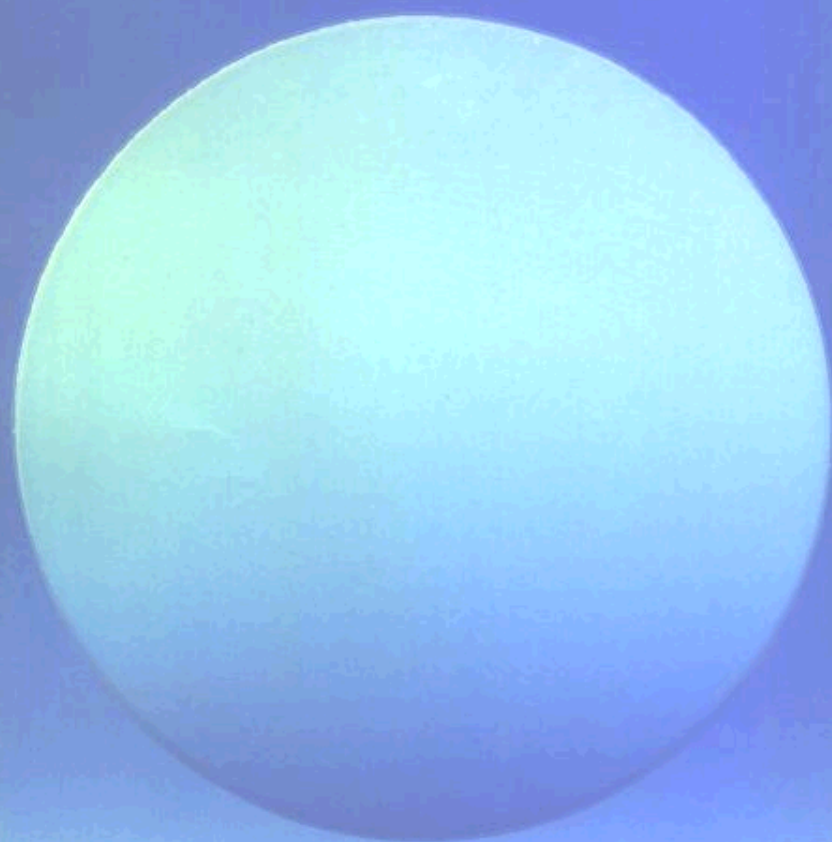


● 研究生用书 ●

获全国高等学校  
机电类专业优秀教材一等奖

MECHANICAL VIBRATION SYSTEM  
— ANALYSIS · MEASUREMENT  
· MODELING · CONTROL  
华中理工大学出版社



师汉民  
湛刚  
吴雅

# 机械振动系统

— 分析 · 测试 · 建模 · 对策

(下册)

· 研究生用书 ·

**机械振动系统**

——分析·测试·建模·对策

(下 册)

师汉民 谌刚 吴雅

责任编辑 叶翠华

\*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

武汉市新华印刷厂印刷

\*

开本:850×1168 1/32 印张:14.375 插页:2 字数:354 000

1992年10月第1版 1999年6月第3次印刷

印数:2 001—3 000

ISBN 7-5609-0686-9/TH·61

定价:19.80元

## 内 容 简 介

本书讲述现代振动工程中有关振动系统的分析、测试、建模与对策方面的基础理论、基本知识以及常用的方法和技巧。全书分上下两册,上册(基础篇)包括单自由度与多自由度系统振动的基础知识,随机激励下的振动,振动系统的测试、辨识与建模,振动的抑制与利用;下册(深化篇)包括分析动力学基础,多自由度系统振动分析的常用方法,连续系统与非线性系统的振动,工程中的自激振动以及振动问题分析求解的计算方法。

本书注意联系工程实际,可作为机械类专业硕士研究生教材,其中上册也可作为本科生教材使用。此外,本书还可供工程技术人员参考。

### Abstract

The fundamental theory, basic knowledge and the methods and techniques most in use for analysing, measuring, testing modeling and controlling vibration systems in modern vibration engineering are discussed in this book. The book is divided into two volumes, the first volume (fundamental one) consists of basic knowledge about the vibration of single-or multidegree-of-freedom systems, vibration induced by random excitation, vibration measuring, testing, identifying and modeling, vibration suppression and vibration application, the second volume (deepening one) is devoted to elements of analytical dynamics, the methods in common use for analysing vibration in multi-degree-of-freedom systems, vibration of continuous and non-linear systems, self-excited vibration in engineering and computation techniques for vibration problem solving.

Paying attention to integrating theory with engineering practice the book may be used by the Master degree students in the disciplines related to mechanical engineering as well as the first volume of the book can be used by the undergraduates as a textbook. Besides, the book can be used also by engineers or researchers as a reference book.

## “研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节,是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材,才能使学生通过学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识,为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自1978年招收研究生以来,组织了一批学术水平较高,教学经验丰富的教师,先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行,更多则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践,不断修改、补充、完善,已达到出书的要求。因此,我校决定出版“研究生用书”,以满足本校各专业研究生教学需要,并与校外单位交流,征求有关专家学者和读者的意见,以促进我校研究生教材建设工作,提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主,还有教学参考书和学术专著,涉及的面较广,数量较多,准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发,根据各门课程在教学过程中的地位和作用,在内容上求新、求深、求精,每本教材均应包括本门课程的基本内容,使学生能掌握必需的基础理论和专门知识;学位课教材还应接触该学科的发展前沿,反映国内外的最新研究成果,以适应目前科学技术知识更新很快的形势;学术专著则应充分反映作者的科研硕果和学术水平,阐述自己的学术见解。在结构和阐

述方法上,应条理清楚,论证严谨,文字简炼,符合人们的认识规律。总之,要力求使“研究生用书”具有科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些,但由于研究生的培养工作为时尚短,水平和经验都不够,其中缺点、错误在所难免,尚望校内外专家学者及读者不吝指教,我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

黄树槐

1989. 11

# 前 言

本书是为华中理工大学硕士研究生的学位课程“机械振动”所编写的教材。此课程旨在帮助研究生掌握机械振动的基础理论、基本测试、建模技能与分析计算方法，培养他们对机械系统和工程结构进行振动分析与控制、有效地处理机械工程中各种振动问题的能力。

为实现上述目的，本书力图在“少而精”的前提下，覆盖机械工程类的硕士研究生在他们未来的工作中为处理种种动态分析与振动控制问题，可能需要的基础理论、基本知识以及常用的方法和技巧。我们试图突破现有机械振动方面的书籍或教材的一般体系，而将现代振动工程中有关振动系统的分析、测试、建模与对策方面的知识组织成为一个有机的整体，供研究生学位课程教学之用。

本书以机械类工科专业本科的课程（理论力学、材料力学、高等数学和工程数学）作为起点，在取材与编排上有以下特点：

突出联系工程实际的观点，在遵循振动学科的基本体系、讲清振动科学的基础理论的同时，注意阐述有关理论、知识和方法的工程背景与实际意义；

注意反映由于电子计算机在振动分析中的广泛深入的应用，而发展起来的一些新的方法与技巧；

在适应于教材的容量与深度的范围内，本书还介绍了作者近年来在金属切削机床自激振动的非线性理论及其在线监控技术方面的主要研究成果，作为工程实际中的振动问题的分析与处理之一例。

全书分上下两册，上册（基础篇）包括单自由度与多自由度

系统振动的基础知识，随机激励下的振动，振动系统的测试、辨识与建模，振动的抑制与振动的利用；下册（深化篇）包括分析力学基础，多自由度系统振动分析的常用方法，连续系统与非线性系统的振动，工程中的自激振动以及振动问题分析求解的计算方法。

在叙述方法上我们尽力注意突出重点，讲清难点，分清层次，以利教学；特别是注意以启发诱导的方式，激发研究生的学习兴趣，引导他们去钻研与理解。

在每章之末均附有若干“思考题”，这些思考题“貌似简单”，其实并不容易，它们有助于帮助学习者澄清模糊概念，并激发学习兴趣。在书末附有各章思考题的答案，但我们希望读者在经过认真思考以后，再去查阅答案。各章之后还附有若干习题，供读者选作。

按照我们的教学经验，如果讲授得法，而且研究生们能努力学习，积极配合，那么80学时已足够讲授本书的基本内容，课内外学时之比约为1:2。

如果研究生们在本科期间已修有关振动方面的课程，则可略去第一篇，而由第二篇开始讲授，大约40~60学时已能讲完。

本书第一篇（第一至第七章）还可作为机械类专业大学本科生的必修或选修课教材，约需40~60个课堂学时。

本书除作为教材之外，还可供从事机械产品与机械设备的振动测试、分析、抑制或利用等方面工作的广大工程技术人员作为技术参考书。

湛刚与吴雅参与了这门课程的教学实践与大纲制订，并分别提供了第三、四、六、七、九章与第一、二章的初稿，全书由师汉民编写与修改、定稿。湛刚与吴雅负责整理、校核全书的文字、公式与插图。伍良生校阅了部分章节，并提出了宝贵建议。周辉、张保国与刘国祥为缮写书稿付出了辛勤的劳动。

杨叔子教授对于这门课程的开设与教材编写给与了热情的支

持和关怀。杜润生为本课程的实验开设作出了贡献。邓星钟、卢文祥等同志都为此课程教学活动的正常进行付出了劳动。

限于编者的水平，书中定有许多不恰当甚至错误之处，切望读者批评指正。

编者

1990年11月28日



# 目 录

第二篇 深化篇	( 1 )
第八章 分析力学基础	( 3 )
§ 8.1 引言	( 3 )
§ 8.2 功和能	( 6 )
§ 8.3 虚功原理	( 8 )
§ 8.4 势能与动能的广义坐标表达式	( 16 )
§ 8.5 D'Alembert原理	( 19 )
§ 8.6 Lagrange方程	( 20 )
§ 8.7 系统的线性化及线性系统的Lagrange方程	( 26 )
第九章 多自由度系统振动分析的常用方法	( 33 )
§ 9.1 估算多自由度系统自然频率与模态向量的几种方法	( 33 )
§ 9.2 子系统综合法 (一) ——传递矩阵法	( 48 )
§ 9.3 子系统综合法 (二) ——机械阻抗法	( 64 )
§ 9.4 子系统综合法 (三) ——模态综合法	( 81 )
第十章 连续系统的振动及其精确解	( 100 )
§ 10.1 弦的横向振动	( 100 )
§ 10.2 杆的纵向振动	( 113 )
§ 10.3 轴的扭转振动	( 119 )
§ 10.4 弦、杆、轴振动方程的相似性	( 120 )
§ 10.5 边界条件	( 121 )
§ 10.6 对于初始激励的响应	( 128 )
§ 10.7 对于过程激励的响应	( 131 )
§ 10.8 波动方程	( 135 )
§ 10.9 梁的弯曲振动	( 140 )
§ 10.10 模态正交性	( 148 )

§ 10.11	以振型叠加法研究梁的响应 .....	( 152 )
§ 10.12	连续系统的动能、势能、符号确定性与瑞利商 .....	( 160 )
<b>第十一章</b>	<b>连续系统的高散化与近似解法 .....</b>	<b>( 172 )</b>
§ 11.1	估算系统基频的几种方法 .....	( 173 )
§ 11.2	集中质量法 .....	( 183 )
§ 11.3	特征函数参数化方法 .....	( 195 )
§ 11.4	有限元方法 .....	( 212 )
<b>第十二章</b>	<b>非线性系统的振动 .....</b>	<b>( 254 )</b>
§ 12.1	引言 .....	( 254 )
§ 12.2	状态空间与相图 .....	( 257 )
§ 12.3	奇点邻域中相图的特性 .....	( 269 )
§ 12.4	保守系统及其在大范围的运动 .....	( 281 )
§ 12.5	极限环 .....	( 286 )
§ 12.6	平均法 .....	( 290 )
§ 12.7	迭代法 .....	( 299 )
§ 12.8	摄动法 .....	( 307 )
§ 12.9	时变系统 .....	( 315 )
<b>第十三章</b>	<b>自激振动 .....</b>	<b>( 322 )</b>
§ 13.1	自激振动的现象和特点 .....	( 322 )
§ 13.2	由于速度反馈引起的自激振动 .....	( 326 )
§ 13.3	由于位移的延时反馈而引起的自激振动 .....	( 340 )
§ 13.4	由于模态耦合引起的自激振动 .....	( 370 )
§ 13.5	自激振动的识别、建模与防治 .....	( 379 )
<b>第十四章</b>	<b>振动问题分析求解中的计算方法 .....</b>	<b>( 384 )</b>
§ 14.1	求解特征值问题的计算方法 .....	( 384 )
§ 14.2	有阻尼线性系统的状态转移矩阵分析法 .....	( 414 )
§ 14.3	求解系统响应的计算机数字仿真方法 .....	( 426 )
<b>参考文献</b> .....		<b>( 441 )</b>
<b>思考题参考答案</b> .....		<b>( 442 )</b>

# 第二篇 深化篇

分析力学基础·多自由度  
系统振动分析的常用方法  
·连续系统与非线性系统的  
振动·自激振动·振动  
问题分析求解的计算方法



# 第八章 分析力学基础

## §8.1 引言

### 8.1.1 牛顿力学方程的缺陷与改造

我们在前面推导振动系统的运动方程时，主要是用到牛顿第二定律，

$$F = m \ddot{\mathbf{r}}, \quad (8.1-1)$$

式中  $m$  是质点的质量； $F$  是作用在质点上的力； $\ddot{\mathbf{r}}$  是质点的加速度向量。 $\mathbf{r}$  是质点的向径（图 8.1-1）。向量  $F$  可以写成坐标式：

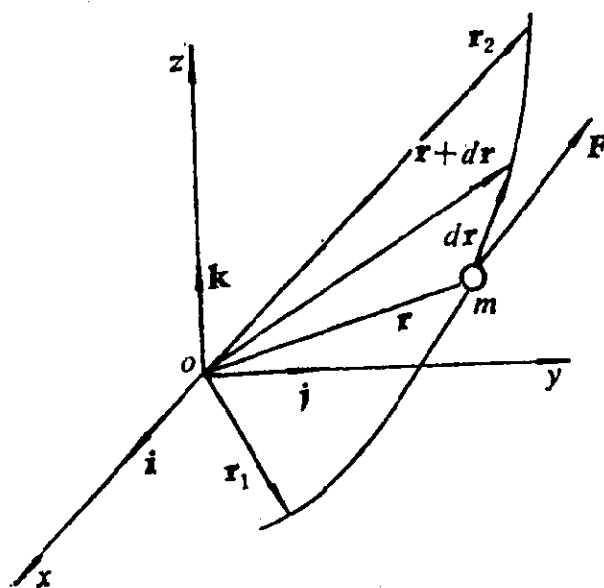


图 8.1-1

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}, \quad (8.1-2)$$

式中 $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ 分别是 $\mathbf{F}$ 在 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 三个坐标轴上的投影， $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{k}$ 分别是在该三个坐标轴方向上的单位向量(图8.1-1)。向量 $\mathbf{r}$ 也可写成坐标式：

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (8.1-3)$$

以(8.1-2)、(8.1-3)式代入(8.1-1)式，可得到三个标量式：

$$F_x = m \ddot{x}, \quad F_y = m \ddot{y}, \quad F_z = m \ddot{z}. \quad (8.1-4)$$

(8.1-1)或(8.1-4)式所表示的牛顿力学方程有如下两个缺点：

第一，它是就质点写出的，或者说是就可以视为质点的“脱离体”写出的。当一个系统中存在多个质点时，就必须分别就多个质点列出方程

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.1-5)$$

式中， $\mathbf{F}_i$ 是作用在第 $i$ 个质点上的合力，其中当然也包括其它质点与第 $i$ 个质点之间由于存在约束关系而引起的约束力，以及外界环境对该质点的约束力，即支反力； $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 是第 $i$ 个质点的加速度； $m_i$ 是第 $i$ 个质点的质量。 $N$ 是系统中的质点数。这种将一个系统分成若干脱离体来分别列出方程的方法，就必须涉及约束力，而这往往会造成一种累赘，因为在求解系统的运动时，往往对其各部分之间的约束力并不感兴趣。例如第四章图4.1-1所示的双摆，如分别就 $m_1$ 、 $m_2$ 两个质点列出运动方程，就必须将 $m_1$ 与 $m_2$ 之间的约束力以及悬挂点 $o$ 对 $m_1$ 的约束力纳入考虑。可是如果我们只希望分析此双摆的运动，就没有必要计算以上内力与支反力。

第二，牛顿方程是就质点的物理坐标列出的，在图4.1-1所示双摆的情况下，就是分别就质点 $m_1$ 、 $m_2$ 的四个直角坐标 $x_1$ 、 $y_1$ 、 $x_2$ 、 $y_2$ 列出四个方程。可是这四个坐标显然不是相互独立的，其间存在(4.1-1)、(4.1-2)式所示的两个约束条件。正如

§ 4.1已经讲过的，事实上只需以图中 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 这两个角度作为坐标，就能完全确定系统在任一时刻的形状或位置，因为该系统其实是一个两自由度的系统。在以物理坐标列出多质点的运动方程时，必须将形如(4.1-1)、(4.1-2)式的诸约束条件纳入考虑，方程才能求解。

总之，采用牛顿的力学方程求解动力学问题时，划分脱离体导致计算约束力的必要；采用物理坐标又导致考虑约束条件的必要，这里明显地走了弯路。为了克服牛顿力学方程的上述缺陷，由Lagrange等人创立的分析力学采取了另一种策略：首先，它把一个系统作为一个整体，列出其运动方程，而不再取脱离体，也不一定要求计算约束力（当然，如果需要，这些力也可方便地计算出来）；其次，它采用所谓广义坐标（例如，图4.1-1中的 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 作为双摆的广义坐标），将对于系统的描述参数减小到最少而又不失去其充分性的程度，而约束条件也就自动地得到了保证。此外，分析力学摒弃了位移与力这些向量概念，而采用能量和功等标量来描述力学系统，这些量与具体的坐标系无关，因此以这些术语表述的力学方程具有更广阔的用途，其适用范围甚至超出了力学本身而被用于物理学的其它领域。

### 8.1.2 直角坐标、约束条件与广义坐标

如果系统中有 $N$ 个质点，其间不存在任何约束，那么， $3N$ 个直角坐标 $x_i$ 、 $y_i$ 、 $z_i$ ，( $i=1,2,\dots,N$ )即可选为该系统的广义坐标。此系统的自由度亦为 $3N$ 。如果系统中存在 $l$ 个约束，

$$p_j(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = c_j, \quad j=1,2,\dots,l, \quad (8.1-6)$$

则系统的自由度数当为

$$n = 3N - l, \quad (8.1-7)$$

而广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 亦为 $n$ 个。

对于具体的系统来说, 广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 与直角坐标 $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2, \dots, N$ 之间存在确定的关系. 如第四章图4.1-1所示的双摆系统, 如果取 $\theta_1$ 与 $\theta_2$ 作为广义坐标, 则他们与质点 $m_1, m_2$ 的直角坐标 $x_1, y_1, x_2, y_2$ 之间即存在(4.1-3)式所示的关系. 一般而言, 基于对所选取广义坐标的几何定义, 总可以将系统中各质点的直角坐标表示成为广义坐标的函数,

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \end{aligned} \right\} \quad (8.1-8)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

以上 $3N$ 个等式可以综合成为 $N$ 个向量函数,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n), i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.1-9)$$

本章讲述分析力学的基本原理, 从虚功原理和D'Alembert原理开始, 然后推导出用途广泛的Lagrange方程, 并说明如何基于这种方程推导一个系统, 特别是线性系统的运动方程.

## § 8.2 功和能

从(8.1-1)式的牛顿力学方程出发, 将其两端点乘微分位移 $d\mathbf{r}$ ,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right).$$

上式左端表示力 $\mathbf{F}$ 在微分位移 $d\mathbf{r}$ 上所做的功, 将它记为 $dW$ ; 而右端表示一标量函数,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (8.2-1)$$

的增量, 此函数就是动能, 于是上式可写为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dT. \quad (8.2-2)$$



即力  $F$  在  $d\mathbf{r}$  上做功, 使质点的动能增加  $dT$ . 如果质点在  $F$  力作用下, 从位置  $\mathbf{r}_1$  运动到  $\mathbf{r}_2$  (图 8.1-1), 则将上式从  $\mathbf{r}_1$  到  $\mathbf{r}_2$  积分, 得

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m \mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 - \frac{1}{2} m \mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1,$$

即  $F$  推动质点沿轨线从位置  $\mathbf{r}_1$  移到  $\mathbf{r}_2$  所做的功等于质点动能的增量.

在许多情况下, 如果作用力  $F$  仅仅与质点所在的位置  $\mathbf{r}$  有关, 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (8.2-3)$$

则  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  可表示为某标量函数  $-V(\mathbf{r})$  的全微分,

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -dV(\mathbf{r}). \quad (8.2-4)$$

这里  $V(\mathbf{r})$  即为势能函数,  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  为势场力, 或称保守力. 上式表明势场力做功, 消耗了质点的部分势能. 把上式代入 (8.2-2) 式, 得全微分

$$d(T + V) = 0,$$

即

$$T + V = E = \text{const.} \quad (8.2-5)$$

即在势场力作用下, 系统的机械能  $E$  保持为恒量, 此即机械能守恒定律.

把 (8.1-2)、(8.1-3) 式代入 (8.2-4) 式的中间部分, 得

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz;$$

而 (8.2-4) 式的右边为一全微分

$$-\left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right),$$

比较以上两式, 得

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (8.2-6)$$

即势场力等于势能函数的梯度取负值。

一般情况下，当 $F$ 由保守力 $F_c$ 与非保守力 $F_{nc}$ 两部分组成时，即有

$$F = F_c + F_{nc},$$

代入(8.2-2)式，得

$$F_c \cdot dr + F_{nc} \cdot dr = dT,$$

由(8.2-4)式可知，上式左边第一项为 $-dV$ ，代入上式，得

$$F_{nc} \cdot dr = d(V + T) = dE. \quad (8.2-7)$$

即非保守力做功使得质点机械能发生变化。

### § 8.3 虚功原理

虚功原理是J. Bernoulli于1717年提出的一个用于确定系统静平衡条件的准则。先看一个最简单的例子，如图8.3-1所示的杠杆， $O$ 点为杠杆的支点，两臂长分别为 $l_1$ 及 $l_2$ ，而杠杆两端的作用力记为 $F_1$ 及 $F_2$ 。我们都熟知此杠杆的静力平衡条件为

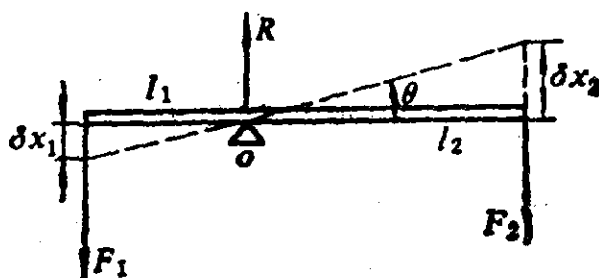


图 8.3-1

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \quad (8.3-1)$$

可是Bernoulli采用一种新的观点来看待这一问题，他假定此杠杆在 $F_1$ 、 $F_2$ 两力的作用下已处于静力平衡状态，然后让它产生一个为约束条件（支点 $O$ 不能移动）所允许的微小位移，即绕 $O$ 点转过一个微小角度 $\theta$ ，于是其两端的位移分别为 $\delta x_1 = l_1 \theta$ ， $\delta x_2 =$

$-l_2\theta$ ，再考察在此位移下， $F_1$ 、 $F_2$ 两力所作的功，则有

$$F_1\delta x_1 + F_2\delta x_2 = (F_1l_1 - F_2l_2)\theta,$$

以(8.3-1)式代入，得

$$F_1\delta x_1 + F_2\delta x_2 = 0. \quad (8.3-2)$$

上式表明：一个系统如果在某些外加力的作用下达达到静平衡，则在系统的约束所允许的微小位移下，诸外力所做的功之和应当为零。这一条准则的新奇之处在于它是从系统运动的观点来考虑其静力平衡问题；其方便之处是，它只考虑外加力 $F_1$ 和 $F_2$ ，而不必将支点 $O$ 处的支反力 $R$ 纳入考虑。从这里，我们可以看到解决牛顿力学方程必须计及约束力这一问题的契机。

为约束允许的微小位移 $\delta x_1$ 、 $\delta x_2$ 称为虚位移，外力在虚位移下所做的功称为虚功，以上原理称为虚功原理。

### 8.3.1 虚位移

设系统中有 $N$ 个质点，则虚位移可以在直角坐标系中表示为 $\delta x_i$ 、 $\delta y_i$ 、 $\delta z_i$ ， $i=1, 2, \dots, N$ ，假定虚位移是微小的，即时发生的（即不考虑它们发生的过程）。因此，它们满足微分规则。这里用符号“ $\delta$ ”而不用微分符号“ $d$ ”，是为了强调虚位移并非在时间 $dt$ 内实际发生的位移。由于虚位移必须适应约束条件的要求，因而必须满足(8.1-6)式。将该式微分，得

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial p_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial p_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad j=1, 2, \dots, l.$$

因而实际上独立的虚位移的个数为 $3N-l$ ，即等于系统的自由度。如图8.3-1所示杠杆两端的虚位移 $\delta x_1$ 和 $\delta x_2$ ，其实只有一个独立的，因为这是一个单自由度系统。

### 8.3.2 理想约束

设具有 $N$ 个质点的系统处于静力平衡状态，则作用在其中每

一个质点上的合力必然为零,

$$R_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.3-3)$$

$R_i$  是作用在第  $i$  个质点上的合力, 此力可分为两部分, 其一为主动作用的力, 包括主动施加的外力, 以及质点之间主动作用的内力, 后者如弹性联接的两个质点之间的内力, 统称为“施加力”, 记为  $F_i$ ; 另一为“约束力”, 是由约束产生的被动力, 包括支反力和约束产生的内力, 后者如刚性联接的质点之间的约束力, 记为  $f_i$ , 于是有

$$R_i = F_i + f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.3-4)$$

此合力在虚位移  $\delta r_i$  下所做的功, 即虚功, 亦必为零:

$$\delta W = R_i \cdot \delta r_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.3-5)$$

这里

$$\delta r_i = \delta x_i i + \delta y_i j + \delta z_i k, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.3-6)$$

把(8.3-4)式代入(8.3-5)式, 得

$$F_i \cdot \delta r_i + f_i \cdot \delta r_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.3-7)$$

再对下标  $i$  求和, 得

$$\sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N f_i \cdot \delta r_i = 0. \quad (8.3-8)$$

分析力学中最富于实际意义的概念之一是所谓“理想约束”的概念: 如果(8.3-8)式左边第二项(即约束力所作虚功之和)为零,

$$\sum_{i=1}^N f_i \cdot \delta r_i = 0, \quad (8.3-9)$$

则该约束称为“理想约束”。以下通过几个实例来说明这一概念。

作为第一个例子, 我们来分析图8.3-2所示两个相互啮合的

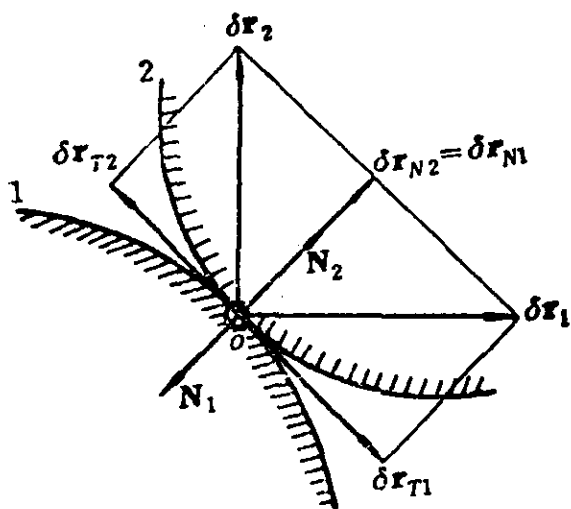


图 8.3-2

光滑表面构成的约束的情况。图中1、2两个光滑表面在O点相互接触，如果摩擦力可以略去，则两曲面之间的作用力 $N_1$ 、 $N_2$ （即约束力）应沿接触点的公法线方向，其中 $N_1$ 是曲面2对曲面1的作用力，而 $N_2$ 则是曲面1对曲面2的作用力，两者互为作用与反作用力，故有

$$N_1 = -N_2, \quad (8.3-10)$$

两曲面的虚位移分别为 $\delta r_1$ 及 $\delta r_2$ ，它们在接触点处的公切线与公法线方向的分量，分别是 $\delta r_{T1}$ 、 $\delta r_{T2}$ 、 $\delta r_{N1}$ 及 $\delta r_{N2}$ 。其中 $\delta r_{T1}$ 及 $\delta r_{T2}$ 由于分别与约束力 $N_1$ 及 $N_2$ 相垂直，因而约束力在该方向不做功。又由于两曲面相互啮合的约束力条件（两曲面不能脱开，也不能一个挤到另一个里面），必然有

$$\delta r_{N1} = \delta r_{N2}, \quad (8.3-11)$$

由此在虚位移下，约束力所做的虚功为

$$N_1 \cdot \delta r_1 + N_2 \cdot \delta r_2 = -N_1 \delta r_{N1} + N_2 \delta r_{N2} = 0,$$

即(8.3-9)式得到满足。

第二个例子是皮带传动，如图8.3-3所示，其中皮带轮1是

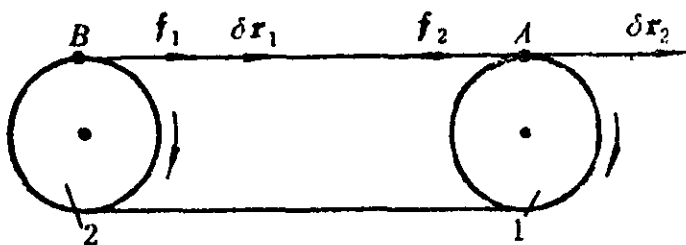


图 8.3-3

主动轮，而轮2是从动轮。略去皮带的打滑与伸长，则由于皮带这一约束的存在，主、从动轮上A、B这两点的虚位移必然相同，

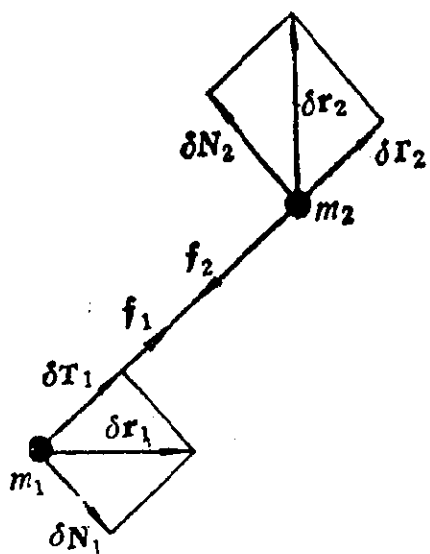


图 8.3-4

即

$$\delta r_1 = \delta r_2. \quad (8.3-12)$$

而这两点由皮带约束而产生的约束力则应大小相等，方向相反，

即

$$f_1 = -f_2, \quad (8.3-13)$$

因此虚功为

$$f_1 \delta r_1 + f_2 \delta r_2 = 0.$$

即(8.3-9)式满足。

第三个例子是由一连杆连接的两个质点，如图8.3-4所示，质点的质量分别为 $m_1$ 、 $m_2$ ，连杆的质量略而不计。它对两个质点产生的约束力必然沿其轴线方向，且大小相等，方向相反，即

$$f_1 = -f_2. \quad (8.3-14)$$

而两质点的虚位移设分别为 $\delta r_1$ 及 $\delta r_2$ ，它们在连杆及其垂线方向上的分量分别为 $\delta T_1$ 、 $\delta T_2$ 、 $\delta N_1$ 及 $\delta N_2$ 。其中对于后两者来说约束力不做功，而前两者由于连杆的约束条件，必然相等，即

$$\delta T_1 = \delta T_2, \quad (8.3-15)$$

因此在虚位移 $\delta r_1$ 、 $\delta r_2$ 下，约束力 $f_1$ 、 $f_2$ 所做的虚功之和为

$$f_1 \cdot \delta r_1 + f_2 \cdot \delta r_2 = 0.$$

即(8.3-9)式亦满足。

总之，对于机械工程中实际采用的许多种约束来说，可以认为(8.3-9)式是大致满足的，因而这些约束可以作为“理想约束”来处理。

### 8.3.3 虚功原理

把(8.3-9)式代入(8.3-8)式, 得

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (8.3-16)$$

由此证明了(8.3-16)式成立是系统处于静平衡状态的必要条件。以下以反证法证明这一条件也是充分的, 即如果(8.3-16)式成立, 则系统处于静平衡状态。如果(8.3-16)式成立, 而系统不平衡, 那么在施加力和约束力的共同作用下, 系统将由静止进入运动。取系统开始运动的很短时间内的微小位移 $\delta \mathbf{r}_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ )为虚位移, 则在此虚位移下施加力与约束力做正功, 即

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0,$$

而由于约束为理想约束, 故上式第二个和式为零, 由此得

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0.$$

这与(8.3-16)式相矛盾。由此证明了充分性。总之, 在全部约束为理想约束的前提下, 作用在系统上的全部施加力在符合系统约束的无限小的虚位移上所做的虚功等于零是系统处于静平衡状态的充要条件, 此即“虚功原理”, 也称“虚位移原理”。值得注意的是在此原理中已经排除了全部约束力, 而只需考虑施加力, 因而使用起来十分方便。

以上(8.3-16)式是在直角坐标下表达的, 以下将其变换到广义坐标, 以便于应用。由(8.1-9)式, 求全微分, 得

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (8.3-17)$$

即各质点的在直角坐标系下的虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 可以表达成为其广义坐

标的虚位移 $\delta q_j$ 的线性组合。把上式代入(8.3-16)式, 得

$$\delta W = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0,$$

交换求和次序,

$$\delta W = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0,$$

记

$$\sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.3-18)$$

得

$$\delta W = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0. \quad (8.3-19)$$

此即在广义坐标下表达的虚功原理, 即系统处于静平衡的充要条件。其中 $Q_j$ 为对应于广义坐标 $q_j$ 的广义力, 其量纲与 $q_j$ 的量纲有关, 即 $Q_j \delta q_j$ 的乘积的量纲必须为功的量纲。因此, 当 $q_j$ 的量纲为转角时,  $Q_j$ 的量纲必须是力矩。

(8.3-19)式所表示的条件还可再进一步简化。我们注意到各广义坐标的取值是相互独立的, 而约束的条件将自动地满足。因此总可以令某一个广义坐标上的虚位移不为零, 如 $\delta q_j \neq 0$ , 而其它广义坐标上的虚位移均为零。以此代入(8.3-19)式, 必然得到所对应的 $Q_j = 0$ , 施同样的分析于所有的广义坐标, 必然得到虚功原理的另一表述为: 在理想约束情况下,  $n$ 个自由度的系统处于静平衡的充要条件是其 $n$ 个广义力均为零, 即

$$Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.3-20)$$

**例8.1** 见图8.3-5所示的机构, 线性弹簧原长为 $x_0$ , 系统的约束如图所示, 当弹簧未伸长时, 可以不计质量的刚性杆处于水平位置, 如图上虚线所示。试以虚功原理确定其处于静平衡位置时的 $\theta$ 角。



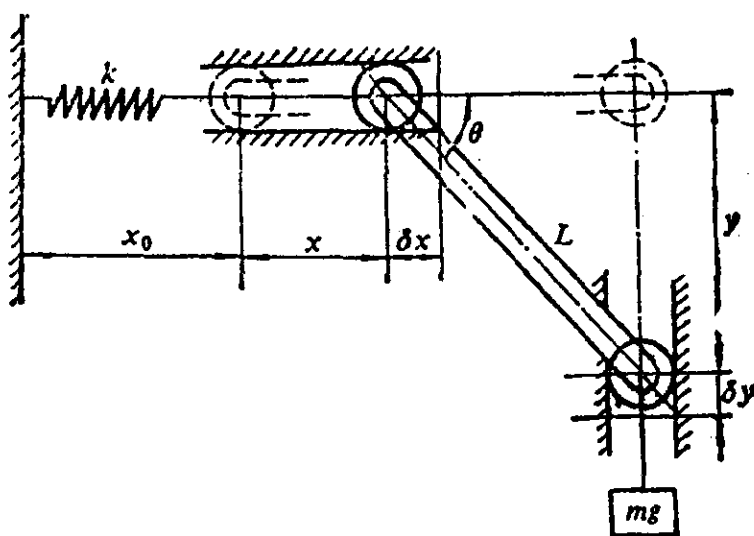


图 8.3-5

解：认定这里的系统包括连杆及重物 $mg$ ，弹簧恢复力与重力为施加力。在平衡位置附近令系统产生虚位移 $\delta x$ 、 $\delta y$ ，则弹性力与重力所做的虚功之和为

$$\delta W = -kx\delta x + mg\delta y = 0, \quad (a)$$

此系统为单自由度系统，取 $\theta$ 角为广义坐标，由几何关系可得 $x$ 、 $y$ 坐标与 $\theta$ 角的关系为

$$x = L(1 - \cos\theta), \quad y = L\sin\theta. \quad (b)$$

上式中 $L$ 为连杆长度。对以上两式取微分，得 $\delta x$ 、 $\delta y$ 与 $\delta\theta$ 的关系，

$$\delta x = L\sin\theta\delta\theta, \quad \delta y = L\cos\theta\delta\theta, \quad (c)$$

代入(a)式，得

$$\delta W = -kL(1 - \cos\theta)\sin\theta + mg\cos\theta = 0,$$

即

$$(1 - \cos\theta)\operatorname{tg}\theta = \frac{mg}{kL}. \quad (d)$$

此即确定平衡时的广义坐标 $\theta$ 的值的的关系式。读者注意，我们在解题过程中并未考虑水平与垂直滑道中的约束力。

以上关系式也可就(8.3-20)式的条件得出。为此将(8.3-18)

式就本题的条件写成

$$Q = F \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_1 \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}, \quad (e)$$

式中 $F$ 即为弹性恢复力 $-kx$ ,  $F_1$ 为重力 $mg$ , 以(b)式代入, 并按(8.3-20)式, 令 $Q=0$ , 即得到(d)式。

## § 8.4 势能与动能的广义坐标表达式

为了进一步讨论在施加力仅为保守力的条件下的虚功原理的表达式, 也为了后面推导Lagrange方程的需要, 我们来讨论如何以广义坐标及其变化率(即广义速度)来表达系统的动能与势能。

### 8.4.1 势能

一般而言, 势能是系统的位形的函数, 因此可表达为

$$V = V(r_1, r_2, \dots, r_N). \quad (8.4-1)$$

把(8.1-9)式代入, 可将 $V$ 表示成广义坐标的函数, 即

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (8.4-2)$$

由(8.2-4)式, 保守力在虚位移下所做的虚功为

$$\delta W = -dV = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j,$$

与(8.3-19)式比较, 知广义力 $Q_j$ 与势能函数的关系为,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (8.4-3)$$

由(8.3-20)式, 得系统静平衡的充要条件为

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (8.4-4)$$

即只在保守力作用下的系统，在其势能函数的驻值点上实现静平衡。

例8.2 试以(8.4-4)式确定例8.1中系统处于静平衡位置时的 $\theta$ 角。

解：系统的势能由弹性势能与重力势能两部分组成，

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - ymg,$$

以例8.1中(b)式代入，得

$$V = V(\theta) = \frac{1}{2}k(L(1 - \cos\theta))^2 - mgL\sin\theta,$$

由(8.4-4)式，静平衡位置满足的条件为

$$\frac{dV}{d\theta} = kL^2(1 - \cos\theta)\sin\theta - mgL\cos\theta = 0,$$

化简，即得例8.1的(d)式。

## 8.4.2 动能

由(8.2-1)式，单个质点的动能为

$$T_i = \frac{1}{2}m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad (8.4-5)$$

由于动能是可加量，因此全系统中 $N$ 个质点的总动能为

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (8.4-6)$$

现在以广义坐标 $q_i$ 及广义速度 $\dot{q}_i$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，来表示系统的动能。由(8.1-9)式对时间求导，得

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r, \quad (8.4-7)$$

代入(8.4-6)式，得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{r=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \right) \left( \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right),$$

改变求和次序得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_r \dot{q}_s,$$

记

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_s} = m_{rs}, \quad (8.4-8)$$

得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad (8.4-9)$$

上式表明系统的动能可表示为广义速度的二次型函数。但必须注意，此二次型的系数 $m_{rs}$ 一般也是广义坐标的函数，读者由以上推导过程应能看出这一点。

**例8.3** 试以广义坐标 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 表示图4.1-1中所示双摆系统的势能与动能。

**解：**取 $x$ 轴为重力势能的零点，系统的势能可表示为

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2,$$

以(4.1-3)式的第二、四式代入上式，得到作为广义坐标的函数的势能表达式，

$$V(\theta_1, \theta_2) = -m_1 g L_1 \cos \theta_1 - m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2). \quad (a)$$

系统动能为，

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (b)$$

式中 $v_1$ 、 $v_2$ 分别为两质点 $m_1$ 、 $m_2$ 的线速度，

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2.$$

以(4.1-3)式的前两式代入，得

$$v_1^2 = (L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1)^2 + (-L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1)^2,$$

化简得

$$v_1^2 = (L_1 \dot{\theta}_1)^2, \quad (c)$$

另外,

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2,$$

以(4.1-3)的后两式代入, 得

$$v_2^2 = (l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + (-l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)^2,$$

化简得

$$v_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1). \quad (d)$$

把(c)、(d)两式代入(b)式, 并整理, 得到作为广义坐标与广义速度的函数的动能表达式.

$$\begin{aligned} T(\theta_1, \theta_2; \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \\ = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2. \end{aligned} \quad (e)$$

从上式可看到 $T$ 确实已表示成为广义速度 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 的二次型, 且此二次型的系数之一 $m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$ 又是广义坐标的函数.

## § 8.5 D'Alembert原理

如果说虚功原理是以动的观点来研究静力平衡问题, 那么D'Alembert原理则是从静力平衡的观点来考察动力学问题. 让我们来考察一由 $N$ 个质点组成的系统, 设作用在第 $i$ 个质点上的施加力和约束力分别为 $F_i$ 与 $f_i$ , 则由牛顿第二定律, 有

$$F_i + f_i = m_i \ddot{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.5-1)$$

移项, 得

$$F_i + f_i - m_i \ddot{r}_i = 0. \quad (8.5-2)$$

如果将 $(-m_i \ddot{r}_i)$ 这一项也看成一种力, 称为“惯性力”, 那么

(8.5-2)式正好表示一种“静力平衡”情况。此即 D'Alembert 原理，也称“动静法”。采用此法，就可以象处理静力学问题那样来处理动力学问题。此法对于处理质点系的动力学问题往往非常有效，但本书不打算在这方面展开，我们的主要兴趣是借助于此原理将虚功原理的静力平衡问题推广到动力学问题。为此，对于动力学问题，如果计及惯性力，则第  $i$  个质点的虚功也应该为零，

$$(F_i + f_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.5-3)$$

将上式对各质点求和，并假设所有约束均为理想约束，即(8.4-9)式成立，则有

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0. \quad (8.5-4)$$

上式将 D'Alembert 原理与虚功原理结合起来，称为动力学普遍方程，其中  $(F_i - m_i \ddot{r}_i)$  这一部分，即施加力与惯性力之和，称为有效力。上式表明在理想约束的条件下，对于任何动态系统，有效力在符合系统约束的任何无限小的虚位移上所做的虚功之和为零。我们注意到在此式中已排除了所有的约束力，而只需考虑施加力及惯性力。我们将由此出发，导出用途十分广泛的 Lagrange 方程。

## § 8.6 Lagrange 方程

将动力学普遍方程(8.5-4)式写成

$$\sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = 0, \quad (8.6-1)$$

由(8.3-16)式的第一个等式，上式之第一和式即为施加力所做的虚功，而由(8.3-19)式的第一等式，此虚功又可用广义力与广义

坐标上的虚位移表示, 即

$$\delta W = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j. \quad (8.6-2)$$

以下证明(8.6-1)式第二个和式, 即惯性力的虚功部分, 可表示为

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j, \quad (8.6-3)$$

其中 $T$ 为系统的动能. 为此, 以(8.3-17)式代入上式左边, 并交换求和次序, 得

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (8.6-4)$$

从上式右边双重求和符号中拿出一项, 加以变化,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right), \quad (8.6-5)$$

注意到(8.4-7)式中,  $(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_r)$ 只可能与广义坐标 $q_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ )有关, 而与广义速度 $\dot{q}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ )无关, 因此该式两边对 $q_j$ 求导, 得

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (8.6-6)$$

把此式代入(8.6-5)式右边第一项, 而对其第二项则交换对 $t$ 求全微分及对 $q_j$ 求偏微分的次序, 则得

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \right] \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right). \end{aligned} \quad (8.6-7)$$

对 $i$ 求和,

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right). \quad (8.6-8)$$

上式右边圆括弧中的标量即为系统的动能 $T$ ，因此上式成为

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j}, \quad (8.6-9)$$

将此式代入(8.6-4)式的右边圆括弧部分，即得到需要证明的(8.6-3)式，证毕。

现在把(8.6-2)、(8.6-3)两式代入(8.6-1)式，即得

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} - Q_j \right] \delta \mathbf{q}_j = 0, \quad (8.6-10)$$

由于诸位移 $\delta \mathbf{q}_j$ 是独立的，可以任意选取，我们总能够令某一个 $\delta \mathbf{q}_j \neq 0$ ，而其余 $\delta \mathbf{q}_j = 0 (j = 1, 2, \dots, n; j \neq i)$ ，依次令 $j = 1, 2, \dots, n$ ，于是可得到 $n$ 个二阶微分方程，

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.6-11)$$

此式即为著名的Lagrange方程，方程的数目与系统的自由度数相等。

当施加力 $Q_j$ 为保守力时，则(8.4-3)式成立，把它代入(8.6-11)式，得保守系统的Lagrange方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.6-12)$$

引入Lagrange函数

$$L = T - V, \quad (8.6-13)$$

并注意到势能 $V$ 与广义速度 $\dot{\mathbf{q}}_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 无关，于是可将(8.6-12)式写成更简练的形式，

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.6-14)$$

当作用在系统上的力既有保守力，又有非保守力时，



Lagrange方程成为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (8.6-15)$$

式中 $Q_j$ 是除保守力以外的其它施加力。

**例8.4** 试求图4.1-1中双摆的运动方程。

解：该系统为两自由度系统，取 $\theta_1, \theta_2$ 为其广义坐标，以广义坐标与广义速度表示的系统势能与动能已在例8.3中求出，如该例中(a)、(e)两式所示，以之代入(8.6-13)式，得Lagrange函数为：

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2), \end{aligned} \quad (a)$$

(8.6-15)式在此例中成为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad (b)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0. \quad (c)$$

以(a)式分别代入(b)、(c)式即得到该双摆系统的运动微分方程如下：

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 \\ - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2)g l_1 \sin\theta_1 = 0 \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 \\ + m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0. \end{aligned} \right\} (d)$$

在以上推导过程中并未涉及两质点之间，以及质点与悬挂点之间的约束力。

**例8.5** 设一两自由度系统，如图8.6-1所示，试导出运动方程，已知弹簧是线性的。

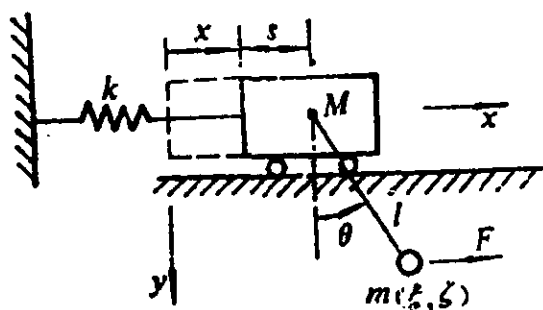


图 8.6-1

解：取质块  $M$  的平移量  $x$  与摆锤的摆角  $\theta$  为广义坐标。  $x$  从弹簧未伸长的位置计算起，而  $\theta$  从铅垂位置算起。

势能由弹性势能与重力势能两部分组成，

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + mgl(1 - \cos\theta), \quad (a)$$

这里取摆锤在铅垂位置时的重力势能为零。

动能由质块  $M$  的动能与摆锤  $m$  的动能两部分组成，

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2), \quad (b)$$

式中  $v_x$ 、 $v_y$  分别为摆锤的水平速度与垂直速度。为确定  $v_x$ 、 $v_y$  的表达式，我们注意到摆锤在  $x$ 、 $y$  坐标系中位置坐标为

$$\xi = x + s + l \sin\theta \quad (c)$$

$$\zeta = l \cos\theta, \quad (d)$$

以上两式对时间求导，得

$$v_x = \dot{x} + l \cos\theta \dot{\theta}, \quad (e)$$

$$v_y = -l \sin\theta \dot{\theta}. \quad (f)$$

把 (e)、(f) 式代入 (b) 式，再将 (b)、(a) 两式代入 (8.6-13) 式，即得出该系统的 Lagrange 函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} kx^2 - mgl(1 - \cos\theta). \quad (g)$$

接着，我们计算与  $x$ 、 $\theta$  相应的广义力，它们分别以  $X$  与  $\Theta$  表示。为此，我们让摆锤在水平方向产生一虚位移  $\delta\xi$ ，而  $F$  力在此虚位移下所做的虚功为

$$\delta W = F \delta\xi, \quad (h)$$

而由(c)式,

$$\delta\xi = \delta x + l\cos\theta\delta\theta, \quad (i)$$

把(i)式代入(h)式,

$$\delta W = F\delta x + Fl\cos\theta\delta\theta = X\delta x + \Theta\delta\theta,$$

由此确定广义力为

$$X = F, \quad (j)$$

$$\Theta = Fl\cos\theta. \quad (k)$$

(k)式表明 $\Theta$ 实际上是一个力矩,这是预料中的事实,因为其所对应的广义坐标 $\theta$ 是一个角度。

此时(8.6-19)式表示的Lagrange方程可写成:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = X, \quad (l)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \Theta. \quad (m)$$

以(g)、(j)与(k)式分别代入(l)、(m)式,即得到该系统的Lagrange方程为:

$$(M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + kx = F, \quad (n)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = Fl\cos\theta. \quad (o)$$

如果分别将质块 $M$ 和摆锤 $m$ 取脱离体,而直接采用牛顿第二定律(即8.1-1式),也能得到(n)、(o)两式,然而在推导中必然涉及摆锤悬挂点处相互作用的约束力,给运动方程的推导增添麻烦。

从以上两个例子可见,以Lagrange方程来推导系统的运动方程可以不必考虑约束力,这是非常方便的,尤其是当系统的自由度较多时,更是体现了其有效性。所有的微分方程都是从一个标量函数,即Lagrange函数,以及非保守力的虚功(8.3-19)式推出来的,而且有一定的步骤可循。

以Lagrange方程建立系统的运动方程的主要步骤如下:

1. 判断系统的自由度数，选定广义坐标；
2. 以广义坐标及广义速度来表示系统的动能与势能；
3. 对于非保守力的施加力，则将其虚功写成(8.4-19)式的形式，从而确定各广义力；
4. 将以上各量代入Lagrange方程，即得到该系统的运动方程。

## § 8.7 系统的线性化及线性系统的 Lagrange方程

Lagrange方程既可用于线性系统，也可用于非线性系统。这里讨论线性系统，或可以线性化的系统的Lagrange方程。我们先从势能函数与动能函数开始讨论。

### 8.7.1 势能

(8.4-2)式表明系统的势能可以表示为广义坐标的函数。为了将系统线性化，将此函数在原点附近展成Taylor级数，

$$\begin{aligned}
 V(q_1, q_2, \dots, q_n) = & V(0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{(0, 0, \dots, 0)} q_j \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \right|_{(0, 0, \dots, 0)} q_r q_s + \dots \quad (8.7-1)
 \end{aligned}$$

然后作如下简化：

首先，不失一般性，总可以选定广义坐标的原点作为计算势能函数的零点，于是有

$$V(0, 0, \dots, 0) = 0; \quad (8.7-2)$$

其次，总可以将坐标的原点设在系统的平衡点上，于是按(8.4-4)式、(8.7-1)式右边的第二项又应该为零，即

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \Big|_{(0, 0, \dots, 0)} q_j = 0; \quad (8.7-3)$$

第三，假定系统只在坐标原点附近的小范围内振动，因而 $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 均很小，于是(8.7-1)式中三次及三次以上的乘积项可以略去不计。

基于以上三点假定，可以将系统的势能函数写成广义坐标的二次型，

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \Big|_{(0, 0, \dots, 0)} q_r q_s \quad (8.7-4)$$

令

$$k_{rs} = k_{sr} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \Big|_{(0, 0, \dots, 0)}, \quad r, s = 1, 2, \dots, n, \quad (8.7-5)$$

则(8.7-4)式可写成

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n k_{rs} q_r q_s \quad (8.7-6)$$

式中系数 $k_{rs}$ 均为常数，由(8.7-5)式给出。(8.7-6)式与(4.7-8)式具有相同的形式，是已经线性化的系统的势能函数， $k_{rs}$ 即为弹性系数。

## 8.7.2 动能

(8.4-9)式表明，系统的动能 $T$ 是广义速度的二次型。一般而言，二次型的系数 $m_{rs}$ 是广义坐标的函数，即

$$m_{rs} = m_{rs}(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

为将系统线性化，可以将上式在原点附近展开，又由于已假定 $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 均很小，因此可将展开式中 $q_i$ 的一次及高次项均

略去，而仅保留常数项，于是有

$$m_{r,s} = m_{r,s}(0, 0, \dots, 0). \quad (8.7-7)$$

这样，(8.4-9)式中系数 $m_{r,s}$ 均成为常数，与(4.7-14)式的形式相同，成为线性系统的动能函数， $m_{r,s}$ 即为质量系数。

### 8.7.3 线性系统的Lagrange方程

将(8.7-7)代入(8.4-9)式，再将(8.4-9)、(8.7-6)代入(8.6-13)式，然后将(8.6-13)式代入(8.6-15)式所表示的Lagrange方程，并注意到 $k_{r,s}$ 、 $m_{r,s}$ 均为常数，得

$$\sum_{r=1}^n \{ m_{r,j} \ddot{q}_r(t) + k_{r,j} q_r(t) \} = Q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

将以上 $n$ 个方程综合成矩阵形式，得

$$\{m\} \{ \ddot{q}(t) \} + \{k\} \{q(t)\} = \{Q(t)\}, \quad (8.7-8)$$

式中  $\{m\} = \{m_{r,s}\}, \quad (8.7-9)$

$$\{k\} = \{k_{r,s}\}, \quad (8.7-10)$$

$$\{q\} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T. \quad (8.7-11)$$

(8.7-8)式即为第四章导出的 $n$ 自由度线性无阻尼系统的运动微分方程(4.3-1)式。以上推导过程一方面告诉我们一种对系统进行线性化的方法，即分别按(8.7-5)与(8.7-7)式计算势能二次型和动能二次型的系数，然后将这些系数代入(8.7-8)式，即得到线性化的系统的运动方程；另一方面，以上推导还表明对于线性系统来说，形如(8.6-15)式的Lagrange方程和形如(8.7-8)式的运动微分方程其实是等价的。因此，一旦得到动能与势能二次型的系数矩阵 $\{m\}$ 与 $\{k\}$ ，则由(8.7-8)式立即就得到系统的运动方程，而不必再利用形如(8.6-15)式的Lagrange方程。

**例8.6** 设图4.1-1中双摆的振动角度 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 均很小，试将其运动方程线性化。

解：系统的势能表达式已在例8.3中由(a)式给出，将之代入(8.7-5)式，即得刚度矩阵

$$(k) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gL_1 & 0 \\ 0 & m_2gL_2 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

系统的动能表达式如例8.3中的(e)式，将之写成二次型形式，有

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \} \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)L_1^2 & m_2L_1L_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2L_1L_2\cos(\theta_2 - \theta_1) & m_2L_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix}. \quad (b)$$

按(8.7-7)式，将上式中的矩阵的诸系数取 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 时的定值，即得质量矩阵

$$(m) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)L_1^2 & m_2L_1L_2 \\ m_2L_1L_2 & m_2L_2^2 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

将(a)、(c)两式代入(8.7-8)式，即得到双摆经线性化以后的运动方程。展开之，即得两个联立的微分方程：

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2)L_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2L_1L_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)gL_1\theta_1 &= 0, \\ m_2L_1L_2\ddot{\theta}_1 + m_2L_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2gL_2\theta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (d)$$

## 思考题

以下说法对不对？如果不对，错在哪里？

1. 可以将一个静平衡问题转化为位移和作功的问题来考察，另一方面，又可以以静平衡的形式来研究动力学的问题。
2. 虚位移是系统的一种任意的微小位移。
3. 系统的内力是约束力，而外力是施加力。
4. 广义力 $Q_i$ 是一种向量。
5. 势能是广义坐标 $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )的函数，而动能则是广义速度 $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )的函数。
6. 分析力学是不同于牛顿力学的另外一种力学。

## 习 题

8-1 图8-1所示系统由一根质量为 $m$ 的均匀刚性连杆和两根刚度系数分别为 $k_1$ 和 $k_2$ 的线性弹簧组成。当弹簧未变形时，连杆处在水平位置。试分别用虚功原理及势能函数取驻值的准则，来确定平衡时的 $\theta$ 角。

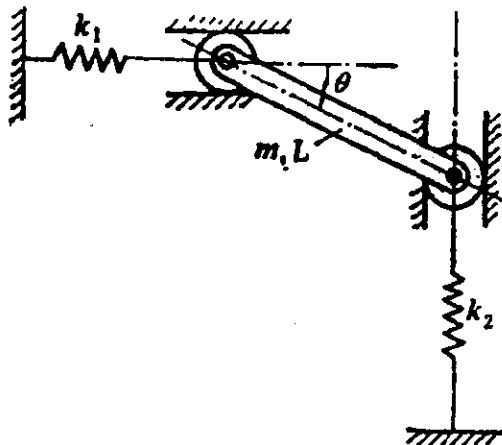


图 8-1

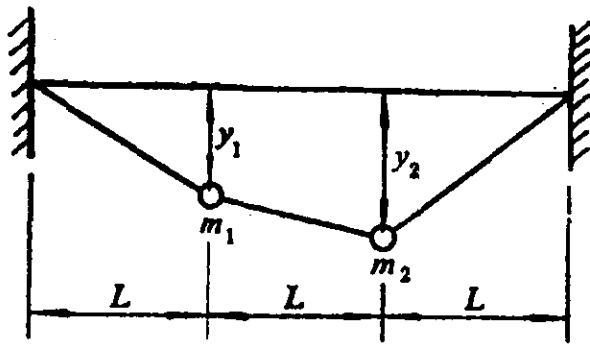


图 8-2

8-2 在不计质量的绳子上挂有两个质量，如图8-2所示， $m_1 = 0.5m$ ， $m_2 = m$ 。设 $y_1, y_2 < L$ ，绳子的张力在全长上为常数 $T$ ，且在 $y_1, y_2$ 变化时保持不变。试用虚功原理及势能函数取驻值的准则两种方法来确定平衡位置。

8-3 图8-3所示双摆在 $A, B$ 处各悬挂重量为 $P_1, P_2$ 的重物，在 $B$ 处作用水平力 $F$ ，试求平衡时 $\theta_1, \theta_2$ 与 $P_1, P_2$ 和 $F$ 的关系。

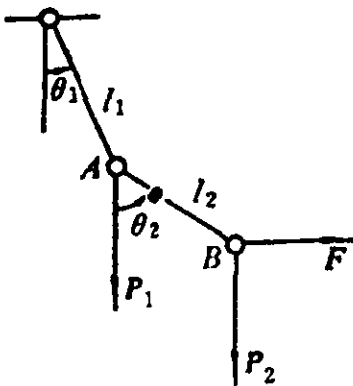


图 8-3

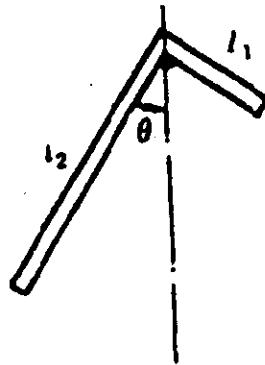


图 8-4



8-4 一均质角尺悬挂在钉子上，如图8-4所示，试求出其处于平衡状态下的 $\theta$ 角。

8-5 质点 $m_1$ 与 $m_2$ 由一无质量的刚性杆连接，置于半球形的碗中，摩擦力不计，试确定其平衡位置。碗的球面半径为 $R$ ，杆长 $l$ 。

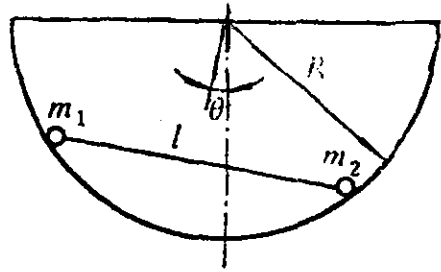


图 8-5

8-6 以Lagrange方程推导图8-1中系统的运动方程。

8-7 以Lagrange方程推导图8-2中系统的运动方程。

8-8 以Lagrange方程推导图8-8中所示系统的运动方程。

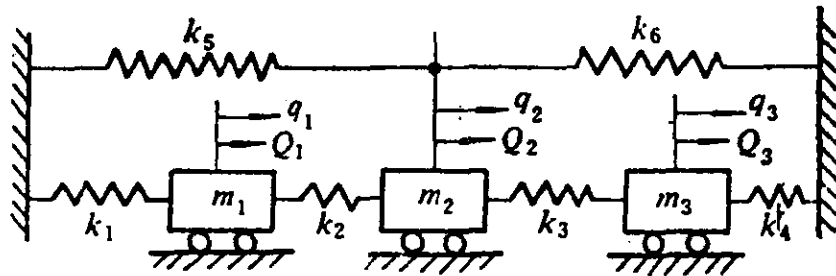


图 8-8

8-9 质量为 $M$ 的刚体，用长度为 $a$ 的两根绳子对称地悬挂起来，其下部装有两个长度为 $b$ ，质量为 $m$ 的单摆，如图8-9所示。设整个系统只在图示平面中运动。试推导此系统的运动方程。又设该系统的振动为微振动，试将该系统运动方程线性化。

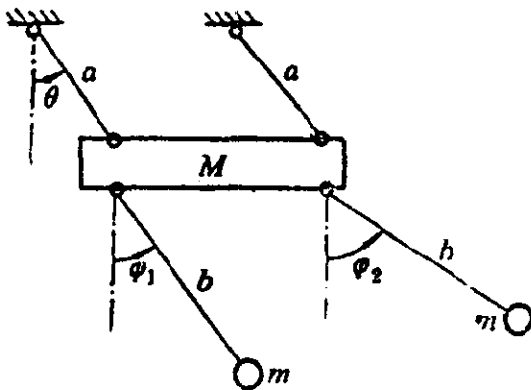


图 8-9

8-10 图8-10所示船用动力装置，由两个发动机驱动螺旋推进器。两发动机转速相同，其转动部分对其转轴的转动惯量分别是 $I_1$ ， $I_2$ ，螺旋推进器部分的转动惯量为 $I_3$ 。齿轮的传动比为 $\mu = z_2/z_1$ ，各传动轴的扭转刚度为 $K_1$ ， $K_2$ ，并设三个齿轮的转动惯量可略去不计。试求此系统的运动方程及频率方程。图中 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 、 $\varphi_1'$ 、 $\varphi_2'$ 、 $\varphi_3$ 分别为各部分的转角。

8-10 图8-10所示船用动力装置，由两个发动机驱动螺旋推进器。两发动机转速相同，其转动部分对其转轴的转动惯量分别是 $I_1$ ， $I_2$ ，螺旋推进器部分的转动惯量为 $I_3$ 。齿轮的传动比为 $\mu = z_2/z_1$ ，各传动轴的扭转刚度为 $K_1$ ， $K_2$ ，并设三个齿轮的转动惯量可略去不计。试求此系统的运动方程及频率方程。图中 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 、 $\varphi_1'$ 、 $\varphi_2'$ 、 $\varphi_3$ 分别为各部分的转角。

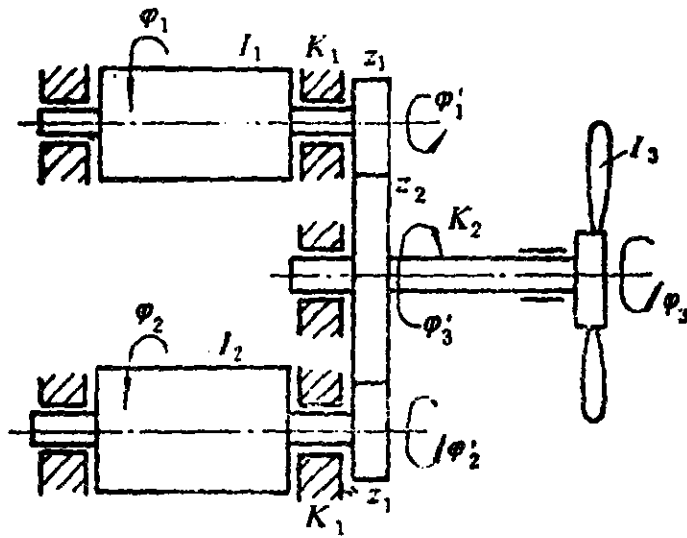


图 8-10

8-11 长度为 $2l$ 的两根均质杆，铰接而成一双摆，如图8-11所示。试以 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 为广义坐标建立此双摆的振动微分方程，加以线性化，并求出自然频率。

8-12 由刚度为 $k$ 的弹簧与质量为 $m$ 的质点组成一个弹簧摆，如图8-12所示，弹簧原来长度为 $l_0$ ，试以 $r, \theta$ 为广义坐标，导出系统的运动方程，并求出微振动方程。

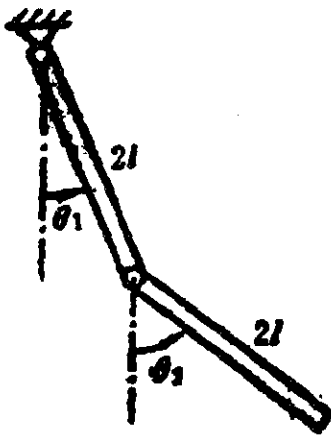


图 8-11

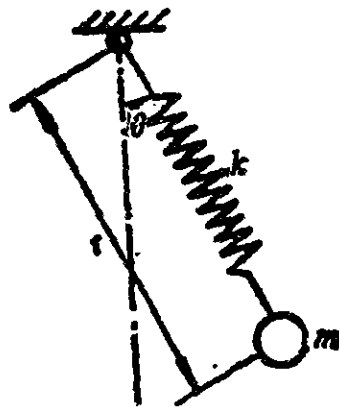


图 8-12

# 第九章 多自由度系统振动分析 的常用方法

在第四章中，我们讲述了多自由度系统振动的基础理论和知识。当系统的自由度数目增多时，分析和求解将变得很困难，为此，需要一些基本的分析方法和技巧。本章首先介绍几种估算系统自然频率及模态向量的近似方法，包括 Rayleigh 法、Dunkerley 法与 Ritz 法，这些近似方法对于解决工程技术中的实际问题是十分有效的。利用这些近似方法，不仅可对系统进行估算，迅速得到近似结果，而且还可对精确的结果进行粗略的校核。然后，将介绍子系统综合法，包括传递矩阵法、阻抗综合法与模态综合法，这些都是处理较为复杂系统的十分有效的方法。

## § 9.1 估算多自由度系统自然频率与 模态向量的几种方法

### 9.1.1 瑞利商

第一章介绍了用能量法导出单自由度保守系统的运动方程及求解其自然频率的方法。如果对系统的模态向量能合理地作出近似的假设，能量法也能应用于估算多自由度系统的自然频率，特别是它的基频，这需要用到瑞利(Rayleigh)商的概念。

#### 1. 瑞利商的第一种表达式

已知  $n$  自由度系统的特征值问题方程为

$$\lambda_r \{m\} \{u^{(r)}\} = \{k\} \{u^{(r)}\}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1-1)$$

式中  $\lambda_r = \omega_r^2$  及  $\{u^{(r)}\}$  分别是第  $r$  阶模态的自然频率平方值与模态向量。用向量  $\{u^{(r)}\}^T$  左乘上式两端，得

$$\lambda_r \{u^{(r)}\}^T \{m\} \{u^{(r)}\} = \{u^{(r)}\}^T \{k\} \{u^{(r)}\}, \quad (9.1-2)$$

用标量  $\{u^{(r)}\}^T \{m\} \{u^{(r)}\}$  除上式两端，得

$$\lambda_r = \omega_r^2 = \frac{\{u^{(r)}\}^T \{k\} \{u^{(r)}\}}{\{u^{(r)}\}^T \{m\} \{u^{(r)}\}}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1-3)$$

此式表示系统的自然频率平方值  $\omega_r^2$  与其模态向量  $\{u^{(r)}\}$  之间的关系。此关系也可由能量守恒的原理推出。事实上，设系统按第  $r$  阶模态进行振动，则有

$$\{q(t)\} = \{u^{(r)}\} \cos(\omega_r t - \psi_r), \quad (9.1-4)$$

广义速度为

$$\{\dot{q}(t)\} = -\{u^{(r)}\} \omega_r \sin(\omega_r t - \psi_r), \quad (9.1-5)$$

而由(4.7-13)与(4.7-9)式知，多自由度系统的动能  $T$  与势能  $V$  的表达式为

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{q}(t)\}^T \{m\} \{\dot{q}(t)\}, \quad (9.1-6)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \{q(t)\}^T \{k\} \{q(t)\}. \quad (9.1-7)$$

将(9.1-4)、(9.1-5)式分别代入(9.1-6)、(9.1-7)式，可求得系统按第  $r$  阶模态振动的动能与势能表达式为

$$T(t) = \frac{1}{2} \omega_r^2 \{u^{(r)}\}^T \{m\} \{u^{(r)}\} \sin^2(\omega_r t - \psi_r), \quad (9.1-8)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \{u^{(r)}\}^T \{k\} \{u^{(r)}\} \cos^2(\omega_r t - \psi_r). \quad (9.1-9)$$

而最大动能  $T_{\max}$  与最大势能  $V_{\max}$  为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_r^2 \{u^{(r)}\}^T \{m\} \{u^{(r)}\}, \quad (9.1-10)$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \{u^{(r)}\}^T (k) \{u^{(r)}\}. \quad (9.1-11)$$

由于系统是保守的，其机械能必须守恒，于是应有

$$T_{\max} = V_{\max}. \quad (9.1-12)$$

将(9.1-10)、(9.1-11)式代入上式，移项，即得到(9.1-3)式。此式表明，(k)的元素增大，则 $\omega^2$ 增大，(m)的元素增大， $\omega^2$ 就减小。这意味着如果系统的刚性增大，则自然频率增大，如果系统的质量增大，则自然频率减小。

假设采用一个任意选取的试算向量{u}来代替(9.1-3)式中的模态向量{u<sup>(r)</sup>}，那么可得

$$\lambda = \omega^2 = R(\{u\}) = \frac{\{u\}^T (k) \{u\}}{\{u\}^T (m) \{u\}}. \quad (9.1-13)$$

其结果是一个相应的标量。对于一个给定的多自由度系统，(m)、(k)是一定的，因此，这个标量是{u}的函数，记为 $R(\{u\})$ ，称之为瑞利商。如果以某一个模态向量{u<sup>(r)</sup>}代入系统的瑞利商，那么就得到相应的自然频率平方值 $\omega_r^2 = R(\{u^{(r)}\})$ ，如果选取的向量{u}接近于{u<sup>(r)</sup>}，那么由 $R(\{u\})$ 就能得出相应的自然频率 $\omega$ ，的估计值。瑞利商的一个非常有用性质是，如果选取的向量{u}与{u<sup>(r)</sup>}的误差是一微小量，那么得到的 $\lambda = R(\{u\})$ 与 $\omega_r^2 = R(\{u^{(r)}\})$ 之间的误差将是一高阶微量。我们知道，如果要想利用瑞利商(9.1-13)式来估算系统的某一个自然频率 $\omega_r$ ，就必须先估计它的模态向量{u} ≈ {u<sup>(r)</sup>}。上述性质则表示，即使对{u<sup>(r)</sup>}的估计有些误差，但得到的结果 $\lambda \approx \omega_r^2$ ，对此误差并不敏感，即只不过在自然频率的估计中引起一个高阶微量的误差而已。以下来证明这一性质。

按展开定律(4.5-21)式，任一向量{u}可表达为

$$\begin{aligned} \{u\} &= c_1 \{u^{(1)}\} + c_2 \{u^{(2)}\} + \dots + c_n \{u^{(n)}\} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \{u^{(i)}\} = (u) \{c\}, \end{aligned} \quad (9.1-14)$$

其中 $\{u\}$ 是模态矩阵,  $\{c\}$ 是由 $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ 组成的列向量。将(9.1-14)代入(9.1-13)式, 并考虑到正交性与正规化条件(4.5-15)、(4.5-16)式, 有

$$R(\{u\}) = \frac{\{c\}^T \{u\}^T \{k\} \{u\} \{c\}}{\{c\}^T \{u\}^T \{m\} \{u\} \{c\}} = \frac{\{c\}^T \begin{bmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix} \{c\}}{\{c\}^T \{1\} \{c\}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \quad (9.1-15)$$

假设选取的试算向量 $\{u\}$ 非常接近于系统的第 $r$ 阶模态向量 $\{u^{(r)}\}$ , 那么从(9.1-14)式可见:  $c_i (i \neq r)$ 与 $c_r$ 相比非常小, 记 $\varepsilon_i = c_i / c_r, i=1, 2, \dots, n; i \neq r$ , 则 $\varepsilon_i \ll 1$ , 是一个微量。将 $\varepsilon_i$ 代入(9.1-15)式, 得

$$R(\{u\}) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \frac{\lambda_r + \sum_{i=1, i \neq r}^n \lambda_i \varepsilon_i^2}{1 + \sum_{i=1, i \neq r}^n \varepsilon_i^2} \approx \lambda_r + \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_r) \varepsilon_i^2.$$

(9.1-16)

我们知道, 试算向量 $\{u\}$ 与 $\{u^{(r)}\}$ 的差别是以 $\varepsilon_i (i=1, 2, \dots, n; i \neq r)$ 来表示的。如果这些 $\varepsilon_i$ 是一阶微量, 那么 $R(\{u\})$ 与系统的特征值 $\lambda_r$ 就相差一个二阶微量。这表明, 瑞利商在系统的模态向量 $\{u^{(r)}\}$ 附近有驻值。

在(9.1-16)式中, 令 $r=1$ , 得

$$R(\{u\}) \approx \lambda_1 + \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) \varepsilon_i^2, \quad (9.1-17)$$

一般情况下,  $\lambda_i > \lambda_1, i=2, \dots, n$ , 故有

$$R(\{u\}) \geq \lambda_1. \quad (9.1-18)$$

式(9.1-18)仅在 $\varepsilon_i = 0$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ )才取等号, 因此, 在第一模态向量的邻域内, 瑞利商的极小值就是系统的第一特征值. 这一性质使得瑞利商可方便地用来估算系统的基频 $\omega_1$ .

## 2. 瑞利商的第二种表达式

如果采用系统的柔度矩阵 $(a)$ 代替刚度矩阵 $(k)$ , 还可导出另一种形式的瑞利商.  $\{u^{(r)}\}$ 与 $\lambda_r$ 满足与(9.1-1)式等价的特征值问题方程

$$\lambda_r (a)(m)\{u^{(r)}\} = \{u^{(r)}\}, \quad (9.1-19)$$

以 $\{u^{(r)}\}^T(m)$ 左乘上式两端, 得

$$\lambda_r \{u^{(r)}\}^T(m)(a)(m)\{u^{(r)}\} = \{u^{(r)}\}^T(m)\{u^{(r)}\}. \quad (9.1-20)$$

上式可整理成

$$\lambda_r = \frac{\{u^{(r)}\}^T(m)\{u^{(r)}\}}{\{u^{(r)}\}^T(m)(a)(m)\{u^{(r)}\}}, \quad (9.1-21)$$

与(9.1-3)式类似, 选取试算向量 $\{u\}$ 代替上式中的 $\{u^{(r)}\}$ , 则得瑞利商

$$\lambda = R(\{u\}) = \frac{\{u\}^T(m)\{u\}}{\{u\}^T(m)(a)(m)\{u\}}. \quad (9.1-22)$$

(9.1-22)式与(9.1-13)式类似, 可用来估算多自由度系统的基频. 它们分别适用于柔度矩阵和刚度矩阵已知的情况. 可以证明, 对于同一个系统, 选取任意向量 $\{u\}$ , 用(9.1-13)式计算出的结果比用(9.1-22)式得到的结果大. 因此根据(9.1-18)式可知, 用(9.1-22)式估算出的基频更接近于精确值.

**例9.1** 用瑞利商估算例4.9中系统的基频.

**解:** 易写出系统的质量矩阵和刚度矩阵为

$$(m) = m \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad (k) = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

先根据系统的情况选择一个接近系统第一阶模态向量的试算向

量, 显然 $m_1$ 位移最小,  $m_3$ 位移最大, 考虑到 $k_3$ 同时比 $k_1$ 和 $k_2$ 大一倍, 故 $m_2$ 与 $m_3$ 之间约束较强,  $m_2$ 的位移接近 $m_3$ 的位移. 据此, 可选取 $\{u\} = (1.0, 1.8, 2.0)^T$ , 根据(9.1-13)式, 由

$$\{u\}^T(m)\{u\} = m(1.0, 1.8, 2.0) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.8 \\ 2.0 \end{pmatrix} = 12.24m, \quad (a)$$

$$\begin{aligned} & \{u\}^T(k)\{u\} \\ &= k(1.0, 1.8, 2.0) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.8 \\ 2.0 \end{pmatrix} = 1.72k. \quad (b) \end{aligned}$$

将(a), (b)两式代入(9.1-13), 得

$$\omega_1^2 = R(\{u\}) = \frac{1.72k}{12.24m} = 0.1405k/m,$$

$$\omega_1 = 0.3748\sqrt{k/m}.$$

在例4.9中已求出 $\omega_1 = 0.3731\sqrt{k/m}$ , 故相对误差为

$$\varepsilon = \frac{0.3748 - 0.3731}{0.3748} \times 100\% = 0.45\%$$

**例9.2** 用瑞利商估算例4.8中系统的基频, 假设梁的质量可不计.

解: 在例4.8中已导出柔度矩阵(a), 而质量矩阵为

$$(m) = m \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

选取 $\{u\} = \{1, 2, 1\}^T$ , 有

$$\{u\}^T(m)\{u\} = m\{1, 2, 1\} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10m, \quad (a)$$

$$\{u\}^T(m)(a)(m)\{u\}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{m^2 l^3}{768 EI} \{1, 2, 1\} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{29m^2 l^3}{48 EI}, \tag{b}
\end{aligned}$$

以(a)、(b)代入(9.1-21)式, 得

$$\omega_1^2 = R(\{u\}) = \frac{480 E I m}{29 m^2 l^3} = 16.55 \frac{E I}{m l^3},$$

$$\omega_1 = 4.068 \sqrt{\frac{E I}{m l^3}}.$$

该系统的精确解为  $\omega_1 = 4.025 \sqrt{\frac{E I}{m l^3}}$ , 用瑞利商算得的基频的相对误差为1%.

### 9.1.2 Dunkerley法 (迹法)

上面介绍的瑞利商可估算系统基频的上限, Dunkerley法可用于估算系统基频的下限, 因而可作为Rayleigh法的补充.

采用 § 4.8中讲述的动力矩阵( $D$ )列出多自由度系统的特征值问题方程

$$(D)\{u\} = \mu\{u\}. \tag{9.1-23}$$

对应的特征方程为

$$|(D) - \mu(I)| = |D_{ij} - \mu\delta_{ij}| = 0. \tag{9.1-24}$$

将上式展开后可得

$$\mu^n - (D_{11} + D_{22} + \dots + D_{nn})\mu^{n-1} + \dots = 0, \tag{9.1-25}$$

根据多项式的根与系数的关系,  $\mu$ 的 $n$ 个根之和等于(9.1-25)式中 $\mu^{n-1}$ 的系数变号, 故有

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = D_{11} + D_{22} + \dots + D_{nn}. \tag{9.1-26}$$

上式右端即矩阵( $D$ )的迹, 而 $\mu_i = 1/\omega_i^2$ . 系统的 $n$ 个自然频率排列为 $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ , 故在(9.1-26)式中可仅保留第一个特

征值，即近似地有

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \mu_1 \approx D_{11} + D_{22} + \cdots + D_{nn} \quad (9.1-27)$$

上式可用来近似估算系统的基频。很显然，由(9.1-27)式估算出的 $\omega_1$ 比系统基频的精确值要小，只有当 $\omega_1 \ll \omega_2$ 时，(9.1-27)式才可给出较精确的基频估计值。

假定系统的质量矩阵( $m$ )为对角阵

$$\{m\} = \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{pmatrix},$$

则动力矩阵为

$$\{D\} = \{a\}\{m\} = \begin{pmatrix} a_{11}m_1 & a_{12}m_2 & \cdots & a_{1n}m_n \\ a_{21}m_1 & a_{22}m_2 & \cdots & a_{2n}m_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}m_1 & a_{n2}m_2 & \cdots & a_{nn}m_n \end{pmatrix},$$

那么(9.1-27)式成为

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n. \quad (9.1-28)$$

记

$$\omega_{i,i}^2 = \frac{1}{a_{i,i}m_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (9.1-29)$$

$\omega_{i,i}$ 表示仅保留质量 $m_i$ ，原来的多自由度系统变为单自由度系统时的自然频率。这是因为，仅有 $m_i$ 存在时，系统的自由振动运动方程组变为一个方程

$$\ddot{q}_i(t) + \frac{1}{a_{i,i}m_i}q_i(t) = 0,$$

可见其自然频率平方值为

$$\omega_{i,i}^2 = \frac{1}{a_{i,i}m_i}.$$

以(9.1-29)式代入(9.1-28)式，得

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_{nn}^2}. \quad (9.1-30)$$

上式通常称为Dunkerley公式，它表明系统基频平方 $\omega_1^2$ 的倒数，近似等于系统各集中质块 $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )单独存在时所得的各个自然频率的平方 $\omega_{ii}^2$ 的倒数之和。Dunkerley公式的意义就在于它将多自由度系统的基频通过一系列单自由度的子系统自然频率来计算，因而可迅速得到结果。

例9.3 用Dunkerley公式求例4.8系统中的基频，并与例9.2的瑞利商结果比较。

解：由例4.8知， $m_{11} = m_{33} = m$ ， $m_{22} = 2m$

$$a_{11} = a_{33} = 9l^3/(768EI)，a_{22} = 16l^3/(768EI)$$

根据(9.1-30)式，可写出

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2}, \quad (a)$$

而

$$\frac{1}{\omega_{11}^2} = \frac{1}{\omega_{33}^2} = \frac{9ml^3}{768EI}, \quad (b)$$

$$\frac{1}{\omega_{22}^2} = \frac{32ml^3}{768EI}, \quad (c)$$

将(b)、(c)式代入(a)式，得

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{ml^3}{768EI} (9 + 32 + 9) = \frac{50ml^3}{768EI},$$

$$\omega_1^2 = \frac{768EI}{50ml^3} = 15.36 \frac{EI}{ml^3},$$

$$\omega_1 \approx 3.919 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

与例9.2相比，这里求得的基频值偏小，与精确值的相对误差为2.5%。

利用Dunkerley公式还可考察系统刚度或质量变化对系统基频的影响。由(9.1-28)式，设多自由度系统的基频为 $\omega_1$ ，各质块的质量变化为 $\Delta m_i$ ，柔度变化为 $\Delta a_{ii}$ ，参数改变后系统的基

频为 $\tilde{\omega}_1$ ，则Dunkerley公式可写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\omega}_1^2} &= \sum_{i=1}^n (a_{i,i} + \Delta a_{i,i})(m_i + \Delta m_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,i} m_i + \sum_{i=1}^n (a_{i,i} \Delta m_i + m_i \Delta a_{i,i} + \Delta a_{i,i} \Delta m_i), \end{aligned} \quad (9.1-31)$$

将(9.1-28)式代入上式，得

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_1^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \sum_{i=1}^n (a_{i,i} \Delta m_i + m_i \Delta a_{i,i} + \Delta a_{i,i} \Delta m_i). \quad (9.1-32)$$

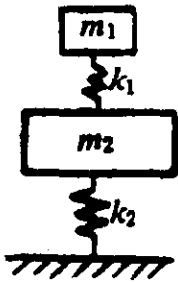


图 9.1-1

**例9.4** 一个两自由度系统，如图9.1-1所示， $m_1 = 3.14 \times 10^3 g \cdot N \cdot s^2/m$ ， $m_2 = 18.78 \times 10^3 g \cdot N \cdot s^2/m$ ， $k_1 = 436.1 \times 10^6 N/m$ ， $k_2 = 214.5 \times 10^6 N/m$ ，按上述数据计算得基频的精确值为 $\omega_1^2 = 9600 \text{ rad/s}^2$ ，现将 $k_1$ 降低20%，试估算参数改变后系统的基频（其中， $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度）。

解：根据(9.1-32)式，得参数修改后的基频表达式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\omega}_1^2} &= \frac{1}{\omega_1^2} + \Delta a_{1,1} m_1 = \frac{1}{9600} + \left( \frac{1}{0.8k_1} - \frac{1}{k_1} \right) m_1 = \frac{1}{9400}, \\ \tilde{\omega}_1 &= 97.0 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

读者可自行验证，精确解为 $\tilde{\omega}_1 = 97.5 \text{ rad/s}$ 。

### 9.1.3 Ritz法

上面介绍的Rayleigh法和Dunkerley法常用于估算系统的基频，如果需估算系统的前几阶自然频率及模态向量，可应用下面介绍的Ritz法。

前面曾指出, 瑞利商在模态向量的邻域有驻值, 这些驻值对应于系统的各阶自然频率。Ritz法的思路是, 选定 $k(1 \leq k \leq n)$ 个线性无关的向量 $\{\phi^{(i)}\}(i=1, 2, \dots, k)$ , 以这 $k$ 个向量为坐标基, 在 $n$ 维位形空间中张成一个 $k$ 维子空间。选定一个试算向量 $\{u\}$ 作为某个模态向量的估计。在上述 $k$ 维子空间中将 $\{u\}$ 展开, 得

$$\{u\} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \{\phi^{(i)}\} = (\phi)\{\alpha\}, \quad (9.1-33)$$

其中 $(\phi) = [\{\phi^{(1)}\}, \{\phi^{(2)}\}, \dots, \{\phi^{(k)}\}]$ 为坐标基向量组成的 $n \times k$ 矩阵。 $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}^T$ 为待定系数列向量, 其中的各元素是按照使瑞利商取驻值的原理来确定的。以(9.1-33)式代入(9.1-13)式, 得

$$R(\{u\}) = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}} = \frac{\{\alpha\}^T (\phi)^T [k] (\phi) \{\alpha\}}{\{\alpha\}^T (\phi)^T [m] (\phi) \{\alpha\}}, \quad (9.1-34)$$

上式以 $\{\alpha\}$ 为参变量, 故可将瑞利商写作:

$$\lambda = R(\{\alpha\}) = \frac{V(\{\alpha\})}{T(\{\alpha\})}. \quad (9.1-35)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} V(\{\alpha\}) &= \{\alpha\}^T (\phi)^T [k] (\phi) \{\alpha\} = \{\alpha\}^T [\bar{k}] \{\alpha\}, \\ T(\{\alpha\}) &= \{\alpha\}^T (\phi)^T [m] (\phi) \{\alpha\} = \{\alpha\}^T [\bar{m}] \{\alpha\}. \end{aligned} \right\} (9.1-36)$$

而

$$[\bar{k}] = (\phi)^T [k] (\phi), \quad [\bar{m}] = (\phi)^T [m] (\phi), \quad (9.1-37)$$

都是 $k \times k$ 对称矩阵, 称为广义刚度矩阵和广义质量矩阵。下面利用使(9.1-35)式取驻值的条件来确定待求向量 $\{\alpha\}$ ,

$$\left\{ \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right\} = \frac{T \left\{ \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\} - V \left\{ \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right\}}{T^2} = \frac{1}{T} \left( \left\{ \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\} - \lambda \left\{ \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right\} \right) = 0, \quad (9.1-38)$$

式中算子 $\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\}$ 为 $\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \right\}^T$ 。

由于

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\} &= \left\{ \frac{\partial (\{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \{ \alpha \})}{\partial \alpha} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial (\{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \{ \alpha \})}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial (\{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \{ \alpha \})}{\partial \alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial (\{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \{ \alpha \})}{\partial \alpha_k} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \{ \alpha \}^T}{\partial \alpha_1} \{ \bar{k} \} \{ \alpha \} + \{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \frac{\partial \{ \alpha \}}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \{ \alpha \}^T}{\partial \alpha_2} \{ \bar{k} \} \{ \alpha \} + \{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \frac{\partial \{ \alpha \}}{\partial \alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \{ \alpha \}^T}{\partial \alpha_k} \{ \bar{k} \} \{ \alpha \} + \{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \frac{\partial \{ \alpha \}}{\partial \alpha_k} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \{ 1, 0, \dots, 0 \} \{ \bar{k} \} \{ \alpha \} + \{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \{ 1, 0, \dots, 0 \}^T \\ \{ 0, 1, 0, \dots, 0 \} \{ \bar{k} \} \{ \alpha \} + \{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \{ 0, 1, 0, \dots, 0 \}^T \\ \vdots \\ \{ 0, 0, \dots, 0, 1 \} \{ \bar{k} \} \{ \alpha \} + \{ \alpha \}^T \{ \bar{k} \} \{ 0, 0, \dots, 0, 1 \}^T \end{array} \right\} \\
 &= 2 \{ \bar{k} \} \{ \alpha \}, \tag{9.1-39}
 \end{aligned}$$

同理可得

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right\} = 2 \{ \bar{m} \} \{ \alpha \}, \tag{9.1-40}$$

将(9.1-39)、(9.1-40)式代入(9.1-38)式, 化简得

$$\{ \bar{k} \} \{ \alpha \} - \lambda \{ \bar{m} \} \{ \alpha \} = 0. \tag{9.1-41}$$

此式称为Galerkin方程, 它是一个关于广义刚度矩阵 $\{ \bar{k} \}$ 与广义质量矩阵 $\{ \bar{m} \}$ 的特征值问题, 由之可解出 $k$ 个特征值 $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ )及对应的特征向量(即待定系数向量) $\{ \alpha^{(i)} \}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ )若所选择的 $k$ 个坐标基向量 $\{ \phi^{(i)} \}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ )所张成的

子空间近似地包含系统的前  $k$  个特征向量的话，则这  $k$  个特征值  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, k)$  就是原系统的前  $k$  个自然频率平方的近似值。而将  $k$  个特征向量  $\{a^{(i)}\}$  分别代入(9.1-33)式，即可得到系统前  $k$  个模态向量的估计。

Ritz法将原来的  $n \times n$  矩阵特征值问题转化为  $k \times k$  矩阵特征值问题(9.1-41)，在实际运用时， $k$  远比  $n$  小，故Ritz法是一种缩减系统自由度数的近似方法。

在实际计算中，如需估算系统的前  $m$  个自然频率及模态向量，按经验取  $k \geq 2m$ ，即使原来的自由度数  $n$  缩减到大于  $2m$  的数目，可使Ritz法计算得的前  $m$  个近似值接近精确值。Ritz法是在Rayleigh法基础上的改进，由Ritz法估算出来的自然频率也比其精确解偏大。

利用Ritz法，也可将柔度矩阵描述的  $n \times n$  矩阵特征值问题缩减为  $k \times k$  矩阵特征值问题。

将(9.1-33)式代入(9.1-22)式，得

$$R(\{a\}) = \frac{\{a\}^T \{\bar{m}\} \{a\}}{\{a\}^T \{\bar{a}\} \{a\}} = \frac{T(\{a\})}{V(\{a\})}, \quad (9.1-42)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{m}\} &= \{\phi\}^T \{m\} \{\phi\}, \\ \{\bar{a}\} &= \{\phi\}^T \{m\} \{a\} \{m\} \{\phi\}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1-43)$$

都是  $k \times k$  实对称矩阵。与前面推导类似，利用(9.1-42)式取驻值的条件，取到下列  $k \times k$  矩阵特征值问题方程

$$\{\bar{m}\} \{a\} - \lambda \{\bar{a}\} \{a\} = 0. \quad (9.1-44)$$

在9.1.1中曾指出，选取同样的向量  $\{u\}$ ，按(9.1-22)式估算出的自然频率比按(9.1-13)式算出的结果准确。同理，选取同样的坐标基矩阵  $\{\phi\}$ ，从(9.1-44)式求得的前  $n$  阶自然频率估计值也比从(9.1-41)式得到的更准确。

**例9.5** 图9.1-2所示的七自由度系统，试用Ritz法求系统的

第一阶模态。

解：这是一个七自由度的系统，系统的质量矩阵与刚度矩阵分别为



图 9.1-2

$$(m) = I \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$(k) = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

采用第四章的方法比较费事。假设系统的第一阶模态向量的两种近似形式为

$$\{\phi^{(1)}\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7\}^T,$$

$$\{\phi^{(2)}\} = \{1 \ 4 \ 9 \ 16 \ 25 \ 36 \ 49\}^T.$$

而



$$\{\phi\} = \{\{\phi^{(1)}\}, \{\phi^{(2)}\}\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}^T \quad (a)$$

根据(9.1-37), 可算出

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{k}\} &= \{\phi\}^T \{k\} \{\phi\} = k \begin{bmatrix} 7 & 49 \\ 49 & 455 \end{bmatrix}, \\ \{\bar{m}\} &= \{\phi\}^T \{m\} \{\phi\} = I \begin{bmatrix} 115.5 & 612.5 \\ 612.5 & 3475.5 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

按(9.1-41)可写出广义特征值问题

$$\{\bar{k}\} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} - \lambda \{\bar{m}\} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (c)$$

令  $\lambda = \omega^2 I/k$ , 则(c)式可写为

$$\begin{bmatrix} 7 & 49 \\ 49 & 455 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 115.5 & 612.5 \\ 612.5 & 3475.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (d)$$

解此方程可得

$$\lambda_1 = 0.0504825, \quad \lambda_2 = 0.59131, \quad (e)$$

从而

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0.0504825k/I, \quad \omega_1 = 0.2247 \sqrt{k/I}, \\ \omega_2^2 &= 0.59131k/I, \end{aligned}$$

直接按第四章介绍的方法求解此七自由度系统可得精确解  $\omega_1 = 0.2239 \sqrt{k/I}$ , 故Ritz法解的相对误差为0.21%.

将  $\lambda_1$  代入(d)式中, 并任取两个方程中的一个, 令  $\alpha_1^{(1)} = 1$ , 可解得  $\alpha_2^{(1)} = -0.06467$ , 故

$$\{\alpha^{(1)}\} = \{\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}\}^T = \{1, -0.06467\}^T, \quad (f)$$

利用(9.1-33)式,

$$\{u^{(1)}\} = \{\phi\} \{\alpha^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.06467 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.93533 \\ 1.74132 \\ 2.41797 \\ 2.96528 \\ 3.38325 \\ 3.67188 \\ 3.83117 \end{Bmatrix} = 3.83117 \begin{Bmatrix} 0.244 \\ 0.454 \\ 0.630 \\ 0.774 \\ 0.884 \\ 0.958 \\ 1.000 \end{Bmatrix} .$$

用类似方法可求出对应于 $\lambda_2$ 的模态向量 $\{u^{(2)}\}$ 。

## § 9.2 子系统综合法(一)——传递矩阵法

以下讲述对分析计算大型复杂结构振动特性十分有效的方法——子系统综合法。其基本作法是，把一个难以直接分析或测试的复杂系统或结构分解为若干个子系统或子结构（这些子系统往往也是多自由度系统），然后分别对每个子系统进行振动分析或测试，求出它们的振动特性，再根据各子系统连接界面的变形协调条件和力的平衡条件，进行“综合”、“装配”，建立整个系统（以下称“总系统”）的动力学方程，求解此方程，从而求出整个系统的振动特性。

子系统综合法有许多优点：子系统比总系统简单，便于测试或分析计算。采用子系统综合法，不仅可以提高测试与分析计算的精度，而且可降低测试与分析的成本；有些过于复杂的系统或结构，如果作为一个整体来加以测试、分析与建模，甚至是不可能的，而子系统综合法则为这类系统的分析与处理提供了一条可行的技术途径；在工程设计中，当需要修改、优化系统中的某一子系统的参数时，可保留其余子系统的计算结果，仅对需修改的子系统进行重新计算，然后进行综合，即可得到修改后的结构的振动特性，这样，大量减少了重复的工作可提高分析的效率；

有些大型、复杂的设备是由相距很远的多家工厂分别制造其各个部件，然后再运到现场进行总装、调试，各部件的振动特性可以在各个制造厂分别进行分析测试，而整台设备的动态特性或由于安装场地并无测试分析的条件，或者即使测试、分析出来也无法再对其各部件进行修改，这时就需要采用子系统综合法，事先求出整台设备的振动特性，并指导各部件的修改与优化。

采用子系统综合法还可将已有的系统与一个假想的系统“联机运行”，对其运行特性进行仿真，从而对该假想系统进行优化设计。

子系统综合法种类繁多，在工程中的应用十分广泛，本章仅简要介绍三类子系统综合法，即传递矩阵法、机械阻抗综合法和模态综合法，本节讲述传递矩阵法。

传递矩阵法把一个具有链状结构的多自由度系统分解成一系列类似的、比较简单的子系统(单自由度系统或基本的弹性或质量元件)，各子系统在彼此连接的端面上的广义力与广义位移用状态向量表示，而子系统一端到另一端的状态向量之间的关系可用传递矩阵来表示。传递矩阵法就是通过建立从一个位置的状态向量推算下一个状态向量的公式，从原系统的起点推算到终点，再根据边界条件即得系统的频率方程，解出系统的自然频率与模态向量。工程中常见的很多系统可视为由彼此相似的子系统串连而成的链状结构，如连续梁，汽轮发电机轴系，柴油发电机轴系、船舶推进轴系等，采用传递矩阵方法进行分析计算是很方便和有效的。

### 9.2.1 质量-弹簧系统的传递矩阵解法

图9.2-1(a)所示的弹簧-质量系统是典型的多自由度振动系统的力学模型，我们来研究其自由振动。这里先设定有关符号规则，约定位移向右为正，作用于质块左端面的力向左为正，作用

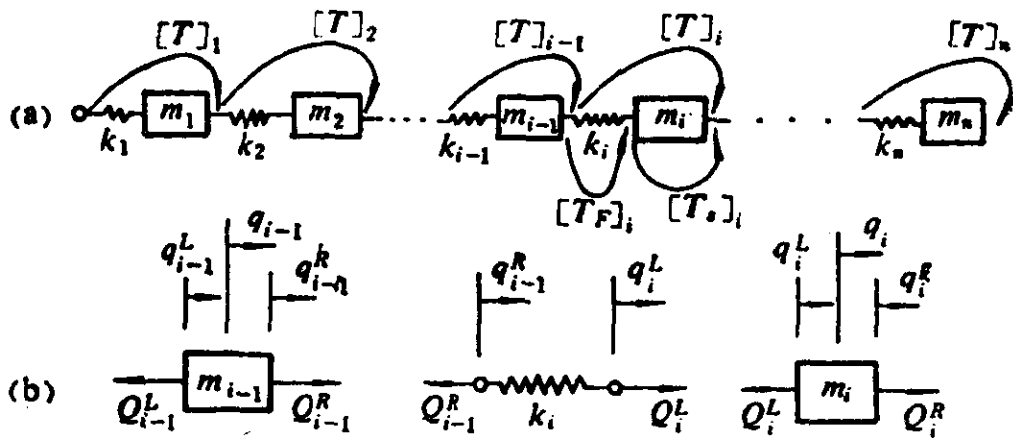


图 9.2-1

于质块右端面的力向右为正。质块左、右端面（即系统中各质块的连接点）的状态变量分别为  $q_i^L$ ,  $Q_i^L$ ,  $q_i^R$ ,  $Q_i^R$ ，其中  $q$  表示位移坐标， $Q$  表示其一质块所受到相邻质块的作用力，下标  $i$  表示质块的编号，上标  $L$  与  $R$  分别表示质块的左与右端面。图 9.2-1 (b) 代表从图 9.2-1 (a) 所示系统中取出的一部分，对第  $i$  个质块  $m_i$  取脱离体，由牛顿第二定律得

$$m \ddot{q}_i = Q_i^R - Q_i^L. \quad (9.2-1)$$

需要说明，这里假设系统是在作某一种同步运动，因而位移  $q_i(t)$ ,  $Q_i^R(t)$  及  $Q_i^L(t)$  均为谐波函数。现在我们约定上式及以下的公式中各量均为谐波函数的幅值，即  $\ddot{q}_i$  为  $m_i$  的振动加速度的振幅，于是有  $\ddot{q}_i = -\omega^2 q_i$ ，式中  $q_i$  为振动位移的幅值，而  $\omega$  为振动频率。将 (9.2-1) 式移项，并以  $\ddot{q}_i = -\omega^2 q_i$  代入，得

$$Q_i^R = Q_i^L - \omega^2 m q_i, \quad (9.2-2)$$

又  $m_i$  两端的位移相同，故有

$$q_i = q_i^R = q_i^L. \quad (9.2-3)$$

将 (9.2-2)、(9.2-3) 式综合成矩阵形式，得从第  $i$  个质块的左端到其右端的状态传递方程为

$$\begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_i^L, \quad (9.2-4)$$

$$\{z\}_i^R = (T_s)_i \{z\}_i^L, \quad (9.2-5)$$

其中 $\{z\}_i^L$ 、 $\{z\}_i^R$ 分别为质量 $m_i$ 左、右端面的状态向量； $(T_s)_i$ 是从质量 $m_i$ 的左端到右端的状态向量的变换矩阵，称为站 (station) 的传递矩阵。

再对图9.2-1(a)中的第 $i$ 个弹簧取脱离体，其两端的力是相等的，即

$$Q_i^L = Q_{i-1}^R, \quad (9.2-6)$$

弹性变形与弹簧力之间有下列关系

$$q_i^L - q_{i-1}^R = Q_{i-1}^R / k_i. \quad (9.2-7)$$

读者须注意，这里的“左”(L)与“右”(R)是对质块而言的，并非对弹簧而言。将(9.2-6)、(9.2-7)式综合成矩阵形式，得到从弹簧的左端到其右端的状态传递方程为

$$\begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_{i-1}^R, \quad (9.2-8)$$

或

$$\{z\}_i^L = (T_F)_i \{z\}_{i-1}^R. \quad (9.2-9)$$

其中 $\{z\}_{i-1}^R$ 、 $\{z\}_i^L$ 分别是弹簧 $k_i$ 的左端（即质块 $m_{i-1}$ 的右端）与弹簧 $k_i$ 的右端（即质块 $m_i$ 的左端）的状态向量； $(T_F)_i$ 是从弹簧左端的状态向量到其右端的状态向量的变换矩阵，称为场 (field) 传递矩阵。将(9.2-8)式代入(9.2-4)式，

$$\begin{aligned} \{z\}_i^R &= \begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_i^R = (T_s)_i (T_F)_i \{z\}_{i-1}^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_{i-1}^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ -\omega^2 m_i & (1 - \omega^2 m_i / k_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_{i-1}^R, \end{aligned}$$

或 
$$\{z\}_i^R = (T)_i \{z\}_{i-1}^R. \quad (9.2-10)$$

式中矩阵 $(T)_i = (T_s)_i (T_F)_i$ 是从第 $i-1$ 个质量的右端到第 $i$ 个

质量的右端的状态向量的传递矩阵，亦即从第  $i$  个弹簧的左端到第  $i+1$  个弹簧的左端的状态向量的传递矩阵。

如果  $\{z\}_0^R$  与  $\{z\}_n^R$  分别是图 9.2-1 所示系统的始端和末端的状态向量，则它们之间的状态传递方程为

$$\{z\}_n^R = (T)_n (T)_{n-1} \cdots (T)_1 \{z\}_0^R, \quad (9.2-11)$$

记  $(T)_n (T)_{n-1} \cdots (T)_1 = (T), \quad (9.2-12)$

得

$$\{z\}_n^R = (T) \{z\}_0^R. \quad (9.2-13)$$

(9.2-12) 式中矩阵  $(T)$  称为系统的总传递矩阵。由于各传递矩阵中包括  $\omega$ ，所以  $(T)$  中的各元素均为  $\omega$  的多项式。状态向量  $\{z\}_0^R$  与  $\{z\}_n^R$  则与边界条件有关。

**例 9.6** 对例 3.1 中的系统，用传递矩阵法求解系统的自然模态。

解：系统的总传递矩阵为

$$\begin{aligned} (T) &= (T)_3 (T)_2 (T)_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1/k_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/k_2 \\ -\omega^2 m_2 & (1 - \omega^2 m_2/k_2) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/k_1 \\ -\omega^2 m_1 & (1 - \omega^2 m_1/k_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{5m\omega^2}{2k} + \frac{m^2\omega^4}{k^2} & \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \left(\frac{5}{2k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) \\ -3\omega^2 m + \frac{2m^2\omega^4}{k} & 1 - \frac{5m\omega^2}{k} + \frac{2m^2\omega^4}{k^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

系统两端面的状态向量的关系为

$$\begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_3^R = (T) \begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_0^R = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_0^R,$$

故有  $q^R = T_{11}q^R + T_{12}Q^R, \quad (a)$

$Q_3^R = T_{21}q^R + T_{22}Q^R. \quad (b)$

根据系统的边界条件：左、右端均为固定端，故

$$q_0^R = 0, q_2^R = 0.$$

将上述方程代入(a)式, 因为 $Q_0^R \neq 0$ , 必有

$$T_{12} = 0,$$

即

$$\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \left(\frac{5}{2k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) = 0. \quad (c)$$

这就是系统的特征方程,  $T_{12}$ 称为系统在两端固定的边界条件下的频率多项式, 满足 $T_{12} = 0$ 的 $\omega$ 就是系统的自然频率. 从(c)式可解得

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{2m}} = 1.5811\sqrt{\frac{k}{m}},$$

与例3.1的结果一致. 求出自然频率 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 后, 逐一代入(9.2-10)式, 并假设 $Q_0^R = 1$ , 即可逐步求出各端面的状态向量 $\left\{\begin{matrix} q \\ Q \end{matrix}\right\}_0^R$ ,

$\left\{\begin{matrix} q \\ Q \end{matrix}\right\}_1^R, \dots, \left\{\begin{matrix} q \\ Q \end{matrix}\right\}_n^R$ 从而确定系统的模态向量 $\{q^R, q_1^R, \dots, q_n^R\}$ ,

同时, 也顺便得到各截面处内力幅值 $\{Q^R, Q_1^R, \dots, Q_n^R\}$ .

读者可自行推导, 对于两端自由、或一端固定而另一端自由的边界条件, 频率多项式分别为 $T_{21}$ 和 $T_{11}$ (或 $T_{22}$ ).

## 9.2.2 扭振系统的传递矩阵解法

### 1. 直线扭振系统

设有图9.2-2(a)所示的轴系, 它由不计质量的弹性轴段和具有转动惯量的刚性圆盘组成. 对第 $i$ 段轴及第 $i$ 个盘取脱离体, 如图9.2-2(b)所示. 轴的扭转刚度为 $k_i$ , 盘的转动惯量为 $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 在下面的分析中, 扭矩及角位移向量的方向均采用前小节所用的正向, 按右手螺旋法则确定. 在这里 $\Theta$ 、 $M$ 分别表示转角位移的幅值与扭矩的幅值. 采用与前小节类似的分析方

法，可导出

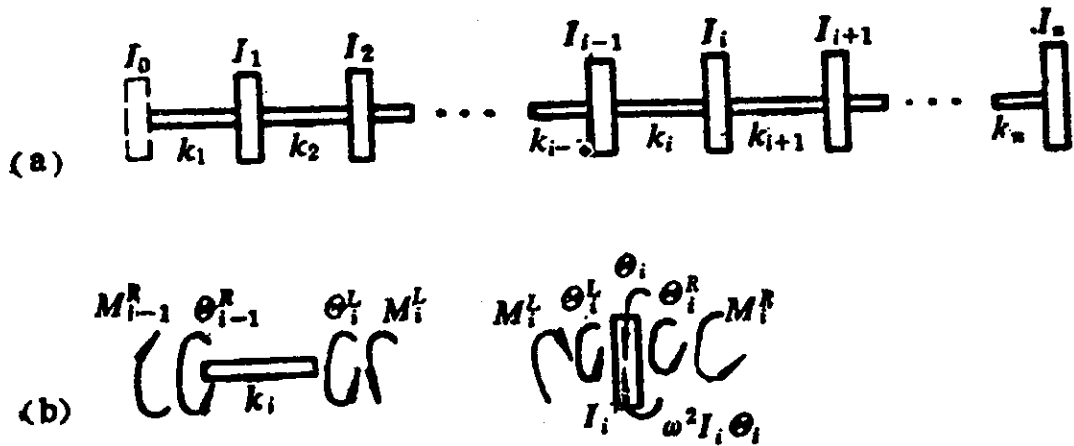


图 9.2-2

$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_i^L = (T_s)_i \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_i^L, \quad (9.2-14)$$

$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_{i-1}^R = (T_r)_i \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_{i-1}^R. \quad (9.2-15)$$

将(9.2-15)式代入(9.2-14)式，得

$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ -\omega^2 I_i & 1 - \omega^2 I_i/k_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_{i-1}^R = (T)_i \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_{i-1}^R, \quad (9.2-16)$$

式中

$$(T_s)_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_i & 1 \end{bmatrix}, (T_r)_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.2-17)$$

$$(T)_i = (T_s)_i (T_r)_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ -\omega^2 I_i & 1 - \omega^2 I_i/k_i \end{bmatrix}, \quad (9.2-18)$$

分别为第  $i$  个站（盘）、场（轴）和子系统（轴+盘）的传递矩阵。

对图9.2-2(a)所示系统，可得从左端至右端状态向量的总的传递矩阵方程



$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_n^R = (T)_n (T)_{n-1} \cdots (T)_1 \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_0^R = (T) \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_0^R, \quad (9.2-19)$$

其中  $(T) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$  为总的传递矩阵。这里假想在图9.2-2

(a) 所示系统的左端还有一个圆盘  $I_0$ ,  $\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_0^R$  即为其右侧

(实际上是  $k_1$  的左端) 的状态向量。实际上, 这一假想对于图9.2-1(a)所示系统与相应的(9.2-11)式也同样适用。展开(9.2-19)式, 得

$$\Theta_n^R = T_{11}\Theta_0^R + T_{12}M_0^R \quad (9.2-20)$$

$$M_n^R = T_{21}\Theta_0^R + T_{22}M_0^R. \quad (9.2-21)$$

下面写出各种边界条件下该扭振系统的频率方程:

1) 两端自由的轴: 边界条件为  $M_n^R = 0$ ,  $M_0^R = 0$ 。由(9.2-21)式, 因  $\Theta_0^R \neq 0$ , 而得  $T_{21} = 0$ , 此即频率方程,  $T_{21}$  为频率多项式。在此情况下,  $\omega = 0$  必然是它的一个根, 实际上, 该系统由于约束不足, 是半定系统, 故存在零模态。

2) 一端固定, 一端自由的轴: 边界条件为  $\Theta_n^R = 0$ ,  $M_n^R = 0$  或  $M_0^R = 0$ ,  $\Theta_0^R = 0$ 。此时可分别由(9.2-21)及(9.2-20)式得到相应的频率方程  $T_{22} = 0$  或  $T_{11} = 0$ 。

3) 两端固定的轴: 边界条件为  $\Theta_n^R = 0$ ,  $\Theta_0^R = 0$ 。由(9.2-20)式得频率方程为  $T_{12} = 0$ 。

**例9.7** 对图9.2-3所示的三圆盘扭振系统, 设  $I_1 = 50gN \cdot cm \cdot s^2$ ,  $I_2 = 100gN \cdot cm \cdot s^2$ ,  $I_3 = 200gN \cdot cm \cdot s^2$ ,  $k_1 = 10^6 N/cm$ ,  $k_2 = 2 \times 10^6 N/cm$ 。试用传递矩阵法

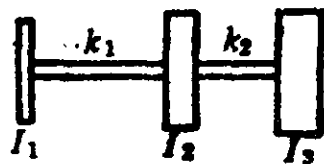


图 9.2-3

求解系统的自然频率与模态向量 (其中,  $g = 9.8m/s^2$  为重力加速度)。

解: 该系统的边界条件为  $M_2^L = M_3^R = 0$ , 设  $\Theta_1 = 1$ , 则  $\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_1^L$

$= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , 按(9.2-14)、(9.2-16)式, 可写出

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_1^R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -50\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -50\omega^2 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_2^R &= \begin{bmatrix} 1 & 1/k_1 \\ -\omega^2 I_2 & 1 - \omega^2 I_2/k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_1^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 10^{-6} \\ -100\omega^2 & 1 - 10^{-4}\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -50\omega^2 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_3^R &= \begin{bmatrix} 1 & 1/k_2 \\ -\omega^2 I_3 & 1 - \omega^2 I_3/k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_2^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \times 10^{-5} \\ -200\omega^2 & 1 - 10^{-4}\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_2^R. \end{aligned}$$

假设一系列的 $\omega$ 值, 可按上式算出一系列的 $\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_1^R$ 、 $\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_2^R$

$\begin{Bmatrix} \Theta \\ M \end{Bmatrix}_3^R$ 的值. 并可画出 $M^R$ 随 $\omega$ 值变化的曲线, 如图9.2-4(a)所示.

