

机械设计手册

单行本

成大先 主编 ●

机械传动



化学工业出版社

内 容 提 要

《机械设计手册》单行本共 15 分册 22 篇，涵盖了机械常规设计的所有内容。各分册分别为：《常用设计资料》、《机械制图·极限与配合》、《常用工程材料》、《联接与紧固》、《轴及其联接》、《轴承》、《弹簧·起重运输件·五金件》、《润滑与密封》、《机械传动》、《减（变）速器·电机与电器》、《机械振动·机架设计》、《机构》、《液压传动》、《液压控制》、《气压传动》。

本书为《机械传动》，包括螺旋传动、摩擦轮传动、带、链传动、齿轮传动、多点啮合柔性传动。螺旋传动、摩擦轮传动主要介绍滑动螺旋传动、滚动螺旋传动、摩擦轮传动的型式、结构、设计计算、应用等；带、链传动主要介绍各种带传动（V 带传动、多楔带传动、平带传动、同步带传动等）的类型、特点、设计计算、张紧和安装等；齿轮传动主要介绍渐开线圆柱齿轮传动、圆弧圆柱齿轮传动、锥齿轮传动、蜗杆传动、渐开线圆柱齿轮行星传动、渐开线少齿差行星齿轮传动、销齿传动、活齿传动等特点、结构、设计计算、应用等；多点啮合柔性传动主要介绍多点啮合柔性传动的结构型式、设计计算、选型方法、动力学计算等。

本书可作为机械设计人员和有关工程技术人员的工具书，也可供大专院校有关专业师生参考。

第 14 篇 多点啮合柔性传动

主要撰稿 王春和 周朗晴 孙夏明 季泉生 马敬勋
审 稿 段慧文 林 鹤 黄靖远 王德夫 洪允楣

MAG85/07014

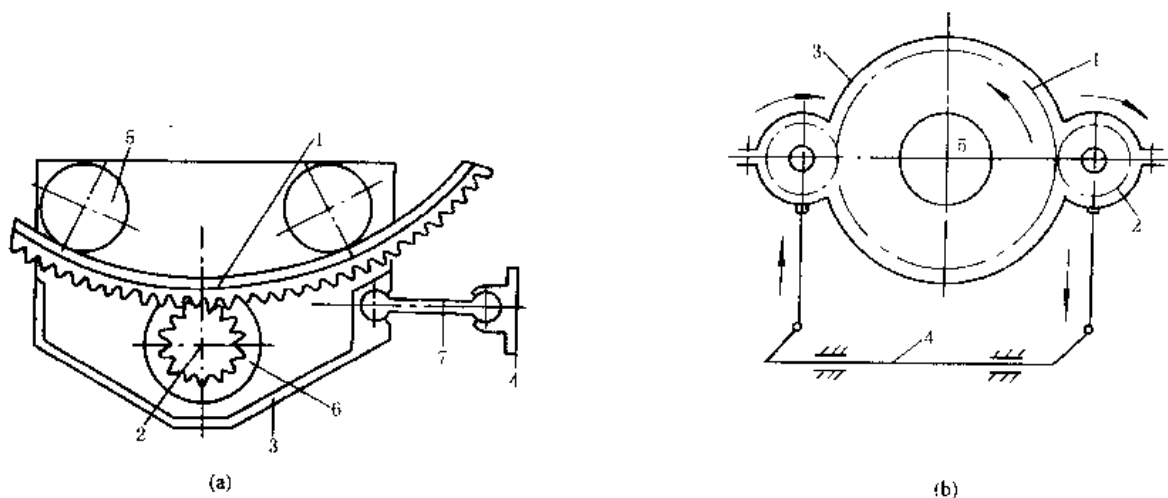
第 1 章 多点啮合柔性传动原理、分类和常用结构型式

1 多点啮合柔性传动原理

多点啮合柔性传动简称多柔传动。这种传动是把全部传动系统或部分低速级传动装置（如末级大小齿轮传动）悬挂在承载主轴上，并由弹性元件组成的柔性支承系统（例如弹簧、弹性扭杆等）将悬挂的齿轮箱体与地基相连，使之能与主轴的挠曲或变形相适应，从而可保证末级大小齿轮轮齿之间保持良好的啮合状态。

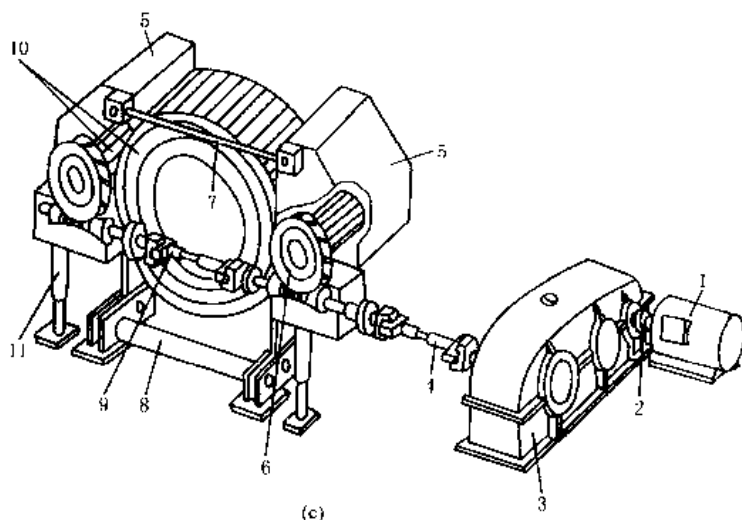
在这种传动中，为了减小传动系统的外廓尺寸，采用了功率分流的方法，将低速级的末级大齿轮用多个小齿轮进行周边驱动，即所谓多点啮合传动。

多柔传动的工作原理如图 14-1-1 所示。



1—大齿轮；2—小齿轮轴；3—箱式小车；
4—支座；5—箱式小车滚轮；6—小齿轮；
7—柔性支承（弹性支杆）

1 大齿轮；2 小齿轮；3 外壳；
4—柔性支承（弹性扭杆）；
5—承载主轴



1—电动机；2—联轴器；3—初级减速器；4—万向联轴器；5—左右传动架；6—蜗轮蜗杆减速器（中间减速器）；7—拉杆；8—弹性扭杆；9—万向联轴器；10—末级大小齿轮（末级减速装置）；11—弹簧重力平衡器

图 14-1-1 多点啮合柔性传动原理



在图 a 的装置中, 小齿轮通过轴承安装在箱式小车 3 内, 小车又经四个车轮 (滚轮) 5 悬挂在大齿轮 1 两侧的轮缘上, 大齿轮与工作机械的承载主轴固定。运转时平衡反转矩作用的弹性支杆 7 通过球铰, 一端连接在小车 3 上, 另一端连接在支座 4 上, 当大齿轮随同承载主轴变形而下移时, 箱式小车也将随之同步下移, 从而保证了大小齿轮之间的正确啮合。

图 b 中的多柔传动装置, 基本原理与图 a 相同, 只是小齿轮 2 悬挂在大齿轮 1 的轮齿上, 运转时的反转矩由安装在基础上的弹性扭杆平衡。以上两种多柔传动由于其电动机、初级减速机全部安装在地面基础上, 只是末级小齿轮 (有时连同中间减速器) 悬挂安装在大齿轮上, 故称半悬挂式多柔传动。图 c 为两点啮合半悬挂式柔性传动的实例, 原理与图 b 类似, 为了解决传动系统的对中问题, 在初级减速器与悬挂齿轮之间采用了万向联轴器 4。

2 多点啮合柔性传动的优点及应用

2.1 多柔传动的优点

(1) 它可避免齿轮传动中由于工作机械主轴变形或变位引起的偏载或卡滞, 从而可持久保持良好的啮合与正确的传动。

(2) 由于多柔传动中的柔性支承构件 (例如弹簧、弹性扭杆等) 对冲击性或阻塞性动载荷具有“缓冲”及“软化”作用, 故能减小啮合传动中的刚性冲击, 并能吸收振动, 使运行平稳。

(3) 由于采用多点啮合, 把所传递的功率进行分流, 使得每点传递的转矩减小, 同时由于采用柔性传动, 齿宽基本不受限制, 承载能力显著提高, 可明显减少大小齿轮的中心距, 使整个传动系统结构紧凑。

(4) 因多柔传动一般均采用两套以上的传动装置, 其中一套损坏时其他装置仍可维持运转, 故可保证安全生产, 同时便于安装过载保护和测扭装置, 可减少断轴、剪断地脚螺栓等设备事故, 能保证传动系统主要零部件的安全。

(5) 尺寸小重量轻, 有时虽因结构要求不能减小小齿轮的外廓尺寸 (例如直径) 但可减小小齿轮模数, 因此便于制造, 如果采用中心距可调结构 (偏心式或拉杆式) 还可降低齿厚制造精度, 且齿面磨损后, 可调小中心距继续使用。

(6) 由于基础上只安装柔性支承构件和高速传动部分, 没有大转矩承力构件, 基础受载小且结构简单, 故基建投资相对减少。

(7) 大部分部件都是整体安装, 故安装简便。

(8) 容易实现通用化、系列化和标准化。

2.2 多柔传动的应用

多柔传动比较广泛地应用在大中型烧结机、破碎机、球磨机、棒磨机、矿井提升设备、水泥磨机、氧气转炉、回转窑、斗轮挖掘机、混铁炉、铁水罐车、搅拌机、港口起重机、雷达、制糖和造纸机械等设备上, 近年来发展迅速。特别是在氧气炼钢转炉方面, 这种传动作为倾动装置, 非常普及。在水泥磨机上, 电动机功率已达数万千瓦。在一些低速传动装置方面, 主轴传递的转矩可达千万牛·米, 速比能达数千。目前我国在大中型氧气炼钢转炉上, 使用已较普遍, 在烧结机上也在逐步推广, 在其他领域有的也已应用, 有的需进一步开发。这种传动装置的适用范围比较广, 特别适用于大转矩、大减速比、低转数的传动场合。

3 多点啮合柔性传动的分类

表 14-1-1

分类方法	型式	特 点	备 注
啮合点数	单点	末级大齿轮由一个周边小齿轮驱动	
	双点	末级大齿轮用两个周边小齿轮驱动	
	多点	末级大齿轮用三个以上的周边小齿轮驱动	
悬挂方式	半悬挂式 全悬挂式	传动系统中的一部分传动装置悬挂安装在负载主轴上; 传动系统中的全部传动装置 (包括电动机) 都悬挂安装在负载主轴上。	

续表

分类方法	型式	特 点	备 注
末级大小 齿轮中心距 是否可调	中心距固定	大小齿轮中心距不可调	分悬挂小车固定滚轮式和悬挂箱体式两种
	中心距可调	通过调节大小齿轮中心距进行齿侧间隙的调节	分拉杆式、推杆式和悬挂小车偏心滚轮式三种
柔性支承 构件结构	水平弹簧式 垂直弹簧式	柔性支承构件是水平放置的弹簧 柔性支承构件是垂直放置的弹簧	
	拉压杆式 扭力杆式	柔性支承构件是受拉或受压的杆件 柔性支承构件是承受扭转力矩的杆件	分自平衡式和端固定式两种
	液压式	柔性支承构件是一套液压系统	
	综合式	柔性支承构件是几个单元柔性支承构件的组合	分弹簧-液压式、弹簧-扭力杆式和拉杆-弹簧式三种
	可调式	柔性支承构件可进行某些参数的调节,例如刚度、偏心距等	分刚度可调、刚度偏心距均可调两种
	浮点铰链式	柔性支承构件是由球面轴承和橡胶垫板构成的浮点铰链	

4 多点啮合柔性传动的常用结构型式

表 14-1-2

型 式	结 构 要 点	结 构 特 征			特 点 及 应 用
		啮合点数	悬挂方式	柔性支承构件	
悬挂箱体式 (PGC型或FS-MT型)	末级减速装置通过刚性箱体悬挂在承载主轴上,初级减速器悬挂安装在刚性箱体上,电动机又悬挂固定在初级减速器机壳上,故末级大小齿轮齿侧间隙不能调节;为保护传动系统中的柔性支承构件——扭力杆不受损坏,设置了防止扭力杆过载的限扭器,各啮合点的载荷均衡问题通过合理选择电动机特性和电气控制回路解决 结构见图 14-1-2	4	全悬挂式	自平衡式单扭力杆	结构整齐紧凑,安装维修方便,可设置更多的啮合点(一般可设 2~12 个点),适用于端部传动(大齿轮直接与负载主轴的轴端连接)的各种倾动设备,特别适用于大型炼钢转炉的倾动,目前我国宝钢 300t 转炉和鞍钢 180t 转炉等均在使用
悬挂箱体式 (半悬挂型)	末级减速器的刚性箱体悬挂在承载主轴(转炉耳轴)上,箱体内部的小齿轮轴经万向联轴器与初级减速器连接,传动系统中设快慢两台电动机以便转炉的倾翻和复位 结构见图 14-1-3	1	半悬挂式	水平弹簧或端固定式拉杆	结构简单,布置欠紧凑,占地较大,适用于一般中小型转炉
悬挂箱体式 (双边驱动型)	末级减速器的刚性箱体悬挂在承载主轴上,它的小齿轮的轴端都悬挂着初级减速器,同时初级减速器的高速端又通过带缓冲器的支臂支承在刚性箱体上,初级减速器壳上设有支承板,其上安装电动机和制动器,柔性支承构件的上端与刚性箱体底座横梁用球铰铰接,下端与基础支座通过球铰连接 结构见图 14-1-4	2×6 (双边驱动,每边 6 点)	全悬挂式	弹簧-液压组合式	适用于端部传动的各种倾动设备,特别适用于大型炼钢转炉,它目前使用于 350t 炼钢转炉上

型式	结构要点	结构特征			特点及应用
		啮合点数	悬挂方式	柔性支承构件	
悬挂箱体式(拉压杆型)	传动装置中的减速器和电动机悬挂在主轴轴端上,低速级齿侧间隙不能调整,柔性支承采用端固定式拉压杆结构,三点啮合不对称布置 结构见图 14-1-5	3	全悬挂式	端固定式拉压杆	悬挂安装简单,只能用于端部传动,常用于大型斗式挖掘机上,功率可达 1500kW,也可用于转炉上
悬挂小车式(固定滚轮型或称 BF 型)	每个末级传动啮合点都是一个由滚轮(车轮)和末级传动小齿轮组成的小车,小车通过四个滚轮悬挂在大齿轮内侧轮缘上,末级大小齿轮的传动侧隙由在大小齿轮轮缘上另设凸缘予以保证(凸缘结构参看图 14-2-5b) 结构见图 14-1-6	1~5	一般为半悬挂式	端固定式拉压杆或扭力杆	适用于端部传动和中部传动(例如回转窑、回转圆筒式干燥机等)
悬挂小车式(偏心滚轮型或称 TSP 型)	驱动电动机经非悬挂初级减速器和安装在悬挂小车上的中间减速器带动末级传动小齿轮驱动大齿轮;左右四台小车两两经过销轴连接后,再与扭力杆和支座连接;带偏心调整装置的滚轮,在大齿轮内侧轮缘上滚动,用调整偏心限制最大传动侧隙,用大小齿轮上设置的凸缘保证最小传动侧隙 结构见图 14-1-7	4	半悬挂式	端固定式双扭力杆	扭力杆长度和直径可以变化,支承刚度变化范围大但结构复杂,适用于端部传动和中部传动,例如氧气顶吹转炉倾动和回转圆筒式机械等
悬挂小车式(BF14 型)	电动机为落地式安装,传动系统中的三级减速装置通过滚轮悬挂在大齿轮(圈)轮缘上,悬挂的三级减速装置的箱体被弹簧重力平衡器支承,柔性支承构件用拉压杆 结构见图 14-1-8	1	半悬挂式	端固定式拉压杆	结构紧凑适用于中间传动和端部传动
拉杆式(BFT 型)之一,无弹簧平衡器对称型(左右传动架的结构完全相同,相对大齿轮中心对称)	小齿轮及其前置的蜗轮蜗杆减速器安装在传动架上,左右传动架靠拉杆悬挂在大齿轮上,两啮合点载荷分配不均衡,末级大小齿轮间有凸缘,用以维持最小侧隙,用拉杆的调整(调整大小齿轮中心距或调整拉杆刚度)限制最大侧隙 结构见图 14-1-9	2	半悬挂式	自平衡式扭力杆或拉压杆	一般只适用于端部传动,目前有系列化尺寸,特别适用于各种冶金烧结机上,由于存在左右啮合点载荷分配不均衡的缺点,实际应用较少,而大多采用设有弹簧重力平衡器的下述两种 BFT 型
拉杆式(BFT 型)之一,有弹簧重力平衡器对称型	它是上面所述 BFT 原型的一种改进型,主要是在左右传动架上设置了弹簧重力平衡器以平衡传动架的重量,这样,当参数设计合理时,就能使两侧载荷相等且达到自动平衡 结构见图 14-1-10	2	半悬挂式	自平衡扭力杆或拉压杆	与 BFT 原型相同,目前普遍用于烧结机上

续表

型式	结构要点	结构特征			特点及应用
		啮合点数	悬挂方式	柔性支承构件	
拉杆式 (BFT型) 之三,有 弹簧重力 平衡器的 非对称型 (其中某一 传动架上 悬挂有初 级减速器, 两传动架 对大齿轮 中心线不 对称)	它与对称型的主要区别是初级 减速器不装在基础上而悬挂在某 侧传动架上,形成一种左右传动 架不对称结构 结构见图 14-1-11	2	半悬挂式	自平衡扭 力杆或拉 压杆	与对称型相同,目前普遍使 用于烧结机上,例如宝钢 450m ² 烧结机及韶关冶炼厂烧结机
推杆式 (BFP型)	可有多个大小齿轮啮合点,每 个啮合点上的传动齿轮箱由弹簧 推杆支承,限制轮齿的最大侧隙, 大小齿轮间有凸缘以保持最小 侧隙 结构见图 14-1-12	1~5	一般是半 悬挂式	液压或弹 簧推杆	结构简单、尺寸较小,适用 于中部传动和端部传动,应用 于造球机和水泥窑等

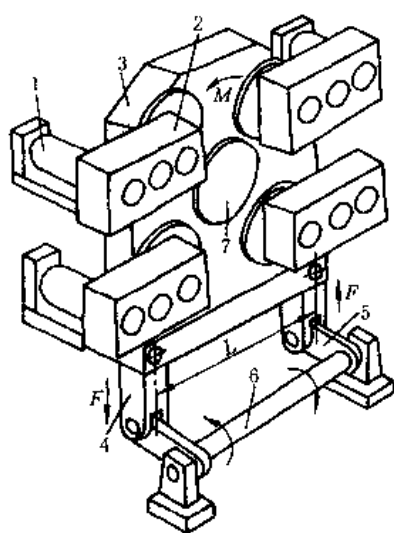


图 14-1-2 悬挂箱体式 (PGC

型或 FS-MT 型) 结构

- 1—电动机; 2—初级减速器;
3—末级减速装置; 4—直杆;
5—曲柄; 6—扭力杆;
7—承载主轴

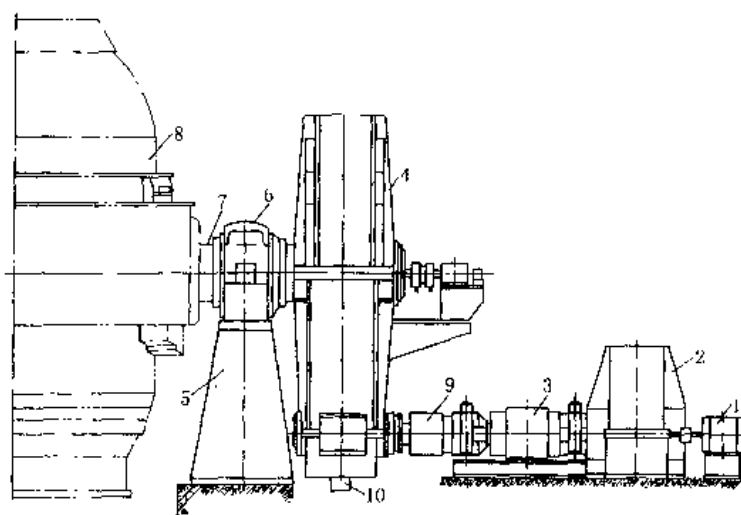


图 14-1-3 悬挂箱体式 (半悬挂型) 结构

- 1—慢速电动机; 2—初级减速器; 3—快速电动机;
4—悬挂末级减速器箱体; 5—轴承支架; 6—轴承;
7—承载主轴; 8—工作机械 (转炉);
9—万向联轴器; 10—柔性支承构件

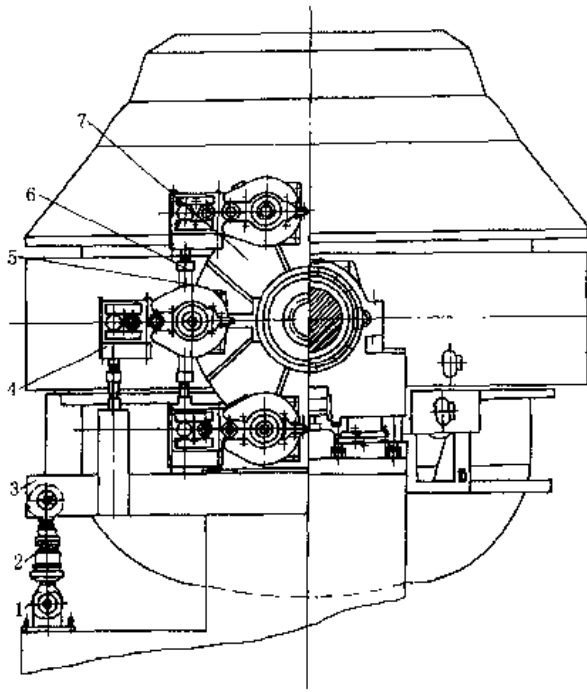


图 14-1-4 悬挂箱体式
(双边驱动型) 结构

1—支座；2—柔性支承构件；3—横梁；4—初级减速器；
5—支臂；6—缓冲器；7—悬挂末级减速器

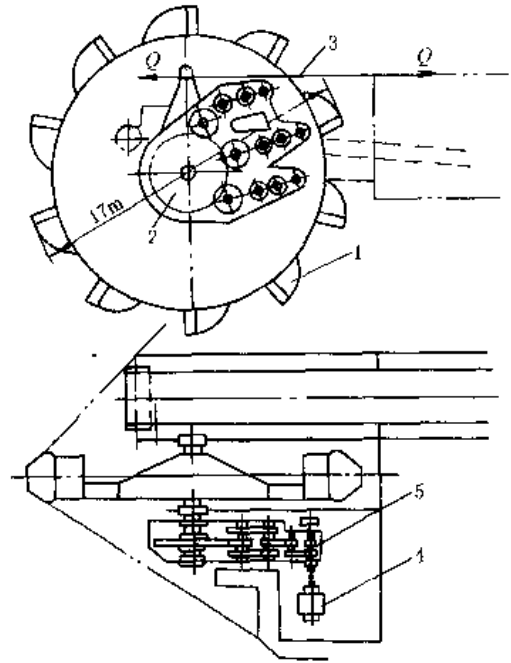


图 14-1-5 悬挂箱体式
(拉压杆型) 结构

1—斗轮；2—末级大齿轮；
3—柔性支承构件(拉压杆)；
4—电动机；5—减速器

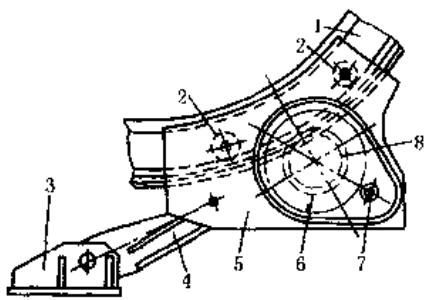


图 14-1-6 悬挂小车式(固
定滚轮型或称 BF 型) 结构

1—大齿轮；2—滚轮；3—支座；
4—柔性支承构件；5—小车体；6—凸
缘；7—输入轴；8—小齿轮

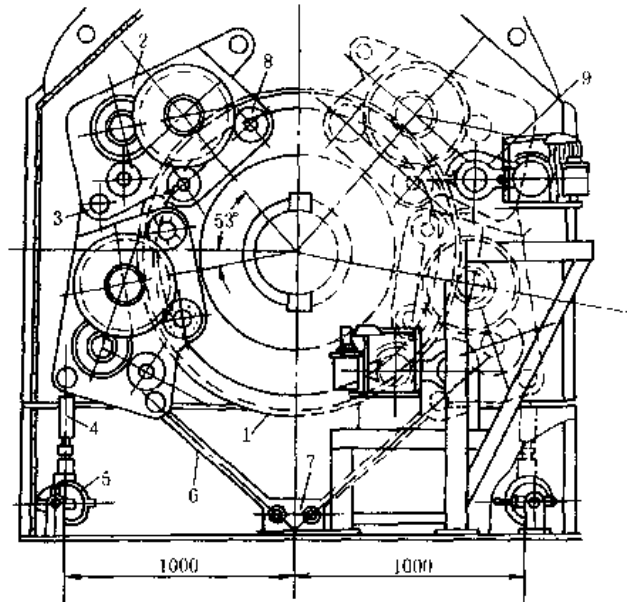


图 14-1-7 悬挂小车式(偏心滚轮型
或称 TSP 型) 结构

1—末级大齿轮；2—悬挂小车；3—连接销；
4—直杆；5—扭力杆；6—斜支杆；7—支座；
8—偏心滚轮；9—非悬挂初级减速器

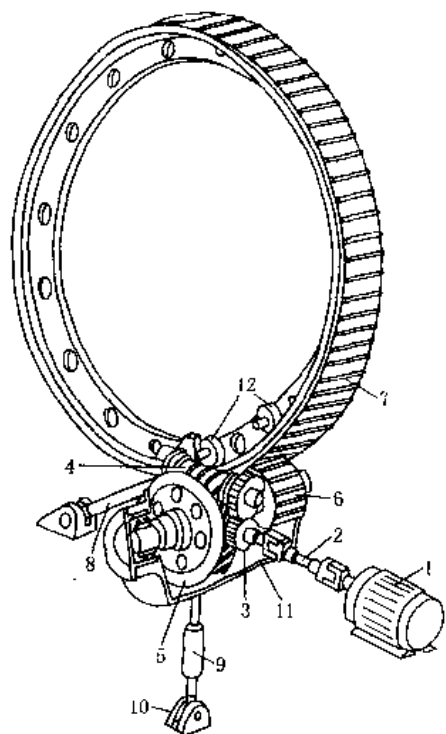


图 14-1-8 悬挂小车式
(BF14 型) 结构

1—电动机；2—万向联轴器；3—中间传动齿轮；4—蜗杆；5—蜗轮；6—末级小齿轮；7—末级大齿轮；8—柔性支承构件；9—弹簧重力平衡器；10—铰链支座；11—悬挂减速箱体；12—小车滚轮

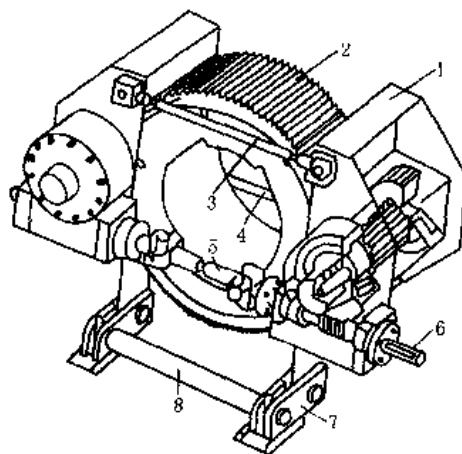


图 14-1-9 拉杆式
(BFT 型) 之一, 无弹簧
平衡器对称型结构

1—悬挂传动架；2—大齿轮；3—前拉杆；4—后拉杆；5—万向联轴器；6—输入轴；7—曲柄；8—扭力杆

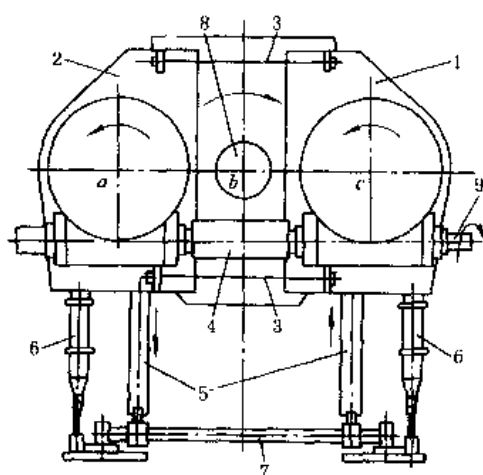


图 14-1-10 拉杆式 (BFT 型) 之二,
有弹簧平衡器对称型结构

1—右传动架；2—左传动架；3—拉杆；4—万向联轴器；5—直杆；6—弹簧重力平衡器；7—扭力杆；8—承载主轴；9—输入端

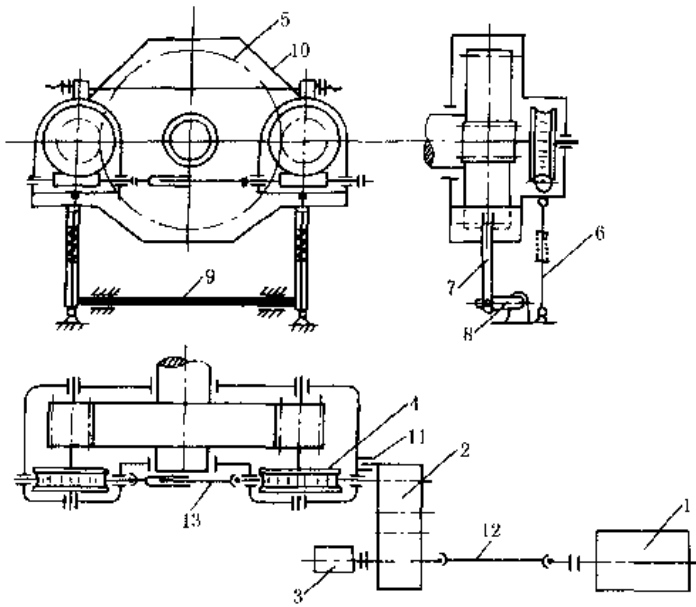


图 14-1-11 拉杆式 (BFT 型) 之三,
有弹簧重力平衡器的非对称型结构

- 1—电动机; 2—悬挂在传动架上的初级减速器; 3—测速发电机;
- 4—蜗轮传动装置; 5—末级大齿轮; 6—弹簧重力平衡器; 7—直杆; 8—曲柄; 9—自平衡式扭力杆;
- 10—拉杆; 11—初级减速器悬挂在传动架上的连接装置; 12、13—万向联轴器

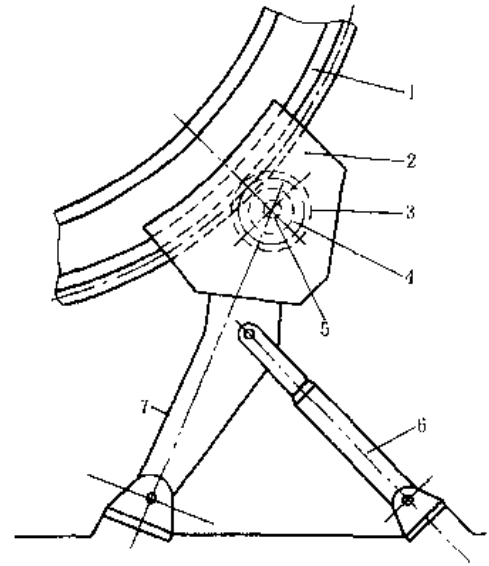


图 14-1-12 推杆式
(BFP 型) 结构

- 1—大齿轮; 2—小齿轮箱; 3—凸缘;
- 4—小齿轮; 5—小齿轮轴; 6—弹簧推杆;
- 7—支杆

第2章 多点啮合柔性传动装置的设计计算

1 多柔传动的载荷均衡问题

多点啮合柔性传动装置的设计计算中各啮合点之间的载荷均衡问题是一个非常重要的问题，为了达到载荷均衡应采用必要的均载技术。所谓均载技术是指一台电动机驱动多点或多台电动机同时驱动一台设备时，保证每个啮合点作用力相等或每台电动机负载均衡的技术措施。单电机驱动的均载主要是使结构和参数设计合理。多电机驱动除结构与参数的合理设计外，通常还可采用下面的均载措施：①利用交流异步电机的自适应性（负载增加转速下降，负载减少转速上升）使同一传动装置中的每台电动机自动保持功率的平衡，大体上维持各啮合点的均载；②在使用交流电动机驱动中，用可调型液力耦合器作为联轴器可实现载荷的均衡（使用限矩型液力耦合器也可减少各啮合点的载荷不均匀性）；③采用直流电动机时，通过电气控制，使每台电机的电流维持在一定范围，以使各啮合点保持均载；④大功率的传动装置（几百千瓦以上）可采用同步电动机，并设置液体粘滞型载荷分配离合器，通过改变摩擦片之间的压紧力控制相对滑动，进行各啮合点的载荷均衡调节。这种方法，其转速和电机负载变化的反应时间小于10ms，各啮合点载荷差可小于3%。

2 多柔传动的设计计算

2.1 拉杆式（BFT型）的设计计算

图14-2-1为BFT型的受力简图。该图为一般情况，即有弹簧重力平衡器的非对称的BFT型（即在右传动架悬挂有初级减速器）。为了求解各未知力，可取左、右传动架（包括架内各齿轮、蜗轮等回转零件）为分离体，列出平衡方程求解。取传动架三棱边为 x 、 y 、 z 轴，其交点 O 为坐标原点，左传动架各代号均带“'”。

