是解决金属结构设计制造中合理配置有效途径。图中的反馈控制部份主要是为了使在不同频率下具有相同的激振力幅值,以便进行比较。

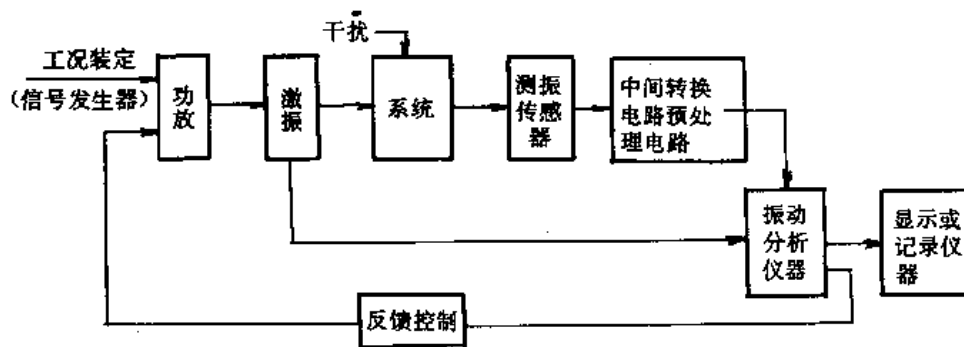


图8-32 振动测试系统组成框图

2. 振动参数的测试方法

为了测量在一定激励下机械系统的动态特性,可以在机械装置实际的工作状态下测量其动态响应,然后进行分析。但对大型设备和单次使用的装置很困难,或者代价很大。因此广泛使用的方法是利用各种激励设备,提供符合要求的可以人为进行控制的激振力,对所研究的系统作激振,然后测量各部位的振动响应,分析记录的信号,获得该系统的各种动参数。

(1) 激振类型和激振器

机械工程中常用的激振方法有如下几种:

① 正弦激振。为了求得被测装置在不同振动频率下的响应特性,采用激振器提供一个按简谐波变化的激振力,其频率变化的方法可分为点频法和正弦扫频法。点频法是控制激振器逐个改变频率,在每一种频下都使系统有足够的时间达到稳态,然后测量系统的响应。这种方法最精确,使用设备简单、便宜,但费时。为了迅速地测得在整个频率范围内的频率响应,常常采用正弦扫频的激振方法。在扫频过程中,如能保证足够慢的速度,使机械系统有足够的时间进入稳态,也可精确地测出其频率响应。

② 瞬态激振

瞬态激振中最常用的是冲击激振,如图8-33(a)所示。以带有力传感器的手锤敲击被测机械系统,然后测定各点的响应。敲击信号波形近似半正弦波,其频谱很宽,如图8-33(b)所示。这种试验方法速度快,设备简单,力脉冲波形的频谱取决于锤头的产生冲击时间。材料愈硬,力持续时间就越短,包含的高次谐波的频率就愈高。其主要缺点是力的大小不易控制,

用的一样,只不过要求振动台的使用频率要宽。振动台经常使用的就是电磁振动台,它的高频性能好,控制精度高,推力大,现代电动式振动台的推力可达十几吨。实际使用的振动台,为了使其波形或功率谱按一定要求进行随机振动,还有一套控制设备和相应的控制技术。这种激振方法在汽车工业、航天工业上得到了应用。

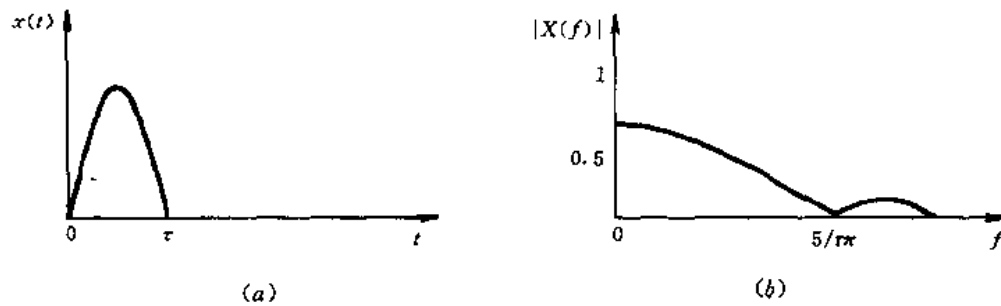


图8-33 半正弦脉冲及其率谱

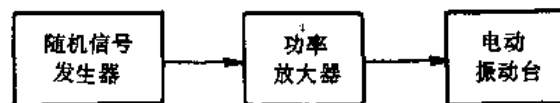


图8-34 最简单的随机振动设备

为了将所需的激振信号变为激振力施到被测机械系统上,就需要使用各种激振器,激振器应在频率范围、波形上满足要求,并能提高足够大幅值的交变力和稳定力。稳定力是在某些振动实验中需预加载荷而设。

激振器的类型很多,范围可以由压电晶体提供的微振动直到能提供几十吨激振力的大型振动台。在原理上常用的有电动式、电磁式和电液式等几种。

图8-35 所示为一电动式激振器原理结构图,其主要部份包括励磁线圈及磁极气隙中可动线圈、支承弹簧和杠杆。处于磁极气隙中可动线圈与顶杆固结在一起,并以弹簧支承在壳体上。励磁线圈以强电流馈入形成磁场,面对可动线圈输入经功率放大后的交变力,通过顶杆作用到被测构件上。由于激振器运动部件和被测物构件的质量、刚度、阻尼的影响,使顶杆作用于试件上的激振力与线圈所受所到的电动力不完全相同。若激振器运动部份的质量与被测构件的质量相比可以忽略,顶杆系统刚性很好,与试件的连接可靠、阻尼较小,则可近似

可以忽略不计。在进行较低频率的垂直激振时,使悬挂系统的固有频率低于激振频率的 $1/3$ 是有困难的,此时可将激振器固定在刚性基础上如图8-36(b)所示,并使安装的固有频率高于激振频率的三倍。分析表明,这样也可以忽略激振器运动部件的特性对试件振动的影响。在进行水平绝对激振时,若激振频率较高,可将激振器悬挂起来如图8-36(c)所示,形成一个“单摆”系统。当悬挂长度足够时,“单摆”系统的固有频率将很低,从而激振器的运动部件的特性对试件振动的影响很小。为了产生一定预加载荷,这时需要斜挂 θ 角并加上适当的配重。对低频激振,用刚性安装较为合适。

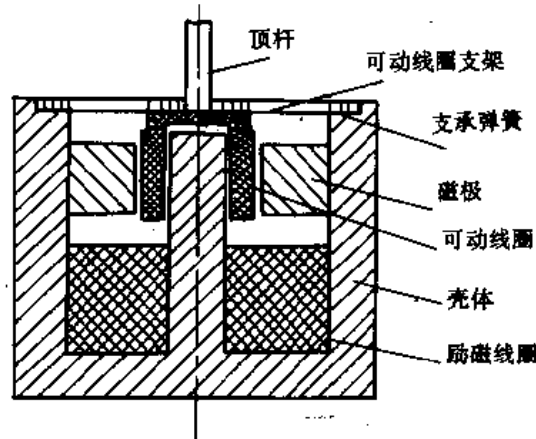


图8-35 电动式激振器

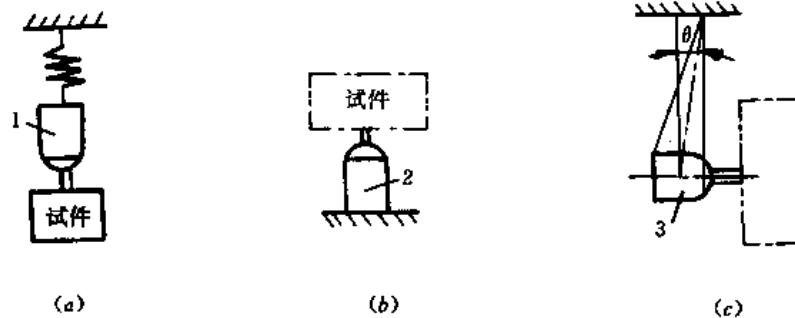


图8-36 绝对激振时激振器的安装
1、2、3—激振器

电磁式激振器如图8-37所示,它实质上是一个电磁铁,利用吸放磁力来进行激振,交流线圈产生交变激振力,直流线圈产生稳定静态力,作为预载荷施于被测体上,同时用以避免磁引力与激磁电流在零点附近工作时的非线性,以保证正确的激振波形。位移测量线圈是用来测量被测体的振动位移信号。电磁式激振器的最大优点是非接触激振,所以可以对运动构件进行激振。如高速旋转中的车床,为模拟其切削力所引起的振动就可采用此法。

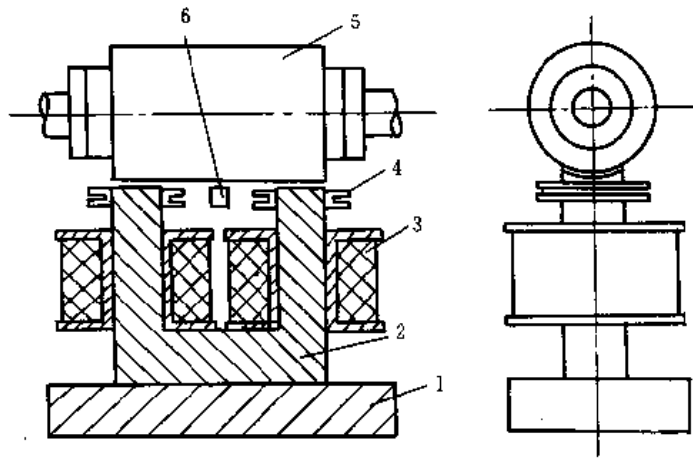


图8-37 电磁式激振器

1—底座;2—铁芯;3—励磁线圈;4—力检测线圈;5—衔铁;6—位移传感器

电液式激振器原理结构如图8-38所示。它用上述的电动激振器控制一个操作阀,推动功率阀使高压油按要求交替进行活塞两侧,推动活塞做往复运动,以顶杆作用于被测物体。这种激振器的激振力和行程都较前两种为大,但由于油液的压缩性和高速流动压力油的摩擦,使其高频特性差,只适于低频激振,一般在几百赫兹以下。激振力波形也差。由于该激振器采用液压系统,故结构较之其它类型激振器复杂,制造精度要求也高。

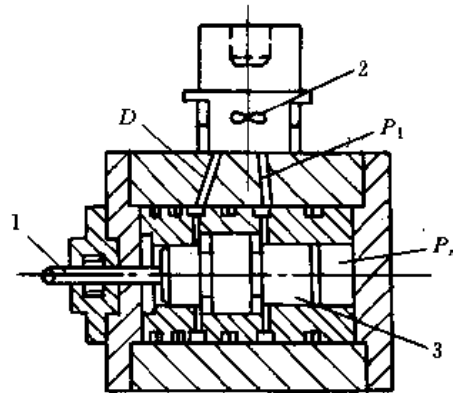


图8-38 电液式激振器原理图

(2) 机械阻抗的测量

机械阻抗的测量在工程中起着重要的作用。机械阻抗的测定的首要目的是用来确定结构各阶模态的固有频率、阻尼率和振型等参数。这些阻抗数据可以用来确定结构的动态特性,核对理论分析,建立结构及部件的数学模型作为修改设计和选择设计方案的依据。

① 测量机械阻抗的方法

我们曾经指出,在时域中,常系数线性系统的输出 $y(t)$ 是输入 $x(t)$ 和系统的脉冲响应函数 $h(t)$ 的卷积

$$y(t) = (x) * h(t) \quad (8-38)$$

在复频域中则有 $Y(s) = H(s)X(s)$ (8-39)

式中 $Y(s)$, $X(s)$ 分别为 $y(t)$ 和 $x(t)$ 的拉换变换, $H(s)$ 为该系统的传递函数,也是脉冲响应函数的拉氏变换。在机械阻抗研究中输入是激振力,输出是结构的振动响应。并且通常研究的是传递函数的特殊形式——频率响应 $H(j\omega)$ 。频率响应实际上是输出与输入的单边傅

利叶变换之比:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (8-40)$$

式(8-38)、式(8-40)成为测量系统机械阻抗的理论依据。此两式即表达了系统的输入、动态特性和输出三者之间的数量关系,也预示了测量机械阻抗可能采用的方法。

尽管这些测试方法有所不同,但是由于 $Y(j\omega)$ 、 $X(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$ 都是复变量,而每一个复数量都必须用两个量(模和相位)才能唯一的确定,因此这些量都必须同时精确地测定输入和输出的大小和相位。为此所使用的仪器应当满足幅频特性为常数,相频特性为零(即相移为零)这两个方面的要求。应当注意到测振仪(如惯性式测速计)和测力仪器并不能总能满足零相位的要求的。因而使用时应当注意由于相移可能造成的误差和错误。

测得的机械阻抗数据通常以三种形式表示出来:

- A. 幅频特性曲线和相频特性曲线;
- B. 实部(同相分量)频率曲线和虚部(正交分量)频率曲线;
- C. 幅相频率曲线(奈奎斯特图)。

②机械阻抗测试数据分析方法

一个机械结构可以看成多自由度振动系统,有多个固有频率,在阻抗试验中表现为有多个共振区,在幅频特性曲线中表现为有多个峰值。在奈奎斯特图中表现为多个圆环。当多自由度系统各点的受迫振动是同相位或反相位的正弦振动时,该系统和单自由度系统等效,将这种状态称为某一阶的模态。多自由度系统振动,同时有多阶模态存在。每一阶模态,都有它特定的固有频率、阻尼系数、刚度和质量,显然这些特定参数都是一种有条件的等效参数。多自由度系统的模态,还包含一个单自由度系统所没有的参数-振型。在每一阶模态中,系统上各点位移响应彼此之间保持着固有的确定关系,包括确定的大小比例关系和相对方向关系。这组关系就是该阶的振型。可用此系统各点的位置为横座标,以相应的位移响应向量为纵座标所形成的曲线图来表示振型。

通常结构的受迫振动是各阶模态振动的矢量和,即有方向和向位角的关系。若激振频率接近某阶模态的固有频率,该阶模态处于共振时,它的响应特别大,其它模态不处于共振,它们的响应相对地小。这样,既可使幅频特性曲线出现一个峰值,又可以在这个频率附近将多自由度系数近似地看成一个单自由度系统。

但是,也必须看到,在许多情况下,如相邻的两阶固有频率很接近,阻尼率较大,或激振点在某阶振型的节点附近等,这时,在某阶共振频率附近,非共振模态的响应仍然是不可忽视的。在这种情况下,系统上各点的位移响应彼此并不是同相或反相的(即彼此相位差不等于 0° 或 180°)。

即便采用频率等于某一阶固有频率的激振力在一点上激振,机械系统实际上也不会只出现单一的模态,而是各阶模态振动都将出现,各阶振动响应量彼此有差别,其固有频率远离激振频率的模态的响应相对地小一些。

下面介绍的这些方法只适用于小阻尼系统,并都是以直接点阻抗数据为依据和以单自由度系统受迫振动的有关公式为基础的。对于多自由度系统,这些关系只有在共振区才是相对正确的。

A. 总幅值法

这种方法又称为最大幅值法。这仅仅利用位移导纳数据中的幅频特性。根据式：

$$A(\omega) = \frac{1/K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad (8-41)$$

ω_n ——固有频率。

和式
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (8-42)$$

可得粘性阻尼系统位移导纳的幅特性曲线上某一个峰值对应的固有率 $\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$ ，其中 ω_r 为该峰值对应的位移共振频率。显然，在 ξ 甚小时，(例如 $\xi < 0.1$) $\omega_n = \omega_r$ 。如果采用速度导纳的幅频特性，则峰值对应的频率(速度共振频率)就等于固有频率。根据式

$$A(\omega_r) = \frac{1/K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (8-43)$$

当 $\xi < 0.1$ 时，位移共振起源地 ω_r 对应的幅频特性值 $A(\omega_r)$ 为：

$$A(\omega)_{\max} = A(\omega_r) = \frac{1}{2\xi K \sqrt{1 - \xi^2}} \approx \frac{1}{2\xi K} \quad (8-44)$$

若在 ω_n 附近， $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ ， $\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n$ ，且 $\Delta\omega$ 足够小，对于 ω 等于 ω_1 或 ω_2 ，则有

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \frac{(\omega_n + \omega_2)(\omega_n - \omega_1)}{\omega_n^2} = \frac{\left(2\omega_n - \frac{\Delta\omega}{2}\right) \frac{\Delta\omega}{2}}{\omega_n^2} \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \quad (8-45)$$

这样，由于 $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 1$ ，由(8-41)式可得：

$$A(\omega_{1,2}) \approx \frac{1}{k \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_n}\right)^2 + 4\xi^2}} \quad (8-46)$$

而且

$$\frac{A(\omega_{1,2})}{A(\omega_r)} \approx \frac{2\xi}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_n}\right)^2 + 4\xi^2}} \quad (8-47)$$

若取 $\frac{A(\omega_{1,2})}{A(\omega_r)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 则由上式可得：

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{2\omega_n} \quad (8-48)$$

值得注意，当 $A(\omega_{1,2}) = \frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}}$ 时，将 $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_n}$ 和式(8-48)代入式 $\phi(\omega)_{i-d} = -\arctg$

$\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ 可得 $\phi(\omega_{1,2})$ 等于 45° 或 135° 。

这样，在共振频率附近作一条距 ω 轴为 $\frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}}$ 的水平线 l (如图8-39所示)，并交幅频特性曲线于 a, b 两点。两点之间的频带宽度为 $\Delta\omega$ ，则 $\Delta\omega$ 除以 $2\omega_n$ 就是所求的粘性阻尼率 β 。

总幅值法的缺点：这种方法没有利用位移导纳的相频特性，因而无法扣除其他非共振模态振动影响。实际上，由于在许多情况下（例如两相邻固有频率比较接近，阻尼率比较大以及激振点落在共振模态的节点附近），非共振模态的响应在总的位移响应中所占的比重是相当大的，不能忽视。故这种方法只适用于相邻两固有频率分离较远的小阻尼系统。

此外，这种方法测量结果的可靠程度，在很大程度上取决于能否精确测得导纳的最大值。由于在共振频率附近，导纳随 ω 的变化是很急剧的，故很难精确测得导纳的最大值和最大值对应的频率(ω_r)，因此用这种办法很难测得较精确的固有频率和阻尼率。

B. 分量法

根据频率响应式

$$H(j\omega)_{t-d} = \frac{1}{-m\omega^2 + jc\omega + K} = \frac{1/K}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \quad (8-49)$$

可得位移导纳

$$\alpha = \frac{1}{(K - m\omega^2) + jc\omega} = \frac{(K - m\omega^2) - jc\omega}{(K - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \quad (8-50)$$

可以将它分解为两个分量，一个与激振力同向的分量（即实部） α_{Re} （图8-40所示）一个与激振力正交的分量（即虚部） α_{Im} （图8-41所示）。它们分别由下两式决定：

$$\alpha_{Re} = \frac{K - m\omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + C^2\omega^2} = \frac{1}{K} \frac{1 - \xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (8-51)$$

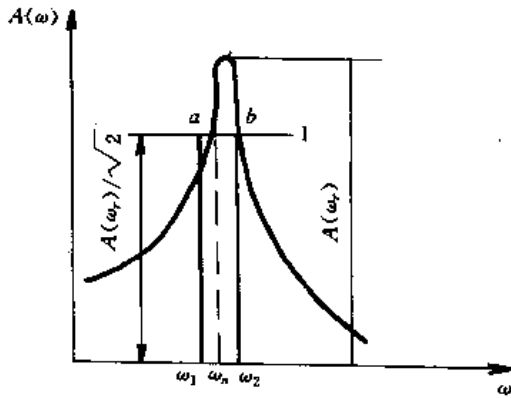


图8-39 阻尼率的求法

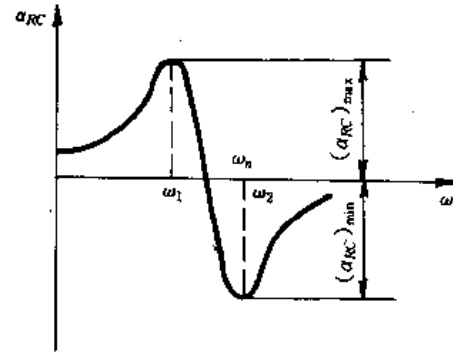


图8-40 同相分量-频率曲线

$$\alpha_{Im} = -\frac{C\omega}{(K - m\omega^2)^2 + C^2\omega^2} = -\frac{2}{K} \frac{\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (8-52)$$

由式(8-51)和式(8-52)可以得到：

第一，当 $\omega = \omega_n$ 时 $\alpha_{Re} = 0$ ；

第二，当 $\omega = \omega_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \pm 2\xi} \approx \omega_n (1 \pm \xi)$ 时， α_{Re} 获得极大值 $(\alpha_{Re})_{max}$ 和极小值 $(\alpha_{Re})_{min}$ ；

$$(\alpha_{Re})_{\max} = \frac{1}{4\xi(1-\xi)K} \quad (8-53)$$

$$(\alpha_{Re})_{\min} = \frac{1}{4\xi(1+\xi)K} \quad (8-54)$$

且
$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} \quad (8-55)$$

第三, 在 $\omega = \omega_n \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1-2\xi^2+2\sqrt{1-\xi^2+\xi^4}} \approx \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ 时, α_{Im} 获得极小值 $(\alpha_{Im})_{\min} = -\frac{1}{2\xi K}$ 。这个频率比位移共振频率 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$ 更接近于 ω_n ;

第四, 在 $\alpha_{Im} - \omega$ 曲线中, 若 ω_1, ω_2 所对应的正交分量为 $(\alpha_{Im})_{1,2} = \frac{1}{2}(\alpha_{Im})_{\min} = -\frac{1}{4\xi K}$, 则 ω_1, ω_2 满足式(8-55)。

综上所述, 可按下列关系来确定模态的固有频率和阻尼率。在同向分量曲线中, 与 $\alpha_{Im} = 0$ 对应的频率和正交分量曲线中与峰值对应的频率, 都可视为固有频率。可以采用式(8-55)来计算阻尼率, 其中 ω_1 和 ω_2 分别是同相分量曲线中极大值和极小值所对应的频率。在正交分量曲线中, ω_2 和 ω_1 则是与极小值之半的正交分量所对应的频率。

应当看到, 在一般情况下, 一个单自由度系统在共振频率附近, 位移导纳的主要部分是正交分量, 而同向分量接近于零。远离共振频率时, 正相反, 正交分量甚小。同相分量则是主要部分。因而和总幅值法比较, 根据正交分量来确定模态参数可以减小非共振模态的影响。此外, 在共振频率附近, 正交分量曲线也比较狭窄, 相对地易于分辨固有频率相近的两个模态。

C. 矢量法

这种方法是利用位移导纳的奈奎斯特图来分析的。在复平面 (u, v) 中, 令 $U = \alpha_{Re}, v = \alpha_{Im}$ 根据式(8-51)和式(8-52)有:

$$u^2 + (v + \frac{1}{2c\omega})^2 = \frac{1}{4c^2\omega^2} \quad (8-56)$$

当 $\omega \rightarrow \omega_n$ 时, 上式趋近一个圆心在 $(0, -\frac{1}{2c\omega_n})$, 半径为 $\frac{1}{2c\omega_n}$ 的圆。就是说, 在 ω_n 附近, 位移导纳矢量的轨迹是一个圆(如图8-42所示)。圆的直径 $\frac{1}{c\omega_n} = \frac{1}{2\xi K} = A(\omega_r)$ 。分析表明, 在固有频率处曲线弧长对频率的变化率 $ds/d\omega$ 最大。在单自由度系统中, 曲线与虚数轴的交点 M 对应着 $\omega = \omega_n$ 。显然与 OM 垂直的直径 ab 两端对应的 ω_1 和 ω_2 满足 $\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n}$, 因为 $A(\omega_1) = A(\omega_2) = \frac{OM}{\sqrt{2}} = \frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}}$ 。

对于多自由度系统, 位移导纳的奈奎斯特图是一条多环曲线。常常一个环代表一个模态。根据前面关于单自由度系统的基本结论可以在多环曲线中确定有关模态的参数(如图8-43所示), 其过程大致如下:

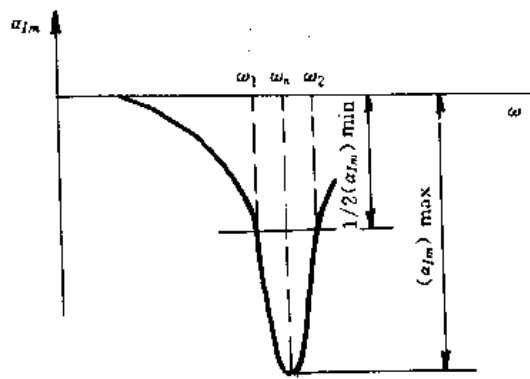


图8-41 正交分量频率曲线

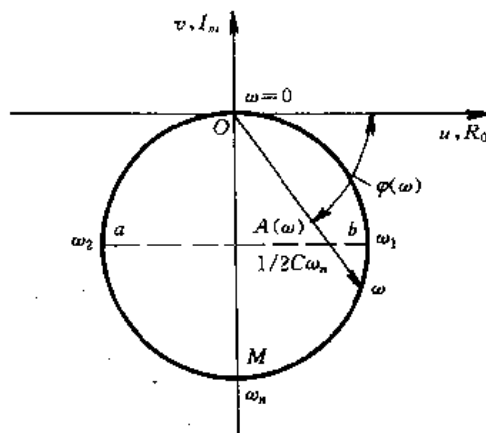


图8-42 单自由度系统的位移导纳

首先根据弧长对频率的变化率最大的条件确定固有频率 ω_n 。如果测试时， ω 按等差级数取值，那么在 ω_n 附近曲线上的点将是最疏的。如按此确定 ω_n 的位置有困难，可考虑取最大正交分量或最大矢量所对应的频率来作为固有频率 ω_n 。其次在 ω_n 附近作曲线的密切圆。此圆即该模态所对应的模态圆。其直径 $O'M$ 即为该模态的 $A(\omega)$ ，而 OO' 相当于其它非共振模态的响应。最后过圆心作 $O'M$ 的垂直线交曲线于 a, b 两点， a, b 两点对应的频率即为 ω_1 和 ω_2 。按式(8-55)可计算出 ξ 值。

如果在该环得不到 a, b 两点，可以在 M 左右取 ω_1' 和 ω_2' 两点(如图8-44所示)，并用下式来计算 ξ 值。

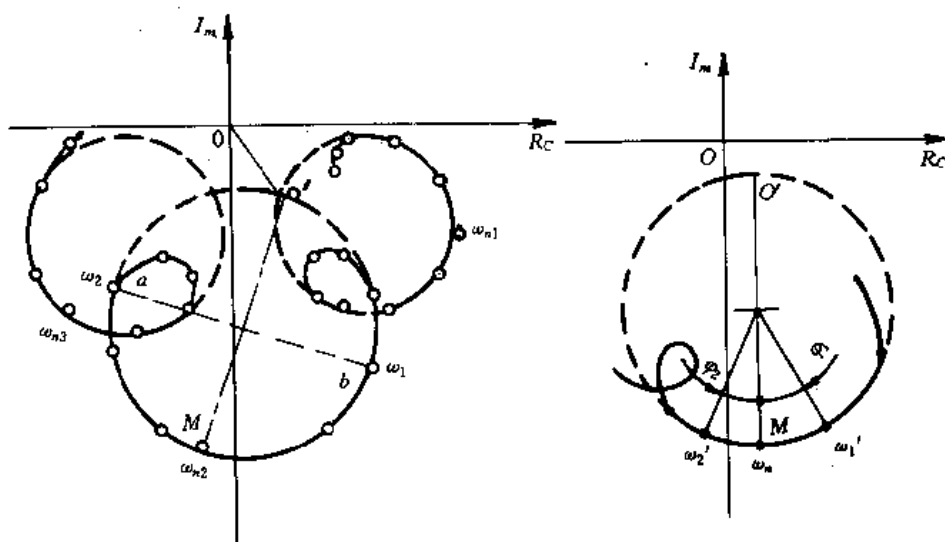


图8-43 多自由度系统的位移导纳

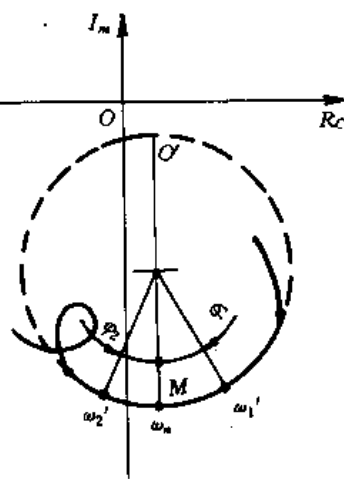


图 8-44

$$\xi = \frac{(\omega_2')^2 - (\omega_1')^2}{2\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\phi_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\phi_2}{2}} \quad (8-57)$$

矢量法的优点在于它可以排除非共振模态的响应。其次它利用共振频率附近一段频率范围的测量数据的总体(取密切圆)来确定有关的参数,因而消除了无法确切测得的最大值而带来的误差。这两种误差是前两种方法所固有的。

(3) 冲击加速度的测量

瞬态振动即冲击,其波形具有多种形式,一般没有准确的数学表达式,不能象讨论稳态振动那样,对测量冲击的测试系统的输出得到定量的结果,也就得不到象测量稳态振动那样的简单原则。对于瞬态振动或冲击测量方法的研究是这样进行的:对一些形状比较简单的波形,例如三角波、半正弦波、矩形波等,用定量的数学形式表示出来,计算出基础振动系统的输出或运动特性,再用这些结果近似地类推形状相似的瞬态振动的特性,用来指导实际测量。从大量的计算结果来看,还是有一些规律可以遵循,主要的有两个方面:一是冲击脉冲的持续时间与基础振动系统的无阻尼固有周期的比值;二是基础振动系统的阻尼比。当这两个特征值处于一定的量时,才能比较正确地测出输入波形。

冲击加速度测量是振动测试中一个很重要的领域,几乎都毫无例外地使用加速度计。通常将较短时间内(小于或等于数毫秒)的加速度上升和下降的冲击激励,称为冲击脉冲。对于三角波和半正弦波冲击脉冲,作用于基础振动系统的计算结果,如图8-45和图8-46所示。其