由于 $M_1^L = 0$ 、 $\Theta_1^L = 1$ , 按(9.2-21)式, 并注意符号之间的对应关系, 有 $M_1^R = T_{2,1}$ , 这表明 $M^R$ 恰为频率多项式, 因而使 $M^R$ 值恰好为零的各 $\omega$ 值即该系统的自然频率值. 由图9.2-4(a)中 $M^R = 0$ 的点可确定系统的自然频率值 $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 126 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_3 = 210 \text{ rad/s}$ . 同时可得到对应的状态向量:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Theta^{(1)} \\ M^{(1)} \end{Bmatrix}_1^R &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Theta^{(1)} \\ M^{(1)} \end{Bmatrix}_2^R = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Theta^{(1)} \\ M^{(1)} \end{Bmatrix}_3^R = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \Theta^{(2)} \\ M^{(2)} \end{Bmatrix}_1^R &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.794 \times 10^6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Theta^{(2)} \\ M^{(2)} \end{Bmatrix}_2^R = \begin{Bmatrix} 0.206 \\ 1.121 \times 10^6 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \Theta^{(2)} \\ M^{(2)} \end{Bmatrix}_3^R &= \begin{Bmatrix} -0.355 \\ -0.009 \times 10^6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Theta^{(3)} \\ M^{(3)} \end{Bmatrix}_1^R = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.205 \times 10^6 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \Theta^{(3)} \\ M^{(3)} \end{Bmatrix}_2^R &= \begin{Bmatrix} -1.205 \\ -3.104 \times 10^6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Theta^{(3)} \\ M^{(3)} \end{Bmatrix}_3^R = \begin{Bmatrix} 0.347 \\ -0.044 \times 10^6 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

状态向量中的诸 $\theta$ 值即构成了系统的模态向量  $\{\theta^{(1)}\}$ 、 $\{\theta^{(2)}\}$  与  $\{\theta^{(3)}\}$ ，如图9.2-4(b)所示。

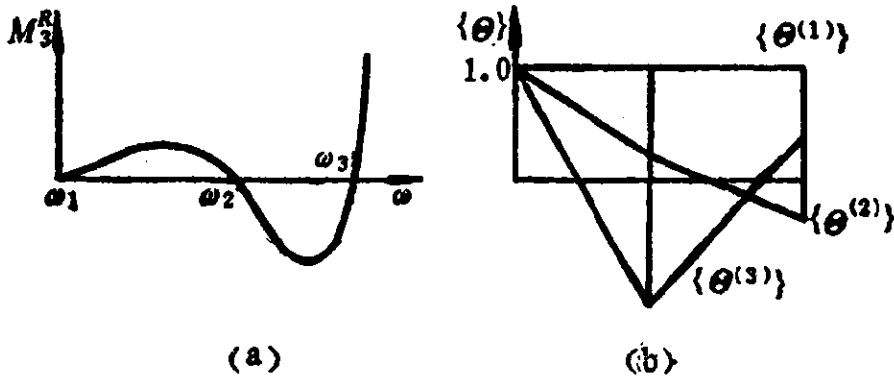


图 9.2-4

## 2. 分支系统

工程中有些轴系是分支系统，如带发电机的船舶柴油机推进轴系、汽车差动传动轴系等。下面扼要介绍分支系统的传递矩阵分析法。

图9.2-5为一分支扭振系统， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三支在齿轮传动环节上相连接。

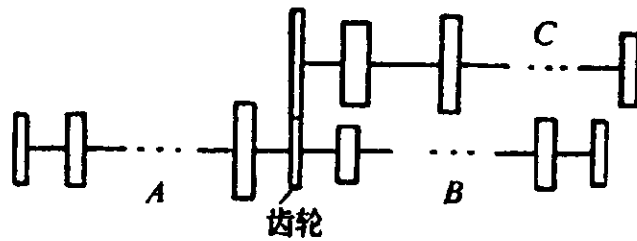


图 9.2-5

作为分支系统分析的基础，这里先介绍齿轮传动系统的简化。

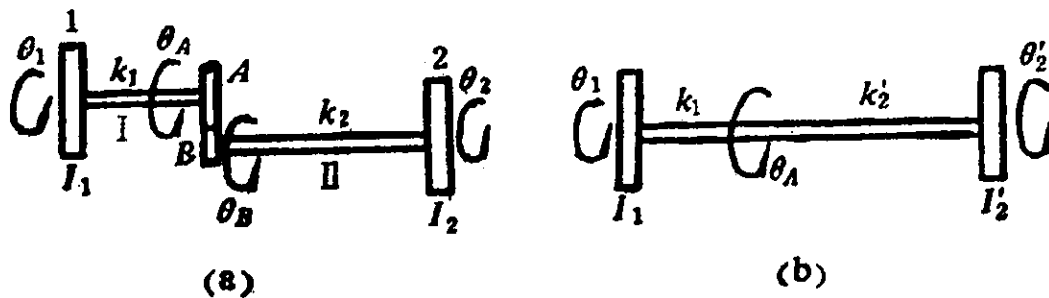


图 9.2-6

考虑图9.2-6(a)中的简单齿轮传动系统，它由一对传动齿轮A、B，轴I、II与圆盘1、2组成。圆盘1与2的转动惯量分别为 $I_1$ 、 $I_2$ 。不计齿轮的转动惯量，齿轮A到B的传动比为 $n$ ，取圆盘1、齿轮A、圆盘2的转角 $\theta_1$ 、 $\theta_A$ 、 $\theta_2$ 为描述系统位移的广义坐标，显然 $\theta_B = n\theta_A$ ，且 $\dot{\theta}_B = n\dot{\theta}_A$ ，那么此系统的弹性势能为

$$V = \frac{1}{2}k_1(\theta_A - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(n\theta_A - \theta_2)^2, \quad (9.2-22)$$

而系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta}_2^2. \quad (9.2-23)$$

另一方面，设想另一个单轴系统如图9.2-6(b)所示，其中 $I_1$ 、 $k_1$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_A$ 的意义与图9.2-6(a)相同，而 $k'_2 = n^2k_2$ ， $I'_2 = n^2I_2$ ， $\theta'_2 = \theta_2/n$ ，则此系统的势能与动能的表达式也分别是(9.2-22)式与(9.2-23)式。我们知道，一个系统的势能与动能函数决定了它的动态特性，因此，图(b)中的简化单轴系统与图(a)中的两轴系统在动态特性方面是等价的。也可以说图(b)是将图(a)中的轴II上的元件折算到轴I上面得到的，而折算的规则是：被折算的轴上的全部转动惯量与刚度需乘以传动比的平方 $n^2$ ，而转速则需除以 $n$ 。

对图9.2-5所示系统，采用上述简化规则，将C支轴上所有的转动惯量与刚度乘以转速比的平方 $n^2$ ，得到图9.2-7所示的转速比为1:1的轴系。

对图9.2-7所示的分支系统，可按与前述直线系统传递矩阵

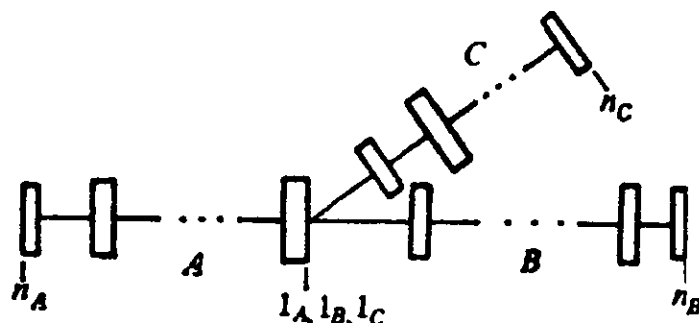


图 9.2-7

法类似的方法处理。设对  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个直线分支，其分支点(始端)与末端的状态向量分别为

$$\left\{ \begin{matrix} \Theta_{1A} \\ M_{1A} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \Theta_{1B} \\ M_{1B} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \Theta_{1C} \\ M_{1C} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \Theta_{2A} \\ M_{2A} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \Theta_{2B} \\ M_{2B} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \Theta_{2C} \\ M_{2C} \end{matrix} \right\},$$

在分支点有下列位移协调条件和力平衡条件

$$\Theta_{1A} = \Theta_{1B} = \Theta_{1C} = \Theta_1, \quad (9.2-24)$$

$$M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0. \quad (9.2-25)$$

按(9.2-19)式可对  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个直线轴系推导其传递矩阵方程

$$\left\{ \begin{matrix} \Theta_{2A} \\ M_{2A} \end{matrix} \right\} = (T_A) \left\{ \begin{matrix} \Theta_{1A} \\ M_{1A} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} T_{11A} & T_{12A} \\ T_{21A} & T_{22A} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Theta_{1A} \\ M_{1A} \end{matrix} \right\}, \quad (9.2-26)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \Theta_{2B} \\ M_{2B} \end{matrix} \right\} = (T_B) \left\{ \begin{matrix} \Theta_{1B} \\ M_{1B} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} T_{11B} & T_{12B} \\ T_{21B} & T_{22B} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Theta_{1B} \\ M_{1B} \end{matrix} \right\}, \quad (9.2-27)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \Theta_{2C} \\ M_{2C} \end{matrix} \right\} = (T_C) \left\{ \begin{matrix} \Theta_{1C} \\ M_{1C} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} T_{11C} & T_{12C} \\ T_{21C} & T_{22C} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Theta_{1C} \\ M_{1C} \end{matrix} \right\}. \quad (9.2-28)$$

其中  $(T_A)$ 、 $(T_B)$ 、 $(T_C)$  分别是  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个直线轴系的传递矩阵。将上述三式及(9.2-24)式合写成

$$\left\{ \begin{matrix} \Theta_{2A} \\ M_{2A} \\ \Theta_{2B} \\ M_{2B} \\ \Theta_{2C} \\ M_{2C} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} T_{11A} & T_{12A} & 0 & 0 \\ T_{21A} & T_{22A} & 0 & 0 \\ T_{11B} & 0 & T_{12B} & 0 \\ T_{21B} & 0 & T_{22B} & 0 \\ T_{11C} & 0 & 0 & T_{12C} \\ T_{21C} & 0 & 0 & T_{22C} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Theta_1 \\ M_{1A} \\ M_{1B} \\ M_{1C} \end{matrix} \right\}. \quad (9.2-29)$$

上式左端状态向量中有一半元素可由边界条件确定。对自由端，其扭矩为 0；对固定端，其转角为 0。对图 9.2-7 所示系统， $A$ 、 $B$ 、 $C$  三支末端皆为自由，即对应的扭矩为零：

$$M_{2A} = 0, \quad M_{2B} = 0, \quad M_{2C} = 0. \quad (9.2-30)$$

另一方面，仅考虑(9.2-29)式中的扭矩，同时结合(9.2-25)式，可得

$$\begin{pmatrix} M_{1A} \\ M_{1B} \\ M_{1C} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{21A} & T_{22A} & 0 & 0 \\ T_{21B} & 0 & T_{22B} & 0 \\ T_{21C} & 0 & 0 & T_{22C} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ M_{1A} \\ M_{1B} \\ M_{1C} \end{pmatrix} \quad (9.2-31)$$

将(9.2-30)式代入(9.2-31)式, 可得到一个关于  $\Theta_1$ 、 $M_{1A}$ 、 $M_{1B}$ 、 $M_{1C}$  的齐次方程, 由该齐次方程有非零解的条件, 得

$$\begin{vmatrix} T_{21A} & T_{22A} & 0 & 0 \\ T_{21B} & 0 & T_{22B} & 0 \\ T_{21C} & 0 & 0 & T_{22C} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (9.2-32)$$

上式展开即

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= T_{21A}T_{22B}T_{22C} + T_{21B}T_{22C}T_{22A} + T_{21C}T_{22A}T_{22B} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (9.2-33)$$

(9.2-33)式就是系统的频率方程, 解此方程便可得到系统的各阶自然频率。实际计算时, 仍可用例9.7的方法, 选择不同的频率值  $\omega$ , 作出  $\Delta(\omega)$  (称为剩余值) 关于  $\omega$  的曲线, 从中可得到自然频率, 进一步按传递矩阵方程可求出对应的模态向量。

### 9.2.3 梁的弯曲振动的传递矩阵法

在工程中, 对连续梁的横向振动问题, 可简化为由无质量的弹性梁段连接的一系列集中质块组成的振动系统, 如图9.2-8(e)所示。

对这样的系统, 用传递矩阵计算自然频率及模态向量也很方便。对系统中的第  $i$  段梁及第  $i$  个集中质块取脱离体, 如图9.2-8(b)所示, 我们来求其站 (质块) 的传递矩阵、场 (无质量梁段) 的传递矩阵及总传递矩阵。

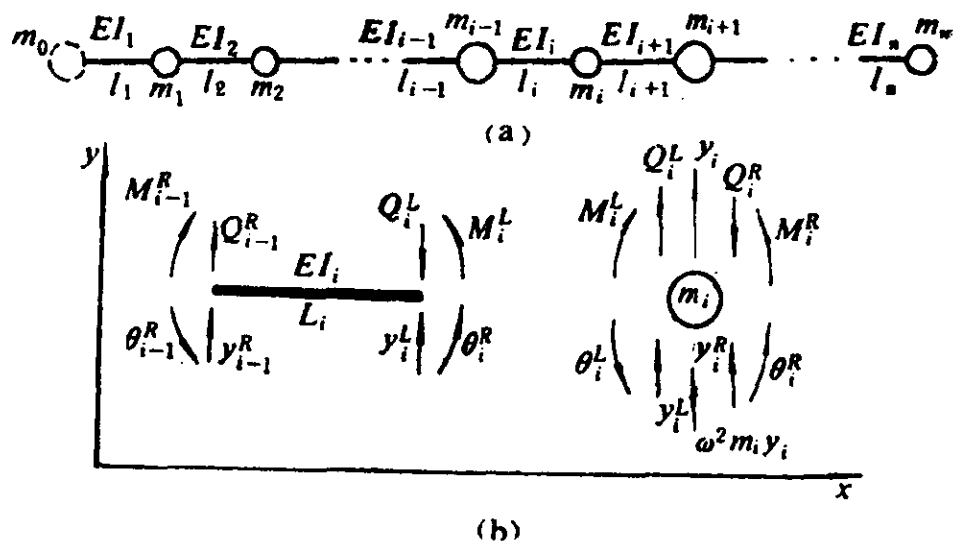


图 9.2-8

梁的状态向量由挠度 $y$ 、转角 $\theta$ 、剪力 $Q$ 及弯矩 $M$ 所组成。对 $m_i$ 取脱离体，显然有

$$y_i^R = y_i^L = y_i, \quad \theta_i^R = \theta_i^L, \quad (9.2-34)$$

假设 $m_i$ 仅产生横向简谐运动，且不计 $m_i$ 的转动惯量，考虑 $m_i$ 的平衡条件，得到

$$\begin{aligned} M_i^R &= M_i^L, \\ Q_i^R &= Q_i^L + \omega^2 m_i y_i. \end{aligned} \quad (9.2-35)$$

将(9.2-34)式与(9.2-35)式综合成矩阵形式，得

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^L = (T_*)_i \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^L, \quad (9.2-36)$$

式中

$$(T_*)_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即为站传递矩阵。对梁段 $l$ ，取脱离体，如图9.2-8(b)，不计梁

的质量，由平衡条件可得

$$\begin{aligned} Q_i^L &= Q_{i-1}^R, \\ M_i^L &= M_{i-1}^R + Q_{i-1}^R l_i. \end{aligned} \quad (9.2-37)$$

下面分析  $l_i$  左右两端的挠度与转角的关系。

由材料力学关于均匀梁的载荷 ( $M$ 、 $Q$ ) 与其变形 ( $\theta$ 、 $y$ ) 之间的关系知

$$\begin{aligned} \theta_i^L &= \theta_{i-1}^R + \frac{1}{EI_i} \int_0^{l_i} (M_{i-1}^R + Q_{i-1}^R x) dx \\ &= \theta_{i-1}^R + \frac{l_i M_{i-1}^R}{EI_i} + \frac{l_i^2 Q_{i-1}^R}{2EI_i}, \end{aligned} \quad (9.2-38)$$

$$\begin{aligned} y_i^L &= y_{i-1}^R + \int_0^{l_i} \left( \theta_{i-1}^R + \frac{M_{i-1}^R x}{EI_i} + \frac{Q_{i-1}^R x^2}{2EI_i} \right) dx \\ &= y_{i-1}^R + l_i \theta_{i-1}^R + \frac{l_i^2 M_{i-1}^R}{2EI_i} + \frac{l_i^3 Q_{i-1}^R}{6EI_i}. \end{aligned} \quad (9.2-39)$$

将(9.2-37)、(9.2-38)、(9.2-39)三式综合成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_i^L = \begin{pmatrix} 1 & l_i & \frac{l_i^2}{2EI_i} & \frac{l_i^3}{6EI_i} \\ 0 & 1 & \frac{l_i}{EI_i} & \frac{l_i^2}{2EI_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_{i-1}^R = (T_F)_i \begin{pmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_{i-1}^R, \quad (9.2-40)$$

式中

$$(T_F)_i = \begin{pmatrix} 1 & l_i & \frac{l_i^2}{2EI_i} & \frac{l_i^3}{6EI_i} \\ 0 & 1 & \frac{l_i}{EI_i} & \frac{l_i^2}{2EI_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即场传递矩阵。

将(9.2-36)、(9.2-40)式合并，可建立第  $i$  点与第  $i-1$  点状



态向量之间的关系,

$$\{z\}_i^R = \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i = (T_s)_i (T_F)_i \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_{i-1} = (T)_i \{z\}_{i-1}^R, \quad (9.2-41)$$

式中

$$(T)_i = (T_s)_i (T_F)_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{l^2}{2EI_i} & \frac{l^3}{6EI_i} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI_i} & \frac{l^2}{2EI_i} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ m\omega^2 & ml\omega^2 & \frac{ml^2\omega^2}{2EI_i} & 1 + \frac{ml^3\omega^2}{6EI_i} \end{pmatrix}. \quad (9.2-42)$$

为子传递矩阵,  $\{z\}_{i-1}^R$  与  $\{z\}_i^R$  分别是  $m_{i-1}$  与  $m_i$  右边的状态向量。

对于图9.2-8(a)所示的系统, 可写出

$$\{z\}_n^R = (T)_n (T)_{n-1} \cdots (T)_1 \{z\}_0^R = (T) \{z\}_0^R, \quad (9.2-43)$$

或

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_n = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_0. \quad (9.2-44)$$

$(T)$  为系统的总传递矩阵,  $\{z\}_n^R$  及  $\{z\}_0^R$  各有两个元素取决于边界条件, 当边界条件为固支时,  $y = \theta = 0$ ; 当边界条件为简支时,  $y = M = 0$ ; 当边界条件为自由时,  $M = Q = 0$ , 对特定系统, 从其两端的边界条件可由(9.2-44)式推出对应的频率方程, 从而可求出自然频率。例如, 假设图9.2-8(a)所示系统左端固定、右端自由 (即为一带有集中质量的悬臂梁), 其边界条件为

$$y_0^R = \theta_0^R = 0, \quad M_0^R = Q_0^R = 0.$$

将上式代入(9.1-44)式得关于 $M_0^R$ 、 $Q_0^R$ 的齐次方程，它有非零解的条件为系数行列式为零，即

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

选择不同的 $\omega$ 值，作出剩余值 $\Delta(\omega)$ 随 $\omega$ 变化的曲线，使 $\Delta(\omega) = 0$ 的 $\omega$ 值即为系统的自然频率。

## § 9.3 子系统综合法(二)——机械阻抗法

很早以前人们就已发现用来分析电路系统的一些定律和公式与用来分析振动系统的一些定律和公式有很多相似之处，因此可以把振动系统与电路系统联系起来，提出“机械网络”的概念，从而可以方便地移植电路理论中成熟的原理与方法来分析振动系统，或者以电路系统来模拟机械振动系统，非常方便地求解振动系统的特性与时间历程。事实上，在电路理论中的几乎所有的概念、定律和方法，在机械振动系统中都有其“对应物”。这一节主要讲述“机械阻抗”、“导纳”、“机械网络”、“并联”、“串联”及“阻抗综合”等概念。

### 9.3.1 振动系统及其基本元件的阻抗与导纳

#### 1. 机械阻抗与导纳的定义

机械阻抗定义为激励力的复数幅值与响应的复数幅值之比。设作用在系统上的激励力为

$$f(t) = |F| e^{i(\omega t + \alpha)} = F e^{i\omega t},$$

式中 $F = |F| e^{i\alpha}$ ，稳态位移响应为

$$x(t) = |X| e^{i(\omega t + \beta)} = X e^{i\omega t},$$

式中  $X = |X|e^{i\beta}$ , 则位移阻抗定义为

$$Z_D = \frac{|F|e^{i(\omega t + \alpha)}}{|X|e^{i(\omega t + \beta)}} = \frac{|F|}{|X|}e^{i(\alpha - \beta)} = \frac{F}{X} \quad (9.3-1)$$

位移导纳为

$$H_D = \frac{1}{Z_D} = \frac{|X|}{|F|}e^{i(\beta - \alpha)} = \frac{X}{F} \quad (9.3-2)$$

由此可知, 机械阻抗与导纳一般为复数。位移阻抗反映了系统的刚度, 又称为动刚度; 位移导纳反映了系统的柔度, 又称为动柔度。由于系统的振动响应也可用速度或加速度来描述, 因此相应地可定义速度阻抗  $Z_v$ 、速度导纳  $H_v$ , 加速度阻抗  $Z_A$  与加速度导纳  $H_A$ 。在运用机械阻抗概念分析振动问题时, 从理论上讲, 采用位移、速度、加速度阻抗 (或导纳) 中的任一种都可以, 但实际应用时, 则依情况而定; 分析机械结构的强度、刚度与抗振性能时, 一般采用位移阻抗或导纳的概念, 而进行机电模拟及理论推导时, 采用速度阻抗或导纳更合适。

## 2. 振动系统基本元件的阻抗与导纳

设质量元件如图9.3-1(a)所示, 它为平动刚体或质点,  $\ddot{x}$  表示  $m$  在外力作用下的加速度, 作用在质量两端的外力为  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 。若设  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$  均为谐波函数, 即  $f_1(t) = F_1 \cdot e^{i\omega t}$ ,  $f_2(t) = F_2 e^{i\omega t}$ , 那么稳态加速度响应亦为简谐形式, 即  $\ddot{x}(t) = \omega^2 X e^{i\omega t}$ 。按定义, 加速度阻抗为

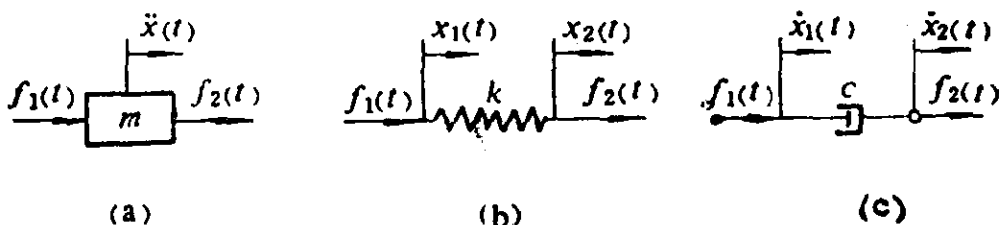


图 9.3-1

$$Z_A = \frac{F_1 - F_2}{\omega^2 X} = \frac{m\omega^2 X}{\omega^2 X} = m, \quad (9.3-3)$$

加速度导纳为

$$H_A = 1/m, \quad (9.3-4)$$

由于稳态速度与位移分别为  $\dot{x}(t) = \frac{\ddot{x}(t)}{i\omega}$ ,  $x(t) = \frac{-\ddot{x}(t)}{\omega^2}$ , 质量的速度阻抗及导纳分别为

$$Z_V = \frac{F_1 - F_2}{(\omega^2 X / (i\omega))} = \frac{i\omega m \omega^2 X}{\omega^2 X} = i\omega m, \quad (9.3-5)$$

$$H_V = 1/(i\omega m) = -i/(\omega m). \quad (9.3-6)$$

质量的位移阻抗及导纳分别为

$$Z_D = \frac{F_1 - F_2}{(-\omega^2 X / \omega^2)} = \frac{-\omega^2 m \omega^2 X}{\omega^2 X} = -\omega^2 m, \quad (9.3-7)$$

$$H_D = -1/(\omega^2 m). \quad (9.3-8)$$

对于图9.3-1(b)、(c)所示的弹簧元件与阻尼元件采用类似的分析方法, 亦可求得其阻抗与导纳, 所得结果归纳于表9.3-1中。

表9.3-1 三种基本元件的阻抗及导纳

基本元件	阻 抗			导 纳		
	$Z_D$	$Z_V$	$Z_A$	$H_D$	$H_V$	$H_A$
弹 簧	$k$	$k/i\omega$	$-k/\omega^2$	$1/k$	$i\omega/k$	$-\omega^2/k$
阻 尼 器	$i\omega c$	$c$	$c/i\omega$	$1/(i\omega c)$	$1/c$	$i\omega/c$
质 量	$-\omega^2 m$	$i\omega m$	$m$	$-1/(\omega^2 m)$	$1/(i\omega m)$	$1/m$

## 9.3.2 机电比拟与机械网络

### 1. 机电比拟

振动系统可与电路系统相比拟, 因此, 在谐波激励下的振动系统也可以像正弦电路一样, 用网络理论来分析。

与电网络相似, 机械网络中也有两类元件: 一类为有源元件, 另一类为无源元件。有源元件又分力源和运动源, 分别与电路中的电流源和电压源相对应。无源元件有弹簧、质量及阻尼器, 分

别与电路中的电感、电容及电导相当，而振动速度则与电压相对应，机械阻抗与机械导纳则分别与电导纳和电阻抗相对应。表 9.3-2 中示出了这些关系。

表 9.3-2 机电比拟对应关系

振动系统	电路系统	振动系统	电路系统
激励力 $f(t)$	电流 $i(t)$	速度 $\dot{x}(t)$	电压 $V$
质量 $m$	电容 $C$	机械导纳 $\dot{X}/F$	电阻抗 $V/I$
弹簧柔度 $1/k$	电感 $L$	机械阻抗 $F/\dot{X}$	电导纳 $I/V$
阻尼 $c$	电导 $1/R$	冲量 $I$	电量 $Q$

## 2. 并联与串联

### 1) 并联

如果网络中诸子网络两端的速度相同（而作用力不相同），则称为并联，如图 9.3-2(a) 所示。整个网络的速度阻抗为

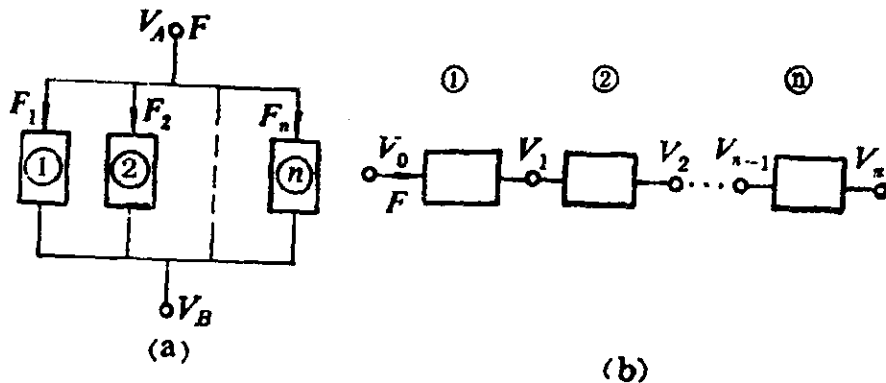


图 9.3-2

$$Z = \frac{F}{V_B - V_A} = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{V_B - V_A} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \quad (9.3-9)$$

式中

$$Z_i = \frac{F_i}{V_B - V_A}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.3-10)$$

即网络的总机械阻抗为各并联的子网络的阻抗之和。

## 2) 串联

如果网络中诸子网络所受的力相同（而速度不同），则称为串联，如图9.3-2(b)所示，整个网络的速度导纳为

$$H = \frac{V_n - V_0}{F} = \frac{V_1 - V_0}{F} + \frac{V_2 - V_1}{F} + \dots + \frac{V_n - V_{n-1}}{F}$$

$$= H_1 + H_2 + \dots + H_n, \quad (9.3-11)$$

式中

$$H_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{F}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.3-12)$$

即网络中的总的机械导纳为各串联的子网络的导纳之和。

## 3. 机械网络图

为了将一个多自由度振动系统用机械网络图表示出来，必须先介绍力流和质量接地的概念。

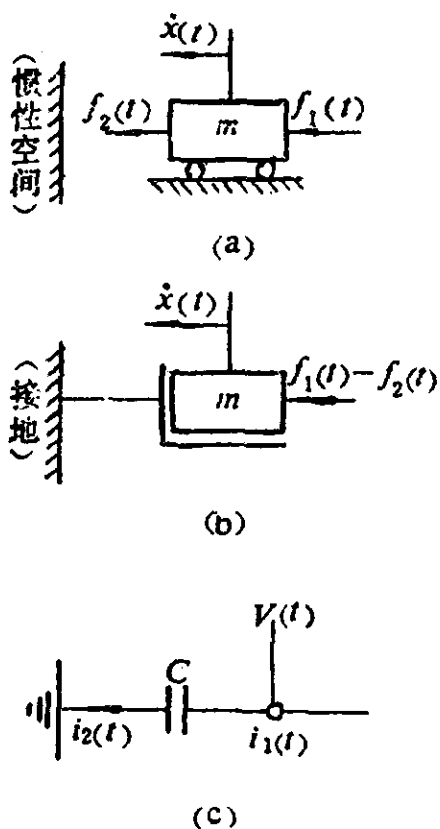


图 9.3-3

先介绍力流和质量接地的概念。

在机电比拟中，将力比拟为电流，即可把作用在振动系统中各处的力想象为力在机械网络中流动。对一个并联系统而言，力相加相当于力流有分支；对串联系统，各处力相等，即力无分流。

在机电比拟中，弹簧与电感，阻尼器与电阻之间的比拟关系较易于理解，而把质量比拟为电容，则有必要加以说明。

图9.3-3(a)为一质块在作用力  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$  作用下产生运动  $\dot{x}(t)$ 。我们只讨论质块相对于惯性空间的运动，而惯性空间可认为是运动

速度为零的接地点，则可将网络中的质块表示成如图9.3-3(b)所示，即将其一端接地。根据表9.3-2所示的对应关系，其所对应的

电容器及有关的电量如图9.3-3(c)所示。

绘制机械网络图的一般规则是：将有源元件画在左边，无源元件画在右边，力源和速度源的符号与电流源和电压源的符号类似；系统中遇到质量时，将质量拉出并并联接地，而各接地点用一根公用“地线”联接；同一节点上的速度相同，同一回路中的力流相同。

图9.3-4(a)为一单自由度振动系统，图(b)为其机械网络。因为作用在系统上的力由三个元件同时分担，力流一分为三，三个元件的运动速度相等，质量按接地处理，因此得到一个并联系统，其相似电网络如图(c)所示。

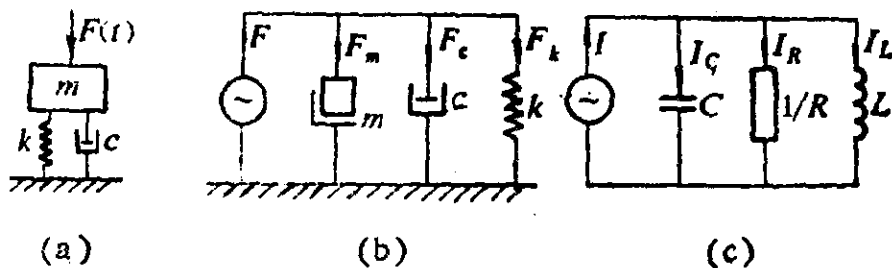


图 9.3-4

**例9.8** 试计算图9.3-4(a)所示系统的机械阻抗与导纳。

**解：** 该系统是并联系统，系统的机械阻抗应为三个元件机械阻抗之和，故可求得系统的位移阻抗

$$Z_D = Z_{Dk} + Z_{Dc} + Z_{Dm} = k + i\omega c - \omega^2 m,$$

而系统的位移导纳为

$$H_D = 1/Z_D = \frac{1}{k + i\omega c - \omega^2 m}.$$

这与第二章中求出的复频率响应是完全相同的。前面用的是求解微分方程的办法，而这里仅是一个代数方程问题。

**例9.9** 试求图9.3-5(a)所示系统的机械阻抗与导纳。

**解：** 图9.3-5(a)所示系统的机械网络图如图(b)所示，是一个串、并系统。设 $Z_1$ 为元件 $k_1$ 、 $c_1$ 并联的阻抗， $Z_2$ 为元件 $m_2$ 、 $k_2$ 、 $c_2$ 并联的阻抗， $Z_3$ 为 $Z_1$ 与 $Z_2$ 串联的阻抗， $Z$ 为系统的总阻

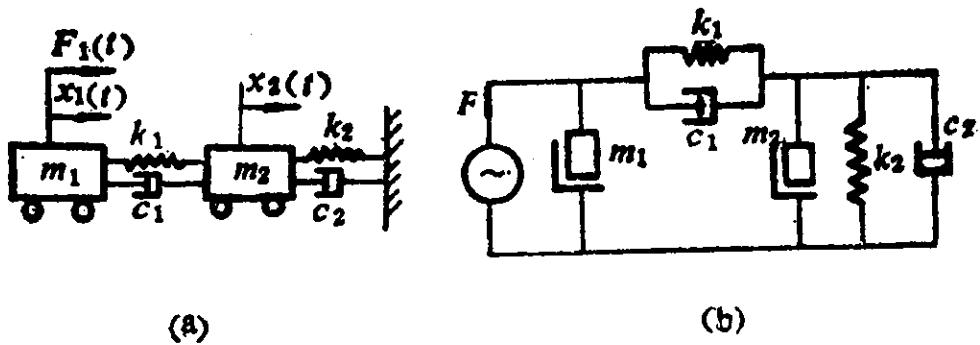


图 9.3-5

抗（位移阻抗），那么可写出

$$Z_1 = Z_{k_1} + Z_{c_1} = k_1 + i\omega c_1, \quad (a)$$

$$Z_2 = Z_{m_2} + Z_{k_2} + Z_{c_2} = k_2 - \omega^2 m_2 + i\omega c_2, \quad (b)$$

$$\frac{1}{Z_3} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}, \quad (c)$$

$$Z = Z_{m_1} + Z_3 = -\omega^2 m_1 + Z_3. \quad (d)$$

将(a)、(b)式代入(c)式，再将(c)式代入(d)式得

$$\begin{aligned} Z &= -\omega^2 m_1 + \frac{(k_1 + i\omega c_1)(k_2 - \omega^2 m_2 + i\omega c_2)}{k_1 + k_2 + i\omega c_1 + i\omega c_2 - \omega^2 m_2} \\ &= \frac{(k_1 + i\omega c_1)(k_2 - \omega^2 m_2 + i\omega c_2)}{k_1 + k_2 + i\omega(c_1 + c_2) - \omega^2 m_2} \\ &\quad - \frac{\omega^2 m_1(k_1 + k_2 + i\omega c_1 + i\omega c_2 - \omega^2 m_2)}{k_1 + k_2 + i\omega(c_1 + c_2) - \omega^2 m_2} \\ &= \frac{(k_2 - \omega^2 m_2 + i\omega c_2)(k_1 + i\omega c_1 - \omega^2 m_1) - \omega^2 m_1(k_1 + i\omega c_1)}{k_1 + k_2 + i\omega(c_1 + c_2) - \omega^2 m_2}, \end{aligned}$$

位移导纳为

$$H = \frac{k_1 + k_2 + i\omega(c_1 + c_2) - \omega^2 m_2}{(k_2 - \omega^2 m_2 + i\omega c_2)(k_1 - \omega^2 m_1 + i\omega c_1) - \omega^2 m_1(k_1 + i\omega c_1)}$$

对图9.3-5(a)所示系统，如果 $F_1(t)$ 的复幅值为 $F_1$ ，则可求出 $x_1(t)$ 的复幅值为 $X_1 = HF_1$ ，该结果与第三章中根据运动微分方程求得的解是相同的。（读者可自行验证）



### 9.3.3 机械阻抗综合法

阻抗综合法是分析复杂振动系统的有效方法。作为一种子系统综合法，它首先将整体系统分解成若干个子系统，应用上述机械阻抗或导纳概念分别研究各个子系统，建立各子系统的机械阻抗或导纳形式的运动方程；然后根据子系统之间互相连接的实际状况，确定子系统之间结合的约束条件；最后根据结合条件将各子系统的运动方程耦合起来，从而得到整体系统的运动方程与振动特性。

#### 1. 由一个坐标连接两个子系统组成的系统

图9.3-6(a)所示为一个坐标连接两个子系统A、B构成的系统，已知 $Z^{(A)}$ 、 $Z^{(B)}$ ，下面求整体系统在连接点的阻抗 $Z$ 。

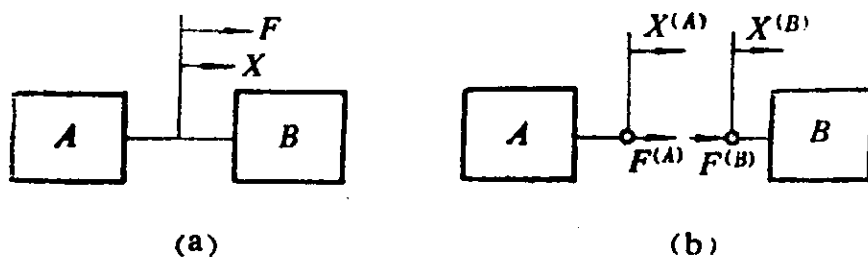


图 9.3-6

图9.3-6(b)为A、B两个子系统，对它们可分别写出阻抗形式表示的运动方程

$$F^{(A)} = Z^{(A)} X^{(A)}, \quad F^{(B)} = Z^{(B)} X^{(B)}. \quad (9.3-13)$$

在连接点上位移相容条件与力的平衡条件分别为

$$\begin{aligned} X &= X^{(A)} = X^{(B)}, \\ F &= F^{(A)} + F^{(B)}, \end{aligned} \quad (9.3-14)$$

或写为

$$\begin{Bmatrix} X^{(A)} \\ X^{(B)} \end{Bmatrix} = X \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F^{(A)} \\ F^{(B)} \end{Bmatrix}, \quad (9.3-15)$$

而(9.3-13)式可综合为

$$\begin{Bmatrix} F^{(A)} \\ F^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{(A)} & \\ & Z^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X^{(A)} \\ X^{(B)} \end{Bmatrix}. \quad (9.3-16)$$

联立(9.3-15)与(9.3-16)式, 即从该两式中消去 $\begin{Bmatrix} X^{(A)} \\ X^{(B)} \end{Bmatrix}$ ,

$\begin{Bmatrix} F^{(A)} \\ F^{(B)} \end{Bmatrix}$ 可得系统的运动方程:

$$F = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{(A)} & \\ & Z^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} X,$$

或  $F = (Z^{(A)} + Z^{(B)})X. \quad (9.3-17)$

由此可得到系统在连接点的阻抗

$$Z = \frac{F}{X} = Z^{(A)} + Z^{(B)}, \quad (9.3-18)$$

而由(9.3-17)式可得

$$X = \frac{F}{Z^{(A)} + Z^{(B)}}.$$

当 $Z^{(A)} + Z^{(B)} = 0$ 时, 系统的 $X$ 趋于 $\infty$ , 即产生共振. 满足这一条件, 称两个子系统的阻抗 $Z^{(A)}$ 与 $Z^{(B)}$ 是匹配的. 利用这一特点, 可由子系统的阻抗求整体系统的自然频率.

**例9.10** 用阻抗综合法求例4.5中系统的自然频率.

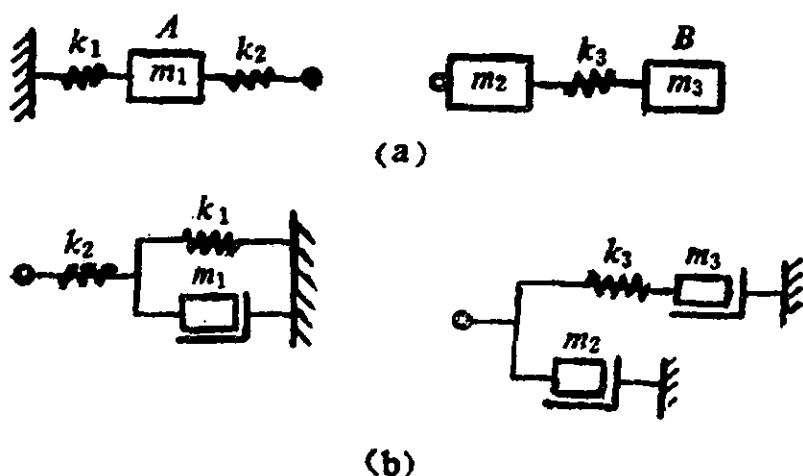


图 9.3-7

解: 将原系统分成两个子系统 $A$ 、 $B$ , 如图9.3-7(a)所示,

它们的等效机械网络分别如图9.3-7(b)所示。

子系统A在联接点的阻抗为

$$Z^{(A)} = \frac{1}{H_{12} + \frac{1}{Z_{11} + Z_{m1}}} = \frac{1}{\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 - \omega^2 m_1}} = \frac{k_2(k_1 - \omega^2 m_1)}{k_1 + k_2 - \omega^2 m_1}$$

子系统B在联接点的阻抗为

$$\begin{aligned} Z^{(B)} &= Z_{m2} + \frac{1}{H_{13} + H_{m3}} = -\omega^2 m_2 + \frac{1}{\frac{1}{k_3} - \frac{1}{\omega^2 m_3}} \\ &= \frac{-k_3 m_3 \omega^2}{k_3 - \omega^2 m_3} - \omega^2 m_2, \end{aligned}$$

据此，令  $Z^{(A)} + Z^{(B)} = 0$ ，得

$$\frac{-k_3 m_3 \omega^2}{k_3 - \omega^2 m_3} - \omega^2 m_2 + \frac{k_2(k_1 - \omega^2 m_1)}{k_1 + k_2 - \omega^2 m_1} = 0,$$

或

$$\begin{aligned} & -k_3 m_3 \omega^2 (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - \omega^2 m_2 (k_3 - \omega^2 m_3) (k_1 + k_2 \\ & - \omega^2 m_1) + k_2 (k_1 - \omega^2 m_1) (k_3 - \omega^2 m_3) = 0. \end{aligned}$$

此即上述三自由度系统的频率方程，余下求解不赘述。

**例9.11** 用阻抗综合法求图9.3-8(a)中扭振系统的自然频率。

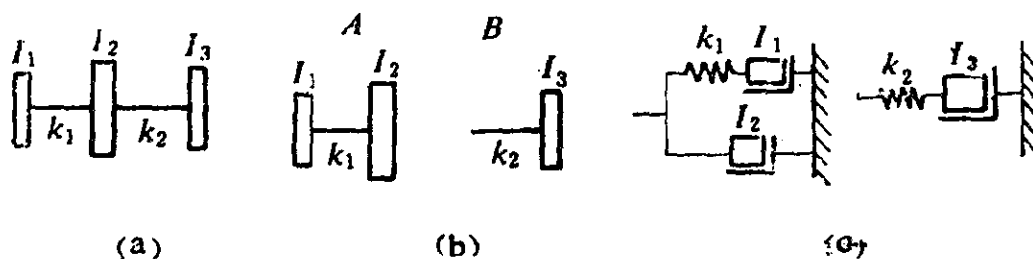


图 9.3-8

**解：**该系统可分解成A、B两个子系统，如图9.3-8(b)所示，其等效机械网络如图9.3-8(c)所示。子系统A、B在联接点的阻抗分别为

$$Z^{(A)} = Z_{12} + \frac{1}{H_{13} + H_{11}} = -\omega^2 I_2 + \frac{1}{\frac{1}{k_1} - \frac{1}{\omega^2 I_1}},$$

$$Z^{(B)} = \frac{1}{H_{k_2} + H_{I_3}} = \frac{1}{k_2 - \frac{1}{\omega^2 I_3}} = -\frac{\omega^2 I_3 k_2}{k_2 - \omega^2 I_3}$$

令  $Z^{(A)} + Z^{(B)} = 0$ , 得系统的频率方程为

$$\frac{I_1 I_2 I_3}{k_1 k_2} \omega^4 - \left( \frac{I_1 I_3 + I_2 I_3}{k_2} + \frac{I_1 I_2 + I_1 I_3}{k_1} \right) \omega^2 + I_1 I_2 I_3 = 0.$$

由此可解出系统的自然频率。

## 2. 由两个坐标连接两个子系统组成的系统

图9.3-9(a)所示为一由两个坐标联接两个子系统A、B组成的系统, 对它们可分别写出其阻抗矩阵表示的运动方程

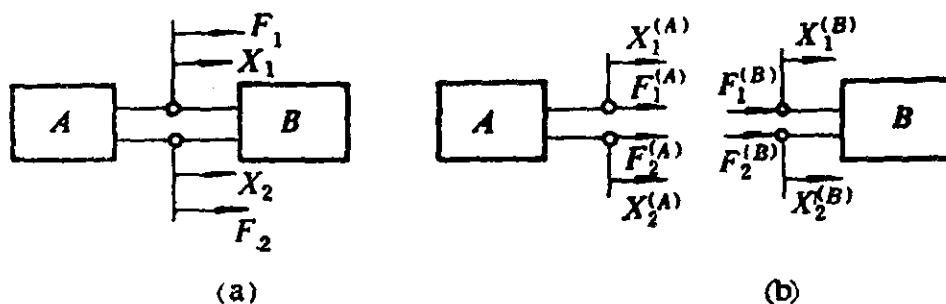


图 9.3-9

$$\{F^{(A)}\} = [Z^{(A)}]\{X^{(A)}\}, \quad \{F^{(B)}\} = [Z^{(B)}]\{X^{(B)}\}. \quad (9.3-19)$$

其中  $\{X^{(A)}\} = \{X_1^{(A)}, X_2^{(A)}\}^T$ ,  $\{X^{(B)}\} = \{X_1^{(B)}, X_2^{(B)}\}^T$ ,

$\{F^{(A)}\} = \{F_1^{(A)}, F_2^{(A)}\}^T$ ,  $\{F^{(B)}\} = \{F_1^{(B)}, F_2^{(B)}\}^T$ .

而  $[Z^{(A)}]$ 、 $[Z^{(B)}]$  分别为子系统A、B的阻抗矩阵。

(9.3-19)式可综合成

$$\begin{Bmatrix} \{F^{(A)}\} \\ \{F^{(B)}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [Z^{(A)}] & \\ & [Z^{(B)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X^{(A)}\} \\ \{X^{(B)}\} \end{Bmatrix}. \quad (9.3-20)$$

子系统A、B之间的位移相容与力的平衡条件为

$$\begin{aligned} \{X^{(A)}\} &= \{X^{(B)}\} = \{X\}, \\ \{F^{(A)}\} + \{F^{(B)}\} &= \{F\}. \end{aligned} \quad (9.3-21)$$

其中

$$\{X\} = \{X_1, X_2\}^T, \quad \{F\} = \{F_1, F_2\}^T.$$

以上两式可归纳成“约束方程”

$$\begin{cases} \{X^{(A)}\} \\ \{X^{(B)}\} \end{cases} = \begin{cases} \{X\} \\ \{X\} \end{cases}, \quad (9.3-22)$$

$$((1) : (1)) \begin{cases} \{F^{(A)}\} \\ \{F^{(B)}\} \end{cases} = \{F\}.$$

将(9.3-22)式代入(9.3-20)式, 消去 $\{\{F^{(A)}\}, \{F^{(B)}\}\}^T$ 及 $\{\{X^{(A)}\}, \{X^{(B)}\}\}^T$ , 可得整体系统的运动方程

$$\begin{aligned} \{F\} &= ((1) : (1)) \begin{bmatrix} \{Z^{(A)}\} \\ \{Z^{(B)}\} \end{bmatrix} \begin{cases} \{X\} \\ \{X\} \end{cases} \\ &= (\{Z^{(A)}\} + \{Z^{(B)}\})\{X\}, \end{aligned} \quad (9.3-23)$$

或

$$\{F\} = \{Z\}\{X\}. \quad (9.3-24)$$

式中

$$\{Z\} = \{Z^{(A)}\} + \{Z^{(B)}\}, \quad (9.3-25)$$

为系统的阻抗矩阵.

在自由振动情况下,  $\{F\} = 0$ , 由(9.3-24)得

$$\{Z\}\{X\} = \{0\}. \quad (9.3-26)$$

由于 $\{X\}$ 必须为非零向量, 因而得系统的自然频率方程为

$$\det\{Z\} = 0. \quad (9.3-27)$$

上述方法称为动刚度综合法.

如果采用子系统的导纳矩阵表达运动方程

$$\{X^{(A)}\} = \{H^{(A)}\}\{F^{(A)}\}, \quad \{X^{(B)}\} = \{H^{(B)}\}\{F^{(B)}\}$$

其中 $\{H^{(A)}\}$ 、 $\{H^{(B)}\}$ 分别为子系统A、B的导纳矩阵. 类似上述推导, 可得整体系统的运动方程为

$$\{X\} = \{H\}\{F\}, \quad (9.3-28)$$

式中

$$\{H\} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}. \quad (9.3-29)$$

(9.3-29)式为系统的导纳矩阵, 其元素为

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \{H_{11}^{(A)}(H_{11}^{(B)}H_{22}^{(B)} - (H_{12}^{(B)})^2) \\
 &\quad + H_{11}^{(B)}(H_{11}^{(A)}H_{22}^{(A)} - (H_{12}^{(A)})^2)\} / \Delta(\omega), \\
 H_{12} &= \{H_{12}^{(A)}(H_{11}^{(B)}H_{22}^{(B)} - H_{12}^{(A)}H_{12}^{(B)}) \\
 &\quad + H_{12}^{(B)}(H_{11}^{(A)}H_{22}^{(A)} - H_{12}^{(A)}H_{12}^{(B)})\} / \Delta(\omega), \\
 H_{22} &= \{H_{22}^{(A)}(H_{11}^{(B)}H_{22}^{(B)} - (H_{12}^{(B)})^2) \\
 &\quad + H_{22}^{(B)}(H_{11}^{(A)}H_{22}^{(A)} - (H_{12}^{(A)})^2)\} / \Delta(\omega), \\
 H_{21} &= H_{12}.
 \end{aligned} \tag{9.3-30}$$

而

$$\begin{aligned}
 \Delta(\omega) &= \begin{vmatrix} H_{11}^{(A)} + H_{11}^{(B)} & H_{12}^{(A)} + H_{12}^{(B)} \\ H_{21}^{(A)} + H_{21}^{(B)} & H_{22}^{(A)} + H_{22}^{(B)} \end{vmatrix} \\
 &= \det((H^{(A)}) + (H^{(B)})),
 \end{aligned} \tag{9.3-31}$$

显然， $\Delta(\omega) = 0$ 为系统的频率方程。

上述方法称为动柔度综合法。

现在假设各子系统除了相互联接的坐标以外，还有其它坐标也纳入考虑，如图9.3-10(a)所示的系统由A、B两个子系统联接

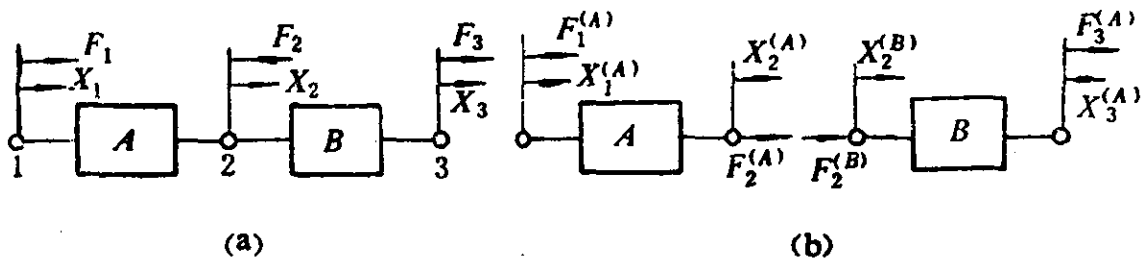


图 9.3-10

而成。子系统的阻抗形式的运动方程为

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} F_1^{(A)} \\ F_2^{(A)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11}^{(A)} & Z_{12}^{(A)} \\ Z_{21}^{(A)} & Z_{22}^{(A)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(A)} \\ X_2^{(A)} \end{Bmatrix}, \\
 \begin{Bmatrix} F_2^{(B)} \\ F_3^{(B)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{22}^{(B)} & Z_{23}^{(B)} \\ Z_{32}^{(B)} & Z_{33}^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2^{(B)} \\ X_3^{(B)} \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{9.3-32}$$

将上两式综合起来，得

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(A)} \\ F_2^{(A)} \\ F_2^{(B)} \\ F_3^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{11}^{(A)} & Z_{12}^{(A)} & 0 & 0 \\ Z_{21}^{(A)} & Z_{22}^{(A)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{22}^{(B)} & Z_{23}^{(B)} \\ 0 & 0 & Z_{32}^{(B)} & Z_{33}^{(B)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(A)} \\ X_2^{(A)} \\ X_2^{(B)} \\ X_3^{(B)} \end{Bmatrix} \quad (9.3-33)$$

在联接点 2 处，位移相容条件为

$$X_2^{(A)} = X_2^{(B)} = X_2; \quad (9.3-34)$$

力的平衡条件为

$$F_2 = F_2^{(A)} + F_2^{(B)}. \quad (9.3-35)$$

在 1、3 端点，分别有

$$X_1^{(A)} = X_1, \quad F_1^{(A)} = F_1; \quad (9.3-36)$$

$$X_3^{(B)} = X_3, \quad F_3^{(B)} = F_3.$$

将(9.3-34)~(9.3-36)式综合成为矩阵形式，得

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(A)} \\ X_2^{(A)} \\ X_2^{(B)} \\ X_3^{(B)} \end{Bmatrix} \quad (9.3-37)$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^{(A)} \\ F_2^{(A)} \\ F_2^{(B)} \\ F_3^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (9.3-38)$$

将以上两式代入(9.3-33)，得整体系统的方程

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_{11}^{(A)} & Z_{12}^{(A)} & 0 & 0 \\ Z_{21}^{(A)} & Z_{22}^{(A)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{22}^{(B)} & Z_{23}^{(B)} \\ 0 & 0 & Z_{32}^{(B)} & Z_{33}^{(B)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Z_{11}^{(A)} & Z_{12}^{(A)} & 0 \\ Z_{21}^{(A)} & Z^{(B)} + Z_{22}^{(B)} & Z_{23}^{(B)} \\ 0 & Z_{32}^{(B)} & Z_{33}^{(B)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}. \quad (9.3-39)$$

上式表明，整体系统的阻抗矩阵等于所有子系统的阻抗矩阵按结点相叠加的结果。这一结论具有普遍性，对于多个子结构互相联结的整体系统和对结合点由多个坐标联结的情况，以及各子系统除了相互联结的坐标以外尚有多个其它坐标的情况，上述结论都适用。

**例9.12** 图9.3-11(a)所示系统为一弯曲刚度为 $EI$ 的柔性杆，其分布质量不计，而端部联接一集中质块 $m$ ，该质块为边长为 $2a$ 的正方形，对于其中心的转动惯量为 $I_0$ ，系统在平面内运动，试导出频率方程。

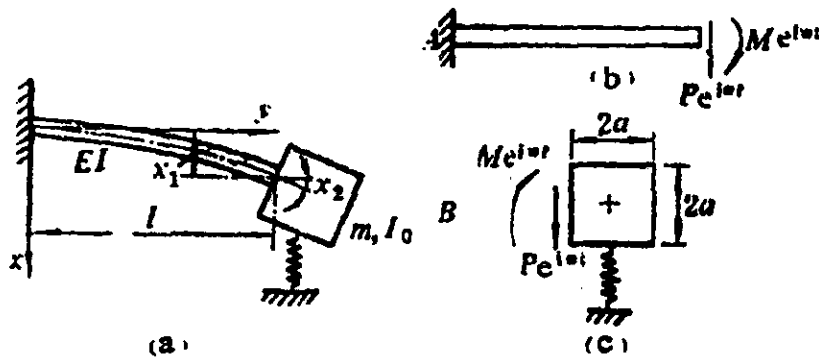


图 9.3-11

**解：**将原系统分解成 $A$ 、 $B$ 两个子系统，如图9.3-11(b)、(c)所示，它们由结合点处的位移 $x_1(t)$ 及转角 $x_2(t)$ 两坐标相联接，它们分别对应于结合点的剪力 $P(t)$ 和弯矩 $M(t)$ 。下面先求出各子系统的导纳矩阵。

设 $x(y, t)$ 为柔性杆在坐标 $y$ 处的挠度，则对于子系统 $A$ ，从材料力学可知，其弯曲变形方程为

$$P(t)(l - y) + M(t) = EI \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2},$$

或



$$\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial y^2} = \frac{P(t)}{EI}(l-y) + \frac{M(t)}{EI}.$$

积分之，得

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial y} = \frac{P(t)}{EI}\left(ly - \frac{y^2}{2}\right) + \frac{M(t)}{EI}y + c_1. \quad (a)$$

由边界条件 $(\partial x(y,t)/\partial y)|_{y=0} = 0$ 可确定 $c_1 = 0$ ，对(a)式再积分，得

$$x(y,t) = \frac{P(t)}{EI}\left(\frac{ly^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right) + \frac{M(t)y^2}{2EI} + c_2. \quad (b)$$

由边界条件 $x(y,t)|_{y=0} = 0$ 可确定 $c_2 = 0$ 。

根据(a)、(b)两式可求出子系统A在结合点的力与位移的关系

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(y,t)|_{y=l} = \frac{lP(t)}{3EI} + \frac{l^2M(t)}{2EI}, \\ x_2(t) &= \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=l} = \frac{l^2P(t)}{2EI} + \frac{lM(t)}{EI}, \end{aligned}$$

对上两式取Fourier变换可导出系统的导纳方程

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P(\omega) \\ M(\omega) \end{Bmatrix},$$

故导纳矩阵为

$$\{H^{(A)}\} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}. \quad (c)$$

对子系统B，按牛顿定律可写出

$$P(t) = m[\ddot{x}_1(t) + a\ddot{x}_2(t)],$$

$$M(t) - aP(t) = I_0\ddot{x}_2(t).$$

对上式取Fourier变换，同理可导出

$$(H^{(B)}) = \begin{pmatrix} -\frac{I_0 + ma^2}{mI_0\omega^2} & \frac{a}{I_0\omega^2} \\ \frac{a}{I_0\omega^2} & -\frac{1}{I_0\omega^2} \end{pmatrix} \quad (d)$$

根据(9.3-31)式, 可写出系统的频率方程

$$\Delta(\omega) = \det((H^{(A)}) + (H^{(B)}))$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{l}{3EI} - \frac{I_0 + ma^2}{mI_0\omega^2} & \frac{l^2}{2EI} + \frac{a}{I_0\omega^2} \\ \frac{l^2}{2EI} + \frac{a}{I_0\omega^2} & \frac{l}{EI} - \frac{1}{I_0\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

展开得

$$(2lmI_0\omega^2 - 3EI(I_0 + ma^2))(2lI_0\omega^2 - 2EI) - (3l^2I_0\omega^2 + 6EIa)(l^2mI_0\omega^2 + 2EIma) = 0.$$

### 3. 子系统引起主系统振动特性的变化

如图9.3-12所示, 设附加子系统B可通过一个或几个坐标与原系统A相联接。将原系统的坐标分为与附加子系统相连接的坐标 $\{X\}_i$ 和非连接的坐标 $\{X\}_j$ , 那么, 用阻抗矩阵表示的原系

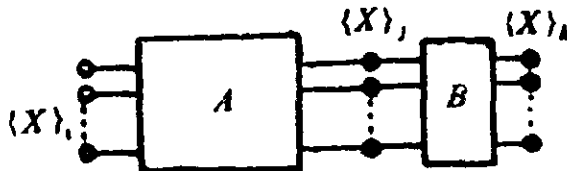


图 9.3-12

统A的运动方程为

$$\begin{bmatrix} (Z^{(A)})_{ii} & (Z^{(A)})_{ij} \\ (Z^{(A)})_{ji} & (Z^{(A)})_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X^{(A)}\}_i \\ \{X^{(A)}\}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^{(A)}\}_i \\ \{F^{(A)}\}_j \end{Bmatrix} \quad (9.3-40)$$

用阻抗矩阵表示的附加子系统B的运动方程为

$$(Z^{(B)})_{jj}\{X^{(B)}\}_j = \{F^{(B)}\}_j. \quad (9.3-41)$$

按整体系统的阻抗矩阵是所有子系统阻抗矩阵按结点叠加的原则, 子系统B附加在原系统A上后, 整体系统的阻抗矩阵为

$$\begin{aligned} \{Z\} &= \begin{bmatrix} \{Z^{(A)}\}_{i,i} & \{Z^{(A)}\}_{i,j} \\ \{Z^{(A)}\}_{j,i} & \{Z^{(A)}\}_{j,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \{Z^{(B)}\}_{j,j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \{Z^{(A)}\}_{i,i} & \{Z^{(A)}\}_{i,j} \\ \{Z^{(A)}\}_{j,i} & \{Z^{(A)}\}_{j,j} + \{Z^{(B)}\}_{j,j} \end{bmatrix}, \quad (9.3-42) \end{aligned}$$

令  $\det\{Z\} = 0$ ，即得系统的频率方程。

在实际工程中，主系统和子系统的运动方程往往以其导纳矩阵  $\{H^{(A)}\}$ 、 $\{H^{(B)}\}$  表示，而由  $\{H\} = \{Z\}^{-1}$  关系可推出主系统在附加子系统后所得整体系统的导纳矩阵

$$\begin{aligned} \{H\} &= \begin{bmatrix} \{H\}_{i,i} & \{H\}_{i,j} \\ \{H\}_{j,i} & \{H\}_{j,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{H^{(A)}\}_{i,i} & \{H^{(A)}\}_{i,j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -\{H^{(A)}\}_{i,i} & -\{H^{(A)}\}_{i,j} \\ \{H^{(B)}\}_{j,i} & \{H^{(B)}\}_{j,j} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} (\{H^{(B)}\}_{j,j} + \{H^{(A)}\}_{j,j})^{-1} \{H^{(A)}\}_{j,i} & 0 \\ 0 & (\{H^{(B)}\}_{j,j} + \{H^{(A)}\}_{j,j})^{-1} \{H^{(A)}\}_{j,j} \end{bmatrix}. \quad (9.3-43) \end{aligned}$$

由导纳矩阵中任何一个元素的倒数为零，即得系统的频率方程。

## § 9.4 子系统综合法(三)——模态综合法

模态综合法也是一种子系统综合法，但是与前两节所讲的方法不同，它并不是在频域或复域中进行综合，而是在时域中利用自然坐标（主坐标）进行综合。此法首先也将整体系统分解成若干个子系统，然后求得各子系统的模态参数，将各子系统的振动特性用自然坐标表达出来，最后根据各子系统连接界面的约束条件，建立总体系统的以自然坐标表示的运动方程式，从而可求出总体系统的模态参数。

### 9.4.1 模态综合法的基本步骤

#### 1. 建立各子系统的运动方程, 计算子系统的模态参数

对整体系统根据具体情况分解为若干个子系统, 导出各子系统的运动微分方程。设第  $r$  个子系统的运动方程为

$$\{m\}_r \{\ddot{q}(t)\}_r + \{k\}_r \{q(t)\}_r = \{Q(t)\}_r, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (9.4-1)$$

其中,  $m$  为分解成子系统的个数。这里仅讨论无阻尼情况。

求解(9.4-1)方程对应的特征值问题, 分别得到各子系统的模态矩阵  $\{u\}_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$ 。

#### 2. 将子系统的运动方程从物理坐标变换到自然坐标

以  $\{u\}_r$  为变换矩阵, 即

$$\{q(t)\}_r = \{u\}_r \{\eta(t)\}_r; \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (9.4-2)$$

对方程(9.4-1)进行坐标变换, 整理后得

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ M. \\ \_ \end{array} \right]_r \{\ddot{\eta}(t)\}_r + \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ K. \\ \_ \end{array} \right]_r \{\eta(t)\}_r = \{N(t)\}_r, \\ r = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (9.4-3)$$

其中  $\left[ \begin{array}{c} \backslash \\ M. \\ \_ \end{array} \right]_r$ 、 $\left[ \begin{array}{c} \backslash \\ K. \\ \_ \end{array} \right]_r$ 、 $\{N(t)\}_r$  分别为第  $r$  个子系统的模态质量矩阵、模态刚度矩阵和激励力向量, 且有

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ M. \\ \_ \end{array} \right]_r &= \{u\}_r^T \{m\}_r \{u\}_r, \\ \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ K. \\ \_ \end{array} \right]_r &= \{u\}_r^T \{k\}_r \{u\}_r, \\ \{N(t)\}_r &= \{u\}_r^T \{Q(t)\}_r. \end{aligned} \quad (9.4-4)$$

#### 3. 建立总体系统的运动方程

将各子系统的运动方程顺序组合在一起, 得到尚未联结的整体系统的运动方程

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = \{N(t)\}, \quad (9.4-5)$$

其中

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_s]_1 & & & \\ & [M_s]_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & [M_s]_m \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_s]_1 & & & \\ & [K_s]_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & [K_s]_m \end{bmatrix},$$

$$\{\eta(t)\} = \{\{\eta(t)\}_1^T \ \{\eta(t)\}_2^T \ \dots \ \{\eta(t)\}_m^T\}^T,$$

$$\{N(t)\} = \{\{N(t)\}_1^T \ \{N(t)\}_2^T \ \dots \ \{N(t)\}_m^T\}^T.$$

上述 $\{\eta(t)\}$ 的各组坐标 $\{\eta(t)\}_i$ 之间不是独立的,由于各个子系统之间相互联接,因而在各个坐标之间形成了一定的约束条件,即相容性条件。我们只考虑各物理坐标之间存在线性相容性条件的情况,其中包括两个坐标刚性联接的情况。

将各物理坐标之间的线性相容性条件归纳起来,可得矩阵形式的相容方程

$$[J]\{q(t)\} = \{0\}, \quad (9.4-6)$$

其中 $\{q(t)\} = \{\{q(t)\}_1^T \ \{q(t)\}_2^T \ \dots \ \{q(t)\}_m^T\}^T$ ,将(9.4-2)式代入上式,得

$$[J](u)\{\eta(t)\} = \{0\}, \quad (9.4-7)$$

或

$$[S]\{\eta(t)\} = \{0\}, \quad (9.4-8)$$

式中

$$\{S\} = \{J\}\{u\} = \{J\} \begin{bmatrix} \{u\}_1 \\ \{u\}_2 \\ \dots \\ \{u\}_n \end{bmatrix}. \quad (9.4-9)$$

(9.4-8)式即关于自然坐标的相容方程。

将(9.4-5)式与(9.4-8)式联立起来,即消去方程(9.4-5)中的不独立坐标,便得到子系统联接后整体系统的运动方程。

设 $\{\eta(t)\}$ 分割为不独立坐标 $\{\alpha(t)\}$ 和独立坐标 $\{\beta(t)\}$ ,同时将 $\{S\}$ 也作相应的分割,则(9.4-8)式可写为

$$\{[S]_\alpha : [S]_\beta\} \begin{Bmatrix} \{\alpha(t)\} \\ \dots \\ \{\beta(t)\} \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (9.4-10)$$

展开,得

$$\begin{aligned} [S]_\alpha \{\alpha(t)\} &= -[S]_\beta \{\beta(t)\}, \\ \{\alpha(t)\} &= -[S]_\alpha^{-1} [S]_\beta \{\beta(t)\}, \end{aligned} \quad (9.4-11)$$

从而有

$$\begin{Bmatrix} \{\alpha(t)\} \\ \{\beta(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[S]_\alpha^{-1} [S]_\beta \\ (I) \end{bmatrix} \{\beta(t)\}. \quad (9.4-12)$$

即

$$\{\eta(t)\} = \{R\}\{\beta(t)\}, \quad (9.4-13)$$

式中

$$\{R\} = \begin{bmatrix} -[S]_\alpha^{-1} [S]_\beta \\ (1) \end{bmatrix}. \quad (9.4-14)$$

如果由物理坐标 $\{q(t)\}$ ,变换到自然坐标 $\{\eta(t)\}$ ,是第一次坐标变换,那么由(9.4-13)式消去不独立坐标则称为第二次坐标变换。其变换矩阵为 $\{R\}$ ,由此可得整体系统中以独立自然坐标 $\{\beta(t)\}$ 表达的运动方程

$$\{M\} \{\ddot{\beta}(t)\} + \{K\} \{\beta(t)\} = \{F(t)\}, \quad (9.4-15)$$

式中

$$\{M\} = \{R\}^T \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ M \\ / \end{array} \right] \{R\};$$

$$[K] = [R]^T [K] [R]; \quad (9.4-16)$$

$$\{F(t)\} = [R]^T \{N(t)\}.$$

求解方程(9.4-15), 得到整体系统的自然频率  $\omega_i$ 、模态向量  $\{u^{(i)}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  以及响应  $\{\beta(t)\}$ 。

4. 从自然坐标返回物理坐标, 得到物理坐标下系统的响应  
相继通过坐标变换(9.4-13)和(9.4-2)式, 可求得各子系统的物理坐标表达的模态和响应。

### 9.4.2 联接界面上的边界条件

一个振动系统按诸联接界面分解为若干个子系统之后, 联接界面就成了各子系统的边界。对于此边界条件可以有不同的处理方法, 主要可分为固定界面法和自由界面法。

固定界面法是将子系统之间的联接界面处理为固定, 即把子

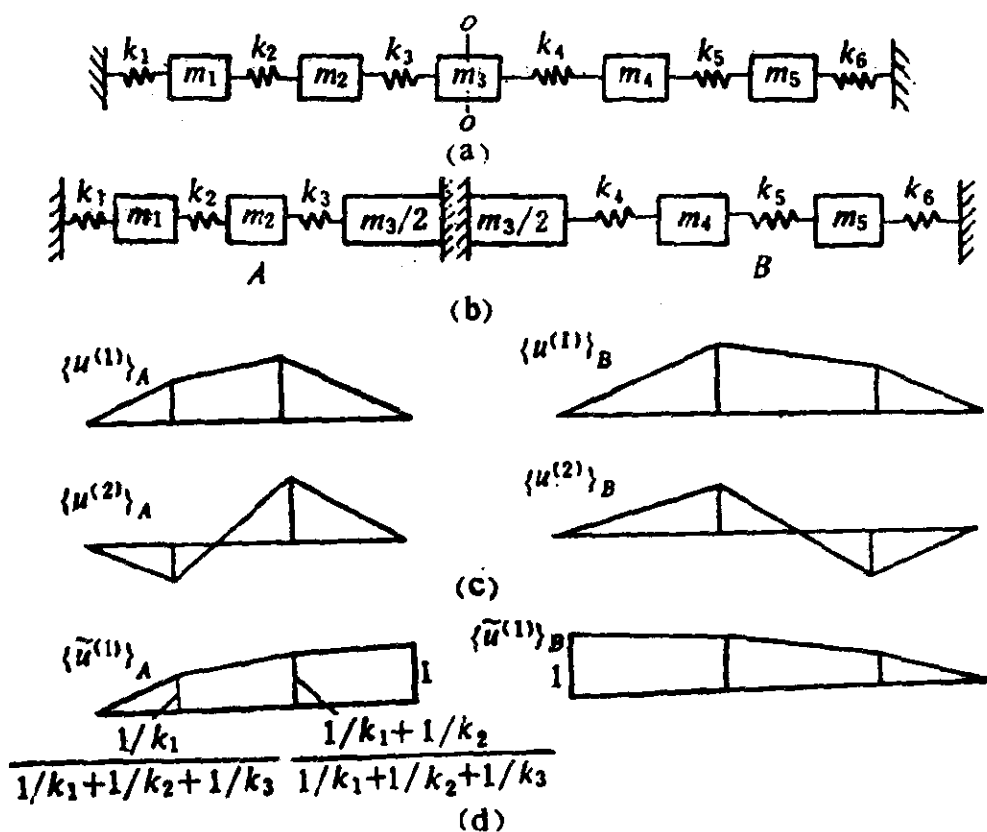


图 9.4-1

系统在联接界面上的自由度全部固定。例如图9.4-1(a)所示的五自由度系统，将它按中间界面o-o划分为两个子系统A与B，如图9.4-1(b)所示，在界面上两个子系统均视为固定边界。这样两个子系统均各有两个主模态。但实际的系统在界面处并未固定，为了反映这一事实，在子系统中，除了主模态以外，还必须将所谓“约束模态”也加以考虑。

约束模态即是将子系统联接界面上被约束（固定）的自由度逐一释放，而假设该自由度上有单位强迫静态位移后，所获得的该子系统的静位移向量。例如，对图9.4-1(b)所示的两个子系统的模态矩阵 $\{u\}_A$ 、 $\{u\}_B$ ，应该分别由其主模态向量 $\{u^{(1)}\}_A$ 、 $\{u^{(2)}\}_A$ ； $\{u^{(1)}\}_B$ 、 $\{u^{(2)}\}_B$ （图9.4-1(c)）与约束模态向量 $\{\tilde{u}^{(1)}\}_A$ 、 $\{\tilde{u}^{(1)}\}_B$ （图9.4-1(d)）组成，即

$$\{u\}_A = [\{u^{(1)}\}_A \quad \{u^{(2)}\}_A \quad \{\tilde{u}^{(1)}\}_A]; \quad (9.4-17)$$

$$\{u\}_B = [\{u^{(1)}\}_B \quad \{u^{(2)}\}_B \quad \{\tilde{u}^{(1)}\}_B].$$

自由界面模态综合法是将子系统之间的联接界面按自由端处理，这样，各子系统联接界面上的自由度完全自由。如果除子系

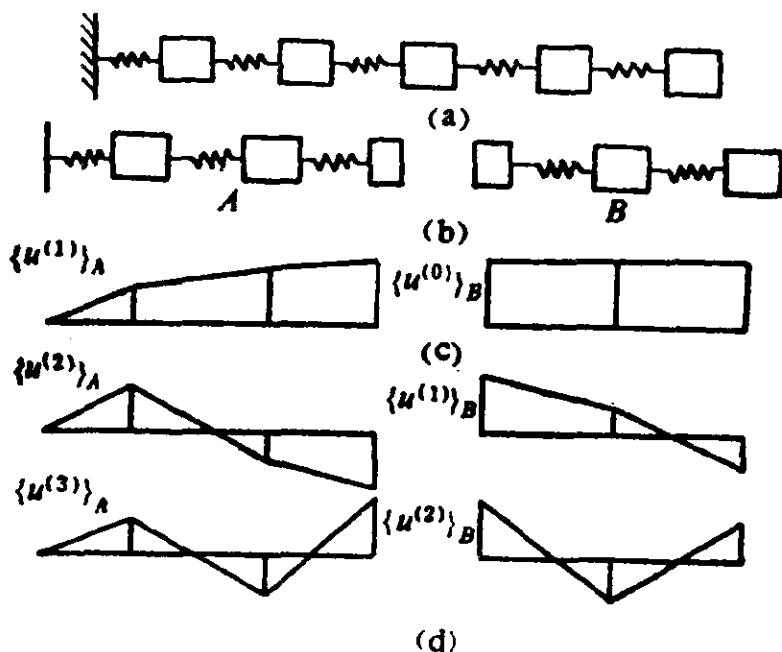


图 9.4-2



统之间的连接界面外，子系统没有其它约束，则子系统的模态矩阵中除包括子系统的主模态外，还应包括子系统的刚体运动模态。

对于图9.4-2(a)所示系统采用自由界面模态综合法时，可将它们划分为图9.4-2(b)所示的两个子系统A与B。由于子系统A具有整体系统原有的约束（固定端），故其模态矩阵 $(u)_A$ 仅含有其三阶主模态 $\{u^{(1)}\}_A$ 、 $\{u^{(2)}\}_A$ 、 $\{u^{(3)}\}_A$ ，而子系统B的模态矩阵 $(u)_B$ 包括其刚体模态 $\{u^{(0)}\}_B$ 及二阶主模态 $\{u^{(1)}\}_B$ 、 $\{u^{(2)}\}_B$ ，因此它们的模态矩阵为

$$\begin{aligned} (u)_A &= \{ \{u^{(1)}\}_A \ \{u^{(2)}\}_A \ \{u^{(3)}\}_A \}; \\ (u)_B &= \{ \{u^{(0)}\}_B \ \{u^{(1)}\}_B \ \{u^{(2)}\}_B \}. \end{aligned} \quad (9.4-18)$$

例9.13 用自由界面模态综合法求图9.4-3所示系统的自然频率与模态向量。

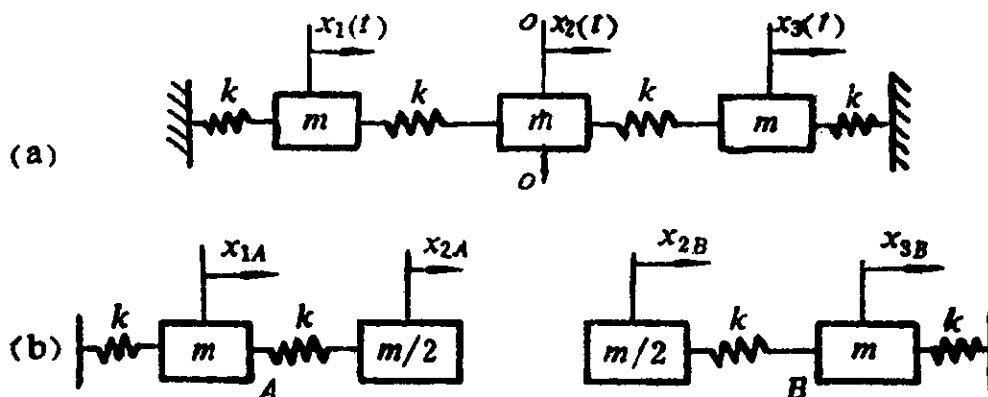


图 9.4-3

解：以中间质量的中心截面o-o为界面，将原系统分解为图9.4-3(b)所示的两个子系统A与B。子系统A的运动方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_A + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (a)$$

求解方程(a)对应的特征值问题，得到其模态矩阵为

$$(u)_A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

引入变换

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_A = (u)_A \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}_A, \quad (b)$$

将方程(a)变为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix}_A + \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2})k & 0 \\ 0 & (2 + \sqrt{2})k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (c)$$

对子系统B施以同样步骤, 得

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{Bmatrix}_B + \begin{bmatrix} (2 + \sqrt{2})k & 0 \\ 0 & (2 - \sqrt{2})k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (d)$$

将方程(c)、(d)组合起来, 得

$$\begin{bmatrix} \underline{M} \end{bmatrix} \{ \ddot{\eta} \} + \begin{bmatrix} \underline{K} \end{bmatrix} \{ \eta \} = \{ 0 \}, \quad (e)$$

式中

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{M} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & m & \\ & & & m \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \underline{K} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2})k & & & \\ & (2 + \sqrt{2})k & & \\ & & (2 + \sqrt{2})k & \\ & & & (2 - \sqrt{2})k \end{bmatrix}, \\ \{ \eta \} &= \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}_A \\ \begin{Bmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix}_B \end{Bmatrix} = \{ \eta_{1A} \ \eta_{2A} \ \eta_{2B} \ \eta_{3B} \}^T. \end{aligned}$$

因为子系统A与B在结合面处呈刚性结合, 故相容条件为

$$x_{2A} = x_{2B},$$

写成物理坐标中的矩阵方程, 得

$$\{0, 1, -1, 0\} \begin{Bmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \\ x_{2B} \\ x_{3B} \end{Bmatrix} = 0,$$

或

$$(J)\{x\} = 0, \quad (f)$$

式中

$$(J) = \{0, 1, -1, 0\},$$

$$\{x\} = \{\{x\}_A^T, \{x\}_B^T\}^T = \{x_{1A}, x_{2A}, x_{2B}, x_{3B}\}^T.$$

根据(9.4-9)式, 得

$$\begin{aligned} (S) &= (J)(u) = (J) \begin{bmatrix} (u)_A \\ (u)_B \end{bmatrix} \\ &= \{0, 1, -1, 0\} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ &= \{1, 1, -1, -1\}, \end{aligned} \quad (g)$$

因为整体系统中三个独立坐标, 故可将(S)分割为

$$(S) = \{(S)_a : (S)_\beta\}, \quad (h)$$

其中(S)<sub>a</sub> = 1, (S)<sub>β</sub> = {1, -1, -1}, 从而按(9.4-14)式可得

$$(R) = \begin{bmatrix} -(S)_a^{-1}(S)_\beta \\ (1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(9.4-13)式成为

$$\{\eta\} = (R) \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = (R)\{\beta\}, \quad (i)$$

代入(e)式, 得以坐标 $\{\beta\}$ 表达的运动方程

$$m \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \\ \ddot{\beta}_3 \end{Bmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}-2 & 2(\sqrt{2}-2) & 2-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 & 2-\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (j)$$

求解上述方程对应的特征值问题, 得

$$\omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})k/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{2k/m},$$

$$\omega_3 = \sqrt{(2+\sqrt{2})k/m},$$

$$\{u^{(1)}\}_\beta = \{0 \ 1 \ 0\}^T, \quad \{u^{(2)}\}_\beta = \{1 \ 1 \ -1\},$$

$$\{u^{(3)}\}_\beta = \{1 \ 0 \ 1\}^T.$$

根据(b)式和(i)式可将上述结果变换到物理坐标下的模态向量 $\{u^{(i)}\}_s$ ,  $i=1,2,3$ .

因为

$$\{x\} = \{u\}\{\eta\} = \{u\}\{R\}\{\beta\}, \quad (k)$$

所以

$$\{u\}_s = \{u\}\{u\}_\beta = \{u\}\{R\}\{u\}_\beta, \quad (l)$$

将 $\{u^{(i)}\}_\beta$ ,  $i=1,2,3$ 分别代入上式, 得

$$\begin{Bmatrix} u_{1A}^{(1)} \\ u_{2A}^{(1)} \\ u_{2B}^{(1)} \\ u_{3B}^{(1)} \end{Bmatrix}_s = \{u^{(1)}\}_s = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{1A}^{(2)} \\ u_{2A}^{(2)} \\ u_{2B}^{(2)} \\ u_{3B}^{(2)} \end{Bmatrix}_s = \{u^{(2)}\}_s = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{1A}^{(3)} \\ u_{2A}^{(3)} \\ u_{2B}^{(3)} \\ u_{3B}^{(3)} \end{Bmatrix} = \{u^{(3)}\}_z = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} \quad (m)$$

由于  $x_1 = x_{1A}$ ,  $x_{2A} = x_{2B} = x_2$ ,  $x_{3B} = x_3$ , 所以有  $u_1 = u_{1A}$ ,  $u_{2A} = u_{2B} = u_2$ ,  $u_{3B} = u_3$ . 据此, 系统的模态向量为(即在  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  坐标下的模态向量)

$$\{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}, \quad \{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad \{u^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}.$$

读者可自行验证, 上述结果与直接采用第四章的方法求得的结果相同。

实际上模态综合法往往与“模态截取”相结合, 即略去了子系统的高阶模态, 仅保留对工程问题最有意义的低阶模态, 使总体系统的运动方程数目大大减少, 而所得结果是原来问题的近似值。参加综合的模态阶数, 视计算要求的精度、

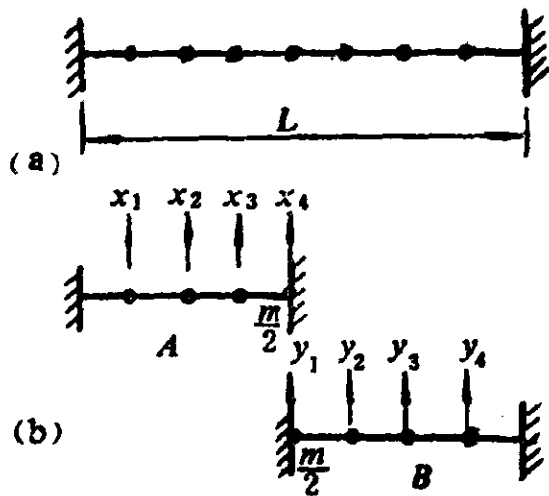


图 9.4-4

工程中的实际情况而选取。下面再举一个例子作进一步说明。

**例9.14** 图9.4-4(a)所示为一长  $L$ , 张力为  $T$  的弦, 在 8 等分点上有 7 个集中质量  $m$ , 弦的质量不计, 试用固定界面综合法求系统的前两阶自然频率。

**解:** 将原系统划分为两个子系统  $A$  与  $B$ , 如图 9.4-4(b) 所示, 子系统  $A$  的运动方程为

$$[m]_A \ddot{\{x\}}_A + [k]_A \{x\}_A = \{0\}, \quad (a)$$

$$\text{其中 } (k)_A = \frac{8T}{L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (m)_A = m \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\{x\}_A = \{x_1, x_2, x_3\}^T.$$

求解方程(a)对应的特征值问题, 得其三阶模态向量为  $\{u^{(1)}\}_A = \{1, \sqrt{2}, 1\}^T$ ,  $\{u^{(2)}\}_A = \{1, 0, -1\}^T$ ,  $\{u^{(3)}\}_A = \{1, -\sqrt{2}, 1\}^T$ , 取其前两阶模态参予综合,

$$(\{u^{(1)}\}_A, \{u^{(2)}\}_A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中最后一行零元素表示固定界面不允许有位移, 即  $x_4 = 0$ . 子系统  $A$  的模态矩阵中应纳入约束模态: 释放右端界面的约束, 使  $x_4 = 1$ , 则相应地产生静态位移  $x_1 = 1/4$ ,  $x_2 = 2/4$ ,  $x_3 = 3/4$ , 它们便构成约束模态  $\{\tilde{u}^{(1)}\}_A = \{1/4, 2/4, 3/4, 1\}^T$ , 故子系统  $A$  的模态矩阵为

$$(u)_A = (\{u^{(1)}\}_A, \{u^{(2)}\}_A, \{\tilde{u}^{(1)}\}_A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ \sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对子系统  $A$ , 当固定边界条件释放后, 系统的刚度矩阵和质量矩阵为

$$(k)_A = \frac{8T}{L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(m)_A = m \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0.5 \end{pmatrix}.$$

子系统  $A$  的运动方程为

$$[m]_A \{\ddot{x}\}_A + [k]_A \{x\}_A = \{0\}, \quad (b)$$

其中  $\{x\}_A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$ , 采用

$$\{x\}_A = [u]_A \{\eta\}_A, \quad (c)$$

其中  $\{\eta\}_A = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}_A^T$ , 对 (b) 进行变换, 得

$$[m_*]_A \{\ddot{\eta}\}_A + [k_*]_A \{\eta\}_A = \{0\}, \quad (d)$$

式中

$$[m_*]_A = [u]_A^T [m]_A [u]_A = m \begin{bmatrix} 4 & 0 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{8} \end{bmatrix},$$

$$[k_*]_A = [u]_A^T [k]_A [u]_A = \frac{8T}{L} \begin{bmatrix} 8-4\sqrt{2} & & \\ & 4 & \\ & & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

对于子系统  $B$ , 亦可作同样的处理, 利用与子系统  $A$  的相似性 可得到

$$[m_*]_B \{\ddot{\eta}\}_B + [k_*]_B \{\eta\}_B = \{0\}, \quad (e)$$

式中

$$[m_*]_B = m \begin{bmatrix} \frac{11}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$(k_s)_B = \frac{8T}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & & & \\ & 4 & & & \\ & & 8 - 4\sqrt{2} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix},$$

$$\{\eta\}_B = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}_B^T,$$

由(d)、(e)式可构成整体系统的运动方程

$$[\underline{M}] \{\ddot{\eta}\} + [\underline{K}] \{\eta\} = \{0\}, \quad (f)$$

式中

$$[\underline{M}] = \begin{bmatrix} (m_s)_A & \\ & (m_s)_B \end{bmatrix}, \quad [\underline{K}] = \begin{bmatrix} (k_s)_A & \\ & (k_s)_B \end{bmatrix},$$

$$\{\eta\} = \{\{\eta\}_A^T \quad \{\eta\}_B^T\}^T = \{\eta_{1A} \quad \eta_{2A} \quad \eta_{3A} \quad \eta_{1B} \quad \eta_{2B} \quad \eta_{3B}\}^T,$$

其中 $\eta_{1A}$ 、 $\eta_{2A}$ 是与子系统A的两个主模态 $\{u^{(1)}\}_A$ 、 $\{u^{(2)}\}_A$ 对应的自然坐标； $\eta_{2B}$ 、 $\eta_{3B}$ 是与子系统B的两个主模态 $\{u^{(1)}\}_B$ 、 $\{u^{(2)}\}_B$ 对应的自然坐标； $\eta_{3A}$ 、 $\eta_{1B}$ 分别是与子系统A、B的约束模态相对应的自然坐标。由于 $x_4 = y_1$ ，所以 $\eta_{3A} = \eta_{1B}$ ，因此可写出如下相容方程

$$\{\eta\} = (R)\{\beta\}, \quad (g)$$

式中

$$(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

而 $\{\beta\} = \{\eta_{1A} \quad \eta_{2A} \quad \eta_{3A} \quad \eta_{2B} \quad \eta_{3B}\}^T$ 是由 $\{\eta\}$ 中独立坐标构成的向量。

将变换(g)代入方程(f)，整理得整体系统耦合形式的运动方程

$$(M)\{\ddot{\beta}\} + (K)\{\beta\} = \{0\}, \quad (h)$$



式中

$$(M) = (R)^T \left[ \begin{array}{c} M \\ \end{array} \right] (R)$$

$$= m \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{2 - \sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{22}{8} & \frac{1}{2} & \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 - \sqrt{2}}{2} & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(K) = (R)^T \left[ \begin{array}{c} K \\ \end{array} \right] (R) = \frac{8T}{L} \begin{pmatrix} 8 - 4\sqrt{2} & & & \\ & 4 & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & 4 \\ & & & & 8 - 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

求解方程(h)对应的特征值问题, 可得到

$$\omega_1 = 0.4149 \sqrt{\frac{(8T/L)}{m}}, \quad \omega_2 = 0.7654 \sqrt{\frac{(8T/L)}{m}}.$$

对图9.4-4(a)所示的七自由度系统, 按第四章的方法直接求解,

精确解为  $\omega_1 = 0.3902 \sqrt{\frac{(8T/L)}{m}}$ ,  $\omega_2 = 0.7654 \sqrt{\frac{(8T/L)}{m}}$ . 用

模态组合法算得基频偏高6.3%, 而第二阶自然频率恰得精确解, 这是因为在模态综合中选取的参予综合的模态向量的组合恰好与原系统的, 以中点为节点的第二阶模态向量相同。

## 思 考 题

一、试判断下列叙述是否正确？如果不正确，请予以改正

1.  $n$ 自由度系统的瑞利商 $R(\{u\})$ 在各模态向量 $\{u^{(r)}\}$ ,  $r=1, 2, \dots, n$ 的邻域内均存在一个局部极小值。
2. Ritz法是对Rayleigh能量法的改进，因此与Rayleigh法一样，实际上也只是用来估算系统的基频。
3. 链状系统的振动特性由其各子系统的传递矩阵完全确定。

二、思考并回答下列问题

1. 试述子系统综合法的策略思想及其基本步骤。
2. 试述子系统综合法的优点。
3. 试比较传递矩阵法、阻抗综合法与模态综合法，指出各种方法的特点。
4. 机械阻抗作为频域内描述多自由度线性振动系统动态特性的数学模型，与时域内的运动微分方程有什么内在联系？
5. 除了本章所介绍的“机电比拟”的对应关系以外，是否还可能存在其它的对应体系？

## 习 题

9-1 用Rayleigh法求图9-1所示系统的基频，并用Dunkerley法重新求解该系统的基频，将两结果作一比较。

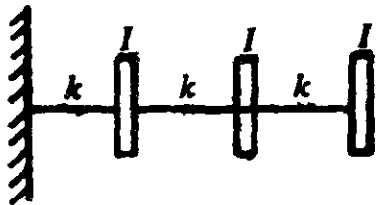


图 9-1

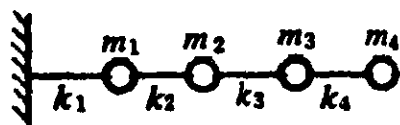


图 9-2

9-2 图9-2所示杆系统, 设  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4, k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ , 试选取模态向量  $\{u\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}^T$ , 用Rayleigh法求其基频。

9-3 用Dunkerley法求解题9-2。

9-4 选取二个向量  $\{\phi\}_1 = \{1, 2, 3, 4\}^T$  及  $\{\phi\}_2 = \{1, 4, 9, 16\}^T$ , 用Ritz法求解题9-2中系统的基频。

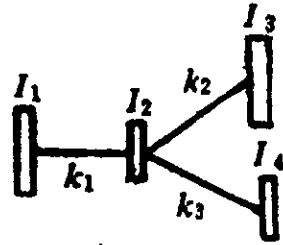


图 9-5

9-5 图9-5所示系统中,  $I_1 = 12.5I, I_2 = 5I, I_3 = 30I, I_4 = 2I, k_1 = 1 \times 10^6 k, k_2 = 1 \times 10^7 k, k_3 = 5 \times 10^6 k$ , 试用传递矩阵法求系统的基频。

9-6 用传递矩阵法求解题9-2中系统的前两阶自然频率。

9-7 图9-7所示系统,  $m_1 = m_2 = 10m, k_1 = 30k, k_2 = 20k$ , 已求出系统的基频  $\omega_1 = 10 \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 若将  $k_1$  减少20%,  $k_2$  减少10%, 试用Dunkerley法估算系统改变后的基频。



图 9-7



图 9-8

9-8 对图9-8所示系统, 用瑞利商的两种表达式求系统的基频。

9-9 用Dunkerley法求解题9-8。

9-10 设  $\{\phi\}_1 = \{1, 2, 3, 4\}^T$  及  $\{\phi\}_2 = \{0, 1, 3, 5\}^T$  分别用二种Ritz法(9.1-41与9.1-44式)求解题9-8。

9-11 试用传递矩阵法求解题9-8的前两阶自然频率。

9-12 对图9-12所示振动系统, 试根据机电类比绘出其机械网络图, 并验证相似系统的微分方程有相同形式。

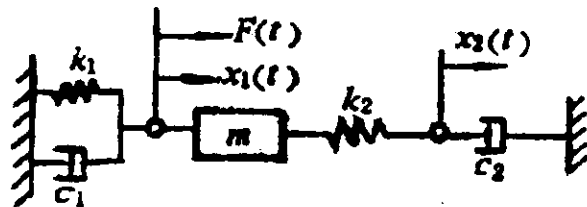


图 9-12

9-13 图9-13所示系统，试绘出机械网络图，求系统的阻抗 $F/V$ 。

9-14 有一个三自由度系统如图9-14所示，试分析比较下列三种情况下的导纳元素与阻抗元素。

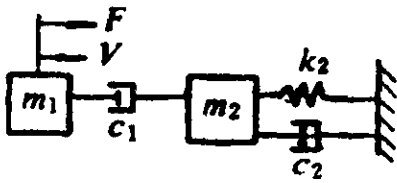


图 9-13

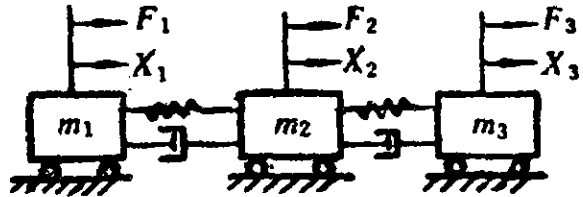


图 9-14

- 1) 仅在 $m_1$ 上作用 $F_1$ ，考虑 $x_1$ 的响应。
- 2) 仅在 $m_1$ 、 $m_2$ 上作用 $F_1$ 、 $F_2$ ，考虑 $x_1$ 、 $x_2$ 的响应。
- 3) 同时作用 $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 考虑 $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 的响应。

9-15 一个圆盘扭振系统，如图9-15所示， $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 分别为圆盘的转动惯量，在圆盘1、2之间及2、3之间轴的扭转刚度及阻尼系数分别为 $K_1$ 、 $K_2$ 、 $c_1$ 与 $c_2$ ，圆盘的阻尼系数为 $c_3$ 、 $c_4$ 与 $c_5$ ，设作用在圆盘上的扭矩 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 均为同频简谐的，试列出阻抗形式的运动方程。

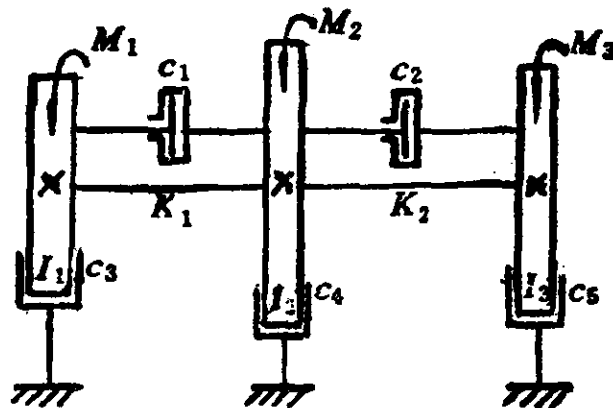


图 9-15

9-16 对例4.9中的系统，导出其阻抗矩阵。

9-17 一转子由两个具有一定弹性和阻尼的轴承支承，假设考虑系统在铅直方向的振动，其简化模型如图9-17(a)所示，设转子受简谐力作用 $F = F_1 e^{i\omega t}$ ，利用阻抗综合法，导出系统的方程，以求系统的响应 $X_1$ 、 $X_2$ 、 $X_3$ 。

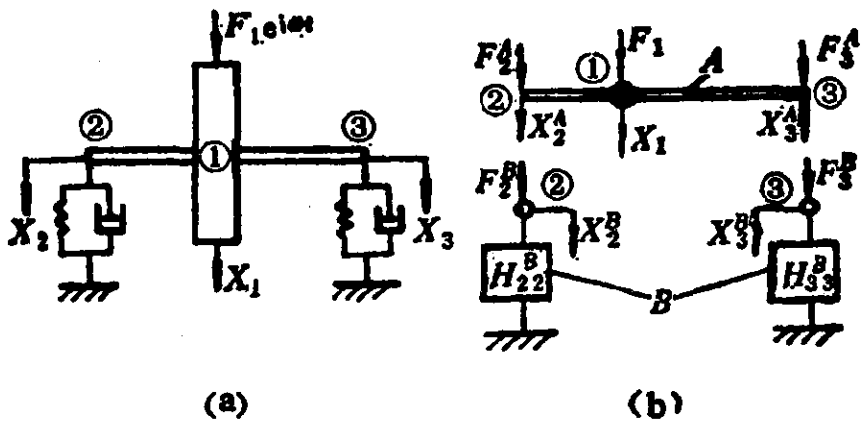


图 9-17

9-18 如图9-18所示，一个扭转振动系统，其四个圆盘的转动惯量分别为 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ ，各轴的扭转刚度为 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$ ，试用阻抗综合法导出系统的频率方程。

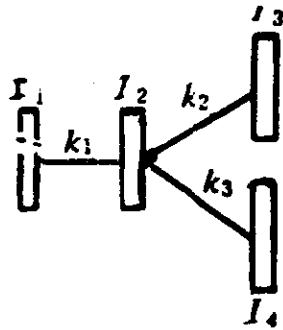


图 9-18

9-19 对图9-19中的五自由度系统，划分成两个对称的子系统，截取一阶主模态，用固定界面模态综合法求系统的基频。

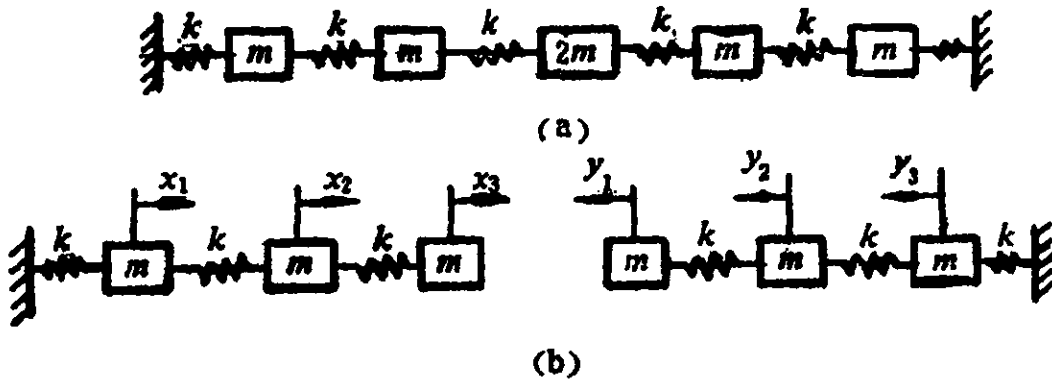


图 9-19

## 第十章 连续系统的振动及其精确解

所谓连续系统是指其质量、弹性或阻尼在空间一定区域中连续分布的系统，故又称为分布参数系统。可以说，一切真实的系统都是分布参数系统。本书前面讲的单自由度与多自由度系统都是基于集中的质块（不计弹性）与均匀的弹簧（不计质量）等理想元件而构成的，这类系统称为离散系统。离散系统应该看成是真实的连续系统的近似模型，当其近似程度不能满足实际要求时，就必须增加模型的自由度，或者采用连续模型。连续模型可以看成是离散模型当自由度无限增加时的极限。因此连续系统是具有无限多个自由度的系统。

我们知道，前述离散系统的运动方程是常微分方程组，而本章讲述的连续系统的运动方程应是偏微分方程。乍看起来，这两类系统似乎截然不相同。其实，我们在下面就会看到，这两类系统及其运动方程是十分相似的。关于离散系统的许多物理概念与性质，如自然频率、模态向量及其正交性等，在连续系统中都存在与之相对应的概念与性质。

本章讲述连续系统振动的基本概念及其精确解，主要涉及弦的横向振动，杆的纵向振动，轴的扭转振动及梁的弯曲振动。更复杂的连续体的振动问题及其近似解法将在第十一章讲述。

### § 10.1 弦的横向振动

图10.1-1所示为一段长度为 $L$ 、两端固定的弦的横向振动情

况。为了推导制约此段弦的振动的运动方程，我们首先遵循上述思路，即将一连续系统视为相应的离散系统当自由度无限增加时的极限，并由此推出弦振动的运动方程。然后再直接以连续系统的模型推导弦振动的微分方程。读者应能从这两种思路的比较中，认识到连续系统与离散系统之间的联系与差别。

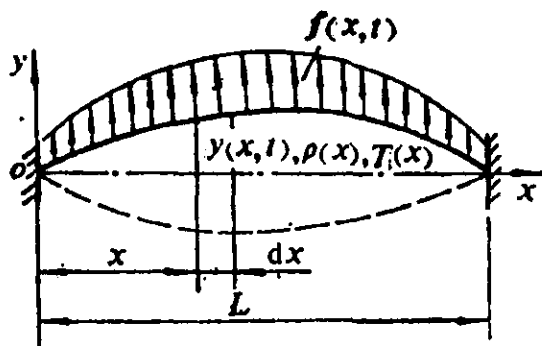


图 10.1-1

### 10.1.1 弦的横向振动的运动方程

首先，将弦的质量集中成为  $n+2$  个质点，即  $m_0, m_1, m_2, \dots, m_n, m_{n+1}$ ，它们分别分布在弦上的横坐标为  $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ ，

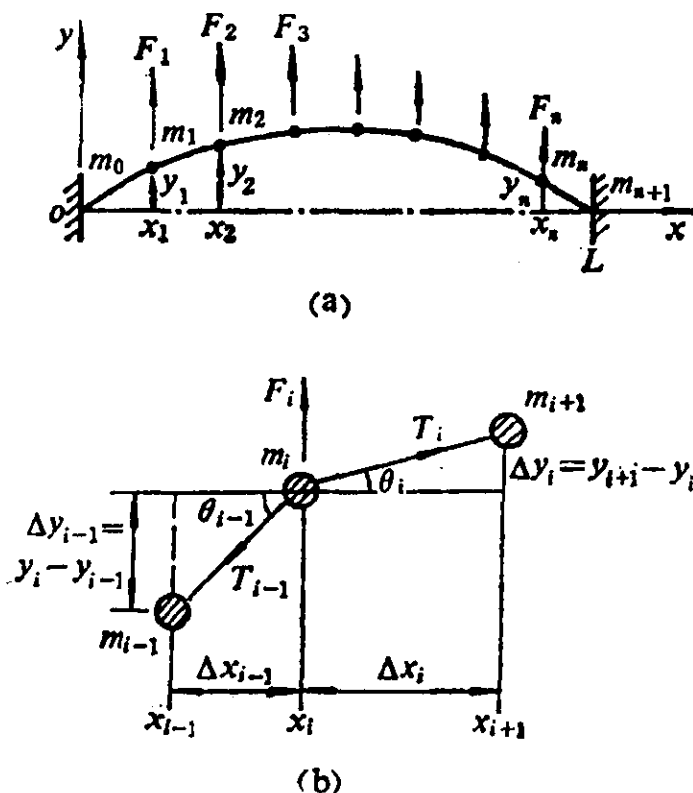


图 10.1-2

$x_n, x_{n+1} = L$  的点上, 且这些质点由没有质量只有张力的弦连接起来, 如图10.1-2(a)所示. 图中  $F_i (i=0, 1, \dots, n+1)$  表示集中在各个质点上的作用力. 我们任意取出相邻的三个质点  $m_{i-1}, m_i$  及  $m_{i+1}$  来分析, 如图10.1-2(b)所示. 在这里假定弦的振动为微幅振动, 因而以下近似是允许的: 第一, 各质点的横向距离, 即  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i (i=0, 1, \dots, n)$  在振动中保持不变; 第二, 各段弦与  $x$  轴的交角  $\theta_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$  很小, 因而  $\sin \theta_i \approx \text{tg} \theta_i = \Delta y_i / \Delta x_i$ . 基于以上假设, 可以就质点  $m_i$  列出其在  $y$  方向的运动方程,

$$T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - T_{i-1} \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + F_i = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (10.1-1)$$

即

$$\Delta \left( T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) + F_i = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

两边除以  $\Delta x_i$ , 得

$$\frac{\Delta}{\Delta x_i} \left( T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) + \frac{F_i}{\Delta x_i} = \frac{m_i}{\Delta x_i} \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (10.1-2)$$

而在弦的两端的边界条件为

$$y_0(t) = y_{n+1}(t) = 0. \quad (10.1-3)$$

现在令质点数目无限增加 ( $n \rightarrow \infty$ ), 质点之间的距离无限下降 ( $\Delta x_i \rightarrow 0$ ), 各质点的质量也相应趋近于零 ( $m_i \rightarrow 0$ ), 则上式演化为一偏微分方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \quad (10.1-4)$$

此方程在  $0 < x < L$  范围内满足. 式中

$$f(x, t) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{F_i(t)}{\Delta x_i}, \quad (10.1-5)$$

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{m_i}{\Delta x_i}. \quad (10.1-6)$$



$f(x, t)$ 和 $\rho(x)$ 分别是作用在弦上的载荷密度（单位长度上的载荷）与线密度（单位长度上的质量）。 $T(x)$ 是弦上 $x$ 处的张力。由于已假定弦的长度变化可以略去不计，因此 $T(x)$ 不随时间变化。 $y(x, t)$ 表示弦上 $x$ 处在 $t$ 时刻的横向位移量，此函数即是待求的未知函数。因为它是两个自变量（ $x$ 与 $t$ ）的多元函数，所以描述其规律的微分方程就成为偏微分方程。其边界条件成为

$$y(0, t) = y(L, t) = 0. \quad (10.1-7)$$

值得注意的是，一般说来， $y(0, t)$ 与 $y(L, t)$ 可以是时间 $t$ 的函数，即弦的两端可以按规定的规律运动。但本书只讨论两端均固定的情况。

其次，直接就连续体的情况来推导弦振动的微分方程，为此从图10.1-1所示的弦中取出长度为 $dx$ 的一小段来分析，如图10.1-3所示。

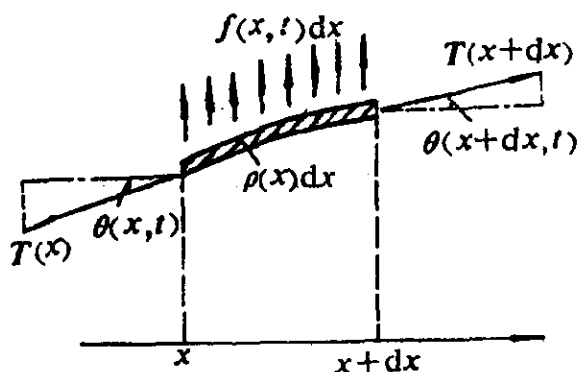


图 10.1-3

对此一小段弦列出其在 $y$ 方向上的运动方程，

$$\begin{aligned} T(x+dx)\sin\theta(x+dx, t) - T(x)\sin\theta(x, t) + f(x, t) dx \\ = \rho(x) dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

将  $T(x+dx) \approx T(x) + \frac{dT}{dx} dx$  ,

$$\sin\theta(x, t) \approx \frac{\partial y(x, t)}{\partial x},$$

$$\sin\theta(x+dx, t) \approx \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx$$

代入上式，整理，略去二阶微量，并将等式两边除以 $dx$ ，即得与(10.1-4)式完全相同的弦振动的微分方程。

### 10.1.2 弦的自由振动, 特征值问题

自由振动时 $f(x, t) = 0$ , (10.1-4)式成为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right] = \rho(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}. \quad (10.1-8)$$

边界条件仍为(10.1-7)式。

象对离散系统自由振动进行的分析一样, 我们仍然从探索“同步运动”的可能性来进行分析。这里的“同步运动”是指弦上各点以相同的规律和相位进行振动, 同时达到极大值, 同时过零点, 因而整个弦的形状在振动中保持不变, 但其位移大小随时间变化, 如图10.1-4所示。这意味着弦上各点随时间变化的位移 $y(x, t)$ 可以分解为两部分的乘积,

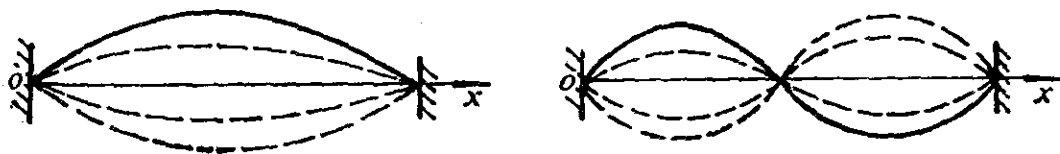


图 10.1-4

$$y(x, t) = Y(x)\eta(t), \quad (10.1-9)$$

其中 $Y(x)$ 确定整条弦线在空间的形状, 它与时间无关; 而 $\eta(t)$ 则确定弦上各点的位移随时间的变化规律, 当 $\eta(t)$ 达到极值时, 弦上各点的位移都同时达到极值, 当 $\eta(t) = 0$ 时, 弦上各点都同时回到平衡位置, 因而 $\eta(t)$ 又与空间坐标无关。采用(10.1-9)式的假设, 又称为分离变量。以(10.1-9)式代入(10.1-8)式, 并将所得等式两边除以 $\rho(x)Y(x)\eta(t)$ , 得

$$-\frac{1}{\rho(x)Y(x)} \frac{d}{dx} \left[ T(x) \frac{dY(x)}{dx} \right] = \frac{-1}{\eta(t)} \frac{d^2\eta(t)}{dt^2} \quad (10.1-10)$$

上式左边仅为空间坐标 $x$ 的函数, 而右边则为时间 $t$ 的函数, 左右两边要保持相等, 只有一种可能, 即两边均等于某常数。设此

常数为 $\lambda$ ，则上式两边可分别写成两个等式，

$$\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + \lambda\eta(t) = 0, \quad (10.1-11)$$

$$-\frac{d}{dx}\left[T(x)\frac{dY(x)}{dx}\right] = \lambda\rho(x)Y(x). \quad (10.1-12)$$

探讨同步运动的结果，我们将(10.1-4)式的偏微分方程化成了两个常微分方程。采用与第四章相同的分析方法，由(10.1-11)式，为了与系统的保守性相适应，其中的 $\lambda$ 应大于零，令

$$\lambda = \omega^2, \quad (10.1-13)$$

这里 $\omega$ 为某实数。采用与第四章相似的方法由(10.1-11)式可解出函数 $\eta(t)$ ，

$$\eta(t) = C\cos(\omega t - \psi). \quad (10.1-14)$$

上式表明，如果(10.1-9)式所表示的同步运动是可能的，那么其时间函数 $\eta(t)$ 应该为某种谐波函数。式中 $C$ 与 $\psi$ 为任意常数，由初始条件决定，而 $\omega$ 则为此谐波函数的角频率，由系统的参数决定，详见后面的讨论。

现在让我们将注意力转向(10.1-12)式，以讨论函数 $Y(x)$ 的解及其特性。为便于讨论，以下将条件略加限制，即假定弦为均质的，即令其线密度为常数，

$$\rho(x) = \rho. \quad (10.1-15)$$

此外，假定弦上的各处张力也为常数，

$$T(x) = T. \quad (10.1-16)$$

在(10.1-15)、(10.1-16)式的条件下，(10.1-12)式可写成，

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + \beta^2Y(x) = 0, \quad (10.1-17)$$

式中

$$\beta^2 = \omega^2\rho/T. \quad (10.1-18)$$

$\beta$ 是由系统常数 $\rho$ 、 $T$ 及振动频率 $\omega$ 决定的常数。相应的边界条件成为

$$Y(0) = 0, \quad (10.1-19)$$

$$Y(L) = 0. \quad (10.1-20)$$

易于检验, (10.1-17)式的通解为

$$Y(x) = C\sin\beta x + D\cos\beta x, \quad (10.1-21)$$

上式中 $C$ ,  $D$ 为两个任意常数. 另一方面我们有(10.1-19)与(10.1-20)两个边界条件, 似乎正好可以确定这两个任意常数. 但是不要忘记 $\beta$ 中还包 $\omega^2$ 这个未知参数(见10.1-18式). 这样, 三个待定参数并不能由边界条件(10.1-19)、(10.1-20)式完全决定. 以下具体分析解决这一问题.