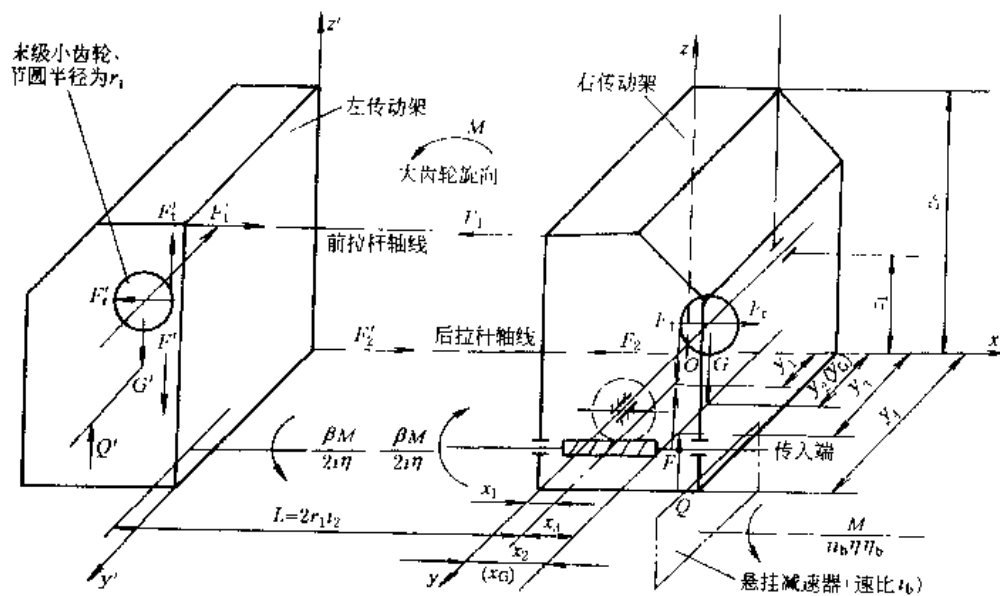


图 14-2-1 BFT 型受力简图

(1) 一般情况（有弹簧重力平衡器，左右传动架载荷不均衡）时各力的求解

1) 平衡方程 对右传动架的平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 + F_2 - F_7 = 0 \quad (14-2-1)$$

$$\sum F_z = 0 \quad F - F_1 - G + Q = 0 \quad (14-2-2)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \frac{M}{u_b \eta \eta_b} - \frac{\beta M}{2i\eta} + (F_1 - F) \gamma_1 + G \gamma_c - Q \gamma_3 = 0 \quad (14-2-3)$$

或
$$\frac{M}{\ddot{u}_b \eta \eta_b} - \frac{\beta M}{2i\eta} + F_1 y_1 - F y_F + G y_G - Q y_3 = 0 \text{ (当把 } F \text{ 与 } F_1 \text{ 的 } y \text{ 坐标设计成不相同时)}$$

$$\sum M_z = 0 \quad F_1 z_2 + (F - F_1) x_1 + Q x_2 - G x_G - F_1 z_1 = 0 \quad (x_2 = x_1 + x_3) \quad (14-2-4)$$

$$\sum M_x = 0 \quad F_x y_1 - F_1 y_4 = 0 \quad (14-2-5)$$

对左传动架的平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F'_1 + F'_2 - F'_r = 0 \quad (14-2-6)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F' - F'_1 + G' - Q' = 0 \quad (14-2-7)$$

$$\sum M_{x'} = 0 \quad \frac{\beta M}{2i\eta'} + (F' - F'_1) y'_1 + G' y'_G - Q' y'_2 = 0 \quad (14-2-8)$$

或
$$\frac{\beta M}{2i\eta'} + F' y'_F - F'_1 y'_1 + G' y'_G - Q' y'_3 = 0 \text{ (当把 } F' \text{ 与 } F'_1 \text{ 的 } y \text{ 坐标设计成不相同时)}$$

$$\sum M_{y'} = 0 \quad F'_1 z'_2 + (F'_1 - F') x'_1 + Q' x'_2 - G' x'_G - F'_1 z'_1 = 0 \quad (x'_2 = x'_1 + x'_3) \quad (14-2-9)$$

$$\sum M_{x'} = 0 \quad F'_{x'} y'_1 - F'_1 y'_4 = 0 \quad (14-2-10)$$

对扭力杆的平衡方程

$$FS - F'S = 0 \quad (14-2-11)$$

对主轴载荷的平衡方程

$$M = (F_1 + F'_1) r_1 i_2 \quad (14-2-12)$$

对弹簧重力平衡器的平衡方程

$$Q = K(\Delta h_0 + \Delta h_1 + \Delta h_2) \text{ (大齿轮逆时针旋转时)} \quad (14-2-13)$$

$$Q' = K(\Delta h'_0 - \Delta h_1 - \Delta h_2) \text{ (大齿轮逆时针旋转时)} \quad (14-2-14)$$

$$\Delta h_1 = \frac{16MS^2}{G_r \pi d^4}$$

$$\Delta h_2 = F/K_2$$

式中 F 、 F' ——柔性支承的直杆对右、左传动架的支反力，N；

F_1 、 F'_1 ——末级大小齿轮的圆周力，N；

F_r 、 F'_r ——末级大小齿轮的径向作用力，N；

F_1 、 F_2 ——右传动架前、后拉杆的作用力，N；

F'_1 、 F'_2 ——左传动架前、后拉杆的作用力，N；

G 、 G' ——传动架的重力，N；

Q 、 Q' ——弹簧重力平衡器对传动架的支反力，N；

K ——弹簧重力平衡器弹簧刚度，N/mm；

Δh_0 、 $\Delta h'_0$ ——弹簧重力平衡器弹簧的预调压缩量，mm；

Δh_1 ——扭力杆的变形使弹簧变形增加或减小的变动量，mm；

Δh_2 ——柔性直杆的变形使弹簧变形增加或减小的变动量，mm；

S ——扭力杆曲柄长度，mm；

G_r ——扭力杆材料的扭转弹性模量，N/mm²；

d ——扭力杆直径，mm；

K_2 ——直杆刚度，N/mm；

x_1 、 y_1 ——右传动架末级小齿轮与大齿轮啮合点的坐标，mm；

x'_1 、 y'_1 ——左传动架末级小齿轮与大齿轮啮合点的坐标，mm；

x_2 、 y_2 ——弹簧重力平衡器在右传动架上的支点坐标，mm；

x'_2 、 y'_2 ——弹簧重力平衡器在左传动架上的支点坐标，mm， $x_2 = x_1 + x_3$ ； $x'_2 = x'_1 + x'_3$ ；

x_G 、 y_G ——右传动架的重心坐标，mm；

x'_G 、 y'_G ——左传动架的重心坐标，mm；

y_4 、 y'_4 ——传动架沿前后方向的长度，mm；

z_1 、 z'_1 ——小齿轮中心在 z 方向的坐标，mm；

z_2 、 z'_2 ——传动架的高度，mm；

$x_F(x'_F)$ 、 $y_F(y'_F)$ ——柔性支承构件（扭力杆）直杆在传动架上支点坐标，mm；

M ——承载主轴输出转矩，N·mm；

β ——传递系数，即考虑左右传动架传递动力不同的系数， $\beta = \frac{F'_1 L}{M}$ ；

L ——扭力杆或拉压杆有效作用长度，mm；

μ 、 μ' ——传动架重力与柔性支承的直杆支反力的比值， $\mu = \frac{G}{F} = \frac{GL}{M}$ ， $\mu' = \frac{G'}{F'} = \frac{G'L}{M}$ ；

i_1 、 i'_1 ——蜗轮蜗杆减速比；

i_2 、 i'_2 ——末级传动大小齿轮传动比；

i, i' ——传动架传入端到主轴的传动比, $i = i_1 i_2, i' = i'_1 i'_2$;
 η_1, η'_1 ——蜗轮蜗杆效率;
 η_2, η'_2 ——末级传动大小齿轮效率;
 η, η' ——蜗轮副和末级传动齿轮副总效率, $\eta = \eta_1 \eta_2, \eta' = \eta'_1 \eta'_2$;
 $i_b, i'_b, \eta_b, \eta'_b$ ——悬挂的初级减速器速比和效率;
 r_1, r'_1 ——末级传动小齿轮节圆半径, mm。

2) 计算公式 设传动架重力对扭力杆作用力之比为 μ 和 μ' , 即 $\mu = \frac{G}{F}, \mu' = \frac{G'}{F'}$, 将上面平衡方程求解, 得到下列计算公式:

$$Q = K \left(\Delta h_0 + \frac{16MS^2}{G_r \pi d^4} + \frac{F}{K_2} \right) \quad (14-2-15)$$

$$Q' = K \left(\Delta h'_0 - \frac{16MS^2}{G_r \pi d^4} - \frac{F}{K_2} \right) \quad (14-2-16)$$

$$F = F'$$

$$F_1 = F(1 - \mu) + Q$$

或
$$F_1 = \frac{M}{L}(1 - \mu) + K \left(\Delta h_0 + \frac{16MS^2}{G_r \pi d^4} + \frac{M}{LK_2} \right) \quad (14-2-17)$$

$$F'_1 = F'(1 + \mu') - Q'$$

或
$$F'_1 = \frac{M}{L}(1 + \mu') - K \left(\Delta h'_0 - \frac{16MS^2}{G_r \pi d^4} - \frac{M}{LK_2} \right) \quad (14-2-18)$$

$$F_1 = F_2 = \frac{F_1 \tan \alpha}{2} \quad (14-2-19)$$

$$F'_1 = F'_2 = \frac{F'_1 \tan \alpha}{2} \quad (14-2-20)$$

$$F_r = F_t \tan \alpha \quad (14-2-21)$$

$$F'_r = F'_t \tan \alpha \quad (14-2-22)$$

$$x_3 = \frac{1}{Q} \left[F_t x_1 + G x_C - \left(\frac{M}{L} - F_1 \right) x_1 - Q x_1 - F_1 x_2 \right] \quad (14-2-23)$$

$$x_2 = x_1 + x_3$$

$$y_3 = \frac{1}{Q} \left[\frac{M}{i_b \eta \eta_b} - \frac{\beta M}{2i\eta} - \left(\frac{M}{L} - F_1 \right) y_1 + G y_C \right] \quad (14-2-24)$$

或
$$y_3 = \frac{1}{Q} \left[\frac{M}{i_b \eta \eta_b} - \frac{\beta M}{2i\eta} - \left(\frac{M}{L} y_F - F_1 y_1 \right) + G y_C \right] \quad (\text{当 } F \text{ 与 } F_1 \text{ 的 } y \text{ 坐标不同时})$$

$$x'_3 = \frac{1}{Q'} \left[F'_t x'_1 + G' x'_C + \left(\frac{M}{L} - F'_1 \right) x'_1 - Q' x'_1 - F'_1 x'_2 \right] \quad (14-2-25)$$

$$x'_2 = x'_1 + x'_3$$

$$y'_3 = \frac{1}{Q'} \left[\frac{\beta M}{2i\eta} + \left(\frac{M}{L} - F'_1 \right) y'_1 + G' y'_C \right] \quad (14-2-26)$$

或
$$y'_3 = \frac{1}{Q'} \left[\frac{\beta M}{2i\eta} + \left(\frac{M}{L} y'_F - F'_1 y'_1 \right) + G' y'_C \right] \quad (\text{当 } F' \text{ 与 } F'_1 \text{ 的 } y' \text{ 坐标不同时})$$

上述一般情况也适用于对称 BFT 型, 但应按下列关系代入有关公式中, 即

$$i_b = 1, \eta_b = 1, G = G', \mu = \mu', x_C = x'_C, y_C = y'_C$$

3) 左右传动载荷不均衡时的附加径向力与附加摩擦力矩

载荷不均衡时, 不均载系数 $\delta = F'_1/F_1 \neq 1$, 此时出现附加径向力 ΔF_r ,

$$\Delta F_r = F'_r - F_r = (F'_1 - F_1) \tan \alpha \quad (14-2-27)$$

设大小齿轮凸缘间的摩擦系数为 f , 则增加的附加摩擦力矩为 ΔM_r ,

$$\Delta M_r = \Delta F_r d_p / 2 = (F'_1 - F_1) f d_p \tan \alpha / 2 \quad (14-2-28)$$

式中 f ——大小齿轮凸缘间的摩擦系数;

d_p ——大齿轮凸缘表面处的直径, mm;

α ——大小齿轮的啮合角。

附加摩擦力矩将使主轴传递的总转矩增加，因此设计时保证载荷均衡十分重要。

(2) 左右传动架载荷均衡的条件

左右传动架载荷均衡是指两传动架传递的载荷完全相等，各传递总转矩的 1/2，此时， $\beta = 1$ ， $F_1 = F'_1 = F = M/L$ ， $\delta = F'/F_1 = 1$ ；因而其他各力有下列关系：

$$F_r = F'_r = F_1 \tan \alpha, \quad F_1 = F'_1 = F_2 = F'_2 = F_1 \tan \alpha / 2$$

$$G = Q \quad G' = Q' \quad F = F'$$

$$\text{故} \quad G = \mu F = Q = K \left(\Delta h_0 + \frac{16MS^2}{G_r \pi d^4} + \frac{F}{K_2} \right) \quad (14-2-29)$$

$$G' = \mu' F' = Q' = K \left(\Delta h'_0 - \frac{16MS^2}{G_r \pi d^4} - \frac{F}{K_2} \right) \quad (14-2-30)$$

所以左右弹簧重力平衡器上弹簧的预调压缩量为 $\Delta h'_0$ 、 Δh_0 ：

$$\Delta h'_0 = \frac{M}{L} \left(\frac{\mu'}{K} + \frac{16LS^2}{G_r \pi d^4} + \frac{1}{K_2} \right) \quad (14-2-31)$$

$$\Delta h_0 = \frac{M}{L} \left(\frac{\mu}{K} - \frac{16LS^2}{G_r \pi d^4} - \frac{1}{K_2} \right) \quad (14-2-32)$$

左右弹簧重力平衡器的位置为：

$$x'_2 = x'_1 + x'_3 = \frac{1}{\mu'} \tan \alpha \left(z'_1 - \frac{z'_2}{2} \right) + x'_c \quad (14-2-33)$$

$$x_2 = x_1 + x_3 = \frac{1}{\mu} \tan \alpha \left(z_1 - \frac{z_2}{2} \right) + x_c \quad (14-2-34)$$

$$y'_3 = y'_c + \frac{L}{2\mu' i \eta} \quad (14-2-35)$$

$$\text{或} \quad y'_3 = y'_c + \frac{L}{2\mu' i \eta} + \frac{1}{\mu'} (y'_r - y'_l) \quad (\text{当 } F' \text{ 与 } F'_1 \text{ 的 } y' \text{ 坐标不同时})$$

$$y_3 = y_c + \frac{L}{\mu i \eta} \left(\frac{1}{i_b \eta_b} - \frac{1}{2} \right) \quad (14-2-36)$$

$$\text{或} \quad y_3 = y_c + \frac{L}{\mu i \eta} \left(\frac{1}{i_b \eta_b} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\mu} (y_l - y_r) \quad (\text{当 } F \text{ 与 } F_1 \text{ 的 } y \text{ 坐标不同时})$$

$$z_2 = z'_2 = \frac{F'_1}{F_1} z_1$$

$$y_4 = y'_4 = \frac{F'_r}{F_1} y_l$$

$$z_1 = z'_1, \quad y_l = y'_l$$

$$\text{一般 } x_r(x'_r) = x_1(x'_1) = x_3(x'_3) - \frac{d_1}{2}$$

在近似计算中可取

$$y_r(y'_r) = y_l(y'_l) + \frac{mz_2 \cos \alpha}{2i \eta \cos \alpha_H}$$

式中 d_1 ——末级小齿轮直径，mm；

$x_3(x'_3)$ ——左右传动架小齿轮中心的 x 坐标；

$y_l(y'_l)$ ——左右末级大小齿轮啮合点的 y 坐标；

m ——末级大小齿轮模数，mm；

α ——末级齿轮啮合角；

α_H ——末级齿轮在节圆上的啮合角；

z_2 ——末级大齿轮齿数。

为了保持左右均载，由式 (14-2-31) 和式 (14-2-32) 可知， Δh_0 与 $\Delta h'_0$ 不相等。当设备静止时，可根据二式计算的 Δh_0 和 $\Delta h'_0$ 调整二弹簧的预压缩量。为了使齿轮的轮齿在宽度上不产生偏载，可由式 (14-2-35)、式 (14-2-36) 确定弹簧重力平衡器的 y (或 y') 方向的坐标。按式 (14-2-31) ~ 式 (14-2-36) 进行设计计算和调整是保证左右载荷均衡和轮齿上无偏载的基本条件。

在弹簧重力平衡器设计中,为了减小对齿轮啮合力的影响,一般选用小刚度、大行程的弹簧。

(3) 无弹簧重力平衡器时的分析

1) 不均载系数 δ 无弹簧重力平衡器时,即 $Q = Q' = 0$, $F = F_t + G$, $F' = F'_t - G'$ 。

① 非对称型的 δ

$$\delta = \frac{F'_t}{F_t} = \frac{2 + (\mu' + \mu)}{2 - (\mu' + \mu)} \quad (14-2-37)$$

② 对称型的 δ

$$\delta = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \quad (\text{因为 } G' = G, \mu' = \mu) \quad (14-2-38)$$

2) 附加径向力及附加摩擦力矩

① 非对称型

$$F_r = \frac{M}{L} (1 - \mu) \tan \alpha$$

$$F'_r = \frac{M}{L} (1 + \mu') \tan \alpha$$

$$\Delta F_r = F'_r - F_r = \frac{M}{L} (\mu' + \mu) \tan \alpha \quad (14-2-39)$$

$$\Delta M_r = f \Delta F_r \frac{d_p}{2} = \frac{f M (\mu' + \mu) d_p}{2L} \tan \alpha \quad (14-2-40)$$

② 对称型

$$\mu' = \mu$$

$$\Delta F_r = \frac{2M\mu}{L} \tan \alpha \quad (14-2-41)$$

$$\Delta M_r = \frac{fM\mu d_p}{L} \tan \alpha \quad (14-2-42)$$

3) 低速级齿轮的附加偏载矩 (传递系数 $\beta = 1$, $i_h = 1$ 时)

右边:
$$\Delta M = \frac{\mu M}{L} \left(y_2 - y_1 + \frac{L}{2\mu i_1 i_2} \right) \quad (14-2-43)$$

左边:
$$\Delta M' = \frac{\mu' M}{L} \left(y'_2 - y'_1 + \frac{L}{2\mu' i'_1 i'_2} \right) \quad (14-2-44)$$

单位长度的附加偏载如下 (见图 14-2-2):

$$\Delta q = \frac{6\Delta M}{B^2}$$

$$\Delta q' = \frac{6\Delta M'}{B^2}$$

$$q_{\max} = \frac{F_t}{B} + \frac{6\Delta M}{B^2}$$

$$q_{\min} = \frac{F_t}{B} - \frac{6\Delta M}{B^2}$$

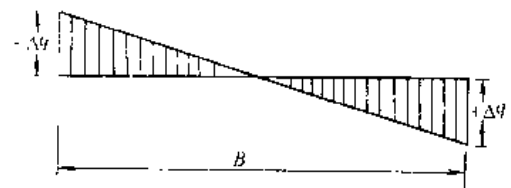


图 14-2-2

$$q'_{\max} = \frac{F'_t}{B} + \frac{6\Delta M'}{B^2}$$

$$q'_{\min} = \frac{F'_t}{B} - \frac{6\Delta M'}{B^2}$$

式中 δ ——不均载系数;

ΔF_r ——大小齿轮凸缘间产生的附加径向力, N;

ΔM_r ——由 ΔF_r 在凸缘上增加的附加摩擦力矩, N·mm;

$\Delta M(\Delta M')$ ——传动架重心坐标 y_c 大于小齿轮啮合点坐标 y_1 产生的偏载矩, N·mm;

f ——大小齿轮凸缘间的摩擦因数;

d_p ——大齿轮凸缘表面处的直径, mm;

Δq ——齿面宽度方向单位长度作用的附加偏载, N/mm;

- q_{max} ——齿面宽度方向单位长度上的最大载荷, N/mm;
- q_{min} ——齿面宽度方向单位长度上的最小载荷, N/mm;
- B ——齿轮宽度, mm。

由式 (14-2-37)、式 (14-2-38) 可知, 无弹簧重力平衡器时, $\delta \neq 1$, 左右传动架由于其重力的影响不可能得到两点均载的工况, 这种不均载情况随传动架自重的增加而增加, 即 μ 越大 δ 越大。由式 (14-2-39) ~ 式 (14-2-44) 可知, 这种无弹簧重力平衡器的结构在末级传动中存在附加径向力和附加摩擦力矩, 且齿宽方向出现偏载, 因而左右两侧啮合间隙不等, 凸缘出现磨损, 总传递转矩增加, 传动性能降低, 因此无弹簧重力平衡器这种型式较少应用。

(4) 末级齿轮啮合侧隙

$$c_n = 2 \left(\Delta c + \frac{M l \tan \alpha}{4 E F_0 L} \right) \tan \alpha_0 \tag{14-2-45}$$

$$\Delta c = a - m \left(\frac{z_1 + z_2}{2} + y_n \right) \tag{14-2-46}$$

- 式中 c_n ——末级大小齿轮侧隙, mm;
- a ——由上下拉杆调整确定的实际中心距, mm;
- y_n ——中心距变动系数, 视调整要求具体确定;
- l ——拉杆长度, mm;
- z_1 ——末级小齿轮齿数;
- E ——拉杆材料的拉压弹性模量, N/mm²;
- F_0 ——拉杆断面面积, mm²;
- $\frac{E F_0}{l}$ ——拉杆刚度, N/mm。

由公式可知, BFT 型侧隙是可调的, 其侧隙不仅和拉杆调整的中心距有关, 且受传递转矩 M 和拉杆刚度的影响。

2.2 悬挂小车固定滚轮式 (BF 型) 的设计计算

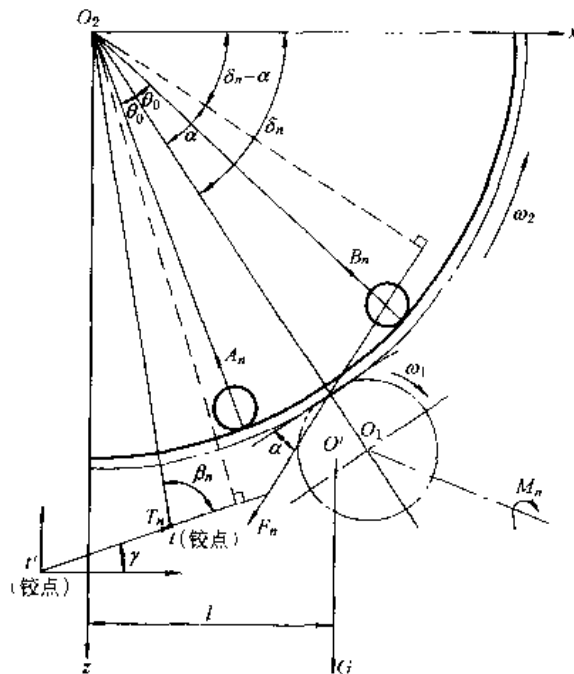


图 14-2-3

(1) 平衡方程

取悬挂小车 (包括小齿轮) 为分离体, 列平衡方程:

$$\sum F_x = 0$$

$$A_n \cos(\delta_n + \theta_0) + B_n \cos(\delta_n - \theta_0) + F_n \sin(\delta_n - \alpha) - T_n \cos \gamma = 0 \quad (14-2-47)$$

$$\sum F_z = 0$$

$$A_n \sin(\delta_n + \theta_0) + B_n \sin(\delta_n - \theta_0) - F_n \cos(\delta_n - \alpha) + T_n \sin \gamma - G = 0 \quad (14-2-48)$$

$$\sum M_{O_2} = 0$$

$$F_n \cos \alpha \frac{mz_2}{2} + M_n - T_n \overline{O_2 t} \sin \beta_n + Gl = 0 \quad (14-2-49)$$

(2) 计算公式

由齿轮传动知:

$$F_n = \frac{2M}{nmz_2 \cos \alpha} \quad (\text{N}) \quad (14-2-50)$$

将以上平衡方程求解, 得以下计算公式:

$$T_n = \frac{M \left(1 + \frac{1}{i} \right) + Gl n}{n \overline{O_2 t} \sin \beta_n} \quad (\text{N}) \quad (14-2-51)$$

$$A_n = \left[\frac{2M \cos(\alpha - \theta_0)}{nmz_2 \cos \alpha \sin 2\theta_0} - \frac{M \left(1 + \frac{1}{i} \right) \sin(\delta_n - \theta_0 + \gamma)}{n \overline{O_2 t} \sin \beta_n \sin 2\theta_0} \right] - \left[\frac{Gl n \sin(\delta_n - \theta_0 + \gamma)}{n \overline{O_2 t} \sin \beta_n \sin 2\theta_0} - \frac{G \cos(\delta_n - \theta_0)}{\sin 2\theta_0} \right] \quad (\text{N}) \quad (14-2-52)$$

$$B_n = \left[\frac{M \left(1 + \frac{1}{i} \right) \sin(\delta_n + \theta_0 + \gamma)}{n \overline{O_2 t} \sin \beta_n \sin 2\theta_0} - \frac{2M \cos(\theta_0 + \alpha)}{nmz_2 \cos \alpha \sin 2\theta_0} \right] + \left[\frac{Gl n \sin(\delta_n + \theta_0 + \gamma)}{n \overline{O_2 t} \sin \beta_n \sin 2\theta_0} - \frac{G \cos(\delta_n + \theta_0)}{\sin 2\theta_0} \right] \quad (\text{N}) \quad (14-2-53)$$

设计时必须保证轮压大于零, 即 $A_n \geq 0$ 、 $B_n \geq 0$, 选择 γ 、 δ_n 、 θ_0 时应能保证轮压大于零的要求。

(3) 不计悬挂小车重力时

不计悬挂小车重力时, 式 (14-2-51) ~ 式 (14-2-53) 中 $G = 0$, 则可得:

$$T_n = \frac{M \left(1 + \frac{1}{i} \right)}{n \overline{O_2 t} \sin \beta_n} \quad (\text{N}) \quad (14-2-54)$$

$$A_n = \frac{F_n \sin[90^\circ - (\alpha - \theta_0)] - T_n \sin(\delta_n - \theta_0 + \gamma)}{\sin 2\theta_0} \quad (\text{N}) \quad (14-2-55)$$

$$B_n = \frac{T_n \sin(\delta_n + \theta_0 + \gamma) - F_n \sin[90^\circ - (\alpha + \theta_0)]}{\sin 2\theta_0} \quad (\text{N}) \quad (14-2-56)$$

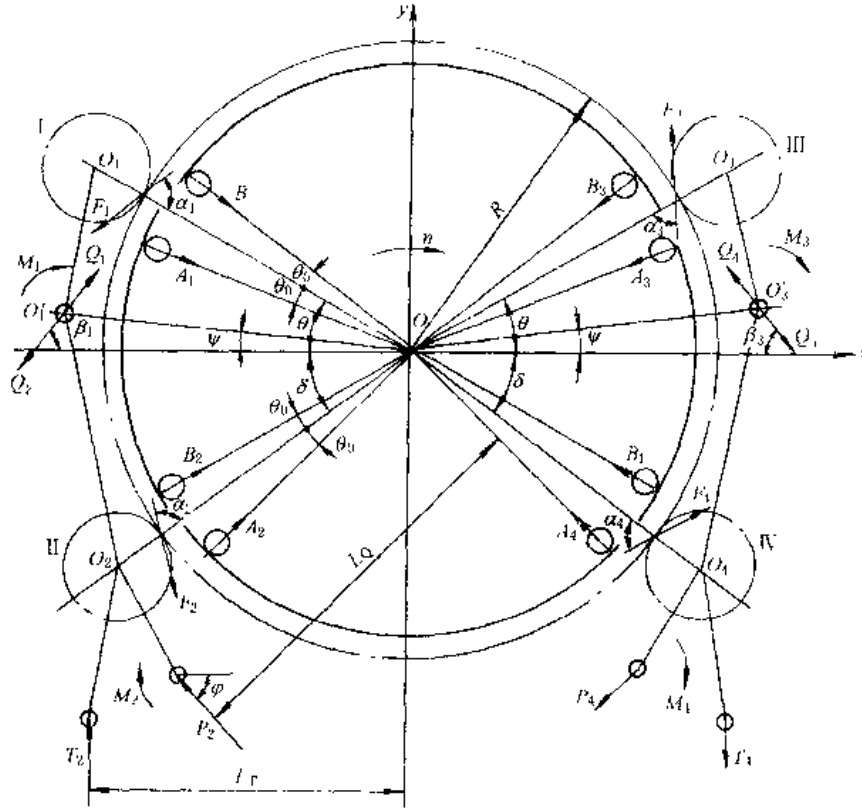
当 $\overline{O_2 t} \sin \beta_n \approx \frac{mz_2}{2} \cos \alpha$ 且 $\frac{1}{i} \approx 0$ 时, $T_n \approx F_n$, 见式 (14-2-50)、式 (14-2-51)。

一般 $\alpha = 20^\circ$, 所以保持轮压大于零时, 其条件有

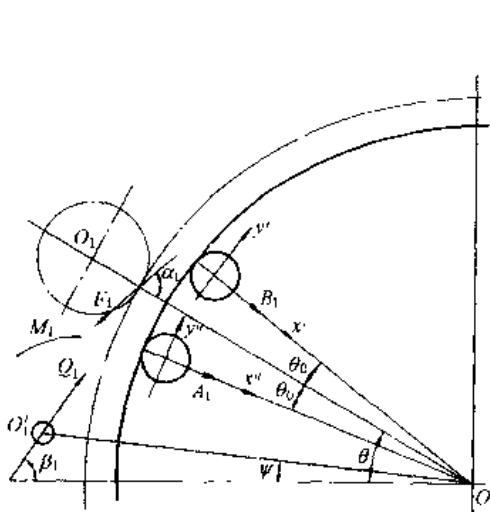
$$70^\circ + 2\theta \geq \gamma + \delta_n \geq 70^\circ - 2\theta_0$$

式中 M ——承载主轴输入总转矩, $N \cdot mm$;
 n ——悬挂小车个数, 作脚注时代表第 n 个小车;
 m ——齿轮模数, mm ;
 z_2 ——大齿轮齿数;
 i ——悬挂小车输入轴至承载输出轴之间的传动比。
 其他符号与本章 2.1 节平衡方程同。

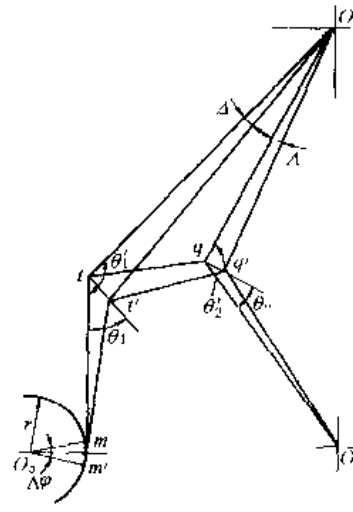
2.3 悬挂小车偏心滚轮式 (TSP 型) 的设计计算



(a) 受力分析图



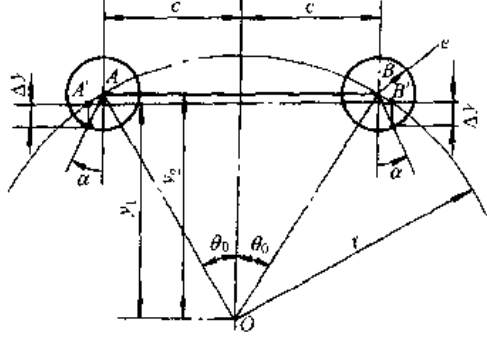
(b) 第 I 悬挂小车受力图



(c) 斜支杆、扭力杆变形图

表 14-2-1

	平衡方程及计算公式	符号说明
平衡方程	第 I 个悬挂小车 $\sum y' = 0$ $A_1 \sin 2\theta_0 + Q_1 \sin(\theta + \theta_0 + \beta_1) - F_1 \sin(\alpha_1 + \theta_0) = 0$ $\sum y'' = 0$ $-B_1 \sin 2\theta_0 - F_1 \sin(\alpha_1 - \theta_0) + Q_1 \sin(\theta - \theta_0 + \beta_1) = 0$ $\sum M_0 = 0$ $Q_1 \overline{OO'_1} \sin(\beta_1 + \psi) - F_1 \frac{d_2}{2} \cos \alpha + M_1 = 0$ 第 I、II、III 悬挂小车平衡方程从略	F_1 ——末级大齿轮(圈)对小齿轮啮合力, 当载荷均衡时, 四个悬挂小车的 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 相等, N d_2 ——末级大齿轮节圆直径, mm A_1 、 B_1 ——大齿轮(圈)对小车 I 滚轮的支反力, N α ——末级齿轮压力角 Q_1 ——销轴 O'_1 对悬挂小车的作用力, N M_1 ——第 I 个小车(啮合点)传递的转矩, N·mm
计算公式	当四点载荷均衡时 $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \frac{2M}{nd_2 \cos \alpha}$ 第一啮合点 $A_1 = \frac{F_1 \sin(\alpha_1 + \theta_0) - Q_1 \sin(\theta + \theta_0 + \beta_1)}{\sin 2\theta_0}$ $B_1 = \frac{Q_1 \sin(\theta - \theta_0 + \beta_1) - F_1 \sin(\alpha_1 - \theta_0)}{\sin 2\theta_0}$ $Q_1 = \frac{F_1 d_2 \cos \alpha - 2M_1}{2 \overline{OO'_1} \sin(\beta_1 + \psi)}$ 第二啮合点 $A_2 = \frac{F_2 \sin(\theta_0 + \alpha_2) - Q_2 \sin(\delta - \theta_0 - \beta_1)}{\sin 2\theta_0} - \frac{P_2 \sin(\delta - \theta_0 + \psi) + T_2 \cos(\delta - \theta_0)}{\sin 2\theta_0}$ $B_2 = \frac{F_2 \sin(\theta_0 - \alpha_2) + Q_2 \sin(\delta + \theta_0 - \beta_1)}{\sin 2\theta_0} + \frac{P_2 \sin(\delta + \theta_0 + \psi) + T_2 \cos(\delta + \theta_0)}{\sin 2\theta_0}$ $Q_2 = -Q_1$ 第三啮合点 $A_3 = \frac{Q_3 \sin(\theta + \theta_0 + \beta_3) - F_3 \sin(\alpha_3 - \theta_0)}{\sin 2\theta_0}$ $B_3 = \frac{F_3 \sin(\alpha_3 + \theta_0) - Q_3 \sin(\theta - \theta_0 + \beta_3)}{\sin 2\theta_0}$ $Q_3 = \frac{F_3 d_2 \cos \alpha - 2M_3}{2 \overline{OO'_3} \sin(\beta_3 + \psi)}$ 第四啮合点 $A_4 = \frac{-F_4 \sin(\alpha_4 - \theta_0) + Q_4 \sin(\delta - \theta_0 - \beta_3)}{\sin 2\theta_0} + \frac{P_4 \sin(\delta - \theta_0 + \psi) + T_4 \cos(\delta - \theta_0)}{\sin 2\theta_0}$ $B_4 = \frac{F_4 \sin(\alpha_4 + \theta_0) - Q_4 \sin(\delta + \theta_0 - \beta_3)}{\sin 2\theta_0} - \frac{P_4 \sin(\delta + \theta_0 + \psi) + T_4 \cos(\delta + \theta_0)}{\sin 2\theta_0}$ $Q_4 = -Q_3$ 保证轮压 A_n 、 B_n 大于零的条件 (β_1 、 β_3 范围) $\arctan \frac{\sin(\theta - \theta_0 - \psi)}{l \sin(\alpha_1 - \theta_0) - \cos(\theta - \theta_0 - \psi)} - \psi$ $\geq \beta_1 \geq \arctan \frac{\sin(\theta + \theta_0 - \psi)}{l \sin(\alpha_1 + \theta_0) - \cos(\theta + \theta_0 - \psi)} - \psi$ $\arctan \frac{\sin(\theta + \theta_0 - \psi)}{l \sin(\alpha_3 - \theta_0) - \cos(\theta + \theta_0 - \psi)} - \psi$ $\geq \beta_3 \geq \arctan \frac{\sin(\theta - \theta_0 - \psi)}{l \sin(\alpha_3 + \theta_0) - \cos(\theta - \theta_0 - \psi)} - \psi$ 求出 A_n 、 B_n 后按其中的较大值设计偏心滚轮机构。若其中出现负值时, 说明滚轮和大齿轮滚道不接触, 而是大小齿轮间凸缘接触, 此时, 需改变参数重新计算	A_2 、 B_2 ——大齿轮(圈)对小车 II 滚轮的支反力, N Q_2 ——销轴 O'_2 对小车 II 的支反力, N P_2 ——斜撑杆对小车 II 的作用力, N T_2 ——柔性构件的直杆对小车 II 的作用力, N M ——承载主轴输出的总转矩, N·mm n ——小车(啮合点)个数 A_3 、 B_3 ——大齿轮(圈)对小车 III 滚轮的支反力, N Q_3 ——销轴 O'_3 对小车 III 的作用力, N M_3 ——第三个小车(啮合点)传递的转矩, N·mm A_4 、 B_4 ——大齿轮(圈)对小车 IV 滚轮的支反力, N Q_4 ——销轴 O'_4 对小车 IV 的作用力, N P_4 ——斜撑杆对小车 IV 的作用力, N T_4 ——柔性构件直杆对小车 IV 的作用力, N 当斜撑杆与柔性构件同时受力时, 其变形情况如图 c 所示, 且存在下列变形协调条件 $\frac{T_2 r^2 L}{G_r J_x \cos \theta_1} \times \frac{\overline{O_2 O_4}}{O_2 l} = \frac{P_2 L_2}{E F_0 \cos \theta_2}$ 式中 G_r ——材料的扭转弹性模量, N/mm ² J_x ——断面积惯性矩, mm ⁴ L_2 ——斜撑杆长度, mm F_0 ——斜撑杆断面积, mm ² L ——柔性构件扭力杆的有效作用长度, mm 当斜撑杆不受力时 $P_2 = P_4 = 0$, 则 $T_2 = T_4 = \frac{M}{2L_T} \left(1 - \frac{1}{i}\right) \text{ (N)}$ 式中 L_T ——柔性构件直杆与小车连接点至中心的距离, mm $l = \frac{2 \overline{OO'_1}}{d_2 \left(1 - \frac{1}{i}\right)} \text{ (mm)}$