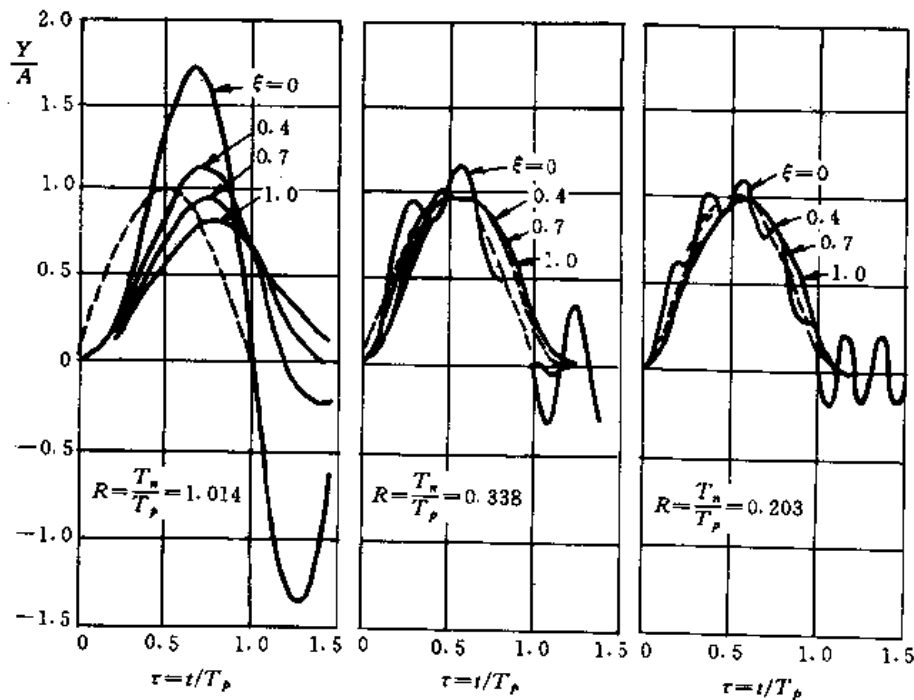


图8-45 三角波冲击脉冲时基础振动系统的响应

中, T_p 为冲击脉冲的持续时间, T_n 为基础振动系统的无阻尼固有周期, $A(t)_{\max}$ 为冲击脉冲的峰值, $R = T_n/T_p$ 为时间比, $\tau = t/T_p$, $\xi = -kx/mA(t)_{\max}$ 。

经过对它们的一系列计算结果可以得到一般趋势:

① 当时间比 $R < 1$, 即 $T_p > T_n$ 时, 随着时间比的减小, 可以正确地传递原波形。例如, $R < 0.338$, $\xi = 0.4 \sim 0.7$ 时, 能精确记录的波形的峰值, 其误差在 5% 以内。

② 当时间比 R 定值时, 基础振动系统的阻尼与 ξ 越大, 所测量和记录的波形相对于原波形的时间滞后也越大。

③ 当阻尼很小时 ($\xi = 0$), 明显地产生振荡性自由振动。这种自由振动剧烈的程度随 R 的减小而减小。

以上主要考察三角波和半正弦波的冲击脉冲, 对于一般的冲击也能得出几乎同样的结论; 当时间比 R 远小于 1 时, 基本上可以说在实用上就能足够精确地测量到振动系统的冲击脉冲, 作为经验值, 推荐 $R \leq 0.1$ 。此时, 对于加速度计, 往往可忽略阻尼, 自由振荡也比较小。为了去掉高频振动而使用滤波器时, 要注意低通滤波器的相位特性, 防止波形畸变。

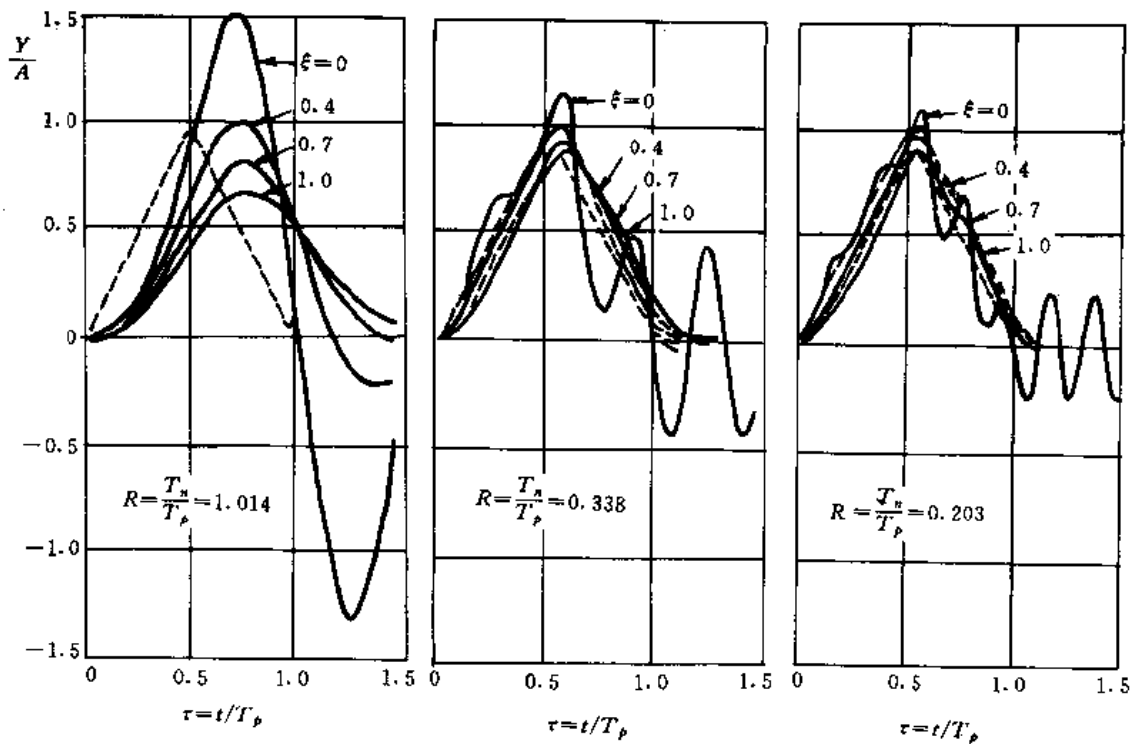


图8-46 半正弦波冲击脉冲时基础振动系统的响应

第四节 温度的测量

在机械工程制造业中, 对温度的研究及测试, 对提高产品质量、生产效率, 保证机器正常运转以及实现自动控制, 都具有重要意义。

一、温度和测温方法的分类

1. 温度的概念

温度是国际计量制(International Measuring System)中四个基本量之一。这四个基本量是长度、时间、质量和温度。其它各种量的基准量基本上都由这四个基本量导出。从本质上讲,温度不同于长度、时间和质量,温度是一种内函量(intensive quantity),而其它三个量则为外延量(extensive quantity)。换句话说,若把长度相同的两个物体“组合”在一起,所得总长度将是两物体原来长度的两倍,然而,把温度相同的两物体“组合”在一起,所得温度与原来的温度将完全相同。质量、长度或时间的基准单位可以无限地细分或倍增以得到这些量的任意值,但温度却不能。温度是一个强度量,它的定性解释是:表征物体冷热程度的物理量。更严格地、科学地定义还必须引入热平衡的概念。

若有两个热力学系统,处于各自不同的状态,当这两个系统相互接触时,则会产生热交换。经一段时间后,两系统达到稳态不再变化,即达到一共同平衡态。由于这种平衡是两系统在热交换条件下达到的,所以称为热平衡态。测温学的基本定律——热力学第零定律(Zeroth Law of Thermodynamics)可这样解释,“如果两个系统中每一个系统都与第三个系统处于热平衡,则它们彼此也定处于热平衡,则任意两个系统必定与另一系统处于热平衡。”在描述各平衡系统热状态的热力学参数中,有一个参量具有相同值,这就是温度。因此,热力学第零定律也可以用另一种方式表达,即“若处于热平衡的两个系统,各个都与第三个处于相同的温度,则这两个系统具有相同的温度。”

2. 温标的基本概念

用来衡量物体温度的标尺,称为温标。建立一个温标包括两个方面:①采用什么测温物质;②如何分度。目前常用的有摄氏温标、华氏温标、热力学温标和国际实用温标。

(1)摄氏温标(°C,摄氏度)

以水银热胀冷缩的特性为基础。水银的体积随温度的升降成线性变化。其分度方法中以水的冰点定为零度,沸点定为100度,两点之间的温度均分为100分格,每格为1度(记为1°C)。

(2)华氏温标(F,华氏度)

华氏温标的分度方法是在标准大气压下,将冰的融点定为32F,水的沸点定为212F,两固定点间划分180等分,每一等分为一华氏度(F)。它与摄氏温标的关系式为:

$$m = 1.8n + 32 \quad (\text{F}) \quad (8-58)$$

$$n = 5(m - 32)/9 \quad (\text{°C}) \quad (8-59)$$

式中: m 和 n 分别表示华氏和摄氏温度值。

摄氏温标和华氏温度都是经验温标,所谓经验温标是指温度与被测变量的关系式是根据人们的经验决定的,其缺陷是示值与所选的测温介质有关。

(3) 热力学温标(K, 开尔文)

热力学温标是以热力学第二定律为基础的温标。由卡诺定理的推论可知,工作于两个恒定热源之间的一切可逆卡诺热机的效率 η ,与工作物质无关,只与两个热源的温度有关,这样定义的温标称为热力学温标或开尔文温标。如一个可逆热机在温度 θ_1 和 θ_2 之间作卡诺循环,在高温 θ_1 处吸热为 Q_1 ,在低温 θ_2 处放热为 Q_2 , Q_1 与 Q_2 之比正比于每个温度的函数:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\phi(\theta_1)}{\phi(\theta_2)} \quad (8-60)$$

式中: $\phi(\theta_1)$ 是 θ_1 的函数, $\phi(\theta_2)$ 是 θ_2 的函数。1848年开尔文提出,用此公式可定义任何两个温度之比。即采取最简单的函数形式来定义温度,此温度称为热力学温度,其关系式为:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (8-61)$$

热力学温标与经验温标本质区别是,热力学温度比由可逆热机的性质决定,与工作物质无关。只有温度比还不能构成温度的定量表示。因此,热力学温度必须有一个固定点,并赋予一个具体的数值。世界各国均选定水的三相点(固相、液相、气相三相平衡点)为273.16,1960年国际计量规定温度单位是开尔文(简写为K),开尔文定义为三相点热力学温度为1/273.16并定义为热力学温标的唯一固定点。

(4) 国际实用温标

精确测量热力学温度是非常困难的,测定装置十分复杂,耗资大,且操作程序相当繁琐。因而,国际上不断探索一种实用温标,要求它易于高准确度复现,同时又尽可能接近热力学温度值。

1990年国际温标(ITS-90)对温度单位的表达如下:热力学温度(符号为 T)是基本的物理量,其单位为开尔文(符号K),并规定以气体温度计为基准仪器,定义水的三相点的热力学温度的1/273.16。

由于以前的温标定义中,使用了与273.15K(冰点)的差值来表示温度,因此现在仍保留这种方法。用这种方法表示的热力学温度为摄氏温度(符号为 t),定义为:

$$t = T - 273.15 \quad (8-62)$$

按照国际实用温度规定,温度可用绝对热力学温度 T (单位开尔文简写K)表示,也可用摄氏温度 t (单位摄氏度简写 $^{\circ}\text{C}$)表示,两者关系为:

$$T = t + 273.15 \quad (8-63)$$

3. 测温方法分类

测温方法可分两类;接触法与非接触法。接触法是基于热平衡原理,测温敏感元件必须与被测介质接触,使两者处于同一热平衡状态,具有同一温度,例如水银温度计,热电偶温度计等就属此类测温法。非接触式测温法是利用物质的热辐射原理,测温敏感元件不需与被测介质接触,如辐射温度计、红外测温计等。

二、接触式测温方法

接触式测温仪中,根据测温原理可分为热膨胀式温度计、热电偶温度计、热电阻温度计等。

1. 热膨胀式温度计

利用液体或固体热膨胀冷缩性质而制成的温度计称为热膨胀式温度计。常用的有水银、双金属、压力等类型温度计。

双金属温度计是利用金属固体元件的膨胀特性而制作的一种温度计,其测温敏感元件是由两种热膨胀系统不同的金属箔片组合而成(如黄铜 $\alpha=22.8 \times 10^{-6}$,镍铜 $\alpha=1 \sim 2 \times 10^{-6}$)。一端固定,另一端自由,当温度变化时,由于两者伸缩不一致而发生弯曲,自由端就产生位移。利用这一原理可制成不同形式的温度计,如图8-47所示。

双金属温度计结构紧凑,牢固可靠,它可用于温度测量,但却更广泛地用在温度控制系统(主要为开关式的)中,以兼起感温元件和控温元件。如图8-48所示装置,当温度达到某一极限值时,双金属感温元件制作的自动调节敏感元件起作用,电路接通发出信号。

压力式温度计是利用液体或蒸汽压力使之工作的。感温筒置于被测介质中,随温度升高,筒内的酒精或水银等液体受热膨胀,通过毛细管使波登管端部立生角位移,指示温度值(如图8-49所示)。

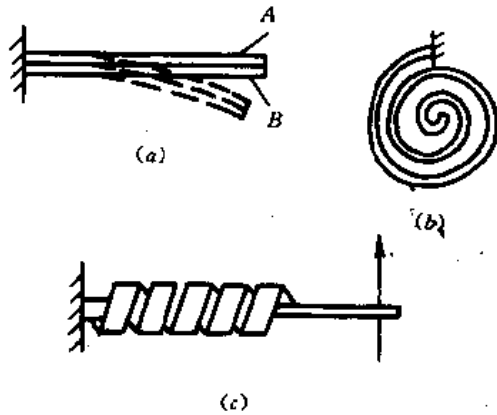


图8-47 双金属温度计

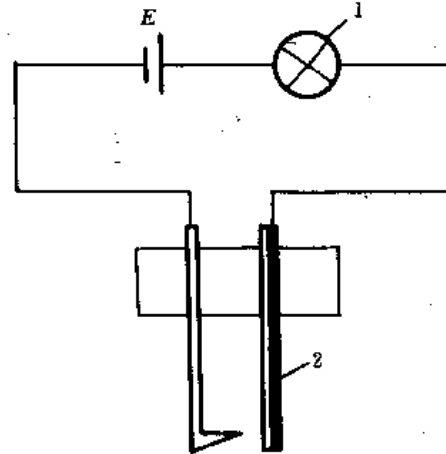


图8-48 由双金属感温元件构成的温控装置

1—指示灯;2—双金属感应元件

2. 电阻温度计

电阻温度计的工作原理是利用导线或半导体电阻值随温度变化的性质,并通过与显示仪表相配而测定温度。构成电阻温度计的测温元件,有金属丝电阻及热敏电阻。在工业上广

泛应用电阻温度计来测量-200~500℃之间的温度。尤其在低温测量方面,电阻温度计使用很多,在某些特殊情况下,电阻温度计低温测量可达1~3K。

(1) 金属丝热电阻

由物理学可知,一般金属导体的电阻率随温度上升而增加,在一定温度范围内电阻与温度的关系为:

$$R_t = R_0[1 + \alpha(t - t_0)] = R_0(1 + \alpha\Delta t) \quad (8-64)$$

式中: R_t ——温度为 t 时的电阻;

R_0 ——温度为 t_0 时的电阻;

α ——电阻温度系数。

常用测温电阻丝材料有铂、镍、铜等。图8-50表示铂与镍电阻随温度升高而变化的关系。从图中可知,铂的线性最好,测量范围很宽。铂电阻温度计被用作-259.332℃~630.74℃范围中复现国际实用温标的基准器。铜及镍一般用于低温范围内,铜0~180℃,镍50~300℃。

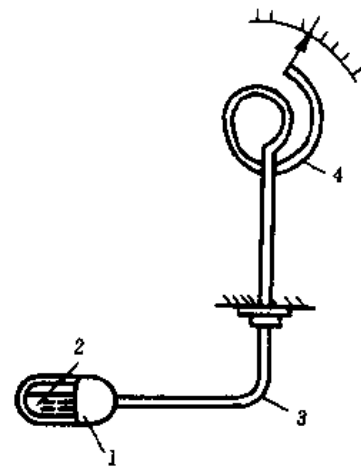


图8-49 压力式温度计

1—感温筒;2—酒精或水银;
3—毛细管;4—波登管

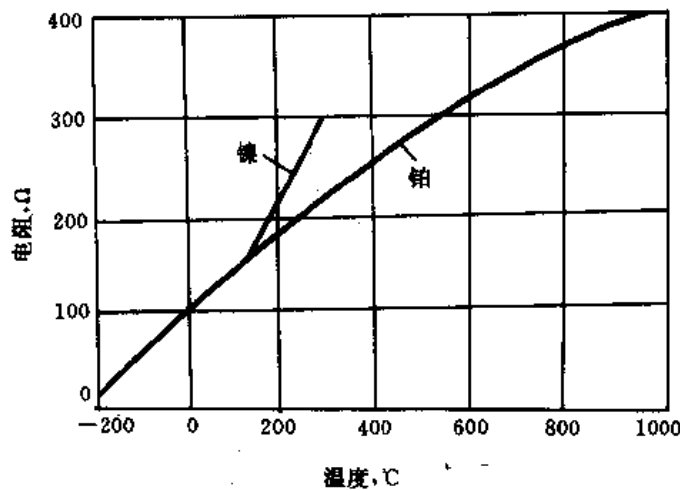


图8-50 镍铂温度曲线

由温度引起的电阻丝电阻的变化,一般采用电桥转换为电压的变化,并由动圈式仪表(毫伏计等)直接测量或经放大器输出,实行自动测量或记录。图8-51(a)是一种电阻丝测温传感器的结构形式。铂丝绕于玻璃轴上,置于陶瓷或金属制成的保护管内,引出导线有二线式、三线式等。

图8-51(b)(c)是电桥线路接法,当采用二线式接法时,引出导线 r_1 、 r_2 被接于电桥的一臂上,当由于环境温度或通过电流引起导线温度变化时,将产生附加电阻,引起测量误差。采用三线式接法时,具有相同温度特性的导线 r_1 、 r_2 接于相邻两桥臂上,此时由于附加电阻引起

的电桥输出将自行补偿。

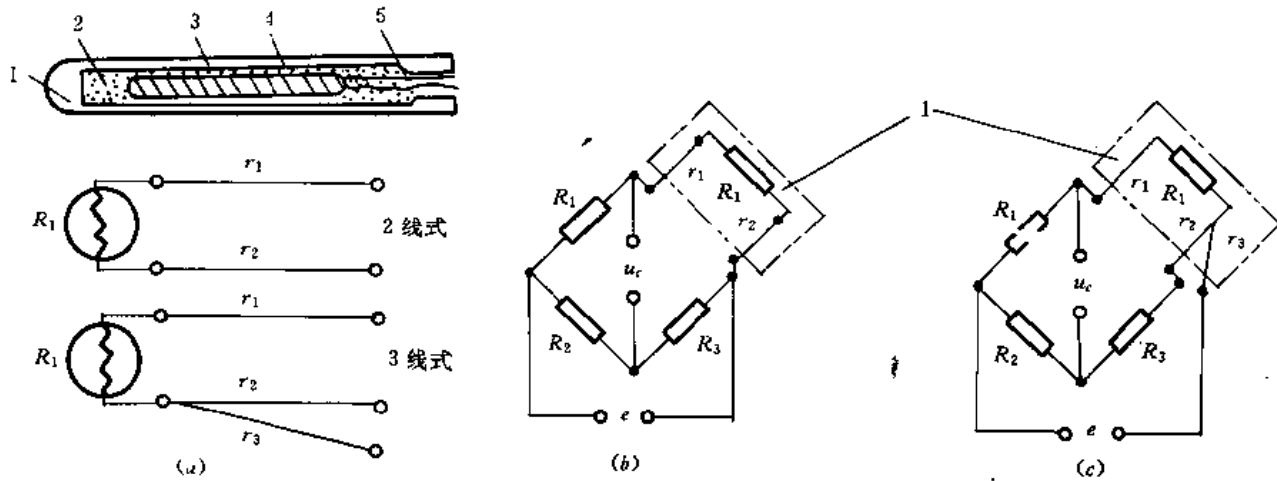


图8-51 电阻丝测温传感器

a——电阻丝测温传感器结构；b——二线式接法；c——三线式接法

(2) 热敏电阻

热敏电阻是金属氧化物(NiO, MnO₂, CuO, TiO₂等)的粉末按一定比例混合烧结而成的半导体。与金属丝电阻一样,其电阻值随温度而变化。但热敏电阻具有负的温度系数,即随温度上升阻值下降。

根据半导体理论,热敏电阻在温度 T 时的电阻

$$R = R_0 e^{B(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})} \quad (8-65)$$

式中: R_0 ——温度 T_0 时的电阻值;

B ——常数,由材质决定,一般在2000~4500K范围内,通常取 B 值约为3400K。由式(8-65)可得电阻温度系数

$$\alpha = \frac{dR/dT}{R} = -\frac{B}{T^2} \quad (8-66)$$

如 $B=3400\text{K}$, $T=273.15+20=293.15\text{K}$, 则 $\alpha=-3.96 \times 10^{-2}$,其绝对值相当于铂电阻的10倍。

图8-52是由热敏电阻构成的半导体测温计的工作原理。热敏电阻 R_t 和三个固定电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 组成电桥。 R_4 为校准电桥输出的固定电阻,电位器 R_5 是用来调节电桥的输入电压。当开关 K 处于位置1时,调节电位器 R_5 使电表指针指到满刻度,即表示电桥处于正确的工作状态。当开关处于位置2时,电阻 R_4 被 R_t 所代替,其阻值 $R_t \neq R_4$,两者差值为温度的函数。此时电桥输出发生了变化,电表指示出相应读数,即所要测量的温度。

3. 热电偶温度计

(1) 热电偶测温的工作原理

热电偶测温是基于两种不同材料的热电效应。如图8-53所示,由两种不同导体A和B两端相连组成闭合回路,如果两端温度 T 和 T_0 不相等时,回路内就有电流流过,即回路内出现了电动势,该电动势称为热电势。组成回路的A、B两导体称为热电极,由A、B导体组成的回路整体称为热电偶。

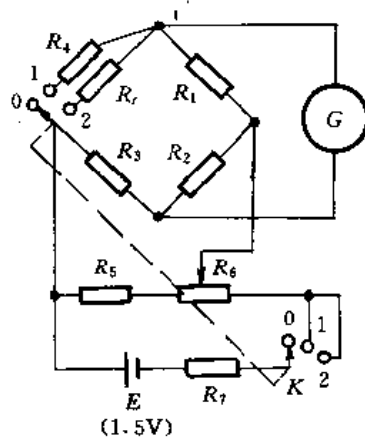


图8-52 半导体测温计工作原理

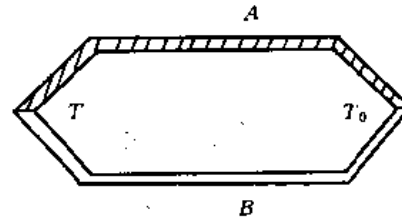


图8-53 两种导体构成的热电偶

热电偶产生的热电势是由两种导体的接触电势和单一导体的温差电势所组成。

(1) 接触电势

导体中存在大量的自由电子,材料不同则自由电子的密度不同。当两种导体接触时,自由电子便从密度大的导体向密度小的导体扩散,其结果是电子密度大的导体因失去电子而带正电,电子密度小的导体因收到扩散来的多余电子而带负电,于是在接触处便形成了电位势,该电位差称为接触电势。该电势将阻碍电子进一步扩散。

设导体A、B的自由电子密度分别为 n_A 、 n_B ,并且 n_A 大于 n_B ,两导体两端接触处的温度分别为 T 和 T_0 。则回路的总接触电势为:

$$e_{AB}(T) - e_{AB}(T_0) = \frac{KT}{e} \ln \frac{n_A}{n_B} - \frac{KT_0}{e} \ln \frac{n_A}{n_B} = \frac{K}{e} (T - T_0) \ln \frac{n_A}{n_B} \quad (8-67)$$

式中: K ——波尔曼常数;

e ——电子电量。

如图8-54所示。

由式(8-67)可知,若两接触点温度相等,即 $T=T_0$,尽管接点处都存在接触电势,但回路中总接触电势却等于零。

(2) 温差电势

一根均质导体,当两端温度不同时,由于高温端的电子能量比低温端的电子能量大,因而从高温端跑到低温端的电子数比从低温端跑到高温端的电子数要多,其结果使高温端因失去电子而带正电,低温端因得到电子而带负电。因此,在导体两端便形成电位差。该电

位差称为温差电势。该温差电势将阻止电子从高温端跑向低温端,达到动态平衡。

当导体A、B 两端温度分别为 T 和 T_0 ,且 T 大于 T_0 。回路的温差电热等于导体A、B 温差电势的代数和(如图8-55 所示)。即

$$e_A(T, T_0) - e_B(T, T_0) = \int_{T_0}^T (\sigma_A - \sigma_B) dT \quad (8-68)$$

式中: σ_A, σ_B ——汤姆逊系数,表示温差为 1°C 时所产生的电势值。 σ 的大小与材料性质和导体两端的温差有关。

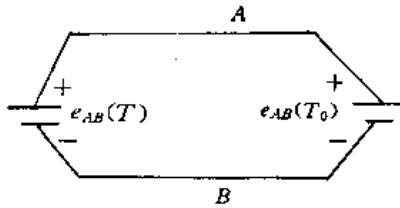


图8-54 接触电势

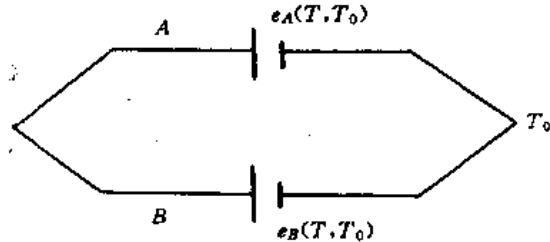


图8-55 温差电路

式(8-68)表明,热电偶回路的温差电势只与导体A、B 材料性质和两接触点的温度有关。若两接触点温度相等,温差电势等于零。

根据上述分析,由导体A、B 组成的热电偶回路,当两端接点温度 T 大于 T_0 时,整个回路的总的热电势(如图8-56 所示)为:

$$\begin{aligned} E_{AB}(T, T_0) &= e_{AB}(T) - e_{AB}(T_0) - \int_{T_0}^T \sigma_A dT + \int_{T_0}^T \sigma_B dT \\ &= e_{AB}(T) - e_{AB}(T_0) - \int_{T_0}^T (\sigma_A - \sigma_B) dT \end{aligned} \quad (8-69)$$

由上式可知:若构成热电偶的电极材料相同,则回路总电势为零。若热电偶的两结点温度相同,即 T 等于 T_0 。则回路总电热为零。由此可得出热电偶要能产生热电势必须具备两个条件:

- 第一,热电偶必须用两种不同的热电极构成;
- 第二,热电偶的两接点必须具有不同的温度。

由式(8-69)变换为:

$$\begin{aligned} E_{AB}(T, T_0) &= [e_{AB}(T) - \int_{T_0}^T (\sigma_A - \sigma_B) dT] - [e_{AB}(T_0) - \int_{T_0}^{T_0} (\sigma_A - \sigma_B) dT] \\ &= E_{AB}(T) - E_{AB}(T_0) \end{aligned} \quad (8-70)$$

若热电偶两极的材料选定,则式(8-70)可写成:

$$E_{AB}(T, T_0) = f_{AB}(T) - f_{AB}(T_0) \quad (8-71)$$

若使热电偶一个接点温度 T_0 保持不变,即 $f_{AB}(T_0) = C$,则式(8-71)可写成:

$$E_{AB}(T, T_0) = f_{AB}(T) - C \quad (8-72)$$

式(8-72)表明,热电偶产生的热电势 $E_{AB}(T, T_0)$ 只与该热电偶的温度 T 有关,即热电势与温度 T 成单值的函数关系。顺此,通过测量热电势的大小,就可求得被测温度 T 的数值。

通常,把热电偶的 T_0 端称为热电偶的自由端或称冷端和参考端,而把 T 端称为热电偶的工作端,或称热端和测量端。如果在自由端电流是从导体 A 流向导体 B ,则称导体 A 为热电偶的正极,而导体 B 称为热电偶的负极。

构成热电偶的材料应具有下列基本要求:

第一,在所测范围内应具有一定的灵敏度和直线性;

第二,熔点足够高,物理化学性能稳定;

第三,有良好的导电性和抗氧化性能,电阻温度系数小等。

一般工业用热电偶材料列于表8-1中。

表8-1 常用的几种热电偶

热电偶	代号	使用温度 ($^{\circ}\text{C}$)	当 $T=0^{\circ}\text{C}$ $T=100^{\circ}\text{C}$ 时热电势(mV)
铂铑(Pt-90%Rh-10%)-铂	WRLB	0~1600	0.643
镍铬(Ni-90%Cr-10%)-镍铝(Ni-95%Al5%)	WREL	0~1200	4.10
镍铬(Ni-90%Cr-10%)-铸铜(Cu-56%Ni44%)	WREA	-50~800	5.95
铜(Cu)-康铜(Cu-60%Ni-40%)		-200~600	4.25
铁(Fe)-康铜(Cu-60%Ni-40%)		-200~800	5.30

常用热电偶的热电特性如图8-57所示。

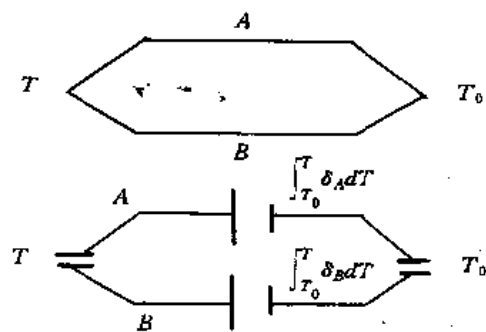


图8-56 热电偶回路各热电势

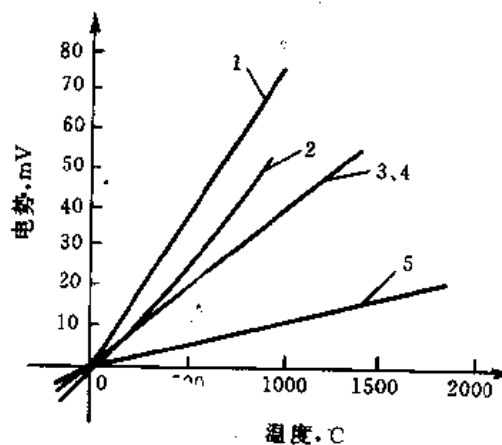


图8-57 常用热电偶的热电特性

1—镍铜-铸铜;2—铁-康铜;