首先, 以(10.1-19)式代入通解(10.1-21)式, 得到 $D=0$ , (10.1-21)式成为

$$Y(x) = C\sin\beta x. \quad (10.1-22)$$

其次, 再以(10.1-20)式代入上式, 得

$$Y(L) = C\sin\beta L = 0. \quad (10.1-23)$$

我们决不能再由上式得出 $C=0$ 的结论, 因为这样一来, 由(9.1-22)式, 有 $Y(x) \equiv 0$ , 再由(10.1-9)式得 $y(x,t) \equiv 0$ , 即弦静止在其平衡位置, 根本没有振动, 这显然不是我们感兴趣的一种情况. 我们希望寻求 $Y(x) \neq 0$ 的一种非零解. 为此, 不能再令 $C=0$ , 而(10.1-23)式要成立, 只有一种可能, 即

$$\sin\beta L = 0. \quad (10.1-24)$$

由此可得

$$\beta L = r\pi, \quad r = 1, 2, \dots$$

由此式可解出

$$\beta_r = \frac{r\pi}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.1-25)$$

上式中的 $\beta_r$ 加了下标 $r$ , 以便与该式右边 $r$ 的取值相对应,  $r$ 可取任何自然数.

将(10.1-25)式代入(10.1-18)式, 并解出其中的频率 $\omega$ , 得到,

$$\omega_r = r\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.1-26)$$

式中 $\omega_r$ 的下标表明右边的参数 $r$ 每取一个自然数,就得到一个相应的振动频率,这些频率均称为弦的自然频率。

我们记得,离散系统的自然频率是离散的,即只取某几个特定的数值。那么,连续系统的自然频率的取值是不是连续的呢?即是否可在一定的范围内任意取值呢?(10.1-26)式给出的回答是否定的。该式表明,弦的同步运动如果是可能的,那么其振动的自然频率也只能取一系列的离散值 $\omega_1, \omega_2, \dots$ ,而在任意两个离散值之间,系统不存在其它的自然频率。这一点与离散系统的情形十分相似。其实,不论是离散系统,还是连续系统,其自然频率取值离散的根源并不在于系统的离散性,而是在于系统尺度的有限性。为了使读者信服这一点,让我们计算相邻的两个自然频率之差,

$$\Delta\omega = \omega_{r+1} - \omega_r = \pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}. \quad (10.1-27)$$

显然,只要弦的长度 $L$ 是有限的, $\Delta\omega$ 就不为零,即自然频率取值是离散的,而只有当 $L \rightarrow \infty$ 时,才有 $\Delta\omega \rightarrow 0$ ,即自然频率取值趋于连续。

但是连续系统有一点与离散系统不同,即离散系统的自然频率的数目是有限的,等于其自由度的数目,而连续系统的自然频率的数目,理论上是无限多的。这一点也易于理解,因为前面说过,连续系统可视为无限多自由度的系统。

(10.1-26)式中,取 $r = 1$ ,得到最低阶的自然频率 $\omega_1$ ,

$$\omega_1 = \pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}, \quad (10.1-28)$$

称为弦振动的基音频率。基音频率决定弦振动的音调高低。由上式可见决定弦的音调的因素是其张力 $T$ ,线密度 $\rho$ (粗细)与长度 $L$ 。

令(10.1-26)式中 $r = 2, 3, \dots$ , 得 $\omega_2, \omega_3, \dots$ 等高阶自然频率, 称为泛音频率, 泛音频率确定一种乐器的音色。

以(10.1-25)式代入(10.1-22)式, 得到

$$Y_r(x) = C_r \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.1-29)$$

称为系统的特征函数,  $r$ 每取一自然数, 就得到相应的一个特征函数, 理论上也存在无限多个特征函数。特征函数确定弦在振动中的形状, 因此又称为振型。前三阶的振型如图10.1-5(a)、(b)、

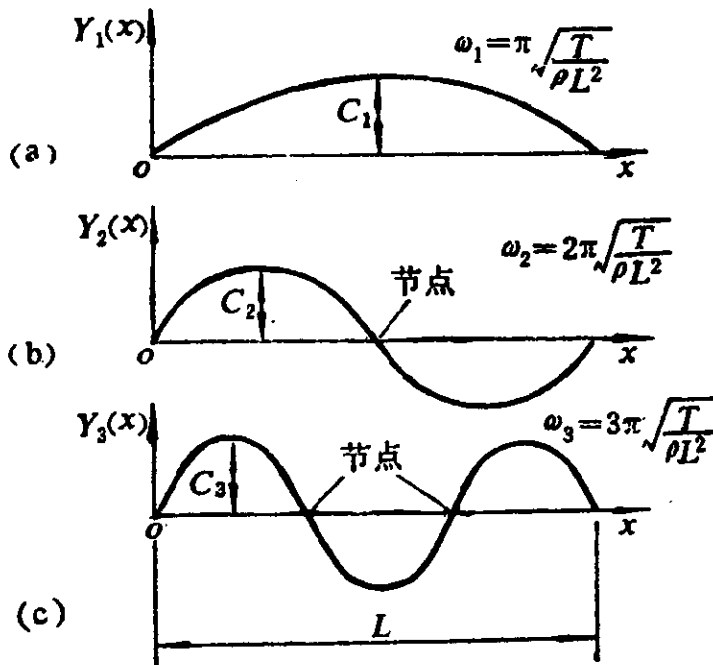


图 10.1-5

(c)所示。该图表明, 各阶振型曲线均满足(10.1-19)与(10.1-20)式所示的边界条件。此外, 振型曲线与 $x$ 轴的交点, 称为该振型的节点( $x = 0$ 与 $x = L$ 的点除外), 显然, 节点的数目等于 $(r - 1)$ , 此规律有普遍性。

一个振型 $Y_r(x)$ 与相应的自然频率 $\omega_r$ 组成弦振动的一个自然模态。理论上有限多的自然模态, 可是, 对于阶次较高的模态, 由于弦的皱褶严重前述小 $\theta$ 角的假设不再成立, 这导致模型失效, 不能再准确地描述系统的振动。因此, 由这里的模型推出的高阶模态, 其准确性与可靠性较差。但对于多数工程实际问题来

说，计算前几阶模态，已能满足需要。

### 10.1.3 特征函数的正规化与正交性

与离散系统的特征向量十分相似，特征函数也可以施行正规化处理，也满足正交性条件。

我们看(10.1-29)式，其中的常数 $C_r$ ，即振幅，并未确定。这是可以理解的，因为(10.1-17)就是一齐次微分方程， $C_r$ 取任意值，(10.1-29)式，均能满足该方程。从物理意义上讲，(10.1-29)式只需确定弦在振动中的形状，而幅值的大小可以是任意的，这里问题本身并未包含确定 $C_r$ 的因素。可是从公式的简练与形式优美的角度来说，可以对 $C_r$ 的取值施加人为的限制，这就叫做特征函数的正规化。可采用与离散系统的特征向量正规化相比拟的方法，来进行连续系统的特征函数的正规化。我们知道，多自由度系统的特征向量可按(4.5-13)式加以正规化：

$$\{u^{(r)}\}^T(m)\{u^{(r)}\} = 1,$$

或写成求和的形式，

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_i^{(r)} u_j^{(r)} = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

当系统中的诸质块排成一排时（弦的离散模型（图10.1-2）正是这种情况）， $(m)$ 为对角矩阵 $(m_i)$ ，上式成为

$$\sum_{i=1}^n m_i (u_i^{(r)})^2 = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (10.1-30)$$

当系统中自由度无限增加时，以上和式变成积分式，于是可得出连续系统特征函数正规化的方式，

$$\text{令} \quad \int_0^L \rho(x) Y_r^2(x) dx = 1, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.1-31)$$

以(10.1-29)式代入上式，并注意到 $\rho$ ， $C_r$ 均为常数，得

$$\rho C^2 \int_0^L \sin^2 \frac{r\pi x}{L} dx = 1, \quad r = 1, 2, \dots$$

积分以后, 得

$$\rho C^2 L/2 = 1,$$

可解出

$$C_r = \sqrt{\frac{2}{\rho L}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.1-32)$$

代回(10.1-29)式, 得

$$Y_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.1-33)$$

此即经过正规化的均匀弦振动的特征函数。

以下讨论特征函数的正交性的表达方法, 并就均匀弦振动的情况, 验证各特征函数之间的正交性。至于特征函数正交性的比较一般的证明, 则将在本章 § 10.10 节中给出。

先看对于密度函数  $\rho(x)$  的正交性。按照离散系统的特征向量对于质量矩阵的正交性, 即公式(4.5-7), 采用与上面相类似的比拟方法, 可得到连续系统的特征函数对于密度函数的正交性的表达式为

$$\int_0^L \rho(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots; r \neq s, \quad (10.1-34)$$

将(10.1-31)与(10.1-34)式综合起来, 有

$$\int_0^L \rho(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (10.1-35)$$

以(10.1-33)式代入上式, 得

$$\int_0^L \rho(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} \sin \frac{s\pi x}{L} dx = \delta_{rs},$$

$$r, s = 1, 2, \dots$$

可见对于均匀弦的振动来说, (10.1-35)式所表示的正规化与正交性条件确实是满足的。

离散系统的特征向量具有对于刚度矩阵( $k$ )的正交性, 此正交性与正规化条件结合起来, 即如(4.5-14)式所示。



这里读者须注意，连续系统与上式对应的关系并不是：

$$\int_0^L T(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = \omega_r^2 \delta_{rs},$$

而是以下关系，

$$\int_0^L T(x) \frac{dY_r(x)}{dx} \cdot \frac{dY_s(x)}{dx} dx = \omega_r^2 \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (10.1-36)$$

其证明将在后面给出，读者试将(10.1-33)式表示的特征函数代入，可验证上式确实是满足的。

(10.1-35)与(10.1-36)式是弦振动及其相似系统的特征函数分别对于 $\rho(x)$ （惯性分布函数）及 $T(x)$ （弹性分布函数）的正交性以及正规化条件的表达式。我们还已经就均匀弦振动的特例，验证了以上关系式的正确性。

#### 10.1.4 自然坐标与运动方程的解耦

从上面的分析知道形如(10.1-9)式的同步运动不仅是可能的，而且理论上存在无限多种同步运动，

$$y_r(x, t) = Y_r(x) \eta_r(t), \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.1-37)$$

式中 $Y_r(x)$ 由(10.1-33)式确定，而 $\eta_r(t)$ 由(10.1-14)式确定，我们将后者加上下标，重写在下面，

$$\eta_r(t) = C_r \cos(\omega_r t - \psi_r), \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.1-38)$$

每一个形如(10.1-37)式的同步运动都是微分方程(10.1-8)的解。由于该方程是齐次方程，因此各个解的线性组合也是该方程的解，

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \eta_r(t). \quad (10.1-39)$$

将上式代入(10.1-8)式，得

$$\sum_{r=1}^{\infty} \eta_r(t) \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_r(x) \right] = \rho(x) \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \frac{\partial^2 \eta_r(t)}{\partial t^2}.$$

以(10.1-12)式代入上式左边, 并按(10.1-13)式将 $\lambda$ 写成 $\omega^2$ , 然后将所得等式两边乘以 $Y_s(x)$ , 并从0到 $L$ 对 $x$ 积分, 得

$$-\sum_{r=1}^n \omega_r^2 \eta_r(t) \int_0^L \rho(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \eta_r(t)}{\partial t^2} \int_0^L \rho(x) Y_r(x) Y_s(x) dx.$$

以(10.1-35), (10.1-36)式分别代入上式两边, 得

$$-\sum_{r=1}^n \omega_r \eta_r(t) \delta_{r,s} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \eta_r(t)}{\partial t^2} \delta_{r,s}.$$

利用 $\delta_{r,s}$ 函数的“筛性质”, 得

$$-\omega_s \eta_s(t) = \frac{\partial^2 \eta_s(t)}{\partial t^2},$$

即

$$\ddot{\eta}_s(t) + \omega_s^2 \eta_s(t) = 0, \quad (10.1-40)$$

上式对 $s=1, 2, \dots$ 均成立, 因而有无限多个等式.

我们将 $y(x, t)$ 看成是一种坐标(物理坐标), 而将 $\eta_r(t)$ 看成是另一种坐标(自然坐标, 亦称正规坐标或固有坐标), 则(10.1-39)式表示一种坐标变换关系. 如果将 $x$ 的每一取值均视为一个自由度, 那么坐标 $y(x, t)$ 表示“各个自由度”的横向位移 $y$ 随时间 $t$ 变化的情况; 以 $y(x, t)$ 来描述系统, 得到偏微分方程(10.1-4), 在此方程中 $y$ 随着时间的变化 $\partial^2 y(x, t)/\partial t^2$ 与随着坐标的变化 $\partial y(x, t)/\partial x$ 是相互联系着的, 这就是所谓“坐标耦合”现象, 正是由于这种耦合, 导致了求解偏微分方程的必要. 如果将 $r$ 的每一取值理解为一个坐标(即将 $r$ 视为坐标的编号, 这里也是无限多个坐标), 那么 $\eta_r(t)$ 也表示各个坐标上的坐标值 $\eta_r$ 随着时间的变化情况.  $\eta_r$ 并不象 $y$ 那样有直观的物理意义, 但 $\eta_r$ 又与 $y$ 一样, 可以明确地描述弦在振动中各个时刻的位移, 这是由于它们之间存在着形如(10.1-39)式的确定的坐标变换关系. 可是采用新坐标 $\eta_r(t)$ 来描述系统, 有一个很大的好处: 其每一个坐标

上（即  $r$  的每一个取值）的坐标值  $\eta_r(t)$  都服从一个独立的微分方程，而与其它坐标上（ $r$  的其它取值）的坐标值  $\eta_s(t)$  ( $s \neq r$ ) 无关，即如(10.1-40)式所示，为一系列独立的微分方程。这就是说，采用坐标  $\eta_r(t)$  时，运动方程解除了坐标耦合，呈现出最简单、最易于求解的形式。这就是为什么将坐标  $\eta_r(t)$  ( $r=1, 2, \dots$ ) 称为自然坐标的原因。

方程式(10.1-40)的解即为(10.1-38)，其中  $\omega_r$  由系统的参数及边界条件决定，如(10.1-26)式所示，而  $C_r, \psi_r$  由初始条件决定，后面会讲述。求出诸  $\eta_r(t)$  以后，代入坐标交换关系(10.1-39)，即可变回到物理坐标  $y(x, t)$ 。

## § 10.2 杆的纵向振动

### 10.2.1 杆的纵向振动的运动方程

图10.2-1为一两端固定、长度为  $L$  的杆，其上各点的纵向位移以  $u(x, t)$  来表示， $m(x)$  为杆的线密度， $A(x)$  为杆的截面积， $E$  为材料的弹性模量， $q(x, t)$  为杆所受纵向分布载荷。现在推导制约  $u(x, t)$  的偏微分运动方程。

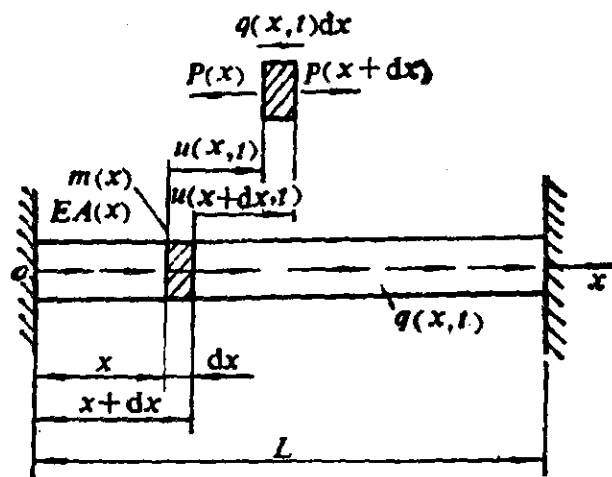


图 10.2-1

从杆上取长度为 $dx$ 的一小段 (图10.2-1中阴影部分) 来分析, 此段的左、右两端的纵向位移分别为 $u(x, t)$ 与 $u(x + dx, t) = u(x, t) + (\partial u / \partial x) dx$ , 两者的差即为该小段的纵向伸长量

$$\delta = u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx, \quad (10.2-1)$$

伸长量除以这一小段的原来长度 $dx$ , 即得到该小段的应变量, 也就是截面 $x$ 附近的应变量,

$$S(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (10.2-2)$$

该截面上的应力为

$$ES(x, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (10.2-3)$$

而杆的其它部分通过 $x$ 处的截面对此小段的作用力为

$$P(x, t) = EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (10.2-4)$$

同理, 杆的其它部分通过 $x + dx$ 处的截面对此小段的作用力为

$$\begin{aligned} P(x + dx, t) &= P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} dx \\ &= EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx. \end{aligned} \quad (10.2-5)$$

现在对此小段质量列出纵向运动的牛顿方程

$$P(x + dx, t) - P(x, t) + q(x, t) dx = m(x) dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

以(10.2-4)与(10.2-5)式代入上式, 并除以 $dx$ , 即得运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + q(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L. \quad (10.2-6)$$

边界条件为

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (10.2-7)$$

自由振动时 $q(x, t) = 0$ , 运动方程成为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (10.2-8)$$

采用与上一节相同的方法, 寻求同步运动

$$u(x, t) = U(x)\eta(t), \quad (10.2-9)$$

可以确定 $\eta(t)$ 是形如(10.1-14)式的谐波函数, 而 $U(x)$ 满足以下常微分方程

$$-\frac{d}{dx} \left[ EA(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] = \omega^2 m(x) U(x), \quad 0 < x < L, \quad (10.2-10)$$

相应的边界条件为

$$U(0) = 0, \quad V(L) = 0. \quad (10.2-11)$$

(10.2-10)式是变系数的常微分方程, 一般没有有限形式的解。

以下研究较为特殊的情况: 均匀杆的纵向振动, 即

$$m(x) = m(\text{const.}), \quad EA(x) = EA(\text{const.}).$$

在此情况下, (10.2-10)式成为

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \beta^2 U(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (10.2-12)$$

式中

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{m}{EA}. \quad (10.2-13)$$

### 10.2.2 杆振动的自然频率与特征函数

由于特征函数 $U(x)$ 所满足的微分方程(10.2-12)及其边界条件(10.2-11)式分别与上节弦振动特征函数所满足的微分方程(10.1-17)式及边界条件(10.1-19)、(10.1-20)式具有相同的形式, 因而所得自然频率 $\omega_n$ 与特征函数 $U_n(x)$ 的表达式也应该分别与上节(10.1-28)式及(10.1-29)式在形式上相同, 即有

$$\omega_r = r\pi \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad r=1,2,\dots \quad (10.2-14)$$

$$U_r(x) = C_r \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad r=1,2,\dots \quad (10.2-15)$$

前五阶特征函数的图形在图10.2-2中以实线给出，图上还给出了前五个自然频率 $\omega_1 \sim \omega_5$ 。为简单起见，作图时取 $A_r = 1$ （这也是一种正规化的方法）。读者试将图中的前三阶特征函数与图10.1-5相比较，可见它们是分别相似的。

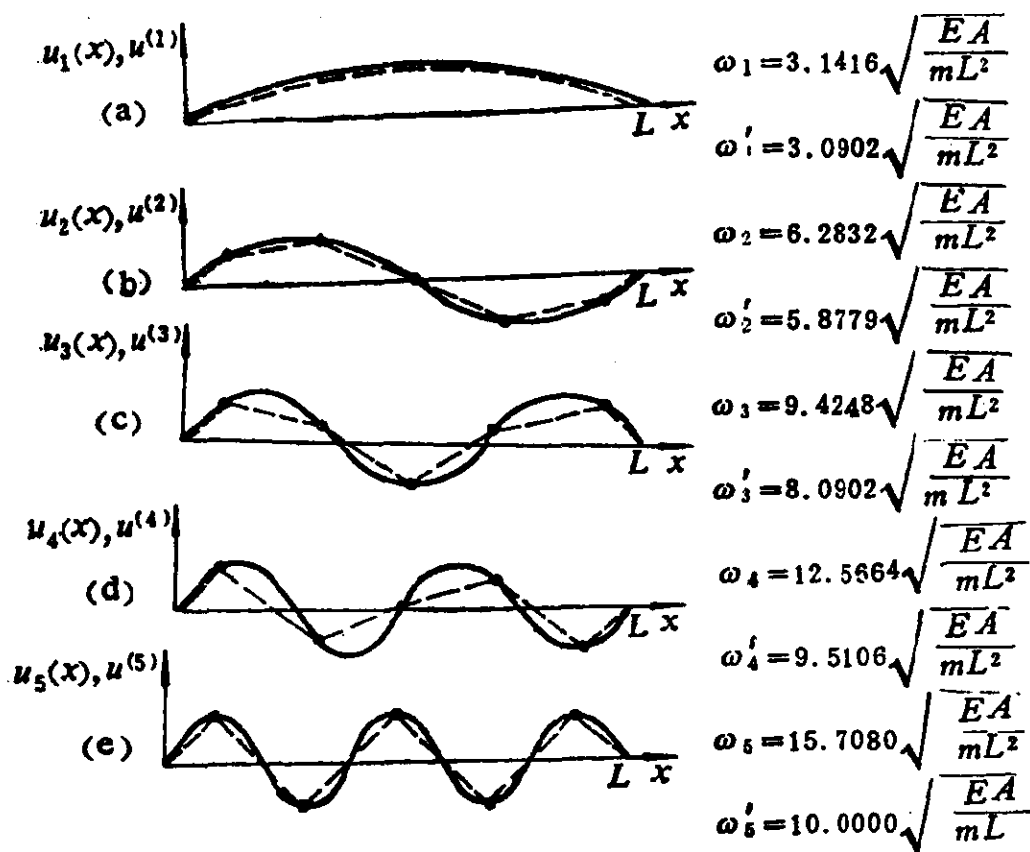


图 10.2-2

### 10.2.3 连续模型与离散模型的解的相似性

在上一节曾经从运动方程的推导方面来说明连续系统与离散系统的相似性，这里，则从同步运动，即特征值问题的解，来说明这种相似性。为此，将用两端固定的均匀杆，构造一离散模

型。图10.2-3(a)表示一两端固定的均匀杆，即前面讨论的连续模型。为建立其纵向振动的离散模型，可将之等分为五段，将每一段的质量向其中点集中，成为五个刚性的质块，各质块之间以弹簧相连接，而弹簧的刚度则等于各分段的中点之间的一段杆的刚度，如图10.2-3所示。每一质块的质量为

$$M = mL/5, \quad (10.2-16)$$

其中 $mL$ 为杆的总质量。连接各质块的弹簧的刚度系数为

$$k = 5EA/L. \quad (10.2-17)$$

而连接两端的质块与固定点的弹簧的刚度为

$$2k = 10EA/L. \quad (10.2-18)$$

读者不难以第四章讲述的方法，导出此离散系统的质量矩阵与刚度矩阵，分别为

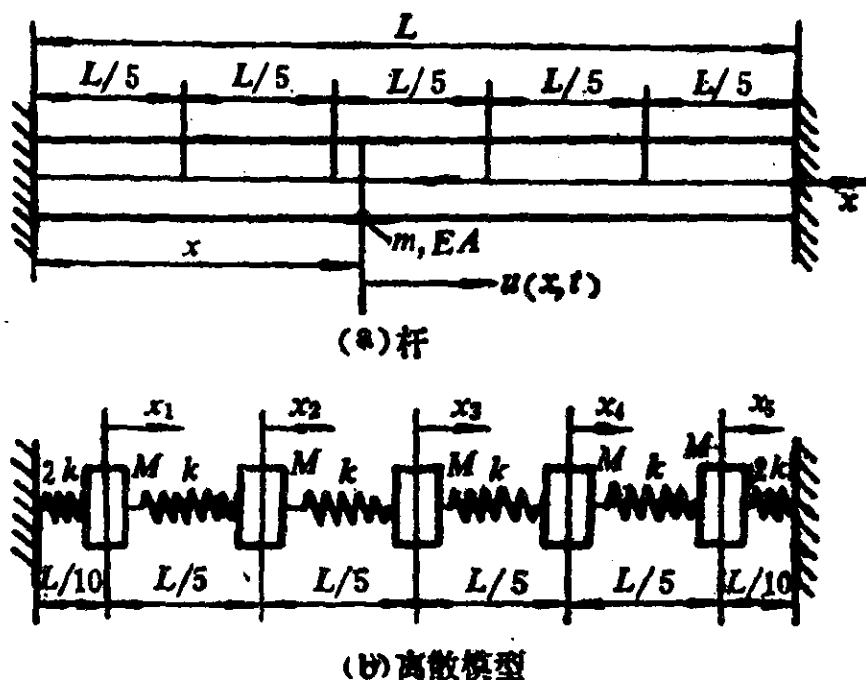


图 10.2-3

$$[m] = \frac{mL}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.2-19)$$

$$(k) = \frac{5EA}{L} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (10.2-20)$$

可以计算出此离散模型的五个特征向量 $\{u^{(i)}\}$ 与五个自然频率 $\omega_i (i=1,2,3,4,5)$ 。五个特征向量为

$$\begin{aligned} \{u^{(1)}\} &= \begin{Bmatrix} 0.3090 \\ 0.8090 \\ 1.0000 \\ 0.8090 \\ 0.3090 \end{Bmatrix}, & \{u^{(2)}\} &= \begin{Bmatrix} 0.5878 \\ 0.9511 \\ 0.0000 \\ -0.9511 \\ -0.5878 \end{Bmatrix}, \\ \{u^{(3)}\} &= \begin{Bmatrix} 0.8090 \\ 0.3090 \\ -1.0000 \\ 0.3090 \\ 0.8090 \end{Bmatrix}, & \{u^{(4)}\} &= \begin{Bmatrix} 0.9511 \\ -0.5878 \\ 0.0000 \\ 0.5878 \\ -0.9511 \end{Bmatrix}, \\ \{u^{(5)}\} &= \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

其图形以虚线表示在图10.2-2上。这里特征向量已进行正规化，其目的是便于和前述连续模型的特征函数的图形相比较。在图10.2-2中还给出了所得出的五个自然频率 $\omega_1 \sim \omega_5$ 。

图10.2-2形象地表明，一个振动系统的离散模型得出的特征向量其实是对该系统的连续模型导出的特征函数的折线近似。当所取自由度增加时，特征向量的折线所包含的线段就会增多，因而更好地逼近特征函数的曲线。作为自由度趋向无穷大时的极



限，折线就变成光滑的曲线，而特征向量就成为特征函数。

从图10.2-2还可看出，无论是就振型或是就自然频率来说，离散模型对于连续模型的近似程度都随着模态阶次的上升而降低，而由离散模型得出的自然频率 $\omega_i$ 都低于连续模型的相应自然频率 $\omega_i$ ，这是由于集中质量所造成的。

### § 10.3 轴的扭转振动

图10.3-1(a)为一长度为 $L$ 的截面为圆形的轴，其单位长度的转动惯量为 $I(x)$ ，抗剪模量为 $G$ ，截面极惯性矩为 $J(x)$ ，轴上承受的分布扭矩为 $q(x, t)$ ，而轴上 $x$ 处， $t$ 时刻相对于其左端面的扭转角度以 $\theta(x, t)$ 表示。为推导其运动方程，从其上截取长度为 $dx$

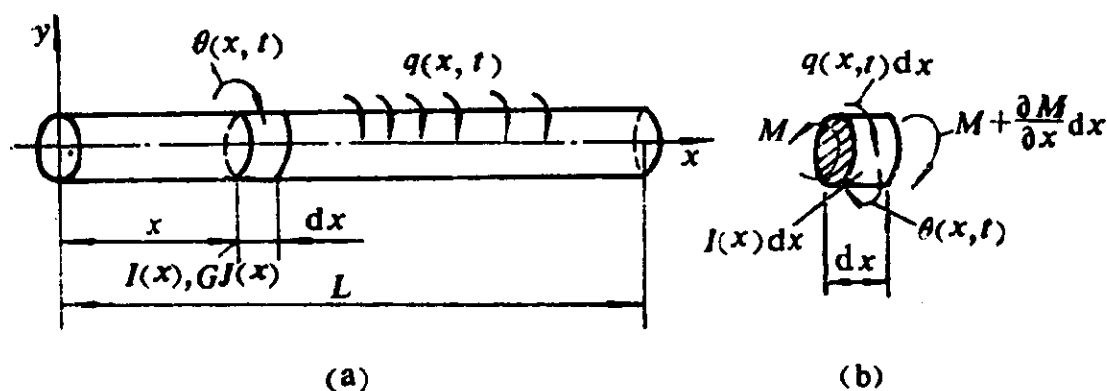


图 10.3-1

的一小段来分析，如图(b)所示。此小段左、右两端面上的扭矩分别为 $M$ 与 $M + (\partial M / \partial x) dx$ ，其所受到的外加扭矩为 $q(x, t) dx$ ，而转动惯量为 $I(x) dx$ ，对其列出刚体转动的方程，得到

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M + q(x, t) dx = I(x) dx \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L. \quad (10.3-1)$$

另一方面，由材料力学知，扭矩与转角之间有以下关系，

$$M = GJ(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}, \quad (10.3-2)$$

代入(10.3-1)式，并整理，得轴的扭振运动方程为，

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ GJ(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] + q(x, t) = I(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L. \quad (10.3-3)$$

自由振动时， $q(x, t) = 0$ ，运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ GJ(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] = I(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L. \quad (10.3-4)$$

对此微分方程的解 $\theta(x, t)$ 分离变量，得

$$\theta(x, t) = \Theta(x)\eta(t), \quad (10.3-5)$$

代入(10.3-4)式，得到特征函数应满足的方程，

$$-\frac{d}{dx} \left[ GJ(x) \frac{d\Theta(x)}{dx} \right] = \omega^2 I(x) \Theta(x), \quad 0 < x < L. \quad (10.3-6)$$

对于均匀轴，有

$$J(x) = J(\text{const.}), \quad (10.3-7)$$

$$I(x) = I(\text{const.}), \quad (10.3-8)$$

特征函数的方程式为

$$\frac{d^2 \Theta(x)}{dx^2} + \beta^2 \Theta(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (10.3-9)$$

式中 
$$\beta^2 = \frac{\omega^2 I}{GJ}. \quad (10.3-10)$$

## § 10.4 弦、杆、轴振动方程的相似性

比较(10.1-4)、(10.2-6)及(10.3-3)三式所分别表示的弦、杆及轴的运动方程，可见它们在形式上是完全一致的，各相应量的对应关系，如表10.4-1所示。由表中对应关系，即可以举一反三

表10.4-1 弦、杆、轴振动方程参数对照表

参数内容	弦的横向振动	杆的纵向振动	轴的扭转振动
弹性	张力 $T(x)$	抗压刚度 $EA(x)$	扭转刚度 $GJ(x)$
分布惯性	单位长度的质量 (线密度) $\rho(x)$	单位长度的质量 (线密度) $m(x)$	单位长度的转动惯量 $I(x)$
分布载荷	单位长度上的横 向载荷 $f(x,t)$	单位长度上的纵 向载荷 $q(x,t)$	单位长度上的扭矩 $q(x,t)$
$x$ 处 $t$ 时刻的位移	横向振动 $y(x,t)$	纵向振动 $u(x,t)$	转角 $\theta(x,t)$
特征函数	$Y(x)$	$U(x)$	$\Phi(x)$

三. 例如, 由(10.1-26)及(10.1-33)式, 即两端固定的均匀弦的自然频率及正规化振型的表达式, 以及表10.4-1中的对应关系, 立即知两端固定的均匀轴的自然频率及正规化振型的表达式为

$$\omega_r = r\pi \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.4-1)$$

$$\Theta_r = \sqrt{\frac{2}{IL}} \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.4-2)$$

等等.

以下在讲解弦、杆、轴这一类连续体的振动问题时, 只以其中的某一种作为例子, 读者应知所讲述的结论和规律是可以对应地用于其它振动情况的.

## § 10.5 边界条件

从前面的分析可知, 一个连续系统的自然频率与振型除与其运动方程有关以外, 也取决于其两端的支承条件, 即边界条件.

前面讲述了两端均固定的弦、杆与轴的自然频率及振型。这里将讲述其它典型的边界条件下的自然频率与振型。我们将以杆的纵向振动作为例子来进行说明。

### 10.5.1 两端自由的杆的自然频率与振型

图10.5-1(a)是一两端自由的均匀杆，其特征函数所满足的方程仍如(10.2-12)式所示。由于其两端自由，其边界条件为：

$$\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (10.5-1)$$

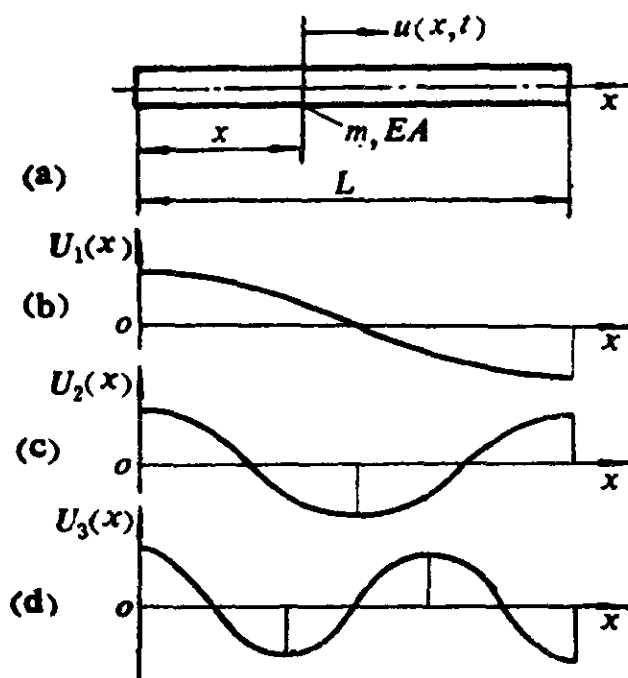


图 10.5-1

$$\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (10.5-2)$$

方程(10.2-12)的通解与(10.1-21)式相似，即为

$$U(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x. \quad (10.5-3)$$

以上式代入(10.5-1)式表示的边界条件，得 $C = 0$ ，于是(10.5-3)式成为

$$U(x) = D \cos \beta x, \quad (10.5-4)$$

再以此式代入(10.5-2)式, 得

$$D \beta \sin \beta L = 0.$$

为得非零解, 有两种可能: 一是 $\beta = 0$ , 由(10.2-13)式, 即 $\omega = 0$ , 这相当于零模态, 即刚性模态; 另一种可能是

$$\sin \beta L = 0 \quad (10.5-5)$$

由此,

$$\beta L = r\pi, \quad r = 1, 2, \dots$$

即

$$\beta = \frac{r\pi}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.5-6)$$

代入(10.2-13)式, 可解得自然频率为

$$\omega_r = \beta \sqrt{\frac{EA}{m}} = r\pi \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.5-7)$$

再以(10.5-6)式代入(10.5-4)式, 即得振型

$$U_r(x) = D_r \cos \frac{r\pi x}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.5-8)$$

前三阶振型的图形如图10.5-1(b)、(c)、(d)所示。注意各阶振型在端点处均满足边界条件。

### 10.5.2 一端固定, 另一端通过弹簧与固定点相连的均匀杆的自然频率与振型

图10.5-2表示一端固定而另一端具有轴向弹性支承的均匀

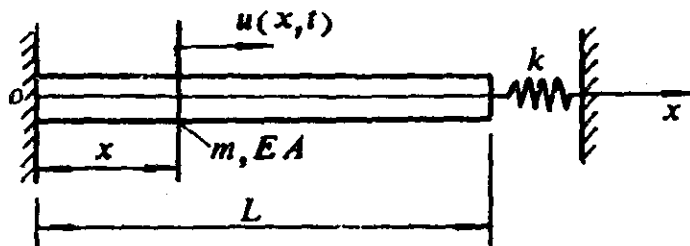


图 10.5-2

杆，支承的刚度为 $k$ ，边界条件为

$$U(0) = 0, \quad EA \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=L} = -kU(L). \quad (10.5-9)$$

以通式(10.5-3)代入边界条件(10.5-9)的第一式，得 $D=0$ ，(10.5-3)式成为

$$U(x) = C \sin \beta x, \quad (10.5-10)$$

再以此式代入(10.5-9)式中的第二个边界条件，得

$$-\frac{EA}{kL} = \frac{\operatorname{tg} \beta L}{\beta L} = \frac{1}{\beta L} \frac{\sin \beta L}{\cos \beta L}, \quad (10.5-11)$$

此式确定 $\beta L$ ，亦即自然频率 $\omega_r$  ( $r=1, 2, \dots$ )所应满足的条件，此条件与杆的纵向刚度 $EA/L$ 与支承刚度 $k$ 之比有关，一旦确定了此比值，可从(10.5-11)式解出一系列的 $\beta$ 值 ( $\beta_1, \beta_2, \dots$ )，再代入(10.2-13)式，即可定出相应的自然频率 $\omega_1, \omega_2, \dots$ 。而以诸 $\beta$ 值代入(10.5-10)式，即得相应的各阶振型。

以下讨论 $k$ 取两种极限值的情况：

当 $k = \infty$ 时，由(10.5-11)式，得

$$\sin \beta L = 0$$

回到10.2.2小节的两端固定的杆的情况，此式相当于弦振动问题的(10.1-24)式。

当 $k = 0$ 时，即一端固定，一端自由的情况，由(10.5-11)式，得

$$\cos \beta L = 0, \quad (10.5-12)$$

并由此解出

$$\beta_r = \frac{(2r-1)\pi}{2L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.5-13)$$

即

$$\omega_r = \frac{(2r-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.5-14)$$

以(10.5-13)式代入(10.5-10)式，即得特征函数

$$U_r(x) = C_r \sin \frac{(2r-1)\pi x}{2L}, \quad r=1,2,\dots \quad (10.5-15)$$

杆件的支承条件及其前三阶振型分别如图10.5-3所示。

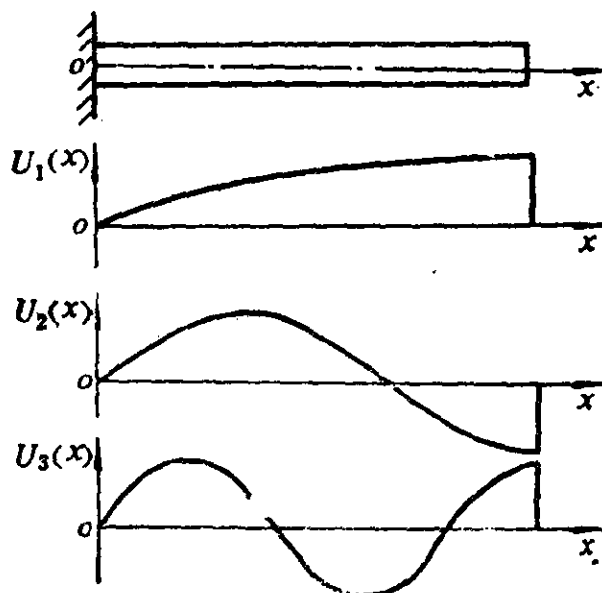


图 10.5-3

### 10.5.3 端部具有附加质量的均匀杆的自然频率

图10.5-4表示一均匀杆，其一端固定，另一端附有质量为 $M$ 的质块。边界条件为

$$U(0) = 0, \quad (10.5-16)$$

$$EA \frac{\partial U(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} = M\omega^2 U(x), \quad (10.5-17)$$

以通式(10.5-3)代入边界条件(10.5-16)，得到(10.5-10)式，以(10.5-10)式代入(10.5-17)式，即得到频率方程

$$EA\beta \cos\beta L = M\omega^2 \sin\beta L,$$

按(10.2-13)式，以 $\omega^2 = \beta^2 EA/m$ 代入上式右边，并整理，得

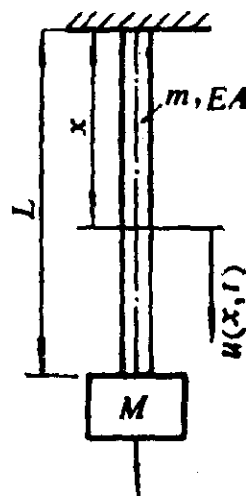


图 10.5-4

$$\frac{Lm}{M} = \beta L \operatorname{tg} \beta L, \quad (10.5-18)$$

令

$$\frac{Lm}{M} = \eta, \quad (10.5-19)$$

$$\beta L = \xi. \quad (10.5-20)$$

式中 $\eta$ 是杆的质量 $Lm$ 与附加质量 $M$ 之比,采用(10.5-19)、(10.5-20)式的记号, (10.5-18)式可写成

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \xi. \quad (10.5-21)$$

给定质量比 $\eta$ 的一个数值,由上式以数值解法就可求出一系列的 $\xi$ 值,再由

$$\omega_r = \xi_r \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.5-22)$$

即可求出各阶的自然频率.表10.5-1给出了各个 $\eta$ 值下,与基频对应的 $\xi_1$ 值.

表10.5-1 质量比 $\eta$ 与对应于基频 $\omega_1$ 的 $\xi_1$ 值

$\eta$	0.01	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	1.00	1.50
$\xi_1$	0.10	0.32	0.52	0.65	0.75	0.82	0.86	0.98
$\eta$	2.00	3.00	4.00	5.00	10.0	20.0	100.0	$\infty$
$\xi_1$	1.08	1.20	1.27	1.32	1.42	1.52	1.57	$\pi/2$

以下讨论质量比 $\eta$ 的两种极端情况.

如果附加质量比杆的质量小得多,即 $\eta \approx \infty$ ,则由(10.5-21)式,得 $\operatorname{tg} \xi = \infty$ ,即

$$\xi_r = \frac{(2r-1)\pi}{2}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.5-23)$$

代入(10.5-22)式,得自然频率

$$\omega_r = \frac{(2r-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad r = 1, 2, \dots$$

与前述一端固定一端自由的杆件的自然频率(见10.5-14式)相



同，说明此时质块  $m$  的作用可以略而不计。

如果附加质量比杆的质量大得多，即  $\eta \approx 0$ ，则  $\operatorname{tg} \xi$  很小，因而有  $\operatorname{tg} \xi \approx \xi$ ，(10.5-21)式可近似为

$$\eta = \xi^2, \quad (10.5-24)$$

以(10.5-19)、(10.5-20)与(10.2-13)式代入上式，即可求出自然频率的表达式为

$$\omega = \sqrt{\frac{EA}{ML}}. \quad (10.5-25)$$

注意到  $EA/L$  是杆的纵向刚度，上式即为略去杆的分布质量后而得到的单自由度系统的自然频率。

当  $\eta$  值较小时，上述略去杆的质量的方法，可以得到精度较好的结果。如当  $\eta = 0.1$  时，由表10.5-1可查出  $\xi_1 = 0.32$ ，而由(10.5-22)式，即可算出第一阶自然频率为

$$\omega_1 = 0.32 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad (10.5-26)$$

而略去杆的质量，即得(10.5-25)式，按(10.5-19)式，并考虑到  $\eta = 0.1$ ，得

$$\omega = 0.3162 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}. \quad (10.5-27)$$

与(10.5-26)式比较，相对误差仅1.18%。

当附加质量与杆的质量两者可以比较时，例如，当  $\eta = 1$  时，由表10.5-1可以查出  $\xi_1 = 0.86$ ，由(10.5-22)式可算出第一阶自然频率，

$$\omega_1 = 0.86 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}. \quad (10.5-28)$$

值得一提的是，在质块与杆的质量可以比较的情况下，可按第一章中讲的“等效质量”的概念，即将1/3的杆的质量折算到质块的质量上，形成等效质量然后按无质量的弹性杆与具有等效质量的质块组成的单自由度系统，计算其第一自然频率，而且往往可得到较准确的结果。例如，上述  $\eta = 1$  的情况下，按等效质量

办法，可以算出，自然频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{EA/L}{M + \frac{1}{3}mL}} = \sqrt{\frac{EA/L}{mL + \frac{1}{3}mL}} = 0.866\sqrt{\frac{EA}{mL^2}}$$

与(10.5-28)式的准确结果相比较，相对误差值0.7%。

## § 10.6 对于初始激励的响应

前已述及，均匀弦的响应可以表示成一系列同步运动的和，如(10.1-39)式所示，其中坐标函数 $Y_r(x)$ ，即振型，由边界条件决定；而时间函数 $\eta_r(t)$ 由(10.1-38)式表示，其中常数 $C_r$ ， $\Psi_r$ ，则需由初始条件（亦称初始激励）决定。为便于推导初始激励与系统响应的显式表达式，将(10.1-38)式改写成

$$\eta_r(t) = E_r \sin \omega_r t + F_r \cos \omega_r t, \quad (10.6-1)$$

式中  $E_r = C_r \sin \Psi_r,$  (10.6-2)

$$F_r = C_r \cos \Psi_r. \quad (10.6-3)$$

这里以新的常数 $E_r$ ， $F_r$ 代替原来的常数 $C_r$ 与 $\Psi_r$ 。将(10.6-1)式代入(10.1-39)式，得到通解为

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) (E_r \sin \omega_r t + F_r \cos \omega_r t). \quad (10.6-4)$$

设初始条件，即弦在 $t=0$ 时刻的初位移与初速度分别为：

$$y(x, 0) = f(x), \quad (10.6-5)$$

$$\dot{y}(x, 0) = \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (10.6-6)$$

以(10.6-4)式代入以上两式，分别得到

$$y(x, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) F_r = f(x), \quad (10.6-7)$$

$$\dot{y}(x,0) = \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r Y_r(x) E_r = g(x). \quad (10.6-8)$$

将以上两式各乘以  $\rho Y_s(t)$ ，并从 0 到  $L$  对  $x$  积分，再利用(10.1-35)式表示的正交关系及正规化条件，即得

$$F_s = \rho \int_0^L f(x) Y_s(x) dx, \quad s = 1, 2, \dots \quad (10.6-9)$$

$$E_s = \rho \int_0^L g(x) Y_s(x) dx, \quad s = 1, 2, \dots \quad (10.6-10)$$

式中  $Y_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) 已如(10.1-33)式那样进行了正规化。在初始条件  $f(x)$  与  $g(x)$  已知的情况下，按以上两式即可算出  $F_s, E_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) 诸常数。

**例10.1** 张紧的弦如图10.6-1所示，在初始时刻( $t = 0$ )突然释放，求弦的自由振动。

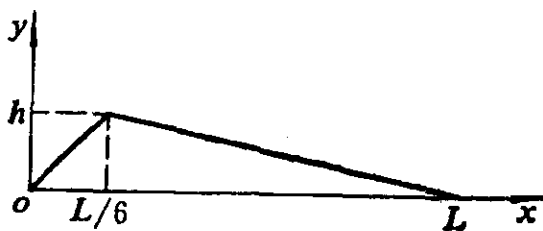


图 10.6-1

解：按题意

$$y(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{6h}{L}x, & 0 < x \leq \frac{L}{6} \\ \frac{6h}{5L}(L-x), & \frac{L}{6} \leq x < L \end{cases} \quad (a)$$

$$\dot{y}(x,0) = g(x) = 0. \quad (b)$$

以(a)式中的  $f(x)$  及(10.1-33)式表示的  $Y_s(x)$  代入(10.6-9)式，得

$$F_s = \rho \int_0^{L/6} \frac{6h}{L} \times \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{s\pi x}{L} dx + \rho \int_{L/6}^L \frac{6h}{5L} (L-x)$$

$$x \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{s\pi x}{L} dx,$$

经积分, 可得

$$F_s = \sqrt{\frac{\rho L}{2}} \frac{72h}{5(s\pi)^2} \sin \frac{s\pi}{6} \quad s=1, 2, \dots \quad (c)$$

以(b)式及(10.1-33)式代入(10.6-10)式, 得

$$E_s = 0, \quad s=1, 2, \dots \quad (d)$$

以(c), (d)式及(10.1-26)式代入(10.6-4)式, 得到响应的表达式为

$$y(x, t) = \frac{72h}{5\pi^2} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \pi \sqrt{\frac{T}{\rho L^2}} t + \frac{0.866}{4} \sin \frac{2\pi x}{L} \cos 2\pi \sqrt{\frac{T}{\rho L^2}} t + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos 3\pi \sqrt{\frac{T}{\rho L^2}} t + \dots \right). \quad (e)$$

上式中只写出了前三项。从式中可以看出随着阶次的上升, 振幅迅速下降, 因而高次谐波可以略去。

例10.2 如图10.6-2所示, 一端固定的杆, 在另一端受一恒定拉力 $P_0$ 的作用, 在 $t=0$ 时刻突然释放, 试计算系统的响应。

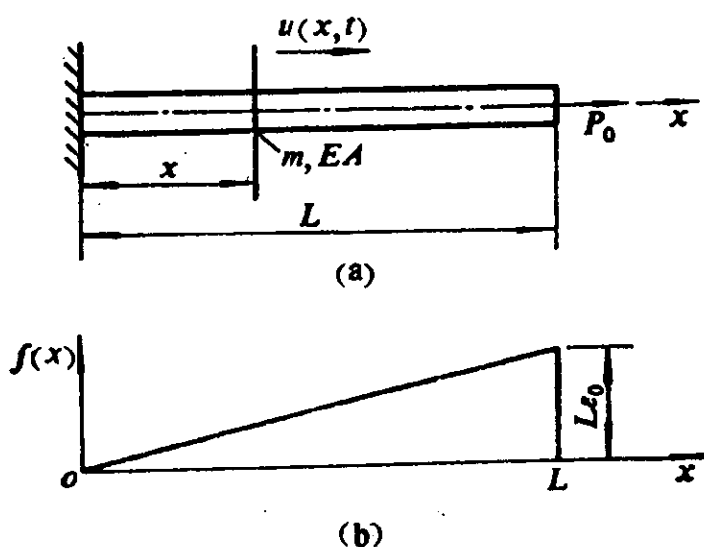


图 10.6-2

解： 初始条件为：

$$f(x) = \varepsilon_0 x, \quad (a)$$

$$g(x) = 0, \quad (b)$$

式中 
$$\varepsilon_0 = \frac{P_0}{EA}, \quad (c)$$

为初始应变。

(10.5-15)式表示的一端固定一端自由的杆的振型,按(10.1-31)式的条件正规化以后,成为

$$U_s(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x, \quad s=1,2,\dots \quad (d)$$

以(a)、(d)式代入(10.6-9)式,并注意到弦振动方程与杆振动方程中的符号对应关系,得

$$F_s = m \int_0^L \varepsilon_0 x \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x dx,$$

经积分,可得

$$F_s = (-1)^{s-1} m \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2}{mL}} \left[ \frac{2L}{(2s-1)\pi} \right]^2, \quad s=1,2,\dots \quad (e)$$

以(b)、(d)式代入(10.6-10)式,得

$$E_s = 0, \quad s=1,2,\dots \quad (f)$$

以(d)、(e)、(f)、(10.5-14)式代入(10.6-4)式,即得响应为

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon_0 L}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^2} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x \cos \frac{(2s-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} t. \quad (g)$$

## § 10.7 对于过程激励的响应

前面(10.2-6)式给出了杆的纵向振动的微分方程,如果是均

匀杆, 则  $A(x) = A$ ,  $m(x) = m$ , 均为常数, (10.2-6)式成为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{EA}{m} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{m} q(x,t), \quad (10.7-1)$$

参照(10.1-39)式, 杆振动的通解可写成

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} U_r(x) \eta_r(t). \quad (10.7-2)$$

代入(10.7-1)式, 并采用推导(10.1-40)式同样的方法, 得

$$\ddot{\eta}_s(t) + \omega_s^2 \eta_s(t) = Q_s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (10.7-3)$$

式中  $Q_s = \int_0^L q(x,t) U_s(x) dx, \quad s = 1, 2, \dots \quad (10.7-4)$

是折算到各个模态上的等效力。

对于具体的问题, 按实际的边界条件, 计算出  $\omega_s$  及  $U_s(x)$ , 由(10.7-4)式计算出  $Q_s$ . 再代入(10.7-3)式按第二章介绍的方法解出  $\eta_s(t)$ . 比如, 可以按(2.4-13)式的卷积方法计算,

$$\eta_s(t) = \frac{1}{\omega_s} \int_0^t Q_s(\tau) \sin \omega_s(t-\tau) d\tau, \quad s = 1, 2, \dots \quad (10.7-5)$$

最后, 代入(10.7-2)式即可求出对于过程激励的响应  $u(x,t)$ . 此响应与上节求出的对于初始激励的响应之和, 即为全部响应。

**例10.3** 左端固定, 右端自由的杆, 原处于静止状态, 在零时刻, 受到突然加上的均布恒定载荷  $q_0$  的作用, 试计算其响应。

解: 先计算折算到各个模态上的等效力. 例10.2(d)式给出了经正规化的特征函数, 以该式及  $q(x,t) = q_0$  代入(10.7-4)式, 得

$$Q_s = \int_0^L q_0 \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x dx,$$

经积分, 得

$$Q_s = q_0 \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{2L}{(2s-1)\pi}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (a)$$

以(10.5-14)式及以上(a)式代入(10.7-5)式, 得

$$\eta_s(t) = \frac{2}{(2s-1)\pi} \sqrt{\frac{mL^2}{EA}} \int_0^t q_0 \sqrt{\frac{2}{mL}} \times \sin \frac{(2s-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} (t-\tau) d\tau.$$

经积分, 得

$$\eta_s(t) = q_0 \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{8L}{(2s-1)^3 \pi^3} \frac{mL^2}{EA} \left[ 1 - \cos \frac{(2s-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} t \right];$$

$$s = 1, 2, \dots \quad (b)$$

以例10.2(d)式与上式代入(10.7-2)式, 即得响应

$$u(x, t) = \frac{16q_0 L^2}{EA \pi^3} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s-1)^3} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x \times \left[ 1 - \cos \frac{(2s-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} t \right], \quad (c)$$

**例10.4** 对于左端固定右端自由的均匀杆, 在 $t=0$ 时刻突然在其自由端加一集中的恒定载荷 $P_0$ , 试求其响应.

解: 由(10.7-4)式及例10.2之(d)式, 并考虑到集中载荷能以 $\delta$ 函数表示为 $P_0 \delta(x-L)$ , 故有

$$Q_s = \int_0^L P_0 \delta(x-L) \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x dx,$$

经积分, 并考虑到 $\delta$ -函数的筛性质, 有

$$Q_s = (-1)^{s-1} P_0 \sqrt{\frac{2}{mL}}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (a)$$

再由(10.7-5)式

$$\eta_s(t) = \frac{2}{(2s-1)\pi} \sqrt{\frac{mL^2}{EA}} \int_0^t (-1)^{s-1} P_0 \sqrt{\frac{2}{mL}} \times \sin \frac{(2s-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} (t-\tau) d\tau,$$

经积分,

$$\eta_s(t) = \frac{4}{\pi^2} \frac{mL^2}{EA} \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^2} \left[ 1 - \cos \frac{(2s-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} t \right],$$

$$s = 1, 2, \dots \quad (b)$$

最后由(10.7-2)式得到响应,

$$u(x, t) = \frac{8P_0 L}{EA\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^2} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x$$

$$\times \left[ 1 - \cos \frac{(2s-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} t \right]. \quad (c)$$

**例10.5** 有一左端固定右端自由的均匀杆, 在其自由端承受一谐波集中载荷  $P(t) = P \sin \omega t$ , 试求其稳态响应.

解: 由(10.7-4)式, 有

$$Q_s(t) = \int_0^L \delta(x-L) P \sin \omega t \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x dx,$$

经积分, 得

$$Q_s(t) = (-1)^{s-1} P \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \omega t, \quad s = 1, 2, \dots \quad (a)$$

(10.7-3)式成为

$$\ddot{\eta}_s(t) + \omega_s^2 \eta_s(t) = (-1)^{s-1} P \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \omega t \quad s = 1, 2, \dots \quad (b)$$

易知其稳态响应为

$$\eta_s(t) = P \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \omega t \frac{(-1)^{s-1}}{\omega^2 - \omega_s^2}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (c)$$

再由(10.7-2)知杆的全部稳态响应为

$$u(x, t) = \frac{2P}{mL} \sin \omega t \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\omega^2 - \omega_s^2} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2L} x. \quad (d)$$



## § 10.8 波动方程

当弦、杆、轴为均匀弹性体时，如果暂且撇开边界条件的影响不计，即假定弹性体为无限长，那么其运动方程可以允许一种特殊的解：任何一种波形可以保持不变地在其上匀速传播。这种方程称为波动方程。这一节我们以弦振动为例，来讲解波动方程及其特性。

### 10.8.1 波动方程及其通解

令(10.1-4)式所表示的弦的自由振动方程中， $T(x) = T$  (常数)， $\rho(x) = \rho$  (常数)，则该式可表示成

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad (10.8-1)$$

式中 
$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (10.8-2)$$

易知  $c$  具有速度的量纲，后面将证明，其实  $c$  就是波在弦上传播的速度。

易于验证，波动方程(10.8-1)的通解是

$$y(x,t) = F_1(x-ct) + F_2(x+ct), \quad (10.8-3)$$

式中， $F_1$ 、 $F_2$ 是任意的连续函数，其中 $F_1(x-ct)$ 表示沿 $x$ 轴正向以速度 $c$ 匀速传播的一个波，其波形保持不变。为了说明这一事实，试看图10.8-1，设在 $xoy$ 坐标系中有一波形

$$y(x,t) = F_1(x-ct), \quad (10.8-4)$$

而另有一坐标系 $x'o'y'$ ，该坐标系的 $x'$ 轴与 $xoy$ 系的 $x$ 轴相重合，且 $x'o'y'$ 系相对于 $xoy$ 系以速度 $c$ 沿 $x$ 轴正向匀速运动，并设 $t=0$ 时，这两个坐标系相重合。显然，任意一点，如图中 $A$ 点，

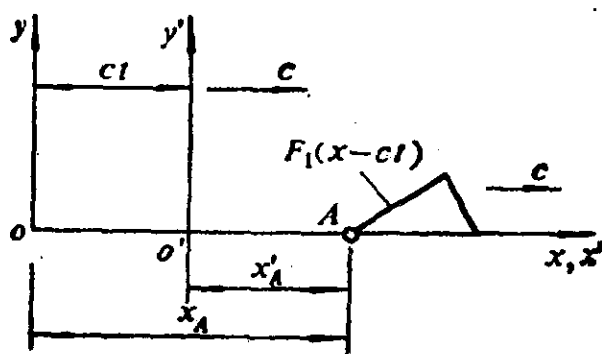


图 10.8-1

在上述两坐标系中的横坐标之间有以下变换关系:

$$x'_A = x_A - ct,$$

一般地说, 任一点的坐标变换关系为

$$x' = x - ct. \quad (10.8-5)$$

以此式代入(10.8-4)式, 得

$$y = F_1(x'), \quad (10.8-6)$$

这表明在  $x'o'y'$  坐标系中, 波形  $F_1(x-ct)$  是静止不动的, 由此可见该波形与  $x'o'y'$  系一样, 也是以匀速  $c$  沿  $x$  轴正向运动。

同理可以证明,  $F_2(x+ct)$  是一个沿  $x$  轴负向以匀速  $c$  传播, 且保持不变的波形。

视初始条件的不同,  $F_1, F_2$  可以是任意波形。以下我们着重讲解一种最基本的, 最常见的波形: 正弦波, 或称为谐波。先考虑一个幅值为  $A$ , 沿  $x$  轴正向传播的正弦波,

$$y(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct), \quad (10.8-7)$$

此函数有两个自变量: 空间坐标  $x$  与时间  $t$ , 因此一个波具有空间上的分布与时间上的变化两重性质。先看其空间上的分布特性, 为此我们令上式中  $t = t_1$ , 而考察该时刻的波形,

$$y(x) \Big|_{t=t_1} = y(x, t_1) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct_1), \quad (10.8-8)$$

其图形如图10.8-2所示。其重要特征参数是相邻两个波峰之间的

距离，或者更一般地说，相邻两个同相点之间的距离 $\lambda$ ，称为波长。波长的倒数

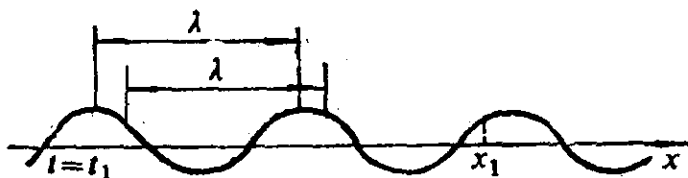


图 10.8-2

$$k = \frac{1}{\lambda} \quad (10.8-9)$$

称为波数，其意义为沿 $x$ 轴的单位长度中的波的数目。

其次再看其时间上的变化特性，为此，需观察 $x$ 轴上某一定点 $x_1$ 处的运动情况，即令 $x = x_1$ ，此时(10.8-7)式成为

$$y(t) \Big|_{x=x_1} = y(x_1, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 - ct), \quad (10.8-10)$$

其波形如图10.8-3所示。其重要的特征参数是连续两次出现极大

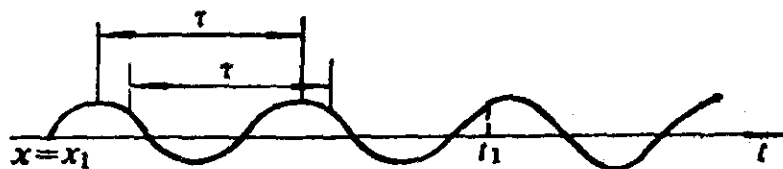


图 10.8-3

位移，或连续两次出现同一相位的时间间隔 $\tau$ ，称为周期。周期的倒数

$$f = \frac{1}{\tau} \quad (10.8-11)$$

称为频率，即单位时间内的振动次数。在 $2\pi$ 个单位时间中的振动次数

$$\omega = 2\pi f \quad (10.8-12)$$

称为圆频率或角频率，这些是读者已经熟悉的概念。

属于波的空间特性参数的波长 $\lambda$ 与属于波的时间特性参数的

频率 $f$ 之间有一个重要的关系，即

$$\lambda f = c, \quad (10.8-13)$$

即 $\lambda$ 、 $f$ 两者的乘积正好等于波的传播速度 $c$ 。读者从上述波的传播特点，应当不难理解以上等式的物理意义。

(10.8-7)式是以 $\lambda$ 与 $c$ 两个参数来表示正弦波的。利用(10.8-9)~(10.8-13)式的关系，易于写出正弦波的另一种表示方式，其中用到参数 $k$ 与 $\omega$ ，

$$y(x, t) = A \sin(2\pi kx - \omega t). \quad (10.8-14)$$

### 10.8.2 有限长的弦的自然模态·驻波

前面讲的是以速度 $c$ 在 $x$ 轴上移动的行波，现在看两个形状相同、移动速度大小相等，而方向相反的正弦行波相叠加的情况。

$$y(x, t) = A \sin(2\pi kx - \omega t) + A \sin(2\pi kx + \omega t), \quad (10.8-15)$$

采用和差化积的公式，上式可化成

$$y(x, t) = 2A \sin 2\pi kx \cos \omega t. \quad (10.8-16)$$

上式已分离变量，成为一种同步运动。同步运动所产生的波形在原地波动，称为驻波。

前面分析中为了暂时撇开边界条件的影响，而假设弦的长度为无限。现在回到有限长的弦的实际情况。前面讲过，有限长的弦的自然模态是一种同步运动，也就是一种驻波。这里我们将这种驻波看成是由于弦的两端点的反射波的叠加而形成的。图10.8-4是一段长度为 $L$ 、两端固定的弦。这里由于存在两个端点，即图10.8-4中的 $A$ 、 $B$ 两点，而我们略去了端点的摩擦与阻尼等损耗，因此当一个波在行进中碰到端点时，就会毫无损耗地被反射回来，由两个端点反射回来的波，行进方向相反，如前所述，可迭加而成为驻波，从而构成自然模态。其实我们可以将长度为 $L$ 的弦向其两固定端点外面无限延长，如图10.8-4中虚线所示，而将端点的反射波看成是由这两条虚线表示的两根半无限长弦传来的

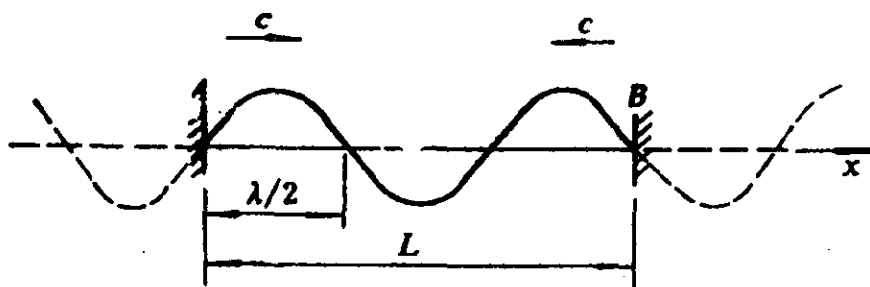


图 10.8-4

波动,那么我们就得到一条无限长的弦的振动.但是与前述无限长的弦的情况不同,这里一个至关重要的条件是:所形成的驻波必须与端点条件相适应,即驻波的节点必须正好落在两个端点上.正是这一条件造成了连续系统自然频率的分离性,即满足波动方程(10.8-1)的各种频率的正弦行波中,只有某些特定频率的正弦行波才满足端点上的边界条件,才可能因端点的反射、叠加而形成稳定的驻波,构成自然模态.而所有其它频率的行波都在两端点的多次反射中,自己抵消掉了.以下我们来定量地分析一下这个问题.正弦波的半波长为 $\lambda/2$ ,如图10.8-4所示,为满足端点条件,整段弦长 $L$ 中只能包含整数个半波长,即有 $L = r\lambda/2$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), 移项得

$$\lambda_r = 2L/r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.8-17)$$

上式表明允许的波长 $\lambda$ ,是离散的.而由(10.8-13)式,得

$$f_r = c/\lambda_r = rc/2L, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.8-18)$$

因此允许的频率也是不连续的.由(10.8-12)式,得自然圆频率也是不连续的,

$$\omega_r = r\pi c/L, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.8-19)$$

以(10.8-2)式代入,得

$$\omega_r = r\pi \sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}, \quad r = 1, 2, \dots$$

此即前面已经得到的(10.1-26)式,但这里是从端部条件的相容性导出这一公式的.从这里再一次看到连续系统自然模态与自然频率的离散性是来源于其尺度的有限性.

## § 10.9 梁的弯曲振动

我们已经讲过弦、杆与轴的振动，这些构件的振动遵循着共同的规律，彼此间有着明显的相似性。下面要讲的梁的弯曲振动却属于另一类型。

### 10.9.1 梁的弯曲振动的运动方程

图10.9-1(a)是一弯曲振动的梁。我们假设梁的长度与其截面高度之比大于10，因而材料力学中“简单梁的理论”成立，即梁中任一单元的转动动能与其横向移动动能比较起来，可以忽略；梁的剪切变形势能与其弯曲变形势能比较起来，可以忽略。我

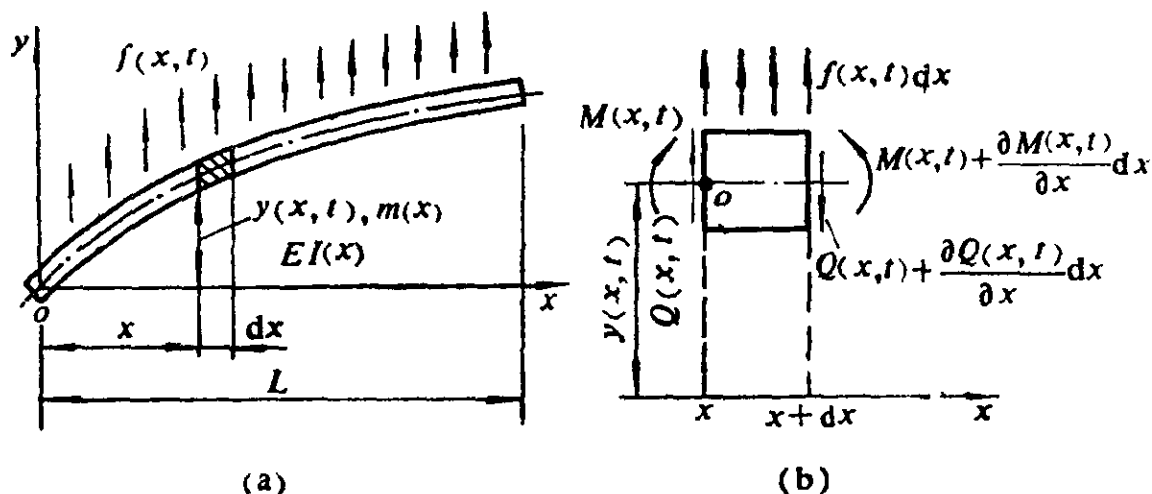


图 10.9-1

们以梁的挠曲线来描述其位形与振动。在图10.9-1(a)的坐标系中，此挠曲线为

$$y = y(x, t).$$

该图中 $m(x)$ 为单位长度的梁的质量，即线密度， $EI(x)$ 为截面

抗弯刚度， $f(x,t)$ 为梁的分布载荷。注意，这里 $f(x,t)$ 以向上为正。

为了推导梁振动的运动方程，我们在其上截取长度为 $dx$ 的一小段来分析，如图10.9-1(b)所示。在此小段的两端截面上作用有剪力 $Q$ ， $Q + dQ$ （图上所示方向的剪力使小段顺时针转动，为正）及弯矩 $M$ ， $M + dM$ （图上所示方向的弯矩使单元向上凹，为正），此外，该小段上还作用有分布载荷 $f(x,t)dx$ 。

以此小段为脱离体，分别列出其在 $y$ 方向及绕其左截面中点 $o$ 的平衡方程，得

$$Q(x,t) - \left[ Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx \right] + f(x,t)dx = m(x)dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (10.9-1)$$

$$\left[ M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] - M(x,t) - \left[ Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x,t)dx \cdot dx/2 = 0. \quad (10.9-2)$$

(10.9-2)式的右边之所以为零，是由于略去了小段的转动惯量。

简化以上两式，并略去高阶微量，得

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t), \quad (10.9-3)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = Q(x,t). \quad (10.9-4)$$

现在我们的目的是从以上两式中消去内力 $Q(x,t)$ 及 $M(x,t)$ ，而求出外载荷 $f(x,t)$ 与梁的挠曲线 $y(x,t)$ 之间的关系。但以上只有两个方程，要消去两个未知函数，还需再补充一个方程才行。这里我们要用到材料力学中表示梁的弯矩 $M(x,t)$ ，抗弯刚度 $EI(x)$ 及其弯曲变形之间的关系的公式：

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = M(x,t), \quad (10.9-5)$$

从(10.9-3)、(10.9-4)与(10.9-5)三式中消去 $Q(x,t)$ 与

$M(x, t)$ , 即得到梁的弯曲振动的运动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad (10.9-6)$$

式中 $L$ 是梁的长度。上式中 $y(x, t)$ 对于空间坐标的导数是四阶, 这一点与前述弦、杆、轴的运动方程是不相同的; 在那里对空间坐标 $x$ 的导数只是二阶。

当横向位移 $y$ 与载荷 $f$ 只是坐标的函数而不随时间变化, 且梁为均匀梁, 即 $I(x) = I$  (常数) 时, (10.9-6)式成为

$$EI \frac{\partial^4 y(x)}{\partial x^4} = f(x), \quad (10.9-7)$$

回到我们在材料力学中所熟知的梁在静载荷下的挠曲线的方程。

### 10.9.2 梁的边界条件

梁的典型的边界条件有以下几种:

1. 固支端 (图10.9-2(a)左端) 的边界条件是位移与转角为零,

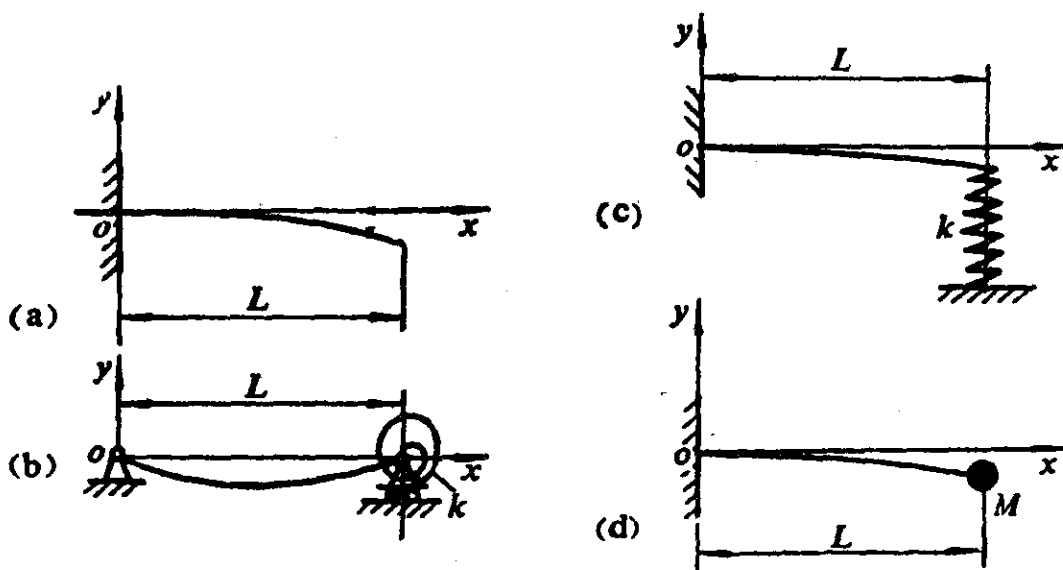


图 10.9-2



$$y(0,t) = 0, \quad (10.9-8)$$

$$\left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (10.9-9)$$

2. 铰支端 (图10.9-2(b)左端) 的边界条件是位移与弯矩为零,

$$y(0,t) = 0, \quad (10.9-10)$$

$$EI(x) \left. \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0. \quad (10.9-11)$$

3. 自由端 (图10.9-2(a)右端) 的边界条件是弯矩与剪力为零,

$$EI(x) \left. \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad (10.9-12)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \right|_{x=L} = 0. \quad (10.9-13)$$

4. 自由端带有横向弹簧 (图10.9-2(c)右端) 的边界条件是位移与剪力之间存在以下联系,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \right|_{x=L} = ky(L,t), \quad (10.9-14)$$

此外, 还有弯矩为零

$$EI(x) \left. \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0. \quad (10.9-15)$$

5. 铰支端带有卷簧 (图10.9-2(b)右端) 的边界条件是转角与弯矩之间有如下联系,

$$EI(x) \left. \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = -k \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}, \quad (10.9-16)$$

式中 $k$ 是卷簧的刚度系数, 此外还有位移为零

$$y(L) = 0. \quad (10.9-17)$$

6. 自由端带有集中质量 (图10.9-2(d)右端) 的边界条件为剪力与加速度之间存在以下联系,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \Big|_{x=L} = M \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L}, \quad (10.9-18)$$

式中  $M$  是端部集中质块的质量，另一个边界条件是弯矩为零，

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0. \quad (10.9-19)$$

此外，还有上述各种边界条件的组合，如弹簧与质块的组合，拉压弹簧与卷弹簧的组合等等，不再一一赘述。

### 10.9.3 梁的自由振动与模态

自由振动情况下  $f(x,t) = 0$ ，(10.9-6)式成为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L. \quad (10.9-20)$$

设同步运动为

$$y(x,t) = Y(x)\eta(t), \quad (10.9-21)$$

代入(10.9-20)式，以与10.1.2小节同样的思路与方法，可得关于  $\eta(t)$  的方程亦如(10.1-11)式，其解亦为(10.1-14)式，即为谐波。而特征函数  $Y(x)$  满足的方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] = \omega^2 m(x) Y(x), \quad 0 < x < L. \quad (10.9-22)$$

现在将讨论的范围缩小到均匀梁，即假定

$$I(x) = I(\text{const.}), \quad (10.9-23)$$

$$m(x) = m(\text{const.}). \quad (10.9-24)$$

于是(10.9-22)式成为

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (10.9-25)$$

式中 
$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}, \quad (10.9-26)$$

(10.9-25)式的通解为

$$Y(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \operatorname{sh} \beta x + C_4 \operatorname{ch} \beta x. \quad (10.9-27)$$

以下讨论上式在各种边界条件下的特解以及系统的自然模态。

### 1. 两端铰支梁的自然模态 (图10.9-3)

按照(10.9-10)、(10.9-11)式可以将特征函数 $Y(x)$ 在端点 $x=0$ 与 $x=L$ 处的边界条件表示为

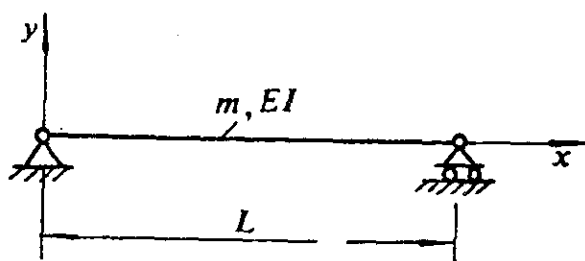


图 10.9-3

$$Y(0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad (10.9-28)$$

$$Y(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0. \quad (10.9-29)$$

将通式(10.9-27)代入上列四个边界条件, 可得

$$C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad (10.9-30)$$

及

$$C_1 \sin \beta L = 0. \quad (10.9-31)$$

为得非零解, 必有

$$\sin \beta L = 0, \quad (10.9-32)$$

- $\operatorname{sh} x$ 与 $\operatorname{ch} x$ 分别是双曲正弦与双曲余弦函数, 其定义为 $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ ,  $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ , 其间有以下关系,  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ,  $\operatorname{sh} 0 = 0$ ,  $\operatorname{ch} 0 = 1$ ,  $d(\operatorname{sh} x)/dx = \operatorname{ch} x$ ,  $d(\operatorname{ch} x)/dx = \operatorname{sh} x$ , 且定义 $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$ , 称为双曲正切函数。

因而

$$\beta L = r\pi, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.9-33)$$

由此可解出 $\beta$ , 并由(10.9-26)式得两端铰支的梁的自然频率

$$\omega_r = (r\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.9-34)$$

以(10.9-30)、(10.9-33)式代入(10.9-27), 得特征函数

$$Y_r(x) = C_1 \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.9-35)$$

按(10.1-11)式的办法对上式进行正规化, 即令

$$\int_0^L m Y_r^2(x) dx = 1, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.9-36)$$

可得出

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{mL}}. \quad (10.9-37)$$

于是经正规化的两端铰支梁的振型为

$$Y_r(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.9-38)$$

各阶振型与图10.1-5相似。

2. 一端固支一端自由的梁 (悬臂梁) 的自然模态 (图10.9-4(a))

其边界条件可按 (10.9-8)、(10.9-9)、(10.9-12)、(10.9-13)式表示为

$$Y(0) = 0, \quad \left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (10.9-39)$$

$$\left. \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0. \quad (10.9-40)$$

由(10.9-39)式中的两个边界条件, 可得出通式(10.9-27)中的四个常数之间有以下关系:

$$C_1 + C_3 = 0, \quad (10.9-41)$$

$$C_2 + C_4 = 0. \quad (10.9-42)$$

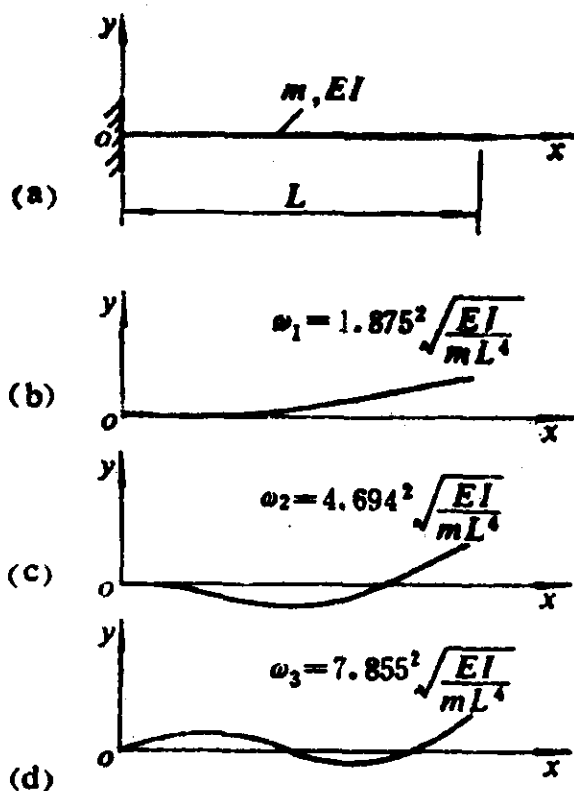


图 10.9-4

以此两式代入(10.9-27)式, 消去 $C_3$ 、 $C_4$ , 得

$$Y(x) = (\sin\beta x - \text{sh}\beta x)C_1 + (\cos\beta x - \text{ch}\beta x)C_2, \quad (10.9-43)$$

再利用(10.9-40)式中的两个边界条件, 得

$$(\sin\beta L + \text{sh}\beta L)C_1 + (\cos\beta L + \text{ch}\beta L)C_2 = 0, \quad (10.9-44)$$

$$(\cos\beta L + \text{ch}\beta L)C_1 + (-\sin\beta L + \text{sh}\beta L)C_2 = 0. \quad (10.9-45)$$

为得到非零解, 即 $C_1$ 、 $C_2$ 不全为零, 以上系数行列式必为零,

$$\begin{vmatrix} \sin\beta L + \text{sh}\beta L & \cos\beta L + \text{ch}\beta L \\ \cos\beta L + \text{ch}\beta L & -\sin\beta L + \text{sh}\beta L \end{vmatrix} = 0. \quad (10.9-46)$$

展开此式, 并简化, 即得特征方程, 或频率方程,

$$\cos\beta L \text{ch}\beta L = -1. \quad (10.9-47)$$

以数值方法求解上式, 可得出一系列的 $\beta \cdot L$ 值, 其中前几个 $\beta \cdot L$ 值列于表10.9-1. 其实, 当 $r \geq 3$ 时,  $\beta \cdot L$ 可以足够精确地表示为

$$\beta \cdot L \approx \left(r - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad r = 3, 4, \dots \quad (10.9-48)$$

表10.9-1 由特征方程(10.9-47)求出的 $\beta, L$ 值

$r$	1	2	3	4	5
$\beta, L$	1.875	4.694	7.855	10.996	14.137

以求得的 $\beta, L$ 值代入(10.9-26)式, 即得自然频率

$$\omega_r = (\beta_r L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.9-49)$$

求出 $\beta$ 后, 由(10.9-44)与(10.9-45)式即可求出 $C_1$ 与 $C_2$ 之比,

$$\xi_r = \left(\frac{C_2}{C_1}\right) = -\frac{\sin\beta_r L + \operatorname{sh}\beta_r L}{\cos\beta_r L + \operatorname{ch}\beta_r L} = \frac{\cos\beta_r L + \operatorname{ch}\beta_r L}{\sin\beta_r L - \operatorname{sh}\beta_r L}, \quad (10.9-50)$$

利用此式从(10.9-43)式中消去 $C_2$ , 得振型函数的表达式

$$Y_r(x) = C_1 \{(\sin\beta_r x - \operatorname{sh}\beta_r x) + \xi_r(\cos\beta_r x - \operatorname{ch}\beta_r x)\}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.9-51)$$

式中 $C_1$ 是待定系数。前三阶振型及相应的自然频率在图10.9-4中给出。我们再一次看到 $Y_r(x)$ 有 $r-1$ 个节点。

理论上可以有无限多个模态, 但由于“简单梁理论”的局限性, 所得出的模态的阶数愈高, 其准确性就愈差, 这是由于高阶振型的“皱褶”严重, 梁上各单元的转动动能及剪切变形能变得不可忽略的缘故。

## § 10.10 模态正交性

模态正交性指各模态的振型函数(即特征函数)之间的正交性。这一点在10.1.3小节中已就均匀弦的具体情况作了说明与检验。这里我们将以梁的振动为例, 在比较广泛的条件下, 证明这一重要性质。

与离散系统的情况相似, 为证明振型函数的正交性, 并不一

定需要将振型函数具体求出来，而可就特征值问题的方程(10.9-22)式来加以证明。我们假定 $Y_r(x)$ 与 $Y_s(x)$ 是两个不同的振型函数，而 $\omega_r$ 、 $\omega_s$ 是相应的自然频率，且假定

$$\omega_r \neq \omega_s \quad (10.10-1)$$

即不考虑重根的情况。 $Y_r(x)$ 、 $\omega_r$ ； $Y_s(x)$ 、 $\omega_s$ 均应该满足(10.9-22)式，故有

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right] = \omega_r^2 m(x) Y_r(x), \quad 0 < x < L, \quad (10.10-2)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \right] = \omega_s^2 m(x) Y_s(x), \quad 0 < x < L. \quad (10.10-3)$$

以 $Y_s(x)$ 乘(10.10-2)式，并从0到 $L$ 积分，得

$$\begin{aligned} & \int_0^L Y_s(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right] dx \\ &= \omega_r^2 \int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx, \end{aligned}$$

对上式左边施行两次分部积分，得

$$\begin{aligned} & \int_0^L Y_s(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right] dx \\ &= \left\{ Y_s(x) \frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right] \right\} \Big|_0^L \\ & \quad - \left[ \frac{dY_s(x)}{dx} EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right] \Big|_0^L \\ & \quad + \int_0^L EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} dx \\ &= \omega_r^2 \int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx, \quad (10.10-4) \end{aligned}$$

再以 $Y_r(x)$ 乘(10.10-3)式，从0到 $L$ 积分，同样施行两次分部积分，得

$$\begin{aligned} & \int_0^L Y_r(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \right] dx \\ &= \left\{ Y_r(x) \frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \right] \right\} \Big|_0^L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{dY_r(x)}{dx} EI(x) \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \right] \Big|_0^L \\
& + \int_0^L EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} dx \\
& = \omega_r^2 \int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx, \quad (10.10-5)
\end{aligned}$$

从(10.10-4)式减去(10.10-5)式, 得

$$\begin{aligned}
& (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx \\
& = \left\{ Y_r(x) \frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \right] - \frac{dY_r(x)}{dx} EI(x) \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \right. \\
& \left. - Y_s(x) \frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right] + \frac{dY_s(x)}{dx} EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right\} \Big|_0^L. \quad (10.10-6)
\end{aligned}$$

可以证明, 对于固支、铰支与自由端的各种边界条件, 上式的右边都为零, 因此有

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = 0, \quad (10.10-7)$$

但由于(10.10-1)式,  $\omega_r^2 - \omega_s^2 \neq 0$ , 只有

$$\int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots; r \neq s. \quad (10.10-8)$$

至此证明了同一系统的两个不同的振型函数  $Y_r(x)$ ,  $Y_s(x)$  对于线性密度函数  $m(x)$  的正交性。

以(10.10-8)式代入(10.10-4)式或(10.10-5)式, 得

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} dx = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots; r \neq s. \quad (10.10-9)$$

这是同一系统的两个不同振型函数对于弯曲刚度函数  $EI(x)$  的正交性, 这种正交性实际上是振型函数的二阶导数的正交性。回顾(10.1-36)式表示的弦的振型函数相对于张力函数  $T(x)$  的正交性, 那里是关于振型函数的一阶导数的正交性。这两者有一个共



同点：进入正交性表达式的两个振型函数的导数阶次的和，分别等于其运动方程(10.1-4)与(10.9-6)中位移函数 $y(x,t)$ 对于空间坐标 $x$ 的导数的阶次，前者是二阶，后者是四阶。

振型函数对于 $EI(x)$ 的正交性，除了(10.10-9)式以外，还可以有其它的表达式。事实上，以(10.10-8)式代入(10.10-4)与(10.10-5)式，可以分别得到

$$\int_0^L Y_r(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \right] dx = 0, \quad r \neq s, \quad (10.10-10)$$

与

$$\int_0^L Y_s(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right] dx = 0, \quad r \neq s. \quad (10.10-11)$$

以上两式中 $Y_r(x)$ 与 $Y_s(x)$ 处于不对称的位置，但它们对 $x$ 的导数的阶次之和仍然为四。

将(10.10-8)式与表示正规化条件的(10.1-31)式结合起来，有

$$\int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (10.10-12)$$

代入(10.10-4)或(10.10-5)式，得

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} dx = \omega_r^2 \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (10.10-13)$$

或

$$\int_0^L Y_r(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \right] dx = \omega_s^2 \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (10.10-14)$$

当梁的 $L$ 端为弹性支承(图10.9-2(c))或带有集中质量(图10.9-2(d))时，正交性的表达式略有不同。端部为弹性支承的梁的振型函数的正交性的表达式为，

$$\int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots; \quad r \neq s, \quad (10.10-15)$$

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} dx + k Y_r(L) Y_s(L) = 0,$$

$$r, s = 1, 2, \dots; r \neq s. \quad (10.10-16)$$

端部有集中质量的梁的振型函数的正交性的表达式为,

$$\int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx + M Y_r(L) Y_s(L) = 0,$$

$$r, s = 1, 2, \dots; r \neq s, \quad (10.10-17)$$

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} dx = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots; r \neq s.$$

$$(10.10-18)$$

## § 10.11 以振型叠加法研究梁的响应

在10.1节曾经讲过借助于振型函数的正交性,可以使描述连续系统运动的偏微分方程解耦成一系列的单自由度系统的运动方程,在求得各个单自由度系统的响应以后,叠加起来,就得到系统的全部响应,此即振型叠加法。在10.6及10.7节讲述了以这种思路求解弦、杆对于初始激励或过程激励的响应。这里讲述此法在计算梁的响应中的应用,我们将用Lagrange方程推出必要的关系式。

梁的振动可以写成多个模态的振动之和,

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \eta_r(t), \quad (10.11-1)$$

我们将 $\eta_r(t)$  ( $r = 1, 2, \dots$ )视为系统的广义坐标。

### 10.11.1 振动的动能

梁的动能可表达为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx. \quad (10.11-2)$$

以(10.11-1)式代入上式, 得

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \dot{\eta}_r(t) \right] \left[ \sum_{s=1}^{\infty} Y_s(x) \dot{\eta}_s(t) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \dot{\eta}_r(t) \dot{\eta}_s(t) \int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx, \end{aligned}$$

由于正交性关系(10.10-8)式, 上式可简化成

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{\eta}_r^2(t) \int_0^L m(x) Y_r^2(x) dx. \quad (10.11-3)$$

如果 $Y_r(x)$ 已按(10.10-12)式正规化, 则上式中的积分式当为1, 否则应等于某常数 $M_r$ ,

$$\int_0^L m(x) Y_r^2(x) dx = M_r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.11-4)$$

称为对应于广义坐标 $\eta_r$ 的广义质量, 代入(10.11-3)式, 得动能的表达式

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} M_r \dot{\eta}_r^2(t). \quad (10.11-5)$$

## 10.11.2 振动的势能

这里只需考虑弯曲势能, 梁的各截面的弯矩

$$M(x) = EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2},$$

梁上 $dx$ 的一小段的微转角,

$$d\theta = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} dx.$$

由此得系统的弯曲势能为

$$V = \frac{1}{2} \int M d\theta = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \quad (10.11-6)$$

以(10.11-1)式代入上式, 得

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \eta_r(t) \right] \\ &\quad \times \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} \eta_s(t) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \eta_r(t) \eta_s(t) \int_0^L EI(x) \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} dx. \end{aligned}$$

由正交性关系(10.10-9)式,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \eta_r^2(t) \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right]^2 dx. \quad (10.11-7)$$

如果  $Y_r(x)$  已按(10.10-13)式正规化, 则上式中的积分式为  $\omega_r^2$ , 否则应等于某常数  $K_r$ ,

$$\int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right]^2 dx = K_r, \quad r=1,2,\dots \quad (10.11-8)$$

称为对应于广义坐标  $\eta_r$  的广义刚度. 令(10.10-4)中  $r=s$ , 将(10.11-4)、(10.11-8)式代入该式, 可证

$$\omega_r^2 = K_r / M_r, \quad (10.11-9)$$

以(10.11-8)式代入(10.11-7)式, 得势能的表达式

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} K_r \eta_r^2(t). \quad (10.11-10)$$

### 10.11.3 广义力

由(10.11-1)式, 梁的线性虚位移为

$$\delta y = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \delta \eta_r(t),$$

梁的角度虚位移为

$$\delta\theta = \sum_{r=1}^n \frac{dY_r(x)}{dx} \delta\eta_r(t),$$

如果梁上作用有横向分布载荷  $f(x, t)$ , 作用在  $x = x_i$  处的集中力  $F_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) 与作用在  $x = x_j$  处的集中弯矩  $M_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), 则以上力和力矩的虚功为

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L \left\{ \left[ f(x, t) + \sum_{i=1}^l F_i(t) \delta(x - x_i) \right] \sum_{r=1}^n Y_r(x) \delta\eta_r(t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m M_j(t) \delta(x - x_j) \sum_{r=1}^n \frac{dY_r(x)}{dx} \delta\eta_r(t) \right\} dx \\ &= \sum_{r=1}^n \left[ \int_0^L f(x, t) Y_r(x) dx + \sum_{i=1}^l F_i(t) Y_r(x_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m M_j(t) \frac{dY_r(x)}{dx} \Big|_{x=x_j} \right] \delta\eta_r(t). \end{aligned} \quad (10.11-11)$$

另一方面, 按广义坐标  $\eta_r(t)$  及广义力  $Q_r(t)$ , 又可将虚位移表示为

$$\delta W = \sum_{r=1}^n Q_r(t) \delta\eta_r(t), \quad (10.11-12)$$

比较以上两式, 得广义力的表达式为

$$\begin{aligned} Q_r(t) &= \int_0^L f(x, t) Y_r(x) dx + \sum_{i=1}^l F_i(t) Y_r(x_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m M_j(t) \frac{dY_r(x)}{dx} \Big|_{x=x_j}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.11-13)$$

#### 10.11.4 各模态的运动方程及其解

将以上  $T$ 、 $V$ 、 $Q_r$  等量代入 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_r} + \frac{\partial V}{\partial \eta_r} = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.11-14)$$

即得一系列的单自由度系统的运动方程

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = \frac{1}{M_r} Q_r(t), \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.11-15)$$

如果分布载荷  $f(x, t)$  可以分离变量, 即有

$$f(x, t) = p(x)F(t), \quad (10.11-16)$$

这时方程(10.11-15)可化成

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = \frac{P_r}{M_r} F(t), \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.11-17)$$

式中

$$P_r = \int_0^L p(x) Y_r(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10.11-18)$$

方程(10.11-17)的解为

$$\begin{aligned} \eta_r(t) = & \eta_{0,r} \cos \omega_r t + \frac{1}{\omega_r} \dot{\eta}_{0,r} \sin \omega_r t \\ & + \left( \frac{P_r}{M_r \omega_r^2} \right) \omega_r \int_0^t F(\tau) \sin \omega_r (t - \tau) d\tau, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10.11-19)$$

式中  $\eta_{0,r}$  与  $\dot{\eta}_{0,r}$  是对应于广义坐标  $\eta_r(t)$  的初位移与初速度,

$$\eta_{0,r} = \eta_r(0), \quad \dot{\eta}_{0,r} = \left. \frac{d\eta_r(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

按照与推导(10.6-9)、(10.6-10)式相同的方法, 可求出  $\eta_{0,r}$ 、 $\dot{\eta}_{0,r}$  与梁的初位移  $f(x)$  及初速度  $g(x)$  之间的关系式

$$\eta_{0,r} = \frac{1}{M_r} \int_0^L m(x) f(x) Y_r(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (10.11-20)$$

$$\dot{\eta}_{0,r} = \frac{1}{M_r} \int_0^L m(x) g(x) Y_r(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots. \quad (10.11-21)$$

这里的公式与10.6及10.7节中的公式十分相似, 但读者需要注意, 这里的公式中振型函数  $Y_r(x)$  不需要按(10.1-31)式进行正规化。

**例10.6** 均匀简支梁在  $x=c$  处作用有一正弦力  $P \sin \omega t$ , 如图10.11-1所示, 设初始条件为零, 试求梁的响应。

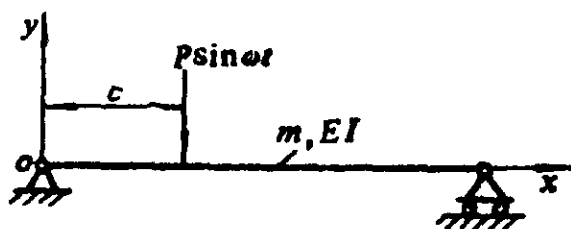


图 10.11-1

解：已知简支梁的自然频率为

$$\omega_r = (r\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}, \quad (a)$$

振型函数为

$$Y_r(x) = \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad (b)$$

梁的挠曲线方程为

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \eta_r(t), \quad (c)$$

对应于广义坐标  $\eta_r$  的广义质量为

$$M_r = \int_0^L m \left( \sin \frac{r\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{2} mL, \quad (d)$$

在  $x=c$  处的集中力  $P \sin \omega t$  可表示为

$$f(x, t) = \delta(x-c) P \sin \omega t,$$

广义力为

$$Q_r(t) = \frac{1}{M_r} \int_0^L f(x, t) Y_r(x) dx = \frac{2}{mL} P \sin \omega t \int_0^L \delta(x-c) \sin \frac{r\pi x}{L} dx = \frac{2P}{mL} \sin \frac{r\pi c}{L} \sin \omega t,$$

广义坐标的运动微分方程为

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \frac{2P}{mL} \sin \frac{r\pi c}{L} \sin \omega t, \quad r=1, 2, \dots,$$

上式对于零初始条件的解为

$$\eta_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \frac{2P}{mL} \sin \frac{r\pi c}{L} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega_r (t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{2P \sin \frac{r\pi c}{L}}{mL(\omega_r^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_r} \sin \omega_r t \right), \quad (e)$$

以(a)、(b)、(e)代入(c)，即得到系统的响应，

$$y(x, t) = \frac{2P}{mL} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{r\pi c}{L}}{\omega_r^2 - \omega^2} \sin \frac{r\pi x}{L} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_r} \sin \omega_r t \right). \quad (f)$$

上式括号中的第二项是一种瞬态的自由响应，其频率为系统的自然频率，这一项会由于系统中实际上存在的阻尼而消失，重要的是第一项所表示的稳态响应。如只计稳态响应，并假定 $\omega^2 \ll \omega_r^2$ ，即激励频率 $\omega$ 远低于系统的自然频率 $\omega_r$ ，于是(f)式中的自由响应项及分母中的 $\omega^2$ 可以略去，并以(a)式代入，则有

$$y(x, t) = \frac{2PL^3}{EI\pi^4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4} \sin \frac{r\pi c}{L} \sin \frac{r\pi x}{L} \sin \omega t. \quad (g)$$

这里求的实际上是作用在 $x=c$ 处的静载荷 $P$ 引起的挠度。如果 $P$ 正好作用在简支梁的中点（即 $c=L/2$ ），则

$$y(x, t) = \frac{2PL^3 \sin \omega t}{EI\pi^4} \left( \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{5\pi x}{L} - \dots \right). \quad (h)$$

从上式可明显看出，高阶模态的影响迅速衰减，仅取第一项已可以得出十分满意的近似值。例如我们从上式第一项求梁在中点处的最大挠度

$$\max y \Big|_{x=L/2} = \frac{2PL^3}{EI\pi^4} = \frac{PL^3}{48.7EI}. \quad (i)$$

从材料力学知道，以上问题的准确答案是 $PL^3/(48EI)$ ，上式的误差仅1.5%。



令  $\lambda = \omega/\omega_1$  (即激励频率与第一自然频率之比), 则从 (f) 式略去自由响应, 得稳态响应为

$$\frac{2PL^3}{EI\pi^4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4 - \lambda^2} \sin \frac{r\pi c}{L} \sin \frac{r\pi x}{L} \sin \omega t. \quad (j)$$

如果  $c = L/2$ , 则有

$$y(x, t) = \frac{2PL^3 \sin \omega t}{EI\pi^4} \left[ \frac{\sin(\pi x/L)}{1 - \lambda^2} - \frac{\sin(3\pi x/L)}{3^4 - \lambda^2} + \frac{\sin(5\pi x/L)}{5^4 - \lambda^2} - \dots \right]. \quad (k)$$

对于较小的  $\lambda$  值, 只取此式第一项已足够精确。将以上方程与 (h) 式比较, 可见动力挠度与静力挠度之比大约为  $1/(1 - \lambda^2)$ 。例如, 当  $\lambda = 1/4$ , 即激励频率是系统基频的  $1/4$  时, 那么动力挠度约比静力挠度大 6%。

**例 10.7** 简支梁的初始条件为零, 突然受到均布阶跃载荷  $f(x, t) = f_0 u(t)$  的作用, 这里  $f_0$  是常量,  $u(t)$  是单位阶跃函数, 试计算其响应。

解: 广义力为

$$\begin{aligned} Q_r(t) &= \int_0^L f_0 u(t) Y_r(x) dx \\ &= f_0 u(t) \int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} dx \\ &= f_0 u(t) \frac{L}{r\pi} (1 - \cos r\pi), \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (a)$$

显然当  $r$  为偶数时,  $Q_r = 0$ , 上式可简化为

$$Q_r(t) = 2f_0 \frac{L}{r\pi} u(t), \quad r = 1, 3, 5, \dots \quad (b)$$

广义质量已由上例求出, 如上例 (d) 式所示,

$$M_r = mL/2, \quad (c)$$

以 (b)、(c) 及上例中的 (a) 式代入 (10.11-19) 式, 得零初始条件的解为

$$\eta_r(t) = \frac{2}{mL} \frac{1}{r^2 \pi^2} \sqrt{\frac{mL^4}{EI}} 2f_0 \frac{L}{r\pi} \int_0^t u(t) \sin(r\pi)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} (t-\tau) d\tau = \frac{4f_0 L^4}{r^5 \pi^5 EI} \left[ 1 - \cos(r\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} t \right], \quad (d)$$

把上式及上例中(b)式代入(10.11-1)式, 得响应为

$$y(x,t) = \frac{4f_0 L^4}{\pi^5 EI} \sum_{r=1,3,\dots} \frac{1}{r^5} \sin \frac{r\pi x}{L} \left[ 1 - \cos(r\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} t \right]. \quad (e)$$

对以上结果有两点需说明, 第一, 所有的偶数模态未被激发, 这是由于偶数模态对于梁的中点 ( $x=L/2$ 处) 是反对称的, 而均布载荷  $f_0 u(t)$  对于中点是对称的, 对称的载荷无法激励反对称的模态; 第二, (e)式表明第一模态起主导作用, 式中第二项为第三模态, 其振幅与第一模态的振幅之比为  $(1/3)^5 = 0.4\%$ , 已经很小了.

## § 10.12 连续系统的动能、势能、符号确定性与瑞利商

### 10.12.1 动能、势能与符号确定性

(10.11-3)、(10.11-7)式给出了梁的动能与势能按模态的展开式. 现在只考虑一个模态, 则动能与势能可分别表示为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\eta}_r^2(t) \int_0^L m(x) Y_r(x) dx, \quad (10.12-1)$$

$$V = \frac{1}{2} \eta_r^2(t) \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y_r(x)}{dx^2} \right]^2 dx. \quad (10.12-2)$$

由(10.12-1)式可见动能 $T \geq 0$ , 而只有当 $Y, \equiv 0$ 时, 才有 $T = 0$ , 因而动能函数是正定的. 而(10.12-2)式表明势能 $V \geq 0$ , 可是除了 $Y, \equiv 0$ 的情况以外, 在以下两种情况下, 也会有 $V = 0$ : ①  $Y, (x) = \text{const}$ ; ②  $Y, (x) = Ax + B$  (即为常数或线性函数). 这表明势能函数是半正定的, 因而存在刚体模态. 事实上, 以上①、②这两种情况分别对应于整个梁作为刚体的平移与转动这两种模态.