平衡方程及计算公式		符号说明
侧隙计算	$\Delta c_n = 2\Delta y \tan \alpha \quad (\text{mm})$ <p>式中 $\Delta y = \sqrt{r^2 - (c + e \sin \alpha)^2} + e \cos \alpha - \frac{c}{\tan \theta_0} \quad (\text{mm})$</p>  <p style="text-align: center;">侧隙调整原理</p> <p>A、B——偏心滚轮回转中心；O——大齿轮中心 (1) 调整侧隙时滚轮转动方向为：左滚轮顺时针方向转，右滚轮逆时针方向转。(2) 使用侧隙计算公式时注意：若 Δy 为负值，相当于侧隙值减小。(3) α 值变化和 Δy 的变化是非线性关系。(4) 调整 α 角时，侧隙的变化用公式确定</p>	Δc_n ——齿轮啮合侧隙增值，mm r ——滚轮中心轨迹半径（其值等于滚道半径减滚轮半径），mm c ——A、B点至大齿轮中心的横向距离，mm e ——滚轮偏心距，mm α ——偏心调整角

2.4 推杆式 (BFP 型) 的设计计算

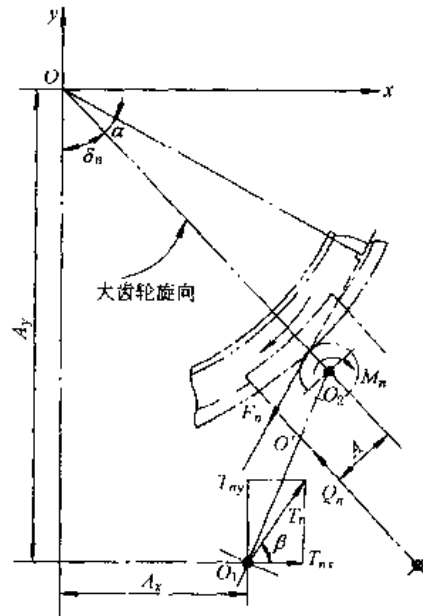


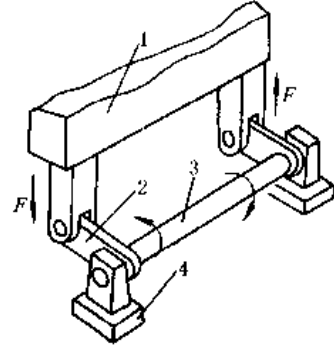
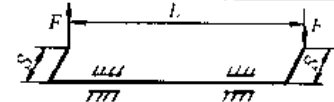
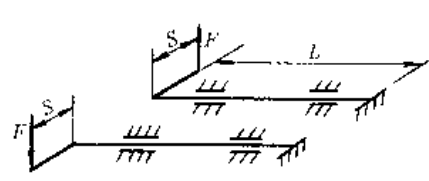
表 14-2-2

平衡方程及计算公式		符号说明
平衡方程	$\sum F_x = 0$ $F_n \cos(\delta_n + \alpha) + Q_n \sin \delta_n - T_{nx} = 0$ $\sum F_y = 0$ $F_n \sin(\delta_n + \alpha) - Q_n \cos \delta_n - T_{ny} = 0$ $\sum M_O = 0$ $F_n \frac{m z_2}{2} \cos \alpha + Q_n A - T_{nx} A_y - T_{ny} A_x + M_n = 0$	F_n ——末级大小齿轮之间的啮合力，N Q_n ——弹簧推杆反力，N T_{nx} ——支杆反力在 x 轴方向的投影，N T_{ny} ——支杆反力在 y 轴方向的投影，N α ——末级大小齿轮间的啮合角 M_n ——浮动齿轮箱输入轴上的转矩，N·mm m ——末级大小齿轮模数，mm z_2 ——末级大齿轮齿数

平衡方程及计算公式	符号说明
<p>计算公式</p> $F_{n1} = \frac{2M}{mz_2}$ $F_n = \frac{2M}{mz_2 \cos \alpha}$ $M_n = \frac{M}{ni}$ $Q_n = \frac{H}{D} \times \frac{M}{n}$ <p>式中 $H = \frac{2}{mz_2 \cos \alpha} [A_x \sin(\delta_n + \alpha) + A_y \cos(\delta_n + \alpha)]$</p> $D = A + A_x \cos \delta_n - A_y \sin \delta_n$ $T_{nx} = \frac{M}{n} \left[\frac{2}{mz_2 \cos \alpha} \cos(\delta_n + \alpha) + \frac{H}{D} \sin \delta_n \right]$ $T_{ny} = \frac{M}{n} \left[\frac{2}{mz_2 \cos \alpha} \sin(\delta_n + \alpha) - \frac{H}{D} \cos \delta_n \right]$ $T_n = \sqrt{T_{nx}^2 + T_{ny}^2}$ $\beta = \arctan \frac{T_{ny}}{T_{nx}}$ $\Delta c_n = \frac{2H \overline{O_1 O_2} \tan \alpha_0}{D \overline{O_1 O_2} K_\theta} \times \frac{M}{n}$ $K_\theta \geq \frac{2H \overline{O_1 O_2} \tan \alpha_0}{D \overline{O_1 O_2} \Delta c_{n \max}} \times \frac{M}{n}$ <p>若给定了侧隙的最大增值, 则推杆的刚度由上式算出</p>	<p>符号说明</p> <p>M——承载主轴输出总转矩, $N \cdot mm$</p> <p>n——末级大齿轮周边啮合点数</p> <p>i——浮动齿轮箱输入轴至承载主轴之间的速比</p> <p>F_{n1}——末级大小齿轮啮合点的圆周力, N</p> <p>T——支杆反力, N</p> <p>β——支杆反力 T 与水平方向的夹角</p> <p>A_x——支杆中心 O_1 至 y 轴的垂直距离, mm</p> <p>A_y——支杆中心 O_1 至 x 轴的垂直距离, mm</p> <p>A——弹簧推杆轴线至大小齿轮中心连线之间的距离, mm</p> <p>Δc_n——传递转矩后侧隙的增值, mm</p> <p>α_0——末级齿轮的刀具齿形角</p> <p>K_θ——推杆刚度, N/mm</p> <p>$\Delta c_{n \max}$——轮齿侧隙最大增值, 根据传动要求给定, mm</p>

2.5 柔性支承构件的型式与计算

表 14-2-3

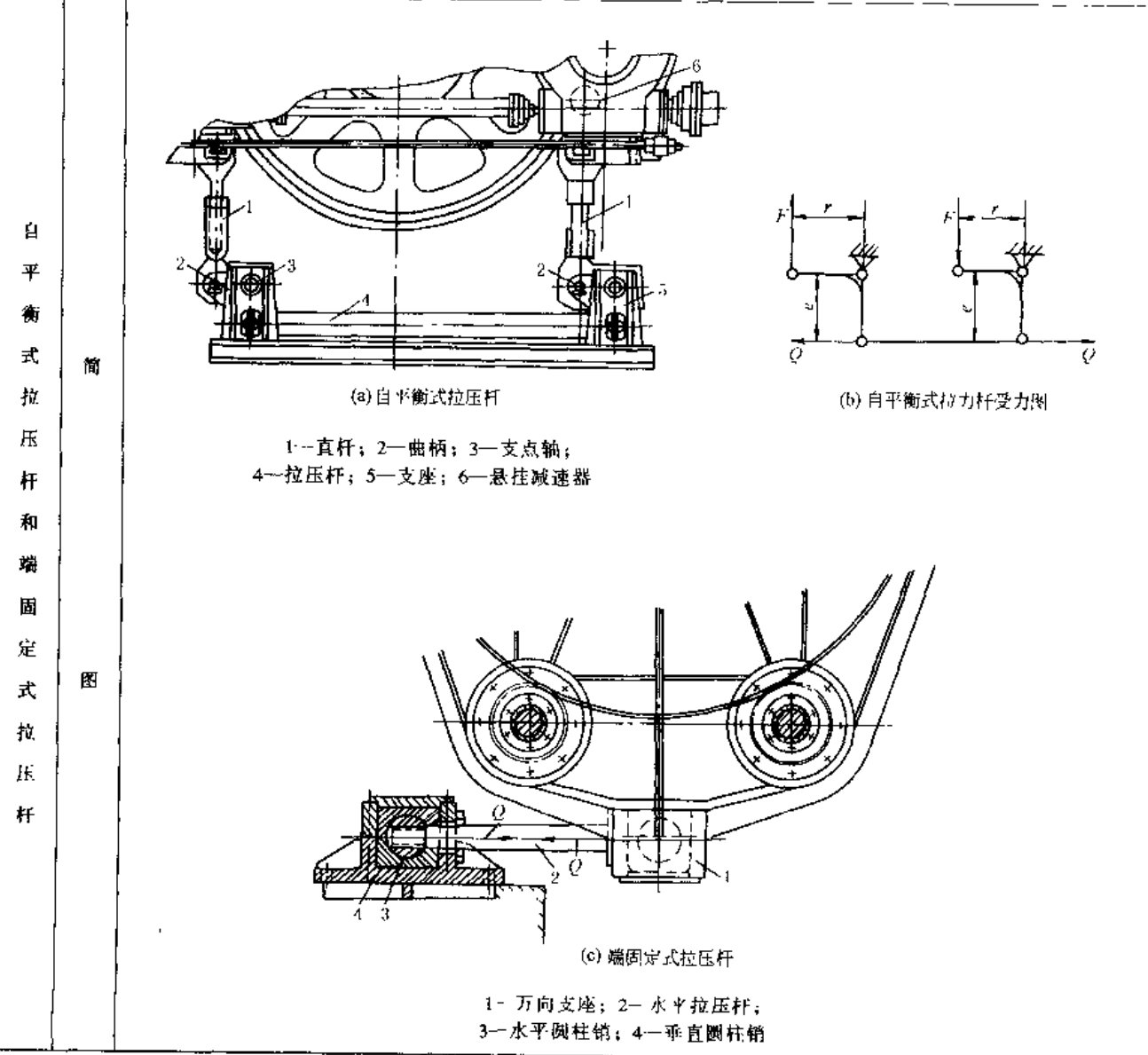
型式	结构简图及计算	
<p>自平衡式单扭力杆和端固定式双扭力杆</p>	<p>简图</p>  <p>(a) 自平衡式单扭力杆</p> <p>1—悬挂齿轮减速器; 2—曲柄; 3—扭力杆; 4—支座</p>	 <p>(b) 自平衡式单扭力杆</p>  <p>(c) 端固定式双扭力杆</p>
	<p>计算公式</p> $l = 2A - d_1$ $d = \sqrt[3]{\frac{32M_{Gr}}{\pi \sigma_p}}$ $M_{Gr} = \sqrt{M_G^2 + 0.75M_G^2}$ $\sigma_p = \frac{\sigma_{llp}}{K}$ <p>各式适用于自平衡式单扭力杆, 对于端固定式双扭力杆可参考计算</p>	$\Delta x = S \left(1 - \cos \frac{\phi}{2} \right)$ $\Delta y = S \sin \frac{\phi}{2}$ $\tan \phi/2 = \Delta x / \Delta y$ $\phi/2 = \arctan \Delta x / \Delta y$ <p>或 $\phi = \frac{M_r L_b}{GJ}$</p> $L_b = L - L_1 - 2L_3$

第 14 章

型式 结构简图及计算

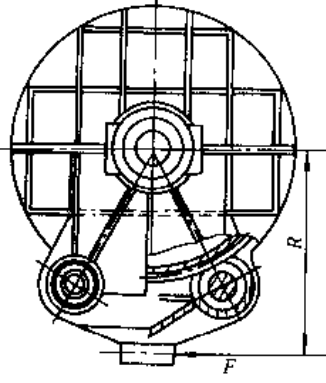
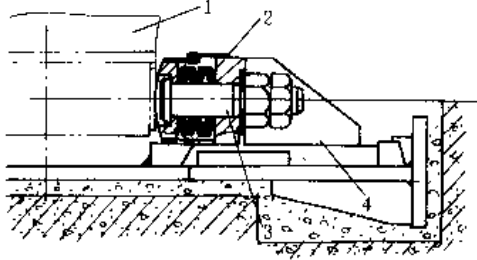
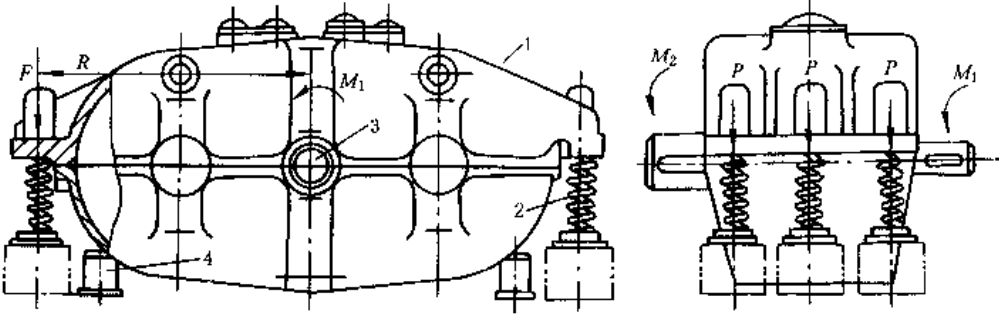
自平衡式单扭力杆和端固定式双扭力杆	计算公式	式中 L ——扭力杆有效作用长度, mm A ——末级大小齿轮中心距, mm d_1 ——末级小齿轮节圆直径, mm S ——扭力杆曲柄偏心距, mm d ——扭力杆直径, mm M_{Gr} ——弯扭合成当量弯矩, N·mm M_C ——扭力杆危险断面上的弯矩, N·mm M_T ——扭力杆危险断面上的扭矩, N·mm σ_p ——扭力杆材料的许用应力, N/mm ²	σ_{BF} ——脉动循环基本许用应力, N/mm ² K ——振动系数, 一般为 1.25 ~ 1.35 $\Delta x, \Delta y$ ——扭力杆扭转变形位移量, mm ϕ ——扭力杆扭转变形角位移, rad L_h ——扭力杆主变形长度, mm L_1 ——偏心轴套长度, mm L_5 ——偏心轴肩长度, mm G ——扭力杆剪切弹性模量, N/mm ² J ——扭力杆抗扭惯性矩, mm ⁴
	设计要点	(1) 扭力杆材质一般可选用 40Cr、42CrMo、30Cr2MoV, 并需经调质处理。(2) 扭力杆及其他主要零件应按脉动循环应力计算。(3) 扭力杆的柔度可以调节, 其调节方法有: ①改变其主变形长度, 这种方法可实现无级调节, 但结构比较复杂; ②通过改变材质或热处理, 在保证强度和刚度条件下改变扭力杆直径 (换装不同直径的扭力杆), 这种方法优点是不影响装置的结构, 可获得分级调节。(4) 作用于扭力杆上的力 F 值与载荷是否均衡和啮合点数的多少没有关系。(5) 对于端固定式双扭力杆, 两根扭力杆上的作用力 F 有可能不相等, 设计时应按较大者进行计算。(6) 设计时扭力杆的扭角一般不超过 3°, 为了保证扭力杆不被扭断, 应设置限扭装置 (一般均有这种装置)	

(1) 扭力杆材质一般可选用 40Cr、42CrMo、30Cr2MoV, 并需经调质处理。(2) 扭力杆及其他主要零件应按脉动循环应力计算。(3) 扭力杆的柔度可以调节, 其调节方法有: ①改变其主变形长度, 这种方法可实现无级调节, 但结构比较复杂; ②通过改变材质或热处理, 在保证强度和刚度条件下改变扭力杆直径 (换装不同直径的扭力杆), 这种方法优点是不影响装置的结构, 可获得分级调节。(4) 作用于扭力杆上的力 F 值与载荷是否均衡和啮合点数的多少没有关系。(5) 对于端固定式双扭力杆, 两根扭力杆上的作用力 F 有可能不相等, 设计时应按较大者进行计算。(6) 设计时扭力杆的扭角一般不超过 3°, 为了保证扭力杆不被扭断, 应设置限扭装置 (一般均有这种装置)



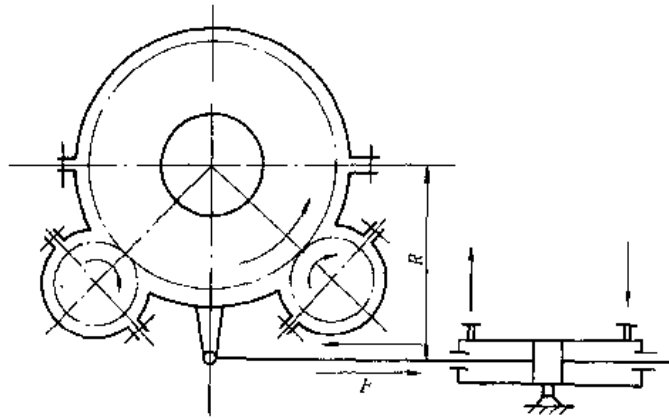
自平衡式拉压杆和端固定式拉压杆

简图

型式	结构简图及计算
自平衡式拉压杆和端固定式拉压杆	<p>计算公式</p> <p>对自平衡式拉压杆 $d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi\sigma_p}} \quad Q = \frac{Fr}{e}$</p> <p>对端固定式拉压杆 $d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi\sigma_p}}$</p> <p>式中 Q——拉压杆上的作用力, N; F——直杆上的作用力, N; r、e——曲折式杠杆的力臂, mm; d——拉压杆直径, mm; σ_p——材料许用应力, N/mm²</p>
设计要点	<p>自平衡式拉压杆主要用于 BFT 型多柔传动装置, 端固定式拉压杆一般用于悬挂箱体式多柔传动装置</p>
水平弹簧式和垂直弹簧式	<p>水平弹簧式柔性支承</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <p>(a) 悬挂箱体结构 (b) 柔性支承 1—悬挂箱体; 2—碟形弹簧; 3—预紧螺栓; 4—支架</p> <p>垂直弹簧式柔性支承</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">  </div> <p>(c) 悬挂式减速器的结构与受力图 1—悬挂减速器; 2—垂直弹簧; 3—传动轴; 4—变压阻尼器</p>
计算公式	<p>水平弹簧式 半悬挂式 $P = \frac{F}{n} = \frac{M + \sum m}{nR}$</p> <p>全悬挂式 $P = \frac{F}{n} = \frac{M}{nR}$</p> <p>垂直弹簧式 $P = \frac{F}{n} = \frac{M_2 \pm M_1}{nR}$ (M_1 与 M_2 同向时取正号, 反向时取负号)</p> <p>式中 P——作用于每个弹簧上同一性质载荷的力, N F——箱体对弹簧(柔性构件)作用的同一性质载荷的总力, N M——承载主轴输出的总转矩, N·mm $\sum m$——半悬挂时, 其他作用于箱体(壳体)上的力对承载主轴中心力矩的代数和, N·mm R——力 F 至主轴中心的距离, mm n——受同一性质的载荷(压或拉)的弹簧根数 M_1——输入减速器的转矩, N·mm M_2——主轴输出转矩, N·mm</p>
设计要点	<p>根据 P 设计弹簧, 水平弹簧式一般采用碟形弹簧, 可使结构紧凑, 其预压缩量根据箱体允许转角和碟形弹簧的刚度确定</p>

型式 结构简图及计算

筒
液
图
压
式



根据力 F 设计液压缸

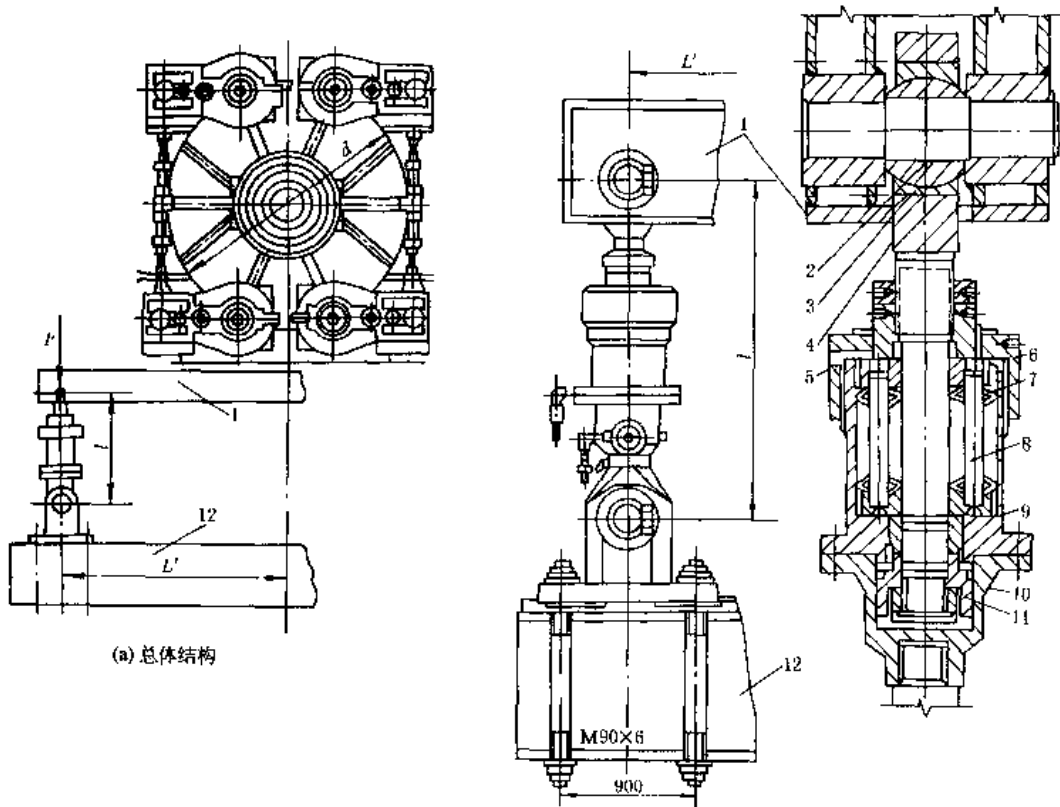
计
算
公
式

半悬挂式 $F = \frac{M + \sum m}{R}$

全悬挂式 $F = \frac{M}{R}$

式中 F ——悬挂箱体作用于液压活塞杆上的力, N
 M ——主轴输出总转矩, N·mm
 $\sum m$ ——半悬挂时, 其他作用于箱体的力对主轴中心力矩的代数和, N·mm
 R ——活塞杆连接点到主轴中心的距离, mm

弹
簧
液
压
综
合
图



(a) 总体结构

(b) 柔性支承构件

1—悬挂箱体底部横梁; 2、3—球铰; 4—活塞杆; 5、6—螺母; 7—碟形弹簧; 8—导杆;
 9—柔性支承构件壳体; 10—液压缸; 11—活塞; 12—固定横梁

型式

结构简图及计算

弹簧—
液压综合式

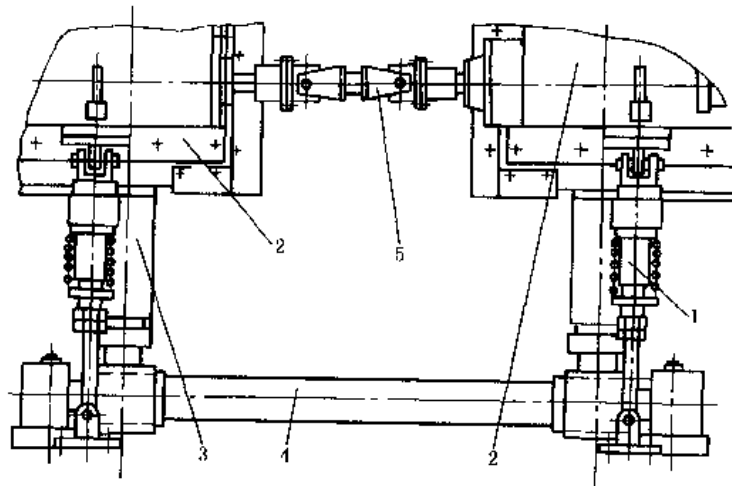
计算
公式

$$F = \frac{M}{L'}$$

式中 F ——作用于柔性支承构件上的力, N
 M ——承载主轴输出总扭矩, N·mm
 L' ——柔性支承构件中心线至承载主轴中心的距离, mm
 根据 F 值设计计算柔性支承零件, 如碟形弹簧等

弹簧—
扭力杆综合式

简图



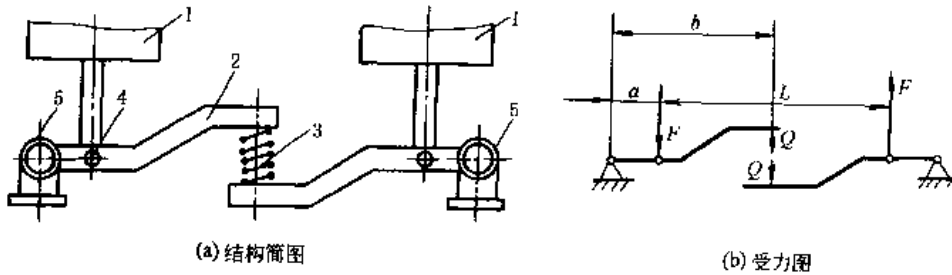
1—弹簧重力平衡器; 2—悬挂减速器; 3—内装弹簧的直杆;
4—扭力杆; 5—万向联轴器

设计
要点

这种柔性支承只是把自平衡单扭力杆式柔性支承中的直杆换成内装弹簧的套管, 故扭力杆的计算同自平衡式单扭力杆

杠杆—
弹簧综合式

简图

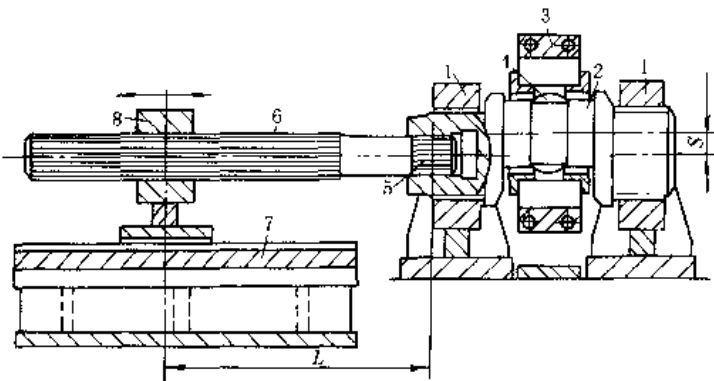
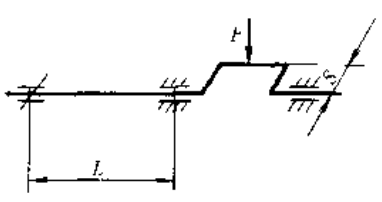
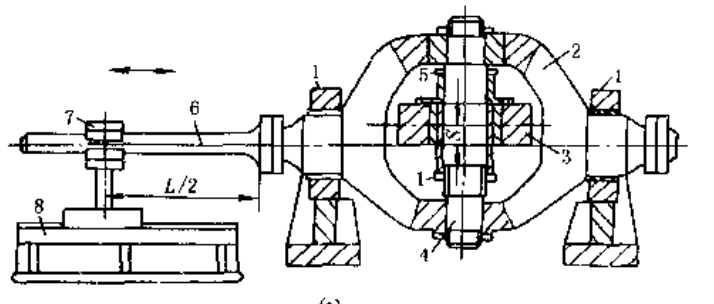
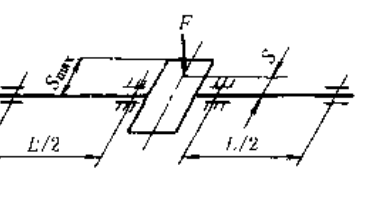


(a) 结构简图 (b) 受力图
1—悬挂减速器; 2—杠杆; 3—弹簧; 4—铰链点; 5—支座

计算
公式

$$Q = F \frac{a}{b}$$

式中 Q ——作用在弹簧上的力, N
 F ——悬挂减速装置上直杆对杠杆的作用力, N
 a 、 b ——力臂, mm

型式	结构简图及计算	
刚度可调式	 <p>(a) 结构简图</p>	 <p>(b) 受力图</p>
计算公式	$d \geq 2\sqrt[3]{\frac{2FS}{\pi\tau_p}}$ <p>式中 d——扭力杆直径, mm S——扭力杆曲柄偏心距, mm F——悬挂齿轮减速器通过直杆作用在扭力杆上的力, N τ_p——扭力杆材料的许用剪切应力, N/mm² 扭力杆的最大许用扭转角为每米 3°, 设计扭转角限位器时, 按此考虑</p>	
设计要点	<ol style="list-style-type: none"> (1) 调节座能左右移动, 即扭力杆有效作用长度可以改变, 从而可改变扭力杆的扭转刚度 (2) 调节座和扭力杆可更换, 以适应需做更大调节扭力杆刚度时使用 (3) 上式仅粗算时适用, 精算时应按疲劳计算 	
刚度偏心均可调式	 <p>(a)</p>	 <p>(b)</p>
计算公式	$d \geq 2\sqrt[3]{\frac{FS_{max}}{\pi\tau_p}}$ <p>式中 d——扭力杆直径, mm F——悬挂减速器作用在心轴上的力, N S_{max}——最大偏心距, mm τ_p——扭力杆所用材质的抗剪许用应力, N/mm²</p>	
设计要点	<ol style="list-style-type: none"> (1) 框架左右装有两根扭力杆与框架对称, 移动夹紧支座可调节扭力杆长度, 从而改变扭力杆刚度 (2) 夹紧支座的夹紧力可根据要求进行控制, 并能保证扭力杆起安全作用 (3) 通过调整螺母, 可使连杆头沿心轴左右移动, 以改变偏心距 S 值 	

2.6 设计中其他几个问题

(1) 齿轮的核算及设计同一般齿轮,但由于多柔传动的低速级齿轮接触良好,齿宽可按95%接触考虑,传递的转矩按每点平均传递转矩乘以采用(或不采用)均载技术后每点的最大不平衡系数确定。

