

● 研究生用书 ●

获全国高等学校
机电类专业优秀教材一等奖

MECHANICAL VIBRATION SYSTEM
— ANALYSIS · MEASUREMENT
· MODELING · CONTROL

华中理工大学出版社



师汉民
湛刚
吴雅

机械振动系统

—— 分析 · 测试 · 建模 · 对策

(上册)

D281/06

· 研究生用书 ·

机械振动系统

——分析·测试·建模·对策

(上册)

师汉民 湛刚 吴雅

责任编辑 刘继宁

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

武汉市新华印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:12 插页:2 字数:294 000

1992年11月第1版 1999年6月第3次印刷

印数:2 001—3 000

ISBN 7-5609-0677-X/TH·58

定价:16.80元

内 容 简 介

本书讲述现代振动工程中有关振动系统的分析、测试、建模与对策方面的基础理论、基本知识以及常用的方法和技巧。全书分上下两册,上册(基础篇)包括单自由度与多自由度系统振动的基础知识,随机激励下的振动,振动系统的测试、辨识与建模,振动的抑制与利用;下册(深化篇)包括分析动力学基础,多自由度系统振动分析的常用方法,连续系统与非线性系统的振动,工程中的自激振动以及振动问题分析求解的计算方法。

本书注意联系工程实际,可作为机械类专业硕士研究生教材;其中上册也可作为本科生教材使用。此外,本书还可供工程技术人员参考。

Abstract

The fundamental theory, basic knowledge and the methods and techniques most in use for analysing, measuring, testing modeling and controlling vibration systems in modern vibration engineering are discussed in this book. The book is divided into two volumes, the first volume (fundamental one) consists of basic knowledge about the vibration of single-or multidegree-of-freedom systems, vibration induced by random excitation, vibration measuring, testing, identifying and modeling, vibration suppression and vibration application, the second volume (deepening one) is devoted to elements of analytical dynamics, the methods in common use for analysing vibration in multi-degree-of-freedom systems, vibration of continuous and non-linear systems, self-excited vibration in engineering and computation techniques for vibration problem solving.

Paying attention to integrating theory with engineering practice the book may be used by the Master degree students in the disciplines related to mechanical engineering as well as the first volume of the book can be used by the undergraduates as a textbook. Besides, the book can be used also by engineers or researchers as a reference book.

“研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节,是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材,才能使学生学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识,为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自1978年招收研究生以来,组织了一批学术水平较高,教学经验丰富的教师,先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行,更多则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践,不断修改、补充、完善,已达到出书的要求。因此,我校决定出版“研究生用书”,以满足本校各专业研究生教学需要,并与校外单位交流,征求有关专家学者和读者的意见,以促进我校研究生教材建设工作,提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主,还有教学参考书和学术专著,涉及的面较广,数量较多,准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发,根据各门课程在教学过程中的地位和作用,在内容上求新、求深、求精,每本教材均应包括本门课程的基本内容,使学生能掌握必需的基础理论和专门知识;学位课教材还应接触该学科的发展前沿,反映国内外的最新研究成果,以适应目前科学技术知识更新很快的形势;学术专著则应充分反映作者的科研硕果和学术水平,阐述自己的学术见解。在结构和阐

述方法上,应条理清楚,论证严谨,文字简炼,符合人们的认识规律。总之,要力求使“研究生用书”具有科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些,但由于研究生的培养工作为时尚短,水平和经验都不够,其中缺点、错误在所难免,尚望校内外专家学者及读者不吝指教,我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

黄树槐

1989. 11

前 言

本书是为华中理工大学硕士研究生的学位课程“机械振动”所编写的教材。此课程旨在帮助研究生掌握机械振动的基础理论、基本测试、建模技能与分析计算方法，培养他们对机械系统和工程结构进行振动分析与控制、有效地处理机械工程中各种振动问题的能力。

为实现上述目的，本书力图在“少而精”的前提下，覆盖机械工程类的硕士研究生在他们未来的工作中为处理种种动态分析与振动控制问题，可能需要的基础理论、基本知识以及常用的方法和技巧。我们试图突破现有机械振动方面的书籍或教材的一般体系，而将现代振动工程中有关振动系统的分析、测试、建模与对策方面的知识组织成为一个有机的整体，供研究生学位课程教学之用。

本书以机械类工科专业本科的课程（理论力学、材料力学、高等数学和工程数学）作为起点，在取材与编排上有以下特点：

突出联系工程实际的观点，在遵循振动学科的基本体系、讲清振动科学的基础理论的同时，注意阐述有关理论、知识和方法的工程背景与实际意义；

注意反映由于电子计算机在振动分析中的广泛深入的应用，而发展起来的一些新的方法与技巧；

在适应于教材的容量与深度的范围内，本书还介绍了作者近年来在金属切削机床自激振动的非线性理论及其在线监控技术方面的主要研究成果，作为工程实际中的振动问题的分析与处理之一例。

全书分上下两册，上册（基础篇）包括单自由度与多自由度

系统振动的基础知识，随机激励下的振动，振动系统的测试、辨识与建模，振动的抑制与振动的利用；下册（深化篇）包括分析力学基础，多自由度系统振动分析的常用方法，连续系统与非线性系统的振动，工程中的自激振动以及振动问题分析求解的计算方法。

在叙述方法上我们尽力注意突出重点，讲清难点，分清层次，以利教学；特别是注意以启发诱导的方式，激发研究生的学习兴趣，引导他们去钻研与理解。

在每章之末均附有若干“思考题”，这些思考题“貌似简单”，其实并不容易，它们有助于帮助学习者澄清模糊概念，并激发学习兴趣。在书末附有各章思考题的答案，但我们希望读者在经过认真思考以后，再去查阅答案。各章之后还附有若干习题，供读者选作。

按照我们的教学经验，如果讲授得法，而且研究生们能努力学习，积极配合，那么80学时已足够讲授本书的基本内容，课内外学时之比约为1:2。

如果研究生们在本科期间已修有关振动方面的课程，则可略去第一篇，而由第二篇开始讲授，大约40~60学时已能讲完。

本书第一篇（第一至第七章）还可作为机械类专业大学本科生的必修或选修课教材，约需40~60个课堂学时。

本书除作为教材之外，还可供从事机械产品与机械设备的振动测试、分析、抑制或利用等方面工作的广大工程技术人员作为技术参考书。

谌刚与吴雅参与了这门课程的教学实践与大纲制订，并分别提供了第三、四、六、七、九章与第一、二章的初稿，全书由师汉民编写与修改、定稿。谌刚与吴雅负责整理、校核全书的文字、公式与插图。伍良生校阅了部分章节，并提出了宝贵建议。周辉、张保国与刘国祥为缮写书稿付出了辛勤的劳动。

杨叔子教授对于这门课程的开设与教材编写给予了热情的支

持和关怀。杜润生为本课程的实验开设作出了贡献。邓星钟、卢文祥等同志都为此课程教学活动的正常进行付出了劳动。

限于编者的水平，书中定有许多不恰当甚至错误之处，切望读者批评指正。

编者

1990年11月28日

目 录

绪论	(1)
第一篇 基础篇	(7)
第一章 单自由度线性系统的自由振动	(9)
§ 1.1 振动系统的简化及其模型	(9)
§ 1.2 单自由度线性系统的运动微分方程	(22)
§ 1.3 无阻尼系统的自由振动	(27)
§ 1.4 有阻尼系统的自由振动	(42)
第二章 单自由度线性系统的强迫振动	(56)
§ 2.1 谐波激励下的强迫振动	(56)
§ 2.2 周期激励下的强迫振动, Fourier 级数法	(74)
§ 2.3 非周期激励下的强迫振动, Fourier 变换法	(85)
§ 2.4 非周期激励下的强迫振动, 脉冲响应函数法	(92)
§ 2.5 冲击与系统的冲击响应	(104)
第三章 两自由度系统的振动	(113)
§ 3.1 两自由度振动系统的运动微分方程	(113)
§ 3.2 无阻尼系统的自由振动, 自然模态	(116)
§ 3.3 坐标变换与坐标耦合	(123)
§ 3.4 自然坐标	(126)
§ 3.5 拍击现象	(129)
§ 3.6 两自由度系统在谐波激励下的强迫振动	(133)
第四章 多自由度系统振动的基本知识	(142)
§ 4.1 广义坐标	(143)
§ 4.2 线性系统的运动方程及其矩阵表达式	(144)
§ 4.3 线性变换与坐标耦合	(152)
§ 4.4 无阻尼自由振动, 特征值问题	(154)
§ 4.5 模态向量的正交性与展开定理	(160)

§ 4.6	系统对初始激励的响应	(165)
§ 4.7	影响系数,系统机械能与互易定理	(169)
§ 4.8	系统矩阵、动力矩阵	(176)
§ 4.9	有阻尼多自由度系统的自由振动	(179)
§ 4.10	多自由度系统的一般响应	(183)
§ 4.11	多自由度振动系统的几种特殊情况	(188)
第五章	随机激励下的振动	(205)
§ 5.1	引言	(205)
§ 5.2	随机过程的基本概念	(207)
§ 5.3	线性系统对于平稳随机过程的响应	(228)
§ 5.4	随机过程的联合性质	(236)
§ 5.5	多自由度系统对于随机激励的响应	(243)
§ 5.6	窄带随机过程分析	(256)
第六章	振动系统的测试、辨识与建模	(271)
§ 6.1	振动测试传感器	(272)
§ 6.2	激振器	(283)
§ 6.3	振动测试系统	(286)
§ 6.4	模态参数识别	(293)
§ 6.5	物理参数识别与修改	(305)
第七章	振动的抑制与利用	(317)
§ 7.1	抑制振源	(317)
§ 7.2	隔振	(331)
§ 7.3	减振	(338)
§ 7.4	振动的主动控制	(353)
§ 7.5	振动的利用	(358)
	思考题参考答案	(368)

绪 论

振动学科（包括声学）曾经是物理学或力学的一个分支，原属于基础科学。这一学科以力学和数学为基础，以现代测试技术、计算技术为手段，并从系统论、控制论及信息论等新兴学科吸取营养，而发展起来。它面向工程实际，以振动学科的理论、知识和方法来解决工程中日趋复杂的各种动力学问题，作出了富有成效的贡献，且日臻成熟，终于由基础学科发展成为一门工程学科——振动工程。本书将讲述振动工程的基础理论与技术，这里先介绍振动工程的意义、特点和方法。

一、振动工程是发展工业生产和国民经济的需要

在机械工业和其它工业部门存在着难以数计的有害振动问题，这些问题正在招致巨大的损失或者隐藏着可怕的祸根。以振动工程的理论、技术和方法来研究与解决这些问题，是当务之急。

大型、高速回转机械，如汽轮发电机组，因动态失稳而造成的重大恶性事故，在国内外都屡见不鲜。在事故中急剧上升的振动可在几十秒钟之内，使大型发电机组彻底解体，甚至祸及厂房，造成巨大的财产损失和人员伤亡。至于国外某些核电站事故所造成的后果，就不仅仅是经济损失，而且危及社会安定。而事故的原因或征兆之一，也是机组的强烈振动。

大型工程结构因振动而引起的事故，也时有发生。历史上曾经发生过桥梁由于在其上正步行进的队伍的周期激励，发生共

振，而突然崩塌的事故。近代还发生过大型桥梁或冷却塔因“风激振动”而断裂、倒塌的事故。十几万吨级的油轮也会由于振动而在海上折成两段，究其原因，是船体的固有频率设计不妥。

各种商品从生产厂到达消费者手中，往往要经过漫长的运输过程，在此过程中难免存在冲击与振动。为了使商品完好无损地到达消费者手中，一般都需要设计合适的商品包装，以便缓冲防振，保护商品。而因为包装不善，每年所造成的商品损失，也是非常巨大的。

此外，过量的振动和因振动而引起的噪声，还会污染环境，损害人们的健康。

以上仅仅是部分事例。事实上，可以说振动问题普遍地存在于工业生产和工程的各个领域。科学技术发展到今天，对许多工程项目来说，振动分析与控制，已经不再是“画蛇添足”的赘举，而是决定一个项目命运的必要措施。

振动并非只能为害，如能合理运用，亦能造福人类。目前已在很多方面对振动进行有效的利用，诸如振动加工（超声加工）、振动时效、振动筛、振动破碎、振动夯土、振动检测等等。

从上述可知，振动工程作为一门新兴的工程学科，它与工业生产及国民经济紧密相关。对于这一领域的忽视或轻视，会受到自然规律的严厉报复，而自觉地运用这一学科的理论、技术与方法，则可能获得极其显著的技术经济效益与社会效益。

二、振动工程以解决工程中的各种 动态问题为其目的

动态载荷作用于动态系统，就构成一个动态问题。所谓动态载荷即迅速变化的载荷，包括交变载荷与突变载荷。当载荷的频

率成分之一接近或超过系统的某一个自然频率时，就必须作为一个动态问题（而不是一个静态问题）来处理。事实上，工程中的许多问题都必须看作是动态问题。

与静态问题比较起来，动态问题有以下特点：

1. 复杂性

造成动态问题的复杂性的主要原因是其载荷作用的“后效性”与其响应对于过去经历的载荷的“记忆性”。前者指某时刻作用在系统上的载荷不仅只影响系统在该时刻的响应，而且影响系统在此后各时刻的响应；后者指系统在任一时刻的响应不只由该时刻的载荷决定，而是由在该时刻之前系统所经受的载荷的全部历程来决定，好象系统能记住它过去的经历一样。动载荷对系统的作用是首先改变系统在各个时刻的初态，这些受扰的初态按照系统内在的模式，向前运动发展，然后才能决定系统在其后各个时刻的总的响应。由此可见，一个动态系统在受到外加扰动时，其响应并不亦步亦趋地跟踪载荷的变化，而是力图表现出它的个性；而对一个动态系统施加的控制，只有顺应该系统的内在模式，才能收到预期的效果。由于上述特性，使得对一个动态系统的辨识、响应预测或控制，都要比对静态系统复杂得多。

2. 危险性

动态系统可能十分危险。其危险性主要是由两种因素引起的，其一为共振现象，当扰动频率接近系统的自然频率时，微小的载荷可以引起“轩然大波”，在结构中激起比静态响应大很多倍的动态位移响应与应力响应，产生巨大的破坏力；其二为自激振动，在一定的条件下，一个动态系统（例如金属切削机床、轧钢机或飞机等等），可以在没有外加交变激励的情况下，突然振动起来，振幅猛烈上升，而产生巨大的破坏性。例如，机床上如果发生这种振动，便难于正常地进行切削加工，而飞机如果产生这种振动，往往会导致机毁人亡的后果。这种振动即自激振动，又称为“颤振”。它似乎是“无缘无故”地发生的。对其产生机

理的剖析及对其防治都比较困难。

3. 超常性

振动的现象、规律及其防治方法往往都超越人们的生活常识之外，无法以直观的方法来说明和理解，而必须通过严谨的理论分析，才能得以解释或加以预测。振动问题的许多解答当然是在乎道理之中，却往往又出人意料之外。这里举一个很简单的例子，例如，一个工作机械，受到一定频率的扰动，而扰动频率又正好等于机械的自然频率，于是产生强烈的共振，无法正常工作。如果不是基于理论分析，而凭“想当然”，恐怕谁也不敢想象以下的消振方案：在该工作机械上加装上一个子系统，并使此子系统的自然频率也正好等于扰动频率。人们可能“直观”地以为，这样一来，振动将会加倍厉害。但事实是工作机械的振动竟完全被消除了，此即所谓“无阻尼调谐消振器”。振动理论对其工作原理给出了满意的解释。需要看到，振动工程作为一门现代新兴的工程学科，它是先有了比较严谨的理论，然后才发展成工程学科的。在这一点上，它与冶金、建筑等工程学科是不相同的，后者是先有了建立在经验基础上的工程学科，然后才从理论上加以总结和提高。

总而言之，振动工程所处理的动态问题在本质上不同于静态问题，不能归结为静态问题。以静态的观念与方法来看待与处理动态问题是十分危险的。而动态的观念与动态的知识不是自然而然地可以得到的，而必须经过刻苦的学习与钻研才能掌握。

三、振动工程解决工程问题的策略与方法

振动工程在方法上兼采各相关学科之长，而具有以下特点。

1. 全方位地处理振动问题的策略

过去习惯于静态设计，待产品制造出来以后，如果发现在动态特性方面有问题，则再加以动态补救。今天，对于许多工程项

目来说，这种“静态设计-动态补偿”的方法已难于奏效，而必须采取在设计、制造、运行与保养等诸环节分别考虑动态性能的预测、优化、实现、监视与维护的策略，即“全方位地处理振动问题”的策略。

2. 模型化的方法

振动工程处理问题一般都要通过测试与理论分析，建立一定的理论模型。这种理论模型通常是微分方程。精确的理论模型是研究一个振动系统、预测其动态响应的前提。

除了理论模型之外，有时也采用实物模型与模型测试的方法。

3. 优化设计的方法

基于理论模型，采用数字仿真的方法，可以预测系统在各种载荷下的动态响应。如果响应不合要求，可以反过来修改系统的设计参数，再进行预测，再修改（这在计算机上是很容易实现的事）。如此反复迭代，可使系统在指定的载荷下，具有合乎要求的响应或最佳响应，此即优化设计方法。采用这种方法，不仅在设计阶段可以预测系统的动态特性与动态响应，而且可按照对其响应的要求，对设计参数进行修改与优化。

4. 规范与标准

基于实践经验、科学实验和理论分析的结果，制定各种规范与标准，以指导或约束人们的实践，也是振动工程处理实际问题的一种常用方法。

第一篇 基础篇

单自由度与多自由度系统
振动的基础知识·随机激
励下的振动·振动系统的
测试、辨识与建模·振动
的抑制与振动的利用

第一章 单自由度线性系统的自由振动

单自由度线性系统是最简单的振动系统，又是最基本的振动系统。这种系统在振动分析中的重要性，一方面在于很多实际问题都可简化为单自由度线性系统来处理，从而可直接利用对这种系统的研究成果来解决问题；另一方面在于，单自由度系统具有一般振动系统的一些基本特性，实际上，它是对多自由度系统、连续系统、乃至非线性系统进行振动分析的基础。

系统仅受到初始条件（初始位移、初始速度）的激励而引起的振动称为自由振动；系统在持续的外作用力激励下的振动称为强迫振动。自由振动问题虽然比强迫振动问题单纯，但自由振动反映了系统内部结构的所有信息，是研究强迫振动的基础。所以，本章首先研究单自由度系统的自由振动，下一章将在此基础上研究单自由度系统的强迫振动。

本章主要介绍振动系统的简化模型，单自由度振动系统的运动微分方程，单自由度无阻尼系统的自由振动和单自由度有阻尼系统的自由振动。

§ 1.1 振动系统的简化及其模型

任何一个实际的振动系统都是无限复杂的，为了能对之进行分析，一定要加以简化，并在简化的基础上建立合适的力学模型。振动系统的力学模型是由三种理想化的元件组成的，它们是：质块、阻尼器和弹簧，由它们所组成的单自由度系统如图 1.1-1 所示。图中， m 表示质块， c 表示阻尼器， k 表示弹簧。实际

上，人们并不一定能在实际的振动系统中直接找到图1.1-1所示的理想元件。图1.1-1是对实际物理系统的一种抽象和简化，这是振动分析的第一步工作。需要指出的是，系统的简化取决于所

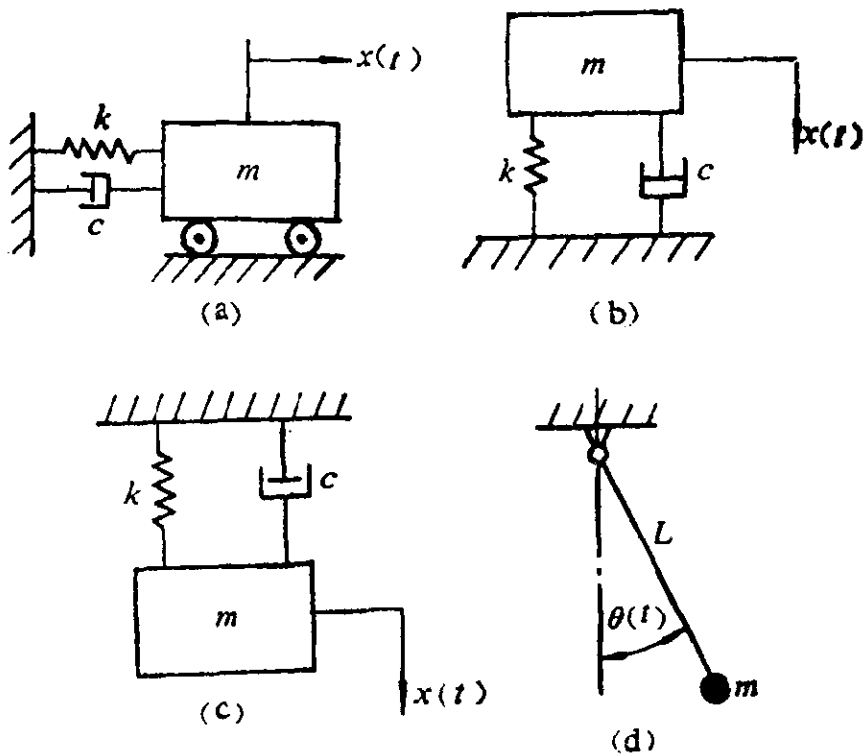


图 1.1-1

考虑问题的复杂程度与所需要的计算精度。一般来讲，所考虑的问题越复杂，要求的计算精度越高，所采用模型的复杂程度也就越高。下面介绍一些单自由度简化模型的实例。

1.1.1 单自由度系统的模型

在简化模型中，振动体的位置或形状只需用一个独立坐标来描述的系统称为单自由度系统，其模型如图1.1-1所示。

图 1.1-2 表示机器与基础的振动。由于机器及其混凝土基础的变形相对于土壤要小得多，故可视机器及其基础为刚体，其质量用 m 来表示。又由于参与振动的土壤质量较机器及其基础要小

得多，且土壤较软，具有能耗作用，可视为弹簧和阻尼器，则图1.1-2所示的系统即可简化为图1.1-1(b)所示的单自由度系统。显然，这种简化的结果只能用于研究机器及其基础在垂直方向上的整机振动。又如图1.1-3所示的安装在弹性梁上的电机与图1.1-4所示的安装在防振垫（橡皮、木块等）上的电机，若只研究电机在垂直方向上的振动，也可简化为图1.1-1(b)所示的单自由度系统。

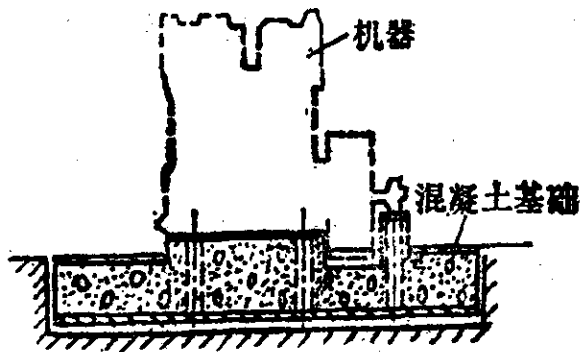


图 1.1-2

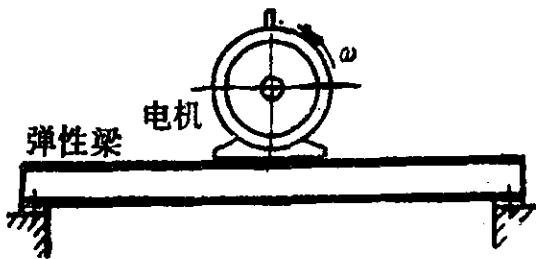


图 1.1-3

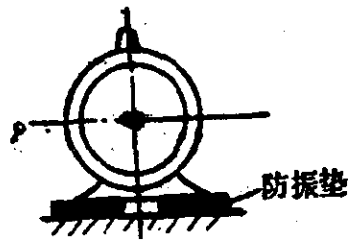


图 1.1-4

图1.1-5所示的连杆，当研究连杆的角振动 $\theta(t)$ 时，若将连杆的分布质量简化为其质心在 c 处的集中质量 m ，则可简化为图

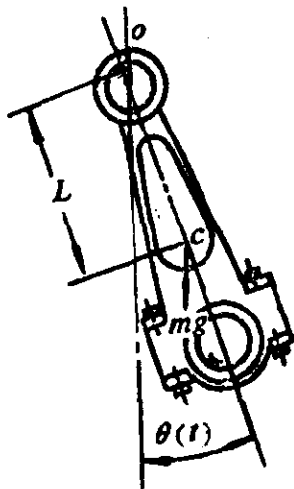


图 1.1-5

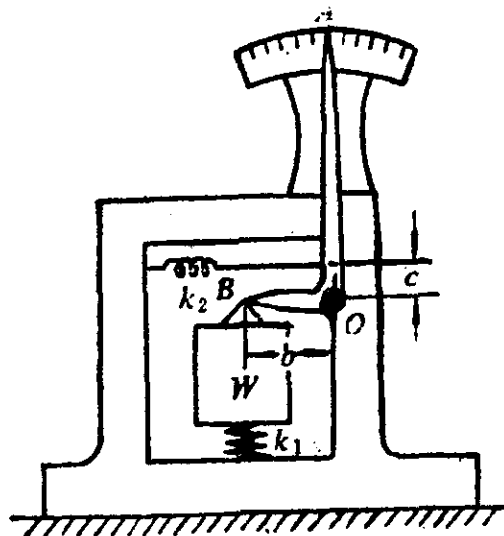


图 1.1-6

1.1-1(d)所示的单摆系统。又如图1.1-6所示仪表指针的振动，也可简化为一个附有弹簧的单摆系统。

图1.1-7所示飞轮的扭转振动，由于飞轮的惯性矩相对于轴的惯性矩要大得多，可将轴简化为一扭转弹簧，从而得到单自由度扭振系统，该系统以角度 θ 为坐标，又称为角振动系统。

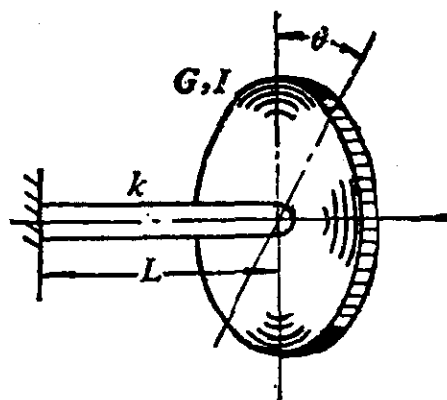


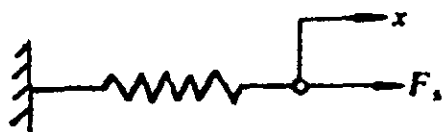
图 1.1-7

下面介绍组成振动系统的各种理想元件的意义与性质。

1.1.2 弹性元件

1. 弹性元件的意义与性质

在振动系统中，弹性元件（或弹簧）对于外力作用的响应，表现为一定的位移或变形。图1.1-8(a)为弹性元件的示意图。弹簧所受外力 F_s 是位移 x 的函数，

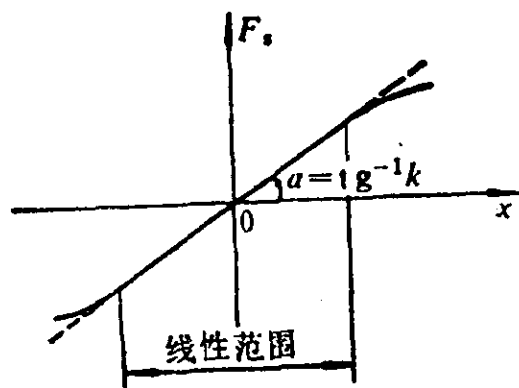


(a)

即有

$$F_s = f(x), \quad (1.1-1)$$

其关系如图1.1-8(b)所示。 F_s 在数量上等于弹簧的弹性恢复力，但方向相反。在一定的范围（称为线性范围）内， F_s 是 x 的线性函数，即



(b)

图 1.1-8

$$F_s = kx \quad (1.1-2)$$

式中， k 称为弹簧刚度，其量纲为(力/长度)，通常取单位为 N/m ， N/cm ，或 N/mm 。显然，

由图1.1-8(b)，有

$$k = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.1-3)$$

即弹簧刚度 k 在数值上等于使弹簧产生单位位移所需施加的力。对于弹性元件需要指出以下几点：

(1) 通常假定弹簧是没有质量的。而实际上，物理系统中的弹簧总是具有质量的，在处理实际问题时，若弹簧质量相对较小，则可忽略不计；否则需对弹簧质量作专门处理，或采用连续模型。后续章节会述及这些问题。

(2) (1.1-2)、(1.1-3)式所示关系，是对弹簧的一种线性化处理。工程实践表明，大多数振动系统的振幅不会超出其弹性元件的线性范围，因而，这种线性化处理符合一般机械系统的实际情况。

(3) 对于角振动的系统，其弹簧为扭转弹簧，其刚度 k 等于使弹簧产生单位角位移所需施加的力矩，其量纲为 (ML^2T^{-2}) ，通常取单位为 $N \cdot m / \text{rad}$ 。例如，图1.1-7所示的轴常可视为扭转弹簧。与(1.1-2)式相似，在线性范围内，扭簧所承受的外力矩 M 、转角 θ 与扭转刚度 k 的关系为

$$M = k\theta. \quad (1.1-4)$$

(4) 实际工程结构中的许多构件，在一定的受力范围内都具有作用力与变形之间的线性关系，因此都可作为线性弹性元件处理。例如，图1.1-9所示的拉杆，根据材料力学，拉力 P 与杆的变形 δ 之间具有如下关系

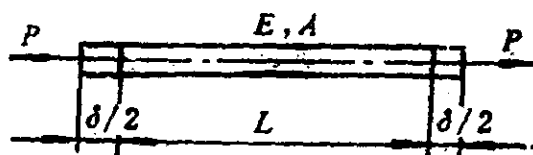


图 1.1-9

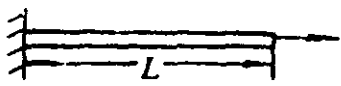

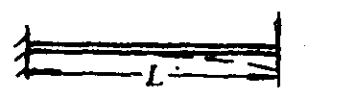
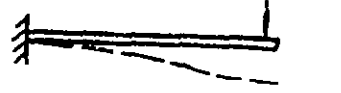
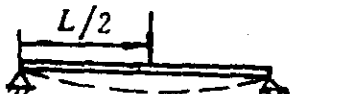
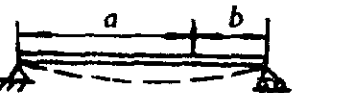
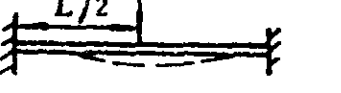
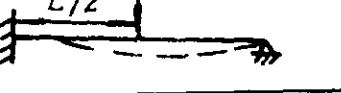


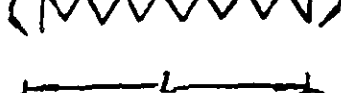

$$\delta = \frac{PL}{EA},$$

式中， L 为杆长， E 为材料的弹性模量， A 为杆的截面积。显然，若设 $k = EA/L$ ，则有

$$P = k\delta,$$

上式与(1.1-2)式的意义和形式完全一致。因此，拉杆相当于一个刚度为 $k = EA/L$ 的线性弹簧。又如图1.1-7所示扭振系统，根据材料力学，扭转力矩 M 与角位移 θ 之间的关系为

表1.1-1 简单元件的刚度

	简 图	说 明	刚 度 k
拉压刚度		等直杆， E ——材料的弹性模量； A ——杆的截面积。 圆柱形密圈弹簧； G ——材料的剪切弹性模量； d ——弹簧丝截面直径； R ——圆柱形截面半径； n ——圈数。	$\frac{EA}{L}$
			$\frac{Gd^4}{64nR^3}$
弯曲刚度		悬臂梁， I ——抗弯截面惯性矩。	$\frac{3EI}{L^3}$
		悬臂梁，自由端无转角	$\frac{12EI}{L^3}$
		简支梁	$\frac{48EI}{L^3}$
		简支梁	$\frac{3EIL}{a^2b^2}$ ， $L=a+b$
		两端固支梁	$\frac{192EI}{L^3}$
		一端固定，一端简支梁	$\frac{768EI}{L^3}$
扭转刚度		卷簧， L ——卷簧长度。	$\frac{EI}{L}$
		圆柱形受扭转密圈弹簧	$\frac{Ed^4}{128nR}$
		圆柱形受弯曲密圈弹簧	$\frac{Ed^4}{64nR} \cdot \frac{1}{1 + \frac{E}{2G}}$
		等直杆， J ——杆的极惯性矩	$\frac{GJ}{L}$

$$\theta = \frac{ML}{GJ},$$

式中， L 为轴的长度， G 为轴的材料剪切弹性模量， J 为轴的截面极惯性矩。显然，如设 $k = GJ/L$ ，则有式(1.1-4)所示关系。因此，一段轴相当于扭转刚度为 $k = GJ/L$ 的一个扭簧。表1.1-1示出了一些简单元件的刚度。实际机械系统中的弹性元件是多种多样的，例如，橡皮、木材、土壤、压缩空气等都经常作为弹性元件处理。

(5) 从能量的角度来看，弹性元件不消耗能量而是以势能的方式贮存能量。

2. 等效刚度

机械结构中的弹性元件往往具有比较复杂的组合形式，这时可用一“等效弹簧”来取代整个组合弹簧，以简化分析。等效弹簧的刚度称为“等效刚度”，记为 $k_{e,q}$ ，必须等于组合弹簧系统的刚度。

图1.1-10示出了弹簧的并、串联组合方式，其等效刚度的计算方法如下：

对于并联弹簧，若设弹簧 k_1 、 k_2 所受到的力分别为

$F_{s,1}$ 、 $F_{s,2}$ ，则有 $F_{s,1} = k_1(x_2 - x_1)$ ， $F_{s,2} = k_2(x_2 - x_1)$ 。由于总的作用力 F_s 是 $F_{s,1}$ 与 $F_{s,2}$ 之和，故有

$$F_s = F_{s,1} + F_{s,2} = (k_1 + k_2)(x_2 - x_1) = k_{e,q}(x_2 - x_1),$$

式中，

$$k_{e,q} = k_1 + k_2. \quad (1.1-5)$$

将这一结论推广，若将 n 个刚度分别为 k_i ($i = 1, 2, \dots, n$)的弹簧

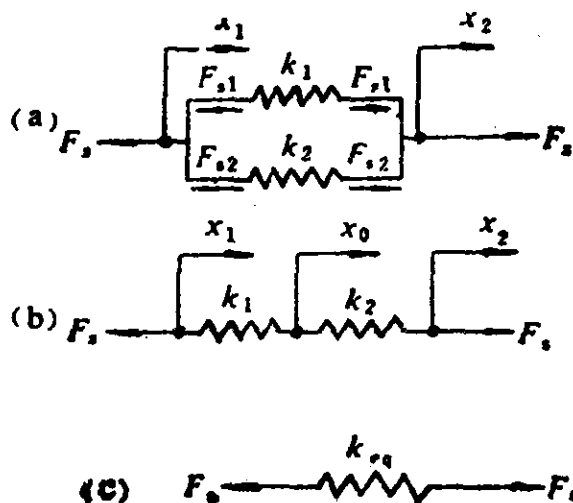


图 1.1-10

进行并联，则其等效刚度为

$$k_{\bullet q} = \sum_{i=1}^n k_i. \quad (1.1-6)$$

上式中如果 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ ，则有

$$k_{\bullet q} = nk. \quad (1.1-7)$$

由上式可见，并联弹簧的等效刚度是各弹簧刚度的总和，即并联弹簧较各组成弹簧“硬”。

对于图1.1-10(b)所示串联弹簧，由于在整个串联长度上作用力 F_s 处处相等，即

$$F_s = k_1(x_0 - x_1), \quad F_s = k_2(x_2 - x_0),$$

将以上两式联立，消去 x_0 ，得到

$$F_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} (x_2 - x_1) = k_{\bullet q} (x_2 - x_1),$$

式中，

$$k_{\bullet q} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad (1.1-8)$$

或

$$\frac{1}{k_{\bullet q}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (1.1-9)$$

将上式推广，若将 n 个刚度分别为 k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的弹簧进行串联，则串联弹簧的等效刚度为

$$\frac{1}{k_{\bullet q}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}. \quad (1.1-10)$$

上式中若 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ ，则有

$$k_{\bullet q} = k/n. \quad (1.1-11)$$

由上式可见，串联弹簧的等效刚度比原来各弹簧的刚度都要小，即串联弹簧较其任何一个组成弹簧“软”。

需要指出，确定弹性元件的组合方式是并联还是串联，关键在于看它们是“共位移”还是“共力”。并联方式中各弹簧是

“共位移”的，即各弹簧端部的位移相等；而串联方式中各弹簧是“共力”的，即各弹簧所受到的作用力相等。只要正确地确定了弹性元件的组合方式，按

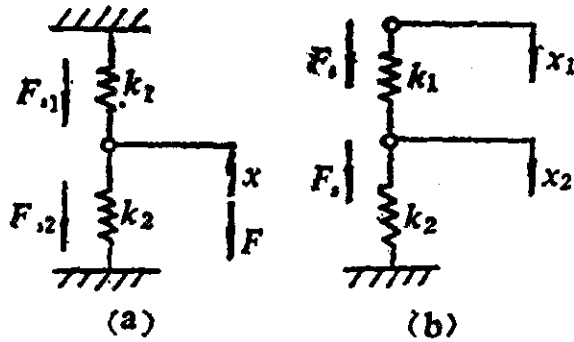


图 1.1-11

(1.1-6)、(1.1-10)式计算等效刚度是并不困难的。例如图1.1-11所示的两种组合方式中，图(a)中的弹簧 k_1 、 k_2 的位移 x 相等，是“共位移”的，因此是并联；而图(b)中弹簧 k_1 与弹簧 k_2 中的

弹性力 F 相等，即是“共力”的，因此，是串联。

例1.1 图1.1-12是利用电动式激振器测某试件固有频率的示意图。试件简化为弹簧 k_1 和质量 m_1 ，试验时激振器顶杆与试件 m_1 刚性联接，激振器的可动部分质量为 m_2 ，弹簧刚度为 k_2 ，试计算系统的等效刚度。

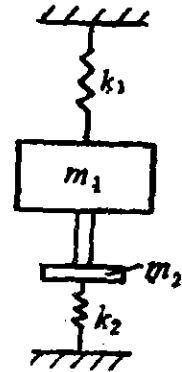


图 1.1-12

解：由图1.1-12显见， m_1 与 m_2 为刚性联接，该系统与图1.1-11(a)中系统是一致的，弹簧 k_1 、 k_2 是“共位移”的，为并联弹簧，由(1.1-5)式得系统的等效刚度为

$$k_{e.g} = k_1 + k_2.$$

例1.2 确定图1.1-13所示混联弹簧的等效刚度。

解：显然， k_1 、 k_2 为并联， k_3 再与之串联，由(1.1-5)、(1.1-9)式有

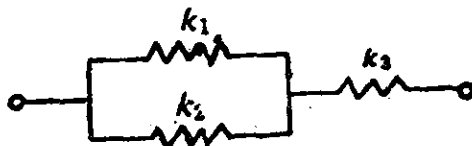


图 1.1-13

$$\frac{1}{k_{e.g}} = \frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_3}$$

化简得:

$$k_{\text{eq}} = \frac{k_3(k_1 + k_2)}{k_1 + k_2 + k_3}$$

例1.3 确定图1.1-14(a)所示阶梯轴的等效扭转刚度。

解: 设 θ_1 、 θ_2 分别为两段轴的右端角位移, 由于扭矩 M 沿轴向不变, 根据材料力学有

$$\theta_1 = \frac{ML_1}{G_1J_1}, \quad \theta_2 - \theta_1 = \frac{ML_2}{G_2J_2}$$

由上两式化简得圆盘的角位移 θ_2 为:

$$\theta_2 = M \left(\frac{L_1}{G_1J_1} + \frac{L_2}{G_2J_2} \right)$$

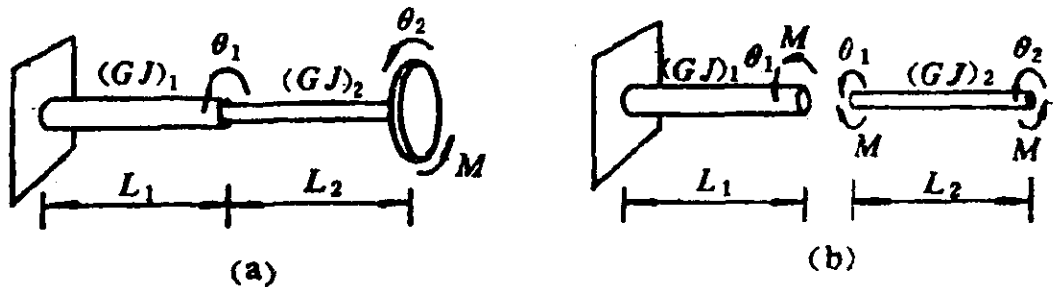


图 1.1-14

显然, 阶梯轴的等效扭转刚度即为:

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{L_1}{G_1J_1} + \frac{L_2}{G_2J_2}$$

上式表明, 图示阶梯轴相当于串联的扭转弹簧。

1.1.3 阻尼元件

振动系统的阻尼特性及阻尼模型乃是振动分析中最困难的问题之一, 也是当代振动研究中最活跃的方向之一。

1. 阻尼元件的意义与性质

在振动系统中, 阻尼元件(或阻尼器)对于外力作用的响应, 表现为其端点的一定的移动速度。图1.1-15(a)为阻尼器的示意图。它所受到的外力 F_d (或者其产生的阻尼力 $-F_d$), 是

振动速度 \dot{x} 的函数, 即

$$F_d = f(\dot{x}). \quad (1.1-12)$$

对于线性阻尼器, F_d 是 \dot{x} 的线性函数, 如图1.1-15(b)所示,

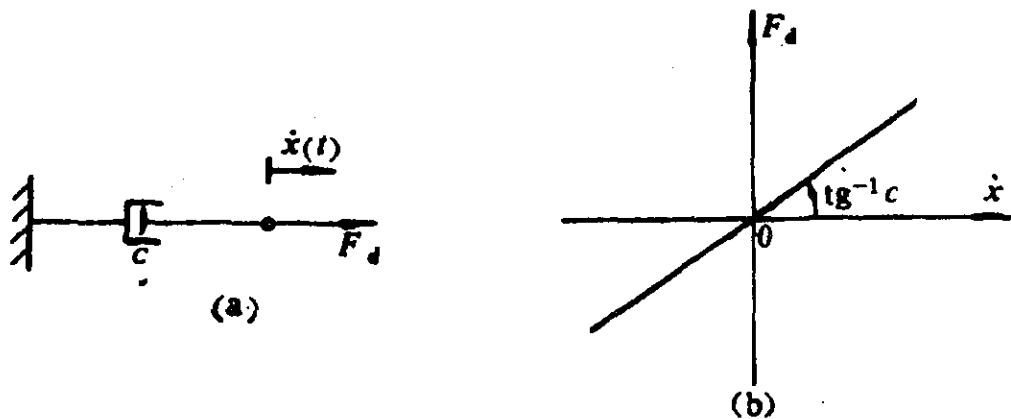


图 1.1-15

$$F_d = c \dot{x}, \quad (1.1-13)$$

式中, c 称为阻尼系数, 其量纲为 MT^{-1} , 通常取单位为 $N \cdot s/m$, $N \cdot s/cm$, 或 $N \cdot s/mm$. 阻尼系数 c 是使阻尼器产生单位速度所需施加的力. 对于阻尼元件需要指出以下几点:

(1) 通常假定阻尼器的质量是可以忽略不计的.

(2) 对于角振动系统, 其阻尼元件为扭转阻尼器, 其阻尼系

数 c 是产生单位角速度 $\dot{\theta}$ 所需施加的力矩, 其量纲为 ML^2T^{-1} , 通常取单位为 $N \cdot m \cdot s/rad$, 且仍有与式(1.1-13)类似的关系,

$$M_d = c \dot{\theta}, \quad (1.1-14)$$

式中, M_d 为阻尼力矩.

(3) 与弹性元件不同的是, 阻尼元件是消耗能量的, 它以热能、声能等方式耗散系统的机械能.

2. 非粘性阻尼

上述与速度成正比的阻尼, 称为粘性(Viscous)阻尼, 又称为线性阻尼. 采用线性阻尼的模型使得振动分析的问题大为简化. 工程实际中还有许多其它性质的阻尼, 统称为非粘性阻尼.

在处理这类问题时，通常将之折算成等效的粘性阻尼系数 c_{eq} ，其折算的原则是：一个振动周期内由非粘性阻尼所消耗的能量等于等效粘性阻尼所消耗的能量。关于等效粘性阻尼系数 c_{eq} 的计算，将在第二章中介绍。下面介绍几种常见的非粘性阻尼。

(1) 库仑(coulomb)阻尼

库仑阻尼亦称为干摩擦阻尼，如图1.1-16所示。振动时，质量 m 与摩擦系数为 μ 的表面间产生

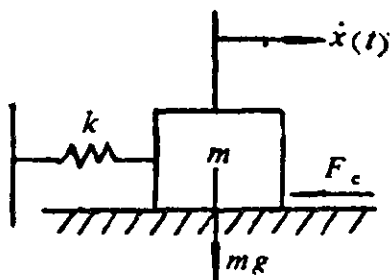


图 1.1-16

库仑摩擦力 $F_c = \mu mg$ ， F_c 始终与运动速度 \dot{x} 的方向相反而大小保持为常值，即：

$$F_c = -\mu mg \cdot \text{sgn}(\dot{x}), \quad (1.1-15)$$

其中， sgn 为符号函数，这里定义为

$$\text{sgn}(\dot{x}) = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|}. \quad (1.1-16)$$

须注意，当 $\dot{x}(t) = 0$ 时，库仑阻尼力是不定的，它取决于合外力的大小，而方向与之相反。

(2) 流体阻尼

流体阻尼是当物体以较大速度在粘性较小的流体（如空气，液体）中运动时，由流体介质所产生的阻尼。流体阻尼力 F_f 始终与运动速度 $\dot{x}(t)$ 方向相反，而其大小与速度平方成正比，即：

$$F_f = -\gamma \dot{x}^2 \text{sgn}(\dot{x}), \quad (1.1-17)$$

式中， γ 为常数。

(3) 结构阻尼

由材料内部摩擦所产生的阻尼称为材料阻尼；由结构各部件连接面之间相对滑动而产生的阻尼称为滑移阻尼，两者统称为结

构阻尼。试验表明，对材料反复加载和卸载，其应力-应变曲线

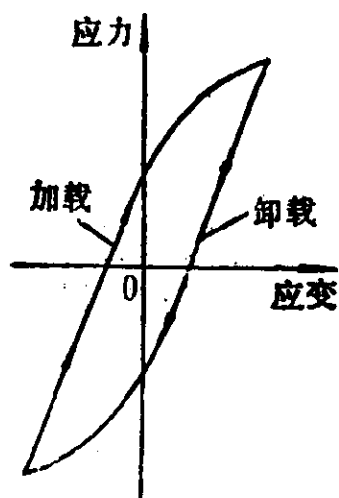


图 1.1-17

会成为一个滞后回线，如图 1.1-17所示。此回线所围的面积表示一个循环中单位体积的材料所消耗的能量，这部分能量以热能的形式耗散掉，从而对结构的振动产生阻尼。因此，这种阻尼又称为滞后阻尼。大量试验指出，对于大多数结构金属，材料阻力在一个周期内所消耗的能量 ΔE_s 与振幅的平方成正比，而在

相当大的范围内与振动频率无关，即有

$$\Delta E_s = \alpha |x|^2, \quad (1.1-18)$$

其中， α 是由材料性质所决定的常数， $|x|$ 为振幅。

1.1.4 质量元件

1. 质量元件的意义与性质

在振动系统中，质量元件（或质块）对于外力作用的响应，表现为一定的加速度，如图 1.1-18所示。根据牛顿(Newton)定理，质块所受外力 F_m （或惯性力 $-F_m$ ）与加速度 $\ddot{x}(t)$ 间的关系为：

$$F_m = m \ddot{x}(t), \quad (1.1-19)$$

式中， m 称为质量块的质量，其量纲为 M ，通常采用的单位为 kg 、 $N \cdot s^2/m$ 或 $N \cdot s^2/mm$ 。对于质量元件，需指出以下几点：

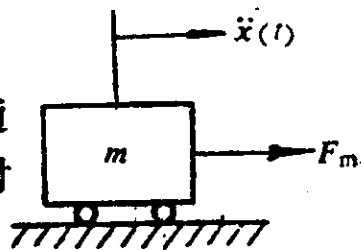


图 1.1-18

(1) 通常假定质量元件是刚体（即不具有弹性特征），不消耗能量（即不具有阻尼特性）。

(2) 对于角振动系统，其质量元件以其相对于支点的转动惯

量 I 来描述.力矩 M_m 与角加速度 $\ddot{\theta}(t)$ 间仍具有类似于式(1.1-19)的关系:

$$M_m = I \ddot{\theta}(t). \quad (1.1-20)$$

综上所述,在对实际机械结构进行振动分析时,如果是突出某一部分的质量而忽略其弹性与阻尼,就得到没有弹性和阻尼的“质块”,同样可得到没有阻尼和质量的“弹簧”以及没有质量与弹性的阻尼器等各种理想化的元件.

§ 1.2 单自由度线性系统的运动微分方程

1.2.1 单自由度线性系统运动微分方程的建立与特点

1. 运动微分方程与系统特性

图1.2-1(a)是一个典型的单自由度振动系统,质块 m 直接受到外界激励力 $F(t)$ 的作用.对质块 m 取脱离体,如图(b)所示,以 $x(t)$ 表示以 m 的静平衡位置为起点的位移, $F_s(t)$ 表示弹簧作用在 m 上的弹性恢复力, $F_d(t)$ 则表示阻尼器作用在 m 上的阻尼力,按牛顿定律有:

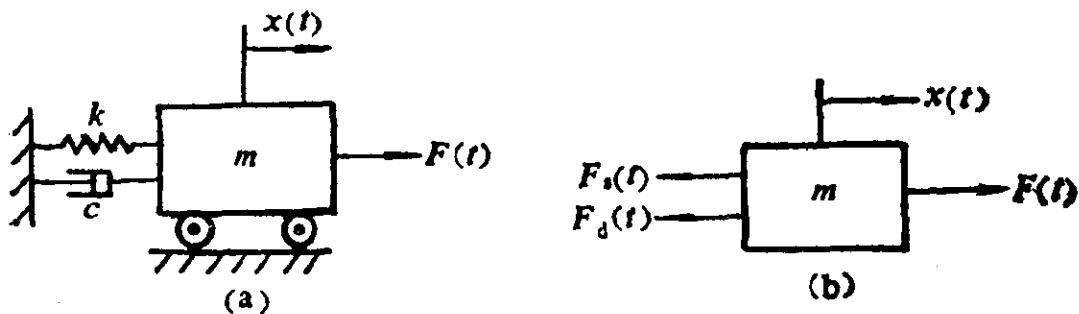


图 1.2-1

$$m \ddot{x}(t) = F(t) - F_d(t) - F_s(t).$$

对于线性系统，以(1.1-13)、(1.1-2)式代入上式并整理，得

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \quad (1.2-1)$$

即为单自由度线性系统的运动微分方程。从数学上看，这是一个二阶常系数、非齐次线性常微分方程。方程的左边完全由系统参数 m 、 c 与 k 所决定，反映了振动系统本身的固有特性；方程的右边则是外加的驱动力 $F(t)$ ，反映了振动系统的输入特性。微分方程(1.2-1)实质上是提出了这样一个问题：由 m 、 c 、 k 所代表的单自由度线性系统在激励力 $F(t)$ 作用下，会具有什么样的运动或响应 $x(t)$ ！

现在再分析图1.2-2所示的另一个单自由度振动系统。这时，外界对振动系统的激励是左端支承点的位移 $y(t)$ 。对质量 m 取脱离体，以 $x(t)$ 表示 m 的位移，按牛顿定理有

$$m\ddot{x}(t) = -F_d(t) - F_s(t),$$

但此时， $F_d = c(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$ ， $F_s = k(x(t) - y(t))$ ，代入上式并整理，得：

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{y}(t) + ky(t). \quad (1.2-2)$$

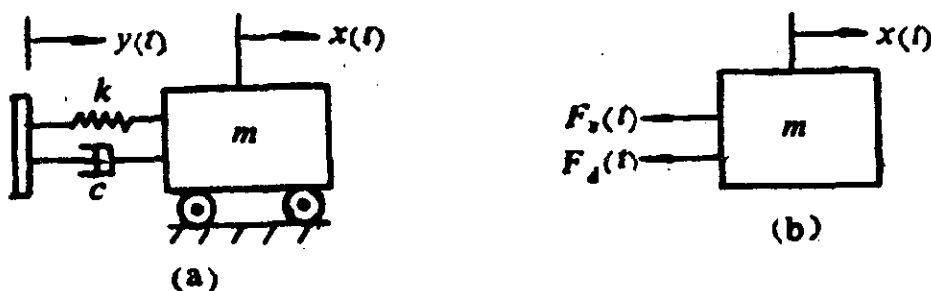


图 1.2-2

将上式与(1.2-1)式比较，两者的差别在于方程的右边，显然，方程的右边不仅描述了振动系统的输入特性，还描述了系统与输入的相互联系方式。(1.2-1)式中等号右边为 $F(t)$ ，表示外界激励力 $F(t)$ 直接作用在质量 m 上，而(1.2-2)式中等号右边为 $c\dot{y}(t) + ky(t)$ ，表示外界激励位移 $y(t)$ 作用在阻尼器 c 和弹簧

k 上，而不是直接作用在质量 m 上。

上述分析表明，振动系统的运动微分方程全面描述了系统的动态特性；方程左边描述了系统本身所固有的、与外界环境无关的系统特性，它完全由系统参数 m 、 c 、 k 所决定；方程右边描述了系统的输入（激励）特性以及系统与输入间的相互联系方式，它由系统参数和输入特性两部分所决定。

2. 线性系统的运动微分方程中可略去恒力及其引起的静位移

对于图1.2-1、图1.2-2所示的两系统，其弹簧与阻力器是水平放置的，无重力的影响，系统的平衡位置与弹簧未伸长时的位置是一致的。现讨论弹簧和阻尼器垂直放置的情况，如图1.2-3(a)、(b)所示。弹簧未变形时质块的位置为图中虚线所示。在重力作用下，弹簧受到压缩或拉伸，其静变形量 δ_{st} 为：

$$\delta_{st} = mg/k,$$

其中， g 为重力加速度。若从弹簧未变形位置计算位移，由牛顿定律有

$$m[\ddot{x}(t) - \ddot{\delta}_{st}] = F(t) - mg - c[\dot{x}(t) - \dot{\delta}_{st}] - k(x(t) - \delta_{st}),$$

式中， $x(t)$ 是从弹簧的静平衡位置计算的位移。考虑到 $\delta_{st} = mg/k$ 的关系，且 $\dot{\delta}_{st} = \ddot{\delta}_{st} = 0$ ，则上式化简为：

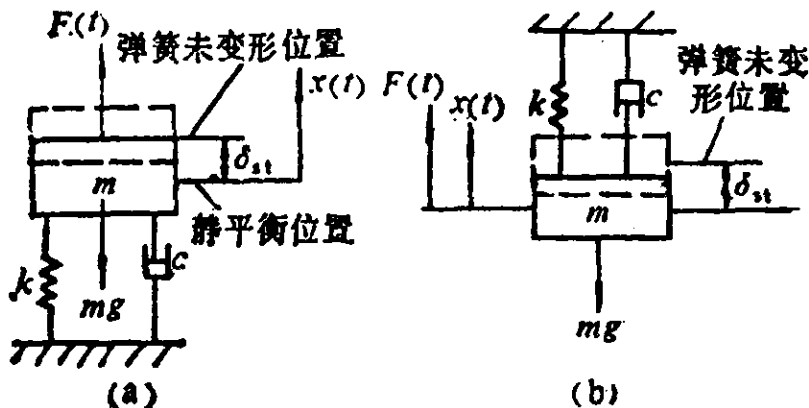


图 1.2-3

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F(t).$$

显然，上式与(1.2-1)式完全一致。这表明，在振动分析时，作用在线性系统上的恒力及其引起的静态位移可同时略去不计。

1.2.2 振动系统线性化处理的方法

图1.2-4表示一台机器放在一隔振垫上。将机器简化为一刚性质块，设其质量为 m 。其在铅垂方向的位移为 $x(t)$ ，从静平衡位置开始计算质块的位移。作用在质块上的外力记为 $F(t)$ ，而隔振垫对机器的支反力记为 $N(t)$ 。取机器为脱离体，按牛顿定律，有

$$m \ddot{x}(t) = F(t) - N(t). \quad (1.2-3)$$

一般而言，垫子的支反力 $N(t)$ 与机器移动的位移 $x(t)$ 及速度 $\dot{x}(t)$ 有关，即

$$N = f(x, \dot{x}), \quad (1.2-4)$$

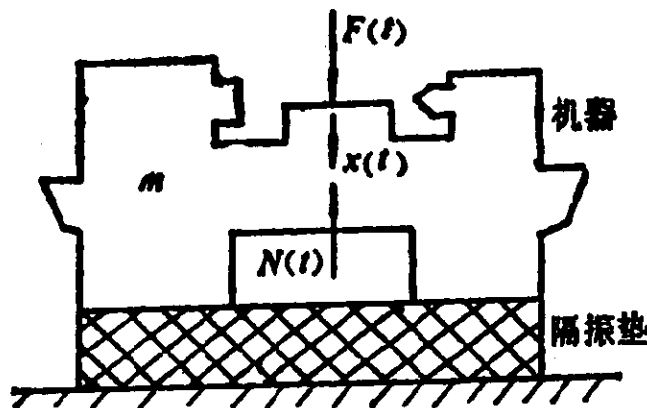


图 1.2-4

此式一般为非线性函数，但当 x 、 \dot{x} 均较小时，可按Taylor级数展开，而仅取其一次项，

$$N \approx f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial \dot{x}} \dot{x}, \quad (1.2-5)$$

式中,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{x=0, \dot{x}=0}$$

等等, 本书后面还将采用这种记法, 而不再说明. 式中 $f(0,0)$ 表示一恒力, 鉴于前述理由, 可将之撇开. 记

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = k, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial \dot{x}} = c. \quad (1.2-6)$$

可将(1.2-5)式写成

$$N \approx kx + c\dot{x}.$$

此式右边两项分别表示一个弹性力与一个粘性阻力. 代回(1.2-3)式, 即得到运动方程

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t).$$

此即前面已经得到的方程(1.2-1). 而系统的模型就成为图1.2-3(a)所示的由质块 m , 阻尼器 c 和弹簧 k 组成的单自由度系统. 以上推导过程表明, 弹簧刚度 k 与阻尼系数 c 实质上是 Taylor 展开式中相应的一阶导数项的数值. 这表明前述运动微分方程是对振动系统的一种线性近似. 线性化处理简化了振动分析, 而且, 对于许多工程问题, 线性化处理也足以满足精度要求.

例1.4 对于图1.1-1(d)所示单摆, 试导出其运动微分方程.

解: 如图1.2-5所示, 对支点 o 列力矩平衡方程有

$$mL^2 \ddot{\theta}(t) + mgL \sin\theta(t) = 0, \quad (a)$$

为对上式进行线性化处理, 我们考虑到, 当 $\theta(t)$ 较小时, 有 $\sin\theta(t) \approx \theta(t)$, 则得线性化的运动微分方程:

$$L \ddot{\theta}(t) + g\theta(t) = 0. \quad (b)$$

例1.5 一个质量为 m 的均匀半圆柱体在水平面上作无滑动的往复滚动, 如图1.2-6所示. 设圆柱体半径为 R , 重心在 c 点, $oc = r$, 物体对重心的回转半径为 I , 试导出其运动微分方程.

解：设半圆柱体的角位移为 $\theta(t)$ ，且该瞬时与水平面的接触点为 b ，对 b 点取矩有

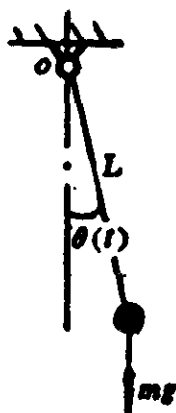


图 1.2-5

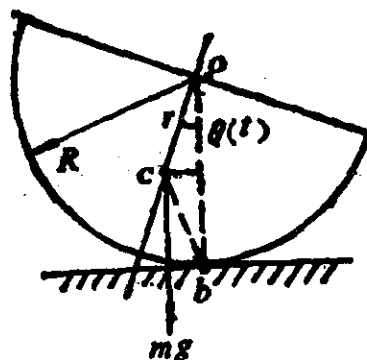


图 1.2-6

$$I_b \ddot{\theta}(t) + M_b = 0, \quad (a)$$

式中， I_b 为半圆柱体对 b 点的转动惯量， M_b 为重力产生的恢复力矩，由理论力学，

$$I_b = I_c + m\overline{bc}^2 = m(l^2 + \overline{bc}^2), \quad (b)$$

其中， \overline{bc}^2 按余弦定理为：

$$\overline{bc}^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta(t), \quad (c)$$

而

$$M_b = mgr\sin\theta(t), \quad (d)$$

将式(b)、(c)、(d)代入式(a)整理得运动微分方程：

$$m(l^2 + r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta(t)) \ddot{\theta}(t) + mgr\sin\theta(t) = 0. \quad (e)$$

再对式(e)进行线性化处理，考虑到对于微小振动有： $\cos\theta(t) \approx 1$ ， $\sin\theta(t) \approx \theta(t)$ ，从而得线性化的运动微分方程为：

$$[l^2 + (R-r)^2] \ddot{\theta}(t) + gr\theta(t) = 0. \quad (f)$$

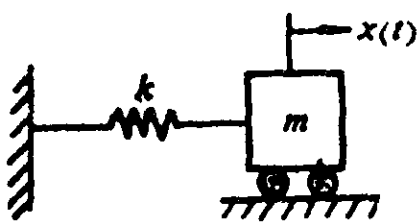
§ 1.3 无阻尼系统的自由振动

对于(1.2-1)式所示的单自由度系统的运动微分方程，当

$F(t) = 0$ 时，表示外界对系统没有持续的激励作用。但此时系统仍然可以在初速度或初位移的作用下发生振动。这种振动称为自由振动。 $c = 0$ 时，称为无阻尼系统，以下将首先讨论无阻尼系统的自由振动。

1.3.1 无阻尼系统的自由振动

图1.3-1为单自由度无阻尼的自由振动系统。由(1.2-1)式，



当 $c = 0$ 、 $F(t) = 0$ 时，其运动微分方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (1.3-1)$$

图 1.3-1

或
式中，

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0, \quad (1.3-2)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.3-3)$$

式(1.3-1)或(1.3-2)是一个二阶常系数的齐次线性微分方程。其通解为

$$x(t) = X_1 \cos \omega_n t + X_2 \sin \omega_n t, \quad (1.3-4)$$

此式表明 ω_n 正是该系统自由振动的角频率，故

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.3-5)$$

称为系统的无阻尼自然频率，其单位为Hz或1/s，意义为每秒中的振动次数，在不引起混淆的情况下，本书也称 ω_n 为系统的自然频率。

将(1.3-1)、(1.3-2)式与例1.4中(b)式，例1.5中(f)式比较，可见单摆与半圆薄壳体都是无阻尼的自由振动系统，其自然频率分别为 $\omega_n = \sqrt{g/L}$ 与 $\omega_n = \sqrt{gr/(e^2 + (R-r)^2)}$ 。

(1.3-4)式中, X_1 、 X_2 是由初始条件确定的常数, 若记初位移为 $x(0) = x_0$, 初速度为 $\dot{x}(0) = v_0$, 代入(1.3-4)式, 易求出

$$X_1 = x_0, \quad X_2 = v_0/\omega_n, \quad (1.3-6)$$

代入(1.3-4)式得:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t. \quad (1.3-7)$$

上式也可改写为

$$x(t) = X \cos(\omega_n t - \psi), \quad (1.3-8)$$

式中, X 称为振幅, ψ 称为初相角, 且有

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \psi = \text{tg}^{-1} \frac{v_0}{\omega_n x_0}. \quad (1.3-9)$$

分析上述各式, 可得到无阻尼自由振动的一些很重要的特性:

(1) (1.3-7)、(1.3-8)式表明, 单自由度无阻尼系统的自由振动是以正弦或余弦函数, 或统称为谐波函数表示的, 故称为简谐振动, 这种系统又被称为谐振子。

(2) 自由振动的角频率即系统的自然频率 $\omega_n = \sqrt{k/m}$, 仅由系统本身的参数所确定, 而与外界激励、初始条件等均无关。这说明自由振动显示了系统内在的特性。

(3) 无阻尼自由振动的周期为

$$T = 1/f_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.3-10)$$

即线性系统自由振动的周期也仅由其本身的参数决定, 而与初始条件及振幅的大小无关。这种现象称为谐振子振动的“等时性”。

(4) 自由振动的振幅 X 和初相角 ψ 由初始条件所确定。

(5) (1.3-8)式表明, 单自由度无阻尼系统的自由振动是等幅振动, 这意味着系统一旦受到初始激励就将按振幅 X 始终振动

下去。这显然是一种理想情况。实际上，当一个系统的阻力很小，而需考察的振动的的时间间隔又相当短时，阻尼的作用尚不明显，可近似地作为谐振子处理。而且，技术上还可采用反馈的方法使一个系统的总阻尼为零而成为谐振子，以得到稳定的等幅振动，这一点，将在第十三章讲述。

1.3.2 简谐振动的旋转向量表示法

上一小节表明，谐振子振动的的时间历程是时间的谐波函数，如(1.3-7)，(1.3-8)式所示。这里我们来说明沿时间轴展开的谐波函数与平面上的旋转向量之间存在着严格的对应关系，因而可以以平面上的旋转向量来直观地表示简谐振动并以旋转向量的合成来表示简谐振动的和。

图1.3-2(a)表示一旋转向量 X ，其模为 X ，以角速度 ω_n 沿逆时针方向旋转，其初始转角为 $-\psi$ 。易知在任一时刻 t ， X 与图(a)中铅垂轴(x 轴)的夹角为 $(\omega_n t - \psi)$ ，而 X 在 x 轴上的投影为 $x(t) = X \cos(\omega_n t - \psi)$ ，如图1.3-2(b)所示，而这正好是(1.3-8)式所表示的简谐振动。因此我们说旋转向量 X 与简谐振动 $x(t)$ 之间具有确切的对应关系，我们将这种对应关系记为 $X \sim x(t)$ ，而 X 的有关参数与 $x(t)$ 的有关参数的对应关系，如表1.3-1所示。

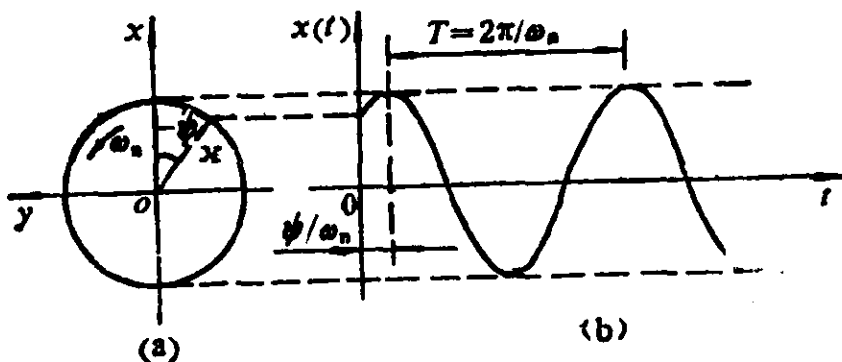


图 1.3-2

表1.3-1 旋转向量与简谐振动之间的关系

参 数	简 谐 振 动	旋 转 向 量
X	振 幅 (m)	模 (m)
$-\psi$	初相角 (振动的初始值与最大值之间的相角) (rad)	X 的初始位置与垂直轴之间的夹角(rad)
ω_n	自然角频率(rad/s)	角速度 (rad/s)
$f_n = \omega_n / 2\pi$	自然频率 (Hz)	转 速 (1/s)
$T = 2\pi / \omega_n$	周 期 (s)	旋转1周的时间 (s)

如果 X_1 与 X_2 是两个以相同的角速度 ω 逆时针旋转的向量，如图1.3-3(a)所示，而且有 $X_1 \leadsto x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \psi_1)$ ， $X_2 \leadsto x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \psi_2)$ ，那么根据所谓“投影定律”（即两个向量的和向量的投影，等于该两向量的投影的和），可以推知，如果

$$X = X_1 + X_2 \leadsto x(t) = X \cos(\omega t + \psi),$$

则有

$$X \cos(\omega t + \psi) = X_1 \cos(\omega t + \psi_1) + X_2 \cos(\omega t + \psi_2), \quad (1.3-11)$$

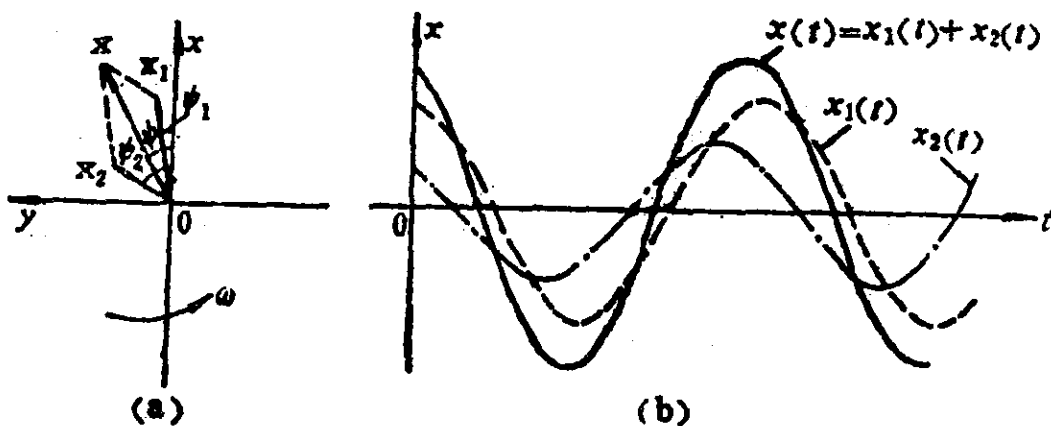


图 1.3-3

如图1.3-3(b)所示。显然，该图(a)中平面向量的合成关系比图(b)中简谐振动的迭加关系要直观得多。而且由图(a)中的向量合

成关系，立即可求出 X ， ψ 与 X_1 ， X_2 、 ψ_1 、 ψ_2 之间的关系，即

$$X^2 = X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2\cos(\psi_2 - \psi_1),$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{X_1\sin\psi_1 + X_2\sin\psi_2}{X_1\cos\psi_1 + X_2\cos\psi_2}. \quad (1.3-12)$$

这样，我们将两个简谐振动沿时间轴的叠加，转化成为两个对应的旋转向量在平面上的合成。

1.3.3 确定自然频率的静变形法

系统的自然频率 ω_n 是系统特性的一个极其重要的参数。对于单自由度无阻尼系统，如果能建立系统的运动微分方程(1.3-1)，再将其写成(1.3-2)式所示的标准形式，则方程中 $x(t)$ 项的系数的平方根就是系统的自然频率。然而，静变形法不需要导出系统的运动微分方程，而直接根据静变形的关系就可确定出固有频率，具有简单、方便的特点。

现以图1.2-3所示的单自由度系统为例，在重力作用下，弹簧受到拉伸或压缩，其静变形 δ_{st} 与重力 mg 间的关系为

$$k\delta_{st} = mg.$$

根据自然频率 ω_n 的定义， $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ，将上式代入则有

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}. \quad (1.3-13)$$

上式即为静变形法确定自然频率的公式，它指出，只要能计算出或测量出系统的静变形 δ_{st} ，即可按上式容易地确定出自然频率。

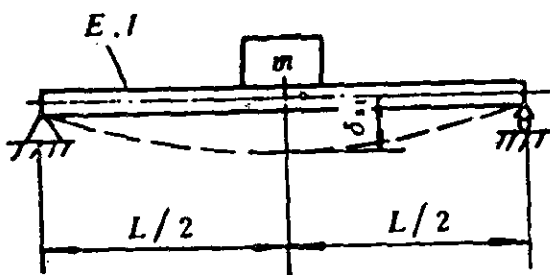


图 1.3-4

例1.6 对于如图1.3-4所示的等截面简支梁，其跨长为 L ，弯曲刚度为 EI ，在梁中点放一质量为 m 的物体，试用静变形法确定系统的自然频率，梁的质量与自重不计。

解：梁相当于一弹簧，则设系统可简化为一个单自由度无阻尼系统。在质块的重力 mg 作用下，由材料力学知梁中点的静变形为

$$\delta_{st} = mgL^3/48EI, \quad (a)$$

则由(1.3-13)式易得系统的自然频率为

$$\omega_n = \sqrt{48EI/mL^3}, \quad (b)$$

将上式与(1.3-3)式比较显见，简支梁中点处的刚度为

$$k = \frac{48EI}{L^3}. \quad (c)$$

例1.7 如图1.3-5所示的等截面悬臂梁，其长度为 L ，弯曲刚度为 EI ，在梁的悬伸端放一质量为 m 的物体，试用静变形法确定系统的自然频率。梁的质量与自重不计。

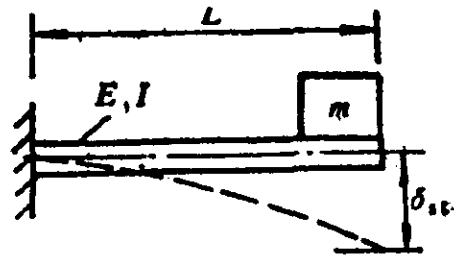


图 1.3-5

解：由材料力学可知，悬伸端在重力 mg 作用下的静变形量为

$$\delta_{st} = mgL^3/3EI, \quad (a)$$

则由(1.3-10)式得系统的自然频率为

$$\omega_n = \sqrt{3EI/mL^3}. \quad (b)$$

由上式显见，悬臂梁端点处的刚度为

$$k = \frac{3EI}{L^3}. \quad (c)$$

1.3.4 确定自然频率的能量法

能量法不仅是确定系统自然频率的一种有效方法，并且也常用于推导系统的运动微分方程。

1. 用能量法确定运动微分方程

无阻尼系统，其自由振动过程既没有能量损失，也无能量的输入，被称为是一个“保守系统”。根据能量守恒定律，保守系

统的总能量 E 保持不变, 即

$$E = \text{常数}.$$

总能量包括两部分, 即质块的动能 T 和弹簧的势能 V , 因此即有:

$$T + V = E = \text{常数}, \quad (1.3-14)$$

将上式对时间 t 求导, 则有

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) = 0. \quad (1.3-15)$$

根据此式可导出运动微分方程。例如, 对于图 1.3-1 所示单自由度无阻尼自由振动系统, 在任一瞬时 t , 其动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t), \quad (1.3-16)$$

$$V = \frac{1}{2} kx^2(t). \quad (1.3-17)$$

而总的机械能为

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} kx^2(t) = E = \text{const},$$

由(1.3-15)式, 对上式求导, 有

$$m \dot{x}(t) \ddot{x}(t) + kx(t) \dot{x}(t) = 0,$$

消去 $\dot{x}(t)$ 后即得到了与(1.3-1)式完全一致的运动微分方程。

例1.8 试用能量法导出例1.5中半圆柱体的运动微分方程和自然频率。

解: 如图1.2-6所示, 在任意角度 $\theta(t)$ 时, 重心 c 的升高量为

$$\Delta = r(1 - \cos\theta) = 2r \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

取重心 c 的最低位置为势能零点, 并进行线性化处理, 则柱体的势能为

$$V = mg\Delta = 2mgr \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx \frac{1}{2} mgr \theta^2. \quad (a)$$

而柱体的动能为

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2.$$

将例1.5(b)、(c)式代入，并线性化，有

$$T = \frac{1}{2} m(l^2 + (R-r)^2) \dot{\theta}^2 \quad (b)$$

根据能量守恒定理，有

$$\frac{1}{2} m(l^2 + (R-r)^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgr\theta^2 = E = \text{const},$$

对上式求导并化简，得运动微分方程为

$$(l^2 + (R-r)^2) \ddot{\theta} + gr\theta = 0, \quad (c)$$

而系统的自然频率为

$$\omega_n = \sqrt{gr/(l^2 + (R-r)^2)}. \quad (d)$$

与例1.5的结果完全一致。

2. 用能量法直接确定固有频率

振动时，系统的能量在动能与势能之间进行周期性的转移，但总能量始终保持不变。设 T_1 、 V_1 、 T_2 、 V_2 分别是振动中两个不同时刻的势能和动能，则按(1.3-14)式有

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

选取两个特殊时刻：在静平衡位置处，系统的势能等于零，而动能达到其最大值 T_{max} ；在最大位移处，系统的动能等于零，而势能达到其最大值 V_{max} 。因此，有 $T_{max} + 0 = 0 + V_{max}$ ，即

$$T_{max} = V_{max}. \quad (1.3-18)$$

利用此式，即可方便地计算出系统的固有频率，而无须导出系统的运动方程。对于比较复杂的系统，这种方法往往十分有效。

例1.9 测量低频振幅用的传感器中的无定向摆如图 1.3-6 所示，摆轮 2 上铰接摇杆 1，其质量不计，摇杆 1 的另一端

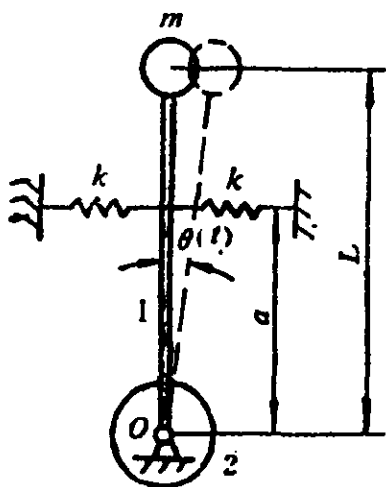


图 1.3-6

装一敏感质量 m ，并在摇杆上联结刚度为 k 的两弹簧以保持摆在垂直方向的稳定位置，若记系统对 O 点的转动惯量为 I_0 ，其余参数如图所示，试确定系统的自然频率。

解：设摇杆偏离静平衡位置的角振动为 $\theta(t)$ ，由(1.3-8)式，摇杆角振动的时间历程为，

$$\theta(t) = \Theta \cos(\omega_n t - \psi),$$

而角速度为

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_n \Theta \sin(\omega_n t - \psi),$$

故

$$\theta_{\max} = \Theta; \quad \dot{\theta}_{\max} = \Theta \omega_n.$$

系统的最大动能为：

$$T_{\max} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_{\max}^2 = \frac{1}{2} I_0 \Theta^2 \omega_n^2,$$

在摇杆摇到最大角位移 θ_{\max} 处，系统的最大势能 V_{\max} 包括两部分，一部分是弹簧贮存的最大势能，为：

$$V_{1, \max} = 2 \cdot \frac{1}{2} k (\theta_{\max} \cdot a)^2 = k a^2 \Theta^2,$$

另一部分是重心下降到最低点处所失去的势能，为：

$$\begin{aligned} V_{2, \max} &= -mgL(1 - \cos\theta_{\max}) \\ &= -2mgL \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} \approx -\frac{1}{2} mgL \Theta^2, \end{aligned}$$

由式(1.3-18)，则有

$$\frac{1}{2} I_0 \Theta^2 \omega_n^2 \approx k a^2 \Theta^2 - \frac{1}{2} mgL \Theta^2,$$

由上式即可解出系统的自然频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2ka^2 - mgL}{I_0}}.$$

3. 用能量法计算弹簧的等效质量

利用能量法的原理，还可把弹簧的分布质量对系统振动频率的影响加以估计，从而得到比较准确的频率值。需要指出，考虑

弹簧本身的质量，属于分布质量的振动问题，将在第十、十一章中讨论。这里，基于对弹簧内部各点上变形规律的假设，将分布质量对自然频率的影响用等效质量来进行折算，这是一种近似方法。

现以图 1.3-7 的系统为例。首先假定弹簧各截面的位移与其距固定端处的原始距离成正比，即如果质块的位移为 $x(t)$ 、弹簧长度为 L ，则距固定端 l 处的弹簧位移量为 $x l / L$ 。因此，当质量 m 在某一瞬时的速度为 $\dot{x}(t)$ 时，弹簧在 l 处的微段 dl 的相应速度为 $l \dot{x}(t) / L$ ，

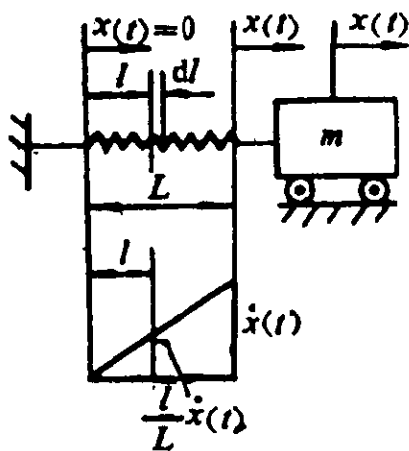


图 1.3-7

对于简谐振动，由(1.3-8)式，有

$$x_{m \cdot x} = X, \quad \dot{x}_{m \cdot x} = X \omega_n, \quad (1.3-19)$$

系统的最大势能 $V_{m \cdot x}$ 仍为

$$V_{m \cdot x} = \frac{1}{2} k x_{m \cdot x}^2 = \frac{1}{2} k X^2, \quad (1.3-20)$$

而由于弹簧具有质量，系统的最大动能 $T_{m \cdot x}$ 中应包括质块 m 的最大动能 $T_{1, m \cdot x}$ 和弹簧的最大动能 $T_{2, m \cdot x}$ 两部分，分别为：

$$T_{1, m \cdot x} = \frac{1}{2} m \dot{X}_{m \cdot x}^2 = \frac{1}{2} m X^2 \omega_n^2, \quad (1.3-21)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(\frac{l \dot{x}}{L} \right)^2 dl = \frac{1}{2} \frac{m'}{3} \dot{x}^2,$$

则

$$T_{2, m \cdot x} = \frac{1}{2} \frac{m'}{3} X^2 \omega_n^2, \quad (1.3-22)$$

式中， ρ 为弹簧单位长度的质量， $m' = \rho L$ 为整个弹簧的质量。将(1.3-20)、(1.3-21)式与(1.3-22)式代入(1.3-18)式，有

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{m'}{3} \right) X^2 \omega_n^2 = \frac{1}{2} k X^2,$$

即可解得自然频率为:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + m'/3}} \quad (1.3-23)$$

而等效质量为 $m + m'/3$, 即弹簧质量 m' 以其三分之一进入等效质量。但是须注意, 这一结论是来源于弹簧各截面的位移量是线性分布的这一假定的。

例1.10 对于例1.6所示中部附有质块 m 的简支梁系统, 若梁的质量为 m' , 线密度为 $\rho = m'/L$, 试用能量法确定系统的自然频率。

解: 假定梁在自由振动时的动挠度曲线与简支梁中间有集中载荷 mg 作用下的静挠度曲线一样, 如图1.3-8所示, 由材料力学, 在距离 o 点为 l 处的梁截面的静挠度曲线为

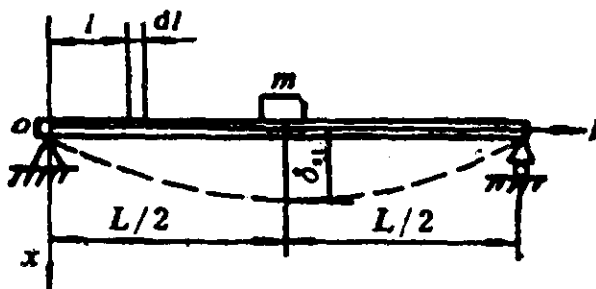


图 1.3-8

$$x_1 = \delta_{s1} \frac{3L^2l - 4l^3}{L^3},$$

式中, δ_{s1} 为梁中点的静挠度, 其值由例1.6中(a)式确定

$$\delta_{s1} = \frac{mgL^3}{48EI} \quad (a)$$

于是, 动挠度曲线方程可认为与上式相似,

$$x_1(t) = x(t) \frac{3L^2l - 4l^3}{L^3}, \quad (b)$$

其中, $x(t)$ 是中点处的振动位移, 它仍然为(1.3-8)式所示的简谐振动, 即有:

$$x_{max} = X, \quad \dot{x}_{max} = X\omega_n.$$

对于距 o 点 l 处长度为 dl 的微段梁, 质量为 ρdl , 由式(b), 其速度为 $\dot{x}_l(t) = \dot{x}(t) \frac{3L^2 l - 4l^3}{L^3}$, 故整段梁的动能为:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{L/2} \frac{1}{2} \rho \dot{x}_l^2 dl &= \frac{\rho \dot{x}^2}{L^3} \int_0^{L/2} (3L^2 l - 4l^3)^2 dl \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} \rho L \right) \dot{x}^2, \end{aligned}$$

而质量 m 的动能为 $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$, 则整个系统的最大动能等于梁与质量 m 的最大动能之和, 即

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} \rho L \right) \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} \rho L \right) \omega_n^2 X^2, \quad (c)$$

梁的最大弹性势能仍为

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = \frac{1}{2} k X^2, \quad (d)$$

其中, k 为梁的弹性刚度, 由例1.6中(c)式确定, 将该式代入上式, 并整理, 得

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \frac{48EI}{L^3} X^2, \quad (e)$$

则由式(1.3-18)解得系统的自然频率为:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{L^3 \left(m + \frac{17}{35} m' \right)}}. \quad (f)$$

将上式与例1.6中式(b)相比, 可见考虑了梁的分布质量后的等效质量为 $m + \frac{17}{35} m'$, 即需将梁的质量的大约一半作为一个集中质量加到质块 m 上去, 且计入梁的质量后, 系统的固有频率有所降低。

例1.11 对于例1.7的悬臂梁, 若梁的质量为 m' , 密度为 $\rho = m'/L$, 试用能量法确定系统的自然频率与等效质量。

解: 假定梁自由振动时的动挠度曲线与在端部集中载荷作用

下的静挠度曲线一样，如图1.3-9所示。由材料力学，在距 o 点 l 处梁的静挠度为：

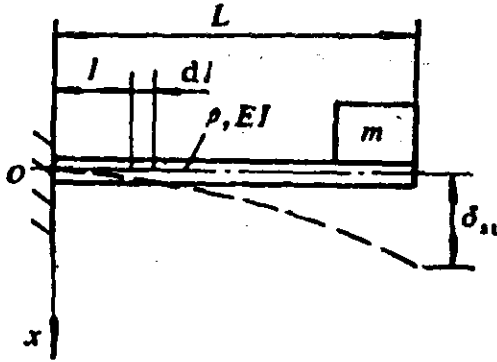


图 1.3-9

$$x_1 = \delta_{s1} \frac{3Ll^2 - l^3}{2L^3},$$

式中， δ_{s1} 为梁端点的静挠度，其值仍由例1.7中式(a)确定：

$$\delta_{s1} = \frac{mgL^3}{3EI}. \quad (a)$$

于是动挠度曲线方程可类似上式写成：

$$x_1(t) = x(t) \frac{3Ll^2 - l^3}{2L^3}, \quad (b)$$

式中， $x(t)$ 是梁端点的振动值，仍然为(1.3-8)式所示的简谐振动，且有：

$$x_{m \cdot x} = X, \quad \dot{x}_{m \cdot x} = X\omega_n.$$

整段梁的动能为

$$\int_0^L \frac{1}{2} \rho \dot{x}_1^2 dl = \frac{\rho \dot{x}^2}{8L^6} \int_0^L (3Ll^2 - l^3)^2 dl = \frac{1}{2} \frac{33}{140} m' \dot{x}^2,$$

而质量 m 的动能为 $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ ，则整个系统的最大动能为：

$$T_{m \cdot x} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{33}{140} m' \right) X^2 \omega_n^2; \quad (c)$$

梁的最大弹性势能仍为

$$V_{m \cdot x} = \frac{1}{2} k x_{m \cdot x}^2 = \frac{1}{2} k X, \quad (d)$$

式中， k 为梁的弹性刚度，由例1.7式中(c)确定，将该式代入式(d)，有

$$V_{m \cdot x} = \frac{1}{2} \left(\frac{3EI}{L^3} \right) X^2, \quad (e)$$

则由(1.3-18)式解得系统的自然频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{L^3 \left(m + \frac{33}{140} m' \right)}} \quad (f)$$

显然，考虑了梁的质量后的等效质量为 $m + \frac{33}{140} m'$ 。

按等效质量法估算弹性体内的分布质量对系统自然频率的影响，其精度取决于对弹性变形规律的假设的正确程度。一般，可将弹性体在某一静变形下的变形分布作为其动态条件下的变形分布，其精度大体能满足工程问题的要求。读者还应注意到，我们在推求系统的最大动能与最大势能时，还采用了线性系统的振动是简谐振动这一事实，从而导出了自然频率。

1.3.5 复摆

一个刚体由于本身重力作用而绕某一水平轴作微摆动，称为复摆，如图1.3-10所示。设刚体质量为 m ，对转动轴 o 点的转动惯量为 I_o ，重心 c 至转动轴 o 的距离为 l 。若记复摆偏离垂直平衡位置的角度为 $\theta(t)$ ，由于重力作用将产生一个恢复力矩 $mgl \sin\theta$ ，可得复摆的运动微分方程为：

$$I_o \ddot{\theta}(t) + mgl \sin\theta(t) = 0, \quad (1.3-24)$$

在微振动时，可对上式进行线性化处理，即令 $\sin\theta(t) \approx \theta(t)$ ，则得线性运动微分方程为：

$$I_o \ddot{\theta}(t) + mgl\theta(t) = 0, \quad (1.3-25)$$

或

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{mgl}{I_o} \theta(t) = 0. \quad (1.3-26)$$

角振动的自然频率为

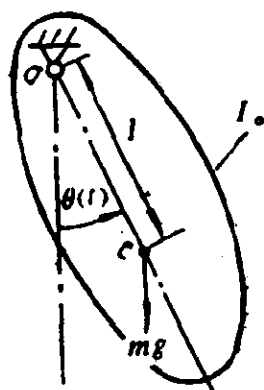


图 1.3-10

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{I_o}} \quad (1.3-27)$$

当实验测得自然频率 ω_n 后,即可算得物体绕o点的转动惯量为

$$I_o = \frac{mgl}{\omega_n^2}, \quad (1.3-28)$$

再根据转动惯量的移轴定理,可计算出刚体绕重心的转动惯量 I_c 为

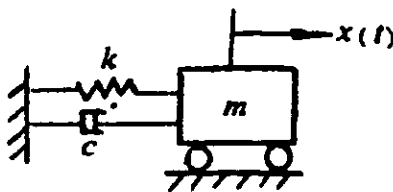
$$I_c = I_o - ml^2. \quad (1.3-29)$$

实践表明,这是一种实验测定复杂形状构件的转动惯量的有效方法。

§ 1.4 有阻尼系统的自由振动

1.4.1 有阻尼系统的自由振动

图1.4-1为单自由度有阻尼的自由振动系统,其运动微分方程为



$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (1.4-1)$$

图 1.4-1 或

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0, \quad (1.4-2)$$

式中,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}. \quad (1.4-3)$$

ω_n 的意义同前, ξ 称为粘滞阻尼因子或阻尼率,它是无量纲的。

设(1.4-2)式的通解为

$$x(t) = X e^{st}, \quad (1.4-4)$$

式中, X 、 s 为待定常数, 这里将 X 视为实数, 而 s 为复数。将上式代入(1.4-2)式, 得到特征方程为

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0, \quad (1.4-5)$$

由此式可解得两个特征根

$$s_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n. \quad (1.4-6)$$

由上式可见, 特征根 s_1 、 s_2 与 ξ 、 ω_n 有关, 但其性质主要取决于 ξ , 下面分别讨论对于 ξ 的不同取值的情况。

1. 无阻尼($\xi = 0$)情况

显然, $\xi = 0$ 即是 $c = 0$, 即是上一节所讨论的问题。由(1.4-6)式得此时的两特征根为虚数:

$$s_{1,2} = \pm i\omega_n, \quad (1.4-7)$$

则由(1.4-4)式得运动微分方程的两个解为 $X_1 e^{i\omega_n t}$ 、 $X_2 e^{-i\omega_n t}$, 而由于方程(1.4-2)是齐次的, 因此以上两解之和仍为原方程的解, 故得通解为

$$x(t) = X_1 e^{i\omega_n t} + X_2 e^{-i\omega_n t},$$

根据欧拉公式将上式展开并整理有:

$$x(t) = (X_1 + X_2)\cos\omega_n t + i(X_1 - X_2)\sin\omega_n t,$$

式中, X_1 、 X_2 为两个待定的常数。若以另两个常数 X 与 ψ 来取代 X_1 、 X_2 , 其间关系为

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= X\cos\psi, \\ i(X_1 - X_2) &= X\sin\psi, \end{aligned} \quad (1.4-8)$$

则可将 $x(t)$ 写为

$$x(t) = X\cos(\omega_n t - \psi). \quad (1.4-9)$$

可见上式与(1.3-8)式完全一致, 其中 X 、 ψ 由初始条件决定。如图1.4-2所示, 这种情况下特征

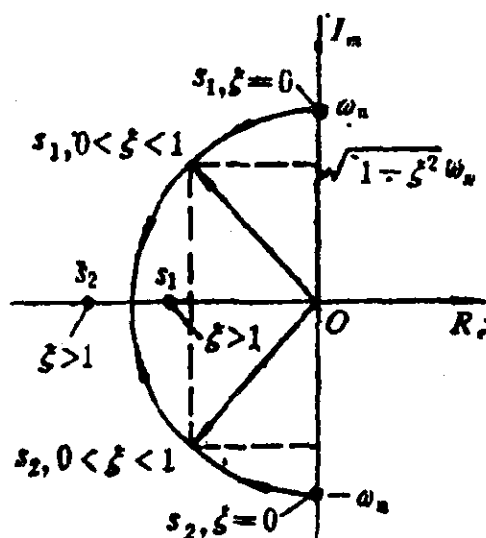


图 1.4-2

根 $s_1 = i\omega_n$, $s_2 = -i\omega_n$ 在复平面的虚轴上, 且处于与原点对称的位置。此时 $x(t)$ 为等幅振动, 如图 1.4-3(a) 所示。

2. 小阻尼 ($0 < \xi < 1$) 情况

由式 (1.4-6) 解得此时的两特征根为共轭复根

$$s_{1,2} = (-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n,$$

或

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d, \quad (1.4-10)$$

式中,

$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\omega_n, \quad (1.4-11)$$

称为有阻尼自然角频率, 或简称为阻尼自然频率。将 s_1, s_2 代入式 (1.4-4), 有

$$\begin{aligned} x(t) &= X_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_d)t} + X_2 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_d)t} \\ &= e^{-\xi\omega_n t} \{ (X_1 + X_2) \cos\omega_d t + i(X_1 - X_2) \sin\omega_d t \}, \end{aligned}$$

采用式 (1.4-8) 的记法, 并整理, 有

$$x(t) = X e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi), \quad (1.4-12)$$

式中, X, ψ 为由初始条件 x_0, v_0 确定的常数,

$$\left. \begin{aligned} X &= \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \xi\omega_n x_0)^2}{\omega_d^2}}, \\ \psi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{x_0 \omega_d}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4-13)$$

显然, 当 $\xi = 0$ 时, (1.4-12) 式即退化为 (1.3-8) 式的形式。

分析上述结果, 有

(1) 系统的特征根 s_1, s_2 为共轭复数, 具有负实部, 分别位于复平面左半面与实轴对称的位置上, 如图 1.4-2 所示。

(2) 在 (1.4-12) 式中, 若将 $X e^{-\xi\omega_n t}$ 视为振幅, 则表明有阻尼系统的自由振动是一种减幅振动, 其振幅按指数规律衰减。阻尼率 ξ 值越大, 振幅衰减越快。其时间历程如图 1.4-3(b) 所示。

表现在旋转向量图中，则是旋转向量的长度按指数规律缩短，其端点划出一对数螺线。而且，振幅的衰减程度完全由系统本身的特性所决定。

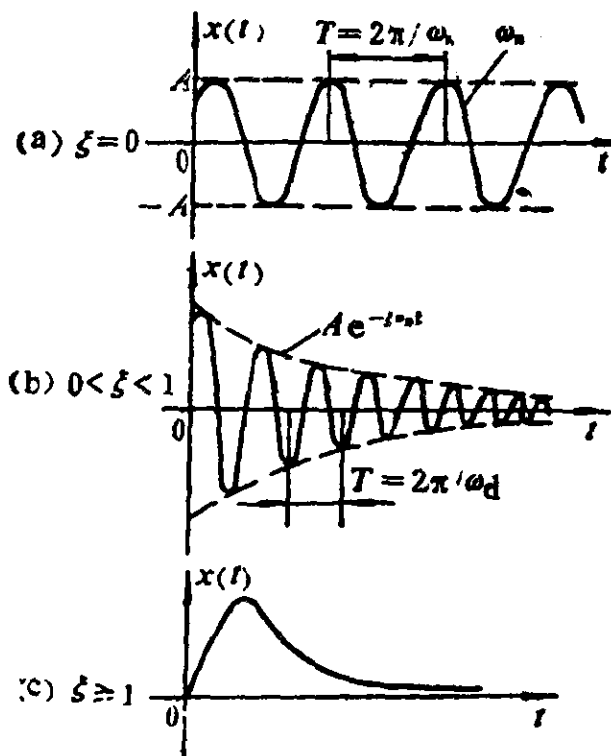


图 1.4-3

(3) 特征根虚部的取值决定了自由振动的频率，且由(1.4-11)式可见，阻尼自然频率也完全由系统本身的特性所决定。该式表明 $\omega_d < \omega_n$ ，即阻尼自然频率低于无阻尼自然频率。表现在旋转向量图中，则是由于阻尼的作用减慢了向量旋转的角速度。

(4) 初始条件 x_0 与 v_0 只影响有阻尼自由振动的初始振幅 X 与初相角 ψ ，如(1.4-13)式所示。

3. 过阻尼($\xi > 1$)情况

由(1.4-6)式解得特征根为实数

$$s_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n \quad (\xi \geq 1), \quad (1.4-14)$$

则由(1.4-4)式有

$$x(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t}, \quad (1.4-15)$$

式中， X_1, X_2 为由初始条件确定的常数。这种条件下 s_1, s_2 均

为负实数，处于复平面的实数轴上，如图1.4-2所示。这时系统不产生振动，很快就趋近到平衡位置，如图1.4-3(c)所示。从物理意义上来看，表明阻尼较大时，由初始激励输入给系统的能量很快就被消耗掉了，而系统来不及产生往复振动。

4. 临界阻尼($\xi = 1$)情况

是前述两种情况之间的分界线，由(1.4-3)式的第二式，有 $c_0 = 2\sqrt{mk}$ ，即临界阻尼系数 c_0 由系统的参数确定。将上式再代回(1.4-3)式，有 $\xi = c/c_0$ ，这可看成阻尼率的一种定义。

由(1.4-6)式，特征根为两重根 ($-\omega_n$)，可以验证此时(1.4-2)式的解为：

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t},$$

式中 A_1 、 A_2 是待定常数，显然，这种情况下的运动也是非周期性的。以初始条件 x_0 、 v_0 代入上式，消去 A_1 、 A_2 ，得

$$x(t) = e^{-\omega_n t} (x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t).$$

此外，还有一种负阻尼($\xi < 0$)情况，这时 s_1 、 s_2 处于复平面的右半平面（图1.4-2上未画出），而 $x(t)$ 表现为一种增幅振动。这种情况将在第十三章讨论。

在上述各种情况中，振动分析所关心的主要是小的正阻尼系统的振动。

例1.12 试分析单自由度小阻尼系统对初始速度的响应。

解：当系统只受到初速度 v_0 作用时， $x_0 = 0$ ，由(1.4-13)式有：

$$X = \frac{v_0}{\omega_d}, \quad \psi = \frac{\pi}{2}. \quad (a)$$

由(1.4-12)式得系统对于初始速度的响应为：

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_d t. \quad (b)$$

例1.13 试求单自由度小阻尼系统对初始位移的响应。

解：当系统只受到初位移 x_0 作用时， $v_0 = 0$ ，由(1.4-13)式，

$$X = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\xi \omega_n}{\omega_d}\right)^2} = \frac{x_0}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (a)$$

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi \omega_n}{\omega_d},$$

则由(1.4-12)式, 得系统对于初始位移的响应为:

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi). \quad (b)$$

综合以上两例的结果, 当系统同时受到初始位移 x_0 和初始速度 v_0 作用时, 系统的响应是

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_d t. \quad (1.4-16)$$

与(1.4-12)、(1.4-13)式比较, 上式即为单自由度有阻尼系统自由振动的另一种表达形式, 式中第一项是由初位移 x_0 引起的自由振动, 第二项是由初速度 v_0 引起的自由振动。

1.4.2 对数衰减率

与自然频率 ω_n 一样, 阻尼率 ξ 也是表征振动系统特性的一个重要参数。而且, 一般来说, ω_n 比较容易由实验准确地测定或辨识出, 而对 ξ 的测定或辨识则较为困难。利用自由振动的衰减曲线计算 ξ 是一种常用的方法。

图1.4-4为单自由度系统自由振动的减幅振动曲线, 这一曲线可在冲击激振实验中记录到。在间隔一个振动周期 T 的任意两时刻 t_1 、 t_2 时, 相应的振动位移为 $x(t_1)$ 、 $x(t_2)$, 由(1.4-12)式有

$$x(t_1) = X e^{-\xi \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \psi),$$

$$x(t_2) = X e^{-\xi \omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \psi).$$