3—铜-康铜;4—镍铬-镍;5—铂铑-铂

由图8-57可见,镍铬-铸铜、铁-康铜在低温区线性好,灵敏度高;铂铑-铂灵敏度低,但有

较宽的线性范围。

一般工业用热电偶还应具有耐压、防腐蚀等性质。图8-58介绍一种带有保护管的热电偶结构。

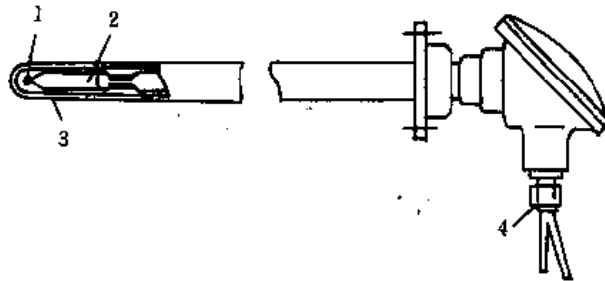


图8-58 一般工业用热电偶结构

1—测温接点；2—磁绝缘管；3—保护管；4—导线引出口

② 热电势测量方法

热电偶在测量过程中吸收热能转换成电能。

测量热电势可用动圈式仪表，电位差计。

采用动圈式测量热电势时，由于线路中电阻的影响，如图8-59所示，将使仪表指示值 e_i 与实际热电势 E_i 不一致，其关系式：

$$E_i = e_i(R_i + R_0)/R_i \quad (8-73)$$

式中： R_i ——仪表线圈电阻；

R_0 ——外部电阻。

$$R_0 = R_a + R_L + R_b/2 + R_i/2 \quad (8-74)$$

式中： R_a ——仪表内可调电阻；

R_L ——连接导线电阻；

R_b ——热电偶20℃时的电阻；

R_i ——热电偶使用时的电阻。

上述表明，当外接线路电阻较大时，测量误差不容忽视。

图8-60为电位差计测量热电势工作原理图。将开关 K_1 接通，调整电阻 R_0 ，使检流计 G_2 指零，此时获得恒定工作电流 $I = E_H/R_H$ （即 a, c 两点间电压 IR_H 与标准电压 E_H 平衡）。断开 K_1 ，接通 K_2 ，调节电位器 R_p ，使检流计 G_1 指零，此时测量电路电流为零。当温度变化时，将有电流通过 G_1 ，指针偏转，调节 R_p 使 G_1 重新指零。由电位器 R_p 的刻度读出所测热电势。

用电位差计测量热电势时，是采用标准电平来平衡热电势。标准电压与热电势相反。回路中没有电流，因此线路电阻对测量结果无影响。

(3) 冷端补偿

用热电偶测温时，热电势大小决定于冷热端温度之差，如果冷端温度固定不变，则决定于热端温度。但在通常的工程测量中，冷端温度大都处在室温或一个波动的温度区，这将会引起测量误差。这时要测出实际温度，就必须采取修正或补偿措施来消除冷端温度变化所产生的影响。下面介绍几种通常采用的方法。

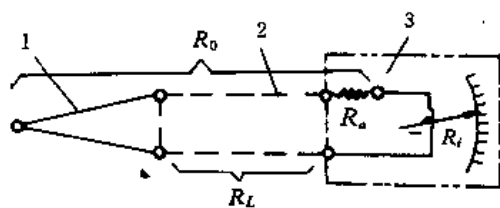


图8-59 动圈式仪表测量热电势
1—热电偶; 2—引出导线; 3—动圈式仪表

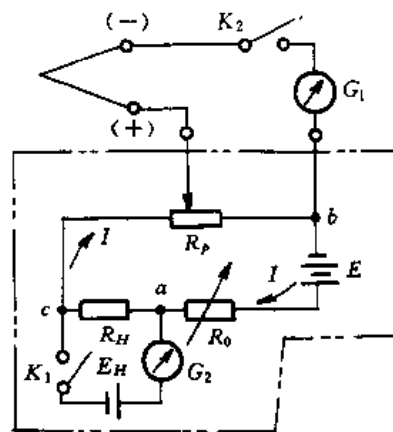


图8-60 用电位差计测量热电势原理

第一,冰点法。

这种方法是把热电偶的冷端直接放在恒温为 0°C 的恒温容器中,不需要再进行冷端温度补偿或修正。为了获得 0°C 的温度条件,需专门设置冰点容器,图8-61所示是一个冰点容器。一般是使纯净水和冰混合,在一个大气压力下冰水共存时,它的温度即为 0°C 。

若冷端不能维持 0°C 时,则应置于恒温室,这时需对测量结果进行修正。

图8-62是冷端温度为 0°C 时的定标曲线。设冷端温度 T_n 时,测得的热电势为 $E(t, t_n)$ 。若

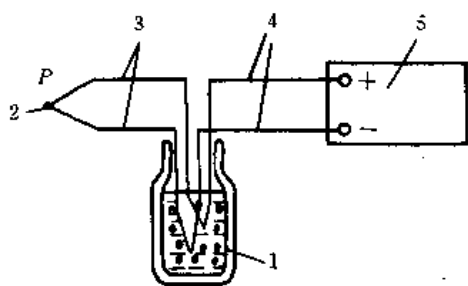


图8-61 冰点容器
1—冰水; 2—测温接点; 3—热电偶;
4—铜线; 5—显示仪表

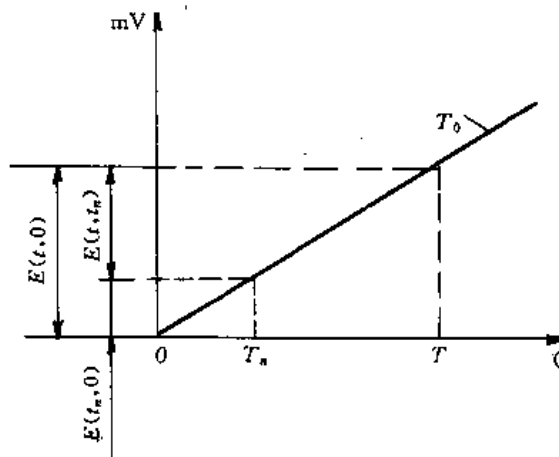


图8-62 端温度 T_n 的修正计算
 T_0 —冷端 0°C 时的标定曲线

用此定标曲线求出实际温度值,可作如下计算:

由图可知,
$$E(t, 0) = E(t, t_n) + E(t_n, 0) \quad (8-75)$$

式中: $E(t, 0)$ ——冷端 0°C 热端 $t^\circ\text{C}$ 时的热电势;

$E(t_n, 0)$ ——冷端 0°C 热端 $t_n^\circ\text{C}$ 的标定曲线。

由 $E(t, t_n) + E(t_n, 0)$ 来查表求得实际温度 t 值。

第二,冷端补偿法。

当测温点与温度稳定的冷端距离较长时,为了即能保持冷端温度的稳定,又节省贵重的热电偶导线,往往采用价廉的导线来代替部分热电偶导线如图8-63所示,这种导线为补偿导线。在室温范围内,补偿导线的热电性质与热电偶导线相同或接近。

补偿导线的作用只是把原热电参考端移至远离热源温度易于恒定的地方,如果新的参考端不是 0°C ,仍须进行修正。

另一种冷端补偿法是电桥补偿法(如图8-64所示)。将热电偶冷端与电桥置于同一环境中,电阻 R_H 是由温度系数较大的镍丝制成,而其余电阻则由温度系数很小的锰铜丝制成。在某一温度下,调整电桥平衡。当冷端温度变化时, R_H 随温度改变,破坏了电桥平衡,电桥输出为 ΔE 。用 ΔE 来补偿由于冷端温度改变而产生的热电势变化量。

(4)定标

热电偶定标的目的,是核对标准热电偶热电势——温度关系是否符合标准,或是确定非标准热电偶的热电势——温度定标曲线,也可以通过定标消除测量系统的系统误差。

定标方法有定点法与比较法。前者利用纯元素的沸点或凝固点作为温度标准,后者将高一级的标准热电偶与被定标热电偶放在同一温度的介质中,并以标准热电偶的温度计的读数为温度标准。一般多用比较法。

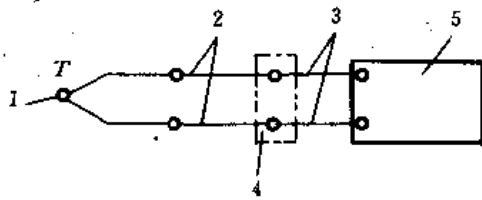


图8-63 补偿导线性

- 1—测温接点;2—补偿导线;3—铜线
- 4—冷端;5—测温器

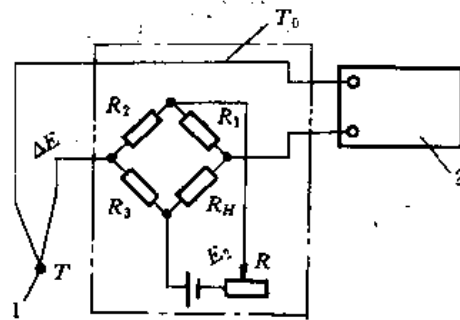


图8-64 补偿电桥法

- 1—测温接点
- 2—测温器

三、非接触式测温方法

非接触式测温法以物体的热辐射原理为依据,因此又称为热辐射测温法。这种方法的测温传感器不需与被测物体接触,因此在测量过程中不会扰乱被测对象的温度分布。热辐射测温方法在高温测量中早已获得广泛应用。近年红外测温技术的发展,使这种方法在低温测量

中得到应用,辐射测温下限可低于100℃。

现代辐射测温仪器中采用量子探测器后,其响应速度可达毫秒级或微秒级,所以可作动态测量。某些仪器还可对物体温度场进行快速扫描,绘出详细的热图象或温度分布状况。

1. 辐射温度计

当物体受热后将有一部份热能转变为辐射能,辐射能以电磁波的形式向四周辐射,物体的温度越高,向周围空间辐射的能量就越多。辐射能包括的波长范围极广,从 γ 射线直到电磁波,但所研究的对象,主要是物体能吸收又能把它转换为热能的哪些射线,其中最显著的是可见光和红外线,即波长为 $0.4\sim 40\mu\text{m}$ 的射线,对应于这部分波长的能量称为热辐射能。

图8-65所示是辐射温度计的工作原理,它是基于四次方定律(即黑体的全辐射能和它的绝对温度的四次方成正比)。被测物体的辐射线由物镜聚焦在受热板上。受热板是一种人造黑体,通常为涂黑的铂片,当吸收辐射能以后,温度升高,由接在受热板上的热电偶或热敏电阻测定。通常被测物体是 $\epsilon < 1$ 的灰体(ϵ 称为黑度),如果以黑体辐射作为基准进行定标刻度,知道了物体的 ϵ 值,即可根据有关公式求得被测物体的温度:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt[4]{\epsilon}} \quad (8-76)$$

式中: T ——被测物体的温度;

T_0 ——黑体全辐射所具有的温度。

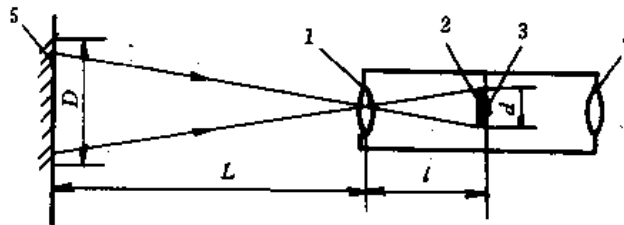


图8-65 辐射温度计工作原理

1—物体;2—受热板;3—热电偶;4—目镜;5—被测物体

2. 红外测温

红外测温与上述辐射温度计测温原理相同,都是基本热辐射原理。不同的是辐射温度计多用于 800°C 以上的高温和可见光范围,而红外测温则用于低温和红外线范围。对这种不可见的红外光,需要用红外敏感元件来检测。

(1) 红外探测器

红外探测器是将红外辐射能转换为电能的一种传感器,按其工作原理可分为光子探测器和热探测器。

光子探测器的原理基于物质的光电效应。一般有光电、光电导及光生伏特等光电探测

器。制造光子探测器的材料有硫化铅、碲化铋、碲镉汞等。由于光子探测器是利用入射光子直接与束缚电子相互作用,所以灵敏度高,响应速度快。又因为光子能量与波长有关,所以光子探测器对具有足够能量的光子有响应,存在着对光谱响应的选择性。光子探测器通常在低温条件下工作,需要制冷设备。

热探测器是利用入射的辐射能引起热敏元件升温,然后测定温度变化来确定入射能的大小。由于热敏感元件的升温过程较慢,因此热敏探测器的响应时间较长,大都在 ms 数量级以上。热敏探测器常用的有热敏电阻型、热电偶型等。

热电堆探测器(如图8-66所示)是由数对以串联形式排列在受热板上的热电偶所组成,可以获得较高灵敏度和热电势输出。

热敏电阻探测器(图8-67所示),电阻的结构有线绕形、箔形、薄膜形等。电阻受热后阻值变化,经过电桥转换为输出电压。

(2) 红外测温仪

图8-68表示一种红外测温仪结构原理图。它由光学系统、调制器、红外探测器、电子放大器和指示器等几部分组成。

光学系统部件是用红外光学材料制成。对 700°C 以上的高温测温仪,主要用在 $0.76\sim 3\mu\text{m}$ 的近红外区,可用一般光学玻璃和石英等材料,对 $100\sim 700^{\circ}\text{C}$ 的中温测温仪,主要用在 $3\sim 5\mu\text{m}$ 的中红外区,可采用氟化镁和氧化镁等光学材料;对 100°C 以下的低温测温仪,主要波段是在 $5\sim 14\mu\text{m}$ 的中、远红外区,采用锗、硅、热压硫化锌等材料。

调制器由微电机和调制盘组成,具有等间距小孔的调制盘把被测物连续的辐射调制成交变的辐射状态,使红外探测器的输出成为交变信号,这就可以用交流放大器来处理。经放大器放大后的信号由指示器指示,或由记录器记录下来,这就可以定量确定被测物的温度值、仪器中还需要有一标准黑体,用来校准仪器的灵敏度。用这种方法所测得是使用波段范围内黑体的温度,即物体的“亮度温度”。要得到物体的真实温度,还需根据被测物的黑度系数对亮度温度进行修正。

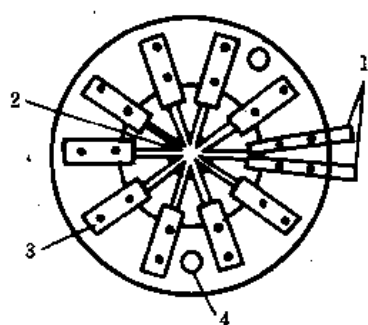


图8-66 热电堆探测器

- 1—输出端;2—受热板(热接点)
- 3—铜片(冷接点);4—安装孔
- 5—热接点;6—冷接点

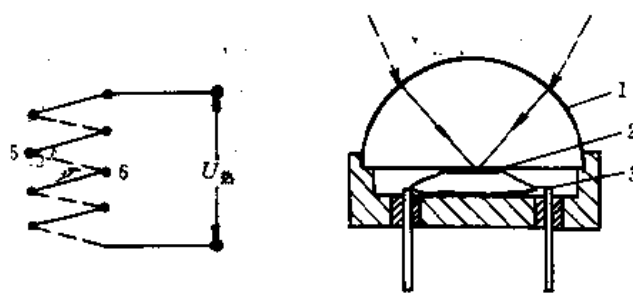


图8-67 热敏电阻探测器

- 1—Ge透镜;2—检测用热敏电阻
- 3—温度补偿用热敏电阻

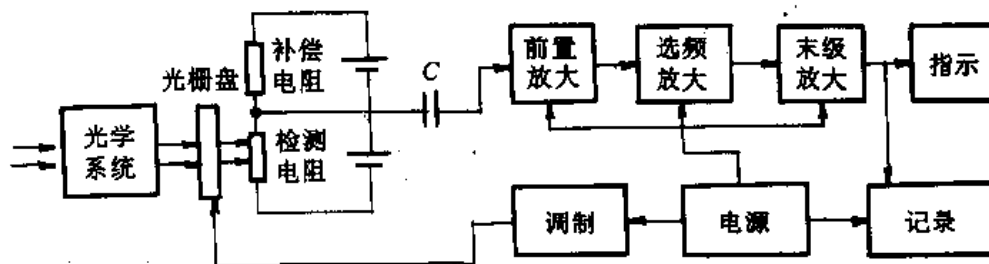


图8-68 红外测温仪结构原理

(3) 红外热像仪

红外热像仪的作用是将人眼看不见的红外热图形,转变成人眼可见的电视图像或照片。红外热图形是由被测物体温度分布不匀,红外辐射能量不同而形成的热能图形。

热像仪的工作原理如图8-69所示。光学系统将辐射线收集起来,经过滤波处理之后,将景物热图形聚集在探测器上,光学机械扫描包括两个扫描镜组,一个垂直扫描,一个水平扫描,扫描器位于光学系统和探测器之间,扫描镜摆动达到对景物进行逐点扫描的目的,从而收集到物体温度的空间分布情况。当镜子摆动时,从物体到达探测器的光束也随之移动,形成物点与物像一一对应。然后由探测器将光学系统逐点扫描所依次搜集的景物温度空间分布信息,变成按时序排列的电信号,经过信号处理后,由显示器显示出可见图像。

红外测温仪及红外热像仪在军事、空间技术及工农业科技领域里日益发挥重大的作用。在机械加工、制造业中,已被用于机床热变形、切削温度、刀具寿命控制等测试中。

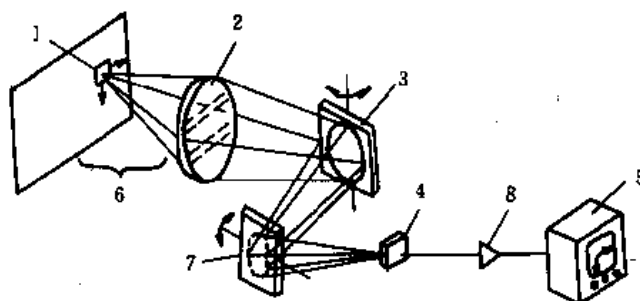


图8-69 红外热像仪原理

1—探测器在物体空间投影;2—光学系统;3—水平扫描器
4—探测器;5—视频显示;6—物体空间视场;7—垂直扫描器

习 题 八

- 8-1 图8-39所示的力传感器中,假设“基座”有干扰输入位移 $x_i(t)$ 。试绘出一方框图并说明该传感器是如何受到有用输入 f 和干扰输入 x_i 的叠加作用而产生输出的,并推导此方框图所需的传递函数。
- 8-2 在一等臂天平上称量一体积为 163.871cm^3 的物体。平衡所需的基准质量为

0.4536kg, 而体积为 49.161cm^3 。试求考虑空气浮力所需的修正值为多少?

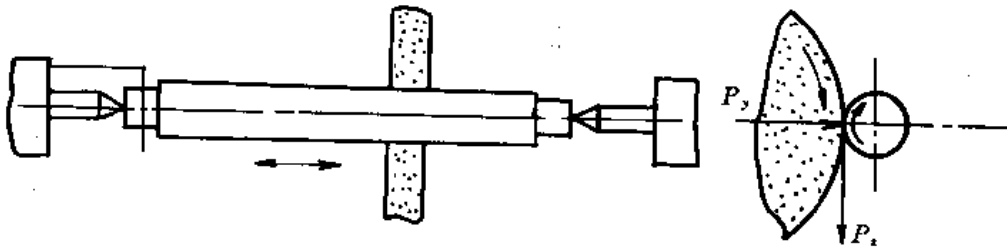
8-3 在用应变仪测量机构的应力、应变时, 如何消除由于温度变化所产生的影响。

8-4 如题图8-1所示, 轴 z 件用前后顶尖支承纵向磨削外圆表面, 在加工径向力 P_y 和切向力 P_x 大小基本不变, 但着力点位置沿轴向移动, 现拟直接在前后顶尖上粘贴电阻应变片测量工件所受的 P_y, P_x 力。求:

(1) 试在图中标明贴片的位置和方向?

(2) 画出两个力的测量电桥?

(3) P_x 与 P_y 是否会产生交叉干扰? 为什么? 着力点移动对测量结果有无影响? 为什么?



题图 8-1

8-5 某台感应同步器及数显表测量最大位移量为 $9999\mu\text{m}$, 求仪器的分辨率(绝对值和相对值)及动态线性范围(dB)

8-6 电动式速度传感器与压电式加速度传感器使用的频率范围是如何选择的?

第九章 机械噪声的测量

第一节 机械噪声测量的内容

一般地讲,机械噪声就是一种随机的人们不希望得到的声音。机械噪声的测量实际上是声音的测量。随着社会步入工业现代化社会,各种机械噪声已经成为环境主要公害之一。机械噪声的测量在生产、生活和环境保护、劳动保护等方面日益受到广泛的重视,因此需要进行完整和准确的机械噪声测量。

声音源于物体的振动,声波是通过弹性介质传播的机械振动。声波按其频率的高低可分为次声、可听声、超声和特超声。一般说来,把20~20kHz的声波称为可听声,低于20Hz的声波称为次声波,把 $2 \times 10^4 \sim 10^9$ Hz的声波为超声波,10⁹Hz以上的声波称为特超声。声波的频率界限见图9-1所示。

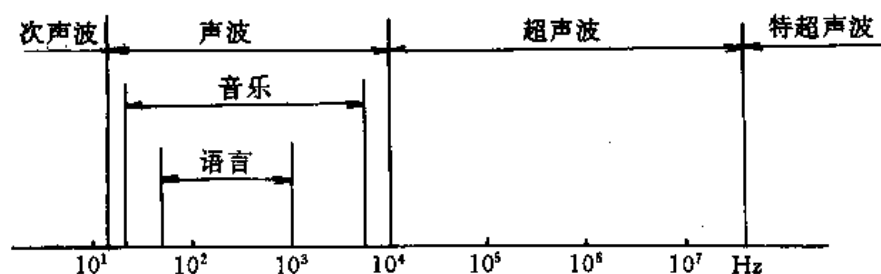


图9-1 声波的频率界限

机械噪声的测量主要是针对人耳所能听到的声音的测量,它的原理是通过接触声源(或振动)的空气质点以它的平稳位置为中心来回振动,由于质点间的弹性力的作用,使相邻各质点依次在各自的平衡位置附近振动起来,各质点振动方向与波的传播方向相同,这个波称之为纵波。所以声音是声波以纵波形式在空气介质中传播的结果。这样声源的振动就形成了声压。机械噪音测量的基本环节就是将声波信号(声压)变换为相应的电信号,这种变换装置我们称之为传声器。由于声音的频率、传声器的尺寸的大小和声学环境的不同,使机械噪声测量变得复杂,因此在机械噪声测量中还需考虑传声器的结构、传声器的安置方法等因素。

大多数机械噪声测量的最后结果是以电声参量的准确值来表示的。即电学量与声学量的比值或声学量与电学量的比值。机械噪声的测量主要以响度来对噪声进行评价,由此制定出机械噪声的容许标准。

为了保证机械噪声测量的准确度,需要建立相应的机械噪声测量的基准器和标准器。根

据不同的频率范围、使用的目的、声压级大小,应用不同方法建立机械噪声计量的基准和标准。这些方法有:互易法、扬声器法、置换法、活塞发声器法和静电激励器法。

防治机械噪声已经成为机电设备设计师、工艺师及环境保护科技工作者的重要研究课题。精确地测量、分析机械噪声将为控制机械噪声源、改进产品设计及工艺、制订环境保护措施和法律,提供必要的依据。

第二节 机械噪声测量的几个基础量

在进行机械噪声测量时,通常采用声压级、声强级和声功率级表示其强弱,用频率或频谱表示其高低。

一、声压和声压级

声压是传递声波的空气介质在波动过程中,压力与静压的差值。这是个周期量,通常以其均方根值来衡量其大小。通常用符号表示,单位为“帕”(Pa),即 N/m^2 。

正常人耳刚能听到的1000Hz声音的声压为 $2 \times 10^{-5} \text{Pa}$ (在空气中),称为听阈压,并规定为参考基准声压,记为 P_0 ;使人耳感到疼痛的声压为20Pa,称为痛阈声压值。二者相差一百万倍,单位“帕”的使用极不方便,因此选择了另外一种确定声音的声压级。

声音的声压级 L 是该声音的声压 P 与参考基声压 P_0 比值的常用对数的20倍,其数学表达式为:

$$L = 20 \lg \frac{P}{P_0} \quad (\text{dB}) \quad (9-1)$$

声压级实际上就是声压的分贝表示。在测量和分析这些量时,应指明它们所对应的参考基准量,并按照对数运算来进行处理。例如在使用“级”(dB)来表示相对量时,在空气中人的听阈为0dB,痛阈为120dB。一般说话的声压级约为60dB,喷气机的声压级约为130dB,而火箭发射的声压级可高达180dB。所以声压级的测量范围约为0~180dB。

二、声强和声强级

声强是单位时间内与垂直于声波传播方向的单位面积上通过的平均声能,单位为 W/m^2 ,以符号 I 表示。

表9-1 常见声音的声强、声强级及声压

声音	声强 (W/m ²)	声强级 (dB)	声压 (Pa)	声压级 (dB)
最弱的声音	10 ⁻¹²	0	2×10 ⁻⁵	0
微风树叶声	10 ⁻¹⁰	20	10 ⁻⁴	14
稳定行驶的汽车	10 ⁻⁷	50	2×10 ⁻³	40
普通谈话	3.2×10 ⁻⁶	65	10 ⁻²	54
热闹街道噪声	10 ⁻⁴	80	1	94
火车声	10 ⁻³	90	10	114
铆钉声	10 ⁻²	100	10 ³	154
飞机声(3米远)	2×10 ⁻¹	110	10 ⁴	174

三、声功率及声功率级

声源在单位时间发出的总声能称为声功率,单位为瓦(W),符号记为 W 。声功率变化范围极宽,为了度量的方便,常用声功率级来表示。声功率级数学表达式为:

$$L_w = 10 \lg \frac{W_s}{W_0} \quad (\text{dB}) \quad (9-3)$$

式中: W_0 ——参考基准声功率,为 $10^{-12}W$ (1PW)。

第三节 机械噪声测量及频谱分析技术

机械噪声的频率成分一般是很复杂的。而以分贝为单位的声压级是用来描述声波的物理特性。但由于声压级的大小与离声源距离以及声学环境有关,因此,用它来描述噪声的特性是不合适的。而在评价机械噪声、分析寻找机械噪声源以及采取降低机械噪声的措施,都需要测量出机械噪声及其频谱。

一、声功率的测量

用声功率级来描述物体发射的机械噪声的特征是合理的。这是由于,在一定的工作状态下,物体所发射的声功率是恒的。

声功率级是不能直接测出的,而在特定的条件下,由测量的声压级计算出来的,其方法如下:

1. 自由场法

物体噪声声功率级的精密测量是在这样的环境下进行的。机器安装在硬反射的地板上而周围环境的其它表面不反射,机器的外壳对噪声没有吸收。在自由声场中,机器辐射的声功率,可由一个以机器为中心的假想包络面(半径 r 大于机器尺寸的两倍的半球面)上若干均匀分布点上的声压级来计算,求得声功率级 L_w 。

$$L_w = \bar{L}_p + 10 \lg \left(\frac{S}{S_0} \right) + k_0 \quad (9-4)$$

式中： \bar{L}_p ——在半径为 r 的球面的 n 个点上测量的平均声压级，

$$\bar{L}_p = 20 \lg \frac{\bar{P}}{P_0}, \bar{P} = \left(\frac{\sum P_i^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

S ——包络被测机器的面积， $S = \pi r^2 (\text{m}^2)$

S_0 ——基准面积，为 1m^2

K_0 ——非标准气压和温度状态时的修正量。

式(9-4)简化为：

$$L_w = \bar{L} + 20 \lg r + 8 + k_0 \quad (9-5)$$

距离中心为 r_1 和 r_2 两点的声压级满足下列关系：

$$L_1 = L_2 + 20 \lg \frac{r_2}{r_1} \quad (9-6)$$

2. 标准机械噪声源法(参考噪声源法)

自由声要求的条件较苛刻，在有限吸声的房间(如工厂、车间)内，作机械噪声测量，上述自由场法就不适用。这时可采用一个可知声功率 L_w 的参考声源来测定机器的声功率，即可采用标准噪声源法。

在相同条件下，用已知声功率的参考声源与被测量的噪声源相比较，可求得噪声源的噪声声功率级。其表达式如下：

$$L_w = L_p + \bar{L} - \bar{L}_r \quad (9-7)$$

式中： L_p ——已知参考声源的声功率级；

\bar{L} ——以机器为中心，半径为 r 的半球面测出该噪声源的平均声压级 \bar{L} ；

\bar{L}_r ——关掉噪声源，参考声源置于该噪声源的位置上，在同样点上所测得的平均声压级。

用此法测量噪声源时，可选用下述方法之一来进行。

①替代法。待测的噪声源移开，将参考声源置入原噪声源位置，测量点相同。

②并摆法。若待测量的噪声源不便移开，可将参考噪声源置于待测量的噪声源上部或它的旁边，测量点相同。

③比较法。若用并摆法测量误差大，这时可用比较法，即将参考噪声源放在现场的另一一点，周围反射的情况与待测量的噪声源的周围反射情况相似，然后进行相似点的计算，并用式(9-7)计算出待测量的噪声功率级。

二、频带声压级

在噪声测量中，噪声的频谱分析，是以一定的频谱宽度来进行的，即分析各频带对应的声压级(频带声压级)。在某一频带中，噪声的声压级称为该频带声压级。显然，讨论频带声压级时必须指明频带的宽度和参考基准声压值。在机械噪声的频谱测量中，最常用的频带宽度是倍频程和 $1/3$ 倍频程。可闻声各个频带的标准中心频率及频率范围见表9-2及表9-3所示。