(2) 在公差配合、加工精度和表面加工质量方面也同于一般齿轮。

(3) 装置中使用的其他传动设备(初级减速器、中间蜗轮减速器等)按实际传递的转矩、转速进行选型。

2.7 设计计算实例

(1) 拉杆式(BFT型)设计计算实例

试计算一烧结机用拉杆式具有弹簧重力平衡器对称型多柔传动装置,如图14-2-4所示。

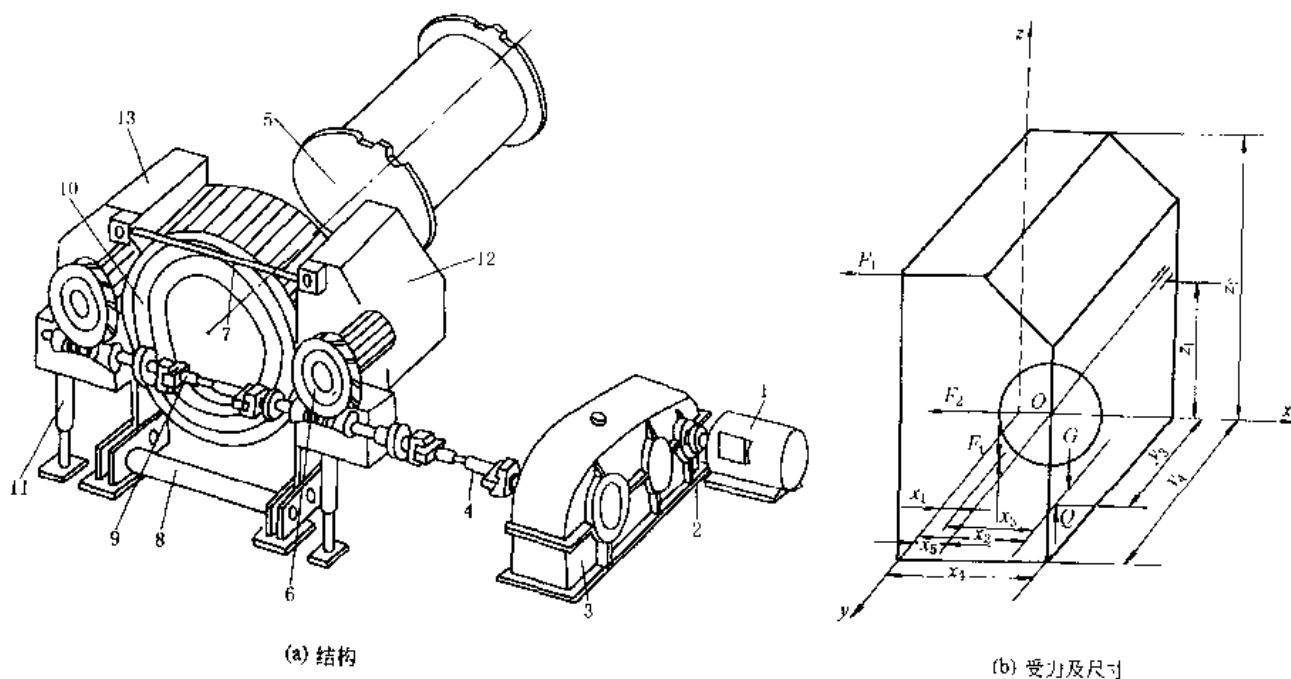


图 14-2-4

1—电动机; 2—弹性柱销联轴器; 3—初级减速器; 4—十字型万向联轴器; 5—烧结机大星轮; 6—平面蜗轮副;
7—拉杆; 8—自平衡式扭力杆; 9—万向联轴器; 10—末级大齿轮; 11—弹簧重力平衡器; 12—右传动架; 13—左传动架

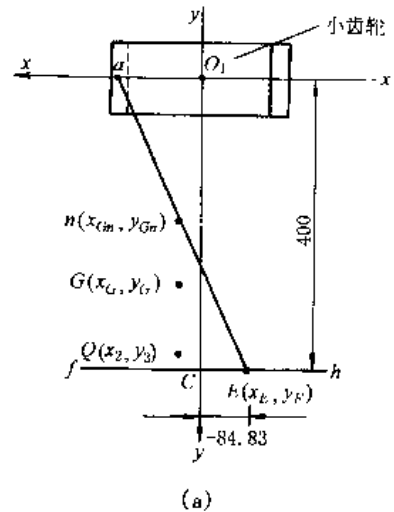
已知: 主轴输出转矩 $M = 441980 \text{ N} \cdot \text{m}$; 主轴转速 $n = 0.25 \text{ r/min}$; 末级小齿轮齿数 $z_1 = 18$; 末级大齿轮齿数 $z_2 = 120$; 末级传动比 $i_2 = 6.66$; 末级传动效率 $\eta_2 = 0.91$; 末级小齿轮节圆直径 $d_1 = 432 \text{ mm}$; 末级大齿轮节圆直径 $d_2 = 2800 \text{ mm}$; 啮合角 $\alpha_H = \alpha = 20^\circ$ (α 为压力角); 蜗轮副传动比 $i_1 = 32$; 蜗轮副传动效率 $\eta_1 = 0.62$ 。

计算见表 14-2-4。

表 14-2-4

计算项目		计算公式及结果
传动架计算 (按均载)	末级大小齿轮的圆周力/N	$F_1 = F_1' = F_2 = F_2' = F = \frac{M}{mz_2} = \frac{441980 \times 10^3}{24 \times 120} = 153465$
	传动架前后拉杆的作用力/N	$F_3 = F_3' = F_4 = F_4' = F_5 = F_5' = F_6 = F_6' = F_7 = F_7' = F_8 = F_8' = F_9 = F_9' = F_{10} = F_{10}' = F_{11} = F_{11}' = F_{12} = F_{12}' = F_{13} = F_{13}' = F_1 \tan \alpha_H / 2 = 153465 \times \tan 20^\circ / 2 = 27928$
	末级大小齿轮的径向力/N	$F_r = F_r' = F_1 \tan \alpha_H = 153465 \times \tan 20^\circ = 55856$
	传动架沿左右方向的宽度/mm	$x_4(x_4') = 1230$ (根据具体情况选定)
	小齿轮中心的 x 坐标/mm	$x_5(x_5') = 652$ (选定)
	传动架前后方向长度/mm	$y_6(y_6') = 720$ (选定)
	小齿轮中心的 z 坐标/mm	$z_1(z_1') = 950$ (选定)
	小齿轮中心的 y 坐标/mm	$y_1(y_1') = (F_1/F_r) y_6 = 27928/55856 \times 720 = 360$

计算项目		计算公式及结果
传动架计算 (按均载)	柔性支承直杆在传动架上支点的 x 坐标/mm	$x_F(x'_F) = x_1(x'_1) = x_3 - \frac{d_1}{2} = 652 - \frac{432}{2} = 436$
	柔性支承直杆在传动架上支点的 y 坐标/mm	$y_F(y'_F) = y_1(y'_1) + \frac{mz_2}{2i\eta} = 360 + \frac{24 \times 120}{2 \times 32 \times 6.667 \times 0.62 \times 0.91} = 372$
	传动架高度/mm	$z_2 = \frac{F_t}{F_1} z_1 = \frac{55856}{27928} \times 950 = 1900$
传动架重力	重力由下列各项组成: (1) 传动架中所有零部件的重力 (根据已确定的结构计算) (2) 传动架拉杆分配到传动架上的重力 (3) 万向联轴器分配到传动架上的重力 (4) 柔性直杆吊挂在传动架上的重力 (5) 重力平衡器与传动架连接处, 连接装置吊挂的重力 $G_c = 112N$ (6) 重力平衡器吊挂在传动架上的重力 $G_f = 600N$ 传动架的总重力 $G(G') = 55340N$	
传动架计算 (按均载)	无弹簧重力平衡器时传动架重心/mm	$x_{G_0} = 28.5, y_{G_0} = 314.5$ (设末级小齿轮中心为坐标原点, 见表内图 a)
	初定弹簧重力平衡器在传动架上支点位置/mm	初定原则是支点位置不与支承直杆发生干涉。设小齿轮中心为原点 (见表内图 a), 根据结构具体情况, 初选弹簧重力平衡器支点的 y 坐标, 即 $y_E = O_1C = 400$ 作过 C 点平行于 $x-x$ 的直线 fh , 再从小齿轮上的啮合点 a 作过 n 点 (无弹簧重力平衡器时传动架重心) 的直线与 fh 相交于 E 点, 这样求出弹簧重力平衡器在传动架上的初定支点的 x 坐标, 即 $x_E = -84.83$, 此时, x_E, y_E 即定下
	确定弹簧重力平衡器的传动架的重心 x_G, y_G /mm	根据已知的 $G_0, x_{G_0}, y_{G_0}, G_c, G_f, x_E$ 和 y_E , 求出带弹簧重力平衡器时传动架的重心, 结果为 $x_G = 27.04, y_G = 315.60$
确定弹簧重力平衡器在传动架上支点 (Q 点) 位置/mm	$x_2 = \frac{1}{\mu} \tan \alpha (x_1 - z_2/2) + x_G$ $y_3 = y_G + \frac{L}{i\eta\mu} \left(\frac{1}{i_b r_b} - \frac{1}{2} \right)$ 计算结果 $x_2 = 27.04, y_3 = 338.29$ 实际工程设计中, 为了简化, 有时把初定的支点 (E 点) 作为最终位置, 可不再作计算 本例即将 Q 点的位置取为 E 点	
扭力杆计算	扭力杆长度/mm	$L = 2A - d_1 = 2 \times 1616 - 432 = 2800$
	扭力杆曲柄偏心距/mm	$S = 250$ (按具体结构选)
	偏心曲柄与扭力杆支承点间距离/mm	$L_2 = 320$ (按具体结构确定)
	扭力杆柔性直杆长度/mm	$L_0 = 2200$ (按安装条件及烧结机大齿轮调偏要求确定)

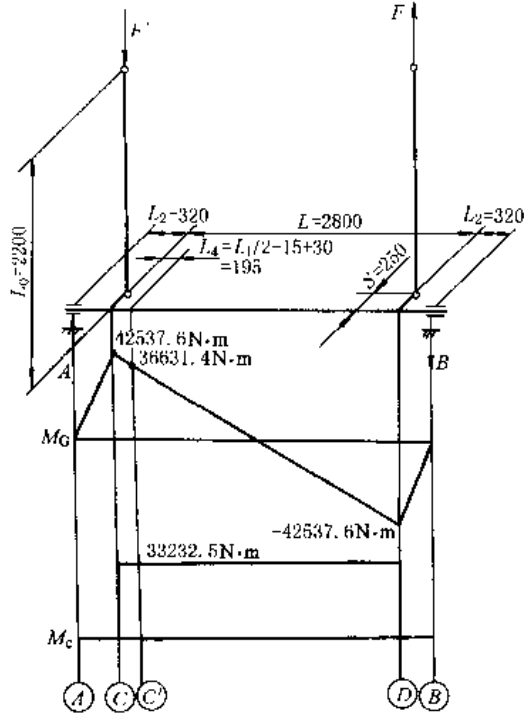


续表

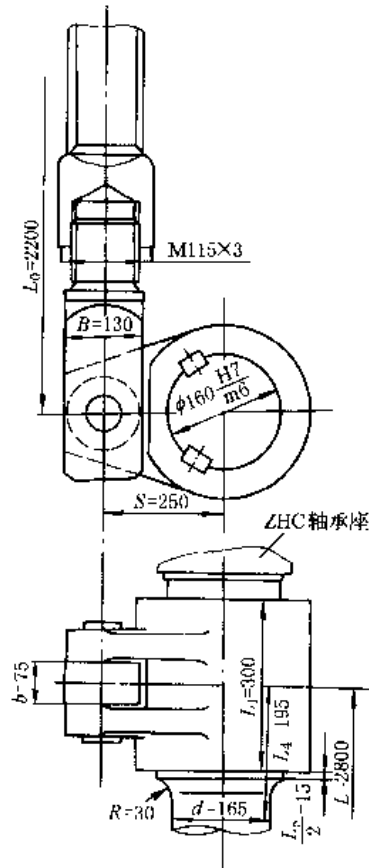
计算项目

计算公式及结果

扭
力
杆
直
径
计
算



(b)



(c)

扭力杆在曲柄连接处 (图 b 中 C、D 二点) 的当量弯矩

$$M_{DC}^c = \sqrt{M_C^2 + 0.75 M_T^2} = \sqrt{42537600^2 + 0.75 \times 33232500^2} = 5.136 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

式中 M_C ——C、D 处弯矩; M_T ——C、D 处扭矩

扭力杆曲柄连接处直径/mm

$$D \geq \sqrt[3]{32 M_{DC}^c / \pi \sigma_p} = \sqrt[3]{32 \times 5.136 \times 10^7 / \pi \times 172} = 145$$

考虑双键对轴的削弱等因素, 取 $D = 160$

式中 σ_p ——许用应力, $\sigma_p = \sigma_{1P} / K = 215 / 1.25 = 172 \text{ N/mm}^2$

σ_{1P} ——脉动循环基本许用应力, 扭力杆采用 40Cr 调质钢, 其 $\sigma_{1P} = 215 \text{ N/mm}^2$

K ——动荷系数, $K = 1.25$

扭力杆有效变形部分直径/mm

考虑应力集中, 取危险截面为 C' , 即距直杆中心 L_1 处 (见图 b)

$$M_{C'}^c = \sqrt{(M_C^c)^2 + 0.75 (M_T^c)^2} = \sqrt{36631400^2 + 0.75 \times 33232500^2}$$

$$= 4.658 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{C'}^c}{\pi \sigma_p}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 4.658 \times 10^7}{\pi \times 172}} = 140.2, \text{ 取 } d = 140$$

扭力杆结构见图 c

有效变形部分的长度/mm

$$L_b = L - L_1 - L_2 = 2800 - 300 - 2 \times 15 = 2470$$

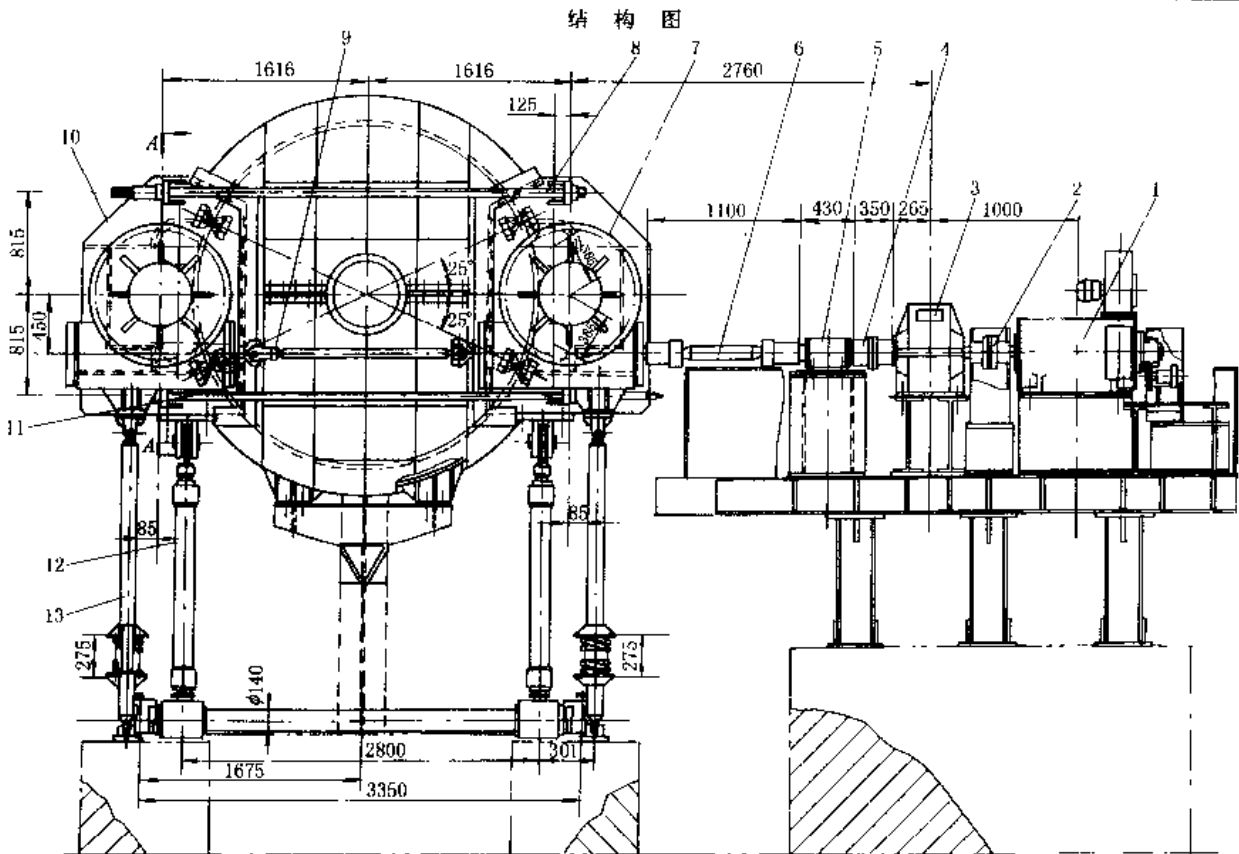
扭力杆扭角/rad

$$\varphi = \frac{M_T L_b}{GJ} = \frac{33232500 \times 2470}{8.1 \times 10^4 \times 38416000} = 0.02638 \text{ rad} (1.512^\circ) < \varphi_p = 3^\circ$$

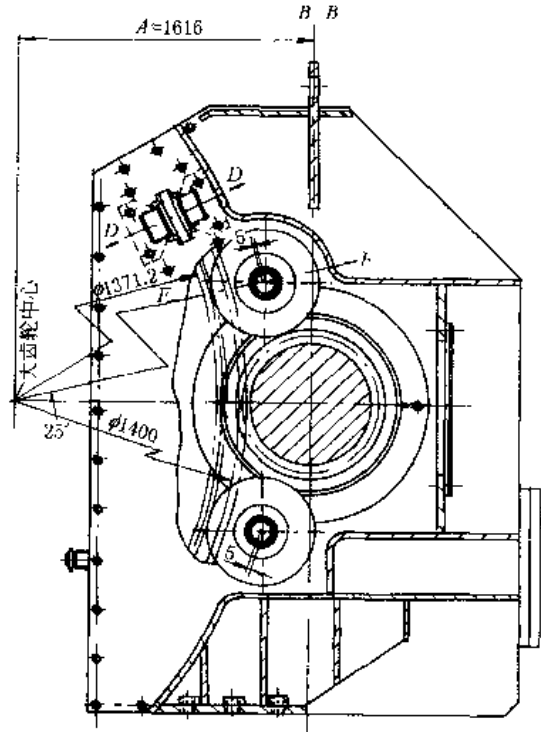
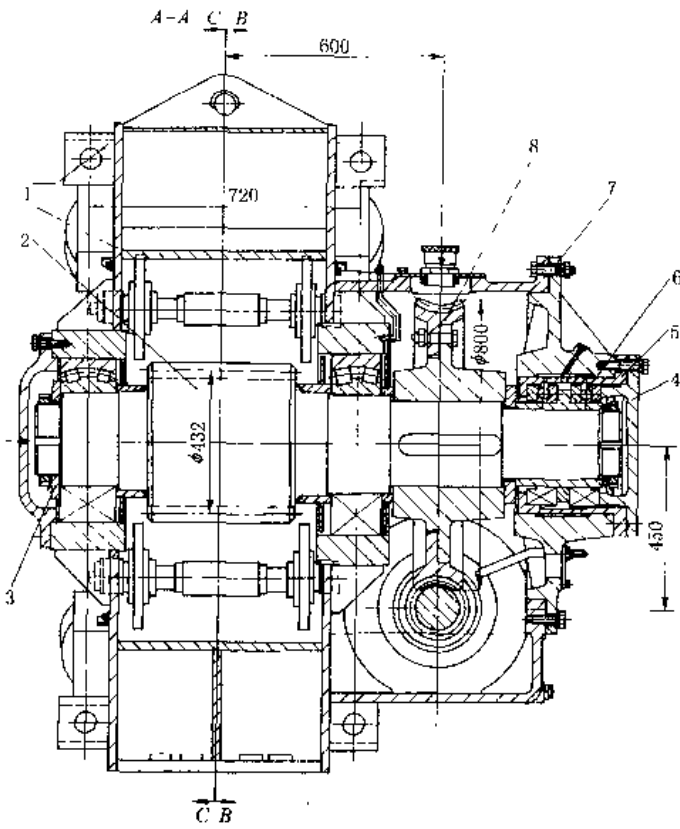
式中 G ——扭转弹性模量, $G = 8.1 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$

J ——抗扭惯性矩, $J = 38416000 \text{ mm}^4$

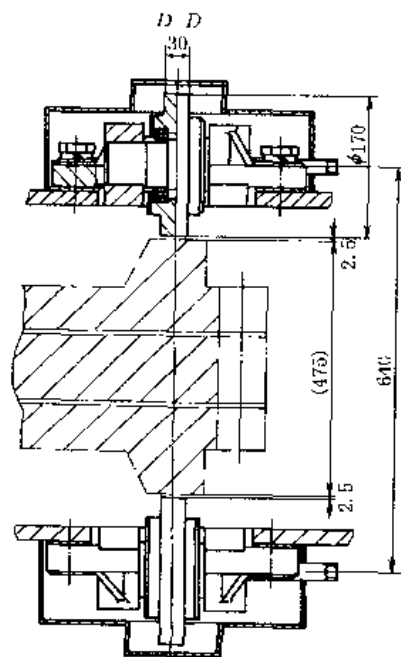
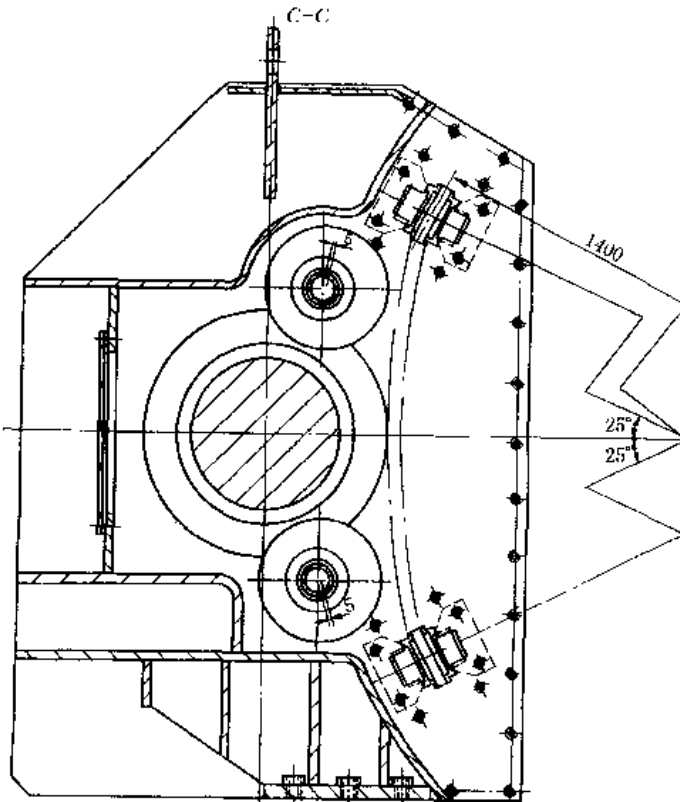
计算项目		计算公式及结果
扭力杆计算	扭力杆变形量 变形量/mm	$\Delta y = S(1 - \cos\varphi/2) = 250 \times (1 - \cos 0.756^\circ) = 0.0218\text{mm}$ $\Delta z = S \sin\varphi/2 = 250 \times \sin 0.756^\circ = 3.2986\text{mm}$
弹簧重力平衡器的计算	平衡器的支承位置/mm	见本表图 a, $x_E = -84.83$, $y_E = 400$
	平衡器上的平衡力 G_E/N	见本表图 a. G 和 G_E 对 a 点取矩, 得 $Q_E = G_E = 43663.26$
	为减小对齿轮啮合力的影响, 一般按大行程, 小刚度原则选择弹簧为宜, 根据 G_E 的大小, 并考虑适当裕量, 选标准弹簧	
	弹簧钢丝材料	60Si2Mn
	弹簧钢丝直径/mm	$d = 30$
	弹簧中径/mm	$D_2 = 140$
	弹簧外径/mm	$D = 170$
	弹簧内径/mm	$D_1 = 110$
	弹簧节距/mm	$t = 47.20$
	弹簧单圈刚度/ $N \cdot \text{mm}^{-1}$	$K = 2892.86$
在最大工作载荷下单圈变形量/mm	$f_n = 15.359$	
工作圈数	工作圈数 $n = 7$ 总圈数 $n_{总} = 8.5$	
弹簧自由高度/mm	$H_0 = f_n n + (n_{总} - 0.5) d = 347.51$	
稳定性指标	$H_0/D_2 = 347.51/140 = 2.48 < 2.6$ 安全	
调试	设备安装后应调整平衡器的弹簧预压缩量, 其预压缩量分别按式 (14-2-31)、式 (14-2-32) 计算	

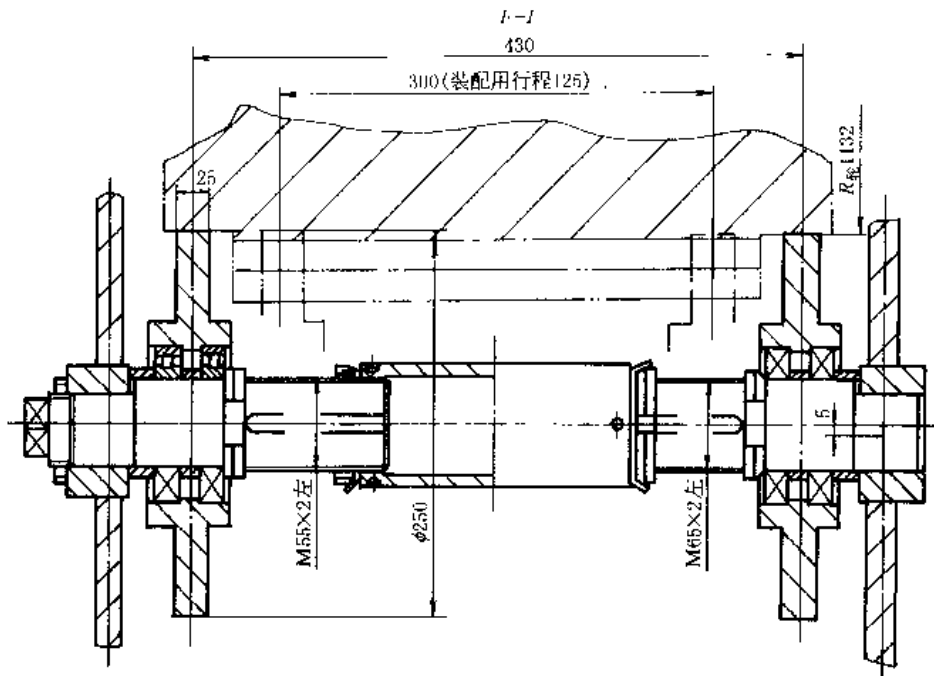


1—直流电机; 2—联轴器; 3—减速器; 4—安全联轴器; 5—中间连接件; 6—万向连轴器; 7—右传动架; 8—径向拉杆; 9—万向联轴器; 10—左传动架; 11—径向拉杆; 12—柔性杆部件; 13—重力平衡器



- 1—左传动架；2—小齿轮；3—挡圈；
 4—网盖；5—套筒；6—轴承；
 7—箱盖；8—蜗轮





(2) 推杆式 (BFP 型) 设计计算实例

试设计计算一回转窑多柔传动装置。

已知：回转窑直径 $\phi = 3.6\text{m}$ ；长度 $l = 52\text{m}$ ；斜度 0.05 ；挡数 $H = 4$ ；两挡跨距 13.606m ；转速 $n = 1.37\text{r/min}$ ；总速比 $i = 729.93$ ；输出转矩 $M = 871\text{kN}\cdot\text{m}$ ；电机功率 $N = 125\text{kW}$ 。

1) 选择确定多柔传动方案

根据多点啮合柔性传动的常用结构型式，由于回转窑要求进行中部传动，宜采用 BF 型或 BFP 型，根据现场具体条件，确定选择 BFP 型。

确定啮合点数时，既要根据传动总功率的大小，又要考虑末级大齿轮周围的空间和环境。啮合点数太多，设备占有空间大且增加复杂性，啮合点数太少，又不能体现多点啮合与功率分流的优越性，一般以取 $2 \sim 4$ 点为宜。本例根据现场情况取 2 点，每点传递功率 62.5kW 。

2) 确定末级齿轮参数

根据回转窑直径以及齿轮的具体结构确定末级大齿圈分度圆直径 $d_k = 5740\text{mm}$ ，模数 $m = 28\text{mm}$ ，齿数 $z_2 = 205$ ，小齿轮齿数取 $z_1 = 19$ ，故末级大小齿轮传动比 $i_2 = 10.79$ ，中间传动装置传动比 $i_1 = \frac{729.93}{10.79} = 67.65$ 。

3) 绘制柔性传动装置结构和计算简图 (见表 14-2-2 中图)。

4) 利用本章 2.4 中计算公式计算 F_n 、 $F_{n\tau}$ 、 Q_n 和 T_n 。

根据现场具体条件取： $\delta_n = 45^\circ$ ； $A_x = 1.52\text{m}$ ， $A_y = 3.65\text{m}$ ， $A = 0.63\text{m}$ ，齿轮压力角 $\alpha = 20^\circ$ 。

用本章 2.4 中公式计算得：

$$\text{末级小齿轮传入的转矩 } M_n = \frac{M}{ni_2} = \frac{871}{2 \times 10.79} = 40.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\text{啮合力 } F_n = 161.5\text{kN}$$

$$\text{圆周力 } F_{n\tau} = 151.7\text{kN}$$

$$\text{弹簧推杆反力 } Q_n = 6.30\text{kN}$$

$$\text{支杆反力 } T_{nx} = 72.7\text{kN}, T_{ny} = 142\text{kN}$$

$$T_n = \sqrt{(72.7)^2 + (142)^2} = 169\text{kN}$$

$$\text{支杆反力 } T \text{ 与水平方向夹角 } \beta = \arctan \frac{142}{72.7} = 62^\circ 53'$$

- 5) 利用以上结果可进行其他机械设计, 例如传动设计, 柔性支承构件设计等。
 6) 绘制技术设计图纸 (结构简图如图 14-2-5)。

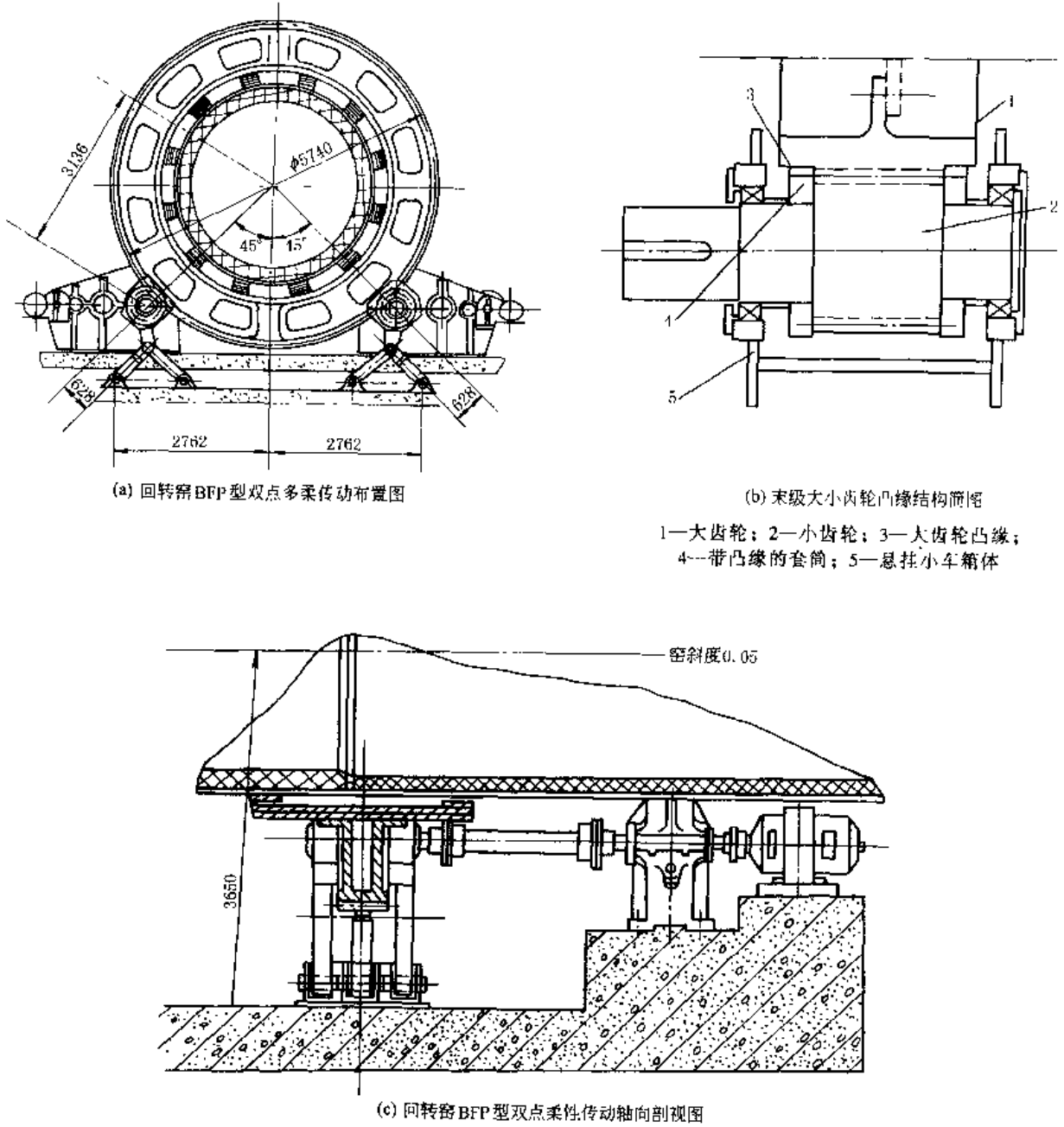


图 14-2-5 回转窑设计简图



第3章 多点啮合柔性传动装置的尺寸系列及选型方法

多点啮合柔性传动装置在国外某些厂家已形成系列。在我国，这种传动形式正逐渐推广使用，目前在氧气炼钢转炉上使用较为普遍，在烧结机的驱动上也正渐渐地被采用。我国第一台用于锌挥发回转窑上的柔性传动装置为 NC 93-1 型^①，它具有传动平稳，结构紧凑，投资少且可节能等优点。