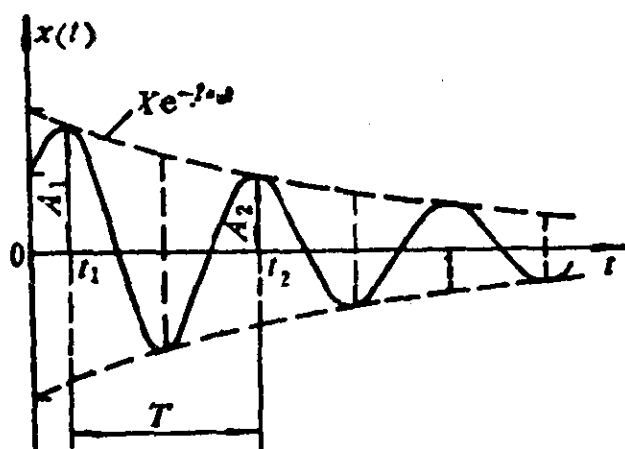


图 1.4-4

由于 $t_2 = t_1 + T = t_1 + 2\pi/\omega_d$, 有

$$x(t_2) = X e^{-\xi \omega_n (t_1 + T)} \cos(\omega_d t_1 - \psi),$$

即有

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = e^{\xi \omega_n T}. \quad (1.4-17)$$

通常为了提高测量与计算的准确度, 可将 $x(t_1)$ 、 $x(t_2)$ 分别选在相应的峰值处, 如图1.4-4所示, 于是

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\xi \omega_n T}. \quad (1.4-18)$$

由于对于正阻尼恒有 $x(t_1) > x(t_2)$, 上式表示, 振动波形按 $e^{\xi \omega_n T}$ 的比例衰减, 且当阻尼率 ξ 越大时, 衰减越快. 对上式取自然对数, 有:

$$\delta = \ln A_1 - \ln A_2 = \xi \omega_n T = \xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (1.4-19)$$

式中, δ 称为对数衰减率. 当由实验记录曲线测出 $x(t_1)$ 、 $x(t_2)$ 后, 容易算出对数衰减率 δ , 再根据 δ 就可算出 ξ , 为:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, \quad (1.4-20)$$

当 ξ 很小时, $\delta^2 \ll 1$, 与 $4\pi^2$ 相比可略去, 故 ξ 的近似计算公式为:

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi}. \quad (1.4-21)$$

上面是根据相邻两个波形的幅值进行计算，但由于单个周期 T 不易测得准确，实用中可测量间隔 j 个振动周期 jT 的波形，以便更精确地计算出 δ 值。由于相邻两振动波形的衰减比例均为 $e^{t \cdot \delta}$ ，故有

$$\begin{aligned} \frac{x(t_1)}{x(t_1 + jT)} &= x \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T)} \cdot \frac{x(t_1 + T)}{x(t_1 + 2T)} \cdot \dots \\ &\quad \cdot \frac{x(t_1 + (j-1)T)}{x(t_1 + jT)} = e^{j t \cdot \delta}, \end{aligned}$$

对上式取对数，并根据(1.4-19)式有

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + jT)}. \quad (1.4-22)$$

这样，取足够大的 j ，测取振动位移 $x(t_1)$ 与 $x(t_1 + jT)$ ，即可按上式与式(1.4-20)算出 ξ 。

例1.14 已知一单自由度系统，其自由振动的振幅在5个整周期后衰减了50%，试计算系统的粘性阻尼率 ξ 。

解：由题意知 $j=5$ ， $x(t_1)/x(t_1 + 5T) = 2$ ，根据(1.4-22)，得对数衰减率为

$$\delta = \frac{1}{5} \ln 2 = \frac{1}{5} \times 0.69315 = 0.13863,$$

而由(1.4-20)式得

$$\xi = \frac{0.13863}{\sqrt{4\pi^2 + 0.13863^2}} = 0.022058,$$

或者，由 δ 的取值可见， δ 相当小，也可按近似公式计算出

$$\xi \approx \frac{0.13863}{2\pi} = 0.022064.$$

例1.15 龙门起重机设计中，为避免连续起动和制动过程中引起振动，要求由起动或制动引起的振动的衰减时间不得过长。若有一15吨龙门起重机，其示意图如图1.4-5所示，在作水平纵

向振动时，其等效质量 $m_{eq} = 273.42 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ ，水平方向的刚度为 19.6 kN/cm ，实测对数衰减率 $\delta = 0.10$ ，若要求振幅衰减到最大振幅的5%，所需的衰减时间应小于30秒，试校核该设计是否满足要求。

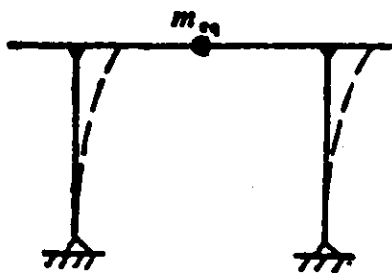


图 1.4-5

最大振幅的5%，所需的衰减时间应小于30秒，试校核该设计是否满足要求。

解：由式(1.4-22)，有：

$$j = \frac{1}{\delta} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + jT)}$$

将已知条件代入上式，可解得振

幅衰减到最大振幅的5%时需经过的周期数 j 为

$$j = \frac{1}{0.10} \ln \frac{1}{0.05} = 29.95732 \approx 30,$$

而由 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ，得起重机纵向振动的自然频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{19600}{273.42}} = 8.46668,$$

则周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \approx \frac{2\pi}{8.46668} = 0.74211,$$

经过30个周期后所需时间为：

$$0.74211 \times 30 = 22.2632.$$

可见，设计满足要求。

思 考 题

试判断以下陈述是否正确，如果有误，请指出错误所在，并给出正确答案：

1. 一个振动系统当未受到外力的持续激励时，不会发生振动。
2. 单自由度线性无阻尼系统（谐振子）的自由振动频率（即其自然频率）由系统的参数确定，与初始条件无关。
3. 线性谐振子的振动周期与其振幅有关：振幅愈大，则周期愈长。

4. 单自由度线性系统在一定初始条件作用下的自由运动与阻尼率 ξ 有关, 当 $0 < \xi < 1$ 时, 为衰减振动; 当 $\xi \geq 1$ 时, 为一种非周期运动。

5. 自由振动是初始激励激起的振动, 因此, 对于一个单自由度线性系统, 初始条件不同, 自由振动的振幅、相位、频率均不同。

6. 单自由度无阻尼系统的自由振动频率为其自然频率 ω_n , 单自由度有阻尼系统 (小阻尼) 的自由振动频率为其阻尼自然频率 ω_d 。

习 题

1-1 图1-1所示正方结构, 斜杆 AC 和 BD 的截面积均为 A , 弹性模量为 E 。除斜杆外均为刚性杆。试求该结构在 B 点水平方向的刚度。 A 、 B 、 C 、 D 诸点均为铰接, 摩擦力不计。

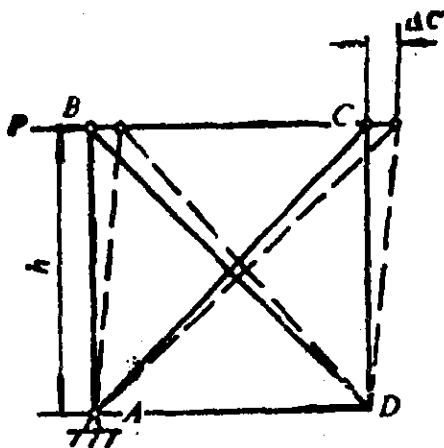


图 1-1

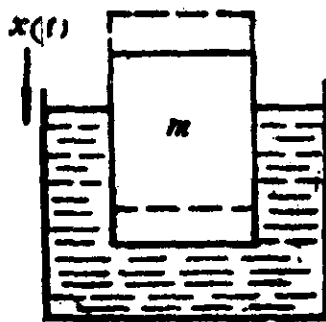


图 1-2

1-2 某一横截面为 A , 质量为 m 的浮标浮在密度为 ρ 的液体内, 如图1-2所示, 试导出其纵向振动的运动微分方程。并求振动的自然频率。

1-3 图1-3所示的摆与一个刚度为 k 的弹簧相连, 试用能量法导出系统的运动微分方程, 并通过线性化后确定系统的自然频率。

1-4 质量为 m , 长为 L 的均质杆以匀角速度 ω 绕铅垂轴转动, 如图1-4所示, 以 θ 表示杆与铅垂轴间的夹角, 试求:

- (1) 静平衡位置 θ_0 ;
- (2) 导出在 θ_0 附近所作微振动 θ_1 的微分方程;

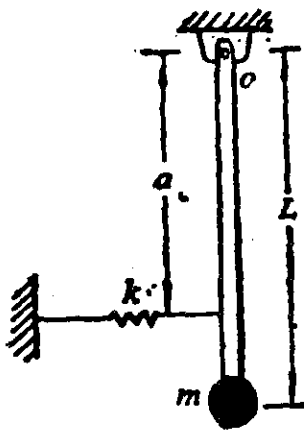


图 1-3

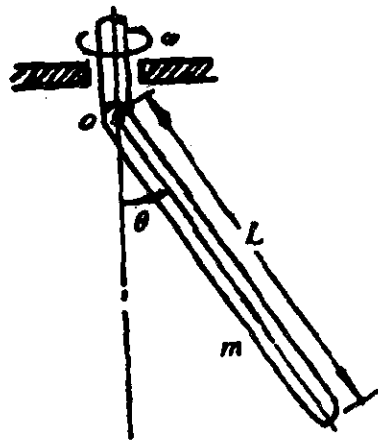


图 1-4

(3) 求出振动 θ_1 的自然频率 ω_0 ;

(4) 当 ω 非常大时的自然频率, 并分析其发展趋势。

1-5 某测振仪结构如图1-5所示。一摆重量为 Q , 由一刚度为 k 的螺旋弹簧联结, 并维持与铅垂线成 α 角的位置。摆对 O 点的转动惯量为 I , 摆的重心距 O 点的距离为 l , 若以 $\theta(t)$ 表示摆在 α 角附近的角振动, 试求系统的运动微分方程和自然频率。

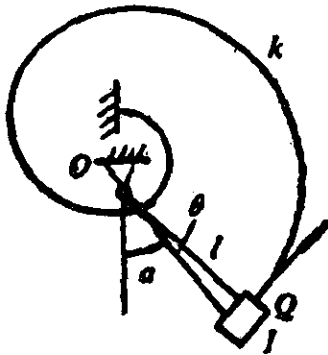


图 1-5

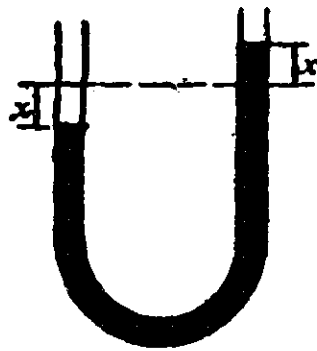


图 1-6

1-6 等截面U形管如图1-6所示, 设液柱总长度为 L , 试用能量法导出系统的运动微分方程和自然频率。

1-7 质量 $m = 2.5 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ 用绳子悬挂, 跨过半径为 $R = 20 \text{ cm}$ 的滑轮, 滑轮对中心 O 点的转动惯量为 $I_0 = 600 \text{ N} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$, 弹簧刚度为 $k = 2500 \text{ N/cm}$, 如图1-7所示, 试求系统的自然频率。

1-8 由三根长度为 l , 重量均为 W 的均质杆用铰链联接的机构如图1-8

所示，求此机构作微摆动 $\theta(t)$ 时的自然频率。

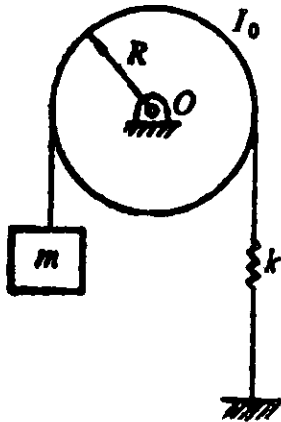


图 1-7

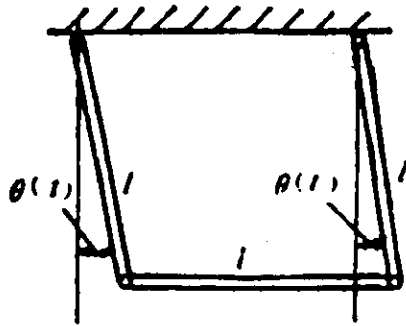


图 1-8

1-9 两平行轴支承于轴承上，由齿轮B、C传递运动，两轴轴端分别装有圆盘A与D，如图1-9所示。系统进行扭转振动，已知 $I_A = I_D = 1150 \text{ N}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2$ ， $l_1 = l_2 = 150 \text{ cm}$ ， $d_1 = d_2 = 7.5 \text{ cm}$ ， $r_1/r_2 = 0.5$ ，略去两齿轮和轴的转动惯量，并设轴的剪切模量为 $G = 0.8 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ，试求系统扭转的自然频率。

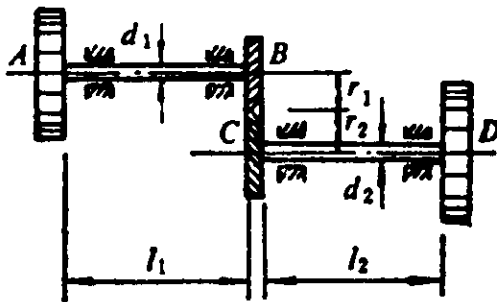


图 1-9

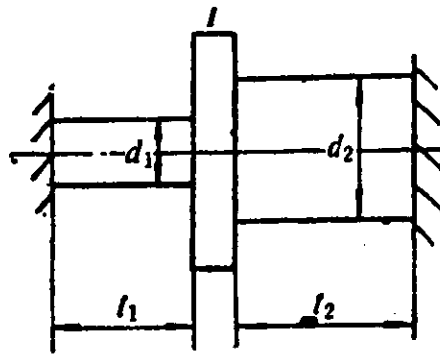


图 1-10

1-10 图1-10所示阶梯轴，各尺寸如图所示，圆盘的极惯性矩为 I ，确定圆盘扭转的自然频率。

1-11 一质量为 m 的匀质杆由两根绳子悬挂，如图1-11所示，这种系统称为双线摆，不计绳的质量，且绳不可伸长，杆对其中心的转动惯量为 $I_c = \frac{1}{3}ma^2$ ，试导出双线摆绕其中心铅垂轴摆动 $\theta(t)$ 的运动微分方程和自然频率。

1-12 质量为 2 kg 的连杆悬挂在刀形支承上，如图1-12所示，若自由振动的周期是 1.2 s ，质心 c 距刀形支承的距离 $L = 18 \text{ cm}$ ，试求杆绕其质心 c

的转动惯量 I_0 。

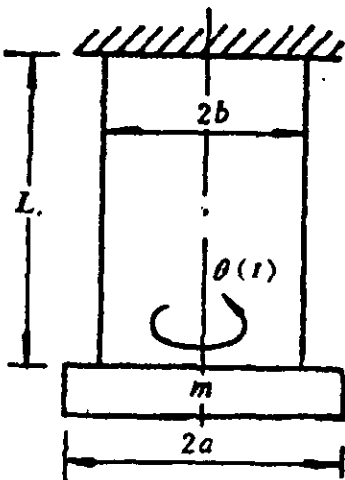


图 1-11

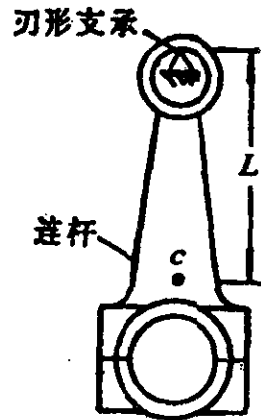


图 1-12

1-13 质量线密度为 ρ 的匀质杆，其下端装有质块 m ，如图1-13所示，杆的弹性模量为 E ，杆的截面积为 A_0 ，假定杆的伸长是线性的，即

$$\frac{x}{x_m} = \frac{\xi}{L}, \text{ 试求杆纵向振动的自然频率。}$$

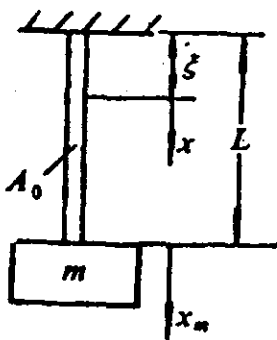


图 1-13

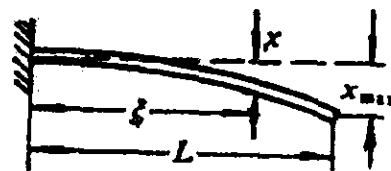


图 1-14

1-14 单位长度上质量为 ρ 的均匀悬臂梁，如图1-14，假定梁自由振动的动挠度曲线与自由端有一集中载荷所产生的静挠度曲线规律相同〔参见例1.11〕。求梁的自然频率与梁在自由端的等效质量。

1-15 假定动挠度曲线为 $x/x_{max} = \xi/L$ ，见图1-14。重做习题1-14。并与习题1-14比较自然频率的误差百分比。注意：由于固定端的转角必须为零，假定的动挠度曲线不满足固定端的边界条件。

1-16 已知一单自由度系统，其 $m = 10 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$ ， $c = 40 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{cm}$ ， $k = 36.0555 \text{ N}/\text{cm}$ ，试求系统在以下初始条件激励下的自由振动。

$$(1) \quad x(0) = 1\text{cm} \quad \dot{x}(0) = 0\text{cm/s}$$

$$(2) \quad x(0) = 0\text{cm} \quad \dot{x}(0) = 2\text{cm/s}$$

$$(3) \quad x(0) = 1\text{cm} \quad \dot{x}(0) = 2\text{cm/s}$$

1-17 某一有阻尼的弹簧质量系统，质块重量 $W = 98\text{N}$ ， $k = 10\text{N/cm}$ ，处于临界阻尼状态，以初始条件 $x(0) = 2.5\text{cm}$ ， $\dot{x}(0) = -30\text{cm/s}$ 开始运动。问质量将于几秒后到达静平衡位置？通过静平衡位置后最远能移动多少距离。

第二章 单自由度线性系统的强迫振动

强迫振动是指系统对于过程激励的响应。本章首先讲解谐波激励下的强迫振动和谐波分析方法，然后再介绍周期激励，非周期激励下的强迫振动的各种分析方法。

§ 2.1 谐波激励下的强迫振动

谐波激励是最简单的激励。之所以简单，是因为系统对于谐波激励的响应仍然是频率相同的谐波；另一方面，由于线性系统满足叠加原理，因此，各种复杂的激励可先分解为一系列的谐波激励，而系统的总的响应则可由叠加各谐波响应得到。因此，掌握了谐波响应分析方法，原则上就可以求一个线性系统在任何激励下的响应。

2.1.1 谐波响应的三角函数描述

由(1.2-1)式，单自由度线性系统强迫振动的运动微分方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= F(t) = F\cos\omega t \\ &= kf(t) = kA\cos\omega t, \end{aligned} \quad (2.1-1)$$

式中， $F(t)$ 为谐波激励力，具有力的量纲，而 $f(t)$ 应具有位移量纲。这样，激励函数 $f(t)$ 与系统的响应 $x(t)$ 均具有位移量纲，便于分析。同时，上式中 F 为简谐激励力的力幅。而且

$$A = F/k, \quad (2.1-2)$$

是与简谐激励力的力幅 F 相等的恒力作用在系统上所引起的静位移。

引入(1.4-3)式的记号, 得

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 f(t) = \omega_n^2 A \cos \omega t. \quad (2.1-3)$$

设上式的解为

$$x(t) = X \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.1-4)$$

代入微分方程(2.1-3), 得

$$\begin{aligned} & X[(\omega_n^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\xi\omega_n \sin \varphi] \cos \omega t \\ & + X[(\omega_n^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\xi\omega_n \cos \varphi] \sin \omega t = \omega_n^2 A \cos \omega t. \end{aligned}$$

上式对于任意时刻 t 都成立, 因此等号两边 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 项的系数必须相等, 即有:

$$\left. \begin{aligned} X[(\omega_n^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\xi\omega_n \sin \varphi] &= \omega_n^2 A, \\ X[(\omega_n^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\xi\omega_n \cos \varphi] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1-5)$$

以上两式联立, 可解得

$$X = \frac{A}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}}, \quad (2.1-6)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}. \quad (2.1-7)$$

这表明(2.1-4)式所设的解确是微分方程(2.1-3)式的解, 其中的 X 、 φ 由(2.1-6)、(2.1-7)式给出。可见:

(1) 单自由度线性系统在谐波激励下的响应仍然是谐波, 如

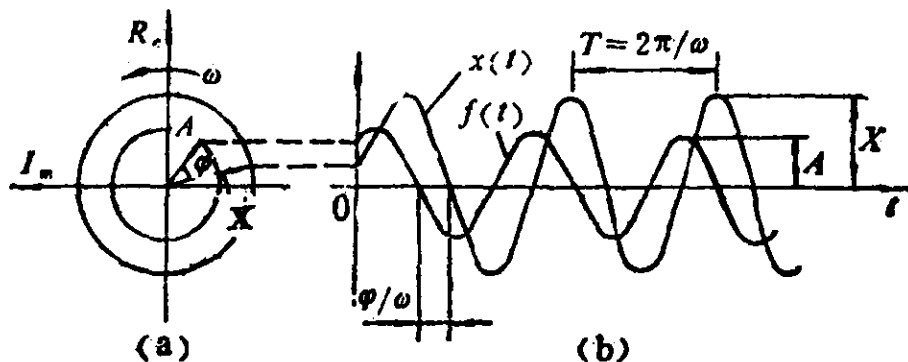


图 2.1-1

图2.1-1(b)所示, 谐波响应由频率 ω 、振幅 X 与相角 φ 三个参数所确定。

(2) 响应频率与激励频率相同。

(3) 振幅 X 与激励的幅值 A 成比例, 即

$$X = |H(\omega)| A, \quad (2.1-8)$$

$|H(\omega)|$ 是无量纲的,

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}. \quad (2.1-9)$$

在物理意义上, $|H(\omega)|$ 表示动态振动的振幅 X 较静态位移 A 放大了多少倍, 故又称为放大系数。由(2.1-9)式可见, $|H(\omega)|$ 不仅是系统参数 $\xi, \omega_n(m, c, k)$ 的函数, 而且还是激励频率 ω 的函数。因此, 即使对于同一系统, 激励频率 ω 不同, 放大系数 $|H(\omega)|$ 的取值将不同, 从而系统响应的振幅也是不相同的。

(4) 相位差 φ 表示响应滞后于激励的相位角。读者不应将相位差 φ 与(1.4-12)式中的初相位 ψ 相混淆, 在那里, ψ 表示系统自由振动在 $t = 0$ 时刻的初始相位, 它是由初位移与初速度的相对大小关系所决定的, 而这里的相位差 φ 反映响应相对于激励的相位滞后, 它是由于系统具有惯性引起的。读者须知, 外加激励对一个动态系统的作用, 并不能立即改变系统的响应, 而是通过激励效应的累积才引起响应的变化。由此不难理解, 响应一般会滞后于激励, 滞后的时间为 φ/ω , 如图2.1-1(b)所示。

(5) 可用旋转向量图来表示激励 $f(t)$ 与响应 $x(t)$ 间的关系, 如图2.1-1(a)所示。 A 与 X 是两个沿逆时针方向以相同角速度 ω 转动的旋转向量, 两向量始终保持相位差为 φ 。显然, $A \sim f(t)$, $X \sim x(t)$ 。激励 $f(t)$ 与响应 $x(t)$ 在时间轴上的复杂的波形的关系可在旋转向量图中简单直观地表示出来。

2.1.2 谐波响应的复向量描述

1. 谐波激励与响应的复向量表示法

前面已讲到，旋转向量与谐波函数之间存在对应关系。另一方面，旋转向量又可用复平面上的向量来表示。这样，谐波函数就与复向量之间存在对应关系。例如，我们可以写

$$f(t) = Ae^{i\omega t}, \quad (2.1-10)$$

$$x(t) = Xe^{i\omega t}, \quad (2.1-11)$$

当然，以上两式中的等号只能看成为一种“对应”的记号，实际上 $f(t)$ 、 $x(t)$ 都只应该取所对应的复向量的实部，即

$$f(t) = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}) = A\cos\omega t, \quad (2.1-12)$$

$$x(t) = \operatorname{Re}(Xe^{i\omega t}) = X\cos\omega t,$$

图2.1-1(a)与(b)正表示了这种关系。以下我们不再强调这一点，而是形式地将系统的激励和响应写成(2.1-10)、(2.1-11)式。将后一式对时间微分两次，得

$$\dot{x}(t) = i\omega Xe^{i\omega t} = i\omega x(t), \quad (2.1-13)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 Xe^{i\omega t} = -\omega^2 x(t).$$

将 $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ 、 $\ddot{x}(t)$ 代入式(2.1-3)，有：

$$-\omega^2 Xe^{i\omega t} + i2\xi\omega_n\omega Xe^{i\omega t} + \omega_n^2 Xe^{i\omega t} = \omega_n^2 Ae^{i\omega t},$$

消除公共因子 $e^{i\omega t}$ ，并整理，得：

$$X[1 - (\omega/\omega_n)^2 + i2\xi\omega/\omega_n] = A.$$

若记 X 与 A 之比为 $H(\omega)$ ，则有

$$H(\omega) = \frac{X}{A} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}. \quad (2.1-14)$$

$H(\omega)$ 称为系统的频率响应函数，它描述了线性系统的动态特性。分析 $H(\omega)$ ，可见：

(1) 在(2.1-14)式中, A 可视为实数, 而 $H(\omega)$ 一般为复数, 故 X 必须为复数, 称为复数振幅。

(2) 由于有

$$H(\omega) = \frac{\bar{X}}{A} = \frac{X e^{i\omega t}}{A e^{i\omega t}} = \frac{x(t)}{f(t)}, \quad (2.1-15)$$

因此, $H(\omega)$ 是系统的谐波响应 $x(t)$ 与谐波激励 $f(t)$ 之比, 且有

$$x(t) = H(\omega)f(t). \quad (2.1-16)$$

当系统参数 $\xi, \omega_n(m, c, k)$ 确定后, $H(\omega)$ 随之确定, 即可按上式求出系统在谐波 $f(t)$ 激励下的响应 $x(t)$ 。由此可见, 一个线性系统受到谐波激励时, 其响应与激励之间的线性关系在复数平面上表现得特别明显。当然, 此处的 $f(t)$ 、 $x(t)$ 均须写成(2.1-10)、(2.1-11)式的复向量的形式。

(3) 由于 $H(\omega)$ 是一个复数, 可将其写为复指数的形式

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-i\varphi(\omega)}, \quad (2.1-17)$$

式中, $|H(\omega)|$ 是 $H(\omega)$ 的模, $\varphi(\omega)$ 是 $H(\omega)$ 的幅角, 由(2.1-14)式, 可得

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}}, \quad (2.1-18)$$

$$\varphi(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}. \quad (2.1-19)$$

此上两式与前面得到的(2.1-9)、(2.1-7)式是完全一致的。

(4) 系统的谐波响应可表示为

$$x(t) = |H(\omega)| e^{-i\varphi} \cdot A e^{i\omega t} = |H(\omega)| A e^{i(\omega t - \varphi)}. \quad (2.1-20)$$

当然, 实际的 $x(t)$ 应是上式的实部。

(5) 再考虑到(2.1-11)式,

$$x(t) = X e^{i\omega t} = |H(\omega)| A e^{-i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$$

可见复数振幅

$$X = |H(\omega)| A e^{-i\varphi},$$

上式表明，复数振幅 X 不仅包含了振幅的信息，同时也包含了相位的信息。将 X 写成复指数形式，有

$$X = |X| e^{-i\varphi}, \quad (2.1-21)$$

式中，

$$|X| = |H(\omega)| A. \quad (2.1-22)$$

显然， $|X|$ 即为强迫振动的振幅。

2. 幅频特性 $|H(\omega)|$

根据(2.1-22)式， $|H(\omega)|$ 与振幅 $|X|$ 之间仅相差一个常数 A ，因此， $|H(\omega)|$ 描述了振幅与激励频率 ω 间的函数关系，故又称 $|H(\omega)|$ 为系统的幅频特性。图2.1-2示出了单自由度系统对应于不同的 ξ 值的幅频特性曲线。图中横坐标为 ω/ω_n ，即所谓“频率比”。图示曲线具有以下特点：

(1) 由(2.1-18)式，当 $\omega = 0$ 时， $|H(0)| = 1$ ，所有曲线从 $|H(0)| = 1$ 开始。当激励频率很低，即 $\omega \ll \omega_n$ 时， $|H(\omega)|$ 接近于1，说明低频激励时的振动幅值接近于静态位移。这时动态效应很小，强迫振动这一动态过程可近似地用静变形过程来描述。因此， $\omega/\omega_n \ll 1$ 的这一频率范围又被称为“准静态区”或“刚度区”。在这一区域内，振动系统的特性主要是弹性元件作用的结果。

(2) 当激励频率 ω 很高，即 $\omega/\omega_n \gg 1$ 时， $|H(\omega)| < 1$ ，且当 $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ 时， $|H(\omega)| \rightarrow 0$ ，说明在高频激励下，由于惯性的影响，系统来不及对高频激励作出响应，因而振幅很小。因此，称为“惯性区”。在这一区域内，振动系统的特性主要是质量元件作用的结果。

(3) 在激励频率 ω 与固有频率 ω_n 相近的范围内， $\omega/\omega_n \approx 1$ ， $|H(\omega)|$ 曲线出现峰值，说明此时动态效应很大，振动幅值高出静态位移许多倍。然而，在这一频率范围内， $|H(\omega)|$ 曲线随阻尼率 ξ 的不同有很大的差异。当 ξ 较大时， $|H(\omega)|$ 峰值较低；反之 $|H(\omega)|$ 的峰值较高。因此，这一频率范围又被称为“阻尼

区”。在这一区域内，振动系统的特性主要是阻尼元件作用的结果。显然，在此区域中，增大系统的阻尼对振动有很强的抑制效果。

(4) 将(2.1-18)式对 ω 求导并令其等于0，得 $|H(\omega)|$ 的极大值点为：

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (2.1-23)$$

将 ω_r 代入式(2.1-18)，得 $|H(\omega)|$ 的极大值为

$$|H(\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (2.1-24)$$

当激励频率等于 ω_r 时， $|H(\omega)|$ 取极大值 $|H(\omega_r)|$ ，这种情况下的强迫振动称为共振。 ω_r 称为共振频率， $|H(\omega_r)|A$ 为共振振幅。(2.1-23)式所示的共振频率 ω_r 、(1.4-11)式所示的有阻尼自然频率 ω_d 和无阻尼自然频率 ω_n ，三者之间具有如下关系：

$$\omega_r < \omega_d < \omega_n. \quad (2.1-25)$$

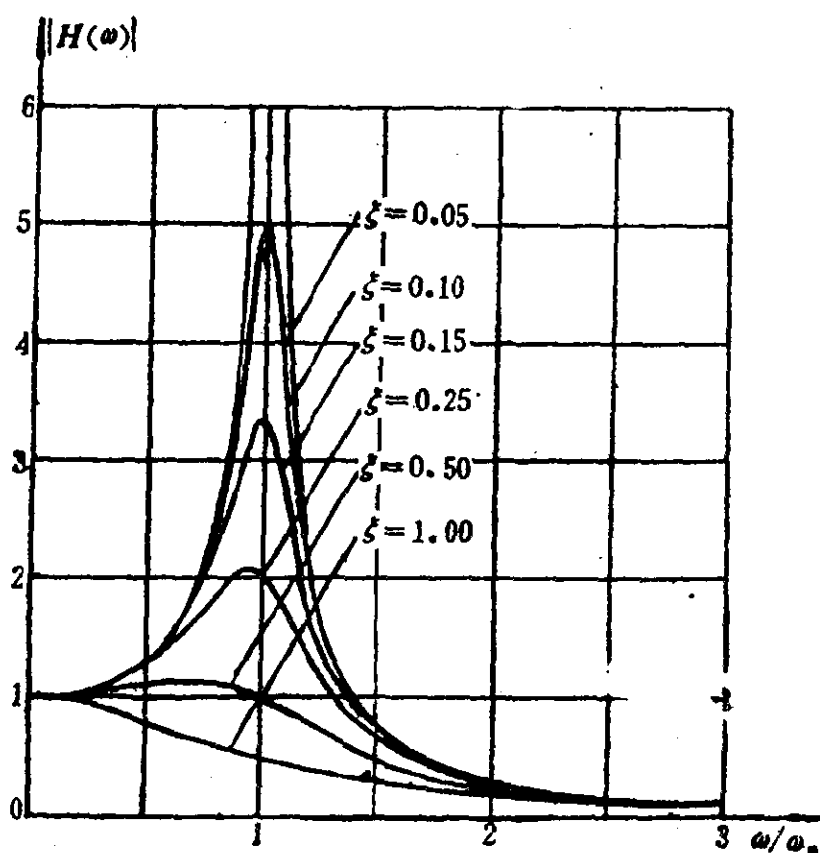


图 2.1-2

因此，共振并不发生在 ω_n 处，而是发生在略低于 ω_n 处，如图2.1-2所示。 $|H(\omega)|$ 的峰值点随 ξ 的增大而向低频方向移动。不仅如此，由(2.1-23)式还可见，当 $1 - 2\xi^2 < 0$ 即 $\xi > \sqrt{1/2}$ 时， ω_r 不存在， $|H(\omega)|$ 曲线无峰值，且 $|H(\omega)| < 1$ 。表示当阻尼系数 $\xi > 0.707$ 时，系统不会出现共振，且动态位移比静态位移小。

(5) 作为一种特殊情况，当 $\xi = 0$ 时，共振频率 ω_r 等于自然频率 ω_n ，由(2.1-18)式，此时 $|H(\omega_n)| = \infty$ ，即振幅趋于无穷大。可以证明，在这种情况下($\xi = 0, \omega = \omega_n$)，共振振幅将随时间按线性关系增长，如图2.1-3所示，用代入法不难证明，在此情况下方程(2.1-3)的特解为

$$x(t) = \frac{A}{2} \omega_n t \sin \omega_n t. \quad (2.1-26)$$

(6) 前面提到，幅频特性曲线在共振区域的形状与阻尼率 ξ 有密切关系， ξ 越小，共振峰越尖，据此，可由共振峰的形状估算 ξ 。这是由实验测定 ξ 的又一种常用方法。由(2.1-23)、(2.1-24)式，当 ξ 很小(如 $\xi < 0.05$)时， $\omega_r \approx \omega_n$ ， $|H(\omega_r)| \approx |H(\omega_n)|$ ，记 $Q = |H(\omega_n)|$ ，则有

$$Q = |H(\omega_n)| \approx \frac{1}{2\xi}, \quad (2.1-27)$$

Q 称为品质因数(quality factor)。如图2.1-4所示。在峰值两边， $H(\omega)$ 等于 $Q/\sqrt{2}$ 的频率， ω_1 、 ω_2 称为半功率点(half

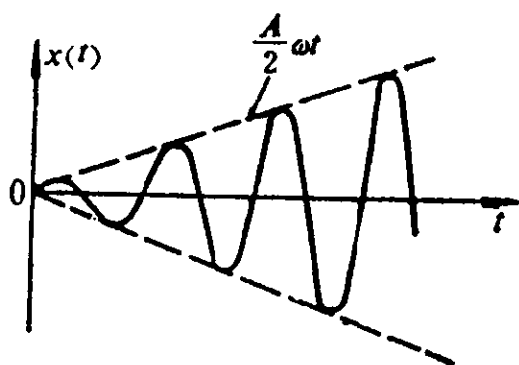


图 2.1-3

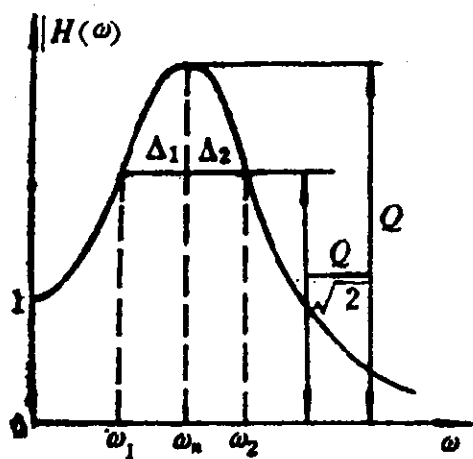


图 2.1-4

power point), ω_1 与 ω_2 之间的频率范围($\omega_2 - \omega_1$)称为系统的半功率带宽。由(2.1-18)式

$$|H(\omega_{1,2})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega_{1,2}/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega_{1,2}/\omega_n)^2}}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$

对上式两边平方并整理得

$$\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_n}\right)^4 + 2(2\xi^2 - 1)\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_n}\right)^2 + (1 - 8\xi^2) = 0,$$

对 $(\omega_{1,2}/\omega_n)^2$ 解此一元二次方程得

$$\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_n}\right)^2 = 1 - 2\xi^2 \mp 2\xi\sqrt{1 + \xi^2},$$

当 ξ 很小时, 有

$$\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 \mp 2\xi,$$

即 $\omega_2^2 - \omega_1^2 \approx 4\xi\omega_n^2,$

或 $(\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1) = 4\xi\omega_n^2.$

由图2.1-4, 当 ξ 很小时, $\Delta_1 = \Delta_2$, 则近似有 $\omega_2 + \omega_1 \approx 2\omega_n$, 从而由上式有 $\omega_2 - \omega_1 \approx 2\xi\omega_n,$

$$\therefore \xi \approx \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n}. \quad (2.1-28)$$

这样, 当通过激振实验, 得到 $|H(\omega)|$ 曲线后, 找出共振频率 $\omega_r \approx \omega_n$, 和半功率带宽 $(\omega_2 - \omega_1)$, 即可由上式算得系统的阻尼率 ξ .

3. 相频特性 $\varphi(\omega)$

(2.1-19)式描述了振动位移、激励两信号之间的相位差与激励频率之间的函数关系, 故称 $\varphi(\omega)$ 为系统的相频特性。图2.1-5示出了对应于不同的 ξ 值的相频特性曲线。图中横坐标仍为频率比 ω/ω_n 。 $\varphi(\omega)$ 曲线具有以下特点:

(1) 由(2.1-19)式, 当 $\omega = 0$ 时, $\varphi(0) = 0$, 即所有曲线从

$\varphi(0) = 0$ 开始。当激励频率 ω 很低时， ω/ω_n 取值很小， $\varphi(\omega)$ 接近于0，说明低频激励时振动位移 $x(t)$ 与激励 $f(t)$ 之间几乎是同相的，这与前述准静态区的结论是一致的。

(2) 当 $\omega \gg \omega_n$ 时， $\varphi(\omega) \rightarrow \pi$ ，即 $x(t)$ 与 $f(t)$ 的相位相反。这正是前述“惯性区”的特点。因为在惯性区主要是质量在起作用，而我们知道，一质块的加速度 $\ddot{x}(t)$ 与其所受到的力 $f(t)$ 同相，又从(2.1-13)式知 $\ddot{x}(t)$ 与 $x(t)$ 正好反相，因此 $x(t)$ 当与 $f(t)$ 的相位相反。

(3) 当 $\omega \approx \omega_n$ 时， $\varphi(\omega) \approx \pi/2$ ，这正是“阻尼区”的特点，因为阻尼器所受到的力 $f(t)$ 与其速度 $\dot{x}(t)$ 同相，而由(2.1-13)式， $\dot{x}(t)$ 与 $x(t)$ 的相差正好为 $\pi/2$ 。当 $\xi \approx 0$ 时，在 ω 扫过 ω_n 时， φ 由0突跳到 π ，这种现象称为“倒相”。

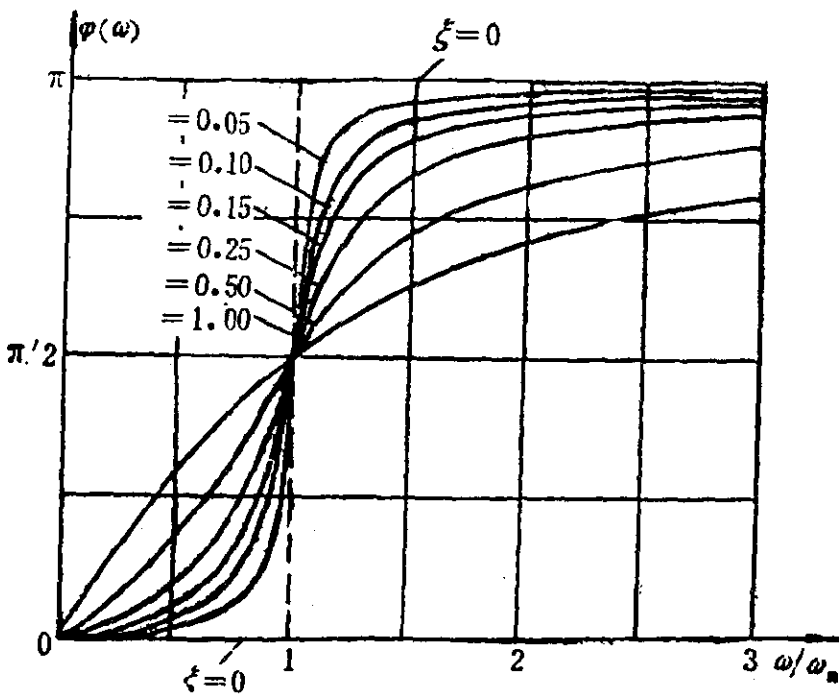


图 2.1-5

4. Nyquist图

由于频率特性函数 $H(\omega)$ 是复函数，可在复平面中对之进行描述。以频率 ω 作为参变量，将 $H(\omega)$ 的幅值 $|H(\omega)|$ 和相位

$\varphi(\omega)$ 同时在复平面中反映出来的图形称为Nyquist图。图 2.1-6 示出了典型的单自由度系统对应于不同 ξ 值的Nyquist曲线族。该族曲线以 $\lambda = \omega/\omega_n$ 为参变量，其中 λ 表示频率比。图中还给出了“等频率比”曲线族，分析图示曲线，可见Nyquist图具有以下特点：

(1) 由前述， $\varphi(\omega)$ 的变化范围为 $0 \sim \pi$ ，所以单自由度系统的Nyquist图位于复平面的下半平面。

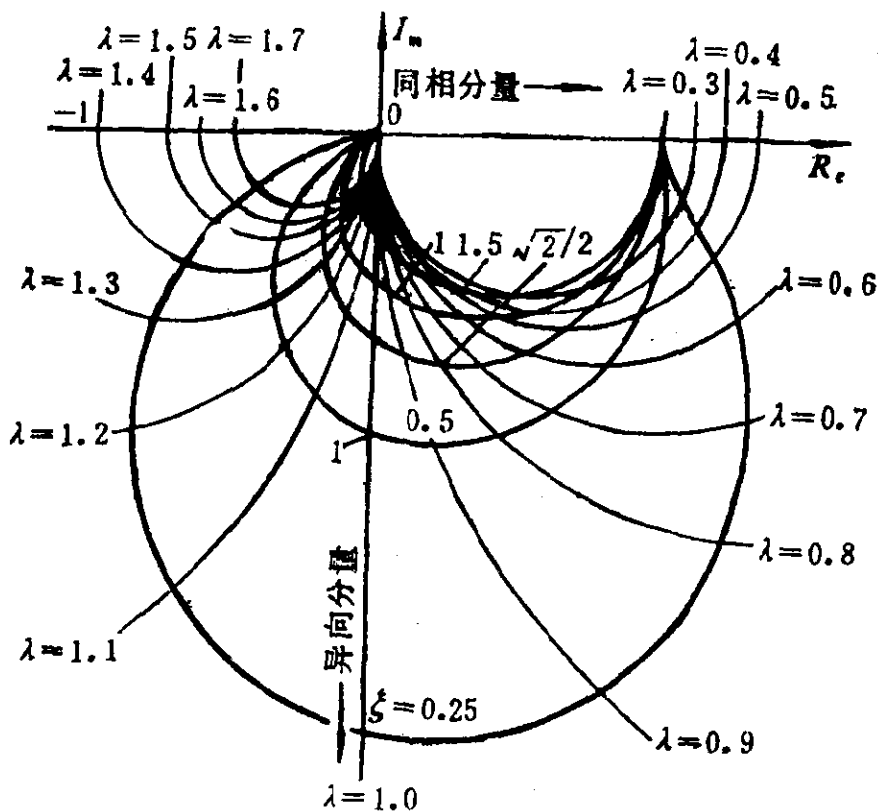


图 2.1-6

(2) 随着阻尼率 ξ 的增大，Nyquist曲线的“环”减小。

(3) 在共振区附近， $|H(\omega)|$ 取值很大， $\varphi(\omega)$ 变化剧烈，故在Nyquist图上，共振区的描述更加清楚，而非共振区则“缩”得很小，显然，这对于分析研究共振区附近的特性是方便的。

2.1.3 线性系统在谐波激励下的复向量平衡

由(2.1-3)式，单自由度系统在谐波激励下的运动微分方程

为：

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 f(t), \quad (2.1-29)$$

由(2.1-10)、(2.1-11)、(2.1-13)式知，上式中的每一项都可以用一个复矢量来代表。因此，上式又是一个向量等式。分析等号左边的三个复向量，由(2.1-16)、(2.1-17)式，

$$x(t) = |H(\omega)| e^{-i\varphi(\omega)} f(t),$$

上式表示， $x(t)$ 滞后于 $f(t)$ 的相位差为 φ ，即复向量 $f(t)$ 顺时针旋转 φ 角，则可与复向量 $x(t)$ 重合，如图2.1-7所示。又由(2.1-13)式可知振动速度 $\dot{x}(t)$ 超前于振动位移 $x(t)$ 的角度为 $\pi/2$ ，振动加速度 $\ddot{x}(t)$ 超前于振动位移 $x(t)$ 的角度为 π ，即正好反相。据此可知(2.1-29)式各复向量在某一瞬时的平衡关系，如图2.1-7所示。需要指出，由于这些复平面上的向量都是旋转向量，因而，图2.1-7所示的整个向量平衡图形作为一个整体以角速度 ω 沿逆时针方向旋转，但在任一时刻，各向量的长度及它们之间的角度关系均保持不变。因此，在研究各向量间的相对关系时，就可以略去共同的旋转因子 $e^{i\omega t}$ 不计，而将这些旋转向量作为静止向量来研究，实际上是研究它们的复数振幅之间的关系。

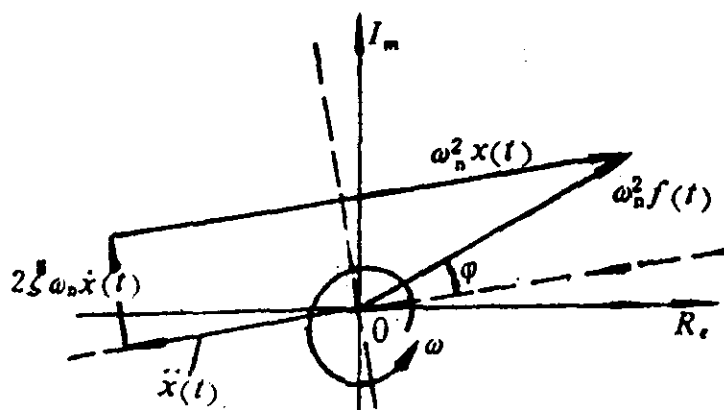


图 2.1-7

2.1.4 振动系统的全部响应

根据微分方程理论，运动微分方程(2.1-3)的解包括两部

分：一部分是相应的齐次微分方程的通解，这就是第一章所述有阻尼系统的自由振动，由式(1.4-12)确定，另一部分是非齐次微分方程的一个特解，由式(2.1-4)、(2.1-8)确定，因此，综合这两部分，式(2.1-3)的全部解为：

$$x(t) = Ce^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi) + A|H(\omega)| \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.1-30)$$

上式中第一项对应于自由振动，其中 C 、 ψ 由初始条件确定。显然，随着时间 t 的增长，此项将趋于零，故称此项为瞬态振动，

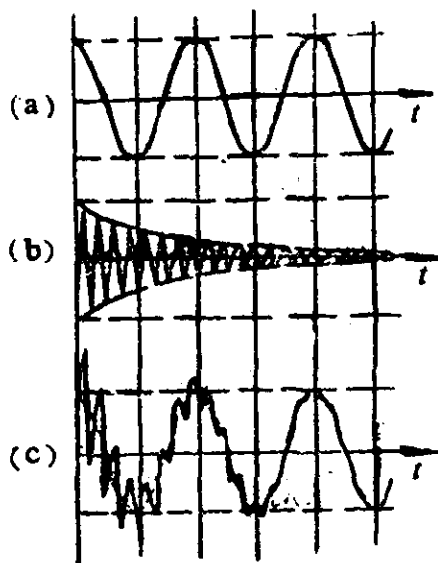


图 2.1-8

或称为方程的瞬态解，如图(2.1-8(b))所示，上式中第二项对应于稳态的强迫振动，这是一种持续的振动，故称为稳态振动，或称为方程的稳态解，如图2.1-8(a)所示，整个强迫振动是瞬态与稳态振动的叠加，如图2.1-8(c)所示。

读者在这里不应发生误解，

以为初始条件为零时，似乎就不会有自由振动。这种看法是不对的，试看下列。

例2.1 单自由度无阻尼系统从 $t=0$ 时刻开始受到 $F(t) = kA \cos \omega t$ 的激励，假定其初始条件为零，即 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ，试求系统的振动。

解：由题意知系统的运动微分方程为

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 A \cos \omega t,$$

由于 $\xi = 0$ ，由(2.1-14)式，有

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}, \quad (a)$$

由(2.1-19)式，激励与响应间无相位差， $\varphi = 0$ ，再根据(2.1-30)

式，得系统的振动为

$$x(t) = C \cos(\omega_n t - \psi) + A |H(\omega)| \cos \omega t,$$

根据初始条件解得

$$C = -A |H(\omega)|, \quad \psi = 0, \quad (b)$$

从而，无阻尼系统的强迫振动为

$$x(t) = A |H(\omega)| (\cos \omega t - \cos \omega_n t). \quad (c)$$

由此例可知，即使是在 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 条件下，响应中仍有自由振动项 $-A |H(\omega)| \cos \omega_n t$ 。由于此时假定系统无阻尼，自由振动没有被衰减，强迫振动是两个同振幅而不同频率的谐波的叠加。当 ω 与 ω_n 不可通约时，总响应甚至不是周期函数。当然，实际系统总是存在着阻尼，自由振动部分总会被衰减掉。在第一章讲过，自由振动是由初始激励 x_0 与 v_0 激起的，而且，由 (1.3-7) 式还可看出，当 $x_0 = 0$ 与 $v_0 = 0$ 时，自由振动不存在。上例说明，在存在过程激励的条件下，即使初始条件为零，仍然可能有自由响应成分，这是由于稳态强迫响应的建立，需要一个过渡过程的缘故。上例中，稳态强迫响应为

$$x(t) = \frac{A}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \cos \omega t,$$

按此，在 $t = 0$ 时刻的强迫响应的位移 $x(0)$ 与速度 $\dot{x}(0)$ 分别为

$$x(0) = \frac{A}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad \text{与} \quad \dot{x}(0) = 0,$$

显然，稳态强迫响应的初始位移与实际的条件 $x_0 = 0$ 不相符合，由于在施加过程激励的那一瞬间（即 $t = 0$ 时），位移不可能从 0 突变到上式中的 $A/(1 - (\omega/\omega_n)^2)$ ，因此需要一个过渡过程，而此例中的自由响应正是反映了这样的过渡过程，而由于假定 $\xi = 0$ ，这个过渡过程又被延续了下来。事实上，读者不妨自行证明，如果我们假定初始条件为 $x_0 = A/(1 - (\omega/\omega_n)^2)$ ， $v_0 = 0$ ，即正好是稳态强迫响应所要求的初始值，那么，过渡过程就不必要了，式 (2.1-30) 中的自由响应项就成为零。

例2.2 单自由度有阻尼系统受到 $F(t) = kA \cos \omega t$ 激励，系统的振动如(2.1-30)式所示，在初始条件 $x(0) = x_0$ ， $\dot{x}(0) = v_0$ 下，试确定式中常数 C 和 ψ 。

解：(2.1-30)式中，常数 C 、 ψ 由初始条件确定，根据 $x(0) = x_0$ ，有：

$$C \cos \psi + A |H(\omega)| \cos \varphi = x_0,$$

根据 $\dot{x}(0) = v_0$ ，有

$$-\xi \omega_n C \cos \psi + \omega_d C \sin \psi + \omega A |H(\omega)| \sin \varphi = v_0.$$

联立以上两式，解得

$$C = \pm \left\{ \left[\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0 - A |H(\omega)| (\xi \omega_n \cos \varphi + \omega \sin \varphi)}{\omega_d} \right]^2 + (x_0 - A |H(\omega)| \cos \varphi)^2 \right\}^{1/2},$$

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0 - A |H(\omega)| (\xi \omega_n \cos \varphi + \omega \sin \varphi)}{\omega_d (x_0 - A |H(\omega)| \cos \varphi)}.$$

(2.1-31)

上式更加清楚地表示，即使当 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 时，仍然可能有 $C \neq 0$ ，即自由振动依然存在。特别地，当 $\xi = 0$ ， $x_0 = v_0 = 0$ 时，上式即退回到例2.1中(b)式。

2.1.5 谐波激励下的能量平衡与等效阻尼

第一章已经提出了等效粘性阻尼的概念，在上述谐波分析的基础上，本小节讲述线性系统在谐波激励下的能量平衡问题并介绍等效粘性阻尼的概念与计算方法。

1. 能量平衡

从能量的角度来看，在稳态强迫振动过程中，外界激励持续地向系统输入能量，这部分能量由粘性阻尼器所消耗。

现考虑一个单自由度系统，在谐波 $F(t) = kA \cos \omega t$ 激励下的稳态响应

$$x(t) = A|H(\omega)| \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.1-32)$$

记一个振动周期 T 当中外力 $F(t)$ 所作之功为 ΔE^+ ，则有

$$\begin{aligned} \Delta E^+ &= \int_0^T F(t) dx = \int_0^T F(t) \dot{x} dt \\ &= - \int_0^{2\pi/\omega} kA \cos \omega t \cdot A|H(\omega)| \omega \sin(\omega t - \varphi) dt \\ &= -kA^2|H(\omega)| \omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt, \end{aligned}$$

积分上式，得

$$\Delta E^+ = kA^2|H(\omega)| \pi \sin \varphi. \quad (2.1-33)$$

另一方面，考虑由于粘性阻尼的存在，在一个振动周期 T 当中所耗散的能量 ΔE^- 。该能量可按下式计算，

$$\Delta E^- = \int c \dot{x} dx = \int_0^T c \dot{x} \dot{x} dt = c \int_0^T \dot{x}^2 dt$$

对(2.1-32)式求导，并代入上式，得

$$\Delta E^- = cA^2|H(\omega)|^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - \varphi) dt,$$

积分后，得

$$\Delta E^- = cA^2|H(\omega)|^2 \omega \pi. \quad (2.1-34)$$

由(2.1-33)、(2.1-34)两式知，在一个振动周期内，振动系统净增加的能量为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E^+ - \Delta E^- \\ &= \pi A^2|H(\omega)| (k \sin \varphi - c \omega |H(\omega)|). \end{aligned} \quad (2.1-35)$$

现在我们从能量的观点，来看由(2.1-18)、(2.1-19)两式确定的稳态响应的 $|H(\omega)|$ 与 $\varphi(\omega)$

所具有的意义。该两式可由图2.1-9所示的三角形来表示。由该三角形的垂直边与斜边之比可得

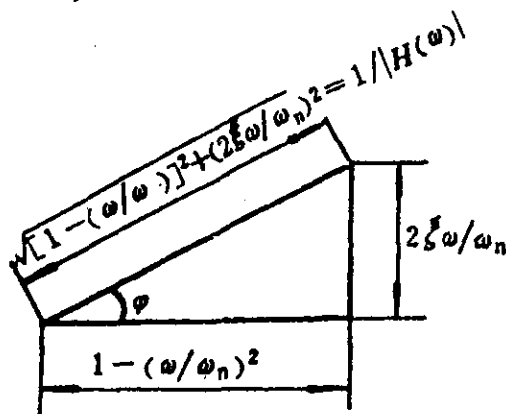


图 2.1-9

$$\sin\varphi = 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} |H(\omega)| = \frac{c\omega}{k} |H(\omega)|, \quad (2.1-36)$$

以此式代入(2.1-35)式, 得

$$\Delta E = \pi A^2 |H(\omega)| \{c\omega |H(\omega)| - c\omega |H(\omega)|\} = 0,$$

这表明由(2.1-18)、(2.1-19)两式给出的 $|H(\omega)|$ 与 $\varphi(\omega)$ 正好使外力 $F(t)$ 对系统作的功 ΔE^+ 在数量上等于由于粘性阻尼所耗散的能量, 即使得振动系统的能量“收支”平衡, 而能量的净增量为零。这就是为什么在谐波力的作用下, 振动系统的稳态响应为等幅的谐波振动的缘故。

将(2.1-36)式代入(2.1-33)式, 并以(2.1-22)式代入(2.1-33)与(2.1-35)式, 得谐波激励下达到稳态响应时, 在一个振动周期内外力做功与能量耗散为

$$\Delta E^+ = \Delta E^- = c\pi\omega |X|^2, \quad (2.1-37)$$

2. 库仑阻尼的等效粘性阻尼系数

一般来说, 摩擦表面的干摩擦力 F_c 是一个常力, $F_c = \mu mg$, 在整个强迫振动过程中, 其大小不变, 但方向与振动速度的方向相反。易知, 在一个振动周期中振动系统由于摩擦力而耗散的能量为

$$\Delta E_c^- = 4\mu mg |X|.$$

等效粘性阻尼率折算的原则是一个振动周期内由于摩擦力 F_c 所消耗的能量 ΔE_c^- 等于等效的粘性阻尼所消耗的能量 ΔE^- 。令上式与(2.1-37)式相等, 解得库仑阻尼的等效阻尼系数为

$$c_{e,q} = \frac{4\mu mg}{\pi\omega |X|}, \quad (2.1-38)$$

3. 流体阻尼的等效粘性阻尼系数

由(1.1-17)式流体阻尼力 F_n 在一个振动周期内所耗散的能量为

$$\Delta E_n^- = 4 \int_0^{\pi/4} |F_n| \dot{x} dt = 4 \int_{\pi/4}^{(\pi/4 + \varphi)/\omega} \mu x^3 dt$$

$$\begin{aligned}
&= 4\gamma\omega^3 |X|^3 \int_{\varphi/\omega}^{(\frac{\pi}{2}+\varphi)/\omega} \sin^3(\omega t - \varphi) dt \\
&= 4\gamma\omega^3 |X|^3 \left[-\frac{1}{\omega} \sin^3(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3\omega} \cos^3(\omega t - \varphi) \right]_{\varphi/\omega}^{(\frac{\pi}{2}+\varphi)/\omega} \\
&= \frac{8}{3} \gamma \omega^2 |X|^3,
\end{aligned}$$

按照等效阻尼的折算原则，令上式与(2.1-37)式相等，可解得流体阻尼的等效阻尼系数为

$$c_{e,q} = \frac{8}{3\pi} \gamma \omega |X|. \quad (2.1-39)$$

4. 结构阻尼的等效阻尼系数

由(1.1-18)式和(2.1-37)式相等，有

$$\alpha |X|^2 = c\pi\omega |X|^2,$$

即可得结构阻尼的等效粘性阻尼系数为

$$c_{e,q} = \frac{\alpha}{\pi\omega}. \quad (2.1-40)$$

根据上式，对于具有结构阻尼的单自由度振动系统，当受到谐波激励时，其运动微分方程为：

$$m \ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{\pi\omega} \dot{x}(t) + kx(t) = kf(t) = kA \cos \omega t,$$

考虑到在谐波激励下，有 $\dot{x} = i\omega x(t)$ ，上式可写为

$$m \ddot{x}(t) + k(1 + i\xi')x(t) = kA \cos \omega t,$$

式中， $\xi' = \frac{\alpha}{k\pi}$ ，

ξ' 是无量纲系数。由上式可见，结构阻尼的系统具有复刚度 $k(1 + i\xi')$ ，其实部 k 表征真正的弹簧刚度，虚部 $k\xi'$ 表征结构阻尼的影响，考虑到式(1.4-3)的记法，上式可写为：

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2(1 + i\xi')x(t) = \omega_0^2 f(t), \quad (2.1-41)$$

与(2.1-16)式所示粘性阻尼系统的强迫振动类似，上式的稳态解，即结构阻尼系统的强迫振动可写为

$$x(t) = H'(\omega)f(t),$$

式中， $H'(\omega)$ 是结构阻尼系统的频率特性函数。以(2.1-10)、(2.1-11)及(2.1-13)式代入(2.1-41)式，也可得到类似于(2.1-14)式的结果，

$$H'(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + i\xi'}, \quad (2.1-42)$$

同样可得结构阻尼系统的放大系数，

$$|H'(\omega)| = \frac{X}{A} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \xi'^2}}, \quad (2.1-43)$$

以及响应 $x(t)$ 相对于激励 $f(t)$ 的相位滞后角度

$$\varphi(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{\xi'}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (2.1-44)$$

当 ξ' 很小时，结构阻尼系统谐波响应的幅频特性、相频特性以及Nyquist图均与具有等效粘性阻尼的系统非常相近。唯结构阻尼下，幅频特性曲线的最大值一定发生在 $\omega = \omega_n$ 处，而不管 ξ' 的大小如何。但须注意，如果不是谐波激励，则结构阻尼系统的特性与粘性阻尼系统的特性会有很大的不同。

§ 2.2 周期激励下的强迫振动，

Fourier级数法

前面分析了单自由度线性系统在谐波激励下的强迫振动。谐波是一种最简单的周期函数，但周期函数并不只是谐波。例如，图2.2-1所示的周期方波、周期三角波等，都是典型的周期函

数。本节研究单自由度线性系统在周期激励下的强迫振动。

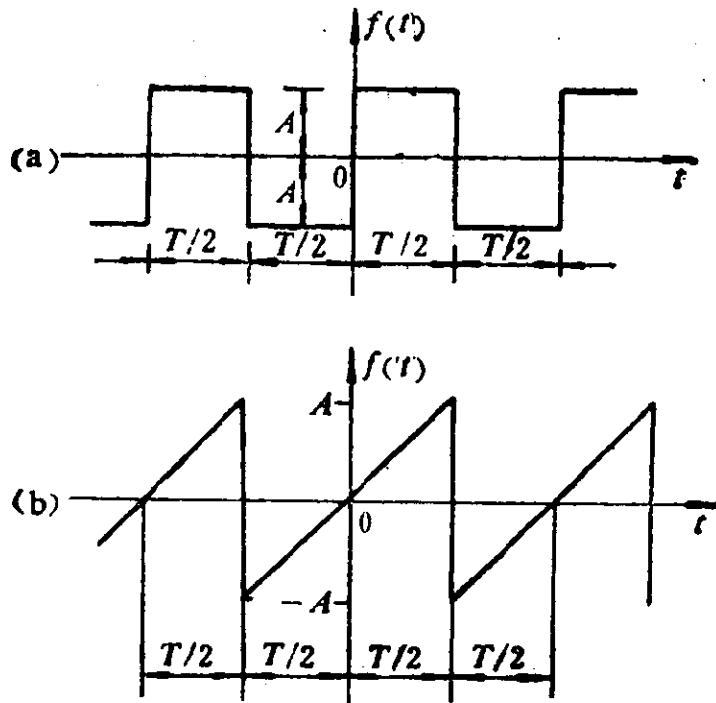


图 2.2-1

2.2.1 叠加原理

线性微分方程描述的系统是线性系统，线性系统满足所谓的叠加原理，即如果系统在 $F_1(t)$ 激励下的响应为 $x_1(t)$ ，系统在 $F_2(t)$ 激励下的响应为 $x_2(t)$ ，则当以 $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 的线性组合 $c_1F_1(t) + c_2F_2(t)$ 激励系统时，系统的响应为 $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ 。如图 2.2-2 所示，这里， $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 是指任意激励函数，而不仅仅是两个特定的函数。 c_1 、 c_2 是任意常数。读者不难以 (2.1-1) 式为例检验这一原理的正确性。

叠加原理对于线性系统是极其重要的，基于这一原理，已发展了非常完善、成熟的理论和技术来处理线性系统的问题。下面将要介绍的 Fourier 级数分析法、Fourier 变换法、脉冲响应函数法就是叠加原理成功应用的典型代表。这是因为对于任何复杂的激励，都可将其分解为一系列的简单激励，再将系统对于这些

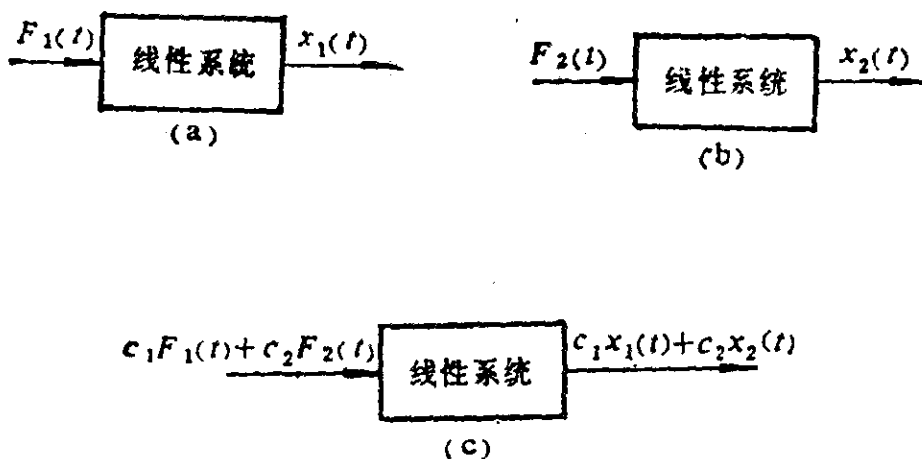


图 2.2-2

简单激励的响应加以叠加，就得到了系统对于复杂激励的响应。而根据所分解的简单激励的形式不同，出现了不同的分析方法，例如，将周期激励分解为基波及其高次谐波的组合，再将对这些谐波的响应进行叠加，就是所谓的Fourier级数分析法；将任意激励分解为具有所有频率成分的无限多个无限小的谐波的组合，再对这些谐波响应进行叠加，就是所谓的Fourier变换法；将任意激励分解为无穷多个幅值不同的脉冲的组合，再对这些脉冲的响应进行叠加，就是所谓的脉冲响应函数法。这就是下述各种分析方法的基本思想。其实，叠加原理也已经在前述处理谐波激励下的强迫振动问题中得到了体现：系统的全部响应正是对于初始激励的响应和对于过程激励的响应的叠加。

2.2.2 周期激励下的强迫振动，Fourier级数 分析法

在数学上，我们知道一个周期激励函数 $f(t)$ 可展开成Fourier级数，即可分解成为无穷多个谐波函数的和。其频率分别为

$\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ 等等, 而当每一谐波单独激励系统时, 采用上一节的方法即可得到相应的谐波响应, 那么, 根据叠加原理, 系统对于周期激励 $f(t)$ 的响应就是各谐波单独激励时的响应之和. 这种思想如图2.2-3所示. 根据上述思想, 可以方便地求得系统对于任意周期激励的响应.

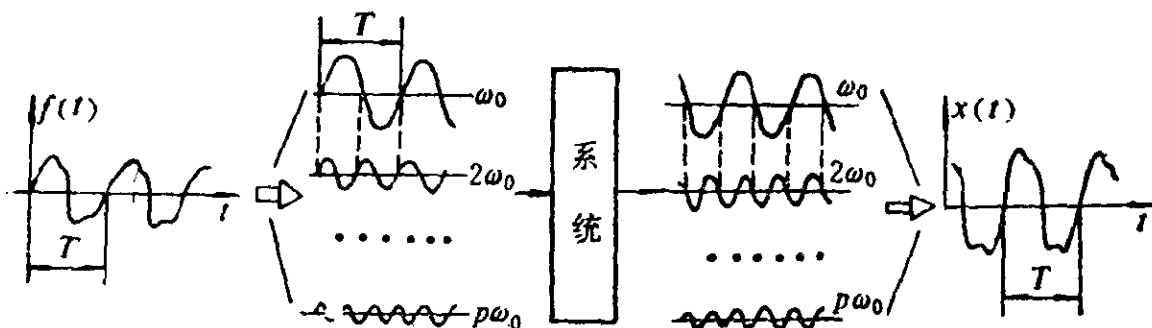


图 2.2-3

设单自由度系统的运动微分方程为:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = kf(t) = F(t), \quad (2.2-1)$$

或

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n x(t) = \omega_n f(t), \quad (2.2-2)$$

式中, $f(t)$ 为周期函数.

前面讲过, 频率 ω 的谐波激励 $f(t)$ 可表示为 $f(t) = Ae^{i\omega t}$, 类似地, 周期函数 $f(t)$ 可展开为以下的Fourier级数

$$f(t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{ip\omega_0 t}, \quad (2.2-3)$$

式中, 频率为 $\omega_0 = 2\pi/T$ 的成分称为“基频”, 这里 T 为 $f(t)$ 的周期; 而频率为 $p\omega_0$ ($p=2, 3, \dots$)的成分称为高次谐波, A_p 是频率为 $p\omega_0$ 的 p 次谐波的幅值. 须注意, 这里 A_p 一般为复数, 因为其中除幅值的信息以外, 还须包括相位信息. 根据Fourier级数的展开定理, A_p 可由 $f(t)$ 算得:

$$A_p = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{i p \omega_0 t} dt, \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2.2-4)$$

由前所述，对于频率为 ω 、幅值为 A 的谐波 $Ae^{i\omega t}$ 激励，系统的响应为

$$\begin{aligned} x(t) &= X e^{i\omega t} = H(\omega) A e^{i\omega t} = |H(\omega)| A e^{i(\omega t - \varphi)} \\ &= |X| e^{i(\omega t - \varphi)} \end{aligned}$$

其中 $|H(\omega)|$ ， φ 分别由(2.1-18)、(2.1-19)式给出。类似地，

对于频率为 $p\omega_0$ 、幅值为 A_p 的 p 次谐波激励 $A_p e^{i p \omega_0 t}$ ，系统的响应为

$$\begin{aligned} x_p(t) &= X_p e^{i p \omega_0 t} = H(p\omega_0) A_p e^{i p \omega_0 t} \\ &= |H(p\omega_0)| A_p e^{i(p\omega_0 t - \varphi_p)} \\ &= |X_p| e^{i(p\omega_0 t - \varphi_p)}, \quad (p=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

再根据叠加原理，系统在式(2.2-3)所示的一系列谐波的激励下，其响应是这一系列谐波响应的叠加，

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{p=1}^{\infty} x_p(t) = \sum_{p=1}^{\infty} X_p e^{i p \omega_0 t} = \sum_{p=1}^{\infty} H(p\omega_0) A_p e^{i p \omega_0 t} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} |H(p\omega_0)| A_p e^{i(p\omega_0 t - \varphi_p)} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} |X_p| e^{i(p\omega_0 t - \varphi_p)}. \end{aligned} \quad (2.2-5)$$

由(2.1-18)、(2.1-19)式，系统对于 p 次谐波激励的复频响应 $H(p\omega_0)$ 、放大系数 $|H(p\omega_0)|$ 和相位差 $\varphi_p(p\omega_0)$ 分别为

$$\begin{aligned} H(p\omega_0) &= \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - (p\omega_0)^2) + i2\xi\omega_n p\omega_0} \\ &= \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{p\omega_0}{\omega_n}\right)^2\right] + i2\xi \frac{p\omega_0}{\omega_n}}, \end{aligned} \quad (2.2-6)$$

$$|H(p\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - (p\omega_0/\omega_n)^2)^2 + (2\xi p\omega_0/\omega_n)^2}}, \quad (2.2-7)$$

$$\varphi_r(p\omega_0) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi p\omega_0/\omega_n}{1 - (p\omega_0/\omega_n)^2}, \quad (2.2-8)$$

式中, ω_n 是单自由度系统的自然频率。

分析上述结果, 系统在周期激励下的响应具有如下特点:

(1) 对于周期为 T 的激励, 由于基频 $\omega_0 = 2\pi/T$, 由 (2.2-5) 式有

$$\begin{aligned} x(t+T) &= \sum_{r=1}^{\infty} |X_r| e^{i[r\omega_0(t+T) - \varphi_r]} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} |X_r| e^{i[r\omega_0 t + 2\pi r - \varphi_r]} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} |X_r| e^{i(r\omega_0 t - \varphi_r)} = x(t), \end{aligned}$$

即 $x(t+T) = x(t)$ 。

上式表示, 线性系统在周期性激励 (不一定是谐波激励) 下的响应仍然是周期函数, 且响应的周期与激励的周期相同。

(2) 由 (2.2-7)、(2.2-8) 式可见, 以不同频率成分的谐波激励系统时, 系统的放大倍数 $|H(p\omega_0)|$ 和相位 $\varphi_r(p\omega_0)$ 均不同, 因此, 响应 $x(t)$ 的波形必然不同于激励 $f(t)$ 的波形。这表明, 尽管响应仍是与激励同周期的周期函数, 但响应发生了波形的畸变。一般而言, 只有当激励不仅是周期函数, 而且还是谐波的情况下, 线性系统的响应才不发生波形畸变。

(3) 对于无阻尼系统, 由于 $\xi = 0$, 由式 (2.2-8) 有 $\varphi_r(p\omega_0) = 0$, 即无阻尼系统不存在相位滞后问题, 因而其复数频率响应 $H(\omega)$ 中虚部等于 0, 从而由 (2.2-6) 式有

$$H(p\omega_0) = \frac{1}{1 - (p\omega_0/\omega_n)^2}, \quad (2.2-9)$$

由上式显见，当 $\omega_0 = \omega_n/p$ 时， $|H(p\omega_0)| \rightarrow \infty$ 。这表示，单自由度系统在周期激励下的共振情况比谐波激励要危险得多，当激励的基频 ω_0 是系统固有频率 ω_n 的整数分之一时，系统就可能产生共振。

另外，还需要说明的是，上述分析中包括有周期函数 $f(t)$ 的均值等于零这一假设，即假定 $f(t)$ 的Fourier展开式(2.2-3)中不含有常数项。当 $f(t)$ 的均值不等于零时， $f(t)$ 的展开式为

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} A_r e^{i r \omega_0 t}, \quad (2.2-10)$$

式中， A_r 的算式仍同式(2.2-4)， A_0 的算式为

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt. \quad (2.2-11)$$

由于 $f(t)$ 的均值相当于一个恒力，而我们已经知道，恒力作用到系统上，只是使得系统产生一个静变形，因此，在振动分析中可以分开处理。

例2.4 试求单自由度无阻尼系统对图2.2-1(a)所示周期方波激励的响应。

解：根据周期方波的图形，其在一个周期中的函数式为

$$f(t) = \begin{cases} -A & -T/2 < t < 0, \\ A & 0 < t < T/2. \end{cases} \quad (a)$$

首先，由于 $f(t)$ 的均值等于0，故按式(2.2-3)将 $f(t)$ 展开为Fourier级数，注意实际的 $f(t)$ 是式(2.2-3)的实部，其中，各展开项的系数 A_r 按式(2.2-4)求得：

$$A_r = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) (\cos p \omega_0 t - i \sin p \omega_0 t) dt.$$

由于 $f(t)$ 为奇函数，故上式对 $f(t) \cos p \omega_0 t$ 的积分等于0，只需考虑 $i f(t) \sin p \omega_0 t$ 的积分，因此有：

$$A_r = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) (-i \sin p \omega_0 t) dt$$

$$= \frac{2i}{T} \left[\int_{-\pi/2}^0 A \sin p\omega_0 t dt - \int_0^{\pi/2} A \sin p\omega_0 t dt \right]$$

$$= -\frac{4Ai}{T p\omega_0} (1 - \cos p\pi) = -\frac{4Ai}{p\pi}, (p=1, 3, 5, \dots) \quad (b)$$

将 A 代入式(2.2-3), 并取实部得 $f(t)$ 的 Fourier 级数为:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{p=1, 3, \dots} \frac{1}{p} \sin p\omega_0 t, (\omega_0 = 2\pi/T) \quad (c)$$

对于无阻尼系统, 其频率响应函数由(2.2-9)式确定, 且 $\varphi_p(p\omega_0) = 0$, 代入式(2.2-5)得系统对周期方波激励的响应为:

$$x(t) = \sum_{p=1, 3, \dots} \frac{1}{1 - (p\omega_0/\omega_n)^2} \cdot \frac{4A}{\pi} \sin p\omega_0 t$$

$$= \frac{4A}{\pi} \sum_{p=1, 3, \dots} \frac{\sin p\omega_0 t}{p(1 - (p\omega_0/\omega_n)^2)} \quad (d)$$

对于周期性激励 $f(t)$, 可根据 $f(t)$ 展开的 Fourier 级数(2.2-3)在频率域中画出各谐波成分的幅值与频率的关系曲线, 通常称为 $f(t)$ 的频谱, 以反映各频率成分的谐波在 $f(t)$ 中所占的比重。例如, 根据式(c)绘制的上例中周期方波的频谱如图2.2-4所示。由图可见, 因为 $f(t)$ 是周期函数, $f(t)$ 的频谱是一种离散谱。在频率为 $p\omega_0$ 处, 谱线长度对应于该频率成分的谐波的幅值, 从而反映了该频率成分的谐波对于 $f(t)$ 的“贡献”。对于上例的方波, 基波的“贡献”最大, 各高次谐波的“贡献”递减。若设系统的自然频率为 $\omega_n = 4\omega_0$, 由上例中式(d)得系统的响应为

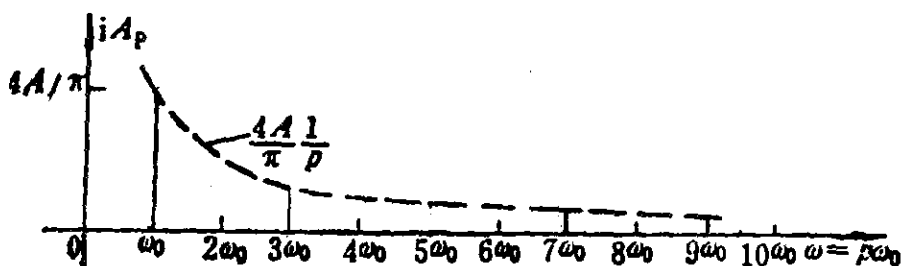


图 2.2-4

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{p=1,3,\dots} \frac{\sin p \omega_0 t}{p[1-(p/4)^2]}$$

图2.2-5示出了按上式绘制的 $x(t)$ 的频谱。由图可见， $x(t)$ 的频谱也是离散谱，频谱中 $4\omega_0$ 处发生共振，振幅趋于无穷大。当 $\omega > 4\omega_0$ 时， $x(t)$ 的幅值为负，这正是2.1.2小节中讲到的倒相现象。

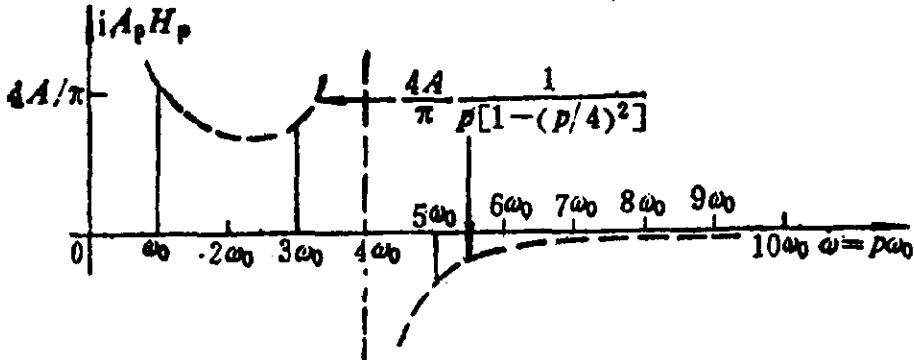


图 2.2-5

例2.5 图2.2-6为机床凸轮进给机构的简化模型， m 代表滑

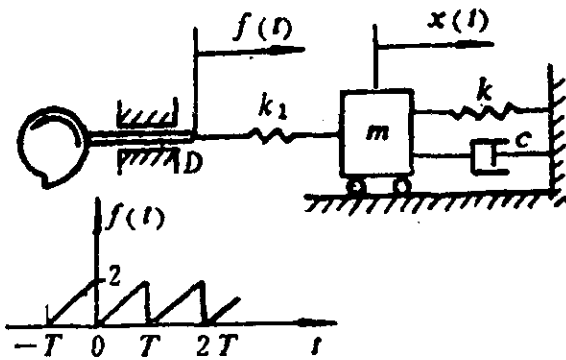


图 2.2-6

台及其上刀架的质量， k 、 c 分别为切削刚度和阻尼， k_1 为驱动系统的刚度。凸轮使顶杆 D 沿水平线作周期运动，运动规律为锯齿波。已知凸轮的升程为2cm，凸轮转速为60r/min，试求质块的强迫振动 $x(t)$ 。

解：由题意知顶杆 D 的运动规律，即外界位移激励 $f(t)$ 的规律为

$$f(t) = \begin{cases} 2 + \frac{2}{T}t, & \left(-\frac{T}{2} \leq t \leq 0\right) \\ \frac{2}{T}t, & \left(0 \leq t \leq \frac{T}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{a})$$

考虑到凸轮转速为60r/min，则激励周期 $T = 1$ 秒。

显然, $f(t)$ 的均值不等于零, 应按(2.2-10)式对 $f(t)$ 展开, 按(2.2-11)式,

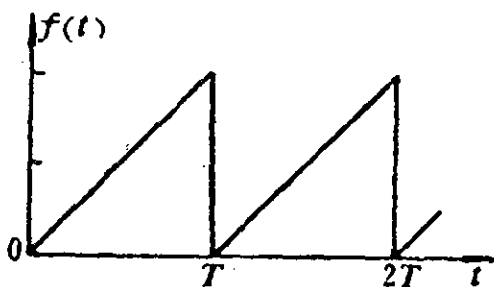
$$A_0 = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 \left(2 + \frac{2}{T} t \right) dt + \int_0^{T/2} \frac{2}{T} t dt \right] = 2, \quad (b)$$

按(2.2-4)式,

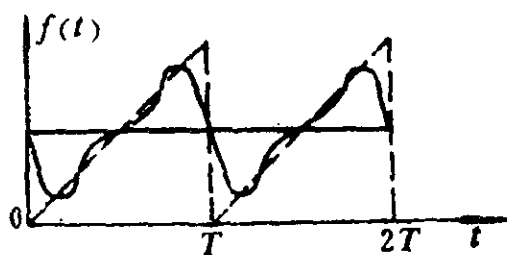
$$\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 \left(2 + \frac{2t}{T} \right) e^{i p \omega_0 t} dt + \int_0^{T/2} \frac{2}{T} t e^{i p \omega_0 t} dt \right] \\ &= -i \frac{2}{p\pi}, \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (c)$$

由于 A_i 为虚数, 而实际的激励 $f(t)$ 应是式(2.2-10)的实部, 故 $f(t)$ 只有正弦函数项:

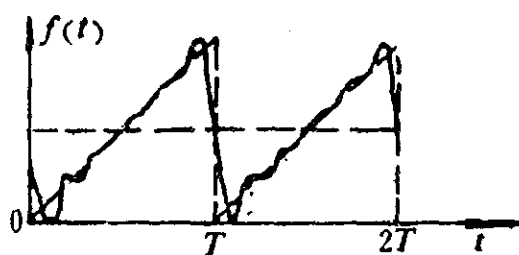
$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sin p \omega_0 t \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega_0 t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2 \omega_0 t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_0 t + \dots \right). \end{aligned} \quad (d)$$



(a)



(b)



(c)

图2.2-7(a)、(b)、(c)分别示出了 $f(t)$ 的准确波形和取前三个正弦函数, 前六个正弦函数叠加后的近似波形。再根据图2.2-6, 这是一个单自由度振动系统, 其运动微分方程为:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) \\ = k_1 [f(t) - x(t)], \end{aligned}$$

将 $f(t)$ 代入上式, 再考虑到 $T =$

图 2.2-7

1, 从而 $\omega_0 = 2\pi$, 经整理有:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + (k_1 + k)x(t) = k_1 - \frac{2k_1}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sin 2p\pi t, \quad (e)$$

上式右边 k_1 为常数项, 表示静力幅为 k_1 , 由于系统的静刚度为 $k_1 + k$, 则系统的静变形为:

$$\delta_{st} = \frac{k_1}{k + k_1}. \quad (f)$$

式(e)右边的正弦谐波项激起系统的强迫振动, 是正弦谐波的叠加, 将这部分化为式(2.2-2)所示的形式, 则由(2.2-5)式得系统的强迫振动为

$$x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} |H(p\omega_0)| A_p \sin(2p\pi t - \varphi_p), \quad (g)$$

对照式(2.2-2), 由式(2.2-6)可得

$$H(p\omega_0) = \frac{k_1/m}{\{\omega_n^2 - (p\omega_0)^2\} + i2\xi\omega_n p\omega_0}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k + k_1}{m}}$$

代入 $\omega_0 = 2\pi$, 算得:

$$|H(p\omega_0)| = \frac{k_1}{k + k_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2p\pi}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{4\xi p\pi}{\omega_n}\right)^2}}. \quad (h)$$

由式(2.2-8)得:

$$\varphi_p(p\omega_0) = \text{tg}^{-1} \frac{4\xi p\pi/\omega_n}{1 - (2p\pi/\omega_n)^2}. \quad (i)$$

从而, 在凸轮运动的作用下系统的稳态强迫振动为:

$$x(t) = \frac{k_1}{k_1 + k} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p \sqrt{\left[1 - \left(\frac{2p\pi}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{4\xi p\pi}{\omega_n}\right)^2}} \times \sin(2p\pi t - \varphi_p) \right\}. \quad (j)$$

§ 2.3 非周期激励下的强迫振动， Fourier变换法

上一节讲述的Fourier级数法是谐波分析的推广，而这一节将讲述的Fourier变换法又可视为Fourier级数法的推广。

2.3.1 由Fourier级数向Fourier积分的过渡

由于周期激励函数可展成离散的Fourier级数，可以想象，当一个周期函数的周期 T 趋向无穷时，该函数就变成了一个任意的非周期函数。而与此相应，Fourier级数就转化成连续的Fourier积分。在实现由Fourier级数向Fourier积分的过渡之前，我们需要先将由(2.2-3)式表示的Fourier级数式加以改造。该式的每一项一般为复数，而我们说过，实际的激励的各频率成分只是该级数的各项的实数部分。为了避免这种特殊的约定与不便，我们将由(2.2-3)式表示的Fourier级数作如下改造：对该式中的每一项 $A_p e^{i p \omega_0 t}$ 再加上一个共轭项 $A_p^* e^{-i p \omega_0 t}$ ， $p=1, 2, \dots$ ，显然，这样的每一对相互共轭项之和的一半为

$$\frac{1}{2}(A_p e^{i p \omega_0 t} + A_p^* e^{-i p \omega_0 t}) = \operatorname{Re}(A_p e^{i p \omega_0 t}), \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2.3-1)$$

即正好为级数(2.2-3)中各项的实部，也就是激励 $f(t)$ 中的各谐波成分。记

$$B_p = \frac{1}{2} A_p, \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2.3-2)$$

$$B_{-p} = \frac{1}{2} A_p^*, \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2.3-3)$$

再补充(2.2-10)中的 A_0 这一项，并记

$$B_0 = \frac{1}{2} A_0, \quad (2.3-4)$$

则得到级数

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{i p \omega_0 t}, \quad (\omega_0 = 2\pi/T) \quad (2.3-5)$$

其实考虑到(2.3-2)~(2.3-4)式, 可知

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{i p \omega_0 t} = \frac{A_0}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{i p \omega_0 t} \right),$$

即级数(2.3-5)正好是反映了 $f(t)$ 的均值及其各次谐波(实数), 而无需再申明“取实部”。

考虑(2.2-4)、(2.2-11)式及(2.3-2)~(2.3-4)式, 级数(2.3-5)中诸系数 B_p 可按下式计算

$$B_p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i p \omega_0 t} dt, \quad (p = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (2.3-6)$$

现在以(2.3-5)、(2.3-6)式为基础向Fourier积分过渡。令 $p\omega_0 = \omega$, $(p+1)\omega_0 - p\omega_0 = \omega_0 = 2\pi/T = \Delta\omega$, 可将(2.3-5)、(2.3-6)两式写成

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} (TB_p) e^{i p \omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (TB_p) e^{i p \omega_0 t} \Delta\omega, \quad (2.3-7)$$

$$TB_p = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i p \omega_0 t} dt. \quad (2.3-8)$$

令 $T \rightarrow \infty$ 去掉下标 p , 离散变量 ω , 就成为连续变量, 而求和变成积分,

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (TB_p) e^{i p \omega_0 t} \Delta\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i \omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (2.3-9)$$

$$F(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (TB_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.3-10)$$

假定以上两积分均存在，则这两式构成Fourier正、逆变换对，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.3-11)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.3-12)$$

其中后者又称为 $f(t)$ 的Fourier积分，它反映了 $f(t)$ 的频率结构。由该式可见， $f(t)$ 信号处于频带 $\omega \sim \omega + d\omega$ 中的成分为 $F(\omega)d\omega e^{j\omega t}$ ，其中 $e^{j\omega t}$ 为旋转因子，而 $F(\omega)d\omega$ 为复数振幅。 $F(\omega)$ 则为频率 ω 处单位频宽的复数振幅，故又称为“频谱密度”。

2.3.2 求解系统对于非周期激励的响应的Fourier变换法

Fourier积分式(2.3-12)将激励信号 $f(t)$ 表示为一系列的谐波 $F(\omega)d\omega e^{j\omega t}$ 之和，而由(2.1-16)式，每一个这样的谐波激励所引起的响应为 $H(\omega)F(\omega)d\omega e^{j\omega t}$ ，再将所有这些响应叠加(积分)起来，即得全部响应

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.3-13)$$

记

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega), \quad (2.3-14)$$

可将(2.3-13)式写成

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.3-15)$$

与(2.3-12)式比较，可见(2.3-15)式中 $X(\omega)$ 即为响应 $x(t)$ 的频谱密度，而该式即为 $x(t)$ 的Fourier逆变换。

由上述可知，以Fourier变换法求解振动系统对于非周期激励 $f(t)$ 的响应，是按以下程序进行的：首先以Fourier正变换(2.3-11)式求出 $f(t)$ 的频谱密度 $F(\omega)$ ；其次按(2.3-14)式计算响应的频谱密度 $X(\omega)$ ，其中 $H(\omega)$ 由(2.1-14)式给出；最后，按(2.3-15)式，以Fourier逆变换求出响应 $x(t)$ 。这是一种迂回的解决办法，可用图2.3-1表示。

最后需说明，为了保证积分(2.3-11)存在， $f(t)$ 函数需满足以下两个条件：

绝对收敛，即积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ 是收敛的；

Dirichlet条件，即 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上仅有有限个不连续点，而且没有无限不连续点。

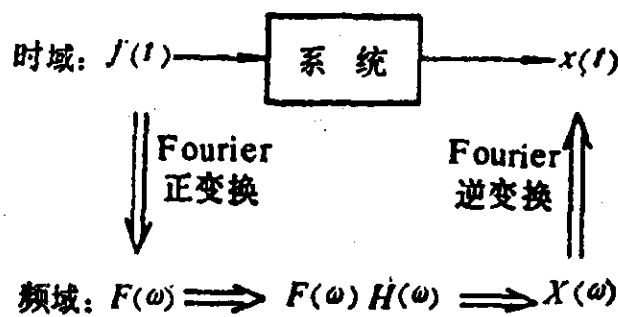


图 2.3-1

例2.6 试求单自由度无阻尼系统对图2.3-2所示的矩形脉冲

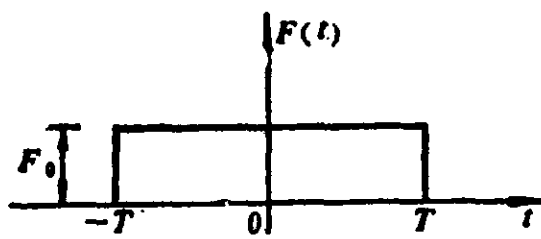


图 2.3-2

$F(t)$ 的响应 $x(t)$ 。

解：由(2.2-1)式， $kf(t) =$

$F(t)$ ，

所以 $f(t) = \frac{1}{k} F(t)$ ，

则激励函数

$$f(t) = \begin{cases} F_0/k & |t| < T, \\ 0 & |t| > T. \end{cases} \quad (a)$$

先检查 $f(t)$ 是否绝对收敛：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{F_0}{k} dt = \frac{2F_0 T}{k}.$$

上述积分收敛，故可用Fourier变换法求解。按(2.3-11)式，有：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{F_0}{k} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{F_0}{i\omega k} (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) = \frac{2F_0 \sin\omega T}{\omega k}, \end{aligned} \quad (a)$$

而由例2.1(a)式，无阻尼系统的频率响应为：

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}, \quad (b)$$

则响应的频谱密度为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= H(\omega)F(\omega) = \frac{F_0}{i\omega k(1 - (\omega/\omega_n)^2)} (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) \\ &= \frac{2F_0 \sin\omega T}{\omega k(1 - (\omega/\omega_n)^2)}. \end{aligned} \quad (c)$$

由Fourier逆变换(2.3-15)得响应为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{F_0}{i2\pi k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}}{\omega(1 - (\omega/\omega_n)^2)} e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (d)$$

按部分分式，有：

$$\frac{1}{\omega(1 - (\omega/\omega_n)^2)} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2(\omega - \omega_n)} - \frac{1}{2(\omega + \omega_n)},$$

代入(d)式，整理得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{i2\pi k} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2(\omega - \omega_n)} - \frac{1}{2(\omega + \omega_n)} \right] \\ &\quad \times (e^{i\omega(\tau+t)} - e^{-i\omega(\tau+t)}) d\omega, \end{aligned}$$

求解上式，得：

$$x(t) = \begin{cases} 0, & (t < -T), \\ \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n(t+T)), & (-T < t < T), \\ \frac{F_0}{k} (\cos \omega_n(t-T) - \cos \omega_n(t+T)) & \\ = \frac{2F_0}{k} \sin \omega_n T \sin \omega_n t & (t \geq T). \end{cases} \quad (e)$$

图(2.3-3)示出了按上式绘制的 $x(t)$ 的曲线。由图可见：

(1) 系统对于矩形激励的响应是谐波函数，振动频率即为系统的自然频率 ω_n ，在 $-T < t < T$ 范围内，系统围绕其静平衡位 $\delta_{st} = F_0/k$ 振动，振幅为 F_0/k ；在 $t > T$ 以后，系统围绕其静止位置 $x = 0$ 振动，振幅为 $\frac{2F_0}{k} \sin \omega_n T$ 。

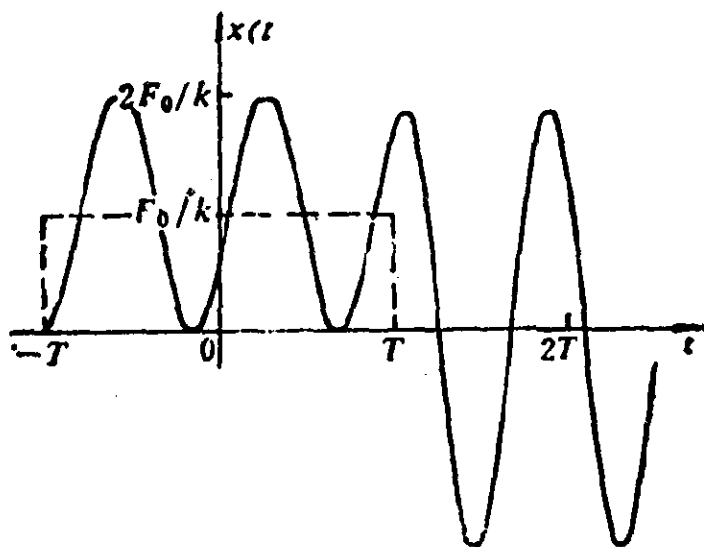


图 2.3-3

(2) 对于 $t > T$ 以后系统的振动，可以解释为系统的自由振动，因为当 $t > T$ 后，矩形脉冲已经消失。由(e)式中的第二式，当 $t = T$ 时

$$x(T) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos 2\omega_n T), \quad \dot{x}(T) = \frac{F_0 \omega_n}{k} \sin 2\omega_n T,$$

此即 $t > T$ 以后的初位移和初速度，系统在此初位移和初速度激励下将作自由振动，振动频率当然为系统的自然频率 ω_n 。

根据(a)、(c)式还可绘出矩形脉冲的频谱 $F(\omega)$ 及其响应的频谱 $X(\omega)$ 分别如图2.3-4、2.3-5所示。由图可见，非周期激励与前述周期激励不同，其频谱是连续谱，表示其中包含各种频率成分。

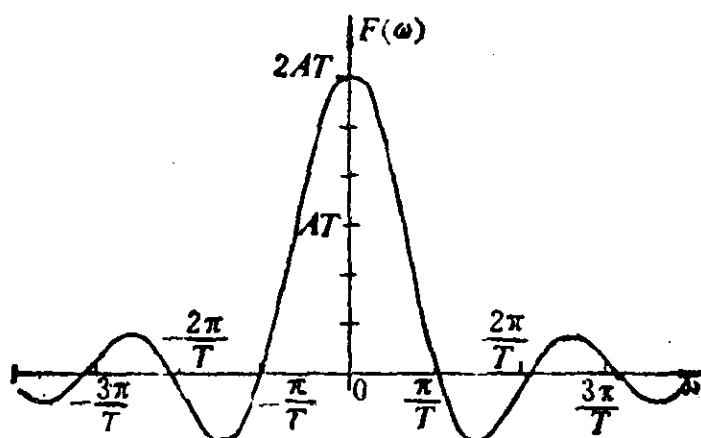


图 2.3-4

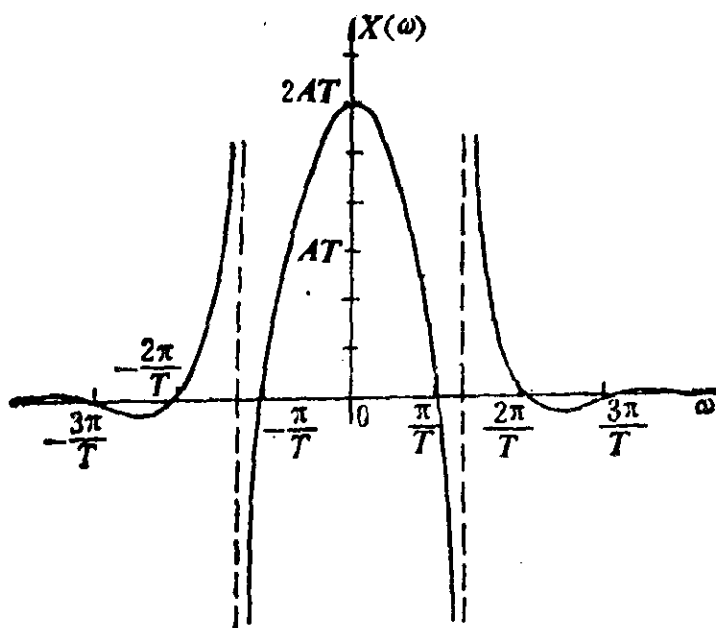


图 2.3-5

§ 2.4 非周期激励下的强迫振动，脉冲 响应函数法

脉冲响应函数法的基本思想如图2.4-1所示，将激励 $f(t)$ 分解为一系列强度为 $f(\tau)\Delta\tau$ 的脉冲，先求得系统对每一脉冲单独激励的响应，再根据叠加原理，对这一系列脉冲响应进行叠加，从而得到系统对整个激励 $f(t)$ 的响应 $x(t)$ 。下面首先介绍单位脉冲函数和单位脉冲响应函数。

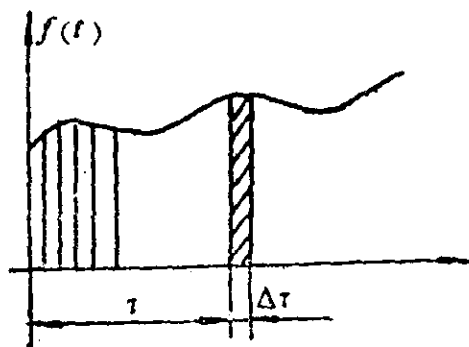


图 2.4-1

2.4.1 单位脉冲函数

单位脉冲函数即是Dirac δ -函数，其定义为：

$$\delta(t-a) = \left. \begin{array}{l} 0 \quad (t \neq a), \\ \infty \quad (t = a), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) dt = 1. \end{array} \right\} \quad (2.4-1)$$

显然，以上定义是一种理想情况，可理解为某一函数系列的极限过程。例如，对于一个面积等于1的矩形函数，如图2.4-2所示，其

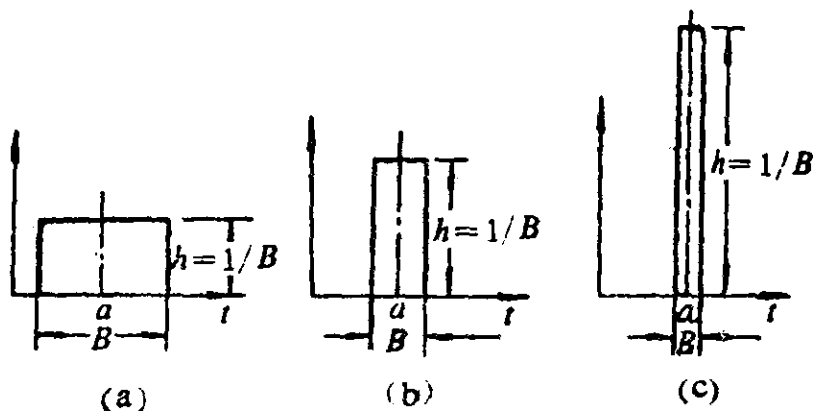


图 2.4-2

中心在 $t = a$ 处，若令其底边宽度 $B \rightarrow 0$ ，同时保持该矩形面积等于 1，则矩形高度将趋于无穷大，这种极限情况即成为一个理想的单位脉冲，此脉冲的强度为 1。从力学定义上来看，单位脉冲函数描述了一个单位冲量，此冲量由一个作用时间极其短暂而幅值又极大的冲击力产生。因此，在 $t = a$ 时，产生一个冲量为 P_0 的力 $F(t)$ 可表示为：

$$F(t) = P_0 \delta(t - a). \quad (2.4-2)$$

又由于(2.4-1)式中 δ -函数对时间的积分是无量纲的，因此， δ -函数的量纲为 T^{-1} ，通常取单位为 $1/s$ 。上式中 P_0 为冲量量纲 MLT^{-1} ， $F(t)$ 的量纲为 MLT^{-2} 。

2.4.2 单位脉冲响应函数

所谓单位脉冲响应函数是指系统在单位脉冲函数的激励下的响应。

1. 脉冲力作用的效果

设一个脉冲力 $F(t) = P_0 \delta(t)$ 作用在单自由度系统上，如图 2.4-3 所示，系统的运动微分方程为：

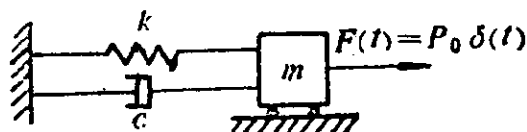


图 2.4-3

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P_0 \delta(t), \quad (2.4-3)$$

系统的初始条件，当 $x(0) = 0$ ， $\dot{x}(0) = v_0 = 0$ ，即系统原来是静止的，而在 $t = 0$ 时刻，突然受到脉冲力 $F(t) = P_0 \delta(t)$ 的作用。由于该脉冲力作用的时间极其短促，因此，可以将作用以后的时刻记为 $t = 0^+$ 。按冲量定理（物体动量的增量等于作用力的冲量），有：

$$m\dot{x}(0^+) - m\dot{x}(0) = P_0,$$

由于 $\dot{x}(0) = v_0 = 0$ ，因此得出结论：在脉冲力 $F(t) = P_0 \delta(t)$ 作用以后，系统获得了一个初速度：

$$x(0^+) = v_{0^+} = \frac{P_0}{m}. \quad (2.4-4)$$

这表明， $F(t) = P_0 \delta(t)$ 在形式上虽然是一种过程激励，但由于这一过程激励的作用时间极短，其效果就相当于一个初始速度激励，从而可将系统对过程激励的强迫振动问题转化为系统对初始激励的自由振动问题来处理，这正是下面解决问题的关键。

在 $t = 0$ 到 0^+ 的一瞬间，系统的速度发生了突变，这是由于在该时刻力的幅值无限大，因而加速度无限大的缘故。可是由于速度是有限的，因而在由 0 到 0^+ 这样短暂的时间内来不及积累成为位移的变化，因此仍有 $x(0^+) = 0$ 。

2. 脉冲响应

由以上分析，可知脉冲力 $P_0 \delta(t)$ 对系统的作用效果相当于初始速度 $v(0^+) = P_0/m$ 对系统的作用。因此，在 $v_0 = P_0/m$ ， $x_0 = 0$ 的初始条件下系统的自由振动即为系统对于冲量为 P_0 的脉冲力激励的响应。以 $v_0 = P_0/m$ 代入例 1.12(b) 式，得

$$X(t) = \frac{P_0}{m\omega_d} e^{-t\omega_n} \sin\omega_d t. \quad (2.4-5)$$

3. 单位脉冲响应函数

令 (2.4-5) 式中 $P_0 = 1$ ，得系统对于单位脉冲激励的响应为

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-t\omega_n} \sin\omega_d t,$$

考虑到当 $t < 0$ 时，应有 $h(t) = 0$ ，因此，系统的单位脉冲响应 $h(t)$ 可更完整地表示为

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ \frac{1}{m\omega_d} e^{-t\omega_n} \sin\omega_d t & (t \geq 0). \end{cases} \quad (2.4-6)$$

如果引入单位阶跃函数

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}, \quad (2.4-7)$$

可将(2.4-7)式所示的单位脉冲响应函数 $h(t)$ 写成更为简洁的形式:

$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d} e^{-t\omega_n} \sin\omega_d t \right) u(t). \quad (2.4-8)$$

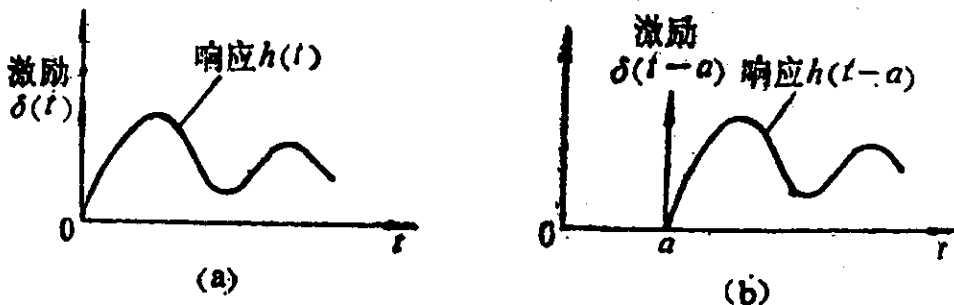


图 2.4-4

对于 $t=0$ 时刻作用的单位脉冲 $\delta(t)$, 系统的响应为 $h(t)$; 对于 $t=a$ 时刻的单位脉冲 $\delta(t-a)$, 系统的响应可简单地表为 $h(t-a)$, 分别如图2.4-4(a)与(b)所示。

2.4.3 脉冲响应函数法

对于如图2.4-5所示的任意激励函数 $F(t)$, 可以看作是一系列的脉冲的组合, 现考虑任意 τ 时刻, 该时刻的脉冲力为 $F(\tau)$

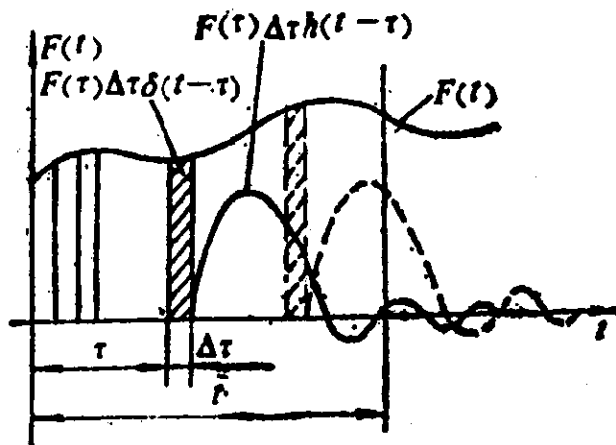


图 2.4-5

$\cdot \Delta\tau\delta(t-\tau)$, 其中 $F(\tau)\Delta\tau$ 相当于冲量值。已知系统对于 τ 时刻的单位脉冲 $\delta(t-\tau)$ 的响应为 $h(t-\tau)$, 因此, 系统对于冲量为 $F(\tau)\Delta\tau$ 的脉冲力激励的响应为:

$$F(\tau)\Delta\tau h(t-\tau).$$

再考虑任意时刻 t , 由于 t 时刻以前各时刻 τ 的脉冲力 $F(\tau)\Delta\tau\delta(t-\tau)$ 均会影响 t 时刻的响应 $x(t)$, 因此, 系统在 t 时刻的响应 $x(t)$ 应是对应于从 0 到 t 这段时间内各时刻 τ 的脉冲激励的响应的叠加, 如图 2.4-5 所示, 即

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^t F(\tau)\Delta\tau h(t-\tau),$$

式中, τ 是积分变量。再令 $\Delta\tau \rightarrow 0$, 则上式的求和变成积分

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (2.4-9)$$

又根据(2.4-6)式, 当 $t-\tau < 0$ 即 $\tau > t$ 时, $h(t-\tau) = 0$, 故可将上式的积分上限由 t 扩展为 ∞ ; 又由于当 $\tau < 0$ 时 $F(\tau) = 0$, 所以还可将上式的积分下限由 0 扩展为 $-\infty$, 从而将上式写成:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (2.4-10)$$

上式称为卷积积分, 可记为

$$x(t) = F(t) * h(t). \quad (2.4-11)$$

对(2.4-9)式作变量代换, 令 $\lambda = t - \tau$, 注意其中 t 为常量, τ 为积分变量, 则 $d\tau = -d\lambda$; 相应地, λ 的积分上、下限变为 0、 t , 从而, (2.4-9)式变为

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_t^0 F(t-\lambda)h(\lambda)(-d\lambda) \\ &= \int_0^t h(\lambda)F(t-\lambda)d\lambda, \end{aligned}$$

再将积分变量 λ 换回为 τ , 上式即为

$$x(t) = \int_0^t h(\tau)F(t-\tau)d\tau. \quad (2.4-12)$$

比较上式与(2.4-9)式可见, $h(t)$ 与 $F(t)$ 是完全对称的. 将(2.4-8)式所示的 $h(t-\tau)$ 代入(2.4-9)式, 即得单自由度系统对于非周期激励的响应为:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau. \quad (2.4-13)$$

由上述可见, 脉冲响应函数法是将任意激励 $F(t)$ 分解为一系列脉冲激励, 再将诸脉冲响应叠加而得到总的响应. 但是需要指出, 以上是假定初始条件为零的情况, 若系统除受到过程激励 $F(t)$ 作用外, 还存在初始激励, 就还应考虑系统的初位移 $x(0) = x_0$ 、初速度 $\dot{x}(0) = v_0$ 的影响, 这时综合式(2.4-13)与(2.4-16)式, 得单自由度系统的全部响应为:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau + \frac{x_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_d t \quad (2.4-14)$$

分析上述结果, 可以看出:

(1) 脉冲响应函数法表明, 任意形式的过程激励 $F(t)$ 都可分解为一系列的脉冲激励 $F(\tau)\Delta\tau\delta(t-\tau)$, 而每一脉冲激励又可转化为该时刻的初始激励, 这一初始激励使得系统按照自由振动的规律运动发展下去, 以影响系统后来的运动. 系统在 t 时刻位移 $x(t)$ 正是在该时刻之前所有脉冲响应在 t 时刻取值的叠加. 这也说明, 某一时刻的外加激励决不只影响系统在该时刻的状态, 而且还影响系统后来的状态. 这就是外加激励对动态系统影响的“后效性”. 另一方面, 一个动态系统在任一时刻的响应决不只与该时刻的激励值有关, 而且还与此时刻以前系统经受的载荷的全部历程有关. 这也可以称为动态系统响应的“记忆效果”. 而一个静态系统, 例如一个理想的弹簧, 其任何时刻的响应(变形量)只反映该时刻的载荷量.