对杆的纵向振动的情况, 其动能与势能的表达式分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx, \quad (10.12-3)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx. \quad (10.12-4)$$

与此类似, 轴的扭振的动能与势能分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L I(x) \left[ \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx, \quad (10.12-5)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L GJ(x) \left[ \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx. \quad (10.12-6)$$

而弦振动的动能与势能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left[ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx, \quad (10.12-7)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L T(x) \left[ \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx. \quad (10.12-8)$$

现在我们研究杆振动的一个模态的动能与势能, 按(10.2-9)式及(10.1-14)式, 将此模态的振动表示为

$$u(x,t) = U(x) \cos(\omega t - \psi), \quad (10.12-9)$$

代入(10.12-3)、(10.12-4)式, 得一个模态的动能与势能为

$$T(t) = \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^L m(x) U^2(x) dx \sin^2(\omega t - \psi), \quad (10.12-10)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx \cos^2(\omega t - \psi), \quad (10.12-11)$$

以上两式表明杆件纵向振动的动能是正定的, 而势能是半正定

的, 即存在  $U_0(x) = \text{const.}$  的刚体模态, 此模态表示杆件作为一个刚体沿其轴线方向运动。这与10.5.1小节的分析是一致的。

## 10.12.2 连续系统的瑞利商

### 1. 瑞利商的第一能量表达式

第九章讲过离散系统的瑞利商, 现在说明连续系统也能引入这一概念。上一小节已说明杆的一个模态的动能与势能可分别以(10.12-10)、(10.12-11)式表示, 由此得振动过程中的最大势能及最大动能分别为

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx, \quad (10.12-12)$$

$$T_{\max} = \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^L m(x) U^2(x) dx = \omega^2 T^*,$$

式中  $T^*$  称为参考动能,

$$T^* = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) U^2(x) dx. \quad (10.12-13)$$

我们知道当系统振动到极限位置时, 全部机械能都变成势能, 势能达到其极大值  $V_{\max}$ ; 而当系统经过平衡位置时, 全部机械能变成动能, 动能达到其极大值  $T_{\max}$ 。按能量守恒定理, 应有  $V_{\max} = T_{\max} = \omega^2 T^*$ , 由此得瑞利商的能量表达式

$$\lambda = \omega^2 = R(U(x)) = \frac{V_{\max}}{T^*}, \quad (10.12-14)$$

以(10.12-12)、(10.12-13)式代入, 得

$$\lambda = \omega^2 = R(U(x)) = \frac{\int_0^L EA(x) \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx}{\int_0^L m(x) U^2(x) dx}, \quad (10.12-15)$$

以上是杆振动的瑞利商的能量表达式。

对于梁的振动, 按(10.12-1)、(10.12-2)式也不难写出其瑞

### 利商的能量表达式

$$\lambda = \omega^2 = R(Y(x)) = \frac{V_{max}}{T^*} = \frac{\int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\int_0^L m(x) Y^2(x) dx}, \quad (10.12-16)$$

瑞利商的能量表达式也可以由特征函数所满足的方程(10.2-10)、(10.9-22)式推出。但采用(10.12-15)、(10.12-16)式的能量表达式来定义瑞利商，则有一个突出的好处：可以自动地将端部的弹性支承及集中质量纳入考虑。试以图10.12-1(a)、(b)、(c)中

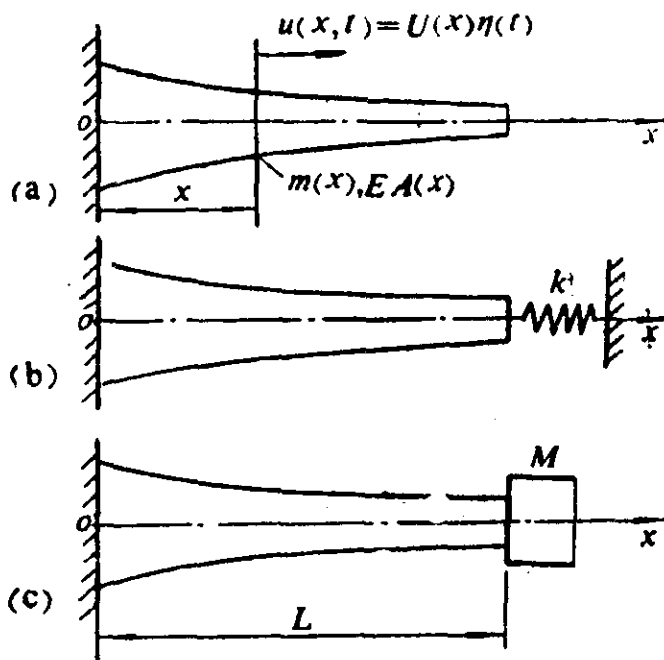


图 10.12-1

所示三种情况为例，三者均为一端固定的杆，而另一端则分别为自由、弹性支承或带有集中质量。三者的边界条件分别为

$$(a) \quad U(0) = 0, \quad \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0,$$

$$(b) \quad U(0) = 0, \quad EA(x) \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=L} = -KU(L).$$

$$(c) \quad U(0) = 0, \quad EA(x) \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=L} = M\omega^2 U(x).$$

对此三种情况按(10.12-14)式写出瑞利商的能量表达式分别为

$$\omega^2 = R(U) = \frac{V_{\max}}{T^*} = \frac{\int_0^L EA(x) \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx}{\int_0^L m(x) U^2(x) dx}, \quad (10.12-17)$$

$$\omega^2 = R(U) = \frac{V_{\max}}{T^*} = \frac{kU^2(L) + \int_0^L EA(x) \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx}{\int_0^L m(x) U^2(x) dx}, \quad (10.12-18)$$

$$\omega^2 = R(U) = \frac{V_{\max}}{T^*} = \frac{\int_0^L EA(x) \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx}{MU^2(L) + \int_0^L m(x) U^2(x) dx}, \quad (10.12-19)$$

(10.12-18)式的分子的推导过程如下:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{1}{2} ku^2(L,t),$$

式中第二项是弹性支承的势能。以(10.12-9)式代入, 得

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx \cos^2(\omega t - \psi) + \frac{1}{2} kU^2(L) \cos^2(\omega t - \psi).$$

由此

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx + \frac{1}{2} kU^2(L).$$

此外, (10.12-17)~(10.12-19)式的分子、分母中的“1/2”均已被消去了。

(10.12-19)式分母的推导过程与以上类似。但是可以有更简便的办法, 即令(10.12-17)式分母中的 $m(x)$ 为 $m(x) + M\delta(x -$

$L$ ), 式中 $\delta(x-L)$ 为 $\delta$ -函数, 立即可得到(10.12-19)式的分母。

以上我们假定瑞利商的能量表达式(10.12-15)中 $U(x)$ 是某个特征函数 $U_r(x)$  ( $r=1, 2, \dots$ ), 而 $\omega^2 = \omega_r^2 = \lambda_r$ 是相应的特征值。现在我们放宽这个限制: 设 $U(x)$ 是满足边界条件的任一函数(需要有计算势能所必要的导数, 而且导数应连续), 那么瑞利商 $\lambda = \omega^2 = R(U)$ 成为与函数 $U(x)$ 在区间 $(0, L)$ 上的具体形式相对应的某一个数值。从这个意义上讲, 连续系统的瑞利商是一种“泛函”。显然当此泛函的“自变量” $U(x)$ 取某一特征函数 $U_r(x)$ 时, 则此泛函的取值正好是相应的特征值 $\lambda_r = \omega_r^2$ , 而当 $U(x)$ 偏离 $U_r(x)$ 时,  $\lambda$ 也偏离 $\lambda_r$ 。值得说明的是, 与离散系统的瑞利商相似, 连续系统的瑞利商在特征函数的附近也存在一驻值。就是说, 如果取某试算函数 $U(x)$ , 它与某特征函数 $U_r(x)$ 的偏差是一阶微量的话, 则瑞利商的取值 $\lambda = R(U(x))$ 与相应特征值 $\lambda_r$ 的差是二阶微量。特别是在第一阶特征函数 $U_1(x)$ 上, 瑞利商取局部极小值, 即与在 $U_1(x)$ 的邻域内的任何试算函数 $U(x)$ 相对应的瑞利商给出第一阶特征值 $\lambda_1 = \omega_1^2$ 的上界估计。利用这一性质, 可以估计一个连续系统的基频, 我们将在下一章讲述这一方法。

## 2. 瑞利商的第二能量表达式

与离散系统相似, 还存在瑞利商的第二种能量表达式。以下以悬臂梁(图10.12-2)为例, 来说明这种表达式。设 $Y(x)$ 为一个振型函数或试算函数,  $\omega$ 为相应的自然频率, 或者为其估

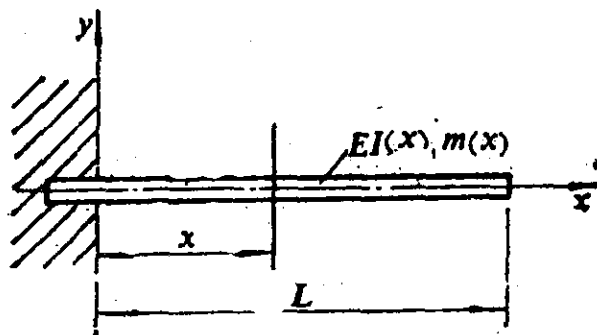


图 10.12-2

值。在自由振动时，分布的惯性力的幅值为 $\omega^2 m(x)Y(x)$ ，而振动到极端位置时的剪力为

$$Q(\xi) = \omega^2 \int_{\xi}^L m(\xi) Y(\xi) d\xi, \quad (10.12-20)$$

弯矩为

$$M(x) = \int_{\xi}^L Q(\xi) d\xi = \omega^2 \int_{\xi}^L \int_{\xi}^L m(\xi) Y(\xi) d\xi d\xi, \quad (10.12-21)$$

梁的最大势能为

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(x)}{EI(x)} dx, \quad (10.12-22)$$

以(10.12-21)式代入上式，得

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \omega^4 \int_0^L \frac{1}{EI(x)} \left( \int_{\xi}^L m(\xi) Y(\xi) d\xi \right)^2 dx. \quad (10.12-23)$$

另一方面，最大动能可表示为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L m(x) Y^2(x) dx, \quad (10.12-24)$$

由 $V_{\max} = T_{\max}$ 即得瑞利商的第二能量表达式：

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L m(x) Y^2(x) dx}{\int_0^L \frac{1}{EI(x)} \left( \int_{\xi}^L m(\xi) Y(\xi) d\xi \right)^2 dx}. \quad (10.12-25)$$

此式是由悬臂梁的边界条件得出的，对于其它的边界条件，也可得出相应的表达式。

按(10.12-25)式估算梁的基频比按(10.12-16)式估算的工作量要大，但按(10.12-25)式有一个很大的好处，就是只对试算函数 $Y(x)$ 进行积分，而不需进行微分。积分是一种“平均”的运算，有利于冲淡试算函数的局部误差的影响，因此其估算精度较高。我们将在下一章以实例来说明这一点。



## 思 考 题

以下的说法对不对? 如果不对, 错在哪里!

1. 客观上存在离散系统与连续系统这两类不同的系统, 其数学模型也完全不同。

2. 弦、杆、轴、梁的运动方程都具有相同的形式。

3. 离散系统的诸自然频率是离散的, 而连续系统的自然频率则是在一定范围内连续分布的。

4. 一个连续系统的自然频率不仅与其自身的参数有关, 而且也取决于其边界条件。

5. 一杆一端固定, 另一端被拉长 $l_0$ , 在 $t=0$ 时突然释放, 则初始条件可表示为: 初位移 $u(x,0)=f(x)=l_0$ , 初速度 $\dot{U}(x,0)=g(x)=0$ 。

6. 一集中力 $P_0$ 作用在一端固定的杆的自由端, 其分布函数为 $f(x,t)=P_0$ 。

7. 连续系统的自然频率与自然模态的离散性来源于系统尺度的有限性。

8.  $Y_r(x)$ 是某梁在简支状态下的一个振型函数,  $Y_s(x)$ 是该梁在悬臂状态下的另一个振型函数, 则它们对于质量函数 $m(x)$ 的正交性可表示为

$$\int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = 0.$$

9. 梁的振型函数对于刚度函数 $EI(x)$ 的正交性的表达式为 $\int_0^L EI(x) \times Y_r(x) Y_s(x) dx = 0$ 。

10. 图10.12-1(a)、(b)、(c)中的三个变截面杆如果是一样的, 仅后两者的右端加有弹性支承或集中质量, 这三种条件下的振型函数 $U_r(x)$  ( $r=1,2,\dots$ ) 应该相同。

## 习 题

10-1 图10-1所示为一上端固定下端自由的柔软绳子，试写出绳子作横向自由振动的运动方程。



图 10-1

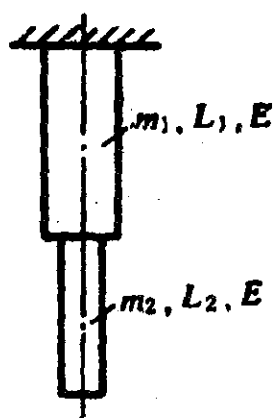


图 10-2

10-2 试求图10-2所示阶梯杆纵向振动的频率方程。

10-3 图10-3所示为一长为 $L$ 的弦，其左端固定，右端联于一弹簧质量系统的质量 $M$ 上。  $M$ 只能作上下微振动，其静平衡位置即在 $y=0$ 处。试求此弦横向振动的频率方程。在振动过程中，弦的张力 $T$ 视为不变。

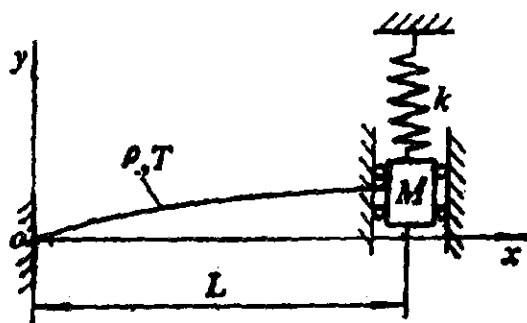


图 10-3

10-4 图10-4所示为一变截面直杆，其两端均有弹簧与集中质块。试推导其主振型的正交性表达式。

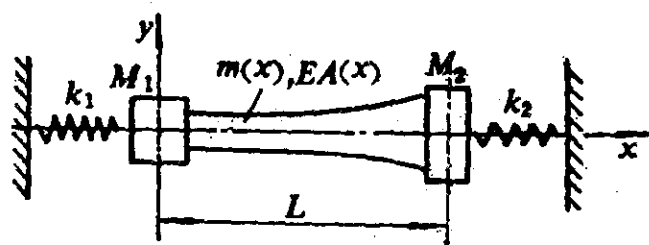


图 10-4

10-5 试证明变截面杆纵向振动振型函数的正交性

$$\int_0^L m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots; r \neq s,$$

$$\int_0^L EA(x) \frac{dY_r(x)}{dx} \cdot \frac{dY_s(x)}{dx} dx = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots; r \neq s.$$

10-6 一特殊人造卫星，由钢缆连接两个相等质量  $m$  组成，如图 10-6 所示，钢缆长  $2L$ ，单位长度的质量为  $\rho$ ，整个卫星装置以角速度  $\omega_0$  绕其质心旋转。假设钢缆中的张力可以看作常数，证明钢缆在旋转平面内横向振动的微分方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{m\omega_0^2 L} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial L^2} - \omega_0^2 y \right).$$

10-7 长  $L$  的均匀圆轴，单位长度的质量为  $\rho$ ，截面抗扭刚度为  $GJ$ ，中间截面固支，两端自由，试确定其扭振固有频率。

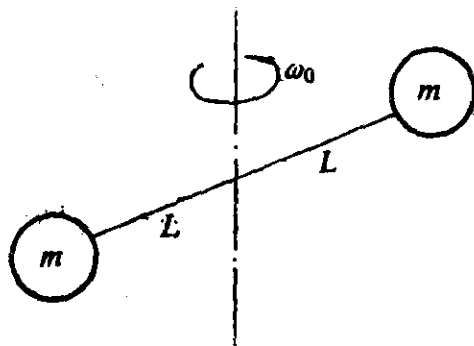


图 10-6

10-8 一根长  $L$  以常速度  $v$  沿其轴运动的均匀杆，在  $t=0$  时，在其中点处突然被卡住，试求其自由振动。

10-9 一两端固定的均匀杆，在其中点处受一轴向恒力  $F$  的作用，当  $t=0$  时，此力突然取消，求系统的响应。

10-10 一均匀轴以角速度  $\omega_0$  匀速旋转，在  $t=0$  时其左端突然卡死，求其扭振。

10-11 一根两端自由的均匀杆，在  $x=0$  端点处作用一轴向斜坡力  $P = P_1 t/t_1$ ，假设该杆起始于静止状态，试确定该力引起的纵向振动。

10-12 一根在  $x=0$  端固定， $x=L$  端自由的均匀杆，受均匀分布的轴

向力  $(P_1/L) \sin \omega t$  的作用, 试导出由此扰动引起的稳态强迫振动。

10-13 一两端固定的均匀杆, 在  $t=0$  时由静止状态突然受到分布恒定的轴向载荷  $q(x,t) = q_0 x/L$  的作用, 求其响应。

10-14 一根在  $x=L$  端固定,  $x=0$  端自由的均匀杆, 其自由端因受外力扰动产生了  $u(0,t) = d \cos \omega t$  的变形, 试求杆的稳态响应。

10-15 一简支均匀梁的右端有一悬臂, 如图10-15所示, 试证其振型函数为

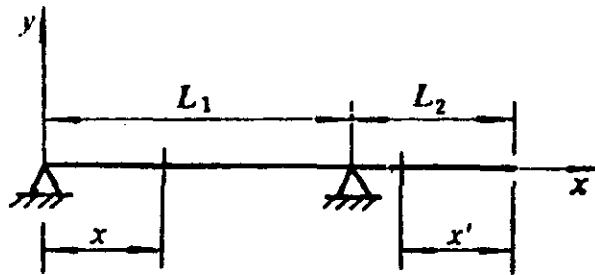


图 10-15

$$Y(x) = \begin{cases} \sin \beta x - \frac{\sin \beta L_1}{\text{sh} \beta L_1} \text{sh} \beta x, & 0 < x < L_1 \\ \cos \beta x' + \text{ch} \beta x' - \left( \frac{\cos \beta L_2 + \text{ch} \beta L_2}{\sin \beta L_2 + \text{sh} \beta L_2} \right) (\sin \beta x' + \text{sh} \beta x'), & 0 < x' < L_2 \end{cases}$$

这里,  $\beta^4 = \omega^2 \frac{m}{EI}$ ,  $x, x'$  分别从两端量起。

10-16 试求两端均附有集中质量  $m$  的自由均匀梁的频率方程。

10-17 试求一根简支工字梁在其腹板平面内振动时的固有频率  $f_1$ , 设  $L=10\text{m}$ ,  $E=3 \times 10^7 \text{N/cm}^2$ ,  $I=91060 \text{cm}^4$ , 单位长度上的重量为  $13.7 \text{kg/m}$ 。

10-18 试求一端铰支一端自由的梁的振动的频率方程。

10-19 一简支梁因作用于跨度中央处的恒力  $P$  而产生挠曲, 在  $t=0$  时刻,  $P$  力突然移开, 求梁的振动。

10-20 一简支梁受强度为  $f_0$  的均布恒定载荷作用, 试求载荷突然移去时, 该梁发生的振动。

10-21 一简支梁在距其两端  $1/3$  长度处有两个脉动力  $P \sin \omega t$  同时作用,  $\omega$  等于梁的基本频率的一半, 试求梁的中点处的振幅。

10-22 一简支梁受到一正弦力 $P\sin\omega t$ 的作用,此力的作用点则以匀速 $v$ 从左向右移动,试求其响应。

10-23 一悬臂梁在自由端受脉动力 $P\sin\omega t$ 的作用,试求其自由端的稳态强迫响应。

10-24 试由梁的特征函数满足的方程(10.9-22)出发,推导出瑞利商的表达式(10.12-15)式。

提示:要用到分部积分,并计及边界条件。

# 第十一章 连续系统的离散化与 近似解法

上一章讲过，离散系统只是真实的连续系统的一种近似模型，而当这种近似的精度不能满足要求时，就必须增加模型的自由度，或者采用连续模型。可是另一方面，从上一章可以看到，我们对连续模型精确求解的能力却十分有限，仅限于均匀的弦、杆、轴、梁等十分简单的构件，才能写出无穷级数形式的解。事实上，由于我们不可能计算此级数的无限多项，因此，就连这些简单构件的解，实质上也是近似的。杆、梁等构件如果是变截面的，由于其特征函数所满足的方程是一种变系数的线性常微分方程，如(10.2-10)、(10.9-22)式所示，一般情况下也是无法精确求解的。至于其它的比较复杂的构件，就连列出其精确的运动方程也困难。鉴于这种情况，为解决各种工程实际问题，将连续系统加以离散化，建立离散模型，并由此求出连续系统的近似解的办法，乃是一种势在必行而又切实可行的办法。

读者不应误解，以为前面一章讲述的关于连续模型及其精确解的有关知识，似乎没有什么用处。事实上，上一章中得到的种种概念、规律和结论，反映了连续系统的本质与特点，对于建立连续系统的离散模型，寻求其振动问题的近似解，有着重要的指导意义。

本章讲述连续系统离散化与近似求解的各种方法与技巧。先讲解估算连续系统的基频的几种方法，然后进一步讲述连续系统离散化以及求取前几个模态的近似解的更为精细的方法。

## § 11.1 估算系统基频的几种方法

由于基频振动在系统的自由响应和强迫响应中往往起主导作用，而且当一台工作机械启动时，基频是最先发生共振的频率，是机械的运行速度第一个要避免、或者要闯过的频率，由此可见，估算系统的基频，具有重要的实际意义。

### 11.1.1 Rayleigh 能量法

所谓Rayleigh能量法就是指10.12.2小节中提到过的，以瑞利商的能量表达式来估算系统的基频。

以瑞利商估计系统的基频的可靠性与准确性，取决于试算函数的合理选取。前面说过，试算函数需满足系统的边界条件。边界条件有两种：杆的固定端、梁的铰支或固支端的边界条件属于一种几何约束，称为“几何边界条件”；而自由端、弹性支承或带有集中质量的边界条件，则是一种力的平衡条件，称为“力学边界条件”。所选择的试算函数如果同时满足以上两类边界条件，估计精度当然更好，但如果只满足几何边界条件，也能保证一定的精度。这是由于在瑞利商的能量表达式中，已经将弹性支承与集中质量的影响部分地反映出来。

对于非均匀构件，近似地取边界条件相同的均匀构件的特征函数作为试算函数，也能达到一定的精度。这是因为构件的不均匀性，如 $A(x)$ ， $m(x)$ 等，已经在瑞利商中有所反映。

此外，还可用构件在某种静载荷下的变形分布作为试算函数。

以下举例说明以瑞利商估算连续系统的基频的方法与效果。先采用第一能量表达式。

**例11.1** 如图10.5-4所示, 杆端附有集中质量 $M$ , 试估算其基频 $\omega_1$ .

**解:** 取不带质块 $M$ 的一端固定的杆的第一阶振型函数作为试算函数,

$$U(x) = \sin \frac{\pi x}{2L},$$

此函数只满足几何边界条件, 即(10.5-16)式, 而不满足力学边界条件(10.5-17)式. 代入(10.12-19)式, 并利用(10.5-19)式, 得

$$\omega_1^2 = R\left(\sin \frac{\pi x}{2L}\right) = \frac{\eta}{\eta+2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EA}{mL^2},$$

即

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\eta}{\eta+2}} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}.$$

与(10.5-22)式比较, 有

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\eta+2}},$$

此式可作为表10.5-1中数值的近似拟合公式, 在 $\eta$ 较大时, 其准确性较好.

**例11.2** 试估算图10.9-4所示均匀悬臂梁的基频 $\omega_1$ .

**解:** 取该梁在均布静载荷 $q$ 的作用下的挠曲变形为试算函数

$$Y(x) = \frac{q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2), \quad (a)$$

显然此式同时满足几何边界条件(10.9-39)及力学边界条件(10.9-40).

由(10.12-1)、(10.12-2)式不难写出梁的瑞利商的表达式

$$\omega = R(Y) = \frac{V_{max}}{T^*} = \frac{\int_0^L EI \left[ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\int_0^L m Y^2(x) dx}, \quad (b)$$

以(a)式代入, 可算出



$$\omega_1^2 = \frac{162}{13} \frac{EI}{mL^4},$$

即

$$\omega_1 = 3.53 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}. \quad (c)$$

取另外一个试算函数

$$Y(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}, \quad (d)$$

此式只满足几何边界条件，但不满足力学边界条件。代入 (b) 式后，可算出

$$\omega_1 = 3.66 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}. \quad (e)$$

由于估计给出的是真值的上界，以上两个结果应取小者，即取 (c) 式的结果。这是意料中的，因为试算函数 (a) 比 (d) 满足更多的边界条件。图 10.9-4 中给出了  $\omega_1$  的真值，为

$$\omega_1 = 1.8752^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 3.5164 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}},$$

(c) 式的相对误差为 0.39%。

**例 11.3** 上述悬臂梁的自由端加一弹性支承 如图 10.9-2(c) 所示，试估算其基频  $\omega_1$ 。

**解：**仍取试算函数为上题中的 (a) 式，即此时该函数并不满足力学边界条件，瑞利商的表达式为

$$\omega = R(Y) = \frac{V_{\max}}{T^*} = \frac{\int_0^L EI \left[ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]^2 dx + kY^2(L)}{\int_0^L mY^2(x) dx}, \quad (a)$$

以例 11.2 (a) 式代入本题 (a) 式，得

$$\omega_1 = 3.53 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \sqrt{1 + \frac{kL^3}{3EI}}. \quad (b)$$

上式中的  $kL^3/3EI$  即为支承刚度  $k$  与悬臂梁的端部刚度  $3EI/L^3$  之

比。当此比值为零时，回到上题(c)式的结果。

例11.4 图11.1-1所示为一变截面的轴，其单位长度的转动惯量 $I(x)$ 及抗扭刚度 $GJ(x)$ 如下：

$$I(x) = \frac{6}{5} I \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (a)$$

$$GJ(x) = \frac{6}{5} GJ \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (b)$$

试估算其扭振的基频 $\omega_1$ 。

解：取边界条件相同的均匀轴的第一阶振型作为试算函数，

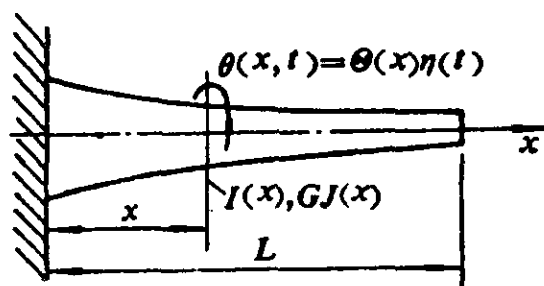


图 11.1-1

$$\Theta(x) = \sin \pi x / 2L, \quad (c)$$

而与(10.12-15)式相似，轴扭振的瑞利商为

$$\omega^2 = \lambda = R(\Theta) = \frac{V_{\max}}{T^*} = \frac{\int_0^L GJ(x) (d\Theta(x)/dx)^2 dx}{\int_0^L I(x) \Theta^2(x) dx}, \quad (d)$$

将(c)式代入上式，得

$$\omega_1^2 = 3.15044 \frac{GJ}{IL^2},$$

即

$$\omega_1 = 1.77495 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}.$$

而由比较精确的计算（见例11.8）知，

$$\omega_1 = 1.77187 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}$$

以上估算的相对误差为0.17%。

从以上各例可见，只要试算函数选取得当，瑞利商确可给出比较简单的连续系统的基频的相当准确的估计。

以上是按瑞利商的第一能量表达式估算基频，以下则举例说明按第二能量表达式(10.12-25)估算基频的效果，及其与第一能量法的比较。

**例11.5** 试估算均匀悬臂梁的基频，分别取以下试算函数：

(a)  $Y(x) = Y_0(3Lx^2 - x^3)$

(b)  $Y(x) = Y_0x^{3/2}$

(c)  $Y(x) = Y_0x^2$

(d)  $Y(x) = Y_0x$

解：由图10.9-4(b)知精确解为

$$\omega_1 = 3.516\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (a)$$

将题设四个试算函数分别代入(10.12-16)式与(10.12-25)式，并将估算出的基频一般地表达为

$$\omega = \beta\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (b)$$

以两种能量法，采用四种试算函数所估算出的基频的 $\beta$ 值及其与(a)式比较的相对误差列于表11.1-1。

**表11.1-1 各种试算函数以两种能量法估计出的基频的 $\beta$ 值及其相对误差**

试算函数		(a)	(b)	(c)	(d)
方法					
第一能量法	$\beta$	3.567	—	4.472	—
	误差 %	1.45	—	27.19	—
第二能量法	$\beta$	3.517	3.518	3.531	3.567
	误差 %	0.03	0.06	0.43	1.45

值得注意的是，甚至当试算函数( $d$ )不完全满足梁的几何边界条件时，按第二能量法仍然能得到相当满意的结果。

### 11.1.2 静挠度法

静挠度法的实质是按系统在重力作用下的静挠度去估计最大势能和动能，然后按瑞利商的能量表达式，估算系统的基频。

图11.1-2表示一悬臂梁上带有若干集中质量 $M_1, M_2, \dots, M_n$ ，这些质量可以是原来就附带在梁上的，也可以是由梁上的分布质量集中而成，其方法见下例及11.2节。我们假设梁上的分

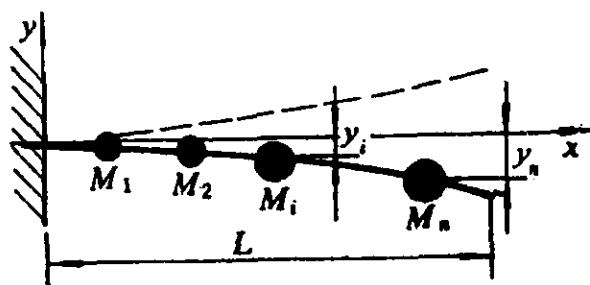


图 11.1-2

布质量或者已经集中成若干个质块，或者与原有的集中质块比较，可以略而不计。由于各质块的重量的共同作用，各质块所在处的静挠度设为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。我们再假设在重力作用下梁的静挠度曲线可以近似地代表其振动的极限位置。由此得梁振动的最大弹性势能为

$$V_{\max} = \frac{1}{2}g(M_1 y_1 + M_2 y_2 + \dots + M_n y_n),$$

而最大动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2}\omega^2(M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \dots + M_n y_n^2),$$

由 $V_{\max} = T_{\max}$ ，得基频的表达式

$$\omega_1^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n M_i y_i}{\sum_{i=1}^n M_i y_i^2} \quad (11.1-1)$$

按此式即可估算一个系统的基频。值得提到的是，以此法估算基频时，并不象Rayleigh能量法那样，需要预先对第一振型函数作出估计。但是此法的估算精度一般较Rayleigh能量法差。

例11.6 图11.1-3(a)是一简支均匀梁，将其等分为三段，

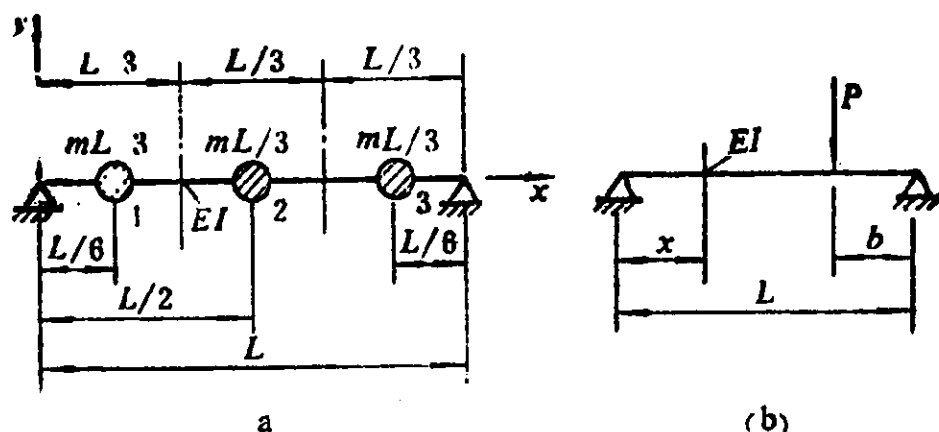


图 11.1-3

将每段的质量分别向其中点 1, 2, 3 集中，成为三个集中质量，而梁本身认为只有抗弯刚度  $EI$ ，而不再计其质量或惯性。试以静挠度法估算其基频。

解：由材料力学知，图(b)中简支梁上作用的集中力  $P$  在  $x$  处引起的挠度可按下式计算，

$$Y(x) = \frac{Pbx}{6EIL}(L^2 - x^2 - b^2), \quad x \leq (L - b). \quad (a)$$

以(a)式可计算由于每一个质块的重量  $mgL/3$ ，分别在三个位置上所引起的静挠度，我们以  $y_{ij}$  表示由于位置  $j$  上的质块的重量在  $i$  位置上引起的静挠度 ( $i, j = 1, 2, 3$ )，则计算结果可以排成以下矩阵：

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = g \frac{mL^4}{EI} \cdot \frac{1}{11664} \begin{pmatrix} 25 & 39 & 17 \\ 39 & 81 & 39 \\ 17 & 39 & 25 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

由于三个集中质块的重量的共同作用，在位置1, 2, 3上所引起的总的静挠度为：

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{11} + y_{12} + y_{13} = g \frac{mL^4}{EI} \cdot \frac{1}{144}, \\ y_2 &= y_{21} + y_{22} + y_{23} = g \frac{mL^4}{EI} \cdot \frac{53}{3888}, \\ y_3 &= y_{31} + y_{32} + y_{33} = g \frac{mL^4}{EI} \cdot \frac{1}{144}. \end{aligned} \quad (c)$$

代入(11.1-1)式，得

$$\omega_1^2 = \frac{EI}{mL^4} \frac{\frac{1}{144} + \frac{53}{3888} + \frac{1}{144}}{\left(\frac{1}{144}\right)^2 + \left(\frac{53}{3888}\right)^2 + \left(\frac{1}{144}\right)^2} = 97.496 \frac{EI}{mL^4}$$

即

$$\omega_1 \approx 9.874 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}. \quad (d)$$

由(10.9-34)式，知此题的精确解是  $\omega_1 = 9.8696 \sqrt{EI/mL^4}$ ，可见以上估算的误差仅为0.04%。但如果只将梁分成两段，则估算误差就大得多。误差的来源一是由于集中质量，二是由于以静态挠曲线代表振型曲线函数。

### 11.1.3 Dunkerley法 (迹法)

11.1.1小节中已说明，Rayleigh能量法可给出基频的上限估计，而9.1.2小节讲述的Dunkerley法则可给出基频的下限估计，两者结合起来，可以给出基频的存在区间。我们在这里讲述Dunkerley法在连续系统中的应用，以及连续系统基频存在区间

的确定方法。

由(9.1-30)式, 我们知Dunkerley法可表示为

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\Omega_n^2}, \quad (11.1-2)$$

式中 $\omega_1$ 是系统的基频;  $\Omega_i$ 是系统中只存在第*i*个质量单元时, 系统的基频( $i = 1, 2, \dots, n$ )。上式成立的必要条件是质量矩阵为对角矩阵, 其物理意义是各质量单元排列成链状结构。此外, 与 $\omega_2, \omega_3, \dots$ 比较起来,  $\omega_1$ 愈小, 则(11.1-2)式估计愈准。

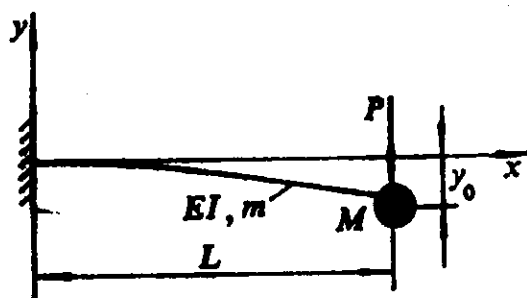


图 11.1-4

**例11.7** 试分别以 Rayleigh法与Dunkerley法估计自由端带有集中质量*M*的均匀悬臂梁(图11.1-4)的基频, 并确定基频真值的存在区间。

**解:** 首先按Rayleigh能量法, 取悬臂梁在自由端集中载荷作用下的静挠度作为试算函数。

$$y(x) = y_0 \left( \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3} \right), \quad (a)$$

式中 $y_0$ 为自由端的最大挠度。此例中瑞利商的表达式为

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L EI \left[ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\int_0^L m Y^2(x) dx + Y^2(L) M}, \quad (b)$$

以(a)式代入(b)式, 即得基频的上限估计为

$$\bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{0.333 + 0.078\alpha}} \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad (c)$$

式中 
$$\alpha = \frac{mL}{M}, \quad (d)$$

是梁的质量*mL*与集中质量*M*之比。

其次，按Dunkerley法。已知均匀悬臂梁的基频为

$$\Omega^2 = 3.516^2 \frac{EI}{mL^4}; \quad (e)$$

而由例1.7知，不计质量的均匀悬臂梁，在端部带有集中质量时，系统的固有频率为

$$\Omega^2 = 3 \left( \frac{EI}{ML^3} \right) = 3\alpha \frac{EI}{mL^4}, \quad (f)$$

由公式(11.1-2)，得基频的下限估计为

$$\underline{\omega}_1 = \sqrt{\frac{x}{0.333 + 0.081\alpha}} \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}. \quad (g)$$

由此得基频的存在区间为 $(\underline{\omega}_1, \overline{\omega}_1)$ ，而且可以取以上两者的平均数 $\omega_1 \approx \frac{1}{2} (\underline{\omega}_1 + \overline{\omega}_1)$ 作为基频 $\omega_1$ 的比较准确的近似。将估算的基频值表示为

$$\underline{\omega}_1 = \underline{\beta} \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad \overline{\omega}_1 = \overline{\beta} \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad \omega_1 = \beta \sqrt{\frac{EI}{mL^4}},$$

在不同 $\alpha$ 值下的 $\underline{\beta}$ 、 $\overline{\beta}$ 与 $\beta$ 值在表11.1-2中给出。

表11.1-2 不同质量比 $\alpha$ 下的 $\underline{\beta}$ 、 $\overline{\beta}$ 与 $\beta$ 值

$\alpha$	$\underline{\beta}$	$\overline{\beta}$	$\beta$	$\frac{ \overline{\beta} - \underline{\beta} }{\beta} \%$
0.01	0.173	0.173	0.173	0.00
0.1	0.541	0.542	0.542	0.18
1	1.554	1.560	1.557	0.39
10	2.958	2.997	2.978	1.31
100	3.444	3.507	3.476	1.81
$\infty$	3.514	3.581	3.542	1.89



## § 11.2 集中质量法

集中质量法的目的是由连续系统构造一个离散的物理模型。此法简单易行，便于处理非均匀的弹性体，用得比较广泛。按照对质量与弹性的处理方法不同，又可分为以下三种方法：质量分区集中，刚度分区调匀；质量分区集中，按静态方法计算各质量集中点之间的柔度影响系数，称为柔度影响系数法；质量与刚度都分区调匀。以下分别加以说明。

### 11.2.1 质量分区集中，刚度分区调匀

在10.2.3小节及例11.6中已采用质量分区集中的办法，至于刚度，以上两例中本来就是均匀的。以下以轴的扭振为例，来说明这一方法的应用。

图11.2-1(a)是一个变截面轴，其单位长度的转动惯量及各截面的抗扭刚度分别为 $I(x)$ 与 $GJ(x)$ 。图(b)是其离散模型，它是一系列只有质量而无弹性的圆盘，分别处于位置 $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_{n+1}$ ，它们由只有弹性而不计质量的短轴连接而成。各盘的转动惯量 $I_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$ 及各轴的扭转刚度 $GJ_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 可由下式计算：

$$\left. \begin{aligned} I_i &= I(x_i) \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2} \approx I(x_i) \Delta x_i, & i = 2, 3, \dots, n, \\ I_1 &= I(x_1) \frac{\Delta x_1}{2}, \\ I_{n+1} &= I(x_{n+1}) \frac{\Delta x_n}{2}, \\ GJ_i &= GJ\left(x_i + \frac{1}{2} \Delta x_i\right), & i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (11.2-1)$$

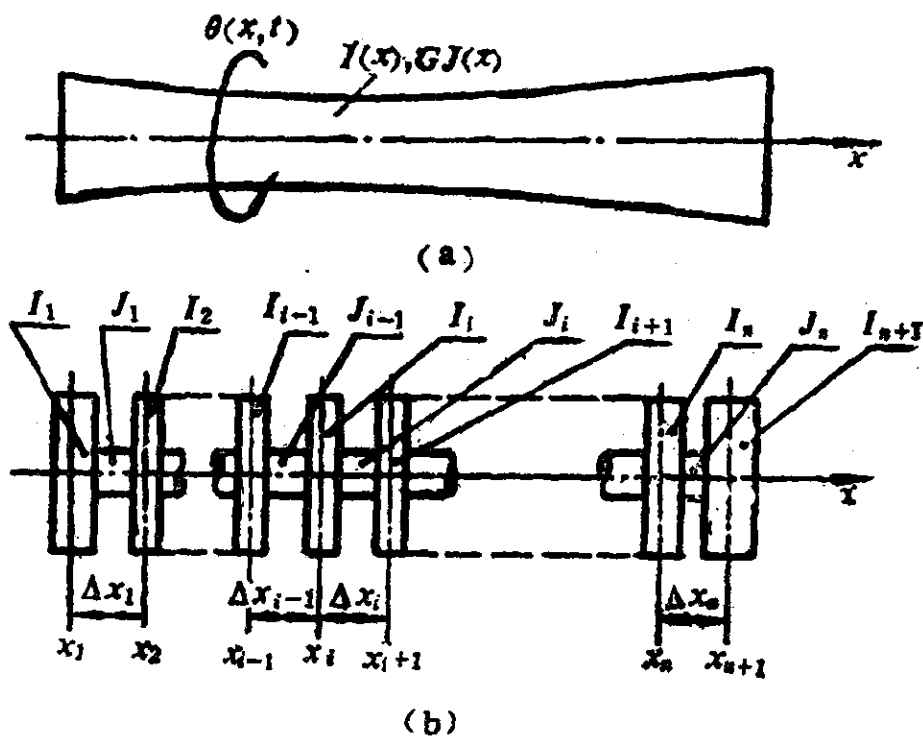


图 11.2-1

分段多少以及集中质量位置的布置，需要由经验、试算和试验来决定。

有了以上模型以后，即可按9.2.2小节中所讲述传递矩阵的办法求解。

对于梁也可按类似方法集中质量，调匀刚度，形成由一系列无质量的均匀梁段连接一系列的集中刚性质块而组成的离散模型，然后以传递矩阵方法求解。

### 11.2.2 柔度影响系数法

图11.2-2是一变截面的轴，其一端固定，一端自由，将此轴分成 \$n\$ 段，将每一段的质量（转动惯量）集中到该段中的某一点，而成为 \$n\$ 个刚性圆盘，其转动惯量 \$I\_1, I\_2, \dots, I\_n\$ 可以按 11.2.1 小节中的办法（或者其它办法）计算，其所在的位置 \$x\_1\$，

$x_2, \dots, x_n$ , 可以取为各段的中点, 如图11.2-2所示, 也可以取其它点 (当分段足够细时,  $x_i$  在第  $i$  段中的定位方式并无太大影响)。

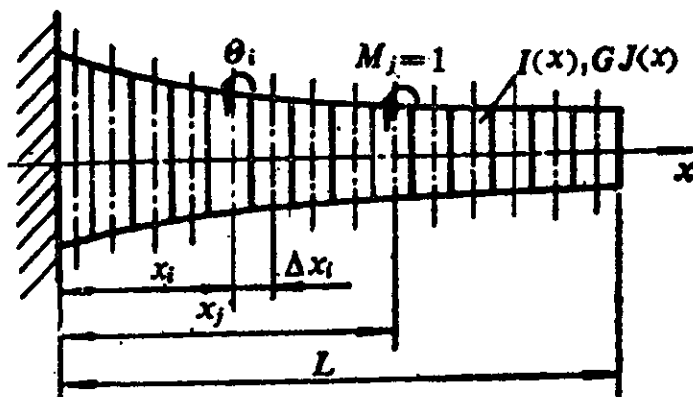


图 11.2-2

现在计算各质量集中点  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 之间的柔度影响系数。按照第四章中的定义, 柔度影响系数  $a_{i,j}$  是在  $x = x_j$  处对轴施加一单位扭矩  $M_j = 1$ , 而在  $x = x_i$  处所得到的转角  $\theta_i$ 。

由材料力学知:

$$a_{i,j} = \theta_i \Big|_{M_j=1} = \int_0^{x_i} \frac{dx}{GJ(x)}, \quad (11.2-2)$$

上式是假定  $x_i \leq x_j$ , 如图11.2-2所示, 如果  $x_i > x_j$ , 则由互易定理

$$a_{i,j} = a_{j,i} = \theta_j \Big|_{M_i=1} = \int_0^{x_j} \frac{dx}{GJ(x)}, \quad (11.2-3)$$

综合以上两式, 有

$$a_{i,j} = a_{j,i} = \int_0^{x_r} \frac{dx}{GJ(x)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (11.2-4)$$

式中  $x_r$  是  $x_i$  与  $x_j$  中较小的一个。

柔度影响系数组成柔度矩阵  $(a)$ , 而各刚性圆盘的转动惯量  $I_1, I_2, \dots, I_n$  构成一对角阵  $\begin{bmatrix} I \\ & I \\ & & I \end{bmatrix}$ , 即质量矩阵 (或惯量矩阵), 按(4.8-3)式, 得系统的动力矩阵为  $(D) = (a) \begin{bmatrix} I \\ & I \\ & & I \end{bmatrix}$ ,

再将各圆盘的转角构成一列向量  $\{\Theta\} = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n)^T$ , 于是按(4.8-3)式得一特征值问题

$$(a) \left[ \begin{array}{c} I \\ \vdots \\ I \end{array} \right] \{\Theta\} = \mu \{\Theta\}, \quad \mu = 1/\omega^2, \quad (11.2-5)$$

例11.8 设图11.2-2中变截面轴的分布转动惯量函数及抗扭刚度函数分别为

$$I(x) = \frac{6}{5}I \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (a)$$

$$GJ(x) = \frac{6}{5}GJ \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (b)$$

试建立其离散模型, 并求解.

解: 将轴等分成  $n$  段, 每段长度  $\Delta x_i = \Delta x = L/n$ , 将各段的分布转动惯量集中起来, 得到各圆盘的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{(i-1)(L/n)}^{i(L/n)} I(x) dx = \frac{6}{5}I \int_{(i-1)(L/n)}^{i(L/n)} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{IL}{5n^3} (6n^2 - 3i^2 + 3i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (c)$$

这些圆盘所在的位置可按以下加权平均的方法计算,

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{I_i} \int_{(i-1)(L/n)}^{i(L/n)} x I(x) dx \\ &= \frac{6I}{5I_i} \int_{(i-1)(L/n)}^{i(L/n)} x \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{3IL^2}{20I_i n^4} (4n^2(2i-1) - 4i^3 + 6i^2 - 4i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (d)$$

按(11.2-4)式, 得柔度影响系数

$$\begin{aligned} a_{ij} = a_{ji} &= \int_0^{x_i} \frac{dx}{\frac{6}{5}GJ \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]} \\ &= \frac{5L}{6\sqrt{2}GJ} \log \frac{\sqrt{2}L + x_i}{\sqrt{2}L - x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i < j. \end{aligned} \quad (e)$$

当  $n=10$  时, 得一10自由度离散系统, 其特征值问题如(11.2-5)式所示。以计算机解得其前三阶模态如图11.2-3所示。

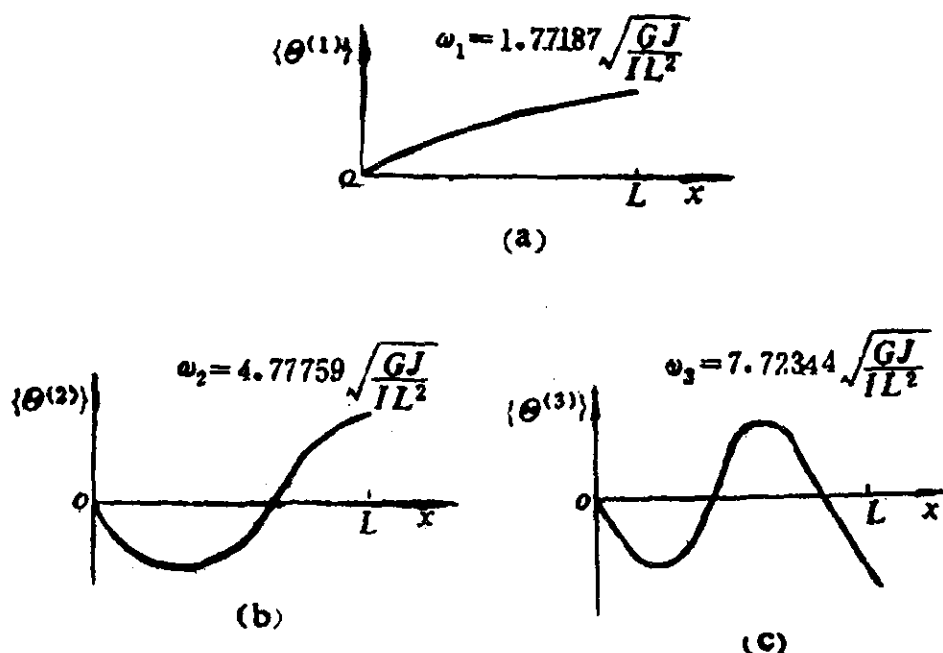


图 11.2-3

### 11.2.3 质量与刚度都分区调匀

#### 1. 变截面轴

图11.2-4(a)是一变截面的轴, 图(b)是其简化模型——阶梯轴, 其各段的质量与刚度都是均匀分布的。分段的多少( $n$ )与各段的长短( $L_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ )按精度要求, 由经验确定。各段的分布转动惯量  $I_i$  与截面抗弯刚度  $GJ_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )可按下式确定,

$$I_i = I \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (11.2-6)$$

$$GJ_i = GJ \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (11.2-7)$$

或者要求更精确一些, 可按下式计算

$$I_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} I(x) dx, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (11.2-8)$$

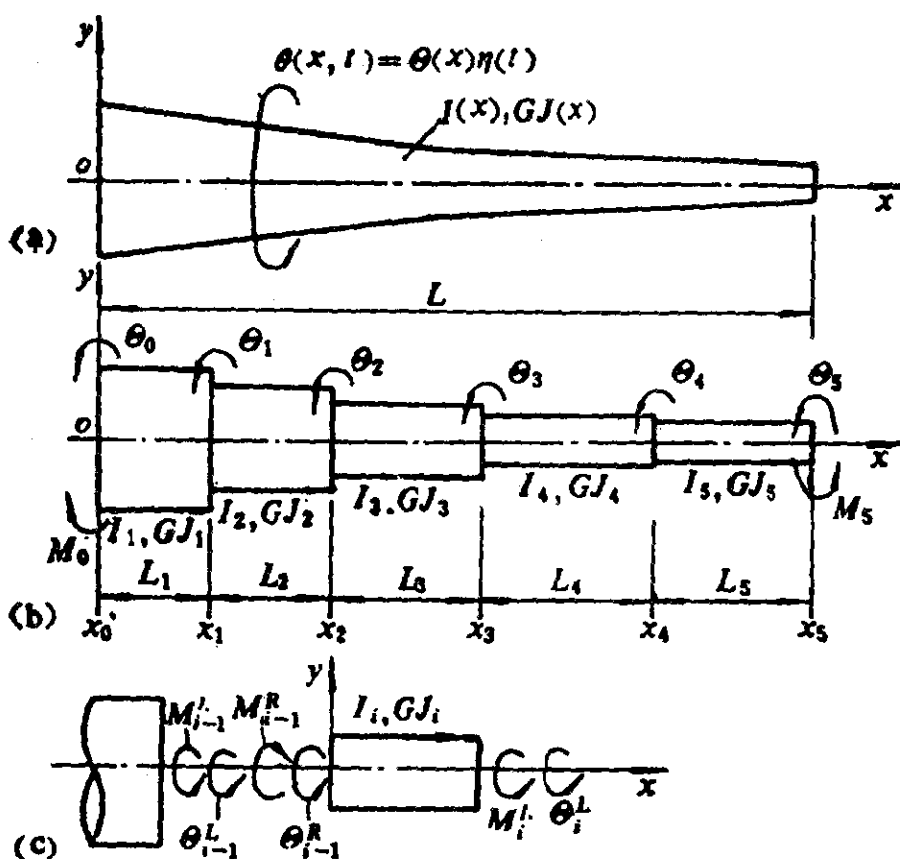


图 11.2-4

$$GJ_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} GJ(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.2-9)$$

还可以按下式检验分段的长度是否合适,

$$|I(x) - I_i| / I_i < \epsilon, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad (11.2-10)$$

$$|J(x) - J_i| / J_i < \epsilon, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad (11.2-11)$$

式中 $\epsilon$ 是规定的模型简化相对误差。

对于图11.2-4(b)中的阶梯轴模型,可按第十章中的办法逐段求解,即对各段写出振型函数 $\Theta_i(x)$ 满足的(10.3-9)式的通解

$$\Theta_i(x) = C_i \sin \beta_i x + D_i \cos \beta_i x, \quad x_{i-1} < x < x_i; \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.2-12)$$

这里

$$\beta_i^2 = \frac{\omega^2 I_i}{GJ_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.2-13)$$

$C_i, D_i (i=1, 2, \dots, n)$  是  $2n$  个待定常数, 可由整根轴在  $x=0$  与  $x=L$  处的两个边界条件以及各段轴之间的  $2(n-1)$  个衔接条件

$$\Theta_i(x_i) = \Theta_{i+1}(x_i), \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad (11.2-14)$$

$$M_i(x_i) = M_{i+1}(x_i), \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (11.2-15)$$

决定。按此可以算出轴上任何截面 ( $0 < x < L$ ) 处的转角的幅值  $\Theta(x)$  及扭矩  $M(x)$  的幅值。

为了使以上计算步骤更严谨整齐, 更便于形式化与计算机计算, 也可以采用第九章中的传递矩阵方法。与 9.2.2 小节中的方法相同, 仍取各段轴的端部的  $\Theta$  与  $M$  构成状态向量, 下标与上标的规定亦与该小节相同。在我们所讨论的情况下, 轴上并无集中质量, 因而“站”的转动惯量为零, 即 (9.2-14) 式中表示的站的传递矩阵  $[T.]_i$  中的  $I_i = 0$ , 于是  $S_i$  成为单位矩阵。这里由于考虑到轴的分布质量, 因而“场”的传递矩阵与 (9.2-15) 式不相同, 现推导如下。

图 11.2-4(c) 是一小段已均匀化的轴, 由 (11.2-12) 式, 其特征函数可表示为,

$$\Theta_i(x) = C_i \sin \beta_i x + D_i \cos \beta_i x, \quad 0 < x < L_i, \quad (11.2-16)$$

而其扭矩为

$$M_i(x) = GJ_i \frac{d\Theta_i(x)}{dx} = GJ_i \beta_i C_i \cos \beta_i x - GJ_i \beta_i D_i \sin \beta_i x, \quad 0 < x < L_i. \quad (11.2-17)$$

其左端的边界条件为 (图 11.2-4(c)),

$$\Theta_i(0) = \Theta_{i-1}^R, \quad (11.2-18)$$

$$M_i(0) = M_{i-1}^R. \quad (11.2-19)$$

将以上两式代入 (11.2-16)、(11.2-17) 两式, 得其常数为

$$C_i = \frac{M_{i-1}^R}{GJ_i \beta_i},$$

$$D_i = \Theta_{i-1}^R.$$

代回 (11.2-16)、(11.2-17) 式, 得

$$\Theta_i(x) = \frac{M_{i-1}^R}{GJ_i \beta_i} \sin \beta_i x + \Theta_{i-1}^R \cos \beta_i x, \quad 0 < x < L_i;$$

$$M_i(x) = M_{i-1}^R \cos \beta_i x - \Theta_{i-1}^R GJ_i \beta_i \sin \beta_i x, \quad 0 < x < L_i.$$

以  $x = L_i$  代入以上两式, 并注意到

$$\Theta_i(L_i) = \Theta_i^L, \quad (11.2-20)$$

$$M_i(L_i) = M_i^L, \quad (11.2-21)$$

得

$$\Theta_i^L = \Theta_{i-1}^R \cos \beta_i L_i + M_{i-1}^R \frac{\sin \beta_i L_i}{GJ_i \beta_i},$$

$$M_i^L = -\Theta_{i-1}^R GJ_i \beta_i \sin \beta_i L_i + M_{i-1}^R \cos \beta_i L_i,$$

写成矩阵形式, 得

$$\begin{pmatrix} \Theta \\ M \end{pmatrix}_i^L = \begin{pmatrix} \cos \beta_i L_i & \frac{\sin \beta_i L_i}{GJ_i \beta_i} \\ -GJ_i \beta_i \sin \beta_i L_i & \cos \beta_i L_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ M \end{pmatrix}_{i-1}^R, \quad (11.2-22)$$

由此得场的传递矩阵为

$$(T_p)_i = \begin{pmatrix} \cos \beta_i L_i & \frac{\sin \beta_i L_i}{GJ_i \beta_i} \\ -GJ_i \beta_i \sin \beta_i L_i & \cos \beta_i L_i \end{pmatrix}. \quad (11.2-23)$$

当不计梁的质量时,  $I_i = 0$ , 由(11.2-13)式,  $\beta_i = 0$ , 并考虑到

$$\lim_{\beta_i \rightarrow 0} \frac{\sin \beta_i L_i}{GJ_i \beta_i} = \lim_{\beta_i \rightarrow 0} \frac{L_i}{GJ_i} \cdot \frac{\sin \beta_i L_i}{\beta_i L_i} = \frac{L_i}{GJ_i} = a_i, \quad (11.2-24)$$

式中  $a_i$  为该段轴的扭转柔度, 这时(11.2-23)式退化为

$$(T_p)_i = \begin{pmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

此即(9.2-17)式。

求得  $(T_r)_i$  与  $(T_p)_i$  之后, 可以按第九章中讲述的方法推导频率方程, 求出自然频率  $\omega_i$ , 振型  $\{\Theta^{(i)}\}$  与扭矩的变化规律  $\{M^{(i)}\} (i=1, 2, \dots, n)$ 。

## 2. 变截面梁

对于变截面梁, 也可象图11.2-4那样, 加以分段均匀化, 而



成为阶梯梁，对之亦可采用传递矩阵的方法来分析。梁上的集中质量（站）的传递矩阵已在9.2.3小节中述及，如(9.2-36)式所示。而带有分布质量的一段梁（场）的传递矩阵，推导如下。

图11.2-5是一小段已经均匀化的梁，其两端的状况向量分别为 $\{Y_{i-1}^R, \Theta_{i-1}^R, M_{i-1}^R, Q_{i-1}^R\}^T$ ， $\{Y_i^L, \Theta_i^L, M_i^L, Q_i^L\}^T$ 。我们的目的是求出它们之间的“场”传递矩阵。

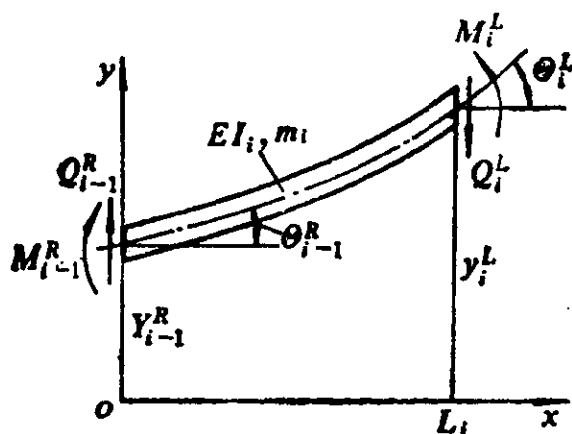


图 11.2-5

梁的特征函数 $Y(x)$ 的通解已由(10.9-27)式给出。为了便于以下的推导，我们将其形式略加改变，即写成

$$Y(x) = D_1 S(\beta x) + D_2 T(\beta x) + D_3 U(\beta x) + D_4 V(\beta x), \quad (11.2-25)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} S(\beta x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x), \\ T(\beta x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \beta x + \sin \beta x), \\ U(\beta x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \beta x - \cos \beta x), \\ V(\beta x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \beta x - \sin \beta x), \end{aligned} \right\} \quad (11.2-26)$$

而由(10.9-26)式，

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} . \quad (11.2-27)$$

由(11.2-25)式可写出转角、弯矩与剪力的表达式分别为

$$\begin{aligned} \Theta(x) = \frac{dY(x)}{dx} = & D_1 \beta V(\beta x) + D_2 \beta S(\beta x) + D_3 \beta T(\beta x) \\ & + D_4 \beta U(\beta x), \end{aligned} \quad (11.2-28)$$

$$\begin{aligned} M(x) = EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = & D_1 EI \beta^2 U(\beta x) + D_2 EI \beta^2 V(\beta x) \\ & + D_3 EI \beta^2 S(\beta x) + D_4 EI \beta^2 T(\beta x), \end{aligned} \quad (11.2-29)$$

$$\begin{aligned} Q(x) = EI \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} = & D_1 EI \beta^3 T(\beta x) + D_2 EI \beta^3 U(\beta x) \\ & + D_3 EI \beta^3 V(\beta x) + D_4 EI \beta^3 S(\beta x). \end{aligned} \quad (11.2-30)$$

利用 $x=0$ 处的边界条件,

$$Y(0) = Y_{i-1}^R, \quad \Theta(0) = \Theta_{i-1}^R, \quad M(0) = M_{i-1}^R, \quad Q(0) = Q_{i-1}^R, \quad (11.2-31)$$

可以从(11.2-25)、(11.2-28)、(11.2-29)式与(11.2-30)式中消去待定常数 $D_1 \sim D_4$ , 得

$$\begin{aligned} Y(x) = & Y_{i-1}^R S(\beta x) + \Theta_{i-1}^R \frac{1}{\beta} T(\beta x) + M_{i-1}^R \frac{1}{EI \beta^2} U(\beta x) \\ & + Q_{i-1}^R \frac{1}{EI \beta^3} V(\beta x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta(x) = & Y_{i-1}^R \beta V(\beta x) + \Theta_{i-1}^R S(\beta x) \\ & + M_{i-1}^R \frac{1}{EI \beta} T(\beta x) + Q_{i-1}^R \frac{1}{EI \beta^2} U(\beta x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) = & Y_{i-1}^R \beta^2 EI U(\beta x) + \Theta_{i-1}^R \beta EI V(\beta x) \\ & + M_{i-1}^R S(\beta x) + Q_{i-1}^R \frac{1}{\beta} T(\beta x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) = & Y_{i-1}^R \beta^3 EI T(\beta x) + \Theta_{i-1}^R \beta^2 EI U(\beta x) \\ & + M_{i-1}^R \beta V(\beta x) + Q_{i-1}^R S(\beta x). \end{aligned}$$

再以 $x=L_i$ 端的边界条件

$$Y(L_i) = Y_i^L, \quad \Theta(L_i) = \Theta_i^L, \quad M(L_i) = M_i^L,$$

$$Q(L_i) = Q_i^L, \quad (11.2-32)$$

代入，即得  $x=0$  与  $x=L_i$  两端的状态向量之间的关系式，写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} Y \\ \Theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} S_i & \frac{1}{\beta_i} T_i & \frac{1}{\beta_i^2 EI_i} U_i & \frac{1}{\beta_i^3 EI_i} V_i \\ \beta_i V_i & S_i & \frac{1}{\beta_i EI_i} T_i & \frac{1}{\beta_i^2 EI_i} U_i \\ \beta_i^2 EI_i U_i & \beta_i EI_i V_i & S_i & \frac{1}{\beta_i} T_i \\ \beta_i^2 EI_i T_i & \beta_i^2 EI_i U_i & \beta_i V_i & S_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y \\ \Theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_{i-1} \quad (11.2-33)$$

其中  $S_i$ 、 $T_i$ 、 $U_i$ 、 $V_i$  分别为  $S(\beta_i L_i)$ 、 $T(\beta_i L_i)$ 、 $U(\beta_i L_i)$ 、 $V(\beta_i L_i)$  的简写形式。

上式中的  $4 \times 4$  方阵即为梁振动的带有分布质量的“场”的传递矩阵  $[T_i]_{i-1}$ 。由于  $I$ 、 $\beta$  等参数均与该小段梁的具体参数有关，因此矩阵中有关参数均加了下标“ $i$ ”。如果不计梁的分布质量，即  $m_i = 0$ ，对以上矩阵中各元素求  $m_i \rightarrow 0$  的极限，即可发现该矩阵退化成(9.2-40)式表示的无质量的“场”的传递矩阵。

关于梁的频率方程与振型的求法亦与9.2.3小节相同，不再赘述。

**例11.9** 图11.2-6是一自由端带有集中质量的悬臂梁，将梁视为一个“场”，而将集中质量视为一个“站”，图上标出了“场”的两端与“站”的两端的状态向量，以及它们之间的传递

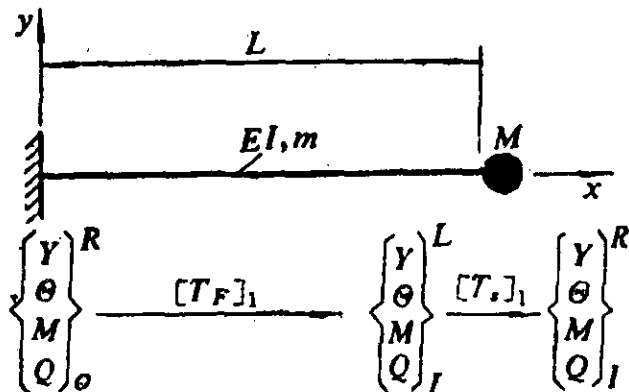


图 11.2-6

矩阵。按(11.2-33)式, 有

$$(T_F)_1 = \begin{pmatrix} S(\beta L) & \frac{1}{\beta}T(\beta L) & \frac{1}{\beta^2 EI}U(\beta L) & \frac{1}{\beta^3 EI}V(\beta L) \\ \beta V(\beta L) & S(\beta L) & \frac{1}{\beta EI}T(\beta L) & \frac{1}{\beta^2 EI}U(\beta L) \\ \beta^2 EI U(\beta L) & \beta EI V(\beta L) & S(\beta L) & \frac{1}{\beta}T(\beta L) \\ \beta^3 EI T(\beta L) & \beta^2 EI U(\beta L) & \beta V(\beta L) & S(\beta L) \end{pmatrix}, \quad (a)$$

按(9.2-36)式, 有

$$(T_0)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 M & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)$$

按图11.2-6中的关系, 有

$$\begin{pmatrix} Y \\ \Theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_1^R = (T_0)_1 (T_F)_1 \begin{pmatrix} Y \\ \Theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0^R. \quad (c)$$

以(a)、(b)代入(c)式, 并考虑梁的固支端的边界条件

$$Y_0^R = 0, \quad \Theta_0^R = 0 \quad (d)$$

及集中质量的右边的边界条件

$$M_1^R = 0, \quad Q_1^R = 0, \quad (e)$$

有

$$\begin{pmatrix} Y \\ \Theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1^R = \begin{pmatrix} S & \frac{1}{\beta}T & \frac{1}{\beta^2 EI}U & \frac{1}{\beta^3 EI}V \\ \beta V & S & \frac{1}{\beta EI}U & \frac{1}{\beta^2 EI}U \\ \beta^2 EI U & \beta EI V & S & \frac{1}{\beta}T \\ \omega^2 MS & \omega^2 M \frac{1}{\beta}T & \frac{\omega^2 M}{\beta^2 EI}U & \frac{\omega^2 M}{\beta^3 EI}V \\ +\beta^3 EIT & +\beta^2 EIU & +\beta V & +S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0^R. \quad (f)$$

其中 $S$ 、 $T$ 、 $U$ 、 $V$ 是 $S(\beta L)$ 、 $T(\beta L)$ 、 $U(\beta L)$ 、 $V(\beta L)$ 的简写形式。上式展开，得

$$\begin{cases} S(\beta L)M^2 + \frac{1}{\beta}T(\beta L)Q_0^2 = 0, \\ \left[ \frac{\omega^2 M}{\beta^3 EI}U(\beta L) + \beta V(\beta L) \right]M^2 + \left[ \frac{\omega^2 M}{\beta^3 EI}V(\beta L) \right. \\ \left. + S(\beta L) \right]Q_0^2 = 0. \end{cases} \quad (g)$$

上式为关于 $M^2$ 、 $Q_0^2$ 的齐次代数方程，由于 $M^2$ 、 $Q_0^2$ （梁的固定端的支反力）不能同时为零，故方程组(g)的系数行列式必定为零。

$$\begin{vmatrix} S(\beta L) & \frac{1}{\beta}T(\beta L) \\ \frac{\omega^2 M}{\beta^3 EI}U(\beta L) + \beta V(\beta L) & \frac{\omega^2 M}{\beta^3 EI}V(\beta L) + S(\beta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (h)$$

此即频率方程。展开上式，并利用(11.2-26)式可得

$$a\beta L = \frac{1 + \operatorname{ch}\beta L \cos\beta L}{\operatorname{ch}\beta L \sin\beta L - \operatorname{sh}\beta L \cos\beta L}, \quad (i)$$

式中  $a = M/mL$ . (j)

我们讲述了三种集中质量法，其中第三种方法似乎并未将分布质量集中成为质块，其实此法是首先分区将分布质量集中起来，然后再使之均匀分布，读者不难从(11.2-8)式体会出这一点来。

### § 11.3 特征函数参数化方法

我们知道离散系统的振型以特征向量 $\{U^{(r)}\} = \{u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, \dots, u_n^{(r)}\}^T$ 来表示，而一个特征向量只需要几个参数 $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, \dots, u_n^{(r)}$ 即可加以描述；而连续系统的振型则需要以特征函数 $U(x)$ 来表示，如果也要想以“参数”来描述此函数，则对 $x$ 在 $0 \sim L$ 范围内的每一取值，都需要一个参数来描述其函数值，因此

需要无穷多个参数才能描述一个特征函数，这正是连续系统振动问题描述的复杂性与求解的困难性之所在。由此可见，如果能以有限的参数近似地描述一个特征函数，那么就能将一个连续系统的振动问题转化为离散系统的振动问题。这种方法称为特征函数的参数化，它可以按下面的方法来实现。选取一个函数系列  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ ，它们并不需要满足特征值问题的微分方程，而只需满足其边界条件，这类函数称为比较函数；或者只要求满足边界条件中的几何边界条件，而不必虑及力学边界条件，这类函数称为“容许函数”。此外，比较函数与容许函数还必须具有计算  $V_{max}$  所必要的阶数的导数。对于多数函数来说，这一点并不难满足。寻求容许函数当然比寻求特征函数容易得多。一组容许函数构成一个“生成集”（相当于一个“坐标基”），而将真实的特征函数近似地表示为容许函数的线性组合：

$$U(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x). \quad (11.3-1)$$

由于  $u_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 是既经选定的函数， $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 则是  $n$  个待定参数，作如上规定之后，特征函数就可以由  $n$  个参数来加以确定，即  $U(x) \rightarrow U(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，因此实现了参数化。

参数化方法也是一种连续系统离散化的方法。但是与前述集中质量法不同，这里并不是对连续系统的物理模型加以离散化，而是对其数学模型加以离散化。

对于参数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  可以采取对待离散系统类似的方法来加以确定，此节我们主要讲两种方法，即Rayleigh-Ritz法与假设振型法。

### 11.3.1 Rayleigh-Ritz法

Rayleigh-Ritz法根据瑞利商在特征函数或特征向量附近的

驻值特性，来确定上述待定参数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。10.12.2小节讲过，连续系统的瑞利商 $R(U(x))$ 是特征函数的泛函，而以(11.3-1)式表示的参数化条件代入，可以将此泛函转化为多元函数，

$$\lambda = \omega^2 = R(U) = R(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

瑞利商定义为最大势能 $V_{m,x}$ 与参数动能 $T^*$ 之比，显然这两者都是待定参数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的多元函数，将它们分别记为 $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，则瑞利商可以表示为

$$\lambda = \omega^2 = R(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{V_{m,x}}{T^*} = \frac{N(a_1, a_2, \dots, a_n)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)}. \quad (11.3-2)$$

在10.12.2小节还讲过，瑞利商在特征函数 $U_r(x)$ 附近取驻值，而由(11.3-1)式，如果有一组参数 $\{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$ 使由该式定义的 $U(x)$ 正好是某一特征函数 $U_r(x)$ ，则(11.3-2)式表示的瑞利商也必然在该组参数上取驻值，因而必然有

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (11.3-3)$$

以(11.3-2)式代入上式，得

$$\frac{\partial}{\partial a_r} \left( \frac{N}{D} \right) = \frac{D \frac{\partial}{\partial a_r} N - N \frac{\partial}{\partial a_r} D}{D^2} = 0,$$

即

$$\frac{\partial N}{\partial a_r} - \frac{N}{D} \frac{\partial D}{\partial a_r} = 0,$$

由(11.3-2)式， $N/D$ 正是瑞利商的估值，记为 $\lambda$ ，有

$$\frac{\partial N}{\partial a_r} - \lambda \frac{\partial D}{\partial a_r} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (11.3-4)$$

以上 $n$ 个方程实际上是关于 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的 $n$ 个线性齐次代数方程，而以 $\lambda = \omega^2$ 作为参数。这一方程组定义了一个离散系统的特征值问题，由之可解出 $n$ 个特征值 $\lambda_r = \omega_r^2 (r = 1, 2, \dots, n)$ 及相应的 $n$ 个特征向量 $\{a^{(r)}\} (r = 1, 2, \dots, n)$ ，以后者代回(11.3-1)式，即得到 $n$ 个特征函数的近似解。

例11.10 一劈形梁如图11.3-1所示，具有单位厚度。试以

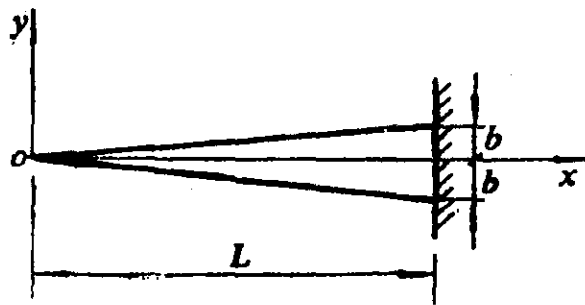


图 11.3-1

Rayleigh-Ritz法计算其基频及第一振型函数。

解：由题给条件，单位长度的梁的质量为

$$m(x) = 2b \frac{x}{L} \rho, \quad (a)$$

式中 $\rho$ 为材料密度。令

$$m(L) = 2b\rho = m,$$

则(a)式可写成

$$m(x) = m \frac{x}{L}. \quad (b)$$

截面抗弯刚度为

$$EI(x) = E \frac{1}{12} \left( \frac{2bx}{L} \right)^3, \quad (c)$$

令

$$EI(L) = E \frac{1}{12} (2b)^3 = EI,$$

则(c)式可写成

$$EI(x) = EI \frac{x^3}{L^3}. \quad (d)$$

边界条件为

$$EI(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] \Big|_{x=0} = 0; \quad (e)$$

$$Y(L) = 0, \quad \frac{dY(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 0. \quad (f)$$

取容许函数系列为



$$y_i(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (g)$$

(g)式中的每一个都满足边界条件(e)与(f)。由(11.3-1)式得特征函数的近似表达式,

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^{i-1}, \quad (h)$$

由例11.2(b)式, 知(11.3-4)式中的 $N$ 与 $D$ 的表达式为

$$N = 2V_{m,x} = \int_0^L EI(x) \left[ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]^2 dx, \quad (i)$$

$$D = 2T^* = \int_0^L m(x) Y^2(x) dx. \quad (j)$$

首先, 作为第一阶近似, 令 $n=1$ , 即只取(h)式中的第一项, 这时

$$Y(x) = a_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2,$$

以此式与(b)、(d)式代入(i)、(j)式, 分别得

$$N = a_1^2 \int_0^L EI \frac{x^3}{L^3} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \right]^2 dx,$$

$$D = a_1^2 \int_0^L m \frac{x}{L} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \right]^2 dx,$$

代入(11.3-2)式, 并解出自然频率, 得

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L EI \frac{x^3}{L^3} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \right]^2 dx}{\int_0^L m \frac{x}{L} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \right]^2 dx}.$$

将上式与例11.2(b)式比较, 可见当 $n=1$ 时, Rayleigh-Ritz法退回到Rayleigh能量法。积分上式, 得

$$\omega_1 = 5.48 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}. \quad (k)$$

此问题的精确解为

$$\omega_1 = 5.315 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad (l)$$

可见当 $n=1$ 时,  $\omega_1$ 的估算误差约为3.1%。

为了提高估算精度, 可取 $n=2$ , 这时有

$$Y(x) = a_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 + a_2 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2, \quad (m)$$

代入(i), (j)式, 得

$$N = EI \cdot \frac{1}{L^3} \left[ (a_1 - 2a_2)^2 + \frac{24}{5} a_2 (a_1 - 2a_2) + 6a_2^2 \right], \quad (n)$$

$$D = m L \left[ \frac{a_1^2}{30} + \frac{2a_1 a_2}{105} + \frac{a_2^2}{280} \right], \quad (o)$$

此时(11.3-4), 成为

$$\frac{\partial N}{\partial a_1} - \omega^2 \frac{\partial D}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial a_2} - \omega^2 \frac{\partial D}{\partial a_2} = 0.$$

以(n)、(o)式分别代入以上两式, 得到关于 $a_1, a_2$ 的线性齐次代数方程组

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{EI}{L^3} - \omega^2 \frac{mL}{30} \right) a_1 + \left( \frac{2EI}{5L^3} - \omega^2 \frac{mL}{105} \right) a_2 &= 0, \\ \left( \frac{2EI}{5L^3} - \omega^2 \frac{mL}{105} \right) a_1 + \left( \frac{2EI}{5L^3} - \omega^2 \frac{mL}{280} \right) a_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

由于 $a_1, a_2$ 不能同时为零, 故方程组的系数行列式应为零,

$$\begin{vmatrix} \frac{EI}{L^3} - \omega^2 \frac{mL}{30} & \frac{2EI}{5L^3} - \omega^2 \frac{mL}{105} \\ \frac{2EI}{5L^3} - \omega^2 \frac{mL}{105} & \frac{2EI}{5L^3} - \omega^2 \frac{mL}{280} \end{vmatrix} = 0, \quad (q)$$

展开, 得关于 $\omega^2$ 的二次方程, 其中较小的一个根给出系统的基频

$$\omega_1 = 5.319 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad (r)$$

与(l)式比较, 估算误差仅为0.08%, 比 $n=1$ 时的结果准确得多。

以 $\omega_1$ 代入(p)式的任何一个方程, 得到

$$a_2^{(1)} / a_1^{(1)} = -0.44,$$

代回(m)式, 并取 $a_1^{(1)} = 1$ , 得第一阶主振型的近似估计为

$$Y_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 - 0.44 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{x}{L}.$$

这里还可得到 $\omega_2$ 及 $Y_2(x)$ 的估计, 但估计精度较差, 如欲提高其估计精度, (h)式应取更多的项. 通常, 如打算估计到第 $r$ 阶自然频率与模态, 则(h)式应取 $2r$ 项.

### 11.3.2 Galerkin方程

基于Rayleigh-Ritz方法导出的Galerkin方程, 实际上是连续系统离散化的特征值问题方程, 现推导如下.

首先说明(11.3-2)式中的 $N$ 、 $D$ 均为 $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 的二次型函数. 由一个例子来说明这一问题, 试看图10.12-1(b)中一端固定、一端带有弹性支承的杆, 以(11.3-1)式代入(10.12-18)式分子, 得

$$\begin{aligned} N &= 2V_{\max} = kU^2(L) + \int_0^L EA(x) \left[ \frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx \\ &= k \left[ \sum_{i=1}^n a_i u_i(L) \right] \left[ \sum_{j=1}^n a_j u_j(L) \right] \\ &\quad + \int_0^L EA(x) \left[ \sum_{i=1}^n a_i \frac{du_i(x)}{dx} \right] \left[ \sum_{j=1}^n a_j \frac{du_j(x)}{dx} \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ k u_i(L) u_j(L) + \int_0^L EA(x) \frac{du_i(x)}{dx} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{du_j(x)}{dx} dx \right] a_i a_j. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} k_{i,j} &= k u_i(L) u_j(L) + \int_0^L EA(x) \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx, \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (11.3-5)$$

则有

$$N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{i,j} a_i a_j. \quad (11.3-6)$$

以(11.3-1)式代入(10.12-18)式分母, 得

$$\begin{aligned} D &= 2T^* = \int_0^L m(x) U^2(x) dx \\ &= \int_0^L m(x) \left[ \sum_{i=1}^n a_i u_i(x) \right] \left[ \sum_{j=1}^n a_j u_j(x) \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \int_0^L m(x) u_i(x) u_j(x) dx \right] a_i a_j, \end{aligned}$$

令

$$m_{i,j} = \int_0^L m(x) u_i(x) u_j(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (11.3-7)$$

则有

$$D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} a_i a_j. \quad (11.3-8)$$

$(k) = \{k_{i,j}\}$  与  $(m) = \{m_{i,j}\}$  分别称为连续系统的  $n$  个自由度的离散近似模型的“刚度矩阵”与“质量矩阵”, 由(11.3-5)式与(11.3-7)式可见, 它们都是对称矩阵。可以证明, 对于所有的线性系统, 在以(11.3-1)式来近似地表示其特征函数的前提下, 都能导出形如(11.3-6)式与(11.3-8)式的  $N$  与  $D$  的二次型表达式, 以及相应的刚度矩阵与质量矩阵。

将(11.3-6)、(11.3-8)两式代入(11.3-4)式, 并注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial a_r} &= \frac{\partial}{\partial a_r} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{i,j} a_i a_j \right] = 2 \sum_{j=1}^n k_{r,j} a_j, \\ \frac{\partial D}{\partial a_r} &= \frac{\partial}{\partial a_r} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} a_i a_j \right] = 2 \sum_{j=1}^n m_{r,j} a_j, \end{aligned}$$

得

$$\sum_{j=1}^n (k_{r,j} - \omega^2 m_{r,j}) a_j = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (11.3-9)$$

写成矩阵形式，即得 Galerkin 方程

$$\{k\}\{a\} = \omega^2\{m\}\{a\}, \quad (11.3-10)$$

式中

$$\{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

是(11.3-1)式中的系数组成的向量。(11.3-10)式定义了一个  $n$  自由度的离散系统的特征值问题。该式即 Galerkin 方程，由之可求出  $n$  个特征值  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ ，作为原来的连续系统的前  $n$  个自然频率的近似估计；以这些特征值分别代入 (11.3-10) 式，可求出  $n$  个特征向量  $\{a^{(1)}\}, \{a^{(2)}\}, \dots, \{a^{(n)}\}$ ，代入 (11.3-1) 式，即得系统前  $n$  阶振型的近似估计。

$$U^{(r)}(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{(r)} u_i(x), \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (11.3-11)$$

例11.11 图11.3-2是一变截面杆，其一端固定，一端自由。其抗拉刚度与线密度由下式确定：

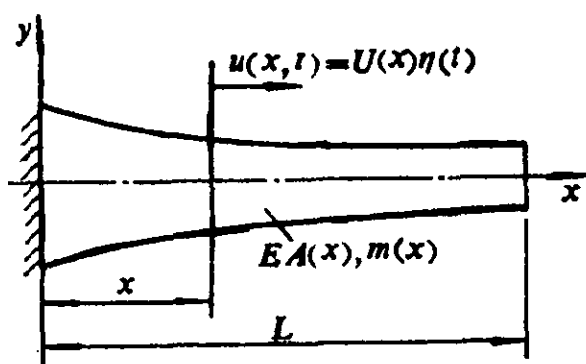


图 11.3-2

$$EA(x) = \frac{6}{5} EA \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (a)$$

$$m(x) = \frac{6}{5} m \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (b)$$

试以 Galerkin 方程估算其自然频率与振型。

解：取相同边界条件的均匀杆的振型函数作为生成集，

$$u_i(x) = \sin(2i-1) \frac{\pi x}{2L}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (c)$$

以下计算刚度矩阵与质量矩阵，以(a)、(c)式代入(11.3-5)式，并注意到此例中杆的自由端无弹性支承，因而 $k=0$ ，有

$$\begin{aligned}
 k_{i,j} &= \int_0^L \frac{6}{5} EA \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \frac{d}{dx} \left[ \sin(2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right] \frac{d}{dx} \\
 &\cdot \left[ \sin(2j-1) \frac{\pi x}{2L} \right] dx = \frac{6}{5} EA \frac{(2i-1)\pi}{2L} \frac{(2j-1)\pi}{2L} \\
 &\cdot \int_0^L \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2L} \cos \frac{(2j-1)\pi x}{2L} dx, \\
 & \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (d)
 \end{aligned}$$

以(b)、(c)式代入(11.3-7)式，有

$$\begin{aligned}
 m_{i,j} &= \int_0^L \frac{6}{5} m \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \sin(2i-1) \frac{\pi x}{2L} \sin(2j-1) \frac{\pi x}{2L} dx, \\
 & \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (e)
 \end{aligned}$$

如果取 $n=1$ ，则

$$k_{11} = \frac{1}{40} \frac{EA}{L} (5\pi^2 + 6), \quad m_{11} = \frac{1}{10\pi^2} mL(5\pi^2 - 6),$$

Galerkin方程此时退化为

$$k_{11} a_1 = \omega^2 m_{11} a_1,$$

由此得基频的一项近似估计为

$$(\omega_1^{(1)})^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{\frac{1}{40} \frac{EA}{L} (5\pi^2 + 6)}{\frac{1}{10\pi^2} mL(5\pi^2 - 6)} = 3.15044 \frac{EA}{mL^2}$$

即

$$\omega_1^{(1)} = 1.77495 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad (f)$$

这里 $\omega$ 的下标“1”表示第一自然频率，上标“(1)”表示 $n=1$ 时的一阶近似，以下仿此。将此结果与例11.4中的结果相比较，可见这时的结果与Rayleigh能量法的结果完全一样。

如果取 $n=2$ ，则由(d)、(e)式可得

$$(k) = \frac{EA}{40L} \begin{pmatrix} 5\pi - 6 & \frac{27}{2} \\ \frac{27}{2} & 45\pi^2 + 6 \end{pmatrix},$$

$$(m) = \frac{mL}{10\pi^2} \begin{pmatrix} 5\pi^2 - 6 & \frac{15}{2} \\ \frac{15}{2} & 5\pi^2 - \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

代入Galerkin方程, 可解出

$$\omega_1^{(2)} = 1.77432 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad \omega_2^{(2)} = 4.82535 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}},$$

$$\{a^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.99995 \\ -0.01013 \end{Bmatrix}, \quad \{a^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.15984 \\ 0.98714 \end{Bmatrix},$$

由(11.3-11)式, 得振型函数为

$$U^{(1)}(x) = 0.99995 \sin \frac{\pi x}{2L} - 0.01013 \sin \frac{3\pi x}{2L},$$

$$U^{(2)}(x) = -0.15984 \sin \frac{\pi x}{2L} + 0.98714 \sin \frac{3\pi x}{2L}.$$

如果取 $n=3$ , 则由(d)、(e)式, 得

$$(k) = \frac{EA}{40L} \begin{pmatrix} 5\pi^2 + 6 & \frac{27}{2} & -\frac{25}{6} \\ \frac{27}{2} & 45\pi^2 + 6 & \frac{675}{8} \\ -\frac{25}{6} & \frac{675}{8} & 125\pi^2 + 6 \end{pmatrix},$$

$$(m) = \frac{mL}{10\pi^2} \begin{pmatrix} 5\pi^2 - 6 & \frac{15}{2} & -\frac{13}{6} \\ \frac{15}{2} & 5\pi^2 - \frac{2}{3} & \frac{51}{8} \\ -\frac{13}{6} & \frac{51}{8} & 5\pi^2 - \frac{6}{25} \end{pmatrix},$$

代入 Galerkin 方程, 可解出

$$\omega_1^{(1)} = 1.77425 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}, \quad \omega_2^{(1)} = 4.82217 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}},$$

$$\omega_3^{(1)} = 7.93161 \sqrt{\frac{EA}{mL^2}},$$

$$\{a^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.99994 \\ -1.01050 \\ 0.00187 \end{Bmatrix}, \quad \{a^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.16100 \\ 0.98657 \\ -0.02748 \end{Bmatrix},$$

$$\{a^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0.06737 \\ -0.11308 \\ 0.99130 \end{Bmatrix};$$

$$U^{(1)}(x) = 0.99994 \sin \frac{\pi x}{2L} - 0.01050 \sin \frac{3\pi x}{2L} \\ + 0.00187 \sin \frac{5\pi x}{2L},$$

$$U^{(2)}(x) = -0.16100 \sin \frac{\pi x}{2L} + 0.98657 \sin \frac{3\pi x}{2L} \\ - 0.02748 \sin \frac{5\pi x}{2L},$$

$$U^{(3)}(x) = 0.06737 \sin \frac{\pi x}{2L} - 0.11308 \sin \frac{3\pi x}{2L} \\ + 0.99130 \sin \frac{5\pi x}{2L}.$$

上例表明, 随着所取  $n$  值的加大, 计算量急剧上升, 但得到的好处一是可估算的自然频率与振型的数目增加, 二是估算的精度也上升。为了说明后面这一点, 让我们将上述  $n=1, 2, 3$  情况下得到的基频估计  $\omega_1^{(1)}, \omega_1^{(2)}, \omega_1^{(3)}$  与例 11.8 中得到的更为精确的比值  $\omega_1 = 1.77187 \sqrt{EA/mL^2}$  相比较, 可见  $\omega_1^{(1)} > \omega_1^{(2)} > \omega_1^{(3)} > \omega_1$ 。一般而言, 可证明总有

$$\omega_r^{(1)} > \omega_r^{(2)} > \omega_r^{(3)} > \dots > \omega_r. \quad (11.3-12)$$

上式表明, 第一, 自然频率的估值一般都略大于其精确值; 第



二， $n$ 值的上升，一般会导致自然频率估值的下降，即更加趋近于其精确值，因而使估计精度提高，这表明采用Rayleigh-Ritz法，当 $n \rightarrow \infty$ 时，所估算的系统的各阶自然频率会收敛于其精确值。为了理解这一规律，可回去看(11.3-1)式，我们知道，为了准确表示一个特征函数，实际上需要无限多个“基函数”，即该式本来应该写成

$$U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(x),$$

而简化成(11.3-1)式，意味着对系统施加了人为的约束：

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0,$$

而施加约束一般会使系统的刚性增加，因而使估算出的自然频率高于其真值。而 $n$ 的取值上升，相当于减少约束，因而导致各阶自然频率的估值下降。

### 11.3.3 假设振型法

假设振型法也是基于(11.3-1)式的近似式，但所不同的是，此法考虑到振动随着时间的变化，因而认为式中的系数 $a_i$ 应该是时间的函数，记为 $q_i(t)$ ，称为广义坐标，于是(11.3-1)式在此写成

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(x) q_i(t). \quad (11.3-13)$$

与(10.1-39)式不同，这里 $u_i(x)$ 只是容许函数，而并非真正的振型函数，因此此法称为“假设振型法”。此法关于自由振动的结果与Rayleigh-Ritz法相似，但此法的长处是便于计算系统的强迫响应。

以(11.3-13)式代入系统的能量表达式可得其动能和势能分别为 $\dot{q}_i$ 与 $q_i$ 的二次型：

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t), \quad (11.3-14)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i(t) q_j(t), \quad (11.3-15)$$

这里  $(m_{ij})$ 、 $(k_{ij})$  分别是系统的质量矩阵和刚度矩阵，均为  $n \times n$  对称方阵。其计算方法与(11.3-5)、(11.3-7)式推导相类似。

知道  $(m_{ij})$ 、 $(k_{ij})$ ，即可写出其自由响应的运动方程

$$[m] \{\ddot{q}(t)\} + [k] \{q(t)\} = \{0\}. \quad (11.3-16)$$

将  $\{q(t)\}$  写成谐波形式，

$$\{q(t)\} = \{a\} \cos(\omega t - \phi), \quad (11.3-17)$$

式中  $\{a\}$  是一常向量。代回(11.3-16)式，得特征值问题，

$$[k] \{a\} = \omega^2 [m] \{a\}. \quad (11.3-18)$$

由之可解出  $n$  个自然频率  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  及  $n$  个特征向量  $\{a^{(1)}\}$ ， $\{a^{(2)}\}$ ， $\dots$ ， $\{a^{(n)}\}$ ，并得出前  $n$  个特征函数的估计

$$U^{(r)}(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{(r)} u_i(x), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (11.3-19)$$

**例11.12** 试求一端固定一端自由但带有集中质量的变截面杆(图11.3-3)的动能、势能及其质量矩阵与刚度矩阵。

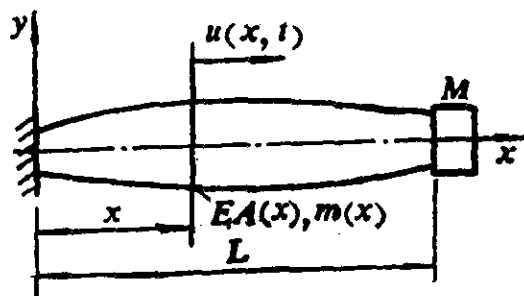


图 11.3-3

**解：** 以(11.3-13)式代入(10.12-3)式，并以  $m(x) + M\delta(x-L)$  表示此杆的质量分布，得

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L (m(x) + M\delta(x-L)) \sum_{i=1}^n \dot{u}_i(x) \dot{q}_i(t) \\
&\quad \cdot \sum_{j=1}^n u_j(x) \dot{q}_j(t) dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \int_0^L m(x) u_i(x) u_j(x) dx + M u_i(L) u_j(L) \right] \\
&\quad \times \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t),
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
m_{ij} &= \int_0^L m(x) u_i(x) u_j(x) dx + M u_i(L) u_j(L), \\
&\quad i, j = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{a}$$

动能可表示成为

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t). \tag{b}$$

以(11.3-13)代入(10.12-4)式, 得

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L E A(x) \sum_{i=1}^n \frac{du_i(x)}{dx} q_i(t) \sum_{j=1}^n \frac{du_j(x)}{dx} \\
&\quad \cdot q_j(t) dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \int_0^L E A(x) \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx \right] \\
&\quad \cdot q_i(t) q_j(t),
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= \int_0^L E A(x) \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx, \\
&\quad i, j = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{c}$$

势能的表达式成为

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i(t) q_j(t). \tag{d}$$

### 11.3.4 对称与非对称振型

由图10.1-5与10.2-2可见，如果弹性体的质量和刚度的分布具有对称性质，边界条件也是对称的，则其振型函数不是对称的，就是反对称的。以下将说明，利用这一性质，可以将系统的特征值问题分解成两个较小的特征值问题，以便求解。

图11.3-4表示一两端固定的轴，其质量及刚度均呈对称分布：

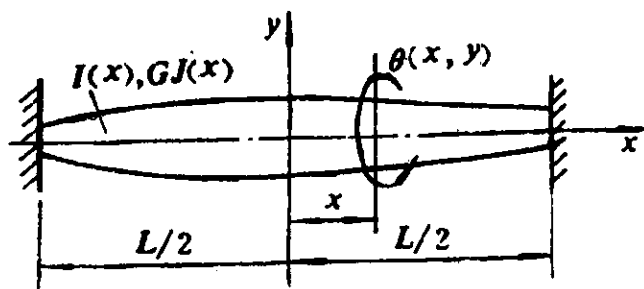


图 10.3-4

$$I(x) = I(-x), \quad (11.3-20)$$

$$GJ(x) = GJ(-x). \quad (11.3-21)$$

将此轴的振动角位移表示为

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^n \theta_i(x) q_i(t),$$

式中 $\theta_i(x)$ 是容许函数， $q_i(t)$ 是广义坐标。仿照例11.12(a)、(c)式，知此例中的刚度系数与惯性系数分别为

$$k_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} GJ(x) \frac{d\theta_i(x)}{dx} \frac{d\theta_j(x)}{dx} dx, \quad (11.3-22)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$I_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} I(x) \theta_i(x) \theta_j(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

设 $n$ 个假振型函数 $\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_n(x)$ 中，有 $r$ 个是对称的，而其余 $n-r$ 个是反对称的，我们将 $r$ 个对称假振型函数放在前面，而将 $n-r$ 个反对称的放在后面，因而有

$$\theta_i(x) = \theta_i(-x), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (11.3-23)$$

$$\theta_i(x) = -\theta_i(-x), \quad i = r+1, r+2, \dots, n.$$

以式(11.3-20)、(11.3-21)、(11.3-23)代入式(11.3-22)，显然，当 $\theta_i(x)$ 与 $\theta_j(x)$ 同时都是对称或同时都是反对称时，有

$$\left. \begin{aligned} k_{ij} &= 2 \int_0^{L/2} GJ(x) \frac{d\theta_i(x)}{dx} \frac{d\theta_j(x)}{dx} dx, \\ I_{ij} &= 2 \int_0^{L/2} I(x) \theta_i(x) \theta_j(x) dx, \end{aligned} \right\} \quad (11.3-24)$$

而当 $\theta_i(x)$ 与 $\theta_j(x)$ 中只有一个是对称，而另一个是反对称时，有

$$k_{ij} = 0, \quad I_{ij} = 0. \quad (11.3-25)$$

将特征值问题的方程(11.3-18)写成分块矩阵形式，

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \{k\}_s & \vdots & \{0\} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \{0\} & \vdots & \{k\}_a \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\}_s \\ \dots \\ \{a\}_a \end{Bmatrix} \\ &= \omega^2 \begin{pmatrix} \{I\}_s & \vdots & \{0\} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \{0\} & \vdots & \{I\}_a \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\}_s \\ \dots \\ \{a\}_a \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (11.3-26)$$

式中下标  $s$  与  $a$  分别表示对称振型与反对称振型。上式可以分解为

$$\{k\}_s \{a\}_s = \omega^2 \{I\}_s \{a\}_s, \quad (11.3-27)$$

$$\{k\}_a \{a\}_a = \omega^2 \{I\}_a \{a\}_a, \quad (11.3-28)$$

这分别是项数为  $r$  及  $n-r$  的两个特征值问题。由于解特征值问题的计算工作量的上升比阶数的上升要快得多，因此对于对称的问题，采用以上分解法，显然可减少许多计算量。

### 11.3.5 用假定振型法求系统的响应

以假定振型法求系统对于过程激励的响应，关键是计算对应于各广义坐标的广义力。设作用在杆上的分布载荷为  $q(x, t)$ ，而集中轴向载荷为  $F_j(t)$ ，作用在  $x = x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, L$ ) 处，于是其虚功为

$$\delta W = \int_0^L \left[ q(x, t) + \sum_{j=1}^i F_j(t) \delta(x - x_j) \right] \delta u(x, t) dx.$$

以(11.3-13)式代入上式, 得

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L \left[ q(x, t) + \sum_{j=1}^i F_j(t) \delta(x - x_j) \right] \sum_{i=1}^n u_i(x) \delta q_i(t) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^L q(x, t) u_i(x) dx + \sum_{j=1}^i F_j(t) u_i(x_j) \right] \delta q_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i(t) \delta q_i(t), \end{aligned}$$

由此得到广义力为

$$Q_i(t) = \int_0^L q(x, t) u_i(x) dx + \sum_{j=1}^i F_j(t) u_i(x_j),$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.3-29)$$

以广义力向量 $\{Q(t)\}$ 代替(11.3-16)式右边的 $\{0\}$ , 即得系统强迫振动的运动方程

$$\{m\} \{\ddot{q}(t)\} + \{k\} \{q(t)\} = \{Q\}. \quad (11.3-30)$$

**例11.13** 设例11.11中变截面杆上作用有分布力 $q(x, t) = q_0 u(t)$ , 这里 $q_0$ 是常数,  $u(t)$ 是单位阶跃函数, 试确定广义力.

**解:** 以分布力的表达式 $q(x, t) = q_0 u(t)$ , 及例11.11中(c)式表示的假振型函数代入(11.3-29)式, 得

$$Q_i(t) = \int_0^L q_0 u(t) \sin(2i-1) \frac{\pi x}{2L} dx = \frac{2f_0 L}{(2i-1)\pi} u(t),$$

$$r = 1, 2, \dots, n.$$

## § 11.4 有限元方法

有限元法也是一种将连续系统离散化的方法。此法也是将研

研究对象划分成一些既不重叠又无缝隙的微小区域，称为单元。但是与集中质量法不同，它并不将各单元中的质量集中或调匀，而是选择各单元的交接点，即“节点”上的位移为广义坐标，以内插法由节点位移计算单元内部任一点的位移。这里与前述Rayleigh-Ritz法或假设振型法不同，并不需要对整个系统估计容许函数或假设振型，而只是在各微小区域内部进行内插。由于各区域可以按分析精度的要求，划分得足够微小，因而其内插函数的具体形式并不重要，而有一定的任意性，往往可以用最简化的线性函数或代数多项式来表示。知道了以节点位移表示的系统任一点的位移，就有可能求得系统的势能与动能，从而求出各单元的刚度矩阵与质量矩阵，得出各单元的运动方程。然后，将各单元的运动方程“装配”成为全系统的运动方程。已经证明，如果令所划分的单元的数目无限增加，而各单元无限缩小，则所得结果趋向精确解。但是我们不可能也不必要令单元趋向于零，从工程计算的实际需要出发，只是令各单元具有为计算精度所允许的有限大小，这就是“有限元法”一词的来源。

今天，有限元法已经发展成为一种适应性很强的统一的数值分析方法。现代高速、大容量的数字计算机使这种分析方法成为现实可行的方法。

限于篇幅，这一节我们只以一维线性单元为例，说明有限元分析方法的基本思想；当然，所组成的系统不一定是一维的，可以是平面的或空间的。

### 11.4.1 单元的运动方程

#### 1. 杆单元

一个杆单元是从杆上划分出来的一小段，如图11.4-1所示。由于单元很小， $m$ 、 $A$ 均视为常量。此杆单元的两个端点为节点（即可以与其它单元相联接的点）而两端的位移 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 为

节点位移。我们在此以这个最简单的单元为例，说明如何以节点

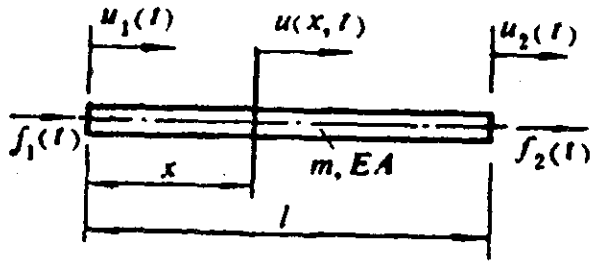


图 11.4-1

位移  $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$  为广义坐标，推导单元的运动方程。

首先，求杆上任意点的位移  $u(x, t)$ 。本来， $u(x, t)$  与  $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$  的关系是未知的，可能也是相当复杂的，可是如前所述，只要单元的划分足够微小，那么其间关系的具体形式就无关大局，而容许一定的任意性。我们就假定  $u(x, t)$  与  $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$  之间具有最简单的线性关系，即根据节点位移对单元中任意点的位移进行线性内插：

$$u(x, t) = \phi_1 u_1(t) + \phi_2 u_2(t), \quad (11.4-1)$$

式中  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  为线性系数，对于单元内不同的点，这些系数应该不同，因此它们都应该是  $x$  的函数，于是对所有的杆单元来说，有

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i(t), \quad (11.4-2)$$

此式与(11.3-13)式相似，但  $\phi_1(x)$ 、 $\phi_2(x)$  并非针对整个系统的容许函数或假设振型，而只是针对一个微小单元的线性插值系数，此系数又是位置的函数，此函数与单元的形状有关，故称为“形状函数”。形状函数与插值函数(11.4-1)一样，也是任意的，但必须满足边界条件：

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(L, t) = u_2(t). \quad (11.4-3)$$

只有此条件满足时，各单元才能协调一致地运动，而不致破坏系统的完整性，因此，这两个条件实质上就是变形协调条件。将(11.4-2)代入(11.4-3)，得到形状函数  $\phi_1(x)$ 、 $\phi_2(x)$  所必须满足的边界条件：



$$\left. \begin{aligned} \phi_1(0) &= 1, & \phi_2(0) &= 0, \\ \phi_1(1) &= 0, & \phi_2(1) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (11.4-4)$$

以上边界条件确定 $\phi_1(x)$ 、 $\phi_2(x)$ 两函数的起点与终点(图11.4-2(a)、(b)), 由于这两个函数的任意性, 我们可以用最简单的线性函数来近似, 因此有

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \phi_2(x) = \frac{x}{l}. \quad (11.4-5)$$

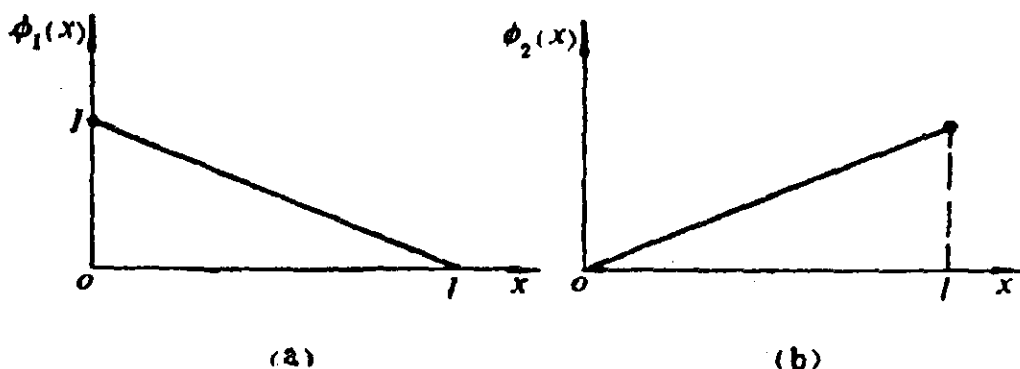


图 11.4-2

代回(11.4-2)式, 得

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_1(t) + \frac{x}{l}u_2(t). \quad (11.4-6)$$

我们找到了以节点位移表示单元内任何一点位移的关系式。基于这一关系, 只有两个节点位移才是独立的, 可以作为描述单元运动的广义坐标。而其它任何点的位移都是节点位移的函数。于是杆单元这个无限多自由度的连续系统被简化成为两个自由度的离散系统。

其次, 我们计算此单元的动能与势能, 并借以确定其质量矩阵与刚度矩阵。

杆单元的动能可表示为

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx,$$

以(11.4-6)式代入, 并积分, 得

$$\begin{aligned}
 T(t) &= \frac{1}{2} \frac{m l}{3} (\dot{u}_1^2(t) + \dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + \dot{u}_2^2(t)) \\
 &= \frac{1}{2} \{ \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t) \} \frac{m l}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{11.4-7}$$

由此得质量矩阵为

$$(m) = \frac{m l}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.
 \tag{11.4-8}$$

杆单元的势能为

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l E A \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx,$$

以(11.4-6)式代入, 并积分, 得

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \frac{1}{2} \frac{E A}{l} (u_1^2(t) - 2u_1(t)u_2(t) + u_2^2(t)) \\
 &= \frac{1}{2} \{ u_1(t), u_2(t) \} \frac{E A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{11.4-9}$$

由此得刚度矩阵为

$$(k) = \frac{E A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.
 \tag{11.4-10}$$

第三, 计算等效节点力。设单元上作用有分布力 $q(x, t)$ , 此外, 由于相邻单元的作用, 在节点上还作用有节点力 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ , 基于(11.4-6)式的关系, 可以将以上诸力按“等值虚功”折算成等效节点力, 其实就是对应于广义坐标 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 的广义力。为此, 计算以上诸力的虚功

$$\delta W = \int_0^l (q(x, t) + f_1(t)\delta(x) + f_2(t)\delta(x-l)) \delta u(x, t) dx,$$

以(11.4-6)式代入, 得

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^l (q(x,t) + f_1(t)\delta(x) + f_2(t)\delta(x-l)) \left[ \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \delta u_1(t) + \frac{x}{l} \delta u_2(t) \right] dx \\ &= \left[ \int_0^l q(x,t) \left( 1 - \frac{x}{l} \right) dx + f_1(t) \right] \delta u_1(t) \\ &\quad + \left[ \int_0^l q(x,t) \frac{x}{l} dx + f_2(t) \right] \delta u_2(t), \end{aligned}$$

由此得等效节点力

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= \int_0^l q(x,t) \left( 1 - \frac{x}{l} \right) dx + f_1(t), \\ f_2(t) &= \int_0^l q(x,t) \frac{x}{l} dx + f_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (11.4-11)$$

最后，我们可以写出单元的运动方程

$$\begin{aligned} \frac{m l}{3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (11.4-12)$$

或者缩写成

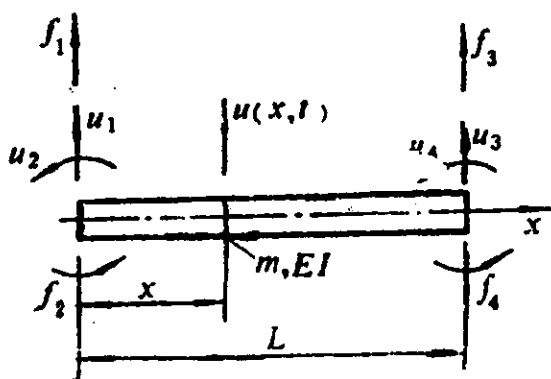


图 11.4-3

$$\begin{aligned} [m] \{ \ddot{u}(t) \} + [k] \{ u(t) \} \\ = \{ f(t) \}. \end{aligned} \quad (11.4-13)$$

## 2. 梁单元

一个梁单元也是有两个节点，但每个节点上需有两个节点位移：横向位移与转角。因此共有四个广义坐标，而成为一个四自由度系统，

如图11.4-3所示。其中 $u_1$ 、 $u_3$ 分别为两端的横向位移，而 $u_2$ 、 $u_4$ 为两端的转角。相应地等效节点力，即广义力也应该是四个，其中 $f_1$ 、 $f_3$ 是力， $f_2$ 、 $f_4$ 是力矩。在梁单元的范围內， $m$ 、 $EI$ 被认为是常数。

假定梁上任意点的位移 $u(x, t)$ 是其四个节点位移的线性组合：

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^4 \phi_i(x) u_i(t), \quad (11.4-14)$$

式中 $\phi_i(x)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )是“形状函数”。

$u(x, t)$ 必须满足以下边界条件：

$$\begin{cases} u(0, t) = u_1(t), & \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = u_2(t), \\ u(l, t) = u_3(t), & \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = u_4(t). \end{cases} \quad (11.4-15)$$

以(11.4-14)式分别代入以上各边界条件，得到四个形状函数 $\phi_i(x)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )所必须满足的边界条件：

$$\begin{aligned} \phi_1(0) = 1, & \quad \left. \frac{d\phi_1(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, & \quad \phi_1(l) = 0, \\ & \quad \left. \frac{d\phi_1(x)}{dx} \right|_{x=l} = 0, \end{aligned} \quad (11.4-16)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(0) = 0, & \quad \left. \frac{d\phi_2(x)}{dx} \right|_{x=0} = 1, & \quad \phi_2(l) = 0, \\ & \quad \left. \frac{d\phi_2(x)}{dx} \right|_{x=l} = 0, \end{aligned} \quad (11.4-17)$$

$$\begin{aligned} \phi_3(0) = 0, & \quad \left. \frac{d\phi_3(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, & \quad \phi_3(l) = 1, \\ & \quad \left. \frac{d\phi_3(x)}{dx} \right|_{x=l} = 0, \end{aligned} \quad (11.4-18)$$

$$\phi_4(0) = 0, \quad \left. \frac{d\phi_4(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \phi_4(l) = 0,$$

$$\left. \frac{d\phi_i(x)}{dx} \right|_{x=l} = 1. \quad (11.4-19)$$

可见每一个形状函数都必须满足四个边界条件：两端的函数值与两端的变化率。而能够适应这样四个边界条件的比较简单的函数是三次多项式。

$$\phi_i(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \quad i=1, 2, 3, 4. \quad (11.4-20)$$

调整  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  这四个常数，可以使(11.4-16) ~ (11.4-19) 式的每一组边界条件分别得到满足。例如，以(11.4-20)式分别代入(11.4-16)式的四个边界条件，可得  $A=1$ ， $B=0$ ， $C=-3/l^2$ ， $D=2/l^3$ ，于是

$$\phi_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}. \quad (11.4-21)$$

同理可得

$$\phi_2(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad (11.4-22)$$

$$\phi_3(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}. \quad (11.4-23)$$

$$\phi_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \quad (11.4-24)$$

代回(11.4-14)式，即得到以节点位移与形状函数表示的梁上任一点的横向位移

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right)u_1(t) + \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)u_2(t) \\ & + \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right)u_3(t) + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)u_4(t). \end{aligned} \quad (11.4-25)$$

梁的动能为

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx,$$

以(11.4-25)式代入上式，并整理，可得动能的表达式

$$T(t) = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dot{u}_3(t), \dot{u}_4(t) \}$$

$$\cdot \frac{m l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \\ \dot{u}_4(t) \end{Bmatrix}, \quad (11.4-26)$$

由此得质量矩阵

$$(m) = \frac{m l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (11.4-27)$$

梁的势能为

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx,$$

以(11.4-25)代入上式, 并整理, 可得势能的表达式

$$V(t) = \frac{1}{2} \{u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)\} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{Bmatrix}, \quad (11.4-28)$$

由此得刚度矩阵

$$(k) = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (11.4-29)$$

设作用在梁单元上的横向分布载荷为 $f(x,t)$ , 相邻单元作用在所考虑单元上的力和力矩为 $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ ,  $f_4(t)$ , 则由虚功的表达式可以求出诸广义力为

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(t) &= \int_0^l f(x, t) \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) dx + f_1^0(t) \\
 f_2(t) &= \int_0^l f(x, t) \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) l dx + f_2^0(t), \\
 f_3(t) &= \int_0^l f(x, t) \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right) dx + f_3^0(t), \\
 f_4(t) &= \int_0^l f(x, t) \left(-\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3}\right) l dx + f_4^0(t).
 \end{aligned} \right\} (11.4-30)$$

$\{m\}$ ,  $\{k\}$  及  $\{f(t)\} = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}$  完全决定了梁单元的运动方程。

### 3. 受到轴向力的梁单元

如图11.4-4所示，两个节点上各有三个节点位移：纵向位移  $u_1(t)$ 、 $u_4(t)$ ，横向位移  $u_2(t)$ 、 $u_6(t)$  和转角  $u_3(t)$ 、 $u_5(t)$ ，成为六个广义坐标，相应地有六个广义力。由于单元是线性的，其在不同力作用下的响应是可以叠加的，因此，其质量矩阵可按前述两种情况下的质量矩阵，即(11.4-8)与(11.4-27)式中的行与列，按图11.4-4中规定的广义坐标的次序，组合而成，

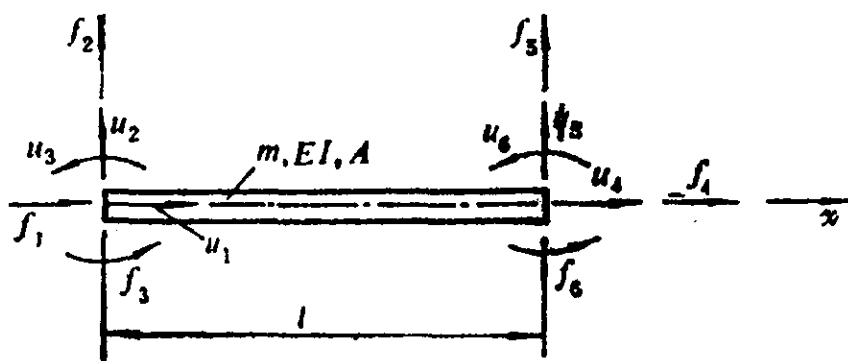


图 11.4-4

$$\{m\} = \frac{m l}{3} \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

(11.4-31)

而刚度矩阵可由(11.4-10)式与(11.4-29)式组合而成,

$$(k) = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (11.4-32)$$

我们还可以考虑受到弯扭联合作用的单元, 在两个方向上弯曲的梁单元以及它们的组合等更为一般, 更为复杂的情况。除线性(一维)单元以外, 还可采用二维或三维的单元。处理这些问题, 除了会涉及更高维数的质量与刚度矩阵, 需要较大的计算工作量与更为完善的技巧以外, 本质上并不需要新的概念。

## 11.4.2 坐标系与坐标变换

节点位移, 无论是线位移或转角位移, 都是按一定的坐标轴的方向来计算的。图11.4-1、11.4-3与11.4-4中的坐标系的 $x$ 轴都是顺着单元的轴线方向设立的, 在这样设立的坐标系中, 便于按拉压、扭转、弯曲等力学规律, 计算单元的节点位移。这种就各个单元本身轴线作为基准所设立的坐标系, 称为“局部坐标系”。这种坐标系有一个问题: 如果整个系统所包含的各个单元的取向各异时, 如图11.4-5所示, 那么各单元的局部坐标系就不一致, 节点位移的方向也不一致。该图中平面框架结构由①~⑦七根杆状单元组成, 共有 $A \sim E$ 五个节点, 设节点可视为铰接结构, 因而各杆只受轴向力。每单元在其局部坐标系内共有四个节



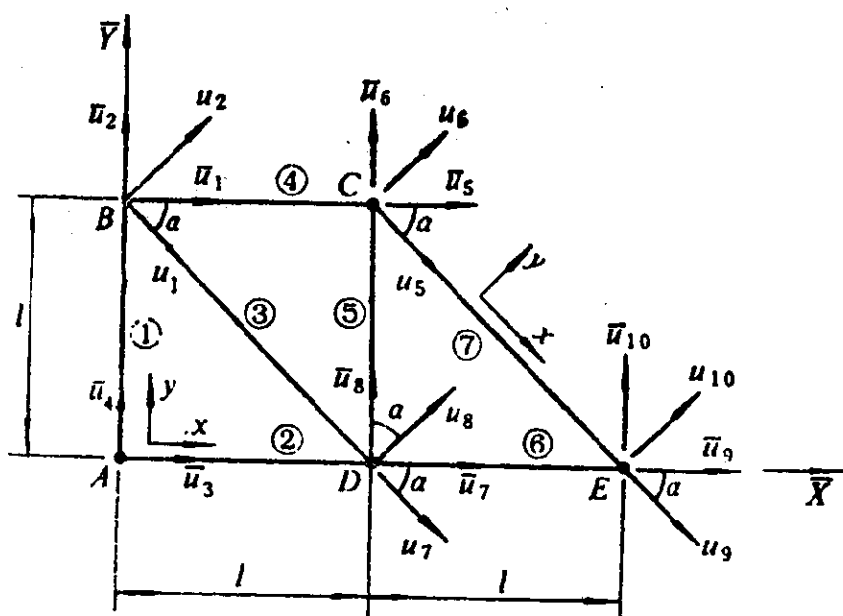


图 11.4-5

点位移，如杆件①的节点位移为  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ ，等等，依此类推。很明显，对于交接在一个节点上的各杆件来说，按它们各自的局部坐标计算的节点位移的方向并不一致。例如杆单元④、⑤、⑦交于节点C，杆⑦的节点位移的方向与杆④与⑤就不一致。这就引起一个困难：如何使汇交于一个节点的各杆件的节点位移真正相等，而保证变形协调条件得以满足呢？克服这一困难的办法是，对各个单元的运动方程，亦即对其中的质量矩阵和刚度矩阵进行坐标变换，由各自的局部坐标系变到对整个系统设立的总体坐标系中去，如图11.4-5中的 $\bar{X}$ ， $\bar{Y}$ 坐标系。

图11.4-5中单元③与⑦的局部坐标需要进行这种变换。让我们来说明这种变换的概念与技巧。图11.4-6表示一相对于总体坐标 $\bar{X} \circ \bar{Y}$ 倾斜的单元，其局部坐标系为 $xoy$ ， $x$ 轴与 $\bar{X}$ 轴的夹角为 $\alpha$ 。两种坐标系之间的变换关系为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix}, \quad (11.4-32)$$

式中

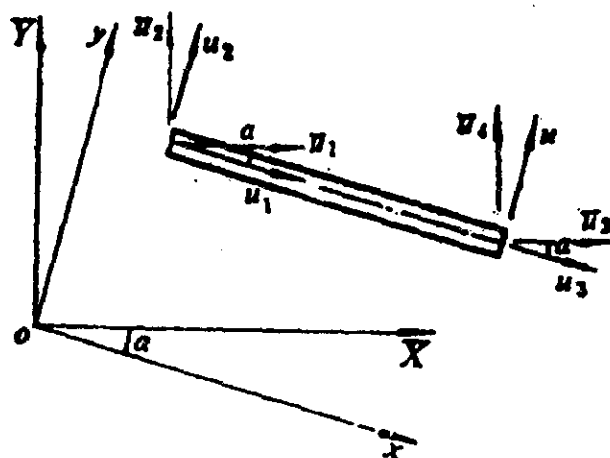


图 11.4-6

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = (l), \quad (11.4-33)$$

是坐标变换矩阵。在局部坐标系中，该单元的节点位移为 $u_1, u_2, u_3$ 与 $u_4$ ，而在总体坐标中的节点位移为 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ 与 $\bar{u}_4$ ，其间的变换矩阵也是 $(l)$ ，

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = (l) \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = (l) \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix}. \end{cases} \quad (11.4-34)$$

以上两式可以合并成一个矩阵式，

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (l) & (0) \\ (0) & (l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix}, \quad (11.4-35)$$

式中

$$\begin{bmatrix} (l) & (0) \\ (0) & (l) \end{bmatrix} = (L) \quad (11.4-36)$$

是该单元的全部节点位移的变换矩阵，是一正规正交矩阵，即有

$\{L\}^{-1} = \{L\}^T$ . (11.4-35)式可缩写成

$$\{u\} = \{L\} \{\bar{u}\}. \quad (11.4-37)$$

由(11.4-7), (11.4-9)式知在局部坐标系中, 系统动能与势能的表达式为

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T (m) \{\dot{u}\}, \quad (11.4-38)$$

$$V = \frac{1}{2} \{u\}^T (k) \{u\}, \quad (11.4-39)$$

而虚功为

$$\delta W = \{\delta u\}^T \{f\}. \quad (11.4-40)$$

现在研究当由局部坐标变换到总体坐标系时, 以上公式中的质量矩阵 $(m)$ 、刚度矩阵 $(k)$ 与广义力向量 $\{f\}$ 如何变换. 为此以(11.4-37)分别代入(11.4-38)~(11.4-40)式, 得

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T (L)^T (m) (L) \{\dot{\bar{u}}\},$$

$$V = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T (L)^T (k) (L) \{\bar{u}\},$$

$$\delta W = \{\delta \bar{u}\}^T (L)^T \{f\}.$$

令

$$\begin{cases} \{\bar{m}\} = (L)^T (m) (L), \\ \{\bar{k}\} = (L)^T (k) (L), \\ \{\bar{f}\} = (L)^T \{f\}, \end{cases} \quad (11.4-41)$$

得

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T \{\bar{m}\} \{\dot{\bar{u}}\}, \\ V = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T \{\bar{k}\} \{\bar{u}\}, \\ \delta W = \{\delta \bar{u}\}^T \{\bar{f}\}, \end{cases} \quad (11.4-42)$$

此即在总体坐标系中单元的动能、势能与虚功的表达式, 而(11.4-41)式给出了质量矩阵、刚度矩阵与等效力的变换关系.