表9-2 倍频程频率范围

中心频率[Hz]	31.5	63	125	250	500
频率范围[Hz]	22.4~45	45~90	90~180	180~355	355~710
中心频率[Hz]	1000	2000	4000	8000	16000
频率范围[Hz]	710~1400	1400~2800	2800~5600	5600~11200	11200~22400

表9-3 1/3 倍频程中心频率和频率范围

中心频率[Hz]	频率范围[Hz]	中心频率	频率范围
25	22.4~28	800	710~900
31.5	28~35.5	1000	900~1120
40	35.5~45	1250	1120~1400
50	45~56	1600	1400~1800
63	56~71	2000	1800~2240
80	71~90	2500	2240~2800
100	90~112	3150	2800~3550
125	112~140	4000	3550~4500
160	140~180	5000	4500~5600
200	180~224	6300	5600~7100
250	224~280	8000	7100~9000
310	280~355	10000	9000~11200
400	355~450	12500	11200~14000
500	450~560	16000	14000~18000
630	560~710		

当寻找噪声源时,需要更窄的频率宽度来分析噪声的频谱。一般采用声压谱级作为对噪声连续谱进行不同频带声压级之间互相比对的依据。噪音在某一频率上的声压谱级是指以该频率为中心频率,宽度为1Hz 的频带内噪音的有效声压级。声压谱级 L_{ps} 可能通过下式求得:

$$L_{ps} = L_{pb} - 10\lg B \quad (9-8)$$

式中: L_{pb} ——带宽为 B 的频带声压级;

B ——带宽。

倍频和1/3 倍频程的带宽 B 随中心频率的增大而变宽,显然它们的频带声压级和声压谱级之差,也将随中心频率增加而加大。

三、噪声的评价标准

声压是噪声中的一个物理参数。人耳对声音的感受不仅与声压有关,而且与频率有关。实践表明,声压级相同而频率不同的声音听起来不一样响;而不同声压级的声音,其频率不一样,有时听起来却一样响。因此,仅凭声压还不足以表明噪声对人的影响程度。这样,就导出了一个与频率有关的响度级来评价噪声,其单位为方。它选取1kHz 的纯音作为基准声,这

就是说,某一噪声听起来与该纯音一样响,该噪声的响度级(方值)就等于该纯音的声压级(分贝值)。例如某噪声听起来与声压级为85dB,频率为1kHz的基准音一样响,该噪声的响度级就为85方。这样,响度级将声压级和频率用一个单位统一起来作为噪声响度的指标。英国国家物理实验室经过大量与基准声音比较的试验,测得纯音的等响曲线,如图9-2所示。这些曲线的每一条表达了频率和声压不同而响度相同的声音。例如用频率为1kHz,声压级为40dB的纯音作为基准音,向接受实验的人发出不同频率和不同声压的音响,由受试者判断,哪些音响与基准音响度相同。将这些不同频率但响度相同的声音的声压级连成一条曲线,即得出响度级为40方的等响曲线。对1000Hz的纯音,改变其声压级,重复上述试验,便可作出各种响度级的等响曲线。由图9-2可看出,最下边一条曲线是听阈曲线,最上边一条是痛阈曲线。人的听觉对2kHz~5kHz的声音比较敏感,对低频率声音反应不够敏锐。例如,4kHz的声音,其声压级在8dB时,就能听到,500Hz的声间,在16dB时才能听到。因此,必须用对听觉最敏感的频率段的声压级来表征噪声。

响度级是一个相对量,不能完全表达人耳对音响感觉的强弱程度。这时需要把它化为自然数,用绝对值——响度来表示声音强弱程度,其单位为宋。一宋是声压40dB、频率为1kHz的纯音所产生的响度。任何一个声音被判断为一纯音响度的 n 倍时,则该声音为 n 宋。宋与响度的关系为:

$$\lg L = 0.03L_L - 1.2 \quad (9-9)$$

式中: L ——响度;

L_L ——响度级。

从式(9-9)可知,响度级由40方开始,每增加10方,响度增加一倍,即40方为1宋,50方为2宋,60方为4宋……用响度单位时,可对不同的声音进行迭加。例如,一个声音由两个单独的简单声音所组成,它们的频率分别为300Hz和2000Hz,其单独声音的声压均为70dB,从等响度曲线查得,其响度级均为70方,对应于响度均为8宋。此时,总响度为 $8+8=16$ 宋,相当于综合响度级为80方。可见响度级不可直接迭加。图9-3为方-宋关系曲线。

四、机械噪声响度

大多数的机械噪声的频率成分是很复杂的,即为宽带声音,评价其响度就要复杂得多。ZSO532-1957(E)规定了复音响度的计算方法。其中,有A、B两种方法。方法A适用于在漫射场中用倍频程频率分析复音,方法B则用于1/3倍频程分析的情况。

图9-4为响度指数曲线。用方法A计算宽带声音的响度可按下列程序进行:

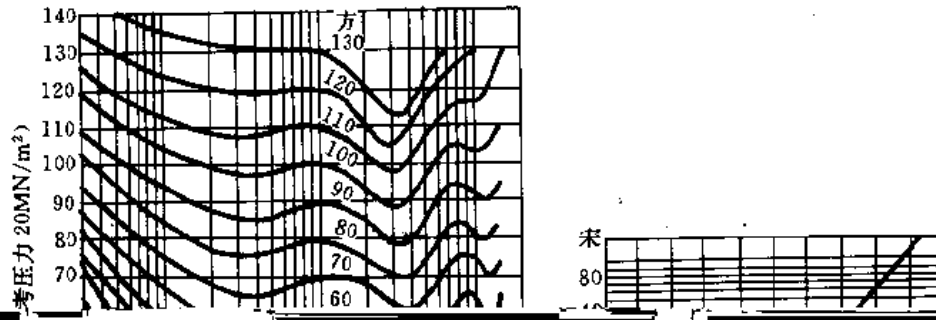
1. 在31.5~8000Hz中,按正常规定的倍频程测定各倍频程声压级;
2. 从图9-4查得相应的响度指数;
3. 按下列经验公式计算宽带声音的响度 L_0 。

$$L_0 = 0.07L_{\max} + 0.3 \sum L \quad (9-10)$$

$\sum L$ ——所有响度指数之和。

例如,设测得某噪声的倍频程声压级为:

中心频率[Hz]	31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
声压级[dB]	75	79	82	85	85	87	82	75	78



方法在比较具有相似频谱的噪声时,颇为有效。

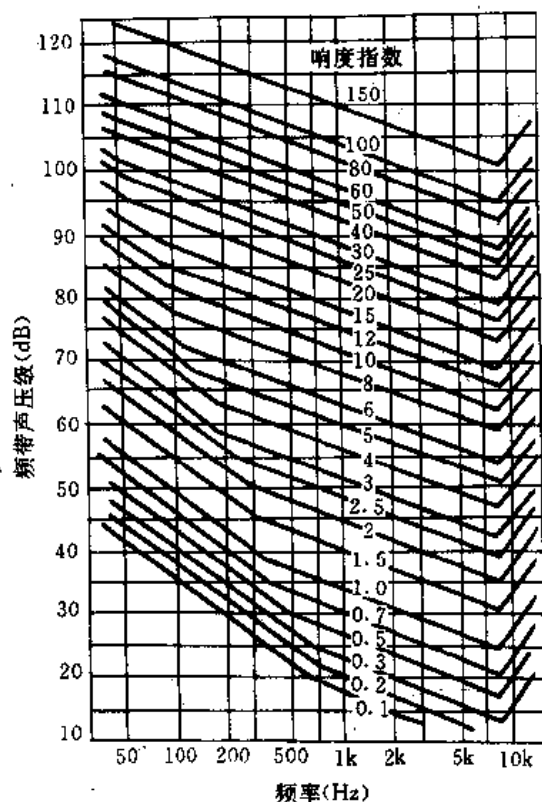


图9-4 响度指数曲线

五、机械噪声的容许标准

近年来,随着社会不断发展,机械噪声也越来越强烈,对人类生存环境造成了严重危害。为了减少噪声的危害,提出了保护听力,保障生活和工作环境安静的噪声允许标准。

国际标准化组织(ISO)提出采用噪声评价数 NR 。图9-6为噪声评价曲线。图中曲线均以一定的噪声评价数(NR)来表征。噪声评价数由下式确定:

$$NR = \frac{L_p - a}{b} \quad (9-11)$$

式中: L_p ——倍频程声压级(dB);

a, b ——与倍频程中心频率有关的系数。

式(9-11)表明了, NR 包括了噪声强度和频率两个因素。表9-4列出了 a, b 与倍频程中心频率(f_c)的关系。

表9-4 系数 a, b 与倍频程中心频率的关系

f_c (Hz)	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
a	35.5	22	112	4.8	0	-3.5	-6.1	-8.0
b	0.780	0.870	0.980	0.974	1	1.015	1.025	1.030

A 声级与噪声评价数NR 的换算关系为:

$$NR = L_A - 5\text{dB} \quad (9-12)$$

若NR=85, 则A 声级 $L_A=90\text{dB}(A)$ 。

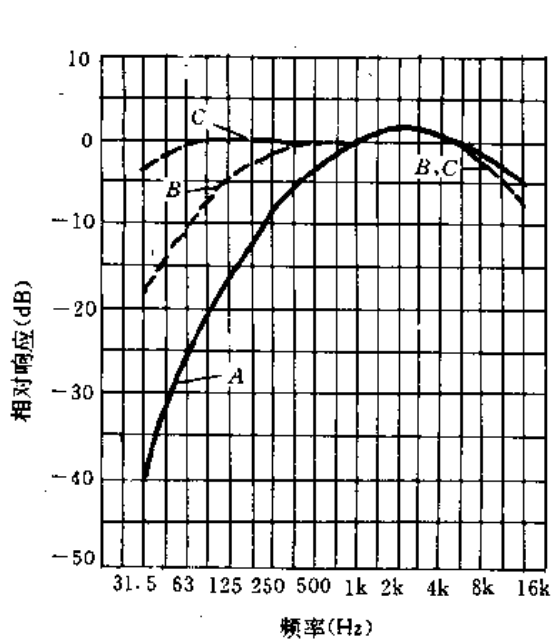


图9-5 频率计权曲线

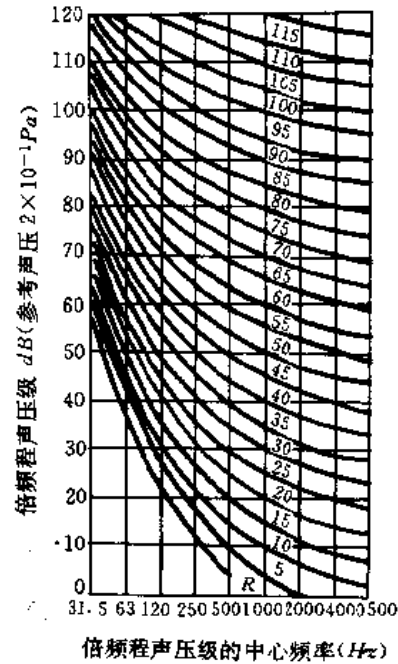


图9-6 噪声评价曲线

采用噪声评价曲线(图10-6), 可由噪声频谱来判断噪声是否符合噪声容许标准的规定。若噪声的倍频程声压级超过该容许评价数对应的评价曲线, 则认为没有符合标准规定。

国际标准化组织建议, 每天工作8 小时, 采用噪声评价曲线N85($NR=85$), 作为噪声容许标准, 即每天工作8 小时, 容许连续噪声不得超过 $90\text{dB}(A)$ 。工作时间每减少一半, 容许噪声提高 $3\text{dB}(A)$ 。最坏不超过 $115\text{dB}(A)$ 。用普通声级计评定时, 可用C 计权网络的读数再加 15dB , 作为近似估值; 也可用专用的脉冲声级计测定。

1971 年国际标准化组织建议, 每天工作8 小时, 作为工业环境允许连续噪声声级为 $85\text{dB}(A)$ 。住宅区室外噪声容许标准为 $35\sim 45\text{dB}(A)$; 非住宅区内, 例如办公室、商店的室内容许噪声标准为 $35\text{dB}(A)$ 。

第四节 机械噪声测量仪器的工作原理及测试方法

声级计是最常用的机械噪声测量仪。它主要由传声器、前置放大器、衰减器、放大器、频率计权网络以及有效值指示表头等组成。图9-7 所示为典型的声级计的原理框图。

由图可知, 传声器是把声压信号转换成对应的电压信号, 它直接影响到测噪仪器测噪的准确性。测噪仪亦可外接电平记录仪、磁带记录仪、示波器等来观察波形; 亦可接频率分析仪来确定声音的频谱; 若只想得到总的声音的幅值, 可用有显示均方根值的电压表来计量。

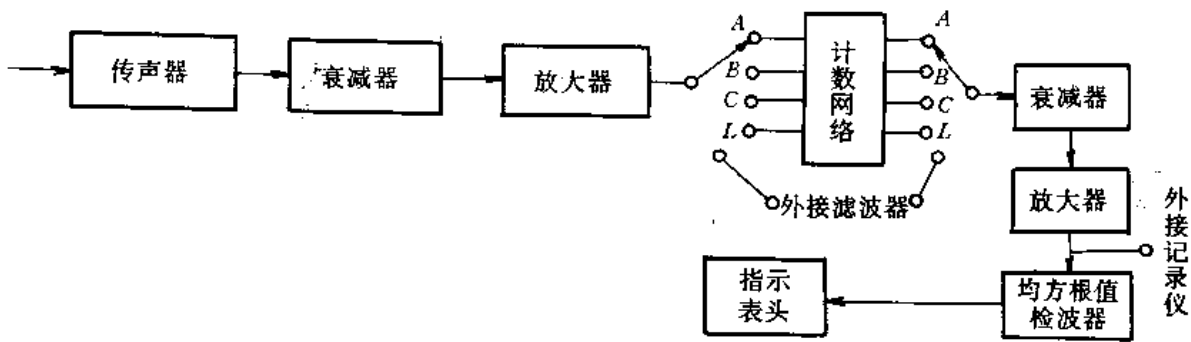


图9-7 声级计的方框图

一、传声器

传声器的设计涉及一个专门而复杂领域。一个传声器设计的好坏主要看它的输出(电压信号)是否真实地反映出输入信号(声压信号)。因此传声器的频率响应特性是我们主要关心的问题。

1. 传声器的频率响应

传声器的频率响应分为声压(压力)响应和自由场响应。声压响应是指作用在传声器膜片上的均匀的声压与传声器输出电压之比的频率响应特性。自由场响应是传声器的输出电压和传声器未引入声响之前其位置处所存在的声压之比。图9-8 为声压及自由声场响应特性曲线。

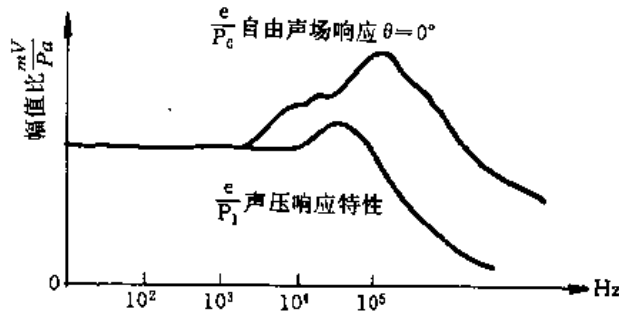


图9-8 自由声场响应和声压响应曲线

传声器置于声场之中,必然要产生反射和绕射等现象,使声压场畸变;声波的波长和传播方向也对传声器的频率响应带来影响。如何设计一个传声器,使其具有平坦的幅频特性以及输出电压信号与声压之间没有相移是我们要考虑的问题。

对于大多数使用场合,传声器(包括其振动膜片)可视为刚体。撞击到此刚体上的声波将产生反射和绕射,而这种反射和绕射取决于声波的频率、传播方向以及传声器的尺寸和形状。若传声器的尺寸与声波相比很小时(相当于低频量),对于膜片和声音传播方向之间的任何入射角,反射的影响均忽略不计,这时自由声场响应和声压响应相同。若在高频时,这时声波波长远比传声器的尺寸小,传声器的作用就象无限大的刚体,声波的反射、绕射现象不能忽略。此时传声器表面处的声压(对于与膜片的人射角为 0° 的声波)将是没有传声器时的两倍。而对于与膜片平行传播的声(即 90° 的入射角),作用在膜片表面的平均压力将为零;从而不产生输出电压。因此,在可听声音的频率范围下,反射的影响是很复杂的,它取决于声波的波长(或频率),传声器的尺寸和形状以及声波的入射角。

对于球形或园柱形的传声器,其实验所得结果如图9-9所示。

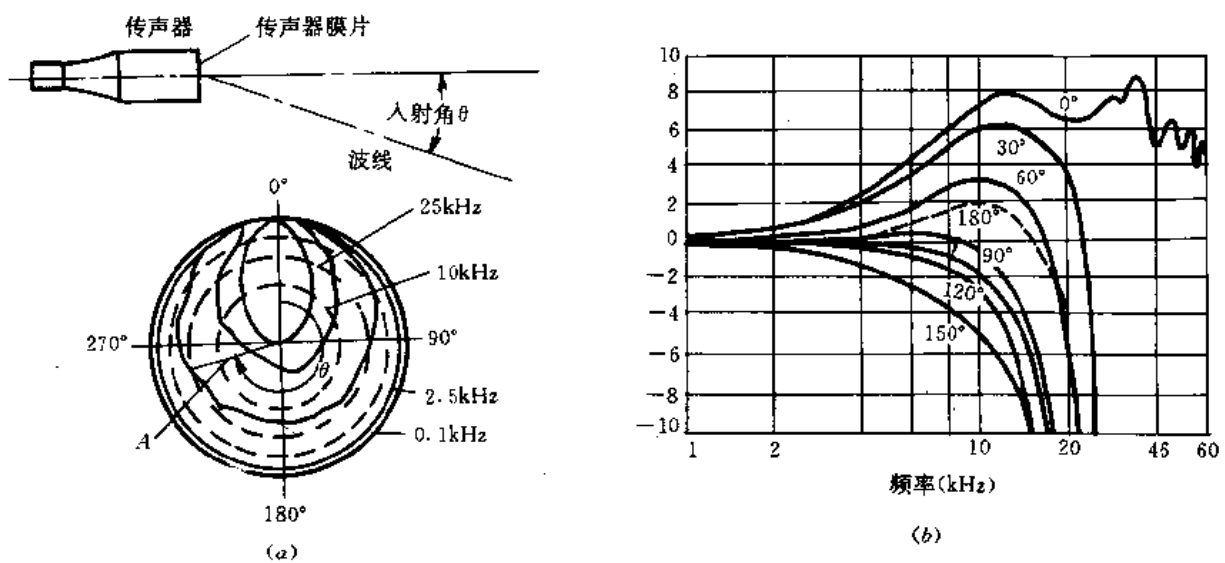


图9-9 传声器的频响特性

由图可看出,在低频段(低于几千赫兹),传声器的存在而造成的声压变化是很小的,入射角的影响也很小。若减小传声器的尺寸,其平均的频响特性还可以扩大。但传声器的尺寸减小将导致其灵敏度的降低。

2. 常用传声器

用于工程测量的传声器通常是压电式、电容式、水银体式、动圈式传声器。

图9-10所示为压电式传声器的原理图。金属箔形膜片与双压电晶体弯曲梁相连,膜片受到声压作用而变位时,双压电元件则产生变形,从而在压电元件两端面出现电荷。连接一适配的变换电路即可输出电信号。

压电式传声器膜片较厚,其固有频率较低,但它灵敏度高。频率响应较平坦、结构简单、价格便宜,广泛应用于普通声级计中。

永电体传声器(或称驻极体式)是一种用于精密测量的传声器,其工作原理与电容式传感器相似(图9-11)。膜片聚合物的薄膜中已永远“注入”了电荷,因此不需要直流极化电压,金属板电极具有“上凸点”以支承聚合物薄膜,防止其过量地下垂和蠕变,永电体膜片与该金属板组成电容器的两个极板。该传声器可用于高湿度的条件下,可作成小尺寸的传声器,其价格比电容式传声器便宜。

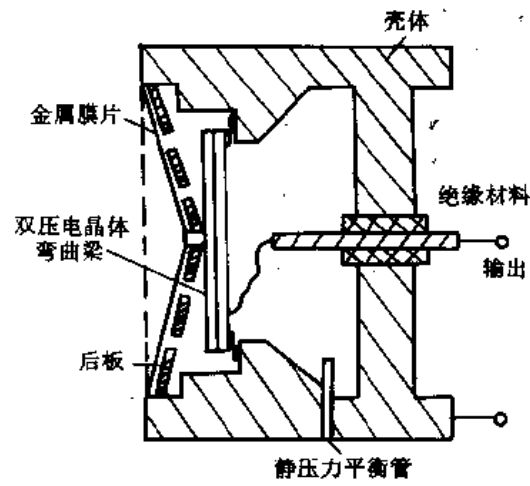


图9-11 驻极体式传声器的结构

损。对于动态变化的声压,很难通过毛细孔而作用于内腔,从而保证仅有膜片外侧受到声压的作用,而造成所需的膜片位移。

将传声器的可变电容与一个高阻值电阻 R 串接,并被大约200V的直流电压 E_b 所“极化”。该极化电压 E_b 即起着电路激励电源的作用,并且由于电容器两极板间的静电吸引力,还能确立膜片的中间(即零压)位置。若膜片的位移恒定不变,则无电流流过 R ,且无输出电压 e_o 。若膜片两侧存在动态压差,则 R 上有电流流过,输出电压存在。该电压 e_o 接一个场效应晶体管跟随放大器,该场效应放大管具有极高的输入阻抗($>1G\Omega$),这样可避免具有很高输出阻抗给传声器造成负载。该放大器的输出阻抗很低($<100\Omega$),其输出可接入低阻抗的负载而不致使信号幅值下降。

3. 传声器的动力学模型及声压响应特性

声压 P_i 经电容式传声器变换为输出电压 e_o 的过程涉及声学、电学和力学等方面的变化。

先研究一下电容式传声器的活动极板电容的电气机械能量转换过程(见图9-13所示)。由电学知识可知道电容器贮存的能量 A_c 为:

$$A_c = \frac{q^2}{2c} = \frac{ce^2}{2} \quad (9-13)$$

式中, q ——电荷; e ——电压; c ——电容。

平行板电容器的电容 c 为:

$$C = \frac{\epsilon A}{x} \quad (9-14)$$

式中: x ——极板间距;

A ——极板面积;

ϵ ——极板间介质材料的介电常数。对于真空或干燥空气, $\epsilon=8.86 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 。

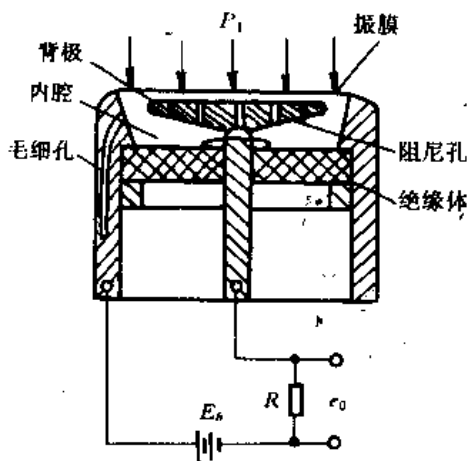


图9-12 电容式传声器

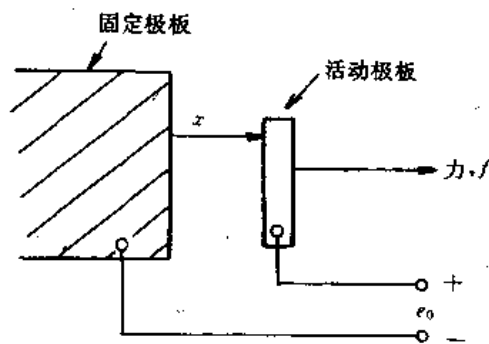


图9-13 活动极板式电容器

假设电容器已充好电,令其开路,使电荷 q 保持不变。在电容器两极板的相互吸引力 f 作用下,两极板的间距变化量为 dx ,则系统的能量变化为:

$$\text{原来的能量}(x = x_0) = \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2 x_0}{2\epsilon A} \quad (9-15)$$

$$\text{变化后的能量}(x = x_0 + dx) = \frac{q^2}{2C_f} = \frac{q^2(x_0 + dx)}{2\epsilon A} \quad (9-16)$$

由能量守恒定理可得:

$$f dx = \frac{q^2(x_0 + dx)}{2\epsilon A} - \frac{q^2 x_0}{2\epsilon A} = \frac{q^2 dx}{2\epsilon A}$$

所以
$$f = \frac{q^2}{2\epsilon A} = \frac{\epsilon A e^2}{2x^2} \quad (9-17)$$

对于空气介质,上式可写为:

$$f = 4.404 \times 10^{-12} \cdot \frac{Ae^2}{x^2} \quad (\text{N})$$

若 $e=200\text{V}$, $A=6.452\text{cm}^2$, $x=2.54 \times 10^{-3}\text{cm}$,则 $f=0.176\text{N}$,式(9-17)仍然有效。

将此电容器接到一外电路(如图9-14)。此时移动电荷 dq 通过电压差 e 所作的功为 edq 。由能量守恒原理有:

$$f dx + edq = d(A_0) = d\left(\frac{ce^2}{2}\right) \quad (9-18)$$

式(9-18)化简整理后,可得出: $f = \frac{\epsilon Ae^2}{2x^2}$ 。图9-14所示传声器的物理模型。

图9-14 为传声器的物理模型。图中所示为传声器的物理模型。图中所示为传声器的物理模型。

由式(9-19)可找出工作点 X_c 。

当有外力 f_d 作用时,由牛顿定律可得出:

$$-c \frac{dx}{dt} + K_s(x_0 - x) - \frac{\epsilon A e^2}{2x^2} + f_d = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (9-20)$$

式中,静电吸引力 $f = \frac{\epsilon A e^2}{2x^2}$ 使微分变成非线性。当 x 偏离其平衡状态工作点 X_c 的微小变化和 e 的微小变化时,可取此非线性函数的台劳级数展开式的线性项即可。^①

非线性函数 e^2/x^2 的台劳级数为:

$$\frac{e^2}{x^2} = \frac{E^2}{x_c^2} + E^2 \left(-\frac{2}{X_c^3}\right)(X - X_c) + \frac{1}{X_c^2} 2E(e - E) \quad (9-21)$$

式中,令 $x_1 = x - x_c$, $e_0 = e - E$,代入式(9-21)得:

$$\frac{e^2}{x^2} \approx \frac{E^2}{x_c^2} - \frac{2E}{x_c^3} x_1 + \frac{2E}{x_c^2} \cdot e_0 \quad (9-22)$$

式(9-20)中,弹簧力项可变为:

$$k_s(x_0 - x) = k_s(x_0 - x_1 - x_c) = -k_s x_1 + \frac{\epsilon A E^2}{2x_c^2} \quad (9-23)$$

所以,式(9-20)可写为:

$$-c \frac{dx_1}{dt} - k_s x_1 + \frac{\epsilon A E^2}{2x_c^2} - \frac{\epsilon A}{2} \left(\frac{E^2}{x_c^2} - \frac{2E}{x_c^3} e_0 - \frac{2E^2}{x_c^3} x_1\right) + f_d = M \frac{d^2x_1}{dt^2} \quad (9-24)$$

式(9-24)取拉氏变换后得:

$$(CMS^2 + CS + K_s - \frac{\epsilon A E^2}{x_c^3})x_1 + \frac{\epsilon A E}{x_c^2} e_0 = f_d \quad (9-25)$$

式(9-24)中,外力 $f_d = (P_i - P_r) \cdot A_d$

又
$$P_i - P_r = P_i - \frac{P_i}{\tau_1 s + 1}$$

$$P_i - P_r = \frac{\tau_1 s}{\tau_1 s + 1} P_i \quad (9-26)$$

故
$$f_d = \frac{A_d \tau_1 s}{\tau_1 s + 1} P_i \quad (9-27)$$

式中 τ 为泄漏时间常数,将式(9-27)代入(9-25)中得:

$$(MS^2 + BS + K_s - \frac{\epsilon A E^2}{x_c^3})x_1 + \frac{\epsilon A E_0}{x_c^2} e_0 = \frac{A_d \tau_1 s}{\tau_1 s + 1} P_i \quad (9-28)$$

图9-14 所示的传声器物理模型可由图9-16 所示的电路模型表示。

由电学知识可知:

$$e_0 = e - E = iR = -\frac{dq}{dt} \cdot R \quad (9-29)$$

^① 设 $z = z(x, y)$, z 的台劳级数展开式的线性项为:

$$z = z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0} (y - y_0)$$

又
$$q = ce = \frac{\epsilon Ae}{x} \quad (9-30)$$

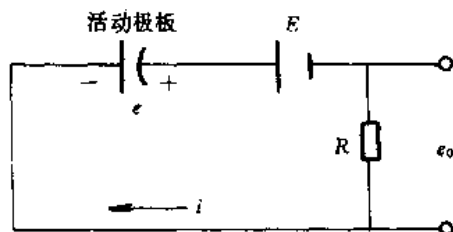


图9-16 传声器的电路模型

式(9-30)由台劳级数表示:

$$q \approx \frac{\epsilon AE}{x_c} - \frac{\epsilon AE}{x_c^2} x_1 + \frac{\epsilon A}{x_c} e_0 \quad (9-31)$$

所以

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\epsilon AE}{x_c^2} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\epsilon A}{x_c} \cdot \frac{de_0}{dt} \quad (9-32)$$

$$\frac{e_0}{R} = -\frac{dq}{dt} = \frac{\epsilon AE}{x_c^2} \frac{dx_1}{dt} - \frac{\epsilon A}{x_c} \frac{de_0}{dt} \quad (9-33)$$

对上式进行拉氏变换得:

$$-\frac{\epsilon AER}{x_c^2} s x_1 + (1 + \frac{\epsilon AR}{x_c} s) e_0 = 0 \quad (9-34)$$

由式(9-34)、式(9-28)消去 x_1 ,从而得到:

$$[-\frac{M\tau_c}{k_c} s^3 + (\frac{M}{k_1} + \frac{c\tau_c}{k_c}) s^2 + (\frac{B}{k_c} + \tau_c + \frac{\tau_c^2 E^2}{x_c^2 R k_c}) s + 1] e_0 = \frac{A_d E_d \tau_c}{k_c x_c} \frac{\tau_1 s^2}{\tau_1 s + 1} P_i \quad (9-35)$$