(2) 这里的分析还说明了强迫响应与自由响应之间的关系

系。前面说过，当系统具有阻尼时，其自由振动部分会很快衰减掉，此后只剩下强迫响应，但是，请读者不要误解，以为系统的自由响应似乎只在很短时间内起作用。其实，从(2.4-14)式可以看出，自由响应在系统受到激励与产生响应的整个过程中都在起作用。自由响应是强迫响应的基础，任一时刻的强迫响应其实只是该时刻前被激起的一系列自由响应的叠加。

(3) 由(2.4-9)式可见，外界激励对系统的影响方式是通过系统的单位脉冲响应函数 $h(t)$ 决定的，而(2.4-8)式表明， $h(t)$ 完全由系统参数 m 、 ω_d 、 ω_n 、 ξ 所决定，由此说明，外界激励通过系统本身的内在特性而起作用，引起系统的强迫振动。

例2.7 用脉冲函数法求单自由度无阻尼系统对于谐波激励

$$F(t) = \begin{cases} kA \cos \omega t & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}, \quad (a)$$

的响应。

解：对于无阻尼系统， $\xi = 0$ ， $\omega_d = \omega_n$ ，由(2.4-13)式有：

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t kA \cos \omega \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{kA}{m\omega_n} \left\{ \sin \omega_n t \left[\frac{\sin(\omega + \omega_n)\tau}{2(\omega + \omega_n)} + \frac{\sin(\omega - \omega_n)\tau}{2(\omega - \omega_n)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos \omega_n t \left[\frac{\cos(\omega_n + \omega)\tau}{2(\omega_n + \omega)} + \frac{\cos(\omega_n - \omega)\tau}{2(\omega_n - \omega)} \right] \right\} \Big|_0^t \\ &= \frac{A}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]} (\cos \omega t - \cos \omega_n t), \end{aligned}$$

再考虑到 $t < 0$ 时， $x(t) = 0$ ，引入单位阶跃函数 $u(t)$ ，从而得系统对于(a)式谐波激励的响应为

$$x(t) = \frac{A}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) u(t). \quad (b)$$

例2.8 试用脉冲响应函数法求单自由度有阻尼系统对于单位阶跃激励 $u(t)$ 的响应函数。

解：(2.4-7)式所示的单位阶跃力 $u(t)$ ，如图2.4-6所示，此

即系统的激励 $F(t) = u(t)$ ，记单位阶跃响应为 $g(t)$ ，根据 (2.4-13) 式，有

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \times \sin\omega_d(t-\tau) d\tau, \quad (a)$$

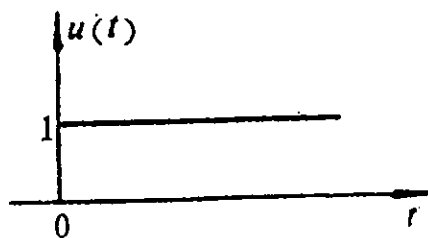


图 2.4.6

由于

$$\sin\omega_d(t-\tau) = \frac{1}{2i} \left[e^{i\omega_d(t-\tau)} - e^{-i\omega_d(t-\tau)} \right],$$

并设 $\lambda = t - \tau$ ，则 $d\tau = -d\lambda$ ，

(a) 式可改写为：

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{i2m\omega_d} \int_0^t e^{-\xi\omega_n\lambda} \left[e^{i\omega_d\lambda} - e^{-i\omega_d\lambda} \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{i2m\omega_d} \left[e^{-\xi\omega_n\lambda} \left(\frac{-e^{i\omega_d\lambda}}{\xi\omega_n - i\omega_d} + \frac{e^{-i\omega_d\lambda}}{\xi\omega_n + i\omega_d} \right) \right] \Big|_0^t \\ &= \frac{-1}{m[(\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2]} \left[e^{-\xi\omega_n\lambda} \left(\cos\omega_d\lambda + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \sin\omega_d\lambda \right) \right] \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{k} \left[1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \sin\omega_d t \right) \right], \end{aligned}$$

由于当 $t < 0$ 时， $F(t) = u(t) = 0$ ，上式只是当 $t > 0$ 以后系统的响应，故还须采用单位阶跃函数，将上式更严格地表示为

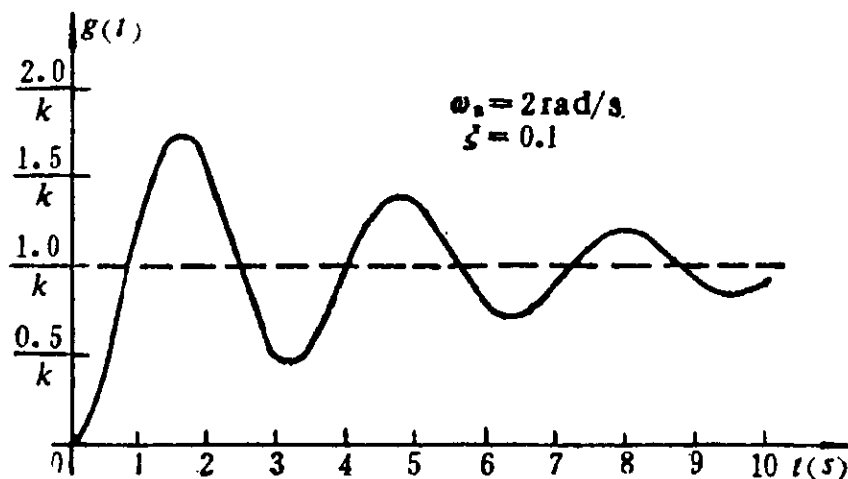


图 2.4-7

$$g(t) = \frac{1}{k} \left[1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right] u(t). \quad (b)$$

按上式绘制的 $g(t)$ 如图 2.4-7 所示, 该图表明, 由于单位阶跃力 $u(t)$ 的作用, 系统围绕其静变形 $\delta_{st} = 1/k$ 位置进行自由振动. 当系统的自由振动被阻尼衰减掉以后, 系统就只剩下静变形, 在这一静变形位置上平衡下来.

例 2.9 试采用上例中得到的单位阶跃响应函数 $g(t)$ 求解例 2.6.

解: 图 2.3-2 所示的矩形脉冲可用阶跃函数表示为:

$$F(t) = F_0 [u(t+T) - u(t-T)],$$

其意义如图 2.4-8 所示, 对于无阻尼系统, 由上例 (b) 式, 其单位阶跃响应函数为:

$$g(t) = \frac{1}{k} (1 - \cos \omega_n t) u(t). \quad (a)$$

系统对于 $u(t+T)$ 、 $u(t-T)$ 的响应是 $g(t+T)$ 、 $g(t-T)$, 从而, 根据叠加原理, 单自由度无阻尼系统对于矩形脉冲的响应为:

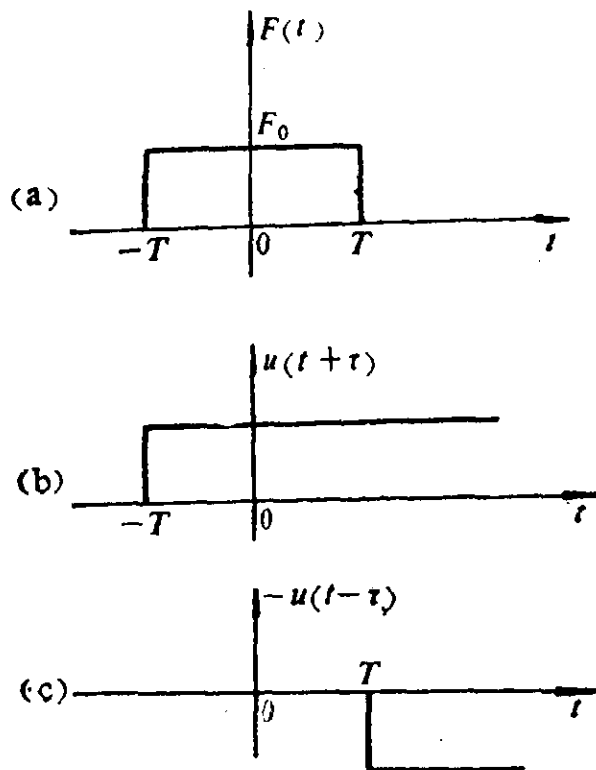


图 2.4-8

$$\begin{aligned}
 x(t) &= F_0 [g(t+T) - g(t-T)] \\
 &= \frac{F_0}{k} \{ [1 - \cos \omega_n(t+T)] u(t+T) \\
 &\quad - [1 - \cos \omega_n(t-T)] u(t-T) \}. \quad (b)
 \end{aligned}$$

根据单位阶跃函数的性质，上式与例2.6中(e)式完全是一致的。

例2.10 试求无阻尼系统在图2.4-9所示重复冲击下的稳态振动。每次冲击的冲量为常值 P_0 ，冲力持续时间 ϵ 可略去不计，相邻两次冲击的间隔时间为 T 。

解：脉冲激励力相当于给系统提供了初始速度 P_0/m ，系统

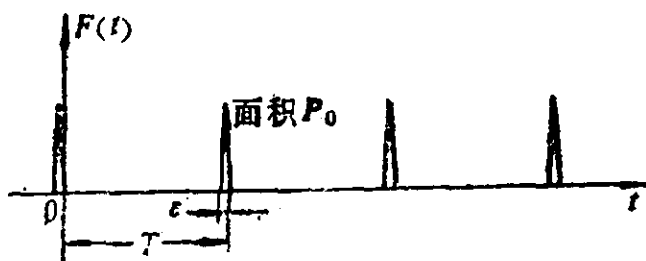


图 2.4-9

将产生自由振动。取某次冲击终止的瞬时为 $t=0$ ，则在受到下一次冲击之前，无阻尼系统的自由振动位移和速度可表示为

$$x(t) = |X| \cos(\omega_n t - \psi), \quad (a)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n |X| \sin(\omega_n t - \psi). \quad (b)$$

在 $t=0$ 时刻，系统以上一次冲击振动的位移和速度为初始条件，有：

$$x(0) = |X| \cos \psi, \quad \dot{x}(0) = \omega_n |X| \sin \psi. \quad (c)$$

在下一次冲击之前的 $t=T$ 时刻，

$$\left. \begin{aligned}
 x(T) &= |X| \cos(\omega_n T - \psi) \\
 \dot{x}(T) &= -\omega_n |X| \sin(\omega_n T - \psi).
 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

在下一次冲击之后，系统的位移和速度又会回到(c)式，因为已假定在重复冲击下，系统的运动已达到稳定。由于冲量 P_0 使质量 m 产生速度增量 P_0/m ，故有

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) + \frac{P_0}{m},$$

以(c)、(d)式第二式代入，并整理，得：

$$\sin\psi = \frac{P_0}{m\omega_n |X|} - \sin(\omega_n T - \psi),$$

但由于冲量作用时间 ϵ 极其短暂，速度还来不及积累成为位移，故有

$$x(0) = x(T),$$

以(c)、(d)式第一式代入，并整理，得

$$\cos\psi = \cos(\omega_n T - \psi).$$

将上两式改写为：

$$\sin\frac{\omega_n T}{2} \cos\left(\frac{\omega_n T}{2} - \psi\right) = \frac{P_0}{2m\omega_n |X|}, \quad (e)$$

$$\sin\frac{\omega_n T}{2} \sin\left(\frac{\omega_n T}{2} - \psi\right) = 0. \quad (f)$$

由(f)式，由于 $\sin\frac{\omega_n T}{2}$ 不可能对任意的 T 都等于零，故应有

$$\sin\left(\frac{\omega_n T}{2} - \psi\right) = 0,$$

或

$$\psi = \frac{\omega_n T}{2},$$

代入(e)式后解得振幅 $|X|$ 为

$$|X| = \frac{P_0}{2m\omega_n \sin\frac{\omega_n T}{2}} = \frac{P_0}{2\sqrt{mk} \sin\frac{\omega_n T}{2}},$$

从而，无阻尼系统的稳态振动为

$$x(t) = \frac{P_0}{2\sqrt{mk} \sin\frac{\omega_n T}{2}} \cos\omega_n\left(t - \frac{T}{2}\right). \quad (g)$$

系统按上式规律振动时，若记弹簧的最大弹性力为 $F_{s, \max}$ ，则有

$$F_{\dots} = k|X| = \frac{P_0 \omega_n}{2 \sin \frac{\omega_n T}{2}} = \frac{P_0}{T} \cdot \frac{\omega_n T/2}{\sin \omega_n T/2} \quad (h)$$

当 $\omega_n T$ 很小时, $\frac{\omega_n T/2}{\sin \omega_n T/2} \approx 1$, $F_{\dots} \approx \frac{P_0}{T}$ 即最大弹性力接近于冲力在时间间隔 T 中的平均值, 而当 $\omega_n T/2 = p\pi$ ($p=1, 2, \dots$)即 $T = 2p\pi/\omega_n$ 时, $\sin \omega_n T/2 = 0$, F_{\dots} 将很大. 所以, 在重复冲击激励下, 冲击时间间隔 T 应合适, 否则, 将可能使振动系统中的弹性元件因受力过大而产生破坏.

2.4.4 脉冲响应函数法与Fourier变换法之间的关系

分析脉冲响应函数法与Fourier变换法可以看出, 此两法是解决同一问题(非周期激励下的强迫振动)的两种不同的方法, 从物理意义上来看, 其根本不同在于对非周期函数 $f(t)$ 进行分解的方式不同: Fourier变换法是将 $f(t)$ 分解成为一系列的谐波, 而脉冲响应函数法则是将 $f(t)$ 分解成为一系列脉冲. 不过, 尽管处理问题的方法不同, 此两法的基础都是叠加原理. 从数学处理方法上来看, Fourier变换法是求得 $f(t)$ 的Fourier变换 $F(\omega)$ 再在频域中由复频响应函数 $H(\omega)$ 与 $F(\omega)$ 的乘积而求得响应的频谱函数 $X(\omega)$,

$$X(\omega) = F(\omega)H(\omega), \quad (2.4-15)$$

最后, 再求 $X(\omega)$ 的Fourier逆变换而得到响应 $x(t)$. 脉冲响应函数法则是直接在时间域中求激励函数 $f(t)$ 与系统的单位脉冲响应函数 $h(t)$ 的卷积而得到 $x(t)$:

$$x(t) = f(t) * h(t). \quad (2.4-16)$$

为了以下表达方便, 上式中已将 $F(t)$ 改记为 $f(t)$. 为比较上述两式, 我们先将上式作Fourier变换, 并注意到两函数的卷积的Fourier变换, 等于该两函数的Fourier变换之乘积, 此即所谓“卷积定理”. 由于 $X(s)$ 、 $F(\omega)$ 分别是 $x(t)$ 与 $f(t)$ 的Fourier

变换，再与(2.4-15)式比较，可知 $H(\omega)$ 必然是 $h(t)$ 的 Fourier 变换，即

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.4-17)$$

反之，有

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int H(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4-18)$$

即一个系统的单位脉冲响应函数 $h(t)$ 与其复数频率响应函数 $H(\omega)$ 之间存在 Fourier 正、逆变换的关系。从物理概念上来看， $h(t)$ 和 $H(\omega)$ 都是由系统参数所确定，所以， $h(t)$ 和 $H(\omega)$ 分别是在时域和频域中用以描述系统动态特性的函数。

§ 2.5 冲击与系统的冲击响应

系统受到瞬态激励，其位移、速度或加速度发生突然变化的现象，称为冲击。冲击的特点是，冲击作用时，系统之间传递动能的时间远较系统振动的周期短。

冲击载荷在某些结构（如车辆、桥式吊车等）的设计中是十分重要的，在冲击载荷下，结构将在很短的时间内达到最大响应，而在此短促的时间中，结构的阻尼还来不及吸收较多的能量，因此，与稳态振动问题的研究不同，对于承受冲击载荷的结构来说，阻尼在控制结构的最大响应中所起的作用就显得不太重要。也正因为如此，冲击问题中一般采用无阻尼系统的模型，而研究其冲击响应的最大峰值。

下面，以半正弦波脉冲的冲击激励为例，介绍分析冲击问题的基本方法。

2.5.1 系统对半正弦脉冲冲击的响应

单自由度无阻尼系统原来静止，受到如图2.5-1所示的半正

弦脉冲 $F(t)$ 的冲击,

$$F(t) = \begin{cases} P_0 \sin \omega t & (0 < t < \pi/\omega), \\ 0 & (\text{其余}), \end{cases} \quad (2.5-1)$$

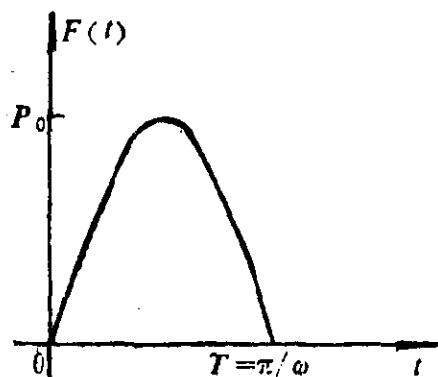


图 2.5-1

此时, 系统的响应分为两个阶段: 载荷作用阶段 ($0 < t < \pi/\omega$) 和载荷拆除后的自由振动阶段 ($t > \pi/\omega$).

1. 载荷作用阶段的冲击响应

系统在载荷作用阶段 ($0 < t < \pi/\omega$) 的响应为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{P_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \end{aligned} \quad (0 < t < \pi/\omega), \quad (2.5-2)$$

由于感兴趣于冲击响应的最大峰值, 对上式求导,

$$\dot{x}(t) = \frac{P_0}{k} \frac{\omega}{1 - (\omega/\omega_n)^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t), \quad (2.5-3)$$

令上式等于 0, 并根据三角函数的和差化积公式:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

有
$$\sin \frac{\omega_n + \omega}{2} t \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t = 0,$$

由上式可解得 $x(t)$ 取极值时的两族极值点 t_m^I 、 t_m^{II} , 分别为

$$\left. \begin{matrix} t_m^I \\ t_m^{II} \end{matrix} \right\} = \frac{2p\pi}{\omega_n \pm \omega} \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (2.5-4)$$

将上式所示极值点分别代入 (2.5-2) 式, 可得 $x(t)$ 的极值为:

$$\left. \begin{aligned} x(t_m^I) &= \frac{P_0}{k(1 - \omega/\omega_n)} \sin \frac{2p\pi\omega/\omega_n}{1 + \omega/\omega_n}, \\ x(t_m^{II}) &= \frac{P_0}{k(1 + \omega/\omega_n)} \sin \frac{2p\pi\omega/\omega_n}{1 - \omega/\omega_n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5-5)$$

而 t'_m 应在半正弦脉冲作用期间, 由(2.5-4)式有

$$0 < \frac{2p\pi}{\omega_n + \omega} < \frac{\pi}{\omega},$$

即

$$0 < p < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_n}{\omega} \right).$$

在以上条件下分析(2.5-5)式中两式, 可以发现实际上总是 $x(t'_m)$ 为大, 因此在载荷作用阶段内, 系统冲击响应的最大峰值为

$$x_{max} = x(t'_m) = \frac{P_0 \omega_n / \omega}{k[(\omega_n / \omega) - 1]} \sin \frac{2p\pi}{1 + \omega_n / \omega} \left(p < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_n}{\omega} \right) \right). \quad (2.5-6)$$

2. 载荷拆除后的自由振动

在载荷拆除后, 系统以载荷作用阶段结束时刻 $t = \pi / \omega$ 的位移 $x(\pi / \omega)$ 和速度 $\dot{x}(\pi / \omega)$ 作为其初始激励, 进行自由振动。由(1.4-16)式, 对于 $\xi = 0$ 时, 系统在此阶段的自由振动为:

$$x(t) = x(\pi / \omega) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}(\pi / \omega)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (t > \pi / \omega). \quad (2.5-7)$$

根据(2.5-2)式, 有

$$x(\pi / \omega) = \frac{P_0 \omega_n / \omega}{k[1 - (\omega_n / \omega)^2]} \sin \frac{\omega_n \pi}{\omega}.$$

根据(2.5-3)式, 有

$$\dot{x}(\pi / \omega) = \frac{P_0 \omega_n^2 / \omega}{k[1 - (\omega_n / \omega)^2]} \left(1 + \cos \frac{\omega_n \pi}{\omega} \right).$$

将 $x(\pi / \omega)$ 、 $\dot{x}(\pi / \omega)$ 代入(2.5-7)式, 整理得系统在载荷拆除后的自由振动为

$$x(t) = \frac{P_0 \omega_n / \omega}{k[1 - (\omega_n / \omega)^2]} \left[\sin \omega_n t + \sin \omega_n \left(t + \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \quad (t > \pi / \omega) \quad (2.5-8)$$

同理, 仍需求自由振动的最大峰值。对上式求导,

$$\dot{x}(t) = \frac{P_0 \omega_n^2 / \omega}{k[1 - (\omega_n / \omega)^2]} \left[\cos \omega_n t + \cos \omega_n \left(t + \frac{\pi}{\omega} \right) \right], \quad (2.5-9)$$

令上式等于 0，再利用和差化积公式

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

则有

$$\cos \left[\omega_n \left(t + \frac{\pi}{2\omega} \right) \right] \cos \left(\frac{\omega_n \pi}{2\omega} \right) = 0.$$

由上式可解得极值点 t_m 为

$$t_m = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2p-1}{\omega_n} - \frac{1}{\omega} \right) \quad (p=1, 2, \dots), \quad (2.5-10)$$

将上式代入(2.5-8)式，整理得系统自由振动的最大峰值 $x_{m \cdot x}$ 为

$$x_{m \cdot x} = \frac{2P_0 \omega_n / \omega}{k[1 - (\omega_n / \omega)^2]} \cos \frac{\pi \omega_n}{2\omega}. \quad (2.5-11)$$

2.5.2 冲击谱

系统冲击响应的最大峰值 $x_{m \cdot x}$ 与自然频率 ω_n 的关系，称为冲击谱或响应谱。一般在绘制冲击谱和响应谱时，将纵坐标取为

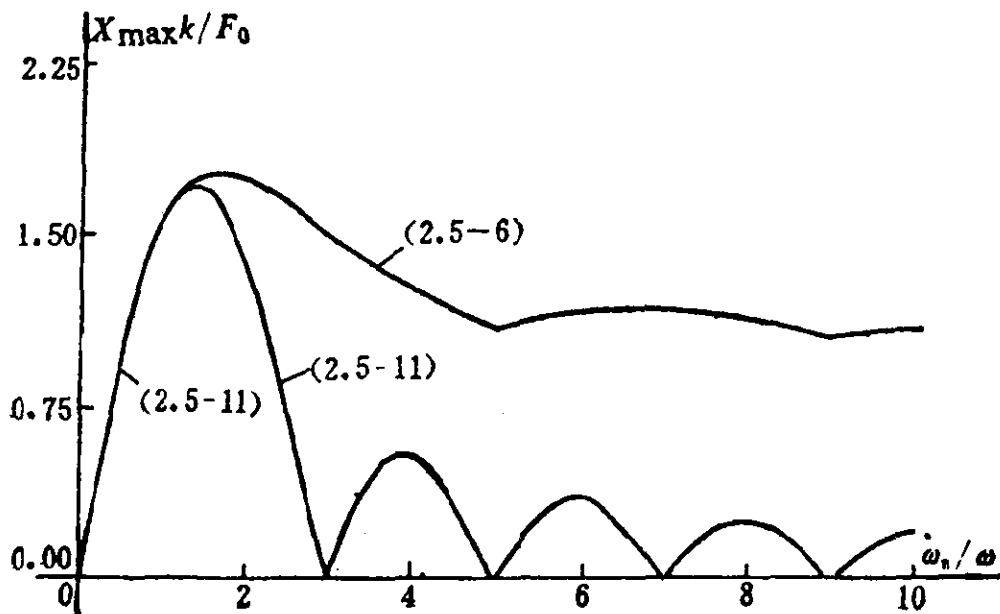


图 2.5-2

$x_{m \max} k/F_0$ ，而横轴取为 ω_n/ω ，以得到无量纲化的曲线。

例如，按(2.5-6)、(2.5-11)式绘制的单自由度系统对于半正弦脉冲的冲击谱如图2.5-2所示。一般，当 $\omega_n < \omega$ 时，冲击响应的最大峰值由(2.5-11)式给出；当 $\omega_n > \omega$ 时，冲击响应的最大峰值由(2.5-6)、(2.5-11)两式给出，而起作用的是其中的大者。在图2.5-2的情况下，当 $\omega_n < \omega$ 时（即冲击波的持续时间 T 较短时），响应最大值发生在冲击作用结束以后（ $t_m > T$ ），由(2.5-11)式给出，而当 $\omega_n > \omega$ （即 T 较长时），最大的冲击发生在冲击作用的时间中（ $t_m < T$ ），由(2.5-6)式给出。

除了这里讲的半正弦波冲击以外，还可以有三角脉冲、矩形脉冲等不同形状的冲击。对它们也都可绘制相应的响应谱。该谱图的横坐标可以取为 T/T_n 或 $2T/T_n$ ，其中 T 为冲击波形持续的时间，而 $T_n = 2\pi/\omega_n$ 。

思 考 题

判断正确与错误；如果错误，请指出错误所在，并给出正确的陈述：

1. 单自由度线性系统在谐波激励下的稳态强迫振动的频率等于外界激励的频率，与系统的自然频率无关。

2. 单自由度线性系统的运动微分方程为： $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \omega_n^2f(t)$ ，如果 $x(t)$ 的量纲是 L ，那么 ξ 的量纲是 MT^{-1} ， $f(t)$ 的量纲是 MLT^{-2} 。

3. 一个谐波激振力作用到线性系统上，所得到的稳态响应将与激振力有相同的频率与相位。

4. 一个单自由度线性系统当阻尼率 $\xi \geq 1$ 时，其谐波响应为非周期运动。

5. 当激振力的频率等于单自由度线性阻尼系统的自然频率时，其振幅达最大值。

6. 如果单自由度系统的复数频率响应为

$H(\omega) = \frac{1}{(1 - \omega^2/\omega_n^2) + 2i\xi\omega/\omega_n}$ ，而激振力为 $f(t) = A\cos\omega t$ ，那么，其响应 $x(t)$ 可表示为： $x(t) = \text{Re}[H(\omega) \cdot A\cos\omega t]$ 。

7. 一个周期激振力作用到单自由度线性系统上，系统响应的波形与激振力的波形相同，只是两波形间有一定的相位差。

8. 周期激励相当于用基频 ω_0 谐波与其各个高次谐波 $p\omega_0$ ($p = 2, 3, \dots$) 激励系统，非周期激励相当于用所有频率 ω 的谐波激励系统。

9. 冲击响应的最大峰值一定发生在冲击作用的时间里，而不能发生在冲击结束以后。

10. 一个无阻尼系统在多次冲击作用下不可能有一种稳态的响应，因为每冲击一次，势必要使系统的速度发生突然改变，因为其动能增加，而系统并无能量耗散，由于能量的积累，势必愈振愈猛。

11. 当初始条件为零，即 $x_0 = v_0 = 0$ 时，系统不会有自由振动项。

12. 由于阻尼作用，系统的自由响应只是在很短的时间内起作用，而强迫激励的响应与自由响应无关。

习 题

2-1 试用谐波分析法求单自由度有阻尼系统对谐波激励

$$F(t) = P_0 \sin\omega t$$

的响应。

2-2 图2-2所示系统模拟在粗糙道路上运动的车辆，车辆速度 v 为常数，

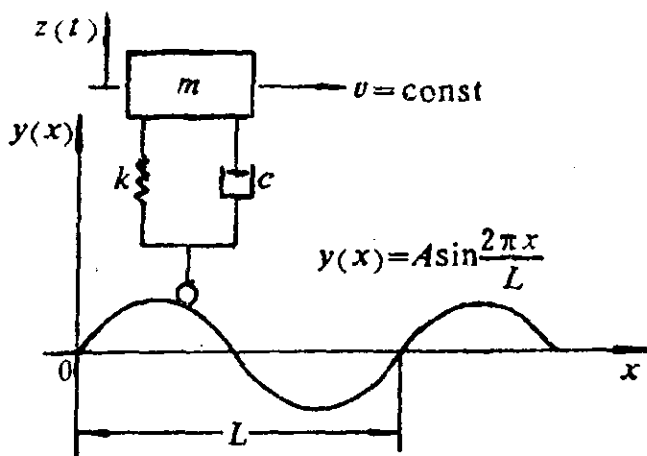


图 2-2

试计算响应 $z(t)$ 和传给车辆的力。

2-3 图2-3所示的粘性阻尼摆的支承作谐波振动,试导出系统的运动微分方程,并求强迫运动。

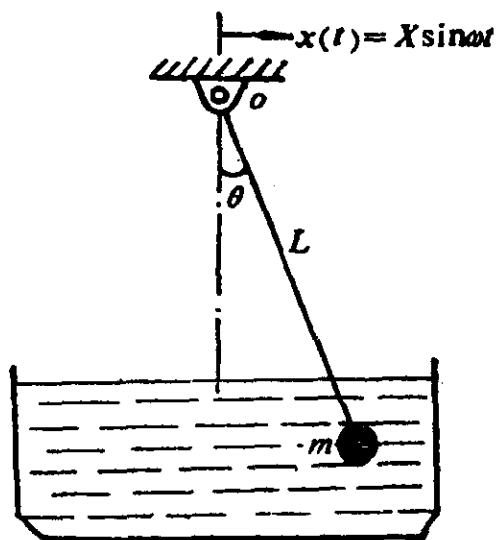


图 2-3

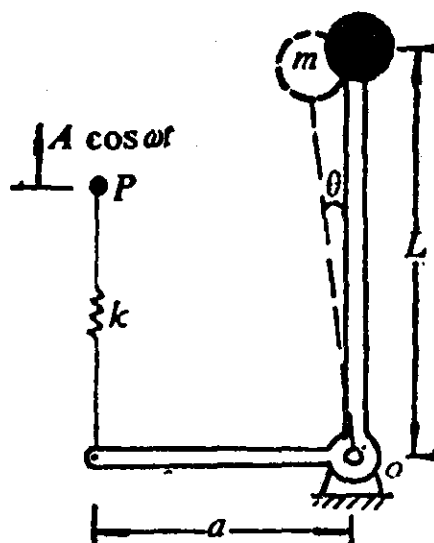


图 2-4

2-4 试导出图2-4所示 P 点激励倒置摆的运动微分方程,并求微幅振动时的解 $\theta(t)$ 。

2-5 写出图2-5所示系统的运动微分方程,并求稳态振动的解。

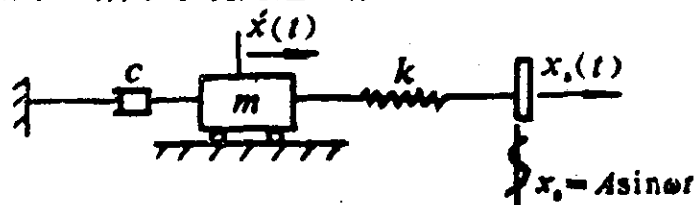


图 2-5

2-6 写出图2-6所示系统的运动微分方程,并求稳态振动的解。

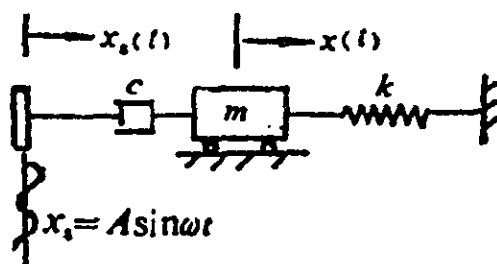


图 2-6

2-7 图2-7中的凸轮给系统下端以周期性锯齿函数形式的位移 $y(t)$,

试用Fourier分析法求响应 $x(t)$ 。

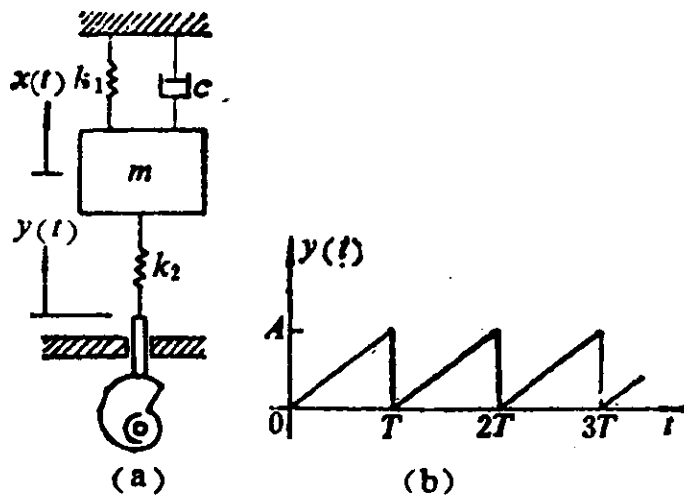


图 2-7

2-8 求单自由度无阻尼系统对图2-8所示矩形激励力的响应。

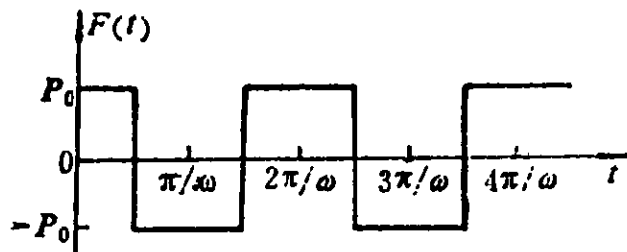


图 2-8

2-9 求单自由度无阻尼系统对图2-9所示三角激励力的响应。

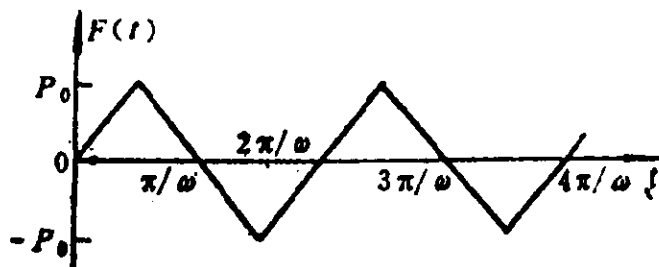


图 2-9

2-10 用脉冲响应函数法求单自由度阻尼系统在激励力 $kf(t)$ 作用下的响应， $f(t)$ 为斜坡函数，如图2-10所示。

2-11 用Fourier积分法求单自由度阻尼系统对脉冲函数 $kf(t) = P_0\delta(t)$ 激励的响应。

2-12 用脉冲响应函数法证明单自由度无阻尼系统对单边正弦激励力 $F(t) = P_0\sin\omega t u(t)$ 激励的响应为：

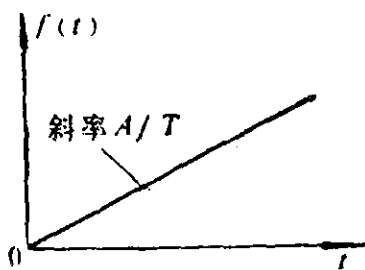


图 2-10

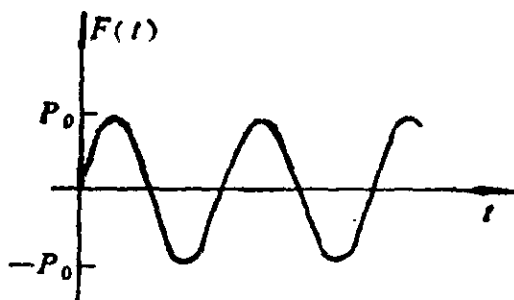


图 2-12

$$x(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) u(t).$$

2-13 求单自由度无阻尼系统对图2-13所示矩形脉冲的响应,画出系统的冲击谱,并与 § 2.5结果比较进行分析。

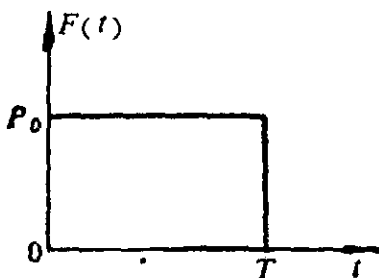


图 2-13

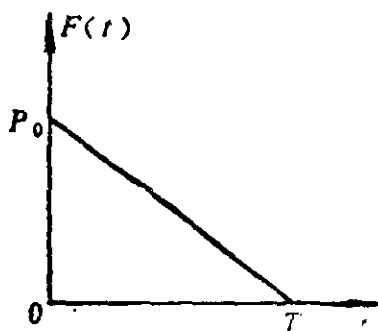


图 2-14

2-14 求单自由度无阻尼系统对图2-14所示三角形脉冲的响应,画出系统的冲击谱,并与 § 2.5结果比较进行分析。

2-15 用脉冲响应函数法求单自由度无阻尼系统对图2-15所示三角脉冲力 $F(t)$ 激励的响应。

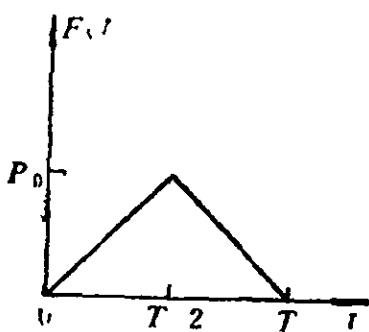


图 2-15

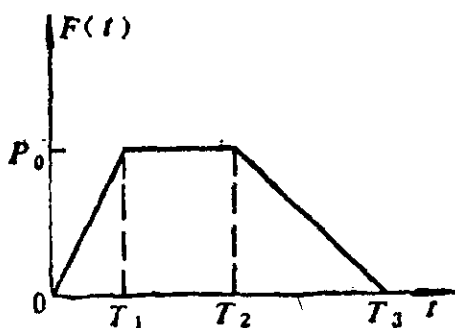


图 2-17

2-16 求上题系统的冲击谱。

2-17 用脉冲响应函数法求单自由度无阻尼系统对图2-17所示梯形脉冲力 $F(t)$ 激励的响应。

2-18 求上题中梯形脉冲力的冲击谱。

第三章 两自由度系统的振动

前面两章分别讨论了单自由度系统的自由振动和强迫振动，但工程中大量的复杂振动系统往往需要简化成多自由度系统才能反映实际问题的物理本质。两自由度系统是多自由度系统的一个最简单的特例。与单自由度系统比较，两自由度系统具有一些本质上是新的概念，需要新的分析方法。而由两自由度系统到更多自由度系统，则主要是量的扩充，在问题的表述，求解的方法以及在最主要的振动性态上没有本质的区别。因此，本章先讲解两自由度系统的振动，介绍一些新的基本概念，作为下一章研究多自由度系统的基础。另外，两自由度系统的振动理论本身也有重要的工程应用。

振动系统的“自由度”定义为描述振动系统的位置或形状所需要的独立坐标的个数。需要用两个独立坐标来描述其运动的振动系统称为两自由度振动系统。本章先导出两自由度系统的一般运动方程，然后讨论其自由振动和强迫振动。

§ 3.1 两自由度振动系统的运动微分方程

图3.1-1(a)是一个典型的两自由度振动系统的力学模型，质量 m_1 和 m_2 分别用刚度为 k_1 的弹簧，阻尼为 c_1 的阻尼器和刚度为 k_3 的弹簧，阻尼为 c_3 的阻尼器联接于左、右侧的支承点，并用刚度为 k_2 的弹簧，阻尼为 c_2 的阻尼器相互联接， m_1 和 m_2 可沿光滑水平面移动，它们在任何时刻的位置由独立坐标 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 完全确定。

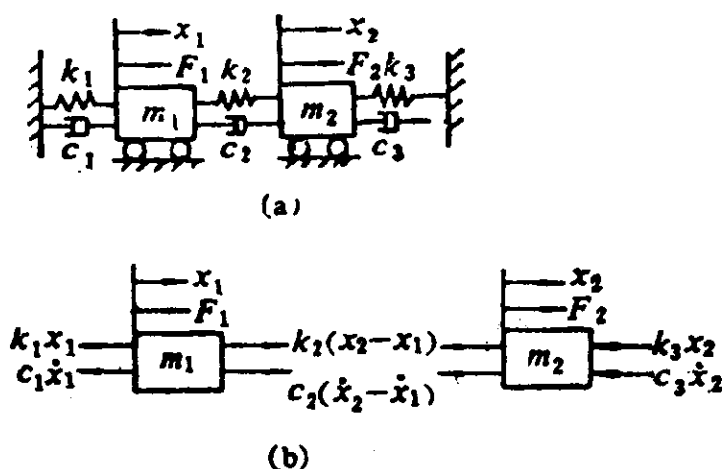


图 3.1-1

选取 m_1 与 m_2 的静平衡位置为坐标 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 的原点，那么在任一时刻，当 m_1 、 m_2 的位移为 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 时，在水平方向上， m_1 承受弹性恢复力 $k_1x_1(t)$ 、 $k_2[x_2(t) - x_1(t)]$ 、阻尼力 $c_1\dot{x}_1(t)$ 、 $c_2[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)]$ 、外界激励力 $F_1(t)$ ； m_2 承受弹性恢复力 $k_3x_2(t)$ 、 $k_2[x_2(t) - x_1(t)]$ 、阻尼力 $c_3\dot{x}_2(t)$ 、 $c_2[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)]$ 、外界激励力 $F_2(t)$ ，见图3.1-1(b)中表示的 m_1 、 m_2 的脱离体图。根据牛顿运动定律，可得到系统的两个运动微分方程：

$$m_1\ddot{x}_1(t) = -c_1\dot{x}_1(t) + c_2[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] - k_1x_1(t) + k_2[x_2(t) - x_1(t)] + F_1(t),$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) = -c_3\dot{x}_2(t) + c_2[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] - k_3x_2(t) + k_2[x_1(t) - x_2(t)] + F_2(t).$$

移项得

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2)\dot{x}_1(t) - c_2\dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = F_1(t),$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) + (c_2 + c_3)\dot{x}_2(t) - c_2\dot{x}_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_2x_1(t) = F_2(t). \quad (3.1-1)$$

从方程(3.1-1)可以看到，对 m_1 取脱离体的方程中包含了 $x_1(t)$ 、 $\dot{x}_2(t)$ ，而对 m_2 取脱离体的方程中包含了 $x_1(t)$ 、 $\dot{x}_1(t)$ ，这就使方程(3.1-1)成为联立方程，而坐标 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 则被称为是耦合的， m_1 和 m_2 的运动是通过耦合项相互影响的。显然，当耦合项为零时，即 $c_2 = k_2 = 0$ 时，原来的两自由度系统就成为两个单自由度系统。一般情况下，运动方程(3.1-1)为常系数二阶线性联立微分方程组，对之可采用消去法求解其中的两未知函数 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ ，但此法会使方程的阶数升高，同时不易体现方程中的物理意义。因此，多自由度系统的振动分析，一般都要采用下面讲述的方法来解除坐标耦合。

方程(3.1-1)可写为紧凑的矩阵形式，为此设

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} &= [m], \quad \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} = [c], \\ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} &= [k], \quad \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \{x(t)\}, \\ \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} &= \{F(t)\}, \end{aligned} \quad (3.1-2)$$

于是，方程(3.1-1)成为

$$[m] \{\ddot{x}(t)\} + [c] \{\dot{x}(t)\} + [k] \{x(t)\} = \{F(t)\}, \quad (3.1-3)$$

其中常数矩阵 $[m]$ 、 $[c]$ 、 $[k]$ 分别称为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，由(3.1-2)式可见，它们都是对称矩阵。当且仅当它们都是对角矩阵时，方程(3.1-3)才是无耦合的，而二维向量 $\{x(t)\}$ 、 $\{F(t)\}$ 分别称为位移向量和激振力向量。读者需注意，这里的向量是一种广义向量，其实它只是一种同类量的组合与排列，而并不表示在空间“有方向的量”。后面我们将频繁地使用运动方程的矩阵形式(3.1-3)。在形式上，它适合任何自由度线性系统的运动方程，只不过矩阵和向量的维数需要与系统的自由度数相等。

我们先简后繁，即首先忽略系统的阻尼，研究系统的自由振动。在很多实际工程问题中，阻尼对系统运动的影响很小，可以忽略不计。

§ 3.2 无阻尼系统的自由振动，自然模态

当不考虑图3.1-1(a)所示两自由度系统的阻尼和外界激励时，得到图3.2-1所示的两自由度无阻尼自由振动系统。令(3.1-1)式中 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $F_1(t) = F_2(t) = 0$ ，得到系统的运动微分方程为：

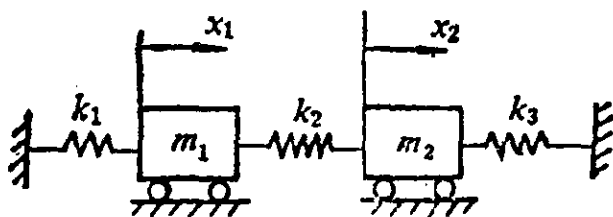


图 3.2-1

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_2 x_1(t) = 0.$$

为书写方便，采用下列符号

$$\begin{aligned} a &= \frac{k_1 + k_2}{m_1}, & b &= \frac{k_2}{m_1}, \\ c &= \frac{k_2}{m_2}, & d &= \frac{k_2 + k_3}{m_2}. \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

则系统的方程可写为，

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + ax_1(t) - bx_2(t) &= 0, \\ \ddot{x}_2(t) - cx_1(t) + dx_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2-2)$$

这是一个二阶常系数线性齐次微分方程组。为了研究它的解，我们先试探一种最简单的、特殊形式的解： m_1 和 m_2 合拍地进行运

动，即坐标之比 $x_2(t)/x_1(t)$ 等于常数，称这种运动为同步运动。可将同步解写为

$$x_1(t) = u_1 f(t), \quad x_2(t) = u_2 f(t). \quad (3.2-3)$$

其中振幅 u_1 、 u_2 和时间函数 $f(t)$ 待定，显然，这种形式的解，确实满足上述 $x_2/x_1 = u_2/u_1 = \text{常数}$ 的要求。为了探讨这种形式的解存在的可能性，以及确定 u_1 、 u_2 与 $f(t)$ ，将(3.2-3)式代入(3.2-2)式，得：

$$\begin{aligned} u_1 \ddot{f}(t) + (au_1 - bu_2)f(t) &= 0, \\ u_2 \ddot{f}(t) + (du_2 - cu_1)f(t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2-4)$$

从而有

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{au_1 - bu_2}{u_1}, \quad -\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{du_2 - cu_1}{u_2}. \quad (3.2-5)$$

因为 a 、 b 、 c 、 d 及 u_1 、 u_2 均为常数，所以 $-\ddot{f}(t)/f(t)$ 亦应为实常数，不妨记为 λ ，则有：

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0. \quad (3.2-6)$$

同时有

$$\begin{aligned} (a - \lambda)u_1 - bu_2 &= 0, \\ (d - \lambda)u_2 - cu_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

方程(3.2-6)是最简单的二阶齐次常微分方程，它的解具有下列形式：

$$f(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}. \quad (3.2-8)$$

由于已假定所研究的系统既没有内部阻尼，又不受外界激励，即是保守系统，因此， $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 以及 $f(t)$ 都应该是有限值，从而(3.2-8)式中的 λ 必须为正数，不妨设 $\lambda = \omega^2$ ，这里 ω 为正实数。这样，方程(3.2-6)便成为一个谐振子系统的运动方程。对此，我们在第一章已讨论过，且已知其解为：

$$f(t) = C \cos(\omega t - \psi), \quad (3.2-9)$$

式中 C 为任意常数， ω 为简谐运动频率， ψ 为初相角。

从上面的分析看到，如果系统的同步运动确实能够存在，则它对时间的依赖应是简谐的，且方程(3.2-7)须成立。用 ω^2 取代方程(3.2-7)中的 λ ，得

$$\begin{aligned}(a - \omega^2)u_1 - bu_2 &= 0, \\ -cu_1 + (d - \omega^2)u_2 &= 0.\end{aligned}\quad (3.2-10)$$

这是关于 u_1 、 u_2 的线性齐次代数方程组， $u_1 = u_2 = 0$ 显然是它的一组解，但这组解仅表明 $x_1(t) = x_2(t) = 0$ ，即系统处于平衡状态，我们对此解不感兴趣。所需要探求的是 u_1 、 u_2 存在非零解，即不全为零的情况。为此，方程(3.2-10)的系数行列式必须等于零，即

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} a - \omega^2 & -b \\ -c & d - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2-11)$$

$\Delta(\omega^2)$ 称为特征行列式，它给出了同步解的简谐振动频率与系统物理参数之间的确定性关系。展开后得：

$$\omega^4 - (a + d)\omega^2 + (ad - bc) = 0. \quad (3.2-12)$$

上式是关于 ω^2 的二次代数方程，称为系统的特征方程或频率方程。由此可解出 ω^2 的二个根为：

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(a + d) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}, \quad (3.2-13a)$$

或

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(a + d) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a - d)^2 + 4bc}. \quad (3.2-13b)$$

因为系统的刚度、质量恒为正值，由它们按(3.2-1)式确定的 a 、 b 、 c 、 d 也为正值，故从(3.2-13b)式可见 ω_1^2 、 ω_2^2 都是实根；又因为 $ad > bc$ ，从(3.2-13a)式可见，“ \pm ”号后的项小于“ \pm ”号前面的项，所以 ω_1^2 和 ω_2^2 都取正值，方程(3.2-12)只存在这样两个正实根。这表明，系统可能有的同步运动不仅是简谐的，而且只可能存在 ω_1 和 ω_2 两种频率的简谐运动。 ω_1 和 ω_2 由 a 、 b 、

c 、 d ，即由系统的参数 k_1 、 k_2 、 k_3 、 m_1 、 m_2 所唯一确定，称为系统的固有频率或自然频率。我们看到，两自由度系统有两个自然频率。

下面求 u_1 、 u_2 。由于方程(3.2-10)是齐次的，我们不能完全确定振幅 u_1 和 u_2 ，只可能确定它们的比值 u_2/u_1 。在满足方程(3.2-11)的条件下，联立方程(3.2-10)中两式成为同解方程，即由该两式求出的 u_2/u_1 是相等的。于是，将 ω_1^2 和 ω_2^2 分别代入方程(3.3-10)中的任一式，可得到 u_2 和 u_1 的比值 r_1 、 r_2 为

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} = \frac{a - \omega_1^2}{b} = \frac{c}{d - \omega_1^2}, \\ r_2 &= \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} = \frac{a - \omega_2^2}{b} = \frac{c}{d - \omega_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2-14)$$

上式表明：系统按其任一固有频率作简谐同步运动时， m_1 和 m_2 运动的振幅之比也由系统本身的物理性质所决定，对特定系统，它是一个确定的量。另外，从(3.2-3)式还可见：由于 m_1 和 m_2 作同步运动，它们在任意时刻的位移的比值 $x_2(t)/x_1(t)$ 等于振幅比 u_2/u_1 ，从而也是一个确定的值。这样，当系统的频率 ω_1 或 ω_2 作同步简谐运动时，具有确定比值的一对常数 $u_1^{(1)}$ 、 $u_2^{(1)}$ 或 $u_1^{(2)}$ 、 $u_2^{(2)}$ 可以确定系统的振动型态，称之为固有振型。可用向量形式表示为：

$$\left. \begin{aligned} \{u^{(1)}\} &= \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = u_1^{(1)} \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix}, \\ \{u^{(2)}\} &= \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = u_1^{(2)} \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2-15)$$

$\{u^{(1)}\}$ 和 $\{u^{(2)}\}$ 称为系统的模态向量。每一个模态向量和相应的自然频率构成系统的一个自然模态。 $\{u^{(1)}\}$ 对应于较低的自然频率 ω_1 （亦称为基频），它们组成第一阶模态， $\{u^{(2)}\}$ 与 ω_2 则构成第二阶模态。两自由度系统正好有两个自然模态，它们代表两种形式的同步运动。不难证明： $r_1 > 0$ ， $r_2 < 0$ 。这说明，系统

按第一阶模态作同步运动时, m_1 和 m_2 在任一瞬时的运动方向相同, 而按第二阶模态运动时, m_1 和 m_2 运动方向相反。

后面将会看到, 系统的模态数一般与其自由度数相等。

经过上述分析, 可以写出两个同步解的具体形式为

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)}(t) &= u_1^{(1)} C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) \\ x_2^{(1)}(t) &= u_1^{(1)} r_1 C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) \end{aligned} \right\}, \quad (3.2-16a)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)}(t) &= u_1^{(2)} C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2) \\ x_2^{(2)}(t) &= u_1^{(2)} r_2 C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2) \end{aligned} \right\}, \quad (3.2-16b)$$

其中 $u_1^{(1)} C_1$ 、 ψ_1 和 $u_1^{(2)} C_2$ 、 ψ_2 为任意常数。(3.2-16a)式和(3.2-16b)式都是齐次微分方程组(3.2-2)的解, 将它们叠加可得到该微分方程组的通解:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2) \\ x_2(t) &= C_1 r_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 r_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2) \end{aligned} \right\}. \quad (3.2-17)$$

这里将(3.2-16)式的 $u_1^{(1)} C_1$ 和 $u_1^{(2)} C_2$ 写成了 C_1 、 C_2 将(3.2-17)式写成向量形式, 得

$$\{x(t)\} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \psi_2). \quad (3.2-18)$$

上式表明, 在一般情况下, 两自由度系统自由振动是两个自然模态振动的叠加, 即是两个不同频率的简谐运动的叠加, 其结果一般不是简谐运动。

(3.2-17)式中的 ω_1 、 ω_2 及 r_1 和 r_2 都决定于系统的物理特性, 分别由(3.2-13)、(3.2-14)式确定, 而 C_1 、 C_2 和 ψ_1 、 ψ_2 由系统运动的初始条件确定, 设 $t=0$ 时, m_1 、 m_2 的位移和速度分别为

x_{10} 、 x_{20} 、 \dot{x}_{10} 、 \dot{x}_{20} , 将它们代入(3.2-17)式得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= C_1 \cos\psi_1 + C_2 \cos\psi_2 = \dot{x}_{10}, \\ \dot{x}_2(0) &= C_1 r_1 \cos\psi_1 + C_2 r_2 \cos\psi_2 = \dot{x}_{20}, \\ \ddot{x}_1(0) &= C_1 \omega_1 \sin\psi_1 + C_2 \omega_2 \sin\psi_2 = \ddot{x}_{10}, \\ \ddot{x}_2(0) &= C_1 r_1 \omega_1 \sin\psi_1 + C_2 r_2 \omega_2 \sin\psi_2 = \ddot{x}_{20} \end{aligned} \right\} (3.2-10)$$

这是以 C_1 、 C_2 、 ψ_1 、 ψ_2 为未知量的代数方程组，解之可得：

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{|r_2 - r_1|} \sqrt{(r_2 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20})^2 + \frac{(r_2 \ddot{x}_{10} - \ddot{x}_{20})^2}{\omega_1^2}}, \\ C_2 &= \frac{1}{|r_2 - r_1|} \sqrt{(\dot{x}_{20} - r_1 \dot{x}_{10})^2 + \frac{(\ddot{x}_{20} - r_1 \ddot{x}_{10})^2}{\omega_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.2-20)$$

$$\psi_1 = \text{tg}^{-1} \frac{r_2 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}{\omega_1 (r_2 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20})},$$

$$\psi_2 = \text{tg}^{-1} \frac{r_1 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}{\omega_2 (r_1 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20})}.$$

(3.2-17)、(3.2-20)式给出了系统对初始激励的响应。在特定的初始条件下，若 $C_2 = 0$ ，则系统按第一阶模态进行振动；若 $C_1 = 0$ ，则系统按第二阶模态进行振动。若 C_1 、 C_2 都不为零，系统的运动是两个自然模态振动的叠加， C_1 、 C_2 决定了在系统的总振动中第一阶模态和第二阶模态的振动所占比例的大小。读者需要将它们与 r_1 、 r_2 区分开，后者分别表示在一阶模态中与二阶模态中，两个自由度的振幅之比。

例3.1 在图3.2-1所示的两自由度系统中，已知 $m_1 = m$ ， $m_2 = 2m$ ， $k_1 = k_2 = k$ ， $k_3 = 2k$ ，求振动系统的自然模态。

解：利用(3.2-13a)式，将 $a = 2k/m$ ， $b = k/m$ ， $c = k/(2m)$ ， $d = 3k/(2m)$ 代入得到

$$\omega_{1,2}^2 = \left[\frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2} \right)^2 + 2} \right] \frac{k}{m} = \left(\frac{7}{4} \mp \frac{3}{4} \right) \frac{k}{m}.$$

系统的自然频率为

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = 1.5811\sqrt{k/m}$$

将 ω_1 、 ω_2 代入(3.2-14)式, 得

$$r_1 = \frac{2k/m - k/m}{k/m} = 1, \quad ,$$

$$r_2 = \frac{2k/m - 5k/(2m)}{k/m} = -\frac{1}{2}.$$

按(3.2-15)式, 系统的模态向量为

$$\{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix}.$$

这里为简便起见, 将(3.2-15)式中的 $u_1^{(1)}$ 、 $u_1^{(2)}$ 都取为1. 这当然是允许的, 因为模态向量的“长度”并无实质意义, 而重要的是其各分量之间的比例关系, 即它的“方向”. 若以横轴表示系统各点的静平衡位置, 纵轴表示各点的振幅, 则可画出系统振型

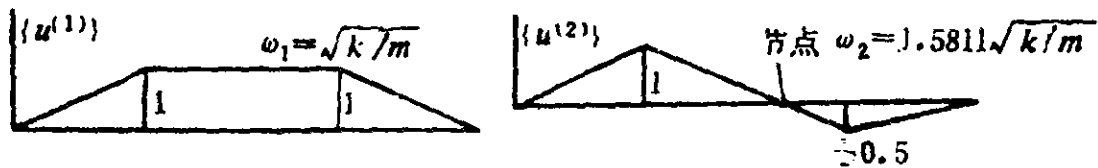


图 3.2-2

或模态的形状, 如图3.2-2所示. 第二阶模态有一个零位移点, 这种点称为节点, 这意味着系统按此模态运动时, 弹簧 k_2 上有一个始终保持不动的点.

例3.2 在例3.1中, 已知: (1) $x_{10} = 1.2$, $\dot{x}_{20} = \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$; (2) $x_{10} = x_{20} = 1.2$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$; 求系统的响应.

解: 由例3.1得到 $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1.5811\sqrt{k/m}$, $r_1 = 1$, $r_2 = -0.5$.

(1) 将初始条件 $x_{10} = 1.2$, $\dot{x}_{20} = \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ 代入(3.2-20)式可求出

$$C_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \left(\frac{1}{2} \times 1.2 \right) = 0.4,$$

$$C_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} (1 \times 1.2) = 0.8,$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0.$$

从而根据(3.2-17)式可写出系统的响应

$$x_1 = 0.4 \cos \sqrt{k/m} t + 0.8 \cos 1.58 \sqrt{k/m} t,$$

$$x_2 = 0.4 \cos \sqrt{k/m} t - 0.4 \cos 1.58 \sqrt{k/m} t.$$

(2) 将初始条件 $x_{10} = x_{20} = 1.2$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ 代入(3.2-20)式可求出

$$C_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \left(\frac{1}{2} \times 1.2 + 1.2 \right) = 1.2,$$

$$C_2 = 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0.$$

按(3.2-17)可写出系统的响应

$$x_1 = 1.2 \cos \sqrt{k/m} t,$$

$$x_2 = 1.2 \cos \sqrt{k/m} t.$$

即只有第一阶模态的振动, 这是由于初始条件正好构成第一阶振型的缘故. 如果初始条件构成第二阶振型, 即令初始条件为 $x_{10} = 1$, $x_{20} = -0.5$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, 则系统将只有第二阶模态的振动, 读者可自行验证.

§ 3.3 坐标变换与坐标耦合

即使是对于同一个两自由度系统, 也可以选取不同的独立坐标来描述它的运动, 从而得到不同的运动微分方程. 值得注意的是, 当采用不同的坐标时, 运动方程表现为不同的耦合方式, 甚至表现为耦合的有无. 以下通过一个例子来说明这一问题.

图3.3-1(a)所示系统可看作是车辆的车身、前后车轮及其悬

挂装置构成的系统或机器与其隔振装置组成的系统的简化模型。

设刚性杆质量为 m ，绕质心 c 的转动惯量为 I_c ，质心 c 与弹簧 k_1 、 k_2 的距离分别为 l_1 和 l_2 。取质心 c 的铅垂位移 x 和绕质心的转角 θ 为坐标， x 的坐标原点取在系统的静平衡位置。这里设 x 和 θ 都是微小位移，对刚性杆应用质心运动定律和刚体转动定律，得到关于 x 和 θ 的两个运动微分方程

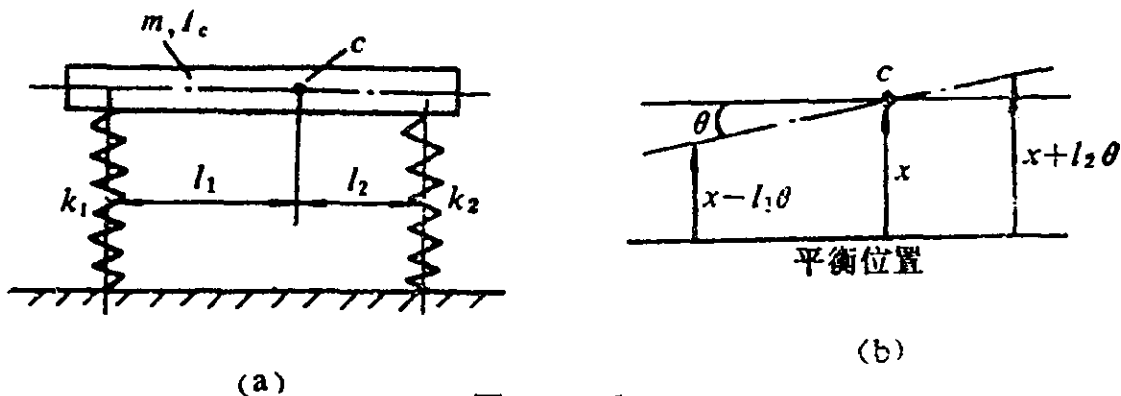


图 3.3-1

$$\begin{aligned} -k_1(x-l_1\theta) - k_2(x+l_2\theta) &= m\ddot{x}, \\ k_1(x-l_1\theta)l_1 - k_2(x+l_2\theta)l_2 &= I_c\ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (3.3-1)$$

或者

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + (k_1+k_2)x - (k_1l_1 - k_2l_2)\theta &= 0, \\ I_c\ddot{\theta} - (k_1l_1 - k_2l_2)x + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -(k_1l_1 - k_2l_2) \\ -(k_1l_1 - k_2l_2) & k_1l_1^2 + k_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.3-3)$$

由于在一般情况下 $k_1l_1 \neq k_2l_2$ ，因而刚度矩阵是非对角的，即两方程通过坐标 x 、 θ 而相互耦合。这种耦合称为弹性耦合或静力耦合。

现在选取不同的坐标来建立该系统的运动方程。选取另一组坐标 x_1 、 θ ，如图3.3-2(b)所示， θ 仍为杆在图示平面中的转角， x_1 是杆上 o 点的铅垂位移，而 o 点是当刚性杆在铅垂方向平动时弹

簧 k_1 、 k_2 合力的作用点， k_1 、 k_2 满足条件 $k_1 l'_1 = k_2 l'_2$ 。设 I_0 为杆对 o 点的转动惯量，对系统分别采用质心运动定律和刚体转动定律，有

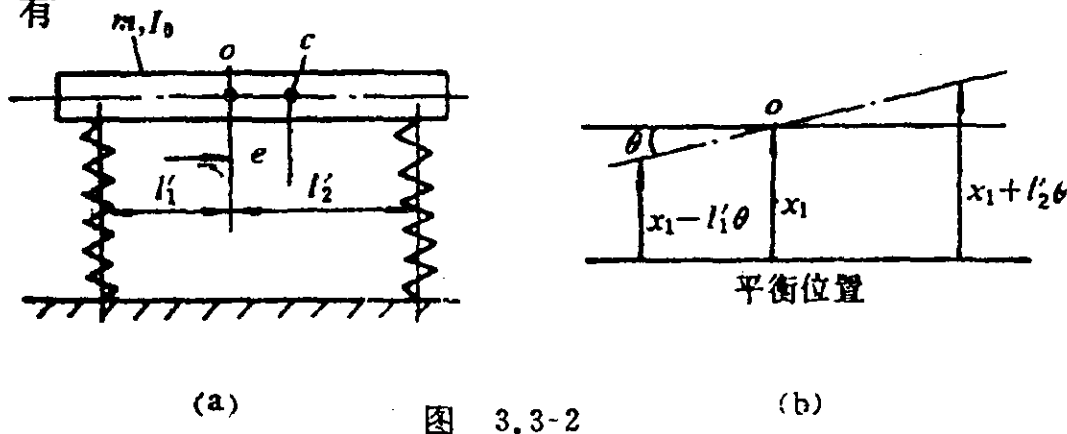


图 3.3-2

$$\begin{aligned} -k_1(x_1 - l'_1 \theta) - k_2(x_1 + l'_2 \theta) &= m[\ddot{x}_1 - (l_1 - l'_1) \ddot{\theta}], \\ k_1(x_1 - l'_1 \theta) l'_1 - k_2(x_1 + l'_2 \theta) l'_2 + m(l_1 - l'_1) \ddot{x}_1 &= I_0 \ddot{\theta}. \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

设 $e = l_1 - l'_1$ ， e 为 o 、 c 两点之间的距离，(3.3-4)式可整理成

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 - me \ddot{\theta} + (k_1 + k_2) x_1 &= 0, \\ -me \ddot{x}_1 + I_0 \ddot{\theta} + (k_1 l'^2_1 + k_2 l'^2_2) \theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.3-5)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} m & -me \\ -me & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l'^2_1 + k_2 l'^2_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.3-6)$$

此式中刚度矩阵成为对角阵，即已解除耦合。可是质量矩阵却变成了非对角矩阵，即两方程通过加速度 \ddot{x}_1 与 $\ddot{\theta}$ 而相互耦合，这种耦合称为惯性耦合或动力耦合。

比较(3.3-3)与(3.3-6)两组方程可见，耦合的方式（是弹性耦合还是惯性耦合）是依所选取的坐标而定的，而坐标选取是研究者的主观抉择，并非系统的本质特性。从这个意义上讲，这里我们应该说“坐标的耦合方式”或“运动方程的耦合方式”，而不应该说“系统的耦合方式”。

一般情况下，运动方程中既存在弹性耦合，又存在惯性耦合，即刚度矩阵和质量矩阵都是非对角的。读者不妨自行验证，当取两弹簧处的铅垂位移作为独立坐标时，就正是这种情况。

那么，我们从另一个角度提一个问题：对于一个系统，是否存在一组特定的坐标，使得运动方程既无弹性耦合，而又无惯性耦合，即刚度矩阵与质量矩阵均成为对角矩阵呢？答案是肯定的，这一组特定的坐标称为“自然坐标”或“主坐标”。

§ 3.4 自然坐标

考虑图3.2-1所示的系统，其坐标为 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ ，运动方程为(3.2-2)，其通解为(3.2-17)式，该式可写成如下形式

$$\begin{aligned} x_1(t) &= q_1(t) + q_2(t), \\ x_2(t) &= r_1 q_1(t) + r_2 q_2(t). \end{aligned} \quad (3.4-1)$$

式中

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1), \\ q_2(t) &= C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2). \end{aligned} \quad (3.4-2)$$

将式(3.4-1)写成矩阵形式，有

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.4-3)$$

可以将 $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$ 看作是另一组独立坐标，而上式即为 (x_1, x_2) 与 (q_1, q_2) 两组坐标之间的变换关系。须注意，这里的坐标变换矩阵

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = [\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}]. \quad (3.4-4)$$

有一点特殊，即它的各列正好为相应的模态向量。此矩阵称为模态矩阵。为了解在这一坐标变换下，系统的运动方程(3.2-2)会变成什么形式，将(3.4-1)式代入(3.2-2)，得

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(t) + \ddot{q}_2(t) + a(q_1(t) + q_2(t)) - b(r_1 q_1(t) + r_2 q_2(t)) &= 0, \\ r_1 \ddot{q}_1(t) + r_2 \ddot{q}_2(t) - c(q_1(t) + q_2(t)) + d(r_1 q_1(t) + r_2 q_2(t)) &= 0. \end{aligned}$$

用 r_2 乘以上第一式，然后与第二式相减，得

$$(r_2 - r_1) \ddot{q}_1(t) + (ar_2 + c - br_2 r_1 - dr_1)q_1(t) + (ar_2 + c - br_2^2 - dr_2)q_2(t) = 0,$$

类似可得

$$(r_1 - r_2) \ddot{q}_2(t) + (ar_1 + c - br_1^2 - dr_1)q_1(t) + (ar_1 + c - br_1 r_2 - dr_2)q_2(t) = 0.$$

利用(3.2-13)与(3.2-14)式，对以上两式进行化简，得到：

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) &= 0, \\ \ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4-5)$$

由上式可见，以 $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$ 为坐标的运动方程不存在任何形式的耦合。事实上，将上式写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.4-6)$$

即质量矩阵与刚度矩阵均成为对角阵。因此坐标 (q_1, q_2) 正好是前面所要求的自然坐标。 $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$ 一般并无明显的物理意义，但它由(3.4-3)式给出了确切的数学定义，因而与物理坐标 (x_1, x_2) 一样，可以用来精确地描述系统的运动。

方程(3.4-5)的解即为(3.4-2)式，以此式代回坐标变换式(3.4-1)式，即得到由物理坐标描述的解

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2), \quad (3.4-7) \\ x_2(t) &= C_1 r_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 r_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2). \end{aligned}$$

或

$$\{x(t)\} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \psi_2). \quad (3.4-8)$$

上式与前面的(3.2-17)或(3.2-18)式相同。但是这里我们是以不同的观点来考察这一问题——我们以坐标变换的观点取代了前面的模态叠加的观点。

以上讨论表明，如果以一个系统的模态矩阵作为坐标变换矩阵，将物理坐标 (x_1, x_2) 变为自然坐标 (q_1, q_2) ，那么系统的运动方程即会解除耦合。

例3.3 图3.4-1中一均质杆质量为200kg，两端用弹簧支承，

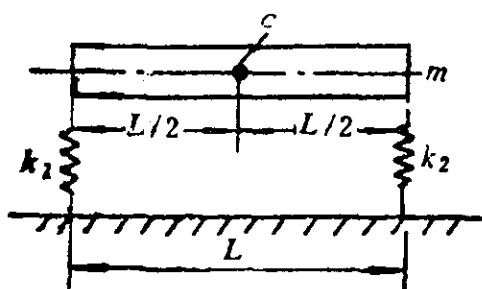


图 3.4-1

总长度为 $L = 1.5\text{m}$ ， $k_1 = 18\text{kN/m}$ ， $k_2 = 22\text{kN/m}$ ，试确定系统的自然模态和自然坐标。

解：设杆的重心（中点）为 c ，取 c 点的铅垂位移 x 和杆的转角 θ 为广义坐标。

$$I_c = \frac{1}{12}mL^2 = 37.5\text{kgm}^2$$

将给出的有关参数代入方程(3.3-3)，得

$$\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 37.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} 40 & 3 \\ 3 & 22.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{a})$$

对应的特征值问题的方程为

$$-\omega \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 37.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} 40 & 3 \\ 3 & 22.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

频率方程为

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} 4 \times 10^3 - 200\omega^2 & 3 \times 10^3 \\ 3 \times 10^3 & 22.5 \times 10^3 - 37.5\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

由上式解得自然频率为 $\omega_1 = 14.036\text{rad/s}$ ， $\omega_2 = 24.6\text{rad/s}$ ，按(3.2-14)式，振幅比

$$r_1 = \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} = \frac{40 \times 10^3 - 200 \times 14.036^2}{-3 \times 10^3} = -0.199,$$

$$r_2 = \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} = \frac{40 \times 10^3 - 200 \times 24.6^2}{-3 \times 10^3} = 26.9.$$

按(3.4-4)式, 坐标变换矩阵为

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.199 & 26.9 \end{bmatrix}.$$

设系统的自然坐标为 q_1 、 q_2 , 则根据(3.4-3)式,

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.199 & 26.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}.$$

将上式代入以坐标 x 、 θ 表示的运动方程(a), 可得到以自然坐标表示的运动方程

$$\ddot{q}_1(t) + 14.036^2 q_1(t) = 0,$$

$$\ddot{q}_2(t) + 24.6^2 q_2(t) = 0.$$

上述方程已经解耦, 其解为

$$q_1(t) = C_1 \cos(14.036t - \psi_1),$$

$$q_2(t) = C_2 \cos(24.6t - \psi_2).$$

从而以坐标 x 、 θ 表示的系统的运动为

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.199 \end{Bmatrix} \cos(14.036t - \psi_1) \\ + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 26.9 \end{Bmatrix} \cos(24.6t - \psi_2).$$

若已知初始条件, 可按(3.2-20)式求出 C_1 、 C_2 、 ψ_1 、 ψ_2 .

§ 3.5 拍击现象

当两自由度系统的两个自然频率很接近时, 将会出现振幅以一种很低的频率周期变化的现象, 即所谓拍击现象, 它是一种振幅自动调制的现象。

图3.5-1 (a)所示为用一弹簧连接两个相同的摆所组成的双摆系统, 取 θ_1 、 θ_2 为系统的独立坐标, θ_1 、 θ_2 均为微小量且以逆时针方向为正。图3.5-1(b)为一个单摆的脱离体图, 根据定轴

刚体转动定律，可写出摆的运动微分方程

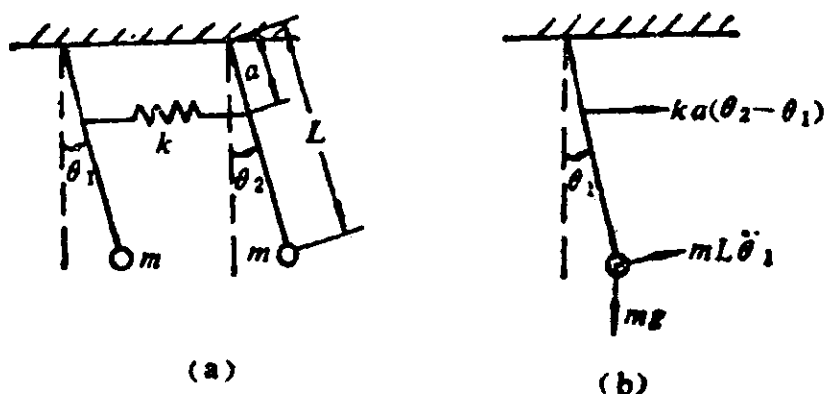


图 3.5-1

$$\begin{aligned} mL^2 \ddot{\theta}_1 &= -mgL\theta_1 + ka^2(\theta_2 - \theta_1), \\ mL^2 \ddot{\theta}_2 &= -mgL\theta_2 - ka^2(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (3.5-1)$$

写成矩阵形式即

$$\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mgL + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mgL + ka^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.5-2)$$

这是一个具有静力耦合的微分方程，可以利用上节介绍的方法求出自然模态。但利用方程(3.5-1)的特点可以更简便地找出自然坐标：将方程(3.5-1)的两个方程相加和相减后得到两个新的方程

$$\begin{aligned} mL^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) &= -mgL(\theta_1 + \theta_2), \\ mL^2(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) &= -mgL(\theta_1 - \theta_2) - 2ka^2(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (3.5-3)$$

令 $\phi_1 = \theta_1 + \theta_2$, $\phi_2 = \theta_1 - \theta_2$, 代入上式得

$$\begin{aligned} mL^2 \ddot{\phi}_1 &= -mgL\phi_1, \\ mL^2 \ddot{\phi}_2 &= -mgL\phi_2 - 2ka^2\phi_2. \end{aligned} \quad (3.5-4)$$

或者

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + \frac{g}{L}\phi_1 &= 0, \\ \ddot{\phi}_2 + \left(\frac{g}{L} + \frac{2ka^2}{mL^2}\right)\phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.5-5)$$

显然(3.5-5)式中的两个方程已解除耦合，而 ϕ_1 、 ϕ_2 是系统的自然坐标，故有

$$\omega_1 = \sqrt{g/L}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} \left(1 + \frac{2ka^2}{mgL} \right)} \quad (3.5-6)$$

方程(3.5-5)的解为

$$\begin{aligned} \phi_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1), \\ \phi_2 &= C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2). \end{aligned}$$

从而系统以坐标 θ_1 、 θ_2 表示的解为：

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{2}C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + \frac{1}{2}C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2), \\ \theta_2 &= \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2}C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) - \frac{1}{2}C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2). \end{aligned} \quad (3.5-7)$$

或者

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \psi_1) + \frac{1}{2} C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \psi_2). \quad (3.5-8)$$

当 $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0$ ， $\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = 0$ 时，(3.5-7)式成为

$$\theta_1 = \theta_0 \cos \omega_1 t, \quad \theta_2 = \theta_0 \cos \omega_1 t.$$

系统按第一阶模态振动，中间弹簧不产生变形，两个摆的振动同单摆一样，其自然频率同单摆的自然频率相同。当 $\theta_{10} = \theta_0$ ， θ_{20}

$= -\theta_0$ ， $\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = 0$ 时，(3.5-7)式成为

$$\theta_1 = \theta_0 \cos \omega_2 t, \quad \theta_2 = -\theta_0 \cos \omega_2 t.$$

系统按第二阶模态振动，弹簧中有一个不动的节点，此时可将两个摆的振动看作彼此独立，而在弹簧的原连接处连接了一个刚度为 $2k$ 的弹簧。在任意的初始条件下，系统的响应一般为两个自然模态振动的叠加，设初始条件为 $\theta_{10} = \theta_0$ ， $\theta_{20} = \dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = 0$ ，(3.5-7)式成为

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\theta_0(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \theta_0 \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t,$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\theta_0(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = \theta_0 \sin\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t.$$

(3.5-9)

令

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{k}{m} \frac{a^2}{\sqrt{gL^3}},$$

(3.5-10)

$$\omega_s = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \sqrt{g/L} + \frac{1}{2} \frac{k}{m} \frac{a^2}{\sqrt{gL^3}}.$$

则(3.5-9)式成为

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2} t \cos\omega_s t, \\ \theta_2(t) &= \theta_0 \sin\frac{\Delta\omega}{2} t \sin\omega_s t. \end{aligned}$$

(3.5-11)

上式表明两个摆的运动可看作频率为 ω_s 的简谐振动，而其振幅则

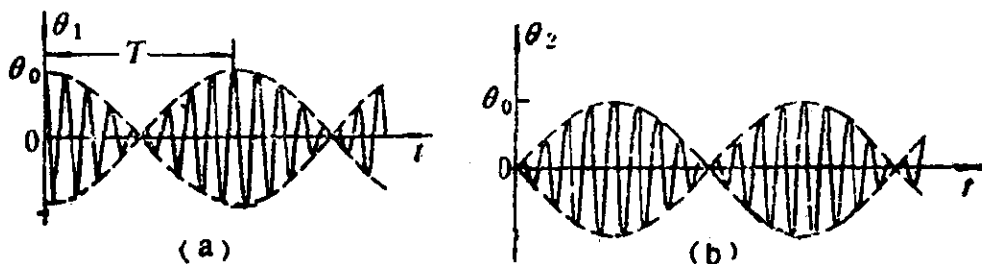


图 3.5-2

按谐波函数 $\theta_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2} t$ 与 $\theta_0 \sin\frac{\Delta\omega}{2} t$ 缓慢变化。当弹簧 k 很小时，双摆间的耦合比较弱，更确切地说，当 ka^2 比 mgL 小得多时，从(3.5-6)式可见 ω_2 接近 ω_1 ，从而由(3.5-10)可见 $\Delta\omega \ll \omega_s$ ，即振幅的变化速度远比 θ_1 、 θ_2 变化的速度慢，如图3.5-2所示，即形成了所谓的拍击现象。由图3.5-2可见，左边的摆从振幅 θ_0 开始摆动，而此时右边的摆处于静止，接着左边的摆的振幅逐渐减小，右边的摆开始摆动且振幅逐渐增大，到 $t = \pi/\Delta\omega$ 时，左

边的摆振幅为零，右边的摆达到最大值 θ_0 ，到 $t = 2\pi/\Delta\omega$ 时，左边摆的振幅又达到 θ_0 ，右边摆的振幅为零，如此循环不断。两摆运动的交替转换实际上是能量的相互转换，每一个时间间隔 $t = \pi/\Delta\omega$ 内，能量从一个摆转移给另一个摆，使两摆振幅交替地消长，这种现象称为拍击。(3.5-10)式中的 $\Delta\omega$ 称为拍频，拍的周期为 $T = 2\pi/\Delta\omega$ 。

拍击现象不仅出现在上述弱耦合的双摆系统中，也可能出现在其它两自由度振动系统中，是一种普遍的物理现象。其实，频率很接近的任何两个简谐振动的叠加都可能产生拍击现象。双螺旋桨的轮船及双发动机螺旋桨飞机产生的时强时弱的噪声都是拍击现象。

拍击现象形象地说明在多自由度系统的振动过程中，不仅存在着动能与势能之间的转换，而且存在着能量在各自由度之间的转移。

§ 3.6 两自由度系统在谐波激励下的强迫振动

研究图3.1-1所示的系统，考虑谐波激励： $F_1(t) = F_1 e^{i\omega t}$ ， $F_2(t) = F_2 e^{i\omega t}$ ，运动方程(3.1-3)成为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.6-1)$$

这是一个二阶线性常系数非齐次方程组，其通解由两部分组成，一是对应于齐次方程的解，即前面讨论过的自由振动，当系统存在阻尼时，这一自由振动经过一段时间后就逐渐衰减掉了，因而可略去不计。通解的另一部分是该非齐次方程的一个特解，它是由激励引起的强迫振动，即稳态振动。对谐波激励，下面采用第

二章曾使用过的复向量方法求解，设其稳态响应为

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}. \quad (3.6-2)$$

其中 X_1 、 X_2 为复数振幅。将(3.6-2)式代入方程(3.6-1)，得

$$\begin{aligned} -\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6-3)$$

或者写为

$$([k] + i\omega[c] - \omega^2[m])\{X\} = \{F\}. \quad (3.6-4)$$

令

$$[z(\omega)] = [k] + i\omega[c] - \omega^2[m]. \quad (3.6-5)$$

$[z(\omega)]$ 称为阻抗矩阵，它的元素

$$z_{ij} = k_{ij} - \omega^2 m_{ij} + i\omega c_{ij}, \quad (3.6-6)$$

称为机械阻抗，在第九章我们还将详细讲解这个概念。

将(3.6-5)式代入方程(3.6-4)，然后用 $[z(\omega)]^{-1}$ 左乘方程两端，得

$$\{X\} = [z(\omega)]^{-1} \{F\}, \quad (3.6-7)$$

其中

$$[z(\omega)]^{-1} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z_{11}z_{22} - z_{12}^2} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{12} & z_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.6-8)$$

将(3.6-8)式代入(3.6-7)式，展开可得

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \frac{z_{22}(\omega)F_1 - z_{12}(\omega)F_2}{z_{11}(\omega)z_{22}(\omega) - z_{12}^2(\omega)}, \\ X_2(\omega) &= \frac{-z_{21}(\omega)F_1 + z_{11}(\omega)F_2}{z_{11}(\omega)z_{22}(\omega) - z_{12}^2(\omega)}. \end{aligned} \quad (3.6-9)$$

再将(3.1-2)中矩阵 $[k]$ 、 $[m]$ 、 $[c]$ 的元素代入(3.6-6)式可得

$$\begin{aligned} z_{11}(\omega) &= k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2), \\ z_{21}(\omega) &= z_{12}(\omega) = -k_2 - i\omega c_2, \\ z_{22}(\omega) &= k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3). \end{aligned}$$

于是(3.6-9)式成为

$$X_1(\omega) = \{ [k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3)]F_1 + (k_2 + i\omega c_2)F_2 \} / \{ [k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2)][k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3)] - (k_2 + i\omega c_2)^2 \},$$

$$X_2(\omega) = \{ (k_2 + i\omega c_2)F_1 + [k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2)]F_2 \} / \{ [k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2)][k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3)] - (k_2 + i\omega c_2)^2 \}. \quad (3.6-10)$$

上式比较复杂, 我们先研究图3.2-1所示的无阻尼系统, 此时, 上式成为

$$X_1 = \frac{(d - \omega^2)F_1 + bF_2}{(a - \omega^2)(d - \omega^2) - bc},$$

$$X_2 = \frac{cF_1 + (a - \omega^2)F_2}{(a - \omega^2)(d - \omega^2) - bc}. \quad (3.6-11)$$

这时, X_1 、 X_2 均成为实数。

按(3.6-11)式可画出两个质块的响应幅值 $X_1(\omega)$ 、 $X_2(\omega)$ 随 ω 变化的曲线, 即幅频响应曲线。图3.6-1是典型的两自由度系统幅频响应曲线。

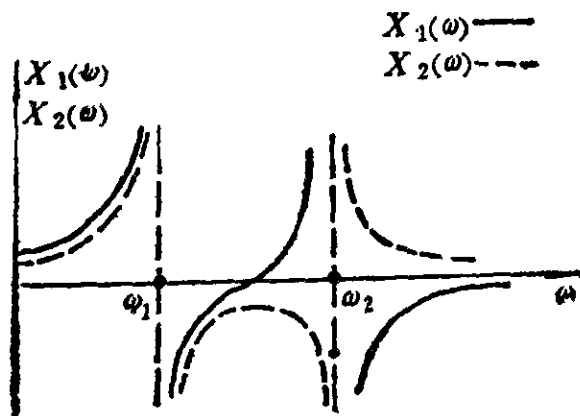


图 3.6-1

由(3.6-11)式和(3.6-2)式可知, 两自由度系统无阻尼受迫振动的运动规律是简谐振动, 频率与激振力频率相同, 振幅取决于激振力的幅值与系统本身的物理参数以及激振力的频率。从

(3.6-11)式可见,令该式的分母为零,即得到频率方程(3.2-12)。因而当 $\omega = \omega_1$ 或 $\omega = \omega_2$ 时,即激振力频率等于系统第一或第二阶自然频率时,系统出现共振,其振幅 X_1 、 X_2 趋于无穷大。所以两自由度系统有两个共振区,在跨越共振区时, X_1 、 X_2 将会反号,即出现倒相。读者须注意图3.6-1与图2.1-2之间的区别,前者表示的是 X_1 、 X_2 的代数值与激振频率 ω 之间的关系,而后者是放大系数 $|H(\omega)|$ 或者绝对值 $|X|$ 与 ω 之间的关系。

现在我们来略为详细地考察一下共振时的振幅。由(3.6-11)式得

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{cF_1 + (a - \omega^2)F_2}{(d - \omega^2)F_1 + bF_2} \quad (3.6-12)$$

上式表明在一定的激振频率下,两个质块的振幅比是一个确定值,当激振频率 ω 等于第一阶自然频率 ω_1 时,两个质块的振幅比为

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_{\omega_1} = \frac{cF_1 + (a - \omega_1^2)F_2}{(d - \omega_1^2)F_1 + bF_2} \quad (3.6-13)$$

注意到(3.2-14)式,并采用比例式相加法则,有

$$r_1 = \frac{a - \omega_1^2}{b} = \frac{c}{d - \omega_1^2} = \frac{(a - \omega_1^2)F_2 + cF_1}{bF_2 + (d - \omega_1^2)F_1}$$

因此

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_{\omega_1} = r_1,$$

同理有

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_{\omega_2} = r_2.$$

上式表明,在谐波激励下,系统在其任一自然频率上发生共振时,其振幅在各自由度上正是按对应的那一阶自然模态的振型进行分配的。当然,其振幅会不断上升,直至系统破坏或超出线性范围。

例3.4 在例3.1中,设作用在质块 m_1 上的激振力为 $F_1 \sin \omega t$,

作用在质块 m_2 上的激振力为零，试画出幅频响应曲线。

解：从例3.1中已求出 $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ ， $\omega_2 = 1.5811\sqrt{k/m}$ ，利用(3.2-12)、(3.2-13)式，有

$$(a - \omega^2)(d - \omega^2) - bc = (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)。$$

将有关数据代入方程(3.6-11)，得

$$X_1 = \frac{\left(\frac{3k}{2m} - \omega^2\right) \frac{F_1}{m}}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} = \frac{2F_1 \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right]}{5k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \right]},$$

$$X_2 = \frac{\frac{k}{2m} \frac{F_1}{m}}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} = \frac{F_1}{5k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \right]}。$$

图3.6-2(a)、(b)分别示出了 $X_1(\omega)$ 、 $X_2(\omega)$ 对 ω/ω_1 的频响曲线。

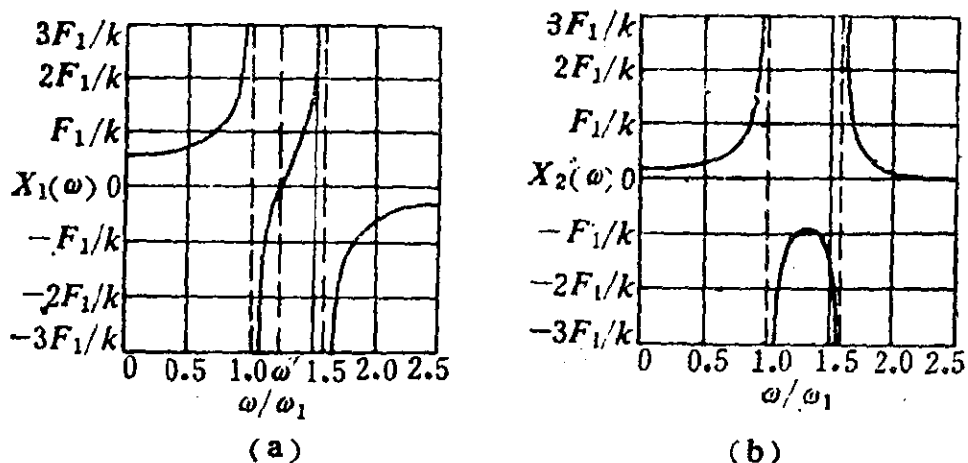


图 3.6-2

由图可见，两自由度系统的任一质块在每个自然模态附近的响应和频率之间的关系，类似于一个单自由度系统的频响曲线。

从图3.6-2(a)中看到，在激振频率 $\omega' = \sqrt{3k/(2m)}$ 时，质块 m_1 的振幅为零，这种现象通常称为反共振。第七章中将要详

细讨论的动力消振器就是应用这个原理来设计的。

请读者注意，在这一章里我们讲解了振动系统的“模态”的基本概念，但是我们略去了系统阻尼的作用。在强迫振动方面，我们也只讲解了系统对于谐波激励的响应，至于对任意激励的响应，也未讲到。这些问题将在下一章讲述。

思考题

判断下列叙述是否正确，若有误，请写出正确陈述：

1. 两自由度系统有两个自然频率 ω_1 、 ω_2 ，在自由振动时，系统的第一个坐标按自然频率 ω_1 作简谐振动，第二个坐标按自然频率 ω_2 作简谐振动。
2. 可以按耦合的方式及耦合与否将两自由度系统划分为惯性耦合系统，弹性耦合系统和无耦合系统。
3. 振型向量或模态向量是由初始条件决定的。
4. 任何无阻尼两自由度线性系统的运动方程均可以通过坐标变换使之解除耦合。
5. 无阻尼两自由度系统在作自由振动时，其某一自由度上的机械能并不守恒。