例11.14 试求图11.4-5所示结构中七个杆状单元在总体坐标系中的质量矩阵 $\overline{[m]}_i$ 和刚度矩阵 $\overline{[k]}_i$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ )。

解：各单元的节点位移（即广义坐标）定义为

$$\begin{aligned} \{u\}_1 &= \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4\}^T = \{\overline{u}\}_1, \\ \{u\}_2 &= \{\overline{u}_3, \overline{u}_4, \overline{u}_7, \overline{u}_8\}^T = \{\overline{u}\}_2, \\ \{u\}_3 &= \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_7, \overline{u}_8\}^T, \\ \{u\}_4 &= \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_5, \overline{u}_6\}^T = \{\overline{u}\}_4, \\ \{u\}_5 &= \{\overline{u}_5, \overline{u}_6, \overline{u}_7, \overline{u}_8\}^T = \{\overline{u}\}_5, \\ \{u\}_6 &= \{\overline{u}_7, \overline{u}_8, \overline{u}_9, \overline{u}_{10}\}^T = \{\overline{u}\}_6, \\ \{u\}_7 &= \{\overline{u}_5, \overline{u}_6, \overline{u}_9, \overline{u}_{10}\}^T. \end{aligned} \quad (a)$$

杆单元①, ②, ④, ⑤, ⑥在局部坐标中的节点位移与总体坐标中的节点位移是一致的, 因而有

$$[L]_1 = [L]_2 = [L]_4 = [L]_5 = [L]_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)$$

即这几个单元的节点位移的变换矩阵为单位矩阵。而杆单元③与⑦的变换矩阵可由(11.4-36)、(11.4-33)式, 并注意到其中 $\alpha = 45^\circ$ , 得

$$[L]_3 = [L]_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

按(11.4-37)式, 有

$$\begin{aligned} \{\overline{u}\}_3 &= [L]_3^{-1} \{u\}_3 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_7, \overline{u}_8\}^T, \\ \{\overline{u}\}_7 &= [L]_7^{-1} \{u\}_7 = \{\overline{u}_5, \overline{u}_6, \overline{u}_9, \overline{u}_{10}\}^T. \end{aligned} \quad (d)$$

由于各单元只受轴向力, 而无弯曲变形, 按(11.4-8)式, 得

在局部坐标中的质量矩阵为

$$\{m\}_i = \frac{m_i l}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 5; \quad (e)$$

$$\{m\}_i = \frac{m_i l}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 2, 4, 6; \quad (f)$$

$$\{m\}_i = \frac{m_i \sqrt{2} l}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 3, 7. \quad (g)$$

(e)、(f)两式的差别是由于节点位移的排列次序造成的。(g)式中 $\sqrt{2}l$ 是单元的长度。

由(b)式, 有

$$\{\bar{m}\}_i = \{m\}_i, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6. \quad (h)$$

而以(g)式、(c)式代入(11.4-41)式第一式, 得

$$\{\bar{m}\}_i = \frac{m_i l}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad i = 3, 7. \quad (i)$$

按(11.4-10)式, 以局部坐标表示的刚度矩阵为

$$\{k\}_i = \frac{(EA)_i}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 5; \quad (j)$$

$$\begin{aligned}
 (k)_i &= \frac{(EA)_i}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & i=2, 4, 6; & (k) \\
 (k)_i &= \frac{(EA)_i}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & i=3, 7. & (l)
 \end{aligned}$$

类似地,

$$(\bar{k})_i = (k)_i, \quad i=1, 2, 4, 5, 6; \quad (m)$$

$$(\bar{k})_i = \frac{(EA)_i}{2\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i=3, 7. \quad (n)$$

### 11.4.3 全系统运动方程

经过坐标变换以后, 各单元的节点位移的方向被统一起来, 但不同的单元, 有不同的节点位移, 例如  $\{\bar{u}\}_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ , 而  $\{\bar{u}\}_2 = \{\bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_7, \bar{u}_8\}$ , 并不统一. 为了便于综合出全系统的运动方程, 我们首先建立全系统的位移向量

$$\{\bar{U}\} = \{\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_{10}\}^T,$$

如图11.4-7所示, 其中  $\bar{U}_1 \sim \bar{U}_{10}$  即是系统的广义坐标, 然后设法将各个单元的位移向量  $\{\bar{u}\}_r$  ( $r=1, 2, \dots, 7$ ) 变换到全系统的位移向量. 由例11.14(a)式与(d)式可见各单元实际上是从全系统的位移向量中选取几个作为其节点位移的, 例如

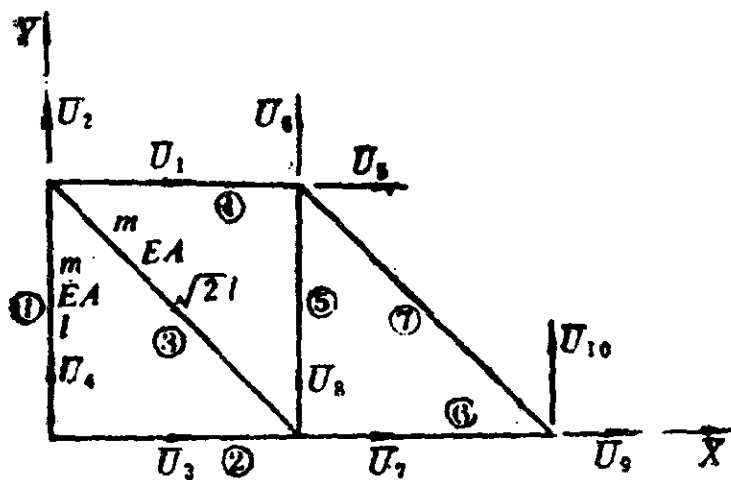


图 11.4-7

$$\{\bar{u}\}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_{10} \end{Bmatrix} \\ = (A)_1 \{\bar{U}\}$$

式中由1与0元素组成的矩阵,

$$(A)_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.4-43)$$

是从全系统位移向量变换到第一个单元的节点位移向量的变换矩阵, 实际上它起到从全系统位移向量中挑选分量的作用。

一般地有

$$\{\bar{u}\}_s = (A)_s \{\bar{U}\}, \quad s=1, 2, \dots, P, \quad (11.4-44)$$

式中  $\{\bar{u}\}_s = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r\}^T$  是第  $s$  个单元的节点位移向量,  $r$  是其节点位移的个数,  $\{\bar{U}\} = \{\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_N\}$  是全系统位移向量,  $N$  是系统的自由度数,  $P$  是系统划分的单元数。

以上式代入(11.4-42)式的第一式, 得第  $s$  个单元以全系统位

移向量为坐标的动能表达式,

$$T_s = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T (A)^T (\bar{m}) (A) \{\dot{U}\}.$$

而全结构的动能为

$$\begin{aligned} T &= \sum_{s=1}^P T_s = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^P \{\dot{U}\}^T (A)^T (\bar{m}) (A) \{\dot{U}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \left( \sum_{s=1}^P (A)^T (\bar{m}) (A) \right) \{\dot{U}\}, \end{aligned}$$

令

$$(\bar{M}) = \sum_{s=1}^P (A)^T (\bar{m}) (A), \quad (11.4-45)$$

得

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T (\bar{M}) \{\dot{U}\}. \quad (11.4-46)$$

$(\bar{M})$ 即为全结构的质量矩阵或惯性矩阵.

同理, 全结构的势能为

$$V = \frac{1}{2} \{\bar{U}\}^T \left( \sum_{s=1}^P (A)^T (\bar{k}) (A) \right) \{\bar{U}\},$$

令

$$(\bar{K}) = \sum_{s=1}^P (A)^T (\bar{k}) (A), \quad (11.4-47)$$

得

$$V = \frac{1}{2} \{\bar{U}\}^T (\bar{K}) \{\bar{U}\}. \quad (11.4-48)$$

$(\bar{K})$ 即为全结构的刚度矩阵.

由(11.4-42)式中的第三式, 全结构的虚功为

$$\delta W = \sum_{s=1}^P \{\delta u\}^T \{f\},$$



由(11.4-44)式,

$$\{\bar{\delta u}\}_s = (A)_s \{\bar{\delta U}\}, \quad s=1, 2, \dots, P, \quad (11.4-49)$$

代入上式, 得

$$\delta W = \sum_{s=1}^P \{\bar{\delta U}\}^T (A)_s^T \{f\}_s = \{\bar{\delta U}\}^T \sum_{s=1}^P (A)_s^T \{f\}_s.$$

另一方面, 就整个系统的广义坐标写出的虚功表达式为

$$\delta W = \{\bar{\delta U}\}^T \{\bar{F}\}, \quad (11.4-50)$$

式中 $\{\bar{F}\}$ 为与整个系统的广义坐标相对应的广义力向量。比较以上两式, 得广义力的表达式

$$\{\bar{F}\} = \sum_{s=1}^P (A)_s^T \{f\}_s. \quad (11.4-51)$$

$\{\bar{M}\}$ 、 $\{\bar{K}\}$ 与 $\{\bar{F}\}$ 决定了全系统的运动方程,

$$\{\bar{M}\}\ddot{\{U\}} + \{\bar{K}\}\{U\} = \{\bar{F}\}. \quad (11.4-52)$$

如果需要考虑系统的阻尼, 需要对每个单元按试验或经验确定其粘滞阻尼矩阵 $(c)_s$ ,  $s=1, 2, \dots, P$ . 然后按下式逐步合成全系统的阻尼矩阵 $\{\bar{C}\}$ :

$$\begin{aligned} (c)_s &= (L)_s^T (c)_s (L)_s, \\ \{\bar{C}\} &= \sum_{s=1}^P (A)_s^T (c)_s (A)_s. \end{aligned} \quad (11.4-53)$$

运动方程成为

$$\{\bar{M}\}\ddot{\{U\}} + \{\bar{C}\}\dot{\{U\}} + \{\bar{K}\}\{U\} = \{\bar{F}\}. \quad (11.4-54)$$

通常, 一个结构被分解成许多单元, 少则几十, 多则数千, 甚至上万. 因此, 由有限元方法得到的全系统的运动方程通常有很高的维数, 只有利用电子数字计算机才可能对之求解与分析.

例11.15 试计算图11.4-7所示结构的质量矩阵与刚度矩

阵.

解: 与(11.4-43)式类似, 有

$$(A)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(A)_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(A)_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(A)_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(a)

$$(A)_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(A)_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

以例11.14中的(h), (i)式, (11.4-43)式及以上(a)式代入(11.4-45)式, 即得全结构的惯性矩阵为:

$$\overline{(M)} = \sum_{i=1}^7 (A)_i^T (\overline{m})_i (A)_i = \frac{m l}{6\sqrt{2}}$$

$$\times \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & -2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & 2+2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2+2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 2+4\sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & 2+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 2+2\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, (b)$$

以例11.14中的(m), (n)式, (11.4-43)式及本例(a)式代入(11.4-47)式, 得全结构的刚度矩阵为

$$(\bar{K}) = \sum_{k=1}^n (A)^T (\bar{h})_k (A)_k = \frac{EA}{2\sqrt{2}l}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1+2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1+2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1+4\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2\sqrt{2} & 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c)$$

易于检验以上矩阵是奇异的（其中各列向量相加得到零向量），这是必然的，因为结构作为一个整体并未定位，即存在刚体运动的模态。

#### 11.4.4 结构的自由响应与特征值问题

这时 $\{\bar{F}\} = \{0\}$ ，方程(11.4-52)成为

$$(M)\{\ddot{U}\} + (K)\{U\} = \{0\}. \quad (11.4-55)$$

式中省去了矩阵与向量符号上的一小划，因为此后我们总是就总体坐标系来进行计算。

令主振型为

$$\{U(t)\} = \{U\} \cos(\omega t - \phi), \quad (11.4-56)$$

代入(11.4-55)式，得特征值问题方程

$$(K)\{U\} = \omega^2(M)\{U\}. \quad (11.4-57)$$

此特征值问题可以按第四章、第九章的方法求解。但是这里有一点需要说明：如果结构的任何一个节点都能在各个节点位移方向上自由移动，即 $\{U\}$ 的每一分量都是独立的，这时系统的自由度为 $N$ 。但这时结构作为一个整体，并未固定，因而存在刚体模态，如图11.4-7所示，这时矩阵 $(K)$ 是奇异的，需消除刚体模态，使刚度矩阵变成非奇异的，才有可能在计算机上调用某些通用程序进行计算；另一种情况是结构作为一个整体已受到充分的约束，这时有部分节点是不能移动的，系统的自由度小于 $N$ ，运动方程的维数可以减缩。现针对这两种情况，略加说明。

##### 1. 消去刚体模态

如 $\{U^{(r)}\} (r = 1, 2, \dots, c)$ 是刚体模态的特征向量，在第四章已经证明，其所对应的特征值 $\omega^2 = 0$ ，由(11.4-57)式，有

$$(K)\{U^{(r)}\} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, c. \quad (11.4-58)$$

此式确定 $c$ 个刚体模态的特征向量。

其余的 $n = N - c$ 个弹性模态的特征向量中的任何一个 $\{U\}$ 都必须是与这 $c$ 个刚体模态向量正交，因而得到对于 $\{U\}$ 的 $c$ 个约束方程

$$\{U^{(r)}\}^T (M) \{U\} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, c. \quad (11.4-59)$$

按第四章4.11.1小节的方法，可以从上式综合成一个  $N \times n$  约束矩阵  $(C)$ ，使得有

$$\{U\}_c = (C) \{U\}, \quad (11.4-60)$$

式中， $\{U\}_c$  是  $N$  维向量，其各分量之间要受到(11.4-59)式的约束，不是完全独立的； $\{U\}$  是缩减的  $n$  维向量，其各分量是独立的，不受约束。

以(11.4-60)式代入动能和势能的表达式。

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}_c^T (M) \{\dot{U}\}_c = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T (C)^T (M) (C) \{\dot{U}\}$$

$$= \frac{1}{2} \{\dot{U}\} (M') \{\dot{U}\}.$$

$$V = \frac{1}{2} \{U\}_c^T (K) \{U\}_c = \frac{1}{2} \{U\}^T (C)^T (K) (C) \{U\}$$

$$= \frac{1}{2} \{U\} (K') \{U\},$$

由此得缩减的  $n \times n$  惯性矩阵和刚度矩阵的计算公式为

$$(M') = (C)^T (M) (C), \quad (11.4-61)$$

$$(K') = (C)^T (K) (C),$$

而特征值问题成为

$$(K') \{U\} = \omega^2 (M') \{U\}. \quad (11.4-62)$$

刚体模态已经消除，这时  $(K')$  矩阵已经是正定的。

**例11.16** 图11.4-8是一长度为  $L$ ，两端自由的均匀轴，试求解其特征值问题。

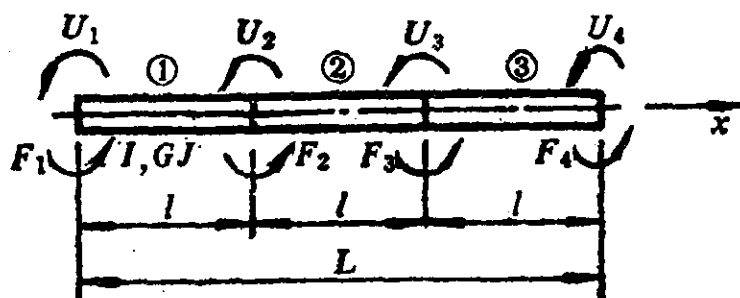


图 11.4-8

解：将该轴分成三段，即划分为三个单元，每段长度为  $l = L/3$ 。按(11.4-8)、(11.4-10)式，各单元的质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$\{\bar{m}\}_s = \{m\}_s = \frac{I l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad s=1, 2, 3, \quad (a)$$

$$\{\bar{k}\}_s = \{k\}_s = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad s=1, 2, 3, \quad (b)$$

变换到全系统的位移向量的变换矩阵为

$$\begin{aligned} (A)_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ (A)_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ (A)_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (c)$$

整个轴的惯性矩阵为

$$\begin{aligned} (M) &= \sum_{s=1}^3 (A)_s^T \{\bar{m}\}_s (A)_s \\ &= \frac{I L}{18} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (d)$$

刚度矩阵为

$$\begin{aligned} (K) &= \sum_{s=1}^3 (A)_s^T \{\bar{k}\}_s (A)_s \\ &= \frac{3GJ}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (e)$$

此矩阵是奇异的，这是因为轴未定位。易验证刚体振型

$$\{U^{(1)}\} = U_0 \{1, 1, 1, 1\}^T \quad (f)$$

满足(11.4-58)式。按(11.4-59)式的正交条件，

$$\{U^{(1)}\}^T \{M\} \{U\} = \frac{I L U_0}{18} \{1, 1, 1, 1\}$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \\ & = \frac{I L U_0}{18} (3U_1 + 6U_2 + 6U_3 + 3U_4) = 0, \end{aligned}$$

由此，

$$U_1 = -2U_2 - 2U_3 - U_4,$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix},$$

即约束矩阵为

$$\{C\} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (g)$$

按(11.4-61)式，缩减的惯性与刚度矩阵为

$$\{M'\} = \{C\}^T \{M\} \{C\} = \frac{I L}{8} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 7 & 12 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad (h)$$

$$\{K'\} = \{C\}^T \{K\} \{C\} = \frac{3 G J}{L} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (i)$$



缩减后的 $(K')$ 是非奇异的。由此得缩减特征值问题的方程（已经消去刚体模态），

$$\{K'\}\{U\} = \omega^2\{M'\}\{U\}. \quad (j)$$

可解出自然频率与振型向量为：

$$\left[ \begin{array}{l} \omega_2 = 3.28633\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \{U^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.40825 \\ 0.40825 \\ 0.81650 \end{Bmatrix}, \\ \omega_3 = 7.34846\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \{U^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0.40825 \\ 0.40825 \\ -0.81650 \end{Bmatrix}, \\ \omega_4 = 10.39230\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \{U^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} -0.57735 \\ 0.57735 \\ -0.57735 \end{Bmatrix}. \end{array} \right. \quad (k)$$

以(1)、(g)式代入(11.4-60)式，得还原到未缩减的坐标（全系统位移坐标）中的振型向量，

$$\{U^{(2)}\}_e = \begin{Bmatrix} -0.81650 \\ -0.40825 \\ 0.40825 \\ 0.81650 \end{Bmatrix}, \quad \{U^{(3)}\}_e = \begin{Bmatrix} -0.81650 \\ 0.40825 \\ 0.40825 \\ -0.81650 \end{Bmatrix},$$

$$\{U^{(4)}\}_e = \begin{Bmatrix} 0.57735 \\ -0.57735 \\ 0.57735 \\ -0.57735 \end{Bmatrix}. \quad (l)$$

三个弹性振型加上一个刚体振型，在图11.4-9中给出。图内实线表示有限元法的近似解，而虚线是振型函数的准确解。 $\omega_i$ 是近似解， $\omega'_i$ 是准确解( $i=1, 2, 3, 4$ )。

## 2. 消去受约束的自由度

我们用 $\{U\}_0 = \{0\}$ 表示那些因受到约束，而必须为零的节点位移，用 $\{U\}_1$ 表示其余的节点位移，这时有

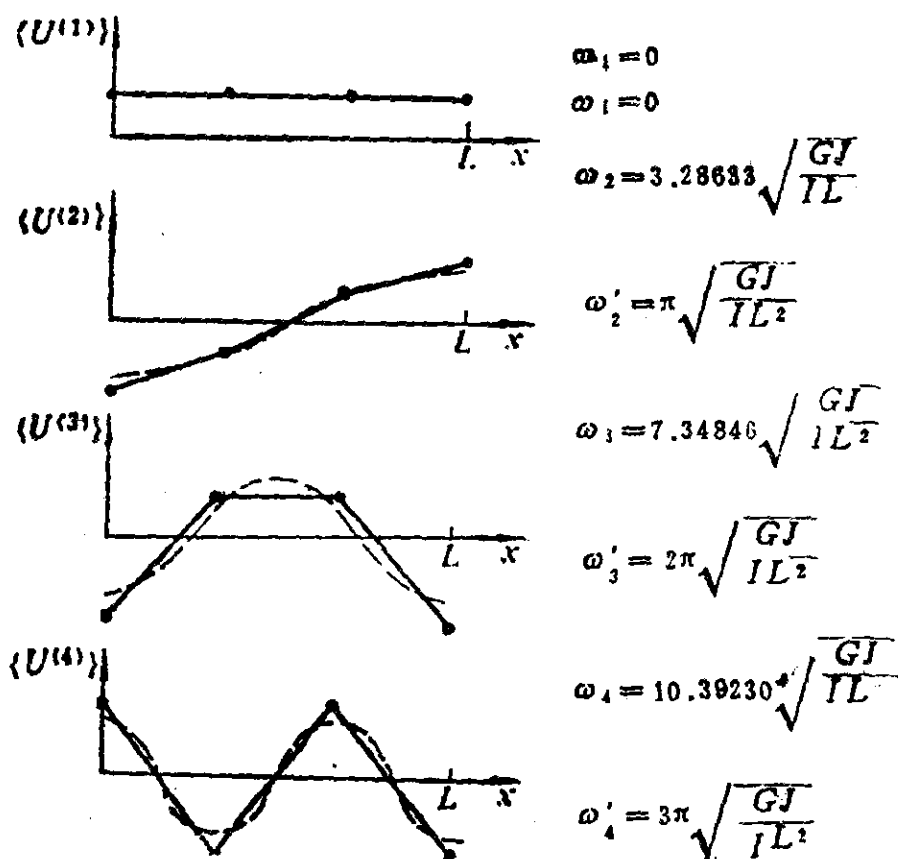


图 11.4-9

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U\}_0 \\ \dots \\ \{U\}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \dots \\ \{U\}_1 \end{Bmatrix}. \quad (11.4-63)$$

相应地对  $(M)$ 、 $(K)$  矩阵也加以分块，成为

$$(M) = \begin{Bmatrix} (M)_{00} & \vdots & (M)_{01} \\ \dots & \vdots & \dots \\ (M)_{10} & \vdots & (M)_{11} \end{Bmatrix}, \quad (K) = \begin{Bmatrix} (K)_{00} & \vdots & (K)_{01} \\ \dots & \vdots & \dots \\ (K)_{10} & \vdots & (K)_{11} \end{Bmatrix}. \quad (11.4-64)$$

将(11.4-63)与(11.4-64)式代入动能与势能的表达式，得

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T (M) \{\dot{U}\} = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}_1^T (M)_{11} \{\dot{U}\}_1, \quad (11.4-65)$$

$$V = \frac{1}{2} \{U\}^T (K) \{U\} = \frac{1}{2} \{U\}_1^T (K)_{11} \{U\}_1,$$

即成为一个坐标向量为  $\{U\}_1$ ，惯性矩阵和刚度矩阵分别为  $(M)_{11}$  和  $(K)_{11}$  的特征值问题，

$$\{K\}_{11}\{U\}_1 = \omega^2\{M\}_{11}\{U\}_1, \quad (11.4-66)$$

其中 $\{K\}_{11}$ 、 $\{M\}_{11}$ 矩阵是分别由 $\{K\}$ 、 $\{M\}$ 矩阵划去限定为零的节点位移所对应的那些行和列而得出的。

**例11.17** 考虑到例11.16中的轴，如果左端固定，右端自由，试求解其特征值问题。

解：因为 $U_1 = 0$ ，故 $\{U\}$ 、 $\{M\}$ 与 $\{K\}$ 的分块如下：

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix},$$

$$\{M\} = \frac{I L}{18} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \{K\} = \frac{3GJ}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

因此有

$$\{U\}_1 = \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}, \quad \{M\}_{11} = \frac{I L}{18} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\{K\}_{11} = \frac{3GJ}{L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)$$

代入(11.4-66)，构成一特征值问题，可解出

$$\omega_1 = 1.58880 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \omega_2 = 5.19615 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad (c)$$

$$\omega_3 = 9.42661 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}},$$

$$\{U^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.35355 \\ 0.61237 \\ 0.70711 \end{Bmatrix}, \quad \{U^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 0.70711 \\ 0.00000 \\ -0.70711 \end{Bmatrix},$$

$$\{U^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0.35355 \\ -0.61237 \\ 0.70711 \end{Bmatrix}. \quad (d)$$

图11.4-10给出了以上三个振型（实线），并以虚线给出了振型曲线的精确解，以资比较。

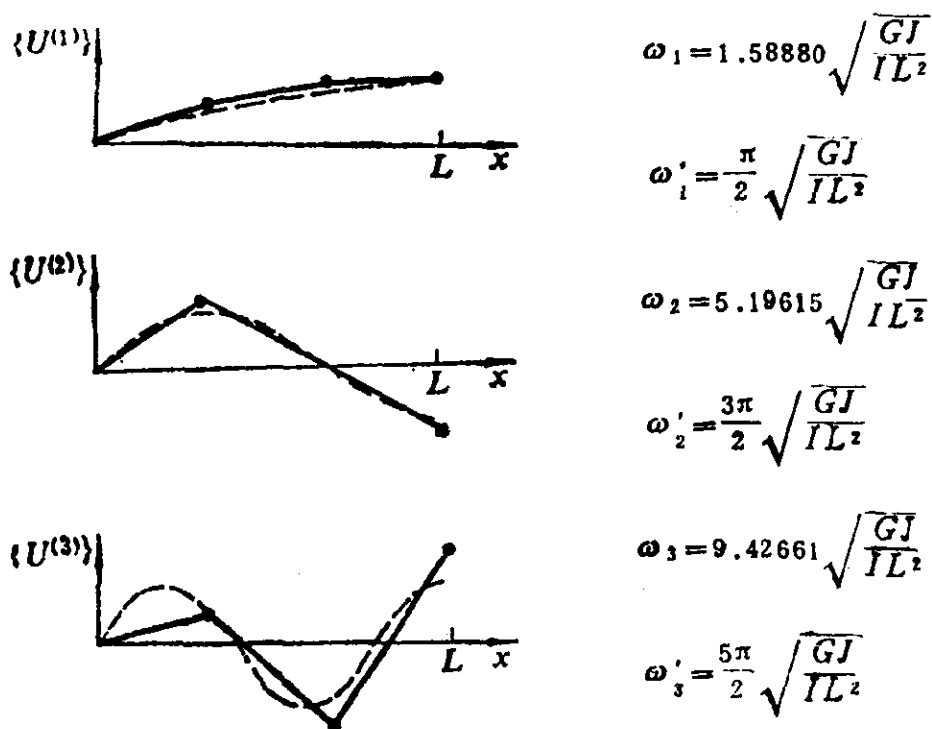


图 11.4-10

### 11.4.5 系统的响应

略去上划号，将全系统的运动方程(11.4-52)式写成

$$\{M\} \{\ddot{U}(t)\} + \{K\} \{U(t)\} = \{F(t)\}. \quad (11.4-67)$$

这里 $\{M\}$ 、 $\{K\}$ 分别为全结构的惯性矩阵和刚度矩阵， $\{U(t)\}$

是全系统节点位移向量,  $\{F(t)\}$  是节点力向量。以下仍然分别就无约束系统与约束系统两种情况来考虑。

### 1. 无约束系统

如上一小节所述, 系统共有  $N$  个模态, 其中有  $c$  个是刚体模态, 其振型满足(11.4-58)式, 其余  $n = N - c$  个为弹性模态。各模态之间满足对惯性矩阵的正交性与正规化条件,

$$\{U\}^T \{M\} \{U\} = \{1\}, \quad (11.4-68)$$

式中  $\{U\}$  为振型矩阵,

$$\{U\} = (\{U^{(1)}\}, \{U^{(2)}\}, \dots, \{U^{(N)}\}). \quad (11.4-69)$$

考虑到(11.4-58)式, 可将各振型向量对于刚度矩阵的正交性表示成

$$\{U\}^T \{K\} \{U\} = \begin{bmatrix} \{0\} & \vdots & \{0\} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \{0\} & \vdots & \begin{bmatrix} \omega^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (11.4-70)$$

式中  $\begin{bmatrix} \omega^2 \end{bmatrix}$  是由  $n$  个非零特征值组成的对角矩阵。

设(11.4-67)式的解为各模态的迭加:

$$\{U(t)\} = \sum_{r=1}^N \{U^{(r)}\} q_r(t) = \{U\} \{q(t)\}, \quad (11.4-71)$$

代入(11.4-67)式, 左乘以  $\{U\}^T$ , 利用(11.4-68)、(11.4-70)式, 得到一组独立的方程,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r(t) &= Q_r(t), & r &= 1, 2, \dots, c \\ \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) &= Q_r(t), & r &= c+1, c+2, \dots, N. \end{aligned} \quad (11.4-72)$$

这里  $q_r(t)$  ( $r=1, 2, \dots, N$ ) 是广义坐标, 而  $Q_r$  ( $r=1, 2, \dots, N$ ) 是广义力,

$$\{Q_r(t)\} = \{U\}^T \{F(t)\}, \quad (11.4-73)$$

式中  $\{F(t)\}$  是由(11.4-51)式确定的等效节点力向量。

记广义位移与广义速度的初始值为

$$q_{r,0} = q_r(0), \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (11.4-74)$$

$$\dot{q}_{r,0} = \left. \frac{dq_r(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad r = 1, 2, \dots, N.$$

方程组(11.4-72)的解为(参考§4.10)：

$$q_r(t) = \int_0^t \left( \int_0^\tau Q_r(\sigma) d\sigma \right) d\tau + q_{r,0} + t \dot{q}_{r,0},$$

$$r = 1, 2, \dots, c,$$

$$\dot{q}_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t Q_r(\tau) \sin \omega_r(t-\tau) d\tau + q_{r,0} \cos \omega_r t \quad (11.4-75)$$

$$+ \frac{\dot{q}_{r,0}}{\omega_r} \sin \omega_r t, \quad r = c+1, c+2, \dots, N.$$

广义坐标与广义速度的初始值 $q_{r,0}$ 、 $\dot{q}_{r,0}$ 可由节点位移的初值 $\{U(0)\}$ 与节点速度的初值 $\{\dot{U}(0)\} = [d\{U(t)\}/dt]_{t=0}$ 来计算(参阅(4.6-1)式)：

$$\{q_0\} = \{U\}^T \{M\} \{U(0)\}, \quad (11.4-76)$$

$$\{\dot{q}_0\} = \{U\}^T \{M\} \{\dot{U}(0)\}.$$

以(11.4-75)式代入(11.4-71)式即得系统的响应。

## 2. 约束系统

将(11.4-67)式左边的向量与矩阵按(11.4-63)、(11.4-64)式的方式分块，并将右边的节点力向量也分写为

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} \{F(t)\}_0 \\ \dots\dots\dots \\ \{F(t)\}_1 \end{Bmatrix}, \quad (11.4-77)$$

式中 $\{F(t)\}_0$ 是对应于零节点位移的力向量，即结构在支承点处受到的动反力，而 $\{F(t)\}_1$ 是施加于系统的作用力向量。

以(11.4-63)、(11.4-64)、(11.4-77)式代入(11.4-67)式，得两个方程

$$\{M\}_{1,1} \{\ddot{U}(t)\}_1 + \{K\}_{1,1} \{U(t)\}_1 = \{F(t)\}_1, \quad (11.4-78)$$

$$\{M\}_{0,1} \{\ddot{U}(t)\}_1 + \{K\}_{0,1} \{U(t)\}_1 = \{F(t)\}_0. \quad (11.4-79)$$

由式(11.4-78)解出 $\{U(t)\}_1$ 后, 代入(11.4-79)式, 即得到支反力 $\{F(t)\}_0$ .

**例11.18** 考虑例11.16中两端自由的均匀轴, 对于分布冲击扭矩 $f(x, t) = (f_0 x/L)\delta(t)$ 的响应, 设轴初始静止.

解: 按图11.4-8, 将该轴分成三段, 对于各单元外加分布扭矩可以写成

$$f_s(x_s, t) = \frac{1}{3} f_0 \left( s - 1 + \frac{3x_s}{L} \right) \delta(t), \quad 0 < x_s < \frac{1}{3} L, \\ s = 1, 2, 3. \quad (a)$$

由(11.4-11)式, 得单元节点力为

$$f_{1s}(t) = \frac{1}{3} f_0 \delta(t) \int_0^{l_s} \left( s - 1 + \frac{3x_s}{L} \right) \left( 1 - \frac{x_s}{l_s} \right) dx_s + f_{1s}^*(t) \\ = \frac{1}{54} (3s - 2) f_0 L \delta(t) + f_{1s}^*(t), \quad (b)$$

$$f_{2s}(t) = \frac{1}{3} f_0 \delta(t) \int_0^{l_s} \left( s - 1 + \frac{3x_s}{L} \right) \frac{x_s}{l_s} dx_s + f_{2s}^*(t) \\ = \frac{1}{54} [3(s - 1) + 2] f_0 L \delta(t) + f_{2s}^*(t),$$

单元力的向量为

$$\{f(t)\}_s = \{\bar{f}(t)\}_s = \frac{1}{54} f_0 L \begin{Bmatrix} 3s - 2 \\ 3(s - 1) + 2 \end{Bmatrix} \delta(t) + \{f^*(t)\}_s, \\ s = 1, 2, 3. \quad (c)$$

将(c)式代入(11.4-51)式, 其中 $\{A\}_s$ 已在例11.6(c)式中给出, 得全系统节点扭矩向量

$$\{\bar{F}\} = \sum_{s=1}^3 \{A\}_s^T \{f\}_s = \frac{1}{54} f_0 L \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} \delta(t). \quad (d)$$

值得注意的是在 $\{\bar{F}\}$ 中并不包含各单元之间相互作用的内力 $\{f^*\}$ , 这是由于它们成对地相互抵消了.

由例11.16中(f)式与(1)式给出的特征向量经正规化后,可构成振型矩阵

$$(U) = \sqrt{\frac{18}{IL}} \begin{pmatrix} 0.23570 & -0.36515 & -0.47140 & 0.40825 \\ 0.23570 & -0.18257 & 0.23570 & -0.40825 \\ 0.23570 & 0.18257 & 0.23570 & 0.40825 \\ 0.23570 & 0.36515 & -0.47140 & -0.40825 \end{pmatrix} \quad (e)$$

按(11.4-73)式得广义力为

$$\{Q(t)\} = (U)^T \{F(t)\} = \frac{f_0 L}{54} \sqrt{\frac{18}{IL}} \begin{pmatrix} 27 \times 0.23570 \\ 10 \times 0.36515 \\ 0 \\ -0.40825 \end{pmatrix} \delta(t). \quad (f)$$

由式(f)的第一个方程,按(11.4-75)第一式,有

$$q_1(t) = \frac{f_0 L}{2\sqrt{IL}} t, \quad (g)$$

而按该式第二式得对应于扭振的其余三个广义坐标是

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \frac{10 \times 0.36515 f_0 L}{54} \sqrt{\frac{18}{IL}} \frac{1}{\omega_2} \int_0^t \delta(\tau) \sin \omega_2 (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{10 \times 0.36515 f_0 L}{54} \sqrt{\frac{18}{IL}} \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

$$q_3(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} q_4(t) &= -\frac{0.40825 f_0 L}{54} \sqrt{\frac{18}{IL}} \frac{1}{\omega_4} \int_0^t \delta(\tau) \sin \omega_4 (t - \tau) d\tau \\ &= -\frac{0.40825 f_0 L}{54} \sqrt{\frac{18}{IL}} \frac{1}{\omega_4} \sin \omega_4 t. \end{aligned}$$

其中 $\omega_2$ 与 $\omega_4$ 由例11.16的(k)式给出.注意,这里第三模态未能激发.由图11.4-9知此模态的振型对于中点 $x = L/2$ 是对称的,而题给分布载荷相当于一个常载荷加一对于 $x = L/2$ 点反对



称载荷，因此无法激励出对于  $x = L/2$  点对称的振型来。

例11.19 试计算例11.17中一端固定，一端自由的均匀轴对于初始角位移  $\theta(x, 0) = \theta_0 x/L$  的响应。

解：由例11.17(d)式给出的振型向量经正规化，可组成振型矩阵，

$$\{U\} = \sqrt{\frac{18}{IL}} \begin{pmatrix} 0.17052 & 0.40825 & 0.27109 \\ 0.29535 & 0 & -0.46954 \\ 0.34104 & -0.40825 & 0.54217 \end{pmatrix}, \quad (a)$$

节点位移的初值向量为

$$\{U(0)\} = \frac{\theta_0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

将(a)、(b)式及例11.17中的(a)式代入(11.4-76)式第一式，得

$$\{q_0\} = \{U\}^T \{M\} \{U(0)\} = \sqrt{\frac{IL}{18}} \frac{\theta_0}{3} \begin{pmatrix} 7.29564 \\ -0.81650 \\ 0.32940 \end{pmatrix}; \quad (c)$$

代入(11.4-75)后一式，并考虑到  $\{\dot{q}_0\} = \{0\}$ ，得

$$\begin{aligned} q_1(t) &= 7.29564 \sqrt{\frac{IL}{18}} \frac{\theta_0}{3} \cos \omega_1 t, \\ q_2(t) &= -0.81650 \sqrt{\frac{IL}{18}} \frac{\theta_0}{3} \cos \omega_2 t, \\ q_3(t) &= 0.32948 \sqrt{\frac{IL}{18}} \frac{\theta_0}{3} \cos \omega_3 t, \end{aligned} \quad (d)$$

式中  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$  由例11.17(c)式给出。最后，将(d)式代入(11.4-71)式，即得系统的响应

$$\{U(t)\} = 7.29564 \frac{\theta_0}{3} \begin{pmatrix} 0.17052 \\ 0.29535 \\ 0.34104 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t$$

$$\begin{aligned}
 & -0.81650 \frac{\theta_0}{3} \begin{Bmatrix} 0.40825 \\ 0 \\ -0.40825 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t \\
 & + 0.32948 \frac{\theta_0}{3} \begin{Bmatrix} 0.27109 \\ -0.46954 \\ 0.54217 \end{Bmatrix} \cos \omega_3 t. \quad (e)
 \end{aligned}$$

**例11.20** 试计算例11.19中的一端固定、一端自由的轴在均布载荷  $f(x, t) = f(t)$  下的固定端支反力的一般表达式。

解：按(11.4-11)式，得单元的等效节点力为

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_{1s}(t) = f_{1s}(t) &= \int_0^l f(t) \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx + f_{1s}^*(t) \\
 &= \frac{1}{2} f(t) l + f_{1s}^*(t), \quad s=1, 2, 3, \quad (f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_{2s}(t) = f_{2s}(t) &= \int_0^l f(t) \frac{x}{l} dx + f_{2s}^*(t) \\
 &= \frac{1}{2} f(t) l + f_{2s}^*(t), \quad s=1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

式中  $f_{1s}^*(t)$ 、 $f_{2s}^*(t)$ ， $s=1, 2, 3$ ，是各段轴单元之间的相互作用力，显然有  $f_{11}^* = 0$ ， $f_{12}^* = -f_{21}^*$ ， $f_{22}^* = -f_{13}^*$  及  $f_{23}^* = 0$ 。将(f)式与例11.16(c)式代入(11.4-51)式，并考虑到以上关系，得全系统节点力向量

$$\{\bar{F}\} = \frac{1}{2} f(t) L \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (g)$$

按例11.17(a)式的分块方式，(11.4-78)式成为

$$\frac{I L}{18} \begin{Bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_4 \end{Bmatrix} + \frac{3 G J}{L} \begin{Bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} f(t) L \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

而(10.4-79)式化成为

$$\bar{F}_0(t) = \frac{I L}{18} \ddot{U}_2(t) - \frac{3GJ}{L} \bar{U}_2(t),$$

$\bar{F}_0(t)$ 为固定端的动反力, 式中 $\bar{U}_2(t)$ 由(h)式解出, 加上由(f)式第一式确定的折算到固定端的节点力 $\bar{f}_{11}$ , 即得到总的支反力

$$\bar{F}'_0(t) = \frac{I L}{18} \ddot{U}_2(t) - \frac{3GJ}{L} \bar{U}_2(t) + \frac{1}{6} f(t) L. \quad (i)$$

## 思 考 题

试选择正确的答案

1. 按Rayleigh能量法估算系统基频的试算函数必须满足:

- A. 特征值问题方程、力学边界条件与几何边界条件;
- B. 力学与几何边界条件;
- C. 几何边界条件;
- D. 以上都不对。

2. 估计系统基频的第一能量与第二能量法相比较:

- A. 前者计算量较小, 后者精度较高;
- B. 前者精度较高, 后者计算量较小;
- C. 前者计算量较小, 精度也较高;
- D. 后者计算量较小, 精度也较高。

3. Rayleigh能量法与Dunkerley法:

- A. 前者给出基频的下限估计, 后者给出上限估计;
- B. 前者给出基频的上限估计, 后者给出下限估计;
- C. 前者估计的基频都比后者估计的基频小;
- D. 两者估计的基频都比其精确值大。

4. 采用 Rayleigh-Ritz 法估计系统的基频, 若将(11.3-1)式中的  $n$  分别取为  $i$  与  $i+1$ , 而估计的结果记为  $\omega_1^{(i)}$  与  $\omega_1^{(i+1)}$ , 则一般有:

A.  $\omega_1^{(i)} = \omega_1^{(i+1)}$ ,

B.  $\omega_1^{(i)} < \omega_1^{(i+1)}$ ,

C.  $\omega_1^{(i)} > \omega_1^{(i+1)}$ ,

D. 不能确定.

5. 有限元分析方法中一单元的节点位移  $u_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 与该单元中任意点的位移  $u(x, t)$  之间的关系:

A. 是线性齐次关系;

B. 非常复杂, 无法表达成简单的关系;

C. 在问题求解前并不知道, 写不出来;

D. 可近似地表示为线性齐次关系.

6. 形状函数  $\phi_i(x)$ :

A. 是由单元的形状完全决定的, 不能任意选取;

B. 可以任意规定;

C. 一般选取为线性函数;

D. 在满足边界条件的前提下, 选取较为简单的函数, 一般取次数尽可能低的多项式.

## 习 题

11-1 一简支均匀梁中点处带有一集中质量, 其值等于梁的质量的一半. 试以瑞利商估计其基频  $\omega_1$ , 取试算函数为  $y(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$ .

11-2 对习题10-1中的悬绳系统, 取试算函数为  $y(x) = 1 - (x/L)^2$ , 试以瑞利商估计其基频.

11-3 对例11.4中的变截面轴, 以瑞利商估算其基频, 取试算函数为  $\Theta(x) = x/L - \frac{1}{3}(x/L)^3$ .

11-4 重复11-3题, 但取试算函数为  $\Theta(x) = a_1 \left[ (x/L) - \frac{1}{3}(x/L)^3 \right]$

$+ a_2 \left[ (x/L)^3 - \frac{3}{5} (x/L)^5 \right]$ , 试决定比值  $a_2/a_1$ , 使所估算出的基频最小。

11-5 将一简支均匀梁分成四段, 将每段质量平均集中到该段两端, 从而简化成图11-5所示的具有三个集中质量的简支梁, 试分别用第一能量法、第二能量法、静挠度法与Dunkerley法估算其基频, 并与简支均匀梁的基频的精确值  $\omega_1 = \pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$  作比较。

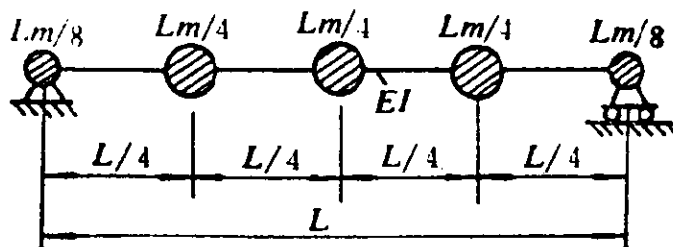


图 11-5

11-6 设图11.3-4的变截面轴的参数如下:

$$I(x) = \frac{12I}{11} \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], G(x) = \frac{12GJ}{11} \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right],$$

试将该轴质量集中成六个圆盘, 分别用传递矩阵法与影响系数法求解特征值问题, 确定其自然频率并给出前三个振型。建议用计算机求解。

11-7 用传递矩阵法求图11-7所示均匀的“铰支-自由”梁的频率方程。

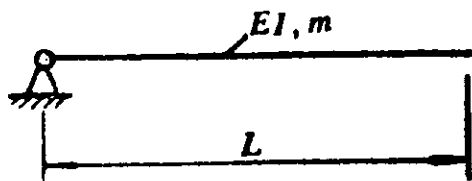


图 11-7

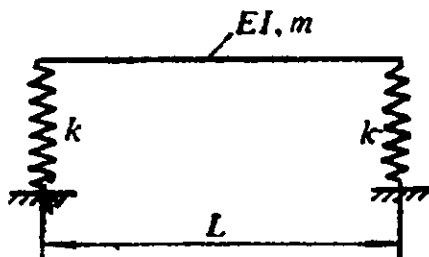


图 1-18

11-8 用传递矩阵法求图11-8所示两端弹性支承梁的频率方程, 并讨论弹簧刚度  $k = \infty$  与  $k = 0$  两种极限情况。

11-9 对图10.5-2所示的系统, 用Rayleigh-Ritz法求解特征值问题, 用

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin(2i-1)\pi x/2L$$

形式的近似解, 分别令  $n = 1, 2, 3$ , 求出自然频率, 并给出振型。将所得结

果与10.5.2小节的结果相比较。

11-10 图11-10所示均匀简支梁上附有两个集中质量，各等于梁的质量之半，试用Rayleigh-Ritz法求头四阶自然频率及主振型，并验证其对于质量矩阵与刚度矩阵的正交性。取

$$y(x) = \sum_{i=1}^4 a_i \sin \frac{i\pi}{L} x.$$

11-11 图11-11所示三角形板具有相同的厚度，以其大端固定，其单位长度的质量与各截面上的抗拉刚度为

$$m(x) = m_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right), EA(x) = EA_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

试以Rayleigh-Ritz法计算其纵向振动的头两阶自然频率与振型。取均匀悬臂杆的振型  $u_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2L}$ ,  $u_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{2L}$  为生成函数。

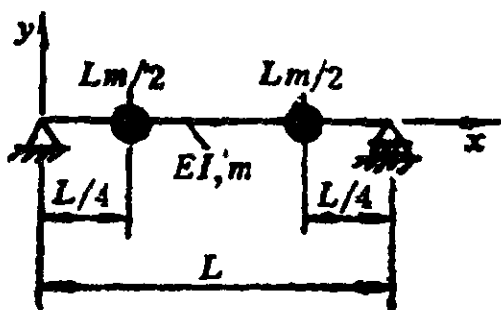


图 11-10

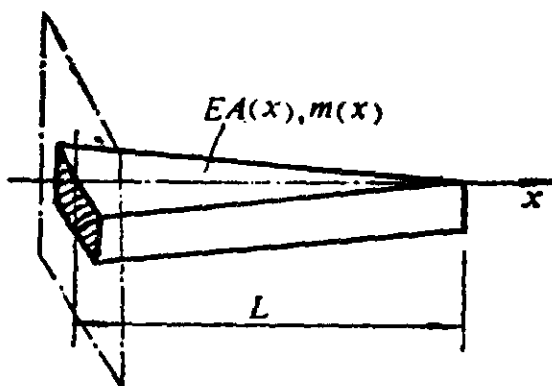


图 11-11

11-12 图11-12所示为一悬臂梁，其厚度为 $b$ ，横截面 $A$ 按直线规律变化

$$A(x) = A_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right).$$

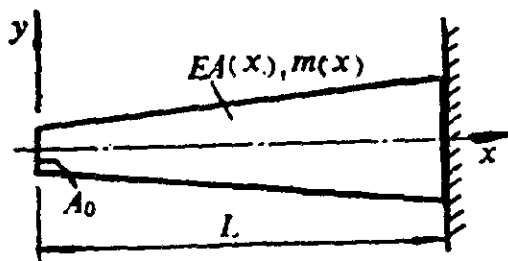


图 11-12

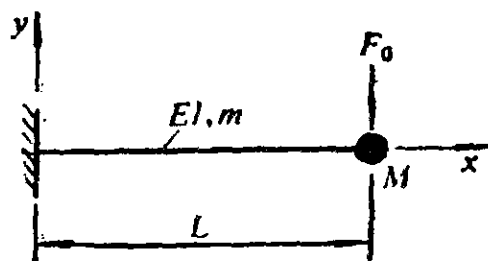


图 11-13

试用Rayleigh-Ritz法求其第一阶与第二阶自然频率。设生成函数为

$$y_i(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

11-13 一悬臂梁端部带有集中质量 $M$ ，如图11-13所示。在质量上作用有集中载荷 $F_0 u(t)$ ，这里 $u(t)$ 是单位阶跃函数。试以假设振型法求系统的响应，取 $n=3$ 。

11-14 图11-14为一平面桁架，其各杆均只受轴向力， $L = 3H/4$ ， $m_i = m (i = 1, 2, \dots, 5)$ ， $EA_1 = EA_4 = EA$ ， $EA_2 = EA_3 = EA_5 = 3EA/2$ 。试推导其总体运动方程，并写出支反力的方程。

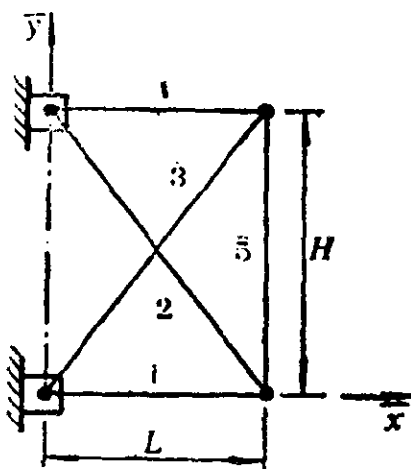


图 11-14

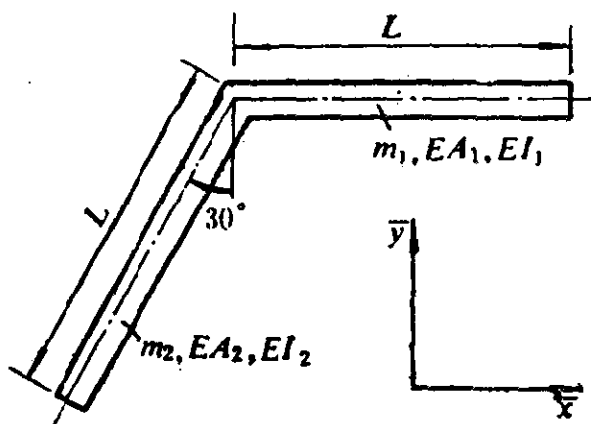


图 11-19

11-15 求解习题11-14中的特征值问题，建议以计算机求解。

11-16 将均匀简支梁分成两个相同的元素，以有限元法求其固有频率的近似值，并与精确值相比较。

11-17 将均匀悬臂梁分成两相同的元素来求梁的固有频率的近似值，并与精确值相比较。

11-18 将两端固支的均匀杆分成四个相同的元素，求它的前二阶纵振频率。

11-19 试推导图11-19所示结构的运动方程，将之分成两个单元，并同时考虑纵向振动与弯曲振动。总体坐标 $x, y$ 如图中所示。

11-20 将习题11-19中的结构两端固支，试导出全系统的运动方程。设 $m_1 = m_2 = m$ ， $EI_1 = EI_2 = EI$ 及 $EA_1 = EA_2 = EA$ 。

## 第十二章 非线性系统的振动

### § 12.1 引言

线性系统的运动方程可写为

$$m \ddot{x}(t) = F(t) - c \dot{x}(t) - kx(t), \quad (12.1-1)$$

式中,  $F(t)$ 为外作用力;  $-c \dot{x}(t)$ 为阻尼力;  $-kx(t)$ 为弹性恢复力。上式包含了一个明显的假定: 阻尼力和弹性恢复力分别与振动速度  $\dot{x}(t)$ 和振动位移  $x(t)$ 成正比。但是一般阻尼力与弹性恢复力同  $\dot{x}(t)$ 、 $x(t)$ 之间存在着较为复杂的非线性关系

$$m \ddot{x}(t) = F(t) - P(x, \dot{x}), \quad (12.1-2)$$

只有当  $x$ 、 $\dot{x}$  均较小, 即微幅振动的情况下, 才可将  $P(x, \dot{x})$  函数在  $x=0$ ,  $\dot{x}=0$  的附近展成 Taylor 级数, 仅取其一次项, 而略去高次项, 从而得到(12.1-1)的线性方程。由此可见, 所谓线性系统与非线性系统之间并无绝对的界线。一般, 当一个系统作微幅振动时, 可略去其弹性恢复力和阻尼力中的高次项, 而将系统模型线性化, 从而简化其分析与求解。可是当系统的振动幅度超过一定限度时, 弹性恢复力和阻尼力中的高次项就变成不可忽略了, 因而必须采用非线性模型。

以下通过几个实例来说明振动系统的非线性模型。图12.1-1 (a)表示一个单摆, 而(b)表示在摆角  $\theta$  的大范围内其恢复力矩与  $\theta$  角的关系。该系统在大振幅下的运动方程为



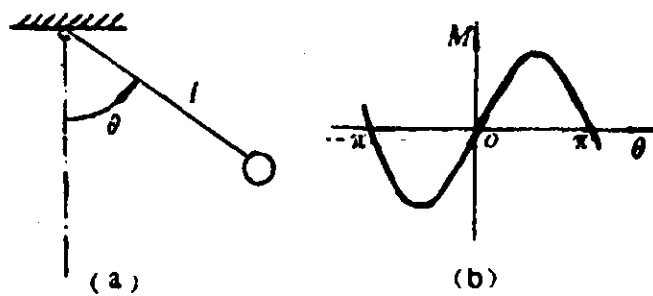


图 12.1-1

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \quad (12.1-3)$$

为一非线性微分方程，其中

$$\omega_0^2 = g/l, \quad (12.1-4)$$

$g$ 为重力加速度， $l$ 为摆长。如果摆幅很小，有 $\sin\theta \approx \theta$ ，(12.1-3)式可简化为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (12.1-5)$$

即成为一线性方程。如果振幅并不是很小，就必须取 $\sin\theta$ 展开的级数中的更多的项，如可取 $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/3!$ ，这时(12.1-3)式成为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} \right) = 0, \quad (12.1-6)$$

即一非线性微分方程。

图12.1-2(a)、(b)、(c)、(d)为产生非线性恢复力的四个例子，而(e)、(f)、(g)、(h)分别为其恢复力与位移之间的非线性关系。

以上诸例中的非线性因素，是由于刚度（即图12.1-2中 $F-x$ 曲线的斜度）随位移连续变化而形成的。此外，当位移变化时，刚度亦发生突然变化也是一种非线性因素，图12.1-3(a)、(b)、(c)所示的系统就是具有这种突变性的非线性系统，其恢复力与位移的关系分别如图(d)、(e)、(f)所示。图(a)中的系统称为“分段线性”系统，图(b)、(c)中的系统又称为“固有非线性系

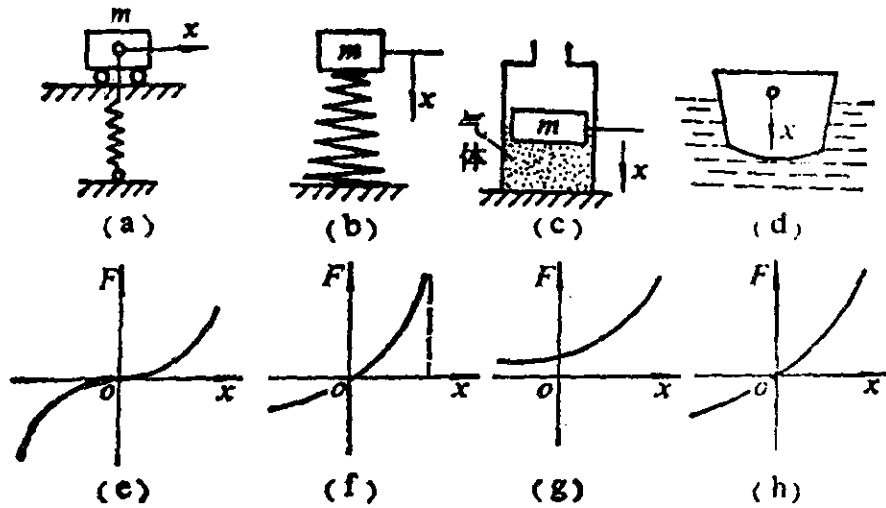


图 12.1-2

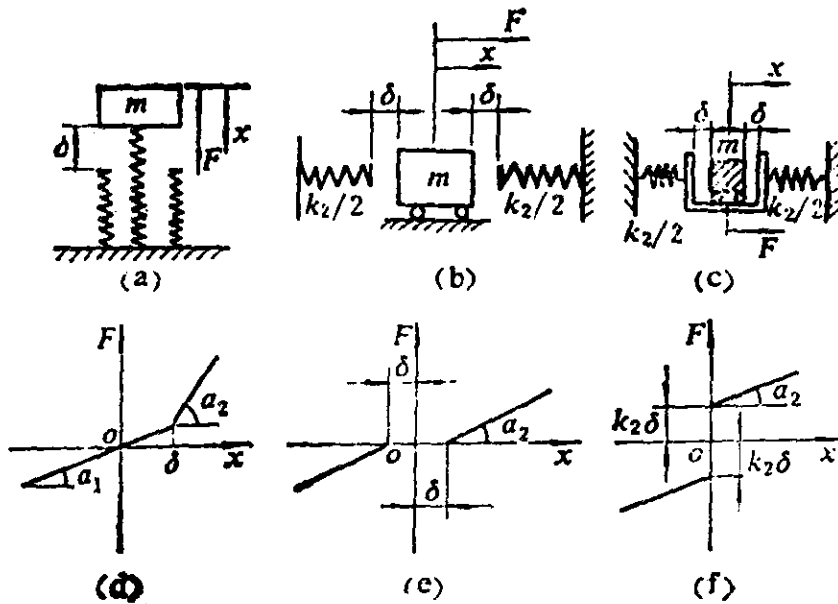


图 12.1-3

统”。

除了以上诸例中的非线性恢复力以外，还有非线性阻尼力。图12.1-4(a)、(b)、(c)所示为几种典型的非线性阻尼力。其中图(a)是平方阻尼，图(b)是库仑阻尼，图(c)是考虑到动、静摩擦之间差别的摩擦阻力。

非线性系统需要用形如(12.1-2)式的非线性方程来描述。

回顾以前各章，可以说求解线性系统运动方程的各种方法都

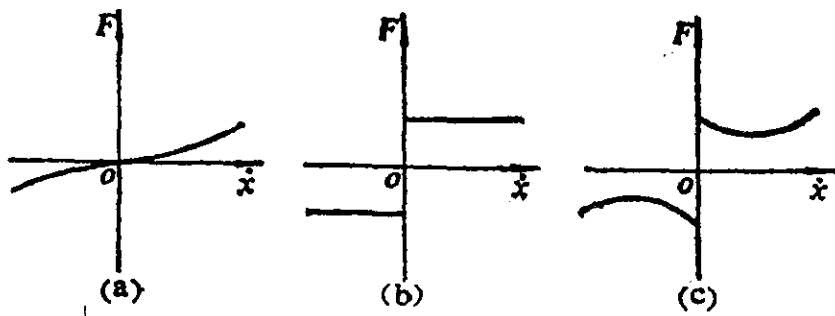


图 12.1-4

是以“迭加原理”为基础的。而迭加原理对于非线性系统并不成立，这是非线性系统的一个突出特点。

为了分析与求解非线性系统，必须另辟蹊径。总的说来，有两类方法可以用于分析非线性系统，其一是定性的方法或称几何法，用以判定一个系统的发展趋势，主要是其稳定性问题；另一类是定量的方法，主要有平均法、迭代法与摄动法等等，用于求出系统振动时间历程的近似表达式。本章先讲定性的方法，然后讲述定量的方法。

## § 12.2 状态空间与相图

方程(12.1-2)可写成

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}F(t) - \frac{1}{m}P(x, \dot{x}) = f(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (12.2-1)$$

其中 $f$ 是单位质量所受到的力（包括外力、弹性恢复力与阻尼力），此力除了是 $x$ 与 $\dot{x}$ 的非线性函数，因而通过 $x$ 、 $\dot{x}$ 而间接地依赖于时间 $t$ 以外，还直接与时间 $t$ 有关，即为 $t$ 的显函数。造成所受力直接依赖 $t$ 的原因有两个：一是系统承受的外力 $F(t)$ 是随时间而变化的动态力，这时与 $t$ 有关的这一部分可以从函数 $f$ 中分离出来如(12.2-1)式所示；二是弹性恢复力和阻尼力与 $x$ 、 $\dot{x}$ 的

关系（即图12.1-2, 12.1-3, 12.1-4中的各曲线）本身是随时间而变化的，即系统本身是时变的，这时  $f$  函数中与时间直接有关的这一部分往往不能分离。

对于多自由度系统，将其广义坐标记为  $q_i$ ，广义速度记为  $\dot{q}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )，那么方程(12.2-1)式一般地可写成

$$\ddot{q}_i(t) = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t),$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2-2)$$

这里  $\ddot{q}_i$  是第  $i$  个广义坐标的加速度， $f_i$  是与第  $i$  个广义坐标相对应而作用在单位质量（或惯量）上的广义力。

### 12.2.1 位形空间

广义坐标确切地描述了系统的位置或形状，因此由广义坐标组成的向量

$$\{q(t)\} = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}^T \quad (12.2-3)$$

可称为“位形向量”，而此向量的端点被称为“代表点” (representation point)。由各广义坐标  $q_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 所张成的  $n$  维空间，称为位形空间 (configuration space)。如图12.2-1所示即为一个三维的位形空间，其中  $\mathbf{oP}$  为位形向量，

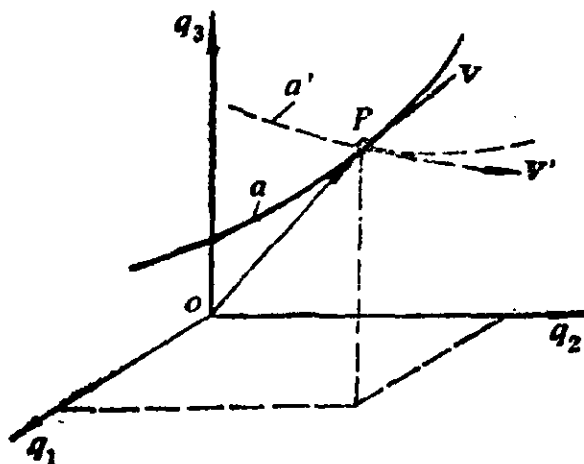


图 12.2-1

而 $P$ 为代表点。当系统在运动时，代表点 $P$ 在位形空间划出一条路径(trace)，如图中曲线 $a$ 所示。在位形空间中以路径来描述系统的运动有一个很不方便的地方，就是这些路径会相交。如图中 $a$ 、 $a'$ 两条路径就在 $P$ 点相交。其原因在于代表点 $P$ 只决定了系统在某时刻的位形，但并未确定系统在该时刻的发展趋势。事实上，处在 $P$ 点的系统可以有不同的速度，如图中 $v$ 及 $v'$ 所示，因此系统可以有不同的运动趋势，即不同的路径。从总体上看，位形空间中的各条路径因相互交叉，而显得杂乱无章，不便于分析。有没有办法使路径变得象流速场中的流线、电场中的电力线或磁场中的磁力线那样互不相交（除个别点外），而显得条理井然，便于分析处理呢？答案是肯定的。为此，除了广义坐标之外，我们必须将广义速度也纳入考虑，从而将“位形空间”拓宽为“相空间”或“状态空间”。

### 12.2.2 相空间(状态空间)

将广义坐标 $q_i(t)$ 与广义速度 $\dot{q}_i(t)$ 组合成为一个向量 $\{q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}$ ，称为状态向量(state vector)，其各个分量称为状态变量，状态向量所存在的空间，即由诸 $q_i, \dot{q}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 所张成的空间，称为相空间(phase space)或状态空间(state space)。显然，对于 $n$ 自由度的系统来说，其相空间是 $2n$ 维的。状态向量的端点，称“状态点”，它的运动轨迹称为相轨迹，或轨线(paths)，轨线的总体称为相图(phase portrait)。我们知道，任何时刻 $t=t_0$ 的一组广义坐标 $q_i(t_0) = q_{i0}$ 与广义速度 $\dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0} (i=1, 2, \dots, n)$ 构成一组完备的初始条件，它们以系统的运动方程组(12.2-2)式为根据，完全决定了系统在该时刻之后的运动，即在该时刻之后的轨线。由此可见，通过相空间中一点，一般只会有一条轨线，因此其各条轨线不会相

交（个别点除外），而整个相图纹理井然，便于分析，这就是为什么非线性系统的几何理论需要在相空间中展开，而不是在位形空间中进行的道理。

图12.2-2(a)为一谐振子，而(b)为其相图。此例是单自由

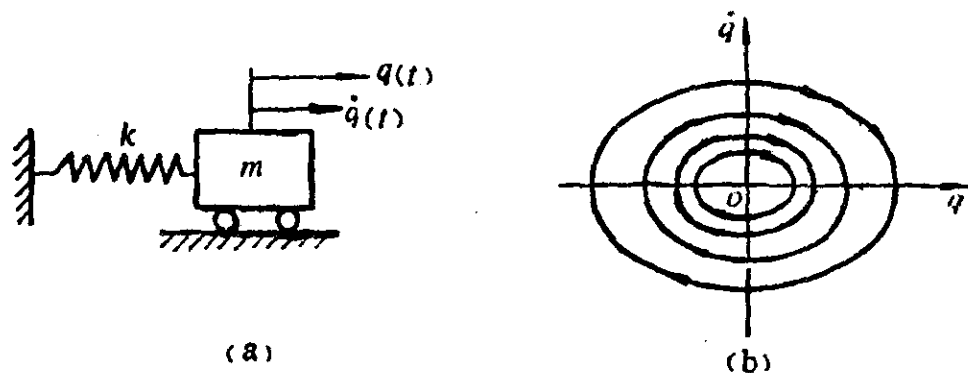


图 12.2-2

度系统，广义坐标只有一个，即质块的位移 $q(t)$ ，而状态变量有两个，除了 $q(t)$ 外，还有运动速度 $\dot{q}(t)$ 。由此例可见，对状态变量的要求比对广义坐标更多：前者只需要确定系统在某时刻的位移或形状，而后者除此之外，还应能决定系统在该时刻的发展趋势，并通过积累此发展趋势，而决定系统在其后的整个发展历程。

图12.2-2(b)中以箭头标明了状态点在相轨迹上的运动方向，即顺时针方向。这一点具有普遍性，即反方向的运动是不可能的，读者不妨想一下，这是为什么。

### 12.2.3 状态方程

以状态变量作为基本变量来改写系统的运动方程(12.2-2)，可得到状态方程。为此，令

$$x_i = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (12.2-4)$$

$$x_{n+i} = \dot{q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.2-5)$$

而状态向量成为

$$\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}^T. \quad (12.2-6)$$

由此, 有

$$\dot{x}_i = x_{n+i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.2-7)$$

而由运动方程(12.2-2)式, 有

$$\dot{x}_{n+i} = \ddot{x}_i = \ddot{q}_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2-8)$$

综合以上两式, 有

$$\dot{x}_i(t) = X_i(x_1, x_2, \dots, x_{2n}; t), \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (12.2-9)$$

式中,

$$X_i(x_1, x_2, \dots, x_{2n}; t) = x_{n+i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2-10)$$

$$X_{n+i}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}; t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+i}; t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2-11)$$

(12.2-9)式中前 $n$ 个等式由定义(12.2-4)、(12.2-5)式可证明其实是恒等式 $\dot{q}_i(t) = \dot{q}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 而后 $n$ 个等式则与运动方程(12.2-2)式等价。

方程组(12.2-9)式称为系统的状态方程, 这是 $2n$ 个状态变量的一阶微分方程组。写成向量式, 有

$$\dot{\{x\}} = \{X\}. \quad (12.2-12)$$

状态方程是现代控制理论的基础概念之一, 在各个领域都有广泛的运用, 也是非线性振动的几何理论的基础。

对于一组确定的初始条件 (对应于状态空间中一个确定的点),

$$x_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (12.2-13)$$

可证明(12.2-9)或(12.2-12)式有唯一的一组解 (证明略):

$$x_i(t) = \phi_i(a_1, a_2, \dots, a_{2n}; t), \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (12.2-14)$$

这表明通过状态空间中一个确定的点，一般只有一条确定的轨线。一般轨线可由积分(12.2-12)式求出，因此又称为积分曲线。

#### 12.2.4 自治系统

状态方程(12.2-9)式右边是各状态变量的变化率，可以称为“状态速度”。该式的右边表明，状态速度除了是状态变量的函数，并通过状态变量而间接地依赖于时间 $t$ 以外，还是 $t$ 的显函数，即直接依赖于 $t$ 。这表明速度场是在随时间变化，即状态空间中一个确定点的速度并非定常的。

如果(12.2-9)式的右边不显含时间 $t$ ，即

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_{2n}), \quad i=1, 2, \dots, 2n, \quad (12.2-15)$$

或写成向量形式

$$\{\dot{x}\} = \{X(\{x\})\}, \quad (12.2-16)$$

则状态空间中的流场是定常的，这种系统叫做自治系统(autonomous system)。自治系统在相空间各点都有确定不变的状态速度 $\{\dot{x}\}$ 。自治系统在相空间中的运动路径称为轨线(trajjectory)。轨线在它经过的所有点都与该点的速度 $\{\dot{x}\}$ 相切。

#### 12.2.5 平衡点

状态空间中 $\{\dot{x}\} \neq \{0\}$ 的点称为普通点(ordinary point)或正则点(regular point)，而

$$\{\dot{x}\} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{2n}\}^T = \{X_i(x_1, x_2, \dots, x_{2n})\} = \{0\}, \quad (12.2-17)$$



的点称为奇点(singular point)或平衡点(equilibrium point). 在平衡点上, 所有的状态变量的变化率  $\dot{x}_i (i=1, 2, \dots, 2n)$  均为零. 由于变化率为零, 状态变量不会改变; 另一方面, 状态变量不改变, 按(12.2-17)式, 其变化率又只能为零, 其结果是系统就只能静止在原来的位置上, 不可能运动. 这样的点称为“平衡点”.

如果在一个平衡点的邻域中不存在其它的平衡点, 这样的平衡点称为孤立平衡点. 我们只研究孤立平衡点.

如果(12.2-13)式所定义的初始条件正好对应于状态空间中的一个平衡点, 则由于系统的状态静止在该点, 不会运动, 因此由(12.2-14)式, 必然有

$$\alpha_i = \phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; t), \quad i=1, 2, \dots, 2n, \quad (12.2-18)$$

上式可以看成是平衡点的另一种定义.

如上所述, 在平衡点上状态点移动的速度和加速度都为零, 而由于连续性的关系, 在平衡点附近状态点移动的速度和加速度也无限小. 因此, 从理论上讲, 系统沿着一条轨线运动到平衡点所需时间是无限长的. 因此平衡点可以说是可趋近而不可及的. 但在工程实践中, 当时间足够长时, 就认为系统的状态点已达到平衡点.

如果状态空间的原点是平衡点, 则按(12.2-18)式, 有

$$\phi_i(0, 0, \dots, 0; t) = 0, \quad i=1, 2, \dots, 2n. \quad (12.2-19)$$

如果平衡点  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n})$  本来不在原点, 那么按下式进行坐标平移,

$$y_i = x_i - \alpha_i, \quad i=1, 2, \dots, 2n, \quad (12.2-20)$$

就可以将原点移到平衡点.

## 12.2.6 平衡点的稳定性

平衡点可以分为两类，即稳定的平衡点和不稳定的平衡点，其差别并不在于平衡点本身的状态，而在于系统在略为偏离平衡点时的运动趋势：是趋向于回到平衡点，保持在平衡点附近运动或趋向于偏离该平衡点愈来愈远，相应地，该平衡点称为渐近稳定的(asymptotically stable)，仅稳定的(merely stable)或不稳定的(unstable)，其中前两种平衡点又统称为稳定的平衡点。

例12.1 试求单摆在大范围中运动的状态方程、相图、其平衡点及其稳定性。

解：图12.2-3(a)为一在大范围中运动的单摆，其广义坐标为摆角 $\theta$ ，运动方程已由(12.1-3)式给出，

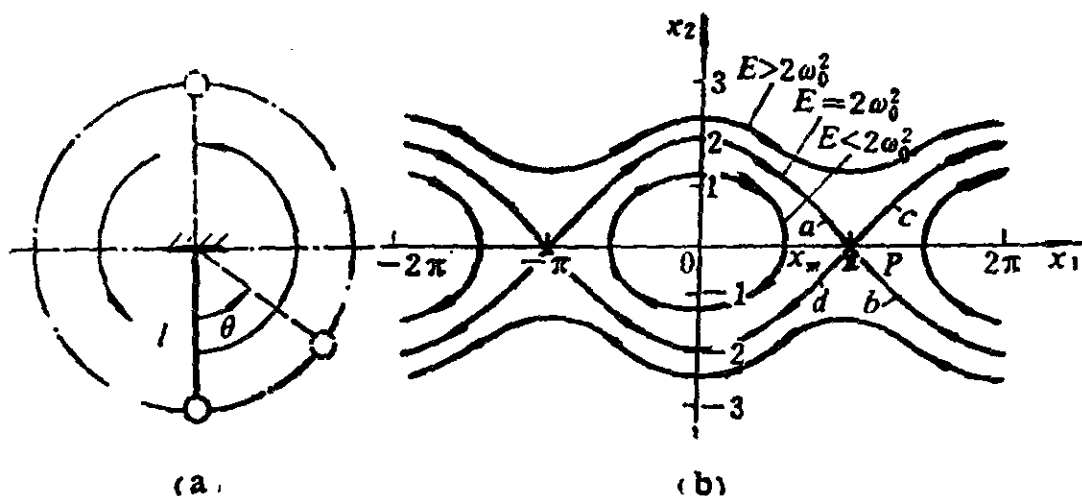


图 12.2-3

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (a)$$

式中 $\omega_0$ 的定义由(12.1-4)式给出。

采用记号

$$\theta = x_1, \quad \dot{\theta} = x_2, \quad (b)$$

即取摆角及摆动角速度为状态变量，可得状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1. \quad (c)$$

以下诸点为平衡点： $x_1 = \pm n\pi (n=0, 1, \dots)$ ， $x_2 = 0$ 。事实上，以这些点的坐标代入(c)式，易知条件(12.2-17)式成立。

此例中相空间实际上是相平面，图12.2-3(b)是其相图。为求此相图，可将状态方程(c)的两式相除，并消去 $dt$ ，得

$$\frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\omega_0^2 \sin x_1}{x_2}, \quad (d)$$

即

$$x_2 dx_2 = -\omega_0^2 \sin x_1 dx_1,$$

积分，得

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \omega_0^2(1 - \cos x_1) = E, \quad (e)$$

读者不难理解，上式左边第一项即为单位质量的摆锤的动能，第二项即为单位质量、单位摆长的单摆的重力势能。而右边的 $E$ 为积分常数，其物理意义为前述动能与势能之和，即总机械能。另一方面，从几何意义上看，(e)式是 $(x_1, x_2)$ 平面上以 $E$ 为参数的一族曲线方程，这些曲线即为相轨迹，或轨线。每一条轨线对应于一定的机械能，此例中系统沿轨线运动正体现了机械能守恒定律。图12.2-3(b)中给出了三条典型的相轨迹：

1.  $E = 2\omega_0^2$  请读者自行验证，如果系统的总机械能正好取此值，则当机械能全部转化为势能时，摆锤正好上升到顶点，此时 $x_1 = \pm(2j+1)\pi (j=0, 1, \dots)$ ， $x_2 = 0$ ，即对应于一系列的平衡点，如 $j=0$ 时，且上式取“+”号，得图中 $P$ 点。从物理意义上看，所有这些平衡点对应于同一物理状态，即摆锤静止在图12.2-3(a)中虚线所示的位置。此位置是平衡位置，至少在理论上是如此，但实际上此平衡又是不稳定的，若因任何扰动，使摆锤略为偏离其平衡位置，则必然愈偏愈远，而终于倒向一边。到底倒向何边，问题本身无法确定，需视外界的随机扰动而定。因

此，在图上通过 $P$ 点有 $c, d$ 两段轨线，分别表示摆锤从左、右两边倒下的运动方程；而 $a, b$ 两段路径则分别表示摆锤从左、右两边趋向 $P$ 点的过程。

从以上分析，我们可以得到关于平衡点的三点结论：

(1) 一个非线性系统可以有多个平衡点；

(2) 平衡点一定落在 $x_1$ 轴上，这是由于 $\dot{x}_1 = x_2 = 0$ 的缘故；

(3) 在平衡点处可以有几条相轨迹相交，事实上，从 $(d)$ 式可见，在平衡点上，相轨迹的斜率 $dx_2/dx_1 = 0/0$ ，是不定的。

2.  $E < 2\omega^2$  此时系统的机械能不足以使摆锤达到上顶点，而只能作来回周期摆动。其相轨迹是封闭曲线，而振幅由 $E$ 值控制。当 $E$ 趋近于零时，系统成为线性的，相轨迹成为环绕 $x_1 = 2j\pi (j = 0, 1, \dots)$ ,  $x_2 = 0$ 的椭圆，与图12.2-2(b)所示的谐振子的相轨迹相同。当 $E = 0$ 时，相轨迹收缩为平衡点 $x_1 = 2j\pi (j = 0, 1, \dots)$ ,  $x_2 = 0$ 。物理上对应于摆锤静止在图12.2-3(a)中实线所示的位置。从物理意义上不难理解，这些平衡点均为稳定平衡点，而且是反稳定的。如果考虑到系统的阻尼，那么这些平衡点便成为渐近稳定的。

3.  $E > 2\omega^2$  此时摆锤将越过上顶点，而产生不均匀的转动，这时 $x_1 = \theta$ 是无限增加的，故相轨迹是开放的，不再封闭。

通过上例，我们应该弄清楚“平衡”与“稳定”这两个概念之间的联系与差别，须知“平衡”并不一定“稳定”，而稳定则一定是围绕着平衡点而言的。这些概念对于工程实践是至关重要的。一般说来，如果要求一个工程系统稳定地运行，则它当然应该工作在其平衡点上；但这样说还不够确切，应该说，它必须工作在其稳定平衡点上。这是由于一个真实的系统，必然经受各种各样的扰动，只有稳定平衡点才具有抗扰动的能力，从而能将系统维系在其周围而稳定地运转。对于处在这种平衡状态下的系统，短暂的、微小的扰动，只会引起其工作状态短暂的、微小的

变化，而这些变化一般是工程实践可以容忍的。可是对于不稳定平衡点来说，任何短暂的，微小的扰动，都足以使系统永远地、大幅度地偏离其正常工作点，完全破坏系统的工作条件。由于这种不稳定平衡状态不具备抗干扰的能力，因此只是一种理论上的平衡状态，实际上是观察不到的。

作为这一小节的结束，让我们介绍 Liapunov 的关于平衡点的稳定性的数学定义。上一小节讲过，我们总能够将相空间的原点移到一个平衡点上，因此，不失一般性，我们总能够将平衡点的稳定性问题转化为相空间的原点  $(0, 0, \dots, 0)$  的稳定性问题，亦即平凡解的稳定性问题。Liapunov 关于原点的稳定性的定义如下：

1. 如果对于任意给定的一个正量  $\varepsilon$ ，总可以找到一个正量  $\delta$ ，使得当不等式

$$\| \{x_0\} \| < \delta \quad (12.2-21)$$

满足时，就有不等式

$$\| \{x(t)\} \| < \varepsilon, \quad 0 \leq t < \infty \quad (12.2-22)$$

成立，那么原点在 Liapunov 定义下是稳定的。

这里  $\| \{x(t)\} \| = (\{x(t)\}^T \{x(t)\})^{1/2}$  是状态向量的欧氏范数，亦即状态点偏离原点的幅度的度量， $\{x_0\} = \{x(0)\}$ ，是初始状态点。以上定义的几何意义是，

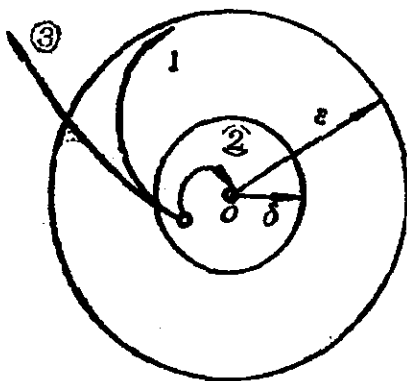


图 12.2-4

给定球面  $\| \{x\} \| = \varepsilon$ ，就能找到一个相应的球面  $\| \{x\} \| = \delta(\varepsilon)$ ，使得一切从其中出发的相轨迹永远保持在球面  $\| \{x\} \| = \varepsilon$  之中，如图 12.2-4 中轨迹 ①。根据这一定义，如果原点是稳定平衡点，则可以采取限制初始扰动  $\{x_0\}$  的办法，来限制系统的响应  $\{x(t)\}$  的幅度。

2. 如果以上条件成立，且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\{x(t)\}\| = 0, \quad (12.2-23)$$

则称原点是渐近稳定的，如图中轨迹②。如果上述第1点中的条件成立，但(12.2-23)式不成立，则称系统是仅稳定的。

3. 如果条件1不成立，则原点是不稳定的。其轨线如图中轨线③所示。这时无法以限制初始扰动的办法来约束系统的响应。

### 12.2.7 自治系统的相轨迹

自治系统的状态方程(12.2-16)式的意义在于：它的状态点的移动速度仅由状态点自身的位置确定。基于此，从一组初始条件 $\{x_0\} = \{x(0)\}$ 出发，便可逐点求出系统运动的轨线来，其步骤如下：

$$\{x_1\} = \{x_0\} + \{X(\{x_0\})\}\Delta t, \quad (12.2-24)$$

式中， $\Delta t$ 是所取的时间间隔，同理，

$$\{x_2\} = \{x_1\} + \{X(\{x_1\})\}\Delta t, \quad (12.2-25)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ \{x_{n+1}\} &= \{x_n\} + \{X(\{x_n\})\}\Delta t, \quad (12.2-26) \\ & \dots \end{aligned}$$

如此即可求出轨线上的诸点 $\{x_0\}$ ， $\{x_1\}$ ， $\{x_2\}$ ， $\dots$ ，连成光滑的曲线即为轨线。以上诸点所对应的时刻为

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.2-27)$$

而时间历程为

$$\{x(t_i)\} = \{x_i\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (12.2-28)$$

以上是最基本的概念和方法。以下介绍一种适用于单自由度自治系统的相平面上相轨迹作图的方法，即等倾线法。

当 $n=1$ 时，(12.2-15)式成为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, x_2), \end{aligned} \right\} \quad (12.2-29)$$

由此，

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)} = \varphi(x_1, x_2), \quad (12.2-30)$$

此式决定了相平面上任一点 $(x_1, x_2)$ 处，轨线的斜率。令

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \varphi(x_1, x_2) = c, \quad (12.2-31)$$

式中 $c$ 为常数，得到相平面上轨线倾斜度为 $C$ 的诸点连成的曲线，称为“等倾线”。取不同的 $c$ 值， $c=c_1, c=c_2, \dots$ ，得到等倾

线族，如图12.2-5所示。等倾线的交点必为系统的奇点，因为该点的轨线的斜率 $dx_2/dx_1$ 不定。

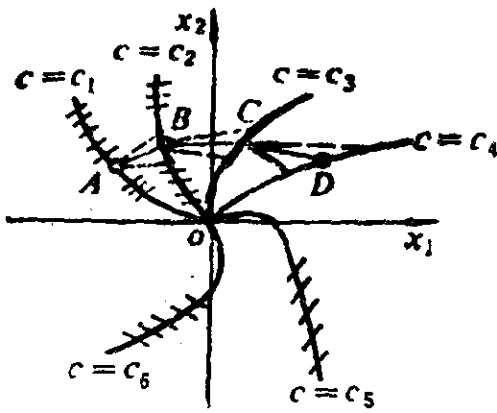


图 12.2-5

线族，如图12.2-5所示。等倾线的交点必为系统的奇点，因为该点的轨线的斜率 $dx_2/dx_1$ 不定。设起始点 $A$ 正好落在 $c=c_1$ 的等倾线上，从该点出发，分别以 $c_1, c_2$ 的斜率作射线，如图中虚线所示，分别交 $c=c_2$ 的等倾线于两点，取此两点所截等倾线弧段的中点 $B$ ，则线段 $AB$ 就是一

一段轨线。如法炮制，得到 $A, B, C, D, \dots$ 诸点，连成曲线，即为从 $A$ 点出发的一条轨线。同理可作出其它各条轨线。值得注意的是，按此法作图，会有累积误差。减小误差的途径是缩小 $c$ 的诸取值 $c_1, c_2, \dots$ 之间的间隔，即取更多的等倾线。

### § 12.3 奇点邻域中相图的特性

前面讲过，平衡点是相空间中的奇点，奇点附近相图的几何性质决定在该点所代表的状态下工作的系统的动态特性，因此，研究奇点邻域中的相图的性质，具有重要的实际意义。此外，掌握奇点附近的相图的特性，也是进一步确定大范围中的相图的基础。

础与关键。

需要说明，这里我们并不打算定量地研究奇点附近的轨线与相图，也不指望求得系统运动的具体历程，而只是定性地研究奇点附近的相图，所感兴趣的只是平衡点的稳定性以及轨线趋向（或离开）平衡点的方式：是单调地或是振荡地趋近（或离开）。这些性质不会因为对相平面进行连续的坐标变换而改变，即属于拓扑性质。在本节中我们将采用线性变换的方法来揭示这些拓扑性质。

由于限于研究奇点的邻域中的相图，因此可以在奇点附近将系统的状态方程展开，略去高次项，而仅取一次项，从而使状态方程线性化。此线性化的系统在该奇点附近的性质，在很大程度上可以代表原来的非线性系统在同一奇点附近的性质。

### 12.3.1 单自由度自治系统状态方程在平衡点邻域的线性化

单自由度自治系统的状态方程如(12.2-29)式所示，设平衡点的坐标为 $x_1 = \alpha_1$ ， $x_2 = \alpha_2$ ，代入该式，得联立方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ \dot{x}_2 &= X_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.3-1)$$

由于 $X_1$ ， $X_2$ 为非线性函数，一般会得到关于 $\alpha_1$ ， $\alpha_2$ 的多组解，即可能有多个平衡点。我们总可以采用(12.2-18)式所示的坐标平移变换，将坐标原点移到任何一个平衡点，因而不失一般性，我们可以认为平衡点即为原点，即 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ，而在原点附近将状态方程(12.2-29)式展开成

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \varepsilon_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2(x_1, x_2). \end{aligned} \right\} \quad (12.3-2)$$

式中



$$a_{ij} = \left. \frac{\partial X_i(x_1, x_2)}{\partial x_j} \right|_{x_1 = x_2 = 0}, \quad i, j = 1, 2. \quad (12.3-3)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  是二阶以上的微量。如略去这些高阶微量，并采用矩阵记法

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}, \quad (12.3-4)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad (12.3-5)$$

则得到线性化以后的状态方程为

$$\dot{\{x\}} = \{a\}\{x\}. \quad (12.3-6)$$

此式在原点（平衡点）附近近似地成立。下面我们分析此式所代表的近似线性系统在原点附近的相图的几何特性，并按之对平衡点进行分类。

### 12.3.2 平衡点邻域中的相图及平衡点的类型

(12.3-6)式表明系统在平衡点附近的动态特性由矩阵  $\{a\}$  确定，这里我们假定  $\{a\}$  是非奇异矩阵。为了研究此矩阵对平衡点附近的相图性质的影响，我们对相平面进行线性变换，其目的是将  $\{a\}$  变成尽可能简单的形式。为此，令

$$\{x\} = \{b\}\{u\}, \quad (12.3-7)$$

这里  $\{b\}$  是一非奇异的变换矩阵， $\{u\}$  是新的状态变量。以上式代入(12.3-6)式，并将所得等式两边左乘以  $\{b\}^{-1}$ ，得

$$\dot{\{u\}} = \{b\}^{-1}\{a\}\{b\}\{u\}.$$

记

$$\{c\} = \{b\}^{-1}\{a\}\{b\}, \quad (12.3-8)$$

得到对于新的状态变量  $\{u\}$  的状态方程

$$\dot{\{u\}} = \{c\}\{u\}. \quad (12.3-9)$$

(12.3-8)式表示的变换称为“相似变换”，而(c)、(a)两矩阵称为相似矩阵。我们知道，相似矩阵具有相同的特征值。矩阵(a)的特征值满足以下方程，

$$\det([a] - \lambda(1)) = 0.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

展开上式，得关于 $\lambda$ 的二次代数方程

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (12.3-10)$$

由之可解出两个特征值 $\lambda_1, \lambda_2$ 。这两个特征值有以下三种情形，对于每一种情形，我们都可以选择适当的变换矩阵(b)，使得(c)矩阵化为最简单的Jordan形：

1. 如 $\lambda_1, \lambda_2$ 是相异实数，则有

$$[c] = [b]^{-1}[a][b] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (12.3-11)$$

而(12.4-9)式成为

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (12.3-12)$$

即

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2. \quad (12.3-13)$$

其解为

$$u_1 = u_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_{20} e^{\lambda_2 t}, \quad (12.3-14)$$

式中 $u_{10}, u_{20}$ 分别是 $u_1, u_2$ 的初值。

如果 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ，则在原点 $u_1 = u_2 = 0$ 附近的相图如图12.3-1(a)所示。这种情况下，相平面 $(u_1, u_2)$ 的原点称为结点(node)。从相图上可见，从原点附近的所有点出发的轨线都单调地趋向原点。因此，此结点在Liapunov意义下是渐近稳定的。

如果 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ ，轨线的形状仍与图12.3-1(a)相同，但所有

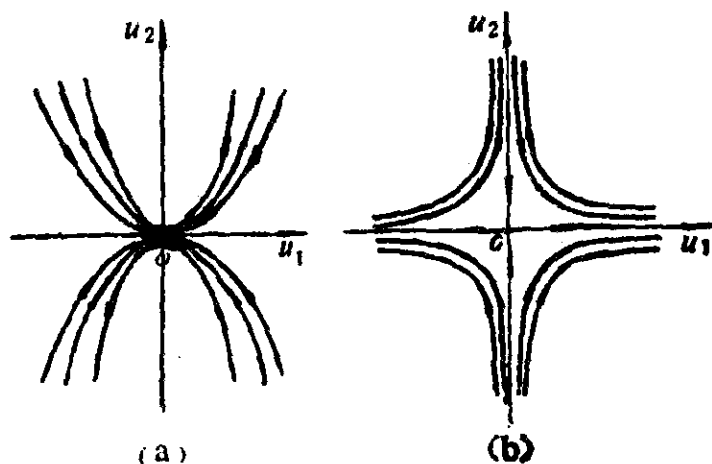


图 12.3-1

的箭头需反向，我们得到不稳定的结点。

这里需要说明，以上关于平衡点的类型（结点）和稳定性（渐近稳定）的结论是就状态方程(12.3-12)与相平面 $(u_1, u_2)$ 上原点的邻域中的相图得出的。我们说以上结论完全可以适用于原来的状态方程(12.3-6)及原来的相平面 $(x_1, x_2)$ 上的原点的邻域中的相图。这是由于：第一，线性变换(12.3-7)式将 $(x_1, x_2)$ 平面的原点变为 $(u_1, u_2)$ 平面的原点，而且前者的原点的邻域变为后者的原点的邻域；第二，线性变换(12.3-7)式固然会改变轨线的形状，但不会改变轨线趋近或离开原点的方向与方式（单调或振荡）；第三，矩阵 $(c)$ 与矩阵 $(a)$ 的特征值同为 $\lambda_1, \lambda_2$ 。这里的说明对此节后面的分析也适用。

如果 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ，则相图如图12.3-1(b)所示，这时的原点称为鞍点(saddle point)，鞍点总是不稳定的。

2. 如果 $\lambda_1, \lambda_2$ 是相等的实数，则 $(c)$ 的Jordan形有两种：

$$(c) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad (12.3-15)$$

$$(c) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}. \quad (12.3-16)$$

对于第一种情况，与(12.3-13)式相应的解为

$$u_1 = u_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_{20} e^{\lambda_1 t}. \quad (12.3-17)$$

这时原点仍为结点，但相轨迹成为过原点的直线，这种结点称为边界结点(borderline node)。且当 $\lambda_1 < 0$ 时，为稳定结点；而当 $\lambda_1 > 0$ 时，得到不稳定结点。至于(12.3-16)式所示的第二种情况，将得到一种退化的结点，轨线为曲线，仍然是 $\lambda_1 < 0$ 时稳定，而 $\lambda_1 > 0$ 时不稳定。由于这种情况比较少见，不再详细讨论。

3. 如果 $\lambda_1, \lambda_2$ 是共轭复数，则令 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ ， $\alpha, \beta$ 为实数。这时方程(12.3-13)成为

$$\dot{u}_1 = (\alpha + i\beta)u_1, \quad \dot{u}_2 = (\alpha - i\beta)u_2. \quad (12.3-18)$$

其解为

$$u_1 = (u_{10} e^{\alpha t}) e^{i\beta t}, \quad u_2 = (u_{20} e^{\alpha t}) e^{-i\beta t}. \quad (12.3-19)$$

再作线性变换。

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{20} & u_{10} \\ iu_{20} & -iu_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (12.3-20)$$

以(12.3-19)式中的 $u_1, u_2$ 代入(12.3-20)式，并记 $u_{10} u_{20} = u_0$ ，得

$$v_1 = (u_0 e^{\alpha t}) \sin \beta t, \quad v_2 = (u_0 e^{\alpha t}) \cos \beta t. \quad (12.3-21)$$

在 $(v_1, v_2)$ 平面上，这是一对数螺旋线，如图12.3-2(a)所示。 $\beta$ 的符号确定螺旋线的旋向： $\beta > 0$ ，为逆时针方向； $\beta < 0$ ，为顺时针方向。 $\alpha$ 的符号则决定是向内旋，还是向外旋，亦即决定平

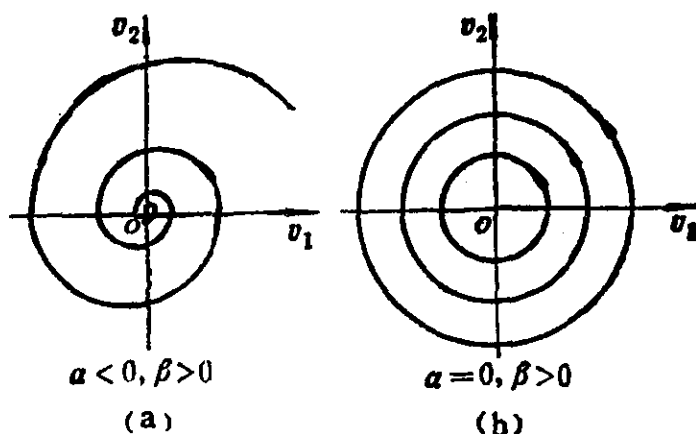


图 12.3-2

平衡点(原点)的稳定性:  $\alpha < 0$ , 向内旋, 渐近稳定;  $\alpha > 0$ , 向外旋, 不稳定. 图12.3-2(a)所示为  $\alpha < 0, \beta > 0$  的情况. 这种类型的平衡点称为螺旋极点(spiral point)或焦点(focus). 在平衡点为焦点的情况下, 其附近的轨线以衰减振荡的方式趋向平衡点, 或以增幅振荡的方式, 偏离平衡点.

当  $\alpha = 0$  时, 轨线成为图12.3-2(b)所示的同心圆, 这种平衡点称为中心(centre), 属于仅稳定.

### 12.3.3 直接按矩阵 $[a]$ 来分析平衡点的类型

以上是按  $(a)$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2$  来判断平衡点的性质. 可是基于以上的讨论与分析, 我们也可以不必求出  $(a)$  的特征值, 而直接按  $(a)$  的元素来判断平衡点的类型.

令(12.3-10)式中的

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= P, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= q, \end{aligned}$$

则该式成为

$$\lambda^2 - P\lambda + q = 0. \quad (12.3-22)$$

此即特征方程, 其根即为特征值,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( P \pm \sqrt{P^2 - 4q} \right), \\ \lambda_2 & \end{aligned} \quad (12.3-23)$$

由此可见,  $P, q$  这两个参数决定了特征值  $\lambda_1, \lambda_2$ , 从而决定了平衡点的性质. 这种关系以表12.3-1与图12.3-3表示.

以上得到的所有结论, 都是对经过线性化的近似系统而言的, 但是除了中心(c)的情况以外, 其余所有的情况下的结论, 都可以用于原来的非线性系统. 对于由线性系统的分析, 得到中心的情况, 真实的非线性系统可能是一稳定焦点(SF), 也可能是不稳定焦点(UF), 也可能仍为中心(C), 这取决于(12.3-2)式中被略去的高次项的作用, 仅由线性分析无法判断.

表12.3-1  $p, q$ 与平衡点性质的关系

$p, q$ ( $\lambda_1, \lambda_2$ )	{	$P^2 > 4q$ (不等实根)	{	$q > 0$ (两根同号)	{	$P < 0$ (两负根) — SN	
				$q < 0$ (两根异号)	{	$P > 0$ (两正根) — UN	
						— SP	
		$P^2 = 4q$ (相等实根)	{	$P < 0$ (负根)	————— SBN		
	$P > 0$ (正根)			————— UBN			
		$P^2 < 4q$	{	$P \neq 0$ (共轭复根)	{	$P < 0$ — SF	
	$P > 0$			$P > 0$ — UF			
	$P = 0$ (两虚根)			————— C			

SN—稳定结点, UN—不稳定结点, SP—鞍点, SBN—稳定边界结点, UBN—不稳定边界结点, SF—稳定焦点, UF—不稳定焦点, C—中心。

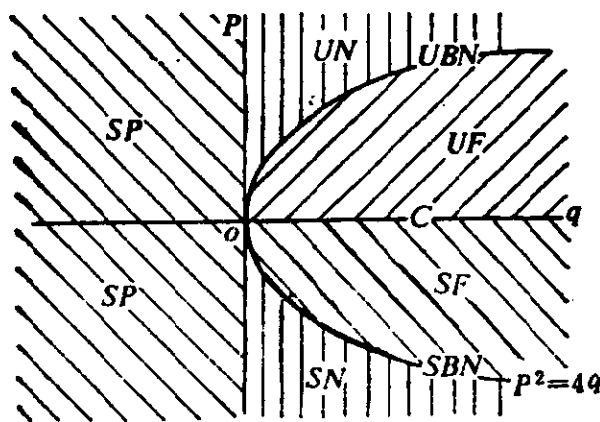


图 12.3-3

由表12.3-1可以得出一条结论：在平衡点附近线性化的系统的矩阵( $a$ )的特征值 $\lambda_1, \lambda_2$ 中，只要有一个是正的实数，或者其实部是正的，则原系统的该平衡点是不稳定的。

这里需指出，由于一个非线性系统可以有多个平衡点，而每个平衡点的稳定性可以不相同，因此对于非线性系统，我们只能谈到它的某一个平衡点的稳定性，而一般不能笼统地说这个系统的稳定性。而一个线性系统只能有一个平衡点，我们不妨将其平衡点的稳定性说成是该线性系统自身的稳定性，因此就引出了线性系统的稳定性的问题。显然，对于线性系统来说，这是一个由该系统本身的性质决定的概念，而与外加扰动的有无或大小无

关。

例12.2 试分析例12.1中单摆的平衡点的类型。

解：从物理意义上讲，只存在图12.2-3(b)中标有字母o(原点)与P的两个平衡点，其坐标分别为 $x_1 = 0, x_2 = 0$ ； $x_1 = \pi, x_2 = 0$ ，分别对应于摆锤铅垂向下及倒立向上两种状态，分别如图12.2-3(a)中的实线及虚线所示。

将例12.1(c)式中的状态方程在原点附近线性化得

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad (a)$$

即有

$$(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (b)$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (c)$$

展开，得

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \quad P=0, \quad q=\omega_0^2, \quad (d)$$

其根为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \pm i\omega_0, \\ \lambda_2 & \end{aligned} \quad (e)$$

按表12.3-1，原点是一中心。更深入的分析表明，对于非线性系统来说，原点确为一中心，是稳定平衡点。

将例12.1(c)式在P点附近线性化，得

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad (f)$$

特征方程为

$$\lambda^2 - \omega_0^2 = 0, \quad P=0, \quad q=-\omega_0^2, \quad (g)$$

其根为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \pm \omega_0, \\ \lambda_2 & \end{aligned} \quad (h)$$

由表12.3-1, 该平衡点为鞍点.

也可按系数 $P$ 、 $q$ , 由图12.3-3来判断平衡点 $o$ 、 $P$ 的类型与稳定性, 请读者自行完成.

### 12.3.4 Routh-Hurwitz判据

由前述可知, 判断一个系统在其平衡点上工作的稳定性, 会导致求解(12.3-22)式那样的特征方程的必要. 对于单自由度系统, 特征方程是二次代数方程, 求解并不困难. 可是对于多自由度系统来说, 特征方程是高次代数方程, 求解不易. 另一方面, 如果我们的目的仅限于判断平衡点的稳定性, 则并不需要解出特征根, 而可直接就特征方程的系数来判断其稳定性. Routh-Hurwitz判据即旨在解决这一问题.

设特征方程为

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + a_2 \lambda^{m-2} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0, \quad (12.3-24)$$

这里 $m = 2n$ ,  $n$ 为系统的自由度,  $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$ 是实系数.

我们知道, 以上方程有 $m$ 个根,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 这些根中, 只要有一个具有正实部, 则系统是不稳定的. 以下两个条件是使所有的根都不具有正实部的必要条件 (但并不是充分条件):

第一, 所有的系数 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 具有相同的符号;

第二, 所有的系数均不为零.

满足以上两个条件, 并不足以保证系统稳定; 而不满足以上两个条件中的任何一个, 系统肯定不是渐近稳定的. 因此以上条件可用以检查系统的不稳定性.

保证系统渐近稳定的充要条件是所谓Routh-Hurwitz判据, 下面我们给出此判据, 但不加证明.



以特征方程(12.4-24)的系数构造以下行列式

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

.....