本章除主要介绍当前国内正在使用的几种典型多柔传动装置的性能、规格和相关尺寸外，还将介绍国外几个主要厂家的产品系列及选型方法，供设计选型时参考。

利用国外产品系列进行初步设计时，初选型后，还应根据使用的材质和其他具体设计条件以及我国的实际情况进行强度等核算。再参考国内使用的现型同类设备最后确定。

1 目前国内使用的几种典型多柔传动装置的性能与尺寸

用在烧结机上的 BFT 型多柔传动系统性能和尺寸

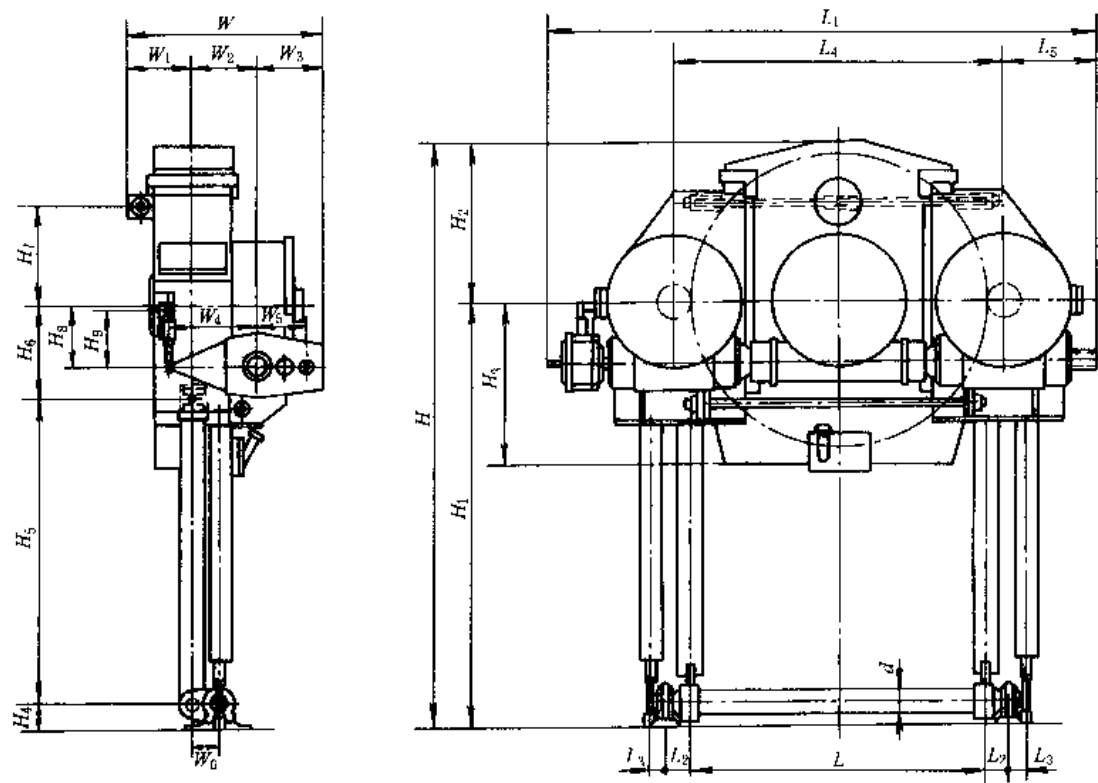


表 14-3-1

/mm

性能	烧结机规格/m ²			
	450	180	70	20
型式	BFT16-S00-410H ₂ 有 弹簧重力平衡器非对 称型 (左)	有弹簧重力平衡器对 称型	有弹簧重力平衡器非 对称型 (右)	有弹簧重力平衡器对 称型

① NC 93-1 型柔性传动装置系由北方工业大学研制，其直径为 3.45m、长度为 52m。

续表

性能		烧结机规格/m ²			
		450	180	70	20
总减速比		$7.63 \times 25.333 \times 8.444 \approx 1632$	$12.64 \times 31.5 \times 6.67 \approx 2655.73$	$16.190 \times 39 \times 9.125 \approx 5761.62$	$31.5 \times 180.6 \approx 5688.9$
总传动效率		0.77 (600r/min时)	0.56 (正常工作时)	—	0.6
输入转速/r·min ⁻¹		300 ~ 900	173 ~ 523	1000	425 ~ 1250
输出转速/r·min ⁻¹		0.183 ~ 0.551	0.065 ~ 0.197	0.174	0.075 ~ 0.220
输出转矩 /N·m	最大	1.029×10^6	1.127×10^6	7.35×10^5	2.03×10^5
	常用	5.586×10^5	3.753×10^5	7.17×10^5	1.562×10^5
极限转矩/N·m		1.078×10^6	—	—	—
初级 减速器	型式	轴上型 HELICAL 减速器	JZQ650 减速器	—	NGW52-8
	级数	二级	二级	二级	—
	减速比	$58/19 \times 55/22 \approx 7.63$	12.64	$4.235 \times 3.823 \approx 16.190$	31.5
中间 减速器	型式	WORM 减速器	平面二次包络蜗轮副	圆弧齿圆柱蜗杆减速器	蜗轮蜗杆减速器
	减速器	$76/3 \approx 25.333$	31.5	39	—
末级 减速器	型式	BFT 型 BOGIFLEX	BFT 型	BFT 型	BFT 型
	啮合点数	两点	两点	两点	两点
	减速比	$152/18 \approx 8.444$	$120/18 \approx 6.67$	9.125	—
	模数	—	$m = 22$	$m = 20$	—
尺寸参数		烧结机规格/m ²			
		450	180	70	20
L		2432	2696	2920	1560
L ₁		4488.50	3670	—	—
L ₂		200	300	扭力杆支承在弹簧 250 重力平衡器支承 外侧	150
L ₃		140	62	—	110
L ₄		2720	3100	3240	1776
L ₅		822	—	—	—
H		4645	4880	—	—
H ₁		3360	3380	2320	2000
H ₂		1290	1500	—	—
H ₃		1330	1520	—	—
H ₄		180	160	—	190
H ₅		2480	2110	—	—
H ₆		700	1110	—	—
H ₇		795	765	—	—
H ₈		500	—	—	400
H ₉		445	—	—	—
W		1590	—	—	—
W ₁		510	690	—	—
W ₂		525	—	—	—
W ₃		555	—	—	—
W ₄		785	—	—	—
W ₅		410	—	—	—
W ₆		240	200	—	180
d		φ180	φ165	φ200	φ120

用在炼钢转炉上的 PGC (FSMT) 型多柔传动性能和尺寸

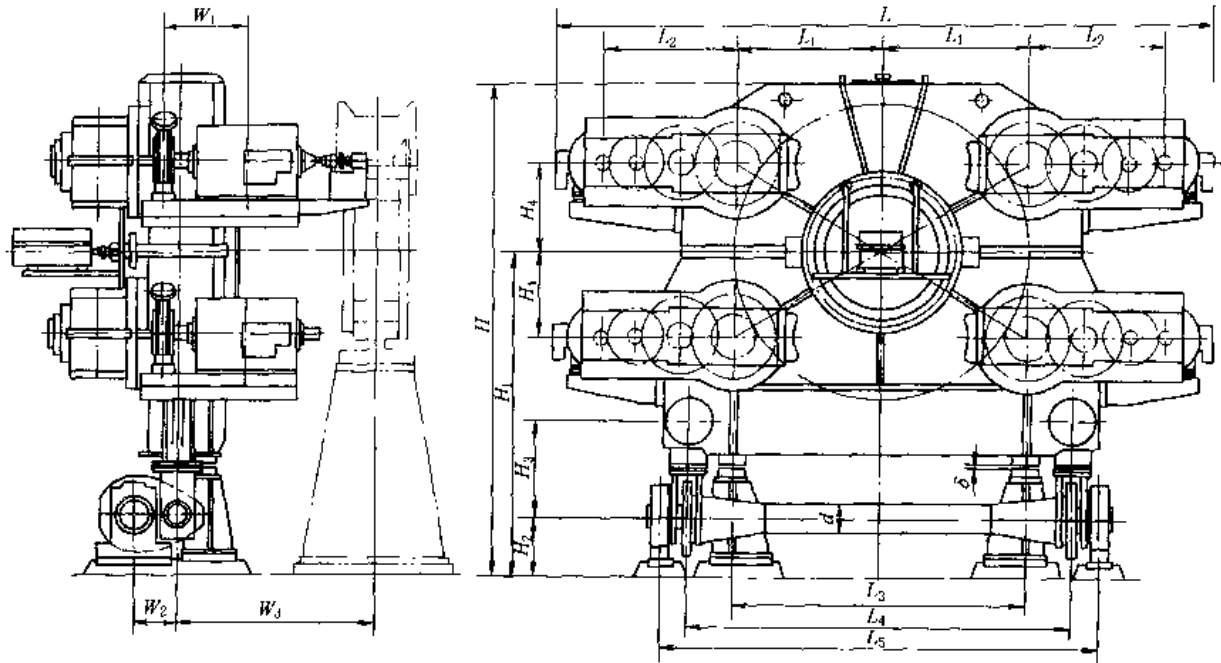


表 14-3-2

转炉吨位/t		300	尺寸/mm			
			符号	300t	30t	
总速比		$87.501 \times 7.294 \approx 638.245$	L	8205.214	5644	
传动效率		0.992				
输入转速/ $r \cdot \min^{-1}$		96 ~ 960	L_1	1702.083	1244.728	
输出转速/ $r \cdot \min^{-1}$		0.15 ~ 1.5	L_2	1778.524	1050	
最大输出转矩/ $N \cdot m$		6.37×10^6	L_3	3450	2480	
极限转矩/ $N \cdot m$		1.911×10^7	L_4	4620	3280	
末级 减速器	啮合点数	4	L_5	5330	3874	
	减速比	$124/17 \approx 7.294$	H	6200	4430	
	齿轮模数/mm	28	H_1	3850	2825	
	大齿轮材料	SNCM8 (日本钢号)	H_2	735	400	
扭力杆	变形量	$/\epsilon(^{\circ}) \cdot (M_j)^{-1}$	H_3	1165	875	
		$/\epsilon'(^{\circ}) \cdot (3M_j)^{-1}$	H_4	1063.579	770.51	
	材 料	钢号	SNCM8 (日本钢号)	W_1	1005	655
		屈服点 $\sigma_s / N \cdot cm^{-2}$	88200	W_2	560	360
		冲击韧性 $\alpha_k / N \cdot mm$	58.8 (V形缺口, 0℃)	W_3	2500	1500
	安全系数	6.5	d	$\phi 380$	$\phi 230$	
		δ	13.4	5.7		

注: 1. 30t 转炉仅提供尺寸数据供参考。

2. 表中 M_j 表示额定转矩。

用在炼钢转炉上的全悬挂两点啮合自平衡单扭力杆缓冲多柔装置性能尺寸

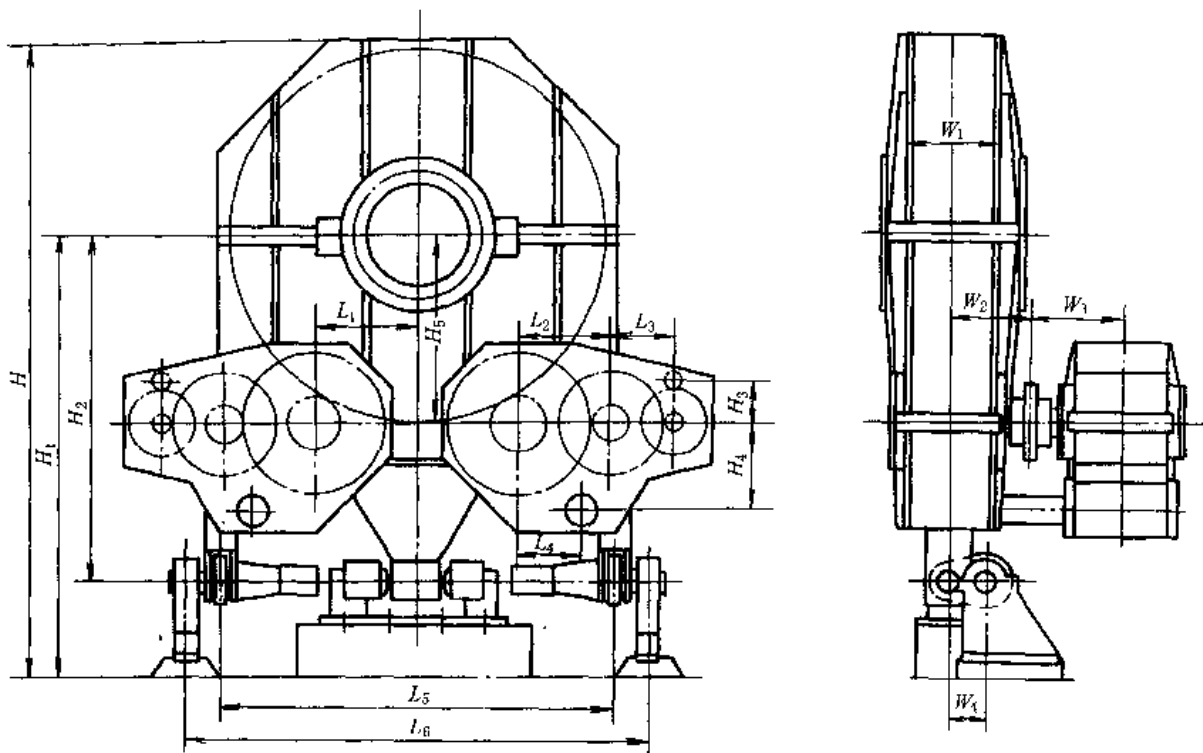


表 14-3-3

型 式		全悬挂两点啮合自平衡扭力杆	尺 寸/mm		
转炉吨位		15t			
总减速比		$127.446 \times 7.33 \approx 934$	L_1	725	
输出转数/ $r \cdot \min^{-1}$		0.2 ~ 0.8	L_2	640	
最大输出转矩/ $N \cdot m$		3.136×10^5	L_3	430	
极限转矩/ $N \cdot m$		5.88×10^5	L_4	430	
末 级 减 速 器		啮合点数	2	L_5	2760
		减速比	$132/18 \approx 7.33$	L_6	3220
		齿轮模数/mm	20	H	4650
		大齿轮材料	ZG310-570 (正火)	H_1	3060
		小齿轮材料	35SiMnMo (调质)	H_2	2400
初级减速器速比		$5.278 \times 5.278 \times 4.575 \approx 127.446$	H_3	275	
			H_4	600	
			H_5	1313.155	
			W_1	606	
			W_2	555	
			W_3	615	
			W_4	250 ~ 300	

用在炼钢转炉上的半悬挂弹簧缓冲多柔传动装置性能及尺寸

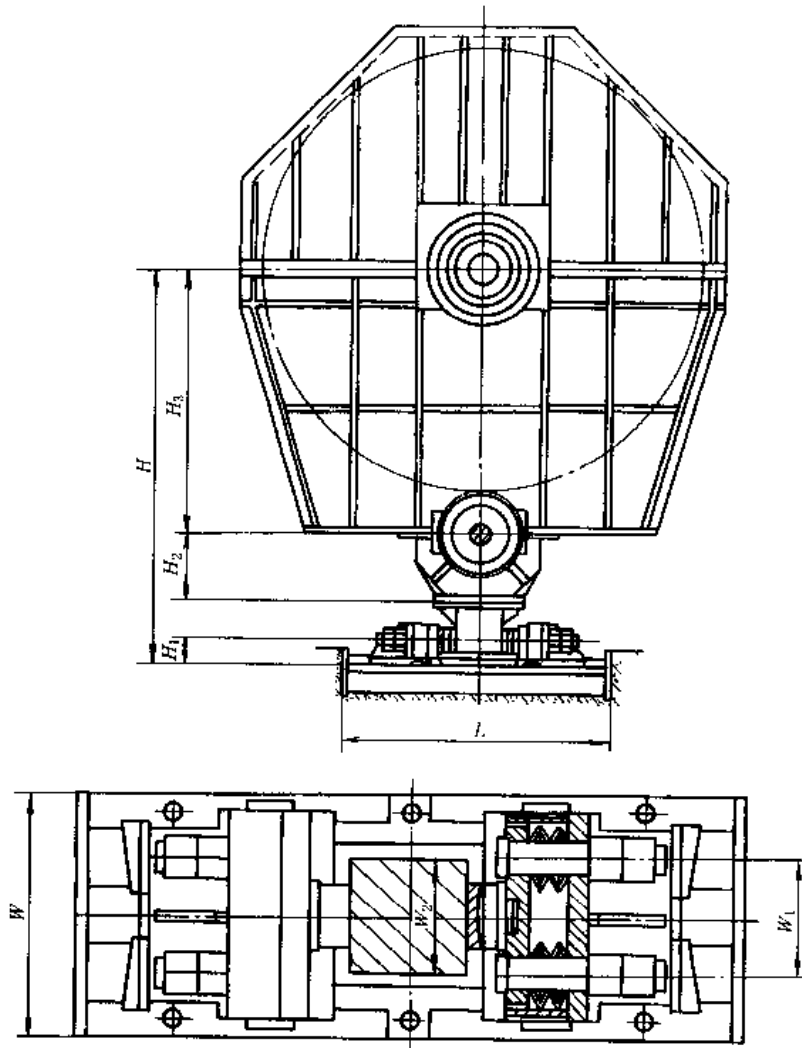


表 14-3-4

型 式		单点啮合半悬挂水平弹簧缓冲		尺 寸/mm	
转炉吨位		30t			
末级齿轮减速比		135/29 = 4.655		L	2400
输出转速/r·min ⁻¹		0.177 - 0.98		H	3655
最大输出转矩/N·m		9.8 × 10 ⁵		H ₁	240
啮合点数		1		H ₂	660
齿轮模数/mm		28		H ₃	2380
柔性 支承 构件 中的 弹簧	外径/mm	φ250		W	900
	材质	60Si2MnA		W ₁	430
	预紧力(每组)/N	1.73 × 10 ⁵		W ₂	400
	预紧后长度/mm	127.88			
	内径/mm	φ = 126.2			
	弹簧载荷为 6.4kN 时变形量/mm	4.47			

2 国外多柔传动装置几种尺寸系列及选型方法

2.1 日本精工本公司尺寸系列及选型方法

日本精工本公司 BFT 型尺寸系列

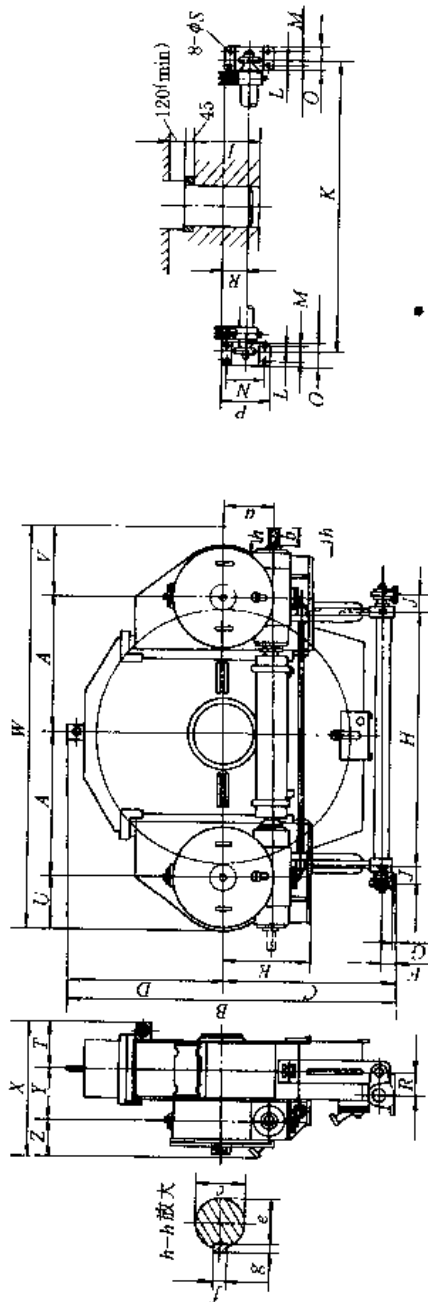


表 14-3-5

齿数比	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	O	P	R	S	T	I	初級齒輪減速器中心距 a	U	V	W	X	Y	Z	b	c	e	f	g	
152/18	8	680	1970	1200	770	520	90	28	1216	100	1416	25	72	220	126	270	120	27	310	350	200	285	345	1990	855	295	250	110	50	44.5	14	9
	10	850	2350	1380	950	625	130	40	1520	150	1820	40	108	315	184	390	180	39	390	445	250	305	425	2090	885	315	260	140	60	53	18	11
	12	1020	2620	1520	1100	740	130	40	1824	150	2124	40	108	315	184	390	180	39	430	560	315	360	480	2540	1015	365	260	140	60	53	18	11
	14	1190	2910	1660	1250	920	180	56	2128	200	2528	55	144	415	242	510	240	52	505	685	400	450	590	2880	1150	430	290	140	70	62.5	20	12
	16	1360	3230	1790	1440	920	180	56	2432	200	2832	55	144	415	242	510	240	52	550	750	500	550	710	3640	1350	515	330	210	110	100	28	16
	8	784	2070	1200	870	520	90	28	1424	100	1624	25	72	220	126	270	120	27	310	350	200	285	345	2198	855	295	250	110	50	44.5	14	9
178/18	10	980	2490	1410	1080	625	130	40	1780	150	2080	40	108	315	184	390	130	39	390	445	250	305	425	2298	885	315	260	140	60	53	18	11
	12	1176	2850	1590	1260	740	130	40	2136	150	2436	40	108	315	184	390	180	39	430	560	315	360	480	2800	1045	365	290	140	70	62.5	20	12
	14	1372	3260	1820	1440	920	180	56	2492	200	2892	55	144	415	242	510	240	52	505	685	400	450	590	3192	1150	430	290	140	70	62.5	20	12
	16	1568	3650	2000	1650	920	180	56	2848	200	3248	55	144	415	242	510	240	52	550	750	500	550	710	4004	1350	515	330	210	110	100	28	16
																				500	550	710	4396	1445	565	330	210	110	100	28	16	



选型方法

(1) 拉杆式 BFT 型

1) 计算公式

$$M_{c2} = \frac{M_2 K_h}{K_A} \quad (\text{N} \cdot \text{mm})$$

式中 M_{c2} ——主轴输出计算转矩；

M_2 ——主轴正常输出转矩；

K_h ——寿命系数；

K_A ——工作系数。

2) 系数选定

① 寿命系数 K_h ：根据设计寿命 (H) 由图 14-3-1 查出，或用公式 $K_h = \left(\frac{H}{25000}\right)^{1/6}$ 计算，式中 H 为设计寿命小时数。

② 工作系数 K_A ：根据每天工作小时数和工作载荷变化情况用表 14-3-6 确定。

表 14-3-6 工作系数选定

项目	原动机分类	载荷等级	载荷状态	工作时间 (每天)	
				< 12h	> 12h
K_A	电动机	I	载荷很少变化	1.0	0.95
		II	载荷有变化	0.80	0.70
	涡轮机	III	载荷有很大变化	0.67	0.57
	多缸	I	载荷很少变化	0.80	0.70
		II	载荷有变化	0.67	0.57
	发动机	III	载荷有很大变化	0.57	0.45

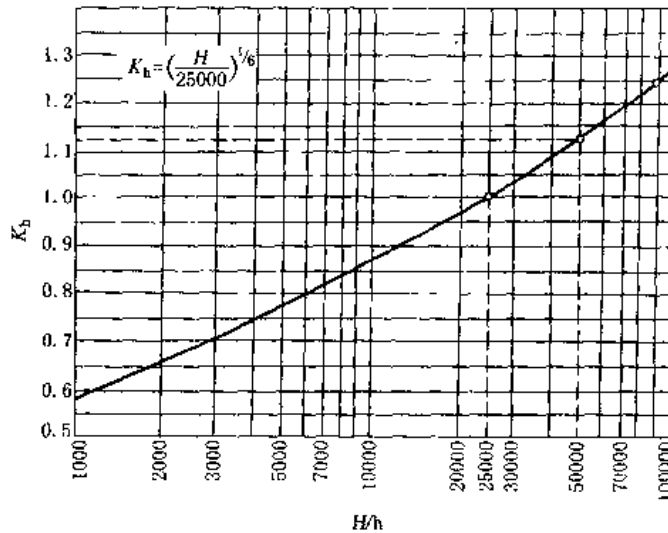


图 14-3-1 寿命系数选定图

3) 选择步骤

- ① 根据选定的系数 K_h 、 K_A 以及给定的 M_2 求出 M_{c2} 。
- ② 用 M_{c2} 和主轴的输出转速 n_2 ，由图 14-3-2 中找出低速级大齿轮的模数 m 和齿数 z_2 。
- ③ 确定小齿轮齿数 z_1 ，一般可取 $z_1 = 18$ 。
- ④ 由表 14-3-5 选出 BFT 型系列尺寸。

4) 选型举例

例 1 试计算一挖泥船的运输机 BFT 型驱动装置, 原动机为电动机, 承载主轴正常工作转矩 $M_2 = 400\text{kN}\cdot\text{m}$, 转速 $n_2 = 5\text{r}/\text{min}$, 设计寿命为 25000h, 工作时间每天 8h, 且载荷变动很大。

解 由图 14-3-1 得寿命系数 $K_h = 1.0$, 由表 14-3-6 选定工作系数 $K_A = 0.67$, 则主轴输出计算转矩

$$M_{ca} = \frac{M_2 K_h}{K_A} = \frac{400 \times 1.0}{0.67} = 597.02 \approx 600 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

由图 14-3-2 查出 $n_2 = 5\text{r}/\text{min}$ 和 $M_{ca} = 600\text{kN}\cdot\text{m}$ 的交点, 将该交点上方的曲线导向右侧得出末级大齿轮模数 $m = 14\text{mm}$, 齿数 $z_2 = 178$, z_1 确定为 18。

由表 14-3-5 选出对应于 178/18 齿数比和模数为 14mm 的 BFT 装置的尺寸系列。

例 2 试计算一台铁水罐车倾动机构的驱动装置, 原动机为电动机, 承载主轴正常工作转矩 $M_2 = 203\text{kN}\cdot\text{m}$, 转速 $n_2 = 0.05\text{r}/\text{min}$, 设计寿命为 50000h, 每天 8h 工作。

解 由于这种设备的载荷变化很大, 由表 14-3-6 确定工作系数 $K_A = 0.67$, 由图 14-3-1 查得寿命系数 $K_h = 1.125$, 故主轴输出计算转矩

$$M_{ca} = \frac{M_2 K_h}{K_A} = \frac{203 \times 1.125}{0.67} \approx 350 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

由图 14-3-2 查得大齿轮齿数 $z_2 = 152$, 模数 $m = 10\text{mm}$, 并选 $z_1 = 18$ 。

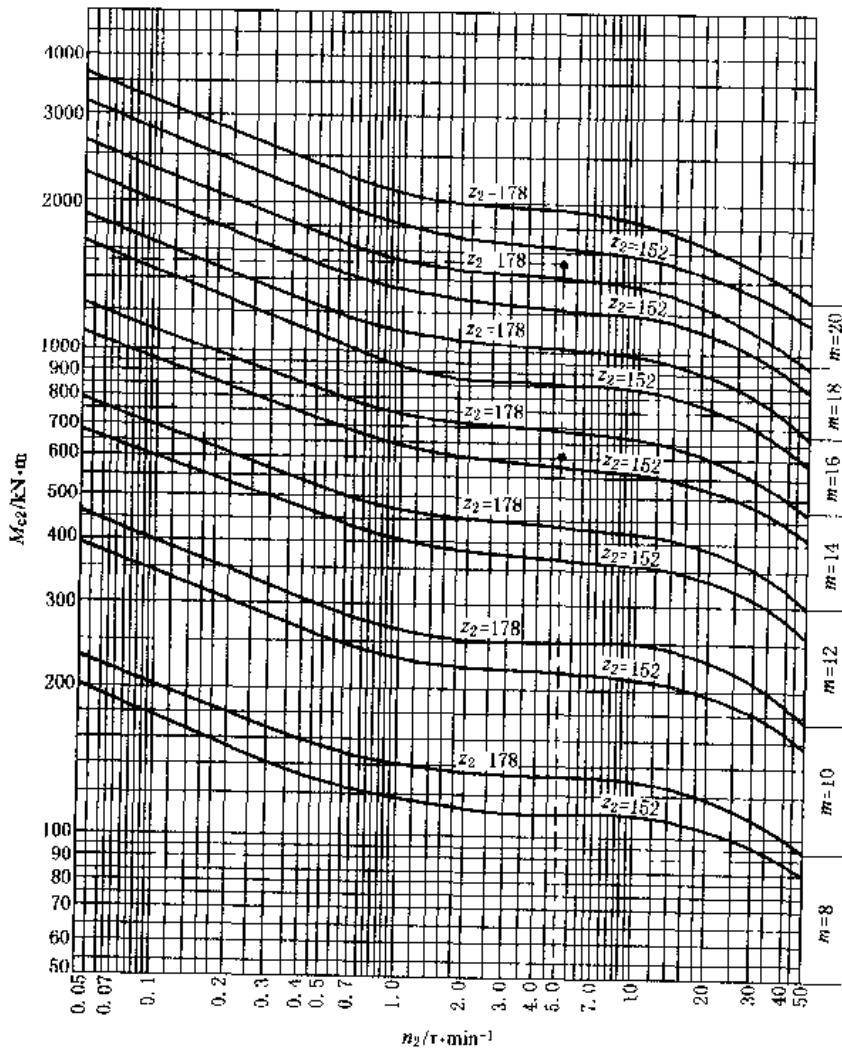


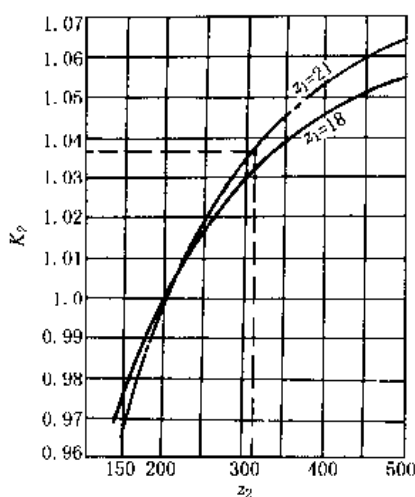
图 14-3-2 低速级大齿轮齿数, 模数确定

由表 14-3-5 选出对应于齿数比 152/18 和模数 $m = 10\text{mm}$ 的 BFT 装置的系列尺寸。

(2) 悬挂小车式 BF 型和推杆式 BFP 型多柔装置末级齿轮模数的选定

1) 计算公式

低速级末级小齿轮轴上的计算转矩

图 14-3-3 系数 K_2 曲线

$$M_{cl} = M_2 \frac{z_1}{z_2} \times \frac{1}{q} \times \frac{K_b}{K_A K_2} \quad (\text{N}\cdot\text{mm})$$

式中 M_2 ——主轴正常输出转矩；
 z_2, z_1 ——低速级末级大小齿轮齿数；
 q ——啮合点数；
 K_b ——寿命系数；
 K_A ——工作系数；
 K_2 ——齿轮修正系数。

2) 选择步骤

① 根据已知条件从表 14-3-6 和图 14-3-1 中查出工作系数 K_A 和寿命系数 K_b 。

② 根据所定齿数 z_2 和 z_1 由图 14-3-3 确定齿轮修正系数 K_2 。一般小齿轮齿数可取 $z_1 = 21$ 或 $z_1 = 18$ ，大齿轮齿数 z_2 应根据具体条件（末级速比分配合理、安装现场的具体情况等等）决定。

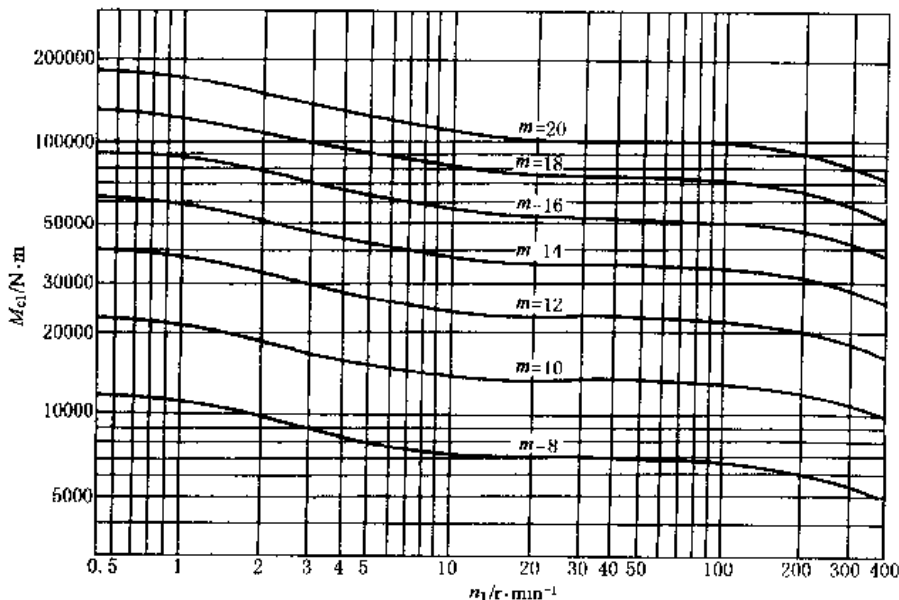
③ 求出小齿轮转速 n_1 ，

$$n_1 = n_2 \frac{z_2}{z_1}$$

式中 n_2 ——大齿轮转速。

④ 计算 M_{cl} 。

⑤ 用图 14-3-4 或图 14-3-5 确定末级齿轮模数。

图 14-3-4 小齿轮模数选定 ($z_1 = 18$)

3) 选型举例

试计算一回转窑传动装置。窑正常输出转矩 $M_2 = 650\text{kN}\cdot\text{m}$ ，转速为 $2\text{r}/\text{min}$ ，单点啮合，末级小齿轮 $z_1 = 21$ ，末级大齿轮 $z_2 = 312$ ，昼夜工作，设计寿命 50000h ，原动机为电机。