习题

3-1 两个质块 m_1 和 m_2 ，系于张力为 T 的无质量弦上，假如质块作横向微振动时，弦中的张力不变。试导出振动微分方程。

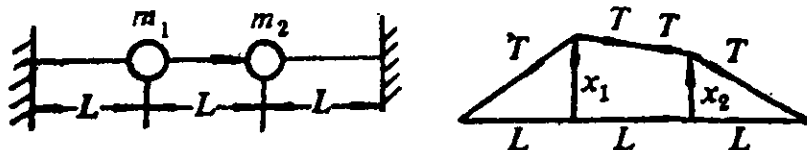


图 3-1

3-2 分别导出图3-2(a)、(b)所示两种双摆系统的振动微分方程，并

加以线性化。

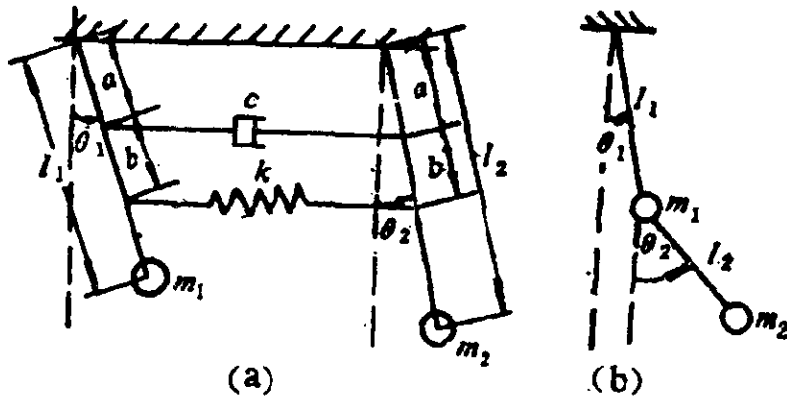


图 3-2

3-3 图3-3所示的扭转振动系统由无质量的轴和两个刚性圆盘所组成。轴的扭转刚度分别为 GJ_1 和 GJ_2 ，圆盘的转动惯量分别为 I_1 和 I_2 ，试列出扭振系统的运动微分方程。

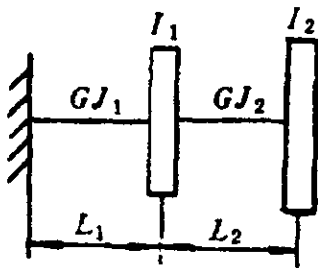


图 3-3

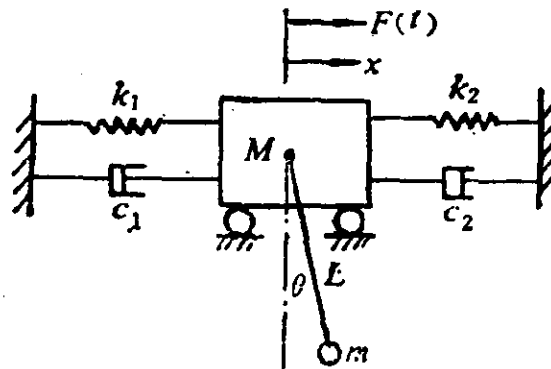


图 3-4

3-4 图3-4所示为一两自由度振动系统，试导出系统的运动微分方程。

3-5 在风洞实验中，可以将机翼翼段简化为图3-5(a)或(b)所示平面

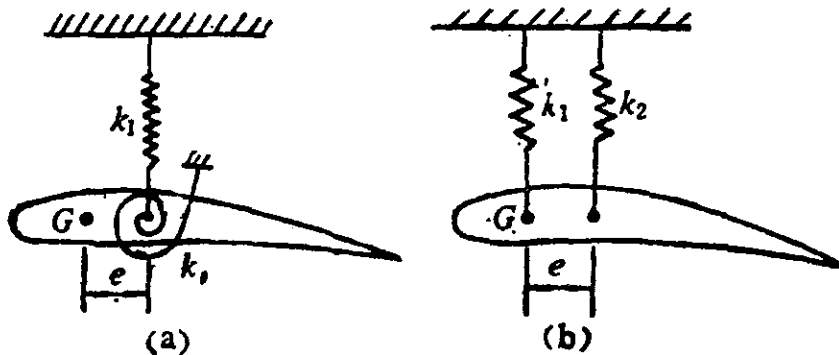


图 3-5

内的刚体，其中(a)由刚度为 k_1 的弹簧和刚度为 k_0 的扭簧所支持，重心 G 与支持点的距离为 e ，(b)由两个刚度分别为 k_1 和 k_2 的弹簧所支持， k_1 系于重心 G ， k_2 系于距 G 点 e 处；已知翼段的质量为 m ，绕重心 G 的转动惯量为 I_G ，试导出系统的振动微分方程。

3-6 设在习题3-1的系统中， $m_1 = m_2 = m$ ，试计算其固有频率和固有振型，画出振型图。

3-7 设在习题3-3的系统中， $I_1 = I_2 = I$ ， $GJ_1 = GJ_2 = GJ$ ， $L_1 = L_2 = L$ ，试计算其自然模态，并画出振型图。

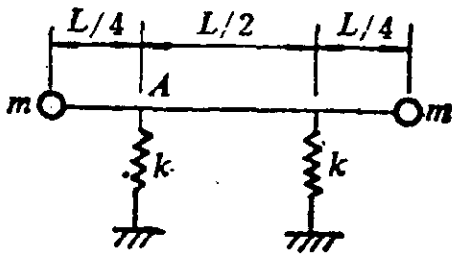


图 3-8

3-8 对图3-8所示系统，假设无质量刚杆上联结两个集中质量，并由两个弹簧支承。试以表示 A 点移动和绕 A 点转动的两坐标写出振动微分方程，计算其固有频率和固有振型，并画出振型图。

3-9 利用主坐标，重做习题3-8。

3-10 方程(3.2-2)可写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

在上面的方程中引进线性变换，变换矩阵取为模态矩阵，

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}.$$

试用方程(3.2-13)、(3.2-14)证明方程(3.4-5)。

3-11 求出习题3-6中的系统对初始激励 $y_1(0) = 1.0$ ， $y_2(0) = -1.0$ ， $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ 的响应，解释所得结果。

3-12 设习题3-7中的系统有下列扭矩作用：

$$M_1(t) = 0, \quad M_2(t) = Me^{i\omega t}$$

求其频率响应 $\Theta_1(\omega)$ 和 $\Theta_2(\omega)$ 的表达式。画出 $\Theta_1(\omega)$ 和 $\Theta_2(\omega)$ 对 ω 的曲线图。

3-13 两层建筑简化成图3-13所示一两自由度振动系统，这里 $m_1 = \frac{1}{2}m_2$ ， $k_1 = \frac{1}{2}k_2$ ，试证明它的自然模态是

$$\omega_1 = \sqrt{k_1 / (2m_1)}, \quad \{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

$$\omega_2 = \sqrt{2k_1 / m_1}, \quad \{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

假定由于地震地壳在水平方向振荡，其相应的方程为： $x_g = X_g \sin \omega t$ ，求建筑的频率响应 $x_1(\omega)$ 和 $x_2(\omega)$ 的表达式，并绘出 x_1 、 x_2 对 ω/ω_1 的曲线图。

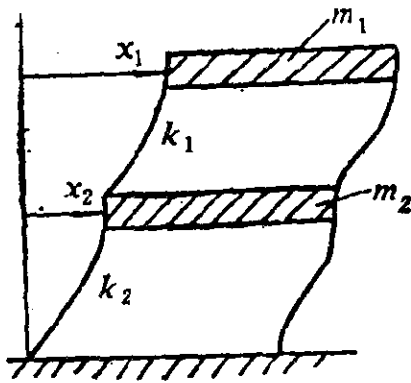


图 3-13

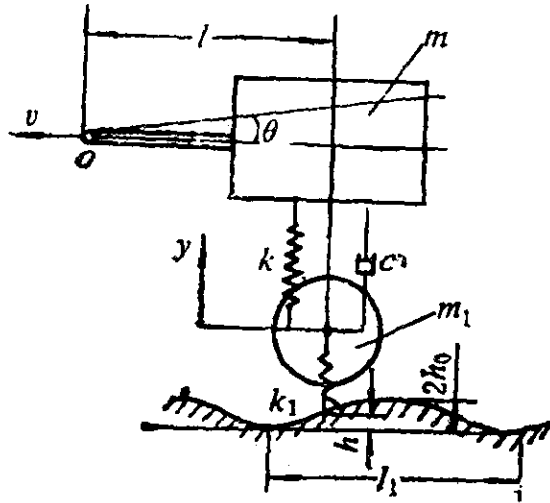


图 3-14

3-14 图3-14所示为一个在不平道路上行驶的拖车的简化模型，设拖车车厢质量为 m ，车轮的质量为 m_1 ，拖车对 O 点（拖挂点）的转动惯量为 I ，板簧的刚度为 k ，轮胎的刚度为 k_1 ，拖车的牵引速度为 v 。 O 点可视为无垂直位移，路面波形状由公式

$$h = h_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

表示，其中 $x = vt$ 。当拖车厢在板簧上摇摆时，车厢与车轮间的摩擦阻尼与它们之间的相对垂直速度成正比，试列出系统的振动微分方程，求出当系统共振时拖车的牵引速度（临界牵引速度）。

第四章 多自由度系统振动的基本知识

本章将前一章介绍的最简单的多自由度系统——两自由度系统的概念引伸到一般多自由度系统，并在概念与处理技巧上作了扩充与深化。

一般而言，工程实际中的振动系统都是连续弹性体，其质量与刚度具有分布的性质，只有掌握无限个点在每瞬时的运动情况，才能全面描述系统的振动。因此，理论上它们都属于无限多自由度的系统，需要用连续模型才能加以描述。但实际上往往可通过适当的简化，归结为有限多个自由度的模型来进行分析，即将系统抽象为由一些集中质块和弹性元件组成的模型。如果简化的系统模型中有 n 个集中质量，一般它便是一个 n 自由度的系统，需要 n 个独立坐标来描述它们的运动，系统的运动方程是 n 个二阶互相耦合（联立）的常微分方程。

前一章中介绍的处理两自由度系统的分析方法也可以用于处理多自由度系统，但当自由度数目增加时，推导与分析将变得十分繁杂。因此，必须采用矩阵这个有力工具来将振动微分方程表达成简明的形式，并用线性代数、矩阵理论来进行分析，从而在总体的层次上进行处理与讨论，清晰地导出振动系统的基本性态，而避免纠缠于细节。此外，求多自由度系统数值解所需的计算量非常大，势必采用电子计算机，而线性代数理论则可为数值计算提供算法。实际上在前一章中已开始使用了矩阵的表达与处理方法，在本章中我们将大为拓展使用矩阵方法的广度和技巧。

对于多自由度系统的振动微分方程，有必要采用上一章讲述的模态分析的方法，就是以模态矩阵（其各列由系统的模态向量构成）作为变换矩阵，将原来的物理坐标变换到自然坐标上，而

使系统在原来坐标下的耦合方程组变成一组互相独立的二阶常微分方程，后者的每一个方程便可以象一个单自由度系统的振动方程一样来求解，得到系统各阶模态的振动后可以通过坐标变换或模态叠加，回到原来的物理坐标上。这种方法能方便地应用于分析系统对于任意激励的响应，而且能清晰地显示系统总运动的构成及其与系统结构的关系。

本章首先导出一般的多自由度系统的运动方程及其简洁的矩阵形式。接着讨论无阻尼情况下的自由振动，引出多自由度振动系统的特征值问题方程，着重介绍自然模态的概念、特性和求法以及自然坐标的概念。最后介绍模态分析并应用于求解考虑阻尼影响的特殊多自由度系统的一般响应。

本章可以说是机械振动学的核心内容，振动系统的性质和分析方法在本章中体现得最为充分和典型。

§ 4.1 广义坐标

集中参数系统的自由度和广义坐标是与系统的约束有连带关系的两个概念。先来看一个例子，图4.1-1是一个双摆，质量 m_1 、 m_2 限制在图示平面内摆动。可以用四个直角坐标 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 来描述它的运动，但是这四个直角坐标并不独立，实际上它们满足约束方程：

$$x_1^2 + y_1^2 = L_1^2, \quad (4.1-1)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L_2^2. \quad (4.1-2)$$

因此，其中只有两个是独立的。其实，这个系统只有两个自由度，只需要两个参变量，例如图上的两个摆角 θ_1 与 θ_2 ，就可以完

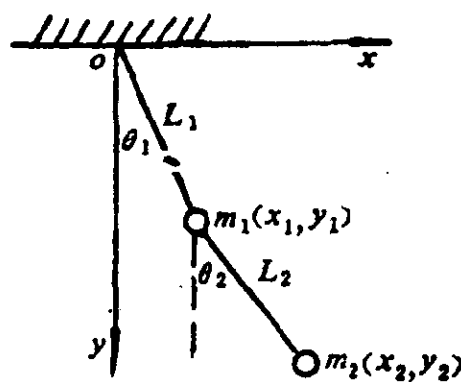


图 4.1-1

全描述它的运动。我们把能完备地描述系统运动的一组独立参变量称为系统的广义坐标。这里所谓的“完备”是指完全地确定系统在任一时刻的位置或形状，所谓“独立”是指各个坐标都能在一定范围内任意取值，其间不存在函数关系。广义坐标可以是长度，也可以是角度，它在数目上与系统的自由度数目是一致的。如果所选的坐标数目小于系统的自由度数，那它们一定是不完备的；如果大于，则是不独立的。

一个系统的广义坐标不是唯一的，固然各组广义坐标都可用以描述系统的振动，但以各组坐标写出的运动方程的繁简及其耦合方式，却并不相同。因此，应用中需要仔细选择合适的广义坐标。

各组广义坐标之间存在确定的函数关系。例如，在图示的双摆系统中，可以选择独立参变量 x_1, x_2 为广义坐标，也可以选择 y_1, y_2 为广义坐标，但更为方便的是选取 θ_1, θ_2 为广义坐标。显然它们之间存在下列关系：

$$\begin{aligned} x_1 &= L_1 \sin \theta_1, & y_1 &= L_1 \cos \theta_1; & (4.1-3) \\ x_2 &= L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2, & y_2 &= L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

系统广义坐标的总体构成“位形向量”，位形向量所存在的空间称为“位形空间”。

§ 4.2 线性系统的运动方程及其矩阵表达式

研究图4.2-1所示典型的由质块、弹簧与阻尼器构成的多自由度振动系统的力学模型，采用广义坐标 $q_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 来描述系统的运动，这里 n 是系统的自由度数，系统受到的外界激励以广义力 $Q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 来表示。广义力 Q_i 的选择需与对应的广义坐标 q_i 相适应，使得 q_i, Q_i 的量纲为[功]。显然，当 q_i 为线性位移时， Q_i 即为力，而当 q_i 为角位移时， Q_i 则为力

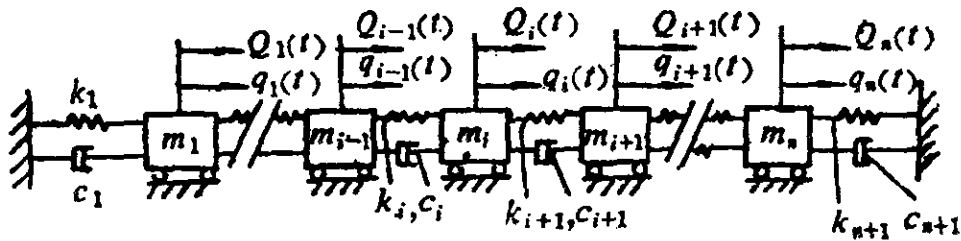


图 4.2-1

矩。

设在系统的平衡位置有 $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ ，即选取系统的静平衡位置为广义坐标的坐标原点，则各集中质量偏离平衡位置的位移可用 q_1, q_2, \dots, q_n 来描述。假定所有的广义位移、广义速度都是微小的，这样便可确保弹性力和阻尼力分别是广义坐标和广义速度的线性函数，从而使系统的微分方程是线性的。

为了导出图4.2-1所示系统的运动方程，可以用类似于前一章的方法，分别对系统中的各质块取脱离体，并应用牛顿定律列出方程。但对于许多复杂的问题，采用以下介绍的关于刚度系数、阻尼系数和质量系数的定义，来导出运动方程的方法，比较方便适用。

4.2.1 刚度矩阵、阻尼矩阵与质量矩阵

刚度系数 k_{rj} 定义为只在坐标 q_j 上产生单位位移（其它坐标上的位移为零）而在坐标 q_r 上需要加的力：

$$k_{rj} = Q_r \left| \begin{array}{l} q_j = 1 \\ q_r = 0 \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, \dots, n, \quad r \neq j). \quad (4.2-1)$$

当系统是单自由度系统时，以上定义即为第一章中关于弹簧刚度的定义。对图4.2-1所示的系统，假设质量 m_j 上有 $q_j = 1$ 的位移，其余的坐标上位移为 0，为了使系统处于这种状态，则必须在系统上施加一定的外力。由于弹簧 k_j 和 k_{j+1} 的变形都为单位长度，其余弹簧没有变形，如果约定向右为正，那么作用于质量

m_{j-1} 上的弹性恢复力为 k_j ，作用于质量 m_j 上的弹性恢复力为 $-k_j - k_{j+1}$ ，作用于质量 m_{j+1} 上的弹性恢复力为 k_{j+1} ，其余质量上没有弹性力作用。因此，为了使系统处于上述状态，所需施加的与弹性恢复力相平衡的外力为：在 m_{j-1} 上加外力 $Q_{j-1} = -k_j$ ，在 m_j 上加外力 $Q_j = k_j + k_{j+1}$ ，在 m_{j+1} 上加外力 $Q_{j+1} = -k_{j+1}$ ，而在其余质量上不加力： $Q_i = 0 (i \neq j-1, j, j+1)$ 。据此，按刚度系数的定义，可得到系统的刚度系数为

$$\begin{aligned} k_{j-1, j} &= -k_j, \\ k_{j, j} &= k_j + k_{j+1}, \\ k_{j+1, j} &= -k_{j+1}, \\ k_{i, j} &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, j-2, j+2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.2-2)$$

一个 n 自由度系统，共有 $n \times n$ 个刚度系数，将它们排列起来，便组成系统的刚度矩阵 $[k] = [k_{i, j}]$ 。

对于图4.2-1所示的系统，按(4.2-2)式，其刚度矩阵为

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -k_n & & k_n + k_{n+1} & \end{bmatrix}. \quad (4.2-3)$$

一般 $[k]$ 是一个对称矩阵，即

$$[k] = [k]^T.$$

阻尼系数定义为只在坐标 q_j 上有单位速度（其它坐标上的速度为零）时，在坐标 q_i 上所需施加的力，即

$$c_{i, j} = Q_i \left| \begin{array}{l} \dot{q}_j = 1 \\ \dot{q}_r = 0 \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, \dots, n, r \neq j). \quad (4.2-4)$$

质量系数定义为只在坐标 q_j 上有单位加速度（而其它坐标上的加速度为零）时，在坐标 q_i 上所需施加的力，即

$$m_{i, j} = Q_i \left| \begin{array}{l} \ddot{q}_j = 1 \\ \ddot{q}_r = 0 \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, \dots, n, r \neq j). \quad (4.2-5)$$

类似刚度系数的求法，可以求出图4.2-1所示系统的阻尼系数为

$$\begin{aligned} c_{j-1, j} &= -c_j, \\ c_{j, j} &= c_j + c_{j+1}, \\ c_{j+1, j} &= -c_{j+1}, \\ c_{i, j} &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, j-2, j+2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.2-6)$$

质量系数为

$$m_{i, j} = \delta_{i, j} m_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (4.2-7)$$

其中 $\delta_{i, j}$ 是kronecker符号， $\delta_{i, j}$ 除 $i = j$ 时等于1外，其它情况均为零。

同样，可以将阻尼系数及质量系数分别综合成阻尼矩阵 $[c]$ 及质量矩阵 $[m]$ 。对于图4.2-1所示的系统，有

$$[c] = [c_{i, j}] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & & \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -c_n \\ -c_n & & c_n + c_{n+1} & \end{bmatrix}, \quad (4.2-8)$$

$$[m] = [m_{i, j}] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}. \quad (4.2-9)$$

对于图4.2-1所示的这类弹簧-质量-阻尼系统，一般存在下述规律：

(1) 刚度矩阵（或阻尼矩阵）中的对角元素 $k_{i, i}$ （或 $c_{i, i}$ ）为联结在质量 m_i 上的所有弹簧刚度（或阻尼系数）的和；

(2) 刚度矩阵（或阻尼矩阵）中的非对角元素 $k_{i, j}$ （或 $c_{i, j}$ ）为直接联结在质量 m_i 与 m_j 之间的弹簧刚度（或阻尼系数），取负值；

(3) 一般而言，刚度矩阵和阻尼矩阵都是对称矩阵；

(4) 如果将系统质心作为坐标原点，则质量矩阵是对角矩阵。但一般情况下质量矩阵并不一定是对角的。

4.2.2 多自由度系统的运动微分方程

根据上面关于刚度、阻尼、质量系数的定义，我们来分析计算作用在质块 m_i 上的力，并由此导出系统的运动方程。由前述，当质块 j 有单位位移 $q_j = 1$ 时，在 m_i 上需加上的与弹性恢复力相抗衡的力为 k_{ij} ，而弹性恢复力则为 $-k_{ij}$ ，如果 $q_j \neq 1$ ，那么由于系统是线性的，因而可以将 m_i 上受到的弹性恢复力写成 $-k_{ij} \cdot q_j(t)$ 。根据叠加原理可写出当各个质块 m_j 上的位移为 $q_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$)时，作用在 m_i 上的弹性恢复力为 $-\sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t)$ 。以

同样的方式，可推得作用在质块 m_i 上的阻尼力为

$-\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t)$ ，惯性力为 $-\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t)$ 。而外加激励力为

$Q_i(t)$ 。应用 D'Alembert 原理，作用在 m_i 上的弹性恢复力、阻尼力、惯性力和外加激励力组成一个平衡力系，从而可直接写出

$$-\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) - \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t) - \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) + Q_i(t) = 0. \quad (4.2-10)$$

上式应对每一质块 m_i 成立，因而其中的下标 i 应遍取($i = 1, 2, \dots, n$)的数值，从而得到 n 个等式，将之移项整理得

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{q}_j(t) + c_{ij} \dot{q}_j(t) + k_{ij} q_j(t)) = Q_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.2-11)$$

它是关于 $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)的一组 n 个联立的二阶常系数线性微分方程。方程(4.2-11)可综合成矩阵形式

$$[m] \{\ddot{q}(t)\} + [c] \{\dot{q}(t)\} + [k] \{q(t)\} = \{Q(t)\}. \quad (4.2-12)$$

其中

$$\{q(t)\} = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}^T,$$

$$\{Q(t)\} = \{Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)\}^T.$$

分别是广义位移列向量和广义力列向量；而 $[m]$ 、 $[c]$ 与 $[k]$ 就是前面定义的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，它们完全决定了线性振动系统的动态特性。

例4.1 根据牛顿定律导出图4.2-2(a)所示的三自由度系统的运动微分方程，并与前述D'Alembert方法导得结果相比较。

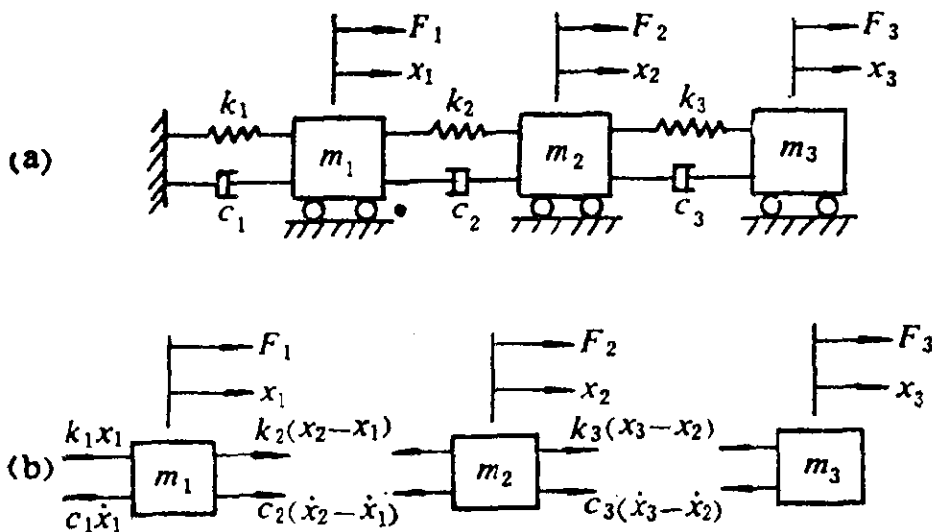


图 4.2-2

解：以质块 m_1 、 m_2 、 m_3 的水平位移 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 为广义坐标，所受的外部激励力 $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 、 $F_3(t)$ 为广义力，根据图4.2-2(b)的脱离体图，分别对质块 m_1 、 m_2 、 m_3 应用牛顿定律，得系统的运动方程

$$F_1(t) + c_2[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + k_2[x_2(t) - x_1(t)] - c_1\dot{x}_1(t) - k_1x_1(t) = m_1\ddot{x}_1(t),$$

$$F_2(t) + c_3[\dot{x}_3(t) - \dot{x}_2(t)] + k_3[x_3(t) - x_2(t)] - c_2[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] - k_2[x_2(t) - x_1(t)] = m_2\ddot{x}_2(t),$$

$$F_3(t) - c_3[\dot{x}_3(t) - \dot{x}_2(t)] - k_3[x_3(t) - x_2(t)] = m_3\ddot{x}_3(t).$$

整理得

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t) - c_2 \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = F_1(t),$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + (c_2 + c_3) \dot{x}_2(t) - c_2 \dot{x}_1(t) - c_3 \dot{x}_3(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_2 x_1(t) - k_3 x_3(t) = F_2(t),$$

$$m_3 \ddot{x}_3(t) + c_3 \dot{x}_3(t) - c_3 \dot{x}_2(t) + k_3 x_3(t) - k_3 x_2(t) = F_3(t)。$$

写成矩阵形式为

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F(t)\},$$

其中

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix},$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}; \quad \{x(t)\} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$

$$\{F(t)\} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{pmatrix}。$$

读者可自行验证，采用上述关于刚度系数、阻尼系数和质量系数的定义以及D'Alembert方法，也可得到完全相同的结果。

例4.2 图4.2-3是由实际齿轮传动系统简化成的三自由度模型，它由不计质量的弹性轴带有三个刚性圆盘构成，试求该扭转振动系统的刚度矩阵。

解：设 $\theta_1 = 1, \theta_2 = \theta_3 = 0$ ，则盘1承受弹性恢复力矩 $-k - k = -2k$ ，盘2承受弹性恢复力矩 k ，盘3不受弹性力矩作用。为了维持上述条件下的平衡，必须在盘1上加力矩 $M_1 = 2k$ ，在盘2上加力矩 $M_2 = -k$ ，故可得 $k_{11} = 2k, k_{21} = -k, k_{31} = 0$ ，同理，分别设 $\theta_2 = 1, \theta_1 = \theta_3 = 0$ 和 $\theta_3 = 1, \theta_1 = \theta_2 = 0$ 推得 $k_{12} = -k,$

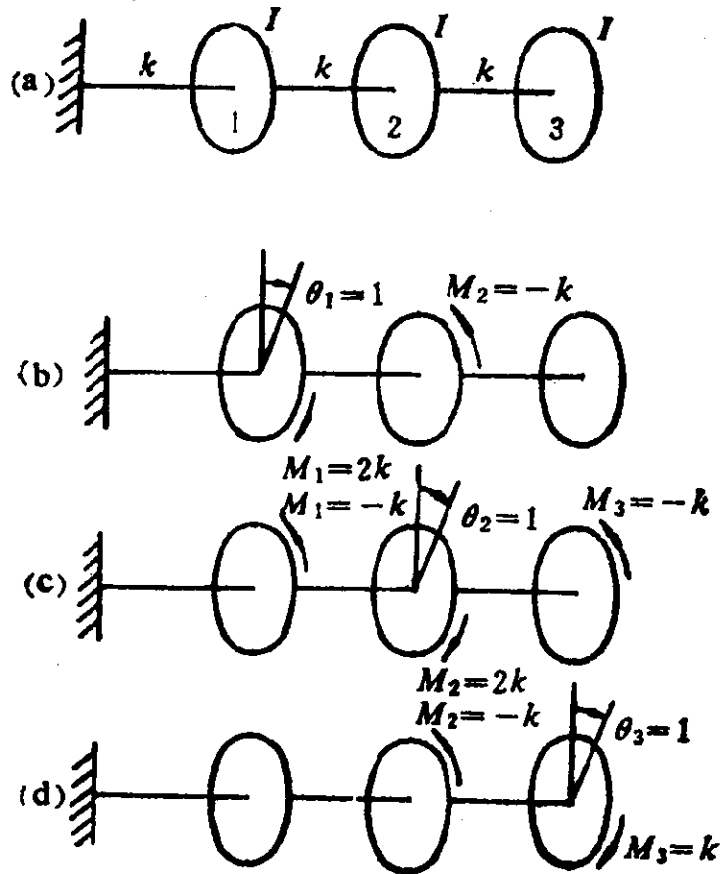


图 4.2-3

$k_{32} = -k$, $k_{22} = 2k$ 及 $k_{13} = 0$, $k_{23} = -k$, $k_{33} = k$ 。将求得的刚度系数写成刚度矩阵, 即

$$[k] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

例4.3 图4.2-4所示为一带有分支系统的弹簧质量系统, 其广义坐标为 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 , 试求系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。

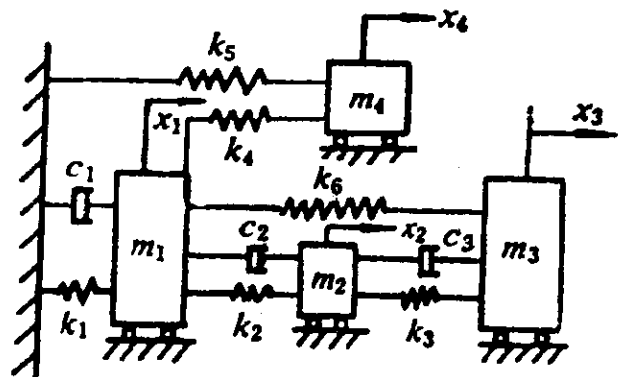


图 4.2-4

解: 利用4.22节中介绍的关于质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵的有关规律, 可直接写出

$$\begin{aligned}
 [m] &= \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ & & & m_4 \end{bmatrix}, \\
 [c] &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_4 + k_6 & -k_2 & -k_6 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ -k_6 & -k_3 & k_3 + k_6 & 0 \\ -k_4 & 0 & 0 & k_4 + k_5 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

读者可自行验证，使用其它方法也可得到上述结果，但较繁琐。

§ 4.3 线性变换与坐标耦合

方程(4.2-11)或(4.2-12)是一个二阶常系数线性联立微分方程组，其求解的困难主要在于各个方程是彼此耦合的。在介绍模态分析法求解方程(4.2-11)之前，先讨论耦合的概念及消除耦合的方法。

先研究无阻尼系统，略去方程(4.2-12)中的阻尼项，得

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\}. \quad (4.3-1)$$

式中 $[m]$ 、 $[k]$ 是对称的常数方阵。在前一章已讲到过，同一个振动系统可以选用不同的广义坐标来建立其运动方程。选用坐标的不同，得到的运动方程及其耦合方式也不同，因此，运动方程的耦合不是振动系统本身的性态，而是广义坐标选择的结果。自然坐标是能使运动方程不存在耦合的一组广义坐标，而任意一组广义坐标通过以模态矩阵作为变换矩阵的线性变换，就可变换到

自然坐标，从而使方程解除耦合，这些结论对多自由度系统也都适用。

我们考虑采用另一组广义坐标 $\eta_j(t)$ ($j=1,2,\dots,n$)来取代方程(4.3-1)中的广义坐标 $q_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$)。对于线性振动系统，两组广义坐标之间的关系应该是一种线性变换关系。换言之，坐标 $q_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$)可用坐标 $\eta_j(t)$ ($j=1,2,\dots,n$)的线性组合来表示

$$\{q(t)\} = [U]\{\eta(t)\}, \quad (4.3-2)$$

式中

$$\{\eta(t)\} = \{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)\}^T$$

是由新的广义坐标组成的列阵， $[U]$ 称为线性变换矩阵，它是一个非奇异的 $n \times n$ 常数矩阵。因为 $[U]$ 是一个常数方阵，所以有

$$\{\dot{q}(t)\} = [U]\{\dot{\eta}(t)\}, \quad \{\ddot{q}(t)\} = [U]\{\ddot{\eta}(t)\}. \quad (4.3-3)$$

将式(4.3-2)、(4.3-3)代入方程(4.3-1)，得

$$[m][U]\{\ddot{\eta}(t)\} + [k][U]\{\eta(t)\} = \{Q(t)\}.$$

为保持运动方程的对称性，将上面的方程两端左乘 $[U]^T$ ，可得

$$[U]^T[m][U]\{\ddot{\eta}(t)\} + [U]^T[k][U]\{\eta(t)\} = [U]^T\{Q(t)\}.$$

或写成

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = \{N(t)\}, \quad (4.3-4)$$

式中

$$[M] = [U]^T[m][U], \quad [K] = [U]^T[k][U] \quad (4.3-5)$$

分别称为在广义坐标 $\{\eta(t)\}$ 下的质量矩阵与刚度矩阵。因为 $[m]$ 、 $[k]$ 都是对称的，易知 $[M]$ 、 $[K]$ 也都是对称的。由此可知，坐标变换对运动方程的影响表现为质量矩阵和刚度矩阵按(4.3-5)式进行变换。方程(4.3-4)中

$$\{N(t)\} = [U]^T\{Q(t)\}. \quad (4.3-6)$$

称为广义坐标 $\{\eta(t)\}$ 所对应的广义力向量。由此，通过坐标变换，已将原来以广义坐标 $\{q(t)\}$ 表达的运动方程变换到以 $\{\eta(t)\}$

表达的方程。这种变换当然不会改变系统的性质，但由于改变了质量矩阵和刚度矩阵，因而可能改变其运动方程的耦合情况。

例4.4 试对图3.5-1所示的双摆系统的运动方程进行坐标变换

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}. \quad (a)$$

计算变换以后的质量矩阵(M)和刚度矩阵(K)。

解：将(a)式及(3.5-2)中的(m)、(k)矩阵代入(4.3-5)式，得

$$\begin{aligned} (M) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mL^2 & 0 \\ 0 & 2mL^2 \end{bmatrix}, \\ (K) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mgL + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mgL + ka^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mgL & 0 \\ 0 & 2mgL \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

变换的结果是把原方程的弹性耦合解除了，而又并未造成新的惯性耦合。实际上，这里的变换矩阵就是双摆系统的模态矩阵，它由双摆系统的两个模态向量组成。这种变换使运动微分方程完全解除了耦合。

为了从一般意义上研究多自由度线性系统运动方程的坐标变换与解耦问题，我们需要从自由振动与特征值问题讲起。

§ 4.4 无阻尼自由振动，特征值问题

考虑 n 自由度无阻尼系统的自由振动，其运动微分方程为

$$(m)\{\ddot{q}(t)\} + (k)\{q(t)\} = \{0\}. \quad (4.4-1)$$

或展开为

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.4-2)$$

象第三章的方法一样，我们仍然来寻找方程(4.4-2)的同步解，

即设

$$q_j(t) = u_j f(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (4.4-3)$$

式中 $u_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是一组常数, $f(t)$ 是依赖时间的实函数, 对所有坐标都相同。由此式可推出

$$\frac{q_j(t)}{q_i(t)} = \frac{u_j}{u_i} = \text{const} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4-4)$$

即任意两坐标上的位移之比值都是与时间无关的常数, 这表明各坐标是在成比例地运动。

将(4.4-3)式代入方程(4.4-2), 得

$$\ddot{f}(t) \sum_{j=1}^n m_{i,j} u_j + f(t) \sum_{j=1}^n k_{i,j} u_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

将上式分离变量, 得

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{i,j} u_j}{\sum_{j=1}^n m_{i,j} u_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4-5)$$

方程(4.4-5)的左端仅与时间 t 有关, 右端仅与位移(坐标)有关, 为使该等式能成立, 其两端都必须等于一个常数; 由于 $f(t)$ 是实函数, 故该常数必为实数, 不妨假定为 λ , 于是有

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 & (4.4-6a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (k_{i,j} - \lambda m_{i,j}) u_j = 0 & (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4-6b) \end{cases}$$

对于方程(4.4-6a), 上一章已详细讨论过, 已知它的解为

$$f(t) = C \cos(\omega t - \psi). \quad (4.4-7)$$

其中 $\omega^2 = \lambda$, 而 ω 是实数, 为简谐运动的频率, C 和 ψ 是任意常数。

频率 ω (或 λ) 不能是任意的, 它的确定应该考虑到使方程(4.4-6b)有非零解。将方程(4.4-6b)写成矩阵形式。

$$\{k\}\{u\} - \omega^2\{m\}\{u\} = 0. \quad (4.4-8a)$$

或

$$((k) - \omega^2(m))\{u\} = \{0\}. \quad (4.4-8b)$$

这是一个关于 $\{u\}$ 的 n 元线性齐次代数方程组, 该方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式等于零, 即

$$\Delta(\omega^2) = |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = 0. \quad (4.4-9)$$

此式称为系统频率方程, 该行列式称为特征行列式, 将它展开后可得到关于 ω^2 的 n 次代数方程

$$\omega^{2n} + a_1 \omega^{2(n-1)} + a_2 \omega^{2(n-2)} + \dots + a_{n-1} \omega^2 + a_n = 0. \quad (4.4-10)$$

假定系统的质量矩阵与刚度矩阵都是正定的实对称矩阵。在数学上可以证明, 在这一条件下, 频率方程(4.4-10)的 n 个根均为正实根, 它们对应于系统的 n 个自然频率。这里假设各根互不相等, 即没有重根, 因而可由小到大按次序排列为

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2.$$

其中最低的频率 ω_1 称为基频, 在工程应用中它是最重要的一个自然频率。

将各特征根 $\lambda_r = \omega_r^2$ 分别代入方程(4.4-8)便可求得各相应的解 $\{u^{(r)}\}$, 称为系统的模态向量或振型向量。自然频率 ω_r 和模态向量 $\{u^{(r)}\}$ 构成了系统的第 r 阶自然模态, 它表征了系统的一种基本运动模式, 即一种同步运动。显然, n 自由度系统一般有 n 种同步运动, 每一种均为简谐运动, 但频率 ω_r 不同, 而且其振幅在各自自由度上的分配方式, 即模态向量 $\{u^{(r)}\}$ 也不同。每一种同步运动可写为

$$\{q(t)^{(r)}\} = \{u^{(r)}\} \cos(\omega_r t - \psi_r) \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4-11)$$

由于上式是齐次方程, 因此以上 n 个解的线性组合仍为原方程的解, 由此得系统自由振动的通解为

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n C_r \{q(t)^{(r)}\} = \sum_{r=1}^n C_r \{u^{(r)}\} \cos(\omega_r t - \psi_r). \quad (4.4-12)$$

其中 ω_r 、 $\{u^{(r)}\}$ ($r=1,2,\dots,n$)由系统参数决定, ψ_r 、 C_r ($r=1,2,\dots,n$)为待定常数,由初始条件决定。

从数学上说,方程(4.4-8)定义了一个 n 维广义特征值问题,由它确定的特征值 $\lambda_r = \omega_r^2$ 与特征向量 $\{u^{(r)}\}$ ($r=1,2,\dots,n$)分别与运动方程(4.4-1)所描述的 n 自由度系统的 n 个自然频率及模态向量相对应。

还须说明,一个特征值问题只能确定特征向量的方向,而不能确定其绝对长度。事实上,由于(4.4-8)是齐次代数方程组,因此如果 $\{u\}$ 是它的一个解,那么 $\alpha\{u\}$ 也必为其解,这里 α 是任意实数。对应于振动问题,就是说模态向量的方向(即它的各分量的比值)是由系统的参数与特性所确定的,即它的振型的形状是确定的;而振型向量的“长度”,即振幅的大小,却不能由特征值问题本身,即不能由运动方程给出唯一的答案。因此可以人为地选取模态向量的长度,这一过程叫做模态向量的“正规化”。正规化的方法之一是令模态向量的某一个分量取值为1。试见下例。

例4.5 图4.4-1为一个三自由度系统, $k_1 = 3k, k_2 = 2k, k_3 = k, m_1 = 2m, m_2 = 1.5m, m_3 = m$,求系统的自然频率与模态向量。

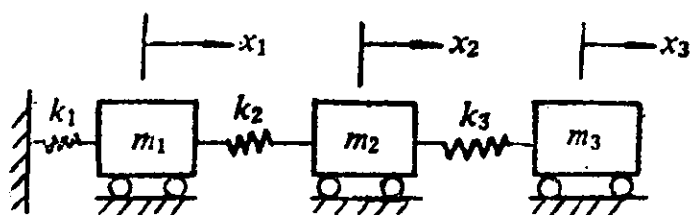


图 4.4-1

解: 取质块 m_1 、 m_2 、 m_3 的水平位移 x_1 、 x_2 、 x_3 为广义坐标,根据例4.1的结果可以直接写出系统的质量矩阵 (m) 和刚度矩阵 (k) :

$$(m) = \begin{bmatrix} 2m & & \\ & 1.5m & \\ & & m \end{bmatrix}, \quad (k) = \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}.$$

将 (m) 、 (k) 代入方程(4.4-8)得系统的特征值问题方程, 对应的系统频率方程为

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 5k - 2m\omega^2 & -2k & 0 \\ -2k & 3k - 1.5m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

将上式展开得

$$\omega^6 - 5.5\left(\frac{k}{m}\right)\omega^4 + 7.5\left(\frac{k}{m}\right)^2\omega^2 - 2\left(\frac{k}{m}\right)^3 = 0.$$

用数值法可求出它的三个特征根

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = 0.351465 \frac{k}{m},$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = 1.606599 \frac{k}{m},$$

$$\lambda_3 = \omega_3^2 = 3.541936 \frac{k}{m}.$$

系统的自然频率为

$$\omega_1 = 0.592845\sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = 1.267517\sqrt{k/m},$$

$$\omega_3 = 1.882003\sqrt{k/m}.$$

为求出模态向量, 将自然频率代入方程(4.4-8), 由于方程(4.4-8)仅有两个是独立的, 可从中任取两个, 若取其前两个, 即

$$(5k - 2m\omega^2)u_1 - 2ku_2 = 0,$$

$$-2ku_1 + (3k - 1.5m\omega^2)u_2 - ku_3 = 0.$$

取 $u_3 = 1$, 以使模态向量正规化, 分别将 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 代入上式, 求得

$$u_1^{(1)} = 0.301850,$$

$$u_2^{(1)} = 0.648535;$$

$$u_1^{(2)} = -0.678977,$$

$$u_2^{(2)} = -0.606599;$$

$$u_1^{(3)} = 2.439628,$$

$$u_2^{(3)} = -2.541936;$$

从而得三个模态向量为

$$\{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.678977 \\ -0.606599 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\{u^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 2.439628 \\ -2.541936 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

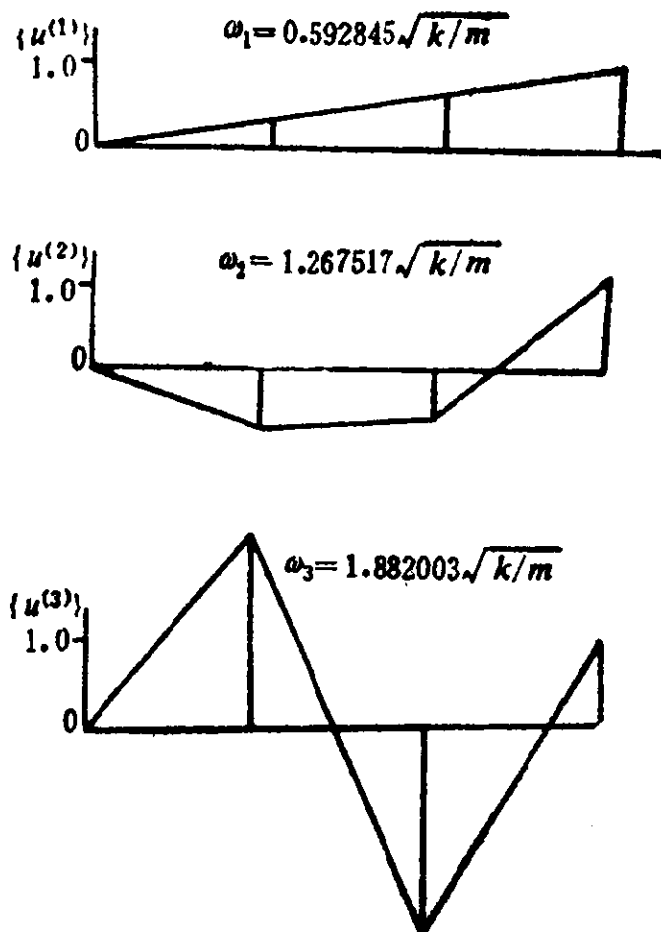


图 4.4-2

图4.4-2示出了系统的三阶自然模态。注意到第二阶模态有一次符号变化，在质块 m_2 与 m_3 之间有一个节点；第三阶模态有两次符号变化，在质块 m_1 与 m_2 ， m_2 与 m_3 之间各有一个节点。

§ 4.5 模态向量的正交性与展开定理

这一节讨论系统模态向量的正交性，利用这一性质，可以大为简化对于线性振动系统的分析。

4.5.1 模态向量的正交性与正规化

1. 正交性

设 ω_r 、 ω_s 及 $\{u^{(r)}\}$ 、 $\{u^{(s)}\}$ 分别是多自由度系统的某两个模态的自然频率和模态向量，且 $\omega_r \neq \omega_s$ ，它们都满足系统的特征值问题方程(4.4-8a)，即有

$$[k]\{u^{(r)}\} = \omega_r^2 [m]\{u^{(r)}\}, \quad (4.5-1)$$

$$[k]\{u^{(s)}\} = \omega_s^2 [m]\{u^{(s)}\}. \quad (4.5-2)$$

将(4.5-1)式两端左乘 $\{u^{(s)}\}^T$ ，(4.5-2)式两端左乘 $\{u^{(r)}\}^T$ ，得

$$\{u^{(s)}\}^T [k] \{u^{(r)}\} = \omega_r^2 \{u^{(s)}\}^T [m] \{u^{(r)}\}, \quad (4.5-3)$$

$$\{u^{(r)}\}^T [k] \{u^{(s)}\} = \omega_s^2 \{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\}. \quad (4.5-4)$$

将(4.5-3)式取转置，注意到 $[m]$ 、 $[k]$ 都是对称矩阵，故有

$$\{u^{(r)}\}^T [k] \{u^{(s)}\} = \omega_r^2 \{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\}. \quad (4.5-5)$$

将(4.5-5)式与(4.5-4)式相减得

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\} = 0. \quad (4.5-6)$$

由于 $\omega_r \neq \omega_s$ ，故必有

$$\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; r \neq s). \quad (4.5-7)$$

将此式代回(4.5-4)式得

$$\{u^{(r)}\}^T [k] \{u^{(s)}\} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; r \neq s). \quad (4.5-8)$$

(4.5-7)与(4.5-8)两式分别称为模态向量对于质量矩阵与对于刚度矩阵的正交性。这是对于通常意义下的正交性

$$\{u^{(r)}\}^T \{u^{(s)}\} = u_1^{(r)} u_1^{(s)} + u_2^{(r)} u_2^{(s)} + \dots + u_n^{(r)} u_n^{(s)} = 0 \quad (4.5-9)$$

的一种自然的推广，即分别以 (m) 、 (k) 作为权矩阵的一种正交性。当 (m) 、 (k) 为单位矩阵时，(4.5-7)、(4.5-8)式就退化为(4.5-9)式。

2. 模态质量与模态刚度

设

$$\{u^{(r)}\}^T (m) \{u^{(r)}\} = M_r, \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad (4.5-10)$$

由于 (m) 是正定的，故 M_r 为一个正实数，称为第 r 阶模态质量；同理，设

$$\{u^{(r)}\}^T (k) \{u^{(r)}\} = K_r, \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad (4.5-11)$$

由于已假定 (k) 是正定， K_r 也是一个正实数，称为第 r 阶模态刚度。

实际上，将(4.5-1)式两端前乘 $\{u^{(r)}\}^T$ ，得

$$\{u^{(r)}\}^T (k) \{u^{(r)}\} = \omega_r^2 \{u^{(r)}\}^T (m) \{u^{(r)}\}.$$

从而有

$$\omega_r^2 = \frac{\{u^{(r)}\}^T (k) \{u^{(r)}\}}{\{u^{(r)}\}^T (m) \{u^{(r)}\}} = \frac{K_r}{M_r}, \quad (r=1, 2, \dots, n). \quad (4.5-12)$$

即第 r 阶自然频率平方值等于 K_r 除以 M_r ，这与单自由度系统的情况，即(1.3-3)式是相似的。

3. 正规化

前面讲过，模态向量 $\{u^{(r)}\}$ 的长度其实是不定的，因此可按以下方法加以正规化，即将之除以对应的模态质量的平方根 $\sqrt{M_r}$ 。显然，对于经过正规化以后的模态向量，有

$$\{u^{(r)}\}^T (m) \{u^{(r)}\} = 1. \quad (4.5-13)$$

而由(4.5-12)式，有

$$\{u^{(r)}\}^T (k) \{u^{(r)}\} = \omega_r^2. \quad (4.5-14)$$

以上两式称为模态向量的一种正规化条件。

综上所述，模态向量的正交性与正规化条件可归纳为

$$\{u^{(r)}\}^T (m) \{u^{(s)}\} = \delta_{rs}, \quad (4.5-15)$$

$$\{u^{(r)}\}^T (k) \{u^{(s)}\} = \delta_{rs} \omega_r^2 \quad (r, s=1, 2, \dots, n). \quad (4.5-16)$$

以上是假定系统的 n 个自然频率各不相同的情况，至于有相等自然频率的情况，将在 § 4.11 节中讨论。

4. 模态矩阵

将 n 个正规化的模态向量顺序排列成一个方阵，就构成了 $n \times n$ 模态矩阵 $\{u\}$ ，

$$\{u\} = (\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\}).$$

引入模态矩阵 $\{u\}$ 以后，可以将(4.5-15)式及(4.5-16)式的 $2n^2$ 个等式归纳成两个矩阵等式，即

$$\{u\}^T \{m\} \{u\} = \{1\}, \quad (4.5-17)$$

$$\{u\}^T \{k\} \{u\} = \left[\begin{array}{c} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right], \quad (4.5-18)$$

其中

$$\left[\begin{array}{c} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{array} \right],$$

称为系统的特征值矩阵。而特征值问题可综合成

$$\{k\} \{u\} = \{m\} \{u\} \left[\begin{array}{c} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right], \quad (4.5-19)$$

4.5.2 展开定理

回顾(4.4-12)式，它表明各种可能的同步运动的任意线性组合都是系统自由振动的解；这里要证明的是系统自由振动的任何一个解，都必然是同步运动的某种线性组合。因此，研究同步运动的组合可以毫无遗漏地概括一个线性系统自由振动的所有的解。

1. 坐标基

n 自由度系统的 n 个模态向量 $\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\}$ 正好在 n 维线性空间（即系统的位形空间）中构成一组坐标基。我们知道， n 维线性空间中的 n 个向量，只有当它们是线性独立

的时，才能够成为坐标基。因此，为了表明 n 个模态向量确实可构成一组坐标基，必须证明它们之间是线性独立的。事实上，我们可以由模态向量的两两正交性证明它们之间的线性独立性，即证明不存在一组不全为零的系数 c_1, c_2, \dots, c_n ，使得

$$c_1\{u^{(1)}\} + c_2\{u^{(2)}\} + \dots + c_n\{u^{(n)}\} = \{0\}. \quad (4.5-20)$$

我们采用“反证法”来证明这一点，即暂先假定有一组不全为零的系数 c_1, c_2, \dots, c_n ，使上式成立，那么将该式各项左乘以 $\{u^{(s)}\}^T(m)$ ，得

$$\sum_{r=1}^n c_r \{u^{(r)}\}^T(m) \{u^{(s)}\} = 0.$$

此式中 r 为求和的流动下标，而 s 为某一选定的下标。由正交关系(4.5-7)式可知，上式中 $r \neq s$ 的各项为零，而只剩下 $r = s$ 的那一项不为零。于是，上式成为：

$$c_s \{u^{(s)}\}^T(m) \{u^{(s)}\} = 0.$$

可是由(4.5-13)式知 $\{u^{(s)}\}^T(m) \{u^{(s)}\} = 1$ ，故必有 $c_s = 0$ 。又由于 s 可任意选取，故有 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ，而这与 c_1, c_2, \dots, c_n 不全为零的假设相矛盾，故(4.5-20)式不能成立，即诸模态向量之间线性独立，因而可以构成一组坐标基。

2. 展开定理

既然诸模态向量构成了一组坐标基，因而系统在任一时刻的位形向量 $\{u\}$ 可以按该坐标基展开，即写成诸模态向量的线性组合，

$$\{u\} = c_1\{u^{(1)}\} + c_2\{u^{(2)}\} + \dots + c_n\{u^{(n)}\}. \quad (4.5-21)$$

其中的系数 c_1, c_2, \dots, c_n 反映了各模态向量在构成位形向量 $\{u\}$ 时的参与程度，可以利用正交关系求出：将上式各项左乘以 $\{u^{(r)}\}^T(m)$ ，得

$$\{u^{(r)}\}^T(m) \{u\} = \sum_{i=1}^n c_i \{u^{(r)}\}^T(m) \{u^{(i)}\}.$$

利用正交关系(4.5-7)式, 即得

$$c_r = \{u^{(r)}\}^T \{m\} \{u\}. \quad (4.5-22)$$

(4.5-21)、(4.5-22)两式即为展开定理 (expansion theorem). 此定理表明系统的任何位形向量都可以以唯一的方式表示成为诸模态向量的线性组合.

3. 系统的通解

由展开定理可以导出系统通解的表达式. (4.5-21)式中 $\{u\}$ 为系统在某一时刻(记为 $t=t_1$)的位形向量, 为了强调这一点, 我们将它记为 $\{q(t_1)\}$, 而诸系数 c_1, c_2, \dots, c_n 也应该与时刻 t_1 相对应, 即随时间而变化, 为了表明这一点, 将它们分别记为 $\eta_1(t_1), \eta_2(t_1), \dots, \eta_n(t_1)$, 于是(4.5-21)式成为

$$\{q(t_1)\} = \sum_{r=1}^n \eta_r(t_1) \{u^{(r)}\}.$$

由于时刻 t_1 可任意选取, 故可略去 t_1 的下标, 而写成

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \{u^{(r)}\}. \quad (4.5-23)$$

而相应地, (4.5-22)式成为

$$\eta_r(t) = \{u^{(r)}\}^T \{m\} \{q(t)\}. \quad (4.5-24)$$

如果记

$$\{\eta(t)\} = \{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)\}^T,$$

并代入模态矩阵

$$\{u\} = (\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\}),$$

则可将(4.5-23)式写为

$$\{q(t)\} = \{u\} \{\eta(t)\}. \quad (4.5-25)$$

(4.5-23)、(4.5-25)两式都是由展开定理推出的必然结论, 它们从不同的角度反映了多自由度线性系统自由振动的通解. (4.5-23)式将通解表示为各模态运动的叠加, 而(4.5-25)式则将通解表示为自然坐标的线性变换, 变换矩阵则为模态矩阵. 为了求出

自然坐标 $\{\eta(t)\}$ 的确切表达式, 可以将(4.5-25)式代入自由振动的运动方程(4.4-1)式,

$$[m][u]\{\ddot{\eta}(t)\} + [k][u]\{\eta(t)\} = \{0\},$$

左乘以 $(u)^T$, 得

$$(u)^T[m][u]\{\ddot{\eta}(t)\} + (u)^T[k][u]\{\eta(t)\} = \{0\}.$$

利用正交关系(4.5-17), (4.5-18)式, 得

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \{\eta(t)\} = \{0\}.$$

展开之, 得到 n 个独立的微分方程

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4.5-26)$$

我们又回到了(4.4-6a)式. 已知上式的通解为

$$\eta_r(t) = C_r \cos(\omega_r t - \psi_r) \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4.5-27)$$

代回(4.5-23)式, 得通解的表达式为

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n C_r \{u^{(r)}\} \cos(\omega_r t - \psi_r). \quad (4.5-28)$$

这也就是前面得到的(4.4-12)式. 前面是从试探微分方程的同步解得出的, 而这里是从展开定理与模态向量的正交关系推得了有关的等式.

(4.5-28)式中 $\{u^{(r)}\}$ 、 ω_r 由系统的参数, 即由 $[m]$ 、 $[k]$ 矩阵确定, 而 C_r 、 ψ_r 则由初始条件确定. 这里 $r = 1, 2, \dots, n$.

§ 4.6 系统对初始激励的响应

下面求在给定初始条件 $\{q(0)\} = \{q_0\}$ 、 $\{\dot{q}(0)\} = \{\dot{q}_0\}$ 下系统的自由振动, 即系统对于初始激励的响应. 前面已经求出多自由度系统自由振动的通解(4.5-28)式, 因此直接将初始条件代入, 求解 $2n$ 个联立方程, 就可确定自由振动通解中的 $2n$ 个待定常数 C_r 、 ψ_r ($r = 1, 2, \dots, n$), 但这样的做法有较大的工作量. 下面

采用模态分析的方法将系统原来的广义坐标变换到自然坐标，可避免联立方程组的求解。

根据(4.5-23)~(4.5-28)式，先确定在自然坐标下的初始条件。由(4.5-24)式，以物理坐标下的初始条件 $\{q_0\}$ 、 $\{\dot{q}_0\}$ 代入，得自然坐标下的初始条件

$$\eta_r(0) = \{u^{(r)}\}^T(m)\{q_0\}, \quad (4.6-1)$$

$$\dot{\eta}_r(0) = \{u^{(r)}\}^T(m)\{\dot{q}_0\}.$$

将此式分别代入(4.5-27)中各式，可得

$$C_r \cos \psi_r = \{u^{(r)}\}^T(m)\{q_0\},$$

$$C_r \sin \psi_r = \frac{1}{\omega_r} \{u^{(r)}\}^T(m)\{\dot{q}_0\}.$$

将上两式代入(4.5-27)式，得以初始条件表示的系统的自由振动为

$$\begin{aligned} \{q(t)\} = \sum_{r=1}^n & \left(\{u^{(r)}\}^T(m)\{q_0\} \cos \omega_r t \right. \\ & \left. + \{u^{(r)}\}^T(m)\{\dot{q}_0\} \frac{1}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) \{u^{(r)}\}. \end{aligned} \quad (4.6-2)$$

上式表明，在总的振动中，第 r 阶模态被激发的程度，由 $\{u^{(r)}\}^T(m)\{q_0\}$ 、 $\{u^{(r)}\}^T(m)\{\dot{q}_0\}$ 决定，特别地，如果 $\{q_0\}$ 正好是第 s 阶模态向量，即

$$\{q_0\} = q_0 \{u^{(s)}\},$$

而

$$\{\dot{q}_0\} = \{0\},$$

利用正交性，(4.6-2)式成为

$$\begin{aligned} \{q(t)\} &= \sum_{r=1}^n (q_0 \{u^{(r)}\}^T(m)\{u^{(s)}\} \cos \omega_r t) \{u^{(r)}\} \\ &= \sum_{r=1}^n q_0 \delta_{rs} \{u^{(r)}\} \cos \omega_r t = q_0 \{u^{(s)}\} \cos \omega_s t. \end{aligned}$$

上式表明，系统完全按第 s 阶模态进行振动。

例4.6 对例4.5中的系统，求对初始条件 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $\dot{x}_3(0) = 1$ 的响应。

解：利用例4.5中求得的系统的自然频率和模态向量，根据(4.5-10)式可求第一阶模态质量

$$M_1 = \{u^{(1)}\}^T (m) \{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{pmatrix} 2m \\ 1.5m \\ m \end{pmatrix} \\ \times \begin{Bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1.813124m,$$

同理可求出第二、三阶模态质量

$$M_2 = 2.473965m, \quad M_3 = 22.59572m.$$

从而可得按(4.5-13)式求出正规化的模态向量

$$\{u^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \{u^{(1)}\} = \frac{1}{1.346523\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ \{u^{(2)}\} = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \{u^{(2)}\} = \frac{1}{1.572884\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} -0.678977 \\ -0.606599 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ \{u^{(3)}\} = \frac{1}{\sqrt{M_3}} \{u^{(3)}\} = \frac{1}{4.753496\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 2.439628 \\ -2.541936 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

根据(4.6-1)式，可求出对应于自然坐标的初始条件

$$\eta_1(0) = \{u^{(1)}\}^T (m) \{x_0\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.224170 \\ 0.481637 \\ 0.742654 \end{Bmatrix}^T$$

$$\times \begin{pmatrix} 2m \\ 1.5m \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.448340\sqrt{m},$$

同理可求出

$$\eta_2(0) = \{u^{(2)}\}^T(m) \{x_0\} = -0.863353\sqrt{m},$$

$$\eta_3(0) = \{u^{(3)}\}^T(m) \{x_0\} = 1.026456\sqrt{m},$$

$$\dot{\eta}_1(0) = \{u^{(1)}\}^T(m) \{\dot{x}_0\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0.224170 \\ 0.481637 \\ 0.742654 \end{pmatrix}^T$$

$$\times \begin{pmatrix} 2m \\ 1.5m \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.742654\sqrt{m},$$

$$\dot{\eta}_2(0) = \{u^{(2)}\}^T(m) \{\dot{x}_0\} = 0.635775\sqrt{m},$$

$$\dot{\eta}_3(0) = \{u^{(3)}\}^T(m) \{\dot{x}_0\} = 0.2103471\sqrt{m}.$$

从而由(4.6-2)式,

$$\begin{aligned} \{x(t)\} &= \sum_{r=1}^3 \left(\{u^{(r)}\}^T(m) \{x_0\} \cos \omega_r t \right. \\ &\quad \left. + \{u^{(r)}\}^T(m) \{\dot{x}_0\} \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r} \right) \{u^{(r)}\} \\ &= \left(0.448340\sqrt{m} \cos \omega_1 t + \frac{0.742654\sqrt{m}}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \begin{pmatrix} 0.224170 \\ 0.481637 \\ 0.742654 \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(-0.863353\sqrt{m} \cos \omega_2 t + \frac{0.635775\sqrt{m}}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -0.431677 \\ -0.385660 \\ 0.635775 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1.026456\sqrt{m} \cos\omega_3 t + \frac{0.210371\sqrt{m}}{\omega_3} \sin\omega_3 t \right) \\
& \times \begin{pmatrix} 0.513228 \\ -0.534751 \\ 0.210371 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

§ 4.7 影响系数、系统机械能与互易定理

4.7.1 柔度影响系数

在 § 4.2 中所定义的刚度系数又称为刚度影响系数，它反映了系统的刚度特性。现在我们来定义柔度影响系数。

对图 4.2-1 所示的多自由度系统，柔度影响系数 a_{ij} 定义为在坐标 $q_j(t)$ 处作用单位力 $Q_j(t) = 1$ ，而在坐标 $q_i(t)$ 处所引起的位移，它表征了线性系统在外力作用下的变形情况，即柔度特性。

我们来考察多自由度系统的柔度影响系数与刚度影响系数的关系。对图 4.2-1 所示的系统，按柔度影响系数的定义，在 $q_j(t)$ 处的力 $Q_j(t)$ 所引起的 $q_i(t)$ 处的位移为 $a_{ij}Q_j(t)$ ，应用叠加原理，系统在各个自由度上的作用力 $Q_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 在 $q_i(t)$ 上所产生的位移应为

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.7-1)$$

这里 $q_i(t)$ 是广义坐标， $Q_j(t)$ 是广义力。以 $\{q(t)\}$ 、 $\{Q(t)\}$ 表示系统的广义坐标列向量和广义力列向量。(4.7-1) 式可写成矩阵形式

$$\{q(t)\} = [a] \{Q(t)\}, \quad (4.7-2)$$

式中 $[a]$ 为由柔度影响系数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 组成的 $n \times n$

方阵，称为柔度矩阵。而在 § 4.2 中已推出与弹性恢复力平衡的广义力为

$$Q_i(t) = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.7-3)$$

将上式写成矩阵形式，即

$$\{Q(t)\} = \{k\} \{q(t)\}, \quad (4.7-4)$$

其中 $\{k\}$ 为系统的刚度矩阵。将 (4.7-4) 代入 (4.7-2) 式，得

$$\{q(t)\} = \{a\} \{k\} \{q(t)\},$$

故有

$$\{a\} \{k\} = \{1\}. \quad (4.7-5)$$

由上式可知，当 $\{k\}$ 存在逆阵时，柔度矩阵 $\{a\}$ 与刚度矩阵 $\{k\}$ 互为逆矩阵，即

$$\{a\} = \{k\}^{-1} \quad \text{或} \quad \{k\} = \{a\}^{-1}.$$

这一性质与单自由度系统的刚度系数 k 和柔度系数 a 之间的关系非常相似，我们知道，它们是互为倒数的，即 $a = 1/k$ ，或 $k = 1/a$ 。

例 4.7 求例 4.1 所示系统的柔度矩阵。

解：先计算 a_{i1} ($i = 1, 2, 3$)，在 m_1 上施加外力 $F_1 = 1$ ，此时各质块的位移为

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{F_1}{k_1} = 1/k_1,$$

按柔度系数的定义可得

$$a_{11} = x_1 = 1/k_1; \quad a_{21} = x_2 = 1/k_1; \quad a_{31} = x_3 = 1/k_1.$$

再计算 a_{i2} ($i = 1, 2, 3$)，在 m_2 上施加外力 $F_2 = 1$ ，此时各质块的位移为

$$x_1 = F_2/k_1 = 1/k_1,$$

$$x_2 = F_2/k_1 + F_2/k_2 = 1/k_1 + 1/k_2, \quad x_3 = x_2 = 1/k_1 + 1/k_2.$$

从而

$$a_{12} = x_1 = 1/k_1; \quad a_{22} = x_2 = 1/k_1 + 1/k_2;$$

$$a_{32} = x_3 = 1/k_1 + 1/k_2.$$

最后在 m_3 上施加外力 $F_3 = 1$, 则

$$x_1 = F_3/k_1 = 1/k_1,$$

$$x_2 = F_3/k_1 + F_3/k_2 = 1/k_1 + 1/k_2,$$

$$x_3 = F_3/k_1 + F_3/k_2 + F_3/k_3 = 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3.$$

从而

$$a_{13} = 1/k_1; \quad a_{23} = 1/k_1 + 1/k_2; \quad a_{33} = 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3.$$

系统的柔度矩阵为

$$[a] = \begin{bmatrix} 1/k_1 & 1/k_1 & 1/k_1 \\ 1/k_1 & 1/k_1 + 1/k_2 & 1/k_1 + 1/k_2 \\ 1/k_1 & 1/k_1 + 1/k_2 & 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3 \end{bmatrix}.$$

读者可自行验证, 上面求出的柔度矩阵 (a) 与例 4.1 中求出的 (k) 有下列关系

$$[k]^{-1} = [a].$$

例 4.8 两端简支梁上有三个集中质量 m 、 $2m$ 、 m , 如图 4.7-1(a) 所示, 梁的弯曲刚度为 EI , 取三集中质量处的挠度 y_1 、 y_2 、 y_3 为系统的广义坐标, 试求其柔度矩阵。

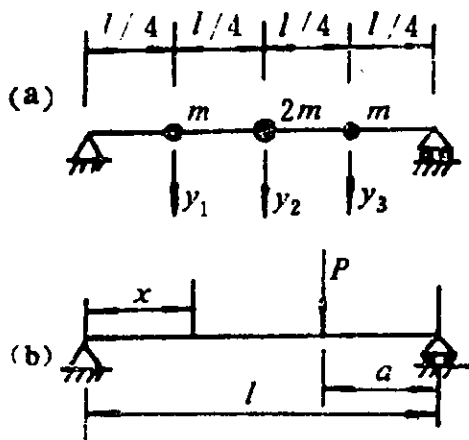


图 4.7-1

解: 利用简支梁在单位集中力作用下的挠度公式

$$\delta = \frac{a x}{6EI} (l^2 - x^2 - a^2)$$

式中 a 为集中力作用点距右端支承的距离, 如图 4.7-1(b) 所示。可直接求出柔度影响系数。

$$a_{11} = \frac{3l^3}{256EI}; \quad a_{13} = \frac{7l^3}{768EI};$$

$$a_{12} = \frac{11l^3}{768EI}; \quad a_{22} = \frac{l^3}{48EI};$$

$$a_{31} = a_{13}; \quad a_{33} = a_{11}; \quad a_{32} = a_{23} = a_{21} = a_{12}.$$

从而可写出柔度矩阵

$$(a) = \frac{l^3}{768EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

4.7.2 系统的势能与动能

1. 势能

让我们先看单独一个弹簧的势能。如图4.7-2(a)所示，当单

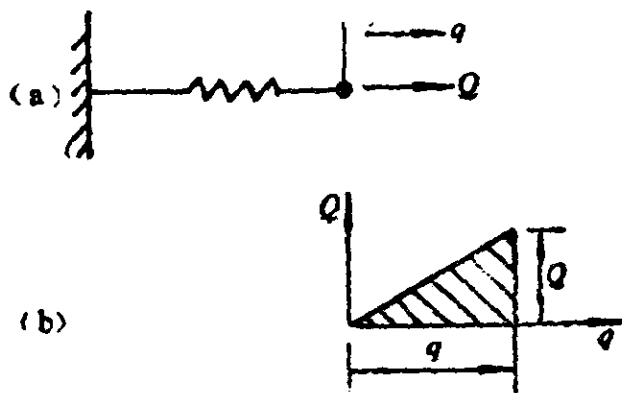


图 4.7-2

个线性弹簧受到拉伸变形时，它的位移由零增加到 q ，而作用在其上的作用力则由 0 逐渐增加到 $Q = kq$ ，如图4.7-2(b)所示，系统的势能即等于有阴影的三角形的面积

$$V = \frac{1}{2} Qq = \frac{1}{2} kq \cdot q = \frac{1}{2} kq^2 = \frac{1}{2} aQ^2 \quad (4.7-6)$$

它是一个关于 q 或 Q 的二次函数。

下面再来看多自由度线性系统的势能，如图4.7-3所示。有 n 个力 Q_i 作用于系统之上，先不妨设想各力是按比例施加上去

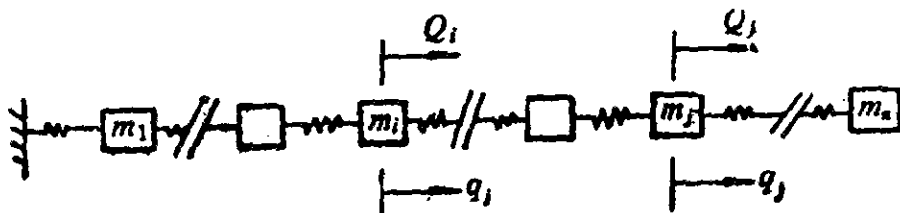


图 4.7-3

的，并且还假定加载过程十分缓慢，因而不会引起动态效应。现在考虑质块 m_i ，在加载过程中其上受到的作用力由零增加至 Q_i ，而其位移也相应地由零增加至 q_i ，因而与(4.7-6)式相似，可得作用在 m_i 上的外力作的功，即系统由此获得的那一部分势能为

$$V_i = \frac{1}{2} Q_i q_i.$$

对各个质块的受力与变型都可作同样的分析，因此，整个系统的势能为

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i q_i. \quad (4.7-7)$$

将(4.7-3)式代入上式，得

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} q_j \right) q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j. \quad (4.7-8)$$

这里我们将势能表示成为系统状态（即其广义坐标）的函数。事实上，势能只由系统的状态确定，而与达到该状态的加载过程无关。在前面，为了便于理解，我们曾设想加载过程是成比例的，但这并不妨碍(4.7-8)式的普遍性，即(4.7-8)式也适合于任何缓变的加载过程。

从(4.7-8)式可见，势能是广义坐标的二次齐次函数，也称为二次型，其系数即为系统的刚度影响系数，可用矩阵形式表达为

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T (k) \{q\}, \quad (4.7-9)$$

式中 (k) 是刚度矩阵， $\{q\}$ 是广义坐标向量。

另一方面，将前面的(4.7-1)式代入(4.7-7)式，又可将系统的势能表示成为广义力的二次齐次函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_i Q_j, \quad (4.7-10)$$

其中 a_{ij} 是柔度影响系数。上式可写成矩阵形式

$$V = \frac{1}{2} \{Q\}^T (a) \{Q\}, \quad (4.7-11)$$

其中 (a) 是柔度矩阵， $\{Q\}$ 是广义力向量。

2. 动能

考虑图4.7-3所示系统，其中质量 m_i 的动能为 $m_i \dot{q}_i^2/2$ ，而整个系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i^2. \quad (4.7-12)$$

将上式写成二次型的矩阵形式，得

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T (m) \{\dot{q}\}. \quad (4.7-13)$$

当 (m) 是一个对角阵时，(4.7-13)式即退回到(4.7-12)式，而在更一般的情况下， (m) 不一定是对角阵，不能以(4.7-12)式表示，而必须利用(4.7-13)式，将动能表示成广义速度 \dot{q}_i 的二次型，也可写成展开的形式，

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4.7-14)$$

这里 m_{ij} 即§4.2中定义的质量系数。

(4.7-9)与(4.7-14)式表明多自由度线性系统的势能和动能分别是广义坐标与广义速度的二次型，而这两个二次型的系数矩阵恰好分别是系统的刚度矩阵与质量矩阵。这可以看成是刚度矩阵和质量矩阵的另一种定义。

4.7.3 互易定理

在前面的讨论中我们多次提到 (a) 和 (k) 矩阵都是对称的，下面将给出一般性证明。

对图4.7-3所示系统，假设 Q_i 作用在 m_i 上，此时系统在坐标 q_i 处的位移为 $q_i' = a_{ii} Q_i$ ，在坐标 q_j 处的位移为 $q_j' = a_{ji} Q_i$ ，系

统因 Q_i 作用产生的势能为

$$\frac{1}{2} Q_i q_i = \frac{1}{2} a_{i,i} Q_i^2. \quad (4.7-15)$$

保持 Q_i 不变, 在系统的 m_j 上再施加一个力 Q_j , 那么按叠加原理, 在坐标 q_i, q_j 处增加的位移分别为 $q_i^* = a_{i,j} Q_j$ 和 $q_j^* = a_{j,j} Q_j$, 从而系统的势能改变为 $Q_i q_i^* + \frac{1}{2} Q_j q_j^*$, 系统总的势能为

$$\frac{1}{2} Q_i q_i + Q_i q_i^* + \frac{1}{2} Q_j q_j^* = \frac{1}{2} a_{i,i} Q_i^2 + a_{i,j} Q_i Q_j + \frac{1}{2} a_{j,j} Q_j^2. \quad (4.7-16)$$

现在, 改变加力次序, 即先加 Q_j , 再加 Q_i . 以同样的分析方法, 可得到系统的总势能为

$$\frac{1}{2} Q_j q_j + Q_j q_j^* + \frac{1}{2} Q_i q_i^* = \frac{1}{2} a_{j,j} Q_j^2 + a_{j,i} Q_j Q_i + \frac{1}{2} a_{i,i} Q_i^2. \quad (4.7-17)$$

可是前面说过, 系统的势能只是状态的函数, 而与加载过程无关, 也与加载次序无关. 因此, 方程(4.7-16)与方程(4.7-17)的右端必然相等, 故得

$$a_{i,j} Q_i Q_j = a_{j,i} Q_j Q_i. \quad (4.7-18)$$

从而

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.7-19)$$

(4.7-19)式称为Maxwell互易定理, 它对于一般的线性弹性结构都成立.

从(4.7-19)式可推知

$$\{a\} = \{a\}^T,$$

而考虑到(4.7-5)式, 又有

$$\{k\} = \{k\}^T,$$

进而有

$$k_{i,j} = k_{j,i}.$$

由此证明了刚度矩阵与柔度矩阵均应为对称矩阵。

§ 4.8 系统矩阵、动力矩阵

在 § 4.4 中，已经由多自由度系统的自由振动问题引出下面的广义特征值问题

$$\{k\}\{u\} = \lambda\{m\}\{u\}, \quad (4.8-1)$$

以下研究如何将以上两个矩阵定义的广义特征值问题化为由一个矩阵定义的标准特征值问题。用 $\{k\}^{-1}$ 即 $\{a\}$ 左乘方程 (4.8-1) 两端，得

$$\{u\} = \lambda\{a\}\{m\}\{u\}. \quad (4.8-2)$$

令 $\mu = 1/\lambda = 1/\omega^2$ ，并引入动力矩阵 $\{D\} = \{a\}\{m\}$ ，方程 (4.8-2) 就成为

$$\{D\}\{u\} = \mu\{u\}. \quad (4.8-3)$$

这样，广义特征值问题就化成了标准特征值问题。另一种方法是以 $\{m\}^{-1}$ 左乘 (4.8-1) 两端，得

$$\{m\}^{-1}\{k\}\{u\} = \lambda\{u\}. \quad (4.8-4)$$

引入系统矩阵 $\{S\} = \{m\}^{-1}\{k\}$ ，方程 (4.8-4) 成为

$$\{S\}\{u\} = \lambda\{u\}. \quad (4.8-5)$$

它也是一个标准特征值问题。系统矩阵 $\{S\}$ 和动力矩阵 $\{D\}$ 之间存在互逆关系，实际上

$$\{S\} = \{m\}^{-1}\{k\} = (\{k\}^{-1}\{m\})^{-1} = \{D\}^{-1}.$$

读者需注意，即使 $\{m\}$ 和 $\{k\}$ 都是对称的， $\{D\}$ 与 $\{S\}$ 矩阵一般也是非对称的，读者不妨自行验证这一点。因此，由 (4.8-3) 与 (4.8-5) 式所表示的标准特征值问题中，其矩阵一般是非对称的。这限制了一些有效的特征值问题求解方法的应用。至于如何将广义特征值问题转化为对称矩阵的标准特征值问题，将在第十四章中讲述。

例 4.9 对图 4.4-1 所示的三自由度系统，设 $m_1 = m$ ， $m_2 =$

$m, m_3 = 2m, k_1 = k_2 = k, k_3 = 2k$, 采用标准特征值形式的方程求系统的自然模态。

解：前面例4.7中已求出该系统的质量矩阵与柔度矩阵为

$$\begin{aligned} (m) &= \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \\ (a) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2.5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

动力矩阵为

$$\begin{aligned} (D) = (a)(m) &= \frac{m}{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{m}{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然，它是一个非对称矩阵。系统的特征值问题方程为

$$\frac{m}{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

令 $\mu = \frac{k}{m} \frac{1}{\omega^2}$, 则得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

或写成

$$\begin{pmatrix} 1-\mu & 1 & 2 \\ 1 & 2-\mu & 4 \\ 1 & 2 & 5-\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{a})$$

频率方程为

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} 1-\mu & 1 & 2 \\ 1 & 2-\mu & 4 \\ 1 & 2 & 5-\mu \end{vmatrix} = -(\mu^3 - 8\mu^2 + 6\mu - 1) = 0.$$

可解出 $\mu_1 = 7.1842$, $\mu_2 = 0.5728$, $\mu_3 = 0.2430$, 从而自然频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m\mu_1}} = 0.3731\sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m\mu_2}} = 1.3213\sqrt{k/m},$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m\mu_3}} = 2.0286\sqrt{k/m},$$

将 μ_1 代回 (a) 式, 取其前两式, 得

$$\begin{pmatrix} 1-\mu_1 & 1 & 2 \\ 1 & 2-\mu_1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -6.1842 & 1 & 2 \\ 1 & -5.1842 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

取 $u_1^{(1)} = 1$, 可解得

$$\{u^{(1)}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.8608 \\ 2.1617 \end{pmatrix},$$

同理可求得

$$\{u^{(2)}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2542 \\ -0.3407 \end{pmatrix}, \quad \{u^{(3)}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.1152 \\ 0.6791 \end{pmatrix}.$$

若按 $\{u^{(r)}\}^T(m)\{u^{(r)}\} = 1$ 条件正规化, 可得

$$\{u^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.2691 \\ 0.5008 \\ 0.5817 \end{Bmatrix}, \quad \{u^{(2)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.8781 \\ 0.2232 \\ -0.2992 \end{Bmatrix},$$

$$\{u^{(3)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.3954 \\ -0.8363 \\ 0.2685 \end{Bmatrix}.$$

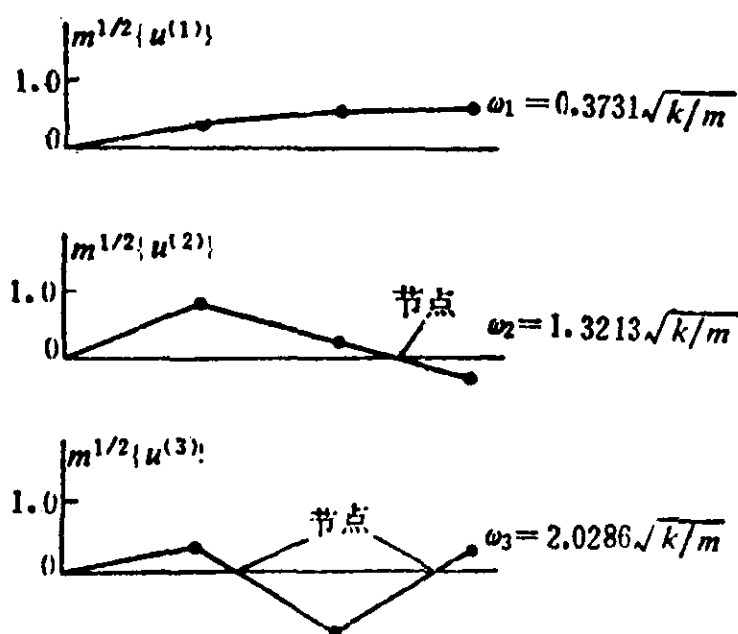


图 4.8-1

图4.8-1示出了系统的第一、二、三阶模态的振型，其中，第一阶模态没有节点，第二阶模态有一个节点，第三阶模态有二个节点。一般地，第 n 阶模态有 $n-1$ 个节点。

§ 4.9 有阻尼多自由度系统的自由振动

前面各节讨论了无阻尼多自由度系统的自由振动，而在实际机械系统中，总是存在各种阻尼力的作用。由于阻尼力的机理比较复杂，迄今对它的研究还不充分。在进行振动分析计算时，往往采用线性粘性阻尼模型，即将各种阻尼力简化为与速度成正比。粘性阻尼系数往往按工程中的实际结果拟合，拟合的方法已

在第一、二章中初步作了介绍，在第七章还会进一步介绍有关的测试与拟合技巧。

对 n 自由度系统，§4.2中已导出其运动微分方程

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\}, \quad (4.9-1)$$

其中 $[c]$ 为阻尼矩阵。在一般情况下，它是 $n \times n$ 正定或半正定的对称矩阵。下面来研究带有粘性阻尼的多自由度系统的自由振动，其运动方程为

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = 0. \quad (4.9-2)$$

采用自然坐标，将(4.5-25)式代入上式，

$$[m](u)\{\ddot{\eta}(t)\} + [c](u)\{\dot{\eta}(t)\} + [k](u)\{\eta(t)\} = \{0\}. \quad (4.9-3)$$

用 $(u)^T$ 左乘上式两端，得

$$(u)^T[m](u)\{\ddot{\eta}(t)\} + (u)^T[c](u)\{\dot{\eta}(t)\} + (u)^T[k](u)\{\eta(t)\} = \{0\}.$$

再利用(4.5-7)、(4.5-8)式，可得

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [c]\{\dot{\eta}(t)\} + [\omega_n^2]\{\eta(t)\} = \{0\}. \quad (4.9-4)$$

即质量矩阵与刚度矩阵均已对角化，但阻尼矩阵

$$[C] = (u)^T[c](u)$$

一般不是对角阵。这样，方程(4.9-4)虽已转换到模态坐标，但仍是一组通过速度项互相耦合的微分方程式，对它求解还是相当困难。如果要从根本上克服这一困难，使得有阻尼的多自由度系统的自由振动运动方程解耦，就需要采用复模态的分析方法。本书不拟涉及复模态的内容，下面仅介绍一些将 $[C]$ 矩阵对角化的近似方法。

如果在原来坐标中的阻尼矩阵 $[c]$ 可以近似地表示为质量矩阵 $[m]$ 与刚度矩阵 $[k]$ 的线性组合，即

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k],$$

其中 α 、 β 是大于或等于零的常数。这种阻尼称比例阻尼。在这种特殊情况下，当坐标转换到自然坐标后，对应的阻尼矩阵 (C) 也将是一个对角阵。

$$\begin{aligned} (C) &= (u)^T (c) (u) = \alpha(1) + \beta \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha + \beta\omega_1^2 & & & \\ & \alpha + \beta\omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha + \beta\omega_n^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

令 $\alpha + \beta\omega_r^2 = 2\xi_r\omega_r$ ，则 $\xi_r = \frac{\alpha + \beta\omega_r^2}{2\omega_r}$ ，称为第 r 阶模态的阻尼率。从而

$$(C) = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & & \\ & 2\xi_2\omega_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}. \quad (4.9-5)$$

工程中的大多数机械振动系统中，阻尼都是非常小的。在这种情况下，虽然 (C) 不是对角的，我们仍可以用一个对角矩阵形式的阻尼矩阵来近似代替 (C) ，最简单的方法就是将 (C) 的非对角元素改为零值。因为 (C) 的非对角元素引起的方程中的微小阻尼力耦合项的影响一般远比系统的非耦合项的作用（弹性力、惯性力、阻尼力）要小，可以作为次要的影响，将它略去后仍可得到合理的近似。

在上述两种情况下，将模态坐标下的阻尼矩阵用(4.9-5)式表达，运动方程(4.9-3)就成为 n 个互相独立的方程

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2\eta_r(t) = 0, \quad (r=1, 2, \dots, m) \quad (4.9-6)$$

这些方程都类似于第一章中研究过的单自由度系统的运动方程，因而按(1.4-12)式得

$$\eta_r(t) = C_r e^{-\xi_r \omega_r t} \cos(\omega_{dr} t - \psi_r), \quad (4.9-7)$$

其中 $\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$, 而 C_r, ψ_r 是待定常数, 由初始条件决定. 如果已知系统的初始条件

$$\{q(0)\} = \{q_0\}, \{\dot{q}(0)\} = \{\dot{q}_0\}.$$

那么, 采用类似 § 4.6 中的推导, 有

$$\eta^{(0)} = \{u^{(r)}\}^T (m) \{q_0\}. \quad (4.9-8a)$$

$$\dot{\eta}_r(0) = \{u^{(r)}\}^T (m) \{\dot{q}_0\}. \quad (4.9-8b)$$

将(4.9-8a, b)式代入(4.9-7)式, 可确定

$$\begin{aligned} C_r \cos \psi_r &= \{u^{(r)}\}^T (m) \{q_0\}, \\ -C_r \sin \psi_r &= \frac{1}{\omega_{dr}} (\{u^{(r)}\}^T (m) \{\dot{q}_0\} + \xi_r \omega_r \{u^{(r)}\}^T \\ &\quad \times (m) \{q_0\}). \end{aligned} \quad (4.9-9)$$

将(4.9-9)代入(4.9-7)式, 就可确定 $\eta_r(t)$, 即得 $\{\eta(t)\}$, 最后代回坐标变换式(4.5-25)式, 得物理坐标下的响应

$$\begin{aligned} \{q(t)\} &= (u) \{\eta(t)\} = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \{u^{(r)}\} \\ &= \sum_{r=1}^n e^{-\xi_r \omega_r t} (\{u^{(r)}\}^T (m) \{q_0\} \cos \omega_{dr} t \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{dr}} (\{u^{(r)}\}^T (m) \{\dot{q}_0\} + \xi_r \omega_r \{u^{(r)}\}^T \\ &\quad \times (m) \{q_0\}) \sin \omega_{dr} t) \{u^{(r)}\}. \end{aligned} \quad (4.9-10)$$

(4.9-10)式是比例阻尼或小阻尼情况下多自由度系统的自由振动响应. 由此式可见, 系统每个坐标的运动都是 n 个模态振动的叠加, 而每个模态的振动都是衰减的简谐振动. 一般低频衰减较慢, 高频衰减较快.