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m-1} & a_{2m-2} & a_{2m-3} & \cdots & a_m \end{vmatrix}. \quad (12.3-25)$$

以上各行列式是按以下规则构造的： $\Delta_i$ 是 $i \times i$ 行列式， $i=1, 2, \dots, m$ ；行列式的左边第一列是 $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2i-1}$ ；每一行从其左边第一元素开始向右排列，元素的下标逐个递降；当元素的下标 $r > m$ ，或 $r < 0$ 时，元素取为零。

设系数 $a_0 > 0$ ，Routh-Hurwitz判据可陈述如下：特征方程的所有根都具有负实部的充要条件是：以上所有的 $m$ 个行列式都为正。由于有 $\Delta_m = a_m \Delta_{m-1}$ ，因此只需检查前 $m-1$ 个行列式就够了。

**例12.3** 图12.3-4为一两自由度系统，其中有一弹簧为非线性弹簧，其恢复力与位移 $x_1$ 之间的关系为

$$f(x_1) = -kx_1 \left[ 1 - \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 \right]. \quad (a)$$

试推导其运动方程，找出平衡点，并按Routh-Hurwitz判据判断诸平衡点的稳定性。

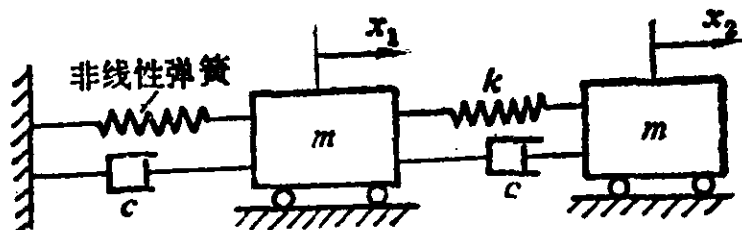


图 12.3-4

解：分别对两质块取脱离体，按牛顿第二定律，可得运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_1 + 2c \dot{x}_1 - c \dot{x}_2 + kx_1 \left[ 2 - \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 \right] - kx_2 &= 0, \\ m \ddot{x}_2 - c \dot{x}_1 + c \dot{x}_2 - kx_1 + kx_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

平衡点对应于常数解，因而令上式中  $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ ，即得平衡点的坐标所应满足的方程

$$\left. \begin{aligned} kx_1 \left[ 2 - \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 \right] - kx_2 &= 0, \\ -kx_1 + kx_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

从上式可得到三组解，

$$E_1: x_1 = x_2 = 0, \quad E_2: x_1 = x_2 = a, \quad E_3: x_1 = x_2 = -a, \quad (d)$$

即为三个平衡点。以下判断此三个平衡点的稳定性。

将运动方程(b)在  $x_1 = 0, x_2 = 0$  (即原点) 附近线性化，得

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_1 + 2c \dot{x}_1 - c \dot{x}_2 + 2kx_1 - kx_2 &= 0, \\ m \ddot{x}_2 - c \dot{x}_1 + c \dot{x}_2 - kx_1 + kx_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

而特征方程为

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + 2c\lambda + 2k & -c\lambda - k \\ -c\lambda - k & m\lambda^2 + c\lambda + k \end{vmatrix} = 0, \quad (f)$$

展开上式，得

$$m^2 \lambda^4 + 3mc\lambda^3 + (3mk + c^2)\lambda^2 + 2ck\lambda + k^2 = 0, \quad (g)$$

于是得对应于平衡点  $E_1$  的特征多项式的系数为

$$a_0 = m^2, \quad a_1 = 3mc, \quad a_2 = 3mk + c^2, \quad a_3 = 2ck, \quad a_4 = k^2. \quad (h)$$

按(12.4-25)式，各行列式为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 3mc, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3mc & m^2 \\ 2ck & 3mk^2 + c^2 \end{vmatrix} = 7m^2ck + 3mc^3, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3mc & m^2 & 0 \\ 2ck & 3mk^2 + c^2 & 3mc \\ 0 & k^2 & 2ck \end{vmatrix} = 5m^2c^2k^2 + 6mc^4k, \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 = k^2(5m^2c^2k^2 + 6mc^4k). \quad (i)$$

所有的行列式均大于零，故所有特征根具有负实部，平衡点  $E_1$  是渐近稳定的。

为了在  $E_2$  点附近将运动方程 (b) 线性化，引入坐标的平移变换，

$$x_1 = a + y_1, \quad x_2 = a + y_2, \quad (j)$$

从而将坐标原点平移到  $E_2$  点。以 (j) 式代入 (b) 式，略去高次项，即得在  $E_2$  点附近线性化的运动方程

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{y}_1 + 2c \dot{y}_1 - c \dot{y}_2 - ky_1 - ky_2 &= 0, \\ m \ddot{y}_2 - c \dot{y}_1 + c \dot{y}_2 - ky_1 + ky_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + 2c\lambda - k & -c\lambda - k \\ -c\lambda - k & m\lambda^2 + c\lambda + k \end{vmatrix} = 0, \quad (l)$$

展开，得

$$m^2\lambda^4 + 3mc\lambda^3 + c^2\lambda^2 - ck\lambda - 2k^2 = 0. \quad (m)$$

其系数为

$$a_0 = m^2, \quad a_1 = 3mc, \quad a_2 = c^2, \quad a_3 = -ck, \quad a_4 = -2k^2. \quad (n)$$

不必计算行列式，仅从其系数的符号不一致这一点，即可判定平衡点  $E_2$  不是渐进稳定的（即可能是不稳定的，或仅稳定的，实际上该平衡点是不稳定的）。

对平衡点  $E_3$  可作出同样的结论。

## § 12.4 保守系统及其在大范围的运动

上一节讲述了系统在平衡点附近的性态，这里我们进一步讲述系统在大范围内的运动。此节只讨论单自由度自治、保守系统的运动。所谓保守系统，就是只受到势场力作用的系统，因而其

所受到的力只能是位置的函数，而与速度无关。这样，运动方程为

$$\ddot{x} = f(x), \quad (12.4-1)$$

式中 $f(x)$ 是作用在单位质量上的力。注意到

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx},$$

代入(12.4-1)式，得

$$\dot{x} d\dot{x} = f(x) dx,$$

积分上式，得

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E, \quad (12.4-2)$$

式中 $\dot{x}^2/2$ 是系统动能（单位质量），

$$V(x) = - \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad (12.4-3)$$

是系统势能（单位质量），而 $E$ 是积分常数，即为系统单位质量的总机械能。记

$$x = x_1, \quad \dot{x} = x_2, \quad (12.4-4)$$

得

$$\frac{1}{2} x_2^2 + V(x_1) = E. \quad (12.4-5)$$

### 12.4.1 相图与轨线

如果将 $(x_1, x_2)$ 平面作为相平面， $E$ 作为第三变量，并设 $E$ 轴垂直于相平面，那么(12.4-5)式表示的是一空间曲面，如图12.4-1(a)所示。

图(b)是以上曲面在 $E, x_1$ 平面中的截形，此时有 $x_2 = \dot{x} = 0$ ，代入(12.4-2)式得到此截形的方程 $E = V(x_1)$ 。如果将 $V$ 看作是单位重量的重力势能，即高度 $h$ ，那么图(b)中的截形可以形象地

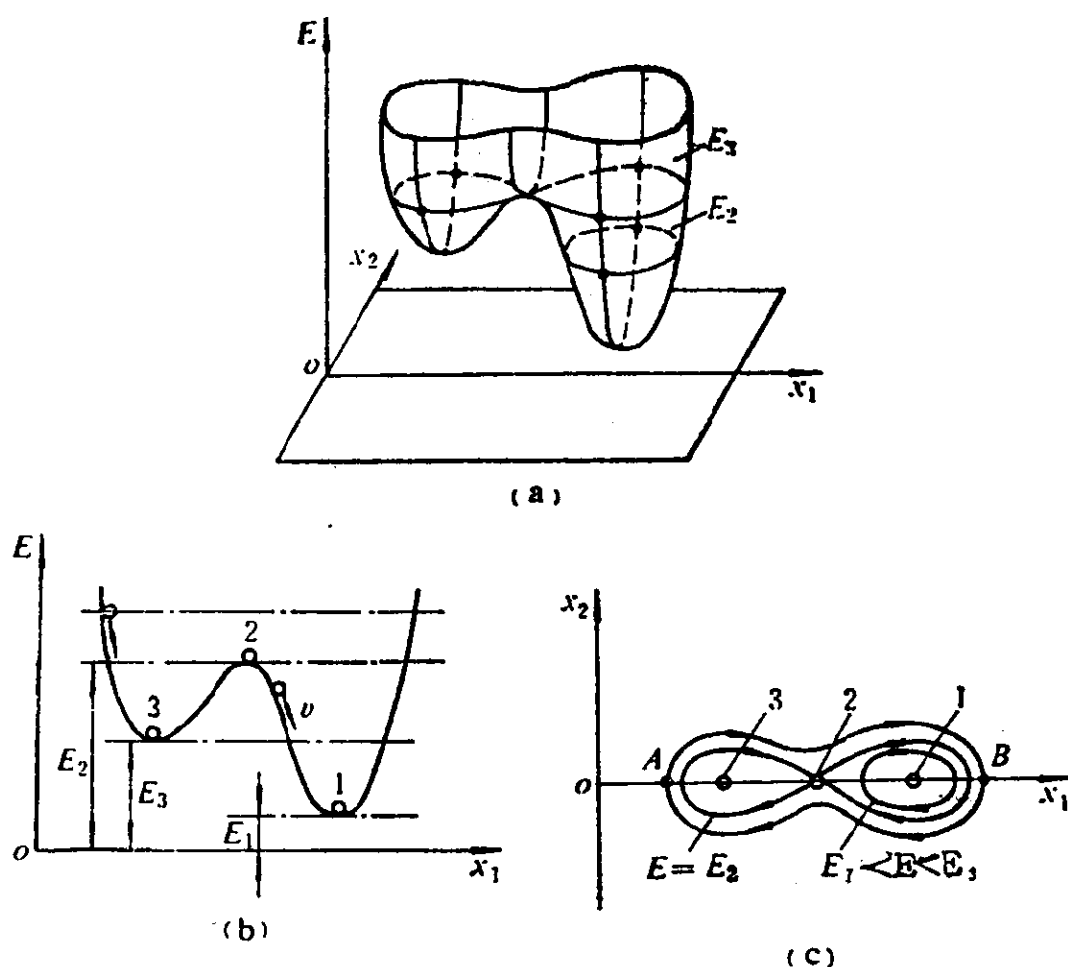


图 12.4-1

看作是一条无摩擦的滚道，一小球沿该滚道滚动， $E$ 代表小球起点的高度，而 $x_2$ 则代表小球滚动的速度 $v$ 。

图(c)是图(a)中的曲面在水平截面的截形，即等高线，也就是轨线。一条轨线对应于一条等高线（即一定的机械能 $E$ ），不同的轨线对应于不同的“高度”。在相平面上的一点，只对应于曲面一定的高度（曲面是单叶的），因而一般只有一条轨线通过它。从这里可以看出，对于保守系统来说，轨线不相交其实表现为“等高线”不相交（个别点除外）。当系统在某一条轨线上运行时，其机械能守恒，与外界无能量交换。而当从一条轨线跳到另一条轨线时，则有能量的释放或吸收，这就不成为保守系统了。

由(12.4-5)式还不难理解, 轨线对于 $x_1$ 轴是对称的。

图(c)中标有1, 2, 3这三个平衡点, 其所对应的能量分别为 $E_1$ ,  $E_2$ 与 $E_3$ 。其中1与3为中心, 2为鞍点, 分别与势能的极小值和极大值相对应, 如图(b)所示; 前者为仅稳定, 后者为不稳定。而且可以直观地看出, 对于保守系统来说, 其平衡点不可能是结点或焦点, 因而不存在渐进稳定的情况。其物理上的原因在于系统无能量耗散。

当 $E < E_2$ 时, 系统在平衡点1或3的周围的封闭轨线上运动, 这时系统运动的轨线只包含一个中心; 当 $E > E_2$ 时, 轨线包含两个中心及一个鞍点(一般而言, 一条封闭的轨线可以包含 $i$ 个鞍点,  $i+1$ 个中心, 共 $2i+1$ 个平衡点)。

$E = E_2$ 的一条轨线将以上两种情况分开, 称为分界线(separatrix)。

## 12.4.2 振动周期与极端位移

保守系统的振动周期可以采用直接积分的办法求出,

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dx_1}{x_2}, \quad (12.4-6)$$

式中 $\oint$ 是沿闭轨线的积分,  $dx_1/x_2 = dx/(dx/dt) = dt$ 。从(12.4-5)式中解出 $x_2$ 代入(12.4-6)式, 并考虑到轨线对于 $x_1$ 轴的对称性, 有

$$T = 2 \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx_1}{\sqrt{2(E - V(x_1))}}, \quad (12.4-7)$$

式中 $x_A$ 、 $x_B$ 是轨线上两个极端点的坐标(图12.4-1(c)), 由于在该点上的速度 $x_2 = 0$ , 由(12.4-5)式有

$$V(x_A) = V(x_B) = E, \quad (12.4-8)$$

由此即可确定振动时的极端位移 $x_A$ 与 $x_B$ 。

例12.4 一易脆商品的质量为  $m$ ，以弹性隔振装置固定在其包装外壳上。经试验，该弹性装置的恢复力  $F$  与商品相对于外壳的移动量  $x$  之间存在非线性关系，

$$F(x) = -\alpha x^5,$$

式中  $\alpha$  为实常数。试求当该包装（连同商品）从高度为  $h$  处落到地面时，商品相对于其外壳的最大位移。该外壳对地面的冲击为非弹性的。

解：单位质量的总的机械能为  $E = gh$ ，振动到极限位置  $x_m$  时的弹性势能为

$$V(x_m) = \int_0^{x_m} \frac{1}{m} \alpha x^5 dx = \frac{\alpha x_m^6}{6m}.$$

由(12.4-8)式，有

$$E = gh = \frac{\alpha x_m^6}{6m} = V(x_m),$$

即

$$x_m = \left( \frac{6mgh}{\alpha} \right)^{1/6}.$$

例12.5 试计算单摆在较大范围内振动的周期。

解：图12.2-3(b)表明，单摆的封闭相轨迹对于  $x_1$  轴和  $x_2$  轴均是对称的，因此计算振动周期的积分式(12.4-7)可以写成

$$T = 4 \int_0^{x_m} \frac{dx_1}{\sqrt{2(E - V(x_1))}}, \quad (a)$$

式中  $E$  为单位质量的摆锤在上升到极端位置时的最大势能

$$E = \omega_0^2 (1 - \cos \theta_m), \quad (b)$$

式中  $\theta_m = x_m$ ，即摆的振幅（最大角位移）。而(a)式中的  $V(x_1)$  可表示为

$$V(x_1) = V(\theta) = \omega_0^2 (1 - \cos \theta), \quad (c)$$

式中以  $\theta$  代替了  $x_1$ 。以(b)、(c)式代入(a)，得

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_m}}. \quad (d)$$

引入新的变量 $\phi$ ，使得

$$\sin(\theta/2) = \sin\frac{\theta_m}{2}\sin\phi, \quad (e)$$

(d)式成为

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_m}{2}\sin^2\phi}} \quad (f)$$

此为第一类完全椭圆积分，可以查表得出其值。由上式可看出周期 $T$ 随着振幅 $\theta_m$ 的上升而加大，这是非线性系统的特征。当 $\theta_m$ 很小时，(f)式中 $\sin^2\frac{\theta_m}{2}\sin^2\phi$ 这一部分可略去，该积分值趋向 $\pi/2$ ，而该式成为 $T = 2\pi/\omega_0$ ，这正是线性谐振子的情形。

## § 12.5 极限环

### 12.5.1 极限环的特点

上一节讲过，保守系统存在封闭轨线，对应于系统的一种周期运动。当系统在一封闭轨线上运动时，其总的机械能守恒。

这一节我们要讲解非保守系统也可能存在封闭轨线，这种封闭轨线也代表一种周期解。但是这种封闭轨线与前述保守系统的封闭轨线有很大的不同：

第一，非保守系统在一封闭轨线上运动时，其总机械能并不守恒，它既吸收能量，又耗散能量，总机械能在不断变化，只不过经过一周以后，能量的“收支”必须平衡，而系统的状态变量返回原状，然后再开始下一个周期的运动。

第二，非保守系统的封闭轨线还可以具有一种“吸引力”，它可以把从该轨线以外的其它点上出发的轨线“吸引”到该封闭轨线上来，如图12.5-1(a)，(b)中以粗实线表示的封闭轨线即



具有这种性质。因此，非保守系统的这种封闭轨线代表一种与初始条件无关的周期运动。这种周期运动是由系统本身决定的，初始条件的变化（图a），或者初始条件在一定范围内变化（图b），并不影响最后趋近的这种周期运动。而我们记得，保守系统的封闭轨线是由其初始条件决定的。

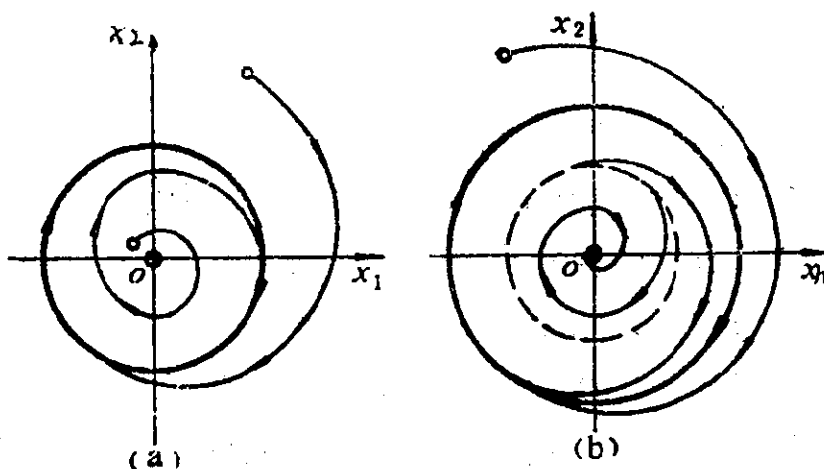


图 12.5-1

具有以上特性的，非保守系统的封闭轨线称为“极限环”（limit cycle）。除了常数解（平衡点）以外，周期解（极限环）也是动态系统的一种重要的运动方式。因此，对极限环的研究具有实际的工程意义。

### 12.5.2 极限环的稳定性

极限环分为两种：稳定的与不稳定的。前述图 12.5-1(a)，(b)中以粗实线表示的极限环是稳定的，而图(b)中以虚线表示的极限环是不稳定的。

涉及到极限环的稳定性，需要用到Poincare'的轨道稳定性的定义。按照此定义，如果封闭轨线 $c$ 附近的任一轨线都始终保持在附近，则封闭轨线 $c$ 是轨道稳定的；如果附近的轨线当 $t \rightarrow \infty$ 时，都无限趋近于 $c$ ，则 $c$ 是轨道渐近稳定的；如果附近的轨线都

倾向于离开 $c$ ，则 $c$ 是轨道不稳定的。

稳定极限环具有抗干扰的能力。当系统沿着一稳定极限环运动时，即使由于外界扰动使它暂时地偏离该极限环，它还是会回到该环上，或者保持在该环附近运动，不致于产生过大偏差。而不稳定极限环只是理论上的一种可能性，由于实际环境中各种扰动是无可避免的，因此在实验中是不可能观察到沿着不稳定极限环的运动的。

图12.5-1(a)与(b)给出了极限环与平稳点的两种典型的配置方式。图(a)中原点是不稳定平衡点，而包围原点的极限环是稳定的。图(b)中的原点也是一个平衡点，其外包围着一个不稳定极限环（虚线），再外层是一稳定极限环（实线）。这种情况下的原点，对于小的扰动（在虚线环之内）是稳定的，而对于大的扰动（超过虚线环）则是不稳定的。这时的原点称为具有“有限振幅不稳定性”。

平衡点与极限环相结合，可用以描述自激振动的过程与特点。在图12.5-1(a)的情况下，系统不可能静止在其中心的平衡点上，任何微小的初始扰动均会激起急剧上升的振动，而最后振动会被约束在稳定极限环上。在图12.5-1(b)的情况下，系统可以稳定在其中心平衡点上，如果扰动不超过虚线环所规定的阈限的话；一旦越过这一阈值，也立即激起增幅的振动，而最后振动被稳定在外层的实线环上。有关自激振动的物理机制与数学规律，在第十三章中还会作进一步介绍。

### 12.5.3 Van Der Pol振子

Van Der Pol振子是存在极限环的一个典型的系统，其运动方程为

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \epsilon > 0. \quad (12.5-1)$$

此方程的阻尼系数  $c = \varepsilon(x^2 - 1)$  是变化的，当  $|x| < 1$  时， $c < 0$ ，阻尼是负的，促使振幅上升；当  $|x| > 1$  时， $c > 0$ ，阻尼是正的，振幅会下降。因此预期应该有极限环存在。实际上确实存在一稳定的极限环，图 12.5-2(a)、(b) 分别给出了  $\varepsilon = 0.2$  及  $\varepsilon = 1$  两种情况下的相图，从图上可看出从相平面上任意点出发的轨线都收敛于极限环。

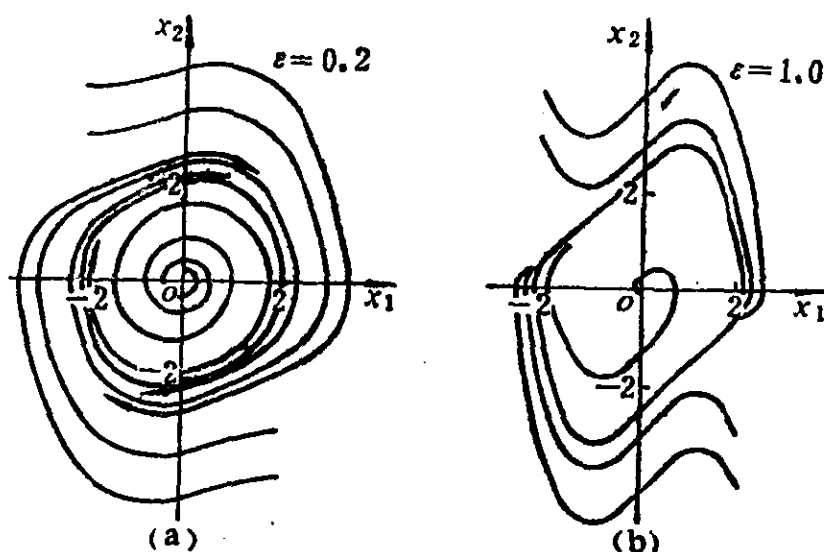


图 12.5-2

已经证明，当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时，极限环趋近于圆周。以上是假定  $\varepsilon > 0$ 。当  $\varepsilon < 0$  时，极限环变成不稳定的。

令  $x_1 = x$ ， $x_2 = \dot{x}$ ，则运动方程(12.5-1)可写成状态方程的形式，

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1)^2 x_2. \quad (12.5-2)$$

在原点附近加以线性化，得

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}. \quad (12.5-3)$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \varepsilon - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1 = 0, \quad (12.5-4)$$

可解出特征根

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - 1}. \\ \lambda_2 & \end{aligned} \quad (12.5-5)$$

当 $\varepsilon > 0$ 时，原点是不稳定的平衡点，按线性化模型(12.5-3)式，从原点近旁出发的轨线是发散的，但对于真实的非线性系统来说，由于稳定极限环的存在，限制了轨线的无限发散。当然，这应该归功于方程(12.5-2)中的非线性项。

当 $\varepsilon < 0$ 时，(12.5-5)式表明原点是稳定的，即从原点附近任一点出发的轨线应收敛于原点，但考虑到非线性系统存在一个不稳定的极限环，因此以上收敛性需限定一个范围：只有在该极限环内部的轨线才收敛于原点。

## § 12.6 平均法

至此，本章讲述的问题，基本上是属于非线性系统响应的稳定性问题，其基础是系统的状态空间的图象表示的概念与方法，所涉及的问题基本上属于定性的问题。以下我们要涉及非线性系统响应的时间历程的定量方面的问题。与线性系统不同，对于非线性系统的响应的计算很难找到广泛适用的统一方法，而只能提出各种分别适用于不同场合的方法，这些方法各有长短，而且都只能给出近似的结果。当然，所得到的结果的精度可以视需要而确定。但当要求的精度较高时，因表达式变得愈益复杂庞大，所以公式的推导工作量及计算工作量均急剧上升。实际上，较低阶的近似往往已能显示出解的全部性质，而较高阶的近似只不过是解的具体数值作出了微小的修正而已。因此，为满足工程问题分析的需要，通常只需取较低阶的近似。本章主要讲述平均法、迭代法与摄动法，而且只限于这些方法在单自由度，弱非线性系统中的应用。

## 12.6.1 平均法的基本思想

我们观察以下非线性系统,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (12.6-1)$$

其中 $f(x, \dot{x})$ 是一非线性函数,  $\varepsilon \ll 1$ 是某小参数, 用以反映系统中比较弱的非线性。当 $\varepsilon = 0$ 时, 以上系统退化为一线性谐振子,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12.6-2)$$

式中 $\omega_0$ 是谐振子的自然频率。上式有解

$$x = a \cos \psi, \psi = \omega_0 t + \theta, \quad (12.6-3)$$

其中 $a$ 与 $\theta$ 均为常数。当 $\varepsilon \neq 0$ , 但很小时, 以上系统称为“拟线性系统”(nearly linear system)。这时非线性项的存在, 必然对(12.6-3)式所表示的解有影响, 我们假定这种影响表现在使原式中的常数 $a, \theta$ 变成时间的函数 $a(t), \theta(t)$ 。或者换一种说法, 我们仍保留(12.6-3)式的谐波解的形式不变, 而以随时间调整其振幅 $a$ 与相位 $\theta$ 的方法, 来适应非线性项 $\varepsilon f(x, \dot{x})$ 的影响。这里我们三个变量:  $x(t), a(t)$ 及 $\theta(t)$ , 而限制它们的只有(12.6-1)与(12.6-3)两个方程, 还需再补充一个方程, 才能完全确定它们之间的关系。补充一个什么样的方程, 是任意的。由(12.6-3)式, 如果 $a, \theta$ 均为常数, 那么有

$$\dot{x} = -\omega_0 a \sin \psi, \quad (12.6-4)$$

可是上面说过,  $a, \theta$ 均需为变量, 因而上式并不一定成立。这里我们假定上式仍成立, 并用它作为一个补充方程。

现在视(12.6-3)式中的 $a, \theta$ 均为 $t$ 的函数, 求其对时间的导数, 得

$$\dot{x} = \dot{a} \cos \psi - \omega_0 a \sin \psi - a \dot{\theta} \sin \psi,$$

以(12.6-4)式代入上式, 得

$$\dot{a} \cos \psi - a \dot{\theta} \sin \psi = 0. \quad (12.6-5)$$

对(12.6-4)式求导, 得

$$\dot{x} = -\omega_0^2 a \cos\psi - \omega_0 \dot{a} \sin\psi - \omega_0 a \dot{\theta} \cos\psi, \quad (12.6-6)$$

将(12.6-3)、(12.6-4)与(12.6-6)代入(12.6-1)式, 得

$$\omega_0 \dot{a} \sin\psi + \omega_0 a \dot{\theta} \cos\psi = -\varepsilon f(a \cos\psi, -\omega_0 a \sin\psi), \quad (12.6-7)$$

从(12.6-5)、(12.6-7)两式解出 $\dot{a}$ 与 $\dot{\theta}$ , 得以下标准形式的方程

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin\psi f(a \cos\psi, -\omega_0 a \sin\psi), \quad (12.6-8)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 a} \cos\psi f(a \cos\psi, -\omega_0 a \sin\psi). \quad (12.6-9)$$

可以将(12.6-1)与(12.6-4)式看成是一组方程, 其独立变量是 $x$ 与 $\dot{x}$ , 而(12.6-8)、(12.6-9)式是经过变换而得到的一组新的方程, 新的独立变量是 $\dot{a}$ 与 $\dot{\theta}$ . 以上两组方程是完全等价的, 而且通过(12.6-3)式可以互相转换. 但是后面一组方程有明显的特点: 它把 $\dot{a}$ 与 $\dot{\theta}$ 的变化率表达成为与小参数 $\varepsilon$ 成正比的关系. 当 $\varepsilon=0$ 时,  $\dot{a}=\dot{\theta}=0$ , 即 $a$ 、 $\theta$ 均为常数, 回到线性系统的情况. 当 $\varepsilon \neq 0$ , 但很小时, 以上两式表明 $a$ 、 $\theta$ 的变化很缓慢.

以下通过实例说明如何基于(12.6-8)、(12.6-9)两式, 采用平均法计算非线性系统响应时间历程的近似解.

## 12.6.2 以平均法求Van Der Pol方程的近似解

Van Der Pol方程已在12.5.3小节中给出, 如(12.5-1)式所示. 借助于变换

$$x = a \cos\psi, \quad \psi = t + \theta, \quad (12.6-10)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 a \sin\psi, \quad (12.6-11)$$

可将该式变成标准方程

$$\dot{a} = \frac{1}{8} \varepsilon a [4 - a^2 - 4 \cos 2\psi + a^2 \cos 4\psi], \quad (12.6-12)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{8}\varepsilon[(4-2a)^2\sin 2\psi - a^2\sin 4\psi]. \quad (12.6-13)$$

现在求  $\dot{a}$  与  $\dot{\theta}$  在一个周期  $T = 2\pi/\omega_0$  中的平均。由于以上两式中的  $a$  与  $\psi$  中所含的  $\theta$  的变化均十分缓慢，因此在平均周期中可将之视为常数，于是以上两式中的  $\cos 2\psi$ 、 $\cos 4\psi$ 、 $\sin 2\psi$ 、 $\sin 4\psi$  等项均为周期是  $T$  的整数分之一的谐波函数，对平均的贡献为零，于是有

$$\dot{a} \approx \frac{1}{8}\varepsilon a(4-a^2),$$

$$\dot{\theta} \approx 0.$$

以上两式积分，可解得  $a$  与  $\theta$  的一阶近似

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right)e^{-\varepsilon t}}, \quad (12.6-14)$$

$$\theta = \theta_0, \quad (12.6-15)$$

上式中  $a_0$ 、 $\theta_0$  为积分常数。(12.6-15)式表明作为一阶近似，初相  $\theta$  为一常数。现在来仔细地分析一下(12.6-14)式，令  $t=0$ ，由该式得  $a = a_0$ ，可见式中  $a_0$  为振幅的初值。令  $a_0 = 0$ ，由(12.6-14)式得  $a = 0$ ，可见相平面的原点是系统的一个平衡点。但是此平衡点是不稳定的，由(12.6-14)式可见，只要  $a_0 \neq 0$ ，无论它多么小，当  $t \rightarrow \infty$  时，总有  $a \rightarrow 2$ ，而由(12.6-3)式，系统的运动趋向于等幅的谐波运动

$$x(t) = 2\cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (12.6-16)$$

这对应于相平面上的一个极限环，而这一点与图12.5-2(a)上的相轨迹图是一致的。

### 12.6.3 分段线性系统及其频率响应特性

在图12.1-3中已经给出了分段线性系统的几个例子。这类系

统的弹性在位移 $x$ 的各个范围内是线性的，但不同范围内的弹性系数不同，因而从总体上看，是具有非线性弹性的系统。这里我们考虑具有对称非线性弹性的系统，其弹性力 $P_e$ 与位移 $x$ 之间的关系如图12.6-1(a)所示。而图12.6-1(b)则给出了该系统的物理结构的示意图。图中 $\text{tg}\alpha_1 = k_1$ ， $\text{tg}\alpha_2 = k_2$ 。当 $\alpha_1 = 0$ 时，即为图12.1-3(e)的情形。

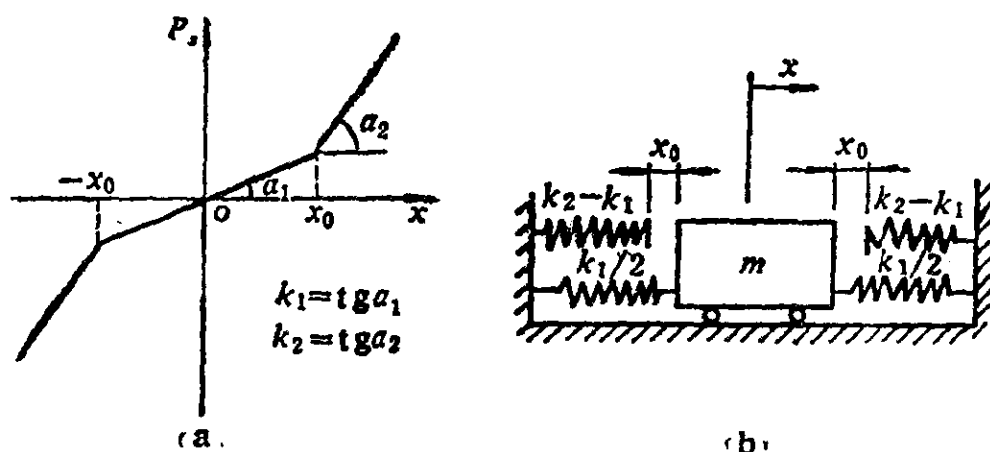


图 12.6-1

这类系统在工程实际问题中经常碰到，对其在一定初始条件下的自由振动的分析，并不困难，仅按分段线性系统的分析，并注意到各段之间的位移与速度之间的衔接条件即可，而且一般可得精确解。可是欲求这种系统在谐波激励下的稳态响应，却不大容易。这里介绍一种采用平均法求这类系统在谐波激励下的稳态响应，即其频率特性的近似方法。

图12.6-1(a)中 $P_e$ 是折合到单位质量上的弹性力，它与位移 $x$ 之间的关系可以公式表示为

$$P_e(x) = k_2 x + \varepsilon f(x), \quad (12.6-17)$$

式中

$$\varepsilon f(x) = \begin{cases} -(k_2 - k_1)x, & \text{当 } -x_0 \leq x \leq x_0, \\ -(k_2 - k_1)x_0, & \text{当 } x_0 \leq x \leq \infty, \\ (k_2 - k_1)x_0, & \text{当 } -\infty < x \leq -x_0. \end{cases} \quad (12.6-18)$$



这里  $k_1 = K_1/m, k_2 = K_2/m$ , 且假设  $(k_2 - k_1)$  是与  $\varepsilon$  同阶的小量.

如果具有线性阻尼, 则系统的运动方程可以写成

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon f(x) - 2\varepsilon\xi\omega_0 \dot{x} + \varepsilon F \sin \nu t, \quad (12.6-19)$$

式中  $\omega_0^2 = k_2$ ,  $\varepsilon\xi$  是线性阻尼率,  $\varepsilon F$  是单位质量上受到的谐波激振力的幅值,  $\varepsilon\xi$  与  $\varepsilon F$  均假定是与小参数  $\varepsilon$  同阶的小量,  $\nu$  是激振频率.

我们考虑  $\nu \approx \omega_0$ , 即共振区域附近的情况, 这时可假定

$$\omega_0^2 - \nu^2 = \varepsilon\Delta, \quad (12.6-20)$$

即认为  $\nu^2$  与  $\omega_0^2$  之差也是与小参数  $\varepsilon$  同阶的小量. 代入 (12.6-19) 式, 得

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\varepsilon x\Delta - \varepsilon f(x) - 2\varepsilon\xi\omega_0 \dot{x} + \varepsilon F \sin \nu t, \quad (12.6-21)$$

与 (12.6-1) 式比较, 可见该式中的  $\omega_0^2$  在这里对应于  $\nu^2$ , 而

$$f(x, \dot{x}) = -x\Delta - f(x) - 2\xi\omega_0 \dot{x} + F \sin \nu t, \quad (12.6-22)$$

变换式 (12.6-3) 式与 (12.6-4) 式在这里成为

$$x = a \cos \psi, \quad \psi = \nu t + \theta, \quad (12.6-23)$$

$$\dot{x} = -a\nu \sin \psi, \quad (12.6-24)$$

而标准式 (12.6-8)、(12.6-9) 式成为

$$\begin{aligned} \dot{a} = \frac{1}{a\nu} [ & (\omega_0^2 - \nu^2) a^2 \sin \psi \cos \psi + \varepsilon f(a \cos \psi) a \sin \psi \\ & - 2\varepsilon\xi\omega_0 \nu a^2 \sin^2 \psi - \varepsilon F a \cos \theta \sin^2 \psi \\ & + \varepsilon F a \sin \theta \sin \psi \cos \psi ], \end{aligned} \quad (12.6-25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = \frac{1}{a\nu} [ & (\omega_0^2 - \nu^2) a \cos^2 \psi + \varepsilon f(a \cos \psi) \cos \psi \\ & - 2\varepsilon\xi\omega_0 \nu a \sin \psi \cos \psi - \varepsilon F \cos \theta \sin \psi \cos \psi \\ & + \varepsilon F \sin \theta \cos^2 \psi ]. \end{aligned} \quad (12.6-26)$$

对以上两式进行平均化, 并且在平均时视  $a$  与  $\theta$  为常数, 得  $\dot{a}$ ,  $\dot{\theta}$  的一次近似方程

$$\dot{c} = -\varepsilon\xi\omega_0 a - \frac{\varepsilon F}{2\nu} \cos \theta, \quad (12.6-27)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2\nu} \left[ \omega_0^2 - \nu^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi \right] + \frac{\varepsilon F}{2\nu a} \sin \theta. \quad (12.6-28)$$

记

$$\omega_s^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} P_s(a \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad (12.6-29)$$

并考虑到(12.6-18)式, 可将(12.6-28)式写成

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2\nu} [\omega_s(a) - \nu^2] + \frac{\varepsilon F}{2\nu a} \sin \theta. \quad (12.6-30)$$

而方程(12.6-21)在共振区附近的第一阶近似解为

$$x = a \cos(\nu t + \theta), \quad (12.6-31)$$

其中 $a$ 与 $\theta$ 分别由(12.6-27)、(12.6-30)式给出.

为了得到稳态解, 必须有 $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$ , 由方程(12.6-27)、(12.6-30)式有

$$-2\varepsilon\xi\omega_0\nu a = \varepsilon F \cos \theta, \quad (12.6-32)$$

$$-a[\omega_s^2(a) - \nu^2] = \varepsilon F \sin \theta, \quad (12.6-33)$$

由以上两式即可得系统的幅频特性与相频特性

$$a^2 \{ [\omega_s^2(a) - \nu^2]^2 + [2\varepsilon\xi\omega_0\nu a]^2 \} = (\varepsilon F)^2, \quad (12.6-34)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega_s^2(a) - \nu^2}{2\varepsilon\xi\omega_0\nu}. \quad (12.6-35)$$

如略去阻尼不计, 即令 $\xi = 0$ , 则以上两式成为

$$a[\omega_s^2(a) - \nu^2] = \pm \varepsilon F, \quad (12.6-36)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (12.6-37)$$

为了具体计算以上响应曲线, 必须计算 $\omega_s^2(a)$ , 按(12.6-29)式与(12.6-18)式, 该积分必须分三段进行. 以 $\psi_0$ 表示

$$x_0 = a \cos \psi \quad (12.6-38)$$

的最小根, 这时由(12.6-18)式, 有

$$\varepsilon f(a \cos \psi) = \begin{cases} (k_1 - k_2) a \cos \psi, & \text{当 } \psi_0 \leq \psi \leq \pi - \psi_0 \\ (k_1 - k_2) a \cos \psi_0, & 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ -(k_1 - k_2) a \cos \psi_0, & \pi - \psi_0 \leq \psi \leq \pi \end{cases} \quad (12.6-39)$$

积分式(12.6-29)可以分段计算如下:

$$\begin{aligned} a\omega_0^2(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_s \cos \psi d\psi = k_2 a + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi \\ &= k_2 a + \frac{2}{\pi} \int_0^{\psi_0} (k_1 - k_2) a \cos \psi_0 \cos \psi d\psi \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_{\psi_0}^{\pi - \psi_0} (k_1 - k_2) a \cos^2 \psi d\psi \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \psi_0}^{\pi} (k_1 - k_2) a \cos \psi_0 \cos \psi d\psi \\ &= k_2 a + \frac{2}{\pi} (k_1 - k_2) \left[ a \arcsin \left( \frac{x_0}{a} \right) + x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x_0}{a} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (12.6-40)$$

这样, 在无阻尼情况下, 由(12.6-36)式可得系统的幅频特性为

$$\begin{aligned} a(k_2 - \nu^2) + \frac{2}{\pi} (k_1 - k_2) \left[ x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x_0}{a} \right)^2} \right. \\ \left. + a \arcsin \left( \frac{x_0}{a} \right) \right] = \pm \varepsilon F, \end{aligned} \quad (12.6-41)$$

上式除以  $k_2 x_0 = \omega_0^2 x_0$ , 并记  $a/x_0 = A$ , 得无量纲形式的幅频特性

$$\begin{aligned} A \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{\omega_0} \right)^2 \right] + \frac{2}{\pi} \left( \frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} + A \arcsin \left( \frac{1}{A} \right) \right] \\ = \frac{\pm \varepsilon F}{k_2 x_0}. \end{aligned} \quad (12.6-42)$$

以  $\mu = \pm \varepsilon F / k_2 x_0$  作为参量, 可绘出  $A - (\nu/\omega_0)$  的图线, 如图 12.6-2 所示, 图中取  $k_1/k_2 = 1/2$ .

当(12.6-42)式中  $F = 0$  时, 得系统自由振动时的自然频率  $\nu = \nu_0$ . 与其无量纲振幅  $A$  之间的关系,

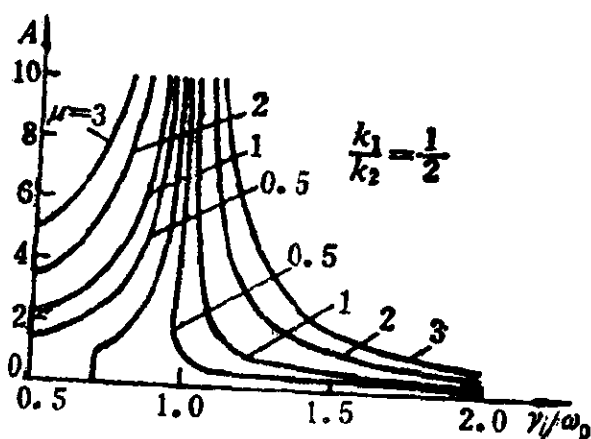


图 12.6-2

$$\nu^2 = \omega_0^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{k_1}{k_2} \right) \left[ \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} + \arcsin \left( \frac{1}{A} \right) \right] \right\}. \quad (12.6-43)$$

当  $x_0 \rightarrow 0$  时,  $A \rightarrow \infty$ , 由上式得  $\nu^2 = \omega_0^2$ , 这是意料中的情况.

令(12.6-42)式中的  $k_1 = 0$ , 即得图12.1-3(b)中的间隙系统的幅频特性,

$$A \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{\omega_0} \right)^2 \right] - \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} + A \arcsin \left( \frac{1}{A} \right) \right] = \frac{\pm eF}{k_2 x_0}. \quad (12.6-44)$$

当  $x_0 \rightarrow 0$  时,  $A \rightarrow \infty$ , 由上式得无阻尼单自由度系统的幅频特性,

$$a = \frac{eF}{k_2} \frac{1}{1 - \left( \frac{\nu}{\omega_0} \right)^2}. \quad (12.6-45)$$

另一方面, 令(12.6-44)式中的  $F = 0$ , 则得该系统自由振动情况下自然频率  $\nu_n$  与相对振幅的关系

$$\nu_n = \omega_0^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \left( \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \right] \right\}. \quad (12.6-46)$$

令(12.6-42)式中的  $k_1 \rightarrow \infty$ ,  $x_0 \rightarrow 0$ ,  $k_1 x_0 \rightarrow \delta k_2$ ,  $A \rightarrow \infty$ , 得图12.1-3(c)的系统的幅频特性,

$$a = \left( \frac{eF}{k} - \frac{\delta}{\pi} \right) \frac{1}{1 - \left( \frac{\nu}{\omega_0} \right)^2}. \quad (12.6-47)$$

令上式中 $F = 0$ ，得自由振动条件下自然频率 $\nu_n$ 与振幅 $a$ 之间的关系

$$\nu_n^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{1}{\pi B} \right), \quad (12.6-48)$$

式中

$$B = a/\delta. \quad (12.6-49)$$

## § 12.7 迭代法

本节讲解迭代法，并顺便提及谐波平衡法。

### 12.7.1 无阻尼Duffing方程及其迭代解法

#### 1. 迭代解法

考虑以下无阻尼Duffing方程

$$m \ddot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = F' \cos \omega t. \quad (12.7-1)$$

此式描述由一非线性弹簧与一质块构成的系统的谐波激励运动，如图12.7-1所示。式中

$$k_1 x + k_3 x^3 = P. \quad (12.7-2)$$

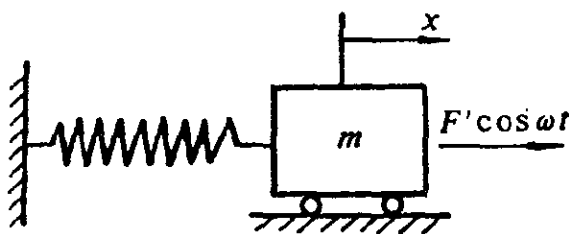


图 12.7-1

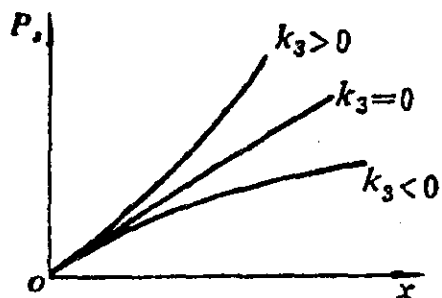


图 12.7-2

为弹簧的恢复力，其中 $k_3 x^3$ 这一部分为恢复力中的非线性项。当 $k_3 = 0$ 时，为线性弹簧，当 $k_3 > 0$ 时，为硬弹簧，当 $k_3 < 0$ 时，为

软弹簧。它们所对应的 $P_x-x$ 曲线如图12.7-2所示。

令 $k_1/m = \omega_0^2$ ,  $k_3/m = \beta$ ,  $F'/m = F$ , (12.7-1)式成为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3 + F \cos \omega t, \quad (12.7-3)$$

式中 $F$ 是激励的幅值,  $\omega$ 是激励的频率,  $\beta x^3$ 为非线性项, 设这一项相对较小, 而 $\omega_0$ 为当 $\beta = 0$ 时的相应的线性谐振子的自然频率。

按照问题的物理意义, 我们来寻求周期为 $T = 2\pi/\omega$ 的周期解。采用迭代法, 逐步逼近这一周期解。以相应的线性谐振子在谐波激励下的稳定解

$$x_0 = A \cos \omega t \quad (12.7-4)$$

作为迭代的起点, 即作为(12.7-3)式的解的“零次近似解”。为了迭代方便, 将该式移项, 成为

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \beta x^3 + F \cos \omega t. \quad (12.7-5)$$

以(12.7-4)式代入上式的右边得

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos \omega t - \beta A^3 \left( \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) + F \cos \omega t, \quad (12.7-6)$$

以上用到了三角恒等式

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t. \quad (12.7-7)$$

将(12.7-6)式中的高次谐波 $\cos 3\omega t$ 略去, 并将该式积分两次, 即得到(12.7-3)式的解的“一次近似解”

$$x_1 = \frac{1}{\omega^2} \left( \omega_0^2 A + \frac{3}{4} \beta A^3 - F \right) \cos \omega t. \quad (12.7-8)$$

这里我们假设两个积分常数 $C_1$ 、 $C_2$ 均为零。否则, 上式中会出现 $C_1 t + C_2$ 的非周期项。

将以(12.7-8)式表示的 $x_1$ 代入(12.7-5)式右边, 同样再积分两次, 就可得到“二级近似解” $x_2$ , 同理可得 $x_3, x_4, \dots$ 等等。但是这里我们不再往下进行, 而是假设 $x_0$ 与 $x_1$ 均是比较接近真

实的周期解 $x$ ，因而前两者也应该比较接近，即有 $x_1 = x_0$ ，以(12.7-4)、(12.7-8)两式代入，消去等式两边的公因子 $\cos\omega t$ ，并整理，即得

$$A\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{3}{4}\beta \frac{A^3}{\omega_0^2} - \frac{F}{\omega_0^2} = 0. \quad (12.7-9)$$

此即表示激振频率 $\omega$ 与振幅 $A$ 之间的关系的幅频特性。当系统参数 $\omega_0^2$ 、 $\beta$ 以及激振力的幅值 $F$ 与频率 $\omega$ 确定以后，由上式可以求出响应的振幅 $A$ ，代回(12.7-4)式，即得到一次近似解。

需要说明，以上关系还可用另外的方法获得。即以近似解(12.7-4)代入运动方程(12.7-3)式的两边，略去高次谐波项，并令等式两边的 $\cos\omega t$ 项的系数相等，即得(12.7-9)式。此即所谓“谐波平衡法”。请读者自己来完成以上推导。

(12.7-9)式虽然是一个十分粗糙的近似解，可是由它仍然可得出一些很有意义的结论，反映了非线性系统的本质与特性。

## 2. 自由振动的频率与振幅的关系

令(12.7-9)中激振力 $F = 0$ ，得到该系统进行自由振动的频率 $\omega$ 与振幅 $A$ 之间的关系，有

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{3}{4}\beta A^2/\omega_0^2. \quad (12.7-10)$$

上式表明非线性系统自由振动的频率 $\omega$ 与其振幅 $A$ 有关，当 $\beta > 0$ 时， $\omega$ 随 $A$ 的上升而增高；当 $\beta < 0$ 时， $\omega$ 随 $A$ 的上升而下降。这是由于系统的刚度随着振幅而变化的缘故。系统自由振动时的周期 $T = 2\pi/\omega$ ，因而也随着振幅而变化，于是“等时性”不再存在。这是非线性系统的自由振动不同于线性谐振子的一大特点。

当 $\beta = 0$ 时，回到线性谐振子的情况，这时恒有 $\omega = \omega_0$ ，即无论振幅如何，其自由振动的频率恒等于相应线性系统的自然频率 $\omega_0 = k_1/m$ 。

对应于 $\beta > 0$ ， $\beta < 0$ 与 $\beta = 0$ 三种情况下的 $\omega/\omega_0 - A$ 曲线，分别如图12.7-3(a)、(b)、(c)中的虚线所示。

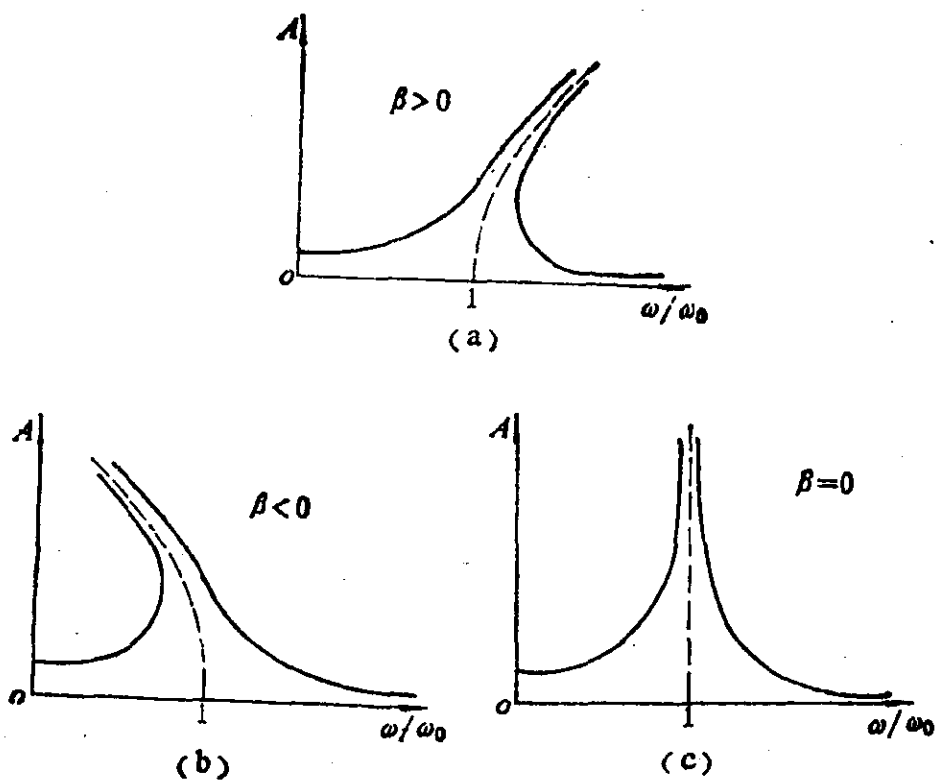


图 12.7-3

### 3. 强迫振动、幅频特性

当  $F \neq 0$  时, (12.7-9) 式与图 12.7-3 表示该非线性系统的幅频特性。

线性系统[图 12.2-3(c),  $\beta = 0$ ]的共振峰是竖直向上的, 而非线性系统的共振峰则向高频方向[图(a),  $\beta > 0$ ], 或向低频方向[图(b),  $\beta < 0$ ]倾斜。这种变化与虚线表示的系统自然频率随振幅的变化是一致的。

## 12.7.2 有阻尼的 Duffing 方程及其周期解

### 1. 谐波平衡解法

在无阻尼 Duffing 方程(12.7-1)式中加入阻尼项, 即得有阻尼的 Duffing 方程

$$\ddot{x} + 2\omega_0\xi\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F\cos(\omega t + \phi), \quad (12.7-11)$$



式中 $\xi$ 是线性阻尼率， $\phi$ 是激励力的初相。引入这一初相，是为了表示激振力 $F(t)$ 与响应 $x(t)$ 之间的相位差。此相位差放在 $F(t)$ 中，而不放在 $x(t)$ 中，是为了简化后面的推导。

引入记号

$$F \cos(\omega t + \phi) = F_1 \cos \omega t - F_2 \sin \omega t, \quad (12.7-12)$$

其中

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad \text{tg} \phi = F_2 / F_1, \quad (12.7-13)$$

$$F_1 = F \cos \phi, \quad F_2 = F \sin \phi. \quad (12.7-14)$$

我们采用“谐波平衡法”来求(12.7-11)式的周期解的一次近似。为此仍取相应线性系统的周期解作为非线性系统的一种形式解，

$$x_0 = A \cos \omega t, \quad (12.7-15)$$

以上式代入(12.7-11)式，并考虑到(12.7-12)式，得

$$\begin{aligned} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \beta A^3 \right] \cos \omega t - 2\omega_0 \xi \omega A \sin \omega t + \frac{1}{4} \beta A^3 \cos 3\omega t \\ = F_1 \cos \omega t - F_2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (12.7-16)$$

略去高次谐波项，并使等式两端 $\cos \omega t$ 、 $\sin \omega t$ 项的系数分别相等，得

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \beta A^3 = F_1, \quad (12.7-17)$$

$$2\omega_0 \xi \omega A = F_2. \quad (12.7-18)$$

将以上两式分别平方，相加，并考虑到(12.7-13)式第一式，得

$$F^2 = \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \beta A^3 \right]^2 + [2\omega_0 \xi \omega A]^2, \quad (12.7-19)$$

将(12.7-17)与(12.7-18)两式相除，并考虑到(12.7-13)式第二式，得

$$\text{tg} \phi = \frac{2\omega_0 \xi \omega A}{(\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \beta A^3}. \quad (12.7-20)$$

以上两式分别为该系统的幅频特性与相频特性。此两式也可

用上一小节中的迭代解法得出，请读者自行完成其推导。

$\beta > 0$  的幅频特性曲线如图 12.7-4 所示。与 12.7-3(a) 图不同的地方是，这时幅频曲线是“封顶”的。这是由于阻尼的作用，限制了共振振幅的无限上升。

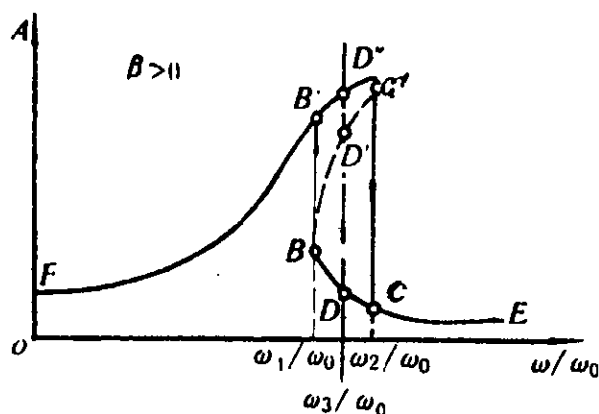


图 12.7-4

## 2. 跳跃现象

我们知道，对于线性系统的强迫振动来说，激励频率的连续变化，只会导致响应幅值的连续变化。可是对于非线性系统来说，即使激振频率进行连续扫描，在某些特定点上，也会导致振幅突跳。例如，在图 12.7-4 中，当激励频率连续上升时，响应幅值将沿曲线段  $FB'D''C'$  上升，当频率增至  $\omega_2$ ，而振幅达到  $C'$  点时，如果频率再有极其微小的增加，则振幅会从  $C'$  点突然跌落到  $C$  点。反之，当激振频率从大到小连续变化时，振幅将沿曲线  $ECDB$  移动。当频率达到  $\omega_1$  时，振幅达到  $B$  点。这时，频率如再有微小的下降，则振幅将从  $B$  点突然跃升到  $B'$  点。这种现象称为“跳跃现象”，是非线性系统所特有的现象。

在图 12.7-4 中横坐标的  $\omega_1$  与  $\omega_2$  两点之间，任一频率与振幅曲线上的三点相对应，如  $\omega_3$  所对应的振幅为  $D$ 、 $D'$  与  $D''$  三点。究竟哪一个振幅可以实现，需视激振频率变化的“历史”而定。当激振频率由小到大，增加到  $\omega_3$  时，振幅将取  $D''$  点的值；当激振频率由大到小，下降到  $\omega_3$  时，振幅将取  $D$  点的值。至于  $D'$  点

所对应的振幅，实际上是不可能实现的。因为它代表一种不稳定情况，任何一个无可避免的扰动，都会使振幅跳离  $D'$ ——不是上升到  $D''$  点就是下降到  $D$  点。图中虚线线段  $BC'$  上的所有的点都具有这种不稳定性，因此它们所对应的振幅在实验中都是不可能观察到的。

### 12.7.3 组合谐波与次谐波

以上在分析讨论非线性系统谐波激励的幅频特性的时候，我们默认了一个结果：响应的频率与激励的频率相同，这是略去了(12.7-6)式中的高次谐波项以后的近似结果。其实一个非线性系统在谐波激励下的响应有一个重要特点：除了与激励同频率的成分以外，还有高次谐波、组合谐波与次谐波等多种成分。这一小节就来分析这一问题，我们仍以无阻尼Duffing方程为例，并采用迭代方法。假设作用在系统上的激振力具有  $\omega_1$  与  $\omega_2$  这两个频率成分，于是运动方程为

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \beta x^3 + F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t. \quad (12.7-21)$$

注意，如果系统是线性的，即  $\beta = 0$ ，则响应中也应该包含与激励相同的两个频率成分，即

$$x_0(t) = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t. \quad (12.7-22)$$

我们以此作为迭代的起点，将它代入(12.7-21)式的右边，得

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -\omega_0^2 (A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t) - \beta (A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t)^3 \\ & + F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t. \end{aligned}$$

积分两次，得

$$\begin{aligned} x_1 = & -\frac{1}{\omega_1^2} \left( F_1 - \omega_0^2 A - \frac{3}{4} \beta A^3 - \frac{3}{2} AB^2 \right) \cos \omega_1 t \\ & - \frac{1}{\omega_2^2} \left( F_2 - \omega_0^2 B - \frac{3}{4} \beta B^3 - \frac{3}{2} A^2 B \right) \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A^3}{36} \frac{\beta}{\omega_1^2} \cos 3\omega_1 t + \frac{B^3}{36} \frac{\beta}{\omega_2^2} \cos 3\omega_2 t \\
& + \frac{3}{4} \beta A^2 B \left[ \frac{\cos(\omega_2 + 2\omega_1)t}{(\omega_2 + 2\omega_1)^2} + \frac{\cos(\omega_2 - 2\omega_1)t}{(\omega_2 - 2\omega_1)^2} \right] \\
& + \frac{3}{4} \beta AB^2 \left[ \frac{\cos(\omega_1 + 2\omega_2)t}{(\omega_1 + 2\omega_2)^2} + \frac{\cos(\omega_1 - 2\omega_2)t}{(\omega_1 - 2\omega_2)^2} \right].
\end{aligned}
\tag{12.7-23}$$

以上推导中用到了三角函数的降幂公式与积化和差公式，

$$\begin{aligned}
\cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \\
\cos^3 \alpha &= \frac{1}{4}(3\cos \alpha + \cos 3\alpha),
\end{aligned}
\tag{12.7-24}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$$

从(12.7-23)式可见，仅迭代一次，在响应中已经出现频率为 $3\omega_1$ 与 $3\omega_2$ 的高次谐波项以及频率为 $(\omega_1 \pm 2\omega_2)$ 与 $(\omega_2 \pm 2\omega_1)$ 的组合谐波项。如果再继续迭代下去，还会出现更高阶的高次谐波项及更复杂的组合谐波项，具体的形式与非线性项的幂次有关。

此外，在后面我们还会证明，以上系统在频率为 $\omega$ 的谐波激励下，在响应 $x(t)$ 中还可能出现频率为 $\omega/3$ 的所谓“次谐波”。

这一节我们以具有立方项的非线性刚度的系统（即Duffing方程）为例，采用迭代方法与谐波平衡法研究了非线性振动系统在自由响应及谐波激励响应下的动态特征。我们指出并分析了这种非线性系统具有显然不同于线性系统的以下特点：

——其自由振动的频率与周期随振幅而变化，其振动周期的“等时性”不再成立；

——其谐波激励响应的振幅在某些频率处会出现跳跃现象，在频率扫描下振幅变化的“连续性”不再成立；

——其谐波激励响应中包括高次谐波、组合谐波与次谐波，响应频率与激励频率的“一致性”不再成立。

## § 12.8 摄动法

“摄动法”的基本思想是首先就一种比较基本、比较简单的情况，确定一个分析问题的基本解答，然后考虑与问题有关的参数的微小变化对基本解答所造成的影响，即所谓“摄动”。而这种影响是以级数的形式给出的，其目的是对基本解答进行修正。所取级数的项数愈多，修正就愈完善，其结果就愈精确；另一方面，公式也愈复杂，计算量也愈大。摄动法被用于解决拟线性系统的振动分析问题，其要点是将系统运动方程中的非线性项看成是一种微小的摄动项，而设法寻求此摄动项对相应的线性系统的解的影响与修正。

### 12.8.1 Lindstedt法

此法是比较典型的摄动法。我们仍考虑拟线性系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}). \quad (12.8-1)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时，以上系统成为一线性谐振子，其自由振动的解为 $x_0(t)$ ，其自由振动的频率即为系统的自然频率 $\omega_0$ 。当 $\varepsilon \neq 0$ ，但 $\varepsilon \ll 1$ 时，一方面其解由 $x_0(t)$ 变为 $x(t, \varepsilon)$ ，即 $x$ 与小参数 $\varepsilon$ 有关；另一方面 $x$ 的频率也由 $\omega_0$ 变为 $\omega(\varepsilon)$ ，亦与 $\varepsilon$ 有关。我们将 $x(t, \varepsilon)$ 与 $\omega(\varepsilon)$ 表示成为 $\varepsilon$ 的幂级数，

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots, \quad (12.8-2)$$

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (12.8-3)$$

以上两式右边的第一项分别表示相应的线性系统的振动位移及其振动频率，而其后的各项则分别表示由于微小非线性项 $\varepsilon f(x, \dot{x})$ 的存在对系统的解所造成的影响和修正，这里同时考虑到非

线性项对振动位移 $x(t)$ 和振动频率 $\omega$ 的双重影响。现在的问题在于,如果以上形式的解确实适合方程(12.8-1),那么 $x_1(t), x_2(t), \dots; \omega_1, \omega_2, \dots$ , 应如何确定? 以下就来分析这一问题。为便于后面的推导,这里先作变量代换:  $\tau = \omega t$ ,即以相位角 $\tau$ 来代表时间,于是对 $t$ 和对 $\tau$ 的导数有以下关系 $\dot{x} = dx/dt = \omega dx/d\tau = \omega x'$ , 这里撇号“'”表示对 $\tau$ 求导,于是运动方程(12.8-1)式成为

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \omega x'). \quad (12.8-4)$$

将 $f(x, \omega x')$ 在 $x_0, \omega_0, x'_0$ 附近展成幂级数,在展开时 $x, \omega$ 与 $x'$ 均需看成独立变量,

$$\begin{aligned} f(x, \omega x') &= f(x_0, \omega_0 x'_0) \\ &+ \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x'_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x'_0)}{\partial x'} dx' \\ &+ \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x'_0)}{\partial \omega} d\omega + \dots \end{aligned} \quad (12.8-5)$$

而由(12.8-2)式,

$$dx = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad (12.8-6)$$

上式对 $\tau$ 求导,

$$dx' = \varepsilon x'_1 + \varepsilon^2 x'_2 + \dots, \quad (12.8-7)$$

而由(12.8-3)式,

$$d\omega = \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots. \quad (12.8-8)$$

将(12.8-6)、(12.8-7)、(12.8-8)代入(12.8-5),得

$$\begin{aligned} f(x, \omega x') &= f(x_0, \omega_0 x'_0) + \varepsilon \left[ x_1 \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x'_0)}{\partial x} + x'_1 \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x'_0)}{\partial x'} \right. \\ &\quad \left. + \omega_1 \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x'_0)}{\partial \omega} \right] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots. \end{aligned} \quad (12.8-9)$$

将(12.8-3)式两边平方,

$$\omega^2 = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2. \quad (12.8-10)$$

将(12.8-2)式对 $\tau$ 求导两次,得

$$x'' = x''_0 + \varepsilon x''_1 + \varepsilon^2 x''_2 + \dots. \quad (12.8-11)$$

将(12.8-10)、(12.8-11)、(12.8-2)代入(12.8-4)式的左边,而

将(12.8-9)式代入(12.8-4)式的右边, 则两边都成为 $e$ 的幂级数. 比较 $e$ 的同次幂的系数, 有以下方程组:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 &= 0, \\ \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= f(x_0, \omega_0 x_0') - 2\omega_0 \omega_1 x_0', \\ \omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 &= x_1 \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x_0')}{\partial x} + x_1' \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x_0')}{\partial x'} \\ &+ \omega_1 \frac{\partial f(x_0, \omega_0 x_0')}{\partial \omega} - (2\omega_0 \omega_2 + \omega_1^2) x_0'' - 2\omega_0 \omega_1 x_1' \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (12.8-12)$$

以上方程组可以递归求解, 即先由第一式求出 $x_0$ , 这是线性谐振子的情况, 易知其解为

$$x(\tau) = A \cos \tau. \quad (12.8-13)$$

以上式代入(12.8-12)式的第二式, 即可解出 $x_1(t)$ , 再以求得的 $x_0$ 与 $x_1$ 代入第三式, 即可求出 $x_2(t)$ , 等等.

可是在求解以上方程组时, 还必须同时解决确定 $\omega_1, \omega_2, \dots$ 等参数的问题, 否则方程的解仍不能确定. 确定 $\omega_i (i=1, 2, \dots)$ 的原则如下: 由于 $x(\tau)$ 应该是自变量 $\tau$ 的周期为 $2\pi$ 的周期函数, 因而所有的 $x_i (i=0, 1, 2, \dots)$ 也必须具备同样的性质, 即

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau), \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (12.8-14)$$

按此, 即可确定 $\omega_i (i=1, 2, \dots)$ . 为了说明这种方法, 以下列举一具体的例子.

## 12.8.2 Duffing方程的摄动解法

将上节中的Duffing方程(12.7-3)式写成

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon x^3) = 0, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (12.8-15)$$

这里考虑的是自由振动( $F=0$ ), 而且参数之间有以下关系,

$$\varepsilon = \beta / \omega_0^2. \quad (12.8-16)$$

与(12.8-1)式比较, 有 $f(x, \omega x') = -\omega_0^2 x^3$ , 代入方程组(12.8-

12)式, 得

$$\begin{aligned}x_0'' + x_0 &= 0, \\x_1'' + x_1 &= -x_0^3 - 2\frac{\omega_1}{\omega_0}x_0'', \quad (12.8-17) \\x_2'' + x_2 &= -3x_0^2x_1 - \frac{1}{\omega_0^2}(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)x_0'' - 2\frac{\omega_1}{\omega_0}x_1'', \\&\dots\dots\end{aligned}$$

不失一般性, 我们假设

$$x_i'(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (12.8-18)$$

这一假设的意义是假定系统运动的初速度为零。引入一个初相 $\phi$ , 即令 $\tau = \omega t + \phi$ , 那么总能够选择时间 $\tau$ 的起点即 $\phi$ 值, 使上式得到满足。

在初始条件(12.8-18)下, (12.8-17)式的第一式的解即为(12.8-13)式, 代入第二式, 得

$$\begin{aligned}x_1'' + x_1 &= -A^3 \cos^3 \tau + 2\frac{\omega_1}{\omega_0} A \cos \tau \\&= \frac{1}{4} \frac{A}{\omega_0} (8\omega_1 - 3\omega_0 A^2) \cos \tau - \frac{1}{4} A^3 \cos 3\tau. \quad (12.8-19)\end{aligned}$$

推导上式时采用了三角函数积化和差与降阶公式(12.7-24)。现在仔细分析上式, 我们将其左边看成是一个自然频率为1的线性谐振子, 而右边是作用在其上的激振力。此激振力由两部分组成, 其中含有 $\cos \tau$ 的第一部分的激振频率也正好为1, 这种激振力必然使系统产生共振, 导致振幅无限上升, 这显然与(12.8-14)式的周期性条件相悖。为了避免这一点,  $\cos \tau$ 的系数必须为零, 即

$$\frac{1}{4} \frac{A}{\omega_0} (8\omega_1 - 3\omega_0 A^2) = 0, \quad (12.8-20)$$

由此即可解出

$$\omega_1 = \frac{3}{8} \omega_0 A^2. \quad (12.8-21)$$

这里我们由(12.8-14)式的周期性条件找到了确定 $\omega_1$ 的关系式。考虑到此式, (12.8-19)式成为



$$x_1' + x_1 = -\frac{1}{4}A^3 \cos 3\tau, \quad (12.8-22)$$

考虑到  $x_1'(0) = 0$ , 上式的解为

$$x_1 = \frac{1}{32}A^3 \cos 3\tau. \quad (12.8-23)$$

以(12.8-13)、(12.8-23)式代入(12.8-17)式的第三式, 得

$$\begin{aligned} x_2' + x_2 &= \frac{1}{128} \frac{A}{\omega_0} (256\omega_2 + 15\omega_0 A^4) \cos \tau \\ &+ \frac{21}{128} A^5 \cos 3\tau - \frac{3}{128} A^5 \cos 5\tau, \end{aligned} \quad (12.8-24)$$

基于同样的理由, 上式  $\cos \tau$  的系数亦应为零, 由此解出

$$\omega_2 = -\frac{15}{256}\omega_0 A^4, \quad (12.8-25)$$

而(12.8-24)式成为

$$x_2' + x_2 = \frac{21}{128} A^5 \cos 3\tau - \frac{3}{128} A^5 \cos 5\tau, \quad (12.8-26)$$

上式在  $x_2'(0) = 0$  的初始条件下的解为

$$x_2 = -\frac{21}{1024} A^5 \cos 3\tau + \frac{1}{1024} A^5 \cos 5\tau. \quad (12.8-27)$$

将(12.8-13)、(12.8-23)与(12.8-27)代入(12.8-2)式, 得二阶近似解

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\ &+ \varepsilon \frac{1}{32} A^3 \left(1 - \varepsilon \frac{21}{32} A^2\right) \cos 3(\omega t + \phi) \\ &+ \varepsilon^2 \frac{1}{1024} A^5 \cos 5(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (12.8-28)$$

而以(12.8-21)、(12.8-25)式代入(12.8-3)式, 得

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} A^2 - \varepsilon^2 \frac{15}{256} A^4\right). \quad (12.8-29)$$

以上两式中的  $A$  与  $\phi$  可由初始条件确定. 设  $\tau = \omega t + \phi$ , 而当  $\tau = 0$  时, 有初始时刻

$$t_0 = -\phi/\omega. \quad (12.8-30)$$

设对于时间 $t_0$ 的初始条件为

$$x(t_0) = A_0, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad (12.8-31)$$

其中第二个初始条件已在解题过程中满足，现在以(12.8-28)式代入第一个初始条件，得

$$x(t_0) = A + \varepsilon \frac{1}{32} A^3 \left(1 - \varepsilon \frac{21}{32} A^2\right) + \varepsilon^2 \frac{1}{1024} A^5 = A_0. \quad (12.8-32)$$

本来可以由上式解出 $A$ ，但考虑到上式本来只准确到 $\varepsilon$ 的二阶微量，因此不必解五次代数方程，而采用以下幂级数的近似解法。为此，将 $A$ 表示成 $\varepsilon$ 的幂级数，

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots. \quad (12.8-33)$$

这里 $A_1, A_2, \dots$ 是待定常数。将上式代入(12.8-32)式，得

$$\begin{aligned} & A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots + \varepsilon \frac{1}{32} (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)^3 \\ & \times \left[ 1 - \varepsilon \frac{21}{32} (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)^2 \right] \\ & + \varepsilon^2 \frac{1}{1024} (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)^5 = A_0 \end{aligned}$$

从上式中略去包含 $\varepsilon$ 的三次以上幂的项，并令等式两边 $\varepsilon$ 的一次幂与二次幂的项的系数相等，得

$$A_1 + \frac{1}{32} A_0^3 = 0, \quad A_2 + \frac{3}{32} A_0^2 A_1 - \frac{20}{1024} A_0^5 = 0.$$

联立以上两式，可解出

$$A_1 = -\frac{1}{32} A_0^3, \quad A_2 = \frac{23}{1024} A_0^5,$$

代回(12.8-33)式，得 $A$ 的二阶近似

$$A = A_0 - \varepsilon \frac{1}{32} A_0^3 + \varepsilon^2 \frac{23}{1024} A_0^5, \quad (12.8-34)$$

代入(12.8-28)式，得

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi) - \varepsilon \frac{1}{32} A_0^3 [\cos(\omega t + \phi) - \cos 3(\omega t + \phi)]$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{1}{1024} A_0^3 (23 \cos(\omega t + \phi) - 24 \cos 3(\omega t + \phi) + \cos 5(\omega t + \phi)).$$

(12.8-35)

以(12.8-34)式代入(12.8-29), 即可确定上式中的频率 $\omega$ 与初始条件 $A_0$ 的关系,

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \varepsilon \frac{3}{8} A_0^2 - \varepsilon^2 \frac{21}{256} A_0^4 \right).$$

(12.8-36)

上式中只保留了 $\varepsilon$ 的二次幂的项, 而略去了高次项.

由(12.8-30)式, 可以将初相 $\phi$ 与初始条件 $A_0$ 联系起来,

$$\phi = -\omega t_0 = -\omega_0 t_0 \left( 1 + \varepsilon \frac{3}{8} A_0^2 - \varepsilon^2 \frac{21}{256} A_0^4 \right),$$

(12.8-37)

特殊地, 如果 $t_0 = 0$ , 则有 $\phi = 0$ .

### 12.8.3 次谐波

现在我们以摄动法证明Duffing方程在谐波激励下确实可以产生次谐波响应, 如12.7.3小节所指出的那样.

我们考虑Duffing方程的强迫振动,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta' x^3 = F \cos \Omega t,$$

(12.8-38)

这里 $F$ 是谐波激励的幅值, 我们并不要求它是小量,  $\Omega$ 是激励频率. 我们来探讨系统存在频率为 $\Omega/3$ 的次谐波响应的可能性, 为此令

$$\omega_0^2 = \left( \frac{\Omega}{3} \right)^2 (1 + \varepsilon \alpha),$$

(12.8-39)

式中 $\varepsilon$ 是小参数( $\varepsilon > 0$ ).  $\alpha$ 是某一参数, 上式表示相应的线性系统(当 $\beta' = 0$ 时)的自然频率 $\omega_0$ 要求接近 $\Omega/3$ . 此外, 令

$$\beta' = \varepsilon \left( \frac{\Omega}{3} \right)^2 \beta,$$

(12.8-40)

上式以另一参量 $\beta$ 代替原来的参量 $\beta'$ . 以(12.8-39)、(12.8-40)

两式代入(12.8-38)式, 得

$$\ddot{x} + \left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 x = -\varepsilon \left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 (\alpha x + \beta x^3) + F \cos \Omega t, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (12.8-41)$$

我们将解写成 $\varepsilon$ 的幂级数的形式,

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (12.8-42)$$

以此式代入(12.8-41)式, 并比较等式两边 $\varepsilon$ 的同次幂的系数, 得以下微分方程组:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 x_0 &= F \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1 + \left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 x_1 &= -\left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 (\alpha x_0 + \beta x_0^3), \quad (12.8-43) \\ \ddot{x}_2 + \left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 x_2 &= -\left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 (\alpha_1 x_1 + 3\beta x_0^2 x_1), \\ &\dots \end{aligned}$$

以上方程可以递归求解, 但是 $x_i(t)$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ )都必须满足周期条件

$$x_i\left(\frac{\Omega}{3}t + 2\pi\right) = x_i\left(\frac{\Omega}{3}t\right), \quad i=1, 2, \dots \quad (12.8-44)$$

而初始速度为

$$\dot{x}_i(0) = 0, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (12.8-45)$$

在以上条件下, (12.8-43)式第一式的解为

$$x_0(t) = A_0 \cos \frac{\Omega}{3} t - \frac{9F}{8\Omega^2} \cos \Omega t, \quad (12.8-46)$$

将此式代入(12.8-43)第二式, 并采用三角函数降阶及积化和差公式, 得

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 x_1 &= -\left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 \left\{ A_0 \left[ \alpha + \frac{3}{4} \beta A_0^2 - \frac{3}{4} \beta A_0 \frac{9F}{8\Omega^2} + \frac{3}{2} \beta \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\frac{9F}{8\Omega^2}\right)^2 \right] \cos \frac{\Omega}{3} t - \left[ \alpha \frac{9F}{8\Omega^2} - \frac{1}{4} \beta A_0^3 + \beta A_0^2 \frac{9F}{8\Omega^2} + \frac{3}{4} \beta \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\frac{9F}{8\Omega^2}\right)^3 \right] \cos \Omega t - \frac{3}{4} \beta A_0 \frac{9F}{8\Omega^2} \left( A_0 - \frac{9F}{8\Omega^2} \right) \cos \frac{5\Omega}{3} t \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{4} \beta A_0 \left( \frac{9F}{8\Omega^2} \right)^2 \cos \frac{7\Omega}{3} t - \frac{1}{4} \beta \left( \frac{9F}{8\Omega^2} \right)^3 \cos 3\Omega t \} . \quad (12.8-47)$$

为满足周期性条件(12.8-44), 上式右边  $\cos \frac{\Omega}{3} t$  项的系数必须为零, 即

$$A_0^2 - \frac{9F}{8\Omega^2} A_0 + 2 \left( \frac{9F}{8\Omega^2} \right)^2 + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\beta} = 0,$$

由此式可解出

$$A_0 = \frac{1}{2} \frac{9F}{8\Omega^2} \pm \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{9F}{8\Omega^2} \right)^2 - 8 \left( \frac{9F}{8\Omega^2} \right)^2 - \frac{16}{3} \frac{\alpha}{\beta} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

如果(12.8-46)式的解(其中含有次谐波成分)确实存在, 则  $A_0$  当为实数, 上式方括号中的量不得为负, 故有

$$-7 \left( \frac{9F}{8\Omega^2} \right)^2 - \frac{16}{3} \frac{\alpha}{\beta} \geq 0, \quad (12.8-48)$$

此式只有当  $\alpha$  与  $\beta$  异号时才能成立. 考虑到(12.8-39)式, 可将上式写为

$$\omega_0^2 - \left( \frac{\Omega}{3} \right)^2 \geq -\frac{21}{16} \left( \frac{3F}{8\Omega} \right)^2 \varepsilon \beta, \quad \text{当 } \beta < 0, \alpha > 0, \quad (12.8-49)$$

$$\left( \frac{\Omega}{3} \right)^2 - \omega_0^2 \geq \frac{21}{16} \left( \frac{3F}{8\Omega} \right)^2 \varepsilon \beta, \quad \text{当 } \beta > 0, \alpha < 0, \quad (12.8-50)$$

此式表明为使频率为  $\Omega/3$  的次谐波响应成为可能, 三分之一激振频率  $\Omega/3$  需偏离相应的线性系统的自然频率  $\omega_0$  一个距离.

## § 12.9 时变系统

考察一个线性谐振子

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12.9-1)$$

此式唯一的一个参数  $\omega_0$  是常数, 它不随坐标值  $x$  变化, 从这个意义上讲, 这个系统是线性系统;  $\omega_0$  也不直接随时间  $t$  变化, 从这

个意义上讲，这个系统也是定常系统。对于线性系统的否定，是前面讲的非线性系统，可以表示为

$$\ddot{x} + P(x)x = 0, \quad (12.9-2)$$

例如， $P(x) = \omega_0^2(1 + \varepsilon x^2)$ ，上式就成为我们讲到过的Duffing方程，即(12.8-15)式。对于定常系统的否定，就是我们现在要讲的时变系统，可以表示为

$$\ddot{x} + P(t)x = 0, \quad (12.9-3)$$

当 $P(t) = \delta + 2\varepsilon \cos 2t$ 时，就得到著名的Mathieu方程

$$\ddot{x} + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t)x = 0. \quad (12.9-4)$$

时变系统的有关参数（如以上系统中的自然频率 $\omega_0$ ）在随时间变化，这种变化可能会导致系统失稳，发生振动，称为参数振动。

时变系统可以仍然是线性的，如(12.9-3)、(12.9-4)式均为线性系统。由于对时变系统的分析方法与对某些非线性系统的分析方法相似，例如，都可以应用摄动方法来分析，而且有些非线性方程可以变换为时变方程，因此我们将关于时变系统的基本知识也放在这一章中讲述。

这里还需说明一点，时变系统也是非自治系统，但非自治系统不一定是时变系统，定常系统受到外加激励也会成为非自治系统。

### 12.9.1 Mathieu方程及其意义

从许多工程实际问题会导致出Mathieu方程。试看图12.9-1所示的单摆，其支点可在铅垂方向运动。单摆的摆角与其支点的运动分别以 $\theta(t)$ 和 $u(t)$ 表示。如果支点固定不动，则单摆的运动方程为

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (12.9-5)$$

式中 $g$ 为地面的重力加速度。现在考虑支点的铅垂运动，其运动加速度可表示为 $\ddot{u}$ ，由此，整个系统随其支点以加速度 $\ddot{u}$ 相对于地面运动，犹如在加速上升的电梯中一样，会出现“超重”现象，于是重力加速度由 $g$ 变为 $g + \ddot{u}$ ，而运动方程成为

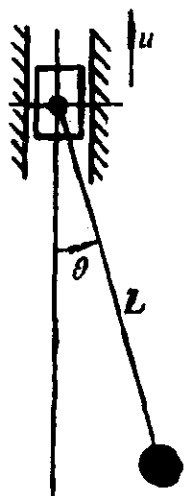


图 12.9-1

$$\ddot{\theta} + \frac{g + \ddot{u}}{L} \sin\theta = 0, \quad (12.9-6)$$

在 $\theta = 0$ 的附近将上式线性化，得

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{L} + \frac{\ddot{u}}{L} \right) \theta = 0. \quad (12.9-7)$$

假设 $u(t)$ 为谐波运动，得

$$u(t) = A \cos \omega t, \quad (12.9-8)$$

代入(12.9-7)式，

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{L} - \frac{A\omega^2}{L} \cos \omega t \right) \theta = 0. \quad (12.9-9)$$

令 $g/L = \delta$ ， $-A\omega^2/L = 2\varepsilon$ ，以变量 $x$ 代替 $\theta$ ，且取 $\omega = 2$ ，即得(12.9-4)式表示的Mathieu方程。这里需说明，以上取 $\omega = 2$ 并未丧失一般性，因为，如果 $\omega \neq 2$ ，则只要采用新的时间变量 $\tau = \omega t/2$ ，就可将支点运动的频率变为2。

## 12.9.2 Mathieu方程的稳定性

在方程(12.9-4)中如果没有 $2\varepsilon \cos 2tx$ 这一时变项，那么从物理意义上看，系统当然是稳定的。但是有了这一时变项以后，系统却有可能成为动态不稳定的，即微小的扰动可以导致迅速增大的振动。

Mathieu方程的稳定性完全由它的两个参数 $\delta$ 与 $\varepsilon$ 确定。图

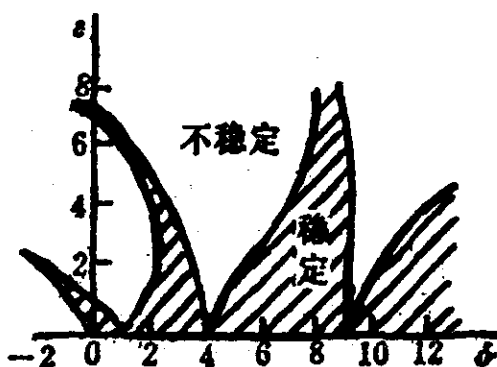


图 12.9-2

12.9-2给出了 $\delta$ - $e$ 平面上的稳定区域（阴影区）与不稳定区。图上各条曲线是稳定区与不稳区之间的边界，此边界线上的每一点代表一种等幅的周期运动。

将此图与前述单摆的例子结合起来分析，会发现两个令人惊奇的结论，一是单摆在 $\theta = 0^\circ$ （即下垂位置）附近可以变成不稳定，二是单摆在 $\theta = \pi$ 的附近（即倒置的单摆）可以稳定。出现以上“奇迹”的条件是其支点以合适的频率 $\omega$ 与振幅 $A$ 作简谐振动。为了说明以上两点，可看图12.9-2，在 $\delta > 0$ 的区域，有不稳定区，这说明顺置的单摆在某些条件下也是不稳定的；而该图在 $\delta < 0$ 的部分，也存在稳定区。读者可回溯到(12.9-6)式，从而看出 $\delta < 0$ 相当于在 $\theta = \pi$ 的邻域中线性化。因此，以上事实表明倒置的单摆在一定的条件下，也可以是稳定的。

## 思考题

1. 弄清楚以下各组概念之间的差别与联系：
  - 1) 位形空间与状态空间，广义坐标与状态变量，
  - 2) 运动方程与状态方程，
  - 3) 平衡点与相空间的原点，
  - 4) 平衡与稳定，
  - 5) Liapunov意义下的稳定性；平衡点邻域的稳定性与轨道稳定性，
  - 6) 自治系统，保守系统与定常系统，
  - 7) 结点，鞍点，焦点与中心，
  - 8) 保守系统的封闭轨线与非保守系统的极限环。
2. 与线性系统比较起来，非线性系统有哪些特点？
3. 我们可以说一个线性系统是稳定的，或是不稳定的，但是为何不能笼统地说一个非线性系统的稳定性？
4. (12.7-19)、(12.7-20)式分别给出了有阻尼Duffing方程的幅频



特性与相频特性，而对于无阻尼Duffing方程，为什么只由(12.7-9)式给出其幅频特性，为何未提到其相频特性？

## 习 题

12-1 一质量为 $m$ 的质点，置于长为 $2l$ 的张紧的钢丝中间，如图12-1所示。设钢丝的初张力为 $T_0$ ，钢丝的横截面面积为 $A$ ，弹性模量为 $E$ 。试写出质点在大范围中自由振动的微分方程。

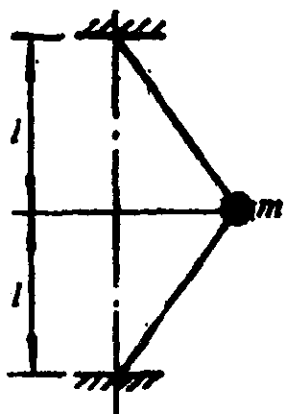


图 12-1

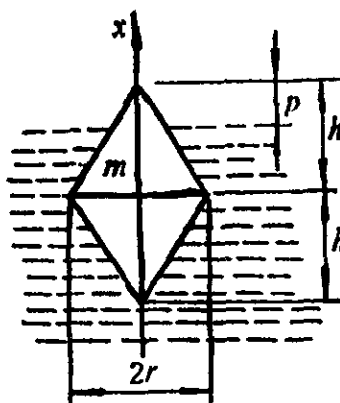


图 12-2

12-2 一物体由两个正圆锥组合而成，如图12-2所示，它们的底面半径为 $r$ ，高为 $h$ 。整个物体的质量为 $m$ 。该物体浮在水面，露出水面的高度为 $p$ 。试求物体在铅垂方向自由振动的运动方程。

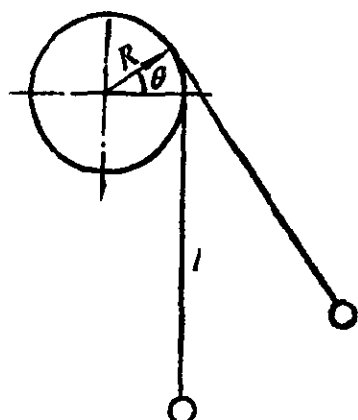


图 12-3

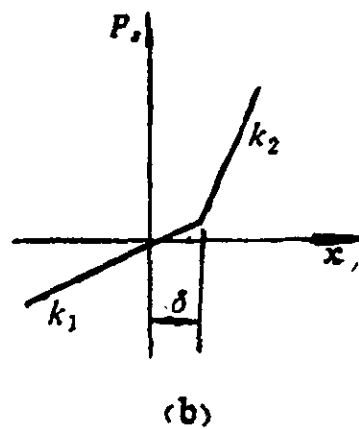
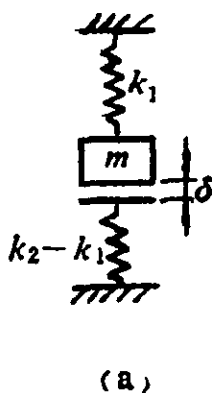


图 12-4

12-3 一单摆的摆绳绕在一半径为  $R$  的圆柱上, 如图12-3所示。当摆锤处于铅垂向下的位置时, 摆绳长为  $l$ 。试推求其运动方程。

12-4 试写出图12-4所示非对称分段线性系统自由振动的运动方程。

12-5 具有粘滞阻尼的摆的运动微分方程可写成下列形式:

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \sin\theta = 0,$$

试将该式改写成状态方程, 并确定其平衡点。

12-6 考虑由如下运动微分方程所描述的质量弹簧系统

$$\ddot{x} + x - \frac{\pi}{2} \sin x = 0,$$

试将该式改写成状态方程, 并确定其平衡点。

12-7 试用等倾线法绘制图 12-7 所示系统对应于初始条件  $x(0) = 2.5$ ,  $\dot{x}(0) = 3.2$  的一条相轨迹。图中弹簧与阻尼器均为线性的, 且  $k/m = 1$ ,  $c/m = 0.2$ ,  $\delta = 1$ 。

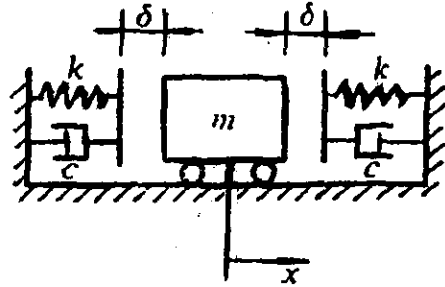


图 12-7

12-8 用等倾线法绘出 Van Der Pol 方程

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \mu = 0.1$$

的极限环。

12-9 试采用线性化模型分析习题12-1中系统的平衡点的类型及其稳定性。

12-10 以线性化模型分析习题12-5中系统的平衡点的类型及其稳定性。

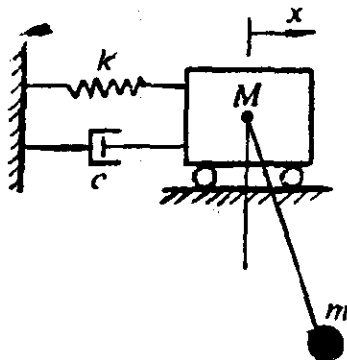


图 12-13

12-11 试判断以下系统的各平衡点的类型及其稳定性。

$$\ddot{x} - (0.1 - 3\dot{x}^2)\dot{x} + x + x^2 = 0$$

12-12 试求出(12.3-16)式的约当形所对的平衡点附近的轨线方程, 并绘出其相图。

12-13 试导出图12-13所示系统的运动方程, 弹簧力是非线性的:  $F$ 。

$= k[x - (\pi/2)\sin x]$ , 而阻尼是线性粘滞的. 识别系统的平衡点, 并用 Routh-Hurwitz 判据判别其稳定性.

12-14 对习题12-6的运动方程积分, 求出轨线方程. 注意可以求得封闭形式的解. 引入一个积分常数, 使在原点的能量  $E$  等于零. 画出对应于  $E = -0.25, 0$  与  $0.5$  的轨线, 并讨论各种运动形式.

12-15 对习题12-6的系统, 作出单位质量的弹簧力  $f(x)$  对  $x$  的曲线图及势能  $V(x)$  对  $x$  的曲线图. 绘出总能量  $E$  等于常数的各等高线. 计算对应于分界线的能量.  $E$  值很大时, 等高线是什么形状?

12-16 如果势能曲线为  $V(x) = 8 - 2\cos\pi x/4$ , 试绘出  $E = 6, 7, 8, 1^2$  的各条轨线, 并讨论这些曲线.

12-17 设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

试作坐标变换:  $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$ , 以极坐标  $r$  与  $\theta$  表示轨线的微分方程, 加以积分, 将  $r$  表示为  $\theta$  的函数. 证明  $r = 1$  是系统的一个极限环. 对应于  $r < 1$  与  $r > 1$  的初值, 作出在  $r = 1$  的邻域中的几条轨线, 并且用此法证实  $r = 1$  代表一稳定的极限环. 判断原点的类型及其稳定性.

12-18 试求图12.6-1所示分段线性系统的自由振动频率  $\nu_n$  的精确解, 设振幅  $a > x_0$ . 将所得结果与近似解(12.6-43)式相比较.

12-19 试求题12.4中系统的振幅  $a$  与其自由振动频率  $\nu_n$  之间的关系的准确关系.

12-20 试以迭代法(或谐波平衡法)证明(12.5-1)式表示的 Van Der Pol 方程存在一个稳定的周期解:  $x = 2\cos t$ .

12-21 试证明图12.7-4中  $A - \omega/\omega_0$  平面上的曲线与横轴所围成的区域具有这样的性质: 在一个振动周期中, 系统从激振源吸收的能量大于系统内的阻尼所消耗的能量. 而在此区域之外的其它部分, 则正相反. 曲线上的点则代表能量的吸收与消耗相平衡这一种情况. 在此基础上, 试说明图中实线段所表示的等幅谐波响应是稳定的, 而虚线则表示一种不稳定的响应.

12-22 试以 Lindstedt 法求以下系统的二阶近似的周期解,

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x^2, \quad \varepsilon \ll 1.$$

令初始条件为  $x(0) = A_0, \dot{x}(0) = 0$ .

12-23 试以 Lindstedt 法求 Van Der Pol 方程的一阶近似的周期解. 令  $\varepsilon = 0.2$ , 在相平面上给出此周期解的轨线.

## 第十三章 自激振动

在前面主要讲了自由振动与强迫振动这两种振动，本章将讲述工程中常见的自激振动，说明其现象、特点、机理与数学模型，并述及自激振动的防治和应用。

### § 13.1 自激振动的现象和特点

前一章图12.5-1与图12.5-2以平衡点和极限环说明了自激振动系统的基本特点。这里我们对它作进一步的说明与分析。

我们知道，自由振动是由一定的初始条件激起的，而强迫振动则是由某种持续的过程激励激起的。那么“自激振动”是不是就不需要外界激励，而自行起振呢？让我们看图12.5-1(a)，系统的状态点如果停留在原点，它是不可能自行离开该点的，因为原点是平衡点。可是如果任何偶然的外界扰动，使状态点略为偏离原点（哪怕是偏离一点点），那么系统本身在原点附近的不稳定性会立即迫使状态点沿螺旋线迅速偏离原点，即产生激剧上升的振动。因此，自激振动的发生需要两个条件：第一，系统在平衡点附近的不稳定性；第二，迫使系统的工作点略为偏离平衡点的外界扰动。由此可见，自激振动并非不需要外界的激励。其实，应该说自激振动是一种“扰激振动”，因为它总是发端于某一个偶然的外界扰动。可是由于这个扰动的大小与形式无关紧要，而现实的世界中又总是充满了各种各样的扰动，因此上述第二个条件实际上是不成问题的条件，而只要第一个条件一旦形成，即只要

系统本身在平衡点附近的不稳定性一旦构成，则完全无需等待，立即就会有某一个偶然的扰动闯过来，引发急剧上升的振动。正因为如此，我们对自激振动进行研究的着眼点与方法，就与对自由振动和强迫振动的研究不同：我们不去研究引发振动的那个偶然扰动的大小和形式；也不去探讨这种扰动与它所激起的振动之间的关系，而是着重研究形成系统自身的不稳定性的机理与规律。

图12.5-1(b)所描述的系统也是一种自激振动系统，但是与上述系统不同，它要求激发振动的扰动具有一定大小，即其幅度需超过图中的虚线圆圈，才能激发起自行上升的振动。这种情况称为“硬自激振动”，其中虚线圆圈的半径称为激振“阈值”，而图12.5-1(a)所示的情况则称为“软自激振动”。

自激振动一旦被激起，其振幅会迅速上升，这一点与自由振动正好相反，在后一种情况下，振幅会由于阻尼的存在而不断衰减。这表明在自激振动系统中存在着一种与阻尼的作用正好相反的因素在起作用，后面我们会讲到，这种因素即是所谓的“负阻尼”。

除了负阻尼以外，多自由度系统的各个模态之间的耦合也可能成了一种助长振动的因素。

自激振动的维持与扩大并不需要持续的外加交变激励，这使它区别于强迫振动。自激振动是靠系统内部各部分之间的相互作用，而得以维持与扩大的。在自激振动系统内部一定存在某种反馈关系，以实现各部分之间的相互作用。其机理，我们在后面会详细讲述。

自激振动在被激发以后，其振幅的上升当然不可能是无限的。当其振幅上升到一定的程度以后，会自行稳定下来，而形成一种稳定的周期振动。值得注意的是，这种周期运动的形式与周期是由系统本身的特点决定的，而与振动开始被激发的初值无关，如图12.5-2(a)、(b)所示。这再次说明了激起自激振动的干

扰的具体形式并不重要。

稳态自激振动的轨线与周期，与其运动的初始条件无关，这是它与无阻尼自由振动的重要差别。我们知道，在后一种情况下，运动的轨线或者其周期（如果系统是非线性的话），是由初始条件决定的。

自激振动的这种振幅自稳定性是由于系统中的某些非线性因素的作用而发生的。为描述与解释这种现象，需要非线性模型与非线性理论。而如果只需研究系统开始发生自激振动的条件，即判明“稳定性阈”，那么采用线性模型即可解决问题。

最后，还需说明，自激振动并不是“自给振动”，在能量上它并不能“自给自足”，而需依赖于外界的能量供给，以补充由于无可避免的阻尼所造成的能量耗散，并扩大振幅。由此可见，自激振动系统一定具有某种机构或机制，以便从外界摄取能量，来维持或扩大其振动。我们知道，自由振动与强迫振动也都需要能源，前者是将开始就贮存在系统中的机械能转化为交变的振动，而后者是将交变激励的能源转化为交变的振动。自激振动与以上两者均不同，它是将一种“直流”的能源转化成为交变的振动。从这个意义上讲，自激振动系统很像一个将直流电转化成为交流电的“变流器”。

综上所述，我们知道一个自激振动系统一般应该由振动体、能源、调节能源供给的“阀”，以及按照振动体的振动反过去控制“阀”的能量供给的反馈机构，如图13.1-1所示。

人们所设计与制造的许多种装置或机械实际上是各种各样的

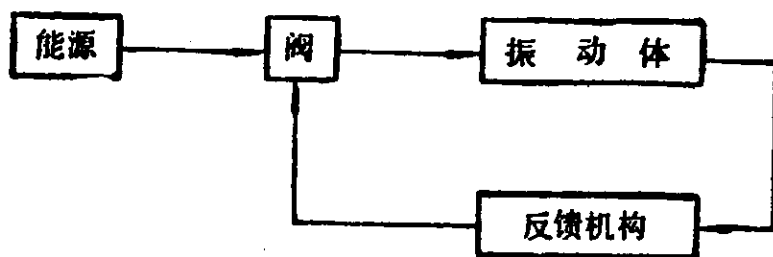


图 13.1-1

自激振动系统。图13.1-2是老式的蒸汽机的示意图，读者试分析该图所示的工作原理，并与图13.1-1相对比，可以看出这种机器确实包含振动体、阀、能源与反馈机构等组成部分，并且不难了解各部分的作用及其间的相互关系。

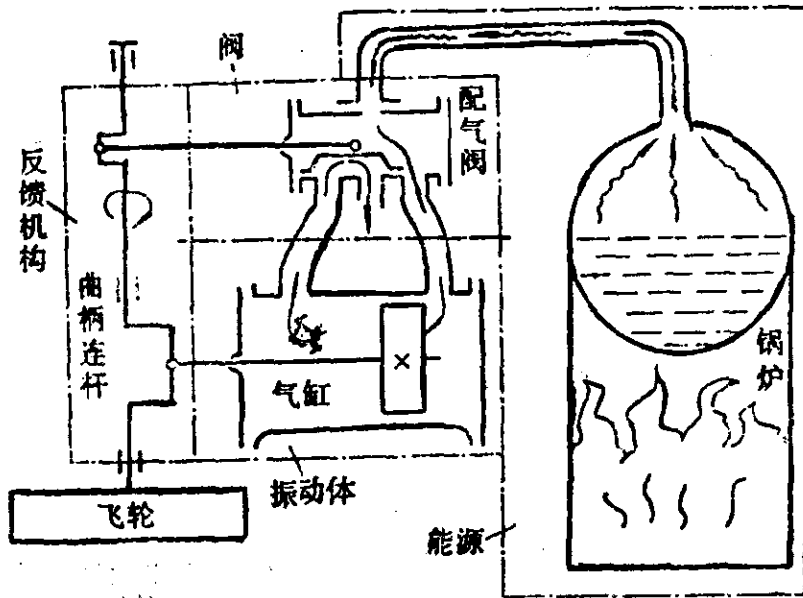


图 13.1-2

其实，内燃机、直流电动机、风动工具、钟表的擒纵机构，以及电铃等也都是某种自激振动系统。这些系统都是人们有意设计与安排的，其目的是利用一种“直流”的或单向作用的能源来产生交变的或往复运动（或通过连杆机构将这种往复运动转化成旋转运动）。可以说这是自激振动原理的积极运用。

工程中的自激振动更多的是由于系统内部自然形成的“内在反馈”所引起的，这种自激振动又称为“颤振”。它一旦产生，往往对机器或设备的工作造成不利影响。因此，对这类自然形成的自激振动，有必要加以认真的研究与控制。可是对这类自激振动的机理的揭示以及对它的控制往往比对强迫振动的研究和控制要困难得多，其原因在于强迫振动一定有某个或某些“激振源”在起作用，只要追根求源，就不难加以抑制。而自激振动并无外界的交流激振源，其振动是由于内部原因，即内在反馈引起的。

这些内在反馈寄生于机器或装置的正常运行过程中，要想揭示它、研究它与控制它，一般比较困难。

本章着重讲述与分析这种由于内在反馈而招致的自激振动，我们将讲述由于速度反馈、位移延时反馈与模态耦合引起的三类自激振动，并以导轨爬行现象和金属切削机床的自激振动为例，说明如何分析内在反馈，建立数学模型。

## § 13.2 由于速度反馈引起的自激振动

### 13.2.1 速度反馈与负阻尼

我们考虑一个单自由度振动系统，其所受到的激振力  $F$  又受到其自身振动速度的控制，即成为振动速度  $\dot{x}$  的函数  $F(\dot{x})$ 。这种系统叫做速度反馈系统，其框图如图 13.2-1 所示。该图由“振动体”与“力的控制机构”两个部分组成，其中后者即为上述的“反馈机构”。这里因为是针对力学系统而言，故改写成力的控制机构。该系统的运动方程可写成

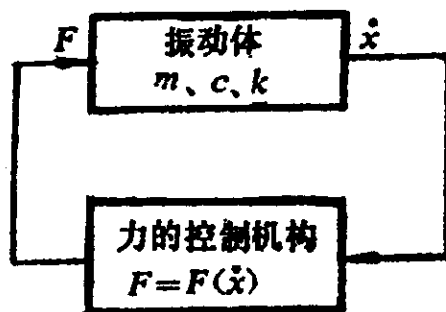


图 13.2-1

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(\dot{x}). \quad (13.2-1)$$

为了说明这种系统会失去稳定性而产生自激振动，让我们来考察一个比较简单的情况，即令阻尼系数  $c = 0$ ，且假定

$$F(\dot{x}) = F_0 \text{sign } \dot{x}, \quad (13.2-2)$$

式中  $F_0$  为常数， $\text{sign}(\dot{x})$  为符号函数。当  $\dot{x} > 0$  时， $\text{sign} = 1$ ；当  $\dot{x} < 0$  时， $\text{sign}(\dot{x}) = -1$ ；当  $\dot{x} = 0$  时， $\text{sign} = 0$ 。这表明此系统受



到的激励是一个大小恒定的力，而力的方向总是与其振动方向相同，如图13.2-2中的单摆的受力情况。显然，此系统必然会不断地从推力中获取能量，而愈振愈猛。

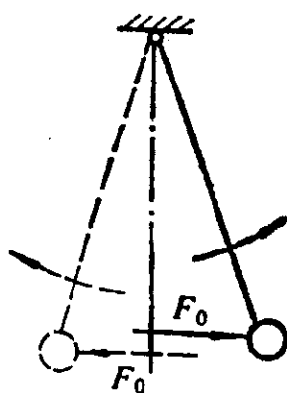


图 13.2-2

读者可能会认为，这不就是第二章讲述的“强迫振动”吗？而振幅的扩大则正是强迫振动中的“共振”效应，因为为了使推力  $F(\dot{x})$  与  $\dot{x}$  同步，那么激振力的基频必然正好等于系统的

自然频率  $\omega_n$ 。这种说法并不正确，因为它忽略了这种系统的一个至关重要的特征：这里的激振力  $F$  是受到它所激起的振动运动的控制的， $F$  既是振动的原因，也是振动的后果。如果系统本身不振动，即  $\dot{x} \equiv 0$ ，那么就有  $F(\dot{x}) = F_0 \text{sign}(\dot{x}) \equiv 0$ ；即不可能有这个交变的激振力。因此，我们不能将激振力  $F(\dot{x})$  与振动系统分开，即不能将之视为一种“外力”，而必须将被激励的振动系统以及由系统的运动所控制的激振力作为一个整体来加以研究。

现在来研究  $F(\dot{x})$  的比较一般的情况，我们假定它可在  $\dot{x} = 0$  的附近展成幂级数，

$$F(\dot{x}) = F(0) + \frac{dF(0)}{d\dot{x}} \dot{x} + \frac{1}{2!} \frac{d^2F(0)}{d\dot{x}^2} \dot{x}^2 + \dots \quad (13.2-3)$$

如前所述，如果我们的目的仅限于判断系统开始发生自激振动的条件，而不在于描述自激振动发生与发展的全过程，那么可以认为  $\dot{x}$  很小，因而可略去上式中  $\dot{x}$  的高次项，而仅取其一次项。此外，上式中第一项为一恒力，对系统的振动无影响，故可略去。

于是，有

$$F(\dot{x}) = -c' \dot{x}, \quad (13.2-4)$$

式中

$$-c' = \frac{dF(0)}{d\dot{x}}. \quad (13.2-5)$$

将(13.2-4)式代入(13.2-1)式, 得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -c'\dot{x},$$

再移项, 得

$$m\ddot{x} + (c + c')\dot{x} + kx = 0. \quad (13.2-6)$$

这是一个单自由度线性系统自由振动的运动方程, 可是与第一章讲述的系统不同, 这个系统所受到的阻尼由两部分组成: 一部分是系统本身的阻尼, 如第一章所述, 其阻尼系数当然是正的, 这是一种通常意义下的阻尼, 即是对振动运动的一种阻碍, 这种阻尼称为“正阻尼”; 另一部分是由于速度反馈而造成的等效阻力, 其阻尼系数 $c'$ 可正可负, 需视函数 $F(\dot{x})$ 的特点而定。由(13.2-5)式, 如果在 $\dot{x}=0$ 附近,  $F(\dot{x})$ 是 $\dot{x}$ 的增函数, 则 $c' < 0$ , 这时称等效阻尼是一种“负阻尼”。当这种负阻尼足够大, 以致超过系统本身的正阻尼时, 系统的总的阻尼可以变成负的, 即

$$c + c' < 0. \quad (13.2-7)$$

负阻尼实际上是一种“助力”, 它不仅不会阻碍系统的振动, 反而会推波助澜地扩大系统的振动。

令

$$\omega_0^2 = k/m, \quad \xi = (c + c')/(2m), \quad (13.2-8)$$

(13.2-6)式成为

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (13.2-9)$$

式中 $\xi$ 为系统的总的阻尼率, 与第一章的情形不同, 这里阻尼率 $\xi$ 不仅可以为正、为零, 还能为负。由公式(1.4-12)知上式的通解为

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \psi). \quad (13.2-10)$$

对应于 $\xi > 0$ ,  $\xi = 0$ 与 $\xi < 0$ 三种情况的振动的时间历程分别如图13.2-3(a)、(b)、(c)所示。图(a)与(b)的两种响应已在第一章中讲述, 它们分别为有阻尼( $\xi > 0$ )与无阻尼( $\xi = 0$ )两种情况下自由振动的时间历程, 而图(c)则是这里讲的具有负阻尼( $\xi < 0$ )的系统自由振动的时间历程。这三种情况下的系统分别称为稳定的、临

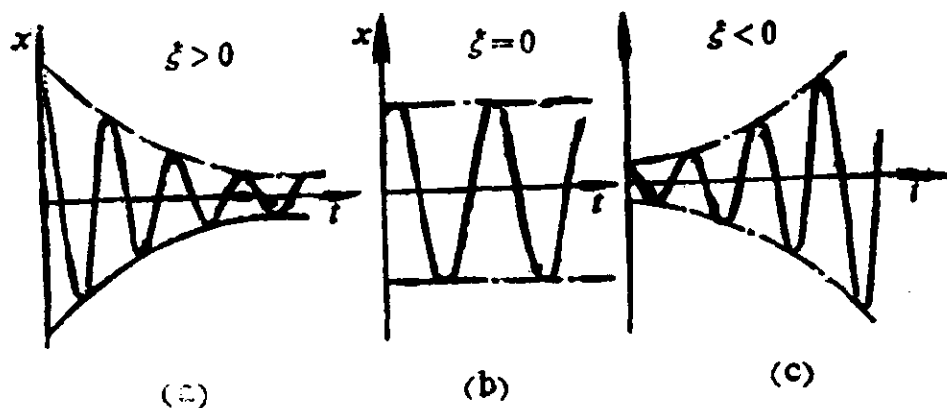


图 13.2-3

界的与不稳定的。一个具有负阻尼的系统之所以是不稳定的，是由于它处在一种“一触即发”的状态下，只要有任何一个扰动，激起哪怕是非常微小的初始振动（位移或速度），也会由于负阻尼之助，而不断扩大，发展成为强烈的自激振动。

以下我们通过工程中常见的具体事例来说明由于速度反馈而引起的自激振动。

### 13.2.2 爬行现象及其机理

金属切削机床等工作机械的导轨副可看成是一个刚体被驱动在另一个支承刚体表面上滑动，其经过简化以后的示意图如图 13.2-4(a)，图中  $R$  为作用在驱动点上的力，而  $v_0$  为驱动速度，

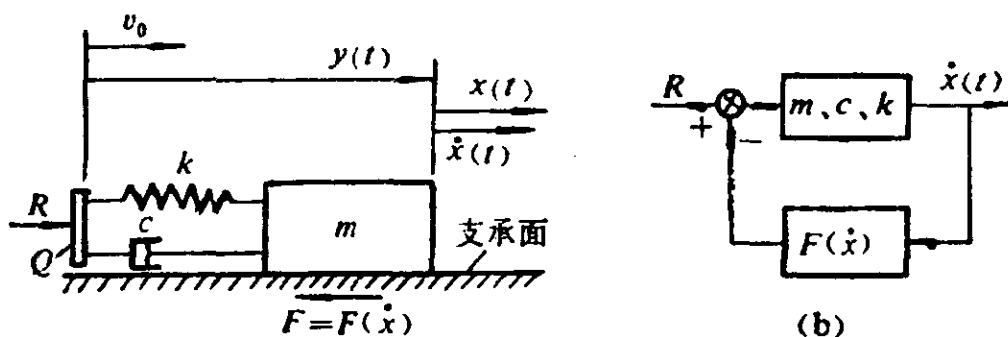


图 13.2-4

$\dot{x}(t)$ 为被驱动刚体的运动速度， $k$ 与 $c$ 分别为驱动链的刚度与阻尼。在润滑不太充分的条件下，即使驱动点处的运动速度 $v_0$ 是均匀的，被驱动的质块的运动速度 $\dot{x}(t)$ 也是波动的，时快时慢，甚至时停时续。这种现象称为“爬行”，它是一种自激振动，对机器的工作精度与寿命可造成不利影响。

爬行的主要原因是由于质块的运动速度 $\dot{x}(t)$ 影响质块与其支承面之间的摩擦力 $F(\dot{x})$ ，而后者又反过来影响质块的运动，因而形成速度反馈。其框图如图13.2-4(b)所示，其中上面一个方框是振动体，而下面一个方框是力的控制机构。

以下我们先定性分析爬行产生的原因，然后给出并分析其数学模型。

### 1. 爬行的物理根源

在润滑不充分的情况下，刚体之间的摩擦力 $F$ 与其间的相对滑动速度 $\dot{x}$ 之间的关系大致如图13.2-5所示。图中 $F_0$ 是相对滑动速度为零时的最大静摩擦力。当滑动开始以后，摩擦力会随着滑动速度的上升而下降，这是由于润滑条件得到改善的缘故。当相对滑动速度增加到一定程度以后，形成油膜，摩擦力性质转变为液体的内摩擦，因而摩擦力又会随相对滑动速度的上升而增加。图中 $o-p$ 区域和 $p-q$ 区域分别称为摩擦力的下降特性区域与上升特性区域。