式中:

$$k_c = k_s - \frac{\epsilon AE^2}{x_c^2} \quad (9-36)$$

$$\tau_c = \frac{\epsilon AR}{x_c} \quad (9-37)$$

由式(9-35)可得出电容式传声器的传递函数:

$$\frac{e_0}{P_i}(s) = \frac{k s^2}{(\tau_1 s + 1)(\tau s + 1)(s^2/\omega_n^2 + 2\xi s/\omega_n + 1)} \quad (9-38)$$

由此得出输入 P_i (声压)和输出 e_0 之间的幅频特性和相频特性,如图9-17所示。通常,传声器其幅频特性 $A(\omega)$ 等于常数的频率范围大约由1~10Hz开始,直到人类听觉的上限频率20kHz。它的灵敏度大约为10~50mV/Pa。电容传声器工作性能稳定,可在温度为-50~150℃,相对湿度为0~100%的范围内工作。

二、声级计

声级计是噪声测量中最常用的仪器,其基本组成为电容传声器、前置放大器、衰减器、放大器、频率计权网络及有效值指示表头等组成,由方框图9-18所示。

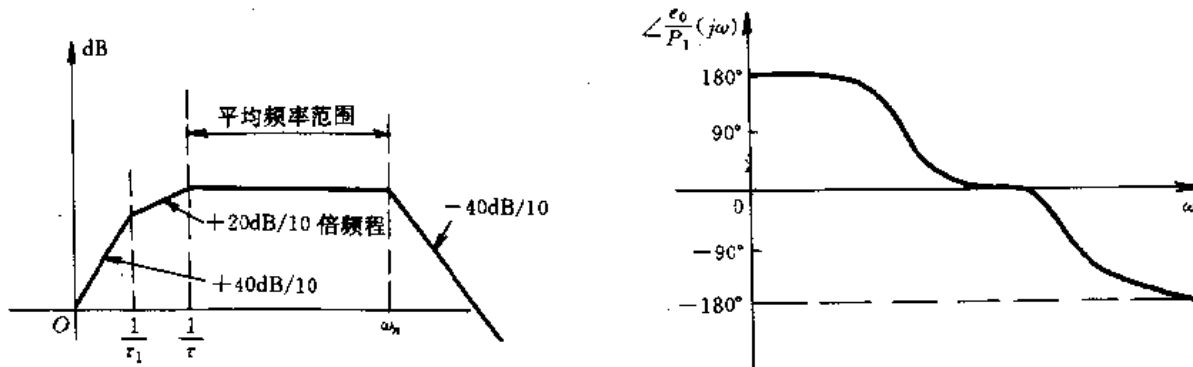


图9-17 电容传声器幅频特性和相频特性

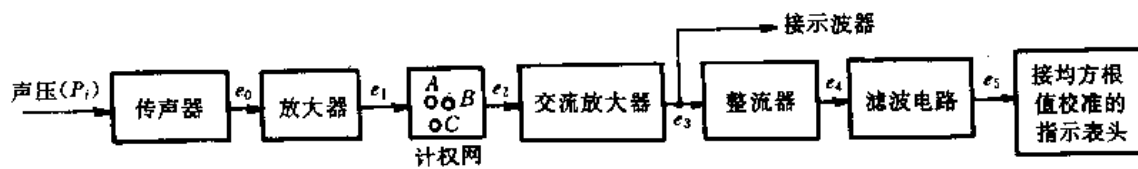


图9-18 声级计方框图

声级计的工作原理是由传声器将声音信号转换成电信号，由前置放大器变换阻抗，使电容式传声器与衰减器匹配。放大器将输出信号送到计权网络，其频响特性则专门调到接近人耳平均的频率特性。然后再经衰减器及放大器将信号放大到一定的幅度，送到均方根检波器，在指示表头上给出噪声声级的数值。表9-5 给出A、B、C 三种频率计权，完成A、B、C 三种声级测量。

声级计有普通声级计和精密声级计之分。前者的测量误差约为 $\pm 3\text{dB}$ ，后者约为 $\pm 1\text{dB}$ 。国产普通声级计有SJ-1 型、SJ-2 型，精密声级计有ND-2 型、DSY-2S 型等。

三、声级计的校准

使用声级测量声压时，必须经常校准，以确保声压级读数的精确度。

目前常用的校准方法有以下几种：

1. 活塞发声器校准法

活塞校准法主要适用于低频校准(几赫或几十赫)。它是一种在现场中使用的精确可靠而简便的方法。用一个内电池供电的电动机通过凸轮使两个对称的活塞作正弦移动，造成空腔中气体体积的变化，使腔内产生已知的正弦变化的声压，被校的传声器置于空腔的一端。正弦变化声压的有效值等于给定的声压级。

表9-5 A、B、C 频率计权

频 率	计 权			频 率	计 权		
	A	B	C		A	B	C
Hz	dB	dB	dB	Hz	dB	dB	dB
10	-70.4	-38.2	-14.3	500	-3.2	-0.3	0
12.5	-63.4	-33.2	-11.2	630	-1.9	-0.1	0
16	-56.7	-28.5	-8.5	800	-0.8	0	0
20	-50.5	-24.2	-6.2	1000	0	0	0
25	-44.7	-20.4	-4.4	1250	0.6	0	0
31.5	-39.4	-17.1	-3.0	1600	1.0	0	-0.1
40	-34.6	-14.2	-2.0	2000	1.2	-0.1	-0.2
50	-30.2	-11.6	-1.3	2500	1.3	-0.2	-0.3
63	-26.2	-9.3	-0.8	3150	1.2	-0.4	-0.5
80	-22.5	-7.4	-0.5	4000	1.0	-0.7	-0.8
100	-19.1	-5.6	-0.3	5000	0.5	-1.2	-1.3
125	-16.1	-4.2	-0.2	6300	-0.1	-1.9	-2.0
160	-13.4	-3.0	-0.1	8000	-1.1	-2.9	-3.0
200	-10.9	-2.0	0	10000	-2.5	-4.3	-4.4

2. 互易校准法

互易法主要适用于中频范围可听声频的传声器校准。该方法准确度高,为声学测量实验室所普遍采用。互易校准法即可测定传声器的压力响应,也可测定其自由场响应。所采用的原理为互易原理。

3. 扬声器校准法

该方法为用一个经过精确定标过的扬声器,在一个声耦合空腔中产生1kHz 的精确给定的声压级声压作为作用在传声器振膜上的标准信号。这种方法简单而便宜。

4. 静电激励器校准法

该方法适用于较高频率的传声器校准。它是将一个绝缘的栅状金属板置于传声器振膜之前,使两者之间的距离相当小。然后在栅状金属板和振膜之间加上高达800V 的直流电压使两金属板极化,从而使两者互相作用着一个稳定的静电力。另外再加上30V 左右的交流电压使相互作用一个交变力,其值等效于1Pa 的声压。和电磁激励器一样,若没有直流电压,所产生的交变压力的频率就是交变电压频率的两倍。静电激励器产生的力和频率无关,因此可用来测量电容传声器的频率响应,其准确度可达0.5dB。

5. 置换法

此校准法误差较大。它是用一个已知频率响应的精确基准声级计来校准要使用声级计。用基准声级计和待校准的声级计来测量同一声压,从两声级计测量结果的差别,可以确定待

校声级计的频率响应。

四、噪声测试方法

测量噪声目的是：①检验噪声是否符合有关的标准；②比较同类或不同类型机器或地点的噪声；③测定离噪声源一定距离的噪声。

噪声测量的主要内容是A声级和倍频程噪声频谱。若需要详细分析噪声成分时，则应测定1/3倍频程频谱。

测量环境对噪声测量的影响很大，相同声源在不同的环境中所形成的声场是完全不一样的。

在现场测量中，由于声源多，房间大小有限，周围的许多反射面，使声源的直达声和反射声混在一起，形成混响场。为了减小其它噪声源发来的声波和反射波的干扰，传声器应接近机器的声辐射面，采用近声场测量法，将传声器置于距机器1米，距地面1.5米的地方来测量，由于声场往往是不稳定的，所以要避免传声器过分接近声源。

若机器不是均匀地向各个方向辐射噪声，则应当在围绕机器的表面并与表面相距1米距地面1.5米的几个不同位置进行测量。除找出A声级最大的一点作为评价该机器噪声的主要依据之外，同时还应当测出若干点（一般多于5点）的A声级和频谱，作为评价的参考。必要时作出机器在各个方向的噪声级分布。

测量时应避免本底噪声的影响。所谓本底噪声就是指被测定的噪声源停止发声时，其周围环境的噪声。一般情况下，被测噪声源的A声级以及各频带的声压级分别高于本底噪声的A声级和各频带的声压级10dB以上，则可忽略本底噪声的影响。若测得噪声（包括本底噪声在内）与本底噪声相差6~9dB，则应从测得值中减1dB；两者相差4~5dB，应减去2dB；相差3dB，减去3dB；两者相差小于3dB，测测量无效。

应当注意避免反射声波的影响。其中声级计本身和测量者所引起的反射不可视。测量时可采用三脚架，或加长传声器和声级计之间的距离，此时要注意避免电缆对压电式或电容式传声器电压灵敏度的影响和电噪声的增加，应当将前置放大器和传声器放在一起。

气流对噪声测量影响较大。为了减小影响可在传声器之前安置风罩、防风锥等附件。

在大风情况下，如风速高于20km/h，不应使用声级计，此时被测噪声有可能被风噪声所掩盖。

用脉冲声级计来测量脉冲噪声。若使用一般声级计，可用C计权网络并在读数的分贝值上加上15dB，作为估算值。

习 题 九

- 9-1 声音和噪声的参考基准声压 P_0 是如何规定的？它的用途如何？
- 9-2 国际标准化组织(ZSO)规定以什么作为噪声的容许标准？它包括哪些因素？如果这个容许标准为85则A声级 L_A 为多少？
- 9-3 噪声测量的目的和内容是什么？
- 9-4 为什么在测量声压的声级计中要用计权网络？

第十章 机械设备故障诊断及监视

第一节 概 述

机械设备故障诊断包含两层含意,“诊”是关于机械设备系统状态的辨识,它包括信号的选择和工况状态的分析;而“断”是对机械设备系统功能“正常”和“不正常”进行判别,它包括确定不正常功能(故障)的性质、程度、部位及原因,并作出控制决策,或在故障出现之前作出预报。

长期以来,对机械设备故障诊断,主要是凭借感官和实践经验判断其故障。显然,这种人工诊断的方法,诊断范围狭窄且带有主观性,最终只能在故障症候表现得明显时才能作出判断。

近二十年来,由于测试技术(特别是电测技术)、计算机技术、信息论、控制论以及可靠性理论等的进展,运用现代科学技术的机械设备诊断技术才有了很快的发展。早在1975年,国外已在飞机维修中应用了状态监察维修(不是定期维修,也不是事后维修)。如在波音747收音机上,对75%没有时限性的机件,根据状态监察信息不定期地进行维修。在我国,随着科技的进步,也逐渐开展了对设备诊断技术的研究和引进。1983年,国家经委颁布了《国营工业交通企业设备管理试行条例》。1987年7月,国务院颁布了《全民所有制工业交通企业设备管理条例》。两者都规定了企业应当积极采用先进的设备管理方法和维修技术,采用以设备状态监察为基础的设备维修方法。这些都反映了我国对设备故障诊断技术的重视。

本节旨在从机械设备系统分析出发,阐明故障的含义性质及类型,分析故障诊断的基本环节,讨论在线监视与故障诊断。

一、机械设备故障的性质与类型

从系统分析的观点出发,机械设备故障诊断就是从系统的外部信息特征判别系统的内部状态。它的最终目的是提高设备的利用率,提高设备运行的可靠性,防患于未然。为此,先明确有关术语的含义。

机械设备——就是英文Machine,它包括机器、机构、机组及装备等,即可供工业企业长期使用,并在使用中基本保持原有实物形态的劳动资料和其它物质资料的总称。

故障——指机械设备故障(Machine Fault)或机械设备系统故障(Machine System Fault)。它包含两层意义:一是机器系统偏离正常功能(Malfunction)但通过参数调节又可以恢复到正常功能,它包括使系统处于规定的或最佳的运行状态。如机器有异物侵入,润滑油不充足等是可以采取措施排除的。这类属于功能失常(失去正常工作状态)或者说失灵,是机

械设备运行系统中大量出现的问题。二是机器系统(或机器局部的)功能失效(Failure)。它形成原因多半是由于机器零部件(机械的、电气的)失效产生的。只有更换(或修复)产生故障原因的零部件外,才能使系统的功能恢复正常。另一方面,故障的状态间相互是有联系的,应立足系统分析,不能只考虑某个零部件。如机床加工精度误差,往往都不只是出于某个零部件的原因。

劣化——常指因腐蚀或磨损等引起的初期损伤,疲劳等造成的变形或损伤,原材料附着物和尘埃造成的污染使原有设备性能逐渐降低的现象。

工况监视——就是在线检测,它的任务是使机械设备系统不偏离正常功能,并防止功能失效。工况监视是故障诊断的基础。

在全面理解故障的基础上,便可以理解故障的类型。

从故障间产生性质看,有间歇性故障和永久性故障。所谓间歇性故障,是指短期内可以排除的故障;而永久性故障往往是由于某关键零部件失效而产生的,只有更换(修复)这些零部件,系统的功能方能恢复正常。

从故障产生的状况来看,有突发性故障和渐进性故障。突发性故障往往是由于系统参数突然变化,或者机器零部件的内在缺陷引起失效,而导致系统突发性故障产生。渐进性故障一般是由于工作过程原因引起的而又无法避免的故障。如制造系统中的刀具磨损,机械设备运行中的零部件磨损等等。

在实际工作中,故障往往是以综合的形式出现,并且各种形式故障还可以转化,并非静止不变。尽管可以改进机械设备的结构设计,提高机器零件的加工质量(冷热加工),然而任何机械设备故障出现的可能性总是存在的。在航空工业中,飞机结构不知经过多少代的改进,制造过程中都经过严格检查或实验,然而飞机因机械故障而失事的事件,每年都有发生,因而实现机械系统的工况监视与故障诊断便成为现代工程系统中不可缺少的组成部分。随着机械设备向自动化、高速、重载的方向发展,它的地位就显得更加突出。

二、故障诊断的内容和环节

一台机械设备,如果有故障,必然有故障症状(现象),该症状必然因设备内某种故障而存在,两者必有某种内在的联系,即它们是“相关”的。总之,机械设备在空载或切削状态(或工作状态)下运转,必然因力效应、几何效应、热效应、化学效应以及其它效应而伴随有振动、噪声、热传导等现象。在工程实际中,就可利用许多读数仪表来拾取与上述现象有关的信号并从中得到与故障有关的信息。表10-1和表10-2列出了通常机械设备故障诊断和机床精度诊断的内容。

表10-1 离心式压缩机的故障症候阵列

被检状态量 故障原因		按动			声	温度		压力			风量	
		轴	轴承	机壳	固体传声	气体温度	轴示温度	平均气压	气体脉动压	供油压力		密封压力
叶轮	灰尘吸附	○										○
	腐蚀磨损	○										○
	破损	○										○
	接触不良	○										○
密封件	磨损			○	○						○	○
	破损										○	○
	接触不良										○	○
闭	转动不灵							○				○
	泄漏							○				○
	爬行							○				○
轴承	烧伤						○					
	浊液不当 导向沟	○	○									

注:有○者为强相关项,即应监控和检测的项目

表10-2 一般金属切削加工机床设备故障的监控和诊断项目

基本监控和诊断内容	机床工作和控制部件及装置的状态	功能	○运动平衡 ○控制正常
		现象	振动、发热、噪声
		○工作精度	相对运动 直线运动 相对位置 旋转运动 传动关系
	切削状态	刀具	○磨损、损伤、断裂 ○钝化
		切削状态	切削力、切削力矩、切削功率 ○切削振动、切削温度、切削形状
	工作质量	○精度	尺寸、形状和位置精度
		○表面质量	表面粗糙度,表面波度,表面纹理
附属自动化机构	切屑处理	断屑、排屑 切屑和切削的分离	
	工件上下料	输送到位 定位夹紧正常 拆卸	

注:有○者为与精度诊断强相关的内容

从表10-1 可看出,利用振动信号监视离心式压缩机的叶轮轴的振动,在监视仪表中规

定不超过某一门限值。仪表读数依赖于目测,离不开人对过程的干预。这些方法目前仍有现实意义,许多设备不少还是采用仪表监视。

随着自动化生产系统的发展,故障诊断技术已发展到不依靠人,而依靠计算机进行监视与控制时,依靠读数仪表和人工监视,往往不能满足要求了。人们开始了对机器系统运行过程的特性分析,根据动态过程的变化特性进行监视和诊断,这就需要用到信号分析、数学模型、信息论和模式识别、专家系统等人工智能科学手段,这与用仪表作为故障诊断已大大跨前了一大步,它反映了人们对工况监视与故障诊断的认识进一步演化。对于某一工程实际问题,往往需要综合应用多种科学工具,其各种科学方法相互联系、相互渗透。如模式识别,离不开特征分析、特征分析离不开数学模型和信号检测。

机械设备故障诊断首先要识别机械设备系统运动状态,故障诊断过程,基本上可认为是模式识别过程,其诊断过程可用图10-1 概括为特征信号在线检测,特征分析(包括建立数学模型),特征量选择、状态分析和决策分类(包括正常与异常工况识别,故障原因分析和故障发展趋向预报)。

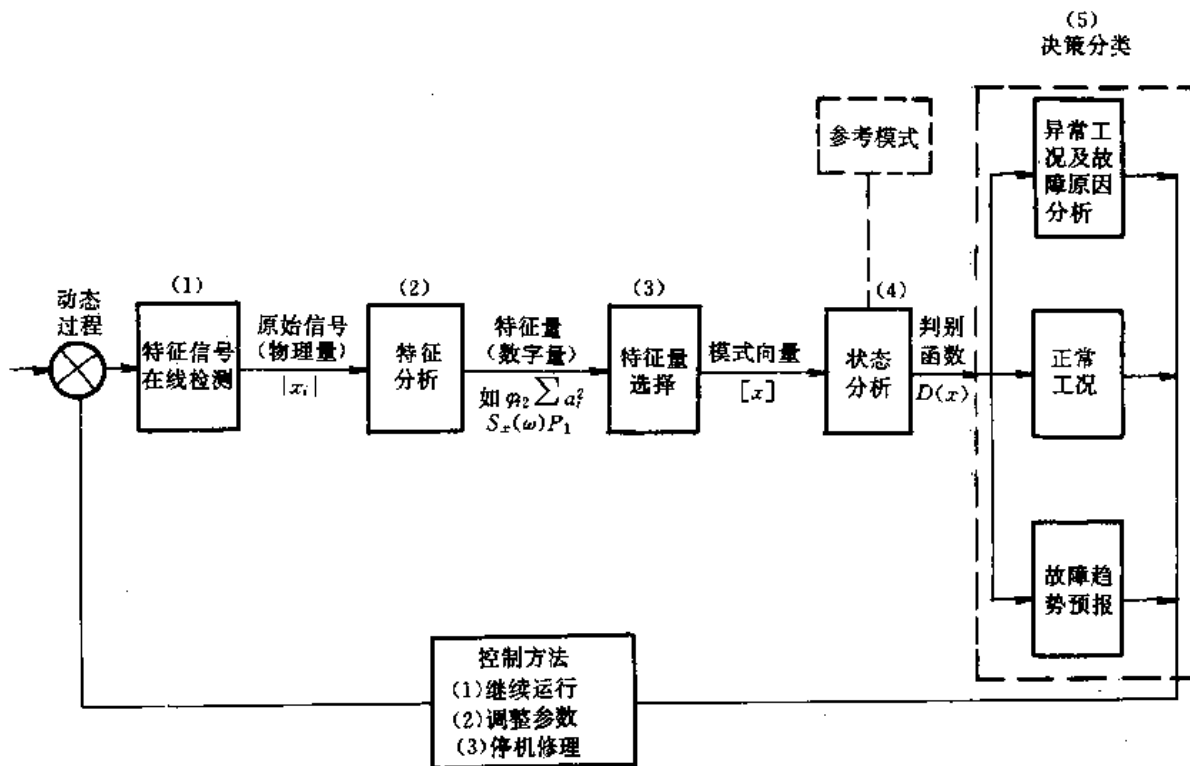


图10-1 故障诊断方框图

1. 信号在线检测

信号检测必须满足两个要求,第一是要求在线检测,否则达不到工况监视与故障诊断的目的。而离线检测(如在实验室进行)一般用于故障原因分析。例如测量温度的传统方法是

采用热电偶,对于测量轴承升温,熔炼炉温度,这种方法仍然有实际意义。如果在生产条件下,测量刀具温度,磨削温度就不可能实现,不仅因为响应慢,并且任何零件上都不允许在它内部埋置热电偶,这时就需要用到光纤红外等检测方法。第二是要求所选择信号能反映故障症状,但这并非易事,一个动态过程包含的信息是十分丰富的。振动、力、力矩、位移、温度都可以用作监视、诊断信号,但不是每一种信号都能反映故障症状,只能选择其中最敏感的作为特征信号。这就要求根据经验或对故障机理的初步研究分析,在大致对易发生故障和易发部位有所估计的情况下,选择与故障有关的信号进行检测。表10-1和表10-2分别列出的通常机械设备故障诊断和机床精度诊断的内容,读者可比较领会。

2. 特征分析

对信号进行处理,提取特征值,实现信号分离(去除干扰),满足于计算机辨识的需要。在特征分析之前,需将原始信号进行预处理,如滤波、平滑等。而特征分析,是将预处理的数据进行归纳、分析、去伪存真。有了特征量,就能识别机器的工作状态,进行工况状态分类。实践证明:用单一特征量的门限值作为判据,误判率总是很高。因此特征量不能太少。

3. 特征量的选择

根据特征量与故障症状的关系,在特征分析基础上,进一步选择特征量,这是一个去粗取精的过程,是工况监视与故障诊断中重要的一环。用上述方法得到的特征量很多,它们与工况状态的相关程度、敏感性和规律性并不一样。特征量选择的要求是选择对工况状态相关性大,反映灵敏的特征量,用它作为模式向量,构成模式空间,有效地实现工况监视并进行故障诊断。

4. 状态分析

状态分析是根据状态的类集性,寻找某种能进行分类的判别函数。例如距离函数、似然函数、势能函数等。在许多情况下,用训练样本,自学习分类方法或其它人工智能方法是有效的。

5. 决策分类

有了判别函数之后,使可以对工况状态进行分类。如果工况正常,计算机发出指令,机器继续运行,一旦故障形成之后,计算机能分析故障程度、性质、部位和原因,对功能失常的故障,通过可调参数,使功能恢复正常。对于功能失效的故障,计算机发出指令,命令停机,以便更换零件,或人工修复,使功能恢复正常,在故障形成之前,可以用时间序列分析、卡尔曼滤波或灰色控制系统方法对故障发展趋势进行预报,防止故障扩展,防患于未然。

第二节 机械故障诊断原理与方法

随着现代科学技术的发展,应用于机械设备工况监视与故障诊断的方法也越来越多。故

故障诊断过程可以认为是模式识别过程,其特征分析是基础,它的实质是将动态过程的物理量转变为特征量的过程。数学模型、谱分析及其它信号处理方法都可以实现这种转换,本节将介绍有关建模方法、系统辨识、谱分析及模式识别等基本原理。

所谓系统就是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成并具有特定功能的整体。它的范围视研究的目的而定。如研究某台机床的动态性能,则机床便是一个系统,抽象起来可以用图10-2表示。传统的系统辨识法是已知系统的输入和输出,辨识系统的动态过程,然而在实际工作中,大量的问题对系统动态过程或输入都难以确知的,例如:(1)系统的输入无法观测,如机床在实际工况下的自激振动和磨削温度系统的输入,就很难确知。(2)一个系统如果有多个观测数据序列,它们之间的因果关系不清楚,或者不完全清楚。如切削过程中的切削力,切削温度和刀具磨损间关系;(3)系统的输入和输出响应虽然确知,但系统受到的干扰(噪声)太多或太大;(4)系统本身的物理性质不清楚,难以用微分或其它方法描述,如磨床的砂轮表面形貌的变化等。

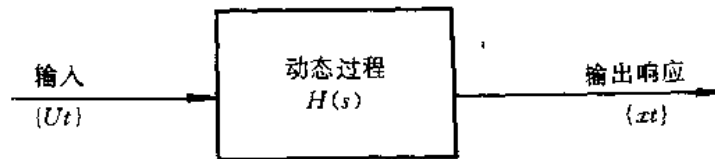


图10-2 系统的组成环节

在处理上述情况时,即使有大量的观测数据(输出),也难以用传统的系统辨识方法建立符合实际工况的数学模型,而用时间序列分析便不存在这类问题。

时间序列分析的实质是对有序的随机数据(信号)处理的一种方法。一个随机过程,从它的序列本身,人们找不到它的规律性,必须通过某种科学工具进行处理后,才能找到它的规律。时间序列分析是对随机数据序列处理的工具之一,它的出发点是承认数据的有序性和相关性,通过数据内部的相互关系来辨识系统的变化规律。它的建模方法是把输入 U_t (图10-2)看成白噪声 a_t ,则:

$$X_t = H(s)a_t \quad (10-1)$$

式中: $H(s)$ 为传递函数。

从数学观点看,时间序列分析是以概率统计为基础的应用数学范畴,它不仅是一个数学模型问题,而且又是信号处理的一个重要方面。在故障诊断与工况监视系统中,原始信号 $\{x_t\}$ 包括有大量的干扰信号,此时,用原始信号作为工况监视的特征量是不可靠的。必须通过处理变换为能表征故障症状的信息。时间序列分析是实现上述变换的重要手段。

所谓数学模型就是系统中各有关变量之间的关系所构成的数学结构。数学模型有两类:一是根据已知物理原理推导出来的,一般用微分方程表示,称为解析模型;二是根据测量出来输入、输出信息的变化规律建立数学模型,时间序列分析模型属于后者,用差分方程表示。一个机器系统如果工况正常,用以表达工况的动态特性的模型是一定的;反之如果工况异

常,模型便变化了,因此通过分析模型结构及参数的变化可以识别及预报系统工况状态及其发展。

一、时间序列模型

1. AR(1)模型

AR模型是自回归模型的简称。时间序列分析研究有序的随机数据序列内在关系与规律,它不需要输入及系统动态过程特性,而是根据数据序列内有的规律性来研究系统特性。

设有观测数据 $x_1, x_2, \dots, x_{t-n}, x_{t-n+1}, \dots, x_{t-1}, x_t$ 。从全过程来看,这些数据是随机的,没有明显的趋向性,然而数据 x_t 与前一数据之间是相关的,此外还受其它因素的影响,即:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t \quad (10-2)$$

式中 ϕ_1 是 x_t 与 x_{t-1} 的相关系数, a_t 残差,表示其它随机因素对观测值的干扰,如果模型能最合适地表征系统,则 a_t 为白噪声。普通回归分析一阶模型表示为:

$$Y_t = \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad (10-3)$$

式(10-2)与式(10-3)所表示的概念基本上一致的,其区别为回归分析式(10-3)是表示在 t 时刻的变量 Y_t 与 X_t 的相关性,因为仅仅考虑在 t 时刻,方程式(10-3)的相关性不包括时间 t 的变化,故是静态相关。而方程式(10-2)是表示同一样量 x_t 在不同时刻 t 与 $t-1$ 时自身的关系,这种相关性因时间而变化,故是动态的。因为它是表明变量 x_t 自身的相关性,故称自相关,方程(10-2)则称之为自回归(Autoregression)方程。显然要使 x_t 与 x_{t-1} 线性相关这一假设成立,则式(10-2)中的残差必须为白噪声。

从 t 时刻来说,方程式(10-2)中所表明的 $t-1$ 时刻观测值 x_{t-1} 是已知的,观测值 x_t 是由两部分组成的,即 $\phi_1 x_{t-1}$ 和 a_t 。其中 $\phi_1 x_{t-1}$ 取决于 $t-1$ 时刻的观测值 x_{t-1} ,在 t 时刻,它是确定的,而白噪声 a_t 是随机的,这样就形成 x_t 是随机的,其随机成分由 a_t 决定,假如 a_t 属于正态分布,则 x_t 亦为正态分布,若 a_t 的方差为 σ_a^2 。显然:

$$E[a_t] = 0 \quad (10-4)$$

$$E[X_t] = \phi_1 x_{t-1}$$

式中 E 为条件期望,因此:

$$X_t \sim \text{NID}(\phi_1 x_{t-1}, \sigma_a^2)$$

$$a_t \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2) \quad (10-5)$$

此处NID是表示正态独立分布(Normally Independent Distribution)。式(10-5)完整写法为:

$$\begin{cases} X_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t \\ \{a_t\} \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2) \end{cases} \quad (10-6)$$

记式(10-6)为AR,表示一阶自回归模型。如果一个系统的动态特性,在正常工况下,满足式(10-6)则意味着在不同时间输出数据的相关性都可以用方程式(10-6)来描述。一旦系统偏离正常工况,数据间的相关性将发生变化,方程式(10-6)就不能再描述该系统特性了。一个系统的动态特性的主要表征就是模型结构(模型类型与模型阶数)、模型参数及残差平方和。

2. ARMA 模型

若系统工况偏离了正常工况,即 X_t 不仅与 X_{t-1} 相关,还同 x_{t-2} 或 a_{t-1} 相关,则数据序列 x_1, x_2, \dots 的内部关系不能用AR表示。记式(10-6)中的 a_t 为 a'_t 。如果 a'_t 与 X_{t-2} 或 a_{t-1} 相关,则:

$$a'_t = \phi_2 x_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + a_t \quad (10-7)$$

式中 ϕ_2 及 $-\theta_1$ 是相应的相关系数,因为除相关成分 $\phi_2 X_{t-2}$ 和 $\theta_1 a_{t-1}$ 外,总还有独立无关部分,即 a'_t 中还是包括有白噪声 a_t 成分。将式(10-7)代入式(10-6),则在 t 时刻的观测值 x_t 应为:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + a_t \quad (10-8)$$

一般写成:

$$\begin{cases} x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ \{a_t\} \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2) \end{cases} \quad (10-9)$$