在具体应用中, $(m), (k)$ 往往可由计算分析并结合实验得到, 而 (c) 一般难以由分析方法求出. 我们可以通过实验模态分析(见第七章), 直接测定各个模态的阻尼率 ξ_r , 然后将它直接引入自

然坐标下的解耦微分方程(4.9-6)，而采用坐标逆变换，即可推求在原来的广义坐标中系统的阻尼矩阵。

§ 4.10 多自由度系统的一般响应

本节介绍用模态分析的方法来求多自由度系统对任意激励的响应。对 n 自由度线性系统，其运动微分方程在§ 4.2中已导出

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\}, \quad (4.10-1)$$

其中 $[m]$ 、 $[c]$ 及 $[k]$ 是实对称矩阵，而且假定它们是正定的。我们只讨论小阻尼或比例阻尼的情况。

模态分析的基本原理就是经坐标变换，用自然坐标来代替原来的物理坐标，而使运动微分方程解耦，使联立方程组变成 n 个独立的微分方程，从而可采用“各个击破”的方法逐一求解。

为了用自然坐标代替原来的物理坐标，需要以模态矩阵作为变换矩阵。为此，须先求解系统的特征值问题。

$$[k]\{u\} = \omega^2[m]\{u\},$$

求出系统的各阶自然模态： ω_r 、 $\{u^{(r)}\}$ ； $r=1, 2, \dots, n$ 。将模态向量组合在一起构成系统的模态矩阵

$$[u] = \{\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\}\}.$$

正规化的模态矩阵满足下列正交条件，

$$[u]^T [m] [u] = [1],$$

(4.10-2)

$$[u]^T [k] [u] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}.$$

又由于系统是比例阻尼或小阻尼，故有

$$[u]^T [c] [u] = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & & \\ & 2\xi_2 \omega_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 2\xi_n \omega_n \end{bmatrix}. \quad (4.10-3)$$

采用下列线性坐标变换

$$\{q(t)\} = (u)\{\eta(t)\}, \quad (4.10-4)$$

因为 (u) 为常数矩阵, 故有

$$\{\dot{q}(t)\} = (u)\{\dot{\eta}(t)\}, \quad \{\ddot{q}(t)\} = (u)\{\ddot{\eta}(t)\}, \quad (4.10-5)$$

将(4.10-4)、(4.10-5)代入(4.10-1), 左乘 $(u)^T$, 考虑到(4.10-2)式及(4.10-3)式, 得到

$$\begin{aligned} \{\ddot{\eta}(t)\} + \left[\begin{array}{c} \backslash \\ 2\xi_r \omega_r \\ \backslash \end{array} \right] \{\dot{\eta}(t)\} + \left[\begin{array}{c} \backslash \\ \omega_r^2 \\ \backslash \end{array} \right] \\ \times \{\eta(t)\} = \{N(t)\}. \end{aligned} \quad (4.10-6)$$

其中 $\{N(t)\} = (u)^T \{Q(t)\}$ 是自然坐标 $\{\eta(t)\}$ 下的 n 维广义力向量。

方程(4.10-6)可分开写成

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_r(t) + \omega_r \dot{\eta}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r(t) = N_r(t) \\ (r=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.10-7)$$

其中 $\eta_r(t)$ 称为第 r 阶模态坐标。

方程(4.10-7)相当于 n 个单自由度系统的运动方程, 可用§2.4介绍的脉冲响应函数法求解: 假定初始条件为零, 根据(2.4-13)式, 令 $m=1$, $\omega_d = \omega_{d,r}$, $\omega_n = \omega_r$, $F(\tau) = N_r(\tau)$, $\xi = \xi_r$, 则可写出系统受过程激励 $N_r(\tau)$ 作用的响应

$$\begin{aligned} \eta_r(t) = \frac{1}{\omega_{d,r}} \int_0^t N_r(\tau) e^{-\xi_r \omega_r (t-\tau)} \sin \omega_{d,r} (t-\tau) d\tau \\ (r=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.10-8)$$

其中 $\omega_{d,r} = \omega_r \sqrt{1-\xi_r^2}$ 是第 r 阶模态的阻尼自由振动频率。

再按(4.10-4)式, 即得原来坐标下过程激励的响应

$$\{q(t)\} = (u)\{\eta(t)\} = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \{u^{(r)}\}$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{1}{\omega_{d,r}} \{u^{(r)}\} \int_0^t N_r(\tau) e^{-\xi_r \omega_r (t-\tau)} \sin \omega_{d,r} (t-\tau) d\tau. \quad (4.10-9)$$

方程(4.10-1)的解是由其一个特解和对应的齐次方程的通解构成的, 其齐次方程的通解与初始条件有关, 是自由衰减振动, 在 § 4.9 中已讨论过, (4.9-10) 即其表达式。而对应于过程激励 $\{Q(t)\}$ 或 $\{N(t)\}$ 的特解是系统的强迫振动, 它已表达成卷积积分的形式(4.10-9), 因此, 多自由度系统对于初始激励和过程激励的全部响应为

$$\begin{aligned} \{q(t)\} = & \sum_{r=1}^n \{u^{(r)}\} \left\{ \frac{1}{\omega_{d,r}} \int_0^t N_r(\tau) e^{-\xi_r \omega_r (t-\tau)} \right. \\ & \times \sin \omega_{d,r} (t-\tau) d\tau + e^{-\xi_r \omega_r t} (\{u^{(r)}\}^T \{m\} \{q_0\} \\ & \times \cos \omega_{d,r} t + \frac{1}{\omega_{d,r}} (\{u^{(r)}\}^T \{m\} \{q_0\} \\ & \left. + \xi_r \omega_r \{u^{(r)}\}^T \{m\} \{q_0\}) \sin \omega_{d,r} t \right\}. \quad (4.10-10) \end{aligned}$$

下面讨论一种最简单的情况, 假定 $\{Q(t)\} = \{Q_0\} \sin \omega t$, 即各广义坐标 $\{q(t)\}$ 上作用的激励为同频同相的简谐力, 那么, 对应于模态坐标的广义力为

$$\{N(t)\} = \{u\}^T \{Q(t)\} = \{N_0\} \sin \omega t. \quad (4.10-11)$$

将上式代入(4.10-8)式, 得稳态强迫振动响应

$$\begin{aligned} \eta_r(t) = & \frac{N_{0,r} / \omega_r^2}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_r)^2]^2 + (2\xi_r \omega / \omega_r)^2}} \sin(\omega t - \psi_r), \\ \psi_r = & \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi_r \omega / \omega_r}{1 - (\omega / \omega_r)^2} \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4.10-12) \end{aligned}$$

将上式代入(4.10-9)式就可得在系统物理坐标下的稳态响应

$$\begin{aligned} \{q(t)\} = & \sum_{r=1}^n \{u^{(r)}\} \frac{N_{0,r} / \omega_r^2}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_r)^2]^2 + (2\xi_r \omega / \omega_r)^2}} \\ & \times \sin(\omega t - \psi_r). \quad (4.10-13) \end{aligned}$$

由上式可见，当激励频率 ω 与系统第 r 阶($r=1,2,\dots,n$)自然频率 ω_r 相近时，第 r 阶模态 $\eta_r(t)$ 的稳态响应振幅很大，是系统响应的主要成分。这时(4.10-13)式可近似写为

$$\{q(t)\} \approx \{u^{(r)}\} \frac{N_{0,r}}{2\xi_r \omega_r} \sin\left(\omega_r t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.10-14)$$

上式表明，当激振频率与系统第 r 阶自然频率 ω_r 相近时，各坐标的振幅组成的向量接近于系统的第 r 阶模态向量 $\{u^{(r)}\}$ ，系统按第 r 阶自然模态的方式进行振动，这是模态试验方法的基础。

例4.10 对图4.10-1所示的两自由度系统，设在 m_2 上作用激励力 $F(t) = F_0 u(t)$ ， $u(t)$ 为阶跃函数。求系统的响应。

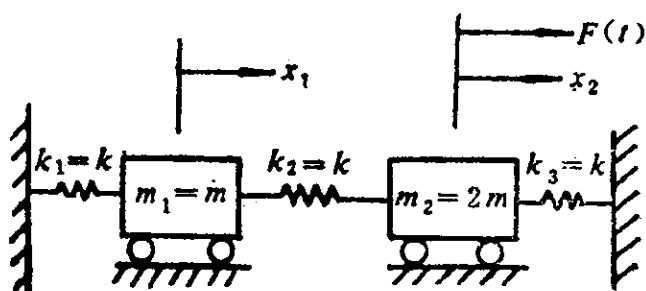


图 4.10-1

解：系统的运动方程为

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_2 x_1(t) &= F_0 u(t). \end{aligned} \quad (a)$$

将 $m_1 = m$ ， $m_2 = 2m$ ， $k_1 = k$ ， $k_2 = k$ ， $k_3 = k$ 代入(a)式，并写成矩阵形式，得

$$[m] \ddot{\{x(t)\}} + [k] \{x(t)\} = \{F(t)\}, \quad (b)$$

其中

$$\begin{aligned} [m] &= m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, & [k] &= k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \\ \{x(t)\} &= \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, & \{F(t)\} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 u(t) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

方程(b)对应的特征值问题为

$$\{k\}\{u\} = \omega^2\{m\}\{u\}. \quad (c)$$

其频率方程为

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - 2\omega^2 m \end{vmatrix} = 2m^2\omega^4 - 6km\omega^2 + 3k^2 = 0.$$

由此解得 $\omega_1 = 0.796226\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1.538188\sqrt{k/m}$, 分别将 ω_1 、 ω_2 代回方程(c), 求得系统的模态向量

$$\{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.366025 \end{Bmatrix}, \quad \{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.366025 \end{Bmatrix},$$

按 $\{u^{(i)}\}^T\{m\}\{u^{(i)}\} = 1$ 条件进行正规化, 得

$$\{u^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.459701 \\ 0.627963 \end{Bmatrix}; \quad \{u^{(2)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.888074 \\ -0.325057 \end{Bmatrix}$$

因而模态矩阵为

$$\{u\} = [\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.459701 & 0.888074 \\ 0.627963 & -0.325057 \end{bmatrix}. \quad (d)$$

引入线性变换

$$\{x(t)\} = \{u\}\{\eta(t)\}, \quad (e)$$

代入方程(b), 并左乘 $\{u\}^T$, 得

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \{\eta(t)\} = \{N(t)\}, \quad (f)$$

$$\text{其中 } \{N(t)\} = \{u\}^T\{F(t)\} = \frac{F_0}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.627963 \\ -0.325057 \end{Bmatrix} u(t).$$

从而根据(4.10-8)式有

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{1}{\omega_1} \int_0^t N_1(\tau) \sin \omega_1(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{0.627963 F_0}{\omega_1 \sqrt{m}} \int_0^t u(\tau) \sin \omega_1(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{0.627963 F_0}{\omega_1^2 \sqrt{m}} (1 - \cos \omega_1 t). \quad (g)$$

同理得

$$\eta_2(t) = \frac{-0.325057 F_0}{\omega_2^2 \sqrt{m}} (1 - \cos \omega_2 t). \quad (h)$$

将(g)、(h)两式代入(e)式, 得

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{F_0}{k} (0.455295(1 - \cos 0.796266\sqrt{k/m}t) \\ &\quad - 0.122009(1 - \cos 1.538188\sqrt{k/m}t)), \\ x_2(t) &= \frac{F_0}{k} (0.621945(1 - \cos 0.796266\sqrt{k/m}t) \\ &\quad + 0.044658(1 - \cos 1.538188\sqrt{k/m}t)). \end{aligned}$$

§ 4.11 多自由度振动系统的几种特殊情况

前述均属于多自由度系统的一般情况, 即 (k) 、 (m) 矩阵均为 $n \times n$ 的实对称正定矩阵, 且特征方程无重根的情况。如果以上条件不满足, 即矩阵 (k) 或 (m) 半正定, 或特征方程存在重根, 则为特殊的多自由度系统, 分别称为: 半定系统、具有“纯静态自由度”的系统与简并(degenerate)系统。本节简要介绍这三种系统的特点与性质。

4.11.1 半定系统

1. 势能与刚度矩阵的符号确定性

前面讲过, 多自由度线性系统的势能可以表示成为以刚度矩阵为系数矩阵的位移向量的二次型, 即

$$V = \frac{1}{2} \{u\}^T (k) \{u\}.$$

如果势能函数 V 从来不负，只有当 $\{u\} = \{0\}$ 时，才有 $V = 0$ ，那么称势能函数为正定的；如果 V 从来不负，而除了 $\{u\} = \{0\}$ 以外，在位移向量 $\{u\}$ 的其他某些取值下，也可能有 $V = 0$ ，则称 V 为半正定的。

势能函数的正定性或半正定性，显然由其系数矩阵，即刚度矩阵 (k) 完全确定。由此，又引出刚度矩阵本身的符号确定性的概念，即保证势能函数为正定（半正定）的刚度矩阵称为正定的（半正定的）。

一个矩阵是否是正定的，可以按Sylvester判据来加以判定。此判据说：一实对称矩阵 (k) 是正定的充要条件是它的所有主行列式都是正的，而半正定的充要条件是它为降秩的（即 $\det(k) = 0$ ），而且一切主行列式都是非负的。

例4.11 试判断以下两刚度矩阵的符号确定性：

$$(k)_1 = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{a})$$

$$(k)_2 = \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{b})$$

解：先看(a)式，

$$\det(k_1 + k_2) = k_1 + k_2 > 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 > 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} = k_1 k_2 k_3 > 0,$$

因而 $(k)_1$ 是正定的。再看(b)式

$$\det(k_2) = k_2 > 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = k_2 k_3 > 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} = 0.$$

因此, $(k)_2$ 是半正定的。

除了上述“正定”与“半正定”的情况以外,二次型函数或实对称矩阵还有“负定”、“半负定”以及“不定”等情况。由于后三种情况在振动系统的弹性势能函数中不会出现,因此不再详细讨论。

2. 半定系统

质量矩阵 (m) 是正定的,而刚度矩阵 (k) 是半正定的系统,称为半定系统。由上面的讨论可知,半定系统在位形向量 $\{u\}$ 不为零的情况下,弹性势能却可以为零,这表明该系统可作为一个刚体进行运动,而无弹性变形。由此,可得出结论:半定系统是一种约束不充分,而存在刚体运动的系统。

试看图 4.11-1(a)、(b) 中的两个系统,其中图(a)中的系统受到充分的约束,不存在刚体运动。而如果去掉其中的弹簧 k_1 ,即得到图 b,该系统作为一个整体并未定位,因此存在刚体运动,即三质块均以相同的位移 x_0 运动,即 $\{x\} = \{x_1, x_2, x_3\}^T = \{x_0, x_0, x_0\}^T \neq \{0\}$,而弹性势能 $V = 0$ 。

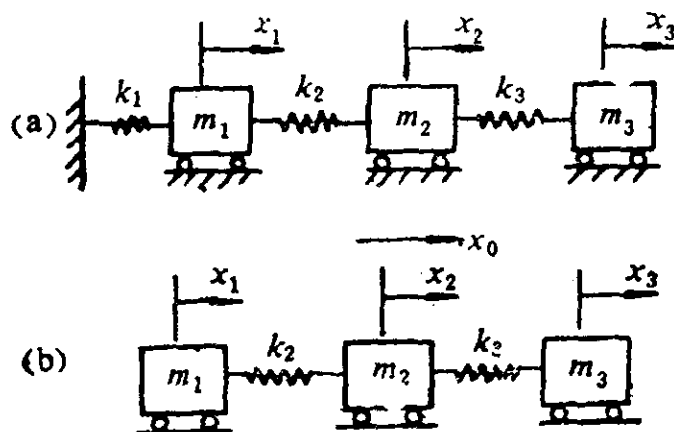


图 4.11-1

事实上，此两系统的刚度矩阵分别对应于上例中的(a)与(b)式，该例中已判定其一为正定的，而另一为半正定的。

由图4.11-1(b)可知，对于半定系统来说，所有的柔度影响系数均为无穷大，因而柔度矩阵(a)不存在。这一点是易于理解的，因为系统的刚度矩阵并非满秩的，即 $\det(k) = 0$ ，所以其逆矩阵(a)不存在，从而动力矩阵(D) = (a)(m)也不存在。这使得对于半定系统的分析与处理存在某些特殊之处，而需要采用一些专门的方法与技巧。

3. 刚体模态

半定系统存在刚体模态。下面以图4.11-1(b)所示的系统为例来说明这一概念，并讨论如何处理这类问题。在一般情况下，该系统的运动是刚性运动和弹性变形运动的合成，取三质块的水平位移 x_1 、 x_2 、 x_3 为广义坐标，组成位移向量 $\{x\} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ ，可得该系统的运动方程为

$$\{m\}\{\ddot{x}(t)\} + \{k\}\{x(t)\} = \{0\}, \quad (4.11-1)$$

其中

$$\{m\} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}, \quad \{k\} = \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}.$$

易于检验，(m)是正定的，而已知(k)是半正定的，故该系统是半定系统。

假定系统的同步运动为

$$\{x(t)\} = \{x\}f(t), \quad (4.11-2)$$

可推得与此问题相联系的特征值问题为

$$\omega^2\{m\}\{x\} = \{k\}\{x\}. \quad (4.11-3)$$

任取代表刚体运动的模态向量 $\{X^{(0)}\} = X_0\{1, 1, 1\}^T$ ，其中 X_0 为不等于零的常数，此模态向量表示各质块以相同的位移做平动，因而不存在弹性变形。容易验证

$$\{X^{(0)}\}^T\{k\}\{X^{(0)}\} = 0, \quad (4.11-4)$$

$$\{X^{(0)}\}^T(m)\{X^{(0)}\} = (m_1 + m_2 + m_3)X > 0. \quad (4.11-5)$$

将(4.11-3)式左乘以 $\{X\}^T$ ，并以 $\{X^{(0)}\}$ 代入，再利用(4.11-4)、(4.11-5)式，得

$$\omega^2 \sum_{i=1}^3 m_i = 0.$$

但 $\sum_{i=1}^3 m_i > 0$ ，故必有 $\omega = 0$ ，即与刚体模态相对应的自然频率为

零，记为 $\omega_0 = 0$ ，因此刚体模态又称为“零模态”。

因为系统的刚体模态必定与系统其它的模态正交，因此有

$$\{X^{(0)}\}^T(m)\{X^{(r)}\} = 0, \quad (4.11-6)$$

上式展开得

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 = 0. \quad (4.11-7)$$

将上式两端乘以 $f(t)$ ，由(4.11-2)式得：

$$m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t) + m_3 x_3(t) = 0, \quad (4.11-8)$$

对 t 求导，得

$$m_1 \dot{x}_1(t) + m_2 \dot{x}_2(t) + m_3 \dot{x}_3(t) = 0. \quad (4.11-9)$$

该式表征的物理意义是：系统的动量必须恒等于零。因而，这里诸模态与刚体模态的正交性等价于动量守恒定律。

我们知道，图1.1-1(b)中的系统之所以成为半定系统，是由于缺少一个水平移动的“几何约束”，这样就出现了零模态，而这一模态的出现，按正交性条件，又给系统的运动自然地补充了“动量守恒”这一“物理约束”，这里体现了自然规律的和谐与优美，是耐人寻味的。

需要说明，对于以角度为广义坐标的半定系统，相应的“物理约束”是系统的动量矩守恒定律。

引入“物理约束”(4.11-8)式，就可以排除问题中的刚体运动成分，使 (k) 不再奇异，从而可引用动力矩阵 (D) 来求解系统的特征值问题。

由(4.11-8)式得

$$x_3 = -\frac{m_1}{m_3}x_1 - \frac{m_2}{m_3}x_2. \quad (4.11-10)$$

利用此式, 可将 x_3 消去, 从而将坐标压缩到两个

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{m_1}{m_3} & -\frac{m_2}{m_3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.11-11)$$

记 $\{x_1, x_2, x_3\}^T = \{x\}$, $\{x_1, x_2\}^T = \{x\}'$,

$$(B) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{m_1}{m_3} & -\frac{m_2}{m_3} \end{Bmatrix}.$$

式(4.11-11)成为

$$\{x\} = (B)\{x\}'. \quad (4.11-12)$$

将上式代入(4.11-1), 并左乘 $(B)^T$, 得

$$(M)\{\dot{x}(t)\}' + (k)\{x(t)\}' = \{0\}. \quad (4.11-13)$$

式中

$$(M) = (B)^T(m)(B) = \frac{1}{m_3} \begin{Bmatrix} m_1 m_3 + m_3^2 & m_1 m_2 \\ m_1 m_2 & m_2 m_3 + m_3^2 \end{Bmatrix},$$

$$(K) = (B)^T(k)(B) = \frac{1}{m_3^2}$$

$\begin{bmatrix} k_1 m_3^2 + k_2 m_1^2 & -k_1 m_3^2 + k_2 m_1(m_2 + m_3) \\ -k_1 m_3^2 + k_2 m_1(m_2 + m_3) & (k_1 + k_2)m_3^2 + k_2 m_2(2m_3 + m_2) \end{bmatrix}$,
都是 2×2 对称正定矩阵, 对应(4.11-13)式的特征值问题方程为

$$\omega^2(M)\{u\} = (K)\{u\}. \quad (4.11-14)$$

它是一个二自由度正定系统, 可解得系统的自然模态 ω_1 、 $\{u_1^{(1)}\}$, $\{u_2^{(1)}\}$, ω_2 、 $\{u_1^{(2)}\}$, $\{u_2^{(2)}\}$, 然后代回(4.11-12)式, 得原坐标下的特征向量

$$\{X^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = (B) \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = (B)\{u^{(1)}\},$$

$$\{X^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} = (B) \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = (B)\{u^{(2)}\}.$$

由此求出的 ω_1 、 $\{X^{(1)}\}$ 及 ω_2 、 $\{X^{(2)}\}$ 为系统的两个弹性模态。与前面的刚体模态 ω_0 、 $\{X^{(0)}\}$ 一共是三个自然模态。

例4.12 对图4.11-1(b)所示系统, 设 $k_2 = k_3 = k$, $m_1 = m_2 = m_3 = m$, 求系统的模态。

解: 按(4.11-1)式, 可写出该系统的运动方程:

$$(m)\{\ddot{x}(t)\} + (k)\{x(t)\} = \{0\}, \quad (a)$$

式中

$$(m) = \begin{Bmatrix} m \\ m \\ m \end{Bmatrix}, \quad (k) = \begin{Bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{Bmatrix}.$$

其特征值问题为

$$\begin{Bmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (b)$$

频率方程为

$$\begin{aligned} \Delta(\omega^2) &= \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} \\ &= (k - m\omega^2)(m\omega^2 - 3k)\omega^2 = 0. \end{aligned}$$

故得 $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$, $\omega_3 = \sqrt{3k/m}$, 将它们分别代回方程(b), 得到对应的模态向量

$$\{X^{(1)}\} = \{1, 1, 1\}^T, \quad \{X^{(2)}\} = \{1, 0, -1\}^T,$$

$$\{X^{(3)}\} = \{1, -2, 1\}^T.$$

下面按坐标缩减的方法求解这个问题。由(4.11-11)式可写出约束方程

$$(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

按(4.11-13)可得坐标缩减后的方程

$$(M)\{\ddot{x}(t)\}' + (K)\{x(t)\}' = \{0\}. \quad (d)$$

其中 $\{x(t)\}' = \{x_1(t), x_2(t)\}^T$,

$$(M) = (B)^T(m)(B) = m \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(K) = (B)^T(k)(B) = k \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

方程(d)可化为:

$$(D)\{\ddot{x}(t)\}' + \{x(t)\}' = \{0\}, \quad (e)$$

其中 $(D) = (K)^{-1}(M) = \frac{m}{9k} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, 为动力矩阵。方程(e)对应的

的标准特征值问题为

$$(D)\{u\} = \frac{1}{\omega^2}\{u\}.$$

或

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (f)$$

其中 $p = 9k/(m\omega^2)$ 。由(f)式可解出

$$p_1 = 9, \quad \{u^{(1)}\} = \{1, 0\}^T;$$

$$p_2 = 3, \quad \{u^{(2)}\} = \{1, -2\}^T.$$

从而 $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$, 利用(c)式, 得系统对应于弹性变形的模态向量

$$\{X^{(1)}\} = (B)\{u^{(1)}\} = \{1, 0, -1\}^T,$$

$$\{X^{(2)}\} = (B)\{u^{(2)}\} = \{1, -2, 1\}^T.$$

最后考虑系统存在刚体模态

$$\omega_0 = 0, \{X^{(0)}\} = \{1, 1, 1\}.$$

图4.11-2示出了系统的振型。由图可见，在第一阶弹性模态中，第一质块和第三质块有相同的位移，而方向相反，中间的质块位移保持为零，正是节点，这种模态称为反对称模态。而在第二阶弹性模态中，第一、三质块位移大小相等、方向也相同，中间的质块位移则方向相反，这种模态称之为对称模态。刚体模态也是一种对称模态。

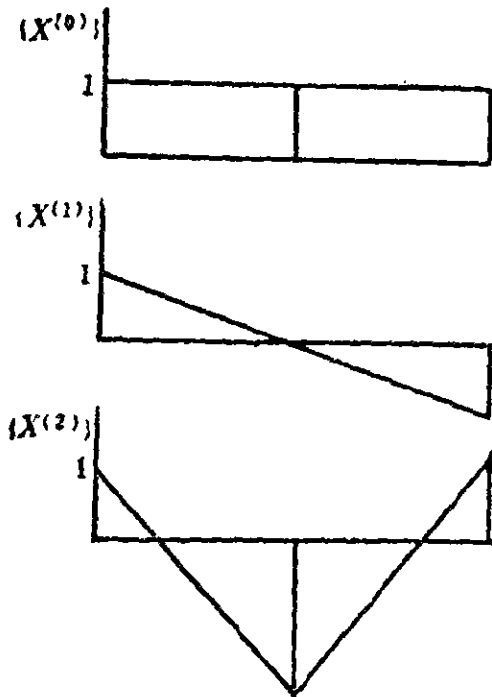


图 4.11-2

4.11.2 具有“纯静态自由度”的系统

为说明具有“纯静态自由度”的系统，试看图4.11-3所示的系统，它实际上是将图4.11-1(a)中所示的系统的 m_1 取为零值，该系统的运动方程为

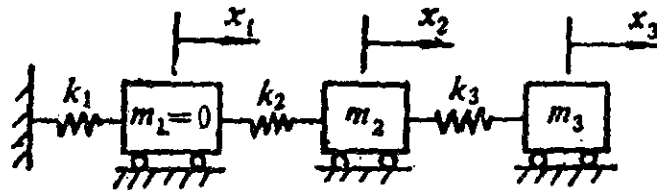


图 4.11-3

$$\{m\}\{\ddot{x}(t)\} + \{k\}\{x\} = \{0\}, \quad (4.11-15)$$

式中

$$\{m\} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}, \quad \{k\} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

显然 $\{m\}$ 是半正定的，而 $\{k\}$ 是正定的，该系统即是具有“纯静态自由度 x_1 ”的系统。采用假设同步解 $x(t) = x f(t)$ 的方法，得方程(4.11-15)对应的特征值问题为

$$\omega^2 \{m\} \{x\} = \{k\} \{x\}. \quad (4.11-16)$$

取 $\mu = 1/\omega^2$ ，则上面的方程变为

$$\mu \{k\} \{x\} = \{m\} \{x\}. \quad (4.11-17)$$

自由度 x_1 上没有集中质量，取代表系统的纯静态位移的向量

$$\{x^{(\infty)}\} = x^* \{1, 0, 0\}^T,$$

其中 x^* 为不等于零的常数。该模态向量表示系统的各质块均为静止，系统动能为零，但系统的静态自由度 x_1 上有位移，即位移向量并不为零。这时有

$$\{x^*\}^T \{m\} \{x^{(\infty)}\} = 0, \quad (4.11-18)$$

$$\{x^{(\infty)}\}^T \{k\} \{x^{(\infty)}\} > 0. \quad (4.11-19)$$

将(4.11-18)式代入(4.11-17)式，有

$$\mu \{x^{(\infty)}\}^T \{k\} \{x^{(\infty)}\} = 0.$$

考虑到(4.11-19)式，从而 $\mu = 0$ ，或 $\omega = \infty$ ，即与纯静态位移对应的自然频率为无穷大，记为 $\omega_\infty = \infty$ ， ω_∞ 与 $\{x^{(\infty)}\}$ 构成系统的“ ∞ ”模态，“ ∞ ”模态与系统其它的模态也应正交。故有：

$$\{x^{(\infty)}\}^T \{k\} \{x^{(r)}\} = 0,$$

展开得

$$(k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0, \\ x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2. \quad (4.11-20)$$

用 $f(t)$ 乘上式两端，得

$$x_1(t) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2(t).$$

上式表明系统的位移 x_1 可根据系统的弹簧参数分布由位移 x_2 计算得到, 据此可将 x_1 消去 从而将方程(4.11-17)的坐标压缩到两个, 变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_1+k_2} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (4.11-21)$$

接下来的分析与上节类似, 将(4.11-21)代入(4.11-15)得到一个两自由度正交系统, 可解得系统的自然模态 $\omega_1, \{x^{(1)}\}'$, $\omega_2, \{x^{(2)}\}'$, 然后由(4.11-21)式, 得原坐标下的特征向量 $\{x^{(1)}\}$, $\{x^{(2)}\}$, 由此求出的 $\omega_1, \{x^{(1)}\}, \omega_2, \{x^{(2)}\}$ 与前面的“ ∞ ”模态 $\omega_3, \{x^{(3)}\}$, 共是三个自然模态。

必须指出, 系统的刚体模态有“具体”的意义, 即实际工程系统有很多是“半定系统”, 但“ ∞ 模态”及具有“纯静态自由度”的系统往往是为便于处理实际的系统, 将系统中某个或某些坐标上的质量或转动惯量人为地略去而产生的。

4.11.3 “简并”系统

在§4.5节中证明了 n 自由度系统的 n 个模态向量正好在 n 维线性空间中构成一组坐标基, 继而论述了系统自由振动的所有解均可按这组坐标基进行分解。但那里的讨论有一个前提, 即系统的特征根各不相同, 对应的特征向量即模态向量的方向是唯一确定的。

当系统的特征方程出现重根时, 重根对应的特征向量的方向就不能唯一确定, 这种系统称为“简并”系统。设简并系统的特征值问题方程为

$$[k]\{u\} = \omega^2[m]\{u\},$$

而 $\omega_1^2 = \omega_2^2 = p$ 为其一对重特征根, $\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}$ 为所对应的

两个模态向量，设它们是线性独立的，那么其线性组合

$$\{u^{(m)}\} = c_1 \{u^{(1)}\} + c_2 \{u^{(2)}\} \quad (4.11-22)$$

也是对应于 $p = \omega_1^2 = \omega_2^2$ 的特征向量，这里 c_1, c_2 是任意实常数。

事实上，因为

$$[k]\{u^{(1)}\} = p(m)\{u^{(1)}\},$$

$$[k]\{u^{(2)}\} = p(m)\{u^{(2)}\},$$

从而有

$$\begin{aligned} [k]\{u^{(m)}\} &= [k]c_1\{u^{(1)}\} + [k]c_2\{u^{(2)}\} \\ &= c_1 p(m)\{u^{(1)}\} + c_2 p(m)\{u^{(2)}\} \\ &= p\{u^{(m)}\}. \end{aligned}$$

可见 $\{u^{(m)}\}$ 确是对应于 $p = \omega_1^2 = \omega_2^2$ 的特征向量。由此看来，二重特征值所对应的并非是两个确定的特征向量，而是位形空间中的一个二维子空间，这个子空间中的任何一个向量都可作为与该二重特征值相对应的特征向量。而且还可证明，与系统的其它特征值对应的特征向量一定与这个二维子空间正交因而与该子空间中的任何一个特征向量正交。图4.11-4以三自由度系统为例，对重根给出了一个几何解释：对应于重根的两个线性独立的特征向量 $\{u^{(1)}\}$ 、 $\{u^{(2)}\}$ 确定了平面子空间 S ，另一个特征向量 $\{u^{(3)}\}$ 与 S 垂直。 S 平面上的任何一个向量 $\{u^{(m)}\}$ 都是对应于重根的特征向量。

从图4.11-4中来看，任取的 $\{u^{(1)}\}$ 与 $\{u^{(2)}\}$ 一般不满足正交性条件，选取 $\{u^{(1)}\}$ 作为一个坐标基的模态向量，设另一个作为坐标基的模态向量为

$$\{u^{(2)}\}' = (c\{u^{(1)}\} + \{u^{(2)}\}), \quad (4.11-23)$$

要求 $\{u^{(2)}\}'$ 与 $\{u^{(1)}\}$ 关于 (m) 正交，即满足

$$\{u^{(1)}\}^T (m) \{c\{u^{(1)}\} + \{u^{(2)}\}\} = 0.$$

由此得出：

$$c = -\{u^{(1)}\}^T (m) \{u^{(2)}\}.$$

可证由此确定的模态向量 $\{u^{(1)}\}$ 、 $\{u^{(2)}\}'$ 对于 (k) 也是正交的，且它们当中的任一个与系统其它的模态向量 $\{u^{(3)}\}$ 也是关于

$\{m\}$ 、 $\{k\}$ 正交的。于是，如图 4.11-4所示， $\{u^{(3)}\}$ 、 $\{u^{(1)}\}$ 和 $\{u^{(2)}\}$ 构成三维位形空间中的正交坐标基。

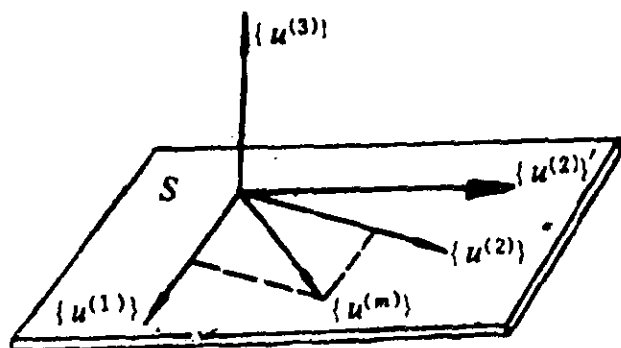


图 4.11-4

例4.13 求图4.11-5所示三自由度系统的自然模态。

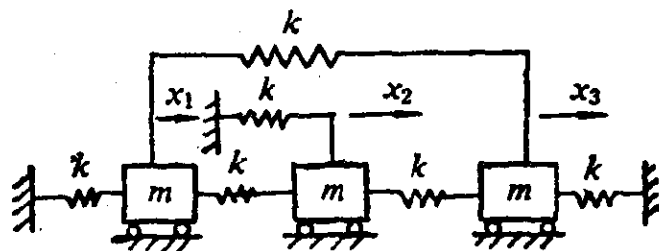


图 4.11-5

解：设以三质块的水平位移 x_1 、 x_2 、 x_3 为坐标，则系统的运动方程为

$$\{m\}\ddot{\{x\}} + \{k\}\{x\} = 0. \quad (a)$$

其中

$$\{m\} = \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix},$$

$$\{k\} = \begin{bmatrix} 3k & -k & -k \\ -k & 3k & -k \\ -k & -k & 3k \end{bmatrix}.$$

与(a)式对应的特征值问题方程为

$$(\{k\} - \omega^2\{m\})\{u\} = \{0\}. \quad (b)$$

频率方程为：

$$\begin{vmatrix} 3k - m\omega^2 & -k & -k \\ -k & 3k - m\omega^2 & -k \\ -k & -k & 3k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

展开得

$$\omega^6 - (9k/m)\omega^4 + (24k^2/m^2)\omega^2 - (16k^3/m^3) = 0,$$

由此解得

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{k/m}.$$

将 ω_1 代入(b)式可求出: $\{u^{(1)}\} = (1, 1, 1)^T$,

将 $\omega_2 = \omega_3$ 代入(b)式得:

$$k \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $u_1^{(i)} + u_2^{(i)} + u_3^{(i)} = 0 \quad (i=2, 3).$ (c)

$\{u^{(2)}\}$ 及 $\{u^{(3)}\}$ 可按关于(m)与(k)的正交条件来选定。先任意选定 $\{u^{(2)}\}$, 由(c)式

$$u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + u_3^{(2)} = 0. \quad (d)$$

$\{u^{(2)}\}$ 中有两个元素可任取, 取 $u_2^{(2)} = 1, u_3^{(2)} = 1$, 则 $u_1^{(2)} = -2$, 从而 $\{u^{(2)}\} = (-2, 1, 1)^T$. 最后确定 $\{u^{(3)}\}$, 由正交性条件:

$$\{u^{(3)}\}^T (m) \{u^{(2)}\} = 0,$$

得

$$-2u_1^{(3)} + u_2^{(3)} + u_3^{(3)} = 0. \quad (e)$$

取 $u_2^{(3)} = 1$ 由(c)、(e)两式可得

$$u_1^{(3)} = 0, \quad u_3^{(3)} = -1,$$

从而 $\{u^{(3)}\} = (0, -1, 1)^T$. 不难验证求出的 $\{u^{(2)}\}$ 、 $\{u^{(3)}\}$ 与 $\{u^{(1)}\}$ 两两关于(m)、(k)正交.

对于系统有s个($n > s \geq 2$)固有频率相等的情况, 也可采用类似的方法求得s个独立的特征向量, 然后对它们进行线性组合, 确定出s个两两关于(m)、(k)正交的模态向量, 并保证这s个模态向量与其它模态向量关于(m)、(k)正交.

思 考 题

试判别下列陈述是否正确，若有误，请写出正确的陈述。

1. 多自由度线性系统的质量矩阵 $[m]$ 、阻尼矩阵 $[c]$ 、刚度矩阵 $[k]$ 、柔度矩阵 $[a]$ 以及动态矩阵 $[D]$ 和系统矩阵 $[S]$ 都是对称矩阵。

2. 模态向量的正交性和正规化条件

$$\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(r)}\} = \delta_{r,s},$$

是由振动系统的本质决定的，并非人为的规定。

3. 对于多自由度无阻尼线性系统，其任何可能的自由振动都可以被描述为模态运动的线性组合。

4. 如果对于多自由度线性无阻尼系统给定特殊的初始条件或过程激励，则系统的某阶模态可以被单独地或突出地激励起来，振动呈纯模态运动，或以某一模态运动为主。

5. 任何系统只有当所有自由度上的位移均为零时，系统的势能才可能为零。

6. 任何系统的模态向量的长度可以任意选取，但其方向却是确定不变的。

习 题

4-1 一根张力为 T 的绳上有四个集中质量 m_i ($i=1, 2, 3, 4$)，如图4-1所示，试导出系统作横向微振动的运动方程，并写成矩阵形式。

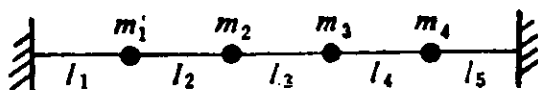


图 4-1

4-2 导出图4-2所示系统的运动微分方程，并写成矩阵形式。

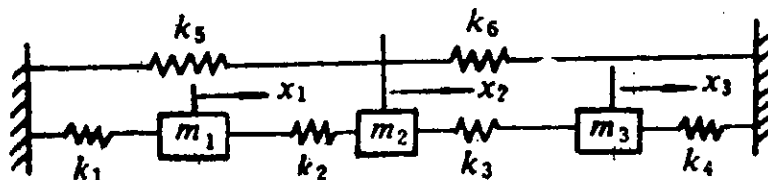


图 4-2

4-3 分别导出图4-3(a)、(b)所示三重摆的运动微分方程。

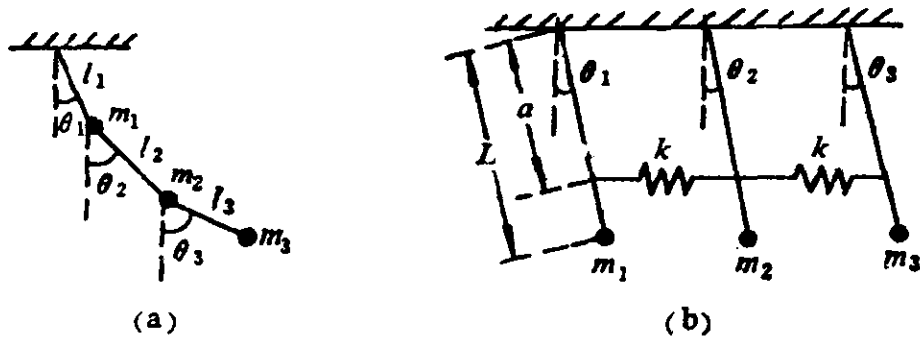


图 4-3

4-4 导出图4-4所示系统的运动微分方程，系统中梁本身无质量，梁的弯曲刚度为 EI ，其上四等分点上有集中质量 m_1, m_2, m_3 ，质量 m_2 上连接有阻尼为 c 的阻尼器。

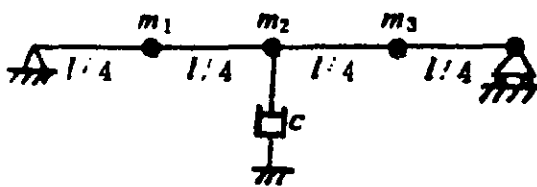


图 4-4

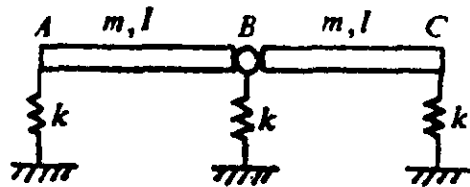


图 4-5

4-5 图4-5所示系统由两根均匀刚性杆 AB 及 BC 组成，它们在 B 点为铰支，三端点由弹簧 k 支承，杆的质量均为 m ，杆长为 l ，试以两种坐标导出该系统的运动方程。

4-6 对例4.1中的系统，列出用矩阵表示的运动方程，采用下列线性变换：

$$x_1 = y_1; \quad x_2 - x_1 = y_2; \quad x_3 - x_2 = y_3;$$

$$\text{或 } \{x\} = [c]\{y\}, \quad \text{其中 } [c] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

将上述线性变换引入运动微分方程，并左乘 $[c]^T$ ，得到以坐标 y_i ($i=1, 2, 3$)表示的运动方程，分别考虑两种坐标下的质量矩阵和刚度矩阵，说明方程组的耦合情况。

4-7 对题4-6中的系统，设 $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ， $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ，略去阻尼，试用特征行列式方法求系统的自然模态。

4-8 用特征行列式方法, 求解题4-2中的系统模态. 设 $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = 2m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $k_4 = k_5 = k_6 = 2k$.

4-9 对图4-3(a)中的三重摆, 设 $l_1 = l_2 = l_3 = l$, $m_1 = m_2 = m_3 = m$, 求系统的自然模态.

4-10 用特征行列式方法求出题4-5中系统的自然模态.

4-11 在题4-7中, 设各质量上的作用力为 $F_1 = F_2 = F_3 = F \sin \omega t$, 其中 $\omega = 1.25\sqrt{k/m}$, 求系统的响应.

4-12 在题4-11中, 如果将各阻尼系数 c_1, c_2, c_3 纳入考虑, 如图4.2-2所示, 并设对应的模态阻尼率为 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi = 0.01$, 试求系统的响应.

4-13 在题4-10中, 设右边杆的质量中心作用有铅垂方向阶跃力 F , 求系统的响应.

4-14 对例4.2中的系统, 设在第三盘上作用有一简谐力矩 $M_3 = M \sin \omega t$, 试用模态分析法求系统的稳态响应.

4-15 设在题4-9中三重摆的第一、二质量上作用有水平激励力 $F_1 = F_2 = \frac{F_0}{2} \sin \omega t$, 其中 $\omega = \sqrt{2g/(5l)}$, 求系统的稳态响应.

4-16 图示系统为一无质量梁, 长为 l , 弯曲刚度为 EI , 梁上有三个集中质量, 梁左端铰支, 求此半定系统的自然模态.

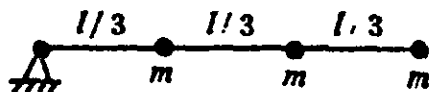


图 4-16

第五章 随机激励下的振动

§ 5.1 引言

前面已讲过三种类型的激励：谐波激励、周期激励与非周期激励。它们分别如图5.1-1(a)、(b)、(c)所示。这三种类型的激励有一个共同的特点，即任何时刻 t 的激励的数值 $f(t)$ 是完全知道的。这种激励称为确定激励(deterministic excitation)。对于线性系统来说，已经有了十分完善的办法，来处理其在确定激励下的响应问题。

可是还存在另外一种类型的激励，如公路路面对汽车车轮悬挂系统的激励，喷气发动机对飞机结构的激励以及海浪对轮船或采油平台的激励等等。它们也有一个共同的特点：其变化规律是不确定的，即每次测量的结果都不相同，如图5.1-2所示。这类激励称为不确定激励(nondeterministic excitation)，或随机激励(random excitation)。对于这类激励，没有办法以一种确定的函数关系 $f(t)$ 来预测其在各时刻的数值。其原因在于影响激励的因

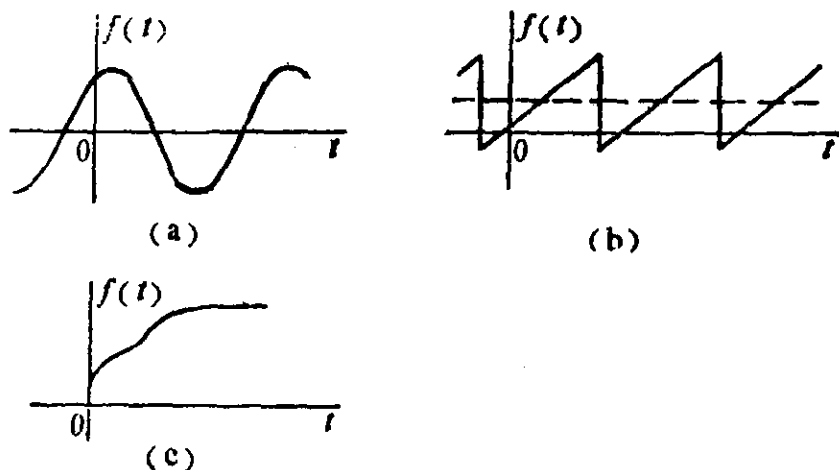


图 5.1-1

素太多、太复杂，在测试中难于确切地加以控制或预测。对于在这种类型的激励下系统的响应显然不能搬用前面的分析方法，而必须另辟新的途径。这种途径的基本思想是：不再企求描述激励随时间的变化规律，而退求其次，即只要求掌握激励的某些“统计规律性”，同时也不去追求获得响应的时间历程，而是满足于对于响应的“统计规律性”的掌握与运用。这里所谓的“统计规律性”是指激励或响应的某些“平均数”；这些平均数可以排除各种不确定的偶然因素的干扰，而揭示出内在的规律性。发现线性系统受到的激励与其响应的统计规律性之间的联系，正是现代“统计动力学”的重大突破，也是分析系统在随机激励下的响应与行为的基础。

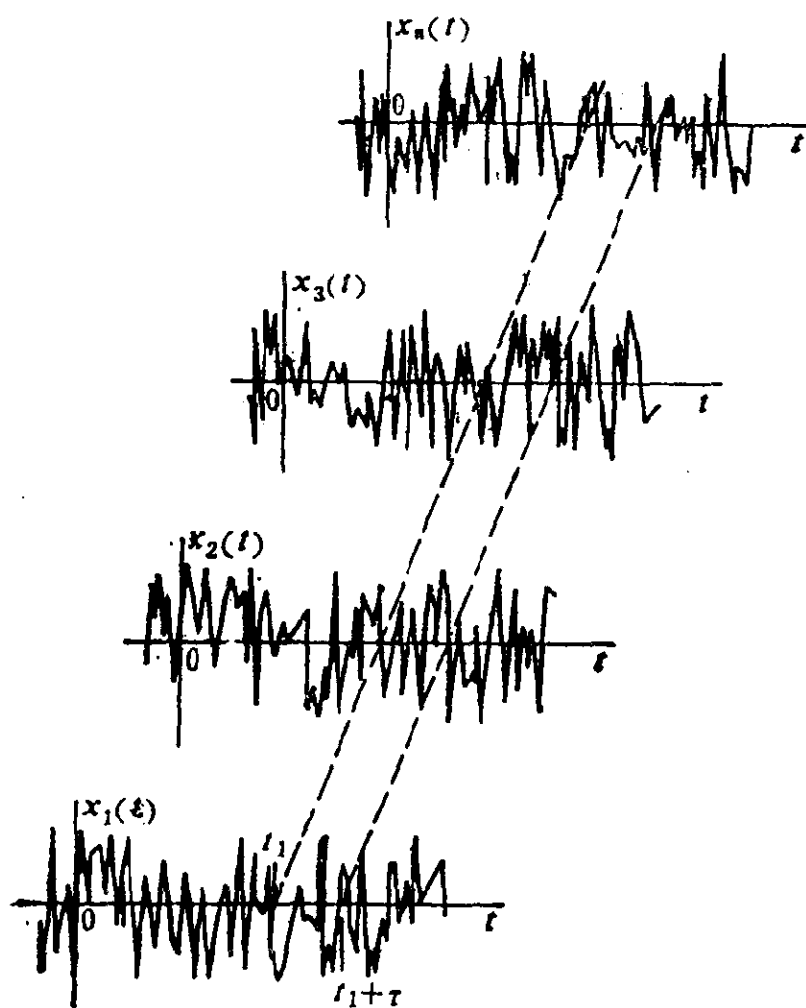


图 5.1-2

以下我们先简要介绍随机激励与响应的数学模型——随机过程，然后再利用这一模型与有关的概念来分析系统在随机激励下的响应问题。

§ 5.2 随机过程的基本概念

有些随机试验的结果可以用一个数字来表示，如测试某种产品的寿命，测量某种零件上的某个尺寸等等。如各次试验的结果记为 $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ ，则其总体记为 $X = \{x_k\}$ ，称为随机变量。另一些随机试验，如测量跑道对飞机起落架的激振力，或者起落架的振动等等试验，每次得到的结果都是某一个函数， $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots$ ，其总体记为 $X(t) = \{x_k(t)\}$ ，称为随机过程(random process)。当下标 k 取某定值时，得到 $x_1(t), x_2(t), \dots$ ，称为“样本函数”，而当 t 取定值时，如 $t = t_1, t = t_2$ 等等，则得到不同的随机变量 $X_1 = \{x_k(t_1)\}, X_2 = \{x_k(t_2)\}$ 等等。

随机过程的某一个样本函数 $x_k(t)$ 只是一次偶然的实现，一般说来，仔细研究这一样本函数是没有意义的，因为一个样本函数并不足以代表这一过程的特性和本质。为了揭示其特性和本质，必须从所有的样本函数的总体出发，计算其某些平均量。

5.2.1 总体平均与平稳随机过程

1. 总体平均

总体平均是各样本函数在某时刻的取值 $x_k(t_1)$ ($k = 1, 2, \dots$) 的平均值，或者是这些取值的某种函数的平均值。“总体平均”是在各样本函数之间进行的（见图5.1-2），我们以“E”表示总体平均。

(1) 均值

其定义为

$$\mu_x(t_1) = E(x_x(t_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_x(t_1). \quad (5.2-1)$$

总体平均的均值一般是时间 t_1 的函数。

(2) 自相关函数

其定义为

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_1 + \tau) &= E(x_x(t_1)x_x(t_1 + \tau)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_x(t_1)x_x(t_1 + \tau). \end{aligned} \quad (5.2-2)$$

一般而言，总体平均的自相关函数依赖所选定的起始时刻 t_1 与时移 τ ，它反映 t_1 与 $t_2 = (t_1 + \tau)$ 这两个时刻的随机变量 $X_1 = \{x_x(t_1)\}$ ， $X_2 = \{x_x(t_2)\}$ 之间的统计联系。

均值又称为随机过程的一阶平均，而自相关函数称为二阶平均。还可定义更高阶的平均数，但用得很少。

2. 平稳随机过程

上面讲过，一随机过程 $\{x_x(t)\}$ 的均值 $\mu_x(t_1)$ 与自相关函数 $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ 一般与 t_1 有关，这表明此过程的统计特性是随时间变化的，这种过程称为“非平稳的”。如果以上两个参数均与 t_1 无关，则此随机过程称为“弱平稳随机过程”，此时均值成为常数，记为 μ_x ，而自相关函数仅与 τ 有关，记为 $R_x(\tau)$ 。

这里“弱”字系指平稳仅对一阶与二阶平均值成立。如果 $\{x_x(t)\}$ 的各阶平均数均与 t_1 无关，则过程称为“强平稳”的。强平稳的过程当然也是弱平稳的，反之则不一定成立。由于高于二阶的平均数很少用到，我们不再严格区分“弱平稳”与“强平稳”，而统称为“平稳随机过程”。

5.2.2 时间平均与各态历经随机过程

1. 时间平均

时间平均是就某一个样本函数 $x_s(t)$ ，在时间上进行的平均。我们以字母上面的横划“—”表示时间平均。于是有

时间均值

$$\mu_s(k) = \overline{x_s(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_s(t) dt, \quad (5.2-3)$$

时间自相关函数

$$\begin{aligned} R_s(k, \tau) &= \overline{x_s(t)x_s(t+k)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_s(t)x_s(t+\tau) dt. \end{aligned} \quad (5.2-4)$$

时间均值与时间自相关函数一般会随样本函数而异，即是样本标号 k 的函数。由于某一个样本函数并不足以反映一个随机过程的全貌，因此，基于某一个样本函数的时间平均一般也不能代表整个随机过程的统计特性。可是在下述的所谓“各态历经”的假设下，却可以用一个样本函数来有效地代表整个随机过程的特性。

2. 各态历经随机过程

客观上存在某些随机过程，其样本在空间上分布的统计特性与其中任一样本在时间上发展的统计特性之间，有着深刻的相似之处。对于这类过程来说，可以认为总体平均与时间平均相等：

$$\mu_s(t_1) = \mu_s(k), \quad (5.2-5)$$

$$R_s(t_1, t_1 + \tau) = R_s(k, \tau). \quad (5.2-6)$$

满足此条件的过程 $\{x_s(t)\}$ 称为“各态历经”随机过程，或Ergodic过程。“各态历经”亦有“弱”、“强”之分，但实际上多不加以严格区分。

一个过程如果是各态历经的，那么只要抓住其一个样本函数，研究其统计特性，就可掌握其全部样本的统计特性，而免除采集大量样本，计算总体平均的麻烦，从而使对一个随机过程的记录、分析工作大为简化，因而这一假定是富有吸引力的。事实

上,与许多物理现象相关联的随机过程都可以认为是各态历经的,但是要想严格判断一个过程是不是各态历经的,是非常困难的,通常是凭直观作出这一假定,然后看分析计算的结果是否符合实际,反过来判断这一假定是否可以接受。

现在看(5.2-5)、(5.2-6)式,它们的左端是 t_1 的函数,而右端是 k 的函数,为使等式能够成立,必须有:总体平均与 t_1 无关(即过程是平稳的),且时间平均与 k 无关(各样本函数的时间平均相同)。由此可知各态历经过程一定是平稳的,但反之则不然,即一个平稳过程未必是各态历经的。

以上说明:第一,过程是平稳的,即总体平均与 t_1 无关;第二,时间平均与 k 无关,这两点构成过程是各态历经的必要条件,以下来证明这两点也是过程为各态历经的充分条件。先按(5.2-3)式考虑第 k 个样本的时间平均,得

$$\mu_s(k) = \overline{x_s(t)},$$

将上式两端对下标 k 取总体平均,得

$$E\{\mu_s(k)\} = E\{\overline{x_s(t)}\}, \quad (5.2-7)$$

已经假定时间平均与 k 无关,因此上式左端为常数的均值,仍为其自身,写为 $\mu_s(k)$;其右端的时间平均与总体平均可交换次序,即

$$E\{\overline{x_s(t)}\} = \overline{E\{x_s(t)\}} = \overline{\mu_s(t)},$$

由于已假定系统是平稳的,因此 $\mu_s(t)$ 与 t 无关,而对于时间平均来说,为常数的平均,仍为其自身,记为 $\mu_s(t_1)$ 。于是(5.2-7)式成为

$$\mu_s(k) = \mu_s(t_1),$$

同理可证

$$R_s(k, \tau) = R_s(t_1, t_1 + \tau),$$

即(5.2-5)、(5.2-6)式满足,因而过程是各态历经的,证毕,

由此可见,总体平均与时刻 t_1 无关,而时间平均与样本标号 k

无关，是过程为各态历经的充要条件。

某随机过程的一个样本函数若为区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数，周期为 T ，即有

$$x_i(t) = x_i(t+T) \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (5.2-8)$$

而其它的样本函数则为 $x_i(t)$ 的随机平移，即随机地取 $t_i \in (-\infty, +\infty)$ ，而

$$x_i(t) = x_i(t_i + t) \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (i=1, 2, \dots), \quad (5.2-9)$$

这里 t_i 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的随机变量，则易知(5.2-5)、(5.2-6)这两个条件都满足，因此该过程是各态历经的。

例5.1 计算以下随机过程的均值与自相关函数。该过程的一个样本函数如图5.2-1所示，而其余样本函数为该图的随机平移。

解：此过程为各态历经，因而可以时间平均取代总体平均。由于过程是周期性的，因此时间平均可以在一个周期内进行，即

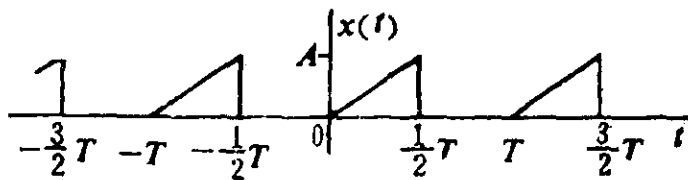


图 5.2-1

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t \leq 0, \\ \frac{2A}{T}t, & 0 < t \leq \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (a)$$

$$\mu_{\bullet} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{2A}{T} t dt = \frac{A}{4}. \quad (b)$$

为了计算自相关函数，需区分 $0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}$ 与 $\frac{T}{2} \leq \tau \leq T$ 两种情况。

分别如图5.2-2(a)与(b)所示。对于图(a)，有

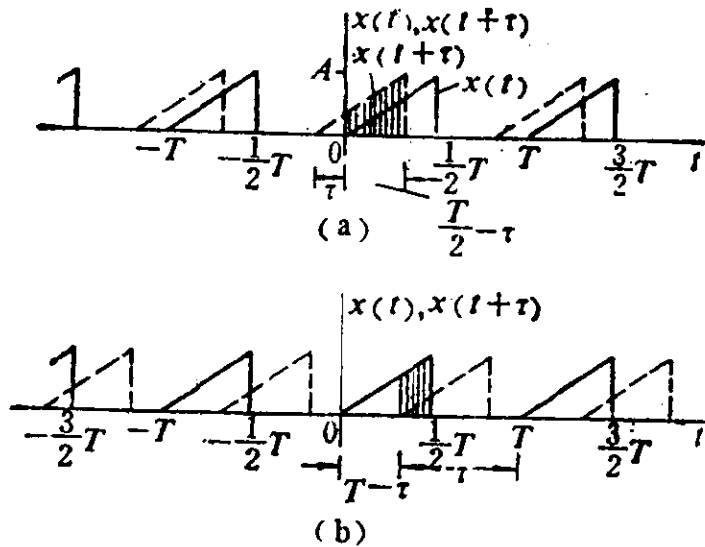


图 5.2-2

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{(\tau/2-\tau)} \frac{2A}{T}t \frac{2A}{T}(t+\tau)dt \\
 &= \frac{A^2}{6} \left[1 - 3\frac{\tau}{T} + 4\left(\frac{\tau}{T}\right)^3 \right], \quad 0 \leq \tau < \frac{T}{2}; \text{(c)}
 \end{aligned}$$

对于图(b), 有

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{\tau-T}^{\tau/2} \frac{2A}{T}t \frac{2A}{T}(t-(T-\tau))dt \\
 &= \frac{A}{6} \left[1 - \frac{3}{\tau}(T-\tau) + \frac{4}{T^3}(T-\tau)^3 \right], \quad \frac{T}{2} \leq \tau < T; \\
 &\text{(d)}
 \end{aligned}$$

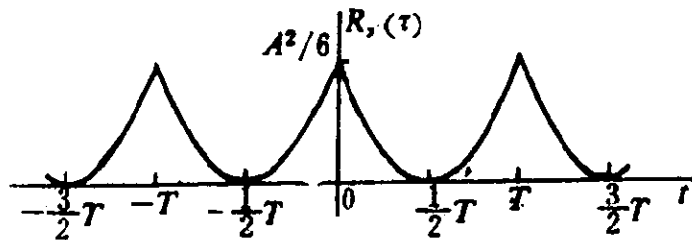


图 5.2-3

$R_x(\tau)$ 的图形在图5.2-3中给出。在绘制此图时, 利用了 $R_x(t)$ 仍保持 $x(t)$ 的周期性这一性质。

5.2.3 随机过程的统计参数

上面讲的均值 μ_s 和自相关函数 $R_s(\tau)$ 是描述随机过程的两个基本的统计参数。这里先讲解 $R_s(\tau)$ 的性质，然后由 μ_s 、 $R_s(\tau)$ 引出其他常用的几个统计参数。

1. 自相关函数的性质

自相关函数具有以下性质，这里我们仅加以引述，但不加证明。读者可以从有关书籍[1,4]中找到证明的方法。

(1) $R_s(\tau)$ 是偶函数，即有

$$R_s(\tau) = R_s(-\tau); \quad (5.2-10a)$$

(2) 周期函数 $x_s(t)$ 的自相关函数 $R_s(\tau)$ 也是周期函数，并且两者的周期相同；

以上两条表明自相关函数保留了样本函数的周期信息，但是摒弃了其相位信息。这一特点使得自相关函数能够深刻地揭示一个随机过程的本质。因为我们说过，各态历经的随机过程的各个样本均可看作其中某一个样本经随机平移而产生的，因此样本的初相，只是偶然的東西，并无本质意义，而样本函数的周期性，却反映了过程的内在特点。

(3) $R_s(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 时取最大值，即有

$$R_s(0) \geq R_s(\tau), \quad (5.2-10b)$$

其意义在于 $\tau = 0$ 时的相关性最强，而一般 τ 愈大，则两时刻的随机变量 $\{x_s(t_1)\}$ 、 $\{x_s(t_1 + \tau)\}$ 之间的相关性愈差， $R_s(\tau)$ 愈小。

2. 均方值

均方值即为 $\tau = 0$ 时的自相关函数，

$$\psi_s^2 = R_s(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt, \quad (5.2-11)$$

这里假定过程是各态历经的，故采用时间平均。 $\psi_s = \sqrt{R_s(0)}$ 则称为均方根。

3. 方差

均值 μ_x ，可视为信号的静态成分，而 $x(t) - \mu_x$ 则为信号围绕其均值波动的动态成分，此动态部分的均方值即为方差

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \mu_x]^2 dt. \quad (5.2-12)$$

而 σ_x 称为标准差。可证 σ_x^2 、 ψ_x^2 与 μ_x^2 之间有以下关系

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2. \quad (5.2-13)$$

例5.2 试求例5.1中过程的均方值 ψ_x^2 与方差 σ_x^2 。

解：由(5.2-11)式及例5.1(c)式，

$$\psi_x^2 = R_x(0) = \frac{A^2}{6}, \quad (a)$$

由(5.2-13)式与例5.1(b)式，

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2 = \frac{A^2}{6} - \left(\frac{A}{4}\right)^2 = \frac{5}{48} A^2. \quad (b)$$

5.2.4 随机过程的概率描述

我们已经知道，随机过程的平均运算分为总体平均与时间平均两种，而且也只有过程为各态历经的情况下，才可以用时间平均取代总体平均。相应地，随机过程的概率也分为总体概率与时间概率。

1. 总体概率

总体概率是对随机过程的样本的总体定义的。图5.2-4给出了某随机过程的一组样本函数。设定某 x_1 值，如图中各水平虚线所示，在全部 N 个样本函数中，在 t_1 时刻的取值 $x_k(t_1)$ ($k=1, 2, \dots, N$) 小于 x_1 的如有 N_{x_1} 个，则概率分布函数定义为

$$P(x_1, t_1) = P_{\text{总}}(x_k(t_1) < x_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{x_1}}{N}, \quad (5.2-14)$$

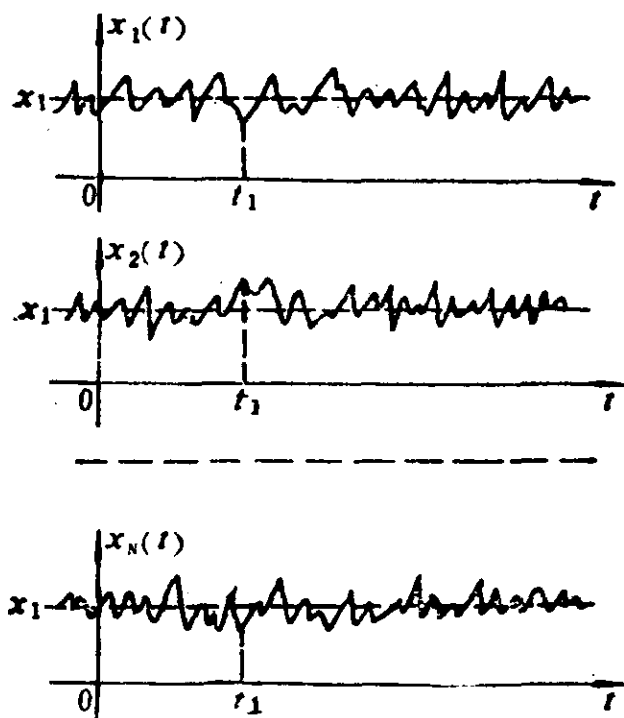


图 5.2-4

这里“ $P_{r.o.b.}$ ”表示“概率”。概率密度函数定义为

$$p(x_1, t_1) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{P_{r.o.b.}(x_1 < x_s(t_1) < x_1 + \Delta x_1)}{\Delta x_1}, \quad (5.2-15)$$

其中 $P_{r.o.b.}(x_1 < x_s(t_1) < x_1 + \Delta x_1)$ 是各样本函数在时刻 t_1 的取值 $x_s(t_1)$ 落在 $x_1 \sim x_1 + \Delta x_1$ 之间的概率。按其意义，应有

$$P_{r.o.b.}(x_1 < x_s(t_1) < x_1 + \Delta x_1) = P_{r.o.b.}(x_s(t_1) < x_1 + \Delta x_1) - P_{r.o.b.}(x_s(t_1) < x_1)$$

以(5.2-14)式代入，得

$$P_{r.o.b.}(x_1 < x_s(t_1) < x_1 + \Delta x_1) = P(x_1 + \Delta x, t_1) - P(x_1, t_1),$$

代入(5.2-15)式，得

$$\begin{aligned} p(x_1, t_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_1 + \Delta x, t_1) - P(x_1, t_1)}{\Delta x_1} \\ &= \frac{dP(x_1, t_1)}{dx_1}, \end{aligned} \quad (5.2-16)$$

即概率密度函数是概率分布函数的导函数。反之，由后者积分，

即可得到前者,

$$P(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p(\xi, t_1) d\xi, \quad (5.2-17)$$

而 $x_s(t_1)$ 落在 x_1 与 x_2 之间的概率为

$$P_{r.o.}\{x_1 < x_s(t_1) < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(\xi, t_1) d\xi. \quad (5.2-18)$$

概率分布函数 $P(x_1, t_1)$ 与概率密度函数 $p(x_1, t_1)$ 有以下性质:

(1) $P(x_1, t_1)$ 为 x_1 的非减函数, 且满足

$$\begin{aligned} P(-\infty, t_1) &= 0, & 0 \leq P(x_1, t_1) \leq 1, \\ P(\infty, t_1) &= 1. \end{aligned} \quad (5.2-19)$$

(2) $p(x_1, t_1)$ 非负, 且满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1) dx_1 = P(\infty, t_1) = 1. \quad (5.2-20)$$

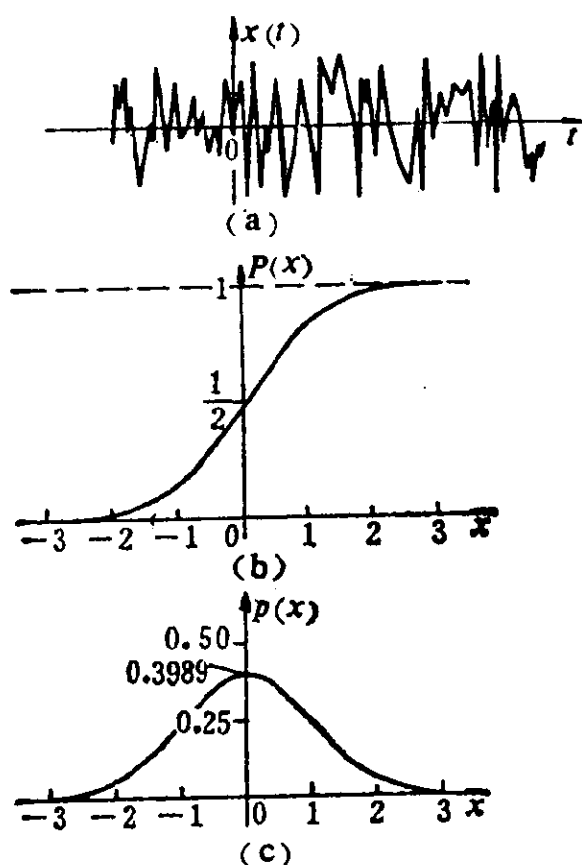


图 5.2-5

如果过程是平稳的, 则 $P(x_1, t_1), p(x_1, t_1)$ 均与时刻 t_1 无关, 因而可写为 $P(x_1), p(x_1)$. 由于 x_1 是可以改变的, 我们可略去其下标, 从而将平稳过程的概率分布函数和概率密度函数分别写为 $P(x)$ 与 $p(x)$.

一个最重要的随机过程是正态随机过程, 其概率为正态分布, 亦称 Gauss 分布. 此种随机过程的一个样本如图 5.2-5(a) 所示, 而其概率分布函数与概率密度函数分别如该图 (b) 与图 (c) 所

示。其表达式为

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi \quad (5.2-21)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (5.2-22)$$

以上两式与图5.2-5(b)、(c)表示的是标准的正态分布，其均值 μ_0 是零，而标准差 σ_0 是1。如果 $\mu_0 \neq 0$ ，而 $\sigma_0 \neq 1$ ，则概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (5.2-23)$$

正态随机过程是一种广为应用的模型。之所以得到广泛应用，第一是由于许多实际问题符合它的条件：如果有大量互不相关的随机因素在影响着一个过程，而其中并无一个因素起主导作用，则此过程就可视为一个正态随机过程。许多实际的工程问题都能够较好地符合这一条件，因而可以以正态过程为其模型。正态过程广为应用的第二个原因是因为它特别简单，仅由 μ_0 、 σ_0 这两个参数就可完全确定。因此一个过程如果是正态的，那么弱平稳与强平稳、弱各态历经与强各态历经的差别就消失了。这时由弱平稳条件可以推出强平稳条件，而由弱各态历经条件可以推出强各态历经条件。

2. 时间概率

设某随机过程的一个样本函数 $x_s(t)$ 如图5.2-6(a)所示，其概率分布函数定义为

$$P_s(x_1) = P_{r.o.s.}\{x_s(t) < x_1\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum \Delta t_i}{T} \quad (5.2-24)$$

图5.2-6(b)给出了 $P_s(x)$ 的图形。

概率密度函数为

$$p_s(x_1) = \frac{dP_s(x_1)}{dx_1} \quad (5.2-25)$$

如果过程是各态历经的，那么其总体概率应该与时间概率相同，按(5.2-14)、(5.2-24)式，有

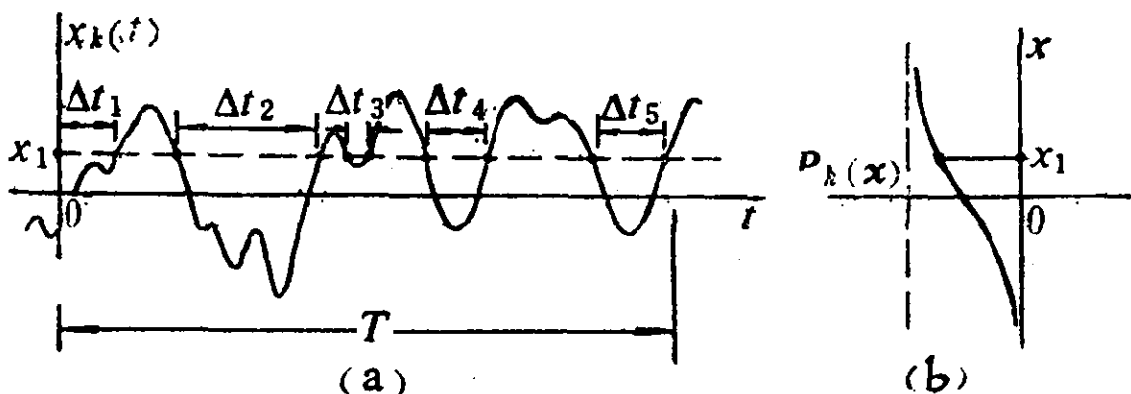


图 5.2-6

$$P(x_1, t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{x_1}}{N} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum \Delta t_i}{T} = P_k(x_1).$$

(5.2-26)

这一方面要求总体概率与 t_1 无关，即过程是平稳的，另一方面则

要求时间平均与 k 无关，即对任何样本计算出的概率分布函数都相同。略去 x_1 的下标，就可将各态历经随机过程的概率分布函数表示为 $P(x)$ ，而概率密度函数表示为 $p(x)$ 。它们均可由一个代表性的样本函数求出。

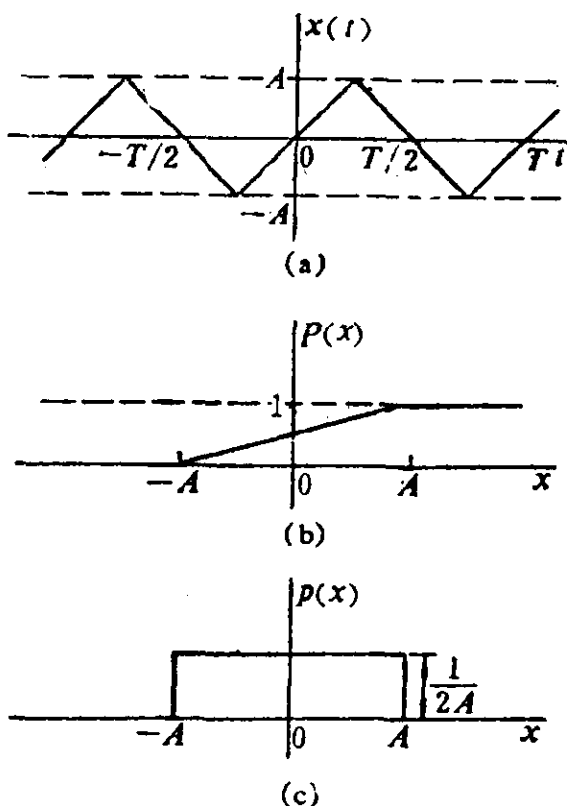


图 5.2-7

作为一个例子，图5.2-7(a)为一个各态历经随机过程的代表性样本函数，其概率分布函数与概率密度函数分别如该图(b),(c)所示。这种概率称为均匀分布概率。

以下再举一个例子说明随机过程的概率的计算。

例5.3 设有某各态历经的随机过程，其一个代表性样本函数为正弦函数

$$x(t) = A \sin \omega t, \quad (\text{a})$$

如图5.2-8所示。而其他的样本函数为以上函数的随机平移

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (\text{b})$$

式中初相 φ 假设在 $0 \sim 2\pi$ 上均匀分布，即其概率密度函数为

$$p(\varphi) = \begin{cases} 1/2\pi, & \text{当 } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0, & \text{其余.} \end{cases} \quad (\text{c})$$

试计算此过程的时间概率与总体概率，并证明(5.2-26)式确实成立。

解：先就一个样本函数，即(a)式，计算时间概率。见图5.2-8，当 $x_1 < -A$ 时，

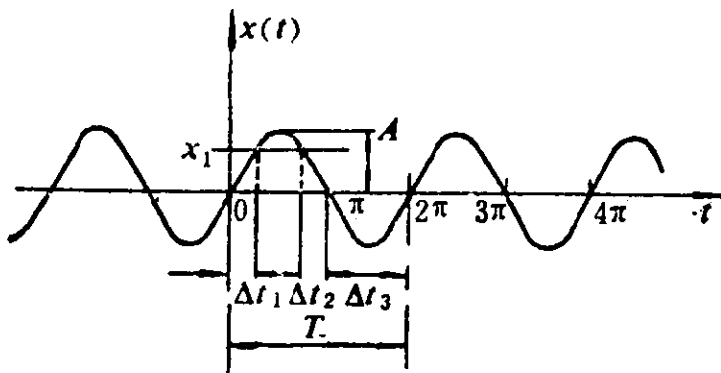


图 5.2-8

$$P(x_1) = P_{\dots}(x(t) < x_1) \leq P_{\dots}(x(t) < -A) = 0 \quad (\text{d})$$

以上推理应用了 $P(x)$ 是 x 的非减函数这一性质，由于 $P(x)$ 不可能为负，故实际上 $P(x_1) = 0$ 。当 $x_1 > A$ 时，有

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P_{\dots}(x(t) < x_1) = 1 - P_{\dots}(x(t) \geq x_1) \\ &\geq 1 - P_{\dots}(x(t) > A) = 1 - 0 = 1, \end{aligned} \quad (\text{e})$$

由于 $P(x)$ 不可能大于1，故实际上 $P(x_1) = 1$ 。当 $-A < x_1 < A$ 时，

$$\begin{aligned}
 P(x_1) &= P_{\text{r.o.}}\{x(t) < x_1\} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}{T} \\
 &= (\arcsin(x_1/A) + \arcsin(x_1/A) + \pi)/2\pi \\
 &= 1/2 + \arcsin(x_1/A)\pi. \tag{f}
 \end{aligned}$$

归纳起来有

$$P(x_1) = \begin{cases} 0 & , \text{当 } x_1 < -A, \\ \frac{1}{2} + \arcsin(x_1/A)/\pi, & \text{当 } -A < x_1 < A, \\ 1 & , \text{当 } x_1 > A. \end{cases} \tag{g}$$

而按(5.2-25)式, 得概率密度函数为

$$p(x_1) = \frac{dP(x_1)}{dx_1} = \begin{cases} 0, & \text{当 } x_1 < -A, \\ 1/(\pi\sqrt{A^2 - x_1^2}), & \text{当 } -A < x_1 < A, \\ 0 & , \text{当 } x_1 > A. \end{cases} \tag{h}$$

其图形如图5.2-9所示。注意, 在 $x_1 = \pm A$ 处, $p(x_1) \rightarrow \infty$ 。

其次, 我们就所有样本函数的总体来计算总体概率。由于过程是平稳的, 总体概率 $p(x_1, t_1)$ 应当与 t_1 的选取无关, 为简单起见, 可取 $t_1 = 0$, 于是(b)式成为

$$x(t_1) = x(\varphi) = A\sin\varphi, \tag{i}$$

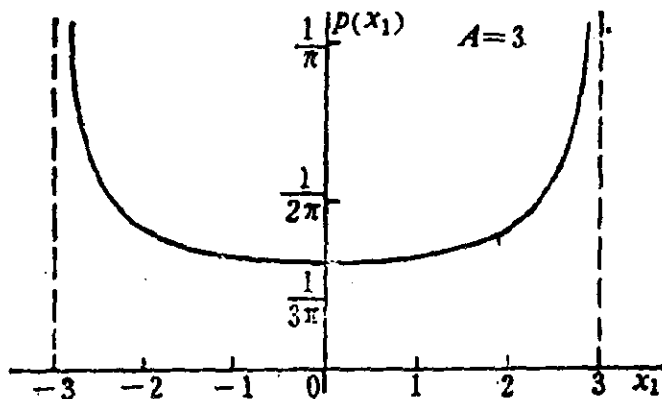


图 5.2-9

我们知道，不同的 φ 值对应于不同的样本函数，如图5.2-10所示。

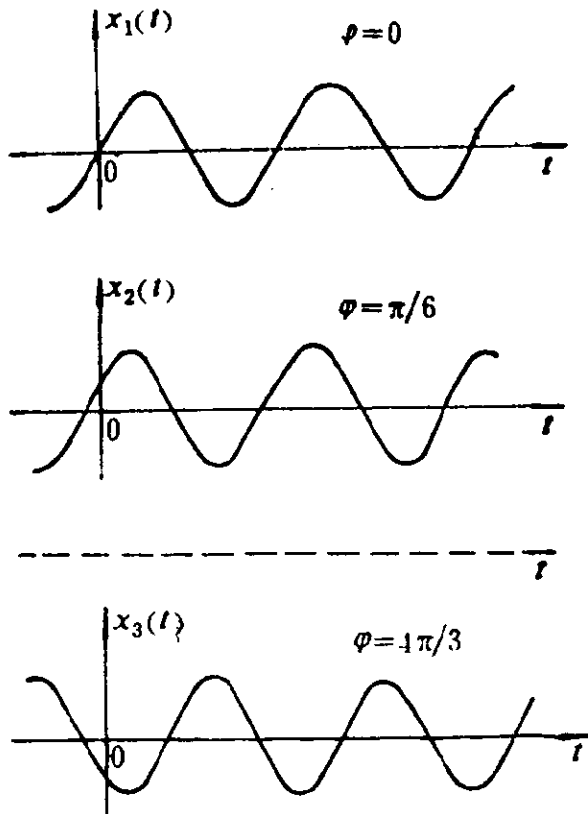


图 5.2-10

而在 $t_1 = 0$ 处 $x(t_1)$ 的取值则取决于 φ ，其间关系如图5.2-11所示。由(5.2-16)式，

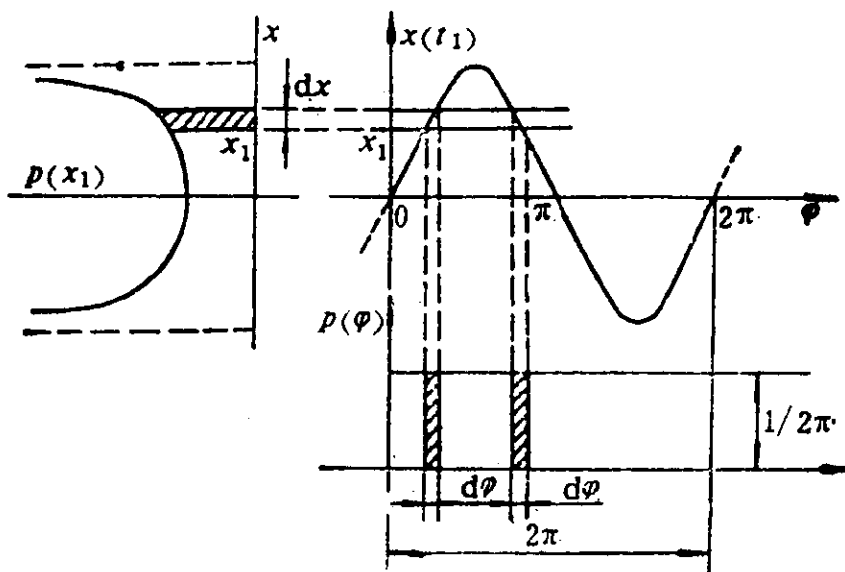


图 5.2-11

$$P_{r.o.s.}(x_1 < x(t_1) < x_1 + dx) = p(x_1)dx. \quad (j)$$

而另一方面由图上曲线之间的关系又有

$$\begin{aligned} & P_{r.o.s.}(x_1 < x(t_1) < x_1 + dx) \\ &= P_{r.o.s.}(\varphi \text{落在两个} d\varphi \text{的带中}) \\ &= 2p(\varphi)d\varphi = 2d\varphi/2\pi = d\varphi/\pi \end{aligned} \quad (k)$$

由(i)式又有

$$dx = A\cos\varphi d\varphi.$$

以上式代入(k)式, 再代入(j)式, 得

$$p(x_1)dx = (1/\pi A\cos\varphi)dx,$$

即

$$p(x_1) = \frac{1}{\pi A\cos\varphi} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - A^2\sin^2\varphi}},$$

以(i)式代入上式, 得

$$p(x_1) = 1/(\pi\sqrt{A^2 - x_1^2}). \quad (m)$$

此为 $-A < x_1 < A$ 的结果。至于 $x_1 < -A$, $x_1 > A$ 时的 $p(x_1)$, 显然亦为零。此结果与(b)式给出的时间概率是一致的。这正是各态历经过程的特点。

3. 以概率密度定义平均值

前面按样本函数本身定义了 μ_x , φ_x 与 σ_x 等统计参数, 并给出了计算公式。现在我们有了随机过程的概率的定义, 因而可以将各统计参数定义为某些随机变量的数学期望。设随机过程 $\{x_s(t)\}$ 是平稳的, 其概率密度函数为 $p(x)$ (如果过程也是各态历经的, 则 $p(x)$ 是时间概率。否则, 是总体概率), 则其均值可按概率计算如下:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (5.2-27)$$

注意, 此式是按 x 积分, 而前面(5.2-3)式是按 t 积分。读者须体会到这两式在立意上的差异: 积分式可理解为求和, 那么(5.2-3)式是“流水帐”式的求和, 而(5.2-27)式则是按 x 值先行“类

聚”，然后再分类求和，这种思想也贯穿在其他统计参数的计算中。

均方值可按概率密度函数表示为

$$\psi_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (5.2-28)$$

方差则可表示为

$$\sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^2 p(x) dx \quad (5.2-29)$$

以上各式实际上是在计算 $p(x)$ 函数的“矩”， μ_1 为一次矩， ψ_2 为二次原点矩，而 σ_2^2 为二次中心矩。理论上还可定义更高次的矩，但实际上应用很少。

5.2.5 随机过程的自功率谱密度函数

在第二章曾经讲过，为了计算非周期激励作用在线性系统上的响应，需要分析它的频率结构，即将之作Fourier变换。如果激励是一个随机过程，我们如计算它的一个样本函数对于系统的激励作用，是否也可以对之直接进行Fourier变换呢？这样做有两个问题：

第一，Fourier变换对于相位十分敏感。如果一个原函数 $f(t)$ 的Fourier变换为 $F(\omega)$ ，则原函数经时间平移以后， $f(t+t_0)$ 的Fourier变换为 $F(\omega)e^{j\omega t_0}$ 。可是我们知道，各态历经的随机过程 $\{f_s(t)\}$ 的各个样本函数 $f_s(t)$ 可以看作是其中某一个样本经时间的随机平移而形成的。这一时间平移纯系偶然因素，不应进入所求的频率结构。有什么办法既保留 $f_s(x)$ 的频率结构，而又能剔除其相位的影响呢？我们立即想到前面讲的自相关函数 $R_f(\tau)$ ，正是它既保留了 $f_s(t)$ 的频率特点，而又摒弃了它的相位影响。

第二，对于一个平稳随机过程 $\{f_s(t)\}$ 来说，其任一样本

$f_s(t)$ 并不会随时间 t 衰减(否则 μ_s 会随时间减小,不满足“平稳”的要求),因而一般并不满足Fourier变换存在的条件,即绝对积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_s(t)| dt$$

收敛的条件。所幸的是自相关函数 $R_f(\tau)$ 却一般会随 τ 的增加而下降,前面说过,这是由于时移 τ 愈长,相关性愈差的原因。因此, $R_f(\tau)$ 的Fourier变换一般是存在的。

由此可知,为了得到一个随机过程(或者说其样本函数)的频率特性,我们不应该直接对样本函数本身,而是对其自相关函数进行Fourier变换。这样得到的结果称为该随机过程的功率谱密度函数(power spectral density function),或简称为“功率谱”或“自谱”

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (5.2-30)$$

而其逆变换为

$$R_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.2-31)$$

至于为什么叫“功率”谱,可作如下理解,设 $f(t)$ 是作用在一个单位电阻上的电压信号,那么 $f^2(t)$ 则是瞬时功率信号,而平均功率则为

$$\overline{W} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = R_f(0), \quad (5.2-32)$$

而令(5.2-31)式中 $\tau=0$,得

$$R_f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega. \quad (5.2-33)$$

代回(5.2-32)式,得

$$\overline{W} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega. \quad (5.2-34)$$

此式一方面表示平均功率 \overline{W} 的时间结构,即各个瞬时的功率 $f^2(t)$

对于平均功率 \overline{W} 的贡献, 另一方面又表示了平均功率的频率结构, 即各种频率的功率成分, $S_f(\omega)d\omega$ 对于平均功率 \overline{W} 的贡献. 因此 $S_f(\omega)$ 被称为“功率”谱. 由于频率落在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 的窄带中的激励功率正比于 $S_f(\omega)d\omega$, 因此 $S_f(\omega)$ 又称为功率谱“密度”, 其量纲为(功率)/(频率), 即单位频率中的功率.

由于 $R_f(\tau)$ 是实偶函数, 故(5.2-30)、(5.2-31)两式可简化为余弦变换,

$$S_f(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (5.2-35)$$

$$R_f(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_f(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (5.2-36)$$

令(5.2-36)式中 $\tau = 0$, 得均方值的另一种计算公式

$$R_f(0) = \psi_f^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_f(\omega) d\omega. \quad (5.2-37)$$

可以证明 $S_f(\omega)$ 为实的非负偶函数, 即有

$$S_f(\omega) \geq 0, \quad S_f(\omega) = S_f(-\omega). \quad (5.2-38)$$

5.2.6 几种典型的随机过程

利用上述概念, 我们可以来定义几种典型的经常要用到的平稳随机过程的模型.

1. 单一频率成分的随机过程

其样本函数、自相关函数与功率谱密度函数如图5.2-12的第一行所示. 各样本函数是频率 ω_0 相同而初相不同的谐波,

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (5.2-39)$$

其中初相 ϕ 为随机变量. 自相关函数为

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t + \phi) \sin[\omega_0(t + \tau) + \phi] dt$$

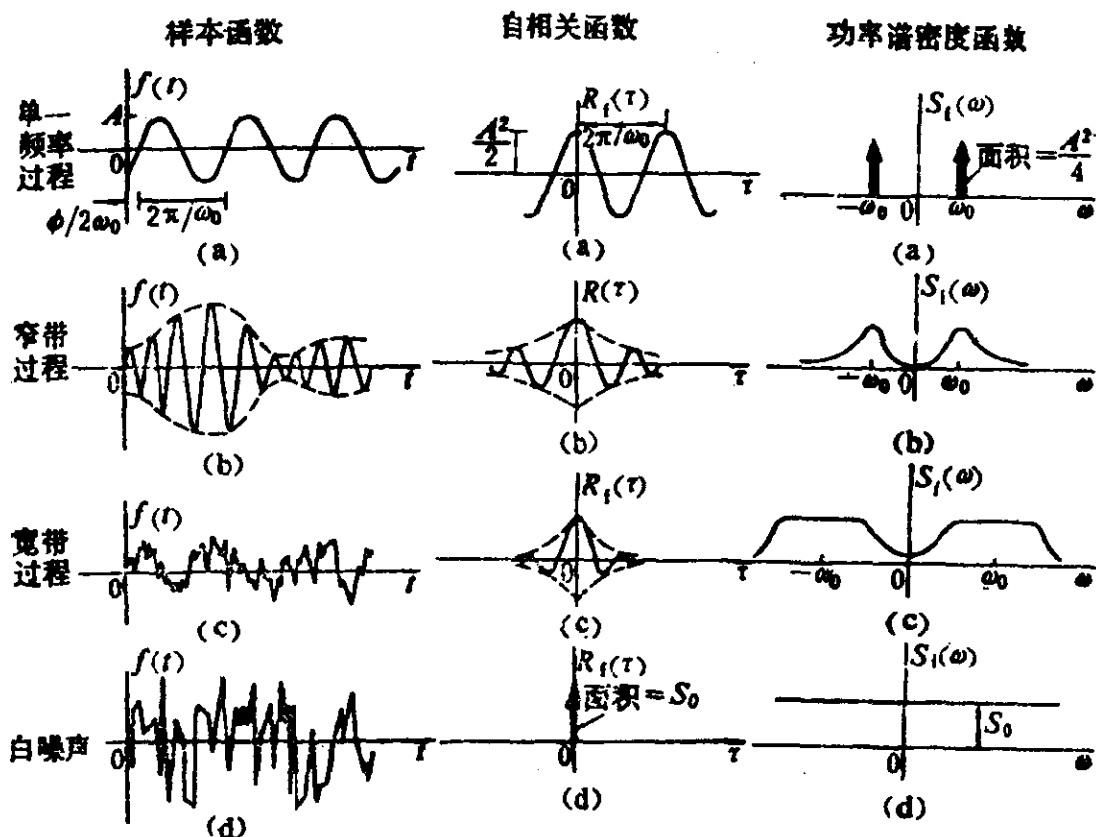


图 5.2-12

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\omega_0\tau \sin^2\alpha + \sin\omega_0\tau \sin\alpha \cos\alpha) d\alpha \\
 &= \frac{A^2}{2} \cos\omega_0\tau,
 \end{aligned} \tag{5.2-40}$$

是频率为 ω_0 的谐波，而且是 τ 的偶函数。其功率谱密度为

$$S_f(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]. \tag{5.2-41}$$

为对称分布在 $-\omega_0$ 、 ω_0 位置上的两个 δ -函数。这是易于理解的，因为其能量集中在 ω_0 这一频率上。

2. 窄带随机过程

其样本函数并无确定的解析表达式，其外观好象是被缓变随机信号调幅的高频谐波，如图5.2-12第二行所示。其自相关函数仍然包含样本函数中的主要频率成分，但其振幅逐渐衰减，这表明随着时移 τ 的增加，样本信号前后之间的相关性在下降。其功率谱密度函数表示信号的能量集中在一个比较窄的频带范围内。

3. 宽带随机过程

如图5.2-12第三行所示，其样本函数包含更多的频率成分，显示出更大的随机性，或者说不确定性。其自相关函数比窄带过程衰减得更快，这表明其样本信号前后的相关性更差。而其功率谱密度函数则具有更大的频宽。

以上从单一频率过程到窄带过程，到宽带过程，是沿着信号的不确定性上升，前后相关性下降以及频率分布范围变宽的趋势发展的。当将这一趋势推向极端时，就得到一种理想化的随机过程——白噪声。

4. 白噪声

其样本函数具有最大的随机性、不确定性，如图5.2-12第四行所示，它变化多端，反复无常。其前后信号之间的相关性为零，因而自相关函数成为 δ -函数，即

$$R_f(\tau) = S_0 \delta(\tau), \quad (5.2-42)$$

当时移 $\tau \neq 0$ 时， $R_f(\tau) = 0$ ，其功率谱密度函数成为一条水平线。

$$S_f(\omega) = S_0, \quad (5.2-43)$$

这表明白噪声信号中均等地包含各种频率成分，从 $-\infty$ 直到 $+\infty$ 。我们知道，各种颜色（即各种波长）的光可以组成白光。这里也借用“白”字，将此种信号称为“白噪声”。

以(5.2-43)式代入(5.2-34)式，可知白噪声的平均功率 \overline{W} 为无限大。事实上由(5.2-42)式也可见 $R_f(0) = S_0 \delta(0) = \infty$ ，即均方值 ψ_f^2 为无限大。这在实际上当然是不可能的。但“白噪声”仍然是非常有用的一种随机过程的模型。事实上，只要作为激励的宽带随机过程的带宽足以覆盖系统具有显著响应的频带范围，就可以将之作为一个白噪声过程来看待，从而在测试分析上带来很大的简化。

必须说明，“白噪声”与“正态分布”是从两个不同的角度对随机过程所作的定义或描述。所谓“正态随机过程”是指其样本函数取值的分布（时间分布或总体分布）是正态的，但这一概念

对于样本函数前后两次取值之间的联系未作任何要求。所谓“白噪声随机过程”是指其样本函数的先后两次取值之间不能存在任何统计联系，即当 $\tau \neq 0$ 时， $R_f(\tau) = 0$ ，但这一概念对于样本函数一次取值的分布规律，又未作任何限制。一个白噪声随机过程可以是正态分布的，也可以是其它分布的。一个正态分布的随机过程可以是白噪声，也可以不是。不过，经常用到的一种随机过程模型是所谓正态白噪声，而且往往从其样本函数中减去均值，因而得到零均值正态的白噪声。

最后，还须说明，从样本函数到自相关函数，或者到功率谱密度函数是一种从个体到统计平均的运算，这种运算是确定的。上述“单一频率随机过程”，我们是从其样本函数开始定义的，因而可给出样本函数、自相关函数、与其功率谱密度函数的确切的解析表达式。可是我们不能从自相关函数或者功率谱密度函数去倒推样本函数，因为我们无法从统计平均信息去还原出全部个体信息。所谓窄带、宽带与白噪声随机过程均是对功率谱密度函数定义的，这就是为什么我们无法确切地给出其样本函数的解析表达式。事实上有无穷多种样本函数能分别满足上述三种随机过程中的每一种要求。

§ 5.3 线性系统对于平稳随机过程的响应

这一节我们用上节讲到的关于随机过程的基本知识来解决线性系统在随机激励下的响应问题。假定已知系统的动态特性与激励随机过程的统计参数，主要是均值 μ_f 、自相关函数 R_f 与功率谱密度函数 S_f ，而需要求得响应过程的统计参数： μ_s 、 R_s 与 S_s 。

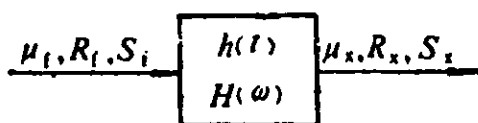


图 5.3-1

等。需要强调的是，我们的策略是直接由激励的统计参数求出响应的统计参数，即在高一级的层次上直接进行计算，如图 5.3-1

所示，而不是去计算系统对于各个激励样本的响应。

5.3.1 激励 $\{f_k(t)\}$ 的 μ_f 、 R_f 、 S_f 与响应 $\{x_k(t)\}$ 的 μ_x 、 R_x 、 S_x 之间的关系

1. 均值

设平稳随机过程 $\{f_k(t)\}$ 的均值为 μ_f ，线性系统的脉冲响应函数为 $h(t)$ 。 $\{f_k(t)\}$ 的每一个样本函数 $f_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$) 作用在该系统上，均会有一个确定的响应，

$$x_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) f_k(t-\lambda) d\lambda \quad (k=1, 2, \dots), \quad (5.3-1)$$

所有的 $x_k(t)$ 组成一个响应的随机过程 $\{x_k(t)\}$ ，其均值为

$$\begin{aligned} \mu_x &= E(x_k(t)) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) f_k(t-\lambda) d\lambda\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) E[f_k(t-\lambda)] d\lambda, \end{aligned} \quad (5.3-2)$$

由于 $\{f_k(t-\lambda)\}$ 是平稳随机过程，故

$$E[f_k(t-\lambda)] = E[f_k(t)] = \mu_f,$$

而(5.3-2)式成为

$$\mu_x = \mu_f \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda. \quad (5.3-3)$$

但由(2.4-17)式知

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda = H(0),$$

式中 $H(0)$ 是系统的频率响应函数 $H(\omega)$ 当 $\omega=0$ 时的值，即静态放大系数，代入(5.3-3)式，得

$$\mu_x = H(0)\mu_f. \quad (5.3-4)$$

这表明平稳随机过程作用在线性系统上，其响应的均值 μ_x 也是与时间无关的常数，而且等于系统的静态放大系数 $H(0)$ 与激励过程的均值 μ_f 之乘积。特殊地，当 $\mu_f = 0$ 时，亦有 $\mu_x = 0$ 。

2. 自相关函数

响应的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_x(\tau) &= E[x_x(t)x_x(t+\tau)] \\&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)f_x(t-\lambda_1)d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2)f_x(t+\tau-\lambda_2)d\lambda_2\right] \\&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)f_x(t-\lambda_1)f_x(t+\tau-\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2\right] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)E[f_x(t-\lambda_1)f_x(t+\tau-\lambda_2)]d\lambda_1d\lambda_2\end{aligned}$$

由于 $\{f_x(t)\}$ 是平稳的, 故

$$\begin{aligned}E[f_x(t-\lambda_1)f_x(t+\tau-\lambda_2)] &= E[f_x(t)f_x(t+\tau+\lambda_1-\lambda_2)] \\&= R_f(\tau+\lambda_1-\lambda_2)\end{aligned}$$

代入上式, 得

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_f(\tau+\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2 \quad (5.3-5)$$

我们注意到 $R_x(\tau)$ 仅由时移 τ 决定, 而与时间起点 t 无关。

(5.3-4)、(5.3-5)两式表明, 如果激励是平稳随机过程, 则响应也是平稳随机过程。

3. 功率谱密度函数

响应的功率谱密度函数可计算如下

$$\begin{aligned}S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_f(\tau+\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2 \right] d\tau\end{aligned} \quad (5.3-6)$$

但

$$R_s(\tau + \lambda_1 - \lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega(\tau + \lambda_1 - \lambda_2)} d\omega,$$

将此式代入(5.3-6)式, 得

$$\begin{aligned} S_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) h(\lambda_2) \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega(\tau + \lambda_1 - \lambda_2)} d\omega \right] d\lambda_1 d\lambda_2 \left. \right\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) e^{i\omega\lambda_1} d\lambda_1 \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2) e^{-i\omega\lambda_2} d\lambda_2 \right] e^{i\omega\tau} d\omega \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (5.3-7)$$

可是

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) e^{i\omega\lambda_1} d\lambda_1 &= H(-\omega) = H^*(\omega), \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2) e^{-i\omega\lambda_2} d\lambda_2 &= H(\omega), \end{aligned}$$

代入(5.3-7)式, 得

$$\begin{aligned} S_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) H^*(\omega) \right. \\ &\quad \times H(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \left. \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) |H(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega \right] d\tau, \end{aligned} \quad (5.3-8)$$

将上式与(5.3-6)式的第一个等式比较, 有

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) |H(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (5.3-9)$$

此式将激励的 $S_f(\omega)$ 与响应的 $R_s(\tau)$ 联系起来。另一方面, 我们又应该有

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (5.3-10)$$

与(5.3-9)式比较, 即得

$$S_r(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (5.3-11)$$

此式将响应的功率谱密度与激励的功率谱密度联系起来。

令(5.3-9)式中的 $\tau = 0$, 即得响应的均方值

$$\psi_r^2 = R_r(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (5.3-12)$$

(5.3-4)、(5.3-5)与(5.3-11)三式分别将响应的 μ_r 、 $R_r(\tau)$ 、 $S_r(\omega)$ 与激励的 μ_f 、 $R_f(\tau)$ 、 $S_f(\omega)$ 直接地、一对一地联系起来, 这表明对于线性系统来说, 我们可以撇开个别的样本函数, 而直接在统计参数的总体层次上进行分析与计算。

还可证明, 如果激励过程是各态历经的, 那么响应也是各态历经的, 如果激励是正态过程, 则响应也是正态过程。

5.3.2 单自由度线性振动系统对于随机激励的响应

现在我们设线性系统是一个单自由度的振动系统, 其运动方程为

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 f(t). \quad (5.3-13)$$

设激励 $f(t)$ 为各态历经的正态白噪声, 其均值为 μ_f , 自相关函数为 $R_f(\tau) = S_0 \delta(\tau)$, 功率谱密度函数为 $S_f(\omega) = S_0$ 。由前所述, 响应亦应为各态历经的正态过程, 如果能求出其 μ_r 与 ψ_r 即可确定其概率分布与统计特性。

由于激励的 μ_f 相当于一恒力, 仅使系统产生一静态位移 μ_r , 可以将之分开处理。因此, 不失一般性, 可以假设激励与响应都是零均值的。

已知单自由度系统的频率响应特性的模方为

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (5.3-14)$$

而其图形如图5.3-2所示。由(5.3-11)式即得响应的功率谱密度函数为

$$S_e(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega) = \frac{S_0}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (5.3-15)$$

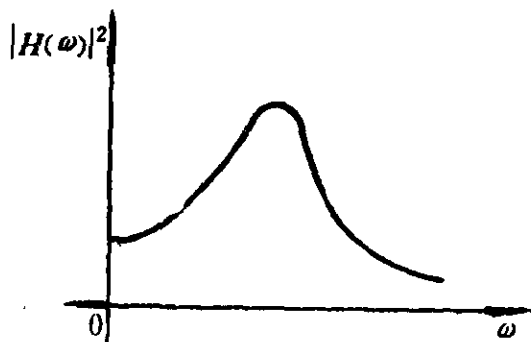


图 5.3-2

其图形如图5.3-3所示。值得注意的是白噪声通过一个线性系统

以后，不再是白噪声了，而成为一种窄带噪声，或者形象地说，一种“粉红噪声”。从这个意义上讲，线性系统象一个“染缸”，可以将通过它的信号染上“粉红色”。

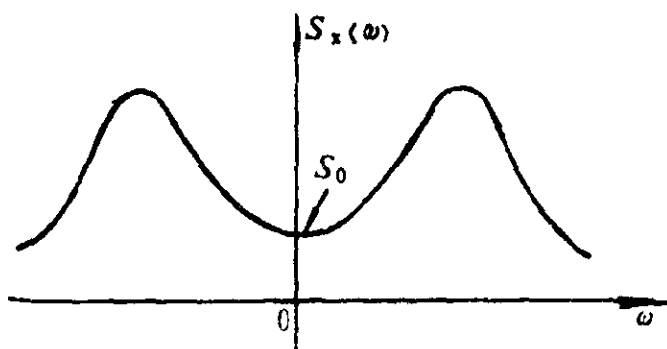


图 5.3-3

按(5.3-12)式，可计算均方值

$$\begin{aligned} \psi_e^2 = R_e(0) &= \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ &= \frac{S_0 \omega_n}{4\xi}. \end{aligned} \quad (5.3-16)$$

完成以上积分需要一些技巧。我们也可以先求 $R_e(\tau)$ ，然后再由 $R_e(0)$ 求 ψ_e^2 。已知单自由度系统的脉冲响应函数为

$$h(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_d t u(t), \quad (5.3-17)$$

(5.3-17)式与(2.4-8)式两者所表示的 $h(t)$ 差一个“ k ”的因子, 这是对激励的定义不同的缘故, 前者用的是 $F(t)$ (见2.4-10式), 后者用的是 $f(t)$ (见5.3-13式), 其间关系为 $F(t) = kf(t)$ (见2.1-1式)。按(5.3-5)式, 有

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \frac{S_0 \omega_s^4}{\omega_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau + \lambda_1 - \lambda_2) e^{-t \omega_s (\lambda_1 + \lambda_2)} \sin \omega_s \lambda_1 \\ &\quad \times \sin \omega_s \lambda_2 u(\lambda_1) u(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \frac{S_0 \omega_s^4}{\omega_s^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(\tau + \lambda_1 - \lambda_2) e^{-t \omega_s (\lambda_1 + \lambda_2)} \sin \omega_s \lambda_1 \\ &\quad \times \sin \omega_s \lambda_2 d\lambda_1 d\lambda_2, \end{aligned} \quad (5.3-18)$$

先假定 $\tau > 0$, 并利用 δ -函数的筛性质, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x) f(x) dx = f(x_0), \quad (5.3-19)$$

可将(5.3-18)式中对 λ_2 的积分积出来,

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \frac{S_0 \omega_s^4}{\omega_s^2} \int_0^{\infty} e^{-t \omega_s (\tau + 2\lambda_1)} \sin \omega_s \lambda_1 \sin \omega_s (\tau + \lambda_1) d\lambda_1 \\ &= \frac{S_0 \omega_s^4}{\omega_s^2} e^{-t \omega_s \tau} (\sin \omega_s \tau \int_0^{\infty} e^{-2t \omega_s \lambda_1} \sin \omega_s \lambda_1 \cos \omega_s \\ &\quad \times \lambda_1 d\lambda_1 + \cos \omega_s \tau \int_0^{\infty} e^{-2t \omega_s \lambda_1} \sin^2 \omega_s \lambda_1 d\lambda_1) \end{aligned}$$

利用积分表, 可得上式积分的结果。

$$R_s(\tau) = \frac{S_0 \omega_s}{4\xi} e^{-t \omega_s \tau} \left[\cos \omega_s \tau + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_s \tau \right] \quad (\tau > 0), \quad (5.3-20)$$

再利用 $R_s(-\tau) = R_s(\tau)$ 这点, 可写出

$$R_s(\tau) = \frac{S_0 \omega_s}{4\xi} e^{-t \omega_s |\tau|} \left[\cos \omega_s \tau - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_s \tau \right] \quad (\tau < 0). \quad (5.3-21)$$

其图形如图5.3-4所示, 是典型的窄带过程的自相关函数。该曲线与纵轴的交点, 给出均方值

$$\psi_s^2 = R(0) = \frac{S_0 \omega_s}{4\xi} \quad (5.3-22)$$

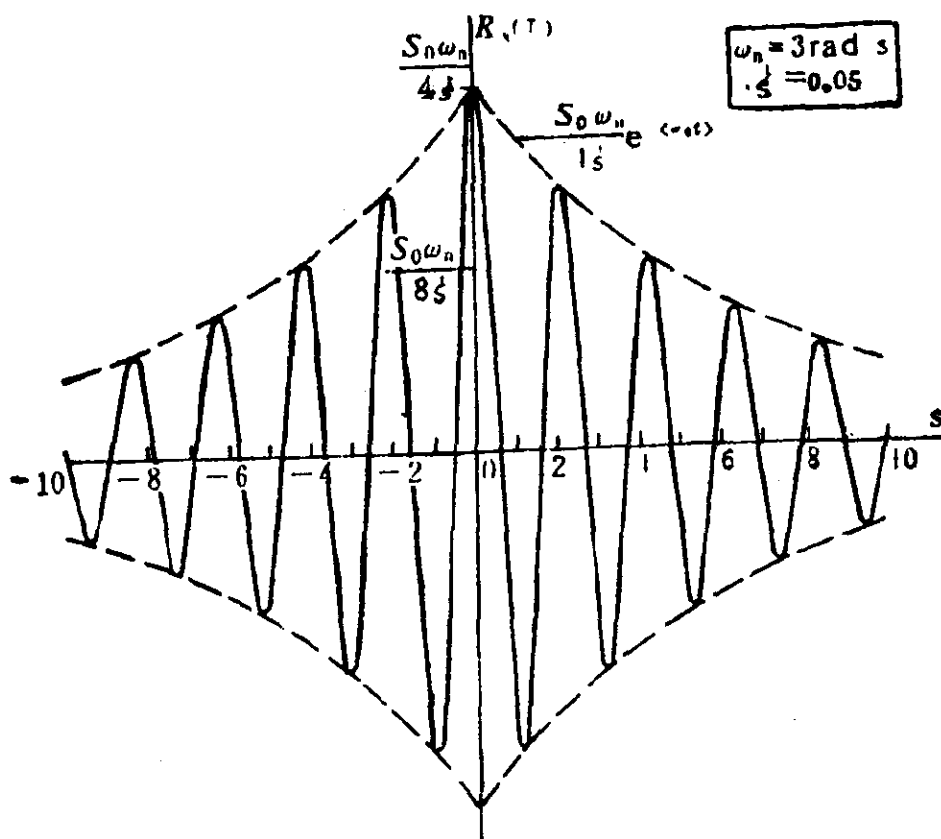


图 5.3-4

试比较激励 $f(t)$ 的自相关函数 $R_f(\tau)$ 与响应 $x(t)$ 的自相关函数 $R_s(\tau)$ 。前者为 δ -函数，当 $\tau \neq 0$ 时， $R_f(\tau) = 0$ ，表示其前后信号之间毫无统计相关性。可是通过系统以后， $x(t)$ 信号获得了明显的自相关性，当 $\tau \neq 0$ 时，除部分点外， $R_s(\tau) \neq 0$ 。这种相关性是由于系统本身的惯性引起的。系统的惯性使得其输出过程具有一定规律与前后联系，而不可能象白噪声那样变化无常。图 5.3-4 中 $R_s(\tau)$ 曲线的包络线（虚线）的方程为

$$y = \frac{S_0 \omega_n}{4\xi} e^{-\xi \omega_n \tau} \quad (5.3-23)$$

显然，如果系统的质量 m 愈大，即惯性愈大，则 ω_n 愈小，包络线衰减愈慢，而这表明 $x(t)$ 信号的前后相关性愈强。

§ 5.4 随机过程的联合性质

上面所讲的 $P(x_1, t_1)$ 或 $p(x_1, t_1)$ 反映了一个随机过程在任何时刻取值的概率分布函数或概率密度函数, 这些均属于随机过程的一次概率特性. 读者千万不要误解, 以为掌握了一次概率就穷尽了一个随机过程的全部统计特性. 其实, 为了进一步了解随机过程的统计特性, 我们还应该了解它在不同时刻取值的联合分布特性, 其中包括二次概率与高次概率. 由于高次概率用得不多, 本书只讲解二次概率.

5.4.1 随机过程的二次概率

1. 定义

一个随机过程 $\{x_r(t)\}$ 在 t_1, t_2 时刻的联合二次概率分布函数定义为

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2) = P_{r.o.s.}[x_r(t_1) < x_1, \text{ 且 } x_r(t_2) < x_2]. \quad (5.4-1)$$

更一般地是就两个随机过程 $\{x_r(t)\}, \{y_s(t)\}$ 来定义联合二次概率分布函数,

$$P(x_1, t_1; y_2, t_2) = P_{r.o.s.}[x_r(t_1) < x_1, \text{ 且 } y_s(t_2) < y_2]. \quad (5.4-2)$$

如果过程是平稳的, 则分布函数仅与时移 $\tau = t_2 - t_1$ 有关, 而可写成 $P(x_1, y_2; \tau)$.