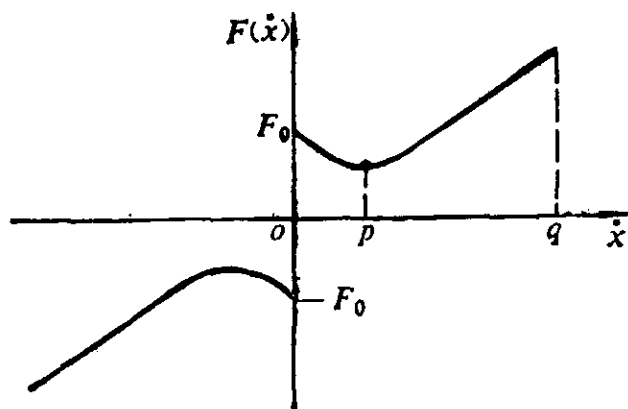


图 13.2-5

以下我们按图13.2-6来定性分析图13.2-4(a)中质块 $m$ 的运动规律。假定驱动点处的移动速度 $v_0$ 为恒量，且摩擦力在其下降特性区域中变化，此外，还略去阻尼 $c$ 的作用。图13.2-6(a)表示质块滑动速度 $\dot{x}(t)$ 的变化规律，图(b)则表示弹簧恢复力 $F_s$ （亦即质块 $m$ 受到的推力，见图中实线）与摩擦力 $F$ （虚线）的变化规律。此两图应对照起来分析。以下分几个阶段来说明：

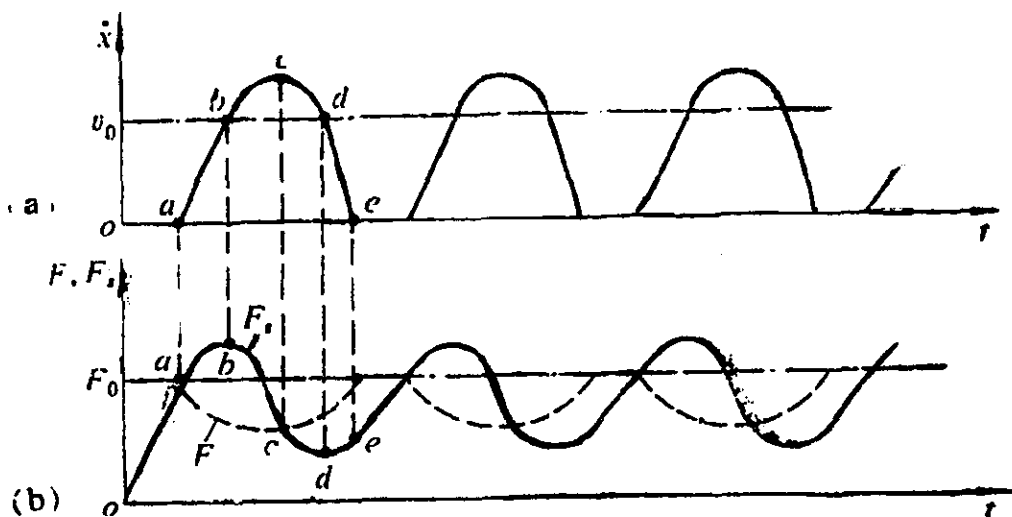


图 13.2-6

(1)  $\widehat{oa}$ 段：驱动点以速度 $v_0$ 匀速前进，压缩弹簧，而弹簧的恢复力 $F_s$ 亦均匀上升。但在此阶段中， $F_s$ 小于静摩擦力 $F_0$ ，故质块不运动，即 $\dot{x} = 0$ 。在此阶段的终点 $a$ 处， $F_s = F_0$ 。

(2)  $\widehat{ab}$ 段：弹簧对质块的推力 $F_s$ 达到并超过静摩擦力，质块开始加速运动， $\dot{x}$ 上升，而这又进一步导致动摩擦力下降。另一方面，在此阶段中，质块的运动速度小于驱动点的运动速度 $v_0$ ，故弹簧继续被压缩，恢复力 $F_s$ 进一步上升。综上所述，质块运动速度 $\dot{x}$ 以变加速方式上升。至 $b$ 点， $\dot{x}$ 达到驱动速度 $v_0$ 。这时弹簧停止压缩，弹簧恢复力 $F_s$ 达到其极大值。

(3)  $\widehat{bc}$ 段：由于弹簧恢复力 $F_s$ 仍大于当时的动摩擦力 $F(\dot{x})$ ，质块继续作加速运动。但由于 $\dot{x}$ 超过 $v_0$ ，弹簧的压缩量开始下降，弹簧恢复力 $F_s$ 亦下降（但仍大于摩擦力 $F$ ），质块的加

速度开始减小， $\dot{x}$  上升的趋势减缓，与此同时，动摩擦力  $F$  仍在随着  $\dot{x}$  的上升而下降。至  $c$  点，达到  $F_s = F$ ，质块受到的合力为零，加速度为零， $\dot{x}$  达到其最大值。

(4)  $\widehat{cd}$  段：由于  $\dot{x}$  仍大于  $v_0$ ，故弹簧压缩量及其恢复力均继续减小，弹簧对质块的推力小于摩擦力，质块的运动变为减速运动。至  $d$  点， $\dot{x} = v_0$ ，弹簧压缩量停止变化， $F_s$  达到其最小值。

(5)  $\widehat{de}$  段：由于  $F_s < F$ ，质块速度  $\dot{x}$  继续下降，至  $e$  点， $\dot{x} = 0$ ，质块静止下来， $F(t)$  又上升到静摩擦力  $F_{c0}$ 。而另一方面，在此阶段由于  $\dot{x} < v_0$ ，故弹簧又开始被压缩， $F_s$  有所回升。

此后，由于驱动点继续匀速前进，而质块已停下不动，于是如  $\widehat{oa}$  段一样，同样的循环再度重复。

从整个过程来看，质块的运动是在平均速度  $v_0$  之上叠加了一个往复运动，此即自激振动。显然，这一振动并不是由于外界的周期激励造成的，因为驱动点受到的是匀速驱动。从以上分析可知，这种自激振动显然是由于速度反馈所造成的。

## 2. 平衡点及其稳定性

值得注意的是，在上例中只有当相对滑动速度  $\dot{x}$  落在摩擦力的下降特性区域（即图 13.2-5 中的  $o-p$  区域），才有可能出现“爬行”现象。在其上升特性区域（图中  $p-q$  区域），是不会出现“爬行”的。为了说明这一差异，让我们来仔细分析一下图 13.2-7 中  $A$ 、 $B$  两个工作点的情况。这两个工作点所对应的相对滑

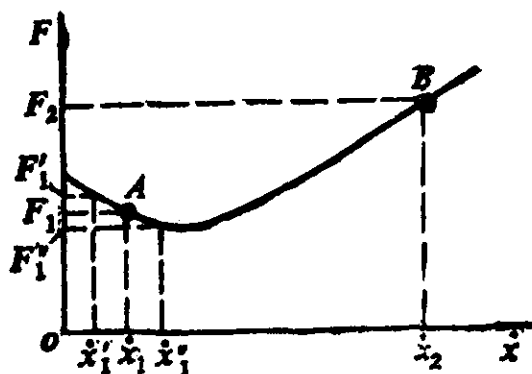


图 13.2-7

动速度及动摩擦力分别为  $\dot{x}_1$ 、 $\dot{x}_2$  与  $F_1$ 、 $F_2$ 。设对于  $A$ 、 $B$  两个工作点所选用的驱动点的移动速度分别为  $v_{01} = \dot{x}_1$ 、 $v_{02} = \dot{x}_2$ ，且给弹簧  $k$  (图13.2-4(a)) 预设的压缩量分别是  $\delta_1 = F_1/k$  及  $\delta_2 = F_2/k$ ，因此在这两种情况下，弹簧的恢复力为  $F_{s1} = k\delta_1 = F_1$ 、 $F_{s2} = k\delta_2 = F_2$ ，即正好等于摩擦力。于是在  $A$ 、 $B$  两个工作点上，质块  $m$  受到的合力亦为零，加速度亦为零。在此种布置下， $m$  会一直以速度  $\dot{x}_1 = v_{01}$  或  $\dot{x}_2 = v_{02}$  匀速运动下去。如果没有外界的干扰，从理论上讲，系统会一直在工作点  $A$  或  $B$  上运行下去，质块  $m$  的运动速度及其所受到的摩擦力与弹簧恢复力均不会变化。由此看来， $A$  与  $B$  这两个点都可以成为系统的平衡点，它们似乎没有什么区别。其实不然，这两个工作点在抗干扰的能力上却有着原则的差别。让我们先看  $A$  点，如果由于任何偶然因素的影响（读者须记住，这些因素虽属偶然，但总是不可避免的，可以说这是包含着必然性的偶然），使质块的移动速度  $\dot{x}_1$  略为降低了一点，而成为  $\dot{x}'_1$ ，于是摩擦力  $F_1$  相应上升为  $F'_1$ ，质块运动受到的阻力上升，而这一因素又更加促使  $\dot{x}_1$  下降，……如此反复循环影响，最后  $\dot{x}_1$  可能降到零（当然，由于弹簧的不断压缩，质块还是会再度运动起来）。反之，若  $\dot{x}_1$  因偶然干扰而上升成为  $\dot{x}'_1$ ，则摩擦力降为  $F'_1$ ，而这一因素又更加促使  $\dot{x}_1$  上升，……如此反复影响，可以使  $\dot{x}_1$  上升到相当的数值（当然，由于弹簧的不断拉伸，最后还是限制  $\dot{x}_1$  的上升）。由此可见，在摩擦力的下降特性区域中的  $A$  点是一个不稳定的平衡点，系统不可能在该点所代表的状态下稳定运行，而必然会激起自激振动，即出现爬行现象。

若将同样的分析施之于图13.2-7上的  $B$  点，可以看出，若因偶然因素使  $\dot{x}_2$  偏离原来的数值，则会引起一个因素，将之拉回到原有数值。具体的分析请读者自行完成。因此，处在摩擦力的上升特性区域中的  $B$  点是稳定的平衡点。在该工作点上运行的系

统可以不致产生爬行现象。

### 13.2.3 爬行的数学模型

#### 1. 运动方程

对图13.2-4(a)中的质块列出运动方程，有

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - v_0) + k(x - v_0 t) = -F(\dot{x}), \quad (13.2-11)$$

上式等号右端的负号，是因为在图中 $F$ 的正向与 $x$ 的正向的规定相反。

设系统的工作点为图13.2-8中的 $o'$ 点，为了研究以上系统围绕工作点的波动，我们将坐标原点移到工作点上，即进行以下的坐标平移变换，

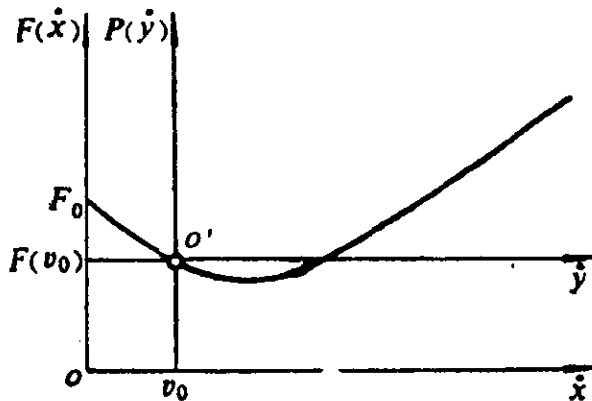


图 13.2-8

$$\dot{y} = \dot{x} - v_0, \quad (13.2-12)$$

$$P(v_0 + \dot{y}) = F(\dot{x}) - F(v_0). \quad (13.2-13)$$

积分(13.2-12)式，得

$$y = x - v_0 t - D, \quad (13.2-14)$$

式中 $-D$ 为积分常数。将以上三式代入(13.2-11)式，得

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + kD = -P(v_0 + \dot{y}) - F(v_0),$$

令积分常数 $D = -F(v_0)/k$ ，有



$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -P(v_0 + \dot{y}). \quad (13.2-15)$$

这里  $\dot{y}$  是质块  $m$  的移动速度围绕其平均速度  $v_0$  的波动量，而  $P(v_0 + \dot{y})$  则是质块与其支承面之间的摩擦力围绕其均值  $F(v_0)$  的波动量。我们假定  $\dot{y} \ll v_0$ ，因而可在  $v_0$  的附近将  $P(v_0 + \dot{y})$  展成幂级数，

$$P(v_0 + \dot{y}) = P(v_0) + \frac{dP(v_0)}{d\dot{y}} \dot{y} + \frac{1}{2!} \frac{d^2P(v_0)}{d\dot{y}^2} \dot{y}^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3P(v_0)}{d\dot{y}^3} \dot{y}^3 + \dots \quad (13.2-16)$$

由(13.2-12)与(13.2-13)式知  $P(v_0) = 0$ ，并记  $dP(v_0)/d\dot{y} = c'$ ， $d^2P(v_0)/d\dot{y}^2 = c''$ ， $d^3P(v_0)/d\dot{y}^3 = c'''$ ，…，上式成为

$$P(v_0 + \dot{y}) = c' \dot{y} + \frac{1}{2} c'' \dot{y}^2 + \frac{1}{6} c''' \dot{y}^3 + \dots \quad (13.2-17)$$

作为一种线性近似，我们仅取以上幂级数的线性项，代入(13.2-15)式，并移项，即得

$$m\ddot{y} + (c + c') \dot{y} + ky = 0. \quad (13.2-18)$$

此即前面的(13.2-6)式。采用(13.2-8)式的记号，即得

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \quad (13.2-19)$$

此式与前面得到的一般方程(13.2-9)式具有完全相同的形式。

当图13.2-8中的工作点  $o'$  处在摩擦力的下降特性区域时，有  $c' < 0$ ，即由于速度反馈而形成的等效阻尼是负的。又如果  $|c'| > c$ ，则系统的总阻尼  $c + c' < 0$ ，即  $\xi < 0$ ，成为负阻尼，系统成为不稳定，发生自激振动。可是如果工作点处在摩擦力的上升特性区域，则  $c' > 0$ ，而另一方面由于  $c > 0$ ，故系统的总的阻尼  $\xi$  总是正的，不可能发生自激振动，这与前面得到的结论是一致的。上述结论表明当相对滑动速度较低时，容易产生自激振动，即出现爬行。这与工程实践中的经验也是一致的。

## 2. 能量输入机制

我们来研究作用在质块 $m$ 上的各个力在一个振动周期中所做的功。由图13.2-4(a)可见，作用在质块上的力有弹簧恢复力 $F_s$ ，阻尼力 $F_d$ 与摩擦力 $F_f$ 。

弹簧恢复力 $F_s$ ，在一个振动周期中所做的功为

$$W_s = \int_{\text{(一周)}} F_s dy = \int_{\text{(一周)}} -ky dy, \quad (13.2-20)$$

而由(13.2-10)式可得 $y$ 的通解。为了简化计算，我们假设阻尼很小，因而 $\omega_d \approx \omega_0$ ，同时略去在一个振动周期中振幅的变化，即取 $e^{-t/\tau} \approx 1$  ( $t=0 \sim 2\pi/\omega_0$ )，此外还通过适当选择时间起点，使初相 $\psi=0$ ，于是可将振动位移表示成

$$y(t) = A \cos \omega_0 t, \quad (13.2-21)$$

代入(13.2-20)式，得

$$W_s = -kA^2 \int_0^{2\pi} \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t d(\omega_0 t) = 0, \quad (13.2-22)$$

即弹簧的恢复力在质块的一个振动周期中所做的功为零，它不可能是引起自激振动的原因。

阻尼力 $F_d$ 在一个振动周期中所做的功为

$$W_d = \int_{\text{(一周)}} F_d dy = \int_{\text{(一周)}} -c \dot{y} dy, \quad (13.2-23)$$

以(13.2-21)式代入，得

$$W_d = -cA^2 \omega_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega_0 t d(\omega_0 t) = -c\pi \omega_0 A^2. \quad (13.2-24)$$

由于 $c > 0$ ，故 $W_d < 0$ ，这表明驱动链的阻尼只能对振动系统作负功，即只会消耗振动系统的能量，是一种稳定因素，而不可能是自激振动的原因。

最后，让我们看摩擦力 $F$ 在一个振动周期内所做的功，

$$W_f = \int_{\text{(一周)}} -F(\dot{x}) dy, \quad (13.2-25)$$

由(13.2-13)、(13.2-17)式,

$$F(\dot{x}) = F(v_0) + P(v_0 + \dot{y}) = F(v_0) + c' \dot{y}^2 + \frac{1}{2} c'' \dot{y}^2 + \frac{1}{6} c''' \dot{y}^3 + \dots \quad (13.2-26)$$

略去常数项 $F(v_0)$ 及二次以上的项, 并代入(13.2-25)式, 得

$$W_f = \int_{\text{(一周)}} -c' \dot{y} dy,$$

以(13.2-21)式代入上式, 并积分, 得

$$W_f = -c' A^2 \omega_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega_0 t d(\omega_0 t) = -c' \pi \omega_0 A^2. \quad (13.2-27)$$

当工作点处于摩擦力的下降特性区域时,  $c' < 0$ , 因而 $W_f > 0$ , 即摩擦力作了正功, 正是它不断向振动系统输入能量. 而如果 $|c'| > c$ , 因而 $W_f > |W_d|$ 的话, 则由于摩擦力而积聚的能量将大于由于系统中正阻尼而耗散的能量, 振动的能量将不断增加, 振动不断加剧, 即发生自激振动.

以下从摩擦力 $F$ 与振动位移 $y$ 之间的回线关系来说明摩擦力做功的情况. 图13.2-9表明在一个振动周期中这种回线关系, 其中 $a$ 是工作在摩擦力的下降特性区域的情形,  $b$ 是工作在摩擦力的上升特性区域的情况. 先看图(a), 在 $y$ 增加的半个周期中,  $F$ 与 $y$ 的关系如曲线 $\widehat{abc}$ 所示, 而在 $y$ 减小的半个周期中 $F$ 与 $y$ 的关系如曲线 $\widehat{cda}$ 所示. 这两者的差别是由于速度的不同而引起的; 在

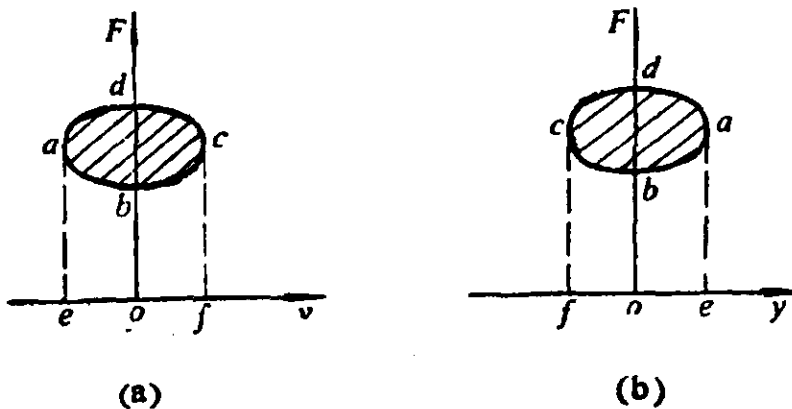


图 13.2-9

前半个周期中， $\dot{y} > 0$ ， $\dot{x} = v_0 + \dot{y}$ 比较大，因而摩擦力 $F$ 比较小，而在后半周期中 $\dot{y} < 0$ ， $\dot{x} = v_0 + \dot{y}$ 比较小，因而摩擦力比较大，由此 $F-y$ 的关系分成两支，而成为回线。由于摩擦力的方向总是指向 $y$ 轴的负向〔见图13.2-4(a)与13.2-8〕，因而在前半周期中摩擦力做负功，负功的数量由图形 $abcfoea$ 的面积给出；而在后半周期中摩擦力做正功，正功由图形 $cdaeofc$ 的面积给出。显然，在数量上正功大于负功，而闭曲线 $abcd$ 的面积给出了在一个振动周期中，摩擦力所做的净的正功，即输入振动系统的能量。

以同样的方法来分析图13.2-9(b)，可见闭曲线 $abcd$ 的面积给出了一个周期中摩擦力所做的净的负功，即耗散掉的振动系统的能量。

通常以为摩擦力是一个阻碍振动的因素，可是从以上的分析中可以看到，在一定的条件下摩擦力也可以成为一个激励振动的因素。已经有大量的事例和工程实践证明了这一点。这一结果是颇具重要性而又耐人寻味的。

### 3. 振幅稳定性

以下从能量平衡关系来讨论此系统的振幅稳定性与稳定振幅。(13.2-24)式表示的由于系统的阻尼而在一个振动周期中消耗的能量 $-W_d$ 与振幅 $A$ 之间的关系在图13.2-10中以实线绘出，

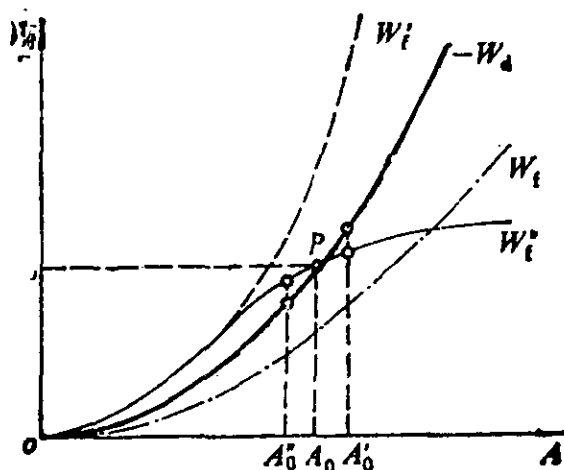


图 13.2-10

而(13.2-27)式所示摩擦力所做正功 $W_f$ ,则以点划线表示。由于在任何振幅 $A$ 下,均有 $-W_d > W_f$ ,因而在这种情况下不可能发生颤振。以上曲线 $W_f$ 是对 $c'$ 的一定的值绘出的,设想 $|c'|$ 取另一更大的数值,我们得到另一曲线 $W'_f$ ,如图中虚线所示。这时由于在任一振幅 $A$ 下,总有 $W'_f > -W_d$ ,因而将发生自激振动,而振幅将不断扩大。

我们知道,上述诸曲线均为抛物线,它们除了在原点相切以外,再无别的交点,即能量的积聚与能量的耗散总是无法平衡,要么如曲线 $-W_d$ 与 $W_f$ 所示,并不能产生自激振动,要么如曲线 $-W_d$ 与 $W'_f$ 所示,振幅将无限上升,总之是无法实现一种稳定的自激振动。但事实上,自激振动系统一般都具有振幅稳定性。为了说明这一问题,需将(13.2-26)式表示的摩擦力中的高次项,即非线性项纳入考虑。为此将(13.2-26)式取至 $y^3$ 项(仍略去常数项),代入(13.2-25)式,得摩擦力在一个振动周期中所做的功为

$$W_f = - \int_0^T \left( c' \dot{y} + \frac{1}{2} c'' \dot{y}^2 + \frac{1}{6} c''' \dot{y}^3 \right) dy,$$

以(13.2-21)式代入上式,并积分,得

$$\begin{aligned} W_f &= - \int_0^T \left[ c' \omega_0 A^2 \sin^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} c'' \omega_0^2 A^3 \sin^3 \omega_0 t \right. \\ &\quad \left. + c''' \omega_0^3 A^4 \sin^4 \omega_0 t \right] d(\omega_0 t) \\ &= - c' \pi \omega_0 A^2 - c''' \frac{3\pi}{4} \omega_0 A^4. \end{aligned} \quad (13.2-28)$$

在达到能量平衡时应有 $W_d + W_f = 0$ ,以(13.2-24)、(13.2-28)式代入,有

$$- c \pi \omega_0 A^2 - c' \pi \omega_0 A^2 - c''' \frac{3\pi}{4} \omega_0 A^4 = 0$$

由此可解出达到能量平衡的稳定振幅,

$$A_0 = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{-\frac{c+c'}{3c''}}. \quad (13.2-29)$$

前面说过, 要使自激振动有可能发生, 应有  $c+c' < 0$ , 而由上式, 为了使振幅能得以稳定, 即能得到稳定振幅  $A_0$  的实数解, 要求  $c'' > 0$ . 由(13.2-28)式知, 其中第一项  $-c' \pi \omega_0 A^2$  取正值, 其值随  $A^2$  而上升; 而第二项  $-c'' \frac{3\pi}{4} \omega_0 A^4$  则取负值, 这是一种抑制  $W_r$  上升的因素. 当振幅  $A$  较小时, 此因素并不显著, 可是当  $A$  上升时, 这一抑制因素的作用会急剧地上升. 在图13.2-10上, 曲线  $W_r'$  (细实线) 是将后面这一项非线性因素纳入考虑以后的  $W_r$  与  $A$  的关系曲线. 将之与曲线  $W_r$  (虚线) 比较, 可以明显地看出非线性项的抑制作用.  $W_r'$  与  $-W_d$  两曲线的交点  $P$  即给出系统的稳定振幅  $A_0$ . 为了说明此振幅  $A_0$  是稳定的, 我们假设由于偶然因素的干扰, 使振幅由  $A_0$  突然增加到  $A'$ , 这时从图上可见有  $-W_d > W_r'$ , 即能量的耗散大于能量的积聚, 系统的总能量下降, 因而振幅下降, 由  $A'$  点回降至  $A_0$  点. 反之, 若由于偶然干扰使  $A_0$  下降至  $A''$ , 那么由类似的分析也可看出系统的总能量将会上升, 而使振幅由  $A''$  回升至  $A_0$ .

## § 13.3 由于位移的延时反馈而引起的自激振动

### 13.3.1 位移反馈、负刚度与静态不稳定性

上一节我们讲述了由于速度反馈引起的负阻尼及动态失稳现象. 现在我们来考察振动位移的反馈及其效果. 设系统的框图如图13.3-1所示, 而运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(x). \quad (13.3-1)$$

可以看出, 此系统的特点是, 作用在振动体上的力本身又受到其

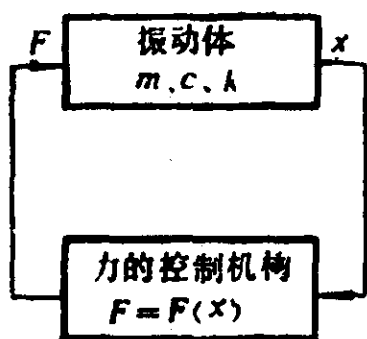


图 13.3-1

振动位移的控制。上式中  $F(x)$  一般是非线性函数,当  $x$  较小时, 可将之在  $x=0$  附近展成幂级数, 仅取其一次项, 而略去高次项和常数项, 得

$$F(x) \approx -k'x, \quad -k' = \frac{dF(0)}{dx}, \quad (13.3-2)$$

代入(13.3-1)式, 并移项, 得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k + k')x = 0, \quad (13.3-3)$$

此式从形式上看是一个单自由度系统自由振动的运动方程, 但不同的是, 其刚度系数由两部分组成: 其第一部分  $k$  即为振动体的刚度, 一般是正的; 而第二部分 ( $k'$ ), 则是由于位移反馈而产生的“等效刚度”, 其正负需视函数  $F(x)$  的性质而定, 可正可负。如果在  $x=0$  附近, 函数  $F(x)$  随  $x$  的增加而降低, 则  $-k' < 0$ , 系统的总刚度  $(k + k') > 0$ , 则(13.3-3)式与第一章讲的单自由度系统的自由振动的运动方程没有什么本质上的差别, 仅仅是刚度由于位移反馈而有所增加, 相应地自然频率亦有所提高,

$$\omega_1^2 = \frac{k + k'}{m} = \omega_0^2 + \frac{k'}{m}. \quad (13.3-4)$$

如果函数  $F(x)$  随  $x$  的增加而增加, 则  $-k' > 0$ , 又如果  $-k' > k$ , 则系统的总刚度  $(k + k') < 0$ , 即成为所谓的“负刚度”。

我们知道, 弹簧的刚度  $k$  可以定义为其弹性恢复力的增量  $dF$ , 与其变形的增量  $dx$  之比, 即  $k = -dF/dx$ , 式中的负号是因为我们定义: 当  $dF$  与  $dx$  两者方向相反时,  $k$  取正值, 即为正刚度, 如图13.3-2(a)所示。在这种情况下, 由  $dx$  所引起的  $dF$ , 倾向于抵消  $dx$  的变化, 系统是稳定的。图(b)所示则为负刚度的情形, 这时  $dF$  与  $dx$  同向, 由  $dx$  引起的  $dF$ , 反过来助长  $dx$  的增加, 而增加了的  $dx$  又会引起更大的  $dF$ , ..., 如此互为影响, 会

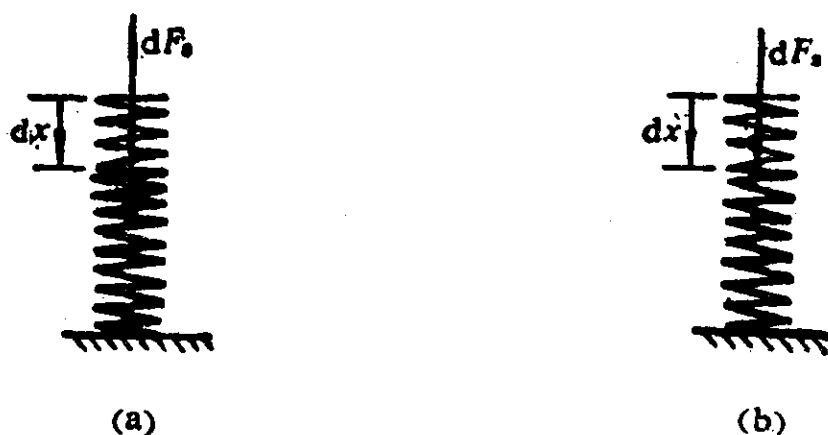


图 13.3-2

使系统愈来愈偏离原来的平衡位置。因此负刚度会成为一种不稳定的因素。

图13.3-3(a)与(b)分别给出了具有正刚度和负刚度的系统的两个例子，即正摆与倒摆。显然后者是不稳定的。但是这种不稳定性与上一节讲述的由于负阻尼引起的不稳定性有很大的不同。让我们回到(13.3-3)式，系统的自然频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k+k'}{m}}, \quad (13.3-5)$$

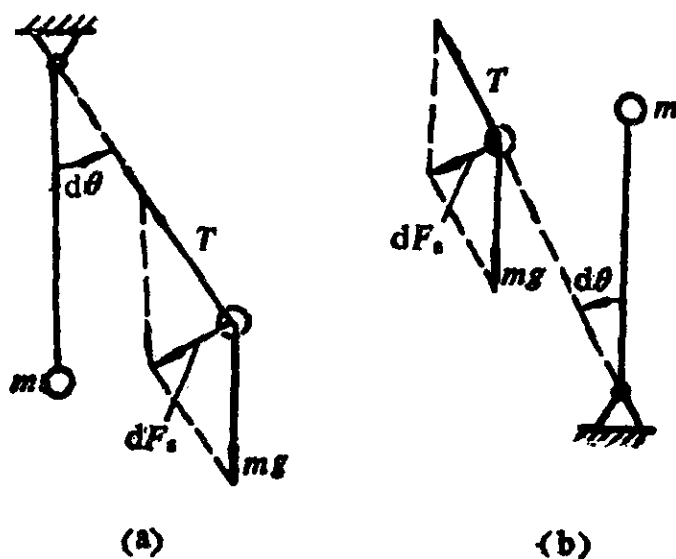


图 13.3-3



在负刚度的情况下， $\omega_0$ 成为虚数，即自然频率并不存在，这表明系统不可能作图13.2-3那样的往复振动，而是以一种位移单调增加的方式偏离其平衡位置。

事实上，在方程(13.3-3)中，如果 $k+k' < 0$ ，即负刚度的情况下，引入以下记号

$$p = \sqrt{-\frac{k'+k}{m}} = i\omega_0, \quad (13.3-6)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{-(k'+k)m}} = -i\xi, \quad (13.3-7)$$

如此定义的 $p$ 、 $\zeta$ 均为正实数，采用以上记号可将方程(13.3-3)写成

$$\ddot{x} + 2\zeta p \dot{x} - p^2 x = 0. \quad (13.3-8)$$

令

$$x(t) = Ae^{st}, \quad (13.3-9)$$

代入上式，即得特征方程

$$s^2 + 2\zeta ps - p^2 = 0. \quad (13.3-10)$$

由上式可解出

$$\begin{matrix} s_1 = (-\zeta \pm \sqrt{1+\zeta^2})p. \\ s_2 \end{matrix} \quad (13.3-11)$$

而方程(13.3-8)的通解为

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}. \quad (13.3-12)$$

注意到 $s_1 > 0$ ，而 $s_2 < 0$ ，故上式中第一项会单调增加，而第二项

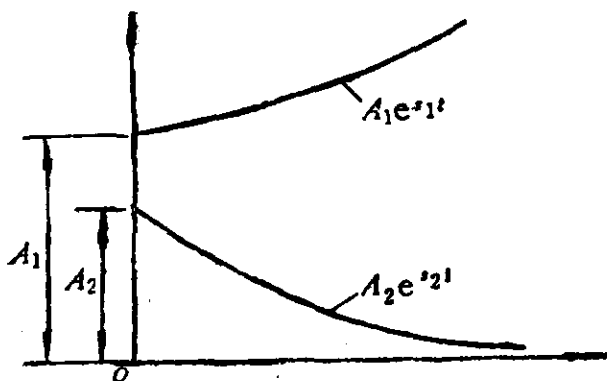


图 13.3-4

则单调下降到零，如图13.3-4所示。总的趋势是当时间充分大时， $x(t)$ 会单调增加（但是如果 $A_2$ 较大或 $s_1$ 比较小，那么在 $t$ 较小的阶段， $x(t)$ 可能先下降，然后再上升）。

由于负刚度引起的失稳现象称为静态不稳定，以区别于上一节讲的由于负阻尼引起的失稳现象，后者称为动态不稳定。

作为静态不稳定的一个实例，让我们分析金属切削过程中由于刀具变形引起的负刚度及静态失稳现象。图13.3-5表示一经过

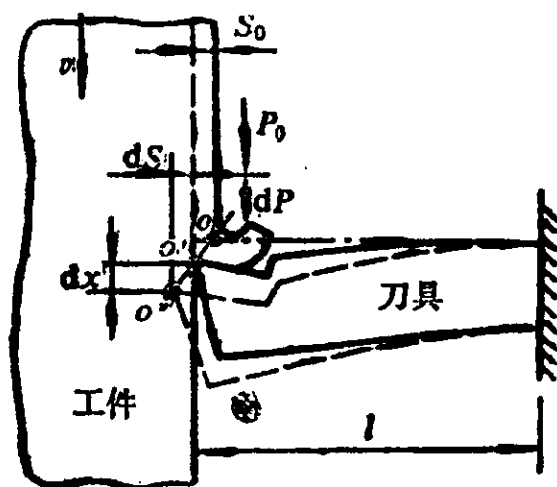


图 13.3-5

简化了的切削过程，工件以速度 $v$ 向下运动，其上厚度为 $S_0$ 的一层金属被刀刃切下。向下的切削力为 $P_0$ ，在其作用下，刀具会发生弹性变形，而刀刃位置由其不切削时的 $o$ 点移到 $o'$ 点。此时刀具的弹性恢复力 $F_r$ 与切削力 $P_0$ 相平衡。但是必须注意，图例中所示这种平衡是不稳定的。在切削过程中如因任何偶然的干扰，例如刀刃碰到工件材料中的某一个硬质点，那么切削力 $P_0$ 会获得一个增量 $dP$ ，在 $dP$ 作用下，刀刃再沿 $oo'o''$ 曲线下移（ $oo'o''$ 曲线是由刀杆和夹持机构的静刚度特性决定的），至 $o''$ 点，此时刀刃下降了 $dx$ ，而向左伸出 $dS$ （为了明显起见，图中对 $dS$ 有所夸张），后者使瞬时切削厚度增加一个同样的数量，而切削厚度的增加又再度引起切削力的上升，更加使得刀刃下移，刀尖则更深地扎入工件，…由此导致刀尖部分会由于迅速上升的切削载荷的

作用而崩掉。这种现象称为“轧刀”。此系统的框图可用图13.3-6来表示，其中上面一个方框是刀具，其输入是作用在刀具上的切削力的变动量 $dP$ ，而输出 $dx$ 则是刀刃在铅垂向的变形量。下面一个方框表示切削力的控制机构，其输入是 $dx$ ，即刀尖在铅垂方向上的移动量，而输出是切削力的变化 $dP$ ，后者被反馈回刀具上。显然，这是一个具有位移反馈的系统。

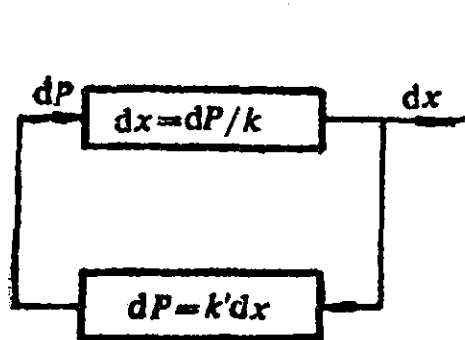


图 13.3-6

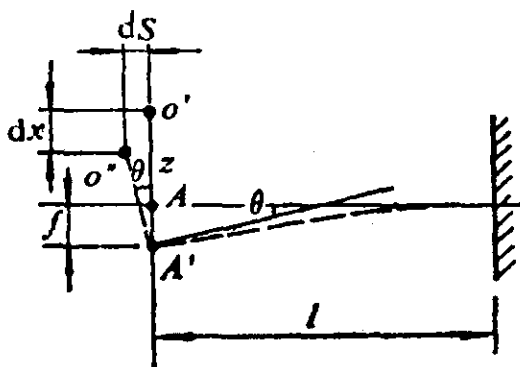


图 13.3-7

近似地将刀具视为一悬臂梁，并认为刀具的装夹是完全刚性的，则由材料力学可知刀具的刚度为

$$k = \frac{dP}{dx} = \frac{l^3}{3EI}, \quad (13.3-13)$$

式中 $l$ 为刀具的悬伸长度， $EI$ 为其抗弯刚度。此刚度当然是正刚度。

由位移反馈所产生的等效刚度 $k'$ 可推算如下：首先求图13.3-5中刀刃的纵向下沉量 $dx$ 与其横向伸出量 $dS$ （即切削厚度的增量）之间的关系。视刀杆为一悬臂梁，在其端部作用有集中载荷 $dP$ ，则其端部的挠度与转角分别为 $f = dPl^3/3EI$ ， $\theta = dPl^2/2EI$ 。设刀刃到刀杆的中性面之间的距离为 $z$ ，并假定中性面端点仅在铅垂线上移动，即由 $A$ 点到 $A'$ 点，且有 $dx \approx \overline{AA'} = f$ ，则由图13.3-7的几何关系，可求得

$$dS = \frac{3z}{2l} dx. \quad (13.3-14)$$

另一方面,将切削力与切削厚度之间的函数关系 $P(S_0 + dS)$ 在 $S_0$ 附近展成幂级数,

$$P(S_0 + dS) = P(S_0) + \frac{dP(S_0)}{dS}dS + \dots,$$

而切削力的增量为

$$dP = P(S_0 + dS) - P(S_0) = k_s dS + \dots, \quad (13.3-15)$$

式中

$$k_s = \frac{dP(S_0)}{dS}.$$

由于 $P(S_0 + dS)$ 是 $dS$ 的增函数,故应有 $k_s > 0$ 。以(13.3-14)式代入(13.3-15)式,并略去高阶微量,得

$$dP = k_s \frac{3z}{2l} dx,$$

由此得等效刚度系数

$$k' = \frac{dP}{dx} = k_s \frac{3z}{2l}. \quad (13.3-16)$$

由(13.3-5)式,系统总的刚度为

$$k - k' = \frac{l^3}{3EI} - k_s \frac{3z}{2l}, \quad (13.3-17)$$

其中 $-k_s 3z/(2l)$ 这一部分是由于位移反馈所造成的等效负刚度。产生“轧刀”现象的条件为

$$\frac{l^3}{3EI} - k_s \frac{3z}{2l} < 0. \quad (13.3-18)$$

防止轧刀的一个有效措施,是改变刀杆的形状,使得当刀刃向下变形时,它同时会退离工件,而不是轧入工件,这样上式中的第

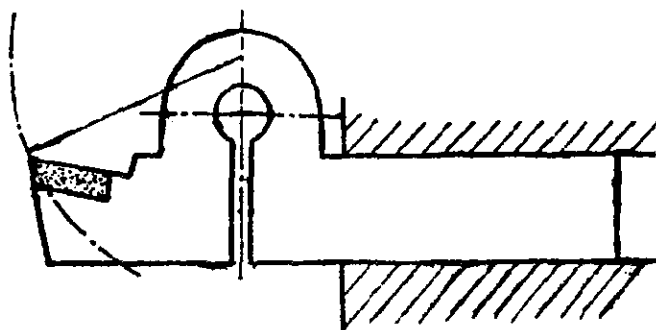


图 13.3-8

二项会变成正刚度，当然不会再有失稳之虞。图13.3-8所示的弹性刀杆就可以满足以上要求，这种刀具的刀刃在切削力作用下，大体上沿一个圆弧移动，它在向下移动的同时，也向后退。

从这一小节可以看到，单纯的位移反馈或者只能使系统原来的正刚度增加，或者使刚度减小甚至形成负刚度，而引起静态不稳定性，但是不可能引起动态不稳定性，即不可能引起自激振动。以下我们会看到，位移的延时反馈却可以引起自激振动。

### 13.3.2 位移的延时反馈

如果作用在系统上的瞬时激振力 $F(t)$ 不是受到当时的振动位移 $x(t)$ 的控制，而是受到在一段时间 $T$ 之前的振动位移 $x(t-T)$ 的控制，则得到位移的延时反馈系统，或称为“时延系统”。其框图如图13.3-9所示。其运动方程为

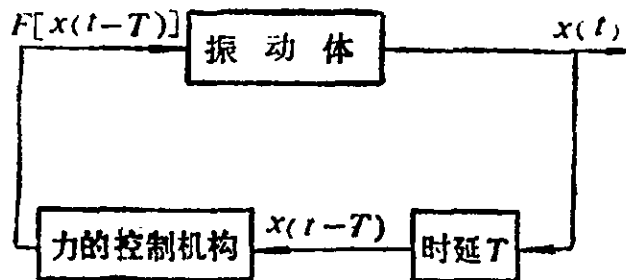


图 13.3-9

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F[x(t-T)], \quad (13.3-19)$$

将式中函数 $F[x(t-T)]$ 线性化，得

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = px(t-T), \quad (13.3-20)$$

式中

$$p = \frac{dF(0)}{dx}. \quad (13.3-21)$$

时延系统可以是稳定的，即其振幅是收敛的，也可能是不稳定的，即其振幅是发散的，我们来分析由稳定过渡到不稳定的一种

中间极限状态，即系统产生等幅振动的可能性。为此，设

$$x(t) = a_0 \cos \omega t, \quad (13.3-22)$$

因此

$$\dot{x}(t) = -\omega a_0 \sin \omega t, \quad (13.3-23)$$

而

$$\begin{aligned} x(t-T) &= a_0 \cos \omega(t-T) = a_0 \cos(\omega t - \phi) \\ &= a_0 \cos \phi \cos \omega t + a_0 \sin \phi \sin \omega t \\ &= \cos \phi (a_0 \cos \omega t) - \frac{1}{\omega} \sin \phi (-\omega a_0 \sin \omega t), \end{aligned}$$

式中  $\phi = \omega T$  是由于时延引起的相位滞后。将(13.3-22)、(13.3-23)式代入上式，并引入记号

$$-p \cos \phi = k', \quad (13.3-24)$$

$$p \sin \phi / \omega = c', \quad (13.3-25)$$

得 
$$px(t-T) = -k'x(t) - c'\dot{x}(t). \quad (13.3-26)$$

将此式代入(13.3-20)式，并移项，得

$$m\ddot{x}(t) + (c+c')\dot{x}(t) + (k+k')x(t) = 0. \quad (13.3-27)$$

由此可见，位移的延时反馈等价于位移与速度同时反馈，它同时改变了系统的阻尼与刚度。(13.3-24)、(13.3-25)两式分别给出了由于延时反馈产生的等效刚度与等效阻尼系数。视时延  $T$  的长短，可以出现负的刚度或负的阻尼，从而引起静态或动态的不稳定。

以下就金属切削过程中的“再生颤振”为例，来说明时延反馈所引起的动态不稳定现象的机制及其规律。

### 13.3.3 金属切削过程中的再生颤振

#### 1. 再生颤振系统

金属切削过程中发生的再生颤振是一种典型的由于振动位移延时反馈所导致的动态失稳现象，也是金属切削机床发生自激振

动的主要机制之一。

图13.3-10是以切入法车削外圆的示意图，其中机床结构被简化成一个单自由度系统，切削运动由工件的自转 $N$  (r/s) 与刀具沿工件径向的进给 $S_0$  (mm/r) 组成； $S_0$ 在数量上又等于平均切削厚度(mm)。  $x(t)$ 是刀具相对于工件在水平方向的振动位移，即机床结构的变形，而 $F(t)$ 是作用在刀具上的切削力。这里机床结构相当于图13.3-1中的振动体， $F(t)$ 作用在其上产生振动位移 $x(t)$ ；而另一方面 $x(t)$ 又引起瞬时切削厚度 $S(t)$ 围绕其均值 $S_0$ 变化，而这一变化又会反过来引起切削力 $F(t)$ 变化。因此这里切削过程即成为图13.3-1中的力的控制机构，它按照振动位移来控制激振力，从而实现位移反馈。还必须看到， $S(t)$ 不仅与刀刃在当时的振动位移 $x(t)$ 有关(见图中阴影部分的内表面)，而且还与工件在上一圈时的振动 $y(t)$ 有关(见图中阴影部分的外表面)。由此可见，这里存在振动位移的延时反馈。

在平稳切削条件下，工件表面上厚度为 $S_0$ 的一层金属被均匀地切下，刀刃相对于工件的运动轨迹为阿基米德螺线，如图13.3-10中细实线与虚线所示；此时切削力 $F_0$ 为一恒量，此力作

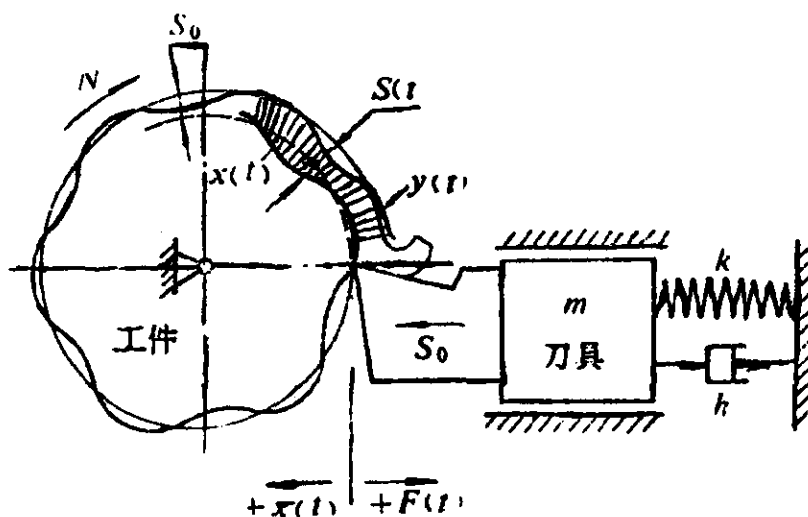


图 13.3-10

用在机床结构上，引起恒定的变形 $x_0$ ；而恒定的 $x_0$ 又反过来保

证切削厚度 $S_0$ 恒定不变。从理论上讲，此平稳切削过程似乎可以一直进行下去，如果没有外界干扰的话。可是，如前面已经提到，在实际的条件下，总是不乏这样或那样的扰动，因此上述平稳切削过程注定要受到扰动。如果受扰后，切削过程仍能回复到平衡状态，则过程仍然是平稳的；如果一个扰动引起切削过程愈来愈远地偏离上述平衡状态，则切削过程是不稳定的。

现在假设在切削过程中突然碰到某一个干扰，例如，刀刃碰到工件材料中的某一个硬质点，切削力立即获得一个动态的增量 $\Delta F(t)$ ，而 $\Delta F(t)$ 作用在机床结构上，引起振动 $x(t)$ ，后者又改变了瞬时切削厚度 $\Delta S(t)$ ，从而引起切削力的二次变化 $\Delta F'(t)$ ，在一定的条件下我们会发现周转一次以后，切削力的变化增加了，即 $\Delta F' > \Delta F$ 。同理，再转一次以后，又会有 $\Delta F'' > \Delta F'$ ... 如此周而复始， $\Delta F(t)$ 及 $x(t)$ 不断上升，愈演愈烈，终于形成强烈的自激振动。切削过程中的这类自激振动，称为“再生颤振”(regenerative chatter)。

这里需要说明两点，第一，挑起这一连串的反应，并发展成自激振动的那个“初始扰动”，只作用一次以后，就被遗忘了，此后的响应是由于系统内部的“机床结构”与“切削过程”这两个矛盾着的方面相互作用而维持与扩大的，与外界的扰动无关；第二，以上只是为了说明方便，才将各因素间影响的因果关系按一定的次序来讲述，但事实上，各因素是在相互影响、相互制约中同时地连续变化的，不应该理解为一个因素改变以后，下一个才跟着变。

以下通过数学模型来分析再生颤振的机理与规律。

## 2. 运动方程

按照图13.3-10，可以将运动方程写出，

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + kx(t) = -\Delta F(t), \quad (13.3-28)$$

式中 $h$ 是滞后阻尼系数，这里之所以采用滞后阻尼只是为了使后



面的公式比较整齐，当阻尼比较小，而且系统作简谐振动时，我们知道，无论采用滞后阻尼模型或粘滞阻尼模型，其差别并不大。上式右边的负号是由于按照习惯，对作用在刀具上的切削力  $F(t)$  的正向与工具振动位移  $x(t)$  的正向作了相反的规定，如图 13.3-10 所示。

如果切削厚度的变化  $\Delta S(t)$  比较小，则切削力的动态增量  $\Delta F(t)$  可以表示为

$$\Delta F(t) = W k_s \Delta S(t), \quad (13.3-29)$$

式中， $W$ ——切削宽度(mm)，即图 13.3-10 中工件的厚度（垂直于图面度量）；

$k_s$ ——切削力的切削厚度系数 ( $N/mm^2$ )，即单位“ $W \Delta S(t)$ ”下的切削力。

以下求切削厚度的动态变化  $\Delta S(t)$  与刀具、工件之间的相对振动  $x(t)$  之间的关系。我们将图 13.3-10 中的阴影部分放大，绘于图 13.3-11 中。图 13.3-10 中的阿基米德螺线，即平稳切削所对应的刀刃轨迹，在图 13.3-11 中被展成了两条平行直线，它们相距

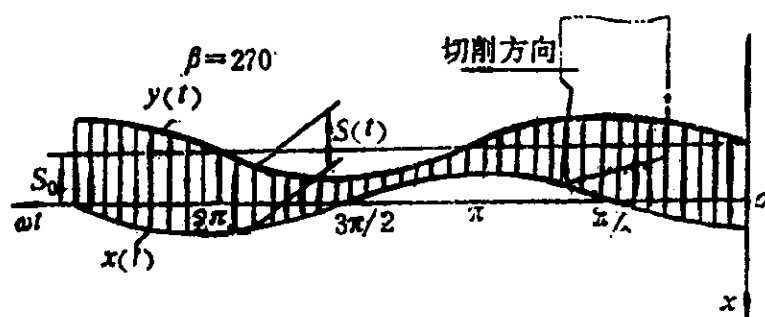


图 13.3-11

$S_0$ 。围绕这两条直线的波浪线，即细实线与粗实线，分别是刀刃在本圈和上一圈中的切削轨迹  $x(t)$  及  $y(t)$ ，它们构成被切削层的下表面和上表面。两者之差，即为振动切削条件下的瞬时切削厚度，

$$S(t) = x(t) - y(t). \quad (13.3-30)$$

我们仍考虑  $x(t)$  为等幅的谐波的情况，即稳定与不稳定之间的临界状态，

$$x(t) = a_0 \cos \omega t, \quad (13.3-31)$$

于是,由图13.3-11,有

$$y(t) = x(t-T) - S_0 = a_0 \cos(\omega t - \beta) - S_0, \quad (13.3-32)$$

式中,  $T$ ——工件每转的时间(s),

$$T = \frac{1}{N}, \quad (13.3-33)$$

$\beta$ ——相邻两圈刀刃波纹之间的相位差,

$$\beta = T\omega = \omega/N. \quad (13.3-34)$$

将(13.3-31)、(13.3-32)式代入(13.3-30)式,得

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 \cos \omega t - a_0 \cos(\omega t - \beta) + S_0 \\ &= S_0 + a_0 \left[ (1 - \cos \beta) \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \sin \beta \omega \sin \omega t \right], \end{aligned} \quad (13.3-35)$$

记

$$1 - \cos \beta = A, \quad \sin \beta = B, \quad (13.3-36)$$

并考虑到(13.3-31)式及

$$\dot{x}(t) = -\omega a_0 \sin \omega t, \quad (13.3-37)$$

得

$$S(t) = S_0 + Ax(t) + \frac{B}{\omega} \dot{x}(t).$$

而切削厚度围绕其均值 $S_0$ 的动态变化为

$$\Delta S(t) = S(t) - S_0 = Ax(t) + \frac{B}{\omega} \dot{x}(t). \quad (13.3-38)$$

将此式代回(13.3-29)式,即得动态切削力的表达式

$$\Delta F(t) = Wk_s \left[ Ax(t) + \frac{B}{\omega} \dot{x}(t) \right], \quad (13.3-39)$$

此式明确表示激振力受到振动位移与振动速度的控制,我们再一次证明了位移的延时反馈相当于位移与速度同时反馈。

将(13.3-39)式代入运动方程(13.3-28)式,并移项,得

$$m\ddot{x}(t) + \frac{1}{\omega}(h + Wk_s B) \dot{x}(t) + (k + Wk_s A)x(t) = 0. \quad (13.3-40)$$

我们得到一个单自由度系统自由振动的运动方程，其刚度系数与阻尼系数均由两部分组成，一部分是机床结构本身的刚度和阻尼，而另一部分则是由于位移延时反馈，即“再生效应”造成的切削过程的等效刚度与等效阻尼。

由(13.3-36)式知 $A \geq 0$ ，且通常有 $Wk_s A \ll k$ ，即切削过程的等效刚度为正，且远小于机床结构本身的刚度。由此看来，等效刚度只可能使系统的总刚度略有增加，对系统的特性并无本质影响。

可是另一方面，等效阻尼 $Wk_s B$ 却有可能使整个切削系统失去动态稳定性。首先，由(13.3-36)式， $B$ 可正可负，视 $\beta$ 角而定，当 $\beta = 180^\circ \sim 360^\circ$ 时， $B = \sin\beta < 0$ ，因而等效阻尼 $Wk_s B$ 是负的。其次，如果切削宽度 $W$ 又足够大，则可使 $h + Wk_s B < 0$ ，即系统的总的阻尼成为负的，从而发生自激振动。

根据以上分析，可得再生颤振系统的较为详细的框图如图13.3-12所示。

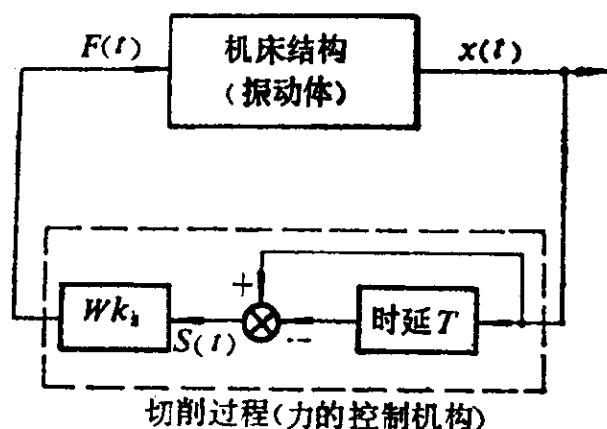


图 13.3-12

### 3. 稳定性方程与稳定性图

在我们的模型中，工件转速 $N$ 与切削宽度 $W$ 是两个主要的工艺参数。这里我们基于运动方程来分析工艺参数对切削系统稳定性的影响。

前面说过，我们是在研究等幅振动，即稳定与不稳定之间的

临界状态。为此，(13.3-40)式中的总的阻尼系数应该为零，即

$$h + Wk_s B = 0, \quad (13.3-41)$$

由此可求出临界的切削宽度

$$W_{cr} = -\frac{h}{k_s B} = -\frac{h}{k_s} \frac{1}{\sin \frac{\omega}{N}}. \quad (13.3-42)$$

当 $W > W_{cr}$ 时，系统的总阻尼为负，将会发生自激振动。 $W_{cr}$ 又称为“稳定性阈”(threshold)。

在满足(13.3-41)式的条件下，(13.3-40)式成为

$$m\ddot{x}(t) + (k + Wk_s A)x(t) = 0, \quad (13.3-43)$$

成为一无阻尼系统自由振动的运动方程，其自然频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k + Wk_s A}{m}}, \quad (13.3-44)$$

或写成

$$\omega^2 = \omega_n^2 + \frac{Wk_s A}{m}.$$

这里 $\omega$ 即为系统自激振动的频率，而 $\omega_n$ 是机床结构本身的自然频率。显然， $\omega > \omega_n$ ，即自激振动的频率总是略高于机床结构某个失稳模态的自然频率。这是由于切削过程的等效刚度使得整个切削系统的刚度略有上升的缘故。

(13.3-41)、(13.3-44)两式构成系统的稳定性方程

$$h + Wk_s B = 0; \quad (13.3-45)$$

$$\omega^2 = (k + Wk_s A)/m. \quad (13.3-46)$$

式中

$$A = 1 - \cos(\omega/N), \quad (13.3-47)$$

$$B = \sin(\omega/N). \quad (13.3-48)$$

当机床结构的动态特性 $m$ 、 $h$ 、 $k$ 与切削过程的特性 $k_s$ 给定以后由(13.3-45)、(13.3-46)两式可解出在某一切削速度( $N$ )下，发生颤振的临界切削宽度 $W_{cr}$ ，及在该临界条件下的颤振频率 $\omega$ 。显然， $W_{cr}$ 与 $\omega$ 都与工件的转速 $N$ 有关，表示这种关系的图线，称为系统的“稳定性图”(stability chart)。图13.3-13给出了典

型的稳定性图。图(a)中具有耳垂状的阴影区是不稳定区域，而水平虚线以下的区域是在所有工件转速下均属稳定的无条件稳定区。令(13.3-42)式中的 $\sin(\omega/N) = -1$ 时，得最小的临界切削宽度

$$W_{crmin} = W_{un} = \frac{h}{k_s}, \quad (13.3-49)$$

此即图13.3-13(a)中的无条件稳定区域的宽度，即当 $W < W_{un}$ 时，切削系统在任何工件转速 $N$ 下均为稳定的。

图13.3-13(b)表示在稳定性阈上（即 $W = W_{cr}$ 时），颤振频率 $\omega$ 与工件转速 $N$ 的关系呈锯齿状。

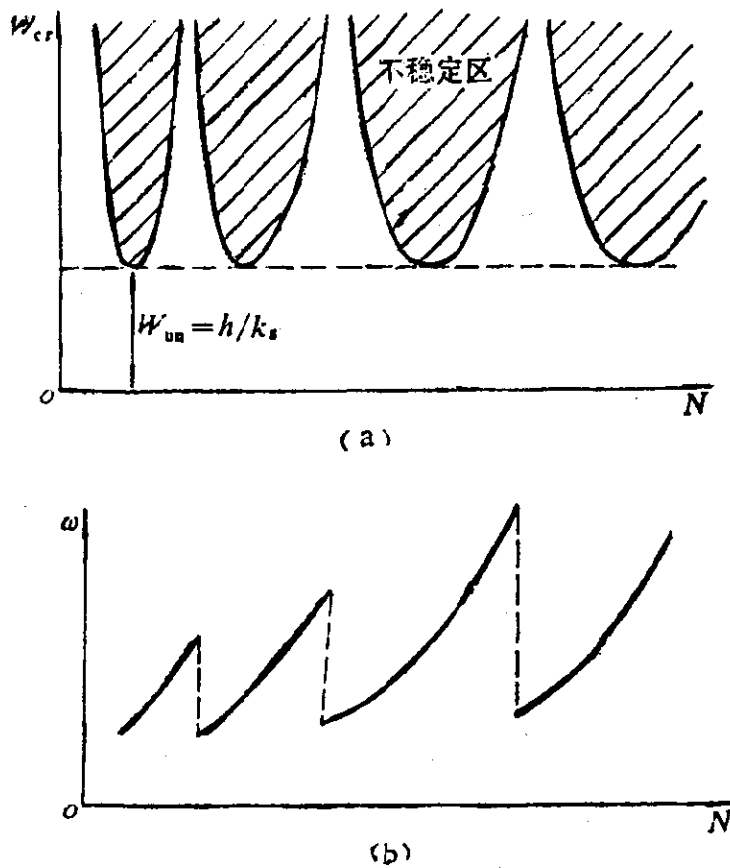


图 13.3-13

#### 4. 再生颤振的物理机制

前面讲过，当 $\beta = 180^\circ \sim 360^\circ$ 时，切削过程的等效阻尼是负的。现在我们来较为详细地分析一下负阻尼的成因及其作用。

图13.3-14(a)与(b)分别给出了振动切削条件下 $\beta = 90^\circ$ 与

$\beta = 270^\circ$ 两种情况的被切削层的图形。让我们先看图(a), 即 $\beta = 90^\circ$ 的情况。我们知道, 图中上下两波纹线之间的距离即为瞬时切削厚度 $S(t) = x(t) - y(t)$ , 而 $S(t) = S_0 + \Delta S(t)$ , 即为两部分之和: 其均值 $S_0$ 及围绕均值的波动 $\Delta S(t)$ 。可能激起振动的是 $\Delta S(t)$ 这一部分, 而 $S_0$ 只是产生一恒力, 引起系统平衡位置的变

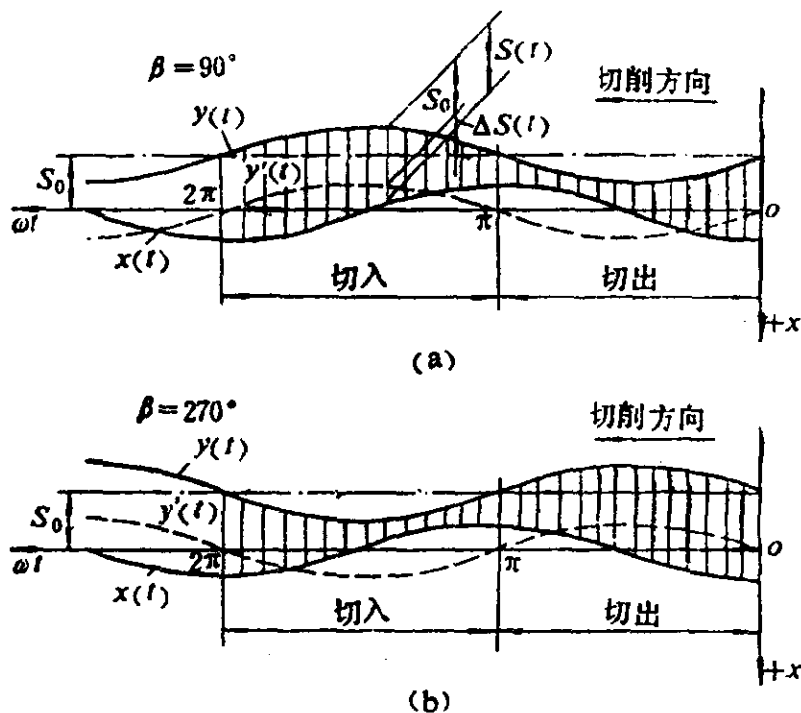


图 13.3-14

动而已。为了从图上消除 $S_0$ , 可以将曲线 $y(t)$ 向下平移一个距离 $S_0$ , 得到虚线所示的曲线 $y'(t)$ ,  $y'(t)$ 与曲线 $x(t)$ 之间的距离, 即给出 $\Delta S(t)$ 。这里需要说明, 切削厚度 $S(t)$ 只能是正的, 但 $\Delta S(t)$ 却可正可负, 当 $y'(t)$ 在 $x(t)$ 之上时,  $\Delta S(t) > 0$ , 反之 $\Delta S(t) < 0$ 。同样地, 切削力 $F(t)$ 也只会是正的, 其方向如图13.3-10所示。可是从(13.3-29)式可见, 由于 $\Delta S(t)$ 的符号可变, 切削力的动态分量 $\Delta F(t)$ 亦可正可负。按图13.3-10中规定的切削力 $F(t)$ 的正向可知, 正的切削力会把刀具从工件推开, 而负的切削力则倾向于把刀具拉向工件。

另一方面从图13.3-14(a)可见, 在一个运动周期中, 刀具的运动轨迹可分为切出与切入两个阶段, 在切出阶段刀具退出工

件，而在切入阶段刀具趋向工件。当 $\beta = 90^\circ$ 时，在切出阶段的大部分时间内， $\Delta S(t) < 0$ ，因而 $\Delta F(t) < 0$ ，即切削力力图把刀具拉向工件；而在切入阶段的大部分时间内， $\Delta S(t) > 0$ ，因而 $\Delta F(t) > 0$ ，即切削力力图将刀具从工件中推开。切削力的方向与工具运动速度的方向的这种关系绘于图13.3-15(a)中。从图中可见，当 $\beta = 90^\circ$ 时动态切削力 $\Delta F$ 的方向基本上与刀具的振动运动的速度 $\dot{x}$ 的方向相反，这时切削力起一种阻力的作用，因此系统是稳定的，不会发生自激振动。

可是如果将同样的分析施之于图13.3-14(b)中 $\beta = 270^\circ$ 的情况，则会得到图13.3-15(b)的结果。可见这时动态切削力 $\Delta F$ 基本上与刀具的振动方向 $\dot{x}$ 相同，此时对于机床结构的振动来说，切削力是“助力”，而不是阻力。它助长已经发生的振动，使之

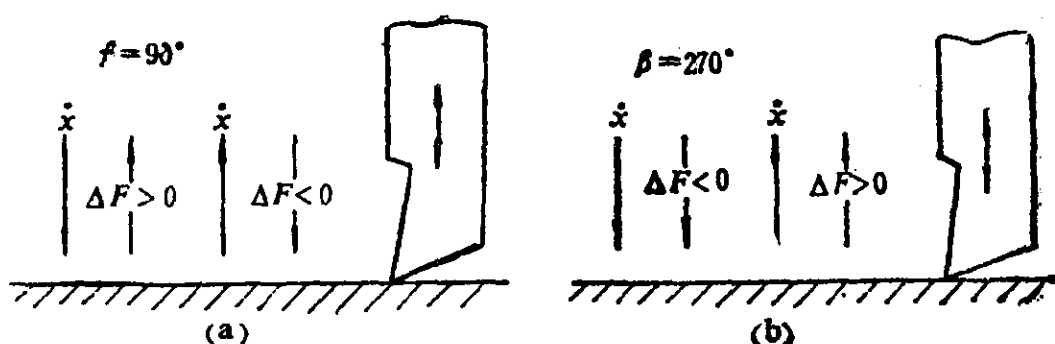


图 13.3-15

不断扩大。因此，系统是不稳定的。

### 5. 能源传输机制

我们来计算在一个振动周期中，切削力对于振动系统所做的功，这个功可表示为

$$A = - \int_0^T \Delta F(t) \dot{x}(t) dt, \quad (13.3-50)$$

式中的负号是因为 $F(t)$ 与 $x(t)$ 的正向规定不同所致，如图13.3-10所示。以(13.3-39)、(13.3-36)及(13.3-37)式代入上式，并积分，得

$$A = -\pi a_0^2 W k_g \sin\beta. \quad (13.3-51)$$

由此式可见，当 $\beta = 0 \sim 180^\circ$ 时， $A < 0$ ，即切削力对振动系统作了负功，振动系统将机械能馈送回切削过程，作为热能消耗掉，因此切削过程是稳定的；当 $\beta = 180^\circ \sim 360^\circ$ 时， $A > 0$ ，切削力作正功，如果此正功大于机床结构的阻尼所消耗的能量，则振动能量将不断积累，振动加剧，切削过程是不稳定的。此结论与前面由等效阻尼导出的结论是一致的。

其实从图13.3-14也可以直观地看出以上结果。我们知道，刀具切出时，切削力作正功，这是因为 $F(t)$ 的方向总是要将刀具推离工件，而在刀具切入时，切削力作负功。现在我们看图13.3-14(a)，在切出阶段的切削厚度一般比切入阶段的切削厚度小，因而切出时切削力所做的正功就比较小，而切入时切削力所做的负功就比较大（指其绝对数量），正负相消，切削力做了净的负功。对图13.3-14(b)中 $\beta = 270^\circ$ 的图形作同样的分析，可知切削力做了净的正功。此结论验证了(13.3-51)式的一般规律。

### 13.3.4 切削过程再生颤振的非线性理论

前述关于金属切削过程中的再生颤振的理论属于线性理论，这一理论成功地解释与预测了发生自激振动的临界条件，即稳定性阈，可是对于自激振动进一步的发展及最终走向稳定的全过程，线性理论却无法加以说明与预测。要做到这一点，需要发展关于再生颤振的非线性理论。近年来由于电子计算机的广泛应用与测试技术的高度发展，关于机床再生颤振的非线性理论的研究，也获得了较大的进展。这里我们简要介绍三个主要的非线性模型，它们分别基于不同的非线性因素。

#### 1. 模型I——机床结构的非线性刚度

将(13.3-28)式中反映线性的弹性恢复力 $F_s$ 的那一项 $kx(t)$ 换成一个三次多项式（为简单起见，我们略去了其中的 $x^2$ 项，因



为计算表明这一项的影响甚微)，

$$F_s = k(x(t) + \beta x^3(t)), \quad (13.3-52)$$

得，

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + k(x(t) + \beta x^3(t)) = -Wk_s \Delta S(t), \quad (13.3-53)$$

这是一个Duffing方程。我们仍然探讨存在等幅的自激振动这一临界情况的可能性，为此设

$$x(t) = a_0 \cos \omega t, \quad (13.3-54)$$

将式(13.3-54)代入(13.3-53)式，并采用 § 12.7 节中的迭代法，可得

$$\begin{cases} h + Wk_s B = 0; & (13.3-55) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1.1547 \sqrt{D/\beta}. & (13.3-56) \end{cases}$$

式中

$$D = \frac{hA}{kB} + \left( \frac{\omega^2}{\omega_s^2} - 1 \right) \quad (13.3-57)$$

$$\omega_s = k/m,$$

$A$ 与 $B$ 仍由公式(13.3-47)、(13.3-48)给出。(13.3-55)、(13.3-56)两式即为系统的稳定性方程。当机床结构的动态特性参数 $\omega_s$ 、 $k$ 、 $\beta$ 和 $h$ 以及切削过程的参数 $k_s$ 给定以后，由该两式可解出自激振动的振幅 $a_0$ 和频率 $\omega$ ，作为工艺参数 $N$ 与 $W$ 的函数，

$$a_0 = \varphi(N, W), \quad (13.3-58)$$

$$\omega = \varphi(N, W). \quad (13.3-59)$$

以上第一个公式在 $(a_0, N, W)$ 三维空间中定义了一个阻尼为零的曲面，如图13.3-16所示（图中只给出了此曲面的一部分）。 $N$ - $W$ 平面上的任一点 $(N, W)$ 与此曲面上的一定点 $A$ 相对应，因而也对应于一定的高度 $a_0$ ，此即在该组工艺参数 $(N, W)$ 下，颤振所达到的稳定振幅。而(13.3-59)式则给该曲面上的每一点都标上了一个 $\omega$ 值，即稳定振动的频率。

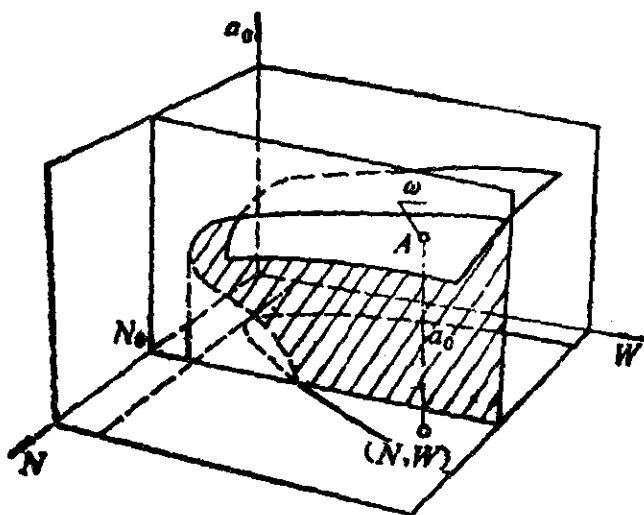


图 13.3-16

令  $a_0 = 0$ ，即可由(13.3-55)、(13.3-56)式回到(13.3-45)、(13.3-46)式，即当振幅很小时，非线性模型的稳定性方程会退化为线性模型的稳定性方程。而图13.3-16中的曲面  $a_0 = \varphi(N, W)$  在  $a_0 = 0$  平面（即  $N-W$  平面）中的截形，即为图13.3-13所示的线性模型的稳定性图（在图13.3-16中只给出了一个不稳定区域）。

图13.3-16中曲面  $a_0 = \varphi(N, W)$  在  $N = N_0(\text{const.})$  截面中的截形绘于图13.3-17，其纵坐标是振幅，横坐标是无量纲的切削宽度。此图反映切削宽度  $W$  与稳定振幅  $a_0$  之间的关系，它揭示了非线性模型与前述线性模型的某些本质上的差异，在此我们扼要

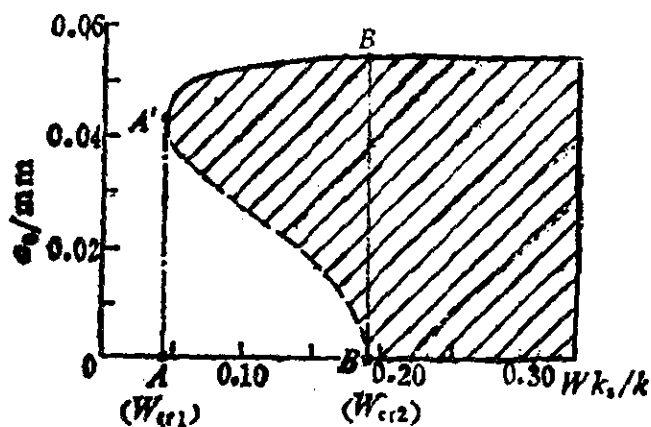


图 13.3-17

地加以说明。

首先需要说明，图上的曲线（实线与虚线）代表总阻尼为零的情况，而阴影区则代表负阻尼的区域，即会发生自激振动的区域，其余部分是正阻尼的区域。当切削宽度 $W$ 从零开始增加时，系统是稳定的，因为工作点 $(W, a_0)$ 处于正阻尼区域，故无自激振动发生。当切削宽度增加，达到图上横轴上的 $B$ 点时，进入负阻尼区，立即发生自激振动，振幅跃升到图上 $B'$ 点，并稳定在那里。如果 $W$ 再继续上升，则振幅将沿图上实线缓慢地上升。另一方面，如果切削宽度 $W$ 从较大的数值开始而逐渐减小，则自激振动的振幅 $a_0$ 将沿图上实线缓慢下降，至 $A'$ 点时，工作点进入正阻尼区，自激振动消失，振幅会从 $A'$ 点跃落到横轴上的 $A$ 点。

将图上 $A$ 、 $B$ 两点所对应的切削宽度分别记为 $W_{0.1}$ 与 $W_{0.2}$ 。当 $W < W_{0.1}$ 时，切削系统对于任何扰动都是稳定的，这相当于相平面 $(x, \dot{x})$ 的原点是全面稳定的；当 $W > W_{0.2}$ 时，相平面的原点是不稳定的，且其外存在一个稳定的极限环，如图12.5-1(a)所示。这时切削系统处于软激励的状态，任何一个微小的扰动都可以使之失稳。

当 $W_{0.1} < W < W_{0.2}$ 时，切削系统对于小的扰动（如果不越过图上虚线的话），是稳定的，而一个大的扰动（如果跨越了虚线而进入负阻尼区域的话），却可以使系统失去稳定性，而振幅跃升到图上实线所代表的稳定颤振状态。这时相平面上的图形如图12.5-1(b)所示，其原点是稳定的，而其外套着一个不稳定极限环及一个稳定极限环。这时切削系统处于硬激励的状态。

由此可见，此非线性模型确实显示了与前述线性模型十分不同的特性。归纳起来，有以下三点：

(1) 振幅的自稳定性——自激振动充分发展以后，会自行稳定在一定的水平上，如图13.3-17上实线所示；在线性理论中，自激振动一旦发生，其振幅会无限上升；

(2) 起振阈与消振阈的分离性——这两个阈值分别对应于图

13.3-17的横轴上的 $A(W_{r1})$ 、 $B(W_{r2})$ 两点，一般 $W_{r1} < W_{r2}$ ，在线性模型中这两个阈值被认为是重合的；

(3) 有限振幅不稳定性——即上述“硬激励”的状态；在线性理论中并不存在这一区域。

引起以上特性的物理根源在于系统的等效阻尼是随振幅而变化的。回顾前述的线性模型，我们知道切削过程的等效阻尼系数 $Wk_s B$  (见13.3-40式)，是与振幅 $a_0$ 无关的。按这里的非线性模型，等效阻尼仍为 $Wk_s B$  (见13.3-55式)，可是由于 $B$ 与颤振频率 $\omega$ 有关 (13.3-48式)，而 $\omega$ 又与振幅 $a_0$ 有关 (13.3-56、13.3-57式)，因此等效阻尼 $Wk_s B$ 会随振幅 $a_0$ 而变化，这种关系绘于图13.3-18中。图中给出了对应于 $W_1$ 、 $W_2$ 与 $W_3$ 三种切削宽度的 $Wk_s B - a_0$ 曲线，且 $W_1 < W_2 < W_3$ 。而水平线 $h$ 则代表机床结构的阻尼系数，此系数与 $a_0$ 及 $W$ 均无关。先看曲线 $-W_1 k_s B - a_0$ ，它与水平线 $h$ 没有交点，无论 $a_0$ 为何值，均有 $-W_1 k_s B < h$ ，即 $h + W_1 k_s B > 0$ ，总阻尼为正，故不会发生自激振动。再看 $-W_3 k_s B - a_0$ 曲线，它与水平线 $h$ 交于 $C$ 点，此点上有 $-W_3 k_s B = h$ ，即 $h + W_3 k_s B = 0$ ，即对应于零阻尼的情况，而 $C$ 点所对应的振幅 $a_3$ 即为稳定振幅。此振幅的稳定性可分析如下：如因偶然干扰使振幅 $a_3$ 略为上升，则由图上可见 $-W k_s B < h$ ，总阻尼 $h + W k_s B > 0$ ，成为正阻尼，振幅会下降，又回到 $a_3$ ；若偶然干扰使 $a_3$ 略为

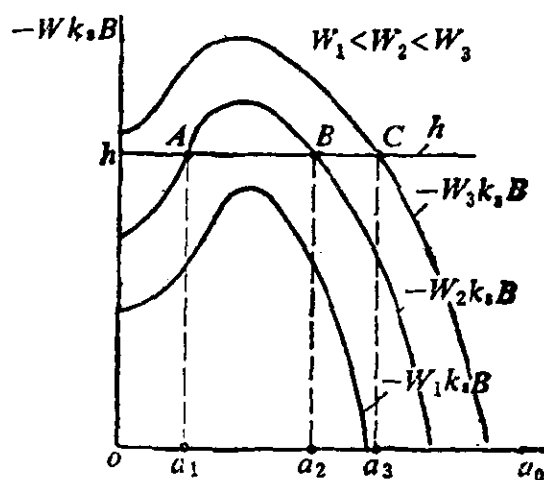


图 13.3-18

下降, 则有  $-Wk_s B > h$ , 总阻尼  $h + Wk_s B < 0$ , 成为负阻尼, 振幅又会回升到  $a_3$ , 因此  $a_3$  是稳定的. 最后, 我们分析曲线  $-W_2 \cdot k_s B - a_0$ , 它与水平线  $h$  有  $A, B$  两个交点. 读者按同样的分析不难发现交点  $B$  所对应的振幅  $a_2$  是稳定的, 而点  $A$  所对应的振幅  $a_1$  则是不稳定的, 一有扰动, 它不是跌落到  $0$  就是跃升到  $a_2$ .

上述非线性模型的种种特性, 在一定程度上都已经得到实验事实的证明.

试比较(13.3-53)式与(13.3-28)式, 前者仅仅只比后者增加了“ $\beta x^3(t)$ ”这一非线性项, 却具有比后者丰富得多的内涵, 能够更好地描述再生颤振的过程与规律. 这表明自激振动本质上是一种非线性振动现象, 需要非线性模型才能有效地加以描述.

以上基于机床结构的非线性刚度的模型, 虽然成功地解释了机床再生颤振中的某些现象与特性, 可是也存在一些困难与问题, 主要是表示机床非线性刚度的(13.3-52)式尚难于由实验加以验证. 此外, 此模型的某些结论也与实验事实不符. 因此, 近年来又提出了其它的模型.

## 2. 模型 I —— 刀刃运动轨迹的一部分越出工件材料之外

13.3.3小节中讲述的再生颤振的线性模型是以以下假设为前提的: 即在振动切削过程中, 刀刃始终不离开工件的材料, 如图13.3-11所示. 可是由于平均切削厚度  $S_0$  总是有限的, 当自激振动的振幅  $a_0$  上升到一定程度, 即满足以下条件时,

$$a_0 > a_{c,r} = S_0 / 2 \sin(\beta/2), \quad (13.3-60)$$

刀刃运动轨迹的一部分会越出工件材料, 式中  $a_{c,r}$  是刀刃开始脱离工件的临界振幅. 这一事实使切削系统成为分段变时延系统, 对切削过程的动态特性产生重大影响.

图13.3-19给出了  $a_0 = 3S_0, \beta = 270^\circ$  的切削情况. 可以检验, (13.3-60)式是满足的, 因此刀刃轨迹  $x(t)$  (细实线) 中  $\widehat{FG}$  这一段已越出工件材料之外. 图中  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$  (虚线) 分别是工件上一转, 上两转, 上三转,  $\dots$  时, 刀刃的运动轨迹.

而粗实线  $ABFC DGE$  则是工件的上表面，记为  $y(t)$ 。它由轨迹  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$  上的某些部分组成。图中阴影部分是被切削层的图形。可以看出，在刀刃轨迹部分地越出工件材料的切削条件下，瞬时切削厚度  $S(t)$  的不仅与刀具在当时的切削轨迹  $x(t)$  及工件上一转的切削轨迹  $x_1(t)$  有关（如图13.3-11那样），而且还可能与  $x_2(t), x_3(t), \dots$  等等有关。此外，被切削层成为不连续的。在这种情况下，瞬时切削厚度的计算公式要复杂得多。由图，有

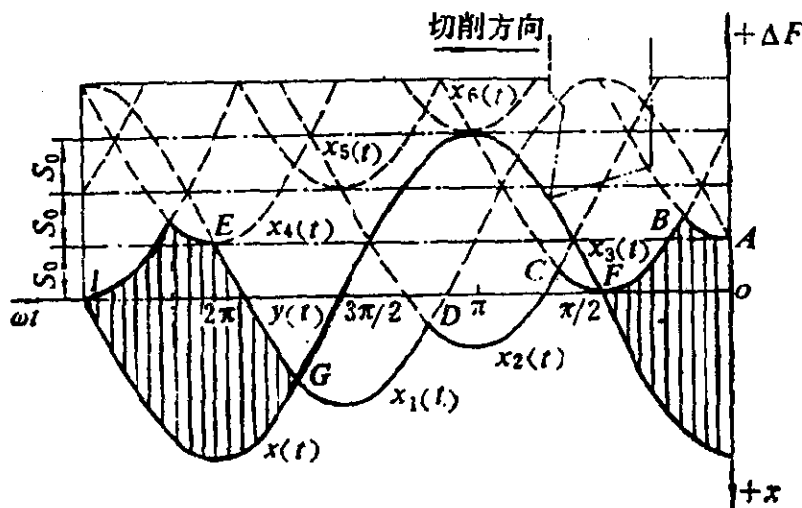


图 13.3-19

$$S(t) = \begin{cases} x(t) - y(t), & \text{当 } x(t) > y(t) \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x(t) \leq y(t) \text{ 时.} \end{cases} \quad (13.3-61)$$

在图13.3-11的情况下， $y(t) = x_1(t)$ ，可是这里情况要复杂得多。由图示情况，有

$$y(t) = \max(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots), \quad (13.3-62)$$

上式表明，对任一时刻  $t$ ，取  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$  诸值中最大者作为  $y(t)$ （不是最大者已被切去，不会留在工件表面上）。而

$$x_1(t) = x(t - T) - S_0; \quad (13.3-63)$$

$$x_2(t) = x(t - 2T) - 2S_0; \quad (13.3-64)$$

$$x_3(t) = x(t - 3T) - 3S_0; \quad (13.3-65)$$

...

瞬时切削厚度的动态变化仍为

$$\Delta S(t) = S(t) - S_0, \quad (13.3-66)$$

动态切削力为

$$\Delta F(t) = W k_s \Delta S(t), \quad (13.3-67)$$

运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + kx(t) = -\Delta F(t), \quad (13.3-68)$$

(13.3-61)~(13.3-68)式定义了一个变时延的系统。此系统的框图在图13.3-20中绘出(图中 $z$ 为刀齿数,这里 $z=1$ )。

此系统的动态特性很难用精确的解析方法加以分析。许多事实表明,一般只有 $\Delta F(t)$ 的基波对于机床的稳定性才是重要的,而其中高次谐波的影响往往可以忽略。因此,取 $\Delta F(t)$ 的基波,并设 $x(t) = a_0 \cos \omega t$ ,且 $\dot{x}(t) = -\omega a_0 \sin \omega t$ ,得,

$$\Delta F(t) = W k_s \left[ A' x(t) - \frac{B'}{\omega} \dot{x}(t) \right], \quad (13.3-69)$$

式中

$$A' = \frac{1}{a_0 \pi} \int_0^{2\pi} \Delta S(t) \cos \omega t d\omega t, \quad (13.3-70)$$

$$B' = \frac{1}{a_0 \pi} \int_0^{2\pi} \Delta S(t) \sin \omega t d\omega t. \quad (13.3-71)$$

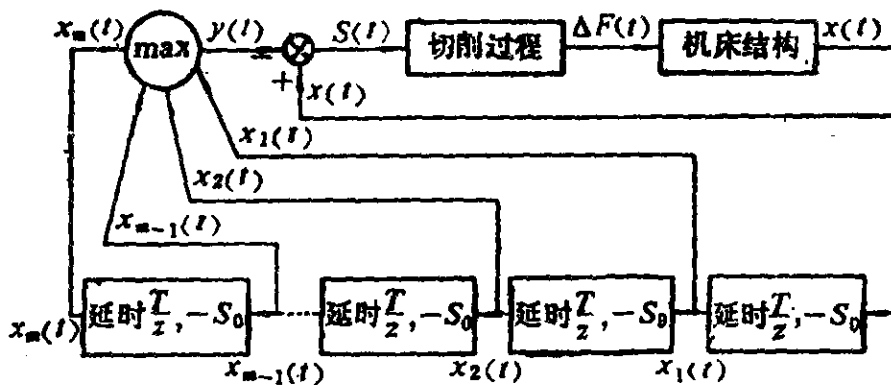


图 13.3-20

(13.3-69)式与(13.3-39)式十分相似,但须注意,在后者中 $A$ 、

$B$ 均为与振幅 $a_0$ 无关的常数,而在前者中的 $A'$ 、 $B'$ 则均随 $a_0$ 而变化。 $A'$ 、 $B'$ 与无量纲振幅 $a_0/S_0$ 的关系如图 13.3-21 所示,图中分别给出了三种 $\beta$ 角的数值下的系数 $A'$ (虚线)与 $B'$ (实线)。可以看出,当 $a_0 < a_{cr}$ 时,有 $A' = A = \text{const}$ , $B' = B = \text{const}$ ,而当 $a_0$ 越过其临界值 $a_{cr}$ 以后, $A'$ 、 $B'$ 均急剧下降。注意到 $Wk_s A'$ 、 $Wk_s B'$ 仍然分别是切削过程的等效刚度与等效阻尼,因此不难理解, $B'$ 的下降,即切削过程中的负阻尼的减小,必然起到稳定振幅和抑制颤振继续上升的作用。

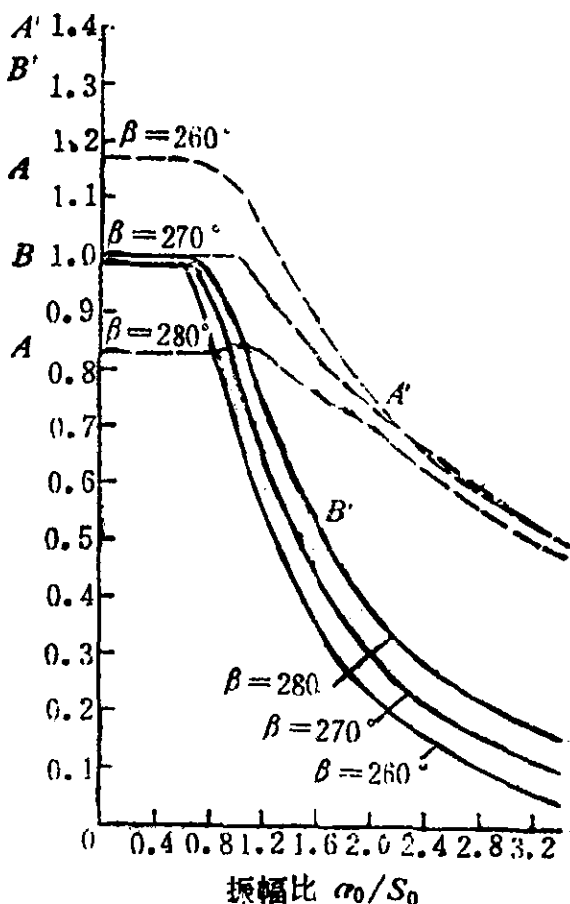


图 13.3-21

以(13.3-69)代入(13.3-68)式,得

$$m\ddot{x}(t) + \frac{1}{\omega} (h - Wk_s B') \dot{x}(t) + (k + Wk_s A') x(t) = 0. \quad (13.3-72)$$

采用与得到(13.3-45)、(13.3-46)式完全相同的分析方法,得该模型的稳定性方程为

$$h - Wk_s B' = 0; \quad (13.3-73)$$

$$\omega^2 = \omega_*^2 + Wk_s A' / m. \quad (13.3-74)$$

其意义与(13.3-55)、(13.3-56)相同,不再赘述。

当 $a_0 \rightarrow 0$ 时, $A' \rightarrow A$ , $B' \rightarrow B$ ,以上稳定性方程即还原为线性模型的状态方程(13.3-45)与(13.3-46)。

此模型仅基于切削过程中当振幅 $a_0$ 足够大时必然会出现的一



个事实，即部分刀刃轨迹越出工件之外，就可成功地解释与预测再生颤振的振幅稳定性，而无需机床结构的非线性的假设。关于刀刃振离工件而使振幅得以稳定的物理机制，可由图 13.3-22 来加以说明。此图表示不同振幅下振动位移  $x(t)$  (横坐标) 和瞬时切削厚度  $S(t)$  (纵坐标) 之间的关系。对于每一振幅  $a_0$ ，我们得

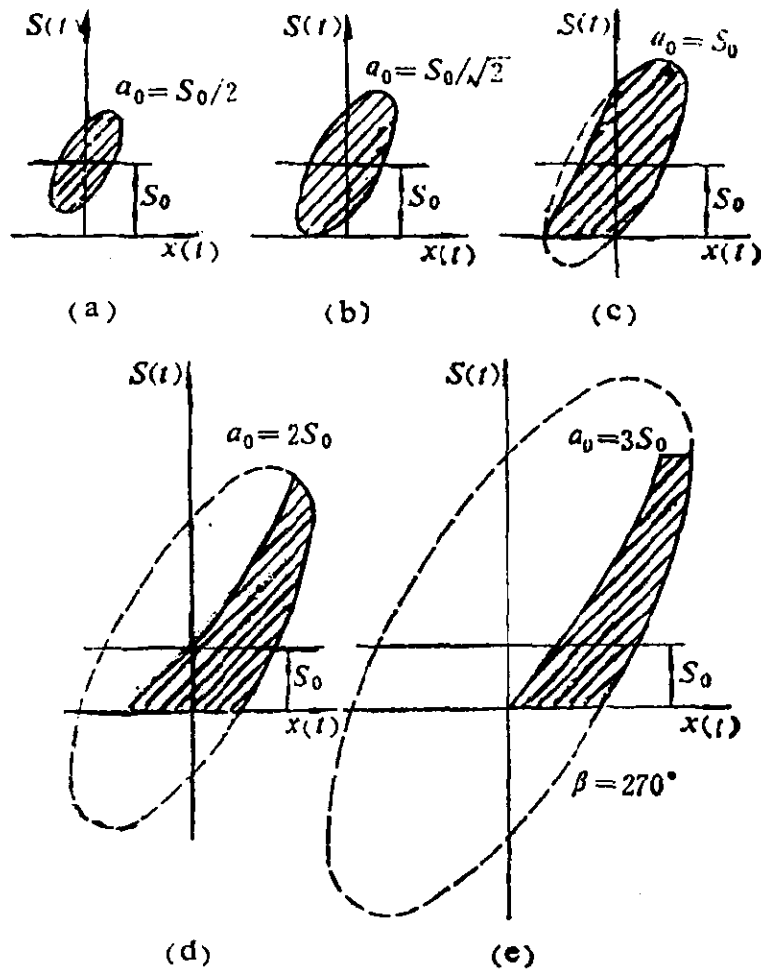


图 13.3-22

到一个以粗实线表示的回线，其面积（阴影区）则正比于在一个振动周期中由切削力对振动系统所做的正功  $A$ 。注意，在刀刃离开工件材料前〔图(a)、(b)〕，上述回线是一个椭圆，而在刀刃的轨迹部分地越出工件材料时，该回线只是椭圆的一部分〔图(c)、(d)、(e)〕，而这几个图中以虚线画出的椭圆，则表示如果刀刃永远不离开工件材料时， $x(t)-S(t)$ 的关系曲线。由图可见，当振幅增加时，“刀刃离开工件材料”这一事实，明显地减小了切削力

对于振动系统所作的正功，起到了抑制自激振动振幅继续增长的作用。

此模型成功地解释了再生自激振动的振幅自稳定性，并能定性地预测各种因素对稳定振幅的影响。可是它却无法解释起振阈与消振阈的分离性以及有限振幅不稳定性。为了说明这些问题，还需将另一个基本的非线性因素也纳入考虑，即切削力对于切削厚度的非线性依赖关系。

### 3. 模型Ⅱ——切削力的非线性特性

当振幅较大时，不能再假定切削力的增量 $\Delta F(t)$ 只是线性地依赖于切削厚度的增量 $\Delta S(t)$ ，如(13.3-67)式所示，而必须考虑其间的非线性依赖关系。

例如，我们可以以一个三次多项式来逼近在较大范围内 $\Delta F$ 与 $\Delta S$ 之间的实验关系，

$$\Delta F = Wk_s[(\Delta S) + c_1(\Delta S)^2 + c_2(\Delta S)^3], \quad (13.3-75)$$

代入(13.3-68)式，得

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + kx(t) = -Wk_s[(\Delta S) + c_1(\Delta S)^2 + c_2(\Delta S)^3], \quad (13.3-76)$$

其中的 $\Delta S$ 则仍由(13.3-61)~(13.3-66)式给出，即仍将刀具的部分轨迹越出工件这一因素加以考虑。这显然是一个非线性变时延系统，鉴于它的解析求解与分析的困难，我们仍采用前述近似方法，来推导其稳定性方程。为此，取(13.3-76)式的基波，且设 $x(t) = a \cos \omega t$ ， $\dot{x}(t) = -\omega a \sin \omega t$ ，得

$$\Delta F(t) = Wk_s \left[ Gx(t) - \frac{H}{\omega} \dot{x}(t) \right], \quad (13.3-77)$$

式中

$$G = \frac{1}{a_0 \pi} \int_0^{2\pi} [(\Delta S) + c_1(\Delta S)^2 + c_2(\Delta S)^3] \cos \omega t d\omega t, \quad (13.3-78)$$

$$H = \frac{1}{a_0 \pi} \int_0^{2\pi} \{ (\Delta S) + c_1 (\Delta S)^2 + c_2 (\Delta S)^3 \} \cos \omega t d\omega t, \quad (13.3-79)$$

以(13.3-78)式代入(13.3-77)式的右边, 并移项, 得

$$m\ddot{x}(t) + \frac{1}{\omega} (h - Wk_s H) \dot{x}(t) + (k + Wk_s G)x(t) = 0, \quad (13.3-80)$$

其中  $-Wk_s H$  及  $Wk_s G$  分别为切削过程的等效阻尼及等效刚度, 它们都随振幅  $a_0$  而变化. 对应于不同  $\beta$  角的  $a_0-H$  关系 (实线) 及  $a_0-G$  关系 (虚线) 在图13.3-23中给出. 采用与得到 (13.3-45) 与 (13.3-46) 式相同的分析方法得到此模型所对应的稳定性方程为

$$h - Wk_s H = 0; \quad (13.3-81)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + Wk_s G/m. \quad (13.3-82)$$

当  $a_0 \rightarrow 0$  时,  $H \rightarrow -B, G \rightarrow A$ , 以上两式即退化为线性模型的稳定性方程, 即(13.3-45)、(13.3-46)式.