解 回转窑在连接工作中属于有载荷变化的类型，从表 14-3-6 查得 $K_A = 0.7$ ，又由图 14-3-1 和图 14-3-3 查出寿命系数 $K_b = 1.12$ 和齿轮修正系数 $K_2 = 1.036$ 。

$$\text{小齿轮转速 } n_1 = n_2 \frac{z_2}{z_1} = 2 \times \frac{312}{21} \approx 30 \text{ r}/\text{min}$$

$$\text{小齿轮轴上的计算转矩 } M_{cl} = M_2 \frac{z_1}{z_2} \times \frac{1}{q} \times \frac{K_b}{K_A K_2} = 650000 \times \frac{21}{312} \times \frac{1.12}{0.7 \times 1.036} \approx 67560 \text{ N}\cdot\text{m}$$

根据 M_{cl} 和 n_1 值由图 14-3-5 中得出低速级大小齿轮模数 $m = 16\text{mm}$ 。

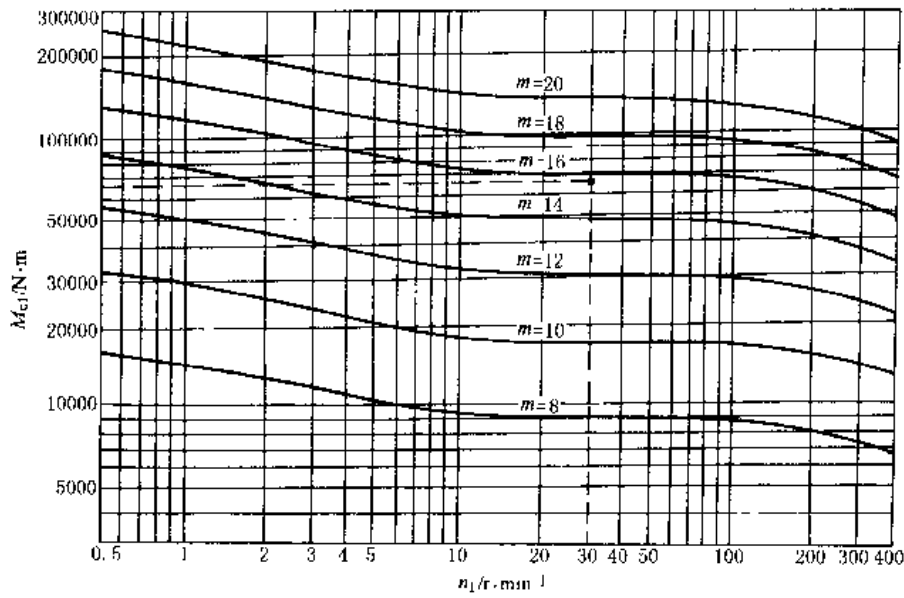


图 14-3-5 小齿轮模数选定 ($z_1 = 21$)

2.2 德国克虏伯公司 BFT 型尺寸系列

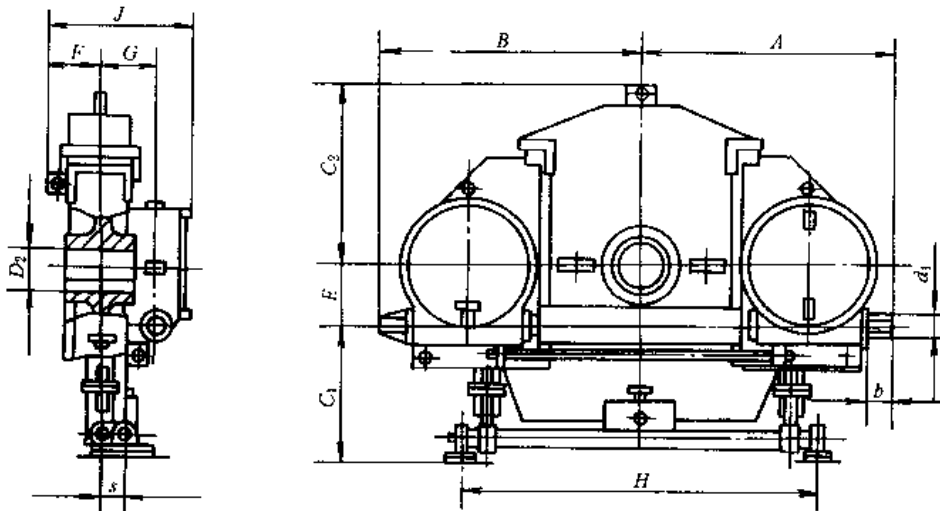


表 14-3-7

模数	/mm														转矩/N·m		重量/kg
	A	B	C ₁	C ₂	D ₂	E	F	G	H	J	M	s	d ₁	b	正常	最大	
	8	950	964	980	700	250	200	272	275	1288	675	M24	120	50	110	60500	
10	1195	1202	1252	850	320	250	340	340	1660	900	M36	180	60	140	117500	215000	4000
12	1405	1414	1492	1000	400	315	370	400	1932	1020	M36	180	70	140	203000	376000	5100
14	1668	1678	1650	1220	450	400	455	450	2304	1212	M48	240	90	170	320000	598000	7500
16	1942	1957	1900	1450	500	500	480	525	2576	1365	M48	240	110	210	477000	880000	12200
18	2095	2111	2250	1600	600	500	530	550	2948	1390	M56	300	110	210	675000	1260000	16300
20	2375	2380	2500	1770	800	560	580	610	3270	1585	M56	300	110	210	923000	1740000	20500

2.3 法国迪朗齿轮公司 BFT 型尺寸系列及选型方法

法国迪朗齿轮公司 BFT 尺寸系列

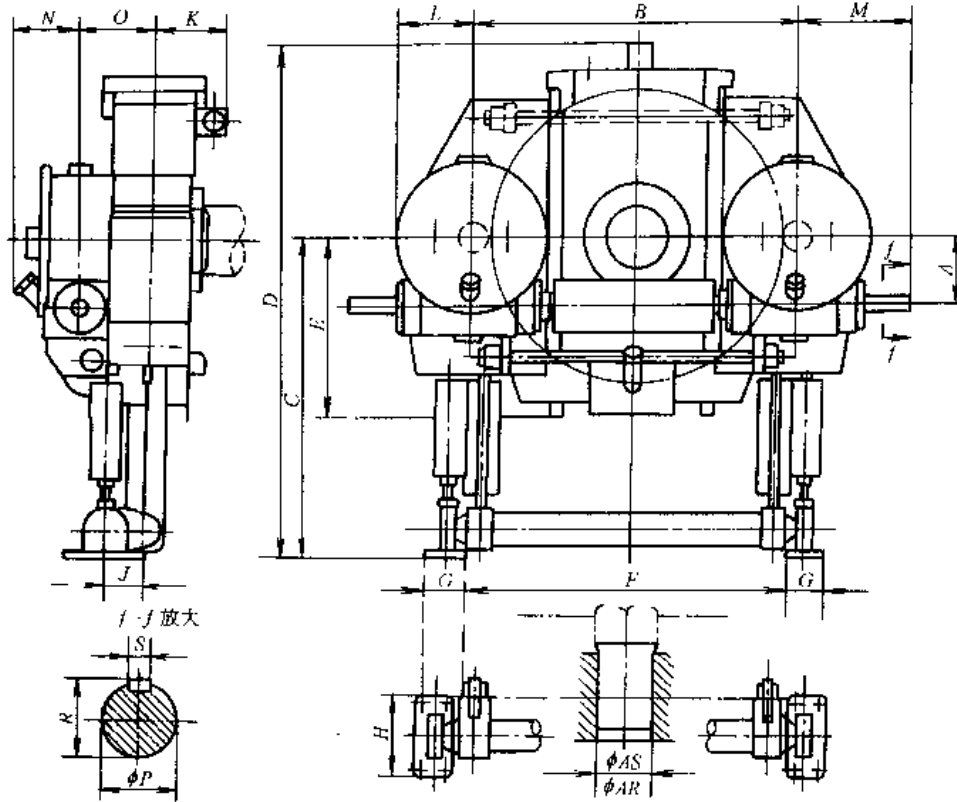


表 14-3-8

/mm

AS	AR	型号	速比	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	I	M	N	O	P	R	S	重量/kg
200	250	8	9.3	200	1152	1300	2080	650	1136	126	270	120	271	235	345	255	260	50	53.5	14	3100
			9.3	250	1152			650	1136					285	425	270	275	60	64	18	3200
			10.7	200	1312	730	1296	235	345					255	260	50	53.5	14	3200		
			10.7	250	1312	730	1296	285	425					270	275	60	64	18	3400		
250	315	10	9.2	250	1530	1480	2380	830	1524	184	390	180	346	285	425	275	315	60	64	18	4300
			9.2	315	1530		2380	830	1524					355	480	300	330	70	74.5	20	4600
			10.8	250	1770	2460	950	1764	285					425	275	315	60	64	18	4600	
			10.8	315	1770	2460	950	1764	355					480	300	330	70	74.5	20	5000	
315	400	12	9.2	315	1836	1650	2665	990	1800	184	390	180	391	355	480	300	375	70	74.5	20	7500
			9.2	400	1836		2665	990	1800					435	590	320	395	90	95	25	8000
			10.8	315	2124	2810	1130	2088	355					480	300	375	70	74.5	20	8000	
			10.8	400	2124	2810	1130	2088	435					590	320	395	90	95	25	8500	
355	450	16	9.3	400	2304	1890	3130	1230	2272	242	510	240	476	435	590	305	435	90	95	25	14000
			9.3	500	2304	1890	3130	1230	2272					535	710	337	455	110	116	28	14000
			10.7	400	2624	1950	3350	1390	2592					435	590	305	435	90	95	25	14000
			10.7	500	2624	1950	3350	1390	2592					535	710	337	455	110	116	28	15000
400	500	18	9.3	500	2592	2130	3540	1380	2580	290	610	300	526	535	710	327	495	110	116	28	20000
			9.3	560	2592	2130	3540	1380	2580					590	870	357	515				20000
			10.7	500	2952	2200	3790	1560	2940					535	710	327	495				20000
			10.7	560	2952	2200	3790	1560	2940					590	870	357	515				22000
450	630	20	9.3	560	2880	2200	3750	1520	2840	290	610	300	561	590	870	367	560	110	116	28	26000
			9.3	630	2880	2200	3750	1520	2840					670	940	383					26000
			10.7	560	3280	2360	4110	1720	3240					590	870	367					27000
			10.7	630	3280	2360	4110	1720	3240					670	940	383					28000

选型方法

(1) 根据已知主轴正常输出转矩 M_2 求出等效输出转矩 M

$$M = K_B M_2 \quad (\text{kN}\cdot\text{m})$$

式中 K_B ——等效系数，其值可由表 14-3-9 和表 14-3-10 确定。

表 14-3-9 一般设备等效系数 K_B 选用表

电动机驱动每日 工作时间/h	工作类型		
	均匀载荷	中等冲击	剧烈冲击
	K_B		
3	0.80	1.00	1.50
10	1.00	1.25	1.75
24	1.25	1.50	2.00

表 14-3-10 专用设备等效系数 K_B 选用表

设备名称	K_B	设备名称	K_B	设备名称	K_B
伐木机械:		挖土机	1.40	滚压机	1.75
卸载滚筒	1.5	起重机	1.25	轧制机械	2.0
粗加工车床	1.75	载物升降机	1.00	拔丝装置	1.5
摩擦传动机械:		卷扬机(固定式)	1.25	浸提器	1.25
压延机、搅拌机	1.25	卷扬机(可移动式)	1.40	回转干燥窑	1.00
水泥、炼焦设备:		钢铁机械:		其他机械:	
球磨机和棒磨机	1.75	转炉倾翻机械	1.40	雷达天线	1.00
窑或炉	1.50	钢包倾翻机械	1.25	滚筒搅拌机	1.25
装卸机械:		鱼雷形铁水车倾翻机械	0.80	块状冲压机	1.50
杓轮	1.25	辊压轧制设备:		架空索道	1.25
回转装置	1.25	破碎机	2.0		

(2) 由表 14-3-11 ~ 表 14-3-14 中找出与设计寿命 H 和主轴输出转数 n_2 相对应的与等效输出转矩 M 相等或相近的允许传递转矩 M_p 值及其相应机型。各机型尺寸见表 14-3-8。

表 14-3-11

$n_2/\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$	H/h														
	10000	25000	50000	80000	100000	10000	25000	50000	80000	100000	10000	25000	50000	80000	100000
	$M_p/\text{kN}\cdot\text{m}$														
0.1	220000	190000	170000	160000	150000	530000	460000	420000	390000	370000	920000	800000	720000	670000	640000
0.5	170000	150000	130000	120000	120000	420000	360000	330000	300000	290000	720000	630000	560000	520000	510000
1	150000	130000	120000	110000	110000	380000	330000	290000	270000	260000	650000	570000	510000	470000	460000
5	120000	100000	98000	90000	90000	290000	260000	230000	220000	210000	490000	440000	390000	370000	360000
10	110000	95000	90000	90000	90000	260000	230000	210000	210000	210000	430000	390000	360000	360000	360000
30	90000	85000	85000	85000	85000	210000	200000	200000	200000	200000	360000	340000	340000	340000	340000
50	80000	80000	80000	80000	80000	195000	195000	195000	195000	195000	340000	340000	340000	340000	340000
	BT8/9.3					BT10/9.2					BT12/9.2				

表 14-3-12

$n_2/r \cdot \text{min}^{-1}$	H/h							
	10000	25000	50000	80000	100000	10000	25000	50000
	$M_p/kN \cdot m$							
0.1	1740000	1510000	1360000	1270000	1230000	2470000	2150000	1940000
0.5	1360000	1190000	1070000	1000000	970000	1920000	1690000	1520000
1	1210000	1070000	970000	900000	870000	1690000	1510000	1360000
5	900000	810000	730000	680000	670000	1260000	1120000	1010000
10	800000	710000	650000	650000	650000	1140000	1000000	920000
30	680000	650000	650000	650000	650000	960000	920000	920000
50	640000	640000	640000	640000	640000	900000	900000	900000
	BT16/9.3					BT18/9.3		

$n_2/r \cdot \text{min}^{-1}$	H/h						
	80000	100000	10000	25000	50000	80000	100000
	$M_p/kN \cdot m$						
0.1	1800000	1740000	3380000	2940000	2650000	2460000	2380000
0.5	1420000	1370000	2600000	2300000	2070000	1930000	1860000
1	1270000	1220000	2280000	2050000	1840000	1720000	1660000
5	940000	940000	1730000	1500000	1350000	1260000	1250000
10	920000	1560000	1560000	1360000	1260000	1260000	1250000
30	920000	920000	1320000	1250000	1250000	1250000	1250000
50	900000	900000	1230000	1230000	1230000	1230000	1230000
	BT18/9.3			BT20/9.3			

表 14-3-13

$n_2/r \cdot \text{min}^{-1}$	H/h														
	10000	25000	50000	80000	100000	10000	25000	50000	80000	100000	10000	25000	50000	80000	100000
	$M_p/kN \cdot m$														
0.1	260000	230000	200000	190000	180000	640000	560000	500000	470000	450000	1110000	960000	870000	810000	780000
0.5	200000	180000	160000	150000	140000	510000	440000	400000	370000	360000	870000	750000	680000	630000	610000
1	180000	160000	140000	130000	130000	460000	390000	350000	330000	320000	780000	670000	600000	560000	540000
5	140000	120000	110000	100000	100000	350000	290000	260000	250000	240000	590000	490000	440000	410000	410000
10	130000	110000	100000	100000	100000	310000	260000	240000	240000	240000	510000	440000	410000	410000	410000
30	100000	100000	100000	100000	100000	250000	240000	240000	240000	240000	430000	410000	410000	410000	410000
50	100000	95000	95000	95000	95000	230000	230000	230000	230000	230000	400000	400000	400000	400000	400000
	BT8/10.7					BT10/10.8					BT12/10.8				

表 14-3-14

$n_2/r \cdot \text{min}^{-1}$	H/h							
	10000	25000	50000	80000	100000	10000	25000	50000
	$M_p/kN \cdot m$							
0.1	2060000	1790000	1610000	1500000	1450000	2920000	2550000	2290000
0.5	1610000	1410000	1270000	1180000	1140000	2250000	2000000	1800000
1	1420000	1260000	1140000	1060000	1020000	1980000	1770000	1600000
5	1050000	940000	850000	790000	790000	1500000	1310000	1180000
10	950000	830000	770000	770000	770000	1350000	1180000	1090000
30	800000	760000	760000	760000	760000	1140000	1080000	1080000
50	750000	750000	750000	750000	750000	1060000	1060000	1060000
	BT16/10.7					BT18/10.7		

续表

$n_2/\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$	H/h						
	80000	100000	10000	25000	50000	80000	100000
	$M_p/\text{kN}\cdot\text{m}$						
0.1	2130000	2060000	4000000	3480000	3130000	2920000	2820000
0.5	1670000	1620000	3150000	2700000	2430000	2260000	2190000
1	1490000	1440000	2850000	2380000	2140000	2000000	1930000
5	1100000	1090000	2230000	1780000	1600000	1490000	1480000
10	1090000	1090000	1960000	1610000	1490000	1490000	1490000
30	1080000	1080000	1550000	1470000	1470000	1470000	1470000
50	1060000	1060000	1440000	1440000	1440000	1440000	1440000
	BT18/10.7			BT20/10.7			

注：表 14-3-11 ~ 表 14-3-14 中 BT a/b 表示机型， a 代表号数， b 代表速比。

(3) 举例

试从迪朗齿轮公司系列中选择一专用卷扬机 BFT 传动装置，已知正常工作时主轴输出转矩及转速为 $M_2 = 340000\text{kN}\cdot\text{m}$ ， $n_2 = 10\text{r}/\text{min}$ ，设计寿命 $H = 10000\text{h}$ 。

由表 14-3-10 中查出等效系数 $K_B = 1.25$

等效转矩 $M = K_B M_2 = 1.25 \times 340000 = 425000\text{kN}\cdot\text{m}$

在表 14-3-11 中查出对应于 $H = 10000\text{h}$ ， $n_2 = 10\text{r}/\text{min}$ 与等效转矩 $425000\text{kN}\cdot\text{m}$ 相近的允许传递转矩 $M_p = 430000\text{kN}\cdot\text{m}$ ，该允许传递转矩所对应的机型为 BT12/9.2。

第4章 多点啮合柔性传动动力学计算

多点啮合柔性传动动力学计算求得传动系统的固有频率（相应求出临界转速）、扭矩放大系数（一般为轴段扭振力矩与折算负载力矩之比）TAF，这对系统设计、运行操作都是非常必要的。

本章介绍多点啮合柔性传动扭振动力学模型的构建及求解方法，其基本要点如下。

(1) 多质量复杂扭振系统采用拉格朗日方程来进行扭振动力学计算，忽略系统的阻尼。考虑系统关键轴段（如扭力杆、负载主轴等）扭矩放大系数及全悬挂、半悬挂柔性支承特点等，本章两个实例分别简化为三质量模型和四质量模型。其中动能计算时，将各级传动齿轮均作为刚性联接，其运动关系由相关的传动比来考虑，而势能计算时，考虑了各轴段弹性的影响^[5]。

(2) 运动微分方程组的求解，可以采用数值解法，也可采用解析解法。下面介绍的模态分析法是一种数值解法，它要求质量矩阵、刚度矩阵对称的条件。它不能反映系统各参数对扭振动态响应的影响；新微分算子法和拉氏变换法是解析解法，它们不要求质量矩阵、刚度矩阵对称的条件，并且可得到显式解，比较容易反映系统各参数对扭振动态响应的影响，便于研究优化对策。新微分算子法仅需普通的高等数学知识，拉氏变换法需复变函数、积分变换等较深的数学知识。

(3) 在多点啮合柔性传动设计计算过程中，一般可先按本篇前几章介绍的方法选取工作载荷系数，进行基本的初步设计计算，然后按本章介绍的方法进行动力学学校核，并进行相应的调整。

本章方法的介绍通过 25t 氧气转炉倾动机械和 90m² 烧结机驱动装置两个实例说明。

1 全悬挂多点啮合柔性传动扭振动力学计算（以氧气转炉为例）

氧气转炉全悬挂多柔传动是国内外广泛采用的新技术，具有对耳轴变形良好适应性，大大降低扭振载荷，运转安全可靠，尺寸小，重量轻，降低基建投资，便于系列化、通用化等优点。

氧气转炉倾动机械经常处于频繁启动、制动以及吊渣、顶渣等操作，强烈产生扭振，加速疲劳损坏^[6]。

1.1 系统力学模型

图 14-4-1 为某厂 25t 氧气转炉倾动机械全悬挂四点啮合柔性传动结构简图。系统可简化为四分支十三质量

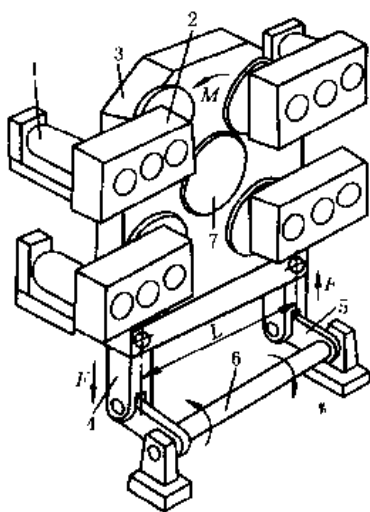


图 14-4-1 25t 氧气转炉倾动机械结构简图

1—电机；2—初级减速器；
3—末级减速装置；4—直杆；

5—曲柄；6—扭力杆；7—转炉耳轴

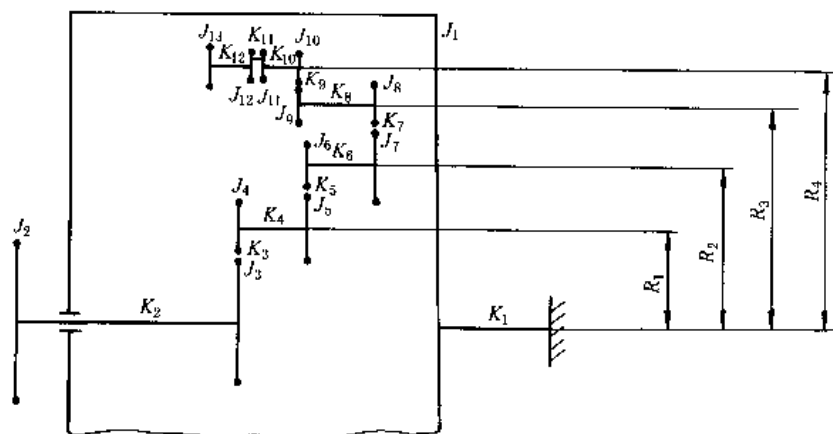


图 14-4-2 四分支十三质量系统力学模型

系统, 如图 14-4-2 所示 (注: 图中仅表示一个分支的情况)。其扭振动力学计算资料见本章附录 (t)。

支承减速箱壳体的各旋转体 $J_4 \sim J_{13}$ 对应的质量为 $m_4 \sim m_{13}$, 各旋转体回转中心至减速箱壳体的回转中心的距离分别为 R_1, R_2, R_3, R_4 。设 $J_1 \sim J_{13}$ 的角位移分别用 $\varphi_1 \sim \varphi_{13}$ 表示, 其中 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 为绝对角位移, $\varphi_4 \sim \varphi_{13}$ 为相对角位移。

系统动能为:

$$T = \frac{1}{2} [J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + J_3 \dot{\varphi}_3^2 + 4J_4(\dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_1)^2 + 4J_5(\dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_1)^2 + 4J_6(\dot{\varphi}_6 + \dot{\varphi}_1)^2 + 4J_7(\dot{\varphi}_7 + \dot{\varphi}_1)^2 \\ + 4J_8(\dot{\varphi}_8 + \dot{\varphi}_1)^2 + 4J_9(\dot{\varphi}_9 + \dot{\varphi}_1)^2 + 4J_{10}(\dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_1)^2 + 4J_{11}(\dot{\varphi}_{11} + \dot{\varphi}_1)^2 + 4J_{12}(\dot{\varphi}_{12} + \dot{\varphi}_1)^2 + 4J_{13}(\dot{\varphi}_{13} + \dot{\varphi}_1)^2 \\ + 4(m_4 + m_5)R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 4(m_6 + m_7)R_2^2 \dot{\varphi}_1^2 + 4(m_8 + m_9)R_3^2 \dot{\varphi}_1^2 + 4(m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13})R_4^2 \dot{\varphi}_1^2]$$

简化为:

$$T = \frac{1}{2} [J_1' \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + J_3 \dot{\varphi}_3^2 + 4 \sum_{j=4}^{13} J_j (\dot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_1)^2]$$

$$\text{其中 } J_1' = J_1 + 4(m_4 + m_5)R_1^2 + 4(m_6 + m_7)R_2^2 + 4(m_8 + m_9)R_3^2 + 4 \sum_{j=10}^{13} m_j R_4^2$$

系统势能为:

$$V = \frac{1}{2} \{ K_1 \varphi_1^2 + K_2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + 4K_3 [\varphi_4 (-1/i_1) + \varphi_1 - \varphi_3]^2 + 4K_4 (\varphi_5 - \varphi_4)^2 + 4K_5 [\varphi_6 (-1/i_2) - \varphi_5]^2 \\ + 4K_6 (\varphi_7 - \varphi_6)^2 + 4K_7 [\varphi_8 (-1/i_3) - \varphi_7]^2 + 4K_8 (\varphi_9 - \varphi_8)^2 + 4K_9 [\varphi_{10} (-1/i_4) - \varphi_9]^2 \\ + 4K_{10} (\varphi_{11} - \varphi_{10})^2 + 4K_{11} (\varphi_{12} - \varphi_{11})^2 + 4K_{12} (\varphi_{13} - \varphi_{12})^2 \}$$

系统进一步简化为三质量系统力学模型 (即三自由度系统力学模型), 如图 14-4-3 所示。设 φ_1, φ_2 为绝对角位移, φ_3 为相对角位移。严格地说应为三自由度系统力学模型。

系统动能为:

$$T = \frac{1}{2} [J_1' \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + J_3 (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1)^2 + 4(J_4 + J_5)(\dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_1)^2 \\ + 4(J_6 + J_7)(\dot{\varphi}_6 + \dot{\varphi}_1)^2 + 4(J_8 + J_9)(\dot{\varphi}_8 + \dot{\varphi}_1)^2 \\ + 4(J_{10} + J_{11} + J_{12} + J_{13})(\dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_1)^2]$$

其中 $\varphi_4 = -i_1 \varphi_3, \varphi_6 = i_1 i_2 \varphi_3, \varphi_8 = -i_1 i_2 i_3 \varphi_3, \varphi_{10} = i_1 i_2 i_3 i_4 \varphi_3$

$$\text{令 } J_1'' = J_1' + J_3 + 4 \sum_{j=4}^{13} J_j$$

$$J_2 = J_2 + 4i_1^2 (J_4 + J_5) + 4i_1^2 i_2^2 (J_6 + J_7) + 4i_1^2 i_2^2 i_3^2 (J_8 + J_9) + 4i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 (J_{10} + J_{11} + J_{12} + J_{13})$$

$$J_3' = J_3 - 4i_1 (J_4 + J_5) + 4i_1 i_2 (J_6 + J_7) - 4i_1 i_2 i_3 (J_8 + J_9) + 4i_1 i_2 i_3 i_4 (J_{10} + J_{11} + J_{12} + J_{13})$$

$$T = \frac{1}{2} (J_1'' \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + 2J_3' \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + J_3' \dot{\varphi}_3^2) \quad (14-4-1)$$

系统势能为:

$$V = \frac{1}{2} \{ K_1 \varphi_1^2 + K_2 [(\varphi_3 + \varphi_1) - \varphi_2]^2 + K_2' (\varphi_3 - \varphi_2)^2 - K_2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 \} \quad (14-4-2)$$

$$\text{式中 } \frac{1}{K_2'} = \frac{1}{K_2} + \frac{1}{4K_3} + \frac{1}{4i_1^2 K_4} + \frac{1}{4i_1^2 K_5} + \frac{1}{4i_1^2 i_2^2 K_6} + \frac{1}{4i_1^2 i_2^2 K_7} + \frac{1}{4i_1^2 i_2^2 i_3^2 K_8} + \frac{1}{4i_1^2 i_2^2 i_3^2 K_9} \\ + \frac{1}{4i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 K_{10}} + \frac{1}{4i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 K_{11}} + \frac{1}{4i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 K_{12}}$$

1.2 建立运动微分方程 (三质量系统, 按非零度区预张紧启动工况)

由拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = Q_i$

$$\begin{cases} J_1'' \ddot{\varphi}_1 + J_3' \ddot{\varphi}_3 + (K_1 + K_2) \varphi_1 - K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_3 = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - K_2 \varphi_1 + K_2' \varphi_2 - K_2 \varphi_3 = -M \\ J_3' \ddot{\varphi}_1 + J_3' \ddot{\varphi}_3 + K_2 \varphi_1 - K_2' \varphi_2 + K_2 \varphi_3 = M_0 \end{cases} \quad (14-4-3)$$

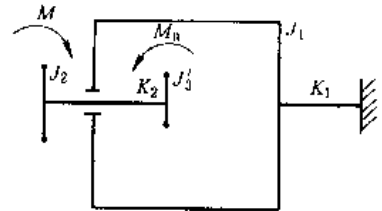


图 14-4-3 三质量系统力学模型

式中 M 为负载力矩 (转炉最大倾动力矩), M_n 为全部电机折算到 J_3 (转炉耳轴上) 的启动力矩。式 (14-4-3) 矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} J_1'' & 0 & J_3'' \\ 0 & J_2 & 0 \\ J_3'' & 0 & J_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & K_2 \\ -K_2 & K_2' & -K_2' \\ K_2 & -K_2' & K_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ M_n \end{bmatrix} \quad (14-4-3a)$$

1.3 运动微分方程求解

分二部分: 初始条件决定的固有振动解和外载激振零状态强迫振动解。

1.3.1 固有振动解 (按模态分析法)

初始条件 $t=0$, $\varphi_{1(0)} = -\frac{M}{K_1}$, $\varphi_{2(0)} = -\frac{M}{K_2}$, $\varphi_{3(0)} = \frac{M}{K_1}$, 初速均为零。

固有振动

$$\begin{cases} J_1'' \ddot{\varphi}_1 + J_3'' \ddot{\varphi}_3 + (K_1 + K_2) \varphi_1 - K_2 \varphi_2 + K_2 \varphi_3 = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - K_2 \varphi_1 + K_2' \varphi_2 - K_2' \varphi_3 = 0 \\ J_3'' \ddot{\varphi}_3 + J_3'' \ddot{\varphi}_3 + K_2 \varphi_1 - K_2' \varphi_2 + K_2' \varphi_3 = 0 \end{cases} \quad (14-4-4)$$

设 $\varphi_i = \phi_i \sin(pt + \psi)$, $\ddot{\varphi}_i = -\phi_i p^2 \sin(pt + \psi)$, 代入上式

$$\begin{cases} -J_1'' \phi_1 p^2 - J_3'' \phi_3 p^2 + (K_1 + K_2) \phi_1 - K_2 \phi_2 + K_2 \phi_3 = 0 \\ -J_2 \phi_2 p^2 - K_2 \phi_1 + K_2' \phi_2 - K_2' \phi_3 = 0 \\ -J_3'' \phi_1 p^2 - J_3'' \phi_3 p^2 + K_2 \phi_1 - K_2' \phi_2 + K_2' \phi_3 = 0 \end{cases} \quad (14-4-5)$$

$$\begin{bmatrix} -J_1'' p^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & -J_3'' p^2 + K_2 \\ -K_2 & -J_2 p^2 + K_2' & -K_2' \\ -J_3'' p^2 + K_2 & -K_2' & -J_3'' p^2 + K_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14-4-5a)$$

令其系数矩阵的行列式为 Δ , 根据固有振动有非零解的条件, 行列式 $\Delta = 0$ 。

$$\begin{aligned} \Delta &= J_2(J_3''^2 - J_1'' J_3'') p^6 + [K_1 J_2 J_3'' + K_2 J_2 (J_3'' - 2J_3'')] + K_2' [J_1'' (J_2 + J_3'') - J_3''^2] p^4 \\ &\quad - (J_2 + J_3'') [K_2' (K_1 + K_2) - K_2^2] p^2 \\ &= -J_2 (J_1'' J_3'' - J_3''^2) p^2 (p^2 - p_2^2) (p^2 - p_3^2) = 0 \end{aligned}$$

将有关数据代入, 解得 $p_1 = 0$, $p_2 = 15.69 \text{ rad/s}$, $p_3 = 94.66 \text{ rad/s}$ 。

将 $p_1 = 0$ 代入式 (14-4-5) 得

$$\begin{cases} (K_1 + K_2) \phi_1 - K_2 \phi_2 + K_2 \phi_3 = 0 \\ K_2 \phi_1 + K_2' \phi_2 - K_2' \phi_3 = 0 \\ K_2 \phi_1 - K_2' \phi_2 + K_2' \phi_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $\phi_1 = 0$ 。令 $\phi_3 = 1$, 解得 $\phi_2 = 1$ 。即振型 $\phi_{11} = 0$ 、 $\phi_{12} = 1$ 、 $\phi_{13} = 1$ 。

以 p_2 值代入式 (14-4-5), 令 $\phi_{23} = 1$, 可得 ϕ_{21} 、 ϕ_{22} 。

以 p_3 值代入式 (14-4-5), 令 $\phi_{31} = 1$, 可得 ϕ_{31} 、 ϕ_{32} 。

$$\text{振型矩阵 } \Phi = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} \\ 1 & \phi_{22} & \phi_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

设 $\varphi = \Phi \theta$

式中 φ ——自然坐标列阵;

θ ——主坐标列阵;

Φ ——振型矩阵。

由坐标变换 $\Phi^T J \Phi \ddot{\theta} + \Phi^T K \Phi \theta = 0$

$$J = \begin{bmatrix} J_1'' & 0 & J_3'' \\ 0 & J_2 & 0 \\ J_3'' & 0 & J_3'' \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & K_2 \\ -K_2 & K_2' & -K_2' \\ K_2 & -K_2' & K_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 1 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1'' & 0 & J_3'' \\ 0 & J_2 & 0 \\ J_3'' & 0 & J_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} \\ 1 & \phi_{22} & \phi_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 1 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & K_2 \\ -K_2 & K_2' & -K_2' \\ K_2 & -K_2' & K_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由运算得 $K_{j1} = 0$

$$\begin{bmatrix} J_{j1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14-4-6)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + p_2^2 \theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_3 + p_3^2 \theta_3 = 0 \end{cases} \quad (14-4-6a)$$

$$p_1^2 = 0, \quad p_2^2 = \frac{K_{j2}}{J_{j2}}, \quad p_3^2 = \frac{K_{j3}}{J_{j3}}$$