二次概率密度函数则定义为

$$p(x_1, t_1; y_2, t_2) = \frac{\partial P(x_1, t_1; y_2, t_2)}{\partial x_1 \partial y_2}, \quad (5.4-3)$$

$x_r(t_1)$ 的取值 $x, y_s(t_2)$ 的取值 y , 正好落在图5.4-1所示的有阴影的矩形中的概率为

$$\begin{aligned}
 & P_{\dots}[(x, y) \in ABCD] \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p(\xi, t_1; \zeta, t_2) d\xi d\zeta.
 \end{aligned}
 \tag{5.4-4}$$

二次概率的归一化条件为

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; y_2, t_2) \\
 & \times dx_1 dy_2 = 1.
 \end{aligned}
 \tag{5.4-5}$$

2. 二次概率与一次概率之间的关系

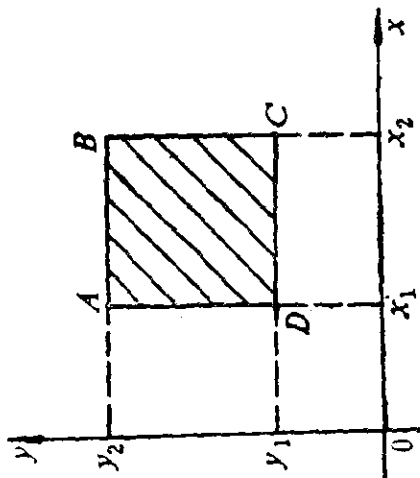


图 5.4-1

已知二次概率可以求得其一次概率，

$$\begin{aligned}
 P(x_1, t_1) &= P_{\dots}(\{x_r(t_1) < x_1\}) = P_{\dots}(\{x_r(t_1) < x, \text{ 且} \\
 & y_r(t_2) < \infty\}) = P(x_1, t_1; \infty, t_2) \\
 &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, t_1; \zeta, t_2) d\zeta d\xi.
 \end{aligned}$$

记

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, t_1; \zeta, t_2) d\zeta = p(\xi, t_1),
 \tag{5.4-6}$$

上式成为

$$P(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p(\xi, t_1) d\xi.$$

与(5.2-17)式比较，可见(5.4-6)式右端即为 $\{x_r(t_1)\}$ 的一次概率密度函数。类似地，对于 $\{y_r(t_2)\}$ 的一次概率分布函数有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, t_1; \zeta, t_2) d\xi = p(\zeta, t_2).$$

我们将积分变量 ξ 、 ζ 换回为 x_1 、 y_2 ，得

$$\begin{aligned}
 p(x_1, t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; y_2, t_2) dy_2; \\
 p(y_2, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; y_2, t_2) dx_1.
 \end{aligned}
 \tag{5.4-7}$$

此即所谓“边缘概率”。

反之，即使已知一次概率 $p(x_1, t_1)$ 与 $p(y_2, t_2)$ ，一般也仍然

无法求出联合分布 $p(x_1, t_1; y_2, t_2)$ ，除非我们假定以下关系成立：

$$p(x_1, t_1; y_2, t_2) = p(x_1, t_1)p(y_2, t_2), \quad (5.4-8)$$

这时我们称随机过程 $\{x_i(t)\}$ 与 $\{y_i(t)\}$ 是统计独立的。

5.4.2 平稳过程的相关函数与协方差

1. 自相关函数

(5.2-2)式按总体平均给出了随机过程 $\{x_i(t)\}$ 的自相关函数的定义，这里我们以二次概率密度函数来定义这一统计参数，我们假设过程是平稳的，有

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E(x_i(t_1)x_i(t_2)) = E(x_1x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (5.4-9)$$

式中 $x_1 = x_i(t_1)$ ， $x_2 = x_i(t_2)$ 是随机变量。同理，对随机过程 $\{y_i(t)\}$ 有

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1y_2 p(y_1, y_2; \tau) dy_1 dy_2. \quad (5.4-10)$$

2. 互相关函数

互相关函数表示两个随机过程分别在不同时刻取值之间的统计相关性，它定义为

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E(x_i(t_1)y_i(t_2)) = E(x_1y_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1y_2 p(x_1, y_2; \tau) dx_1 dy_2. \end{aligned} \quad (5.4-11)$$

式中 $x_1 = x_i(t_1)$ ， $y_2 = y_i(t_2)$ 是两个随机变量。

以上 $R_x(\tau)$ 、 $R_y(\tau)$ 与 $R_{xy}(\tau)$ 为二阶原点矩。

我们在5.2.3小节介绍了自相关函数的性质，这里我们介绍互相关函数的主要性质，但是也不加证明，读者可以从有关书籍[1.4]中找到有关的证明。

与(5.2-10a)式对应的性质是

$$R_{xy}(-\tau) = R_{xy}(\tau), \quad (5.4-12)$$

由此可见，互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 一般不再是偶函数。

与(5.2-10b)式对应的有两个等式，

$$\frac{1}{2}(R_x(0) + R_y(0)) \geq |R_{xy}(\tau)|, \quad (5.4-13)$$

$$\sqrt{R_x(0)R_y(0)} \geq |R_{xy}(\tau)|. \quad (5.4-14)$$

以上两式表明 $R_x(0)$ 、 $R_y(0)$ 的算术平均数与几何平均数均不小于 $|R_{xy}(\tau)|$ 。

如果过程 $\{x_i(t)\}$ 、 $\{y_i(t)\}$ 是各态历经的，则互相关函数可以以时间平均来代替总体平均，即

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)y(t+\tau)dt, \quad (5.4-15)$$

这里 $x(t)$ 、 $y(t+\tau)$ 分别是 $\{x_i(t)\}$ 、 $\{y_i(t)\}$ 的代表性样本函数。

3. 协方差函数

平稳随机过程 $\{x_i(t)\}$ 、 $\{y_i(t)\}$ 的协方差函数是一种二阶中心矩，其定义如下：

$$\begin{aligned} C_x(\tau) &= E\{(x_1 - \mu_x)(x_2 - \mu_x)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_x)(x_2 - \mu_x) p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (5.4-16)$$

式中 $x_1 = x_i(t_1)$ ， $x_2 = x_i(t_2)$ 是随机变量。可以证明

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2. \quad (5.4-17)$$

同理有

$$\begin{aligned} C_y(\tau) &= E\{(y_1 - \mu_y)(y_2 - \mu_y)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y_1 - \mu_y)(y_2 - \mu_y) p(y_1, y_2; \tau) dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (5.4-18)$$

式中 $y_1 = y_i(t_1)$ ， $y_2 = y_i(t_2)$ 是随机变量。且有

$$C_y(\tau) = R_y(\tau) - \mu_y^2, \quad (5.4-19)$$

以上是自协方差函数，以下是互协方差函数，

$$C_{xy}(\tau) = E\{(x_1 - \mu_x)(y_2 - \mu_y)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) p(x_1, y_2; \tau) dx_1 dy_2, \quad (5.4-20)$$

且有

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y. \quad (5.4-21)$$

如果对于所有的 τ , 恒有

$$C_{xy}(\tau) \equiv 0, \quad (5.4-22)$$

则称两随机过程 $\{x_i(t)\}$ 与 $\{y_i(t)\}$ 是不相关的。

须提醒读者注意, 这里的“不相关”的概念与(5.4-8)式定义的“统计独立”的概念是不相同的。(5.4-22)式是对统计参数 $C_{xy}(\tau)$ 下的定义, 它是一种积分效果, 而(5.4-8)式则是对概率密度函数的具体取值下的定义。(5.4-8)式的定义比(5.4-22)式要严格得多。事实上, (5.4-8)式如成立, 则(5.4-22)式一定成立, 这一点可证明如下:

将(5.4-8)式代入(5.4-20)式, 得

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) p(x_1, t_1) p(y_2, t_2) dx_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_x) p(x_1, t_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} (y_2 - \mu_y) p(y_2, t_2) dy_2, \end{aligned}$$

对于右端第一个积分有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_x) p(x_1, t_1) dx_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1, t_1) dx_1 \\ &\quad - \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1) dx_1 = \mu_x - \mu_x = 0. \end{aligned}$$

同理, 第二个积分也为零。因而 $C_{xy}(\tau) \equiv 0$, 证毕。

反之, 由(5.4-22)式成立, 却无法推出(5.4-8)式也成立。

4. 标准化的协方差函数

互相关函数的一项性质, 即(5.4-14)式, 对于协方差函数 $C_{xy}(\tau)$ 也成立, 即有

$$\sqrt{C_{xx}(0)} \sqrt{C_{yy}(0)} \geq |C_{xy}(\tau)|, \quad (5.4-23)$$

可是由定义(5.4-16)、(5.4-18)式可知

$$\sqrt{C_x(0)} = \sigma_x, \quad \sqrt{C_y(0)} = \sigma_y, \quad (5.4-24)$$

σ_x, σ_y 分别为 $\{x_r(t)\}$ 、 $\{y_r(t)\}$ 的标准差。代入(5.4-23)式, 得

$$\sigma_x \sigma_y \geq |C_{xy}(\tau)|, \quad (5.4-25)$$

以 $\sigma_x \sigma_y$ 除 $C_{xy}(\tau)$, 得到标准化的协方差,

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (5.4-26)$$

由(5.4-25)式知

$$-1 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq 1. \quad (5.4-27)$$

$\rho_{xy} \approx -1, +1, 0$ 的条件下, $x_1(t_1) = x_1, y_2(t_2) = y_2$ 取值在 (x_1, y_2) 平面上分布的情况分别如图5.4-2(a)、(b)、(c)所示。

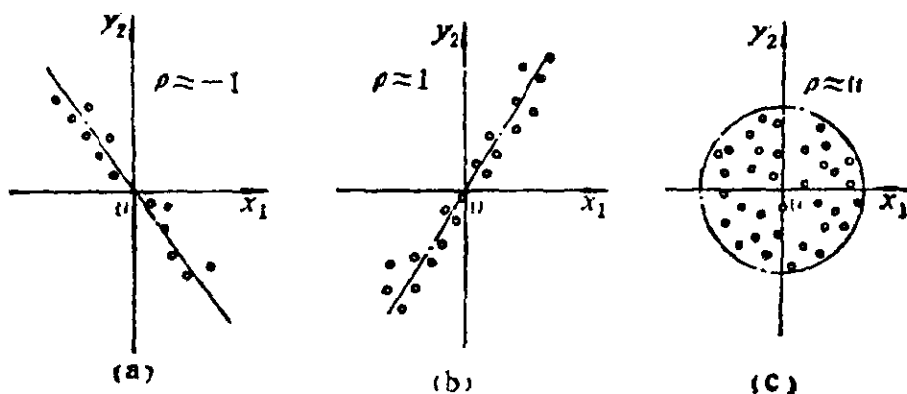


图 5.4-2

5.4.3 二维正态分布

平稳随机过程二次概率分布的一个常用模型是二维正态分布, 其概率密度函数为

$$p(x_1, y_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho_{xy}^2(\tau)}} \cdot \left[\left(\frac{x_1-\mu_x}{\sigma_x}\right) - 2\rho_{xy}(\tau)\frac{x_1-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y_2-\mu_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y_2-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}. \quad (5.4-28)$$

式中 $\exp(x)$ 表示 e^x 。

值得注意的是, 对于二维正态分布来说, “不相关”与“统计独立”这两个概念其实是等价的。为了证明这一点, 只需要由

(5.4-22)式证明出(5.4-8)式即可。由(5.4-26)式知，(5.4-22)式相当于 $\rho_{xy}(\tau) = 0$ ，代入(5.4-28)式，有

$$\begin{aligned} p(x_1, y_2; \tau) &= p(x_1, t_1; y_2, t_2) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{x_1 - \mu_x}{2\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - \mu_y}{2\sigma_y} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{(x_1 - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ - \frac{(y_2 - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right\}. \end{aligned}$$

由(5.2-23)式，得

$$p(x_1, t_1; y_2, t_2) = p(x_1, t_1)p(y_2, t_2).$$

此即(5.4-8)式，证毕。

5.4.4 互功率谱密度函数

两个平稳随机过程 $\{x_i(t)\}$ 、 $\{y_i(t)\}$ 的互功率谱密度函数(cross-power spectral density function)定义为其互相关函数的Fourier变换。

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (5.4-29)$$

而其逆变换关系为

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.4-30)$$

由于 $R_{xy}(\tau)$ 并不是偶函数，因此 $S_{xy}(\omega)$ 一般为复数。可以证明以下关系成立^[1,4]，

$$S_{xy}^*(\omega) = S_{yx}(\omega), \quad (5.4-31)$$

$$S_{xy}(-\omega) = S_{yx}(\omega). \quad (5.4-32)$$

互功率谱密度函数往往又简称为“互谱”。

§ 5.5 多自由度系统对于随机激励的响应

基于上一节关于随机过程的联合性质的知识，现在我们可以进一步来讨论多自由度系统对于随机激励的响应。

5.5.1 两个单自由度系统的激励与响应之间的联合性质

设有两个线性系统，如图5.5-1所示，其脉冲响应函数分别为 $h_r(t)$ 、 $h_s(t)$ ，频率响应函数分别为 $H_r(\omega)$ 、 $H_s(\omega)$ ，其激励的随机过程分别为 $\{f_r(t)\}$ 、 $\{f_s(t)\}$ ，而响应的随机过程分别为 $\{q_r(t)\}$ 、 $\{q_s(t)\}$ ，这里假设各随机过程均为各态历经的。

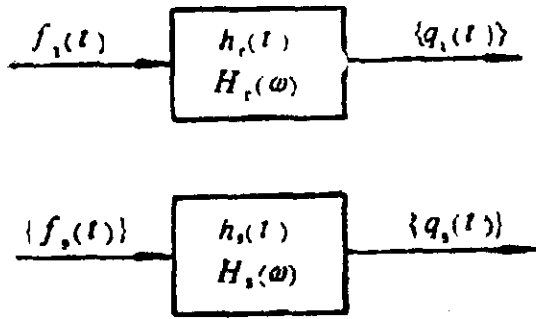


图 5.5-1

两系统的响应的互相关函数为

$$R_{q_r, q_s}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q_r(t) q_s(t + \tau) dt, \quad (5.5-1)$$

而

$$q_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\lambda_r) f_r(t - \lambda_r) d\lambda_r, \quad (5.5-2)$$

$$q_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_s(\lambda_s) f_s(t - \lambda_s) d\lambda_s, \quad (5.5-3)$$

代入(5.5-1)式，得

$$R_{q_r, q_s}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_r(\lambda_r) f_r(t - \lambda_r) d\lambda_r \right] \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_s(\lambda_s) f_s(t + \tau - \lambda_s) d\lambda_s \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\lambda_r) h_s(\lambda_s) \\
&\quad \times \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_r(t - \lambda_r) f_s(t + \tau - \lambda_s) dt \right] d\lambda_r d\lambda_s,
\end{aligned}
\tag{5.5-4}$$

由于过程是各态历经的，因而也是平稳的，因而被积函数的时间可以平移，而并不会影响上式方括号中的积分结果，即

$$\begin{aligned}
&\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_r(t - \lambda_r) f_s(t + \tau - \lambda_s) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_r(t) f_s(t + \tau + \lambda_r - \lambda_s) dt \\
&= R_{f_r, f_s}(\tau + \lambda_r - \lambda_s).
\end{aligned}
\tag{5.5-5}$$

代入(5.5-4)式，得两系统的响应的互相关函数与激励的互相关函数之间的关系式，

$$R_{f_r, f_s}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\lambda_r) h_s(\lambda_s) R_{f_r, f_s}(\tau + \lambda_r - \lambda_s) d\lambda_r d\lambda_s.
\tag{5.5-6}$$

当 $r = s$ 时，上式退化为前面已经得到的(5.3-5)式。

以下计算两系统的响应的互功率谱密度函数。为此，对(5.5-6)式取Fourier变换

$$\begin{aligned}
S_{f_r, f_s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_r, f_s}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_r(\lambda_r) h_s(\lambda_s) R_{f_r, f_s}(\tau + \lambda_r - \lambda_s) d\lambda_r d\lambda_s \right] d\tau,
\end{aligned}
\tag{5.5-7}$$

上式中 $R_{f_r, f_s}(\tau + \lambda_r - \lambda_s)$ 可以表达为激励的互功率谱的Fourier逆变换，即

$$R_{f_r, f_s}(\tau + \lambda_r - \lambda_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{f_r, f_s}(\omega) e^{i\omega(\tau + \lambda_r - \lambda_s)} d\omega.
\tag{5.5-8}$$

代入(5.5-7)式,并考虑到脉冲响应函数 $h_r(t)$ 、 $h_s(t)$ 与相应的频率响应函数 $H_r(\omega)$ 、 $H_s(\omega)$ 之间的关系,有

$$H_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_r(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (5.5-9)$$

$$H_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_s(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (5.5-10)$$

得

$$\begin{aligned} S_{r,r}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\lambda_r) h_s(\lambda_s) \right. \\ &\quad \times \left. \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{f,f}(\omega) e^{i\omega(\tau+\lambda_r-\lambda_s)} d\omega \right] d\lambda_r d\lambda_s \right\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{f,f}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_r(\lambda_r) e^{i\omega\lambda_r} d\lambda_r \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} h_s(\lambda_s) e^{-i\omega\lambda_s} d\lambda_s \right] e^{i\omega\tau} d\omega \right\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{f,f}(\omega) H_r^*(\omega) H_s(\omega) e^{i\omega\tau} \right. \\ &\quad \times \left. d\omega \right] d\tau, \quad (5.5-11) \end{aligned}$$

将此式最后一个等式与(5.5-7)式第一个等式比较,得

$$R_{r,r}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{f,f}(\omega) H_r^*(\omega) H_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (5.5-12)$$

此为 $R_{r,r}(\tau)$ 与 $S_{f,f}(\omega)$ 之间的关系。

另一方面,由于 $R_{r,r}(\tau)$ 应该是 $S_{r,r}(\omega)$ 的Fourier逆变换,即

$$R_{r,r}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{r,r}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (5.5-13)$$

将此式与(5.5-12)式比较,得

$$S_{r,r}(\omega) = H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{f,f}(\omega), \quad (5.5-14)$$

此即两系统的响应的互功率谱与激励的互功率谱之间的关系。

当 $r = s$ 时，上式退化为前面已经得到的(5.3-11)式。

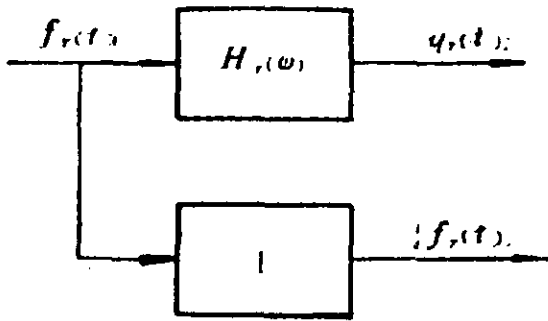


图 5.5 2

(5.5-14)式的一个很有用的特例是当 $\{f_r(t)\} = \{f_s(t)\}$ ，且 $H_r(\omega) \equiv 1$ 时，如图5.5-2所示。

此时(5.5-14)式成为

$$S_{q_r, q_r}(\omega) = H_r^*(\omega) S_{f_r, f_r}(\omega), \quad (5.5-15a)$$

或者按(5.4-31)式对上式取复共轭 有

$$S_{f_r, f_r}(\omega) = H_r(\omega) S_{q_r, q_r}(\omega). \quad (5.5-15b)$$

上式表示一个系统的激励谱与其激励和响应的互谱之间的关系。

5.5.2 多自由度系统对随机激励的响应

在分析多自由度系统对于随机激励的响应时，我们仍然要用到第四章讲到的关于“解耦”的知识和方法。设系统的运动方程为

$$\{m\}\ddot{\{x(t)\}} + \{c\}\dot{\{x(t)\}} + \{k\}\{x(t)\} = \{p(t)\}, \quad (5.5-16)$$

式中 $\{x(t)\}$ 为位移向量， $\{p(t)\}$ 为激励向量。还假定已经对相应的无阻尼系统进行了模态分析，而经正规化的模态矩阵为，

$$\{u\} = (\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\}), \quad (5.5-17)$$

对之作线性变换，由物理坐标 $\{x(t)\}$ 变到广义坐标 $\{q(t)\}$ ，有

$$\{x(t)\} = \{u\}\{q(t)\}. \quad (5.5-18)$$

由于模态向量的正交性，新的质量矩阵和刚度矩阵被对角化，

$$\{M\} = \{u\}^T \{m\} \{u\} = \{1\}, \quad (5.5-19)$$

$$\{K\} = \{u\}^T \{k\} \{u\} = \begin{bmatrix} \omega^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega^2 \end{bmatrix}, \quad (5.5-20)$$

而假定新的阻尼矩阵亦为对角矩阵，

$$\{C\} = \{u\}^T \{c\} \{u\} = \begin{bmatrix} 2\xi\omega & & \\ & \ddots & \\ & & 2\xi\omega \end{bmatrix} \quad (5.5-21)$$

于是(5.5-16)式可化为

$$\begin{aligned} (1)\{\ddot{q}(t)\} + \{2\xi\omega\}\{\dot{q}(t)\} + [\omega^2]\{q(t)\} \\ = [\omega^2][\omega^2]^{-1}(u)^T\{p(t)\}, \end{aligned} \quad (5.5-22)$$

记

$$[\omega^2]^{-1}(u)^T\{p(t)\} = \{f(t)\} = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}^T, \quad (5.5-23)$$

可将(5.5-22)式写成 n 个独立的运动方程

$$\ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2q_r(t) = \omega_r^2f_r(t) \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad (5.5-24)$$

式中

$$f_r(t) = \frac{1}{\omega_r}\{u^{(r)}\}^T\{p(t)\} = \frac{1}{\omega_r^2}\sum_{i=1}^n u_i^{(r)}p_i(t) \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad (5.5-25)$$

是广义力。于是(5.5-24)式的每一个方程相当于一个独立的单自由度系统，如图 5.5-3 所示。图中频率响应特性为：

$$\begin{aligned} H_r(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2 + i2\xi_r\frac{\omega}{\omega_r}} \\ (r=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.5-26)$$

激励和响应的 Fourier 变换为：

$$\begin{aligned} F_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)e^{-i\omega t} dt \\ (r=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (5.5-27)$$

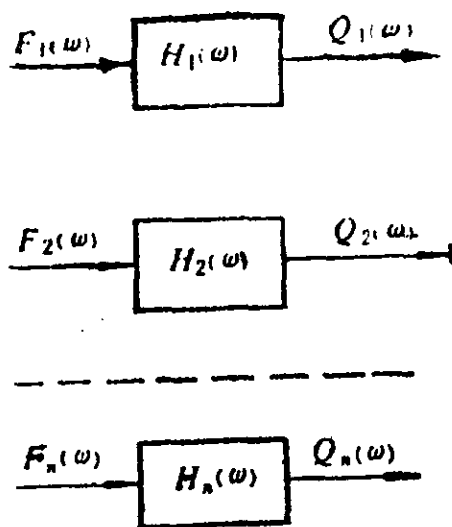


图 5.5-3

$$Q_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q_r(t)e^{-i\omega t} dt \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad (5.5-28)$$

而激励和响应之间的关系为

$$Q_r(\omega) = H_r(\omega)F_r(\omega) \quad (r=1,2,\dots,n). \quad (5.5-29)$$

如果激励向量 $\{p(t)\} = \{p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)\}^T$ 的每一个分量都为确定的函数，那么以上所述，完全是重复与归纳第四章讲的内容，并无任何新的东西。现在我们假定 $p_r(t)$ ($r=1,2,\dots,n$) 是一个各态历经的随机过程，而且具有零均值和正态分布，因此 $f_r(t)$ 、 $x_r(t)$ 与 $q_r(t)$ ($r=1,2,\dots,n$) 亦均为各态历经的、零均值的、正态分布的随机过程。

我们知道，对于一个零均值的正态随机过程来说，它的相关函数或者功率谱密度函数就可完全地描绘其统计特性。因此，我们在求解多自由度系统对于随机激励的响应时，目的就在于由激励 $p_r(t)$ ($r=1,2,\dots,n$) 的相关函数或功率谱计算出响应 $x_r(t)$ ($r=1,2,\dots,n$) 的相关函数或功率谱。由于问题涉及到多个随机过程之间的互相关与自相关函数、互谱与自谱，我们采用矩阵的形式，以便将推导过程与结果表达成紧凑的形式。

1. 坐标变换关系

响应的物理坐标相关矩阵定义为

$$\{R_x(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{x(t)\} \{x(t+\tau)\}^T dt, \quad (5.5-30)$$

这里 $\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T$ 表示向量，其中每一分量为一随机过程。读者需理解，如此定义的 $\{R_x(\tau)\}$ 是 $n \times n$ 矩阵，

$$\{R_x(\tau)\} = \{R_{x_i, x_j}(\tau)\},$$

其中

$$R_{x_i, x_j} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) x_j(t+\tau) dt \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (5.5-31)$$

对以下的其它统计参数矩阵也应作同样理解。

响应的广义坐标相关矩阵定义为

$$\{R_q(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{q(t)\} \{q(t+\tau)\}^T dt, \quad (5.3-32)$$

$\{R_s(\tau)\}$ 与 $\{R_r(\tau)\}$ 之间通过坐标变换矩阵, 即模态矩阵 $\{u\}$ 相联系,

$$\{R_s(\tau)\} = \{u\}\{R_r(\tau)\}\{u\}^T. \quad (5.5-33)$$

物理力的相关矩阵定义为

$$\{R_p(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{p(t)\}\{p(t+\tau)\}^T dt. \quad (5.5-34)$$

广义力的相关矩阵定义为

$$\{R_f(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{f(t)\}\{f(t+\tau)\}^T dt, \quad (5.5-35)$$

两者之间也存在坐标变换关系

$$\{R_f(\tau)\} = \left[\begin{array}{c} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{array} \right]^{-1} \{u\}^T \{R_p(\tau)\} \{u\} \left[\begin{array}{c} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{array} \right]^{-1}. \quad (5.5-36)$$

2. Fourier变换关系

响应的物理坐标相关矩阵经Fourier变换即得到响应的物理坐标的功率谱矩阵

$$\{S_s(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{R_s(\tau)\} e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (5.5-37)$$

此式代表 $n \times n$ 个变换式:

$$S_{s_i, s_j}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_i, s_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (5.5-38)$$

(5.5-37)式的逆变换为

$$\{R_s(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_s(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.5-39)$$

类似地, 在 $\{R_s(\tau)\}$ 与 $\{S_s(\omega)\}$ 、 $\{R_r(\tau)\}$ 与 $\{S_r(\omega)\}$ 、 $\{R_f(\tau)\}$ 与 $\{S_f(\omega)\}$ 之间都存在Fourier正、逆变换的关系:

$$\{S_s(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{R_s(\tau)\} e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (5.5-40)$$

$$\{R_s(\tau)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_s(\omega)\} e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (5.5-41)$$

$$\{S_r(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{R_r(\tau)\} e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (5.5-42)$$

$$\{R_r(\tau)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_r(\omega)\} e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (5.5-43)$$

$$\{S_f(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_f(\tau)\} e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (5.5-44)$$

$$\{R_f(\tau)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_f(\omega)\} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.5-45)$$

将(5.5-37)、(5.5-39)~(5.5-45)这一组公式与(5.5-33)、(5.5-36)式结合起来,即可得出 $\{S_r(\omega)\}$ 与 $\{S_s(\omega)\}$ 之间、 $\{S_f(\omega)\}$ 与 $\{S_s(\omega)\}$ 之间的坐标变换关系。事实上,以(5.5-33)式代入(5.5-37)式,得

$$\begin{aligned} \{S_s(\omega)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{u\} \{R_r(\tau)\} \{u\}^T e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \{u\} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \{R_r(\tau)\} e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \{u\}^T, \end{aligned}$$

$\{u\}$ 与 $\{u\}^T$ 之所以能放到积分号外面,是因为它们是与 τ 无关的常量矩阵。以(5.5-40)式代入,得

$$\{S_s(\omega)\} = \{u\} \{S_r(\omega)\} \{u\}^T. \quad (5.5-46)$$

此即 $\{S_s(\omega)\}$ 与 $\{S_r(\omega)\}$ 之间的坐标变换关系。同理可得 $\{S_s(\omega)\}$ 与 $\{S_f(\omega)\}$ 之间的坐标变换关系为

$$\{S_f(\omega)\} = \left[\begin{array}{c} \omega^2 \\ \omega^2 \end{array} \right]^{-1} \{u\}^T \{S_s(\omega)\} \{u\} \left[\begin{array}{c} \omega^2 \\ \omega^2 \end{array} \right]^{-1}. \quad (5.5-47)$$

3. 系统变换

系统变换指的是由激励的统计参数经过系统以后,变成了响应的统计参数。最方便的系统变换是由 $\{S_f(\omega)\}$ 变为 $\{S_r(\omega)\}$,其变换式为

$$\{S_r(\omega)\} = \left[\begin{array}{c} H^*(\omega) \\ H(\omega) \end{array} \right] \{S_f(\omega)\} \left[\begin{array}{c} H(\omega) \\ H^*(\omega) \end{array} \right]. \quad (5.5-48)$$

值得注意的是,当 $\{q(t)\}$ 是系统的自然坐标,而 $\{f(t)\}$ 是与

自然坐标相联系的广义力时，上式具有特别简单的形式，即

$\begin{bmatrix} \diagdown H^*(\omega) \diagdown \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \diagdown H(\omega) \diagdown \end{bmatrix}$ 矩阵均成为对角阵。这就是我们

在分析求解多自由度系统对于随机激励的响应时，要进行模态分析，并采用自然坐标的理由。我们无需证明(5.5-48)式，只需将之展开，写成

$$\begin{pmatrix} S_{q_1 q_1} & S_{q_1 q_2} & \dots & S_{q_1 q_n} \\ S_{q_2 q_1} & S_{q_2 q_2} & \dots & S_{q_2 q_n} \\ \vdots & & & \\ S_{q_n q_1} & S_{q_n q_2} & \dots & S_{q_n q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1^*(\omega) & & & \\ & H_2^*(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_n^*(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{f_1 f_1} & S_{f_1 f_2} & \dots & S_{f_1 f_n} \\ S_{f_2 f_1} & S_{f_2 f_2} & \dots & S_{f_2 f_n} \\ \vdots & & & \\ S_{f_n f_1} & S_{f_n f_2} & \dots & S_{f_n f_n} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} H_1(\omega) & & & \\ & H_2(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_n(\omega) \end{pmatrix},$$

就可看出它相当于 $n \times n$ 个等式

$$S_{q_r q_s}(\omega) = H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{f_r f_s}(\omega) \quad (r, s = 1, 2, \dots, n).$$

(5.5-49)

此即(5.5-14)式，该式已就两个独立的单自由度系统加以证明。

如果采用与物理坐标相联系的 $\{S_u(\omega)\}$ 、 $\{S_f(\omega)\}$ ，则其间的系统变换关系就没有(5.5-48)式那么简单。事实上，以(5.5-47)式代入(5.5-48)式，得

$$\{S_u(\omega)\} = \begin{bmatrix} \diagdown H^*(\omega) \diagdown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagdown \omega^2 \diagdown \end{bmatrix}^{-1} \{u\}^T \{S_f(\omega)\} \{u\}$$

$$\times \left[\omega^2 \right]^{-1} (H(\omega)).$$

上式左乘以(u)，而右乘以(u)^T，得

$$\begin{aligned} \{u\} \{S_r(\omega)\} \{u\}^T &= \{u\} \left[H^*(\omega) \right] \left[\omega^2 \right]^{-1} \{u\}^T \{S_r(\omega)\} \\ &\times \{u\} \left[\omega^2 \right] \left[H(\omega) \right] \{u\}^T, \end{aligned} \quad (5.5-50)$$

以(5.5-46)式代入上式右端，并记

$$\{u\} \left[\omega^2 \right]^{-1} \left[H(\omega) \right] \{u\}^T = \{\tilde{H}(\omega)\}, \quad (5.5-51)$$

$$\{u\} \left[H^*(\omega) \right] \left[\omega^2 \right]^{-1} \{u\}^T = \{\tilde{H}(\omega)\}^{*T}, \quad (5.5-52)$$

这里“*T”表示转置并取复共轭，(5.5-50)式成为

$$\{S_r(\omega)\} = \{\tilde{H}(\omega)\}^{*T} \{S_r(\omega)\} \{\tilde{H}(\omega)\}, \quad (5.5-53)$$

此即物理坐标下的系统变换关系。显然 $\{\tilde{H}(\omega)\}$ 矩阵一般并非对角阵，因而 $\{\tilde{H}(\omega)\}^{*T}$ 也非对角阵，因此(5.5-53)式比(5.5-48)式要复杂得多。

以上我们讲述了多自由度系统所受到的随机激励与随机响应的“坐标变换”、“Fourier变换”与“系统变换”关系。基于此，我们可以由激励的相关矩阵 $\{R_r(\tau)\}$ 计算出响应的相关矩阵 $\{R_s(\tau)\}$ ，其中 $\{R_r(\tau)\}$ 可以由实际测试获得，也可基于一定的理论模型，推算出来。而得到的 $\{R_s(\tau)\}$ 也可由实验加以验证。

由 $\{R_r(t)\}$ 到 $\{R_s(t)\}$ 的计算过程如图5.5-4所示。图上注明了变换的种类及相应的公式号。由 $\{S_r(\omega)\}$ 直接计算 $\{R_s(\tau)\}$ 的公式为(5.5-54)式所示，

$$\begin{aligned} \{R_s(\tau)\} &= \frac{1}{2\pi} \{u\} \int_{-\infty}^{\infty} \left[H^*(\omega) \right] \{S_r(\omega)\} \\ &\times \left[H(\omega) \right] e^{i\omega\tau} d\omega \{u\}^T, \end{aligned} \quad (5.5-54)$$

其中 $x_i(t)$ 的自相关函数为

$$R_{z_i}(\tau) = \frac{1}{2\pi} [u_i] \int_{-\infty}^{\infty} [H^*(\omega)] [S_f(\omega)] [H(\omega)] \times e^{i\omega\tau} d\omega [u_i]^T, \quad (5.5-55)$$

式中

$$[u_i] = [u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(n)}], \quad (5.5-56)$$

即模态矩阵的第*i*行组成的行向量。

令上式中 $\tau = 0$ ，得第*i*坐标上响应的均方值

$$\psi_{z_i}^2 = P_{z_i}(0) = \frac{1}{2\pi} [u_i] \int_{-\infty}^{\infty} [H^*(\omega)] [S_f(\omega)] \times [H(\omega)] d\omega [u_i]^T \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.5-57)$$

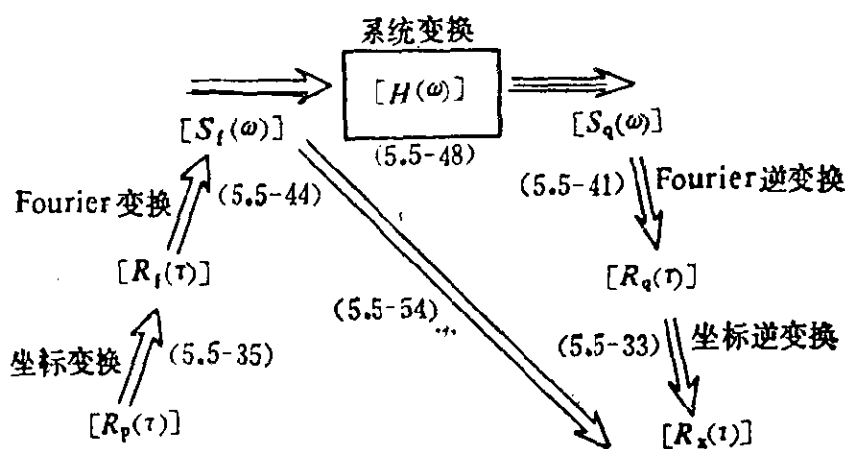


图 5.5-4

例5.4 考虑图5.5-5所示的两自由度系统，其中激励 $p_1(t)$ 可视为各态历经的零均值白噪声，其功率谱密度函数为 $S_{p_1}(\omega) = S_0$ ，试求响应 $x_1(t)$ ， $x_2(t)$ 的均方值。

解：运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + 2kx_1 - kx_2 = p_1(t), \\ 2m\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + 2c\dot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0. \end{cases} \quad (a)$$

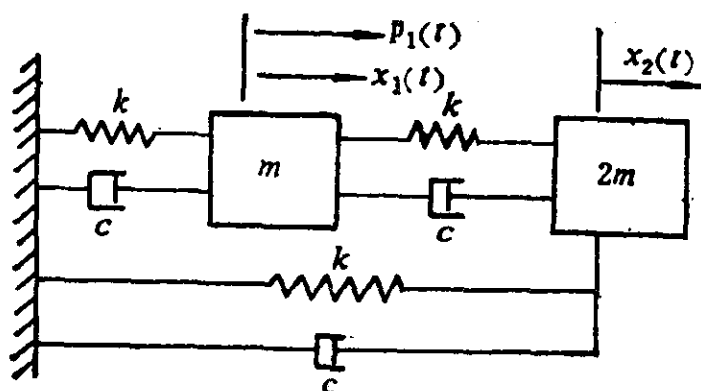


图 5.5-5

与之联系的特征值问题为

$$\omega^2 m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (b)$$

可求出模态矩阵为

$$(u) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.459701 & 0.888074 \\ 0.627963 & -0.325057 \end{bmatrix}, \quad (c)$$

而频率对角阵为

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & \\ & \omega^2 \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0.633975 & 0 \\ 0 & 2.366025 \end{bmatrix}. \quad (d)$$

与物理坐标相联系的激励功率谱矩阵为

$$(S_f(\omega)) = \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (e)$$

由(5.5-47)式得到与自然坐标相联系的广义力的功率谱矩阵为

$$\begin{aligned} (S_f(\omega)) &= \begin{bmatrix} \omega^2 & \\ & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} (u)^T (S_f(\omega)) (u) \begin{bmatrix} \omega^2 & \\ & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{m S_0}{k} \begin{bmatrix} 0.525784 & 0.272166 \\ 0.272166 & 0.140833 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (f)$$

与主坐标联系的新阻尼矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2\xi\omega & \\ & 2\xi\omega \end{bmatrix} = (u)^T (c) (u) = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 0.633975 & 0 \\ 0 & 2.366025 \end{bmatrix}, \quad (g)$$

这里新阻尼矩阵成为对角阵，是因为原来的阻尼矩阵(c)正好与

刚度矩阵(k)成比例。

与两个主坐标 $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$ 有关的频率响应函数为

$$H_r(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_r)^2 + i2\xi_r\omega/\omega_r} \quad (r=1,2), \quad (\text{h})$$

式中 ω_r 、 ξ_r ($r=1,2$)分别由(d)、(g)式给出。

为了由(5.5-57)式确定均方值 ψ_{11}^2 、 ψ_{22}^2 ，我们先计算

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_1^*(\omega) \\ H_2^*(\omega) \end{bmatrix} (S_f(\omega)) \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_2(\omega) \end{bmatrix} \\ &= \frac{mS_0}{k^2} \begin{bmatrix} 0.525784|H_1|^2 & 0.272166H_1^*H_2 \\ 0.272166H_1H_2^* & 0.140833|H_2|^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{i})$$

按(5.5-56)式与(c)式，有

$$\begin{aligned} (u_1) &= \frac{1}{\sqrt{m}}(0.459701, 0.888074), \\ (u_2) &= \frac{1}{\sqrt{m}}(0.627963, -0.325057), \end{aligned} \quad (\text{j})$$

因此有

$$\begin{aligned} & (u_1) \begin{bmatrix} H_1^*(\omega) \\ H_2^*(\omega) \end{bmatrix} (S_f(\omega)) \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_2(\omega) \end{bmatrix} (u_1)^T \\ &= \frac{S_0}{k^2} (0.111111|H_1|^2 + 0.078567(H_1^*H_2 + H_1H_2^*) \\ &\quad + 0.055555|H_2|^2), \\ & (u_2) \begin{bmatrix} H_1^*(\omega) \\ H_2^*(\omega) \end{bmatrix} (S_f(\omega)) \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_2(\omega) \end{bmatrix} (u_2)^T \\ &= \frac{S_0}{k^2} (0.207336|H_1|^2 - 0.039283(H_1^*H_2 + H_1H_2^*) \\ &\quad + 0.007443|H_2|^2), \end{aligned} \quad (\text{k})$$

将上式代入(5.5-57)式，即得

$$\begin{aligned} \psi_{11}^2 = R_{11}(0) &= \frac{S_0}{2\pi k^2} \left[0.111111 \int_{-\infty}^{\infty} |H_1|^2 d\omega + 0.078567 \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} (H_1^*H_2 + H_1H_2^*) d\omega + 0.055555 \int_{-\infty}^{\infty} |H_2|^2 d\omega, \end{aligned}$$

$$\psi_{r,2} = R_r(0) = \frac{S_0}{2\pi k^2} \left[0.207336 \int_{-\infty}^{\infty} |H_1|^2 d\omega - 0.039283 \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} (H_1^* H_2 + H_1 H_2^*) d\omega + 0.007443 \int_{-\infty}^{\infty} |H_2|^2 d\omega \right]. \quad (1)$$

式中

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_r|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right]^2 + \left(2\xi_r \frac{\omega}{\omega_r} \right)^2} = \frac{\pi \omega_r}{2\xi_r} \quad (r=1,2), \quad (m)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (H_1^* H_2 + H_1 H_2^*) d\omega \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right] + \left(2\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1} \right) \left(2\xi_2 \frac{\omega}{\omega_2} \right)}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]^2 + \left(2\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right\} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right]^2 + \left(2\xi_2 \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right\}} d\omega. \quad (n)$$

为解出这几个积分，需要应用留数定理。我们不再继续研究这一问题。

§ 5.6 窄带随机过程分析

线性系统在一般随机激励下，无论是白噪声、宽带或窄带过程，其响应都是窄带随机过程。作为一个例子，5.3.2小节已说明。因此对窄带随机过程的分析，有利于了解与掌握线性系统在随机激励下的性态。本节讲述窄带随机过程分析的几个问题。

窄带随机过程的功率谱密度函数可理想化为图5.6-1的图形，其数学表达式为

$$S_r(\omega) = \begin{cases} S_0, & \text{当 } \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2, \\ 0, & \text{其余.} \end{cases} \quad (5.6-1)$$

式中 ω_2 、 ω_1 分别为上、下截止频率， $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ，称为中

心频率, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ 称为频带宽度。此过程的自相关函数为

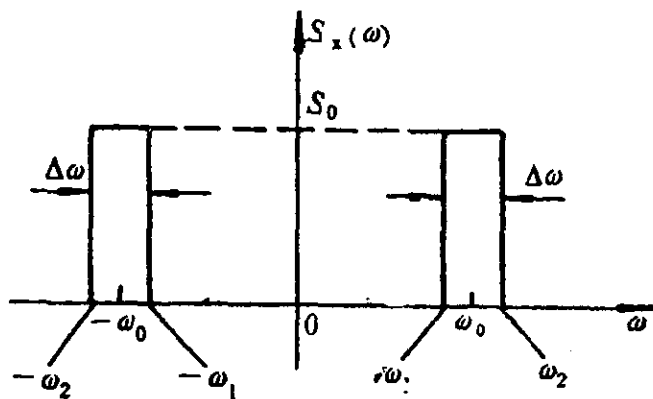


图 5.6-1

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 \cos\omega\tau d\omega$$

$$= \frac{S_0}{\pi} \frac{\sin\omega_2\tau - \sin\omega_1\tau}{\tau} = \frac{2S_0}{\pi\tau} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\tau \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)\tau,$$

即

$$R_x(\tau) = \frac{2S_0}{\pi\tau} \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\tau} \cos\omega_0\tau. \quad (5.6-2)$$

而均方值为

$$\psi_x^2 = R_x(0) = \frac{\Delta\omega S_0}{\pi}, \quad (5.6-3)$$

推导中用到了重要极限

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2} = 1. \quad (5.6-4)$$

窄带随机过程的一个样本函数如图5.2-12第二行第一个图所示, 我们假定该函数是光滑的, 即具有连续的一阶导数。由于系统具有一定惯性, 其运动速度不可能突然变化, 因此以上假定是合理的。

5.6.1 随机过程的导数过程的统计特性

设有平稳的窄带随机过程 $\{x_s(t)\}$, 其自相关函数与功率谱分

别为 $R_x(\tau)$ 、 $S_x(\omega)$ 。对 $\{x_k(t)\}$ 中每一个样本函数求导函数 $\dot{x}_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$)，这些导函数的总体成为一随机过程 $\{\dot{x}_k(t)\}$ ，称为原随机过程 $\{x_k(t)\}$ 的导数过程，其自相关函数与功率谱分别记为 $R_{\dot{x}}(\tau)$ 与 $S_{\dot{x}}(\omega)$ 。以下推求 $R_x(\tau)$ 、 $S_x(\omega)$ 与 $R_{\dot{x}}(\tau)$ 、 $S_{\dot{x}}(\omega)$ 之间的关系，以及 $\{x_k(t)\}$ 与 $\{\dot{x}_k(t)\}$ 之间的联合分布 $p(x, \dot{x})$ 。

由(5.2-2)式， $x_k(t)$ 的自相关函数为

$$R_x(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t) x_k(t+\tau). \quad (5.6-5)$$

由于已假定过程是平稳的，因此 $R_x(t, \tau)$ 与 t 无关，我们将之记为 $R_x(\tau)$ 。此外，我们将(5.2-2)式右边的 t_1 写成了 t 。将上式对 τ 求导，得

$$\frac{dR_x(\tau)}{d\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{d}{d\tau} (x_k(t) x_k(t+\tau)), \quad (5.6-6)$$

可是

$$\frac{d}{d\tau} (x_k(t) x_k(t+\tau)) = x_k(t) \frac{d}{d\tau} (x_k(t+\tau)) = x_k(t) \dot{x}_k(t+\tau), \quad (5.6-7)$$

代回(5.6-6)式，得

$$\frac{dR_x(\tau)}{d\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t) \dot{x}_k(t+\tau). \quad (5.6-8)$$

由于过程是平稳的，因此以上关系不会因为时间起点 t 的平移而发生变化。为此，以 $t-\tau$ 代入上式中的 t ，得

$$\frac{dR_x(\tau)}{d\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t-\tau) \dot{x}_k(t). \quad (5.6-9)$$

同样的过程再进行一次，得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{x}_k(t-\tau) \dot{x}_k(t) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{x}_k(t) \dot{x}_k(t+\tau) = -R_{\dot{x}}(\tau). \end{aligned} \quad (5.6-10)$$

此式给出了 $R_s(\tau)$ 与 $R_v(\tau)$ 之间的关系。

由(5.2-31)式, 我们知 $R_s(\tau)$ 为 $S_s(\omega)$ 的Fourier逆变换, 即

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (5.6-11)$$

将之对 τ 求导两次, 得

$$\frac{d^2 R_s(\tau)}{d\tau^2} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.6-12)$$

另一方面 $R_v(\tau)$ 也应该是 $S_v(\omega)$ 的Fourier逆变换, 即

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.6-13)$$

将(5.6-12)、(5.6-13)式代入(5.6-10)式, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

由于上式必然对任何形式的 $S_s(\omega)$ 及其导数谱 $S_v(\omega)$ 成立, 故必有

$$S_v(\omega) = \omega^2 S_s(\omega). \quad (5.6-14)$$

此为 $S_v(\omega)$ 与 $S_s(\omega)$ 之间的关系。此式表明, 如果已知位移过程的功率谱 $S_s(\omega)$, 则乘以 ω^2 以后, 即得速度的功率谱 $S_v(\omega)$ 。

如果 $\{x_s(t)\}$ 是零均值的, 即 $\mu_s = 0$, 则由(5.2-33)式有

$$E(x_s^2) = \sigma_s^2 = \psi_s^2 = R_s(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) d\omega, \quad (5.6-15)$$

而由(5.6-14)式, 有

$$E(x_v^2) = \sigma_v^2 = \psi_v^2 = R_v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_s(\omega) d\omega, \quad (5.6-16)$$

而由(5.6-3)式, 并考虑到 ω 很小, 可得以下近似关系

$$\sigma_v^2 = \psi_v^2 \approx \Delta\omega S_0 \omega_0^2 / \pi. \quad (5.6-17)$$

以下推求 $\{x_s(t)\}$ 与 $\{\dot{x}_s(t)\}$ 之间的联合概率密度函数 $p(x, \dot{x}; \tau)$, 这里我们限定时移 $\tau = 0$, 因此可简记为 $p(x, \dot{x})$ 。首先我们要证明一个随机过程与其导数过程在时移 $\tau = 0$ 时是不相关的, 为此

计算其间的互相关函数,

$$R_{x_1 \dot{x}_1}(\tau) = E\{x_1(t)\dot{x}_1(t+\tau)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_1(t)\dot{x}_1(t+\tau), \quad (5.6-18)$$

由(5.6-8)式, 有

$$R_{x_1 \dot{x}_1}(\tau) = \frac{dR_{x_1}(\tau)}{d\tau} \quad (5.6-19)$$

将 $R_{x_1}(\tau)$ 写成 $S_{x_1}(\omega)$ 的Fourier逆变换的形式, 即(5.6-11)式, 代入(5.6-19)式, 得

$$\begin{aligned} R_{x_1 \dot{x}_1}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_1}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega S_{x_1}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (5.6-20)$$

令上式中 $\tau=0$, 得

$$R_{x_1 \dot{x}_1}(0) = C_{x_1 \dot{x}_1}(0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega S_{x_1}(\omega) d\omega = 0. \quad (5.6-21)$$

上式中考虑到已假设过程为零均值过程, 而断定其中的积分式为零是由于 $S_{x_1}(\omega)$ 为偶函数, 而 $\omega S_{x_1}(\omega)$ 必为奇函数。

由此可见, $x_1(t)$ 与 $\dot{x}_1(t)$ 之间的协方差函数 $C_{x_1 \dot{x}_1}(0)$ 或互相关函数 $R_{x_1 \dot{x}_1}(0)$ 为零, 而按(5.4-26)式知其间的标准化协方差

$$\rho_{x_1 \dot{x}_1}(0) = 0. \quad (5.6-22)$$

即 $\{x_1(t)\}$ 与 $\{\dot{x}_1(t)\}$ 在 $\tau=0$ 时是不相关的, 证毕。如果 $\{x_1(t)\}$ 是正态过程, 则 $p(x, \dot{x})$ 为二维正态分布, 将(5.4-28)式中 x_1 写成 x , y_2 写成 \dot{x} , 将(5.6-22)式代入该式, 并考虑到零均值的假设, 即 $\mu_x = \mu_{\dot{x}} = 0$, 得

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)} = p(x)p(\dot{x}). \quad (5.6-23)$$

式中 $p(x)$ 、 $p(\dot{x})$ 分别是 $\{x_1(t)\}$ 与 $\{\dot{x}_1(t)\}$ 的正态分布的概率密度函数。上式表明一平稳正态随机过程在任一时刻与该时刻的导数

过程都是统计独立的。

5.6.2 窄带过程的穿越分析

所谓“穿越”，是指样本函数 $x_s(t)$ 跨越某一高度的水平线 $x=a$ 的现象。这里我们研究所谓“正穿越” (positive cross)，即曲线 $x_s(t)$ 以正的斜率(即 $\dot{x}_s(t) > 0$)穿越水平线 $x=a$ 的现象，如图5.6-2所示。图中正穿越的地方均注上了“×”号。

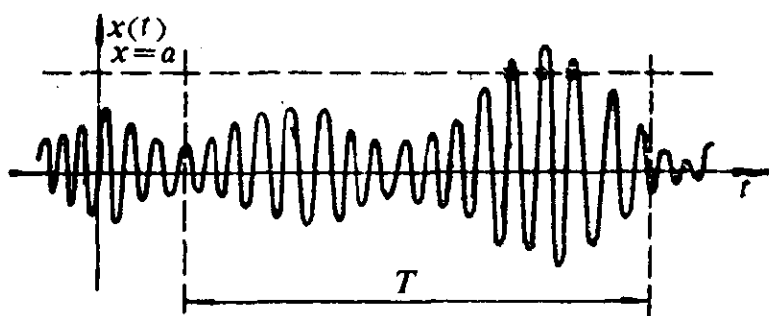


图 5.6-2

某一个样本 $x_s(t)$ 在时间 T 中正穿越 $x=a$ 的横线的次数记为 $N_{s,a}^+(T)$ ，则单位时间内，正穿越的次数为 $N_{s,a}^+(T)/T$ ，而对全部样本的总体取平均则得到平均单位时间内的穿越次数，或称为平均穿越率，记为

$$\nu_a^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \frac{1}{T} N_{s,a}^+(T). \quad (5.6-24)$$

如果过程是平稳的，则 ν_a^+ 应该是与时间无关的常量。 ν_a^+ 与系统的疲劳损伤和寿命有关，因此是一个重要的统计参量。 ν_a^+ 可以由 $\{x_s(t)\}$ 的基本统计参量推算出来。这里我们不拟进行这种推导，有兴趣的读者可参阅有关的文献^(1, 4)。这里直接给出以下结果：

$$\nu_a^+ = \int_0^{\infty} p(a, \dot{x}) \dot{x} d\dot{x}, \quad (5.6-25)$$

式中

$$p(a, \dot{x}) = p(x, \dot{x}) |_{x=a} \quad (5.6-26)$$

即是 x 与 \dot{x} 的联合概率密度函数，而其中的 x 取值 a 。(5.6-25)式表明平均穿越率 ν^+ 等于在 $x=a$ 条件下，正向速度($\dot{x}>0$)的平均值，此平均值愈大，则平均穿越率愈高。为了理解这一点，可看图5.6-3。设在 t_1 时刻样本函数 $x_s(t)$ 正处于 o' 点，该点的纵坐标 $x_1 = x_s(t_1)$ 是随机的。另一方面，曲线在经过 o' 点以后，其走向也是随机的，可以有①、②、③、...等不同的走向。图中①的方向代表负的速度，即 $\dot{x}_1 = \dot{x}_s(t_1) < 0$ ，不可能发生正穿越。在图示条件下，②的方向也不可能在这段时间内发生正穿越。这是由于其斜率 $\dot{x}_1 = \text{tg}\theta_2$ 太小的缘故。可以在图示 dt 这一小段时间内

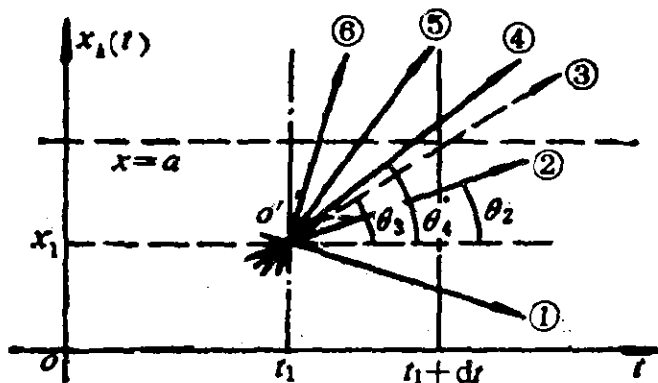


图 5.6-3

发生正穿越所需的最小斜率为 $\dot{x}_1 = \text{tg}\theta_3$ ，如图中方向③所示。而⑤、⑥方向都具有足够大的斜率，能在 dt 时间内发生正穿越。考虑到 o' 点的纵向位置 x_1 的随机性，我们可以说，经过 o' 点的曲线的正向斜率 \dot{x}_1 越大，在 dt 时段中发生正向穿越的可能性就越大。当 $dt \rightarrow 0$ 时，只有当 $x_s(t_1) \rightarrow a$ 时，即 o' 趋向水平线 $x=a$ 时，实际上才有可能在 dt 中发生正穿越。因此 ν^+ 就与 $x=a$ 附近 \dot{x} 的平均大小有关，即如(5.6-25)式所表示的那样。这是一个通用的结果，适合于任何概率分布。特殊地，当过程为正态过程时，以 $x=a$ 代

入(5.6-23)式, 得

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-x^2/2\sigma_x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{x}}} e^{-\dot{x}^2/2\sigma_{\dot{x}}^2}, \quad (5.6-27)$$

代入(5.6-25)式, 得

$$\nu_0^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-a^2/2\sigma_x^2} \int_0^{\infty} \frac{\dot{x}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{x}}} e^{-\dot{x}^2/2\sigma_{\dot{x}}^2} d\dot{x}.$$

积分以后, 得

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{-a^2/2\sigma_x^2}. \quad (5.6-28a)$$

当 $a=0$ 时, 得到正穿越时间轴($x=0$)的频率

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}. \quad (5.6-28b)$$

如图5.6-4所示, 它可以看作该随机过程总体平均的频率. 除非过程是各态历经的, 它不一定全等于按时间平均的频率^[1].

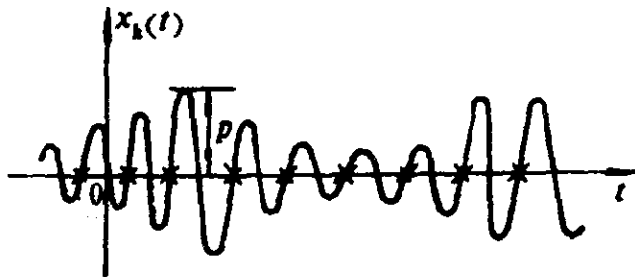


图 5.6-4

5.6.3 峰值分布

利用上述正穿越的平均穿越率的分析结果, 可以进一步计算 $\{x_s(t)\}$ 的峰值的概率分布. 我们知道, $\{x_s(t)\}$ 的诸峰值 p (图5.6-4)也是一种随机变量, 我们将它的概率密度函数记为 $p_s(a)$, 则峰值 p 落在 $a \sim a+da$ 之间概率为 $p_s(a)da$, 而峰值超过 a 的概率为

$$P_{s.s.}(p > a) = \int_a^{\infty} p_s(a) da. \quad (5.6-29)$$

另一方面，在 T 的时段内，共有 $\nu_0^+ T$ 次循环（因为对于窄带过程，可以认为每个循环只发生一次正穿越 t 轴，如图5.6-4所示），其中只有 $\nu_a^+ T$ 次出现越过 $x = a$ 的情况，即出现峰值 $p > a$ 的情况，因此 $p > a$ 的概率又可表示为 ν_a^+ / ν_0^+ ，与(5.6-29)式比较，有

$$\int_a^{\infty} p_p(a) da = \frac{\nu_a^+}{\nu_0^+} \quad (5.6-30)$$

对 a 求导，即得

$$-p_p(a) = \frac{1}{\nu_0^+} \frac{d}{da} (\nu_a^+). \quad (5.6-31)$$

此式适合于一般窄带过程，即 $\Delta\omega \ll \omega_0$ 的情形。

当 $\{x_s(t)\}$ 是正态分布时，以(5.6-28a)、(5.6-28b)式代入(5.6-31)式，得

$$-p_p(a) = -\frac{a}{\sigma_s^2} e^{-a^2/2\sigma_s^2},$$

或

$$p_p(a) = \frac{a}{\sigma_s^2} e^{-a^2/2\sigma_s^2} \quad 0 \leq a < \infty, \quad (5.6-32)$$

此即著名的Rayleigh分布，如图5.6-5所示。该曲线在 $a = \sigma_s$ 处有极大值，表明大多处峰值分布在 σ_s 附近，而出现很大或很小的峰值的概率是比较小的。

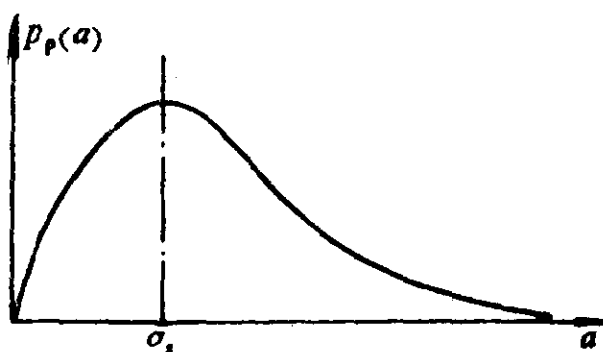


图 5.6-5

由(5.6-30)式，得峰值超过 a 的概率为

$$P_{r.o.b.}\{p > a\} = \frac{\nu_a^+}{\nu_0^+} = e^{-a^2/2\sigma_s^2}. \quad (5.6-33)$$

例如, 峰值超过 $3\sigma_x$ 的概率为

$$e^{-9\sigma_x^2/2\sigma_x^2} = e^{-4.5} = 0.011,$$

即平均100个峰值中, 有一个峰值超过 $3\sigma_x$ 。

思 考 题

1. 作随机振动的系统, 其激励和响应都是随机变化的, 不确定的, 那么系统本身的参数是否也是不确定的?
2. 随机过程与随机变量有何差别与联系?
3. (5.2-1)式 $\mu_x = E[x_k(t_1)]$ 中总体平均“E”是对 k 进行的还是对 t_1 进行的?
4. 自相关函数 $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ 中, t_1 与 τ 这两个变量的意义有什么差别? 平稳过程的自相关函数与 t_1 无关, 能否有一种过程的自相关函数与 τ 无关?
5. 自相关函数 $R_x(\tau)$ 与功率谱密度函数 $S_x(\omega)$ 的量纲各是什么? 互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 、互功率谱密度函数 $S_{xy}(\omega)$ 的量纲是什么?
6. (5.2-42)式中 S_0 、 $\delta(\tau)$ 的量纲各是什么?
7. 如何利用(5.2-16)式定义的概率 $p(x, t)$ 写出非平稳过程 $\{x_k(t)\}$ 的均值 $\mu_x(t)$ 的表达式?
8. 已知 μ_x 为一次原点矩, ψ_x^2 为二次原点矩, σ_x^2 为二次中心矩, 那么一次中心矩是什么? 零次矩是什么?
9. 功率谱 $S_x(\omega)$ 中 ω 的取值从 $-\infty \sim \infty$, 这里“负的频率”如何理解?
10. 如果要对(5.4-2)式继续写出类似于(5.2-14)式那样的定义, 该怎么写?
11. 如果随机过程 $\{x_k(t)\}$ 与 $\{y_k(t)\}$ 各自是平稳的, 能否保证 $R_{xy}(t_1, t_1 + \tau)$ 与 t_1 无关?
12. (5.5-24)式中 $f_x(t)$ 的量纲是什么?
13. 一平稳随机过程通过一线性系统以后, 其概率分布的类型一般会不会发生变化? 哪一种概率分布在经过线性系统以后, 仍保持不变?

习 题

5-1 考虑某零均值的随机过程 $\{x_k(t)\}$ 的 n 个样本函数 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 \dots 、 $x_n(t)$ ，将它们在 t_1 、 t_2 时刻的取值记为 $x_k(t_1)$ 、 $x_k(t_2)$ ， $k=1, 2, \dots, n$ ，而有限的、标准化的自协方差函数定义为

$$\rho_n = \frac{\sum_{k=1}^n x_k(t_1)x_k(t_2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2(t_1) \sum_{k=1}^n x_k^2(t_2)}}$$

当将 $x_k(t_1)$ 、 $x_k(t_2)$ ($k=1, 2, \dots, n$)两序列按大小次序排列时，有

$$\begin{aligned} x_{k_1}(t_1) &\geq x_{k_2}(t_1) \geq \dots \geq x_{k_n}(t_1), \\ x_{k'_1}(t_2) &\geq x_{k'_2}(t_2) \geq \dots \geq x_{k'_n}(t_2), \end{aligned}$$

试证明：若 $k_i = k'_i$ ($i=1, 2, \dots, n$)，即排列次序相同时， $\rho_n = 1$ ，而 $k_i = k'_{n+1-i}$ ，即排列次序相反时， $\rho_n = -1$ ，而在其它情况下， $-1 < \rho_n < 1$ ，并说明此结果的意义。

5-2 证明 $\overline{E[x_k(t)]} = \overline{E[x_k(t)]}$ ，即时间平均与总体平均可交换次序。

5-3 利用5.2.2小节之2所提出的过程为各态历经的两个充要条件，证明例5.1中所给随机过程是各态历经的。

5-4 试由(5.2-40)式证明(5.2-41)式。

5-5 试由(5.2-42)式证明(5.2-43)式。

5-6 试证明如果一个线性系统的激励 $\{f_k(t)\}$ 是各态历经的，则其响应 $\{x_k(t)\}$ 也是各态历经的。

5-7 试以中心极限定理证明，如果一个线性系统的激励 $\{f_k(t)\}$ 是正态过程，则其响应 $\{x_k(t)\}$ 也是正态过程。

5-8 试证明(5.4-13)式与(5.4-14)式。

5-9 设有随机过程 $\{x_k(t)\}$ 与 $\{y_k(t)\}$ ，它们分别在 t_1 、 t_2 时刻的取值 $x_k(t_1)$ 、 $y_k(t_2)$ 对应于 (x_1, y_2) 平面上的许多点 $[x_k(t_1), y_k(t_2)]$ ，按

最小二乘法为这些点拟合一直线 $y_b(t_2) = ax_b(t_1) + b$, 而拟合直线与各点所在实际位置的均方误差为 $E[\delta^2(k)] = E\{[y_b(t_2) - ax_b(t_1) - b]\}$, 注意以上均方误差已由合理选取参数 a 、 b 被极小化。试证明以下关系成立:

$$\rho_{xy}^2(t_1, t_2) = 1 - \frac{E[\delta^2(k)]}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)},$$

式中

$$\rho_{xy} = \frac{E[x_b(t_1)y_b(t_2)] - \mu_x(t_1)\mu_y(t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)},$$

$$\mu_x(t_1) = E[x_b(t_1)], \quad \mu_y(t_2) = E[y_b(t_2)],$$

$$\sigma_x(t_1) = E[(x_b(t_1) - \mu(t_1))^2], \quad \sigma_y(t_2) = E[(y_b(t_2) - \mu(t_2))^2],$$

并说明其意义。

5-10 证明(5.4-31)、(5.4-32)式。

5-11 假设激励 $\{f_b(t)\}$ 是平稳过程(但不一定是各态历经的), 试证明(5.5-6)式。

5-12 试证明(5.5-33)、(5.5-36)式。

5-13 设随机过程 $\{x_b(t)\}$ 的一个样本函数为图5-13(a)所示的方波, 而其余样本函数为图5-13(a)上曲线的随机平移, 其初相 t_0 在 $0 \sim T$ 之间均匀分布, 如图(b)所示。试求其自相关函数 $R_x(\tau)$, 并绘出其图形。

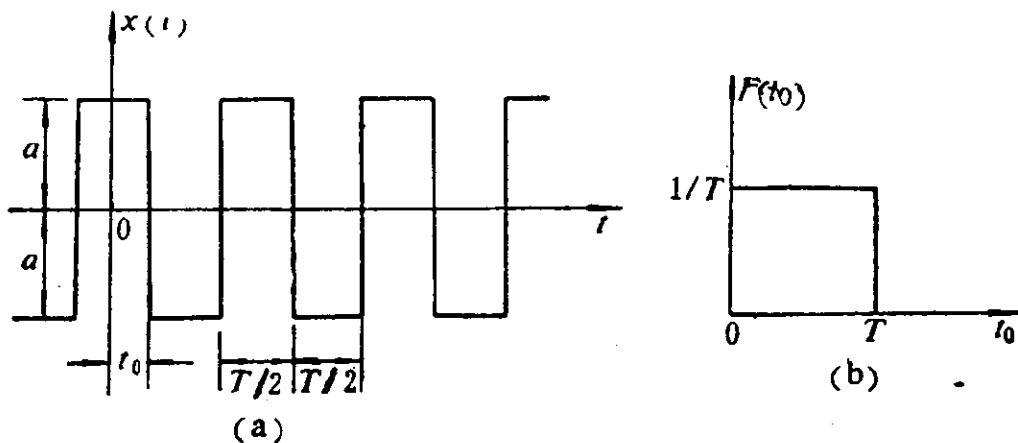


图 5-13

5-14 设一锻锤以规则的时间间隔工作, 在其基础上产生的激振力函数 $f(t)$ 近似地如图5-14(a)所示。每次冲击时间很短, $b \ll T$ 。距锻锤某一距离处地面加速度时间历程为 $y(t)$, 如图5-14(b)所示, 可近似地表示为

$$y(t) = c \sin \Omega(t - t_0) \sin \frac{2\pi}{T}(t - t_0),$$

其中 c 、 Ω 、 T 及 t_0 皆为常数，设该过程是各态历经的，试求互相关函数 $R_{f,f}(\tau)$ 和 $R_{f,z}(\tau)$ 。又如 $y(t)$ 中混有与以上信号不相关的噪音 $z(t)$ ，即

$$y(t) = c \sin \Omega (t - t_0) \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + z(t),$$

试问， $R_{f,f}(\tau)$ 和 $R_{f,z}(\tau)$ 有何变化？

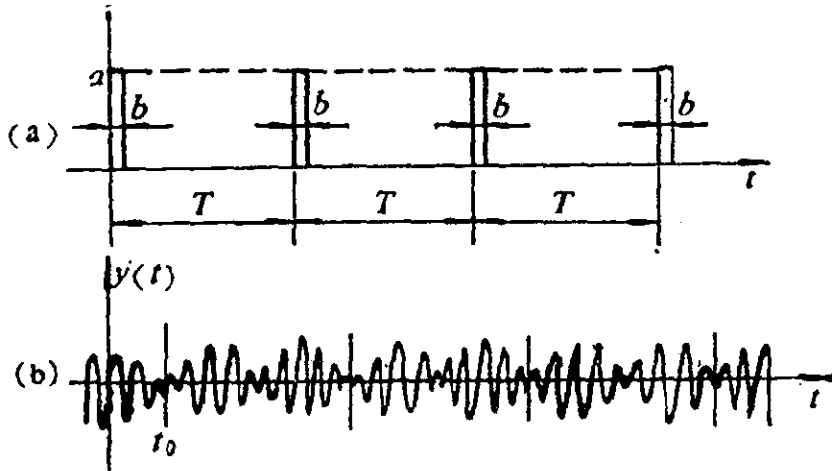


图 5-14

5-15 一随机过程的各样本函数是以下谐波

$$x_s(t) = x_0 \sin(\omega t - \phi),$$

对同一样本函数来说 x_0 、 ω 、 ϕ 均为常数，但对不同的样本函数来说， x_0 、 ϕ 为随机变量。其联合概率密度函数为

$$p(x_0, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi X} \left\{ 1 + \left(2 \frac{x_0}{X} - 1 \right) \cos \phi \right\}, & \text{当 } 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq x_0 \leq X, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试求总体平均 $E[x^2]$ 和 $E[x^2 | \phi_0]$ ，后者表示在 $\phi = \phi_0$ 条件下 x^2 的集合平均。再问 $\{x_s(t)\}$ 是各态历经的吗？是平稳的吗？

5-16 均值为 0，方差为 σ_s^2 的某平稳随机过程的自相关函数设为

$$R_s(\tau) = \sigma_s^2 e^{-i(\omega_1 \tau)^2} \cos \omega_2 \tau,$$

其中 ω_1 、 ω_2 为常数，试计算其功率谱密度函数，并图示之。

提示：令 $\cos \omega_2 \tau = (e^{i\omega_2 \tau} + e^{-i\omega_2 \tau})/2$ ，并使用积分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2/2\sigma_s^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_s,$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-s^2/2\sigma_s^2} dx = \sigma_s^2,$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-s^2/2\sigma_s^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_s^2.$$

5-17 某平稳、正态、零均值过程 $\{z_1(t)\}$ 的方差为 σ_z^2 ，功率谱密度为

$$S_z(\omega) = S_0 e^{-\sigma \omega^2},$$

试求：

- i) 自相关函数 $R_z(\tau)$ ；
- ii) $\{\dot{z}_1(t)\}$ 的自相关函数；
- iii) $\{z_1(t)\}$ 与 $\{\dot{z}_1(t)\}$ 的联合概率密度函数。

5-18 试考虑图5-18所示的系统，小车相对于地面运动的加速度 $\ddot{x}(t)$ 为激励，而质块相对于小车的运动 $y(t)$ 为响应，设 $\ddot{x}(t)$ 可视为理想的白噪声，功率谱为 S_0 ，试求响应 $y(t)$ 的均方值 $\psi_y^2 = E[y^2]$ 。

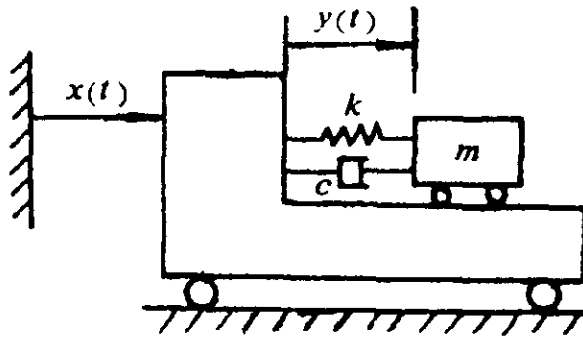


图 5-18

5-19 图5-19所示两自由度系统中，其激励 $p_1(t)$ 为白噪声，功率谱为 S_0 ，求其响应 $x_2(t)$ 的平均动能

提示： $S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$ ， $E[\dot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega$ 。

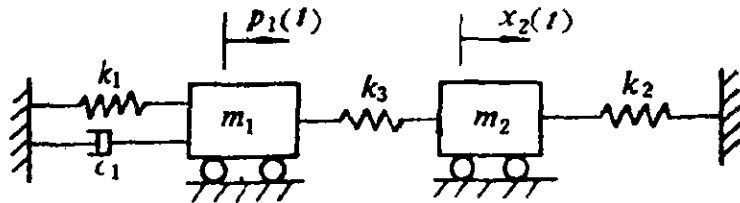


图 5-19

5-20 一单自由度系统由 m 、 c 、 k 组成，受到一平稳正态过程 $\{f_s(t)\}$ 的激励，其功率谱密度函数为

$$S_s(\omega) = \frac{S_0}{1 + \omega^2/\omega_0^2},$$

试求其响应过程 $\{x_2(t)\}$ 的下列各统计特性的表达式:

- i) 正穿越 a 的平均频率 ν_0^+ ;
- ii) 峰值分布的概率密度函数 $p_p(a)$.

5-21 设有一平稳随机过程 $\{y_2(t)\}$, 其联合概率密度函数为

$$p(y, \dot{y}) = \begin{cases} \frac{1}{4y_0\dot{y}_0} \text{ (常数)}, & \text{当 } \begin{cases} -\dot{y}_0 \leq \dot{y} \leq \dot{y}_0; \\ -y_0 \leq y \leq y_0; \end{cases} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试计算其平均穿越率 ν_0^+ 及峰值概率密度函数 $p_p(a)$.

提示: 利用(5.4-7)式求 $p(y)$ 与 $p(\dot{y})$.

5-22 设图5-19所示两自由度系统受到平稳正态白噪声 $p_1(t)$ 的激励; 试求其响应 $x_2(t)$ 的平均频率 ν_0^+ .

第六章 振动系统的测试、辨识与建模

一个振动系统可用图6.0-1所示的框图来表示，它具有三要素：系统特性（包括描述其特性的各种参数）、激励与响应。这三者相互联系，知其二，可求其三。如果已知系统特性与激励，

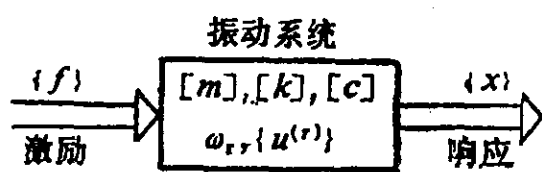


图 6.0-1

欲求其响应，这称为振动分析中的正问题。本书前五章所讲的均属于正问题。此外，振动分析还有两类逆问题，已知激励与响应，而欲求系统的特性与参数，称为第一类逆问题，这类问题又称为振动系统的测试、辨识与建模，是本章讲述的内容。至于第二类逆问题，是已知系统的特性与响应，而欲求其激励，这属于振源判断、载荷识别、基于振动信号的工况监视与故障诊断等问题。下一章将涉及这类问题。

通过对实际的振动系统进行测试、分析、辨识与建模，而得到的描述实际振动系统的简图，物理参数 (m) 、 (k) 、 (c) 或模态参数 $\omega_r, \{u^{(r)}\}$ ； $(r=1, 2, \dots, n)$ ，以及系统的运动方程，称为振动系统的理论模型。一个理论模型以一定的详尽程度、以一定的侧面概括了实际的振动系统。理论模型可用于预测振动系统在各种工况与各种扰动下的性态，评价与优选振动系统的设计方案或修改设计方案。

理论模型的方法是振动分析的基本方法之一。在以振动分析方法解决实际工程问题中，对理论模型的分析与对实际振动系统的测试是相互结合、相互补充而相得益彰的。一个好的理论模型是通过反复测试、分析、检验与修改才能建立的。

振动测试一般有三个基本环节：激励、测量和分析。即以某

种激振力作用在被测振动系统上，使其产生响应，测量激振力和响应，进而确定系统的自然频率、模态向量、阻尼、刚度和质量等参数，从而建立系统的理论模型。本章扼要介绍振动测试设备、试验方法及参数识别的基本理论与技术。

§ 6.1 振动测试传感器

本节介绍惯性式传感器与几种非接触式传感器，它们在振动测量中有着广泛的应用。

6.1.1 惯性式测振传感器

1. 加速度与位移传感器的力学模型、原理与特性

惯性式测振传感器的简图如图6.1-1所示，其壳体附着在被测物体的振动表面上，并与后者一同振动，因此这是一种接触式传感器。在壳体中，质块 m 经弹簧 k 与阻尼器 c 而与壳体相连。被测表面连同壳体的振动记为 $y(t)$ ，而质块 m 的振动记为 $x(t)$ ，这两个运动实际上都是测不出来的；但质块与壳体之间的相对运动 $z(t) = x(t) - y(t)$ 却可以通过各种电测的方法测出。研究惯性测振原理的一项根本任务，在于探讨如何由测出的 $z(t)$ 来推断被测对象的振动 $y(t)$ 。一般说来，我们并不能做到这一点，但在传感器的特殊设计下却可以使我们以一定的精度完成这一任务。我们来探讨这一问题，为此先写出质块的运动方程。

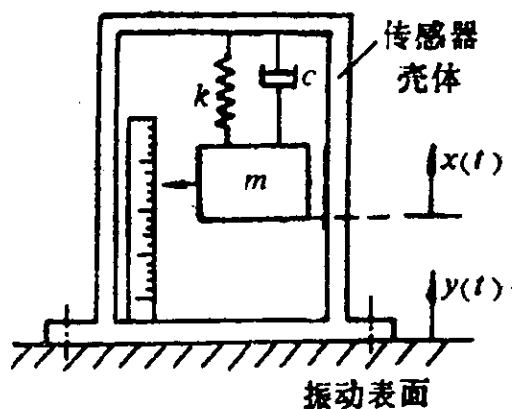


图 6.1-1

$$m\ddot{x}(t) = -k(x(t) - y(t)) - c(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)).$$

以 $z(t) = x(t) - y(t)$ 代入上式, 得

$$m \ddot{z}(t) + c \dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t), \quad (6.1-1)$$

即

$$\ddot{z}(t) + 2\xi\omega_n \dot{z}(t) + \omega_n z(t) = -\ddot{y}(t). \quad (6.1-2)$$

式中 $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\xi = c/(2m\omega_n)$. 现在我们考虑两种极端情况.

第一种情况: m 很大, 而 k 相对较小, 因而 ω_n 很小, 以致(6.1-2)式等号左端的三项中, 后两项远比第一项小, 因而可略去后两项, 将该式写为

$$\ddot{z}(t) \approx -\ddot{y}(t),$$

积分上式, 得

$$z(t) \approx -y(t). \quad (6.1-3)$$

可见这种情况下, 由电测法测出的 $z(t)$, 实际上反映了被测对象的振动位移 $y(t)$. 这时我们得到位移传感器.

第二种情况: m 很小, 而 k 相对较大, 因而 ω_n 很大, 以致(6.1-2)式等号左端的前两项与第三项相比, 可以略去, 于是得

$$\omega_n z(t) \approx -\ddot{y}(t),$$

或

$$z(t) \approx -\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y}(t). \quad (6.1-4)$$

可见在这种情况下, 由电测法测出的 $z(t)$ 正比于被测对象的振动加速度 $\ddot{y}(t)$. 这时我们得到加速度传感器.

由以上分析, 我们可以看出, 加速度传感器由于 m 小, 因而可以做得非常小, 而位移传感器由于 m 大, 就必须做得较大.

由(6.1-3)式, $z(t) = x(t) - y(t) \approx -y(t)$, 可见 $x(t) \approx 0$. 这表明, 在位移传感器的情况下, 质块 m 在惯性空间中几乎不动, 而相对振动 $z(t)$ 大体上与被测表面的振动 $y(t)$ 大小相当. 由(6.1-4)式, 注意到这时 ω_n 的数值很大, 因而 $z(t)$ 很小, 即 $z(t) = x(t) - y(t) \approx 0$, 可见 $x(t) \approx y(t)$, 这表明, 在加速度传感器的情况下,

质块大体上与被测表面同步运动。

以下研究惯性传感器的频率特性。设 $y(t)$ 为谐波

$$y(t) = Y \cos \omega t, \quad (6.1-5)$$

因而 $z(t)$ 也是谐波

$$z(t) = Z \cos(\omega t - \varphi). \quad (6.1-6)$$

代入(6.1-2)式，得质块与壳体之间的相对运动的振幅、相位差分别为

$$Z = \frac{Y \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}}, \quad (6.1-7)$$

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}. \quad (6.1-8)$$

以上两式分别是惯性测振仪的幅频特性与相频特性。 Z/Y 、 φ 与频率比 ω/ω_n 的关系如图6.1-2所示。现在我们来分析位移传感器与加速度传感器这两种特殊情况。

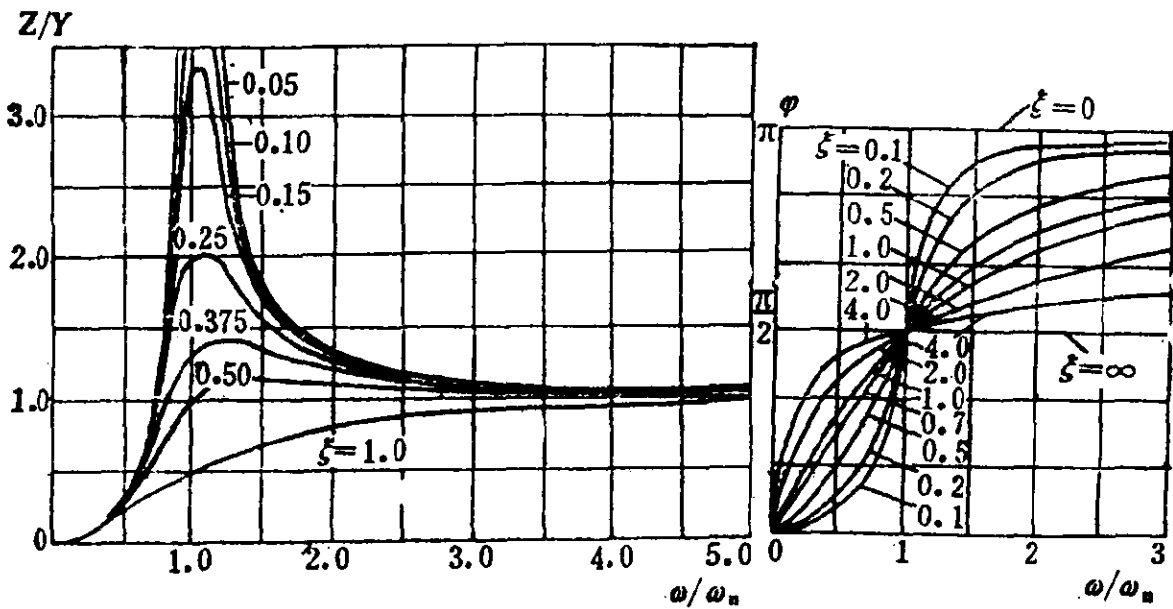


图 6.1-2

在位移传感器的情况下，有 $\omega \gg \omega_n$ ，因此(6.1-7)、(6.1-8)两式可近似地写为

$$Z \approx Y$$

$$\varphi \approx \pi$$

代入(6.1-6)式,并考虑到(6.1-5)式,有

$$z(t) = Y \cos(\omega t - \pi) = -y(t).$$

与(6.1-3)式的结论是一致的。如图6.1-2所示,在 $\omega \gg \omega_n$ 的条件下,确近似地有 $Z/Y \approx 1$,但由于受到共振峰的限制,因此位移传感器的工作频率范围存在下限频率。此外,由图还可知,当 $\xi = 0.6 \sim 0.7$ 时, $Z/Y \approx 1$ 的范围最大。因此,合理选取位移传感器的阻尼率,有利于扩大其使用范围。

在加速度传感器的情况下,有 $\omega \ll \omega_n$,因此(6.1-7)、(6.1-8)两式成为

$$z \approx Y \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2,$$

$$\varphi \approx 0.$$

代入(6.1-6)式,有

$$z(t) \approx \frac{Y \omega^2}{\omega_n^2} \cos \omega t. \quad (6.1-9)$$

另一方面由(6.1-5)式,有

$$\ddot{y}(t) = -Y \omega^2 \cos \omega t,$$

代入(6.1-9)式得

$$z(t) \approx -\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y}(t). \quad (6.1-10)$$

与(6.1-4)式的结论是一致的。由近似关系式(6.1-9)知, $z(t)$ 的振幅为

$$Z \approx \frac{Y \omega^2}{\omega_n^2}, \quad (6.1-11)$$

而被测表面振动的加速度的幅值为

$$\ddot{Y} = Y \omega^2, \quad (6.1-12)$$

代入(6.1-11)式,得 $Z \approx \ddot{Y} / \omega_n^2$,即

$$\frac{Z\omega_n^2}{\ddot{Y}} \approx 1. \quad (6.1-13)$$

以(6.1-12)式代入(6.1-7)式, 得量 $Z\omega_n^2/\ddot{Y}$ 与频率比 ω/ω_n 的关系, 如图6.1-3所示. $Z\omega_n^2/\ddot{Y} \approx 1$ 的区域是加速度传感器的工作范围. 由图可见, 此工作范围的上限受到共振峰的限制. 此外, 此图还表示, 在 $\xi = 0.65 \sim 0.70$ 时, 在 $\omega/\omega_n = 0 \sim 0.4$ 的范围内, 近似地有 $Z\omega_n^2/\ddot{Y} \approx 1$.

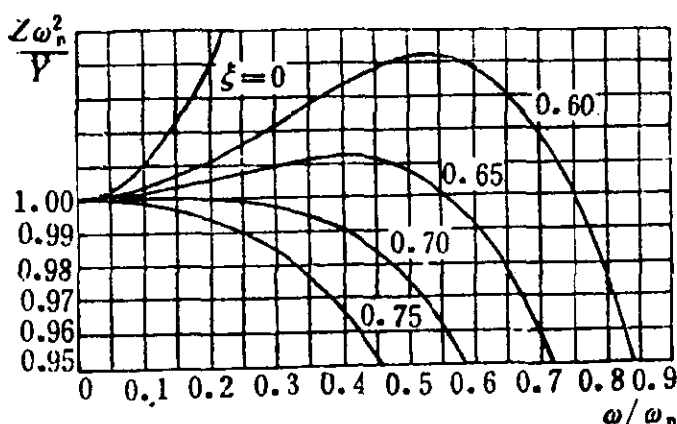


图 6.1-3

因此, 合理选择阻尼率, 也可以扩大加速度计使用的频率范围.

以上是就幅频关系来说的, 以下看相频关系. 我们知道, 为了减小信号通过线性系统后的相位畸变, 系统的相频关系应接近正比关系. 由图6.1-2可见, 当 $\xi = 0.70$ 时, 在 $\omega/\omega_n = 0 \sim 1$ 范围内, 相频关系近于直线, 因此加速度测量中的相位畸变最小.

现在回过头来看位移传感器的相频特性. 其工作范围在 ω_n 之上, 因而图6.1-2表明, 在 $\omega > \omega_n$ 的范围内, 并不存在近似正比关系的相频特性 (无论 ξ 取何值). 前述由幅频关系得出的最佳阻尼比为 $\xi = 0.6 \sim 0.7$ 的结论, 从相位畸变的观点来看, 并不适合. 但有时为了迁就幅频特性, 仍使位移传感器具有一定的阻尼.