式(10-8)左边为 x_t 的二阶差分方程为系统的自回归部分,它反映了系统的固有特性,右边为 a_t 的一阶差分方程,表示系统的滑动平均部分(Moving Average)。故方程式(10-8)记为ARMA(2,1)此处ARMA是Autoregressive Moving Average的缩写。括号(2,1)表示自回归部分及滑动平均部分的阶数。

3. ARMA(n, m)模型

以此类推,便可得ARMA(n, m)模型

$$x_t = \sum_{i=1}^n \phi_i x_{t-i} - \sum_{j=1}^m \theta_j a_{t-j} + a_t \quad (10-10)$$

$$a_t \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2)$$

若其中 $\theta_j=0$,则得AR(n)模型:

$$x_t = \sum_{i=1}^n \phi_i x_{t-i} + a_t \quad (10-11)$$

$$\{a_t\} \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2)$$

$t=1, 2, \dots, N$ 。N为样本数。

为了便于研究ARMA模型特性,引入“后移算子” B ,并定义 B 为 $B U_t = U_{t-1}$,记后移 n 步为 B^n 。则有

$$B^n U_t = U_{t-n} \quad (10-12)$$

显然,对ARMA(n, m)模型,有:

$$x_t = \sum_{i=1}^n \phi_i B^i x_t - \sum_{j=1}^m \theta_j B^j a_t + a_t$$

或

$$(1 - \sum_{i=1}^n \phi_i B^i) x_t = (1 - \sum_{j=1}^m \theta_j B^j) a_t \quad (10-13)$$

所以

$$\phi(B) x_t = \theta(B) a_t \quad (10-14)$$

同理,对AR(n)模型,有:

$$(1 - \sum_{i=1}^n \phi_i B^i) x_t = a_t \quad (10-15)$$

$$\phi(B) x_t = a_t \quad (10-16)$$

将式(10-14)、式(10-16)改写成传递函数形式:

对ARMA(n, m)模型,有:

$$x_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (10-17)$$

AR(n)模型,有:

$$x_t = \frac{1}{\phi(B)} a_t \quad (10-18)$$

式 $\frac{\theta B}{\phi(B)}$ 和 $\frac{1}{\phi(B)}$ 分别表示ARMA(n, m)、AR(n, m)模型的传递函数。设

$$\begin{aligned} \phi(B) &= (1 - \lambda_1 B)(1 - \lambda_2 B) \cdots (1 - \lambda_n B) \\ \theta(B) &= (1 - \gamma_1 B)(1 - \gamma_2 B) \cdots (1 - \gamma_m B) \end{aligned} \quad (10-19)$$

式中: $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 为自回归部分特征根;

$\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ 为滑动平均部分特征根。

由此可知在ARMA 及AR 模型中可以直接用以表达系统的动态特征量有:

- ①模型阶数(n, m);
- ②模型参数(ϕ_i, θ_j);
- ③残差平方和 $\sum a_i^2$;
- ④特征根(λ_i, γ_j)。

在特征分析时,常用特征量如自回归部分参数 ϕ_i ,特征根 λ_i ,模型数 n 来分析系统的变化规律。异常工况的模型阶数往往大于正常工况;一般来说 ϕ_1 与系统状态变化最显著, ϕ_2 则次之。其它 ϕ_3, ϕ_4, \cdots 则较小。自回归部分参数的改变,表示系统与外界关系的改变。因滑动平均部分表示外界条件与系统的关系,因此 θ_j 及 γ_j 要重视。残差平方和是表示系统状态另一个重要特征量,相对正常工况而言(用阶次模型),残差平方和愈大,意味着系统偏离正常工况愈严重。

对式(10-10)、式(10-11)作 z 变换后不难发现,AR是全极点模型,ARMA是零点-极点模型。

二、时间序列分析模型特性函数与故障诊断

以上是从模型结构参数的特征量来分析系统状态的变化,下面讨论从系统的特性函数来辨识。

1. 格林函数(Green's Function)

由式(10-17)可知ARMA模型可以表达为:

$$x_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (10-20)$$

将 $\frac{\theta(B)}{\phi(B)}$ 作长除法可得:

$$x_t = (1 + G_1 B + G_2 B^2 + \cdots + \cdots) a_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j a_t \quad (10-21)$$

此处 $G_0 \equiv 1$

式中 G_j 是 B^j 的系数,可以证明自回归部分的特征根, $|\lambda_i| < 1, i=1, 2, \dots, n$ 时, $\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j$ 将收敛于 $\frac{\theta(B)}{\Phi(B)}$,即

$$\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j = \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} \quad (10-22)$$

式(10-21)还可写成:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} \quad (10-23)$$

此式的重要含义是可利用它来定义格林函数,即当用 a_t 及其过去值的线性组合来表示 x_t 时, a_t 的“权” G_j 便是格林数。

ARMA模型建模思路是以白噪声 a_t 作为输入,观测值 x_t 作为输出建模,若系统的输入 a_t 以 δ 函数代替 a_t 时,则有:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \delta_{t-j} \quad (10-24)$$

而

$$\delta_{t-j} = \begin{cases} 1, & \text{当 } t = j \\ 0, & \text{当 } t \neq j \end{cases} \quad (10-25)$$

则式(10-24)表达为:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \delta_{t-j} = G_t \quad (10-26)$$

式(10-26)表明,当输入为 δ 函数时, G_j 就是单位脉冲响应函数。

在ARMA模型中 G_j 是可计算出来的,为了简明地说明概念,以AR(1)为例。已知AR(1)模型为

$$\begin{aligned} x_t - \phi_1 x_{t-1} &= a_t \\ X_t - \phi_1 X_{t-1} &= a_t \end{aligned}$$

即 $(1 - \phi_1 B)x_t = a_t$

故对AR(1)模型而言, $\phi(B) = (1 - \phi_1 B)$, $\theta(B) = 1$,所以

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t = \frac{1}{1 - \phi_1 B} a_t = (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \dots) a_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j a_{t-j} \end{aligned} \quad (10-27)$$

比较式(2-21)与(2-27),可知AR(1)模型的格林函数为:

$$G_j = \phi_1^j \quad (10-28)$$

设 $\phi_1 = 0.7$,按式(10-28)计算在不同的 $t-j$ 时刻的格林函数值为:

$$\begin{aligned} j = 0, t - j = t, G_0 &= 0.7^0 = 1 \\ j = 1, t - j = t - 1, G_1 &= 0.7 = 0.7 \\ j = 2, t - j = t - 2, G_2 &= 0.7^2 = 0.49 \end{aligned}$$

其变化规律如图10-3所示。由图可知,格林函数 G_j 反映出在 $t-j$ 时刻进入系统的扰动 δ_{t-j} 对系统在现时刻还存在的影响或者说系统在现时刻对过去 $t-j$ 时刻 δ_{t-j} 的记忆能力。这

是站在现在时刻看过去值 δ_{t-j} 对现在的影响,当然也可以从现在时刻进入系统的干扰以不同的速度衰减。如能衰减至零(原始平衡位置),系统是稳定的,如果 G_j 不收敛,则系统是不稳定的。

格林函数与模型参数有密切关系。由于AR(1)模型的 $G_j = \phi^j$ (式10-28),由图10-3可知, ϕ_1 值愈大,衰减得愈慢, ϕ_1 值愈小,衰减得愈快。图10-4表示ARMA(2,1)模型在不同参数 ϕ_1 及 θ_1 时的格林函数衰减情况。

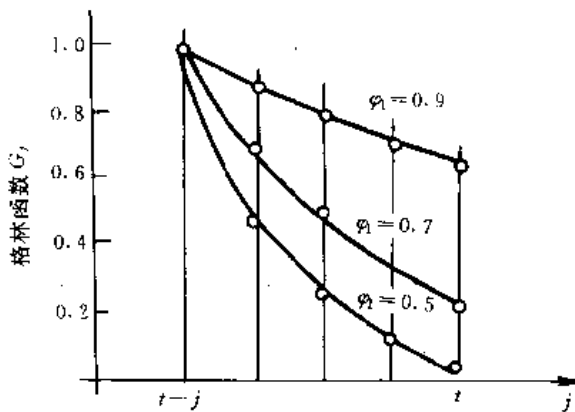


图10-3 AR(1)模型Green函数 G_j

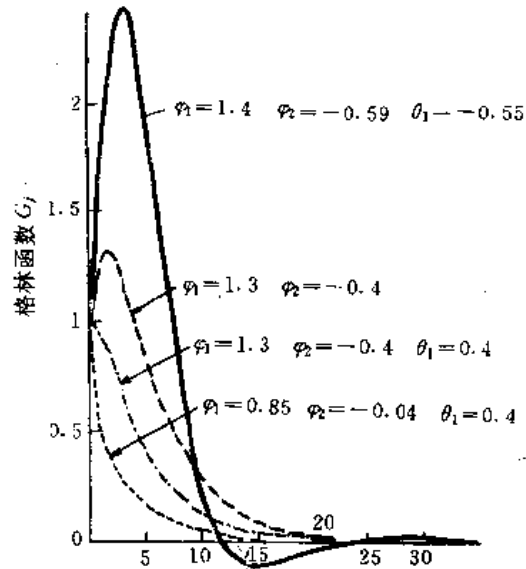


图10-4 ARMA 模型的格林函数

由于格林函数是表示系统响应,可根据模型计算出来,毋需用激振方法施加输入,因此方便于在线应用。如果系统处于正常工况,系统是稳定的,格林函数必然收敛,其衰减形式也是确定的,反之,格林函数便将发生变化,且可能发散。因此格林函数综合地反映了系统的动态特性。

以上是从AR(1)模型引入格林函数的概念及其计算方法,对于ARMA(n, m)模型,其格林函数可按特征根计算:

$$G_j = \sum_{i=1}^n g_i \lambda_i^j \quad (10-29)$$

式中:

$$g_i = \frac{\prod_{k=1}^m (\lambda_i - \gamma_k)}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_k)} \quad (10-30)$$

式(10-29)表明,自回归部分特征根 λ_i 对系统特性的影响,即从 λ_i 的变化可以反映系统状态的变化。

$|\lambda_i| < 1$, 系统稳定;

$|\lambda| > 1$, 系统不稳定;

$|\lambda| = 1$, 系统稳定但不是渐近的。

2. 自协方差函数

协方差函数是随机过程的统计特性说明系统特性。对于平稳的随机过程而言, 自协方差函数 r_k 可定义为:

$$r_k = \text{cov}[x_t, x_{t-k}] = E[(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu)] \quad (10-31)$$

对零均值的数据系统而言, 有:

$$r_k = E[x_t x_{t+k}] \quad (10-32)$$

可以证明是偶数, 即: $r_k = r_{-k}$

由定义, 可以确定自协方差函数的两个关系式的含义:

$$(1) \quad \text{cov}[a_t, a_{t-k}] = \delta_k \sigma_a^2 \quad (10-33)$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

由于 a_t 是表示现时刻的白噪声, 而 a_{t-k} 是表示滞后的白噪声, 如果白噪声的设定是成立的话, 则 a_t 与 a_{t-k} 是独立的, 故只有 $k=0$ 时为 σ_a^2 , 否则都为零。

$$(2) \quad \text{cov}[x_t, a_{t-k}] = \delta_k \sigma_a^2 \quad (10-34)$$

式(10-34)表示现时刻的观测值 x_t 与 $t-k$ 时刻的白噪声的关系, 如果噪声是白色的, 除 x_t 中因含有 a_t 而相关外, 与任何时刻的观测值都是独立无关的。故可得到与式(10-33)相同结论。

$$(3) \quad \text{cov}[a_{t-l}, x_{t-k}] = E[a_{t-l} x_{t+k}] = \begin{cases} G_{l-k} \sigma_a^2, & k \leq l \\ 0, & k > l \end{cases} \quad (10-35)$$

式(10-35)是表示 $t-l$ 时刻的 a_t 与 $t-k$ 时刻的 x_t 之间的关系, 因为:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}$$

所以

$$x_{t-k} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-k-j} \quad (10-36)$$

将式(10-36)代入式(10-35)可得:

$$\begin{aligned} E[a_{t-l} x_{t-k}] &= E[a_{t-l} \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-k-j}] = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \cdot E[a_{t-l} a_{t-k-j}] \\ &= \begin{cases} G_{l-k} \sigma_a^2, & k \leq l \\ 0, & k > l \end{cases} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \gamma_k = E[x_t x_{t-k}] \quad (10-37)$$

式(10-37)即为前述自协方差函数定义。

由上述四个关系式, 可以得到自协方差函数与格林函数的关系。因为:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}$$

$$\gamma_k = E[x_t x_{t-k}] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-k-j}\right)\right] \quad (10-38)$$

而 $E[a_{t-i} a_{t-k-j}] = \delta_{i-(k+j)} \sigma_a^2$ (10-39)

式(10-39)代入(10-38)得:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[G_j \left(\sum_{i=0}^{\infty} G_i \delta_{i-(k+j)} \sigma_a^2 \right) \right] \\ &= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} G_j G_{j+k} \end{aligned} \quad (10-40)$$

利用式(10-29)与(10-40)可得:

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^n d_i \lambda_i^k \quad (10-41)$$

式中

$$d_i = \sigma_a^2 g_i \sum_{j=1}^n \frac{g_j}{1 - \lambda_i \lambda_j} \quad (10-42)$$

式中 g_i, g_j 可按式(10-30)计算。

当 $k=0$ 时 $\gamma_0 = \sum_{i=1}^n d_i$

自相关函数 ρ_k 定义为 $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

所以
$$\rho_k = \frac{\sum_{i=1}^n d_i \lambda_i^k}{\sum_{i=1}^n d_i} \quad (10-43)$$

由式(10-41)及(10-44)可看出自协方差函数 γ_k 和自相关函数 ρ_k 都可以用 λ_i^k 的线性组合来表示,显然和格林函数一样可以表达系统的动态特性,系统稳定与不稳定,主要反映在特征根 $|\lambda_i| \leq 0$, 还是 $|\lambda_i| > 0$ 。如果工况正常,系统必然是稳定的,因 $|\lambda_i| \leq 0$, 则 γ_k 或 ρ_k 都是收敛的。若系统不稳定,工况必然不正常,但工况正常,系统并不一定就不稳定,需具体分析。例如刀具磨损过程中由正常磨损转向急剧磨损时, γ_k 及 ρ_k 都急剧变化,由于自激励振动产生,系统即不稳定,工况亦不正常。

自协方差函数和自相关函数都是随机过程的统计特性,和格林函数一样都可以表达系统的特性,而它的优点在于实际工况监视系统中不需通过自回归部分特征根来计算,可直接从样本值计算。

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N-k} \sum_{t=k+1}^N x_t x_{t-k} \quad (10-44)$$

这可大大加快计算速度,对工况监视是十分有利的。

3. 频率特性函数

定义频率特性函数 $H(\omega)$ 为ARMA 及AR 系统的输入为谐波时的输出与输入之比,借

此说明输入为不同频率 ω 的谐波时输出的特性。

由式(10-14)可知ARMA模型表达式为: $\varphi(B)x_t = \theta(B)a_t$

现令 $a_t = e^{j\omega t}$ 得:

$$\varphi(B)x_t = \theta(B)e^{j\omega t} \quad (10-45)$$

由线性差分方程的解,此时必有:

$$x_t = C(\omega)e^{j\omega t} \quad (10-46)$$

求 $C(\omega)$,可将式(10-45)写成:

$$x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \dots - \varphi_n x_{t-n} = e^{j\omega t} - \theta_1 e^{j\omega(t-1)} - \dots - \theta_m e^{j\omega(t-m)}$$

将式(10-46)代入上式得:

$$C(\omega)e^{j\omega t} - \varphi_1 C(\omega)e^{j\omega(t-1)} - \dots = e^{j\omega t} - \theta_1 e^{j\omega(t-1)} - \dots$$

两边消去 $e^{j\omega t}$ 便得:

$$C(\omega) = \frac{1 - \theta_1 e^{-j\omega} - \theta_2 e^{-j2\omega} - \dots - \theta_m e^{-jm\omega}}{1 - \varphi_1 e^{-j\omega} - \varphi_2 e^{-j2\omega} - \dots - \varphi_n e^{-jn\omega}} \quad (10-47)$$

在实际应用时, x_t 及 a_t 的脚标都是用 $t\Delta$, $(t-1)\Delta$,...,代入式(10-45)~(10-47),则式(10-47)应为:

$$C(\omega) = \frac{1 - \theta_1 e^{-j\omega\Delta} - \theta_2 e^{-j2\omega\Delta} - \dots - \theta_m e^{-jm\omega\Delta}}{1 - \varphi_1 e^{-j\omega\Delta} - \varphi_2 e^{-j2\omega\Delta} - \dots - \varphi_n e^{-jn\omega\Delta}}$$

由式(10-46) $C(\omega) = \frac{x_t}{e^{j\omega t}}$,根据后移算子方程:

$$C(\omega) = \left. \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} \right|_{B=e^{-j\omega\Delta}} \quad (10-48)$$

按频率特性函数定义,此处 $C(\omega)$ 就是频率特性函数 $H(\omega)$,它等于系统传递函数 $\frac{\theta(B)}{\varphi(B)}$ 中的 B 改造 $e^{-j\omega\Delta}$ 所得到的函数。

已知
$$\frac{\theta(B)}{\varphi(B)} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j$$

所以
$$\left. \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} \right|_{B=e^{-j\omega\Delta}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \right) \Big|_{B=e^{-j\omega\Delta}}$$

$$H(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j e^{-j\omega\Delta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k e^{-j\omega k\Delta} \quad (10-49)$$

将时域中格林函数进行傅氏变换便得频域中的频率特性函数。二者分别表示时域和频域系统的动态特性。

4. 功率谱函数

根据Winer-Khintchine定理,功率谱函数与自协方差函数是一对傅氏变换,即有:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= F(\gamma_k) \\ \gamma_k &= F^{-1}[S(\omega)] \end{aligned} \quad (10-50)$$

所以
$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-j\omega k\Delta} \quad (10-51)$$

将式(10-35)代入式(10-51)得:

$$S(\omega) = \sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_j G_{j+k} e^{-i\omega k \Delta} = \sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{j+k} e^{-i\omega(j+k)\Delta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_j e^{i\omega j \Delta} \\ = \sigma_a^2 |H(\omega)|^2 \quad (10-52)$$

所以

$$s(\omega) = \sigma_a^2 \frac{\left| 1 - \sum_{k=1}^m \theta_k e^{-jk\omega\Delta} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^n \varphi_k e^{-jk\omega\Delta} \right|^2} \quad (10-53)$$

对AR(n)模型,有:

$$S(\omega) = \sigma_a^2 \frac{1}{\left| 1 - \sum_{k=1}^n \varphi_k e^{-jk\omega\Delta} \right|^2} \quad (10-54)$$

方程式(10-54)为现在应用最多的自回归谱。由信息论可知,从最大熵的观点得出商谱等价于AR谱,AR谱的谱线无泄漏,频率分辨力高。对短数据序列意义重大。

上述四种特性函数以不同角度表达了客观系统的规律性,根据特性函数的变化规律便可辨识工况的属性。

5. 卡尔曼滤波

1960年卡尔曼(R. E. Kalman)提出一种新的滤波方法,称为卡尔曼滤波。它在时域上用递推法对信号观察值进行处理,以实时给出系统状态参数的无偏、最小方差估计值。由于这种方法实时性强、计算存储量小,估计性能最优,并突破时不变和单维输出输入限制,从而被广泛采用。

先举一简单例子说明递归算法的原理和特点。假定有一被噪声污染的测量数据序列 z_0, z_1, \dots, z_n ,其真值为一未知常数,要求序列的简单平均值。这里可用常规批次处理和递归处理二种方法来求。

	批次处理	递归处理
t_0	$(AV_e)_0 = z_0$	$(AV_e)_0 = z_0$
t_1	$(AV_e)_1 = \frac{z_0 + z_1}{2}$	$(AV_e)_1 = \frac{1}{2}(AV_e)_0 + \frac{1}{2}z_1$
t_2	$(AV_e)_2 = \frac{z_0 + z_1 + z_2}{3}$	$(AV_e)_2 = \frac{2}{3}(AV_e)_1 + \frac{1}{3}z_2$
\vdots	\vdots	\vdots

显然二者结果完全一致,但递归处理显然有二个优点:第一,测量值 z_0, z_1, \dots, z_n ,无需全部存储起来;第二,每一步的运算量是一样的,因而避免了数据增加时运算量不断升级。实际上,用了递归处理,每次得到的新测量值可用来更新或修改旧的估值,此修正后估值又传递到下一步,依次不断重复。这就是卡尔曼滤波基本原理。

离散卡尔曼滤波的原理可简述如下:令 X_k 为 t_k 时表征系统状态的几个参数,称为状态矩阵; ϕ_k 为状态转移矩阵,它可以是时变量, W_k 为输入白噪声数列,其均值为零,协方差矩阵为 Q_k ,则有动态方程:

$$X_k = \phi_k X_k + W_k \quad (10-55)$$

把带有噪声的测量值 Z_k 与状态向量 X_k 联系起来的测量方程可写成:

$$Z_k = H_k X_k + V_k \quad (10-56)$$

式中 H_k 为观测矩阵, V_k 为白噪声测量序列,其均值也为零,协方差矩阵为 R_k 。 W_k 与 V_k 间互不相关。卡尔曼滤波的任务就是对式(10-56)、(10-55)表达的系统模型在已知 ϕ 、 H 、 Q 与 R 情况下,从观测值 z_1, \dots, z_k 求出系统状态向量 X_k 的最佳估值 \hat{X}_k 以及最佳预测估值 \hat{X}_{k+1} 。其思路如下:

假定已得到 \hat{X}_k ,则显然 $\phi_k \hat{X}_k$ 为 \hat{X}_{k+1} 的无偏、最小方差预测估值。当 t_{k+1} 时测得 Z_{k+1} 后,可以用线性递推形式进一步修正 \hat{X}_{k+1} ,得最佳估值。

$$X_{k+1} = \phi_k \hat{x}_k + k[Z_{k+1} - (\phi_k \hat{x}_k)H_{k+1}] \quad (10-57)$$

式中 K 是卡尔曼滤波的增益矩阵,它也可以是时变的,数学推导可证明,最小方差下最佳 K 为:

$$K_{k+1} = P'_{k+1} H_{k+1}^T (H_{k+1} P'_{k+1} H_{k+1}^T + P_{k+1})^{-1} \quad (10-58)$$

此处符号 -1 代表逆矩阵, P' 为预测误差协方差矩阵,它表征 \hat{X}_{k+1} 的估计精度。

$$P'_{k+1} = \phi_k P_k \phi_k^T + \theta_k \quad (10-59)$$

式中 P_k 为滤波误差协方差矩,它表征 \hat{X}_k 估计精度。

$$P_{k+1} = (1 - k_{k+1} H_{k+1}) P'_{k+1} \quad (10-60)$$

上列各式构成了卡尔曼滤波。当 ϕ 、 H 、 Q 、 R 均为已知,且给出初始值:

$$\hat{x}_0 = E\{X_0\}$$

$$P_0 = E\{[X_0 - \hat{X}_0][X_0 - \hat{X}_0]^T\}$$

这样就可以进行计算。图10-5为流程框图。

下面举一简单例子:从一限带噪声的测量数列(如某仪器的测量误差采样值)估算出其常数真值。假定由经验知道此偏差可正可负,范围 ± 2 以内,以此先验为基础,对偏差建立模型,并认为它的方差为 2^2 ,均值为0的高斯随机变量。图10-6所示测量数据分布。令假定用于测量的主仪器的随机误差(白噪声性质),均方根值为0.5,则:

第一,由于 x 为常数,因此 $\phi_k = 1, \theta_k = 0$;

第二,假定仪器对 x 直接测量,则 $H_k = 1$;

第三, $R_k = 0.5^2 = 0.25$,起始条件为 $\hat{x}_0 = 0, P_0 = 2^2 = 4$ 则由流程图

$$k_1 = 4.1(1 \times 4 \times 1 + 0.25)^{-1} = \frac{16}{17}$$

$$\hat{x}_1 = 0 + \frac{16}{17}(z_0 - 1.0) = \frac{16}{17}z_0$$

$$P_1 = (1 - \frac{16}{17} \times 1)4 = \frac{4}{17}$$

然后将 \hat{X} 和 P 引入下一个测量,依此类推。

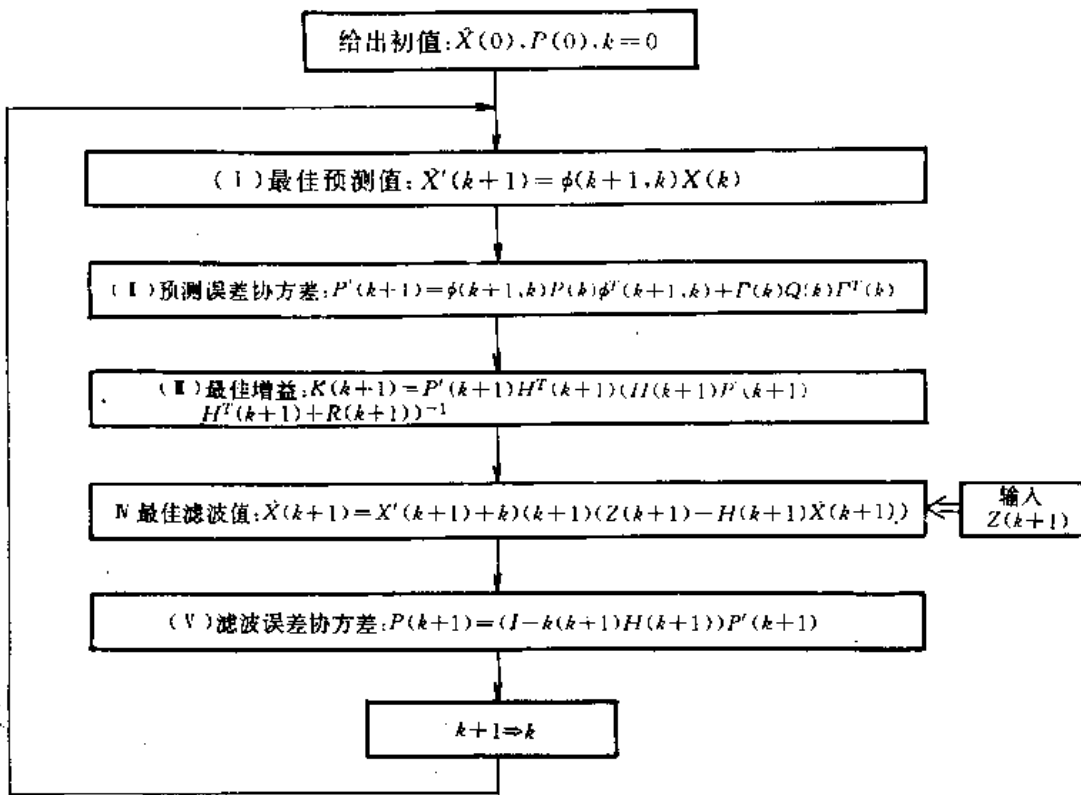


图10-5 卡尔曼滤波流程框图

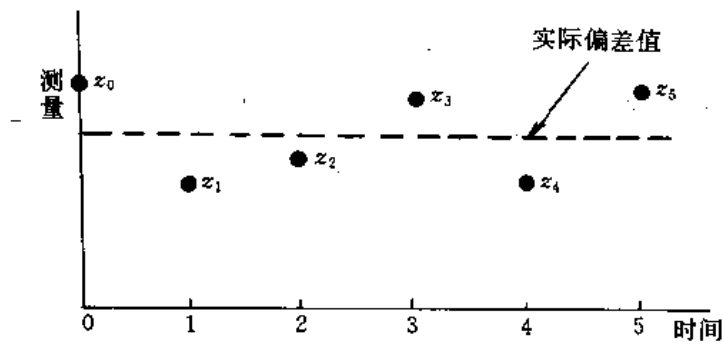


图10-6 测量数据分布

三、测量频谱分析

在机械设备故障诊断过程中,由于系统的动态过程不可避免地受到多种随机因素的干

扰,输出端观测值往往是随机的,因此不容易直接观察其变化特征。然而,这种随机过程往往包含了成分丰富的周期分量,从频率结构进行分析,常常可以清楚地发现系统的状态特性及变化规律,这种分析方法称作谱分析方法。

谱分析方法是在频域中研究信号的频率结构及各种周期分量在总信号能量中所作的贡献,从而获得信号的变化规律及特征。若机械系统存在某种潜在故障,那么在系统输出信号中必然有所反映,谱分析方法使原始时域信号转变为频域信号,使故障信息易于识别。

传统的谱分析方法是DFT(Discret Fourier Transform),它已具有的快速算法及相应的硬件设备。它的缺点主要是因数据加窗,从而产生能量泄漏,影响分辨力。另外,它的频率分辨率为 $2\pi/n$,受采样点数 n 的制约。因而频率分辨率有限。熵谱分析是新发的一种谱分析方法,它的优点是不受数据长度的限制,分辨力高,但谱估计准确度取决于模型参数估计及阶数的确定。因此两种谱分析有各自优缺点。下面谈谈熵谱分析的基本原理及计算方法。

1. 信息和熵

熵的概念在信息论、信号处理、统计物理等学科中得到了广泛的应用。设某一连续随机过程 $x(t)$ 的概率分布 $p(x)$,则单位幅值的信息量为 $\log \frac{1}{p(x)}$ 或 $-\log p(x)$,它是一个随机函数。表示信息量的总体特征根据shannon 信息理论,定义信息量的一阶矩为熵,用 $H(x)$ 表示。

$$H(x) = E[\log \frac{1}{p(x)}] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx \quad (10-61)$$

对于含有 M 个不同事件 x_1, x_2, \dots, x_M ,设其概率分别为 p_1, p_2, \dots, p_M ,则相应的 H_x 为

$$H_x = E[\log \frac{1}{p_i}] = - \sum_{i=1}^M p_i \log p_i \quad (10-62)$$

可见,熵是从统计平均意义上来描述事件发生的不确定性程度的测度指标,它具有对称性、确定性、非负性、扩展性、可加性和极值性等。

对于高斯型的平稳随机序列 $\{x_t, t=1, 2, \dots, N\}$,其联合概率密度函数可以写为:

$$p(x) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det(C_x)]^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}[x - m_x]^H C_x^{-1} [x - m_x]\} \quad (10-63)$$