解出解耦微分方程组:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{1(0)} + \dot{\theta}_{1(0)} t \\ \theta_2 = \theta_{2(0)} \cos p_2 t + \frac{\dot{\theta}_{2(0)}}{p_2} \sin p_2 t \\ \theta_3 = \theta_{3(0)} \cos p_3 t + \frac{\dot{\theta}_{3(0)}}{p_3} \sin p_3 t \end{cases} \quad (14-4-7)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} \\ 1 & \phi_{22} & \phi_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}_{t=0}$$

根据初始条件: $\varphi_{1(0)} = -\frac{M}{K_1}$, $\varphi_{2(0)} = -\frac{M}{K_2}$, $\varphi_{3(0)} = \frac{M}{K_1}$, $\dot{\varphi}_{1(0)} = \dot{\varphi}_{2(0)} = \dot{\varphi}_{3(0)} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} \\ 1 & \phi_{22} & \phi_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1(0)} \\ \theta_{2(0)} \\ \theta_{3(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1(0)} \\ \varphi_{2(0)} \\ \varphi_{3(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{K_1} \\ -\frac{M}{K_2} \\ \frac{M}{K_1} \end{bmatrix}$$

$$\text{可解出 } \theta_{1(0)} = \frac{\frac{M}{K_1} (\phi_{21} \phi_{32} - \phi_{22} \phi_{31}) + \frac{M}{K_1} \phi_{32} - \frac{M}{K_2} \phi_{31} - \frac{M}{K_1} \phi_{22} + \frac{M}{K_2} \phi_{21}}{-\phi_{22} \phi_{31} + \phi_{21} \phi_{32} + \phi_{31} - \phi_{21}}$$

$$\theta_{2(0)} = \frac{\frac{M}{K_1} + \frac{M}{K_1} \phi_{31} - \frac{M}{K_1} \phi_{32} + \frac{M}{K_2} \phi_{31}}{-\phi_{22} \phi_{31} + \phi_{21} \phi_{32} + \phi_{31} - \phi_{21}}$$

$$\theta_{3(0)} = \frac{-\frac{M}{K_1} \phi_{21} - \frac{M}{K_1} + \frac{M}{K_1} \phi_{22} - \frac{M}{K_2} \phi_{21}}{-\phi_{22} \phi_{31} + \phi_{21} \phi_{32} + \phi_{31} - \phi_{21}}$$

因 $\dot{\varphi}_{1(0)} = \dot{\varphi}_{2(0)} = \dot{\varphi}_{3(0)} = 0$, 故 $\dot{\theta}_{1(0)} = \dot{\theta}_{2(0)} = \dot{\theta}_{3(0)} = 0$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} \\ 1 & \phi_{22} & \phi_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} \\ 1 & \phi_{22} & \phi_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1(0)} \\ \theta_{2(0)} \cos p_2 t \\ \theta_{3(0)} \cos p_3 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{21} \theta_{2(0)} \cos p_2 t + \phi_{31} \theta_{3(0)} \cos p_3 t \\ \theta_{1(0)} + \phi_{22} \theta_{2(0)} \cos p_2 t + \phi_{32} \theta_{3(0)} \cos p_3 t \\ \theta_{1(0)} + \theta_{2(0)} \cos p_2 t + \theta_{3(0)} \cos p_3 t \end{bmatrix}$$

(14-4-8)

为使固有振动解与强迫振动解符号不混淆, 固有振动解中, 记为 $\bar{\varphi}_1$ 、 $\bar{\varphi}_2$ 、 $\bar{\varphi}_3$ 、 $\bar{\theta}_{1(0)}$ 、 $\bar{\theta}_{2(0)}$ 、 $\bar{\theta}_{3(0)}$ 。

$$\begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{21}\bar{\theta}_{2(0)}\cos p_2 t + \phi_{31}\bar{\theta}_{3(0)}\cos p_3 t \\ \bar{\theta}_{1(0)} + \phi_{22}\bar{\theta}_{2(0)}\cos p_2 t + \phi_{32}\bar{\theta}_{3(0)}\cos p_3 t \\ \bar{\theta}_{1(0)} + \bar{\theta}_{2(0)}\cos p_2 t + \bar{\theta}_{3(0)}\cos p_3 t \end{bmatrix} \quad (14-4-9)$$

1.3.2 强迫振动解

(1) 模态分析法求解

$$\begin{bmatrix} J_1'' & 0 & J_3'' \\ 0 & J_2 & 0 \\ J_3'' & 0 & J_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & K_2 \\ -K_2 & K_2' & -K_2' \\ K_2 & -K_2' & K_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ M_n \end{bmatrix}$$

设 $\varphi = \Phi\theta$, 由坐标变换 $\Phi^T J \Phi \ddot{\theta} + \Phi^T K \Phi \theta = \Phi^T Q$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 1 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1'' & 0 & J_3'' \\ 0 & J_2 & 0 \\ J_3'' & 0 & J_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 1 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & K_2 \\ -K_2 & K_2' & -K_2' \\ K_2 & -K_2' & K_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ M_n \end{bmatrix} \quad (14-4-10)$$

由运算得 $K_{j1} = 0$

$$\begin{bmatrix} J_{j1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M + M_n \\ -\phi_{22}M + M_n \\ -\phi_{32}M + M_n \end{bmatrix} \quad (14-4-11)$$

得解耦微分方程组:

$$\begin{cases} J_{j1}\ddot{\theta}_1 = -M + M_n \\ J_{j2}\ddot{\theta}_2 + K_{j2}\theta_2 = -\phi_{22}M + M_n \\ J_{j3}\ddot{\theta}_3 + K_{j3}\theta_3 = -\phi_{32}M + M_n \end{cases} \quad (14-4-12)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{-M + M_n}{J_{j1}} \\ \ddot{\theta}_2 + p_2^2\theta_2 = \frac{-\phi_{22}M + M_n}{J_{j2}} \\ \ddot{\theta}_3 + p_3^2\theta_3 = \frac{-\phi_{32}M + M_n}{J_{j3}} \end{cases} \quad \begin{cases} p_1^2 = 0 \\ p_2^2 = \frac{K_{j2}}{J_{j2}} \\ p_3^2 = \frac{K_{j3}}{J_{j3}} \end{cases} \quad (14-4-12a)$$

解得

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{-M + M_n}{2J_{j1}} t^2 \\ \theta_2 = \frac{-\phi_{22}M + M_n}{J_{j2}p_2^2} (1 - \cos p_2 t) \\ \theta_3 = \frac{-\phi_{32}M + M_n}{J_{j3}p_3^2} (1 - \cos p_3 t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} \\ 1 & \phi_{22} & \phi_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} \\ 1 & \phi_{22} & \phi_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-M + M_n}{2J_{j1}} t^2 \\ \frac{-\phi_{22}M + M_n}{J_{j2}p_2^2} (1 - \cos p_2 t) \\ \frac{-\phi_{32}M + M_n}{J_{j3}p_3^2} (1 - \cos p_3 t) \end{bmatrix}$$

为使固有振动解与强迫振动解符号不混淆, 强迫振动解中, 记为 $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ 。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \\ \tilde{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\phi_{21}\phi_{22}M + \phi_{21}M_n}{J_2 p_2^2} (1 - \cos p_2 t) + \frac{-\phi_{31}\phi_{32}M + \phi_{31}M_n}{J_3 p_3^2} (1 - \cos p_3 t) \\ \frac{-M + M_n}{2J_1} t^2 + \frac{-\phi_{22}^2 M + \phi_{22}M_n}{J_2 p_2^2} (1 - \cos p_2 t) + \frac{-\phi_{32}^2 M + \phi_{32}M_n}{J_3 p_3^2} (1 - \cos p_3 t) \\ \frac{-M + M_n}{2J_1} t^2 + \frac{-\phi_{22}M + M_n}{J_2 p_2^2} (1 - \cos p_2 t) + \frac{-\phi_{32}M + M_n}{J_3 p_3^2} (1 - \cos p_3 t) \end{bmatrix} \quad (14-4-13)$$

(2) 新微分算子法求解^[7,9,10]:

引入微分算子 D 代替 $\frac{d}{dt}$, D^2 代替 $\frac{d^2}{dt^2}$, 运动微分方程的矩阵形式简化为

$$\begin{bmatrix} J_1'' D^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & J_3'' D^2 + K_2 \\ -K_2 & J_2 D^2 + K_2' & -K_2' \\ J_3'' D^2 + K_2 & -K_2' & J_3' D^2 + K_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ M_n \end{bmatrix} \quad (14-4-14)$$

可以看出上式是关于 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 的一个线性方程组, 令其系数矩阵的行列式为 Δ , 容易看出 Δ 是一个关于 D^2 的三次多项式, 经过运算, 可得

$$\begin{aligned} \Delta &= (J_1'' J_2 J_3' - J_2 J_3''^2) D^2 \left\{ D^4 + \frac{K_1 J_2 J_3' + K_2 J_2 (J_3' - 2J_3'') + K_2' [J_1'' (J_2 + J_3') - J_3''^2]}{J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2)} D^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(J_2 + J_3') [K_2' (K_1 + K_2) - K_2'^2]}{J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2)} \right\} \\ &= J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2) D^2 (D^2 + p_2^2) (D^2 + p_3^2) \end{aligned} \quad (14-4-14a)$$

式中 p_2, p_3 为系统第二、三阶扭振固有频率。将有关数据代入, 可求得 $p_1 = 0, p_2 = 15.69 \text{ rad/s}, p_3 = 94.66 \text{ rad/s}$ 。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -K_2 & J_3'' D^2 + K_2 \\ -M & J_2 D^2 + K_2' & -K_2' \\ M_n & -K_2' & J_3' D^2 + K_2' \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} J_1'' D^2 + (K_1 + K_2) & 0 & J_3'' D^2 + K_2 \\ -K_2 & -M & -K_2' \\ J_3'' D^2 + K_2 & M_n & J_3' D^2 + K_2' \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} J_1'' D^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 \\ -K_2 & J_2 D^2 + K_2' & -M \\ J_3'' D^2 + K_2 & -K_2' & M_n \end{vmatrix}$$

设 $M(\tau), M_n(\tau)$ 为阶跃函数, 由克莱姆法则可得 (同理, 强迫振动解中, 记为 $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{MD^2(K_2' J_3'' - K_2 J_3') - M_n D^2 (J_2 J_3'' D^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3'')}{J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2) D^2 (D^2 + p_2^2) (D^2 + p_3^2)} \\ &= \frac{M(K_2' J_3'' - K_2 J_3') - M_n (J_2 J_3'' D^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3'')}{J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2) (D^2 + p_2^2) (D^2 + p_3^2)} \\ &= \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3')}{J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left[\frac{M}{(D^2 + p_2^2)(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{M}{(D^2 + p_3^2)(p_2^2 - p_3^2)} \right] - \frac{1}{J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2)} \\ &\quad \times \left[\frac{M_n (-J_2 J_3'' p_2^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3'')}{(D^2 + p_2^2)(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{M_n (-J_2 J_3'' p_3^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3'')}{(D^2 + p_3^2)(p_2^2 - p_3^2)} \right] \\ &= \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3')}{J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left[\frac{\int_0^t M(\tau) \sin p_2(t - \tau) d\tau}{p_2(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{\int_0^t M(\tau) \sin p_3(t - \tau) d\tau}{p_3(p_2^2 - p_3^2)} \right] - \frac{1}{J_2 (J_1'' J_3' - J_3''^2)} \times \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(-J_2 J_3'' p_2^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3'') \int_0^t M_n(\tau) \sin p_2(t-\tau) d\tau}{p_2(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{(-J_2 J_3'' p_3^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3'') \int_0^t M_n(\tau) \sin p_3(t-\tau) d\tau}{p_3(p_3^2 - p_2^2)} \right]$$

$$= \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3') M}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \sum_{i=2}^3 \frac{(1 - \cos p_i t)}{p_i^2(p_j^2 - p_i^2)} - \frac{M_n}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \sum_{i=2}^3 \frac{(-J_2 J_3'' p_i^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3'')}{p_i^2(p_j^2 - p_i^2)} \times$$

$$(1 - \cos p_i t) \quad (14-4-15)$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-M}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left\{ \frac{K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2}{p_2^2 p_3^2} \times \frac{t^2}{2} \right.$$

$$+ \sum_{i=2}^3 \frac{(J_1'' J_3' - J_3''^2) p_i^4 - [(K_1 + K_2) J_3' + K_2' J_1'' - 2K_2 J_3''] p_i^2 + K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)} \left(\frac{1 - \cos p_i t}{p_i^2} \right) \left. \right\}$$

$$- \frac{M_n}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left[\frac{K_2^2 - K_2'(K_1 + K_2)}{p_2^2 p_3^2} \times \frac{t^2}{2} \right.$$

$$+ \sum_{i=2}^3 \frac{-(K_2 J_3'' - K_2' J_1'') p_i^2 + K_2^2 - K_2'(K_1 + K_2)}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)} \left(\frac{1 - \cos p_i t}{p_i^2} \right) \left. \right] \quad (14-4-16)$$

$$\tilde{\varphi}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{M}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left[\frac{K_2^2 - K_2'(K_1 + K_2)}{p_2^2 p_3^2} \times \frac{t^2}{2} \right.$$

$$+ \sum_{i=2}^3 \frac{K_2^2 - K_2'(K_1 + K_2) - (K_2 J_3'' - K_2' J_1'') p_i^2}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)} \left(\frac{1 - \cos p_i t}{p_i^2} \right) \left. \right]$$

$$+ \frac{M_n}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left[\frac{K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2}{p_2^2 p_3^2} \times \frac{t^2}{2} \right.$$

$$+ \sum_{i=2}^3 \frac{J_1'' J_2 p_i^4 - [(K_1 + K_2) J_2 + K_2' J_1''] p_i^2 + K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)} \left(\frac{1 - \cos p_i t}{p_i^2} \right) \left. \right] \quad (14-4-17)$$

式中 $i=2, j=i+1=3; i=3, j=i-1=2$ 。

(3) 拉氏变换法求解

式(14-4-3)取拉氏变换并写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} J_1'' S^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & J_3' S^2 + K_2 \\ -K_2 & J_2 S^2 + K_2' & -K_2' \\ J_3' S^2 + K_2 & -K_2' & J_3 S^2 + K_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L[\varphi_1] \\ L[\varphi_2] \\ L[\varphi_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L[M] \\ L[M_n] \end{bmatrix} \quad (14-4-18)$$

可以看出上式是关于 $L[\varphi_1]$ 、 $L[\varphi_2]$ 、 $L[\varphi_3]$ 的一个线性方程组，令其系数矩阵的行列式为 Δ ，容易看出 Δ 是一个关于 S^2 的三次多项式。经过运算可得

$$\Delta = J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2) S^2 \left\{ S^4 + \frac{K_1 J_2 J_3' + K_2 J_2(J_3 - 2J_3'') + K_2'[J_1''(J_2 + J_3) - J_3''^2]}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} S^2 \right.$$

$$\left. + \frac{(J_2 + J_3)[K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2]}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \right\}$$

$$= J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2) S^2 (S^2 + p_2^2)(S^2 + p_3^2) \quad (14-4-18a)$$

式中 $p_1=0; p_2, p_3$ 为系统第二、三阶扭振固有频率。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -K_2 & J_3'' S^2 + K_2 \\ -L[M] & J_2 S^2 + K_2' & -K_2' \\ L[M_n] & -K_2' & J_3' S^2 + K_2' \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} J_1'' S^2 + (K_1 + K_2) & 0 & J_3'' S^2 + K_2 \\ -K_2 & -L[M] & -K_2' \\ J_3'' S^2 + K_2 & L[M_n] & J_3' S^2 + K_2' \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} J_1'' S^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 \\ -K_2 & J_2 S^2 + K_2' & -L[M] \\ J_3'' S^2 + K_2 & -K_2' & L[M_n] \end{vmatrix}$$

由克莱姆法则, 可得

$$L[\varphi_1] = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3')}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left\{ \frac{L[M]}{(S^2 + p_2^2)(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{L[M]}{(S^2 + p_3^2)(p_2^2 - p_3^2)} \right\} - \frac{1}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)}$$

$$\left\{ \frac{L[M_n](-J_2 J_3'' p_2^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3')}{(S^2 + p_2^2)(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{L[M_n](-J_2 J_3'' p_3^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3')}{(S^2 + p_3^2)(p_2^2 - p_3^2)} \right\}$$

$$= \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3')}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left\{ \frac{L[M] L[\sin p_2 t]}{p_2(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{L[M] L[\sin p_3 t]}{p_3(p_2^2 - p_3^2)} \right\} - \frac{1}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)}$$

$$\left\{ \frac{(-J_2 J_3'' p_2^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3') L[M_n] L[\sin p_2 t]}{p_2(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{(-J_2 J_3'' p_3^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3') L[M_n] L[\sin p_3 t]}{p_3(p_2^2 - p_3^2)} \right\} \quad (14-4-19)$$

同理, 强迫振动解中, 记为 $\tilde{\varphi}_1$ 、 $\tilde{\varphi}_2$ 、 $\tilde{\varphi}_3$ 。设 $M(\tau)$ 、 $M_n(\tau)$ 为阶跃函数。

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3')}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left[\frac{M * \sin p_2 t}{p_2(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{M * \sin p_3 t}{p_3(p_2^2 - p_3^2)} \right] - \frac{1}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)}$$

$$\left[\frac{(-J_2 J_3'' p_2^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3')(M_n * \sin p_2 t)}{p_2(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{(-J_2 J_3'' p_3^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3')(M_n * \sin p_3 t)}{p_3(p_2^2 - p_3^2)} \right]$$

$$= \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3')}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \left[\frac{\int_0^t M(\tau) \sin p_2(t - \tau) d\tau}{p_2(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{\int_0^t M(\tau) \sin p_3(t - \tau) d\tau}{p_3(p_2^2 - p_3^2)} \right] - \frac{1}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)}$$

$$\left[\frac{(-J_2 J_3'' p_2^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3') \int_0^t M_n(\tau) \sin p_2(t - \tau) d\tau}{p_2(p_3^2 - p_2^2)} + \frac{(-J_2 J_3'' p_3^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3') \int_0^t M_n(\tau) \sin p_3(t - \tau) d\tau}{p_3(p_2^2 - p_3^2)} \right]$$

$$= \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3')}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \sum_{i=2}^3 \frac{(1 - \cos p_i t)}{p_i^2(p_j^2 - p_i^2)} - \frac{M_n}{J_2(J_1'' J_3' - J_3''^2)} \sum_{i=2}^3 \frac{(-J_2 J_3'' p_i^2 + K_2 J_2 + K_2' J_3')}{p_i^2(p_j^2 - p_i^2)} \times$$

$$(1 - \cos p_i t) \quad (14-4-20)$$

式中 $i=2, j=i+1=3; i=3, j=i-1=2$ 。

同理, 可得 $\tilde{\varphi}_2$ 、 $\tilde{\varphi}_3$ 表达式同前。

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_2, \quad \varphi_3 = \tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_3$$

1.4 扭振力矩

$$M_1 = K_1 \varphi_1 \quad M_2 = K_2 (\varphi_3 + \varphi_1 - \varphi_2)$$

以有关数据代入, 求得 $M_{1\max} = 1.8M$, $M_{2\max} = 1.6M$ 。

扭矩放大系数 TAF:

$$TAF_1 = \frac{M_{1\max}}{M} = 1.8, \quad TAF_2 = \frac{M_{2\max}}{M} = 1.6$$

(注: 最大倾动力矩 $M = 8.5 \times 10^4 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 8.33 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$, 一台电机启动力矩 $M'_n = 9.8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$)

2 半悬挂多点啮合柔性传动扭振动力学计算 (以烧碱机为例)

目前, 国内外大型烧碱机大都采用了多点啮合柔性传动的驱动方式, 简称多柔传动, 其主要特点: 柔性支承、多点啮合、悬挂安装 (全悬挂、半悬挂)。可改善传动啮合性能、降低动载荷, 并可在运行中调偏 (台车跑

偏)等。

有关文献 [8], 根据生产中出现的共振和台车爬行等问题, 要求对烧结机多柔传动进行动力学分析研究。

2.1 系统力学模型

如图 14-4-4 所示为某厂 90m² 烧结机驱动装置简图, 该系统属于半悬挂两点啮合自平衡扭力杆式非对称柔性传动。可将系统抽象为如图 14-4-5 所示二十质量系统模型。其扭振动力学计算资料见本章附录 (2)。

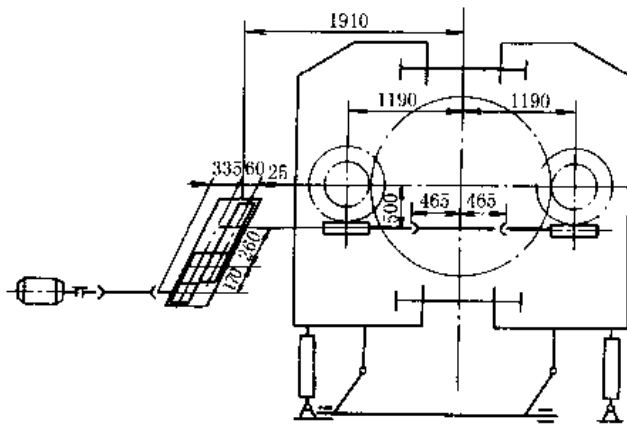


图 14-4-4 90m² 烧结机驱动装置简图

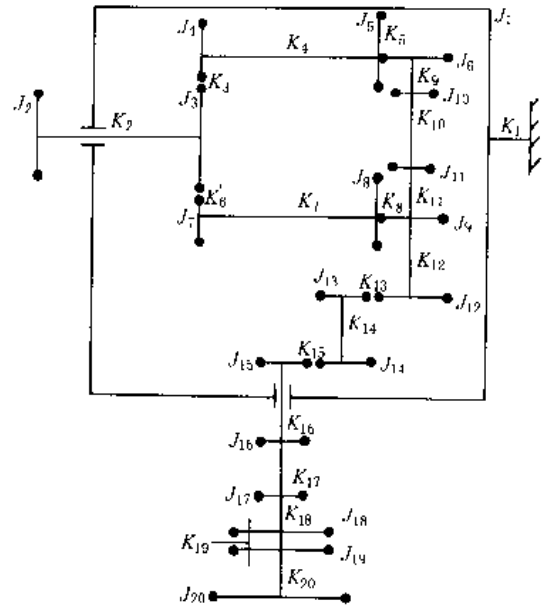


图 14-4-5 二十质量系统力学模型

设件 6、9~16 绕质心轴 (平行 II 级减速箱壳体回转中心轴) 的转动惯量分别为 J_{6a} 、 $J_{9a} \sim J_{16a}$ 。设 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 和 $\varphi_{17} \sim \varphi_{20}$ 为绝对角位移, $\varphi_4 \sim \varphi_{16}$ 为相对角位移。计算系统动能 T 、势能 V 如下。

$$T = \frac{1}{2} [J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + J_3 \dot{\varphi}_3^2 + J_4 (\dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_1)^2 + m_4 R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + J_5 (\dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_1)^2 + m_5 R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + J_6 \dot{\varphi}_6^2 + J_{6a} \dot{\varphi}_1^2 + m_6 R_2^2 \dot{\varphi}_1^2 + J_7 (\dot{\varphi}_7 + \dot{\varphi}_1)^2 + m_7 R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + J_8 (\dot{\varphi}_8 + \dot{\varphi}_1)^2 + m_8 R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \sum_{j=9}^{16} (J_j \dot{\varphi}_j^2 + J_{ja} \dot{\varphi}_1^2) + m_9 R_2^2 \dot{\varphi}_1^2 + (m_{10} + m_{11}) R_3^2 \dot{\varphi}_1^2 + (m_{12} + m_{13}) R_4^2 \dot{\varphi}_1^2 + (m_{14} + m_{15}) R_5^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_{16} R_6^2 \dot{\varphi}_1^2 + \sum_{j=17}^{20} J_j \dot{\varphi}_j^2]$$

$$V = \frac{1}{2} \left\{ K_1 \varphi_1^2 + K_2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + K_3 \left[\varphi_4 \left(\frac{-1}{i_1} \right) + \varphi_1 - \varphi_3 \right]^2 + K_4 (\varphi_5 - \varphi_4)^2 + K_5 \left[\varphi_6 \left(\frac{-1}{i_2} \right) - \varphi_5 \right]^2 + K_6 \left[\varphi_7 \left(\frac{-1}{i_1} \right) + \varphi_1 - \varphi_3 \right]^2 + K_7 (\varphi_8 - \varphi_7)^2 + K_8 \left[\varphi_9 \left(\frac{-1}{i_2} \right) - \varphi_8 \right]^2 + K_9 (\varphi_{10} - \varphi_6)^2 + K_{10} (\varphi_{11} - \varphi_{10})^2 + K_{11} (\varphi_9 - \varphi_{11})^2 + K_{12} (\varphi_{12} - \varphi_9)^2 + K_{13} \left[\varphi_{12} \left(\frac{-1}{i_3} \right) - \varphi_{13} \right]^2 + K_{14} (\varphi_{14} - \varphi_{13})^2 + K_{15} \left[\varphi_{14} \left(\frac{-1}{i_4} \right) - \varphi_{15} \right]^2 + K_{16} (\varphi_{16} - \varphi_{15})^2 + \sum_{j=17}^{20} K_j (\varphi_j - \varphi_{j-1})^2 \right\}$$

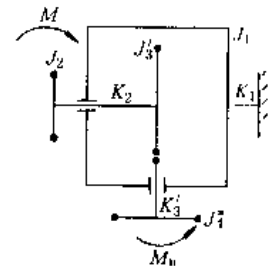


图 14-4-6 四质量系统力学模型

系统进一步简化为四质量系统力学模型 (严格地说应为四自由度系统力学模型), 如图 14-4-6 所示。设 φ_1 、

φ_2 、 φ_4^* 为绝对角位移， φ_3 为相对角位移。

将原件 4~16 上的动能换算到件 3 上，将件 17~19 上的动能换算到件 20 上。

令 $J_4' = J_4 + J_5 + J_7 + J_8$ ； $J_6' = J_6 + J_9 + J_{10} + J_{11} + J_{12}$ ； $m_4' = m_4 + m_5 + m_7 + m_8$

$$J_{6a} = J_{6a} + \sum_{j=9}^{16} J_j, \quad J_4' = \sum_{j=17}^{20} J_j$$

再令 $J_1' = J_1 + J_3 + J_4' + J_{6a}' + m_4' R_1^2 + (m_6 + m_9) R_2^2 + (m_{10} + m_{11}) R_3^2 + (m_{12} + m_{13}) R_4^2 + (m_{14} + m_{15}) R_5^2 + m_{16} R_6^2$ ；

$$J_3' = J_3 + J_4' i_1^2 + J_6' i_1^2 i_2^2 + (J_{13} + J_{14}) i_1^2 i_2^2 i_3^2 + (J_{15} + J_{16}) i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2$$

$$J_3'' = J_3 - J_4' i_1$$

$$\text{则 } T = \frac{1}{2} (J_1' \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + J_3 \dot{\varphi}_3^2 + 2J_3'' \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + J_4' \dot{\varphi}_4^{*2}) \quad (14-4-21)$$

为简化计算，将前 $K_4 \sim K_{16}$ 换算到 K_2 轴上，且不计齿轮、蜗轮蜗杆间的啮合刚度。换算后的各刚度合并为 K_2' ，将 $K_{17} \sim K_{20}$ 合并为 K_3' 。

$$\frac{1}{K_2'} = \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_a + K_b} + \frac{1}{i_1^2 i_2^2 K_{12}} + \frac{1}{i_1^2 i_2^2 i_3^2 K_{14}} + \frac{1}{i_1^2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 K_{16}}$$

$$\text{式中 } \frac{1}{K_a} = \frac{1}{i_1^2 K_4} + \frac{1}{i_1^2 i_2^2} \left(\frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}} + \frac{1}{K_{11}} \right); \quad \frac{1}{K_b} = \frac{1}{i_1^2 K_7}; \quad \frac{1}{K_3'} = \frac{1}{K_{17}} + \frac{1}{K_{18}} + \frac{1}{K_{19}} + \frac{1}{K_{20}}$$

则系统势能为：

$$V = \frac{1}{2} \{ K_1 \varphi_1^2 + K_2 [(\varphi_3 + \varphi_1) - \varphi_2]^2 + K_2' (\varphi_3 - \varphi_2)^2 - K_2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + K_3' (i_\Sigma \varphi_3 - \varphi_4^*)^2 \} \quad (14-4-22)$$

式中 $i_\Sigma = i_1 i_2 i_3 i_4$ 。

2.2 建立运动微分方程（四质量系统）

由拉格朗日方程： $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = Q_i$

并设： $K_{3a} = K_3' i_\Sigma^2$ ， $K_{3b} = K_3' i_\Sigma$ ，则有

$$\begin{cases} J_1'' \ddot{\varphi}_1 + J_3'' \ddot{\varphi}_3 + (K_1 + K_2) \varphi_1 - K_2 \varphi_2 + K_2 \varphi_3 = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - K_2 \varphi_1 + K_2' \varphi_2 - K_2' \varphi_3 = -M \\ J_3'' \ddot{\varphi}_1 + J_3'' \ddot{\varphi}_3 + K_2 \varphi_1 - K_2' \varphi_2 + K_2' \varphi_3 + K_{3a} \varphi_3 - K_{3b} \varphi_4^* = 0 \\ J_4'' \ddot{\varphi}_4^* - K_{3b} \varphi_3 + K_3' \varphi_4^* = M_n \end{cases} \quad (14-4-23)$$

式中 M 为负载力矩（烧结机运行阻力矩和台车速度变化引起的惯性力矩）， M_n 为电机启动力矩。

2.3 运动微分方程求解（初始条件为零）

(1) 模态分析法求解

$$\begin{cases} J_1'' \ddot{\varphi}_1 + J_3'' \ddot{\varphi}_3 + (K_1 + K_2) \varphi_1 - K_2 \varphi_2 + K_2 \varphi_3 = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - K_2 \varphi_1 + K_2' \varphi_2 - K_2' \varphi_3 = -M \\ J_3'' \ddot{\varphi}_1 + J_3'' \ddot{\varphi}_3 + K_2 \varphi_1 - K_2' \varphi_2 + K_2' \varphi_3 + K_{3a} \varphi_3 - K_{3b} \varphi_4^* = 0 \\ J_4'' \ddot{\varphi}_4^* - K_{3b} \varphi_3 + K_3' \varphi_4^* = M_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & J_3'' & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ J_3'' & 0 & J_3' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2' & -K_2' & 0 \\ K_2 & -K_2' & (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ 0 & 0 & -K_{3b} & K_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \\ M_n \end{bmatrix}$$

固有振动

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + J_3'' \ddot{\varphi}_3 + (K_1 + K_2) \varphi_1 - K_2 \varphi_2 + K_2 \varphi_3 = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - K_2 \varphi_1 + K_2' \varphi_2 - K_2' \varphi_3 = 0 \\ J_3'' \ddot{\varphi}_1 + J_3' \ddot{\varphi}_3 + K_2 \varphi_1 - K_2' \varphi_2 + K_2' \varphi_3 + K_{3a} \varphi_3 - K_{3b} \varphi_4^* = 0 \\ J_4' \ddot{\varphi}_4^* - K_{3b} \varphi_3 + K_3' \varphi_4^* = 0 \end{cases} \quad (14-4-24)$$

设 $\varphi_i = \phi_i \sin(pt + \psi)$, 则 $\ddot{\varphi}_i = -\phi_i p^2 \sin(pt + \psi)$, 代入式 (14-4-24)

$$\begin{cases} -J_1 \phi_1 p^2 - J_3'' \phi_3 p^2 + (K_1 + K_2) \phi_1 - K_2 \phi_2 + K_2 \phi_3 = 0 \\ -J_2 \phi_2 p^2 - K_2 \phi_1 + K_2' \phi_2 - K_2' \phi_3 = 0 \\ -J_3'' \phi_1 p^2 - J_3' \phi_3 p^2 + K_2 \phi_1 - K_2' \phi_2 + K_2' \phi_3 + K_{3a} \phi_3 - K_{3b} \phi_4^* = 0 \\ -J_4' \phi_4^* p^2 - K_{3b} \phi_3 + K_3' \phi_4^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -J_1 p^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & -J_3'' p^2 + K_2 & 0 \\ -K_2 & -J_2 p^2 + K_2' & -K_2' & 0 \\ -J_3'' p^2 + K_2 & -K_2' & -J_3' p^2 + (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ 0 & 0 & -K_{3b} & -J_4' p^2 + K_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

令其系数矩阵的行列式为 Δ , 根据自由振动有非零解的条件, 系数矩阵行列式 $\Delta = 0$ 。

$$\Delta = \begin{vmatrix} -J_1 p^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & -J_3'' p^2 + K_2 & 0 \\ -K_2 & -J_2 p^2 + K_2' & -K_2' & 0 \\ -J_3'' p^2 + K_2 & -K_2' & -J_3' p^2 + (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ 0 & 0 & -K_{3b} & -J_4' p^2 + K_3' \end{vmatrix} = 0$$

经运算可得:

$$\begin{aligned} \Delta &= J_2 (J_1 J_3' - J_3''^2) J_4' p^2 (p^2 - p_2^2) (p^2 - p_3^2) (p^2 - p_4^2) \\ &= J_2 (J_1 J_3' - J_3''^2) J_4' (p^2 - p_1^2) (p^2 - p_2^2) (p^2 - p_3^2) (p^2 - p_4^2) = 0 \end{aligned}$$