在惯性式位移传感器和加速度传感器中, 加以适当的阻尼, 除了能扩大其工作的频率范围, 减少测量误差以外, 还可阻尼其

中质块 m 的自由振动，使之尽快衰减，而不致叠加在测量结果中，引起分析困难。

以上在分析惯性式测振传感器的工作频率范围时，仅仅是从其简化的力学模型的频率特性来考虑的，由此看来，似乎位移传感器无上限频率，而加速度传感器无下限频率。其实这是不真实的，其力学模型的更细微的结构，电测敏感元件与仪表的特性都会对测量的频率范围施加限制。例如，电测敏感元件的高频特性与仪表的低频特性往往会分别限制测量系统工作频率范围的上限与下限。

2. 压电式加速度与力传感器

上述惯性传感器中质块 m 与壳体的相对运动 $Z(t)$ 如果以压电石英晶体或压电陶瓷材料的“压电效应”来加以测量，就可做成压电式传感器。对这类压电材料施加外力，它的晶格就要变形，在晶体的两个面上将有数量相同、极性相反的电荷产生，这种电荷量是与外力的大小成正比的。常用的压电传感器是加速度计与力传感器以及阻抗头。

(1) 加速度计

图6.1-4所示为加速度计的基本结构，压电材料切片1的一面与质块 m 固联，另一面与刚性基座2相联，所组成的传感器通过

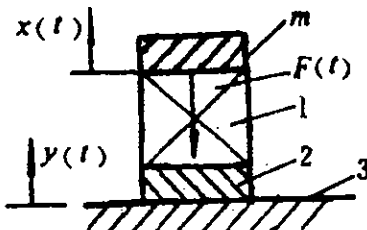


图 6.1-4

基座附于被测对象 3 上。这里压电材料的弹性及内阻即起到图 6.1-1 中的弹簧 k 与阻尼器 c 的作用。前面说过，在加速度计的情况下，近似地有 $x(t) \approx y(t)$ ，因此 $\ddot{x}(t) \approx \ddot{y}(t)$ 。压电材料上所受到的力为 $F(t) = m \ddot{x}(t) \approx m \ddot{y}(t)$ (图 6.1-1)，即压电材料所受到的力 $F(t)$ 与被测表面的振动加速度 $\ddot{y}(t)$ 成正比，而压电材料表面产生的电荷量也就与 $\ddot{y}(t)$ 成正比，因而可作为加速度传感器使用。

加速度计在使用时，其压电材料两表面产生的极性相反的电

荷，可看成电压源或电荷源，故其灵敏度有电压灵敏度和电荷灵敏度两种表示方式，前者是加速度计输出电压(mV)与待测系统加速度之比，后者是输出电荷(PC)与待测系统加速度之比。在振动测量中一般用重力加速度 g 作为加速度的单位。此外，加速度计还有所谓的横向灵敏度的指标，它表示对垂直于加速度计轴线方向上的振动的敏感程度，以加速度计的电压或电荷灵敏度的百分比表示。这个百分比愈小，表示横向加速度对测量结果的干扰愈小，因而测量愈准确。

为了测量加速度计压电材料片上微弱的电势或电荷，必须使用具有阻抗变换和放大作用的电压放大器或电荷放大器。电压放大器是按电压灵敏度设计的，它的输出电压与输入电压成正比，可将加速度计输出的微弱电势加以放大，并将加速度计输出的高阻抗信号转换为低阻抗信号，以便输入到测振或分析仪器上去。电压放大器的缺点在于输出电压受连接电缆长度的影响。电荷放大器是按电荷灵敏度设计的，它的输出电压与输入电荷成正比，可将加速度计输出的微弱电荷量信号放大为电压信号，并将其输出的高阻抗变为低阻抗，以便接到其它测量分析仪器上去。电荷放大器在使用时，连接电缆的长度的影响可以忽略不计。

加速度计可以做得很小，可利用磁力、粘接或螺钉固定等方式，附着在被测表面上。使用十分方便，对被测系统造成的扰动也很小。由加速度计测取的加速度信号可经积分回路，得出速度或位移信号。

使用加速度计进行测试时，可能有下列误差：安装不牢，致使传感器壳体不能与被测表面一同运动；横向加速度渗入虚假信号；被测表面的应力传到基座，并传到压电材料上，会产生与振动无关的信号；另外，如高温、强电磁场等也会导致测量误差。

(2) 力传感器

图6.1-5所示为力传感器的基本结构，它由压电材料夹在两个质块 m_1 、 m_2 之间组成。轴向作用力 F ，使压电材料切片的表面

产生电荷，电荷量与作用力成正比，通过电荷放大器或电压放大器可将其微弱电荷量或电压信号转换放大为易测的电压信号。

实际上压电材料承受的作用力 F_i ，与传给振动系统的力 F 是有差异的，其差值等于基座质块 m_2 的惯性力。在某些情况下，为了获得精确的测量值，必须用 m_2 的惯性力来校正输出信号，可通过计算或利用模拟电路来实现这一校正。

(3) 阻抗头

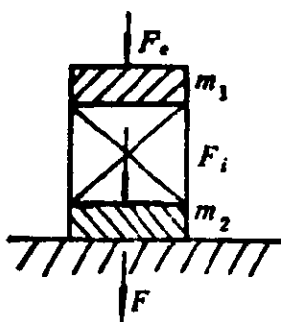


图 6.1-5

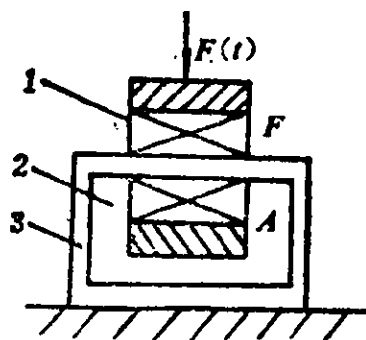


图 6.1-6

图6.1-6所示为阻抗头的基本结构，它的上端是力传感器1，下端是加速度计2，同连于基座3上的阻抗头兼有上述力传感器和加速度计的特点，可以同时测量系统的激振力和激振点加速度。两种信号同时输出，经放大与分析后可求出该点的频响函数。

3. 惯性式速度传感器的力学模型

以上讲的惯性式加速度传感器与位移传感器均是以电测方法将传感器中质块 m 对壳体的相对振动 $z(t)$ 转换成电量，从而推求被测表面的振动 $y(t)$ 。另外还有一种方案，是用电测法测量 $\dot{z}(t)$ ，而去推求 $\dot{y}(t)$ ，这称为惯性式速度传感器。用类似的方法可以证明，速度传感器的频率特性与工作范围与位移传感器是一样的。其实，将(6.1-3)式对时间求导，即可得 $\dot{z}(t) \approx -\dot{y}(t)$ ，因此测出 $\dot{z}(t)$ ，即可推知 $\dot{y}(t)$ 。由此可知，速度传感器也应该工作在高于传感器自然频率 ω_n 的频域中，且为了降低 ω_n ，速度传感器也不得不采用大的质量 m 而做得较大。

4. 磁电式速度传感器

图6.1-7所示为磁电式速度传感器的基本结构，传感器的壳体1固定在被测对象上，线圈2则固定在外壳上，磁铁3用弹簧4支承在外壳上。当外壳及线圈随被测对象一起振动时，由于其振动频率大大高于磁铁与弹簧组成的系统的自然频率（即传感器的自然频率 ω_n ），磁铁实际上近乎保持不动，这样，磁铁与线圈之间就产生了相对运动，该相对速度就近似等于线圈及壳体的绝对速度。由于相对运动，线圈切割磁力线，从而在线圈中产生了感应电势，该感应电势与相对运动速度 $z(t)$ 成正比，而 $z(t)$ 又近似地等于壳体的速度 $-\dot{y}(t)$ ，因而测得了线圈中的感应电势，即可推知被测对象的振动速度。

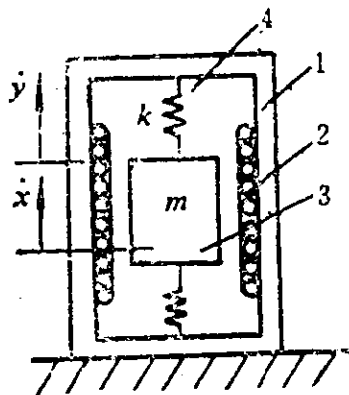


图 6.1-7

实际使用的磁电式速度传感器有多种结构形式，除图6.1-7所示外，常见的为将磁铁与壳体固定，而将线圈绕组作为质块 m 支承在弹簧上，其工作原理与上述相同。

磁电式速度传感器不需要前置放大器，在低频时也有较大的输出电压和较低的输出阻抗。

6.1.2 非接触式传感器

上述惯性式传感器属接触式传感器，它会给被测系统附加局部质量和刚度，对轻型结构或柔性结构而言，这些局部影响往往是不可忽略的，而非接触式传感器则不会影响被测系统的结构特性。

1. 涡流传感器

涡流传感器中含有一线圈，其中通以兆赫量级高频电流，该线圈产生磁场，被测金属表面接近传感器就会由于交变磁场的作

用而产生涡流，引起能量损耗，这种能量损耗影响着线圈的感应电动势，表现为线圈上高频电压的幅值变化。在被测表面材料不变的情况下，线圈上的电压正比于传感器与被测系统表面的距离，因此可测出振动表面相对于传感器的动态位移，这种位移式传感器的灵敏度与被测表面材料的电学性能有关。

2. 电容式传感器

图6.1-8所示为电容式传感器的原理图，由被测表面2与传感器的极板1构成一电容器，两者的初始距离为 h_0 ，加上的直流电

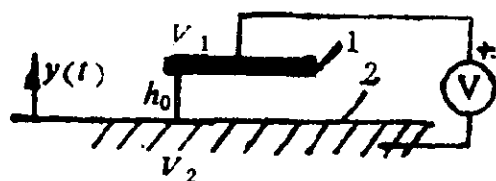


图 6.1-8

势分别为 V_2 、 V_1 ，其间的电势差 $V = V_1 - V_2$ 保持恒定。由于被测表面2的振动，它与极板1之间形成的电容量随之变化，而由于电位差保持不变，极板上的电荷量势必发生变化。

设被测表面2的振动为 $y(t)$ ，则电容器极板之间的瞬时距离为

$$h(t) = h_0 + y(t).$$

设电容器电荷量为 $Q(t)$ ，电容为 $C(t)$ ，则

$$Q(t) = C(t)V, \quad (6.1-14)$$

而板电容器电容量的近似值为

$$C(t) = \frac{a}{h(t)}.$$

其中 a 为常数，于是电荷量为

$$Q(t) = \frac{aV}{h(t)} = \frac{aV}{h_0 + y(t)}, \quad (6.1-15)$$

因为 V 给定为常量，当 $y(t) \ll h_0$ 时，上式可近似写为

$$Q(t) \approx \frac{aV}{h_0} \left[1 - \frac{y(t)}{h_0} \right]. \quad (6.1-16)$$

可见 $Q(t)$ 的变化部分正比于振动系统表面2的振动位移。所产生的电荷变化量则可通过电荷放大器转换为易测的电压信号。

3. 电磁式传感器

图6.1-9为电磁式传感器的基本结构，永久磁铁1通过气隙 δ

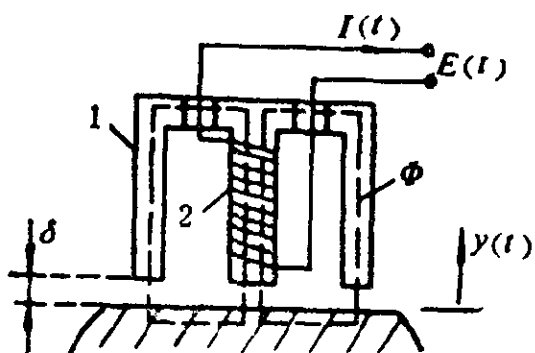


图 6.1-9

与被测表面构成闭合磁路，磁路的磁阻主要取决于气隙 $\delta(t)$ 的大小（其余部分的磁阻可以略去不计）。因此，磁路的磁通量 Φ 反比于 δ ，即

$$\Phi = \frac{\alpha}{\delta(t)}. \quad (6.1-17)$$

式中 α 为比例常数。当被测表面相对于传感器以规律 $y(t)$ 运动时，

$$\delta(t) = \delta_0 + y(t), \quad (6.1-18)$$

这里 δ_0 是初始气隙，代入(6.1-17)式，得

$$\Phi = \frac{\alpha}{\delta_0 + y(t)}. \quad (6.1-19)$$

在 $y(t) \ll \delta_0$ 时，上式可近似为

$$\Phi \approx \frac{\alpha}{\delta_0} \left(1 - \frac{y(t)}{\delta_0} \right), \quad (6.1-20)$$

在永久磁铁上绕有线圈2，其圈数为 n ，当 Φ 变化时，在线圈中将感生出电动势

$$E(t) = n \frac{d\Phi}{dt}, \quad (6.1-21)$$

以(6.1-20)式代入

$$E(t) = -\frac{n\alpha}{\delta_0^2} \dot{y}(t). \quad (6.1-22)$$

其中 α 、 n 、 δ_0 均为常数。由此可见测出的电压值正比于被测表面相对于传感器的运动速度，因此，这是一种速度传感器。公式(6.1-22)表明，其灵敏度与 δ_0 有关。减小 δ_0 ，则可提高其灵敏度。但 δ_0 过小，则仪器的线性范围会变得很小，使量程下降。

6.1.3 传感器的合理选择

在测试中应根据测试目的要求和实际条件,合理选用传感器。在选择传感器时,要注意其主要的技术指标能满足测试的要求:

(1)灵敏度,即输出信号与被测振动量的比值。

(2)线性范围,即保持输入信号和输出信号成线性关系时,输入信号幅值的允许变化范围。

(3)频率范围,即灵敏度变化不超过允许值时可使用的频率范围,在频率范围以外使用时,应按仪器的频响特性曲线对测量结果进行修正。

此外,还需注意,这里所介绍的几种接触式传感器均属于惯性测振仪,它们测出来的是被测对象相对于牛顿力学的惯性空间的振动(加速度、速度或位移),而后面介绍的几种非接触传感器,所测出的则是被测对象相对于传感器的安装处的相对振动,后者显然不一定是一个惯性系统。

所介绍的几种非接触传感器的应用,或者要求被测表面是导电的,或者是导磁的。如果被测表面不具备这种性质,可以在被测表面贴附一层导电或导磁的材料。

需要说明,接触式传感器也可设计成用于测量相对振动,例如,图6.1-7所示磁电式速度传感器,如将其壳体安装在一个被测表面上,而将其磁铁与一伸出的顶杆相连,后者触及另一被测面,使磁铁与该被测面有相同的振动,则可测量两表面间的相对振动。

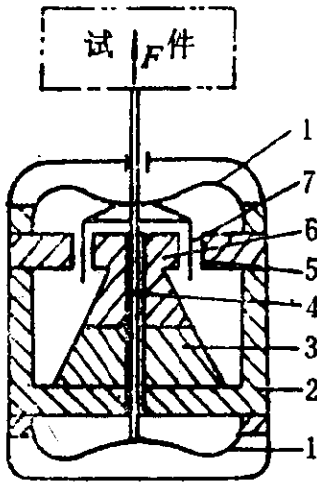
§ 6.2 激振器

激振器是专门用来使被测对象产生振动的设备,本节介绍激

振器的基本工作原理。常用的激振器有电动式，电磁式及电液式。

6.2.1 电动式激振器

图6.2-1所示为电动式激振器的结构图，固连于壳体2上的磁



钢3、铁芯6和磁极5之间存在气隙，气隙中具有高密度的磁通，磁通密度为 B 。置于气隙中的驱动线圈7与顶杆4固连，并以弹簧1支承于壳体2上，顶杆的一端则与激振对象相连。由于线圈置于磁场中，当它通以交变电流 $I(t)$ 时，会感应出电磁力：

$$F_i = 2\pi R n B I(t), \quad (6.2-1)$$

式中 n 是线圈匝数， R 是线圈半径， $I(t)$ 通常是正弦变化的交变电流：

$$I = I_0 \sin \omega t,$$

则

$$F_i = 2\pi R n B I_0 \sin \omega t. \quad (6.2-2)$$

正弦电信号由信号发生器产生，通过功率放大器放大，然后提供给激振器。力 F_i 驱使线圈7及顶杆4上下运动，由顶杆将力 F 传给激振对象。当 F_i 以简谐规律变化时，则作用在激振对象上的力 F 也为同频率的简谐力。在使用时，往往在顶杆与激振对象之间加一个力传感器，以精确地测出激振力 $F(t)$ 。

为了使激振器的能量尽量用于激振对象的激励上，在激振时最好让激振器基座在空间基本上保持静止：在高频激振时，往往用弹簧将激振器悬挂起来，降低安装的自然频率，使之低于激振频率的 $1/3$ ；在低频激振时，则将激振器的基座与静止的地基刚性相连，使安装的自然频率高于激振频率3倍以上。总之，应尽量减小激振器安装基础的振动的影响，以免引入额外频率的激

励。此外，在激振器与激振对象之间往往用一根柔性杆连接，以减小横向刚度的影响。

电动式激振器能产生波形很好的简谐力，还能产生其它各种类型的激振力，其有效工作频率范围通常为几Hz到10kHz左右，线圈的位移通常是较小的，最大不过几个厘米。

6.2.2 电液式激振器

电液式激振器由液压缸、活塞及伺服控制系统组成，电控系统可以产生所需的振动信号，而液压伺服系统可提供很大的位移和力。它的有效工作频率范围通常为零点几Hz到几百Hz。

6.2.3 电磁式激振器

电磁式激振器的结构简图与电磁式传感器的类似，即如图6.1-9所示，但工作原理正相反，前述传感器是由气隙的变化在线圈中产生交变电流，而这里讲的激振器则是由通入线圈中的交变电流产生交变磁场，而被测对象作为衔铁，在交变磁场作用下产生振动。

由于在电磁铁与衔铁之间的作用力 $F(t)$ 只会是吸力，而无斥力，为了形成往复的正弦激励，应该在其间施加一恒定的吸力 F_0 ，然后才能叠加上一个交变的谐波力 $\tilde{F}(t)$ ，如图6.2-2所示，即

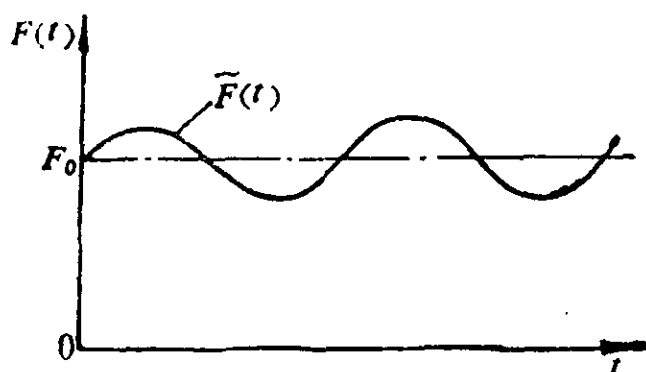


图 6.2-2

$$F(t) = F_0 + \tilde{F}(t), \quad (6.2-3)$$

为此，通入线圈中的电流 $I(t)$ 也应该由直流与交流两部分组成，即

$$I(t) = I_0 + A \sin \omega t,$$

而由电磁理论知道，电磁铁所产生的磁力正比于所通过电流的平方，即有

$$F(t) = \alpha \cdot I^2(t) = \alpha(I_0^2 + 2I_0 A \sin \omega t + A^2 \sin^2 \omega t). \quad (6.2-4)$$

式中 α 为比例系数，与电磁铁的尺寸、结构、材料与气隙 δ 的大小有关。在 $A \ll I_0$ 的情况下，上式右边第三项可略去，得

$$F(t) = \alpha I_0^2 + 2\alpha I_0 A \sin \omega t. \quad (6.2-5)$$

与(6.2-3)式比较， αI_0^2 即为恒定的吸力，而 $2\alpha I_0 A \sin \omega t$ 即为交变激振力。

由以上分析可见，即使所通入交流电流的幅值 A 保持不变，所产生交变激振力的幅值 $2\alpha I_0 A$ 也随直流电流 I_0 而变化，这一点在激振器使用与定标时是必须加以考虑的。

电磁激振器是非接触式的，对于被激励结构没有附加质量与刚度的影响，其频率上限约为500~800Hz。

此外，还须注意，如果条件 $A \ll I_0$ 不成立，则(6.1-26)式中 $A^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} A^2 (1 - \cos 2\omega t)$ 这一项不可忽略，将在激振力中引入二次谐波。

§ 6.3 振动测试系统

所谓振动测试，是将一已知的激振力施加于振动系统上，测量其响应，从而确定结构的动态特性，如自然频率、模态向量及阻尼率等。激振的方式有多种，如正弦激励、随机激励、瞬态激励等，相应地有不同的测试系统及分析方法。

6.3.1 阶梯正弦激振测试系统

阶梯正弦激振是在测试对象具有有效响应的频带范围内，逐一用各个频率的正弦激振力进行激振，从而测定对象的频率特性 $H(\omega)$ 。

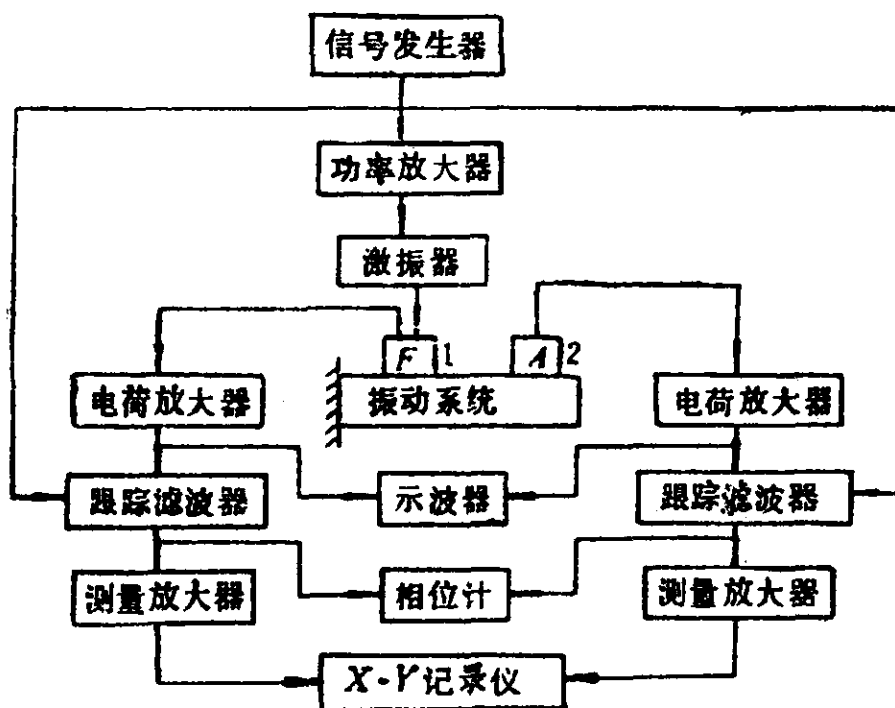


图 6.3-1

图6.3-1是阶梯正弦激振试验的方框图。信号发生器产生的正弦或余弦电信号经功率放大器放大后驱动激振器，激振器经力传感器对系统进行激振。力传感器和加速度传感器分别用于测量激振力与响应。其测得的数据可从相应的测量仪表（电压表或测量放大器）上读出或由X-Y记录仪记录，它们的比值即是加速度导纳 A/F 或加速度阻抗 F/A ；利用仪器的积分功能，还可得速度、位移导纳或阻抗，其中位移导纳即为系统的频率特性 $H(\omega)$ 。当激励1与测振点2靠近时，得到结构上该点的直接导纳或阻抗，当两点分开时，即得跨点导纳或阻抗。系统中的示波器用来监视信号的波形。跟踪滤波器可以确保测出的激振力与响应

只与激振频率有关。相位计中读出的是激振力和加速度之间的相位差。

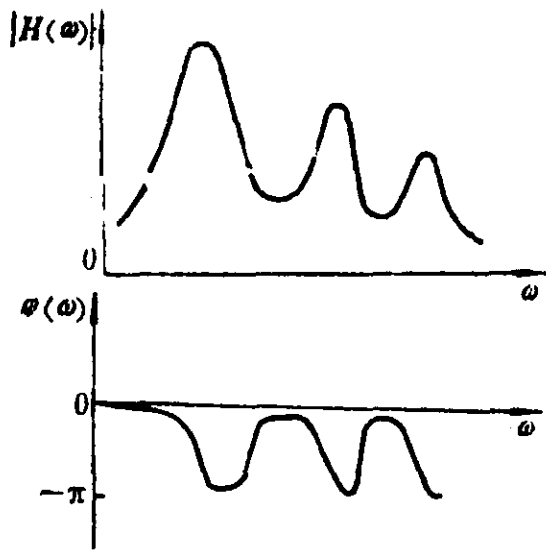


图 6.3-2

逐一改变振动频率来进行激振，测量记录各频率点的响应幅值与相位，可得到振动系统在感兴趣的整个频率范围内的响应的幅频曲线和相频曲线，如图6.3-2所示。利用这样的频响曲线可以估计振动系统的动态特性，确定自然频率及阻尼率等参数。如果被测多自由度系统的各阶模态分离得比较开，那么幅值曲线的各个峰值都比较清晰，各对应着一个共振频率。自然频率使激振力

频率固定在各个共振频率处，并测量结构在各个坐标上的振动幅值，就可确定相应的模态向量。最后，在每个共振频率附近进行密度较大的频率扫描激振，可确定曲线峰值附近的半功率带宽，并由此估算出模态阻尼率。如果模态密集，则难以分辨上述结果，可采用专门的计算方法，这将在后面介绍。

在进行正弦激振试验时，保证在各种激振频率下，激振力的幅值恒定是必要的。这是由于激振力的幅值过小，则不足以激发各主要模态，而且结构中可能存在的间隙会在测试结果中引入显著的误差；激振力的幅值过大，又可能会激发结构中的非线性因素，同样会造成测试误差。由于从功率放大器到激振器这一子系统的幅频特性一般并非常数，为了使其激振力的输出为等幅值的，其输入信号的幅值就必须作相应变化。这一点可由手动调节或自动反馈控制来完成。如果信号发生器以数字计算机与D/A转换来取代，则也可用计算机编程的方法来实现。

正弦激振的优点是激振功率大，信噪比高，能保证测试精度，主要缺点是测试周期长。

6.3.2 瞬态激振测试系统

1. 脉冲激振测试系统

脉冲激振是一种瞬态激振方法，从理论上讲，它是以(2.4-2)式表示的理想脉冲激励力 $P_0\delta(t-\tau)$ 对系统进行激励。我们知道，脉冲函数在 $-\infty \sim +\infty$ 的整个频率范围的频谱是连续恒定的，因此用一个脉冲函数激励相当于用所有频率的正弦信号同时进行激励。

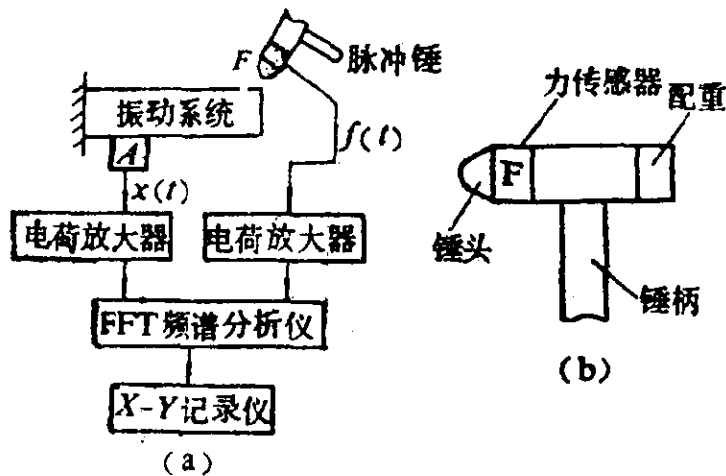


图 6.3-3

实际进行脉冲激振时是用锤击实现的，基本测试系统如图 6.3-3(a)所示。

脉冲锤由锤头、力传感器、锤柄及配重所组成，如图 6.3-3(b)所示，用它敲击被测试系统，以产生瞬时冲击而对系统激振

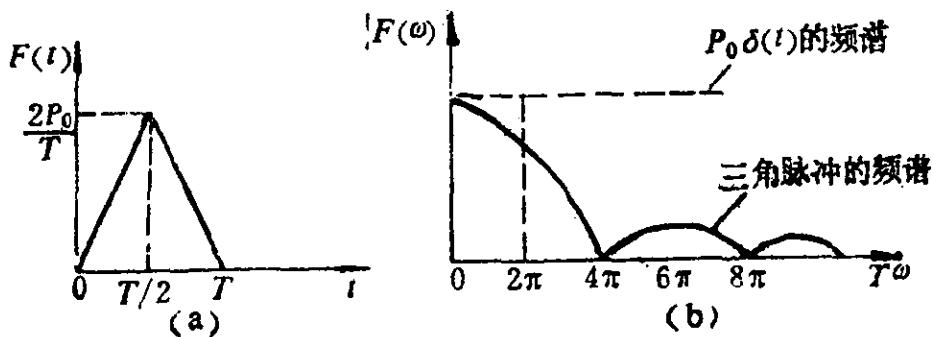


图 6.3-4

所产生的激振力并非理想的 $\delta(t)$ 函数，而是近似于图6.3-4(a)所示的三角脉冲，其表达式为

$$F(t) = \frac{4P_0}{T^2} \left[r(t) - 2r\left(t - \frac{T}{2}\right) + r(t - T) \right]. \quad (6.3-1)$$

式中 $r(t)$ 为斜坡函数

$$r(t) = \begin{cases} t, & \text{当 } t > 0 \\ 0, & \text{当 } t \leq 0. \end{cases} \quad (6.3-2)$$

对(6.3-1)式作Laplace变换，得

$$F(S) = \frac{4P_0}{T^2 S^2} - \frac{8P_0}{T^2 S^2} e^{-\frac{\pi S}{2}} + \frac{4P_0}{T^2 S^2} e^{-\pi S} \quad (6.3-3)$$

对上式取 $S = i\omega$ ，转换到频域，并利用Euler公式，可得到

$$F(i\omega) = \frac{8P_0}{T^2 \omega^2} \left(1 - \cos \frac{T\omega}{2}\right) \cos \frac{T\omega}{2} - i \frac{8P_0}{T^2 \omega^2} \left(1 - \cos \frac{T\omega}{2}\right) \sin \frac{T\omega}{2}. \quad (6.3-4)$$

由此可作出激振力的频谱图，如图6.3-4(b)所示。由图可知，当 $T\omega < 2\pi$ 时，三角脉冲可近似代替 $\delta(t)P_0$ ；当 $T\omega > 2\pi$ 时，三角脉冲的幅值 $|F(\omega)|$ 衰减得很快，已不能近似代替 $\delta(t)P_0$ 。因此，

使用锤击实现脉冲激振时，要求 $T < \frac{2\pi}{\omega}$ ，这里的 ω 是所感兴趣的

频率上限。 T 与锤头和被激振系统的接触表面刚度有关，锤头愈硬， T 愈小。改变锤头的材料，可调整 T 的大小，从而有效地改变锤击激振的频率范围。在激励的有效带宽能够覆盖感兴趣频率的前提下，选用的锤头要尽量软，以使激振的能量尽量集中于所感兴趣的频率范围之内，并不致损坏被激表面。

改变锤头的配重大小和敲击加速度可调节激振力的大小。要避免锤击力过大和二次锤击，前者往往引起结构非线性，并使测试系统过载，后者会给分析结果带来较大误差。

如图6.3-3(a)所示，测取的激振力信号 $f(t)$ 和振动信号 $x(t)$ 都直接送入频谱分析仪以进行谱分析，求得其富氏变换 $F(\omega)$ 与 $X(\omega)$ ，并按(2.3-14)式计算出系统的频率响应函数 $H(\omega)$ 。

具体运用时，往往在大致相同的条件下进行一系列重复试验、测量和谱分析，然后加以平均，以减少外界噪声的污染。

2. 快速正弦扫描激振

快速正弦扫描法也是目前流行的一种瞬态激振方法，激励力可表示为

$$f(t) = P_0 \sin 2\pi(at + b)t \quad (0 < t < T). \quad (6.3-5)$$

式中 a 、 b 均为正的常数， T 为扫描周期（通常为数秒钟），这种力函数可以看作是频率连续变化的正弦函数。其下限频率为 $f_{\min} = b$ ，而上限频率为 $f_{\max} = aT + b$ ，其时间历程与频谱如图6.3-5(a)、(b)所示。上、下限频率及扫描周期可根据试验要求选定。快速正弦扫描激振系统的方框图与图6.3-1类似。这种方法兼有阶梯正弦激振的精确性与瞬态激振的快速性。

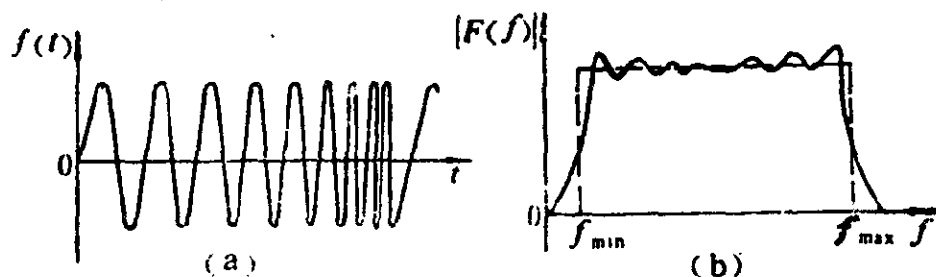


图 6.3-5

瞬态激振方法的优点是迅速省时，试验设备也比较简单，但其激励能量分散在较宽的频率范围内，因而对于有的模态可能存在激励能量不足，信噪比低而测试精度不高的问题。如果加大冲击能量，又可能引入非线性，甚至损坏被测试的结构或测试设备。下面介绍的随机激振法，在一定程度上可克服上述不足。

6.3.3 随机激振测试系统

随机激振法是广泛应用的一种宽带激振方法。其测试系统如图6.3-6所示。由信号发生器产生白噪声信号（也可由数字电子计算机产生一种“伪随机码”，经D/A转换输出），经功率放

大器驱动激振器，对被测试结构进行激励。分别以力传感器和加速度计测量激振力和响应，经放大后，输入谱分析仪，求出系统的频响函数或脉冲响应函数，由X-Y记录仪绘图、输出。

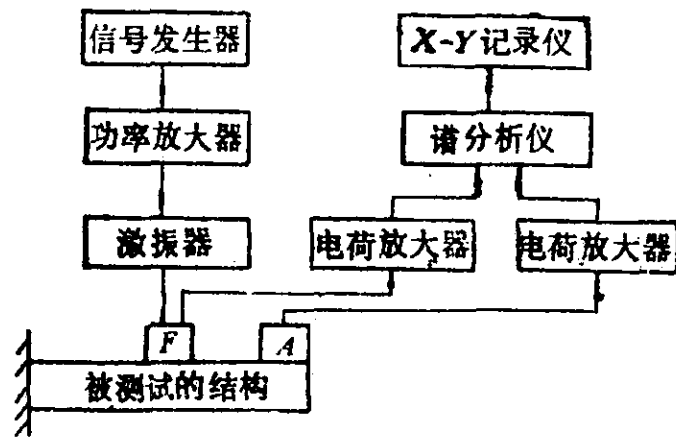


图 6.3-6

此法与瞬态激振不同，是在一段时间内，以随机信号对被测系统进行连续激励，因而可以获得较大的激励能量。其信噪比优于瞬态激励，但不如阶梯正弦激励。其测试时间也居于两者之间。

随机激振方法有一个突出的优点，就是它具有在噪声背景中提取有用信号的能力，因而抗噪声干扰的能力比较强。其原因在于随机激振法并非就个别的激励与响应来分析振动系统的动态特性，而是就激励与响应的统计平均参数来分析系统特性。因此，只要渗入的噪声与施加的激励在统计上是不相关的，那么在计算统计平均的过程中，就会自动排除噪声的影响。假设响应中含有噪声，如图6.3-7所示， $\{f(t)\}$ 是激励， $\{x(t)\}$ 是系统的真实响应， $\{z(t)\}$ 是混入的噪声， $\{y(t)\}$ 是被噪声污染后的响应，设它们都是平稳随机过程。

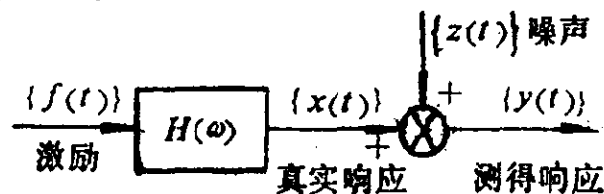


图 6.3-7

如果能测示出 $\{f(t)\}$ 与 $\{x(t)\}$ 的互谱 $S_{f,x}(\omega)$ 和 $\{f(t)\}$ 的自谱 $S_f(\omega)$,那么按第五章的(5.5-15b)式即可正确决定系统的频响函数

$$H(\omega) = S_{f,x}(\omega)/S_f(\omega), \quad (6.3-6)$$

可是, $x(t)$ 实际上是无法测得的,测到的只是混有噪声的 $\{y(t)\}$,因而只能算出 $\{f(t)\}$ 与 $\{y(t)\}$ 之间的互谱 $S_{f,y}(\omega)$,按之算出的频响函数

$$\tilde{H}(\omega) = S_{f,y}(\omega)/S_f(\omega) \quad (6.3-7)$$

一般当然并不等于系统的真实频响函数 $H(\omega)$ 。但是,如果假定 $\{z(t)\}$ 与 $\{f(t)\}$ 是不相关的;则可证 $S_{f,z}(\omega) = 0$,于是有

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega) &= S_{f,y}(\omega)/S_f(\omega) = S_{f,(z+x)}(\omega)/S_f(\omega) \\ &= (S_{f,z}(\omega) + S_{f,x}(\omega))/S_f(\omega) = S_{f,x}(\omega)/S_f(\omega) \\ &= H(\omega). \end{aligned} \quad (6.3-8)$$

即在这种情况下,由测得的 $\{y(t)\}$ 仍可正确地辨识出系统的频响函数,此即所谓的抗噪性。

采用随机激振方法对系统进行测试时,甚至可以不必中断系统的正常运行,只要所施加的激振信号与系统正常运行中的载荷或扰动信号是不相关的,则系统的运行信号和扰动就不会影响测试的结果。此外,我们还可直接以系统的工作载荷或环境中的自然扰动作为随机激振源,只要这些振源的带宽足以覆盖系统的有效响应频带即可。这样就不必另外施加激励,从而可简化测试系统,降低测试成本。

§ 6.4 模态参数识别

6.4.1 频率响应函数与模态参数的关系

采用前述激振试验方法,对一个多自由度系统的第 s 个自由

度进行激励，而在第 r 个自由度上测量响应，从而得到频率响应函数 $H_{r,s}(\omega)$ ，当 r, s 遍历 $1, 2, \dots, n$ 时，共可得到 n^2 个频率响应函数，它们构成一 $n \times n$ 矩阵，即频响函数矩阵

$$\{H(\omega)\} = \begin{pmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdots & H_{1n}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & H_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \cdots & H_{nn}(\omega) \end{pmatrix} \quad (6.4-1)$$

如果对系统各自由度上的谐波激励函数 $Q_i(t) = Q_i e^{i\omega t}$ ，以及各自由度上的响应 $q_i(t) = q_i e^{i\omega t}$ ，($i = 1, 2, \dots, n$) 分别构成激励向量 $\{Q(t)\}$ 与响应向量 $\{q(t)\}$ ，那么它们与频响函数矩阵之间有关系

$$\{q(t)\} = \{H(\omega)\}\{Q(t)\}, \quad (6.4-2)$$

或

$$q_r(t) = \sum_{s=1}^n H_{rs}(\omega) Q_s(t) \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (6.4-3)$$

矩阵 $\{H(\omega)\}$ 概括了一个多自由度振动系统的全部动态特性。

另一方面，一个多自由度振动系统的特性又能以它的模态参数来表示，即自然频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 与模态矩阵

$$\{u\} = \{ \{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\} \} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

其中诸模态向量满足正交条件，并假定已经按 (4.5-15) 式正规化。如果系统是小阻尼或比例阻尼的，则作为模态参数，还有模态阻尼 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 。由方程 (4.10-7)，还可推知模态参数、自然坐标 η_i 与各个自然坐标上的激励 $N_i(t) = N_i e^{i\omega t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 之间的关系为

$$\eta_s(t) = \frac{N_s(t)}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2i\xi_s \omega_s \omega} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (6.4-4)$$

同样是描述一个系统的动态特性，一方面是用频响函数，另一

方面是用模态参数,这两者之间必然存在联系.事实上,由(4.10-4)式,在自然坐标 $\{\eta(t)\}$ 与物理坐标 $\{q(t)\}$ 之间存在以下关系

$$\{q(t)\} = [u]\{\eta(t)\}. \quad (6.4-5)$$

而由(4.10-6)式,自然坐标下的激励向量 $\{N(t)\}$ 与物理坐标下的激励向量 $\{Q(t)\}$ 之间存在以下关系

$$\{N(t)\} = [u]^T\{Q(t)\}. \quad (6.4-6)$$

以上两式可拆开,写成

$$q_r(t) = \sum_{i=1}^n u_r^{(i)} \eta_i^{(i)} \quad (r=1,2,\dots,n), \quad (6.4-7)$$

$$N_s(t) = \sum_{i=1}^n u_s^{(i)} Q_i^{(i)} \quad (s=1,2,\dots,n). \quad (6.4-8)$$

将(6.4-8)式代入(6.4-4)式,得

$$\eta_s(t) = \frac{\sum_{i=1}^n u_s^{(i)} Q_i^{(i)}}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2i\xi_s \omega, \omega} \quad (s=1,2,\dots,n). \quad (6.4-9)$$

再以此式代入(6.4-7)式,并交换求和次序,得

$$q_r(t) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{s=1}^n \frac{u_r^{(i)} u_s^{(i)}}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2i\xi_s \omega, \omega} \right) Q_s(t) \quad (r=1,2,\dots,n). \quad (6.4-10)$$

与(6.4-3)式比较,可见

$$H_{r,p}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{u_r^{(i)} u_p^{(i)}}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i \omega, \omega} \quad (r,p=1,2,\dots,n). \quad (6.4-11)$$

此即频响函数与模态参数之间的关系。

如果在上面的分析中,选用的模态向量未经正规化处理,则与(6.4-4)式相对应,模态参数、自然坐标与自然坐标上的激励之间的关系为

$$\eta_s(t) = \frac{N_s(t)}{K_s - \omega^2 M_s + iC_s \omega} \quad (s=1,2,\dots,n). \quad (6.4-12)$$

其中 K_s 、 M_s 、 C_s 分别为第 s 阶模态刚度,模态质量和模态阻尼.对应于(6.4-11)式,可得

$$H_{r,r}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{u_r^{(r)} u_r^{(r)}}{K_r - \omega^2 M_r + i C_r \omega} \quad (6.4-13)$$

该式可进一步写成

$$\begin{aligned} H_{r,r}(\omega) &= \sum_{r=1}^n \frac{1}{K_{r,r} \{ (1 - \bar{\omega}_r^2) + 2i\xi_r \bar{\omega}_r \}} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{1}{M_{r,r}(\omega_r - \omega^2 + 2i\xi_r \omega_r \omega)} = \sum_{r=1}^n = H_{r,r,r}(\omega) \end{aligned} \quad (6.4-14)$$

式中 $\bar{\omega}_r = \omega/\omega_r$, 而 $K_{r,r} = K_r / (u_r^{(r)} u_r^{(r)})$, $M_{r,r} = M_r / (u_r^{(r)} \cdot u_r^{(r)})$ 分别称为等效刚度和等效质量, 它们之间显然有以下关系

$$K_{r,r} / M_{r,r} = K_r / M_r = \omega_r^2$$

(6.4-14)式是复函数, 可将其实部与虚部分开写成

$$\begin{aligned} H_{r,r}^R(\omega) &= \sum_{r=1}^n \frac{1 - \bar{\omega}_r^2}{K_{r,r} \{ (1 - \bar{\omega}_r^2)^2 + (2\xi_r \bar{\omega}_r)^2 \}} \\ &= \sum_{r=1}^n H_{r,r,r}^R(\omega) \end{aligned} \quad (6.4-15)$$

$$\begin{aligned} H_{r,r}^I(\omega) &= \sum_{r=1}^n \frac{-2\xi_r \bar{\omega}_r}{K_{r,r} \{ (1 - \bar{\omega}_r^2)^2 + (2\xi_r \bar{\omega}_r)^2 \}} \\ &= \sum_{r=1}^n H_{r,r,r}^I(\omega) \end{aligned}$$

而

$$H_{r,r}(\omega) = H_{r,r}^R(\omega) + iH_{r,r}^I(\omega), \quad (6.4-16)$$

其模为

$$|H_{r,r}(\omega)| = \sqrt{\{H_{r,r}^R(\omega)\}^2 + \{H_{r,r}^I(\omega)\}^2}, \quad (6.4-17)$$

其幅角为

$$\varphi_{r,r}(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{H_{r,r}^I(\omega)}{H_{r,r}^R(\omega)} \quad (6.4-18)$$

这里要提请读者注意, 由激振试验, 我们所得到的只是各个

频响函数的数值表，即 $H^R_r(\omega)$ 、 $H^I_r(\omega)$ 或 $|H_r(\omega)|$ 、 $\varphi_r(\omega)$ 在一系列频率点上的数值，或由这些数值绘成的曲线，如何由这些数字或曲线资料去推算出诸模态参数，是下面所要讲解的内容。

6.4.2 模态参数识别方法

1. 自由振动衰减法及半功率带宽法

在第一章中我们介绍了利用对数衰减率求粘性阻尼率 ξ 的方法，该方法也可用来测量多自由度系统的第一阶模态的阻尼率，如果要测量高阶模态的阻尼率，必须能激发出高阶模态的振动，并利用带通滤波器阻断其它各阶模态的自由振动，只容待测的那一阶通过，然后按单自由度情况处理。

在第二章中我们介绍了半功率带宽法求阻尼率，当多自由度系统的幅频曲线上模态分离较开，且为小阻尼时，该方法也可近似求高阶模态阻尼率。

在上述情况下，自然频率值可从自由振动衰减波形或频响曲线上找出。

在某一自然频率处，对结构进行激振，测出各自由度上的位移振幅分布，就可确定出该阶模态向量或振型。

2. 分量分析法

分量分析法就是将频响函数分成实部和虚部分量进行分析，(6.4-16)式是其基本公式，它是一种图解法，即从曲线上直接找出有关参数。

由(6.4-15)式可见，在某一频率下的传递函数为各阶模态传递函数的叠加。如图6.4-1所示，当激振频率 ω 趋近于第 r 阶模态的自然频率时，则该阶模态在传递函数中起主导作用，称为主导模态，在主导模态附近其它模态的影响比较小，特别当模态密度不很大，即各阶模态相距较远时，其它模态的传递函数数值很

小，且曲线比较平坦，几乎不随频率而变化，因此其余模态的影响可用一复常数 H_0 来表示，当 ω 在 ω_s 的邻域内时，(6.4-16)式可写成

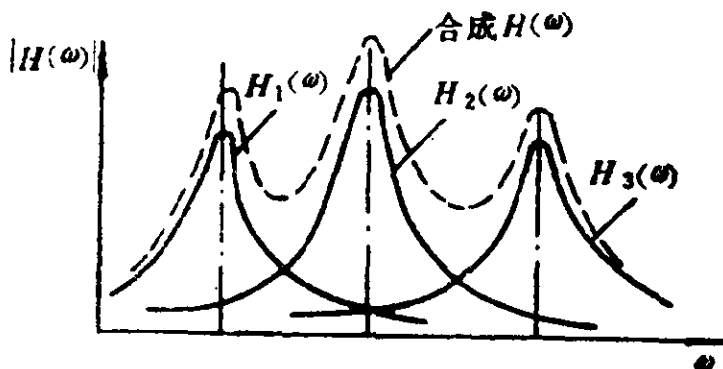


图 6.4-1

$$H_{s,s}(\omega) = H_{s,s,s}(\omega) + H_0 \\ = H_{s,s,s}^R(\omega) + iH_{s,s,s}^I(\omega) + H_0^R + iH_0^I, \quad (6.4-19)$$

其中

$$H_{s,s,s}^R(\omega) = \frac{1}{K_{s,s}} \frac{1 - \bar{\omega}_s^2}{[(1 - \bar{\omega}_s^2)^2 + (2\xi_s \bar{\omega}_s)^2]}, \quad (6.4-20)$$

$$H_{s,s,s}^I(\omega) = \frac{1}{K_{s,s}} \frac{-2\xi_s \bar{\omega}_s}{[(1 - \bar{\omega}_s^2)^2 + (2\xi_s \bar{\omega}_s)^2]}, \quad (6.4-21)$$

分别为第 s 阶模态频响函数的实部与虚部。复常数 H_0 称为剩余柔度， H_0^R 及 H_0^I 分别为其实部与虚部。基于以上三式，可以由实验求得的在第 s 阶模态附近的频响函数的实部与虚部曲线 $H_{s,s}^R(\omega)$ 、 $H_{s,s}^I(\omega)$ （见图6.4-2）近似地求出第 s 阶模态的模态参数，其方法如下：

(1)固有频率：可由虚频曲线峰值对应的频率点确定，峰值频率 $\omega \approx \omega_s \sqrt{1 - \frac{2}{3}\xi_s^2} \approx \omega_{s0}$ 。

(2)阻尼率：可由半功率带宽确定，设 $\bar{\omega}_{s1}$ 、 $\bar{\omega}_{s2}$ 为实频图上两个峰值点所对应的频率点，则第 s 阶模态阻尼率

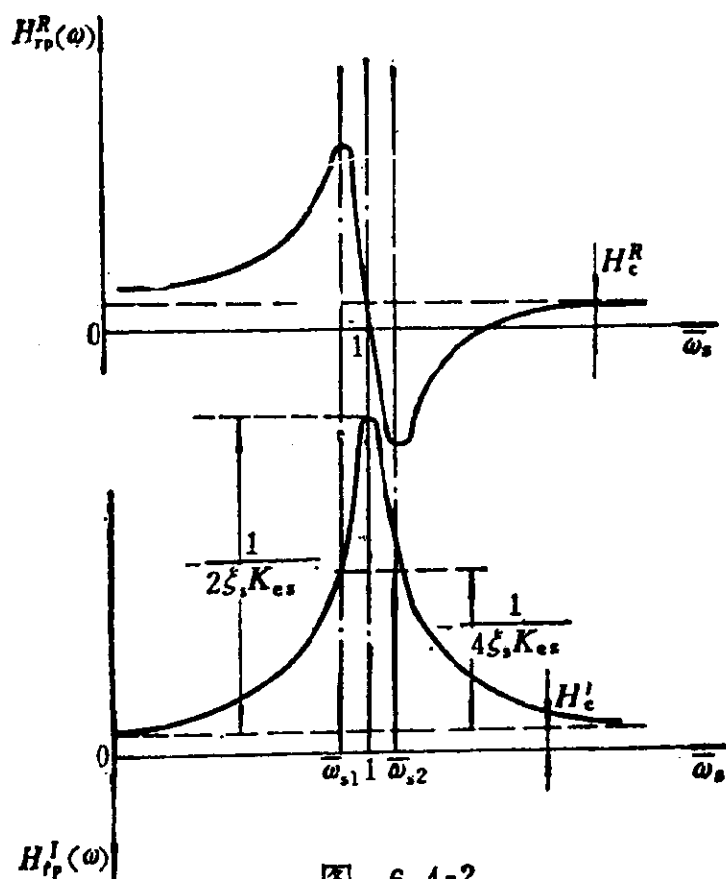


图 6.4-2

$$\xi_s = \frac{\omega_{s,2} - \omega_{s,1}}{2}$$

(3) 模态向量: 将自然频率 ω_s 代入 $H_{s,r}^I(\omega)$, 得虚频曲线的峰值,

$$H_{s,r,r,\max}^I \approx H_{s,r,r}^I(\omega_s) = \frac{-1}{2\xi_s K_{cs}} = \frac{-u_r^{(s)} u_r^{(s)}}{2\xi_s K_{cs}} \quad (6.4-22)$$

因此, 根据测量得到的传递函数矩阵 (6.4-1) 式中的任意一列 $\{H_{1,r}(\omega), H_{2,r}(\omega), \dots, H_{n,r}(\omega)\}^T$, 可求第 s 阶模态向量, 事实上

$$u_r^{(s)} = \frac{-2\xi_s K_{cs} H_{s,r,r,\max}^I}{u_r^{(s)}} \quad (r=1, 2, \dots, n),$$

即

$$\begin{pmatrix} u_1^{(s)} \\ u_2^{(s)} \\ \vdots \\ u_n^{(s)} \end{pmatrix} = \frac{-2\xi_s K_s}{u_r^{(s)}} \begin{pmatrix} H'_{s, 1, \max} \\ H'_{s, 2, \max} \\ \vdots \\ H'_{s, r, \max} \end{pmatrix} \quad (6.4-23)$$

由于对第 s 阶模态, $2\xi_s K_s / u_r^{(s)}$ 可视为常数, 因此对 n 自由度系统, 其 n 个虚频曲线在 ω_s 处的峰值组成的向量 $\{H'_{s, i, \max}\} = \{H'_{s, 1, \max}, H'_{s, 2, \max}, \dots, H'_{s, n, \max}\}^T$ 即可代表模态向量, 只是它尚未正规化。

(4) 模态刚度与质量

由(6.4-22)式, 得

$$K_s = \frac{-u_r^{(s)} u_r^{(s)}}{2\xi_s H'_{s, r, \max}}, \quad (6.4-24)$$

而 $M_s = K_s / \omega_s^2. \quad (6.4-25)$

如果按(4.5-15)式对模态向量正规化, 则

$$M_s = 1, K_s = \omega_s^2 \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

分量分析法在系统模态密度不高时, 具有足够的精度, 但由于它仅利用了频响函数曲线峰值点的信息来确定模态参数, 当峰值点有误差时, 识别精度受到影响。

3. 导纳圆分析法(Nyquist图法或矢量分析法)

利用第二章介绍的Nyquist图也可识别系统的模态参数。由于频率、阻尼及刚度的影响在图上得到了放大, 故识别效果会比前述方法更好, 下面以结构阻尼为例来详细讨论这个问题。将(2.1-42)式拆开实部与虚部, 可写成

$$H_{r, s}(\omega) = H_r^R(\omega) + iH_r^I(\omega) \quad (6.4-26)$$

其中 $H_r^R(\omega) = \frac{1}{K_{s, s}} \frac{1 - \overline{\omega_s^2}}{[(1 - \overline{\omega_s^2})^2 + \xi_s'^2]}$,

$$H_r^I(\omega) = \frac{1}{K_{s, s}} \frac{-\xi_s'}{[(1 - \overline{\omega_s^2})^2 + \xi_s'^2]} \quad (6.4-27)$$

以上三式中的下标 s 表示所考虑的是多自由度系统的第 s 个模态。此外，以上两式分母中还有等效刚度 $K_{..}$ ，因为与(2.1-42)式略有不同，这里是以对应于第 s 个自然坐标的广义力 $N_s(t)$ 作为输入，类似于(6.4-4)式所示。

从以上两式中消去 $(1 - \omega^2)$ ，得

$$[H_s^R(\omega)]^2 + \left[H_s^I(\omega) + \frac{1}{2K_{..}\xi_s'} \right]^2 = \left(\frac{1}{2K_{..}\xi_s'} \right)^2, \quad (6.4-28)$$

此式在复平面上代表一个圆，称为导纳圆，它具有以下特点：

(1) 导纳圆的起点坐标 $H_s^R(\omega)|_{\omega=0} = \frac{1}{K_{..}} \frac{1}{1 + \xi_s'^2}$,

$H_s^I(\omega)|_{\omega=0} = \frac{1}{K_{..}} \frac{-\xi_s'}{1 + \xi_s'^2}$ ，由于 $\xi_s'^2 \ll 1$ ，故在实际的分析中取

$$H_s^R(0) = \frac{1}{K_{..}}, \quad H_s^I(0) = \frac{-\xi_s'}{K_{..}}$$

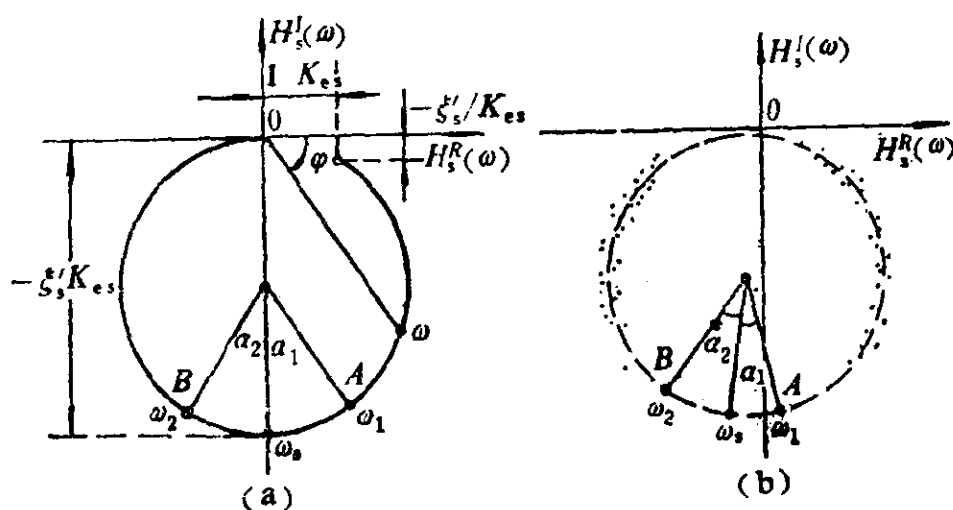


图 6.4-3

(2) 当 $\omega = \omega_s$ 时， $H_{s,max}^I = H_s^I(\omega_s) = -\frac{1}{K_{..}\xi_s'}$ ，为导纳圆与虚轴之交点。其绝对值为导纳圆的直径。

(3) 设 s 表示导纳圆的弧长，则 $\frac{ds}{d\omega}$ 在 $\omega \approx \omega_s$ 时取最大值。

读者可自行证明这一点。

利用上述特性，可由激振试验得到的导纳圆曲线识别模态参数。

从理论上讲， $H^R(\omega)$ 、 $H^I(\omega)$ 在复平面上构成一个圆，但由于各种误差，实测的频响函数数据点不一定都落在理论圆上，实际的作法是寻找一个最佳圆，使该圆上的相应数据与实测值之间误差最小。

设 $H^R(\omega_k) = x_k$ ， $H^I(\omega_k) = y_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$)。

为实测值，拟合圆的方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (6.4-29)$$

采用最小二乘拟合，使偏差 E 为最小

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^m \{ (x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 - R^2 \}^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + ax_k + by_k + c)^2. \end{aligned} \quad (6.4-30)$$

其中

$$a = -2x_0, \quad b = -2y_0, \quad c = x_0^2 + y_0^2 - R^2.$$

由

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial c} = 0, \quad (6.4-31)$$

可得下列方程组

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + ax_k + by_k + c)x_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + ax_k + by_k + c)y_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + ax_k + by_k + c) &= 0. \end{aligned} \quad (6.4-32)$$

写成矩阵形式

$$\begin{cases} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma y_i^2 & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma y_i & m \end{cases} \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases} = \begin{cases} -\Sigma(x_i^2 + x_i y_i^2) \\ -\Sigma(x_i^2 y_i + y_i^2) \\ -\Sigma(x_i^2 + y_i^2) \end{cases} \quad (6.4-33)$$

由上式可解出 a 、 b 、 c ，从而可求得拟合圆参数

$$x_0 = -\frac{a}{2}, \quad y_0 = -\frac{b}{2}, \quad R = \sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2 - c}. \quad (6.4-34)$$

这样就可作出对应的导纳圆，如图6.4-3(b)虚线所示。待识别的模态参数求法如下：

(1) 自然频率

将频响函数实测点标注在图6.4-3(b)上，如激振试验采用等频率间隔扫描，则图中相邻距离最大的点对应的频率即为自然频率，若不是等间隔扫描，则图中相邻点间距离与其对应的频率间隔之比为最大者所对应的频率即为自然频率。

(2) 模态向量

对第 s 阶模态，由各坐标 $q_r(t)$ ($r=1, 2, \dots, n$) 的频响函数作出对应的导纳圆，导纳圆的半径组成的向量 $\{R\}$ 即代表了第 s 阶模态向量。实际上由(6.4-28)式，并考虑到前述 $K_{..}$ 的定义，有

$$2R_r = \frac{1}{K_{..}\xi'_s} = \frac{u_r^{(s)} u_s^{(s)}}{K_{..}\xi'_s} \quad (r=1, 2, \dots, n).$$

因而

$$\begin{pmatrix} u_1^{(s)} \\ u_2^{(s)} \\ \vdots \\ u_n^{(s)} \end{pmatrix} = \frac{2K_{..}\xi'_s}{u_s^{(s)}} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad (6.4-35)$$

(3) 模态阻尼

在自然频率 ω_s 附近取两点 A 、 B (如图6.4-3(a)所示)，其对应的频率分别为 ω_1 、 ω_2 ，相应的导纳圆上的圆心角为 α_1 、 α_2 ，

考虑到(6.4-27)式, 有

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{H_2^R(\omega_1)}{H_2^I(\omega_1)} = \frac{1 - (\omega_1/\omega_s)^2}{\xi_s'}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{H_2^R(\omega_2)}{H_2^I(\omega_2)} = \frac{(\omega_2/\omega_s)^2 - 1}{\xi_s'}$$

将上两式相加, 整理后得

$$\xi_s' = \frac{(\omega_2/\omega_s)^2 - (\omega_1/\omega_s)^2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}} \approx 2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_s} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}} \quad (6.4-36)$$

对于实测数据的拟合导纳圆 (如图6.4-3(b)), 虽其圆心坐标较之理论导纳圆 (图6.4-3(a)) 平移了一定距离, 仍可按(6.4-36)

式计算模态阻尼。

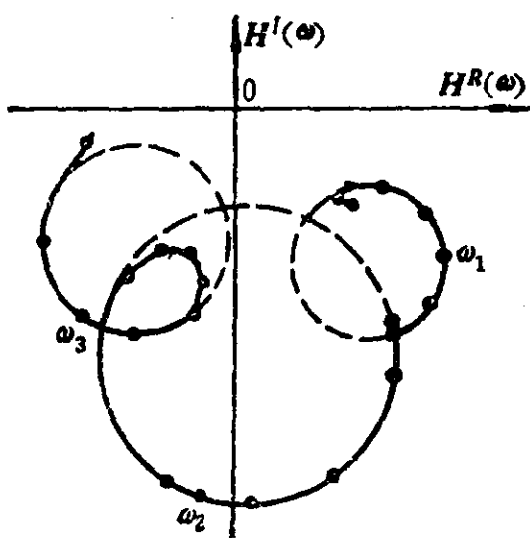


图 6.4-4

在前面的讨论中我们只涉及了单一模态, 实际上多自由度系统的导纳圆由于各模态间的叠加, 会在复平面上产生平移或旋转, 且由于存在多个模态, 同一测点(坐标)上的频响函数 $H_{22}(\omega)$ 会形成多个导纳圆, 它们不一定是完整的圆, 而是几个弧段, 各阶模态对应有一个弧段,

因此可根据每一个弧段拟合一个

圆, 然后根据各拟合圆, 按单模态的情况分别识别对应的模态参数。图6.4-4是对一个具有三个模态的频响函数测试数据进行曲线拟合得到的导纳圆, 图上 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 为识别出的三阶自然频率。

上面讨论的是结构阻尼的情况, 对于粘性阻尼, 系统的频响函数在复平面上绘出的Nyquist图则不是一个圆, 但在小阻尼或在自然频率附近, 其Nyquist图仍接近于一个圆, 因此对其各阶自然频率附近的频响函数测量值, 仍可按上述方法进行参数识

别。

导纳圆分析法利用了频响函数峰值附近的多点信息，可避免峰值误差造成的影响，而且求模态参数时可计及邻近模态的影响，只要诸模态的分布不过分密集，此方法的精度可满足工程需要。

§ 6.5 物理参数识别与修改

物理参数识别是指通过试验数据识别振动系统的物理参数，即质量矩阵 $[m]$ 、刚度矩阵 $[k]$ 和阻尼矩阵 $[c]$ 。

物理参数识别一般有两种方法，一种是先识别系统的模态参数，然后转换为物理参数；另一种是先建立系统的分析模型，用分析或静态试验初步确定其所有物理参数，然后用振动试验的结果来修改该分析模型，最终确定系统的物理参数。

6.5.1 由模态参数确定振动系统的物理参数

按上节的方法，对多自由度系统进行模态参数识别，得到

$\{\omega_i\}$, $\{u_i\}$ 。需求 $[M]$, $[K]$, $[C]$ ，利用正交性条件

$$\begin{aligned} [M] &= \{u\}^T \{m\} \{u\}, \\ [K] &= \{u\}^T \{k\} \{u\}, \\ [C] &= \{u\}^T \{C\} \{u\}. \end{aligned} \quad (6.5-1)$$

可推得系统在物理坐标中的质量矩阵、刚度矩阵及阻尼矩阵

$$\{m\} = (\{u\}^T)^{-1} [M] \{u\}^{-1},$$

$$\{k\} = (\{u\}^T)^{-1} \left[\begin{array}{c} K \\ \dots \end{array} \right] \{u\}^{-1}, \quad (6.5-2)$$

$$\{c\} = (\{u\}^T)^{-1} \left[\begin{array}{c} C \\ \dots \end{array} \right] \{u\}^{-1}.$$

(6.5-2)式是由模态参数求物理参数的基本公式。

例6.1 图6.5-1所示为汽车振动舒适性研究中的人-椅系统，该系统可简化为图6.5-1所示的三自由度系统，其中 m_1, k_1, c_1 由人体上身上肢简化而成， m_2, k_2, c_2 由人体下肢简化而成，在有关的人体工程学研究专门对人体模型进行了试验分析，已求得以上六个参数的具体数值。又由于座垫很轻，可取 $M = 0$ 。

要求通过试验分析确定座椅的参数 k, c 。

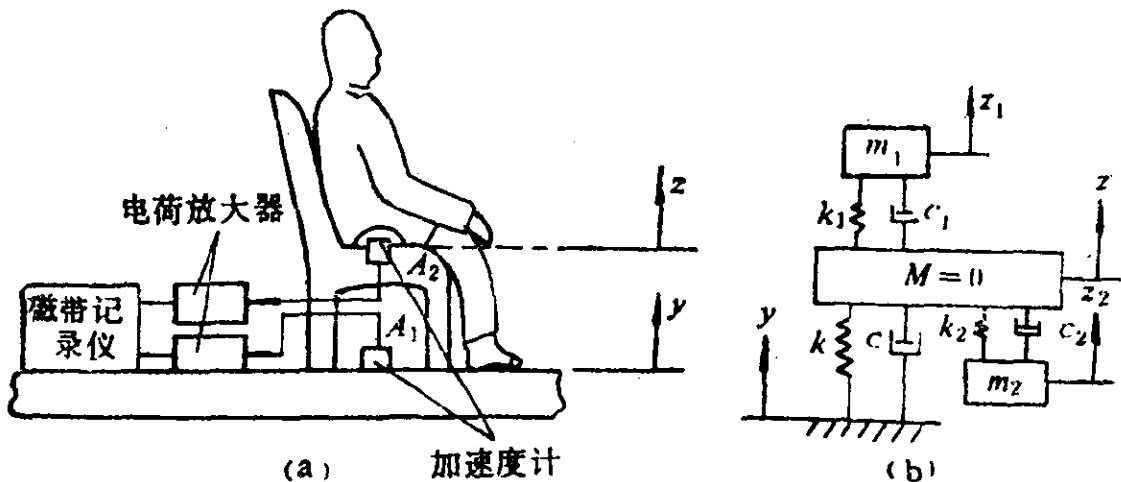


图 6.5-1

解：对图6.5-1所示的系统可写出运动方程

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}) + k_1(z_1 - z) = 0, \quad (a)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}) + k_2(z_2 - z) = 0, \quad (b)$$

$$M \ddot{z} + c_1(\dot{z} - \dot{z}_1) + k_1(z - z_1) + c_2(\dot{z} - \dot{z}_2) + k_2(z - z_2) + k(z - y) + c(\dot{z} - \dot{y}) = 0. \quad (c)$$

将前两式代入第三式，并将 $M = 0$ 代入，整理，可得

$$m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2 + c \dot{z} + kz = c \dot{y} + ky. \quad (d)$$

(a)、(b)、(d)三式组成了系统的运动方程，该系统的激励是座椅基础的运动 $y(t)$ 。

从运动方程可推得，当 $y(t)$ 为激励、 $z(t)$ 为响应时的频率响应函数为

$$H_{z,y}(\omega) = \frac{\omega_n + 2i\xi\omega_n\omega}{\omega_n - (\mu_1 H_{z_1,z}(\omega) + \mu_2 H_{z_2,z}(\omega))\omega^2 + 2i\xi\omega_n\omega} \quad (e)$$

其中

$$H_{z_1,z}(\omega) = \frac{\omega_{1n}^2 + 2i\xi_1\omega_{1n}\omega}{\omega_{1n}^2 - \omega^2 + 2i\xi_1\omega_{1n}\omega} \quad (f)$$

$$H_{z_2,z}(\omega) = \frac{\omega_{2n}^2 + 2i\xi_2\omega_{2n}\omega}{\omega_{2n}^2 - \omega^2 + 2i\xi_2\omega_{2n}\omega}$$

式中

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1 / (2\sqrt{m_1 k_1}), \xi_2 = c_2 / (2\sqrt{m_2 k_2}), \omega_{1n} = \sqrt{k_1 m_1}, \\ \omega_{2n} &= \sqrt{k_2 / m_2}, \xi = c / (2\sqrt{mk}), \omega_n = \sqrt{k/m}, \\ m &= m_1 + m_2, \mu_1 = m_1/m, \mu_2 = m_2/m = 1 - \mu_1. \end{aligned} \quad (g)$$

因为 m_1 、 k_1 、 c_1 、 m_2 、 k_2 、 c_2 已知，所以 $H_{z,y}(\omega)$ 中仅有 ξ 和 ω_n 是待识别的模式参数。

另一方面，为了从试验中获得 $H_{z,y}(\omega)$ ，本应采用前述的各种激振方法对车厢底板即座椅基础进行激励，但汽车在行驶的时候总是受到粗糙不平的路面的激励，这种激励可近似作为具有平稳各态历经的随机激振源。因此图6.5-1所示的测试系统中不再包含激振部分。

采用加速度计 A_1 、 A_2 分别拾取激励信号 $\ddot{y}(t)$ 及响应信号 $\ddot{z}(t)$ ，它们分别安装在车厢底板和座椅上。经电荷放大器放大后送入磁带记录仪存贮，然后送回实验室按(6.3-6)式进行分析处理，求出 $H_{z,y}(\omega)$ 。图6.5-2示出的是由上述试验中得到的 $H_{z,y}(\omega)$ 的幅频特性曲线和相频特性曲线。根据这两条曲线，按 $H_{z,y}(\omega)$

的表达式(e), 采用最小二乘法, 可识别出参数 ξ 、 ω_n , 并拟合出 $|H_{xy}(\omega)|$ 曲线, 该曲线以虚线表示在图6.5-2中。

最后将 ω_n 、 ξ 回代到(g)式即可求得 k 、 c 。

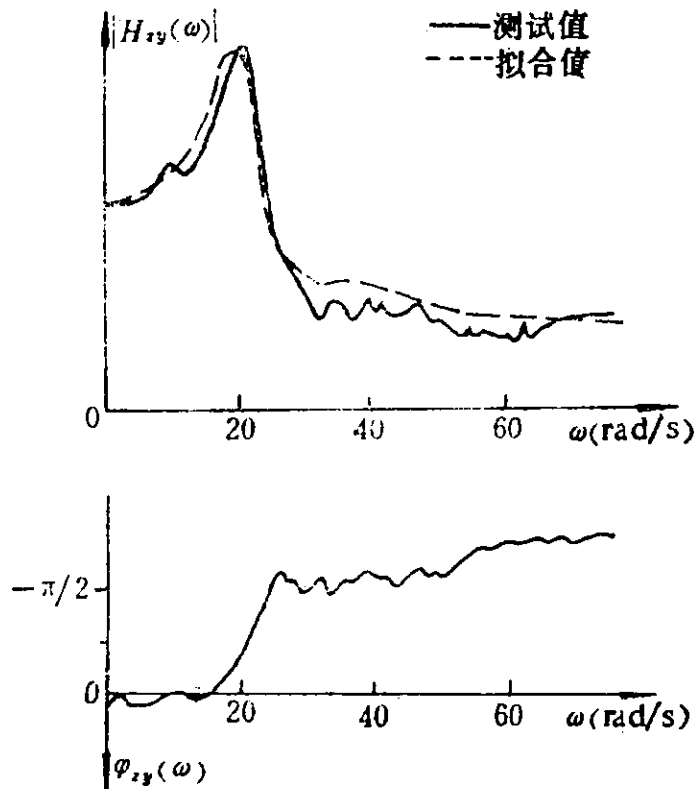


图 6.5-2

6.5.2 模型物理参数的修改

在有些情况下, 通过对结构的分析计算, 可得到系统的质量矩阵和刚度矩阵的近似值 $\{m_0\}$ 、 $\{k_0\}$, 而希望利用实验模态分析的结果对其进行修改, 以期求得系统的精确的物理参数, 即系统的真实的质量矩阵和刚度矩阵 $\{m\}$ 、 $\{k\}$, 此即结构参数修改。

设 $\{m_0\}$ 、 $\{k_0\}$ 相应的模态矩阵为 $\{u_0\}$, 频率矩阵为 $\begin{bmatrix} \omega_0^2 & \\ & \end{bmatrix}$, 它们满足正交性条件:

$$\{u_0\}^T \{m_0\} \{u_0\} = \{1\}, \quad (6.5-3)$$

$$\{u_0\}^T \{k_0\} \{u_0\} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & \\ & \end{bmatrix}. \quad (6.5-4)$$

而对实际系统进行振动测试得到的结果为 $\left[\begin{array}{c} \omega^2 \\ \backslash \end{array} \right]$, $\{u\}$, 要求确定系统的 $\{m\}$, $\{k\}$.

设上述参数之间有下列关系

$$\{u\} = \{u_0\} + \{\Delta u\}, \quad (6.5-5)$$

$$\left[\begin{array}{c} \omega^2 \\ \backslash \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \backslash \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \Delta \omega^2 \\ \backslash \end{array} \right], \quad (6.5-6)$$

$$\{m\} = \{m_0\} + \{\Delta m\}, \quad (6.5-7)$$

$$\{k\} = \{k_0\} + \{\Delta k\}. \quad (6.5-8)$$

由以上诸式可见, 如果由已知的 $\{\Delta u\}$, $\left[\begin{array}{c} \Delta \omega^2 \\ \backslash \end{array} \right]$ 求得 $\{\Delta m\}$, $\{\Delta k\}$, 则系统的 $\{m\}$, $\{k\}$ 也就可确定了. 当 $\{\Delta u\}$, $\left[\begin{array}{c} \Delta \omega^2 \\ \backslash \end{array} \right]$ 是小量 (矩阵), 即试验结果与分析法结果相差很小时, 可采用下面介绍的摄动法推求 $\{\Delta m\}$, $\{\Delta k\}$. 设 $\{\Delta u\}$ 可用 $\{u_0\}$ 表达为

$$\{\Delta u\} = \{u_0\} \{\alpha\}. \quad (6.5-9)$$

式中 $\{\alpha\}$ 是系数矩阵, 它的所有元素也应是小量. 将 (6.5-9) 式代入 (6.5-5) 式, 得

$$\{u\} = \{u_0\} (\{1\} + \{\alpha\}). \quad (6.5-10)$$

而系统真实的质量矩阵、刚度矩阵 $\{m\}$, $\{k\}$ 与测试得到的 $\{u\}$, $\left[\begin{array}{c} \omega^2 \\ \backslash \end{array} \right]$ (即系统真实的模态矩阵、频率矩阵) 之间满足正交性条件:

$$\{u\}^T \{m\} \{u\} = \{1\}, \quad (6.5-11)$$

$$\{u\}^T \{k\} \{u\} = \left[\begin{array}{c} \omega^2 \\ \backslash \end{array} \right]. \quad (6.5-12)$$

将 (6.5-7) 式及 (6.5-10) 式代入 (6.5-11) 式, 得

$$(\{\alpha\}^T + \{1\}) \{u_0\}^T (\{m_0\} + \{\Delta m\}) \{u_0\} (\{1\} + \{\alpha\}) = \{1\},$$

整理得

$$\begin{aligned} (\{\alpha\}^T + \{1\}) (\{u_0\}^T \{m_0\} \{u_0\} + \{u_0\}^T \{\Delta m\} \{u_0\}) (\{1\} + \{\alpha\}) \\ = \{1\}, \end{aligned}$$

将(6.5-3)代入上式, 得

$$(\{\alpha\}^T + \{1\})(\{1\} + \{u_0\}^T \{\Delta m\} \{u_0\})(\{1\} + \{\alpha\}) = \{1\},$$

注意到上式中 $\{\alpha\}$ 、 $\{\Delta m\}$ 都是小量, 将上式左边展开, 略去二阶微量, 整理后得到

$$\{u_0\}^T \{\Delta m\} \{u_0\} = -\{\alpha\} - \{\alpha\}^T, \quad (6.5-13)$$

与此类似, 将(6.5-8)式及(6.5-10)式代入(6.5-12)式, 并利用(6.5-4)式, 略去二阶微量, 可得

$$\begin{aligned} \{u_0\}^T \{\Delta k\} \{u_0\} = & \left[\Delta \omega_{\cdot} \right] - \left[\omega_{\cdot}^2 \right] \{\alpha\} \\ & - \{\alpha\}^T \left[\omega_{\cdot}^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.5-14)$$

对(6.5-13)式, 前乘 $\{u_0\}^{-T}$, 后乘 $\{u_0\}^{-1}$, 得

$$\{\Delta m\} = -\{u_0\}^{-T} (\{\alpha\} + \{\alpha\}^T) \{u_0\}^{-1}, \quad (6.5-15)$$

式中 $\{u_0\}^{-T}$ 表示 $(\{u_0\}^{-1})^T$ 。由(6.5-3)式左乘 $\{u_0\}^{-T}$, 得

$$\{m_0\} \{u_0\} = \{u_0\}^{-T}, \quad (6.5-16)$$

由(6.5-3)式右乘 $\{u_0\}^{-1}$ 可得

$$\{u_0\}^T \{m_0\} = \{u_0\}^{-1}, \quad (6.5-17)$$

另一方面, 由(6.5-10)式左乘 $\{u_0\}^{-1}$, 并将(6.5-17)式代入整理得

$$\{\alpha\} = \{u_0\}^{-1} \{u\} - \{1\} = \{u_0\}^T \{m_0\} \{u\} - \{1\}, \quad (6.5-18)$$

于是, 将(6.5-18)、(6.5-17)式及其转置分别代入(6.5-15)式, 便可得到确定 $\{\Delta m\}$ 的公式:

$$\begin{aligned} \{\Delta m\} = & \{m_0\} \{u_0\} (2\{1\} - \{u_0\}^T \{m_0\} \{u\}) \\ & - \{u\}^T \{m_0\} \{u_0\} \{u_0\}^T \{m_0\}. \end{aligned} \quad (6.5-19)$$

与此类似, 由(6.5-14)式得

$$\begin{aligned} \{\Delta k\} = & \{u_0\}^{-T} \left(\left[\Delta \omega_{\cdot} \right] - \left[\omega_{\cdot}^2 \right] \{\alpha\} \right. \\ & \left. - \{\alpha\}^T \left[\omega_{\cdot}^2 \right] \right) \{u_0\}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.5-20)$$

由(6.5-4)左乘 $\{u_0\}^{-T}$, 可得

$$\{k_0\}\{u_0\} = \{u_0\}^{-T} \left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right], \quad (6.5-21)$$

由(6.5-4)右乘 $\{u_0\}^{-1}$, 可得

$$\{u_0\}^T \{k\} = \left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right] \{u_0\}^{-1}, \quad (6.5-22)$$

另一方面, 由(6.5-10)式左乘 $\{u_0\}^{-1}$, 并将(6.5-22)式代入整理得

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right] \{a\} &= \left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right] (\{u_0\}^{-1}\{u\} - \{1\}) \\ &= \{u_0\}^T \{k\} \{u\} - \left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (6.5-23)$$

将上式及其转置与(6.5-16)、(6.5-17)式分别代入(6.5-20), 得

$$\begin{aligned} \{\Delta k\} &= \{m_0\}\{u_0\} \left(\left[\begin{array}{c} \Delta \omega_0^2 \\ \vdots \\ \Delta \omega_n^2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right] - \{u_0\}^T \{k\} \{u\} \right. \\ &\quad \left. - \{u\}^T \{k\} \{u_0\} \right) \{u_0\}^T \{m_0\}. \end{aligned} \quad (6.5-24)$$

再将(6.5-6)式代入上式, 得到确定 $\{\Delta k\}$ 的公式:

$$\begin{aligned} \{\Delta k\} &= \{m_0\}\{u_0\} \left(\left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \end{array} \right] - \{u_0\}^T \{k\} \{u\} \right. \\ &\quad \left. - \{u\}^T \{k\} \{u_0\} \right) \{u_0\}^T \{m_0\}. \end{aligned} \quad (6.5-25)$$

6.5.3 模态参数随物理参数变化的灵敏度

前面介绍的物理参数修改方法也是振动系统优化设计的有力工具。借助这种方法, 可选择或修改系统的物理参数, 使振动系统具有预定的自然频率或振型等特性。在这类问题中, 有必要研究自然频率、模态向量等模态参数随系统物理参数的变化, 探讨模态参数对质量、刚度的哪一部分的变化最敏感, 即所谓灵敏度问题。

讨论一个无阻尼 n 自由度系统, 其自由振动方程为

$$\{m\} \ddot{\{q\}}(t) + \{k\} \{q\}(t) = \{0\}, \quad (6.5-26)$$

与之对应的特征值问题方程为

$$((k) - \omega^2(m))\{u\} = \{0\}, \quad (6.5-27)$$

构造以下对称矩阵

$$(F) = (k) - \omega^2(m), \quad (6.5-28)$$

则有

$$(F)\{u\} = \{0\}. \quad (6.5-29)$$

系统的各阶模态 $\omega_r, \{u^{(r)}\}$ ($r = 1, 2, \dots, n$), 可由上面的方程解出, 因此有

$$(F^{(r)})\{u^{(r)}\} = \{0\} \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (6.5-30)$$

其中

$$(F^{(r)}) = (k) - \omega_r^2(m) \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (6.5-31)$$

以 $\{u^{(r)}\}^T$ 左乘(6.5-30)式, 得

$$\{u^{(r)}\}^T (F^{(r)}) \{u^{(r)}\} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (6.5-32)$$

把系统的自然频率和模态向量均看作物理参数的函数, 将(6.5-32)式对物理参数变量 s (系统的某个物理参数, 例如 k_i 或 m_i)求偏导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{u^{(r)}\}^T}{\partial s} (F^{(r)}) \{u^{(r)}\} + \{u^{(r)}\}^T \frac{\partial (F^{(r)})}{\partial s} \{u^{(r)}\} \\ + \{u^{(r)}\}^T (F^{(r)}) \frac{\partial \{u^{(r)}\}}{\partial s} = 0. \end{aligned} \quad (6.5-33)$$

又由(6.5-30)转置可得

$$\{u^{(r)}\}^T (F^{(r)})^T = \{u^{(r)}\}^T (F^{(r)}) = \{0\}^T, \quad (6.5-34)$$

以上式及(6.5-30)式代入(6.5-33)式, 得

$$\{u^{(r)}\}^T \frac{\partial (F^{(r)})}{\partial s} \{u^{(r)}\} = 0, \quad (6.5-35)$$

再将(6.5-31)式代入上式, 得

$$\{u^{(r)}\}^T \left(\frac{\partial (k)}{\partial s} - 2\omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial s} (m) - \omega_r^2 \frac{\partial (m)}{\partial s} \right) \{u^{(r)}\} = 0, \quad (6.5-36)$$

选取正规化模态向量 $\{u^{(r)}\}$, 使之满足

$$\{u^{(r)}\}^T (m) \{u^{(r)}\} = 1, \quad (6.5-37)$$

以上式代入(6.5-36)式, 得

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial s} = \frac{1}{2\omega_r} \{u^{(r)}\}^T \frac{\partial(k)}{\partial s} \{u^{(r)}\} - \frac{\omega_r}{2} \{u^{(r)}\}^T \frac{\partial(m)}{\partial s} \{u^{(r)}\}. \quad (6.5-38)$$

上式表示了系统第 r 阶自然频率 ω_r 随系统物理参数 s 变化的灵敏度。同样可导出模态向量对于物理参数 s 变化的灵敏度表达式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{u^{(r)}\}}{\partial s} = & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^n \frac{-\{u^{(k)}\}^T \frac{\partial(F^{(k)})}{\partial s} \{u^{(k)}\}}{\omega_k - \omega_r^2} \{u^{(k)}\} \\ & - \frac{1}{2} \{u^{(r)}\}^T \frac{\partial(m)}{\partial s} \{u^{(r)}\} \{u^{(r)}\}. \end{aligned} \quad (6.5-39)$$

图6.5-3是船舶推进轴系的扭转振动模型, 它由 n 个集中惯量 I_i 和 $n-1$ 个不计质量的弹性轴段组成, 其运动方程为

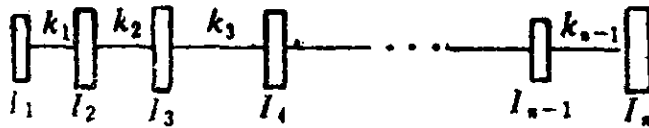


图 6.5-3

$$[I]\{\ddot{\theta}(t)\} + [K]\{\theta(t)\} = \{0\}. \quad (6.5-40)$$

其中 $\{\theta(t)\}$ 为集中惯量的转角向量, 而

$$[I] = \begin{pmatrix} I_1 & & & & \\ & I_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_n \end{pmatrix},$$

$$[K] = \begin{pmatrix} k_1 & & & & & \\ -k_1 & k_1+k_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -k_{n-2} & k_{n-2}+k_{n-1} & & \\ & & & -k_{n-1} & k_{n-1} & \\ & & & & -k_{n-1} & k_{n-1} \end{pmatrix}.$$

利用公式(6.5-38)可得

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial I_j} = -\frac{1}{2} \omega_r (u_j^{(r)})^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (6.5-41)$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial k_j} = \frac{1}{2\omega_r} (u_j^{(r)} - u_{j+1}^{(r)})^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (6.5-42)$$

在轴系的设计中必须使轴系的自然频率避开已选定的柴油机及螺旋桨激振力的频率，如果轴系结构大体上已确定，可利用(6.5-41)、(6.5-42)式选择最有利的参数 I_j 、 k_j 进行调整，来满足避振要求。

思 考 题

1. 什么是“理论模型”？为什么说“理论模型”的方法是振动工程的基本方法之一？在振动测试分析中，是否也用实物模型？这两种模型各有何长短？如何相互补充，配合使用？
2. 图6.1-5所示的力传感器中， m_2 的存在会影响测试结果， m_1 有无影响？为什么？
3. 图6.1-6所示阻抗头中，测力与测加速度的传感器 F 与 A 的位置能否交换？为什么？
4. 你知道由(6.1-15)式是如何近似得到(6.1-16)式的吗？
5. 在电磁式激振器中，如果只通入交流电 $I(t) = A \sin \omega t$ ，而无直流成分 I_0 ，会有什么结果（激励的频率波形）？
6. 冲击激励不过是一击了事，如何理解它相当于各种频率的谐波在同时地、均衡地激励？
7. 试比较以白噪声进行随机激励和以脉冲函数进行冲击激励这两种方法，在原理上和具体作法上的异同，指出各自的优缺点。

习 题

6-1 质量为0.05kg的传感器安装在一个50kg质量的振动系统上，若安装传感器前系统的自然频率为10Hz。装上传感器后，确定新的系统的自

然频率。

6-2 某石英晶体加速度传感器的技术规范如下，频率范围：0~15 kHz；动态线性测量范围：±3500g；灵敏度：5pC/g；有阻尼自然频率：22kHz；质量：0.05kg；分辨力：0.002kg；横向灵敏度最大2%；试求1) 计算振动加速度为0.21g时的电荷输出；2) 当横向振动加速度幅值为1000g时，确定最大电荷输出量。

6-3 用石英晶体加速度计及电荷放大器测量机械的振动，已知加速度计灵敏度为5pC/g；电荷放大器灵敏度50mV/pC，当机器达到最大加速度值时相应的输出电压幅值等于2V，计算该机器的振动加速度。

6-4 某磁电式速度传感器技术规范如下，频率范围：20~1000Hz，测量范围：振幅，最大峰-峰值5mm，加速度0.1~30g，对10kΩ电阻负载的灵敏度4.88±0.8V/(m/s)，质量170克，有阻尼自然频率5Hz，线圈电阻600Ω，传感器横向灵敏度最大20%，试求1) 在有效载荷作用下，测得上述规范所列出的最小频率时的最大振幅，试计算此时的输出电压；2) 当频率为100Hz时测得输出电压峰-峰值为0.5V，试确定此时的速度及位移幅值。

6-5 一工程结构，利用单点激振进行振动试验，由频谱分析仪给出下列附表频率响应函数数据，试用导纳圆分析法对该结构的第一、二阶模态分别拟合导纳圆并识别模态参数。

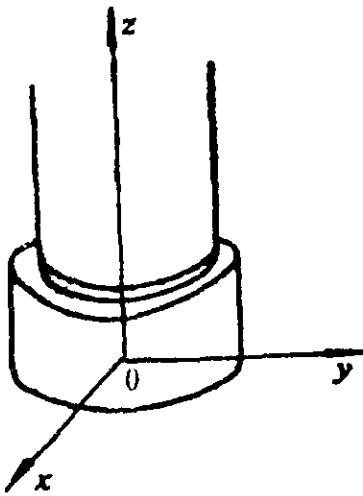


图 6-7

6-6 试用分量分析法求解习题6-5。

6-7 图6-7所示为一立式铣头，其上装有模拟铣刀，后者实际上是一衔铁，为测定该立铣头的动态特性，以三向电磁激振器对衔铁分别在x、y、z三个方向进行激励；在每一个方向激励下，又在x、y、z三个不同的方向上测定响应，从而测得9个频响函数，而构成矩阵 $[H(\omega)]$ 。

$$[H(\omega)] = \begin{pmatrix} H_{xx}(\omega) & H_{xy}(\omega) & H_{xz}(\omega) \\ H_{yx}(\omega) & H_{yy}(\omega) & H_{yz}(\omega) \\ H_{zx}(\omega) & H_{zy}(\omega) & H_{zz}(\omega) \end{pmatrix}$$

其中 $H_{xy}(\omega)$ 是在y方向激励而在x方向测量响应，所得到的频响函数，依此类推。试以上述测试资料为依据，计算出在任意方向 $\{q\} = \{q_x, q_y, q_z\}^T$ 激振，而在任意方向 $\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ 测振，所得到的频响函数。设

$\{q\}$ 与 $\{u\}$ 均为单位长度的向量，而系统为线性的。

附表：结构在其第一、二阶模态邻域内的频响函数数据

第一阶模态邻域			第二阶模态邻域		
频率 (Hz)	$H^R(\omega)$ (cm/9.8N)	$H^I(\omega)$ (cm/9.8N)	频率 (Hz)	$H^R(\omega)$ (cm/9.8N)	$H^I(\omega)$ (cm/9.8N)
10.50	46.15×10^{-3}	-2.31×10^{-3}	52.50	12.76×10^{-4}	-1.08×10^{-4}
10.60	55.52×10^{-3}	-7.26×10^{-3}	53.00	18.57×10^{-4}	-2.66×10^{-4}
10.70	70.73×10^{-3}	-14.28×10^{-3}	53.10	21.55×10^{-4}	-3.39×10^{-4}
10.80	104.26×10^{-3}	-33.80×10^{-3}	53.20	25.90×10^{-4}	-5.76×10^{-4}
10.82	116.10×10^{-3}	-41.38×10^{-3}	53.30	38.87×10^{-4}	-22.12×10^{-4}
10.85	140.44×10^{-3}	-58.41×10^{-3}	53.35	46.12×10^{-4}	-42.65×10^{-4}
10.88	185.27×10^{-3}	-99.20×10^{-3}	53.40	42.27×10^{-4}	-67.42×10^{-4}
10.90	187.05×10^{-3}	-167.28×10^{-3}	53.43	38.48×10^{-4}	-74.43×10^{-4}
10.92	162.21×10^{-3}	-257.87×10^{-3}	53.45	-0.33×10^{-4}	-95.36×10^{-4}
10.94	65.78×10^{-3}	-344.87×10^{-3}	53.50	-16.50×10^{-4}	-94.71×10^{-4}
10.96	-19.14×10^{-3}	-365.10×10^{-3}	53.55	-32.51×10^{-4}	-77.33×10^{-4}
10.98	-74.38×10^{-3}	-362.01×10^{-3}	53.60	-42.35×10^{-4}	-74.54×10^{-4}
11.00	-140.01×10^{-3}	-329.59×10^{-3}	53.70	-49.28×10^{-4}	-53.97×10^{-4}
11.05	-217.48×10^{-3}	-218.74×10^{-3}	53.80	-49.55×10^{-4}	-39.05×10^{-4}
11.10	-240.56×10^{-3}	-120.95×10^{-3}	53.90	-45.49×10^{-4}	-29.07×10^{-4}
11.15	-197.44×10^{-3}	-72.66×10^{-3}	54.00	-42.61×10^{-4}	-22.25×10^{-4}
11.20	-163.63×10^{-3}	-48.37×10^{-3}	54.20	-34.72×10^{-4}	-13.21×10^{-4}
11.30	-117.48×10^{-3}	-24.79×10^{-3}	54.40	-29.73×10^{-4}	-8.01×10^{-4}
11.40	-92.50×10^{-3}	-14.82×10^{-3}			
11.50	-75.74×10^{-3}	-8.88×10^{-3}			
11.80	-46.66×10^{-3}	-2.60×10^{-3}			

第七章 振动的抑制与利用

在工程技术中，设备或结构的振动是一种普遍存在而日益受到人们关注的现象。在大多数情况下，振动是有害的，它会引启动态变形和动态应力，这些变形和应力不仅幅值可能比静态工作负荷引起的要大许多，而且是一种比静态应力要危险得多的交变应力，它会引起机械或结构疲劳和破坏，或引起联接部件间的微振磨损、缩短零部件的使用寿命；振动还会破坏仪器、仪表的正常工作条件，降低其功能，甚至使其失灵。此外，振动及其产生的噪声还会严重污染工作环境，损害工作人员的健康。因此，设计、制造和使用机械设备或工程结构时，应考虑如何避免有害的振动。在实践中常有两方面的工作：一是在设计阶段利用前面所讲述的振动理论，分析机械或结构的动态特性和预期的振动，校核其是否在允许范围内；二是在设备运行中针对具体工况，采取隔振、减振等措施，将有害的振动抑制在许可范围内。

振动也有其有利的一面，许多机械设备利用振动产生预期的工作效果，或提高工作效率。这类振动机械由于结构简单、效率高、耗能少等优点，已得到广泛的应用。

本章介绍抑制振动的若干方法的基本原理，其中包括抑制振源、隔振、减振及振动的主动控制等内容，它们有较广泛的实用价值。

本章还将介绍利用振动的几种途径和方法。

§ 7.1 抑制振源

激发振动的力源或运动源称为振源，抑制振源是消除或减小

振动的最积极、最彻底的“治本”措施，而为了能有效地抑制振源，必需了解各种振源的特点，并据之判明主要振源的所在。

7.1.1 振源及其判别

机械设备中的一些典型的激振源及其特点如下：

1. 旋转质量的不平衡

广义而言，机械设备中旋转的部件都可称为“转子”。当转子的质量中心与其回转轴线不重合，即出现偏心时，就会产生惯性离心力，离心力对设备构成谐波激振。如果转子的质量为 $m(\text{kg})$ ，偏心距为 $e(\text{mm})$ ，转动的角速度为 $\omega(\text{rad/s})$ 那么产生的激振力可表示为

$$f(t) = me\omega^2 \sin\omega t. \quad (7.1-1)$$

由此可见，旋转质量的不平衡引起的谐波激振力的圆频率即为转子的角速度 ω ，而激振频率为 $f = \omega/2\pi = N(1/\text{s})$ ，即为转子每秒钟的转数。至于激振力的幅值，则与转子转速的平方成正比。

2. 往复质量的不平衡

这种振源是机械(如柴油机、空气压缩机)中作往复运动的部件的惯性力。一般而言，这种激振力的基频即等于每秒往复次数的两倍，除基频成分外，还含有各种高次谐波。至于冲击力的幅值，则视往复部件的质量及其运动与转向的平稳性而定，并无一定规律。

3. 传动系统的缺陷或误差

制造不良或安装不正确的传动机构，如齿轮、蜗轮、丝杆等传动机构，会产生周期性的激振力。传动皮带的接缝通过皮带轮或张紧轮时，也会引起周期性的冲击。此外，链轮、联轴节、间歇机构等传动装置其工作原理本身就包含传动的不均匀性，从而会引起周期性的激振力。液压传动中油泵造成的流体脉动以及电动机中的转矩脉动也可能产生一种周期性的激励。对于上述传动

系统的种种缺陷或误差导致的激振力，如欲估计其幅值，往往比较困难；但其激励频率却不难根据传动机构的工作原理和缺陷与误差的具体类型加以估算。

4. 工作载荷的波动

机器工作载荷的波动会引起各种类型的激振力。象冲床、锻锤一类的设备，其工作载荷是“陡起陡落”的，因而会产生一种“冲击”激励；我们知道，每一次冲击之后会激起一种衰减的自由振动。金属切削机床上加工余量或切削面积的不均匀性会引起切削力的相应变化，形成具有各种规律的连续或阶跃式的激励。此外，破碎机等设备的载荷的随机波动会形成一种随机激励。根据各种机器的工作原理及其载荷的变化方式，并不难推算出所产生激励的规律。

5. 外界环境引起的激励

路面的不平对汽车车轮悬挂系统的激励，海浪对船体的激励，风力对大型建筑的激励等等，属于此类。这类激励多属随机性的，有赖于对各种环境条件的统计数据与经验，才能对其激励的统计特性作出判断。此外，由地面传到机械设备上的振动，也是一种激励，对其规律的掌握有赖于实测与对附近的环境与工作机械的调查与分析。

上述种种因素均可能形成激振源。但究竟是哪一种或哪几种因素起主导作用，则与系统本身的性质有关。判断主要激振源的基本方法是：实测设备或结构的振动信号，分析其频率、幅值及时域中的特点，然后与估算出的上述各种可能的振源的特点相比较，从而找出起主导作用的振源。由于各种振源的频率较易于估计，而线性系统的响应频率又等于激励的频率，因此按实测的振动频率来判断可能的振源是切实有效的方法。(7.1-1)式表明，不平衡回转质量的激励幅值随机器运转速度的增加而急剧上升，因此可以用改变机器运转速度而测量振幅的变化的办法来判断是否是由于不平衡质量引起的振动。此外，还可采用分别启、停机

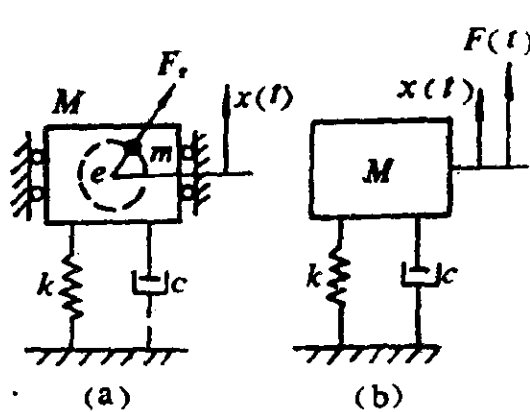
器与设备的各个部件或各种运动，并观察其振动的变化，从而找出确切的振源。

以上所述，均属于强迫振动或自由振动的振源。除此之外，在机器设备中还会出现一种“自激振动”，其形成的机理与发生的规律均不同于强迫振动或自由振动，对其判断与防治的方法将在第十三章讲述。

下面我们讲解最常见的一种激振源——不平衡旋转质量引起的振动。

7.1.2 不平衡旋转质量的激励

在汽轮机、电动机等旋转机械中，转子不平衡质量的激励会引起系统的强迫振动，假设机器可简化为图7.1-1(a)所示的系统，机器质量为 M ，置于刚度为 k ，阻尼为 c 的支承上。设转子的



质量为 m ，偏心距为 e ，当转子以角速度 ω 旋转时，不平衡质量产生的惯性力 $F_r = me\omega^2$ 将引起机械系统的振动，假定机器只限于作垂直方向的振动，则可进一步简化为图7.1-1(b)所示的单自由度系统，其中 $F(t) = me\omega^2 \sin\omega t$ 即离心力 F_r 在垂直方向的分量。

图 7.1-1

对图7.1-1(b)所示系统，设 $x(t)$ 为质量 M 相对于其静平衡位置的位移，则可列出下列运动方程

$$M \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = me\omega^2 \sin\omega t. \quad (7.1-2)$$

设

$$x(t) = |X| \sin(\omega t - \psi), \quad (7.1-3)$$

代入(7.1-2)式，可解出

$$|X| = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$= \frac{me(\omega/\omega_n)^2}{M\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}}$$
(7.1-4)

$$\psi = \text{tg}^{-1} \frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$
(7.1-5)

由上式可见，机器的振幅 $|X|$ 与转子偏心质量 m 和偏心距 e 成正比，欲减少振动需消除转子的不平衡。关于转子的平衡问题，在下一节中将作进一步分析。

(7.1-4)式也可写成无量纲形式

$$\frac{M|X|}{me} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}}$$
(7.1-6)

不同 ξ 值下， $M|X|/me$ 与 ω/ω_n 之间的关系如第六章图6.1-2(a)中曲线族所示。在 $\omega \ll \omega_n$ 时， $M|X|/me$ 的值接近于零，说明转速很低时，机器工作平稳；当 $\omega = \omega_n$ 时，发生共振， $M|X|/me \approx 1/2\xi$ ；当 $\omega \gg \omega_n$ 时， $M|X|/me$ 的值接近于1。 ψ 与 ω/ω_n 之间的关系如图6.1-2(b)所示。

例7.1 惯性式激振器由两个相同的偏心转子构成，如图7.1-2所示，两转子沿相反方向绕水平轴以同一速度转动。在转子旋转时，其偏心的相位对于铅垂轴保持对称，因而惯性离心力在水

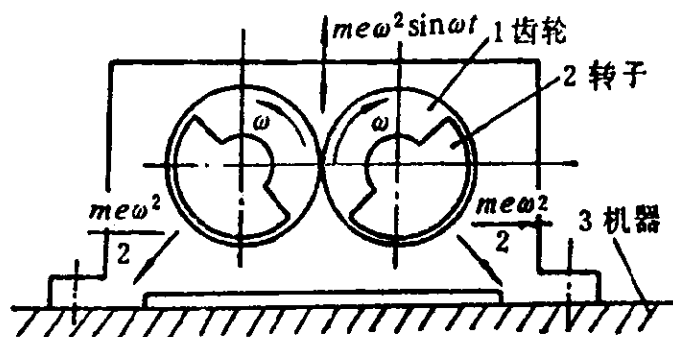


图 7.1-2

平方向的分力互相平衡，在垂直方向则相互叠加，因而激振力为 $F = me\omega^2 \sin \omega t$ 。为估算一机器基座的阻尼率，将惯性激振器置

于机器上方，对机器进行激振，不断改变激振器转速，当系统共振时，测得振幅为1.07cm，在超过共振很远的频率范围，振幅达稳定值0.32cm，试计算该机器的基座的阻尼率 ξ 。

解：根据已知条件，按(7.1-4)式，当 $\omega = \omega_n$ 时，有

$$|X| = \frac{me}{M} \cdot \frac{1}{2\xi} = 1.07 \text{ cm}, \quad (\text{a})$$

式中 m 为激振器中两个转子总共的不平衡质量。当 $\omega \gg \omega_n$ 时，有

$$|X| = \frac{me}{M} = 0.32 \text{ cm}, \quad (\text{b})$$

将(b)式除以(a)式，得

$$\xi = \frac{0.32}{2 \times 1.07} = 0.15.$$

7.1.3 转轴的弓状回旋与临界转速

柔性转子在旋转过程中常常会弯曲成弓状，如图7.1-3(a)所示，称为弓状回旋，这是由于偏心质量引起强迫振动的一个实例。

在一些旋转机械的启动或停机过程中，当经过某一种转速时，会出现剧烈的弓状回旋运动，这个转速在数值上接近或等于转子横向弯曲振动的自然频率，称为临界转速。下面来讨论这个问题。

图7.1-3(a)所示为一柔性转子模型，它由不计质量的弹性轴和水平安装在轴的中点的刚性圆盘所组成。轴在中点处的横向弯曲刚度为 k ，圆盘的质量为 m ，设 S 为圆盘的几何中心，而柔性轴即通过圆盘上的 S 点， G 为圆盘的质心。由于材料的不均匀性或制造误差， G 与 S 并不重合，而有一偏心距 $\overline{SG} = e$ 。圆盘静止时，转轴处在轴承中心连线 AB （点划线）的位置上。当圆盘以角速度 ω 绕 AB 轴线旋转时，由于不平衡质量引起的惯性离心力的作用，柔性轴将弯成弓状，如图7.1-3(a)中曲线 ASB （实线）所

示。此弓状轴连同刚性圆盘一起绕轴线 AB 旋转，设轴线 AB 与圆盘的中间平面的交点为 o ，则 $\overline{oS} = r$ 为柔性轴在中点处的挠度。设定坐标轴 x 、 y 与圆盘固联，并与之一同转动，而令 z 轴与 AB 轴线重合，如图 7.1-3(a) 所示。

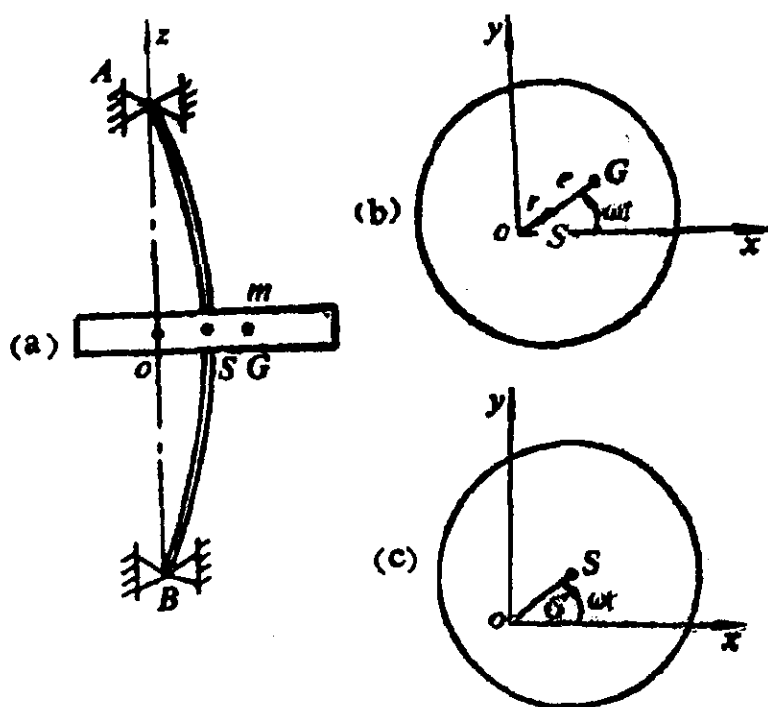


图 7.1-3

1. 无阻尼情况

在 xyz 坐标系中，作用于圆盘上的力仅有惯性离心力和弹性恢复力：惯性离心力的大小为 $m\omega^2 \overline{oG}$ ，方向由 o 点指向 G ；弹性恢复力大小为 $k\overline{oS}$ ，方向为由 S 点指向 o 点。为使这两个力相平衡， o 、 S 、 G 三点必须在同一直线上，如图 7.1-3(b)、(c) 所示。这时有

$$kr = m\omega^2(r + e), \quad (7.1-7)$$

由此可解出柔性轴的挠度为

$$r = \frac{m\omega^2 e}{k - m\omega^2}, \quad (7.1-8)$$

或

$$r = \frac{e(\omega/\omega_n)^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (7.1-9)$$

式中 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 为轴的横向弯曲振动的自然频率。

当 $\omega = \omega_n$ 时，由(7.1-9)式可见 $r \rightarrow \infty$ ，这时的角速度 ω 称为轴的临界转速。

当 $\omega < \omega_n$ 时，由(7.1-9)式确定的挠度 $r > 0$ ，此时 r 与 e 同号，圆盘的重心 G 在 oS 外边；当 $\omega > \omega_n$ 时， $r < 0$ ， r 与 e 反号， G 在 oS 之间，分别如图7.1-3(b)、(c)所示。特别地，当 $\omega \gg \omega_n$ 时， $r \approx -e$ ，即重心 G 大致与 o 点重合，圆盘绕重心转动，称为自动定心。这是一种十分有趣的现象，它表明，在转速足够高的条件下，柔性转子反而比刚性转子更稳定。

由(7.1-9)式可见，除非偏心距 $e = 0$ ，否则总是存在弓状回旋。而实际上质量偏心往往不可避免，因此，实际中的转轴总存在着程度不同的弓状回旋。

但是，即使 $e = 0$ ，由(7.1-7)式，有

$$kr = m\omega^2 r \quad (7.1-10)$$

在 $\omega^2 = \omega_n^2 = k/m$ 时，上式成为恒等式，挠度 r 可以取任意值。这时弹性恢复力与惯性离心力势均力敌，转轴成为“随遇平衡”，它会保留任何的初始扰动，以固定的挠度作弓状回旋运动。可是只要 ω 略为超过 ω_n ，惯性离心力占了上风，系统失去稳定性，任何微小的初始扰动都会引起挠度的急剧增长。因此，即使是理想的无偏心距的转子，其临界转速也是有意义的，而且 $\omega = \omega_n =$

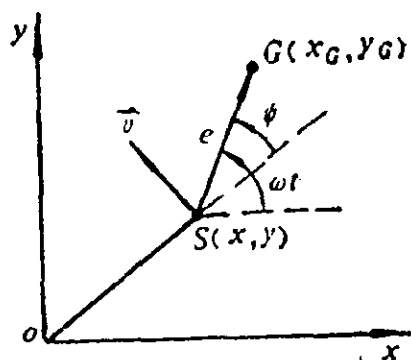


图 7.1-4

$\sqrt{k/m}$ ，与有偏心距的情况相同。

2. 存在粘性阻尼的情况

设粘性阻尼力与圆盘几何中心 S 的线速度 v 的方向相反，大小成比例，即为 cv 。此时圆盘上作用有离心力、弹性力和阻尼力，

且 o 、 S 、 G 三点不一定在一直线上，如图7.1-4所示。设 G 点、 S 点的坐标分别为 $G(x_G, y_G)$ 、 $S(x, y)$ ，由图7.1-4可见

$$x_G = x + e \cos \omega t, \quad (7.1-11)$$

$$y_G = y + e \sin \omega t.$$

按质心运动定律，分别就 x 、 y 方向列出运动方程，得

$$m \ddot{x}_G = -kx - c \dot{x}, \quad (7.1-12)$$

$$m \ddot{y}_G = -ky - c \dot{y}.$$

将(7.1-11)式代入方程(7.1-12)，得

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = m e \omega^2 \cos \omega t, \quad (7.1-13)$$

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + ky = m e \omega^2 \sin \omega t.$$

设(7.1-13)的解为

$$x = |X| \cos(\omega t - \psi), \quad (7.1-14)$$

$$y = |Y| \sin(\omega t - \psi),$$

代入方程(7.1-13)，可得

$$\begin{aligned} |X| = |Y| &= \frac{m e \omega^2}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2}} \\ &= \frac{e (\omega / \omega_n)^2}{\sqrt{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + (2 \xi \omega / \omega_n)^2}}, \end{aligned} \quad (7.1-15)$$

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2 \xi \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2}.$$

此时轴中心 S 点的挠度为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{e (\omega / \omega_n)^2}{\sqrt{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + (2 \xi \omega / \omega_n)^2}}. \quad (7.1-16)$$

由此可见，当 $\omega \ll \omega_n$ 时，挠度 r 很小，相角 ψ 也很小；当 $\omega = \omega_n$ 时， $r \approx e / 2 \xi$ ，如果阻尼很小，则挠度会很大，且 $\psi = \frac{\pi}{2}$ ；当 $\omega \gg \omega_n$ 时， r 趋近于 e ， ψ 接近于 π ，重心 G 趋于与定点 o 重合。图

7.1-5(a)、(b)、(c)分别示出了这三种情况的相位关系。

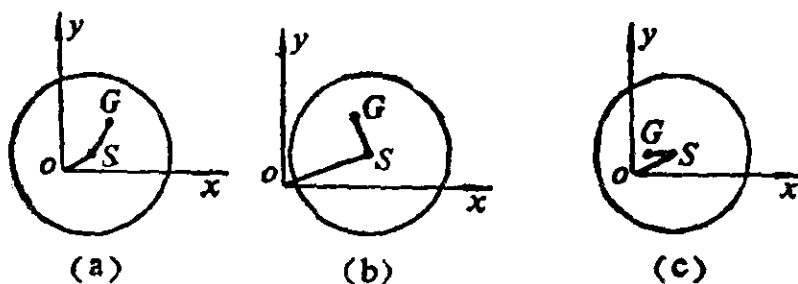


图 7.1-5

从上述分析可见，对于特定转子， m 、 k 、 ϵ 、 ω_n 及 ξ 都是定值，当轴的转速 ω 一定时， r 与 ψ 的值也就确定了，因此 o 、 S 、 G 这三点的相对位置也就保持不变。

转轴在弓形回旋时，虽然轴本身并未作横向振动，但转子的离心力对轴承产生交变力，引起支承系统的强迫振动，特别当转速接近临界转速时，转子产生很大的挠度，会使支承产生剧烈的强迫振动，因此应力求避免。

7.1.4 转子的平衡，静平衡与动平衡

前述转子不平衡质量的激励是工程中机械振动最常见的起因之一，为使旋转机器在运行时的振幅限制在许可范围内，就必须对转子进行平衡，以消除不平衡质量。

从力学上讲，一个转子完全平衡的充分必要条件是：转子上各部分质量在旋转时产生的离心惯性力的合力和合力偶都等于零，转子在旋转时对支承的作用力只有其自重引起的静力。反之，只要离心惯性力的合力或合力偶不等于零，转子便处于不平衡状态。

按转子偏心质量分布状况不同，因而旋转时产生的离心惯性力的情况不同，可将不平衡转子分为静不平衡与动不平衡。下面分别加以简要介绍。

1. 静不平衡

图7.1-6(a)所示为静不平衡转子模型。轴上固定有一个与轴

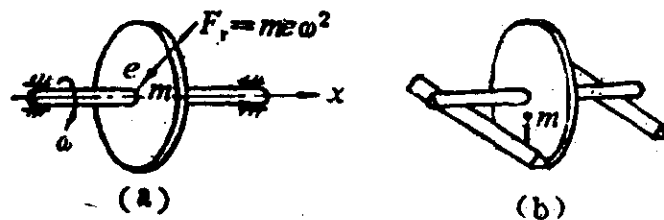


图 7.1-6

垂直的薄圆盘，转轴与 x 轴重合。薄圆盘上距轴 e 处有一偏心质量 m ，则在旋转时将产生离心力 $F_r = me\omega^2$ ， F_r 作用在圆盘平面内，其作用线与 x 轴相交，整个转子系统上由于偏心质量引起的作用力就是 F_r 。这种不平衡可在静态条件下检验出来，如图7.1-6(b)所示，将转子放在两根平行的光滑水平轨道上，由于重力作用，转子总是滚到偏心质量垂直向下的位置才停下，据此可确定偏心质量的方位。

为校正这种不平衡，在找出偏心质量的方向后，可在其相反方向加配重，或在其相同方向利用钻孔、切削等方法去掉一部分质量即可。综上所述，转子达到静平衡就是指转子仅在重力作用下能随意地停留在任一角方位而不发生转动。