式中 H 表示共轭转置, C_x 为自协方差矩阵, m_x 为均值向量,高斯过程的熵表示为:

$$H = \frac{\ln[\det(C_x)]}{2} \quad (10-64)$$

当均值为零时,上式可写为:

$$H = \frac{\ln[\det(R_x)]}{2} \quad (10-65)$$

式中 R_x 为自相关函数矩阵,即:

$$R_x = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-M) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-M+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{xx}(M) & r_{xx}(M-1) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (10-66)$$

该矩阵为Toeplitz 矩阵, 且具有hermite 性质, 其中自相关函数

$$r_{xx}(j-i) = E[x_i \cdot x_j^*] \quad (10-67)$$

由式(10-64)、(10-65)可知, 当随机序列为无限长时, 熵将发散, 因此不能用来度量信息量, 此时可用熵率(Entropy Rate) h 来表示, 定义为:

$$h = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{H}{M+1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln[\det(R_x)]^{\frac{1}{M+1}} \quad (10-68)$$

可以证明, 自相关函数矩阵 R_x 的行列式的极限与功率谱密度函数 $S_x(\omega)$ 的关系为:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} [\det(R_x)]^{\frac{1}{M+1}} = 2B \exp\left\{\frac{1}{2B} \int_{-B}^B S_x(\omega) df\right\} \quad (10-69)$$

式中 B 为随机信号的频带宽度, 一般取 $B = \Delta/2$, 其中 Δ 为均匀采样时间间隔, 因而 B 即为信号的上限最高频率。

将式(10-69)代入式(10-68)可得熵率为

$$h = \frac{1}{2} \ln(2B) + \frac{1}{4B} \int_{-B}^B \ln[S_x(\omega)] df \quad (10-70)$$

该结果对于一般平稳随机序列都是适用的。

2. 最大熵谱估计

平稳随机信号的功率谱密度 $S_x(\omega)$ 与自相关函数 $\gamma_{xx}(k)$ 之间的关系为

$$S_x(\omega) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(k) \exp(-j\omega k \Delta) \quad (10-71)$$

当随机信号按Nyquist 采样定理来进行离散化得到离散序列 $\{X_i\}$ 时, 采样周期 $\Delta = B/2$

由式(10-70)可以得到随机信号的熵率。

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \ln(2B) + \frac{1}{4B} \int_{-B}^B \ln\left[\Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k) \exp(-i\omega k \Delta)\right] df \\ &= \frac{1}{4B} \int_{-B}^B \ln\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k) \exp(-i\omega k \Delta)\right] df \end{aligned} \quad (10-72)$$

若已知自相关函数 $\gamma_{xx}(k)$ 的前 $2M+1$ 个值, 要对 $\gamma_{xx}(k)$ 未知数进行最合理的选择, 只要熵率达到极大值, 亦即 $\frac{\partial h}{\partial \gamma_{xx}(k)} = 0, |k| \geq M+1$

由此求得

$$\int_{-B}^B \frac{\exp(-j\omega k \Delta)}{\hat{s}_x(\omega)} df = 0, |k| \geq M+1 \quad (10-73)$$

式中功率谱密度估计值 $\hat{S}(\omega)$ 应受到上面熵率导数等于零的约束。 $\hat{S}(\omega)$ 的倒数可以用截断的Fourier 级数来表示。

$$\frac{1}{\hat{s}_x(\omega)} = \sum_{n=-M}^M C_n \exp(-i\omega n \Delta) \quad (10-74)$$

此处 $C_{-n} = C_n$ 以保证功率谱密度 $\hat{S}(\omega)$ 为正实函数, C_n 为Fourier 展开式的系数, 系数集 $\{C_n\}$ 可以从功率谱密度 $\hat{S}(\omega)$ 满足自相关函数 $\gamma_{xx}(k)$ 的已知值来确定。

$$\gamma_{xx}(k) = \int_{-B}^B \hat{s}_x(\omega) \exp(j\omega k \Delta f), 0 \leq k \leq M \quad (10-75)$$

利用Z变换和闭曲线积分推得:

$$\sum_{n=-M}^M C_n z^{-n} = G_M(z) G_M^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \quad (10-76)$$

式中 $G_M(z) = \sum_{n=0}^M g_n z^{-n}$ 和 $G_M^*(1/z^*) = \sum_{n=0}^M g_n^* z^n$ 可以理解为自相关序列通过具有单位脉冲响应 $g_j (j=0, 1, \dots, M)$ 的 M 阶横向数字滤波器的传递函数, Z 变换符号此处的意义为 $z = e^{j\omega\Delta}$ 。

根据时域卷积概念和柯西留数定理, 上式右端可以写成:

$$G_M(z) G_M^*(1/z^*) = \frac{2B}{P_M} A_M(z) A_M^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \quad (10-77)$$

式中 $P_M = \frac{2B}{g_0 g_0^*} = \frac{2B}{|g_0|^2}$ 为一常数, $A_M(z)$ 和 $A_M^*(1/z^*)$ 相当于一等效的 M 阶横向滤波器的传递函数

$$A_M(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \text{ 和 } A_M^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \sum_{k=0}^M a_k^* z^k \quad (10-78)$$

将式(7-76)和式(7-77)代入式(7-74), 即可得到最大熵谱密度估计公式

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{P_M \Delta}{\left| 1 + \sum_{k=1}^M a_k \exp(-j\omega k \Delta) \right|^2} \quad (10-79)$$

可见, 用最大熵估计的功率谱密度公式是全极点式的, 它与自回归AR模型分析有着密切的联系。

四、最大熵谱与自回归AR谱的等效性

首先考虑用预测误差滤波估计到最大熵谱的方法。如果一个平稳随机序列 $\{X_t\}$, 通过长度为 M 的有限脉冲响应 h_k 的数字预测滤波器(Digital Predictive Filter), 按照最小均方差准则来设计此滤波器, 可以得到其方程式为:

$$\sum_{k=1}^M h_k \gamma_{xx}(m-k) = \gamma_{xx}(m), m = 1, 2, \dots, N \quad (10-80)$$

上式的矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(M-1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(M-1) & \gamma_{xx}(M-2) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(1) \\ \gamma_{xx}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{xx}(M) \end{bmatrix} \quad (10-81)$$

对于预测误差滤波器而言, 有,

由此可以得出预测误差滤波器的传递函数为:

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \quad (10-84)$$

注意到预测误差滤波器的输出为白噪声序列,其输出功率为最小误差功率,亦即:

$$P_m = E(|e_n|^2) = \gamma_{xx}(0) + a_1 \gamma_{xx}(1) + \dots + a_M \gamma_{xx}(M) \quad (10-85)$$

将式(10-81)进行移项并把式(10-83)和式(10-85)分别代入和添进一行,可以得到著名的yule-walker方程:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(M) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(M) & \gamma_{xx}(M-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10-86)$$

上式即为预测误差滤波器的方程式,由此可求得预测滤波因子 $\{a_k\}$ 。

由式(1-84)可得预测滤波器的频率特性 $A(\omega)$ 为:

$$A(\omega) = 1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} |_{z=e^{j\omega\Delta}} = 1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-jk\omega\Delta} \quad (10-87)$$

预测误差滤波器输入随机序列 $\{X_t\}$ 的功率谱可以由下式求出

$$S_x(\omega) |A(\omega)|^2 = P_M \quad (10-88)$$

所以

$$S_x(\omega) = \frac{P_M}{|A(\omega)|^2} = \frac{P_M}{\left| 1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-jk\omega\Delta} \right|^2} \quad (10-89)$$

比较式(10-89)和式(10-79)可知,由预测误差滤波法求得的随机信号的功率谱公式与最大熵谱公式都是全极点模型式自回归模型的功率谱,两者是等价的。

即 $\hat{S}_x(\omega) = S_x$ 且

$$P_m = P_M \Delta = P_M / 2B \quad (10-90)$$

再考虑自回归功率谱,从Wiener滤波观点出发,自回归AR(n)模型(即全极点模型)

$$\begin{cases} x_t = \sum_{k=1}^n \varphi_k x_{t-k} + a_t \\ a_t \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2) \end{cases} \quad (10-91)$$

是一种线性滤波器,将上式两边乘以 X_{t-k} 然后取数学期望,经过适当变换,可以得到Yule-Walker方程。

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(n) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(n) & \gamma_{xx}(n-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\varphi_1 \\ \vdots \\ -\varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10-92)$$

上式中自相关函数矩阵为Toeplitz矩阵,系数 $\{\varphi_k\}$ 及 σ_a^2 可由此方程解出,从而可以求出自相关函数外推值和自回归模型功率谱公式。

$$\hat{S}_{AR}(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^n \varphi_k \exp(-jk\omega\Delta) \right|^2} \quad (10-93)$$

显然,上式与式(10-89)及式(10-83)是完全等价的。且

$$\sigma_a^2 = P_m = P_M \Delta \quad (10-94)$$

再次证明了最大熵谱与自回归谱的等效性。

五、最大熵谱的计算法

最大熵谱的计算可以归结为AR(n)模型的阶数和系数的确定问题,即在某一准则下求解Yule-Walker方程的最优解问题。采用方法有最小二乘方法Levinson-Durbin算法、Cholesky分解算法、Burg算法、Marple算法、LUD算法等。现就其中Burg算法和Marple算法介绍如下。

1. Burg算法

Burg提出了正反向滤波的概念,这种方法以正反向线性预测误差能量的平方和最小为准则来估计参数,首先定义向前预报误差为:

$$f_{n,t} \approx x_t - \sum_{k=1}^n \varphi_{nk} x_{t-k} \quad (10-95)$$

向后预报误差为

$$b_{n,t} = x_{t-n} - \sum_{k=1}^n \varphi_{nk} \cdot x_{t-n+k} \quad (10-96)$$

平均预报误差能量为

$$\sigma_{a,p}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N-p} \left[\sum_{t=p+1}^N (f_{p,t}^2 + b_{p,t}^2) \right] \quad (10-97)$$

令 $\frac{\partial \sigma_{a,p}}{\partial \varphi_{p,k}} = 0$ 即可求出最佳参数

$$\varphi_{n+1,n+1} = \frac{2 \sum_{t=n+2}^N f_{n,t} \cdot f_{n,t-1}}{\sum_{t=n+2}^N [f_{n,t}^2 + b_{n,t+1}^2]} \quad (10-98)$$

得出 $\varphi_{n+1,n+1}$ 值,再用递归公式推算 φ_k 和 σ_a 的值。这种方法不是由Y-W方程直接求出 $\varphi_{n+1,n+1}$ 值,且 φ_k 由递推求解,故计算量小;又由于引入了向后预报误差概念,提高了信息利用率,有助于改善拟合精度。

但Burg法也有一些不足之处。当信号起始相位为变动时,可导致谱线偏移和分裂;低信噪比时,可导致谱分辨率下降,谱线偏移,甚至丢失;阶数的确定还没有找到确切有效措施。但必须指出,Burg的主要贡献是提出了最大熵谱估计的概念。

2. Marple算法

Marple等人认为,Burg法之所以会产生谱线偏移与分裂,主要是只对 $\varphi_{n+1,n+1}$ 求 ϵ 最小值。因此Marple按最小均方准则的正反向线性预测法对所有 φ_k 都求 σ_p 的最小值,建立AR模型的逆推算法。在计算中又将Y-W方程中的R矩阵化成二个Toeplitz矩阵乘积之和,其具体过程如下:

仍定义向前、向后预报误差如式(10-95)、式(10-96),则预报误差总能量为:

$$e_n = \sum_{k=1}^{N-n} (f_{n,k}^2 + b_{n,k}^2) = \sum_{i=0}^n \varphi_{n,i} \sum_{j=0}^n \varphi_{n,j} \gamma_n(i,j) \quad (10-99)$$

式中
$$\gamma_n(i,j) = \sum_{k=1}^{N-n} (x_{k+N-i} x_{k+n-j} + x_{k+i} x_{k+j}) \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (10-100)$$

当预报误差总能量 e_n 最小时,预报精度最高,模型逼近真实系统也最好,据此,令

$$\frac{\partial e_n}{\partial \varphi_{n,i}} = 2 \sum_{j=0}^n \varphi_{n,j} \gamma_n(i,j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10-101)$$

将上式代入式(10-98),可以得到最小预报误差总能量为:

$$e_n = \sum_{j=0}^n \varphi_{n,j} \cdot \gamma_n(0,j) \quad (10-102)$$

将以上两式合并写为矩阵表达式,简记为:

$$R_n \Phi_n = E_n \quad (10-103)$$

式中:
$$\Phi_n = [-1, \varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,n}]^T$$

$$E_n = [e_n, 0, \dots, 0]^T$$

$$R_n = \begin{bmatrix} r_n(0,0) & r_n(0,1) & \dots & r_n(0,n) \\ r_n(1,0) & r_n(1,1) & \dots & r_n(1,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n(n,0) & r_n(n,1) & \dots & r_n(n,n) \end{bmatrix}$$

考察矩阵 R_n ,由式(10-99)可知 $r_n(i,j) = r_n(j,i)$ 及 $r_n(i,j) = r_n(n-i, n-j)$,即 R_n 的结构即满足Hermit 对称性,又满足Hermit 广义对称性,因此将其分解为

$$R_n = T_n^T T_n + (T_n^*)^T T_n^* \quad (10-104)$$

式中 T_n, T_n^* 均为Toeplitz 矩阵,即

$$T_n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n & \dots & x_1 \\ x_{n+2} & x_{n+1} & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & \dots & x_{N-n} \end{bmatrix}, T_n^* = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n+1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-n} & x_{N-n+1} & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

利用 R_n 为对称和广义对称矩阵,以及 T_n, T_n^* 均为Toeplitz 阵的特点,通过引入一些中间变量,就可以递推出自回归系数 $\varphi_{n,i} (i=1, 2, \dots, n)$ 和预报误差滤波器输出功率 $P_n = e_n/2(N-n)$ 。

Marple 算法对每一个系数均通过极值算出,因此克服了Burg 算法的谱分裂现象,且计算简便,成为目前最受欢迎的算法之一。

3. 最大熵谱与DFT 的比较

由前所述可知,最大熵谱和DFT 谱都是对信号频率结构进行分析,但采用的方法不同,因此它们各自存在着优缺点,它们分析比较如下:

第一,最大熵谱估计中用一个动态的数学模型去描述信号的变化规律,这一动态数学模型对信号具有外延性,不存在对信号的截断处理。广义地说,最大熵谱估计法是根据信号内

在规律,对信号作特定的窗处理,从而使得最大熵谱估计更能真实地反映信号的频率结构。而DFT 运算存在着对信号样本数据加窗处理的环节,引起能量泄漏,使得DFT 谱中引入了许多的虚假频率成分。对于随机过程,DFT 谱分析的结果往往反映出分辨率不高。

第二,DFT 是离散谱,分辨率为 $2\pi/N$ 。而最大熵谱是连续谱,使最大熵谱估计法的频分辨率能达到很高的精确度。

第三,DFT 谱估计方法只有在信号长度较大的情况下才能较好地反映信号的真实谱。但最大熵谱估计法由于其外延性,能够以较短的信号长度估计信号频谱,特别适合于对短样本序列作谱估计。

第四,在信号含有较强噪声的情况下,DFT 谱中虚假谱峰的产生使谱失真加剧。常常需要对信号多次平均后进行DFT 谱估计才能克服这一问题,增加了运算的复杂性。而最大熵谱估计中的动态数学模型实际上是一个线性滤波器,它能较好地抑制随机噪声的影响,使谱峰光滑,减少虚假谱峰产生的可能性。

第五,最大熵谱估计的准确度与模型阶次的确定有关,也与参数估计的方法有关。前面提到的参数估计方法实践表明都是较有效的,而模型阶次的确定至今仍没有较完美的统一方法。由于模型阶次定得过高,会导致虚假谱峰的产生;定得过低,则实际应有的谱峰在图上消失,因而模型阶次的确定是最大熵谱估计中十分突出的问题。而DFT 谱就不存在这些问题。

第六,最大熵谱估计的前提是信号频谱是有理谱,否则,最大熵谱估计法得到的谱不能确切代表信号的频谱,甚至完全无意义。这是最大熵谱估计法的一个局限性。相反,DFT 谱估计不需要这一前提,对非有理谱密度的信号同样能够作谱估计,这是至今应用DFT 法仍很广泛的原因。

六、倒频谱

倒频谱可以比较容易地识别信号的组成分量,便于提取其中有用信号成分,它广泛应用于多径回声检测,延时估计,振动和噪声源的识别,机械结构系统动态特性识别,机械故障诊断与预报,以及地震分析等方面。

倒频谱根据不同应用场合,有两种不同的定义,一是功率倒频谱,二是复倒频谱。

1. 功率倒频谱

自谱为 $S_x(f)$ 的时域信号 $x(t)$,其功率倒频谱为

$$C(\tau) = |L[\log S_x(f)]|^2 \quad (10-105)$$

工程应用上常取平方根值作为信号 $x(t)$ 的有效幅值倒频谱

$$C_x(\tau) = \sqrt{C(\tau)} = |L[\log S_x(f)]| \quad (10-106)$$

2. 复倒频谱

$$C_x(\tau) = L^{-1}[\log S_x(f)] \quad (10-107)$$

若将 $C_x(\tau)$ 与信号 $x(t)$ 的自相关函数 $R_x(\tau)=L[S_x(f)]$ 进行比较,可以看出倒频谱与自相关函数都具有相同的量纲,即时间量纲,一般取毫秒(ms)计。在倒频谱中称此自变量为“倒频率”。 τ 值大者,称为高倒频率,表示频谱图上快速波动和密集谐波; τ 值小者,称之为低倒频率,表示频谱图上的缓慢波动和疏散谐波。倒频谱能检出功率谱中的同期分量,如谐波及边带,尤其是混合有不同族的谐波和边带的复杂信号的分析,它比自相关函数分析有效。

第三节 机械设备故障诊断举例

机器设备在运行中,许多关键零部件故障是人们十分关心的问题,其中特别是齿轮与轴承早期磨损与破坏,紧固件松动等。如能及早发现,及时采取措施,便可预防突发性故障,避免造成更大的经济损失。下面就轴承、齿轮的故障诊断介绍如下。

一、轴承的故障诊断

1. 轴承的损伤与特征量信号

滚动轴承中常见的损伤(它是引起故障进而失效的重要原因)以及有关的能反映故障的特征信号到表10-3中。轴承工作时,若外环内滚道表面有凸起或例如裂纹、剥落、电蚀等引起的斑点。经轴承滚动体碾压,便会产生周期性的冲击而引起振动并伴随有噪声、间隙或油膜的变化,还因接触应力引起磨损,如图10-7所示。

表10-3 轴承损伤与可测特征信号

可测方法 损伤现象	振 动	噪 声	温 度	磨损微粒	轴承间隙	油膜电阻
表面剥离	☆	☆	×	☆	×	×
裂 纹	☆	☆	×	△	×	×
压 痕	☆	☆	×	×	×	×
磨 损	☆	☆	△	☆	☆	☆
电 蚀	☆	☆	△	☆	☆	☆
油 蚀	☆	☆	△	☆	☆	☆
塌 角	☆	☆	△	☆	△	☆
烧 伤	☆	☆	☆	△	×	☆
生 锈	△	△	×	☆	×	△
保持架损坏	△	△	×	△	×	×
蠕 变	△	△	△	△	×	×
能否在旋转中测试	能	能	能	困难	困难	能

注:表中☆——强相关项;△——弱相关项;×——不相关项。

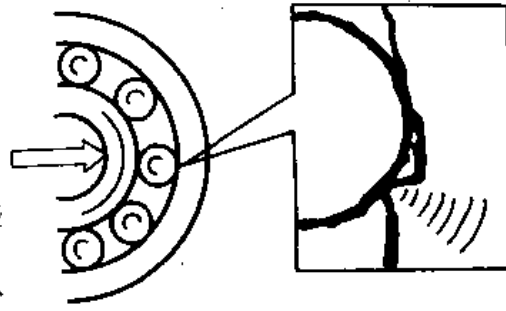


图10-7 轴承损伤

检测表中所列的特征信号的一个或几个作适当处理,就可能据此作出诊断。

2. 轴承故障诊断仪

(1) 油膜电阻式轴承故障诊断仪

轴承润滑状态正常或轴承无缺陷时,因为油不是良导体,它把两金属摩擦面分开,起一定的绝缘作用。当轴承有故障或润滑状态不良时,各接触面的微凸体相互接触产生了一系列的脉冲,该脉冲数随微凸体接触的频度而不增加。随着润滑状态的恶化,脉冲增加,轴承原有的等效阻抗下降,测量油膜电阻就能诊断工作轴承的故障。

国产的有HB-1型轴承故障诊断仪,瑞典SPMBEA-52型油膜厚度测定仪以及日本的NSK轴受异常预警装置,其工作原理介绍如下。

如图10-8(a)所示,系统由探棒3、带有指示表头的仪器本体2和夹头1三部分组成。测试时,应将夹头与轴承座接地螺栓相连,把探棒贴在转轴上而形成一个测量油膜电阻的回路,图10-8(b)为它的原理图。当轴承发生故障时,轴承油膜的等效阻抗下降,表头的指示值从绿色表示的“正常”区域开始逐渐增加,向形成短路的示值靠近,经过黄色表示的“警告区”进入“危险区”(红色)为止。

图10-8(c)表示当这类仪器具有输出插孔时,还可以外接示波器以监察时域信号和外接谱分析仪对润滑状态作进一步分析。这类仪表结构简单,价格低廉。但只适用于支承情况十分简单的场合(例如电动机或发电机的单轴双支承情况),当同一转轴上有数只轴承分作两端支承时,它可以判定这些轴承的否有缺陷,但无法区别是其中哪一个有问题。此外,在转轴转速过低(如低于200r/min)时,仪器也无法正常工作。

(2) 冲击脉冲解调式轴承故障诊断仪

当滚动轴承因表10-3中所列损伤或制造装配不良等原因引起周期性冲击时,该周期性冲击近似于矩形脉冲,且损伤越多越大,冲击也越烈。如图10-9(a)所示。研究表明,按照赫兹理论,这种周期性冲击引起的纵波在轴承材料尚未发生形变之前就以声速向外发射,并具有陡峭的前沿和极丰富的高频频谱。随着材料形变的发生,这种纵波急剧衰减,因此冲击所发

射的冲击脉冲常常极短促,甚至是脉宽不足 $1\mu\text{s}$ 的窄脉冲。

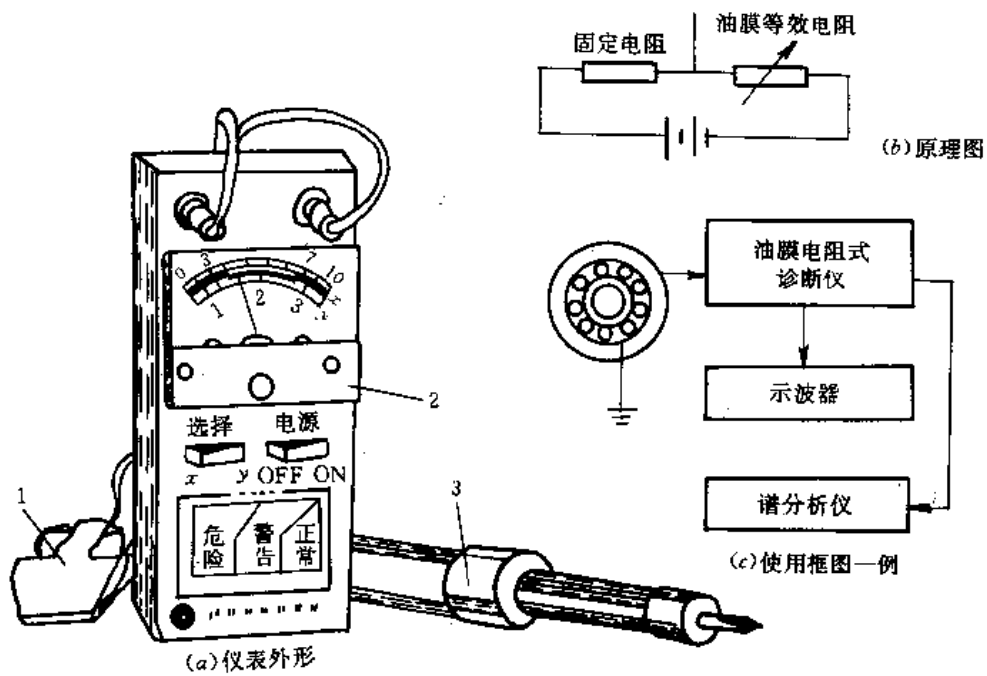


图10-8 油膜电阻式轴承故障诊断仪

1—夹头;2—表头及仪表本体;3—探针

常见的冲击脉冲解调式故障诊断仪有瑞典的SPM Shook pulse meter43A, 国产的CMJ-1 冲击脉冲计等。

轴承的冲击脉冲由仪器中的传感器拾取,由于传感器本身固有频率 f_s 的响应特性,其输出的时域波形将呈图10-9(b)状,即成为频率为 f_s 的高频周期性减幅振荡,该高频减幅振荡信号经解调、滤波成为图10-9(c)状,然后再作合适的电量或无量纲(例如dB_v)显示。

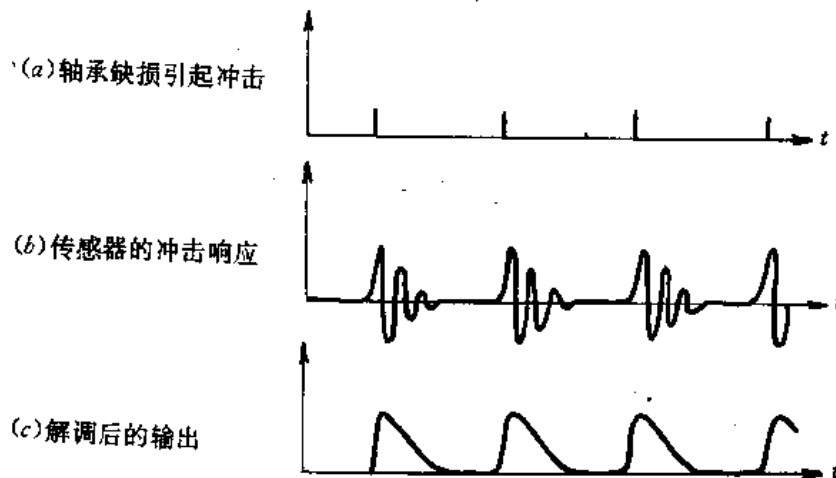


图10-9 轴承所受的周期性冲击

轴承中的冲击脉冲还决定于轴承零件在冲击点的相对线速度,而线速度又取决于轴承的大小及转速。所以即使表面状况很好的轴承,在几何尺寸及转速不同时,也会有不同的冲击脉冲值,称之为初始值,记作*i*,以分贝值表示为*dB_i*,对物滚动轴承,有下关系式:

$$i = \frac{nd^{0.61}}{2150} \quad (10-108)$$

它以分贝值表示:

$$dB_i = 10(\ln n + 0.611gd - \lg 2150) \quad (10-109)$$

冲击脉冲解调法规定,当冲击脉冲值(记作*SV*),其分贝值以*dB_{sv}*表示,高达初始值*i*的1000倍,即*dB_{sv}*由初始值升高60dB时,轴承寿命终止。

由于规格不同,转速各异,各工作轴承值*i*(或*dB_i*)不同,它的千倍值*SV*(或*dB_{sv}*)也不同,就无法对不同规格和工况的轴承作出是否处于同一寿命阶段的评价。为此,规定了一个相对指标,称为故障级(又叫标准级)*N*,其分贝值记作*dB_N*,它们的关系式为:

$$N = \frac{SV}{i} \text{ 即 } dB_{SV} = dB_i + dB_N$$

任何动轴承,不管规格和线速度如何,只要*dB_N*相同,就称处于相同的寿命阶段。根据大量试验数据的归纳,通常认为*dB_N*值在20dB以下时,轴承基本无损伤而处于良好状态,此时仪器指示处于绿区,*dB_N*值在20~35dB之间时,轴承已出现较明显的损伤并处在不断劣化的过程中,此时表头指示进入黄区;*dB_N*值35dB以上时,轴承实际上因损伤过大进入了破坏期,此时表头的指示进入了红区(如图10-10所示)。

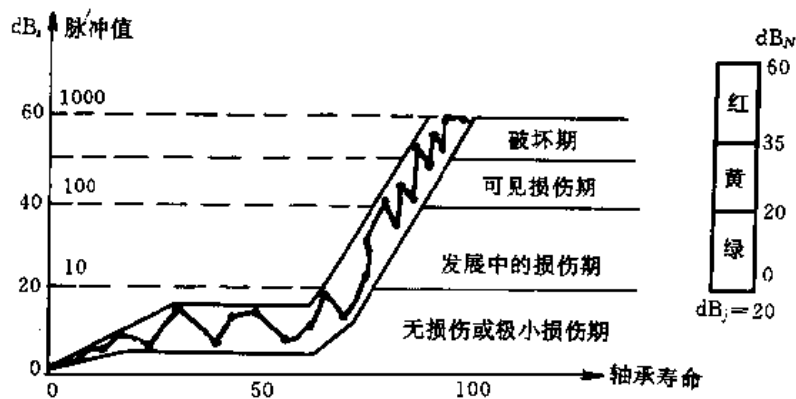


图10-10 轴承冲击脉冲故障诊断

(3) 振动检出式电子听诊器

国产的207电子听诊器,用来诊断轴承故障。如图10-11所示,探针1实际上是固有频率高于20kHz的压电式加速度传感器。工作时,手持探针垂直地压向被诊设备的疑有故障的部位,该处的振动就经插座2输入安置有电路的仪器本体,先经电荷放大,再经增益调节钮3设置的灵敏度归一放大而送入滤波网络,并据工况用带通滤波器选择旋钮4在2~1000、2~30、30~100、100~300、300~1000、1000~3000及2~5000Hz七种通频带范围内任意选择

一种带宽工作。滤波后的信号又送入有效值检波电路而在表头5内作液晶式数字显示。同时所拾取并经滤波后的信号,可通过接线端6作时域信号输出(外接示波器作波形观察或外接频谱分析仪进行频谱分析),也可经功率放大后经接线端7驱动耳机作声音监听诊断输出。