式中 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 为系统第一、二、三、四阶固有频率, 可代入有关数据求得 $p_1 = 0$, $p_2 = 18.7 \text{rad/s}$, $p_3 = 144.607 \text{rad/s}$, $p_4 = 649.045 \text{rad/s}$ 。将 $p_1 = 0$ 代入

$$\begin{cases} (K_1 + K_2) \phi_1 - K_2 \phi_2 + K_2 \phi_3 = 0 \\ -K_2 \phi_1 + K_2' \phi_2 - K_2' \phi_3 = 0 \\ K_2 \phi_1 - K_2' \phi_2 + K_2' \phi_3 + K_{3a} \phi_3 - K_{3b} \phi_4^* = 0 \\ -K_{3b} \phi_3 + K_3' \phi_4^* = 0 \end{cases}$$

解得 $\phi_1 = 0$ 。令 $\phi_4^* = 1$, 解得 $\phi_2 = \frac{1}{i_{\Sigma}}$, $\phi_3 = \frac{1}{i_{\Sigma}}$ 。即振型 $\phi_{11} = 0$, $\phi_{12} = \frac{1}{i_{\Sigma}}$, $\phi_{13} = \frac{1}{i_{\Sigma}}$, $\phi_{14}^* = 1$ 。

以 p_2 值代入, 令 $\phi_{24}^* = 1$, 求得 ϕ_{21} 、 ϕ_{22} 、 ϕ_{23} ; 以 p_3 值代入, 令 $\phi_{34}^* = 1$, 求得 ϕ_{31} 、 ϕ_{32} 、 ϕ_{33} ; 以 p_4 值代入,

令 $\phi_{44} = 1$, 求得 ϕ_{41} 、 ϕ_{42} 、 ϕ_{43} 。

振型矩阵

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} & \phi_{41} \\ \frac{1}{i\Sigma} & \phi_{22} & \phi_{32} & \phi_{42} \\ \frac{1}{i\Sigma} & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

设 $\varphi = \phi \theta$

式中 φ ——自然坐标列阵；

θ ——主坐标列阵；

ϕ ——振型矩阵。

由坐标变换 $\phi^T J \phi \ddot{\theta} + \phi^T K \phi \theta = \phi^T Q$

$$J = \begin{bmatrix} J_1' & 0 & J_3'' & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ J_3'' & 0 & J_3' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4' \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2' & -K_2' & 0 \\ K_2 & -K_2' & (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ 0 & 0 & -K_{3b} & K_3' \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \\ M_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i\Sigma} & \frac{1}{i\Sigma} & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & 1 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & 1 \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1' & 0 & J_3'' & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ J_3'' & 0 & J_3' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} & \phi_{41} \\ \frac{1}{i\Sigma} & \phi_{22} & \phi_{32} & \phi_{42} \\ \frac{1}{i\Sigma} & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i\Sigma} & \frac{1}{i\Sigma} & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & 1 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & 1 \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2' & -K_2' & 0 \\ K_2 & -K_2' & (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ 0 & 0 & -K_{3b} & K_3' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} & \phi_{41} \\ \frac{1}{i\Sigma} & \phi_{22} & \phi_{32} & \phi_{42} \\ \frac{1}{i\Sigma} & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i\Sigma} & \frac{1}{i\Sigma} & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & 1 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & 1 \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \\ M_n \end{bmatrix}$$

由运算得 $K_{j1} = 0$

$$\begin{bmatrix} J_{j1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{j2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{j3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{j4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{j2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{j3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{j4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-M}{i\Sigma} + M_n \\ -\phi_{22}M + M_n \\ -\phi_{32}M + M_n \\ -\phi_{42}M + M_n \end{bmatrix}$$

得解耦微分方程组

(14-4-25)

$$\begin{cases} J_{j1}\ddot{\theta}_1 = \frac{-M}{i_\Sigma} + M_n \\ J_{j2}\ddot{\theta}_2 + K_{j2}\theta_2 = -\phi_{22}M + M_n \\ J_{j3}\ddot{\theta}_3 + K_{j3}\theta_3 = -\phi_{32}M + M_n \\ J_{j4}\ddot{\theta}_4 + K_{j4}\theta_4 = -\phi_{42}M + M_n \end{cases} \quad (14-4-26)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{-M/i_\Sigma + M_n}{J_{j1}} \\ \ddot{\theta}_2 + p_2^2\theta_2 = \frac{-\phi_{22}M + M_n}{J_{j2}} \\ \ddot{\theta}_3 + p_3^2\theta_3 = \frac{-\phi_{32}M + M_n}{J_{j3}} \\ \ddot{\theta}_4 + p_4^2\theta_4 = \frac{-\phi_{42}M + M_n}{J_{j4}} \end{cases} \begin{cases} p_1^2 = 0 \\ p_2^2 = \frac{K_{j2}}{J_{j2}} \\ p_3^2 = \frac{K_{j3}}{J_{j3}} \\ p_4^2 = \frac{K_{j4}}{J_{j4}} \end{cases} \quad (14-4-26a)$$

解得

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-M/i_\Sigma + M_n}{2J_{j1}} t^2 \\ \frac{-\phi_{22}M + M_n}{J_{j2}p_2^2} (1 - \cos p_2 t) \\ \frac{-\phi_{32}M + M_n}{J_{j3}p_3^2} (1 - \cos p_3 t) \\ \frac{-\phi_{42}M + M_n}{J_{j4}p_4^2} (1 - \cos p_4 t) \end{bmatrix} \quad (14-4-27)$$

 $\varphi = \Phi \theta$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} & \phi_{41} \\ \frac{1}{i_\Sigma} & \phi_{22} & \phi_{32} & \phi_{42} \\ \frac{1}{i_\Sigma} & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{21} & \phi_{31} & \phi_{41} \\ \frac{1}{i_\Sigma} & \phi_{22} & \phi_{32} & \phi_{42} \\ \frac{1}{i_\Sigma} & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-M/i_\Sigma + M_n}{2J_{j1}} t^2 \\ \frac{-\phi_{22}M + M_n}{J_{j2}p_2^2} (1 - \cos p_2 t) \\ \frac{-\phi_{32}M + M_n}{J_{j3}p_3^2} (1 - \cos p_3 t) \\ \frac{-\phi_{42}M + M_n}{J_{j4}p_4^2} (1 - \cos p_4 t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-\phi_{21}\phi_{22}M + \phi_{21}M_n}{J_{j2}p_2^2} (1 - \cos p_2 t) + \frac{-\phi_{31}\phi_{32}M + \phi_{31}M_n}{J_{j3}p_3^2} (1 - \cos p_3 t) + \frac{-\phi_{41}\phi_{42}M + \phi_{41}M_n}{J_{j4}p_4^2} (1 - \cos p_4 t) \\ \frac{-M/i_\Sigma^2 + M_n/i_\Sigma}{2J_{j1}} t^2 + \frac{-\phi_{22}^2M + \phi_{22}M_n}{J_{j2}p_2^2} (1 - \cos p_2 t) + \frac{-\phi_{32}^2M + \phi_{32}M_n}{J_{j3}p_3^2} (1 - \cos p_3 t) + \frac{-\phi_{42}^2M + \phi_{42}M_n}{J_{j4}p_4^2} (1 - \cos p_4 t) \\ \frac{-M/i_\Sigma^2 + M_n/i_\Sigma}{2J_{j1}} t^2 + \frac{-\phi_{23}\phi_{22}M + \phi_{23}M_n}{J_{j2}p_2^2} (1 - \cos p_2 t) + \frac{-\phi_{33}\phi_{32}M + \phi_{33}M_n}{J_{j3}p_3^2} (1 - \cos p_3 t) + \frac{-\phi_{43}\phi_{42}M + \phi_{43}M_n}{J_{j4}p_4^2} (1 - \cos p_4 t) \\ \frac{-M/i_\Sigma + M_n}{2J_{j1}} t^2 + \frac{-\phi_{22}M + M_n}{J_{j2}p_2^2} (1 - \cos p_2 t) + \frac{-\phi_{32}M + M_n}{J_{j3}p_3^2} (1 - \cos p_3 t) + \frac{-\phi_{42}M + M_n}{J_{j4}p_4^2} (1 - \cos p_4 t) \end{bmatrix} \quad (14-4-28)$$

(2) 新微分算子法求解

引入微分算子 D 代替 $\frac{d}{dt}$, D^2 代替 $\frac{d^2}{dt^2}$, 运动微分方程组可写成下列矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} J_1' D^2 + (K_1 + K_2) & -K_2' & J_3'' D^2 + K_2 & 0 \\ -K_2 & J_2 D^2 + K_2' & -K_2' & 0 \\ J_3'' D^2 + K_2 & -K_2' & J_3' D + (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ 0 & 0 & -K_{3b} & J_4^* D^2 + K_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \\ M_n \end{bmatrix} \quad (14-4-29)$$

可以看出, 上式是关于 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 、 φ_4^* 的一个线性方程组。其系数矩阵行列式 Δ 为:

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_1' D^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & J_3'' D^2 + K_2 & 0 \\ -K_2 & J_2 D^2 + K_2' & -K_2' & 0 \\ J_3'' D^2 + K_2 & -K_2' & J_3' D + (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ 0 & 0 & -K_{3b} & J_4^* D^2 + K_3' \end{vmatrix}$$

$$\text{经运算可得: } \Delta = J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^* D^2 (D^2 + p_2^2) (D^2 + p_3^2) (D^2 + p_4^2) \quad (14-4-29a)$$

式中 p_2 、 p_3 、 p_4 为系统第二、三、四阶固有频率, 可代入有关数据求得: $p_1 = 0$, $p_2 = 18.7 \text{rad/s}$, $p_3 = 144.607 \text{rad/s}$, $p_4 = 649.045 \text{rad/s}$ 。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -K_2 & J_3'' D^2 + K_2 & 0 \\ -M & J_2 D^2 + K_2' & -K_2' & 0 \\ 0 & -K_2' & J_3' D + (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ M_n & 0 & -K_{3b} & J_4^* D^2 + K_3' \end{vmatrix}$$

$$= MD^2 [(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4^* D^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4^* - K_2 K_3' J_3'] + M_n K_{3b} D^2 [-J_2 J_3'' D^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')] \quad \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 \text{ 相应可解出。}$$

设 $M(\tau)$ 、 $M_n(\tau)$ 为阶跃函数, 由克莱姆法则可得:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{MD^2 [(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4^* D^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4^* - K_2 K_3' J_3'] + M_n K_{3b} D^2 [-J_2 J_3'' D^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')]}{J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^* D^2 (D^2 + p_2^2) (D^2 + p_3^2) (D^2 + p_4^2)} \\ &= \frac{1}{J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^*} \sum_{i=2}^4 \frac{M}{(D^2 + p_i^2)} \times \frac{-(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4^* p_i^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4^* - K_2 K_3' J_3'}{(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \\ &\quad + \frac{K_{3b}}{J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^*} \sum_{i=2}^4 \frac{M_n}{(D^2 + p_i^2)} \frac{[J_2 J_3'' p_i^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')]}{(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \\ &= \frac{1}{J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^*} \sum_{i=2}^4 \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3') K_3' - [K_2 K_{3a} + (K_2' J_3'' - K_2 J_3') p_i^2] J_4^*}{p_i (p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \int_0^t M(\tau) \sin p_i (t - \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{K_{3b}}{J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^*} \sum_{i=2}^4 \frac{J_2 J_3'' p_i^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')}{p_i (p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \int_0^t M_n(\tau) \sin p_i (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{M}{J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^*} \sum_{i=2}^4 \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3') K_3' - [K_2 K_{3a} + (K_2' J_3'' - K_2 J_3') p_i^2] J_4^*}{p_i^2 (p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} (1 - \cos p_i t) \\ &\quad + \frac{K_{3b} M_n}{J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^*} \sum_{i=2}^4 \frac{J_2 J_3'' p_i^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')}{p_i^2 (p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} (1 - \cos p_i t) \quad (14-4-30) \\ \varphi_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-M}{J_2 (J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^*} \left\{ \left[\frac{(K_1 + K_2) K_2' - K_2^2}{p_2^2 p_3^2 p_4^2} \right] \times \frac{t^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^4 \left\{ \frac{(J_1' J_3 - J_3''^2) J_4^* p_i^6 + [(J_1' J_3 - J_3''^2) K_3' + [(K_1 + K_2) J_3' + (K_2' + K_{3a}) J_1' - 2K_2 J_3''] J_4^*] p_i^4}{-p_i^2 (p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{-\{[(K_1 + K_2)J_3 + K_2 J_1 - 2J_3''K_2]K_3 + [(K_1 + K_2)(K_2 + K_{3a}) - K_2^2]J_4^* p_i^2 + [(K_1 + K_2)K_2 - K_2^2]K_3'\}}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \left\} \times \right. \\
 & \left. \frac{(1 - \cos p_i t)}{p_i^2} \right\} - \frac{K_{3b}M_n}{J_2(J_1 J_3 - J_3''^2)J_4^*} \left\{ \frac{[K_2^2 - K_2'(K_1 + K_2)]}{-p_2^2 p_3^2 p_4^2} \times \frac{t^2}{2} \right. \\
 & \left. + \sum_{i=2}^4 \frac{-(K_2 J_3'' - K_2' J_1) p_i^2 + K_2^2 - K_2'(K_1 + K_2)}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \times \frac{(1 - \cos p_i t)}{p_i^2} \right\} \quad (14-4-31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = & \frac{M}{J_2(J_1 J_3 - J_3''^2)J_4^*} \left\{ \left[\frac{K_2^2 - (K_1 + K_2)K_2'}{p_2^2 p_3^2 p_4^2} \right] K_3' \times \frac{t^2}{2} \right. \\
 & \left. + \sum_{i=2}^4 \left\{ \frac{[J_3''K_2 - J_1 K_2'] J_4^* p_i^4 - [K_3'(J_3''K_2 - J_1 K_2') + [K_2^2 - (K_1 + K_2)K_2'] J_4^* p_i^2 + [K_2^2 - (K_1 + K_2)K_2'] K_3']}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \right\} \times \right. \\
 & \left. \frac{(1 - \cos p_i t)}{p_i^2} \right\} + \frac{K_{3b}M_n}{J_2(J_1 J_3 - J_3''^2)J_4^*} \left\{ \left[\frac{K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2}{-p_2^2 p_3^2 p_4^2} \right] \times \frac{t^2}{2} \right. \\
 & \left. + \sum_{i=2}^4 \left\{ \frac{J_1 J_2 p_i^4 - [(K_1 + K_2)J_2 + K_2' J_1] p_i^2 + [K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2]}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \right\} \frac{(1 - \cos p_i t)}{p_i^2} \right\} \quad (14-4-32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_4^* = \frac{\Delta_4}{\Delta} = & \frac{M}{J_2(J_1 J_3 - J_3''^2)J_4^*} \left\{ \left[\frac{K_2^2 - (K_1 + K_2)K_2'}{p_2^2 p_3^2 p_4^2} \right] K_{3b} \times \frac{t^2}{2} \right. \\
 & \left. + \sum_{i=2}^4 \left\{ \frac{-(J_3''K_2 - J_1 K_2') K_{3b} p_i^2 + [K_2^2 - (K_1 + K_2)K_2'] K_{3b}}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \right\} \frac{(1 - \cos p_i t)}{p_i^2} \right\} \\
 & + \frac{M_n}{J_2(J_1 J_3 - J_3''^2)J_4^*} \left\{ \left[\frac{K_{3a}[K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2]}{-p_2^2 p_3^2 p_4^2} \right] \times \frac{t^2}{2} \right. \\
 & \left. + \sum_{i=2}^4 \left\{ \frac{-[J_3'(J_1 J_2 - J_3''^2)] p_i^6 + [K_2' J_1 J_3 + (K_1 + K_2)J_2 J_3 + (K_2 + K_{3a})J_1 J_2 - 2K_2 J_2 J_3''] p_i^4}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{[-K_2^2 J_3 + K_2'(K_1 + K_2)J_3 + K_2' K_{3a} J_1 + (K_1 + K_2)(K_2 + K_{3a})J_2] p_i^2 + K_{3a}[K_2'(K_1 + K_2) - K_2^2]}{-p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \right\} \times \right. \\
 & \left. \frac{(1 - \cos p_i t)}{p_i^2} \right\} \quad (14-4-33)
 \end{aligned}$$

式中 $i=2, j=3, k=4; i=3, j=2, k=4; i=4, j=2, k=3$ 。

(3) 拉氏变换法求解

式(14-4-23)取拉氏变换,并写成矩阵形式

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} J_1' S^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 & J_3'' S^2 + K_2 & 0 \\ -K_2 & J_2 S^2 + K_2' & -K_2' & 0 \\ J_3'' S^2 + K_2 & -K_2' & J_3' S^2 + (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ 0 & 0 & -K_{3b} & J_4^* S^2 + K_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L[\varphi_1] \\ L[\varphi_2] \\ L[\varphi_3] \\ L[\varphi_4^*] \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 0 \\ -L[M] \\ 0 \\ L[M_n] \end{bmatrix} \quad (14-4-34)
 \end{aligned}$$

可以看出式(14-4-34)是关于 $L[\varphi_1], L[\varphi_2], L[\varphi_3], L[\varphi_4^*]$ 的一个线性方程组,令其系数矩阵行列式为 Δ ,容易看出 Δ 是一个关于 S^2 的四次多项式。经过运算可得:

$$\Delta = J_2(J_1 J_3 - J_3''^2) J_4^* S^2 (S^2 + p_2^2)(S^2 + p_3^2)(S^2 + p_4^2)$$

式中 p_2, p_3, p_4 为系统第二、三、四阶固有频率,可代人有关数据计算求得: $p_1 = 0, p_2 = 18.7\text{rad/s}, p_3 = 144.607\text{rad/s}, p_4 = 649.045\text{rad/s}$ 。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -K_2 & J_3'' S^2 + K_2 & 0 \\ -L[M] & J_2 S^2 + K_2 & -K_2' & 0 \\ 0 & -K_2' & J_1' S^2 + (K_2' + K_{3a}) & -K_{3b} \\ L[M_n] & 0 & -K_{3b} & J_4'' S^2 + K_3' \end{vmatrix}$$

$$= L[M]S^2[(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4'' S^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4'' - K_2 K_3' J_3'] + L[M_n] K_{3b} S^2[-J_2 J_3'' S^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')]$$

$\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ 相应可解出。

设 $M(\tau), M_n(\tau)$ 为阶跃函数,由克莱姆法则可得:

$$L[\varphi_1] = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{L[M]S^2[(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4'' S^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4'' - K_2 K_3' J_3'] + L[M_n] K_{3b} S^2[-J_2 J_3'' S^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')]}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4'' S^2(S^2 + p_2^2)(S^2 + p_3^2)(S^2 + p_4^2)}$$

$$= \frac{1}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{L[M]}{(S^2 + p_i^2)} \times \frac{-(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4'' p_i^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4'' - K_2 K_3' J_3'}{(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)}$$

$$+ \frac{K_{3b}}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{L[M_n][J_2 J_3'' p_i^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')]}{(S^2 + p_i^2)(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)}$$

$$= \frac{1}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{L[M]L[\sin p_i t] \{ -(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4'' p_i^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4'' - K_2 K_3' J_3' \}}{p_i(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)}$$

$$+ \frac{K_{3b}}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{L[M_n]L[\sin p_i t][J_2 J_3'' p_i^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')]}{p_i(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \quad (14-4-35)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{[-(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4'' p_i^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4'' - K_2 K_3' J_3'] (M * \sin p_i t)}{p_i(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)}$$

$$+ \frac{K_{3b}}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{[J_2 J_3'' p_i^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')](M_n * \sin p_i t)}{p_i(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)}$$

$$= \frac{1}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{[-(K_2' J_3'' - K_2 J_3') J_4'' p_i^2 + K_2' K_3' J_3'' - K_2 K_{3a} J_4'' - K_2 K_3' J_3']}{p_i(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \int_0^t M(\tau) \sin p_i(t - \tau) d\tau$$

$$+ \frac{K_{3b}}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{[J_2 J_3'' p_i^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')]}{p_i(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} \int_0^t M_n(\tau) \sin(t - \tau) d\tau$$

$$= \frac{M}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{(K_2' J_3'' - K_2 J_3') K_3' - [K_2 K_{3a} + (K_2' J_3'' - K_2 J_3') p_i^2] J_4''}{p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} (1 - \cos p_i t)$$

$$+ \frac{K_{3b} M_n}{J_2(J_1 J_3 - J_3'^2) J_4''} \sum_{i=2}^4 \frac{[J_2 J_3'' p_i^2 - (K_2 J_2 + K_2' J_3'')]}{p_i^2(p_j^2 - p_i^2)(p_k^2 - p_i^2)} (1 - \cos p_i t) \quad (14-4-36)$$

式中 $i=2, j=3, k=4; i=3, j=2, k=4; i=4, j=2, k=3$ 。

同理 $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 可相应求得表达式。

2.4 系统扭振力矩的计算

$$M_1 = K_1 \varphi_1$$

$$M_2 = K_2(\varphi_3 + \varphi_1 - \varphi_2)$$

$$M_3 = K_3(\varphi_4 - \varphi_3 i_{21})$$

将有关数据代人,并 $M_0 = \frac{1.3M}{i_{21}}$ (1.3 为原定扭矩联轴器设定值)

求得 $M_{1\max} = 2M, M_{2\max} = 1.9M, M_{3\max} = 4.54 \times 10^{-4} M$ 。

扭矩放大系数 TAF:

$$TAF_1 = \frac{M_{1\max}}{M} = 2$$

$$TAF_2 = \frac{M_{2\max}}{M} = 1.9$$

$$TAF_3 = \frac{M_{3\max}}{M/i_3} = \frac{4.54 \times 10^{-4} M}{M} \times 3112.3 = 1.4$$

3 分析说明

(1) 悬挂多柔传动中, 悬挂减速箱的扭振角速度(即各级齿轮的扭振牵连速度) $\dot{\varphi}_1$ 在低频时与大齿轮本身的扭振相对角速度的数量级相当, 不能忽略, 且若略去扭振牵连速度 $\dot{\varphi}_1$, 就意味着不考虑大齿轮的箱体为悬挂这一特点, 也就失去了柔性传动的意义, 所以必须采用差动力学模型。

(2) 悬挂减速箱扭振角位移 φ_1 设有刚体转动项(因其有固定端), 其余均有刚体转动项(因其没有固定端), 但扭振力矩只有相对转动才能出现, 故 M_2 、 M_3 的表达式中, t^2 项系数正好抵消, 仅有振动成分。

(3) 扭力杆的刚度选取很重要, 不宜过高或过低, 应综合考虑扭振扭矩放大系数(可取 TAF_1) 和强度等进行优化设计。 $M_{H\max} \neq M_{l\max}$, 需另计算。

(4) 本章转炉扭振动力学计算时, 为了简化, 固有振动(由初始条件决定)应用了模态分析法, 强迫振动应用了模态分析法、新微分算子法、拉氏变换法。当然固有振动也可应用新微分算子法, 拉氏变换法可直接求出固有振动和强迫振动合成的全解。

(5) 进一步应用 Mathematics、Maple 等软件解常微方程组和模态分析法求固有频率、振型等程序可大大提高计算速度。

4 结 论

(1) 系统临界转速与固有频率有关, 如 $90m^2$ 烧结机, $p_1 = 0$ (即 $n_1 = 0$), $p_2 = 18.7\text{rad/s}$ (即 $n_2 = 178.6\text{r/min}$), $p_3 = 144.607\text{rad/s}$ (即 $n_3 = 1380.9\text{r/min}$), $p_4 = 649.045\text{rad/s}$ (即 $n_4 = 6197.9\text{r/min}$)。系统各级转速应避开各阶临界转速, 设备启动时要注意避免发生共振现象。

(2) 系统扭振固有频率一般较零部件的工作转速频率大得多。有关零部件的疲劳计算, 不能简单按工作转速来考虑, 应按扭振固有频率来考虑。

(3) 一般来说, 半悬挂系统的扭矩放大系数比全悬挂系统要大, 但比普通传动系统的动载荷系数要小, 由此看出柔性传动的优越性。工作载荷应按扭振扭矩放大系数来考虑。

附 录

(1) 25t 氧气转炉倾动机械扭振动力学计算资料

1) 转动惯量

① J_1 (悬挂减速箱转动惯量) $J_1 = 1.45415721 \times 10^5 \text{kg} \cdot \text{m}^2$

② J_2 (转炉及托圈转动惯量) $J_2 = 1.06161788 \times 10^6 \text{kg} \cdot \text{m}^2$

③ J_3 (大齿轮转动惯量) $J_3 = 1.1099 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m}^2$

④ J_4 (末级减速机小齿轮转动惯量) $J_4 = 3.0422 \times 10 \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_4 = 480.69\text{kg}$

⑤ J_5 (初级减速机Ⅲ级大齿轮转动惯量) $J_5 = 1.7867 \times 10^2 \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_5 = 1168.11\text{kg}$

⑥ J_6 (初级减速机Ⅲ级小齿轮转动惯量) $J_6 = 7.959 \times 10^{-1} \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_6 = 127.64\text{kg}$

⑦ J_7 (初级减速机Ⅱ级大齿轮转动惯量) $J_7 = 1.2007 \times 10 \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_7 = 219\text{kg}$

⑧ J_8 (初级减速机Ⅱ级小齿轮转动惯量) $J_8 = 2.2232 \times 10^{-1} \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_8 = 30.85\text{kg}$

⑨ J_9 (初级减速机Ⅰ级大齿轮转动惯量) $J_9 = 1.18043 \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_9 = 54.9\text{kg}$

⑩ J_{10} (初级减速机Ⅰ级小齿轮转动惯量) $J_{10} = 5.762 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_{10} = 7.76\text{kg}$

⑪ J_{11} (弹性联轴器半联轴节转动惯量) $J_{11} = 1.9705 \times 10^{-1} \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_{11} = 7\text{kg}$

⑫ J_{12} (弹性联轴器半联轴节转动惯量) $J_{12} = 1.9705 \times 10^{-1} \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_{12} = 7\text{kg}$

⑬ J_{13} (电机转子转动惯量) $J_{13} = 2.1 \text{kg} \cdot \text{m}^2, m_{13} = 238\text{kg}$

2) 扭转刚度

① K_1 (扭力杆折算刚度) $K_1 = 3.527059418 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m/rad}$

- ② K_2 (耳轴刚度) $K_2 = 1.157868117 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
 ③ K_3 (末级减速机大小齿轮啮合刚度,不予计算)
 ④ K_4 (初级减速机IV轴扭转刚度) $K_4 = 3.664169158 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
 ⑤ K_5 (初级减速机III级大小齿轮啮合刚度,不予计算)
 ⑥ K_6 (初级减速机III轴扭转刚度) $K_6 = 2.280286899 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
 ⑦ K_7 (初级减速机II级大小齿轮啮合刚度,不予计算)
 ⑧ K_8 (初级减速机II轴扭转刚度) $K_8 = 1.94032786 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
 ⑨ K_9 (初级减速机I级大小齿轮啮合刚度,不予计算)
 ⑩ K_{10} (初级减速机I轴扭转刚度) $K_{10} = 5.5899372 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
 ⑪ K_{11} (弹性联轴器的扭转刚度) $K_{11} = 8.7944 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
 ⑫ K_{12} (电机轴扭转刚度) $K_{12} = 6.783781272 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$

3) 速比

- ① 末级减速机 $i_1 = 8.118$
 ② 初级减速机 $i_2 = 4.944; i_3 = 4.471; i_4 = 4.471$
 ③ 总速比 $i_\Sigma = i_1 i_2 i_3 i_4 = 802.3$

4) 回转半径

$$R_1 = 1.575\text{m}, R_2 = 2.091\text{m}, R_3 = 2.428\text{m}, R_4 = 2.645\text{m}$$

(2) 90m² 烧结机驱动装置扭振动力学计算资料

1) 转动惯量

- ① J_1 (悬挂减速箱包括辅助减速器箱体转动惯量) $J_1 = 7.633 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ② J_2 (首尾星轮、卷筒、烧结机台车、烧结料等转化转动惯量) $J_2 = 1.04016 \times 10^6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ③ J_3 (大齿轮转动惯量) $J_3 = 2.353 \times 10^5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ④ J_4 (右小齿轮转动惯量) $J_4 = 1.64 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, m_4 = 250 \text{ kg}$
 ⑤ J_5 (右蜗轮转动惯量) $J_5 = 33.21 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, m_5 = 313 \text{ kg}$
 ⑥ J_6 (右蜗杆转动惯量) $J_6 = 0.37 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_6 = 83 \text{ kg} \quad J_{6a} = \frac{m}{12}(3r^2 + L^2) = 1.21 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ⑦ J_7 (左小齿轮转动惯量) $J_7 = 1.64 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, m_7 = 250 \text{ kg}$
 ⑧ J_8 (左蜗轮转动惯量) $J_8 = 33.21 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, m_8 = 313 \text{ kg}$
 ⑨ J_9 (左蜗杆转动惯量) $J_9 = 0.37 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_9 = 83 \text{ kg} \quad J_{9a} = J_{6a} = 1.21 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ⑩ J_{10} (半万向接手 SWP180 × 1120 转动惯量) $J_{10} = 1.34 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_{10} = 38.1 \text{ kg} \quad J_{10a} = 2.2 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ⑪ J_{11} (半万向接手 SWP180 × 1120 转动惯量) $J_{11} = 1.34 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_{11} = 38.1 \text{ kg} \quad J_{11a} = 2.2 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ⑫ J_{12} (辅助减速器末级大齿轮转动惯量) $J_{12} = 1.068 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_{12} = 45.343 \text{ kg} \quad J_{12a} = 5.34 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ⑬ J_{13} (辅助减速器末级小齿轮转动惯量) $J_{13} = 1.965 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_{13} = 9.596 \text{ kg} \quad J_{13a} = 1.704 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ⑭ J_{14} (辅助减速器首级大齿轮转动惯量) $J_{14} = 0.1485 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_{14} = 15.41 \text{ kg} \quad J_{14a} = 7.425 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ⑮ J_{15} (辅助减速器首级小齿轮转动惯量) $J_{15} = 1.76 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_{15} = 2.37 \text{ kg} \quad J_{15a} = 1.71 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 ⑯ J_{16} (半万向接手 SWP160 × 610 转动惯量) $J_{16} = 8.378 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 $m_{16} = 33 \text{ kg} \quad J_{16a} = 2.05 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

⑰ J_{17} (半万向接手 SWP160 × 610 转动惯量) $J_{17} = 8.22 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

⑱ J_{18} (半尼龙柱销联轴器转动惯量) $J_{18} = 5.88 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

⑲ J_{19} (半尼龙柱销联轴器转动惯量) $J_{19} = 5.56 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

⑳ J_{20} (电机转子转动惯量) $J_{20} = 3.15 \times 10^{-1} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

2) 扭转刚度

① K_1 (扭力杆、重力弹簧平衡器折算扭转刚度) $K_1 = 1.1774 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

② K_2 (卷筒轴扭转刚度) $K_2 = 1.402 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

③ K_3 (II级减速机右大小齿轮啮合刚度, 不予计算)

④ K_4 (II级减速机右小齿轮轴扭转刚度) $K_4 = 2.06 \times 10^7 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑤ K_5 (右蜗杆、蜗轮啮合刚度, 不予计算)

⑥ K_6 (II级减速机左大小齿轮啮合刚度, 不予计算)

⑦ K_7 (II级减速机左小齿轮轴扭转刚度) $K_7 = 2.06 \times 10^7 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑧ K_8 (左蜗杆、蜗轮啮合刚度, 不予计算)

⑨ K_9 (蜗杆轴II右扭转刚度) $K_9 = 3.28 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑩ K_{10} (SWP180 × 1120 万向接手扭转刚度) $K_{10} = 5.16 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑪ K_{11} (蜗杆轴II左扭转刚度) $K_{11} = 3.28 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑫ K_{12} (蜗杆轴I扭转刚度) $K_{12} = 3.34 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑬ K_{13} (辅助减速机末级齿轮啮合刚度, 不予计算)

⑭ K_{14} (辅助减速机中间齿轮轴扭转刚度) $K_{14} = 5.20 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑮ K_{15} (辅助减速机首级齿轮啮合刚度, 不予计算)

⑯ K_{16} (辅助减速机小齿轮轴扭转刚度) $K_{16} = 3.33 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑰ K_{17} (SWP160 × 610 万向接手扭转刚度) $K_{17} = 1.48 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑱ K_{18} (中间轴扭转刚度) $K_{18} = 5.034 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑲ K_{19} (尼龙柱销联轴器扭转刚度) $K_{19} = 1.82 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

⑳ K_{20} (电机轴扭转刚度) $K_{20} = 6.87 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$

3) 速比

II级减速机速比 $i_1 = 8.444$

蜗杆蜗轮速比 $i_2 = 31.5$

辅助减速机速比 $i_3 = 3.4737; i_4 = 3.3684$

总速比 $i_{\Sigma} = 3112.3$

4) 回转半径

$R_1 = 1.190\text{m}, R_2 = 1.291\text{m}, R_3 = 0.683\text{m}, R_4 = 1.950\text{m}, R_5 = 2.032\text{m}, R_6 = 2.359\text{m}$

参 考 文 献

- 1 方正. 齿轮手册. 北京:机械工业出版社,1990
- 2 方正. BFT型多柔传动装置的理论分析. 重型机械. 1985,(9)
- 3 王春和. 回转密多柔传动系统的设计研究. 有色设备. 1988,(2)
- 4 王春和. 多柔传动系统中解决齿轮同步问题的一种方法. 北方工业大学学报. 1988,(1)
- 5 黄振青等. 氧气转炉柔性传动的扭转振动. 冶金设备. 1985,(1)
- 6 潘毓淳. 炼钢机械. 冶金工业出版社,1991
- 7 Chuan-Sheng Ji. A New Solution Of Constant Differential Equation Group By Differential Operator And Application In Calculation Rolling-Mill Torsional Vibration. ed. Proceedings Of The 6th International Modal Analysis Conference. U. S. A. 1988;598 ~ 602
- 8 苗水温. 多柔传动装置在刚性滑道烧结机上的应用. 工程设计与研究. 1996,(9)
- 9 林鹤编. 机械振动理论及应用. 北京:冶金工业出版社,1990
- 10 季泉生,张少军. 90m²烧结机半悬挂多柔传动扭振新微分算子法研究. 冶金设备. 2000,(1)

ISBN 7-5025-4958-7



9 787502 549589 >

ISBN 7-5025-4958-7/TH · 165 定价：85.00元