2. 动不平衡

图7.1-7(a)为动不平衡转子的模型。转轴上装有两个薄圆盘，盘上各有一同样大小的偏心质量 m ，以及同样大小的偏心距 e ，但方向相反。这样的转子显然是属于静平衡的，而当转子回转时，两个盘上的偏心质量便产生大小相等、方向相反的一对惯性力 $F_r = me\omega^2$ ，它

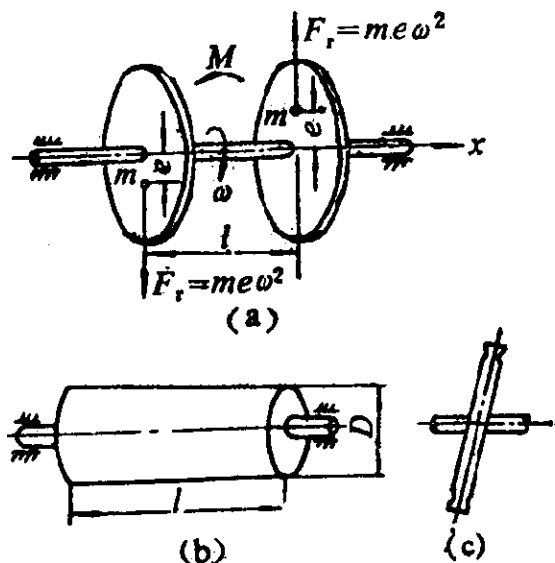


图 7.1-7

们的合力为零，而构成一个力偶 $M = F \cdot l$ ，这里 l 是两圆盘之间的距离。随着轴的回转，力偶 M 不断改变方向，它施加在支承上，便引起机器的振动。这种不平衡必须用动平衡机在转子旋转情况下进行动平衡试验才能检验。转子实现动平衡就是指在运转的情况下，转子上诸不平衡质量的惯性力的合力及合力偶都为零。

图7.1-7(b)所示转子的长度与直径具有同等量级，不能简化为一个薄圆盘，但它可看作一系列薄圆盘的组合，而按上述方法分析。图7.1-7(c)所示转子虽为单盘，但由于转轴与圆盘不垂直，在运转时也将产生动不平衡。

对于更为一般的情况，图7.1-7(a)所示模型中的两个薄圆盘的偏心质量不相等，则可将惯性力系简化为一个合力和一个合力偶，转子将既静不平衡，又动不平衡。

由上述分析可见，如果转子能达到动平衡，必然满足静平衡；但满足静平衡，却不一定能达到动平衡。在实际工作中，当转子长度 l 与其直径 D 之比 l/D 小于0.2时，一般只要作静平衡试验，就能满足要求。

在上面的转子平衡问题讨论中，我们都把转子作为刚体，而忽略了由于离心惯性力引起的动挠度的影响。当转速较低，动挠度很小时，在动平衡过程中转子是可以按刚性考虑的，这称为刚性动平衡，由于是在低转速下进行，也常称为低速动平衡。

当机器的功率很大，转速较高，转子形状细长时，转子旋转的动挠度就可能达到相当大的数值。另外，在上一小节中已经看到，由离心力引起的动挠度是和转速有关的，因此，在低转速时平衡的转子，到高速又会失去平衡而发生剧烈振动。校正这种动不平衡就必须把离心惯性力引起的动挠度影响考虑进去，这称为柔性动平衡，或高速动平衡。本书仅讲解刚性动平衡。

例7.2 图7.1-8所示为一转子，长为 l ，半径为 R ，在离左端 $l/3$ 的平面内铅垂方向有偏心量 $m_1 e_1$ ，在中间平面内水平方向有

偏心量 $m_2 e_2 = \frac{2}{3} m_1 e_1$, 试求怎样加设配重才能使转子达到刚性动平衡。

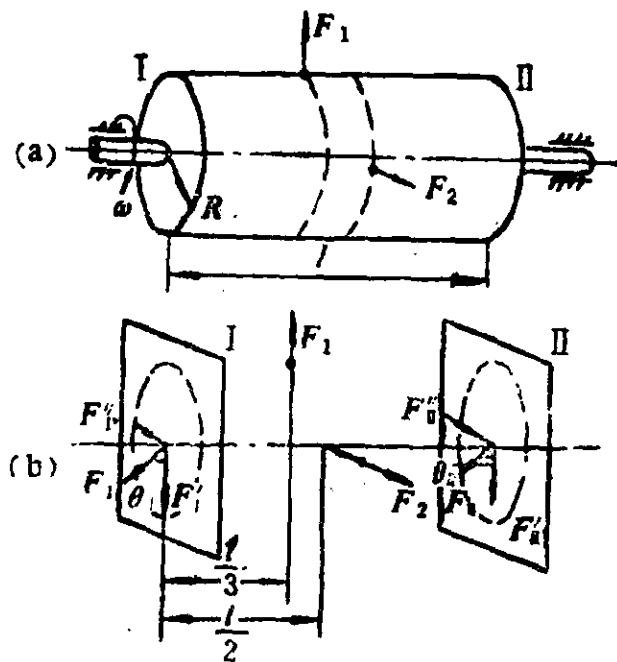


图 7.1-8

解：对于刚性转子，不论转子质量分布的原始不平衡情况如何，根据力的分解合成原理，偏心质量产生的离心惯性力总可以合成一个通过旋转轴并与之垂直的合力和一个合力偶。要平衡这个不平衡的力和力偶，只要在转子上任选的两个与旋转轴垂直的平面内的合适方位加上两块适当的配重即可达到目的。一般最方便的是在转子的端面 I 和 II 加配重。配重的大小和方位可决定如下。

设转子以转速 \$\omega\$ 旋转，两个偏心质量分别产生离心惯性力 $F_1 = m_1 e_1 \omega^2$ 和 $F_2 = m_2 e_2 \omega^2 = \frac{2}{3} m_1 e_1 \omega^2$ 。今在 I 平面内铅垂方向加 F_1' ，在 II 平面铅垂方向加 F_2' 。 F_1' 和 F_2' 应满足平衡条件

$$F_1' + F_2' = F_1,$$

$$F_1' \frac{l}{3} = F_2' \cdot \frac{2l}{3},$$

解之得

$$F_{I'} = \frac{2}{3} F_1, F_{II'} = \frac{1}{3} F_1$$

再在 I 平面内水平方向加 $F_{I''}$, 在 II 平面内水平方向加 $F_{II''}$.
按平衡条件, 同样有

$$F_{I''} = F_{II''} = \frac{1}{2} F_2.$$

按向量合成, 得添加的平衡惯性力的幅值为

$$\begin{aligned} F_I &= \sqrt{F_{I'}^2 + F_{I''}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} F_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} F_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{3} m_1 e_1 \omega^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_1 e_1 \omega^2\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} m_1 e_1 \omega^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{II} &= \sqrt{F_{II'}^2 + F_{II''}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} F_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} F_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3} m_1 e_1 \omega^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_1 e_1 \omega^2\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} m_1 e_1 \omega^2. \end{aligned}$$

根据上述计算, 可在 I 平面内半径 R 处加配重, 其质量为

$$m_I = \frac{F_I}{R\omega^2} = \frac{\sqrt{5} m_1 e_1}{3R},$$

方位角为

$$\theta_I = \operatorname{tg}^{-1} \frac{F_{I''}}{F_{I'}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2} = 26^\circ 35'.$$

在 II 平面内半径 R 处加配重, 其质量为

$$m_{II} = \frac{F_{II}}{R\omega^2} = \frac{\sqrt{2} m_1 e_1}{3R},$$

方位为

$$\theta_{II} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{F_{II''}}{F_{II'}} = \operatorname{tg}^{-1} 1 = 45^\circ.$$

按上述方法加设配重, 便可使转子达到刚性动平衡。

§ 7.2 隔振

隔振就是在振源和振动体之间设置隔振系统或隔振装置，以减小或隔离振动的传递。有两类隔振，一是隔离机械设备通过支座传至地基的振动，以减小动力的传递，称为主动隔振；另一种是防止地基的振动通过支座传至需保护的精密设备或仪器仪表，以减小运动的传递，称为被动隔振。

7.2.1 主动隔振与被动隔振的力学模型

图7.2-1(a)所示为单自由度主动隔振的力学模型。机器简化为一个刚体，质量为 m ，它上面作用着激励力 $F(t) = |F| \sin \omega t$ ，

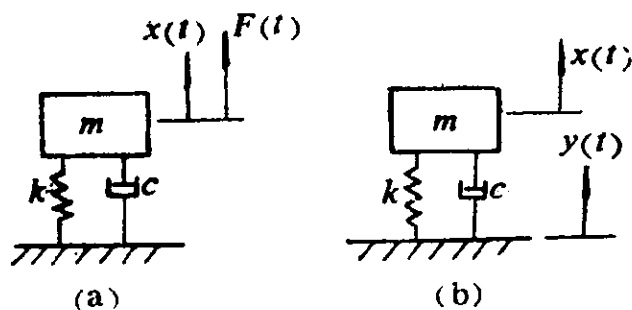


图 7.2-1

如果机器与地基刚性联接，则振源的激励力 $F(t)$ 完全传给地基，并由地基向四周传播，而按图7.2-1(a)所示，机器 m 与地基之间通过阻尼为 c ，刚度为 k 的弹性支承（即隔振系统）相联，则激励只有一部分传递给基础。

图7.2-1(a)所示系统的运动方程为

$$m \ddot{x}(t) + kx(t) + c \dot{x}(t) = F(t). \quad (7.2-1)$$

设

$$\begin{aligned} F(t) &= |F| e^{i\omega t}, \\ x(t) &= X e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (7.2-2)$$

将(7.2-2)式代入(7.2-1), 得

$$-\omega^2 m X e^{i\omega t} + i\omega c X e^{i\omega t} + k X e^{i\omega t} = |F| e^{i\omega t},$$

$$X = \frac{|F|}{k - \omega^2 m + i\omega c}. \quad (7.2-3)$$

设传至地基的力为 $F_T(t)$, 则

$$F_T(t) = kx(t) + c \dot{x}(t), \quad (7.2-4)$$

将(7.2-2)式代入上式, 得

$$\begin{aligned} F_T(t) &= kX e^{i\omega t} + i\omega c X e^{i\omega t} \\ &= \frac{k + i\omega c}{k - \omega^2 m + i\omega c} |F| e^{i\omega t} \\ &= \frac{1 + i2\xi(\omega/\omega_n)}{1 + i2\xi(\omega/\omega_n) - (\omega/\omega_n)^2} |F| e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (7.2-5)$$

上式可写成

$$\begin{aligned} F_T(t) &= H_A(\omega) F(t), \\ &= |H_A(\omega)| e^{-i\psi_A} F(t), \end{aligned} \quad (7.2-6)$$

式中

$$|H_A(\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \{2\xi(\omega/\omega_n)\}^2}{\{1 - (\omega/\omega_n)^2\}^2 + \{2\xi(\omega/\omega_n)\}^2}}, \quad (7.2-7)$$

$$\psi_A = \text{tg}^{-1} \frac{2\xi(\omega/\omega_n)^3}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + \{2\xi(\omega/\omega_n)\}^2}. \quad (7.2-8)$$

$|H_A(\omega)|$ 称为主动隔振传递率, 它表征了主动隔振的效果。

再看图7.2-1(b)所示单自由度被动隔振系统的力学模型, 仪器简化为一个质块 m , 它通过阻尼系数为 c 、刚度为 k 的弹性支承与地基相联, 以使振源即地基的扰动 $y(t) = |Y| \sin \omega t$ 不会完全传递给 m , 此时仪器 m 的运动方程为

$$m \ddot{x}(t) + c(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) + k(x(t) - y(t)) = 0, \quad (7.2-9)$$

设

$$y(t) = |Y| e^{i\omega t}, \quad (7.2-10)$$

$$x(t) = X e^{i\omega t}.$$

将(7.2-10)式代入方程(7.2-9)，可解得

$$x(t) = X e^{i\omega t} = \frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c} |Y| e^{i\omega t}, \quad (7.2-11)$$

上式可写成

$$\begin{aligned} x(t) &= H'_A(\omega) \cdot y(t) \\ &= |H'_A(\omega)| e^{-i\psi'_A} y(t). \end{aligned} \quad (7.2-12)$$

其中 $|H'_A(\omega)|$ 称为被动隔振传递率，它表征了被动隔振的效果，其表达式与 $|H_A(\omega)|$ 的表达式完全相同，可不加以区分，统称为隔振传递率 T_A 。另外， ψ'_A 的表达式亦与 ψ_A 完全一样。

进行隔振设计时感兴趣的是 T_A 的大小， T_A 越小，表明通过隔振系统传递的力或运动越小，隔振效果就越好。隔振问题的核心就是设计适当的隔振装置，选取适当的 k 、 c 和 ξ ，取得较小的 T_A 。由(7.2-7)式可见， T_A 是 ω/ω_n 和 ξ 的函数，图7.2-2(a)示出了各种阻尼率 ξ 情况下 T_A 随 ω/ω_n 变化的曲线。

由图7.2-2，可得如下结论：

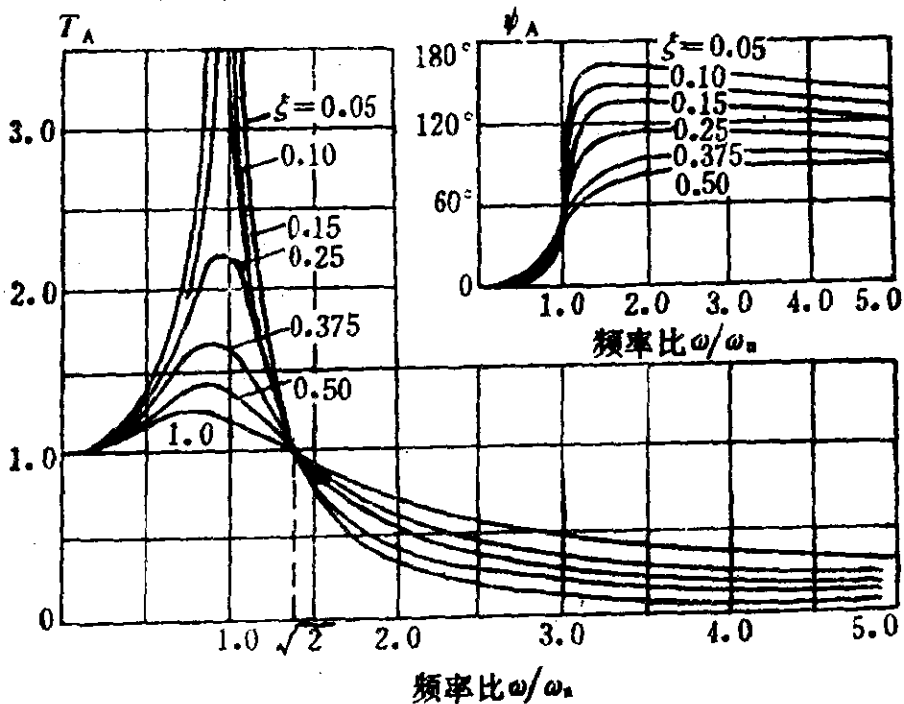


图 7.2-2

(1) 无论 ξ 取何值, 当 $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ 时, T_A 小于1, 故只有满足 $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ 的条件, 隔振系统才能真正起隔振作用。

(2) 当 $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ 时, $T_A \approx 1$, 即激励基本上全部通过隔振系统, 隔振系统未起作用。

(3) 当 $\omega/\omega_n \approx 1$ 时, 即激励的频率等于或接近隔振系统的自然频率时, $T_A > 1$, 这表明隔振系统非但未起隔振作用, 反而放大了激励, 这是由于发生了共振的缘故。设计隔振系统时必须避免这种情况。

(4) 在 $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$ 时, ξ 愈大, 则 T_A 愈小, 说明在隔振装置不起作用的范围内, 增大阻尼可抑制振动, 特别当共振时, 阻尼的作用更加明显。

(5) 当 $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ 时, 即在隔振装置设计的工作范围内, ξ 愈大, T_A 反而愈大, 这表明阻尼在此条件下对隔振系统有不利影响。

从上述结论来看, 在 $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ 的条件下, ω/ω_n 愈大, 则 T_A 愈小, 隔振效果愈好。在设计中, 由于激振频带往往是给定的, 因此为得到好的隔振效果, 应选择隔振装置与设备组成的系统的自然频率 ω_n 比激振频率 ω 小得多, 以提高 ω/ω_n 值。在实际中常取 $\omega/\omega_n = 2.5 \sim 5$, 而不宜过大, 这是因为: 过小的 ω_n 要求弹簧的刚度 k 取得很小, 这会使弹簧难于支承机器的重量, 会带来稳定性的问题, 而且当 ω/ω_n 上升到一定值后, T_A 的减小趋于平缓。另外, 由于一些作为振源的机械设备在启动或停车期间, 其转速即激励频率由零上升至其正常运转速度或由其正常值下降至零, 势必经过系统的共振频率 ω_n , 而发生共振。为此, 隔振装置必须设计得具有一定阻尼, 以限制共振区附近的振动, 实用中常取 $\xi = 0.05 \sim 0.20$ 。

7.2.2 隔振设计与隔振器

根据上述原理，隔振系统一般按下述步骤设计：

(1) 振源识别。测试分析振源激励力的大小、方向及频率，振源的频率通常与机器的转速存在一定关系。

(2) 选择隔振后的机械系统的自然频率 ω_n ，使系统的自然频率与振源频率 ω 有下列关系

$$\omega/\omega_n \approx 2.5 \sim 5. \quad (7.2-13)$$

若振源是一系列谐波的组合，则一般应使最低的频率满足上式。但对于不太显著的谐波，也可不受此限制，即只要使振源中主要激振力的频率满足上式。

(3) 按隔振机器设备及其基础（图7.2-3）的有关资料计算其总质量 m 。根据上一步中确定的 ω_n 可计算隔振装置的刚度 $k = \omega_n^2 m$ 。

(4) 在隔振初步设计中往往不考虑阻尼率，按上一步确定的刚度 k 作为依据即可选择隔振装置，这样得到的隔振系统就具有隔振作用，即 $T_A < 1$ ，将 $\xi = 0$ 及 k 、 m （或 ω/ω_n ）代入(7.2-7)式，即可算出隔振传递率 T_A 的大小。

(5) 验算机器或仪器设备工作时的振动振幅，因为许多机器设备或仪器设备工作时的振动振幅是有限制的。对主动隔振系统而言，其主要目的是减小机器的动力激励传向地基，为此必须付出增加机器自身振动的代价，因此有必要校核机器在实施隔振后的振幅，使其不致超出许可范围；对被动隔振系统而言，即使隔振系统的作用就是减小机器的振动，也有必要验算机器隔振后的振幅，确认其在许可范围内。

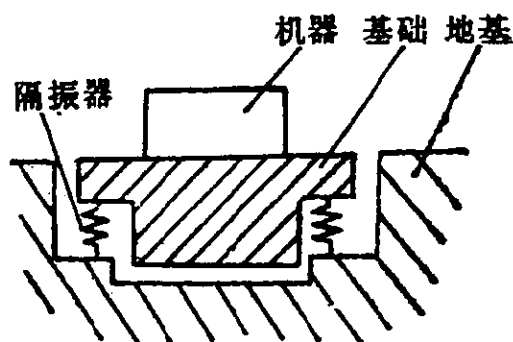


图 7.2-3

在以上两种情况下，可分别按

$$|X| = \frac{|F|}{k} T_A = \frac{|F|}{\omega_n m} T_A \quad (7.2-14)$$

或

$$|X| = |Y| T_A \quad (7.2-15)$$

计算机器或仪器工作时的振幅，其中 $|F|$ 为激振力振幅，而 $|Y|$ 为地基扰动振幅。

$|X|$ 值应在实际许可范围内，如不满足，则可设法增加 m 值，即机器与基础的总重。在实践中，常将机器刚性地装在钢制或混凝土制成的基础上，基础的质量往往比机器的重量大，然后再对机器与基础的整体施以弹性隔振，此即所谓“质量隔振”，可减少振动传递。为了使 $|X|$ 值降低到允许的范围，还可改变隔振装置的参数 k 来实现。

工程中常用于隔振装置的材料有钢弹簧、橡胶、软木、毡类。其中以钢弹簧和剪切橡皮制成的隔振器使用最为广泛。

钢弹簧隔振器有螺旋弹簧和板条式钢板隔振器两种，前者多用于通用机械及矿山机械，后者多用于交通工具。其优点是可选用的刚度范围很大，承载力大，性能稳定，缺点是阻尼小，而且在高频激励下易形成驻波，影响隔振效果。

橡胶隔振器由合适硬度的橡胶材料制成，其优点是具有足够的阻尼，缺点是静载荷量不能过大，稳定性差。

目前国内已有许多专门厂家生产各类系列化的隔振器，具体使用时可从产品说明书上得到其技术参数。

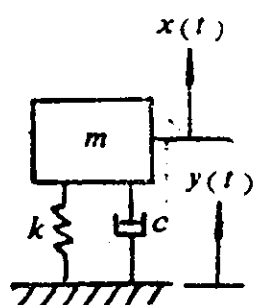


图 7.2-4

例7.3 某精密设备用橡胶隔振器隔振，如图 7.2-4 所示，已知系统的自然频率为 3.8Hz，橡胶隔振器的阻尼率为 $\xi = 0.125$ ，如地基的垂直扰动为正弦振动，

振幅 $|Y|$ 为 $2 \times 10^{-5} \text{m}$ ，最大振动速度 $|\dot{Y}|$ 为 $1.256 \times 10^{-4} \text{m/s}$ ，

求设备振幅。

解：地面扰动的频率为

$$\omega = |\dot{Y}| / |Y| = \frac{1.256 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-5}} = 6.28(\text{rad/s}).$$

系统的自然频率为

$$\omega_n = 2\pi f = 2\pi \times 3.8 = 23.9(\text{rad/s})$$

隔振系统的振动传递率为

$$\begin{aligned} T_A &= \sqrt{\frac{1 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + (2 \times 0.125 \times 6.28/23.9)^2}{(1 - (6.28/23.9)^2)^2 + (2 \times 0.125 \times 6.28/23.9)^2}} \\ &= 0.2. \end{aligned}$$

因此设备的振幅 $|X|$ 为

$$|X| = |Y| T_A = 2 \times 10^{-5} \times 0.2 = 4 \times 10^{-6}(\text{m}).$$

例7.4 一机器质量为 $m = 690\text{kg}$ ，机器工作时产生的激振力（作用在铅垂方向）为 $F(t) = |F_0| \sin\omega t$ ，其中 $|F_0| = 186\text{gN}$ ， $\omega = 122.5\text{rad/s}$ ，已知机器在铅垂方向允许的振动速度为 $\{v\} = 1\text{cm/s}$ ，试作隔振设计（采用质量隔振）。

解：按(7.2-13)式，选取 $\omega/\omega_n = 3$ ，则可确定所设计系统的自然频率为

$$\omega_n = \frac{\omega}{3} = \frac{122.5}{3} = 40.8\text{rad/s}.$$

作为初步设计，取 $\xi = 0$ ，由(7.2-7)式可算出

$$T_A = \left| \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right| = 0.125,$$

机器的速度振幅 $|\dot{X}| = \omega |X|$ ，以(7.2-14)式代入，有

$$\begin{aligned} |\dot{X}| &= \omega \cdot \frac{|F_0|}{\omega_n^2 m} T_A = 122.5 \times \frac{186 \times 981}{40.8^2 \times 690} \times 0.125 \\ &= 2.45(\text{cm/s}) > \{v\}, \end{aligned}$$

即机器的振动速度超过了允许值。为此，可在机器底部加设基

础，其质量为 m' ，使机器与基础的总质量为 $M = m + m'$ ，即进行“质量隔振”。 m' 可按下述方法确定：由于机器被隔振后其振动速度应小于 (v) ，故有

$$|\dot{X}| = \omega \cdot \frac{|F_0|}{\omega_n^2 M} T_A < (v),$$

可推出隔振系统总质量 M

$$M > \frac{\omega |F_0| T_A}{\omega_n^2 (v)} = \frac{122.5 \times 186 \times 981 \times 0.125}{40.8^2 \times 1} = 1690(\text{kg})$$

从而所加浮动基础的质量为

$$m' = M - m = 1690 - 690 = 1000(\text{kg})$$

再由最初选定的 ω_n 及算出的 M 可确定隔振弹簧的刚度 k

$$k = \omega_n^2 M = (40.8)^2 \times 1690 = 2.8 \times 10^6 (\text{N/m}),$$

然后可进一步按上述要求具体设计机器基础、选择隔振器。

§ 7.3 减振

所谓减振，就是在振动主系统（如振动的机械设备或工程结构）上附加特殊的子系统，以转移或消耗主系统的振动能量，从而抑制主系统的振动。本节介绍动力减振和阻尼减振。

7.3.1 动力减振

动力减振是将主系统的振动能量转移到附加的减振器系统上，而实现减少主系统振动的目的。

1. 无阻尼调谐减振器

设一工作机械可简化为如图7.3-1(a)所示的单自由度系统，其中 m_1 为机器的等效质量， k_1 为其安装刚度或地基的刚度。设机器上受到不平衡质量的激励或外加激励 $F_1 \sin \omega t$ ，而机器在铅垂方向上的振动位移为 $x_1(t)$ 。此系统的自然频率为 $\omega_n =$

$\sqrt{k_1/m_1}$ 。假设激励的频率 ω 接近系统的自然频率 ω_n ，因而激起强烈的共振，机器无法正常工作。为解决这一问题，可采用前述对不平衡质量进行平衡以消除振源的办法，或者改变系统的 m_1 与 k_1 ，从而调整其自然频率 ω_n ，使之避开扰力频率 ω 。如果由于实际的限制，以上措施均难于施行，或未能奏效，则可采用附加减振装置的方法。这一方法是在原系统上另外加一个质量为 m_2 ，刚度为 k_2 的“弹簧-质量”系统，与原系统 k_1 - m_1 一起构成一个两自由度系统，如图7.3-1(b)所示。

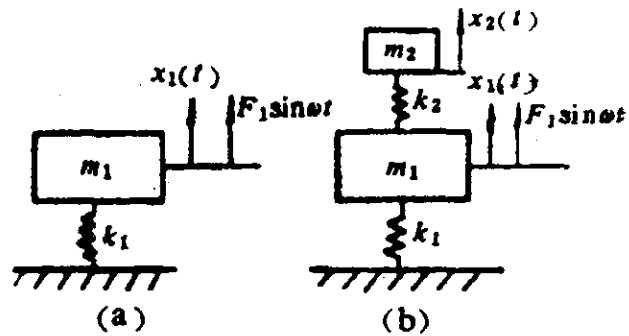


图 7.3-1

通过选择适当的参数 m_2 、

k_2 ，可使 m_1 （机器）的振幅降为零。这里 m_1 和 k_1 为主系统，而 m_2 、 k_2 构成减振器。该两自由度系统的运动方程为

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_2(t) - k_2 x_2(t) = F_1 \sin \omega t, \quad (7.3-1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) = 0.$$

根据(3.6-2)~(3.6-10)可写出上述方程的稳态解

$$x_1(t) = X_1 \sin \omega t, \quad (7.3-2)$$

$$x_2(t) = X_2 \sin \omega t.$$

式中

$$X_1 = \frac{(k_2 - \omega^2 m_2) F_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2}, \quad (7.3-3)$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2}.$$

这里 F_1 、 X_1 、 X_2 均为实数。为简化分析，引入下列符号：

$x_{s1} = F_1/k_1$ 为主系统的静变形；

$\omega_n = \sqrt{k_1/m_1}$ 为主系统的自然频率；

$\omega_s = \sqrt{k_2/m_2}$ 为减振器的自然频率,

$\mu = m_2/m_1$ 为减振器质量与主系统质量之比.

采用以上记号, (7.3-3)式可写为

$$X_1 = \frac{(1 - (\omega/\omega_s)^2)x_{s1}}{(1 + \mu(\omega_s/\omega_n)^2 - (\omega/\omega_n)^2)(1 - (\omega/\omega_s)^2) - \mu(\omega_s/\omega_n)^2}, \quad (7.3-4)$$

$$X_2 = \frac{x_{s1}}{(1 + \mu(\omega_s/\omega_n)^2 - (\omega/\omega_n)^2)(1 - (\omega/\omega_s)^2) - \mu(\omega_s/\omega_n)^2}.$$

由上式可见, 当 $\omega_s = \sqrt{k_2/m_2} = \omega$ 时, 有

$$X_1 = 0, \quad X_2 = -\left(\frac{\omega_n}{\omega_s}\right)^2 \frac{x_{s1}}{\mu} = -\frac{F_1}{k_2}.$$

相应地有

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = -\frac{F_1}{k_2} \sin \omega t.$$

此时主系统静止不动, 而减振器以 $x_2(t) = -(F_1/k_2) \sin \omega t$ 的规律运动. 事实上, 此时减振器对主系统的作用力为 $k_2 x_2(t)$

$= -F_1 \sin \omega t$, 与主系统上作用的

激振力 $F_1(t) = F_1 \sin \omega t$ 正好大小相等, 方向相反, 即主系统上所受的合力为零. 由此可见,

只要使减振器的自然频率 ω_s 与激振力的频率 ω 相等, 就可以使主系统的振动 $x_1(t)$ 完全消除. X_1/x_{s1} 与 ω/ω_n 的关系如图 7.3-2 所示, 由图上可明显看出, 当 $\omega = \omega_n = \omega_s$ 时, $X_1 = 0$, 此时完全消除了机器的振动. 这种现象即为 § 3.6 提到的“反共振”现象.

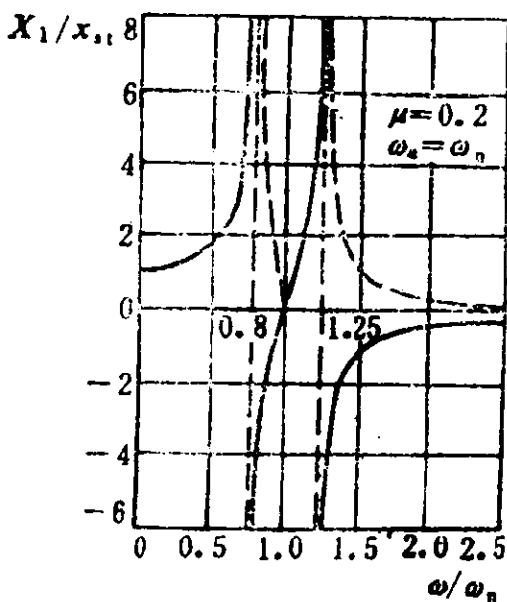


图 7.3-2

由于采用减振器后使系统由一个自由度变为两个自由度, 原来的一个共振频率就分裂为两个共振频率, 因此当激振力的频率

在较大范围内改变时，减振器的使用则有可能增加共振的机会。

令(7.3-4)式中分母为零，即得频率方程

$$(1 + \mu(\omega_s/\omega_n)^2 - (\omega/\omega_n)^2)(1 - (\omega/\omega_s)^2) - \mu(\omega_s/\omega_n)^2 = 0. \quad (7.3-5)$$

在 $\omega_n = \omega_s$ 时，上式成为

$$(1 + \mu - (\omega/\omega_n)^2)(1 - (\omega/\omega_n)^2) - \mu = 0.$$

即

$$\lambda^4 - (2 + \mu)\lambda^2 + 1 = 0, \quad (7.3-6)$$

式中

$$\lambda^2 = (\omega/\omega_n)^2,$$

由(7.3-6)式可解出

$$\lambda_1^2 = \frac{2 + \mu \pm \sqrt{(2 + \mu)^2 - 4}}{2} = 1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu},$$

$$\lambda_2^2 = \frac{2 + \mu \mp \sqrt{(2 + \mu)^2 - 4}}{2} = 1 + \frac{\mu}{2} \mp \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu},$$

而两自然频率为

$$\omega_1^2 = \omega_n^2 \left(1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu} \right). \quad (7.3-7)$$

$$\omega_2^2 = \omega_n^2 \left(1 + \frac{\mu}{2} \mp \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu} \right).$$

由上式可见，加了减振器后系统的两个共振频率 ω_1 、 ω_2 分别大于和小于原来系统（单自由度系统）的共振频率 ω_n 。

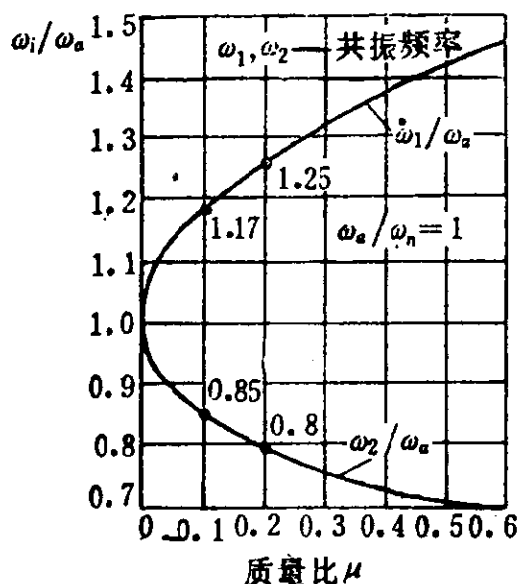


图 7.3-3

图7.3-3示出了由(7.3-7)式决定的两自然频率 ω_1 、 ω_2 对质量比 μ 的依赖关系。从图中可见，减振器应该要有一定的质量比，才能使 ω_1 和 ω_2 有一定的距离，从而才能使减振器有一定的工作频率范围，而不致使主系统产生新的共振。这里还需提醒读者注意，虽然 m_1-k_1 与 m_2-k_2 这两个系统的自然频率分别为 ω_n 、 ω_s ，但由这两个系统结合而成

的两自由度系统的自然频率却并非 ω_n 与 ω_n 的简单组合,而是 ω_1 、 ω_2 这两个新值,它们并不与 ω_n 或 ω_n 重合。图7.3-3清楚地表明了这一点。

上述减振装置设计中并未加入阻尼或计及阻尼,这种系统只有当 $\omega_s = \omega_n = \omega$ 时才能获得良好的减振效果,因此被称为“调谐”减振器。

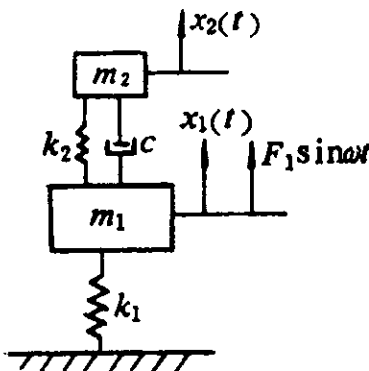


图 7.3-4

为了改善在激振频率 ω 偏离减振器谐振频率 $\omega_s = \omega_n$ 时的减振效果,其方法之一,是在减振装置中加入阻尼。

2. 有阻尼的调谐减振器

图7.3-4是一个由主系统和含有阻尼元件的阻尼减振器构成的两自由度系统,下面讨论这个系统,分析阻尼对其减振效果的影响。该系统的运动方程为

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + c[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = F_1 \sin \omega t, \quad (7.3-8)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + c[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + k_2[x_2(t) - x_1(t)] = 0.$$

根据(3.6-2)(3.6-10)式,可写出上述方程的解

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}. \quad (7.3-9)$$

其中

$$X_1 =$$

$$\frac{(k_2 - m_2 \omega^2 + ic\omega)F_1}{[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2 m_2 \omega^2] + ic\omega(k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)},$$

$$X_2 = \frac{(k_2 + ic\omega)X_1}{k_2 - m_2 \omega^2 + ic\omega}. \quad (7.3-10)$$

上式中 F_1 为实数,而 X_1 、 X_2 为复数。下面以主系统的振幅 $|X_1|$ 为例来讨论,由(7.3-10)式,可得

$$|X_1| = F_1 \{(k_2 - m_2 \omega^2)^2 + c^2 \omega^2\}^{\frac{1}{2}} \times \{[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2 m_2 \omega^2]^2 + c^2 \omega^2 (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)^2\}^{-1/2}. \quad (7.3-11)$$

利用前面的符号 x_{21} , ω_n , ω_s , μ , 并令 $\xi = \frac{c}{2\sqrt{k_2 m_2}}$, 可将(7.3-

11)式写作

$$\frac{|X_1|}{x_{21}} = \left\{ \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{1/2} \times$$

$$\left[\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] - \mu \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 \right\}^2 \right.$$

$$\left. + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \mu \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 \right]^{-1/2}$$

(7.3-12)

根据(7.3-12)式, 令 $\omega_s = \omega_n$, $\mu = 1/20$, 对不同的 ξ 值所作出的主系统的幅频响应曲线如图7.3-5所示。

当 $\xi = 0$, 则回到前述无阻尼吸振器的情况; 当 $\xi = \infty$ 时, 两质量 m_1 、 m_2 之间没有相对运动, 系统成为一个单自由度的情况,

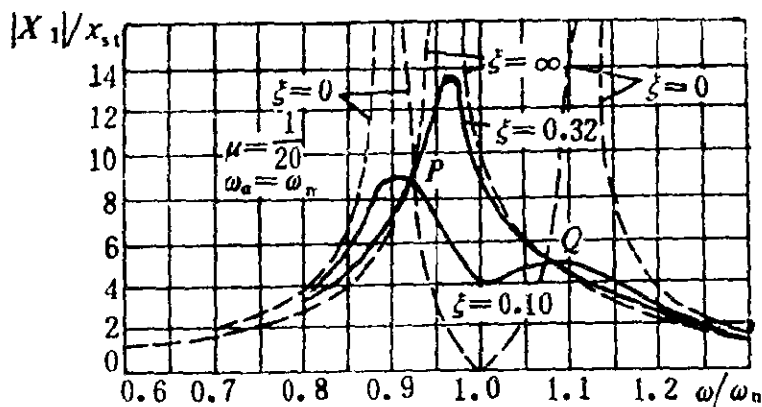


图 7.3-5

其幅频曲线只有一个峰。当阻尼介于0和 ∞ 之间时, 主系统的幅频响应曲线则介于上述两种情况之间。图中给出了 $\xi = 0.10$ 和 $\xi = 0.32$ 时的两条曲线, 可以看到, 阻尼的存在使 m_1 的共振振幅减小。而在有阻尼的情况下, 当 $\omega = \omega_n$ 时, 并不能完全消除主系统的振幅, 而且这时主系统的振幅随阻尼的增加而增大。

值得注意的是图7.3-5中的所有曲线都交于P、Q两点, 这表明, 对应于P、Q两点的频率, $|X_1|$ 值与阻尼无关。我们可以由

$|X_1|$ 与 ξ 无关的条件来确定 P 、 Q 两点对应的频率点 $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_P$
 $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_Q$, (7.3-12)式可写成

$$\frac{|X_1|^2}{x_{i1}^2} = \frac{A^2 + \xi^2 B^2}{C^2 + \xi^2 D^2}, \quad (7.3-13)$$

式中

$$A^2 = \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 \right]^2,$$

$$B^2 = (2\omega/\omega_n)^2,$$

$$C^2 = \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] - \mu \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 \right\}^2,$$

$$D^2 = (2\omega/\omega_n)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \mu \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2.$$

显然, 如果

$$\frac{A^2}{C^2} = \frac{B^2}{D^2}, \quad (7.3-14)$$

则有

$$\frac{|X_1|^2}{x_{i1}^2} = \frac{A^2 + \xi^2 B^2}{C^2 + \xi^2 D^2} = \frac{A^2}{C^2} = \frac{B^2}{D^2}. \quad (7.3-15)$$

与 ξ 无关, 方程(7.3-14)展开后得到

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - 1 + \mu \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \\ & = \mu \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 - \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - 1 \right] \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_n} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

令 $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \lambda^2$, 上式成为

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 \frac{1 + \left(\frac{\omega_s}{\omega_n}\right)^2 + \mu\left(\frac{\omega_s}{\omega_n}\right)^2}{2 + \mu} + \frac{2\left(\frac{\omega_s}{\omega_n}\right)^2}{2 + \mu} = 0. \quad (7.3-16)$$

由该方程可解出两个根 λ_1^2 、 λ_2^2 , 即 P 、 Q 对应的频率点 $\lambda_1^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_P^2$, $\lambda_2^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_Q^2$. 将 λ_1^2 、 λ_2^2 分别代入(7.3-15)式, 可得到 $|X_1|$ 在 P 、 Q 点的值:

$$|X_1|_P = \frac{x_{i1}}{1 - \lambda_1^2 - \mu\lambda_1^2}, \quad (7.3-17)$$

$$|X_1|_Q = \frac{x_{s1}}{\lambda_2^2 + \mu\lambda_2^2 - 1} \quad (7.3-18)$$

从(7.3-16)式、(7.3-17)及(7.3-18)式可见, λ_1 、 λ_2 、 $|X_1|_P$ 、 $|X_1|_Q$ 取决于 μ 及 $(\omega_s/\omega_n)^2$, 即对确定的主系统而言, 它们取决于减振器的质量和弹簧。

对图7.3-5中所示的曲线族 (ξ 可变, 但 μ 取定值) 而言, 既然所有的曲线都必然通过P、Q两点, 那么对于减振器而言, 这些曲线中最理想的应该是这样的: 曲线的两个共振峰值即极大值应该分别在P、Q点达到, 且数值相等, 即满足

$$|X_1| \leq |X_1|_P = |X_1|_Q \quad (7.3-19)$$

一般情况下上述条件是无法完全满足的, 不过受此启发, 我们可按下列步骤选择减振器的最佳参数。

(1) 对确定的主系统 (k_1 、 m_1 已知) 及选定的减振器质量 (μ 已知), 可选择减振器的刚度, 使

$$|X_1|_P = |X_1| \quad (7.3-20)$$

事实上, 将(7.3-17)、(7.3-18)式代入上式, 得

$$\frac{x_{s1}}{1 - \lambda_1^2 - \mu\lambda_1^2} = \frac{x_{s1}}{\lambda_2^2 - 1 + \mu\lambda_2^2}$$

或

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{2}{1 + \mu} \quad (7.3-21)$$

由于 λ_1^2 、 λ_2^2 为(7.3-16)方程的两根, 故由方程根与系数的关系可写出

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2 \frac{1 + (\omega_s/\omega_n)^2 + \mu(\omega_s/\omega_n)^2}{2 + \mu} \quad (7.3-22)$$

将上式代入(7.3-21), 得

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_n}\right) = \frac{1}{1 + \mu} \quad (7.3-23)$$

上式给出了减振器参数 ω_s 的最佳值, 由此可进一步确定减振器的刚度。

(2) 选择减振器的阻尼率 ξ , 使 $|X_1|$ 在P及Q点取驻值。

按(7.3-23)式选取 $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ ，并将它代入(7.3-16)式，得

$$\lambda^4 - \frac{2\lambda^2}{1+\mu} + \frac{2}{(2+\mu)(1+\mu)^2} = 0. \quad (7.3-24)$$

由该方程可解得

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{1+\mu} \left(1 \mp \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right), \quad (7.3-25)$$

再将 λ_1 、 λ_2 分别代入(7.3-17)、(7.3-18)式，得

$$|X_1|_P = |X_1|_Q = \sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}} x_{st}, \quad (7.3-26)$$

我们希望在 P 、 Q 点分别有

$$\left. \frac{d|X_1|}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1} = 0, \quad (7.3-27)$$

$$\left. \frac{d|X_1|}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_2} = 0. \quad (7.3-28)$$

但一般不可能选择一个参数 ξ 使上两式同时满足，故可退而求其次，仅使(7.3-27)式满足或(7.3-28)式满足。将(7.3-12)、(7.3-25)代入(7.3-27)及(7.3-28)，可分别求出：

$$\xi^2 = \frac{\mu(3 - \sqrt{\mu/(\mu+2)})}{8(1+\mu)^3}, \quad (7.3-29)$$

及

$$\xi^2 = \frac{\mu(3 + \sqrt{\mu/(\mu+2)})}{8(1+\mu)^3}. \quad (7.3-30)$$

具有上述最佳参数的曲线分别在 P 点或 Q 点具有极大值。如图7.3-6所示，在图中， $\mu = \frac{1}{4}$ ，而从图中可见，在这两根曲线上， $|X_1|$ 的最大值与其极大值 $|X_1|_P = |X_1|_Q$ 相差甚微。最佳阻尼率可取(7.3-29)式与(7.3-30)式的平均值

$$\xi = \frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}, \quad (7.3-31)$$

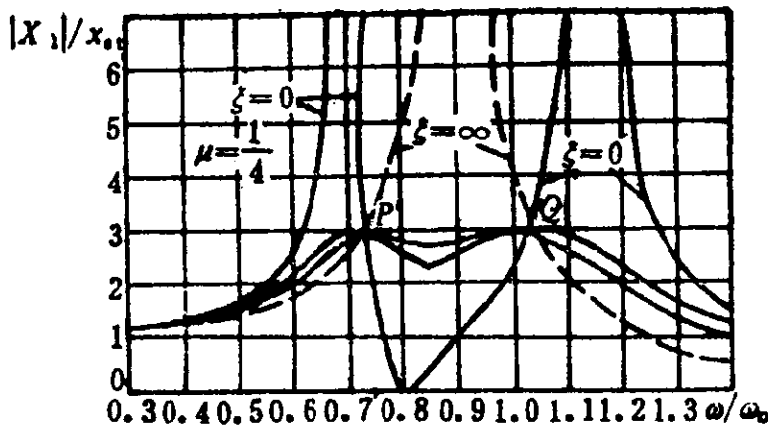


图 7.3-6

3. 自动调谐减振器

上述带有阻尼的调谐减振器可在激振频率 ω 偏离 ω_0 的情况下有效地发挥减振作用，但是它牺牲了 $\omega = \omega_0$ 时的减振效果。以下介绍的离心摆式减振器，则是一种自动调谐的无阻尼减振器，它用于扭振系统，在一定程度上，能够随着激振频率 ω 的变化，自动调整其自然频率 ω_0 ，使 $\omega_0 = \omega$ 的关系总能满足，从而实现消除振动的目的。

扭振系统可简化成图7.3-7(a)所示的单自由度模型，它由扭转刚度为 k 的无质量轴和转动惯量为 I 的刚性圆盘联接在转动惯量

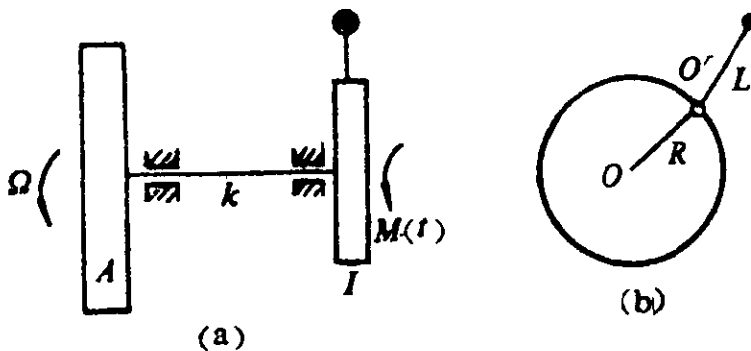


图 7.3-7

很大的飞轮 A 上所组成，整个系统以角速度 Ω 旋转，在圆盘 I 上作用有激振力矩 $M(t) = M_0 \sin \omega t$ ，其中 ω 往往与机器的转速 Ω 有确定性关系，为简单计，设 $\omega = \Omega$ ，因而 $M(t) = M_0 \sin \Omega t$ 。由于飞轮 A 的转动惯量很大，可视为匀速旋转。这样，圆盘 I 的运

动便包含两种成分：随飞轮 A 的转动（刚体模态）和扭转振动

（弹性模态），扭转振动的自然频率为 $\omega_n = \sqrt{k/I}$ 。与前述情况相似，当 $\Omega = \omega_n$ 时，将发生强烈共振。为了解决这一问题，可在圆盘上 O' 点附加一个单摆，作为一种无阻尼减振器。设单摆的摆长为 L ，而其悬挂点 O' 距轴心 O 点的距离为 $\overline{OO'} = R$ 。我们来分析此单摆的自然频率，即减振器这个子系统的自然频率 ω_n 。

我们知道，在重力作用下的单摆的自然频率为 $\omega_n = \sqrt{g/L}$ ，式中 g 为重力加速度。这里的单摆主要是在惯性离心力的作用下振动，我们假定重力的作用相对较小，可略而不计，于是上式中的 g 应该以 O' 点的惯性离心加速度 $R\Omega^2$ 代入。这里我们还假定单摆相对于其悬挂点 O' 的摆动角速度远比 Ω 小，亦可略而不计。由此可见，单摆振动的自然频率为 $\omega_n = \sqrt{R\Omega^2/L} = \Omega\sqrt{R/L}$ ，如果令 $R = L$ ，则 $\omega_n = \Omega$ ，即减振装置的自然频率 ω_n 总是等于激振频率 Ω ，因而减振系统永远能保持在调谐状态，可取得最理想的减振效果。

7.3.2 阻尼减振

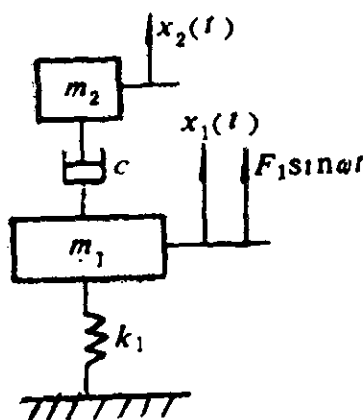


图 7.3-8

阻尼减振即是在振动系统中加入阻尼，以消耗振动能量，从而达到抑制振动的目的。基于阻尼的减振器或减振装置有以下几种：

1. 粘滞阻尼减振器

如图7.3-8所示，主系统由 m_1 、 k_1 组成，而粘滞阻尼减振器由 m_2 和粘滞阻尼器 c 组成。作用在主系统上的激励力为

$$F(t) = F_1 \sin \omega t, \quad (7.3-32)$$

系统的运动方程为

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + c(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k_1 x_1(t) = F_1 \sin \omega t, \quad (7.3-33)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + c(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) = 0.$$

比较方程(7.3-33)与(7.3-8), 可见前者由后者令 $k_2 = 0$ 得到, 因此利用方程(7.3-8)的结果, 由(7.3-11)式, 令 $k_2 = 0$ 得到主系统 m_1 的振幅

$$|X_1| = \frac{F_1 \sqrt{(m_2 \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}}{\sqrt{(m_2 \omega^2 (k_1 - m_1 \omega^2))^2 + (c \omega)^2 (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)^2}}, \quad (7.3-34)$$

引入参数: $x_{s1} = F_1/k_1$, $\omega_n^2 = \sqrt{k_1/m_1}$, $\mu = m_2/m_1$, $\xi = C/(2m_1 \omega_n)$ 及 $\lambda = \omega/\omega_n$, (7.3-34)式可写成

$$|X_1| = \frac{x_{s1} \sqrt{\mu^2 \lambda^2 + 4\xi^2}}{\sqrt{\mu^2 (1 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 (\mu \lambda^2 - (1 - \lambda^2))^2}}. \quad (7.3-35)$$

上式表明, 对于给定的 x_{s1} , 主系统 m_1 的振幅 $|X_1|$ 是 μ 、 ξ 、 λ 三个参数的函数, 图7.3-9示出了在 μ 保持不变时, 对不同的阻尼率, $|X_1|/x_{s1}$ 随 λ 变化的曲线, 值得注意的是, 这些曲线都通过R点, 显然, 其中有一条在R点处存在驻值, 该条曲线的振幅峰值是上述曲线族中最小的, 据此特征可确定减振器的最佳参数. 用与上小节类似的求法, 可求出R点的频率值 λ_R .

$$\lambda_R = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)_R = \sqrt{\frac{2}{2 + \mu}}, \quad (7.3-36)$$

而由

$$\left. \frac{d|X_1|}{d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda_R} = 0, \quad (7.3-37)$$

可求得最佳阻尼率

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \mu)(2 + \mu)}}. \quad (7.3-38)$$

而对应的 $|X_1|$ 的最大值为

$$|X_1|_R = \frac{2 + \mu}{\mu} x_{st} \quad (7.3-39)$$

粘滞阻尼减振器可以在某一频率范围内有效地工作，这种减

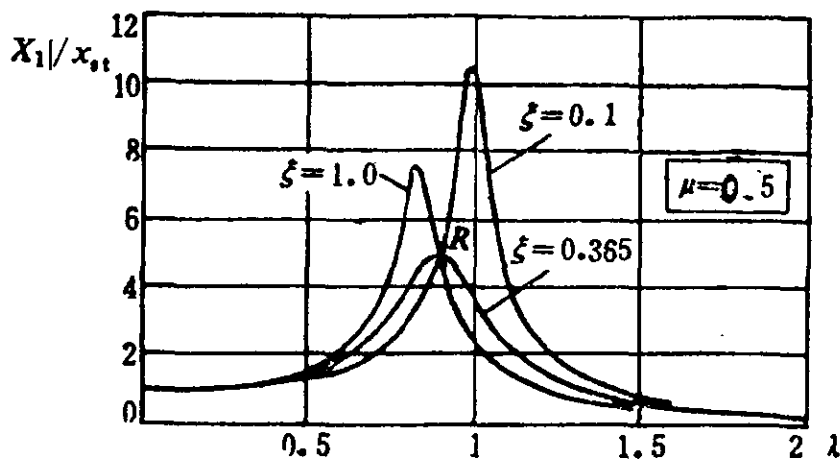


图 7.3-9

振器常做成扭转形式的，用来减低扭振系统的振动，图7.3-10示

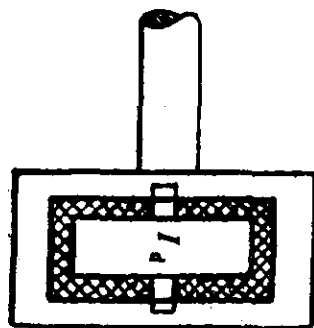


图 7.3-10

出了这种减振装置的结构简图，它有一个转动惯量为 I_d 的圆盘，装在和扭振系统连在一起的箱壳内。圆盘可在箱壳内相对箱壳自由转动，箱壳和圆盘之间的空隙内装满硅油以便产生阻尼，由于油的粘性而产生的阻尼扭矩与箱壳和圆盘之间的相对角速度成正比，故该阻尼可作为粘滞阻尼处理。

这种减振器亦称为流体摩擦减振器。

2. 固体阻尼材料减振

材料的内阻尼具有能抑制振动的功能，因此选择具有高阻尼的材料贴附在振动结构上形成阻尼层，就可起到消耗振动能量、抑制振动的作用。大多数工程中常用的金属材料阻尼率 ξ 量级在 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 之间，而高分子材料聚合物的阻尼率在 $0.25 \sim 1.0$ 之间，因此广泛采用高分子材料聚合物作为阻尼材料，构成金属材料的阻尼层而形成阻尼结构。下面介绍几种基本的阻尼层结构。

自由阻尼层：如图7.3-11所示，在构成振动系统的金属结构

表面牢固地粘合一层阻尼材料，当结构进行弯曲振动时，阻尼层将不断随弯曲振动而受到拉伸与压缩，并耗散能量。

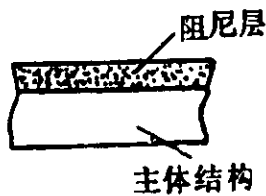


图 7.3-11

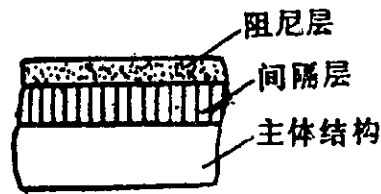


图 7.3-12

间隔自由阻尼层：为了进一步增加阻尼层的拉伸与压缩变形，往往在金属结构与阻尼层之间再增加一层能承受较大剪力的间隔层，如图7.3-12所示。这样，在金属结构弯曲振动时，由于阻尼层距弯曲变形中性面较远，对于同样的弯曲变形，就能在阻尼层中产生更大的拉、压变形，从而能消耗更多的振动能量。

约束阻尼层：若将自由阻尼层上部再牢固地粘合一层弹性模量很大的薄层材料（可用金属），就构成了约束阻尼层。当金属结构进行弯曲振动时，若阻尼层下部受到拉伸，则上部受到压缩，若下部受到压缩，则上部受到拉伸，这使得阻尼层产生很大的剪切变形，从而耗散振动能量。

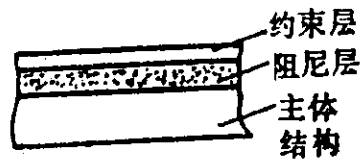


图 7.3-13

7.3.3 冲击减振

冲击减振是在振动结构的内腔中装置冲击块，利用此冲击块在内腔中的往返冲击来耗散能量，抑制振动。

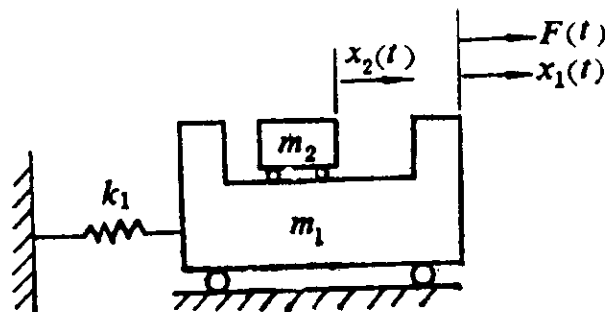


图 7.3-14

图7.3-14为冲击减振器的力学模型。\$k_1-m_1\$为单自由度强迫振动系统，质块\$m_1\$上作用有激励力\$F(t) = F_1 \sin \omega t\$，当\$\omega = \sqrt{k_1/m_1} = \omega_n\$（系统的自然频率）时，系统产生共振。为抑制振动，将冲击块\$m_2\$置于\$m_1\$上的壁板间，由于\$m_1\$的振动，\$m_2\$在\$m_1\$的壁板间移动，并将与壁板产生碰撞，从而耗散\$m_1\$的能量。在稳定状态下，\$m_2\$在一周期内与壁板碰撞两次。对振动与碰撞作进一步的讨论，可计算出每周期内碰撞引起的能量损耗，而按2.1.5小节中介绍的方法，可求出等效粘性阻尼系数\$c_{e,q}\$及阻尼率\$\xi_{e,q}\$ [6]，

$$c_{e,q} = 2\sqrt{m_2 k_1} \xi_{e,q}, \quad (7.3-40)$$

$$\xi_{e,q} = \frac{2}{\pi(1+1/\mu)} \cdot \frac{1+R}{1-R}. \quad (7.3-41)$$

式中\$\mu = m_2/m_1\$为质量比，\$R\$为恢复系数（冲击后的相对速度/冲击前的相对速度），由上式可见，增大\$\mu\$及\$R\$都可提高\$\xi_{e,q}\$，即提高减振效果。

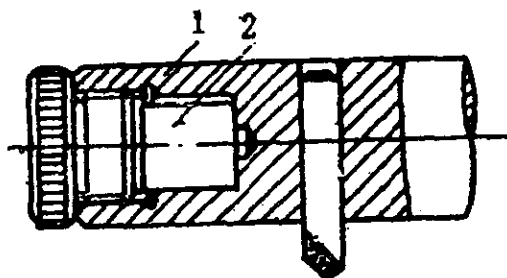


图 7.3-15

1—镗杆 2—冲击块

冲击减振器常应用于涡轮叶片，飞机机翼及车刀的减振。图7.3-15所示为冲击减振镗杆的结构图。为了减小在镗削加工中镗杆的弯曲振动，可在镗杆外伸部分端部加工出一个内孔，内置直径稍小的冲击块。当镗杆作弯曲振动时，冲击块在孔内作径向往返撞击运动，可耗散振动能量。根据经验，冲击块的重量约取为镗杆外伸部分重量的\$\frac{1}{10} \sim \frac{1}{8}\$，冲击块与镗杆内孔在直径上的间隙一般取\$0.1 \sim 0.2\$mm。在调试时，可用不同直径的冲击块分别试验，找出具有最佳配合间隙的一个。冲击块与内孔的轴向间隙则不能过小，以免妨碍冲击块的径向运动。对冲击块而言，其比重和恢复系数的提高可增加减振效果，因此，可将冲击块挖

空，内填比重大的青铅，而表皮材料用淬硬的钢。

§ 7.4 振动的主动控制

按振动系统的特点，构造一个控制系统来抑制振动的办法，称振动的主动控制。

振动主动控制的基本原理是：(1) 避振，在线测试激振力和振动系统的响应，根据这些信息合理调整系统的结构参数（如刚度），以改变振动系统的模态参数，或改变系统的工作状态（如机器的转速），从而改变激振力的频率（它往往与转速有关），避免共振；(2) 隔振，将控制系统的执行机构置于地基和隔振对象之间，通过施加合适的控制力，以抵消或减轻激振力，从而减小或隔离振动的传递；(3) 减振，由控制系统的执行机构（施力装置）产生阻尼力，吸收振动系统的振动能量，以抑制振动；或将控制系统与动力减振器相结合，对减振器进行自动调谐，以达到减振的目的。

由于振动主动控制适用于一般难以解决的超低频和宽频带振动抑制问题，所以受到工程界的广泛重视，可是由于振动控制系统的成本比较昂贵，结构也比较复杂，维护比较麻烦，当前应用尚不广泛。但可以预料，随着控制理论，计算机技术和测试技术的发展，这一技术必将得到愈来愈多的应用。

下面主要以单自由度主动控制隔振和减振为例，阐述主动控制抑振的基本原理与特点。

7.4.1 主动控制隔振

如图7.4-1所示， $m-k-c$ 构成单自由度被动隔振系统，这里 $k-c$ 为隔振器，而 m 为需要隔振的对象，为减小由地基的振动 $y(t)$ 到质块振动 $x(t)$ 的传递率，装上一主动控制系统，它由拾振器

A、控制器B与施力机构E组成。拾振器A测出响应信号，经控制器B变换和放大，产生功率较大的控制信号 $z(t)$ ，驱动施力机构E产生控制力 $f(t)$ ，由它抵消由于地基的运动 $y(t)$ 而通过隔振器施加给质块 m 的力，从而抑制其振动。上述系统实际是按反馈控制原理设计的，因此可按照控制理论的方法分析其特性。常用的做法是：对控制系统的各个部分（电路系统、机械装置与力学系统等）分别导出其运动微分方程，考虑小振幅振动，而使方程线性化，然后利用Laplace变换得到各部分的传递函数，以传递函数为数学模型来研究控制系统的特性。

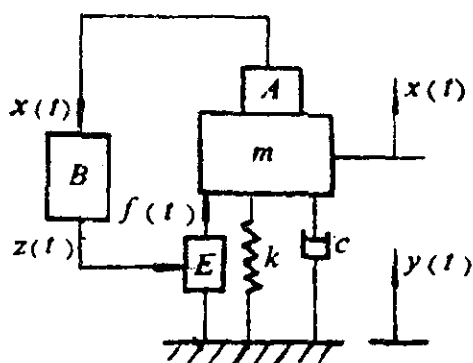


图 7.4-1

对图7.4-1中的控制系统，设拾振器A（一般为加速度传感器和电荷放大器构成）的传递函数为 $H_1(s)$ ，控制器B的传递函数为 $H_2(s)$ ，执行机构E（施力机构）的传递函数为 $H_3(s)$ ，那么控制力 $f(t)$ 对 m 响应 $x(t)$ 的传递函数为

$$H(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = H_1(s)H_2(s)H_3(s), \quad (7.4-1)$$

由于控制系统是按负反馈原理设计的，所以 $H(s)$ 是带负号的有理分式，可写成

$$H(s) = -\frac{KD_1(s)}{D(s)}. \quad (7.4-2)$$

其中 $D_1(s)$ 和 $D(s)$ 均为正系数多项式，而且 $D_1(0) = D(0) = 1$ ，正实数 K 通常称为放大系数。

对图7.4-1所示的振动系统，可写出其运动方程

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = c \dot{y}(t) + ky(t) + f(t), \quad (7.4-3)$$

对上式取Laplace变换，得到

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = (cs + k)Y(s) + F(s), \quad (7.4-4)$$

由(7.4-1)、(7.4-2)式消去(7.4-4)中的 $F(s)$, 得到 $X(s)$ 对 $Y(s)$ 的传递函数

$$H_A(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{(cs+k)D(s)}{(ms^2+cs+k)D(s)+KD_1(s)}, \quad (7.4-5)$$

令 $s = i\omega$ 代入上式即得 $x(t)$ 对 $y(t)$ 的复频率特性, 即主动隔振系统的隔振传递率

$$T_A = H_A(\omega) = \frac{(k+i\omega c)D(i\omega)}{(k-m\omega^2+i\omega c)D(i\omega)+KD_1(i\omega)}. \quad (7.4-6)$$

在7.2.1中讨论隔振时曾提到, 隔振系统的自然频率 ω_n 一般不可能很小, 而欲真正隔振须使 $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, 这里的 ω 是振源的激励频率, 因此7.2.1中介绍的隔振方法往往难以应用于超低频激励下的隔振. 而主动控制隔振系统则不受此限制, 可以用于超低频激励的情况. 由(7.4-6)式

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} T_A = \frac{k}{k+K}. \quad (7.4-7)$$

由上式可见, 如果将控制系统的放大系数 K 设计得远大于隔振支承的刚度系数 k , 那么系统在超低频区的隔振传递率就可以非常小, 这是可以实现的.

例7.5 对于图7.4-1中的系统, 设拾振器和执行机构的惯性极小, 传递函数分别为 $H_1(s) = -K_1$, $H_3(s) = K_3$, 控制器的输出信号是其输入信号的积分, 即传递函数为 $H_2(s) = K_2/s$. 求该系统的隔振传递率及 $\omega \rightarrow 0$ 时的值.

解: 按(7.4-1)式可写出

$$H(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = H_1(s)H_2(s)H_3(s) = \frac{-K_1K_2K_3}{s},$$

对上式取 Laplace 反变换, 得控制力为

$$f(t) = -K_1K_2K_3 \int^t x(t) dt,$$

按(7.4-3)可写出系统的运动方程

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t)$$

$$= c \dot{y}(t) + ky(t) - K_1 K_2 K_3 \int_0^t x(t) dt,$$

在零初始条件下, 对上式取Laplace变换, 得

$$H_A(S) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{(cs + k)s}{ms^3 + cs^2 + ks + K_1 K_2 K_3}.$$

令 $s = i\omega$, 得隔振传递率

$$T_A = H_A(\omega) = \frac{i\omega k - \omega^2 c}{K_1 K_2 K_3 + i\omega k - \omega^2 c - i\omega^3 m},$$

由此可得

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} T_A = 0.$$

撇开具体的控制系统的结构, 下面我们来分析主动控制隔振系统中控制力的特性.

如果对图7.4-1所示系统的拾振器、控制器和执行机构的传递函数设计为 $H_1(s) = -k_1$, $H_2(s) = k_2(\tau s + 1)$, $H_3(s) = k_3$, 则有

$$H(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = -k_1 k_2 k_3 - k_1 k_2 k_3 \tau s,$$

进行Laplace逆变换, 则得执行机构施加的控制力为

$$f(t) = -c' \dot{x}(t) - k' x(t).$$

式中 $c' = k' \tau$, $k' = k_1 k_2 k_3$. 这里控制力是作为 $\dot{x}(t)$ 与 $x(t)$ 的线性函数, 即具有阻尼力和弹性力的性质. 系统的运动方程为

$$m \ddot{x}(t) + (c + c') \dot{x}(t) + (k + k') x(t) = c \dot{y}(t) + ky(t).$$

(7.4-8)

由上式可见, 在此情况下, 控制系统仅相当于将支承的阻尼系数变为 $c + c'$, 刚度系数变为 $k + k'$, 相当于在系统中增加了一个阻尼器和一个弹簧, 虽然此时从力学上看与一般被动隔振系统并无实质区别, 但由于这里阻尼系数 c' 与弹性系数 k' 是由控制系统实现的, 因而可以在很宽的范围内变化与优选, 而不致受到阻尼器或弹簧的实际物理性能的限制或空间的限制, 因此可得到最理想

的隔振效果。

7.4.2 主动控制减振

图7.4-2中 $m-k-c$ 构成一单自由度振动系统，其中 m 为机器设备， c 和 k 分别为其支承阻尼与支承刚度，机器上作用有激励力 $F(t)$ 。为了抑制机器 m 的振动，加装上主动控制系统：拾振器 A 测得机器的响应，传递给控制器 B ，经变换和放大后，驱动执行机构 E ，使其产生控制力

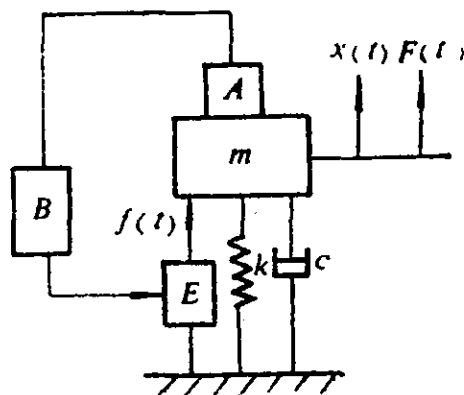


图 7.4-2

$$\begin{aligned} f(t) &= -k'x(t) - c'\dot{x}(t) \\ &= -k'[x(t) + \varepsilon\dot{x}(t)], \end{aligned} \quad (7.4-9)$$

式中 k' ， c' 都取决于所设计的控制系统的参数，且均为正实数， $\varepsilon = c'/k'$ 。

这里控制力也是 $x(t)$ 与 $\dot{x}(t)$ 的线性齐次函数。加入主动控制系统后，整个系统的运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) + f(t). \quad (7.4-10)$$

将(7.4-9)代入上述方程，得主动控制减振系统的运动方程

$$m\ddot{x}(t) + (c + c')\dot{x}(t) + (k + k')x(t) = F(t). \quad (7.4-11)$$

将上式与单自由度的强迫振动运动方程相比，可知，加入主动控制系统后，系统的阻尼系数和刚度系数都增大了，阻尼增加，则其耗散的动能增大，从而抑制振动，产生阻尼减振的效果；而刚度增大，若设计合理，则也可抑制振动，这就是主动控制减振的机理。

例7.6 对图7.4-2所示的主动控制减振系统，采用与例7.5

中相同的控制系统，试讨论 m 的响应特性。

解：由例7.5知，执行机构施加的力为

$$f(t) = -K_1 K_2 K_3 \int_0^t x(t) dt,$$

将上式代入方程(7.4-10)得

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F(t) - K_1 K_2 K_3 \int_0^t x(t) dt,$$

对上式进行Laplace变换，得到 $H(s) = X(s)/F(s)$ ，然后令 $s = i\omega$ ，得复频率特性

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{i\omega}{K_1 K_2 K_3 + i\omega k - \omega^2 c - i\omega^3 m},$$

由此可得 $x(t)$ 的幅频特性

$$|H(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(K_1 K_2 K_3 - \omega^2 c)^2 + \omega^2 (k - \omega^2 m)^2}}.$$

当 $\omega \rightarrow 0$ 时，由上式可推知，即使激励力幅值很大，响应的幅值也趋于零，故这种主动控制减振系统具有很强的抑制超低频振动的能力。

§ 7.5 振动的利用

振动现象并非只能为害，在某些场合，振动也是可以加以利用的。例如，利用振动的能量可有效地实现某些独特的生产工艺过程，或提高某些机器设备的工作效率；利用振动信息可监视机械设备的运行状况，或对工程结构的质量进行无损检测。振动的利用正在工业生产和建设中发挥着愈来愈重要的作用。

7.5.1 振动机械

按振动原理工作的机械称振动机械，它通常由三个部分组成，即激振器、弹簧和工作机体。

下面简要介绍振动输送物料，振动夯实与振动破碎的基本原理与根据。

1. 振动表面的物料输送性能

对于给料、输送、提升和筛分等振动机械，其工艺过程通常是在颗粒状物料沿工作机体的振动工作面连续运动的情况下完成的，物料在振动表面上的运动理论是这类机械设计的基础。

振动机械的工作面的（平动）运动轨迹通常是下列各种形式的振动：直线振动、圆周振动或椭圆振动，依赖上述各种振动，促使物料沿工作面移动。物料在工作面上的运动具有下面两种基本形式，即滑行运动——物料与工作面保持接触，同时相对工作面运动；抛掷运动——物料在工作面上被抛起，离开工作面，沿工作面运动方向作抛物线运动。

2. 振动的减阻性能

振动可以降低互相接触材料间的摩擦系数。这一点，可采用图7.5-1所示的试验方法加以说明：在斜面 A 上放一个滑块 B ，选择适当的 α 角使滑块不下滑，即处于平衡位置，此时满足 $\text{tg}^{-1}\mu > \alpha$ 的条件，这里 μ 是摩擦系数， $\text{tg}^{-1}\mu$ 是摩擦角。一旦使斜面振动，不论是在哪个方向的振动，滑块会立刻下滑，这时必然有 $\text{tg}^{-1}\mu' < \alpha$ ，可见 $\mu' < \mu$ ，即振动的效果是降低了摩擦系数。根据松散材料的内摩擦系数在有振动的情况下会显著地减小这一特性，可利用振动对松散物料进行成型和紧实，因为振动显著减少了物料的内摩擦系数，增加了其“流动性”，因而大大提高了成型与紧实的效率。利用这种特性，还可进行土壤或砂石的夯实和振捣以及沉桩与拔桩。由于在振动下土壤、砂石或其它混合材料的内摩擦力大大减小，可降低这些材料对贯入物体的阻力，有效地完成工作。例如振动打桩机，使桩子在打入过程中不断振动，在振动的减阻作用下，大大减小了桩子附近的土壤对桩子的阻力，仅需较小的力即可将桩子打入土中。

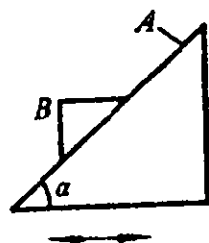


图 7.5-1

3. 振动与冲击的粉碎性能

强烈的振动与冲击可粉碎固体物料，许多粉碎、研磨机械都是按照这种原理工作的。图7.5-2所示为振动球磨机的结构，其工艺过程是利用振动与冲击研磨筒内的物料。为了增加物料受力程度，在其中加入研磨介质（通常为钢球），并一同装入封闭圆形筒。工作机体的振动使研磨介质和被研磨物料产生频繁的冲击和摩擦，从而使物料得以粉碎。选取合适的工作机体振动频率，可使研磨介质实现对被研磨物料最有利的运动。

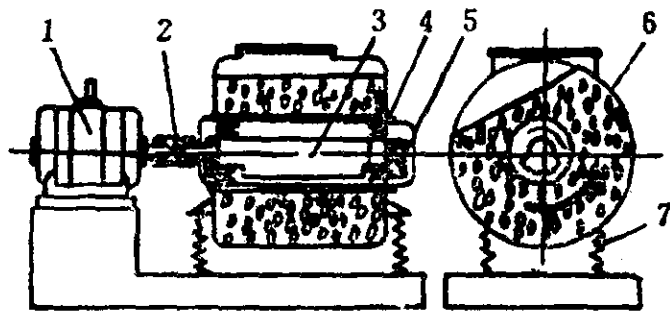


图 7.5-2

1—电动机 2—弹性联轴节 3—单轴式激振器 4—轴承
5—偏心块 6—机体 7—隔振弹簧

7.5.2 利用振动信号进行工况监视与无损检测

上一小节讲的是振动能量的利用，这里则是讲述振动信息的利用。

利用振动信息，可监视机械设备的运转工况、诊断设备故障，还可无损检测工程结构的完整性和损伤。这方面的应用日益广泛，并已取得巨大的经济效益。以下举例加以说明。

1. 利用振动信息对机械设备进行工况监视与故障诊断

各种机器在运行过程中几乎是无可避免地会发生或强或弱、或快或慢的振动，这些振动信号有如人体的脉搏，其中包含着机器的健康状态及其故障的丰富信息。现代工况监视与故障诊断技术借助于灵敏的传感器在机器的运行过程中获取其某些特定部位

上的振动信号，将这些信号输入数字计算机，进行实时处理，抽取其特征，并利用现代模式识别 (mode recognition) 或专家系统 (expert system) 技术，判别机器的工况，及早识别正在孕育发展中的故障，以期排除隐患于早期，而防患于未然。当前基于振动信号的工况监视与故障诊断技术已经广泛地用于轴承、齿轮、转子等零部件以及金属切削机床、内燃机、大型汽轮发动机组、核电站等机电设备的监视与诊断中，并已取得极其巨大的经济效益与社会效益。这方面的研究与开发工作方兴未艾，而已颇具活力，正在形成一个新兴的学科领域。以下仅举金属切削机床自激振动的在线监视为例，来说明利用振动信号进行工况监视的原理与技术要点。

金属切削机床在加工过程中可能会引发一种强烈的自激振动，严重妨碍切削加工过程的正常进行。这种自激振动的机理与模型将在第十三章中介绍。这里我们介绍近年来在对机床自激振动进行在线监视方面*所取得的某些成果。

在车削细长轴时，从车床的尾顶尖上以加速度传感器获取其在铅垂方向上的振动加速度信号 $x(t)$ ，经放大后输入数字计算机，得到离散的数字序列 x_1, x_2, \dots, x_n 。大量试验表明，切削过程在从平稳转向自激振动的过程中，振动信号将发生以下两方面的特征变化：第一，在时域中其振动幅值逐渐增大，即振动能量增大；第二，在频域中，振动信号的主频带从高端向低端移动。前一个变化很自然地反映了振动能量的积累和自激振动的增长过程；后一变化则是由于在平稳切削时，机床受到的各种随机扰动的频率远高于机床自激振动的频率（详见第十三章），因此自激振动的孕育发展过程，必然伴随着振动信号的主频带由高端向低端的移动。以上两方面的信号特征变化，是对机床自激振动进

*梅志坚等，金属切削过程颤振的计算机模式识别及在线监控，华中工学院学报，1987(2)：41—48

行监视与早期诊断的物理根据。

知道了监视信号的特征变化以后，就需要找寻合适的特征量，用以定量地描述上述特征变化。所选取的特征量不仅要求能敏锐地反映信号的相应特征变化，又要少受其它因素的影响，而且要求计算量小，以便实时处理。据此，选择信号的方差 σ_x^2 来描述上述第一特征变化，即振动幅值的增大，而选择信号的标准化一步协方差函数 $\rho_x(\Delta)$ 来描述第二特征变化，即信号主频带的移动，这里 Δ 表示采样的时间间隔。

以(5.2-11)、(5.2-3)式代入(5.2-13)式，得

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt - \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \right)^2.$$

这里我们略去了 $x_k(t)$ 的下标 k ，因为我们假定过程是各态历经的。将上式中的积分近似为求和，并取有限的求和项，得 σ_x^2 的计算公式。

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2. \quad (7.5-1)$$

再由(5.4-17)式以及(5.2-3)、(5.2-4)式代入，略去 $x_k(t)$ 的下标，将积分近似为求和，并取有限的求和项，且令时移 $\tau = \Delta$ 得一步协方差函数。

$$c_x(\Delta) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N x_i x_{i-1} - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2,$$

除以(7.5-1)式，即进行标准化，得标准化一步协方差函数的计算公式

$$\rho_x(\Delta) = \frac{c_x(\Delta)}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N x_i x_{i-1} - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}. \quad (7.5-2)$$

(7.5-1)、(7.5-2)式中共有三个不同的求和式

$$s_1 = \sum_{i=1}^N x_i, \quad s_2 = \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad s_3 = \sum_{i=2}^N x_i x_{i-1}.$$

它们可在计算机采样间隔中逐步进行迭代计算，一旦采样完成，以上三个和式就已算出，于是按下式立即可得到

$$\sigma_s^2 = \frac{s_2}{N} - \frac{s_1^2}{N^2},$$

$$\rho_s(\Delta) = \frac{1}{\sigma_s^2} \left(\frac{s_3}{N-1} - \frac{s_1^2}{N^2} \right).$$

可见其计算速度很快，确能满足实时计算与实时监视的要求。

众所周知，标准化协方差函数 $\rho_s(\tau)$ 属于时域中的特征量，它何以能反映信号主频带的变化，需要加以说明。我们撇开信号 $x(t)$ 的均值 μ_s 不计，即认为 $x(t)$ 是零均值的，那么其标准化协方差函数可写为

$$\rho_s(\tau) = \frac{R_s(\tau)}{R_s(0)},$$

以(5.2-36)、(5.2-37)式代入，并令 $\tau = \Delta$ ，得

$$\rho_s(\Delta) = \frac{\int_0^{\omega_n} s_s(\omega) (\cos \omega \Delta) d\omega}{\int_0^{\omega_n} s_s(\omega) d\omega}.$$

由上式可见 $\rho_s(\Delta)$ 可理解为 $\cos \omega \Delta$ 的加权平均，而以功率谱密度函数 $s_s(\omega)$ 为权函数。另一方面，在采样间隔 Δ 选定以后， $\cos \omega \Delta$ 的取值就只由频率 ω 决定，在 Nyquist 频率 $\omega_n = 2\pi/2\Delta$ 的范围以内， $\cos \omega \Delta$ 与 ω 之间具有如图 7.5-3 所示的单调减函数的关系。由此不难理解，如果信号的功率谱主要分布在较高的频率区域，按(7.5-2)式定义的 $\rho_s(\Delta)$ 必然取较低的数值，而如果功率谱向低频端移动， $\rho_s(\Delta)$ 的取值势必

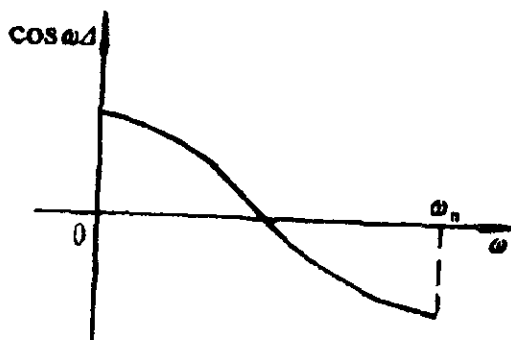


图 7.5-3

上升。因此， $\rho_s(\Delta)$ 可以作为定量描述信号主频带分布情况的一个特征量。

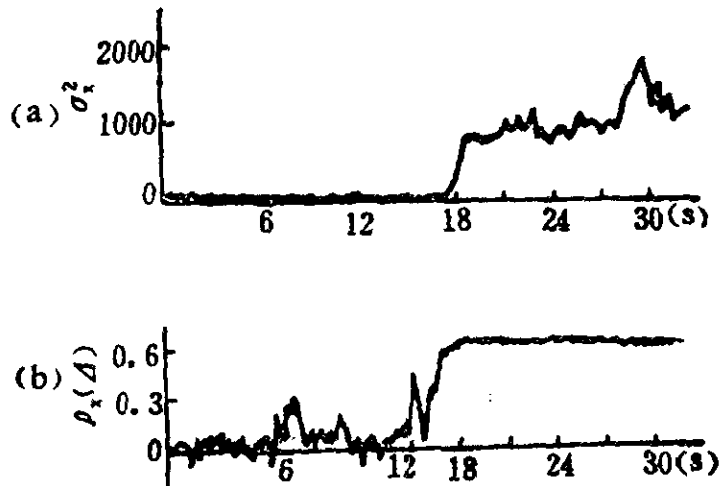


图 7.5-4

在切削过程由平稳向自激振动的发展过程中， σ_r^2 与 $\rho_s(\Delta)$ 的典型变化情况，分别如图7.5-4(a)、(b)所示。可见这两个量确实可以敏锐地反映信号的特征变化。

记 $\sigma_r^2 = \zeta_1$ ， $\rho_s(\Delta) = \zeta_2$ ，可建立模式向量

$$\{\zeta\} = \{\zeta_1, \zeta_2\}^T,$$

在模式平面 (ζ_1, ζ_2) 上，模式向量端点移动的轨迹如图7.5-5所示。在平稳切削条件下，该轨线在模式平面的左下角区域中徘徊；一旦开始发生自激振动，轨线迅速向模式平面的右上角转移。我们可以在模式平面上设立纵横两条控制线，如图7.5-5中

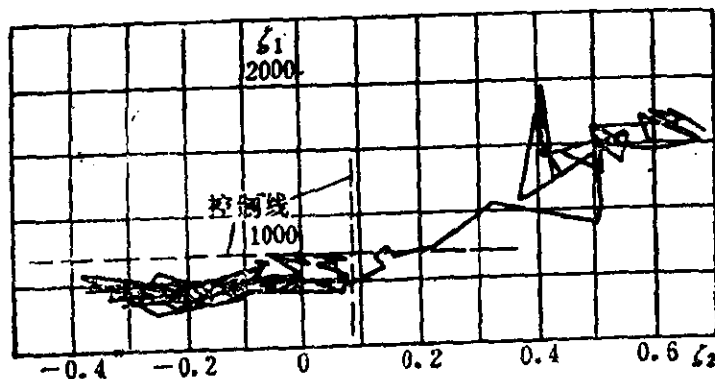


图 7.5-5

虚线所示，一旦轨迹同时跨越两条控制线，就判定自激振动即将来临，立即发出警报或启动机床的控制机构，调整切削用量，使自激振动消失。

控制线的设立，可以通过系统在不稳切削过程中进行“自学习”来实现，其方法是在不稳切削过程中不断采集振动信号，反复计算特征值 $\zeta_1 = \sigma_1$ 与 $\zeta_2 = \rho_s(\Delta)$ ，同时计算 ζ_1 与 ζ_2 的均值 μ_1 、 μ_2 与方差 σ_1 、 σ_2 ，然后按

$$\zeta_1 = \mu_1 + 3\sigma_1,$$

$$\zeta_2 = \mu_2 + 3\sigma_2.$$

即可设立横向与纵向的两条控制线，然后监视系统自动转入“监视状态”。

大量试验表明，上述监视系统确能对切削过程中发生自激振动的先兆进行早期诊断。

2. 利用振动信号对工程结构进行无损检测

作为举例，这里我们只对采用振动法检测桩基质量作简要的说明。

海港工程，桥梁及高层建筑等工程中大量使用深桩基础。对已经打入土层中的桩身的完整性进行检验，以确保桩基工程的质量，事关“百年大计”，其重要性是不言而喻的。近年来发展起来的桩基振动检测法，通过对桩基进行激振，测量其导纳，利用导纳曲线的信息检查桩身的质量与完整性并估计其承载能力，已经得到广泛应用，并有很广阔的发展前景。

对打入土层中的长桩，可采用稳态激振或瞬态激振试验的方法，在露出地面上的桩顶激振，同时测量激振力和桩顶的运动速度，从而得到桩顶的速度导纳。对同样的桩与同样的土层，其桩顶导纳曲线应有一定的“规范”；若桩身出现断裂、鼓肚、颈缩等情况，必然引起导纳曲线的变化，换言之，导纳曲线带有桩身的完好或缺陷信息。因此由测出的导纳曲线即可以判别桩基的各种缺陷。

思 考 题

1. 在稳态弓状回旋情况下, 柔性轴所受的应力是恒定的还是交变的? 轴承所受的力是恒定的还是交变的?
2. 转子的动态不平衡与静态不平衡的差别在哪里? 能否有动态平衡而静态不平衡的情况?
3. 隔振系统的阻尼愈大, 则隔振效果愈好, 这种说法是否总是对的?
4. 为什么很多机械设备先刚性安装在一个大的浮动基础上, 然后再通过弹性支承安装在另一个固定的基础上?
5. 主动控制减振系统的控制力的表达式(7.4-9)中, 如果 $c' < 0$, 会有什么现象, 如果 $k' < 0$, 会有什么现象?

习 题

7-1 一转子重为98.1N, 装在直径为2.0cm, 长为32cm的钢轴中心, 轴端简支, 钢的弹性模量为 $E = 2.0 \times 10^6 \times 9.81 \text{N/cm}^2$, 比重 $\gamma = 7.8 \times 9.81 \text{N/cm}^3$, 不计阻尼, 求1)临界转速, 2)在转速为3000r/min时转子的振幅, 设偏心距 $e = 0.015 \text{mm}$. 3)在上述转速时两端轴承受的力。

7-2 一机器重4410N, 支承在弹簧隔振器上, 弹簧的静压缩量为 $x_0 = 0.5 \text{cm}$, 机器有一偏心重, 产生偏心激振力 $F = 2.254\omega^2/g \text{(N)}$, ω 为激振力频率, g 为重力加速度, 不计阻尼, 求1)当机器转速为1200r/min时, 传入地基的力; 2)机器的振幅。

7-3 在上题中, 机器先安装在重11170N的混凝土基础上, 再在下面支承刚度更大的弹簧隔振器, 隔振器支承在另一混凝土地面上。弹簧的静压缩量仍为0.5cm, 求此时机器的振幅。

7-4 一台洗衣机机器重 $W = 21.6 \times 10^3 \text{N}$, 用四个螺旋弹簧在对称位置支承, 每个弹簧的刚度为 $k = 98.92 \times 9.81 \text{N/cm}$, 同时装有四个阻尼器, 总的阻尼率为 $\xi = 0.1$, 脱水时转速 $n = 600 \text{r/min}$, 此时衣物偏心重为98.1N, 偏心距为40cm, 求: 1)洗衣机机器部分的最大振幅; 2)隔振传递

率。

7-5 某振动筛简化为图7-5所示系统，已知：减振架重 $W_1 = 6700 \times 9.81\text{N}$ ，槽体重 $W_2 = 18700 \times 9.81\text{N}$ ，减振弹簧刚度 $k_1 = 7392 \times 9.81\text{N/cm}$ ， $k_2 = 5760 \times 9.81\text{N/cm}$ 。若在槽体上作用一激振力 $F = F_0 \sin \omega t$ ，其中 $F_0 = 50000 \times 9.81\text{N}$ ，激振频率 $f = \omega/2\pi = 12.25(1/s)$ 。试求传到地基上的力最大值是多少？

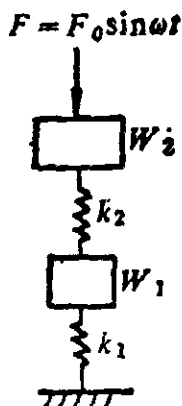


图 7-5

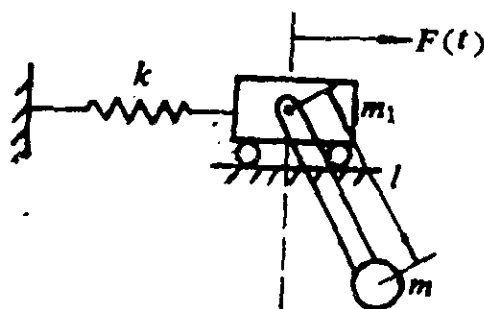


图 7-6

7-6 图7-6所示系统：作用于 m_1 上的水平激振力为 $F(t) = F \sin \omega_0 t$ ，为消除 m_1 的振力，采用摆式消振器，试求当 m_1 的振幅为零时，摆长应为多少？

7-7 转动惯量为 I 的飞轮通过四个刚度为 k 的弹簧与转动惯量为 I_c 并能在轴上自由转动的扭转减振器相连，如图7-7所示。试建立系统扭转振动的微分方程。若在飞轮上作用一简谐变化的扭矩，试讨论系统的响应。

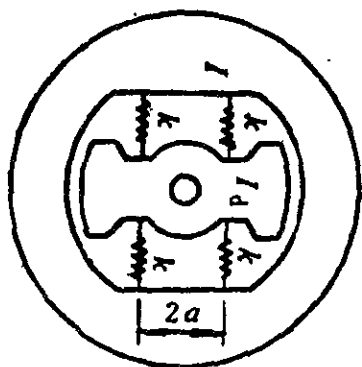


图 7-7

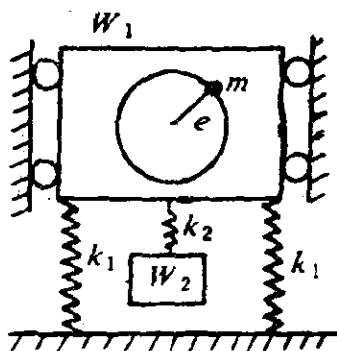


图 7-8

7-8 图7-8表示一机器系统，已知机器重 $W_1 = 90 \times 9.81\text{N}$ ，动力消振

器重 $W_2 = 2.25 \times 98.1 \text{ N}$, 若机器上有一偏心块重 0.5 kg , 偏心距为 $e = 1 \text{ cm}$, 机器转速为 $n = 1800 \text{ r/min}$, 求: 1) 消振器的弹簧刚度 k_2 为多大时, 才能使机器振幅为 0; 2) 此时消振器振幅多大; 3) 若使消振器振幅不超过 2 mm , 应如何改变消振器的参数。

思考题参考答案

第一章

1) 仍可能有自由振动。2) \checkmark 。3) 线性谐振子的周期 $T = 2\pi / \omega_n = 2\pi \sqrt{m/k}$, 完全由系统参数所决定。在线性范围内, 它与振幅无关。4) \checkmark 。5) 初始条件不同, 自由振动的振幅, 相位不同, 但自由振动的频率与初始条件无关。6) \checkmark 。

第二章

1) \checkmark 。2) ξ 无量纲, $f(t)$ 的量纲是 L。3) 谐波激振力的响应的相位一般滞后于激振力的相位。4) 即使 $\xi \geq 1$, 其谐波响应仍为谐波运动。5) 当阻尼率 $\xi \neq 0$ 时, 最大振幅时的频率(共振频率)为 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$, 其中 ω_n 为系统的自然频率, 即当 $\xi \neq 0$ 时, ω_r 与 ω_n 两者并不相等。6) 应为 $x(t) = \text{Re}(H(\omega) \cdot Ae^{i\omega t})$, 或 $x(t) = |H(\omega)| Ae^{i(\omega t - \varphi)}$ 。7) 响应的周期与激励的周期相同, 但波形一般并不同。8) \checkmark 。9) 冲击响应的最大峰值可以发生在冲击作用的时间里, 也可以发生在冲击结束以后, 视冲击波的持续时间 T 与系统自由振动的周期 T_n 的相对大小而定。10) 可以有稳态响应, 试看例 2.10, 每次冲击以后, 只改变了速度的方向, 而并未改变其绝对值, 即由 $-P_0/(2m)$ 变为 $P_0/(2m)$, 因而并未增加动能。11) 不一定, 试看例 2.1。12) 不对, 试看 (2.4-14) 式及 2.4.3 小节后的说明。

第三章

1) 两自由度系统有两个自然模态, 对应有两个自然频率和两个模态向量, 在自由振动时系统的两个坐标的运动一般均应是

量时，也应该将 $-\omega_2 \sim -\omega_1$ 中的能量一并考虑。10) 由 $\{x_k(t)\}$, $\{y_k(t)\}$ 中依次各取一个样本函数，组成有序 的函数对 $(x_k(t); y_k(t))$; $k=1, 2, \dots, N$ ，即共有 N 个函数对，其中满足条件 $\{x_k(t_1) < x_1 \text{ AND } y_k(t_2) < x_2\}$ 的函数对 如有 N_{x_1, y_2} 个，则有

$$P(x_1, t_1; y_2, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{x_1, y_2}}{N}. \quad 11) \text{ 不能保证. } 12) (x)(m)^{1/2}.$$

13) 正态分布的随机过程通过线性系统以后，其概率分布仍为正态分布。

第六章

1) 阅读本章引言。2) m_1 无影响 (阅读 6.1.1)。3) 不能交换 (阅读 6.1.1)。4) 级数展开，略去高阶微量。5) 激励力不再是正弦波，而是被削去一半，频率成分也就有其它成分 (阅读 6.3.2)。6) 阅读 6.3.2, 参阅 5.2.6。7) 阅读 6.3.2; 6.3.3。

第七章

1) 柔性轴所受的应力恒定，轴承所受的力为交变力 (参阅 7.1.3)。2) 不可能 (参阅 7.1.3)。3) 并非总是对的 (参阅 7.2.1)。4) “质量隔振” (参阅 7.2.2)。5) 增加系统的不稳定，详见第十三章。

量时，也应该将 $-\omega_2 \sim -\omega_1$ 中的能量一并考虑。10) 由 $\{x_k(t)\}$, $\{y_k(t)\}$ 中依次各取一个样本函数，组成有序 的函数对 $(x_k(t); y_k(t))$; $k=1, 2, \dots, N$ ，即共有 N 个函数对，其中满足条件 $\{x_k(t_1) < x_1 \text{ AND } y_k(t_2) < x_2\}$ 的函数对 如有 N_{x_1, y_2} 个，则有

$$P(x_1, t_1; y_2, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{x_1, y_2}}{N}. \quad 11) \text{ 不能保证. } 12) (x)(m)^{1/2}.$$

13) 正态分布的随机过程通过线性系统以后，其概率分布仍为正态分布。

第六章

1) 阅读本章引言。2) m_1 无影响 (阅读 6.1.1)。3) 不能交换 (阅读 6.1.1)。4) 级数展开，略去高阶微量。5) 激励力不再是正弦波，而是被削去一半，频率成分也就有其它成分 (阅读 6.3.2)。6) 阅读 6.3.2, 参阅 5.2.6。7) 阅读 6.3.2; 6.3.3。

第七章

1) 柔性轴所受的应力恒定，轴承所受的力为交变力 (参阅 7.1.3)。2) 不可能 (参阅 7.1.3)。3) 并非总是对的 (参阅 7.2.1)。4) “质量隔振” (参阅 7.2.2)。5) 增加系统的不稳定，详见第十三章。

**THE FIRST BATCH OF BOOKS FOR
GRADUATE STUDENTS**

“研究生用书”书目(第一批)

书 名	作 者
机械工程测试·信息·信号分析 Measurement, Information and Signal Analysis in Mechanical Engineering	卢文祥 Lu Wenxiang 杜润生 Du Runsheng
粘弹性力学 Theory of Viscoelasticity	杨挺青 Yang Tingqing
网络分析与综合原理 Network Analysis and Synthesis Theory	曾凡刊 Zeng Fankan
现代数字设计 Modern Digital Design	陈耀奎 Chen Yaokui
随机过程 Stochastic Process	申鼎煊 Sheng Dingxuan
应用泛函简明教程 A Course in Applied Functional Analysis	李大华 Li Dahua
协同学原理和应用 Principles and Application of synergetics	吴大进 Wu Dajin
现代中央银行导论 An Introduction to Modern Central Bank	黄芳泉 Huang Fangquan
高级英语阅读系列文选(I) Advanced English Reading Series(Book1)	朱月珍 Zhu Yuezhen

**THE SECOND BATCH OF BOOKS FOR
GRADUATE STUDENTS
“研究生用书”书目(第二批)**

书 名	作 者
高级英语阅读系列文选(Ⅱ) Advanced English Reading Series (Book 2)	樊长荣 等 Fan Changrong
时间序列分析与工程应用(上)(下) Time Serise Analysis in Engineering Application	杨叔子 Yang Shuzi 吴 雅 Wu Ya
实用偏微分方程数值解法 Numerical Solution of Practical Partial Differential Equations	徐长发 Xu Changfa
遥感图象数字处理 Digital Processing of Remotely Sensed Images	万发贯 Wan Faguan 柳健 文灏 Liu Jian Wen Hao
线性多变量系统 Linear Multiple Variable Systems	庞富胜 Pang Fusheng
内燃机燃烧学 Theory of Combustion for Internal Combustion Engines	金国栋 Jin Guodong
控制系统 CAD 基础 CAD Basios of Control Systems	罗宗虔 Luo Zongqian

**THE THIRD BATCH OF BOOKS FOR
GRADUATE STUDENTS**
“研究生用书”书目(第三批)

书 名	作 者
<p style="text-align: center;">企业管理专家模拟系统 An Expert Simulation System for Enterprise Management</p>	<p style="text-align: center;">黎志成 等 Li Zhicheng et al.</p>
<p style="text-align: center;">数字语音处理 Digital Speech Processing</p>	<p style="text-align: center;">姚天任 Yao Tianren</p>
<p style="text-align: center;">高等内燃机教程 An Advanced Course on Internal Combustion Engines</p>	<p style="text-align: center;">刘永长 Liu Yongchang</p>
<p style="text-align: center;">液压故障分析与状态监测 Fault Analysis and Condition Monitoring for Hydraulic Components and Systems</p>	<p style="text-align: center;">李壮云 Li Zhuangyun</p>
<p style="text-align: center;">数据库设计与分析 Database Design and Analysis</p>	<p style="text-align: center;">刘云生 Liu Yunsheng</p>
<p style="text-align: center;">辩证法史论稿 On Dialectics History</p>	<p style="text-align: center;">阳作华 Yang Zuohua 张 峰 Zhang Feng</p>
<p style="text-align: center;">大型复杂结构优化设计 Optimum Design Calculation for Large Complex Structures</p>	<p style="text-align: center;">宋天霞 等 Song Tianxia et al.</p>
<p style="text-align: center;">自适应光学 Adaptive Optics</p>	<p style="text-align: center;">叶嘉雄 Ye Jiexiong 余永林 Yu Yonglin</p>

442709



THE FOURTH BATCH OF BOOKS FOR
GRADUATE STUDENTS

“研究生用书”书目(第四批)

书 名	作 者
机械振动系统——分析、测试、建模与对策 (上)(下) Mechanical Vibration System——Analysis Measurement·Modeling·Control	师汉民 等 Shi Hanmin et al.
薄膜生长理论 Theory of Thin Film Growing	王敬义 Wang Jingyi
塑性成型模拟理论 Modeling Theory of Plastic Forming	肖景容 Xiao Jingrong
高等弹性力学 Advanced Elasticity	钟伟芳 等 Zhong Weifang et al.
微波磁学和光磁学 Microwave Magnetism and Photomagnetism	何华辉 He Huahui
有机化学中的单电子转移反应及其应用 Electron Transfer in Organic Chemistry ——Reactions and Applications	赵成学 等 Zhao Chengxue et al.
生命科学中的微量元素硒 Trace Element Selenium in Life Science	徐辉碧 等 Xu Huibi et al.
计算机几何 Computer Geometry	熊有伦 Xiong Youlun