图10-12是应用该听诊器进行设备诊断的实例时域波形。图(b)是某化纤厂一台增压泵在发觉声音异常后用该电子听诊器输出的波形记录,其振动量颇大,而图(a)则是同一增压泵正常运转时的波形。以检查,出现图(b)波形的原因是该增压泵轴承缺油所致,避免了如不及时排除故障,停机一小时即会造成30万元产值的损失。同样(c)、(d)也是用这一听诊器对某台风机外壳的同一测点所得的振动波形,(c)是设备正常,(d)是有异常,原因是风机风扇受损变形;又如图(e)、(f)分别是对一台5号风机同一测点所得的正常与异常情况下的时域波形输出,异常的原因是5号机轴承缺油。

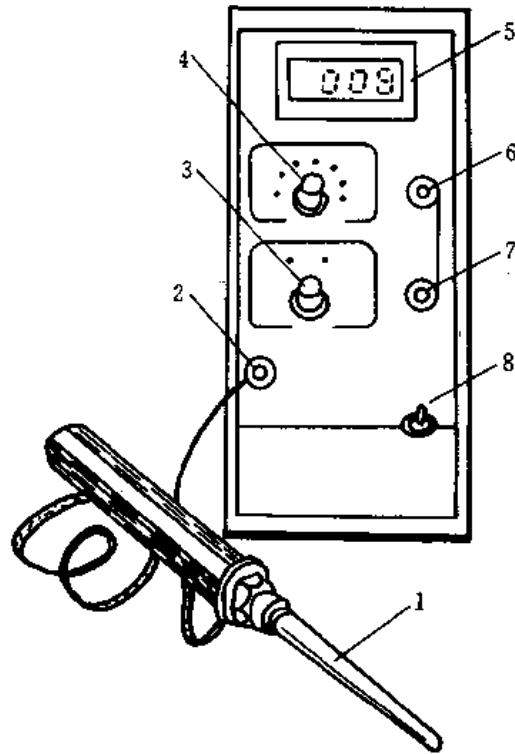


图10-11 轴承故障诊断电子听诊器

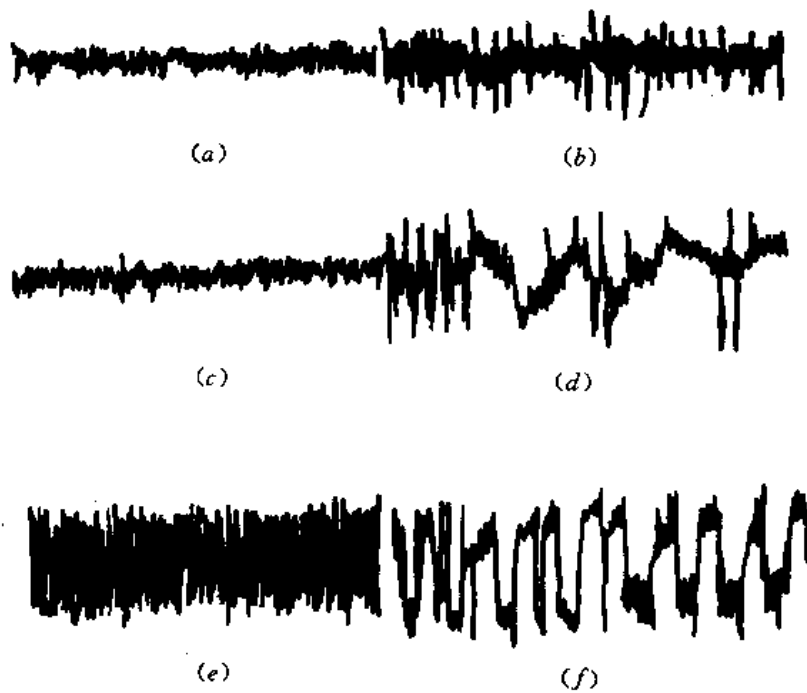


图10-12 听诊器对设备故障诊断实例

以上例子说明,简易诊断仪只要对象合适,使用得当,也有效果。显然,对于结构复杂的设备,如多级变速的齿轮箱,用上述的简易诊断仪,一般都不能作出全面有效的评价。

二、齿轮传动的故障诊断

1. 齿轮传动的基频和谱特点

和轴承的精密诊断一样,齿轮传动的故障诊断,大多也借助于所检测出来的有关信号的分析处理。比较多的是作谱分析。

一般的承载齿轮,常见的引起失效的形式主要有:缺损、断裂、磨料磨损、粘附磨损或擦伤以及疲劳剥落;作为承载较轻以保证精确传动比为主的齿轮传动系统,齿轮及有关轴、轴承等在制造、装配和载荷下各种误差及综合效果,就常常成为精度诊断的主要内容。

即使是制造装配精良并作理想的无测隙传动的一对齿轮,也会因参与工作的主动轮齿面而引起振动。由于齿轮具有质量,轮齿等效可看作弹簧,因此齿轮可看作是一个振动系统。它有下列三种基本频率:

(1)转轴的旋转频率 f_0

$$f_0 = n/60(\text{Hz})$$

式中: n ——齿轮所在轴上的转速(r/min)。

(2)啮合频率 f_m

$$f_m = zf_0(\text{Hz})$$

式中: z ——齿数。

对于齿数不等(分别为 Z_1 和 Z_2)的一对啮合齿轮,由于传动比

$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{f_{01}}{f_{02}}$$

显然有: $f_{m1} = f_{m2} = Z_1 f_{01} = Z_2 f_{02}$

式中:下标1,2各对应于齿轮序号 Z_1, Z_2 。

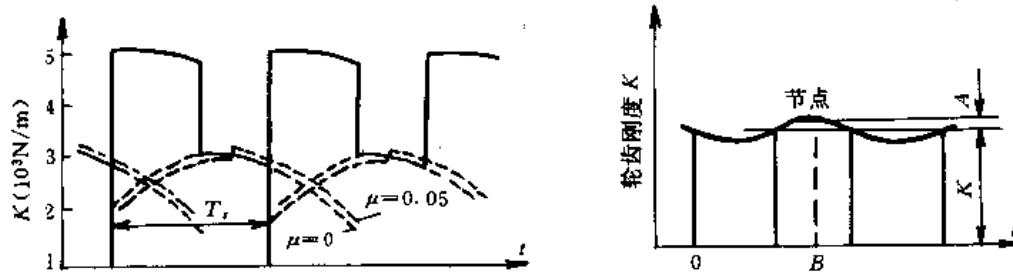
(3)齿轮的固有频率,形式上可记作

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

式中: K, M ——分别为一对齿轮的等效质量和等效刚度。

实际情况要复杂得多。图10-13(a)所示为一对直齿轮传动中的刚度变化。由图可见,仅齿轮刚度一项,在单齿啮合和双齿啮合的情况下差别就很大,几乎呈矩形周期波状。如再考虑实际实际制造装配中的齿轮误差和其它原因,由单齿向双齿啮合的实际过渡点又不同于理论上的几何过渡点。图中点划线则表明了摩擦力(以摩擦系数 μ 表征)对弹簧刚度的影响。这种影响实际上也是很微小的。此外,图中也反映了由于齿面相对滑动速度方向的改变,摩擦力也在节点处改变了方向。图10-13(b)是一对斜齿轮的啮合情况,其刚度变化接近于简谐变化,显然比直齿轮小得多。

不难理解,由于齿轮的弹簧刚度随参与啮合的齿数而变化,又从信号描述一章可知,一个矩形波可以分解为许多简谐波之和,而且这些谐波的频率分量中,必有与齿数有关的啮合频率 f_m ,高次谐波 $2f_m, 3f_m$ 等。若齿轮误差中也含有以每一个齿为重复的周期误差,则显然,齿轮的振动谱就是以该啮合频率 f_m 及其高次频率分量组成的复杂谱。这说明了啮合频率 f_m 在齿轮传动故障诊断中的重要意义。



(a)直齿轮一对啮合齿的弹簧刚度变化

(b)斜齿轮一对啮合的弹簧刚度变化

图 10-13

以下叙述各类故障在频域中的表现,以作为齿轮传动故障诊断尤其是精密诊断时的参考。当某些异常齿轮工作时,齿面上所受的周期冲击力无论其强度和形态都将产生变化,在该力的激励下,齿轮的 f_0, f_m 和 f_s 及其谐波分量都将在综合谱图中发生相应的变化。归纳起来,大致有:

(1)当齿轮磨损时,啮合频率 f_m 及其谐波分量保持不变,但幅值大小会有所变化,高次频率分量的幅值将明显增大。

(2)当齿廓有变形或齿根有裂纹时,啮合频率 f_m 的幅值变大,其谐波分量也增加。换言之,将较正常的频谱多出现新的频率成份,这说明时域上冲击脉冲变窄或出现了新的冲击脉冲。

(3)当齿轮中出现断齿时,由于断齿间隔影响了与齿数有关的啮合周期(啮合频率 f_m 的倒数),也因为类似的原因会引起旋转频率 f_0 和啮合频率 f_m 及其频率分量的变化。

(4)当齿轮(含所在轴)出现平衡不佳,对中不良和机械松动等缺陷时,将出现旋转频率 f_0 的低次谐波。

(5)当齿轮因在切齿过程中留有切齿时复映的制造误差时,该复映误差的相应频率必反映原加工齿轮机床的某个例如分度蜗轮齿数,即必表现为一个特定的转频谐波,且可能在跑合磨损后降低其幅值。

(6)当齿圈有偏心时,除振幅增大外,将出现以与偏心有关的以转频 f_0 为低频和以啮合频率 f_m 为高频的调幅信号,而在谱图上出现 $f_m \pm f_0$ 及其谐频的边频带。

(7)当传动齿轮有角速度(转速)波动时,由于 $\omega = 2\pi f$,将出现调频现象。如果齿轮轮齿的节距不等,也同样会产生调频现象而产生边频带。

实际上,由于多个齿轮组成传动链,所反映的总信号相当复杂,是既有调幅,又有调频,

还有附加脉冲的综合信号。图10-14 是为了表示可把总信号分成附加脉冲和调幅两部份的直观表达。类似地当然也可把复杂的总信号分解为调频、调幅和附加脉冲这三部份。

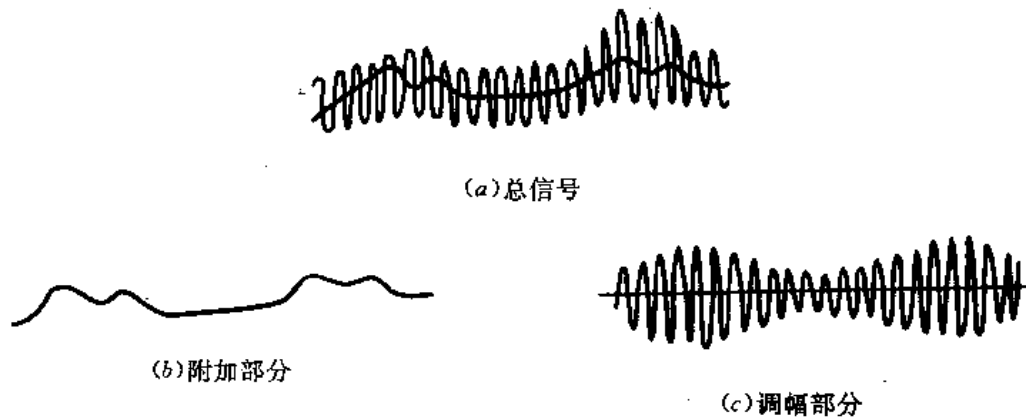


图10-14 将齿轮箱振动信号分解出附加脉冲
(a)总信号 (b)附加部份 (c)调幅部份

此外,谱图上边频带不象纯调幅和纯调频那样常作对称状。例如当齿轮存在偏心时,在由于齿面载荷变化引起调幅现象的同时,又会因为齿轮转速不均匀而引起调频现象。图10-15 中,(a)是考虑相位后的调频带,(b)是调频谱上第2,3 和4 阶边频的调幅谱,(c)是综合了调频、调幅对三阶边频影响的结果,(d)、(e)是两种现象综合影响下在谱图上形成的不对称边频带。

总之,齿轮啮合中的缺陷,有局部的,也有均布的。前者发生在一个或数个齿上,例如缺损,变形等;均布缺陷发生在整个啮合周期中,例如由于偏心引起的轮齿载荷不均匀。监察齿轮有无缺陷相对来说是较容易的,但因具有相应频率表现的许多齿轮和许多不同缺陷的传递与叠现,要在一张综合的时域波形或谱图上一一分离判断,就相当复杂了。鉴于倒频谱有能卷积和使谱线定位明确突出的优点,对于复杂齿轮传动系统的多种频率成分的边频带调制信号分析尤其有利,因此,常常成为齿轮箱精密诊断的基本处理手段。

2. 齿轮箱精密诊断实例

以图10-16 所示的高速精密车床的床头箱为例。

诊断目的——确诊各传动件包括传动齿轮、轴承、传动轴以及关联传动件有无设计、制造、装配中的不足,特别是这些不足之处对床头箱-主轴系统振动的影响。

依据——车床整体,床头箱传动图和具体结构的设计、制造、工艺图纸等技术文件。

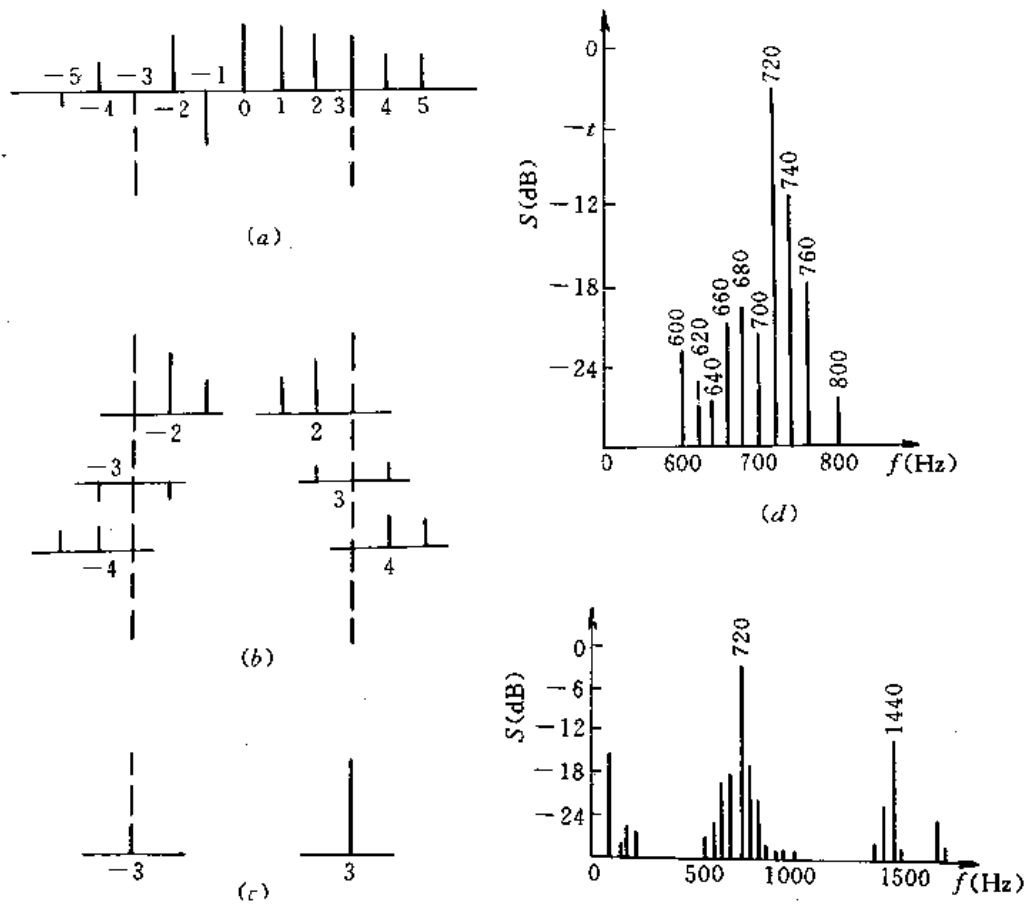


图10-15 由于调幅和调频的综合作用,在谐波上形成不对称的边频带

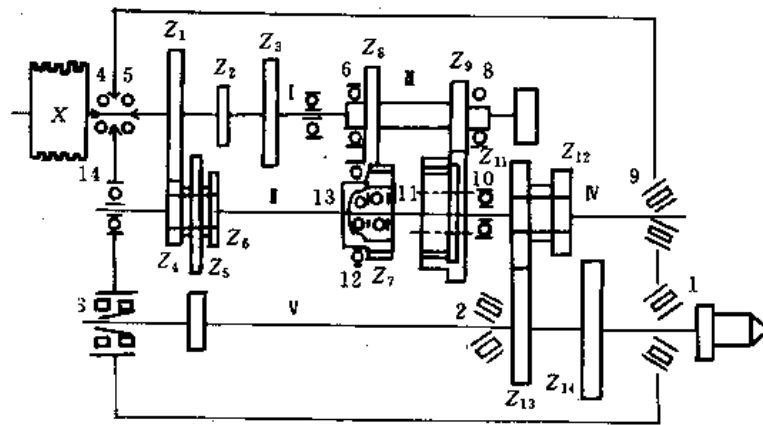


图 10-16

实施步骤如下:

(1)依次对床头箱的传动件(齿轮、轴承、轴)编号,根据技术文件、图纸或实物(设备)给定的齿数、轴承参数等,用上节和本节列出的各项算式计算出各轴的旋转频率 f_a ,啮合频率 f_m 和其它表列的各项特有脉动频率。一般可以先按主轴或挑选的其它主要传动轴为基准计算频次(相对频率),然后乘以实测的某一传动轴的转速来换算得到。

(2)根据事先的调查和对对象振动信号的强弱、敏感部位以及疑为故障传动件的关系等的估计,配置和选择测试系统进行试测,调整后进行正式测试。本例中,采取了在床头箱主要是主轴端部处安装加速度测振仪的办法,其测试框图如图10-17所示。

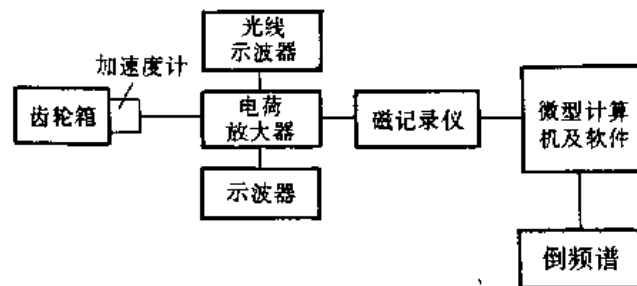


图 10-17

(3)在对测振结果经过预处理并证实测试可靠后,按事先计划好的工况(例如不同的转速和传动路线),按适当的取样长度段和适当的采样频率,在尽可能保留模拟记录的同时,将该信号离散化记入计算机磁盘或其它存储器。值得注意的是,对这种有多种变速档次的复杂齿轮箱,设置与某一转轴的机械同步信号经常是必要的。它常常为合理截取样本段,进行多样本段平滑以提高信号纯度所必需。在设备故障诊断中,用机械同步信号截取多个时域信号样本段组成总体,然后进行总体平滑的过程称为同步平均。

(4)将所得的对应于一定传动路线的已提纯了的信号送入计算机,进行功率谱和倒谱计算并确定谱峰频率。谱峰频率就是谱图上幅值较高处的频率。若齿轮或其它传动件具有某种缺陷,通常在工作中会引起运转的不平稳,而较正常状态更易于振动、发生噪声、发热…。也就必然要从动力源中获取更多的功率或能量,因此具有某种特有频率的传动件,如该频率处取功率谱或倒频谱的高幅值(谱峰),往往意味着所在频率处传动件体现了故障引起的能量消耗。

(5)比较和计算谱峰频率,比照实测谱峰频率和计算所得的特有频率,比照传动件的结构、工艺等寻障并列寻障指示表。寻障时要综合观察时域波形、功率谱(或幅值谱)和倒频谱等。前者较完整地反映信号的整体频率结构,后者比较清楚地具有分开信号与传递信道的能力,二者不可偏废。考虑时频谱图现状,结合工况、结构、工艺等具体分析,才可作出判断。这一判断具有一定程度的科学性和经验性。当然,如果积累并建立了数据库,知识库,完成了推理系统,这一判断也可在智能化了的计算机辅助下完成。

以经过传动路线 $\frac{z_3 z_7}{z_6 z_8} = \frac{3918}{5157}$ 为例,列出计算过程和与实质谱峰频率的对照过程:

齿轮 Z_3 所在轴I(参见图10-16)的实测转速为1364r/min,即该I轴的基本旋转频率为:

$$f_{03} = n_1/60 = 1364/60 = 22.73\text{Hz}$$

因此, Z_3 和 Z_6 的啮合频率同为: $f_{m3} = f_{m6} = Z_3 f_{03} = 39 \times 22.73 = Z_6 f_{06} = 886.49\text{Hz}$, 于是

$$f_{06} = \frac{886.49}{51} = 17.38\text{Hz}$$

Z_3 齿轮的二阶下边带

$$f_{m3} - 2f_{03} = 886.49 - 2 \times 2273 = 841.01\text{Hz}$$

该二阶下边带恰巧与图H 倒频谱中编号为(1)的取峰值时的倒频率 $\tau = 1.2\text{ms}$ 的下列回算频率相近 $1000 \times \frac{1}{\tau} = 1000 \times \frac{1}{1.2} = 833.33\text{Hz}$

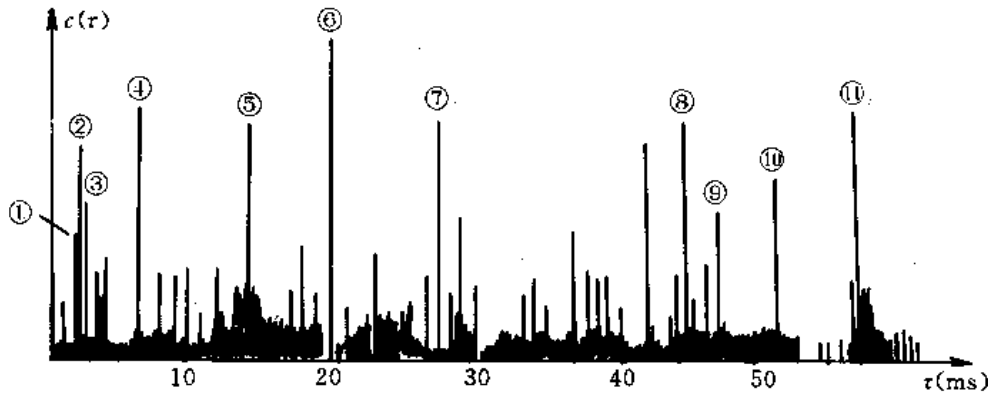


图10-18 齿轮箱振动的倒频谱

两者的相对误差仅为: $\frac{841.01 - 833.33}{841.01} \times 100\% = 0.91\%$

考虑到不可避免的例如齿侧间隙变化和实测转速的误差等因素, 可见图10-18 倒频谱上的第(1)号谱峰频率确实可以认为是齿轮 Z_3 所在轴的转频与齿轮啮合频率的二阶下边带。类似地, 可以以图10-18 中的其它编号谱峰频率为序, 列出寻障表10-4。

表10-4 寻障表

序号	倒频谱峰值 (10^{-4})	倒频率 $\tau(\text{ms})$	回算频率 (Hz)	计算频率 (Hz)	相对误差 %	说明	所指示的故障体 (含相关件)
①	43.03	1.2	833.33	841.01	0.91	Z_3 的二阶下边带	Z_3
②	58.19	1.6	625.0	312.84×2	0.20	倍频	Z_3
③	70.88	1.8	555.56				
④	85.48	5.6	178.57	97.88×2	8.8	倍频	轴承 NO_{14} 内环
⑤	75.92	14	71.43	35.57×2	0.4	倍频	轴承 NO_{14} 滚动体
⑥	104.4	19.2	52.88	13.01×4	0.08	4 倍频	轴承 NO_6 外环
⑦	75.21	24.8	40.32	39.31	2.5	基频	轴承 NO_{12} 外环
⑧	54.92	42.8	23.36	13.01×2	10.2	2 倍频	轴承 NO_{17} 外环
⑨	62.16	46.0	21.74	11.23×2	4.9	2 倍频	轴承 NO_7 滚动体
⑩	50.18	52.0	19.23	20.49	6.1	基频	轴承 NO_{13} 滚动体
⑪	64.07	58.0	17.38	17.38	0.8	转频	轴 II
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

由表可见:

①振动主要发生在 $NO_7, NO_8, NO_{12}, NO_{13}, NO_{14}$ 各轴承的有关元件上;

②齿轮振动主要是 Z_3 及 Z_8 各自啮合时引起的。齿轮 Z_3 的二阶下边带峰值频率指示了齿轮 Z_3 有缺陷。此外,另一传动路线(Z_2/Z_5)(Z_7/Z_8)实测的倒频谱谱峰频率中也出现同一个下边带频率值,指明 Z_2 也有缺陷。

③轴Ⅰ的旋转频率处出现谱峰,有可疑之处。

经对该床头箱的结构、工艺(加工和安装)作检查分析后发现:

①结构上的原因:齿轮 Z_2 和 Z_3 存在缺陷,是因为齿轮箱与皮带轮之间无卸荷装置,致使Ⅰ轴挠曲,不仅造成与Ⅰ轴的中心距发生变化,而且使 Z_3 和 Z_6, Z_2 和 Z_5 啮合状态恶化。 Z_7 位于轴Ⅰ的右悬伸端,处于歪斜状态,使 Z_7 和 Z_8 啮合状态变坏。

②工艺上的原因:经查,花键轴Ⅰ的安装 NO_{12} (6308)轴承轴径处,未注明圆柱度公差,使轴承 NO_{12} 内环随轴径形状变形,造成滚动体与内滚道接触不均匀的冲击振动。

③轴Ⅰ上恰装有三联滑移齿轮,花键轴加工时精度规定不高,极易引起三联齿轮的偏心。

值得注意的是,寻障指示的某传动件振动过大,往往该传动件的相关零件不良而引起的。

应强调指出,机械设备的故障诊断所牵涉的范围极广。不同的对象,要求检测、分析和判断的内容相差可以十分大。例如气压机、风机、汽轮机等设备,就必需考虑空气动力方面引起的喘振诊断等问题。仅检测手段,除本书介绍的内容几乎都涉及外,还常常要应用铁谱分析、金属金相分析、表面层应力分析和疲劳分析等。至于在“断”定和确诊故障时,必要的故障分析、模糊数学的应用更远非本课程所能包容。这里介绍的,仅仅是帮助读者从应用方面理解测试技术的重要性和测试的目标,包括诊断和控制两大方面,并为从事状态监察与故障诊断工作和阅读有关专著提供些基础。

习 题 十

- 10-1 劣化、失效和故障有什么异同? 试叙述之。
- 10-2 机械设备的故障诊断分几大类,各有何作用? 它们联系如何?
- 10-3 用最大熵谱法和傅里叶变换法对信号谱作估计,它们各自特点是什么? 有何异同?
- 10-4 信息和熵的关系是什么?
- 10-5 用一般谱分析为基础作齿轮传动系统的精密诊断时,有无可能区别一对啮合齿轮的各自缺陷属哪一个?
设:(1)该啮合齿轮对齿数相同;(2)该啮合齿数不同。

参 考 文 献

- [1] [美]E. O. 多贝林. 测量系统应用与设计. 科学出版社, 1991
- [2] 严普强, 黄长艺. 机械工程测试技术基础. 机械工业出版社, 1985
- [3] 路宏年, 郑兆瑞. 信号与测试系统. 国防工业出版社, 1988
- [4] 周生国. 机械工程测试技术. 北京理工大学出版社, 1993
- [5] 卢文祥, 杜润生. 机械工程测试·信息·信号分析. 华中理工大学出版社, 1992
- [6] 施因成德 DH. 传感器的接口及信号调理电路. 国防工业出版社, 1984
- [7] [美]A. V. Oppenheim. 信号与系统. 西安交通大学出版社, 1985
- [8] 张明友. 信号与系统分析. 四川科技出版社, 1991
- [9] 南航, 西工大, 北航合编. 自动控制原理. 国防工业出版社, 1980
- [10] 杨叔子. 机械工程控制基础. 华中理工大学出版社, 1984
- [11] 许兴在. 传感器近代应用技术. 同济大学出版社, 1994
- [12] 刘迎春. 传感器原理设计与应用. 国防科技大学出版社, 1993
- [13] 柳昌庆. 实验方法与测试技术. 煤炭工业出版社, 1985
- [14] 王贵悦, 王籍郇. 新编传感器实用手册. 水利电力出版社, 1992
- [15] 张福学. 传感器电子学. 国防工业出版社, 1991
- [16] Digital Signal Processing. ABRAMAM PELED. BEDE LIU John Wiley & Sonz, Inc, 1976
- [17] 王树勋. 数字信号处理基础及实验. 机械工业出版社, 1992
- [18] 杨安禄. 接口技术. 电子科技大学出版社, 1987
- [19] 周士谔等. 物理与工程问题中的计算机解法. 电子科技大学出版社, 1988
- [20] 张世箕等. 可编程电子设备接口技术. 电子科技大学出版社, 1990
- [21] 严楣辉, 杨光壁. 集成运算放大器分析与应用. 电子科技大学出版社, 1992
- [22] 陈光禧, 张世箕. 数据域测试及仪器. 电子工业出版社, 1994
- [23] [美]Robert A. Witte. 电子测量仪器原理与应用. 清华大学出版社, 1995
- [24] 黄仁. 机械设备的故障诊断与工况监视. 东南大学出版社, 1988
- [25] 屈梁生等. 机械故障诊断学. 上海科学技术出版社, 1986
- [26] 杨叔子等. 时间序列分析在工程中的应用. 机械工程(专辑), 1984
- [27] 陈尚勤, 魏鸿骏. 模式识别理论及应用. 电子科技大学出版社, 1985
- [28] 费业泰. 误差理论与数据处理
- [29] 张福炎等. 微型计算机原理与应用. 南京大学出版社, 1993
- [30] 肖明耀. 误差理论与应用. 计量出版社, 1985
- [31] 程佩清. 数字滤波与快速傅里叶变换. 清华大学出版社, 1990
- [32] 曾家智, 向世清. 微型计算机系统与接口. 电子科技大学出版社, 1991