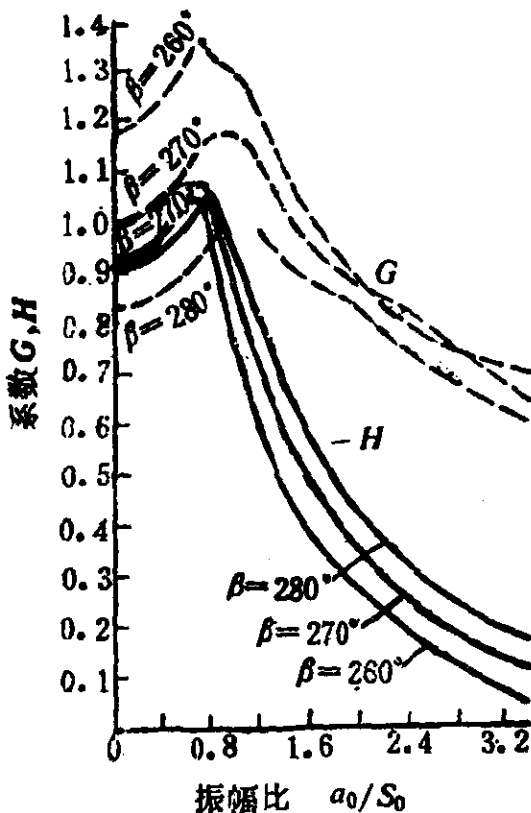


图 13.3-23

(13.3-81)、(13.3-82) 两式与模型 I 的稳定性方程 (13.3-55)、(13.3-56) 两式一样, 也是在  $a_0-N-W$  空间定义了一个阻尼为零的曲面, 其在  $N = N_0(\text{const})$  截面中的截形亦大体上与图 13.3-17 相似. 因而此模型不仅可以解释振幅的自稳定性, 而且可以按对于图 13.3-17 同样的分析方法来原因起振阈与消振阈的分离性以

及有限振幅不稳定性。但是此模型比前面讲述的基于机床结构的非线性刚度的模型要优越，因为它基于最少的、普遍存在的前提假设对实验事实作了定性的，甚至是定量的说明，而无需“非线性刚度”这一前提假设。

机床再生型自激振动的非线性模型成功地解释了自激振动发生、发展与最终走向稳定的全过程，能够预测各种工况与工艺参数对切削系统的稳定性及颤振的振幅的影响，对于机床颤振的排除与预防，特别是对于颤振的在线监控，提供了理论依据与技术指导。

## § 13.4 由于模态耦合引起的自激振动

以上两节讲述了由于速度反馈或位移的延时反馈而产生负阻尼，从而激起系统在一个自由度上自激振动的现象。这一节将要讲述各个自由度之间（或各个模态之间）由于位移反馈使得振动系统从外界摄取能量从而引发自激振动的现象。

### 13.4.1 模态耦合系统的稳定性

考虑一个两自由度系统，其自由振动的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.4-1)$$

这里 $k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )是系统的刚度系数，它们通常应满足以下条件：

$$1. \quad k_{11} > 0, \quad k_{22} > 0 \quad (\text{正刚度}) ; \quad (13.4-2)$$

$$2. \quad k_{12} = k_{21} \quad (\text{对称性}) ; \quad (13.4-3)$$

$$3. \quad k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} > 0 \quad (\text{正定性}) . \quad (13.4-4)$$

此系统的特性我们在第三章及其以后的章节中曾作过仔细的研究。由于此系统是保守的，它不可能产生自激振动。

现在假定此系统的两个自由度上分别受到激振力  $-F_1$  与  $-F_2$  的作用，并且假定  $F_1, F_2$  本身又受到振动位移  $x_1$  与  $x_2$  的控制，即

$$F_1 = F_1(x_1, x_2); \quad F_2 = F_2(x_1, x_2). \quad (13.4-5)$$

将上式线性化，得

$$F_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2; \quad F_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2. \quad (13.4-6)$$

于是(13.4-1)式成为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 &= -\lambda_{11}x_1 - \lambda_{12}x_2; \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 &= -\lambda_{21}x_1 - \lambda_{22}x_2. \end{aligned} \right\} \quad (13.4-7)$$

这里我们略去了系统本身的阻尼，而且假定只有位移反馈，因此，如果是单自由度系统，那么如前所述，是不会发生自激振动的。可是这里是两自由度系统，自激振动是可能发生的。将(13.4-7)式移项，得

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_{11} + \lambda_{11})x_1 + (k_{12} + \lambda_{12})x_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_{21} + \lambda_{21})x_1 + (k_{22} + \lambda_{22})x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.4-8)$$

成为一两自由度系统自由振动的运动方程，可是其每一个刚度系数均由两部分组成：振动系统本身的刚度系数  $k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) 与位移线性反馈的系数  $\lambda_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )。令

$$K_{ij} = k_{ij} + \lambda_{ij}; \quad i, j = 1, 2, \quad (13.4-9)$$

可将(13.4-8)式写成

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + K_{11}x_1 + K_{12}x_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + K_{21}x_1 + K_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.4-10)$$

此式在形式上与(13.4-1)式相似，但是实质上可能有很大的不同，就是它不一定满足(13.4-2)~(13.4-4)式。正因为如此，它有可能发生动态或静态不稳定。其关键在于位移反馈的方式，即函数(13.4-5)的具体形式。

为了判断此系统的稳定性, 我们设形式解为

$$x_1(t) = A_1 e^{pt}, \quad x_2(t) = A_2 e^{pt}. \quad (13.4-11)$$

代入(13.4-10)式, 得

$$\left. \begin{aligned} (m_1 p^2 + K_{11})A_1 + K_{12}A_2 &= 0; \\ K_{21}A_1 + (m_2 p^2 + K_{22})A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.4-12)$$

为有非零解, 必有

$$\begin{vmatrix} m_1 p^2 + K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & m_2 p^2 + K_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

展开, 得

$$m_1 m_2 p^4 + (K_{11} m_2 + K_{22} m_1) p^2 + K_{11} K_{22} - K_{12} K_{21} = 0, \quad (13.4-13)$$

此即特征方程。我们可以按12.3-4小节中的 Routh-Hurwitz 判据来判断系统的稳定性。但是这里我们采用更直接的方法来分折。我们假定对于系统(13.4-10)条件(13.4-2)仍然满足, 即有  $K_{11} > 0, K_{22} > 0$ 。否则系统是静态不稳定的, 正如13.3-1小节中所讲述的那样, 我们先排除这种情况。令

$$K_{11}/m_1 = n_1^2 > 0, \quad K_{22}/m_2 = n_2^2 > 0. \quad (13.4-14)$$

可将(13.4-13)式改写成

$$p^4 + (n_1^2 + n_2^2)p^2 + (K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})/m_1 m_2 = 0 \quad (13.4-15)$$

由此解出

$$(p^2)_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -(n_1^2 + n_2^2) \pm \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4 \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{m_1 m_2}} \right], \quad (13.4-16)$$

或改写成

$$(p^2)_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -(n_1^2 + n_2^2) \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 \frac{K_{12}K_{21}}{m_1 m_2}} \right]. \quad (3.4-17)$$

将解出的  $(p^2)_1$  与  $(p^2)_2$  开方, 分别得  $p_1, p_2$  与  $p_3, p_4$ , 系统的

稳定性即取决于这四个数的取值，而后者又与 $K_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) 诸值有关。以下扼要分析诸 $K_{ij}$ 之间的关系对 $p_1 \sim p_4$ 的取值以及系统的稳定性的影响。

1. 对于第三章所讲述两自由度系统，(13.4-2)~(13.4-4) 诸条件均满足，则由(13.4-2)与(13.4-14)式知 $n_1^2, n_2^2 > 0$ ，由(13.4-3)式知(13.4-17)式中根号中的部分取正值，即

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 \frac{K_{12}K_{21}}{m_1 m_2} > 0, \quad (13.4-18)$$

因此该根式取实数值，而由(13.4-4)式知(13.4-16)式知该根式取值小于 $|n_1^2 + n_2^2|$ ，于是 $(p^2)_1, (p^2)_2$ 均取负的实数值，设分别为 $-\omega_1^2, -\omega_2^2$ ，这里 $\omega_1, \omega_2$ 为正实数。再开方，得

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{(p^2)_1} = \pm i\omega_1, \quad p_{3,4} = \pm \sqrt{(p^2)_2} = \pm i\omega_2.$$

这对应于等幅的定常振动，与第三章的结论是一致的。这时系统是稳定的。

2. 我们假设(13.4-18)式仍然成立，这时(13.4-17)式，亦即(13.4-16)式中的根式取实数值，但如果(13.4-4)式不满足，即假定有 $K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21} < 0$ ，则根式取值必大于 $|n_1^2 + n_2^2|$ ，于是 $(p^2)_1 > 0$ ，再开方，得

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{(p^2)_1} = \pm \zeta,$$

其中 $\zeta$ 为正实数，解中包含 $e^{\zeta t}$ 的成分，为非周期发散的不稳定解，即静态不稳定解。

综合以上两点，可知在(13.4-18)式的条件下，系统要么存在稳定的周期运动（由于系统中实际存在的阻尼，此周期运动必然会衰减掉），要么会出现静态不稳定，但不会产生动态不稳定性，即不会发生自激振动。

3. 如果有

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 \frac{K_{12}K_{21}}{m_1 m_2} < 0, \quad (13.4-19)$$

则由(13.4-17)式知两根为共轭复数

$$(p^2)_{1,2} = -h \pm il,$$

再开方, 得

$$p_{1,2,3,4} = \sqrt{(p^2)_{1,2}} = \pm(\xi \pm i\omega),$$

式中 $h, l, \xi, \omega$ 均为正实数。而系统的解为(以 $x_1$ 为例):

$$x_1(t) = Ae^{\xi t} e^{i\omega t} + Be^{\xi t} e^{-i\omega t} + Ce^{-\xi t} e^{i\omega t} + De^{-\xi t} e^{-i\omega t},$$

其中前两项即为自激振动项。

两自由度(或多自由度)系统因满足(13.4-19)式而出现的自激振动, 称为模态耦合型自激振动。它显然不同于前面讲过的由于负阻尼激发的自激振动, 因为这里我们并未涉及阻尼问题。

回顾(13.4-14)式,  $n_1, n_2$ 是系统的两个自由度在不存在相互耦合的条件下( $k_{12} = k_{21} = 0$ )的自然频率, 而(13.4-18)式表明,  $n_1$ 与 $n_2$ 这两个频率相距愈近, 则愈易于引起模态耦合的自激振动。这一点, 我们在后面还会讲到。

### 13.4.2 金属切削中的模态耦合自激振动

我们以金属切削过程中的模态耦合颤振为例, 来进一步说明这类自激振动发生的机理、条件及其分析方法。

考虑一镗杆, 其截面为长方形, 在其端部装有刀夹与镗刀, 如图13.4-1(a)、(b)所示。刀夹联同镗刀可在 $x_1, x_2$ 两个相互垂直的方向上振动。设镗杆(可视为一悬臂梁)在此两方向上的刚度系数分别为 $k_1$ 与 $k_2$ , 由图可见,

$$k_1 < k_2. \quad (13.4-20)$$

刀夹连同镗杆的质量设为 $m$ , 该振动系统的简图可以图13.4-1(b)来表示。图中 $y$ 轴为工件上被切削表面的法线方向, 切削厚度 $S$ 即在此方向上测量。 $F$ 为工具所受切削力。如果不考虑切削力的作用, 此系统的运动方程为

$$m\ddot{x}_1 + k_1 x_1 = 0; \quad m\ddot{x}_2 + k_2 x_2 = 0. \quad (13.4-21)$$



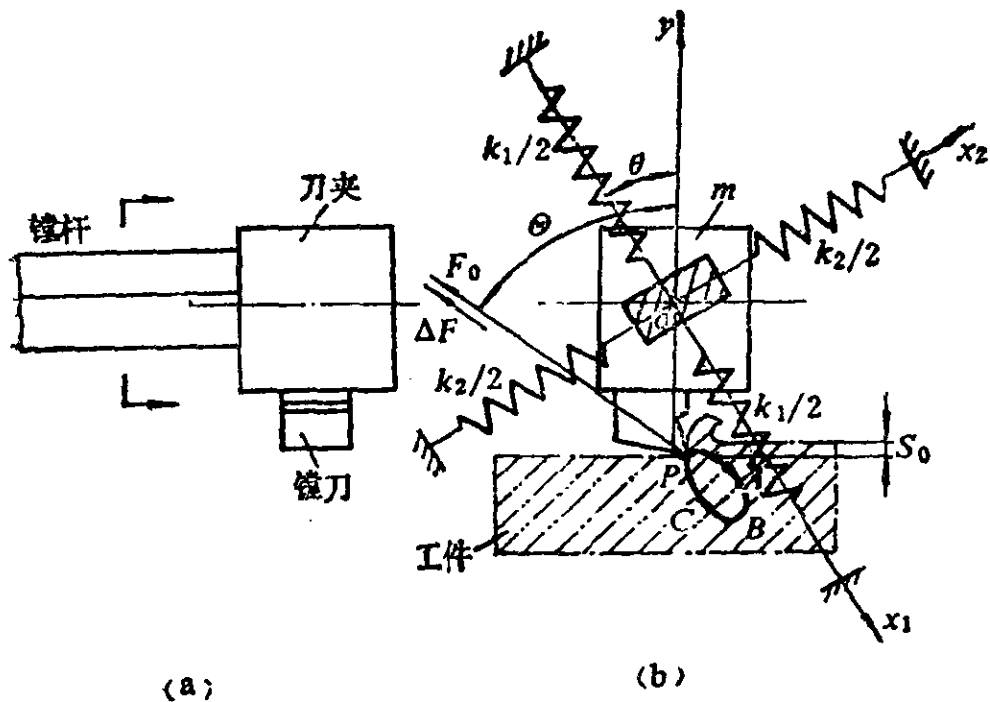


图 13.4-1

这是两个独立的单自由度系统的运动方程，其间并无耦合。此外，此例中两个自由度的质量均为 $m$ 。下面我们就会看到，正是切削力的作用，使这两个自由度上的运动耦合起来，并导致自激振动。在此例中切削过程仍然起着力的控制机构与位移反馈的作用。

考虑到切削力的作用，运动方程成为

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k_1 x_1 &= -\Delta F_{11} - \Delta F_{12} \\ m\ddot{x}_2 + k_2 x_2 &= -\Delta F_{21} - \Delta F_{22} \end{aligned} \quad (13.4-22)$$

上式中 $\Delta F_{11}$ 是在 $x_1$ 轴正方向上的振动位移在该轴负方向上引起的切削力的增量，可推导如下：设刀刃在 $x$ 轴正向的位移量为 $x_1$ ，其在 $y$ 轴负向的投影为 $x_1 \cos \theta$ ，此即切削厚度的变化 $\Delta S$ ， $\Delta S$ 引起切削力的增量 $\Delta F = W k_s \Delta S = W k_s x_1 \cos \theta$ ，假定 $\Delta F$ 作用在平均切削力 $F_0$ 的方向上，而 $\Delta F$ 在 $x_1$ 轴负向上的投影 $\Delta F_{11}$ ，为

$$\Delta F_{11} = W k_s x_1 \cos \theta \cos(\Theta - \theta), \quad (13.4-23)$$

式中 $W$ 、 $k_s$ 分别为切削宽度（或工件的厚度）和切削力的切削厚

度系数，其意义与(13.3-29)式中同样符号的意义相同。角度 $\theta$ 与 $\Theta$ 的意义可从图13.4-1(b)中看出。

由于 $\Delta F_{11}$ 的作用方向是指向 $x_1$ 轴的负向，故在(13.4-22)式的右边的 $\Delta F_{11}$ 前冠以负号。其它负号的来源也相同。

$\Delta F_{12}$ 是 $x_2$ 轴正方向的振动位移，在 $x_1$ 轴负方向上引起的切削力的变化，

$$\Delta F_{12} = Wk_s x_2 \cos(90^\circ + \theta) \cos(\Theta - \theta). \quad (13.4-24)$$

$\Delta F_{21}$ 、 $\Delta F_{22}$ 的意义可类推，

$$\Delta F_{21} = Wk_s x_1 \cos\theta \cos(90^\circ - (\Theta - \theta)), \quad (13.4-25)$$

$$\Delta F_{22} = Wk_s x_2 \cos(90^\circ + \theta) \cos(90^\circ - (\Theta - \theta)). \quad (13.4-26)$$

需要说明，除了上述切削力的诸动态变化量 $\Delta F_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )以外，作用在刀具上的还有平均切削力 $F_0$ ，它是由平均切削厚度 $S_0$ 引起的。在(13.4-22)式的右边，并未计入 $F_0$ ，这是由于图13.4-1(b)中 $x_1, x_2$ 坐标系的原点 $o$ 放在 $F_0$ 作用的平衡点上，即位移 $x_1$ 、 $x_2$ 是从该平衡点开始计算的。

将(13.4-23)~(13.4-26)式代入(13.4-22)式，并移项，得

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + (k_1 + Wk_s \cos\theta \cos(\Theta - \theta))x_1 \\ + Wk_s \cos\theta' \cos(\Theta - \theta)x_2 = 0; \\ m\ddot{x}_2 + Wk_s \cos\theta \cos(\Theta - \theta')x_1 + (k_2 \\ + Wk_s \cos\theta' \cos(\Theta - \theta'))x_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.4-27)$$

式中

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}. \quad (13.4-28)$$

记

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= k_1 + Wk_s \cos\theta \cos(\Theta - \theta); \\ K_{12} &= Wk_s \cos\theta' \cos(\Theta - \theta); \\ K_{21} &= Wk_s \cos\theta \cos(\Theta - \theta'); \\ K_{22} &= k_2 + Wk_s \cos\theta' \cos(\Theta - \theta'), \end{aligned} \right\} \quad (13.4-29)$$

可将(13.4-27)缩写为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + K_{11}x_1 + K_{12}x_2 &= 0; \\ m\ddot{x}_2 + K_{21}x_1 + K_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.4-30)$$

上式与(13.4-10)式的形式相同,但上式中有

$$m_1 = m_2 = m. \quad (13.4-31)$$

现在我们按上一小节关于(13.4-10)式所示系统的稳定性和自激振动的分析与结论,来分析(13.4-30)式所表示的切削系统的动态稳定性问题。(13.4-18)与(13.4-19)式分别表示了不会出现与将会出现自激振动的条件。现在我们来分析这两种条件之间的临界状态:

$$(K_{11} - K_{22})^2 + 4K_{12}K_{21} = 0, \quad (13.4-32)$$

上式中已将(13.4-31)式纳入考虑,因而消去了 $m_1$ 、 $m_2$ 。将(13.4-29)式代入上式,可解出临界切削宽度为

$$W_{cr} = \frac{1}{k_s} \frac{k_2 - k_1}{u_1 - u_2 + 2\sqrt{-u_1 u_2}}, \quad (13.4-33)$$

式中

$$u_1 = \cos\theta \cos(\Theta - \theta), \quad u_2 = \cos\theta' \cos(\Theta - \theta') \quad (13.4-34)$$

分别称为 $x_1$ 、 $x_2$ 轴的方向系数。在给定的条件( $k_s$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ )下,如果切削宽度 $W > W_{cr}$ ,切削系统将会发生自激振动(振幅上升);如果 $W < W_{cr}$ ,则不会发生自激振动(初始振幅会因为实际上存在的阻尼作用而衰减)。

从物理意义上看, $W_{cr}$ 应为正实数,为此要求(13.4-33)式中的

$$u_1 u_2 < 0 \quad (13.4-35)$$

将(13.4-34)、(13.4-28)式代入,化简,得

$$\cos^2\Theta - \cos^2(2\theta - \Theta) < 0, \quad (13.4-36)$$

而为使上式满足,一定要有

$$0 < \theta < \Theta, \quad (13.4-37)$$

从图13.4-1(b)可见,以上条件相当于 $x_1$ 轴(即刚度较小的轴)应

落在工件表面法线方向 $y$ 与切削力 $F_0$ 的方向之间时,才可能发生自激振动。而在此角度范围之外, $\sqrt{-u_1 u_2}$ 为虚数, $W_{cr}$ 不存在,系统不会由于模态耦合而发生自激振动。在(13.4-37)式表示的范围内, $W_{cr}$ 与 $\theta$ 角的关系以极坐标图表示在图13.4-2上。在此图中工件表面的法线方向 $y$ 与切削力 $F$ 的方向,及其间夹角 $\Theta$ 视为不变,这也就是将工件与工具的位置视为不变,变化的是 $\theta$ 角,也就是镗杆截面刚度较小的方向( $x_1$ 轴)相对于 $y$ 轴的取向角 $\theta$ 。在 $0 \sim \Theta$ 的范围内, $W_{cr}$ 随 $\theta$ 而变化,而在 $\theta = \Theta/2$ 时, $W_{cr}$ 取极小值。在该范围以外, $W_{cr}$ 不存在。

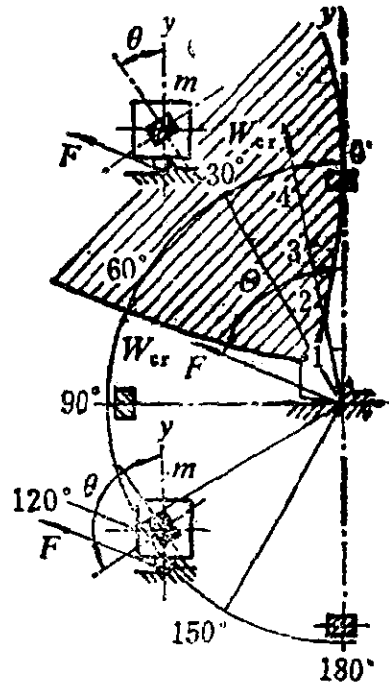


图 13.4-2

以上结果给我们提供了一些颇具实际意义的启示。首先是如何布置刀具系统的刚度主轴方向的问题,应该尽量避免将最小刚度的方向布置在 $F_0$ 与 $y$ 的夹角内,万不得已,也应尽可能避开 $\theta = \Theta/2$ 的位置。其次,(13.4-33)式表明, $W_{cr}$ 与刚度差 $k_2 - k_1$ 成正比。因此,圆形截面的镗杆( $k_1 = k_2$ )最容易产生模态耦合的自激振动。而对镗杆在两个相对的方向上加以削扁,使得 $k_1 < k_2$ ,这样似乎是削弱了系统的刚度,但事实上只要合理布置刚性立轴的方向,反而有利于提高 $W_{cr}$ ,即提高系统抗模态耦合自激振动的能力,这一结论已得到实验事实的支持。

在结束这一小节之前,我们来说明金属切削过程中的模态耦合颤振的能量机制。让我们看图13.4-1(b),由于自激振动,刀刃在工件中的移动轨迹为一椭圆 $PABCP$ ,其长轴沿 $x_1$ 轴的方向。注意到切削力 $F_0$ 与 $\Delta F$ 的方向,可见在刀刃沿 $\widehat{PAB}$ 切入工

件时，切削力作负功，而在刀刃沿 $\widehat{BCP}$ 切出工件时，切削力作正功。可是刀刃在行程 $\widehat{PAB}$ 时的切削厚度比较小，因而负功的数量较小；而行程 $\widehat{BCP}$ 的切削厚度比较大，因而正功较大，正负相消，在每个振动周期中切削力都对振动系统做了净的正功，这正是自激振动所赖以不断扩大的能量来源。

### § 13.5 自激振动的识别、建模与防治

当工作机械或系统发生了强烈的振动，而需加以抑制或消除时，首先应从振动的外部形态上判明所发生的振动到底是自激振动还是强迫振动。首先，有些自激振动是与系统的工作相联系的，例如金属切削过程中的自激振动，只有当刀具实际上在进行切削时才会发生。刀具一旦退出工件，即使机床还在空运转，也不会发生自激振动。而由于失衡，回转部件或往复运动部件引起的强迫振动在机器空运转中也会出现。因此可以让系统退出工作，而仅作空运转，观察振动是否消失，如果消失，则该种振动可能是由于系统工作过程中的内在反馈激起的自激振动。

其次，自激振动的幅值往往对系统的工作参数非常敏感，当某个工作参数达到某一阈值时，自激振动会突然发生或突然消失，表现出一种“陡起陡落”的特征。可是强迫振动对于工作参数的依赖关系，却往往比较平缓，或者不明显。因此可以采取调整系统工作参数，观察振动强度变化性态的办法，来判别是强迫振动或自激振动。

再次，自激振动的频率一般接近于机器结构的某一个失稳模态的自然频率，而较少受到机器运转速度和其它外界扰动的影响。而强迫振动的频率则取决于激振源的频率，因而较易于受到机器工作条件（如转速等）的影响。因此可改变系统工作条件或

工作参数，观察振动频率的变化，借以判明振动的类型。

一旦判明所发生的振动确属自激振动以后，最重要、最困难的工作是要查明其物理机制，建立其数学模型，借以指导自激振动的防治。由于引发自激振动的各种内在反馈往往比较隐蔽，而其变化规律又相当复杂，往往难以预料。因此对它的防治需要基于一定的理论模型，否则难以收到全面、持久的效果。

自激振动的机理一般都比较复杂，在揭示其机理建立其模型时，需要将试验与理论分析结合起来。一般是由理论分析确定模型的种类与形式，而由试验确定其中的参数。在建模时还要注意抓住主要因素，而略去一些次要的因素。模型的繁简需要适度，过简，则有可能漏掉主要因素和规律，造成假象；过繁，则难于分析求解，看不清各种主要因素之间的关系。自激振动系统的建模往往很难一蹴而就，而必须反复检验、比较、修改，才能臻于完善。

所建立的模型很可能是时延的，非线性的或变参数的微分方程，往往难于用精确的解析方法来分析求解。可行的方法一是用第十二章或本章中讲述的各种近似方法，或者以下一章即将讲述的数字仿真的方法来分析与求解。将对于模型的分析结果与实际系统的设计、改进、控制与操作的可能性结合起来，就会得到关于防治自激振动的措施与方法的启示。其中有些措施会是出人意料之外而无法由直观的形象得出来的。但只要这些结论是基于正确的理论分析并得到实验的验证，我们就没有必要为之感到惊异和难于接受。如上一节中讲到的削扁镗杆反而比未削扁的圆截面镗杆更能抵抗自激振动，即为一例。

防治颤振的最根本最有效的办法，是在机器、结构或系统的设计阶段就考虑到其抗自激振动的功能。基于一定的模型，现在已经有可能采用计算机数字仿真的办法，预测各种设计方案的动态稳定性与抗振性，从而对设计方案进行优化，以确保设备制造出来以后，具有良好的稳定性与防止自激振动的能力。由于在设

计阶段受到的限制比较少，有较多的回旋余地，可决定采用各种可能的措施，有效地抑制或切断设备中的内在反馈链，或增强结构的抗振能力。

在设备的运行过程中，合理优选与调节其工作参数，也是防治颤振的有效措施。使工作点落在不发生自激振动的稳定区域，如图13.3-13(a)中没有阴影的区域，当然能防止自激振动的发生。但是这样做往往要付出降低生产率的代价。近年来关于金属切削过程非线性颤振理论的研究成果表明，即使在发生自激振动的“不稳定区域”，颤振振幅也在很大的程度上受到工艺参数的控制，合理选取这些参数，有可能将振幅抑制到一个可以接受的水平。因此，不稳定的阴影区域并不一定是工作中的“禁区”，而抑制颤振也并不一定要以牺牲生产率作为代价。

图13.5-1是按13.3.4小节中的非线性模型Ⅱ计算出的临界切削宽度 $W_c$ 下的振幅 $a_0$ 与机床主轴转速 $N$ 之间的关系，可见在某些区域， $N$ 的微小变化，可以导致 $a_0$ 的急剧下降，即起到抑制颤振的作用。这一结论已由实验所证实。

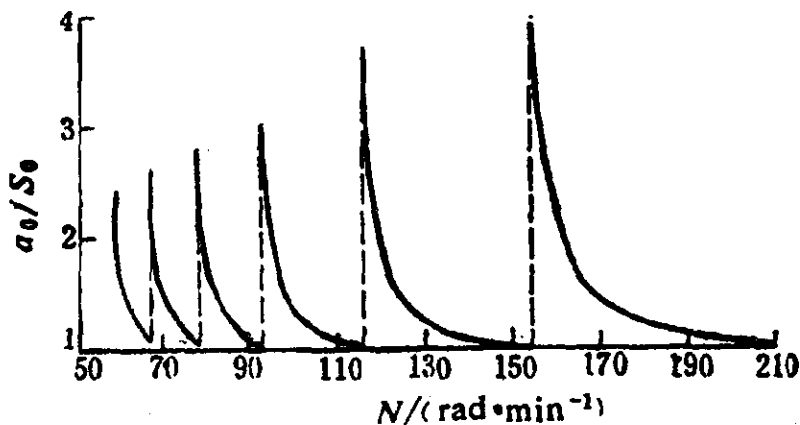


图 13.5-1

模型与实验所揭示的更令人惊异的结果是，在剧烈的自激振动区域的“背后”还可能有“风平浪静”而具有高生产率的稳定区域。图13.5-2是按13.3.4小节中的模型Ⅲ计算出来的，它表示名义切削厚度 $S_0$ 与颤振振幅 $a_0$ 之间的关系。图上曲线表明，开

始增加 $S_0$ ，振幅会相应增加。这是易于理解的，因为机床的负荷随 $S_0$ 上升，颤振趋于强烈。可是出人意料的是，理论预测指出当 $S_0$ 增加到超过某一临界值（图上 $S_0 = 54 \times 10^{-3} \text{mm}$ 处）以后，颤振将会突然消失，系统还归稳定。这一现象是由于(13.3-76)式所示的切削力的非线性特性所引起的。图13.5-2上还给出了实验数据分布的范围，可见实验结果完全证实了理论预测。这一结果的意义是，在一定的条件下，适当增加切削负荷，既可消除颤振，又可以提高机床的工作效率。

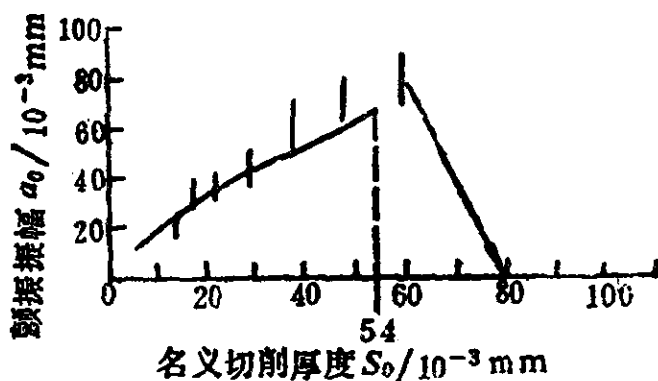


图 13.5-2

对于生产设备或系统的自激振动模型的分析与研究已揭示出优化与调节运行参数，以抑制颤振的广阔的可能性。

更周全的办法是如第七章所述，对生产设备发生自激振动的可能性进行在线监视、早期诊断与及时报警或实时调控，以期将自激振动扑灭在其孕育阶段，而防患于未然。这方面的试验研究也已取得可喜的进展。

此外，第七章所述有关抑制强迫振动的某些措施，也可用于抑制自激振动。

## 思考题

以下的说法对不对？准确不准确？是否需要补充？



1. 自激振动是自行激起的振动，而无需外界的任何激励。
2. 自激振动系统是一触即发的，无论多么小的扰动都可以激起自激振动。
3. 自激振动的产生，基于负阻尼的作用，如果没有负阻尼，就不可能产生自激振动。
4. 自激振动在充分扩大以后，一定会因为某种或某些非线性因素的作用，而稳定下来。
5. 稳态自激振动的振幅与周期是由系统本身决定的，而与初始扰动无关。
6. 自激振动系统能自行扩大与维持振动，无需外界能源。

## 习 题

13-1 举出由于速度反馈、位移延时反馈与模态耦合所导致的自激振动各一例，并对其机理作出定性的说明。

13-2 举出一个静态不稳定的实例，并加以定性的说明。

13-3 假设瞬时切削厚度、切削力由公式(13.3-29)~(13.3-39)表示，而机床结构的动态性能由其动柔度  $R(\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$  表示，试推导切削系统的稳定性方程。

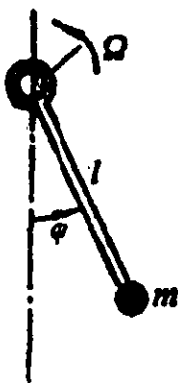


图 13-6

13-4 证明(13.3-55)、(13.3-56)式。

13-5 试说明图13.3-17中虚线上的点代表不稳定的振幅。

13-6 图13-6所示为一Froude摆，摆锤  $m$  连于长度为  $l$  的摆杆，摆杆的上端为套筒，套在一轴上，而轴以等角速度  $\Omega$  旋转。轴与套筒之间的摩擦力矩  $M$  与其间的相对转速  $(\dot{\Omega} - \dot{\varphi})$  之间关系如图13.2-5中曲线所示。此外，此摆还受到与  $\dot{\varphi}$  成正比的粘滞阻力。试写出此摆以摆角  $\varphi$  为坐标的运动方程，然后将函数  $M(\dot{\Omega} - \dot{\varphi})$  在  $\Omega$  的附近线性化，解释此摆发生自激振动的机理与条件。

# 第十四章 振动问题分析求解 中的计算方法

电子数字计算机的发展和运用，为复杂振动问题的分析与求解提供了有力的技术与工具，并开辟了极其广阔的发展前景。本章讲述以计算机分析求解振动问题的几种常用算法，主要是求解特征值问题的算法、计算线性系统响应的转移矩阵分析算法和计算机数字仿真的算法。

## § 14.1 求解特征值问题的计算方法

许多振动问题的分析与建模均可归结为特征值问题，因此特征值问题求解的算法对于振动分析具有重要意义。第四章讲过，直接求解一个 $n$ 自由度系统的特征值问题，需要解一个 $n$ 次代数方程，即特征方程及一个 $n$ 元一次代数方程组。当 $n$ 的数目很大时，这个计算工作是相当繁重的。因此已经研究出一些比较有效的特征值问题求解算法，其中包括易于编程的迭代算法。这一节介绍几种有关的算法与技巧。

标准特征值问题由下式表示，

$$[A]\{u\} = \lambda\{u\}, \quad (14.1-1)$$

式中 $[A]$ 为 $n \times n$ 方阵。对于振动问题的分析与建模来说，具有重要意义的是当 $[A]$ 为实对称矩阵的情形。在这种情况下，一定存在 $n$ 个实数的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。（它们之间可以相等，或不

相等), 同时也可求出  $n$  个相应的  $n$  维特征向量  $\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\}$ , 它们之间相互正交, 即满足

$$\{u^{(i)}\}^T \{u^{(j)}\} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j. \quad (14.1-2)$$

因此它们可以在  $n$  维空间构成一组线性无关的坐标基. 由于已经有了比较成熟、有效的方法来计算实对称矩阵  $[A]$  的特征值与特征向量, 如 Jacobi 的旋转迭代法等, 因此其他类型的特征值问题都希望能先转化成实对称矩阵的标准特征值问题, 然后再计算求解.

我们已经知道, 线性系统自由振动的分析会导致以下广义特征值问题

$$[k]\{u\} = \lambda[m]\{u\}, \quad (14.1-3)$$

式中  $[m]$ 、 $[k]$  均为实对称矩阵. 此外, 我们假定  $[m]$  还是正定的. 采用 Cholesky 的三角分解法, 将  $[m]$  矩阵分解为两个三角矩阵之积,

$$[m] = [L][L]^T = [U]^T[U]. \quad (14.1-4)$$

就可将 (14.1-3) 的广义特征值问题转化为实对称矩阵的标准特征值问题. 上式中  $[L]$ 、 $[U]$  分别为下三角和上三角矩阵. 如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

事实上, 将 (14.1-4) 式代入 (14.1-3) 式, 有

$$[k]\{u\} = \lambda[U]^T[U]\{u\},$$

等式两端左乘以  $([U]^T)^{-1}$ , 得

$$([U]^T)^{-1}[k]\{u\} = \lambda[U]\{u\}. \quad (14.1-5)$$

令

$$[U]\{u\} = \{v\}, \quad (14.1-6)$$

则有

$$\{u\} = [U]^{-1}\{v\}, \quad (14.1-7)$$

代入 (14.1-5) 式,

$$([U]^T)^{-1}[k][U]^{-1}\{v\} = \lambda\{v\}. \quad (14.1-8)$$

易知矩阵

$$\{A\} = (\{U\}^T)^{-1} \{k\} \{U\}^{-1} \quad (14.1-9)$$

是对称矩阵，而(14.1-8)式可写成

$$\{A\}\{v\} = \lambda\{v\}, \quad (14.1-10)$$

即成为一个关于实对称矩阵 $\{A\}$ 的标准特征值问题。其特征值 $\lambda$ 即为原问题(14.1-3)式的特征值。而所求特征向量 $\{v\}$ 与原问题的特征向量 $\{u\}$ 由(14.1-6)、(14.1-7)式相联系。

### 14.1.1 实对称正定方阵的Cholesky三角分解法

设 $\{m\} = (m_{ij})$ 为一实对称正定方阵，对之进行Cholesky分解，其实是求解以下矩阵方程

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}, \quad (14.1-11)$$

其中 $m_{ij}$ 是已知量，而 $u_{ij}$ 则为欲求量，其计算方法如下：

$$u_{11} = \sqrt{m_{11}}; \quad (14.1-12)$$

$$u_{1j} = m_{1j}/u_{11}, \quad j = 2, 3, \dots, n; \quad (14.1-13)$$

$$u_{ii} = \sqrt{m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad (14.1-14)$$

$$u_{ij} = \left( m_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right) / u_{ii}, \quad i = 2, 3, \dots, n; j = i+1, \dots, n. \quad (14.1-15)$$

易于验证, 按以上公式算出的  $u_{i,j}$  确能使(14.1-11)式满足。

由于已假定  $(m)$  是正定的, 因此有

$$m_{i,i} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (14.1-16)$$

$$m_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{k,i}^2 > 0, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (14.1-17)$$

这保证在计算过程中根号中的数值不会为负, 且分母不会为零, 因而计算过程得以进行到底。

**例14.1** 考虑广义特征值问题(14.1-3)式, 其中的  $(k)$ ,  $(m)$  矩阵分别为

$$(k) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (m) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (a)$$

试利用  $(m)$  的Cholesky分解法, 将该特征值问题化成标准特征值问题。

**解:** 按公式(14.1-12)~(14.1-15)对  $(m)$  进行三角分解, 可得

$$(U) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{8}{5}} \end{pmatrix}, \quad ((U)^T) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{8}{5}} \end{pmatrix}, \quad (b)$$

求逆阵, 得

$$(U)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{40}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{8}} \end{pmatrix}, \quad ((U)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{40}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{5}{8}} \end{pmatrix}, \quad (c)$$

再由(14.1-9)式得

$(A) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{40}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{5}{8}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{40}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{8}} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{4} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 3 & -\frac{5}{4} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (d)$$

于是特征值问题(14.1-3)式成为(14.1-10)式,即关于实对称矩阵  $(A)$  的标准特征值问题.

### 14.1.2 求解关于实对称方阵的特征值问题的Jacobi旋转迭代法

采用三角分解法,将关于线性系统振动分析的广义特征值问题转化成实对称矩阵的标准特征值问题以后,可采用Jacobi旋转迭代法,求出其全部的特征值与特征向量.

#### 1. 特征值问题与坐标旋转变换的几何意义

设  $n \times n$  对称方阵为

$$(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}. \quad (14.1-18)$$

与之相关联的标准特征值问题为

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (14.1-19)$$

按前述方法易于解出其两个特征值为

$$\lambda_1 = 1.4689, \lambda_2 = 9.5311. \quad (14.1-20)$$

而所对应的正规化特征向量为

$$\{v^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.7497 \\ 0.6618 \end{Bmatrix}, \{v^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.6618 \\ 0.7497 \end{Bmatrix}. \quad (14.1-21)$$

易于检验 $\{v\}_1^T \{v\}_2 = 0$ ，即两特征向量确是正交的。

我们知道，一个矩阵 $(A)$ 作用在一个向量 $\{a\}$ 上，将会得到另一个向量 $\{b\}$ ，即有

$$(A)\{a\} = \{b\}, \quad (14.1-22)$$

一般说来， $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 两者的方向与长度均不相同。而对一个确定的矩阵来说，可以在空间找到某些特殊的向量，它们在经过该矩阵作用以后，只改变其长度，而保持其方向不变，此即称为该矩阵的特征向量。如对于(14.1-18)式给出的矩阵有

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7497 \\ 0.6618 \end{Bmatrix} = 1.4689 \begin{Bmatrix} 0.7497 \\ 0.6618 \end{Bmatrix}, \quad (14.1-23)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.6618 \\ 0.7497 \end{Bmatrix} = 9.5311 \begin{Bmatrix} -0.6618 \\ 0.7497 \end{Bmatrix}.$$

这表明该两特征向量经给定矩阵作用后，其方向不变，仅长度分别扩大为原来的 $\lambda_1 = 1.4689$ 倍及 $\lambda_2 = 9.5311$ 倍。这里 $\lambda_1, \lambda_2$ 是对应于该两特征向量的特征值。

显然，如果某向量 $\{u\}$ 是一个矩阵的特征向量，那么 $\alpha\{u\}$ 也是该矩阵的特征向量。这里 $\alpha$ 是任意实数。由此看来，作为一个特征向量，重要的是它的方向，而不是它的长度。从这一点上讲，毋宁将特征向量称为“特征方向”。而一个矩阵如果是实对称的话，那么其“特征方向”在空间是相互正交的。

由以上分析可知，一个矩阵对整个空间的作用，可以归结为在它的几个特征方向上的均匀的拉伸(当 $\lambda > 1$ )或压缩( $0 < \lambda < 1$ )。如果矩阵不是正定的，则有的特征值 $\lambda < 0$ ，这还表示空间在对应方向上会发生镜面映射。(14.1-18)式给出的矩阵使二维空间发生“变形”的情况如图 14.1-1 所示。这种“变形”归结为在

$\{v^{(1)}\}$ ,  $\{v^{(2)}\}$ 两个方向上的均匀拉伸, 拉伸率则分别为 $\lambda_1, \lambda_2$ . 矩阵 $(A)$ 对任意向量 $\{a\}$ 的作用以(14.1-22)式表示, 其中 $\{b\}$ 为作用后得到的向量. 在 $(v_1, v_2)$ 坐标系中, 可将该式写成坐标式:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}. \quad (14.1-24)$$

现在我们将坐标轴的旋转变换, 由原来的坐标系 $(v_1, v_2)$ 变到坐标系 $(v'_1, v'_2)$ , 后者是以两个特征向量为坐标轴方向, 旋转角度为 $\theta$ , 坐标变换矩阵 $(R)$ 可表示为

$$(R) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (14.1-25)$$

对向量 $\{a\}$ 与 $\{b\}$ 分别施行这种坐标变换, 有

$$(R)\{a\}' = \{a\}, \quad (R)\{b\}' = \{b\}. \quad (14.1-26)$$

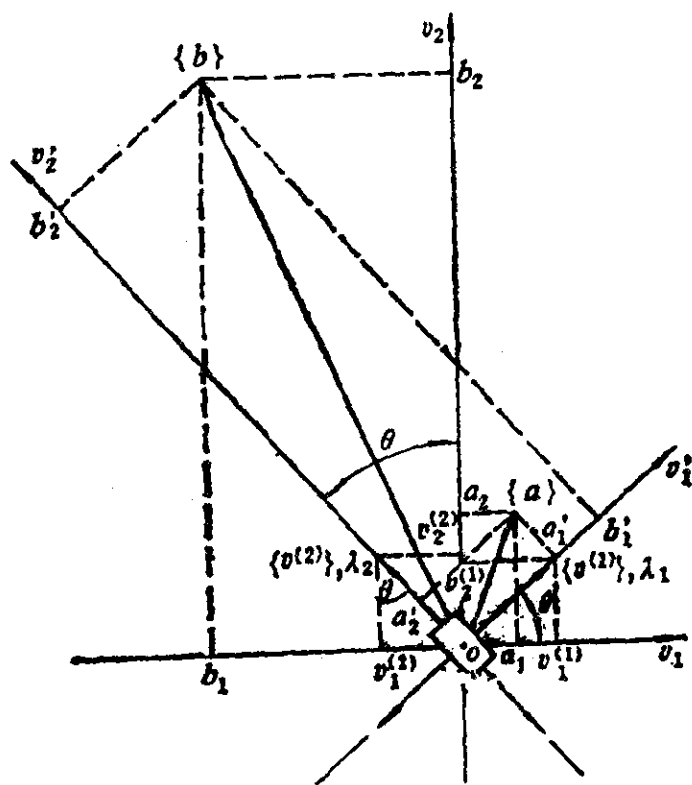


图 14.1-1

这里 $\{a\}$ 与 $\{a\}'$ 、 $\{b\}$ 与 $\{b\}'$ 分别是同一向量在不同坐标系中的表达式. 因此上式与(14.1-22)式有不同的意义, (14.1-26)式不是



将一个向量变换为另一个向量，而只是表示同一向量在不同坐标系中的坐标变换关系。将上式代入(14.1-22)式，得

$$\{A\}\{R\}\{a\}' = \{R\}\{b\}',$$

将上式两端左乘以 $\{R\}^{-1}$ ，并注意到 $\{R\}$ 矩阵是正交归一矩阵，因此有 $\{R\}^{-1} = \{R\}^T$ ，得

$$\{R\}^T\{A\}\{R\}\{a\}' = \{b\}', \quad (14.1-27)$$

记

$$\{R\}^T\{A\}\{R\} = \{A\}' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}, \quad (14.1-28)$$

可将(14.1-27)式写成

$$\{A\}'\{a\}' = \{b\}', \quad (14.1-29)$$

此即向量变换式(14.1-22)在新的坐标系 $(v'_1, v'_2)$ 中的表达式。而(14.1-28)式则表示在坐标旋转变换下，矩阵 $\{A\}$ 的相应变换关系。

将(14.1-29)式写成坐标式，有

$$\begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{Bmatrix}. \quad (14.1-30)$$

而另一方面，由前述矩阵对其特征向量的作用方式，应有

$$b'_1 = \lambda_1 a'_1, \quad b'_2 = \lambda_2 a'_2, \quad (14.1-31)$$

或写成矩阵式，

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{Bmatrix}. \quad (14.1-32)$$

与(14.1-30)式比较，知在新坐标系中矩阵 $\{A\}'$ 应该是对角阵，其对角元素由各特征值组成，即

$$\{A\}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (14.1-33)$$

将(14.1-33)、(14.1-25)、(14.1-18)式代入(14.1-28)式，得

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (14.1-34)$$

此式表明，如果对坐标进行旋转变换，变换到以特征向量作为新的坐标轴的方向，则这一坐标变换对于矩阵〔A〕将起到“对角化”的作用，从而求出矩阵〔A〕的特征值。

现在来看变换矩阵(14.1-25)式如何确定。为此，我们看(14.1-34)式，将之展开可得到四个等式，我们写出对应于 $A'_{12} = 0$ 的那个等式，有

$$(6 - 5)\sin\theta\cos\theta + (-4)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = A'_{12} = 0,$$

即

$$(6 - 5)\sin 2\theta - 2 \times 4 \cos 2\theta = 0,$$

由此得

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \times (-4)}{5 - 6} = 8, \quad (14.1-35)$$

即 $\theta = 41^\circ 26' 14''$ ，而

$$\cos\theta = 0.7497, \quad \sin\theta = 0.6618. \quad (14.1-36)$$

将上式中的数值与(14.1-25)、(14.1-21)式联系起来看，可见变换矩阵〔R〕中的两个列向量正好是〔A〕的两个特征向量 $\{v^{(1)}\}$ 与 $\{v^{(2)}\}$ 。再将(14.1-35)式写成一般形式，有

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \times A_{12}}{A_{11} - A_{22}}. \quad (14.1-37)$$

现在小结一下：对于 $2 \times 2$ 实对称矩阵〔A〕来说，由(14.1-37)式算出 $\theta$ 角，按(14.1-25)式构成变换矩阵，即得特征矩阵与特征向量，而对〔A〕按(14.1-28)式进行变换，即可将之对角化，从而确定诸特征值。此可视为 $2 \times 2$ 实对称矩阵的特征值的另一种求解方法，而这种方法正是Jacobi旋转迭代法的基础。

此外，还易于检验变换前后的〔A〕与〔A〕'的各元素满足以下关系：

(1) 诸元素的平方和在变换前后保持不变，即

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A'_{ij}^2, \quad (14.1-38)$$

对于上例来说，即

$$5^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + 6^2 = 1.4689^2 + 9.5311^2 = 93.$$

(2) 经旋转变换后，矩阵主对角线上的元素的平方和增加，即

$$\sum_{i=1}^n A_{ii}^2 > \sum_{i=1}^n A_{ii}^2. \quad (14.1-39)$$

而由(1)、(2)两点可推知非对角元素的平方和在变换后必然下降。对于上例来说，这是显然的，因为非对角元素的平方和已经降为零。

以上两点特性对于多维实对称矩阵的旋转变换也有效。

## 2. Jacobi旋转迭代法的基本思想

如果矩阵〔A〕是 $n \times n$ 的实对称矩阵，那么如前所述，其 $n$ 个特征向量 $\{u^{(1)}\}$ ， $\{u^{(2)}\}$ ， $\dots$ ， $\{u^{(n)}\}$ ，在 $n$ 维空间中构成一组正交归一的坐标基，而且总可以找到一个旋转变换〔R〕，它可以使原坐标系变到特征向量构成的新坐标系，从而使矩阵〔A〕对角化，即

$$[R]^T [A] [R] = [A]' = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix}. \quad (14.1-40)$$

如果能像前述对于 $2 \times 2$ 矩阵的分析那样，由坐标旋转角度 $\theta$ 确定变换矩阵〔R〕，那么其各列即给出特征向量，而由(14.1-40)式得出的对角矩阵的各对角元素即为特征值。但问题是确定多维空间中坐标旋转的变换矩阵是非常困难的事，想要由此来得到特征矩阵，是不现实的，作为一种变通的办法，我们并不去追求一次旋转到位，而是采用多次旋转，反复迭代的办法。而每次只在一个二维子空间中进行坐标旋转变换，其目的是消除〔A〕中处于对称位置的两个非对角元素，即使之为零。这种变换矩阵为



$$\begin{cases}
 \times \text{---} A_{ij}^{(1)} = A_{ii} \sin^2 \theta - 2A_{ij} \sin \theta \cos \theta + A_{jj} \cos^2 \theta; \\
 \Delta \text{---} A_{ii}^{(1)} = A_{ii}^{(1)} = A_{ii} \cos \theta + A_{jj} \sin \theta, \\
 \qquad \qquad \qquad l = 1, 2, \dots, n; \quad l \neq i, j; \qquad (14.1-45) \\
 \nabla \text{---} A_{ij}^{(1)} = A_{ij}^{(1)} = -A_{ij} \sin \theta + A_{ji} \cos \theta, \\
 \qquad \qquad \qquad l = 1, 2, \dots, n; \quad l \neq i, j; \\
 \emptyset \text{---} A_{ij}^{(1)} = A_{ij}^{(1)} = 0.
 \end{cases}$$

由上式可见，旋转一次以后，即有两个非对角元素  $A_{ij}^{(1)}$  与  $A_{ji}^{(1)}$  变成了零。对于得到的  $(A)^{(1)}$  按同样的方法再进行旋转变换，可使得到的  $(A)^{(2)}$  中另一对非对角元素化为零。当然，原来在  $(A)^{(1)}$  中已变为零的元素在  $(A)^{(2)}$  中可能又变为非零，这似乎又否定了上一次变换。但是必须看到，由于(14.1-38)、(14.1-39)两式所表达的旋转变换的性质，当这种旋转变换反复进行时，其总的趋势必然是： $(A)$  矩阵的主对角线上的元素的绝对值之和不断上升，而非对称元素的绝对值之和不断下降，即向着“对角化”的方向不断发展。

设在迭代的第  $s$  步得到  $(A)^{(s)}$ ，而按选定的  $A_{ij}^{(s)}$ ， $A_{ji}^{(s)}$ ， $A_{ij}^{(s)}$ ，计算出转角  $\theta$ ，确定变换矩阵为  $(R)_s$ ，则下一步迭代为

$$(A)^{(s+1)} = (R)_s^T (A)^{(s)} (R)_s, \quad (14.1-46)$$

累计各步的迭代为

$$(A)^{(s+1)} = (R)_s^T (R)_{s-1}^T \dots (R)_1^T (R)_0^T (A) (R)_0 (R)_1 \dots (R)_s. \quad (14.1-47)$$

如果预先设定一精度标准  $\varepsilon > 0$ ，当  $(A)^{(s+1)}$  中绝对值最大的非对角元素

$$|A_{ij}^{(s+1)}|_{\max} \leq \varepsilon, \quad i \neq j \quad (14.1-48)$$

时，即可终止迭代。此时总的变换矩阵为

$$(\Phi) = (R)_0 (R)_1 \dots (R)_s, \quad (14.1-49)$$

其各列向量即给出特征向量，即

$$(\Phi) = (\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\}). \quad (14.1-50)$$

而  $(A)^{(s+1)}$  的主对角线上的元素则给出相应的特征值，即

$$(A)^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (14.1-51)$$

### 3. Jacobi旋转迭代算法的计算步骤

按上述基本思想和原理，迭代算法的步骤与公式如下：

(1) 计算  $\cos\theta$ ,  $\sin\theta$  值

找出  $(A)^{(k)}$  中绝对值最大的非对角元素  $A_{ij}^{(k)}$  以及相应的对角元素  $A_{ii}^{(k)}$  与  $A_{jj}^{(k)}$  (当  $(A)$  的维数很大时，搜索绝对值最大的  $A_{ij}^{(k)}$  的计算量过大，故也可不予搜索，而按  $i=1, 2, \dots, n-1$ ;  $j=i+1, i+2, \dots, n$  的顺序迭代)。

$\cos\theta = c$  与  $\sin\theta = d$  的值可按以下 Wilkinson 公式直接计算：

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (A_{ii}^{(k)} - A_{jj}^{(k)})/2, \\ \beta &= \sqrt{\alpha^2 + (A_{ij}^{(k)})^2}, \\ \varepsilon &= \text{sign}(A_{ii}^{(k)} - A_{jj}^{(k)}), \\ c_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon\alpha}{\beta}}, \\ d_0 &= \varepsilon A_{ij}^{(k)} / (2\beta c_0). \end{aligned} \right\} \quad (14.1-52)$$

(2) 计算  $(A)^{(k+1)}$

先对  $A_{ii}^{(k)}$  和  $A_{jj}^{(k)}$  作行运算，

$$\left. \begin{aligned} A_{il}^{(k+1)'} &= c_0 A_{il}^{(k)} + d_0 A_{jl}^{(k)}, \quad l=1, 2, \dots, n. \\ A_{jl}^{(k+1)'} &= -d_0 A_{il}^{(k)} + c_0 A_{jl}^{(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (14.1-53)$$

再对得到的  $A_{il}^{(k+1)'}$ ,  $A_{jl}^{(k+1)'}$  作列运算，

$$\left. \begin{aligned} A_{il}^{(k+1)} &= c_0 A_{il}^{(k+1)'} + d_0 A_{jl}^{(k+1)'}, \quad l=1, 2, \dots, n. \\ A_{il}^{(k+1)} &= -d_0 A_{il}^{(k+1)'} + c_0 A_{jl}^{(k+1)'}, \end{aligned} \right\} \quad (14.1-54)$$

(3) 计算  $(\Phi)^{(k+1)} = [\varphi_{ij}^{(k+1)}] = (\Phi)^{(k)}(R)$ .

递推公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{il}^{(k+1)} &= c_0 \varphi_{il}^{(k)} + d_0 \varphi_{jl}^{(k)}, \quad l=1, 2, \dots, n. \\ \varphi_{il}^{(k+1)} &= -d_0 \varphi_{il}^{(k)} + c_0 \varphi_{jl}^{(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (14.1-55)$$

例14.2 试用Jacobi旋转迭代法求以下矩阵的特征值与特征向量,

$$\{A\} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

解: 从 $A_{12} = -4$ 开始变换. 读者注意由 $A_{12}$ 、 $A_{21}$ 、 $A_{11}$ 、 $A_{22}$ 构成的子矩阵正好是(14.1-18)式给出的 $2 \times 2$ 方阵. 于是由(14.1-36)知 $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ 值, 而变换矩阵为

$$\{R\}_0 = \begin{pmatrix} 0.7497 & -0.6618 & 0 & 0 \\ 0.6618 & 0.7497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

$$\{A\}^{(1)} = \{R\}_0^T \{A\} \{R\}_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1.469 & 0 & -1.898 & 0.6618 \\ 0 & 9.531 & -3.661 & 0.7497 \\ -1.898 & -3.661 & 6 & -4 \\ 0.6618 & 0.7497 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

再针对元素 $A_{13}^{(1)}$ 进行变换. 按(14.1-42)式, 可得

$$\cos\theta = 0.9398, \quad \sin\theta = 0.3416. \quad (d)$$

$$\{R\}_1 = \begin{pmatrix} 0.9398 & 0 & -0.3416 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3416 & 0 & 0.9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (e)$$

$$\{A\}^{(2)} = \{R\}_1^T \{A\}_1 \{R\}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7792 & -1.250 & 0 & -0.744 \\ -1.250 & 9.531 & -3.440 & 0.7497 \\ 0 & -3.440 & 6.690 & -3.986 \\ -0.744 & 0.7497 & -3.986 & 5 \end{pmatrix}. \quad (f)$$

$$(\Phi)_1 = (R)_0 (R)_1 = \begin{pmatrix} 0.7046 & -0.6618 & -0.2561 & 0 \\ 0.6220 & 0.7497 & -0.2261 & 0 \\ 0.3416 & 0 & 0.9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (g)$$

针对元素  $A_1^{(1)}$  进行变换,

$$\cos\theta = 0.9857, \quad \sin\theta = 0.1687. \quad (h)$$

$$(R)_2 = \begin{pmatrix} 0.9857 & 0 & 0 & -0.1687 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1687 & 0 & 0 & 0.9857 \end{pmatrix}. \quad (i)$$

$$\begin{aligned} (A)^{(2)} &= (R)_2^T (A)^{(1)} (R)_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0.6518 & -1.106 & -0.6725 & 0 \\ -1.106 & 9.531 & -3.440 & 0.9499 \\ -0.6725 & -3.440 & 6.690 & -3.928 \\ 0 & 0.9499 & -3.928 & 5.127 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (j)$$

$$(\Phi)_2 = (\Phi)_1 (R)_2 = \begin{pmatrix} 0.6945 & -0.6618 & -0.2561 & -0.1189 \\ 0.6131 & 0.7497 & -0.2261 & -0.1050 \\ 0.3363 & 0 & 0.9398 & -0.0576 \\ 0.1687 & 0 & 0 & 0.9857 \end{pmatrix}. \quad (k)$$

针对  $A_2^{(2)}$  进行变换,

$$\cos\theta = 0.8312, \quad \sin\theta = -0.5560. \quad (l)$$

$$(R)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8312 & 0.5560 & 0 \\ 0 & -0.5560 & 0.8312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (m)$$

$$\begin{aligned} (A)^{(4)} &= (R)_3^T (A)^{(2)} (R)_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0.6518 & -0.5453 & -1.174 & 0 \\ -0.5453 & 11.83 & 0 & 2.974 \\ -1.174 & 0 & 4.388 & -2.737 \\ 0 & 2.974 & -2.737 & 5.127 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (n)$$



$$\begin{aligned} \{\Phi\}_3 &= \{\Phi\}_2(R)_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0.6945 & -0.4077 & -0.5808 & -0.1189 \\ 0.6131 & 0.7488 & 0.2289 & -0.1050 \\ 0.3367 & -0.5226 & 0.7812 & -0.0576 \\ 0.1684 & 0 & 0 & 0.9857 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (o)$$

针对  $A_2^{(4)}$  进行变换,

$$\cos\theta = 0.9349, \quad \sin\theta = 0.3549. \quad (p)$$

$$(R)_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9349 & 0 & -0.3549 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3549 & 1 & 0.9349 \end{pmatrix}. \quad (q)$$

$$\begin{aligned} (A)^{(5)} &= (R)_4^T (A)^{(4)} (R)_4 \\ &= \begin{pmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -1.174 & 0.1935 \\ -0.5098 & 12.96 & 0.9713 & 0 \\ -1.174 & -0.9713 & 4.388 & -2.559 \\ 0.1935 & 0 & -2.559 & 3.999 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (r)$$

$$\begin{aligned} \{\Phi\}_4 &= \{\Phi\}_3(R)_4 \\ &= \begin{pmatrix} 0.6945 & -0.4233 & -0.5808 & 0.0335 \\ 0.6131 & 0.6628 & 0.2289 & -0.3639 \\ 0.3367 & 0.5090 & 0.7812 & 0.1316 \\ 0.1687 & 0.3498 & 0 & 0.9213 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (s)$$

针对  $A_3^{(5)}$  进行变换,

$$\cos\theta = 0.7335, \quad \sin\theta = -0.6797, \quad (t)$$

$$(R)_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7335 & -0.6797 \\ 0 & 0 & -0.6797 & 0.7335 \end{pmatrix}. \quad (u)$$

$$(A)^{(6)} = (R)_5^T (A)^{(5)} (R)_5$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -0.9926 & 0.6560 \\ -0.5098 & 12.96 & -0.7124 & -0.6602 \\ -0.9926 & -0.7124 & 6.7596 & 0 \\ -0.6560 & -0.6602 & 0 & 1.6272 \end{pmatrix}. \quad (v)$$

$$(\Phi)_5 = (\Phi)_4 (R)_5$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6945 & -0.4233 & -0.4488 & -0.3702 \\ 0.6131 & 0.6628 & 0.4152 & -0.1113 \\ 0.3367 & -0.5090 & 0.4835 & -0.6275 \\ 0.1687 & 0.3498 & -0.6264 & 0.6759 \end{pmatrix}. \quad (w)$$

至此已进行了一个循环， $(A)^{(6)}$  仍然不是对角阵，可重新从  $A_1^{(6)}$  开始，按照此法进行迭代。经第三次循环后，得

$$(A)^{(18)} = \begin{pmatrix} 0.1459 & & & \\ & 13.09 & & \\ & & 6.854 & \\ & & & 1.910 \end{pmatrix}, \quad (x)$$

其中诸非对角元素绝对值均小于万分之一，故视为零。

$$(\Phi)_{17} = (\Phi)_{16} (R)_{17} = (R)_0 (R)_1 \cdots (R)_{17}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3717 & -0.3717 & -0.6015 & -0.6015 \\ 0.6015 & 0.6015 & 0.3717 & -0.3717 \\ 0.6015 & -0.6015 & 0.3717 & 0.3717 \\ 0.3717 & 0.3717 & -0.6015 & 0.6015 \end{pmatrix}. \quad (y)$$

$(A)^{(18)}$  的诸对角元素， $(\Phi)_{17}$  的各列向量分别给出了  $(A)$  的特征值与特征向量。

### 14.1.3 求解特征值问题的矩阵迭代法

此法可用于求解实正定矩阵的特征值与特征向量。与 Jacob 方法比较，此法并不要求矩阵是对称的，因此可用于求解由动力矩阵  $(D)$  表述的特征值问题。众所周知，动力矩阵一般是不对称

的。此外，此法可从低阶模态的特征值与特征向量开始，逐个求解，更能适应振动问题分析的要求，因为振动问题的分析中往往更重视低阶模态。

### 1. 矩阵迭代法的根据与基本思路

广义特征值问题(14.1-3)式在引入动力矩阵 $(D) = (k)^{-1}(m)$ 以后，可化成标准特征值问题，

$$(D)\{u\} = \mu\{u\}, \quad (14.1-56)$$

式中

$$\mu = 1/\lambda = 1/\omega^2. \quad (14.1-57)$$

我们假定 $(m)$ 、 $(k)$ 均为正定矩阵，因而 $(D)$ 亦正定，其特征值均为正值，将之从大到小排列，有

$$\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > 0. \quad (14.1-58)$$

所对应的特征向量为 $\{u^{(1)}\}$ ， $\{u^{(2)}\}$ ， $\dots$ ， $\{u^{(n)}\}$ 。

为了说明矩阵迭代法的根据与基本思想，我们来看 $n=2$ 的一个例子。设某 $(D)$ 的两个特征值为 $\mu_1 = 4$ ， $\mu_2 = 2$ ，其所对应的两个特征向量分别为 $\{u^{(1)}\}$ ， $\{u^{(2)}\}$ ，如图14.1-2所示。由于 $(D)$ 一般是非对称的，因此两特征向量在图上并不相互正交。

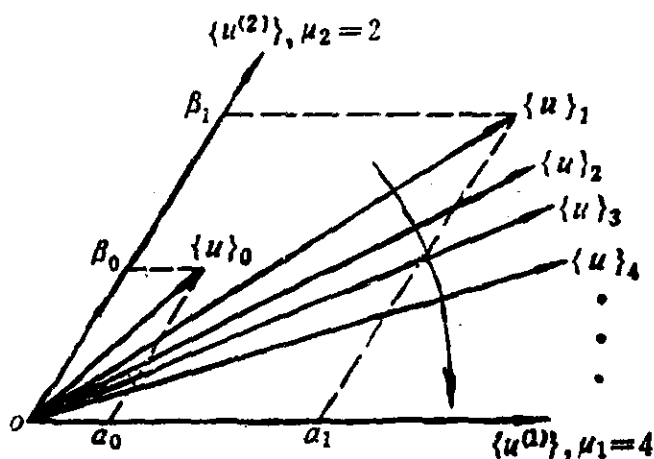


图 14.1-2

现在来分析矩阵 $(D)$ 作用在一个任意的试算向量 $\{u\}_0$ 上以后，其方向如何变化。我们将 $\{u\}_0$ 向两个特征向量方向分解，得

$$\{u\}_0 = \alpha_0\{u^{(1)}\} + \beta_0\{u^{(2)}\}, \quad (14.1-59)$$

以 $(D)$ 左乘上式,

$$\{u\}_1 = (D)\{u\}_0 = \alpha_0(D)\{u^{(1)}\} + \beta_0(D)\{u^{(2)}\}. \quad (14.1-60)$$

而由特征值问题的方程(14.1-56)式, 有

$$(D)\{u^{(1)}\} = \mu_1\{u^{(1)}\}, \quad (D)\{u^{(2)}\} = \mu_2\{u^{(2)}\}, \quad (14.1-61)$$

代入(14.1-60)式, 并注意到此例中 $\mu_1 = 4$ ,  $\mu_2 = 2$ , 得

$$\{u\}_1 = 4\alpha_0\{u^{(1)}\} + 2\beta_0\{u^{(2)}\}. \quad (14.1-62)$$

将此式与(14.1-59)式比较, 可见 $\{u\}_0$ 经 $(D)$ 作用, 变为 $\{u\}_1$ 以后, 其中 $\{u^{(1)}\}$ 的分量相对地增加了, 因而图14.1-2中 $\{u\}_1$ 较之 $\{u\}_0$ 更靠近 $\{u^{(1)}\}$ , 即转向对应于较大特征值的特征向量这一边。可以设想, 如果将 $(D)$ 再一次作用于 $\{u\}_1$ 而得到 $\{u\}_2 = (D) \cdot \{u\}_1$ , 那么 $\{u\}_2$ 较之于 $\{u\}_1$ 又必然会更接近于 $\{u^{(1)}\}$ 。如此反复运算, 得到 $\{u\}_3, \{u\}_4, \dots$ , 最后 $\{u\}_i$ 就可以按需要的精度趋近于 $\{u^{(1)}\}$ 。由此可见, 任选一试验向量 $\{u\}_0$ , 经 $(D)$ 反复作用, 其方向就会逐渐转向第一特征向量 $\{u^{(1)}\}$ 的方向, 即成为第一特征向量。至于其长度, 在 $(D)$ 的每一次作用后,  $\{u\}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ )的长度 $\|\{u\}_i\|$ 都在发生变化。为了防止因 $\|\{u\}_i\|$ 过大而使计算机溢出, 以及为防止 $\|\{u\}_i\|$ 过小而使计算机的位数圆整误差增加, 可以在每一次得 $\{u\}_i$ 以后, 将之乘以一个系数, 使其某个分量保持为定值, 而不至趋于太大或太小。

以上即矩阵迭代法的根据与主要思想。

## 2. 第一特征向量与第一特征值的迭代求法

对于振动问题来说, 也就是求其最低阶的自然频率与相应的模态向量(即振型)。

将第一个试验向量记为 $\{u\}_0$ , 以 $(D)$ 作用在其上, 得 $(D)\{u\}_0 = \{u\}'_1$ , 设 $\{u\}'_1$ 的第一个分量(或者其它的指定分量)为 $a_1$ , 我们将 $\{u\}'_1$ 写成 $a_1\{u\}_1$ 的形式, 于是 $\{u\}_1$ 的第一个分量(或其它指定分量)一定为1。这一过程称为“基准化”。基准化以后有

$$(D)\{u\}_0 = a_1\{u\}_1. \quad (14.1-63)$$

再以 $(D)$ 作用在 $\{u\}_1$ 上, 并同样进行基准化, 得

$$(D)\{u\}_1 = a_2\{u\}_2, \quad (14.1-64)$$

.....

如此反复进行，直到

$$(D)\{u\}_k = a_{k+1}\{u\}_{k+1}, \quad (14.1-65)$$

在一定精度范围内有

$$\{u\}_k \approx \{u\}_{k+1}, \quad (14.1-66)$$

则可终止迭代，并取

$$\{u^{(1)}\} = \{u\}_k; \quad (14.1-67)$$

$$\mu_1 = a_{k+1} = 1/\omega_1^2. \quad (14.1-68)$$

**例14.3** 试求例4.9中的三自由度系统的第一阶自然频率及其振型。

解：所对应的特征值问题方程已在例4.9中求出，

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad (a)$$

式中

$$\mu = \frac{k}{m} \frac{1}{\omega^2}. \quad (b)$$

取试算向量为 $\{u\}_0 = \{1, 2, 3\}^T$ ，进行迭代运算，

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 17 \\ 20 \end{Bmatrix} = 20 \begin{Bmatrix} 0.450000 \\ 0.850000 \\ 1.000000 \end{Bmatrix}, \quad (c)$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.450000 \\ 0.850000 \\ 1.000000 \end{Bmatrix} = 7.150000 \begin{Bmatrix} 0.461538 \\ 0.860140 \\ 1.000000 \end{Bmatrix}, \quad (d)$$

.....

迭代到第六次，有

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.462598 \\ 0.860806 \\ 1.000000 \end{Bmatrix} = 7.184210 \begin{Bmatrix} 0.462598 \\ 0.860806 \\ 1.000000 \end{Bmatrix}. \quad (e)$$

于是得到第一特征向量与第一特征值分别为

$$\{u^{(1)}\} = \{0.462598, 0.860806, 1.000000\}^T, \quad (f)$$

$$\mu_1 = 7.184210. \quad (g)$$

第一阶自然频率 $\omega_1$ 可由(b)式求出,

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{7.184210}} \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.373087 \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (h)$$

为了进一步计算,需将 $\{u^{(1)}\}$ 进行正规化,即令

$$\{u^{(1)}\}^T (m) \{u^{(1)}\} = 1, \quad (i)$$

由此可得

$$\{u^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.269108 \\ 0.500758 \\ 0.581731 \end{Bmatrix}. \quad (j)$$

### 3. 高阶特征向量与高阶特征值的求法

对于振动问题来说,即求其高阶振型与高阶自然频率。上面讲过,任选一计算向量,经过 $(D)$ 反复作用以后,就得出对应于最大特征值 $\mu_1$ 的特征向量 $\{u^{(1)}\}$ 。显然,如果我们能构造一个新的矩阵 $(D)^{(2)}$ ,使其第一特征值 $\mu_1 = 0$ ,而其余特征值与全部特征向量均与 $(D)$ 完全一样,那么任选一计算向量,经 $(D)^{(2)}$ 反复作用以后,就会收敛于 $\{u^{(2)}\}$ 和 $\mu_2$ 。事实上,如下构造的矩阵 $(D)^{(2)}$ 就可以满足以上要求,

$$(D)^{(2)} = (D) - \mu_1 \{u^{(1)}\} \{u^{(1)}\}^T (m). \quad (14.1-69)$$

由于 $(D)$ 、 $(m)$ 为已知,而 $\{u^{(1)}\}$ 、 $\mu_1$ 已求出,故 $(D)^{(2)}$ 可按上式构造出来。现在我们来证明 $(D)^{(2)}$ 的第一特征值确实为零,且 $(D)^{(2)}$ 的第一特征向量仍然为 $\{u^{(1)}\}$ 。为此,试将 $(D)^{(2)}$ 作用在 $\{u^{(1)}\}$ 上,并以(14.1-69)式代入,得

$$\begin{aligned} (D)^{(2)} \{u^{(1)}\} &= ((D) - \mu_1 \{u^{(1)}\} \{u^{(1)}\}^T (m)) \{u^{(1)}\} \\ &= (D) \{u^{(1)}\} - \mu_1 \{u^{(1)}\} \{u^{(1)}\}^T (m) \{u^{(1)}\}, \end{aligned}$$

以(14.1-61)第一式与例14.3(j)式代入,得

$$(D)^{(2)} \{u^{(1)}\} = \mu_1 \{u^{(1)}\} - \mu_1 \{u^{(1)}\} = 0 \{u^{(1)}\}.$$

证毕。

其次,我们来证明 $(D)^{(2)}$ 的其余特征值 $\mu_i$ 和特征向量 $\{u^{(i)}\}$  ( $i=2,3,4,\dots,n$ )均与 $(D)$ 一样。为此将 $(D)^{(2)}$ 作用在 $\{u^{(i)}\}$  ( $i=2,3,\dots,n$ )上,

$$\begin{aligned} (D)^{(2)}\{u^{(i)}\} &= ((D) - \mu_1\{u^{(1)}\}\{u^{(1)}\}^T(m))\{u^{(i)}\} \\ &= (D)\{u^{(i)}\} - \mu_1\{u^{(1)}\}\{u^{(1)}\}^T(m)\{u^{(i)}\}. \end{aligned}$$

由于 $\{u^{(i)}\}$ 是 $(D)$ 的特征向量,并注意到特征向量对于 $(m)$ 的正交性条件,上式可写成

$$(D)^{(2)}\{u^{(i)}\} = \mu_i\{u^{(i)}\}, \quad i=2,3,\dots,n. \quad (14.1-70)$$

证毕。

于是,选定计算向量 $\{u\}_0$ ,经 $(D)^{(2)}$ 反复作用后,即可得到 $\{u^{(2)}\}$ 及 $\mu_2$

以同样的方法可证明如下构造的矩阵,

$$(D)^{(3)} = (D)^{(2)} - \mu_2\{u^{(2)}\}\{u^{(2)}\}^T(m) \quad (14.1-71)$$

的特征向量 $\{u^{(i)}\}$  ( $i=1,2,\dots,n$ )及特征值 $\mu_i$  ( $i=3,4,\dots,n$ )与 $(D)$ 一样,但 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 。

一般而言,矩阵

$$(D)^{(k+1)} = (D)^{(k)} - \mu_k\{u^{(k)}\}\{u^{(k)}\}^T(m) \quad (14.1-72)$$

的 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$ ,而 $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_n$ 及 $\{u^{(i)}\}$  ( $i=1,2,\dots,n$ )与 $(D)$ 一样。

按以上方法逐步构造不同的矩阵 $(D)^{(i)}$  ( $i=2,3,\dots,n$ ),就可将各阶特征向量与特征值求出。

**例14.4** 继续以矩阵迭代法求取例14.3中的高阶特征值与特征向量 $\mu_2, \mu_3, \{u^{(2)}\}, \{u^{(3)}\}$ 。

解:按已知的 $(D)$ 、 $(m)$ 及已求出的 $\{u^{(1)}\}$ 及 $\mu_1$ ,可构造

$$(D)^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} - 7.184210$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{Bmatrix} 0.269108 \\ 0.500758 \\ 0.581731 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.269108 \\ 0.500758 \\ 0.581731 \end{Bmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 0.479727 & 0.031870 & -0.249355 \\ 0.031870 & 0.198495 & -0.185614 \\ -0.124674 & -0.092803 & 0.137569 \end{pmatrix}. \quad (a)
\end{aligned}$$

选试算向量  $\{u\}_0 = \{1, 1, -1\}^T$ , 按同样的方式进行迭代,

$$\begin{aligned}
(D)^{(2)} \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ -1.000000 \end{Bmatrix} &= 0.760952 \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.546656 \\ -0.466581 \end{Bmatrix}, \\
(D)^{(2)} \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.546656 \\ -0.466581 \end{Bmatrix} &= 0.613493 \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.369983 \\ -0.390537 \end{Bmatrix},
\end{aligned}$$

迭代至第十四次, 得

$$(D)^{(2)} \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.254102 \\ -0.340662 \end{Bmatrix} = 0.572771 \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.254097 \\ -0.340659 \end{Bmatrix}.$$

到此为止, 得

$$\mu_2 = 0.572771, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.321325 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (b)$$

$$\{u^{(2)}\} = \{1.000000, 0.254097, -0.340659\}^T, \quad (c)$$

或者, 为了与后面的例子比较, 也可基准化为

$$\{u^{(2)}\} = \{-2.935487, -0.745898, 1.000000\}^T, \quad (d)$$

按例14.3(i)式正规化后, 得

$$\{u^{(2)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.878186 \\ 0.223144 \\ -0.299162 \end{Bmatrix}. \quad (e)$$

以下构造  $(D)^{(3)}$ , 以便求  $\mu_3$  与  $\{u^{(3)}\}$ ,

$$(D)^{(3)} = (D)^{(2)} - \mu_2 \{u^{(2)}\} \{u^{(2)}\}^T (m)$$



$$= \begin{Bmatrix} 0.038000 & -0.080371 & 0.051602 \\ -0.080371 & 0.169975 & -0.109142 \\ 0.025804 & -0.054567 & 0.035045 \end{Bmatrix}. \quad (f)$$

选试算向量为  $\{u\}_0 = \{1, -1, 1\}^T$ , 进行迭代, 得

$$\mu_3 = 0.243016,$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu_3}} \sqrt{\frac{k}{m}} = 2.0285354 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (g)$$

$$\{u^{(3)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.395440 \\ -0.836328 \\ 0.268514 \end{Bmatrix}.$$

至此, 系统的全部自然频率与模态向量均已求出。(读者可将上述结果与例4.9的结果比较)。

#### 4. 讨论

现在分析说明以上算法的几个问题。

##### (1) 抗错性

此种算法具有抗错性, 只要矩阵  $\{D\}$ ,  $\{D\}^{(2)}$ ,  $\{D\}^{(3)}$ ,  $\dots$ ,  $\{D\}^{(n)}$  正确, 最后的结果一定分别收敛于相应的  $\mu_1, \{u^{(1)}\}$ ;  $\mu_2, \{u^{(2)}\}$ ;  $\dots$ ;  $\mu_n, \{u^{(n)}\}$ 。在迭代中出现的计算差错, 只会延缓收敛的进程, 而不会累积起来影响最后的结果。

##### (2) 收敛速度

迭代运算的收敛速度一方面取决于系统本身的特点, 另一方面取决于试算向量  $\{u\}_0$  的选择。从系统本身来说, 诸特征值  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  相差愈大, 则收敛愈快。从试算向量的选择来说, 如果选择的  $\{u\}_0$  愈靠近待求的特征向量  $\{u^{(r)}\}$ , 则收敛到该特征向量所需要的迭代步数愈少。在选取  $\{u\}_0$  时,  $\{u^{(r)}\}$  并不知道, 只能凭经验, 但也有某些规律可循。例如, 试算向量  $\{u\}_0 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$  中各分量符号改变 (由正到负或由负到正) 的次数如记为  $m$ , 而欲趋近的模态向量  $\{u^{(r)}\}$  的阶数为  $r$ , 则可取  $m = r - 1$ 。例14.3、14.4中求  $\{u^{(1)}\}$ 、 $\{u^{(2)}\}$  与  $\{u^{(3)}\}$  的三个试算

向量中诸分量的符号的选取，正符合以上规则。此外，离固定点愈远的质块，其所对应的试算向量中的分量可取得愈大，如例14.3中求 $\{u^{(1)}\}$ 的试算向量 $\{u\}_0 = \{1, 2, 3\}^T$ ，即是按此规律选取。

其实， $\{u\}_0$ 即使选得不合适，也不影响最后的迭代结果，只不过需要的迭代次数较多而已。在求 $\{u^{(1)}\}$ 时，如果碰巧正好将试算向量取为 $\{u\}_0 = \{u^{(2)}\}$ ，这时，从理论上讲，总有

$$(D)\{u\}_0 = (D)\{u^{(2)}\} = \mu_2\{u^{(2)}\},$$

$$(D)\{u^{(2)}\} = \mu_2\{u^{(2)}\},$$

.....

即在迭代中，只会得到 $\{u^{(2)}\}$ ，而无法收敛到 $\{u^{(1)}\}$ ，似乎是落入了一个“陷井”。但事实上，迭代若干次以后，向量 $\{u\}_i$ 仍然会跳出该“陷井”，而趋向 $\{u^{(1)}\}$ ，其原因在于计算过程中难免会有各种圆整误差，这些误差具有随机性，其中偏向 $\{u^{(1)}\}$ 的误差被保存、放大与积累，而偏离 $\{u^{(1)}\}$ 的误差则被抑制。因此，最后仍然将 $\{u\}_i$ 拉向 $\{u^{(1)}\}$ 。

### (3) 半正定系统的处理方法

半正定系统的 $(k)$ 矩阵的逆阵 $(k)^{-1}$ 不存在，无法求出其动力矩阵 $(D)$ 。为了采用矩阵迭代法求其自然频率与特征向量，可将广义特征值问题的公式 $(k)\{u\} = \lambda(m)\{u\}$ 略加变化，将其两边加上 $\alpha(m)\{u\}$ 这一项，其中 $\alpha$ 为较 $\lambda = \omega^2$ 略小的正实数，得

$$((k) + \alpha(m))\{u\} = (\lambda + \alpha)(m)\{u\}. \quad (14.1-73)$$

由于矩阵 $((k) + \alpha(m))$ 是正定的，可以求逆，故可定义动力矩阵为

$$(D) = ((k) + \alpha(m))^{-1}(m), \quad (14.1-74)$$

特征值问题成为

$$(D)\{u\} = \mu\{u\}, \quad \mu = 1/(\lambda + \alpha). \quad (14.1-75)$$

于是可采用矩阵迭代法求解。但必须记住：求出 $\mu_i$ 以后需按以下公式计算自然频率，

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\mu_i} - \alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14.1-76)$$

#### 14.1.4 子空间迭代法

##### 1. 基本思想

子空间迭代法是矩阵迭代法的延伸，其主要立意在于不是单个地求特征向量与特征值，而是同时对若干个试算向量进行迭代运算，使之同时、分别地收敛于前几阶特征向量。

设特征值问题仍然以动力矩阵表述，

$$(D)\{u\} = \mu\{u\}. \quad (14.1-77)$$

我们取  $s$  个  $n$  维试算向量  $\{u_0^{(1)}\}$ ,  $\{u_0^{(2)}\}$ ,  $\dots$ ,  $\{u_0^{(s)}\}$  作为迭代的起点。如果令  $(D)$  矩阵分别作用在各个试算向量上，则有

$$(D)\{u_0^{(i)}\} = \{\tilde{u}_1^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (14.1-78)$$

这里我们暂未考虑“基准化”问题。以上  $s$  个等式可以综合成下式

$$(D)(U)_0 = (\tilde{U})_1, \quad (14.1-79)$$

式中

$$(U)_0 = (\{u_0^{(1)}\}, \{u_0^{(2)}\}, \dots, \{u_0^{(s)}\}), \quad (14.1-80)$$

$$(\tilde{U})_1 = (\{\tilde{u}_1^{(1)}\}, \{\tilde{u}_1^{(2)}\}, \dots, \{\tilde{u}_1^{(s)}\}), \quad (14.1-81)$$

均为  $n \times s$  矩阵。

本可以再对  $(\tilde{U})_1$ ，继续进行迭代运算，得到  $(\tilde{U})_2$ 、 $(\tilde{U})_3$ 、 $\dots$  等等，但这样进行下去，会有一个问题，即所有的  $\{\tilde{u}_k^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ )，当  $k$  足够大时均会收敛于第一特征向量  $\{u^{(1)}\}$ ，而不会分别地趋近不同的特征向量。其理由已在上一小节中讲清。为了防止这一问题，我们在每次迭代之后，都必须对得到的各个向量  $\{\tilde{u}_k^{(1)}\}$ 、 $\{\tilde{u}_k^{(2)}\}$ ， $\dots$ ， $\{\tilde{u}_k^{(s)}\}$  进行正交化处理，然

后才进行下一步迭代。

设  $(D)$  是正定的, 且开始选定的  $s$  个试算向量  $\{u_0^{(1)}\}, \{u_0^{(2)}\}, \dots, \{u_0^{(s)}\}$  是线性无关的, 则在经  $(D)$  的作用后, 得到的一组向量  $\{\tilde{u}^{(1)}\}, \{\tilde{u}^{(2)}\}, \dots, \{\tilde{u}^{(s)}\}$  也是线性无关的, 它们在  $n$  维空间的一个  $s$  维子空间中组成一个坐标基。我们的目的是在这个子空间中找出  $s$  个满足“正交条件”的向量  $\{u_1^{(1)}\}, \{u_1^{(2)}\}, \dots, \{u_1^{(s)}\}$  来。

按坐标基  $\{\tilde{u}^{(i)}\} (i=1, 2, \dots, s)$  来展开上述每一个向量, 得

$$\{u_1^{(i)}\} = \sum_{j=1}^s \alpha_{j,i}^{(i)} \{\tilde{u}^{(j)}\}, \quad i=1, 2, \dots, s. \quad (14.1-82)$$

以上  $s$  个等式可以综合成一个矩阵式,

$$(U)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}} = (\tilde{U})_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}} (\alpha)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}}, \quad (14.1-83)$$

式中

$$(U)_i = (\{u_1^{(1)}\}, \{u_1^{(2)}\}, \dots, \{u_1^{(s)}\}), \quad (14.1-84)$$

$$(\alpha)_i = (\alpha_{j,i}^{(i)}) = (\{\alpha_1^{(1)}\}, \{\alpha_1^{(2)}\}, \dots, \{\alpha_1^{(s)}\}), \quad (14.1-85)$$

这里  $\alpha_{j,i}^{(i)}$  是待定系数,  $i, j=1, 2, \dots, s$ , 其确定原则是使得诸  $\{u_1^{(i)}\} (i=1, 2, \dots, s)$  能够尽可能好地逼近系统的前  $s$  阶模态向量, 并满足以下正交条件与基规范化条件:

$$(U)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}}^T (m)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}} (U)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}} = (1)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}}. \quad (14.1-86)$$

按下述 Ritz 方程确定的  $\alpha_j$ , 能满足以上要求。

## 2. Ritz 方程

构造以下广义的质量矩阵与刚度矩阵:

$$(m)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}} = (\tilde{U})_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}}^T (m)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}} (\tilde{U})_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}}, \quad (14.1-87)$$

$$(k)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}} = (\tilde{U})_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}}^T (k)_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}} (\tilde{U})_{\substack{i \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot}}. \quad (14.1-88)$$

按照与推导第十一章(11.3-10)式的 Galerkin 方程类似的方法可以推出 Ritz 方程如下:

$$(m)_1 \{\alpha_i\} = \lambda_i (k)_1 \{\alpha_i\}. \quad (14.1-89)$$

这是一个  $s$  个自由度的系统的广义特征值问题，由于  $s \ll n$ ，因此，求解此特征值问题比求解原问题要容易得多。由上式可以解出  $s$  个“特征向量”  $\{\alpha_i^{(1)}\}, \{\alpha_i^{(2)}\}, \dots, \{\alpha_i^{(s)}\}$ ，与  $s$  个特征值  $\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, \dots, \lambda_i^{(s)}$ 。前者可按(14.1-85)式构成矩阵  $(\alpha)_1$ ，而后者是对原问题的前  $s$  个特征值的一次近似。

按照第四章证明模态向量的正交性的相同方法，可由(14.1-89)式证明  $(\alpha)_1$  满足以下正交条件

$$(\alpha)_1^T (m)_1 (\alpha)_1 = (1)_1. \quad (14.1-90)$$

上式也包含了正规化条件，以(14.1-87)式代入，得

$$(\alpha)_1^T (\tilde{U})^T (m) (\tilde{U})_1 (\alpha)_1 = (1)_1.$$

以(14.1-83)式代入，得(14.1-86)式，即诸试算向量  $\{u_i^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) 对于  $(m)$  的正交条件得到满足。

### 3. 迭代方法

由(14.1-89)式解出  $(\alpha)_1$  并由(14.1-83)式求出  $(U)_1$  以后，可以再按(14.1-79)式求出  $(\tilde{U})_2$ ，并经同样的步骤得出  $(U)_2, \dots$ ，直至最后在给定的精度内有

$$(U)_{i+1} \approx (U)_i, \quad (14.1-91)$$

时，即可终止迭代。这时  $\{u_i^{(i)}\}$  与  $\lambda_i^{(i)} (i = 1, 2, \dots, s)$  即为所求的前  $s$  阶特征向量与特征值。

计算实践表明，在迭代过程中  $s$  个模态的前几个收敛得比较快。为了在较少的几次迭代中获得所需前  $s$  个模态的较准确的值，可以多取几个模态来同时进行迭代。例如取  $r$  个模态，经验表明，可以在  $r = 2s$  及  $r = s + 8$  这两个数中按较小的一个来确定  $r$ 。

子空间迭代法具有一个突出的优点，就是当系统的前几阶自然频率比较接近时，使用上一小节介绍的矩阵迭代法会出现收敛速度太慢的问题，而子空间迭代法则可有效地克服这一缺点。此法精确度高、可靠性强，是求取大型复杂结构的低阶模态的有效

方法。

例14.5 试以子空间迭代法求例14.3中三自由度系统的前两阶模态向量与自然频率。

解：取两个试算向量为

$$\{u_0^{(1)}\} = \{1, 2, 3\}^T, \quad \{u_0^{(2)}\} = \{1, 2, -1\}^T, \quad (a)$$

于是

$$(U)_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (b)$$

进行基准化，我们使各列向量的最后一个分量为1，于是

$$(U)_0 = \begin{pmatrix} 0.333333 & -1.000000 \\ 0.666667 & -2.000000 \\ 1.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

例14.3(b)式已给出动力矩阵 $(D)$ ，因此得

$$(\tilde{U})_1 = (D)(U)_0 = \frac{m}{k} \begin{pmatrix} 3.000000 & -1.000000 \\ 5.666667 & -1.000000 \\ 6.666667 & 0.000000 \end{pmatrix}, \quad (d)$$

各列基准化，得

$$(\tilde{U})_1 = \begin{pmatrix} 0.450000 & -1 \\ 0.850000 & -1 \\ 1.000000 & 0 \end{pmatrix}. \quad (e)$$

计算广义质量矩阵与广义刚度矩阵，

$$(m)_1 = (\tilde{U})_1^T (m) (\tilde{U})_1 = m \begin{bmatrix} 2.925000 & -1.300000 \\ -1.300000 & 2.000000 \end{bmatrix}, \quad (f)$$

$$(k)_1 = (\tilde{U})_1^T (k) (\tilde{U})_1 = k \begin{bmatrix} 0.407500 & -0.150000 \\ -0.150000 & 3.000000 \end{bmatrix}. \quad (g)$$

求解Ritz方程(14.1-89)式，得

$$(\alpha)_1 = (\{\alpha_1^{(1)}\}, \{\alpha_1^{(2)}\}) = \begin{bmatrix} 2.721608 & -1.144686 \\ -0.030955 & -2.544046 \end{bmatrix} \quad (h)$$

$$\{A\}_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} & \\ & \lambda_1^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0.139196 & 0 \\ 0 & 2.072343 \end{bmatrix}. \quad (i)$$

计算 $\{U\}$ , 按(14.1-83)式, 得

$$\{U\}_1 = \{\tilde{U}\}_1 \{a\}_1 = \begin{pmatrix} 1.255679 & 2.028937 \\ 2.344322 & 1.571063 \\ 2.721608 & -1.144686 \end{pmatrix}, \quad (j)$$

基准化后, 得

$$\{U\}_1 = \begin{pmatrix} 0.461374 & -1.772483 \\ 0.861374 & -1.372484 \\ 1.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}. \quad (k)$$

现在进行第二次迭代,

$$\{\tilde{U}\}_2 = \{D\}\{U\}_1 = \frac{m}{k} \begin{pmatrix} 3.322748 & -1.144967 \\ 6.184122 & -0.517451 \\ 7.184122 & 0.482549 \end{pmatrix}, \quad (l)$$

基准化后, 得

$$\{\tilde{U}\}_2 = \begin{pmatrix} 0.462513 & -2.372748 \\ 0.860804 & -1.072328 \\ 1.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}, \quad (m)$$

计算广义质量与广义刚度矩阵,

$$\{m\}_2 = \{\tilde{U}\}_2^T \{m\} \{\tilde{U}\}_2 = m \begin{bmatrix} 2.954902 & -0.020491 \\ -0.020491 & 8.779820 \end{bmatrix}, \quad (n)$$

$$\{k\}_2 = \{\tilde{U}\}_2^T \{k\} \{\tilde{U}\}_2 = k \begin{bmatrix} 0.411305 & -0.002562 \\ -0.002562 & 15.910112 \end{bmatrix}. \quad (o)$$

求解Ritz方程(14.1-89)式, 得

$$\{a\}_2 = \{ \{a_2^{(1)}\}, \{a_2^{(2)}\} \} = \begin{bmatrix} 14.688014 & -0.000239 \\ -0.000290 & -0.034571 \end{bmatrix}. \quad (p)$$

$$\{A\}_2 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} \lambda_2^{(1)} & \\ & \lambda_2^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0.139194 & 0 \\ 0 & 1.812150 \end{bmatrix}. \quad (q)$$

按(14.1-83)式计算 $\{U\}_2$ , 得

$$\{U\}_2 = \{\tilde{U}\}_2 \{\alpha\}_2 = \begin{pmatrix} 6.794086 & 0.081789 \\ 12.643812 & 0.036866 \\ 14.687724 & -0.034810 \end{pmatrix}, \quad (r)$$

基准化, 得

$$\{U\}_2 = \begin{pmatrix} 0.462569 & -2.349584 \\ 0.860842 & -1.059064 \\ 1.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}. \quad (s)$$

至此,  $\{U_2^{(1)}\}$  (即 $\{U\}_2$ 的第一列) 已经与 $\{U_1^{(1)}\}$  (即 $\{U\}_1$ 的第一列) 相近, 即已明显收敛。与例14.3(f)式给出的精确解比较,  $\{U_2^{(1)}\}$ 已经精确到小数点后第四位。与例14.4(d)式的精确解比较,  $\{U_2^{(2)}\}$  (即 $\{U\}_2$ 的第二列) 已经比 $\{U_1^{(2)}\}$  (即 $\{U\}_1$ 的第二列) 更趋近精确解, 但仍有较大的误差。此题可继续向前迭代。如就此终止, 则近似地有

$$\{u^{(1)}\} \approx \{0.462569, 0.860842, 1.000000\}^T, \quad (t)$$

$$\{u^{(2)}\} \approx \{-2.349584, -1.059064, 1.000000\}^T, \quad (u)$$

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{k}{m} \frac{1}{\lambda_1^{(1)}}} = 0.373087 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (v)$$

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{k}{m} \frac{1}{\lambda_2^{(2)}}} = 1.346161 \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (w)$$

这一节讲述的计算方法与模态分析技术相结合, 可以计算无阻尼线性系统对于初始条件或过程激励的响应。如果系统的阻尼不可忽略, 则可用下一节介绍的转移矩阵法加以分析与计算。

## § 14.2 有阻尼线性系统的状态

### 转移矩阵分析法

转移矩阵(transition matrix)的概念与方法可用于计算有



阻尼线性系统的响应。

## 14.2.1 状态方程与矩阵指数

### 1. 状态方程

我们在第十二章已经讲过一般非线性系统的状态变量及状态方程，前者如(12.2-4)~(12.2-6)式所示，后者则如(12.2-9)式或(12.2-12)式所示。现在我们回到线性系统的情形。已知多自由度线性系统的运动方程为

$$[m] \{\ddot{q}(t)\} + [c] \{\dot{q}(t)\} + [k] \{q(t)\} = \{Q(t)\}. \quad (14.2-1)$$

我们引入一恒等式  $\{\dot{q}(t)\} = \{\dot{q}(t)\}$ ，并将之写成

$$\{\dot{q}(t)\} = [0] \{q(t)\} + [1] \{\dot{q}(t)\} + [0] \{0\} + [0] \{Q(t)\}, \quad (14.2-2)$$

再将运动方程(14.2-1)两端左乘以  $[m]^{-1}$ ，并移项，得

$$\begin{aligned} \{\ddot{q}(t)\} = & -[m]^{-1}[k] \{q(t)\} - [m]^{-1}[c] \{\dot{q}(t)\} \\ & + [0] \{0\} + [m]^{-1} \{Q(t)\}. \end{aligned} \quad (14.2-3)$$

以上两式即可综合成状态方程

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}(t)\} \\ \dots\dots\dots \\ \{\ddot{q}(t)\} \end{Bmatrix} = & \begin{pmatrix} [0] & \vdots & [1] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ -[m]^{-1}[k] & \vdots & -[m]^{-1}[c] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{q(t)\} \\ \dots\dots\dots \\ \{\dot{q}(t)\} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} [0] & \vdots & [0] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ [0] & \vdots & [m]^{-1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \dots\dots\dots \\ \{Q(t)\} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (14.2-4)$$

记

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \{q(t)\} \\ \dots\dots\dots \\ \{\dot{q}(t)\} \end{Bmatrix}, \quad \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \dots\dots\dots \\ \{Q(t)\} \end{Bmatrix}, \quad (14.2-5)$$

$$[A] = \begin{pmatrix} [0] & \vdots & [1] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ -[m]^{-1}[k] & \vdots & -[m]^{-1}[c] \end{pmatrix}, \quad (14.2-6)$$

$$\{B\} = \begin{pmatrix} \{0\} & \dots & \{0\} \\ \dots & \dots & \dots \\ \{0\} & \dots & \{m\}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (14.2-7)$$

可将(14.2-4)式写成

$$\begin{matrix} \dot{\{x(t)\}} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} = \begin{matrix} \{A\} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} \{x(t)\} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} + \begin{matrix} \{B\} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} \{F(t)\} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}. \quad (14.2-8)$$

此为 $n$ 自由度线性系统的状态方程。其下标注了各矩阵与向量的维数，其中 $m = 2n$ 。

## 2. 矩阵指数的定义

我们先考虑自由振动的状态方程，

$$\dot{\{x(t)\}} = \{A\}\{x(t)\}. \quad (14.2-9)$$

这是一个矩阵微分方程，为了探求它的解，我们将之与一个相似的数量微分方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad (14.2-10)$$

相比拟。易知上式的解为

$$x(t) = e^{at}x(0). \quad (14.2-11)$$

这里 $x(0)$ 是 $t=0$ 时的初始值。这一结果启示我们将(14.2-9)式的解也写成与上式相似的形式，即

$$\{x(t)\} = e^{[A]t}\{x(0)\}, \quad (14.2-12)$$

式中 $\{x(0)\} = \{\{q(0)\}^T \dots \{\dot{q}(0)\}^T\}^T$ 是初始条件，它包括 $n$ 个初始位移与 $n$ 个初始速度。但是 $e^{[A]t}$ 却是以一个矩阵作为指数，其意义有待确定。我们将 $e^{at}$ 展成级数，

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \dots \quad (14.2-13)$$

仿此，可将 $e^{[A]t}$ 也写成类似的级数，

$$e^{[A]t} = [1] + [A]t + \frac{1}{2!}[A]^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}[A]^kt^k + \dots \quad (14.2-14)$$

此式的意义是确定的，可视为 $e^{[A]t}$ 的定义，其中 $[A]^2 = [A] \cdot [A]$ ， $[A]^3 = [A][A][A]$ ，等等。上式称为“矩阵指数”。如

此定义的 $e^{[A]t}$ 也是 $m \times m$ 的方阵。可以证明，对有限的时间 $t$ ，上式总是绝对收敛的。

**例14.6** 试推导由弹簧( $k$ )与质块( $m$ )组成的谐振子自由振动的状态方程，并以矩阵指数表示其自由振动的解。

解：谐振子的运动方程为

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0, \quad (a)$$

式中 $\omega_0^2 = k/m$ 。按(14.2-9)与(14.2-6)式，状态方程为

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}. \quad (b)$$

按(14.2-14)式，有

$$\begin{aligned} e^{[A]t} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}^2 t^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}^3 t^3 + \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}^4 t^4 + \frac{1}{5!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}^5 t^5 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} t - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{(\omega_0 t)^2}{2!} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \frac{\omega_0^2 t^3}{3!} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{(\omega_0 t)^4}{4!} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \frac{\omega_0^4 t^5}{5!} - \dots \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \omega_0^{-1} \sin \omega_0 t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix}. \quad (c) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } A = 1 - \frac{1}{2!} (\omega_0 t)^2 + \frac{1}{4!} (\omega_0 t)^4 - \dots$$

$$B = \omega_0^{-1} (\omega_0 t - \frac{1}{3!} (\omega_0 t)^3 + \frac{1}{5!} (\omega_0 t)^5 - \dots)$$

$$C = -\omega_0 (\omega_0 t - \frac{1}{3!} (\omega_0 t)^3 + \frac{1}{5!} (\omega_0 t)^5 - \dots)$$

$$D = 1 - \frac{1}{2!} (\omega_0 t)^2 + \frac{1}{4!} (\omega_0 t)^4 - \dots$$

按(14.2-12)式, 得自由振动的解为

$$\begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_n t & \omega_n^{-1} \sin\omega_n t \\ -\omega_n \sin\omega_n t & \cos\omega_n t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{Bmatrix}, \quad (d)$$

式中 $q(0)$ 、 $\dot{q}(0)$ 分别为初始位移与初始速度。其中第一式与第一章(1.3-7)式是一致的。

### 3. 矩阵指数的性质与算法

矩阵指数具有一些与数量指数十分相似的性质, 如

$$\frac{d}{dt} e^{[A]t} = [A]e^{[A]t} = e^{[A]t}[A], \quad (14.2-15)$$

$$e^{[A]t_1} e^{[A]t_2} = e^{[A](t_1+t_2)}, \quad (14.2-16)$$

$$(e^{[A]t})^{-1} = e^{-[A]t}, \quad (14.2-17)$$

等等。其中(14.2-15)、(14.2-16)式均可由原始定义(14.2-14)式证明。利用(14.2-15)式即可证明(14.2-12)式确实是(14.2-9)式的解。又令(14.2-16)式中 $t_2 = -t_1$ , 即可证明(14.2-17)式。但是必须注意, 一般

$$e^{[A]} e^{[B]} \neq e^{[A]+[B]}, \quad (14.2-18)$$

而只有当 $[A]$ 与 $[B]$ 是可交换的, 即 $[A][B] = [B][A]$ 时, 上式才能成为等式。

由于矩阵指数在系统动态分析及现代控制理论中的重要性, 已经研究出各种计算矩阵指数的方法, 这里我们只介绍一种便于数值计算的方法。

按定义(14.2-14)式计算矩阵指数时, 只能取有限的项, 如取至第 $k$ 项, 则该式成为

$$e^{[A]t} \approx (1) + [A]t + \frac{t^2}{2!} [A]^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} [A]^k. \quad (14.2-19)$$

此式可按照以下递推公式计算,

$$(\psi)_k = (1) + \frac{t}{k} [A],$$

$$\begin{aligned}
 (\psi)_2 &= (1) + \frac{t}{k-1} (A) (\psi)_1, \\
 (\psi)_3 &= (1) + \frac{t}{k-2} (A) (\psi)_2, \\
 &\dots\dots \\
 (\psi)_k &= (1) + t(A) (\psi)_{k-1},
 \end{aligned}
 \tag{14.2-20}$$

最后得

$$e^{[A]t} \approx (\psi)_k. \tag{14.2-21}$$

此式计算的精度一方面取决于 $k$ 的选取， $k$ 愈大，愈准确；另一方面也取决于 $t$ 的长短， $t$ 愈大，计算精度愈差。在 $k$ 值已经取定的情况下，为了提高计算精度，可以将时间分段，即将 $0 \sim t$ 这一段时间划分为 $r$ 段： $0 \sim t_1$ ， $t_1 \sim t_2$ ， $t_2 \sim t_3$ ， $\dots$ ， $t_{r-1} \sim t_r = t$ ，然后按(14.2-16)式计算 $e^{[A]t}$ ，

$$e^{[A]t} = e^{[A](t_1-0)} e^{[A](t_2-t_1)} e^{[A](t_3-t_2)} \dots e^{[A](t_r-t_{r-1})}. \tag{14.2-22}$$

### 14.2.2 状态转移矩阵

现在回到(14.2-12)式， $e^{[A]t}$ 这个 $m \times m$ 矩阵作用在零时刻的初始状态 $\{x(0)\}$ 上以后，就转移到 $t$ 时刻的状态 $\{x(t)\}$ ，因此可以将 $e^{[A]t}$ 称为“状态转移矩阵”。一般而言，我们可以将由 $t_0$ 时刻的状态转移到 $t$ 时刻的状态转移矩阵记为

$$e^{[A](t-t_0)} = \{\phi(t \curvearrowright t_0)\} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \dots & \phi_{mm} \end{pmatrix}. \tag{14.2-23}$$

而(14.2-12)式，现在可称为状态转移方程，则可写为

$$\{x(t)\} = \{\phi(t \curvearrowright t_0)\} \{x(t_0)\}. \tag{14.2-24}$$

按矩阵指数定义的状态转移矩阵，即(14.2-23)式，是对线性定常系统而言的。但是必须注意，状态转移矩阵的概念和分析

方法，也可适用于线性时变系统。对时变系统，状态转移矩阵需作如下定义：考虑以下几组特殊的初始状态，

$$\begin{aligned} \{x(t_0)\}_1 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{x(t_0)\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dots, \\ \{x(t_0)\}_m &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (14.2-25)$$

用以上第一组初始条件代入(14.2-24)式，并采用(14.2-23)式的记法，可得相应的解为

$$\{x(t)\}_1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \dots & \phi_{mm} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{m1} \end{Bmatrix}, \quad (14.2-26)$$

同理可得

$$\{x(t)\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{m2} \end{Bmatrix}, \quad \dots, \quad \{x(t)\}_m = \begin{Bmatrix} \phi_{1m} \\ \phi_{2m} \\ \vdots \\ \phi_{mm} \end{Bmatrix}. \quad (14.2-27)$$

由此得到状态转移矩阵的另一种解释：其各列是相应于(14.2-25)式这一组特殊的初始状态的解，即

$$(\phi(t \curvearrowright t_0)) = \{\{x(t)\}_1, \{x(t)\}_2, \dots, \{x(t)\}_m\}. \quad (14.2-28)$$

此式对所有的线性系统（时变与定常）均有效。对于线性时变系统来说，矩阵的各个列向量可由本章后面将要讲的数字仿真方法求出。

按状态转移矩阵的物理意义及矩阵指数的性质，不难确认转移矩阵具有以下性质：

$$1. \text{ 归一性, } (\phi(t_0 \curvearrowright t_0)) = [1], \quad (14.2-29)$$

$$2. \text{ 合成性, } (\phi(t \curvearrowright t_1))(\phi(t_1 \curvearrowright t_0)) = (\phi(t \curvearrowright t_0)), \quad (14.2-30)$$

$$3. \text{ 可逆性, } (\phi(t \curvearrowright t_0))^{-1} = (\phi(t_0 \curvearrowright t)). \quad (14.2-31)$$

### 14.2.3 线性系统的强迫振动

以上讨论了线性系统的自由振动, 现在讨论强迫振动的解, 即(14.2-8)式的解. 我们仍借鉴自由振动的解的形式, 即(14.2-12)式, 并考虑到外加激励的作用相当于使得系统的初态在不断变化, 于是我们来试探以下形式的解

$$\{x(t)\} = e^{[A]t} \{k(t)\}. \quad (14.2-32)$$

试探的目的是找出函数 $\{k(t)\}$ 的合适的形式, 使上式确实是(14.2-8)式的解.

将(14.2-32)式代入(14.2-8)式, 并利用(14.2-15)式, 有

$$\begin{aligned} \dot{\{x(t)\}} &= [A]e^{[A]t} \{k(t)\} + e^{[A]t} \{\dot{k}(t)\} \\ &= [A]e^{[A]t} \{k(t)\} + [B]\{F(t)\}, \end{aligned}$$

由此

$$e^{[A]t} \{\dot{k}(t)\} = [B]\{F(t)\},$$

由(14.2-17)式, 有

$$\{\dot{k}(t)\} = e^{-[A]t} [B]\{F(t)\},$$

积分, 得

$$\{k(t)\} = \int_0^t e^{-[A]\tau} [B]\{F(\tau)\} d\tau + \{k\},$$

式中 $\tau$ 为积分变量, 而 $\{k\}$ 为积分常数. 代入(14.2-32)式, 得

$$\{x(t)\} = e^{[A]t} \{k\} + e^{[A]t} \int_0^t e^{-[A]\tau} [B]\{F(\tau)\} d\tau,$$

考虑到初始条件

$$\{x(0)\} = \{x(t)\} |_{t=0},$$

由上式得

$$\{k\} = \{x(0)\},$$

代回上式，得强迫振动的响应为

$$\{x(t)\} = e^{[A]t} \{x(0)\} + \int_0^t e^{[A](t-\tau)} (B) \{F(\tau)\} d\tau. \quad (14.2-33)$$

上式中用到了(14.2-16)式。如果将时间的起点一般地记为 $t_0$ ，则有

$$\{x(t)\} = e^{[A](t-t_0)} \{x(t_0)\} + \int_{t_0}^t e^{[A](t-\tau)} (B) \{F(\tau)\} d\tau, \quad (14.2-34)$$

或者采用(14.2-23)式关于转移矩阵的记法，得

$$\{x(t)\} = (\phi(t, t_0)) \{x(t_0)\} + \int_{t_0}^t (\phi(t, \tau)) (B) \{F(\tau)\} d\tau. \quad (14.2-35)$$

例14.7 计算例14.6中的谐振子在斜坡函数 $F(t) = f_0 tu(t)$ 激励下的响应。这里 $u(t)$ 是单位阶跃函数。

解：由(14.2-7)式，

$$(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}. \quad (a)$$

而 $(A)$ 及 $e^{[A]t}$ 已由例14.6(b)、(d)式给出，代入(14.2-34)式，得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\omega_n t & \omega_n^{-1} \sin\omega_n t \\ -\omega_n \sin\omega_n t & \cos\omega_n t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{Bmatrix} \\ &+ \int_0^t \begin{bmatrix} \cos\omega_n t & \omega_n^{-1} \sin\omega_n t \\ -\omega_n \sin\omega_n t & \cos\omega_n t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \cos\omega_n t & \omega_n^{-1} \sin\omega_n t \\ -\omega_n \sin\omega_n t & \cos\omega_n t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \begin{Bmatrix} \sin\omega_n(t-\tau) \\ \omega_n \cos\omega_n(t-\tau) \end{Bmatrix} F(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (b)$$

此即谐振子在初始激励与过程激励下的响应的一般表达式，其中既包括位移响应也包括速度响应。

令初始条件为零，以 $F(t) = f_0 tu(t)$ 代入上式，并积分，即



得斜坡函数作用下系统的响应

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{Bmatrix} &= \frac{f_0}{m\omega_n} \int_0^t \begin{Bmatrix} \sin\omega_n(t-\tau) \\ \omega_n \cos\omega_n(t-\tau) \end{Bmatrix} \tau d\tau \\ &= \frac{f_0}{k\omega_n} \begin{Bmatrix} \omega_n t - \sin\omega_n t \\ \omega_n (1 - \cos\omega_n t) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (c)$$

#### 14.2.4 状态方程的离散化

这里讲的是状态方程在时间上的离散化，其用意是为了便于以计算机求解振动系统的时间历程。其要点是将时间划分为许多小段，通常是相等的小段  $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_{i+1} - t_i = \dots = t_n - t_{n-1}$ ，这里  $t_i = t_0 + i\Delta t$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ) 是划分点，或称为“采样点”，而  $n$  是分段总数。然后，从初始条件  $\{x(t_0)\}$  出发，逐步计算出系统的时间历程  $\{x(t)\}$  在诸划分点上的数值  $\{x(t_1)\}$ ,  $\{x(t_2)\}$ ,  $\dots$ ,  $\{x(t_{i+1})\}$ 。在计算中通常要引入一定的简化，因而会产生误差，可是当分段  $\Delta t$  充分小时，可以得到足够的计算精度。

令(14.2-33)式中的  $t = i\Delta t$ ，得

$$\{x(i\Delta t)\} = e^{[A]i\Delta t} \{x(0)\} + \int_0^{i\Delta t} e^{[A](i\Delta t - \tau)} (B) \{F(\tau)\} d\tau, \quad (14.2-36)$$

再令(14.2-36)式中  $t = (i+1)\Delta t$ ，得

$$\begin{aligned} \{x(i\Delta t + \Delta t)\} &= e^{[A](i\Delta t + \Delta t)} \{x(0)\} + \int_0^{i\Delta t + \Delta t} e^{[A](i\Delta t + \Delta t - \tau)} \\ &\quad \cdot (B) \{F(\tau)\} d\tau, \\ &= e^{[A]\Delta t} \left[ e^{[A]i\Delta t} \{x(0)\} + \int_0^{i\Delta t} e^{[A](i\Delta t - \tau)} \right. \\ &\quad \cdot (B) \{F(\tau)\} d\tau \\ &\quad \left. + \int_{i\Delta t}^{i\Delta t + \Delta t} e^{[A](i\Delta t + \Delta t - \tau)} (B) \{F(\tau)\} d\tau. \right] \end{aligned} \quad (14.2-37)$$

现在分析上式中最后一项, 假设 $\{F(\tau)\}$ 在 $i\Delta t \sim (i+1)\Delta t$ 这一小段时间内的变化可以略而不计, 而可视为常数即 $\{F(\tau)\} \approx \{F(i\Delta t)\}$ , 得

$$\begin{aligned} & \int_{i\Delta t}^{i\Delta t + \Delta t} e^{[A](i\Delta t + \Delta t - \tau)} \{B\} \{F(\tau)\} d\tau \\ &= \left[ \int_{i\Delta t}^{i\Delta t + \Delta t} e^{[A](i\Delta t + \Delta t - \tau)} d\tau \right] \{B\} \{F(i\Delta t)\}, \quad (14.2-38) \end{aligned}$$

令 $i\Delta t + \Delta t - \tau = t$ , 将积分变量由 $\tau$ 变为 $t$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{i\Delta t}^{i\Delta t + \Delta t} e^{[A](i\Delta t + \Delta t - \tau)} d\tau &= \int_{\Delta t}^0 e^{[A]t} (-dt) \\ &= \int_0^{\Delta t} e^{[A]t} dt. \quad (14.2-39) \end{aligned}$$

以(14.2-36)、(14.2-38)与(14.2-39)式代入(14.2-37)式, 得

$$\{x(i\Delta t + \Delta t)\} = e^{[A]\Delta t} \{x(i\Delta t)\} + \int_0^{\Delta t} e^{[A]t} dt \{B\} \{F(i\Delta t)\}, \quad (14.2-40)$$

记

$$\{\phi(i\Delta t + \Delta t \sim i\Delta t)\} = e^{[A]\Delta t} = \{\phi\}, \quad (14.2-41)$$

$$\int_0^{\Delta t} e^{[A]t} dt \{B\} = \{\Gamma\}, \quad (14.2-42)$$

$$i\Delta t = i, \quad (i+1)\Delta t = i+1, \quad (14.2-43)$$

(14.2-40)式成为

$$\{x(i+1)\} = \{\phi\} \{x(i)\} + \{\Gamma\} \{F(i)\}, \quad i=1, 2, \dots \quad (14.2-44)$$

此即离散的状态方程, 此式便于以计算机进行计算, 当 $\{\phi\}$ 、 $\{\Gamma\}$ 、 $\{x(0)\}$ 及 $\{F(i)\}$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ )给定时, 由上式可以计算系统响应的时间历程 $\{x(1)\}$ ,  $\{x(2)\}$ ,  $\dots$ .

**例14.8** 试将例14.6、14.7中的模型在时间上离散化, 并计算其对于斜坡函数 $F(t) = f_0 tu(t)$ 的响应.

**解:** 由例14.6(d)式, 令 $t = \Delta t$ , 即得

$$\{\phi\} = e^{[A]\Delta t} = \begin{bmatrix} \cos\omega_n \Delta t & \omega_n^{-1} \sin\omega_n \Delta t \\ -\omega_n \sin\omega_n \Delta t & \cos\omega_n \Delta t \end{bmatrix}, \quad (a)$$

而由上式与例14.7(a)式, 得

$$\begin{aligned}
 \{\Gamma\} &= \int_0^{\Delta t} e^{[A]t} dt \{B\} \\
 &= \int_0^{\Delta t} \begin{bmatrix} \cos \omega_n \Delta t & \omega_n^{-1} \sin \omega_n \Delta t \\ -\omega_n \sin \omega_n \Delta t & \cos \omega_n \Delta t \end{bmatrix} dt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\omega_n} \begin{bmatrix} \sin \omega_n \Delta t & (m\omega_n)^{-1}(1 - \cos \omega_n \Delta t) \\ -\omega_n(1 - \cos \omega_n \Delta t) & m^{-1} \sin \omega_n \Delta t \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{b}$$

又已知初始条件为

$$\{x(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{c}$$

过程激励为

$$\{F(i)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_0 i \Delta t \end{Bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{d}$$

于是各相继时刻的响应可逆推如下:

$$\begin{aligned}
 \{x(1)\} &= \{\phi\}\{x(0)\} + \{\Gamma\}\{F(0)\} \\
 &= \{\phi\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \{\Gamma\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},
 \end{aligned} \tag{e}$$

$$\begin{aligned}
 \{x(2)\} &= \{\phi\}\{x(1)\} + \{\Gamma\}\{F(1)\} \\
 &= \{\phi\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \{\Gamma\} \begin{Bmatrix} 0 \\ f_0 \Delta t \end{Bmatrix} = \frac{f_0 \Delta t}{k} \begin{Bmatrix} 1 - \cos \omega_n \Delta t \\ \omega_n \sin \omega_n \Delta t \end{Bmatrix},
 \end{aligned} \tag{f}$$

$$\begin{aligned}
 \{x(3)\} &= \{\phi\}\{x(2)\} + \{\Gamma\}\{F(2)\} \\
 &= \{\phi\} \frac{f_0 \Delta t}{k} \begin{Bmatrix} 1 - \cos \omega_n \Delta t \\ \omega_n \sin \omega_n \Delta t \end{Bmatrix} + \{\Gamma\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2f_0 \Delta t \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{f_0 \Delta t}{k} \begin{bmatrix} \cos \omega_n \Delta t & \omega_n^{-1} \sin \omega_n \Delta t \\ -\omega_n \sin \omega_n \Delta t & \cos \omega_n \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - \cos \omega_n \Delta t \\ \omega_n \sin \omega_n \Delta t \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\omega_n} \begin{bmatrix} \sin \omega_n \Delta t & (m\omega_n)^{-1}(1 - \cos \omega_n \Delta t) \\ -\omega_n(1 - \cos \omega_n \Delta t) & m^{-1} \sin \omega_n \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2f_0 \Delta t \end{Bmatrix} \\
& = \frac{f_0 \Delta t}{k} \left\{ \begin{array}{l} 2 - \cos \omega_n \Delta t - \cos 2\omega_n \Delta t \\ \omega_n (\sin \omega_n \Delta t + \sin 2\omega_n \Delta t) \end{array} \right\}, \quad (g)
\end{aligned}$$

这种计算很容易在计算机上以循环语句 (DO LOOP) 来实现。

### § 14.3 求解系统响应的计算机 数字仿真方法

所谓对一个振动系统进行计算机数字仿真，就是指按照该系统的运动方程或状态方程、初始条件与外加激励，来求解该系统的运动方程。我们在上一节讲的实际上是线性系统数字仿真的一种方法。可是数字仿真不只适用于线性系统，也可毫无困难地用于非线性系统，而无须新的技巧或方法。这一节我们将进一步引申上一节中关于时间离散与逆推算法的思路，并讲解某些较实用的算法与技巧。

我们考虑一单自由度非线性系统，一般而言，从其运动方程中可以将  $\ddot{x}(t)$  解出，得到

$$\ddot{x}(t) = f(x, \dot{x}, t). \quad (14.3-1)$$

特殊地，对于线性系统来说，上式成为

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(t)}{m} - \frac{c}{m} \dot{x}(t) - \frac{k}{m} x(t). \quad (14.3-2)$$

设初始条件为

$$x_1 = x(t_1), \quad \dot{x}_1 = \dot{x}(t_1). \quad (14.3-3)$$

这里我们采用  $x_1$  与  $\dot{x}_1$ ，而不用  $x_0$  与  $\dot{x}_0$ ，是因为在计算机上一般

不采用“0”作为下标。代入(14.3-1)式,得

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}(t_1) = f(x_1, \dot{x}_1, t_1). \quad (14.3-4)$$

(14.3-1)式是进行数字仿真的依据,而(14.3-3)、(14.3-4)式是仿真的出发点.仿真的要求则是找出一种算法由 $t_1$ 时刻的 $x_1$ ,  $\dot{x}_1$ 与 $\ddot{x}_1$ ,推算下一个时刻 $t_2$ 的 $x_2$ ,  $\dot{x}_2$ 与 $\ddot{x}_2$ ,然后再推出更下一时刻 $t_3$ 的 $x_3$ ,  $\dot{x}_3$ 与 $\ddot{x}_3$ …如此一小步一小步地前进,直至求出系统响应的全部时间历程.在计算中通常要采用各种简化的假设.由于简化的方法不同,产生了不同的算法,因此,各有不同的精度,也要求不同的计算工作量.当时间分段 $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ 充分小时,各种近似方法的误差,对于工程问题来说,是可以容忍的.

### 14.3.1 矩形法(Euler)

#### 1. 一步矩形法

其要点是假设在每一个时间分段( $t_i, t_{i+1}$ )中,系统运动的加速度为常数(即作匀变速运动),且取其区间左端点的值

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t_i) = \ddot{x}_i, \quad t \in (t_i, t_{i+1}),$$

于是按匀变速运动的公式,有

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t, \quad (14.3-5)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i (\Delta t)^2, \quad (14.3-6)$$

代入(14.3-1)式,得

$$\ddot{x}_{i+1} = f(x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, t_{i+1}), \quad (14.3-7)$$

其中  $t_{i+1} = t_i + \Delta t = t_1 + i\Delta t$ .

利用(14.3-5)~(14.3-7)式,在 $x_i$ ,  $\dot{x}_i$ 及 $\ddot{x}_i$ 已知的情况下,可算出 $x_{i+1}$ ,  $\dot{x}_{i+1}$ 及 $\ddot{x}_{i+1}$ ,即向前推进了一步.从初始条件(14.3-3)式开始,迭代过程用框图表示在图14.3-1中.

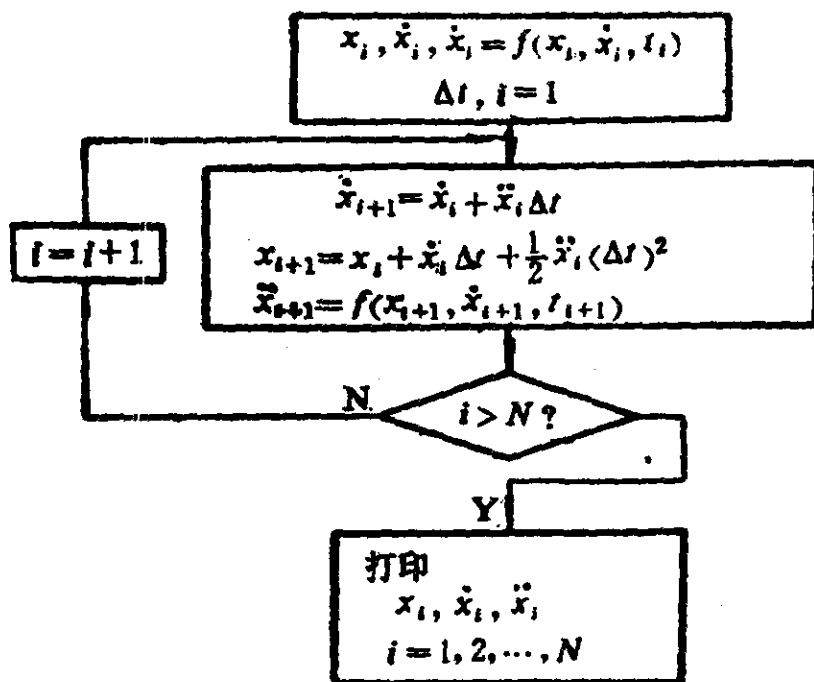


图 14.3-1

时间分段 $\Delta t$ 的大小对于计算精度和计算量有决定性的影响。通常取 $\Delta t \leq \tau/10$ ，其中 $\tau = 2\pi/\omega_n$ ， $\omega_n$ 为系统的自然频率，而 $\tau$ 为系统自由振动的周期。在实际计算中，考虑所取 $\Delta t$ 是否合适的一种粗略方法是：令 $\Delta t$ 减小为原有的一半，看计算结果变化大不大，如果变化不大，则表明所取 $\Delta t$ 是合适的；如果变化很大，则应考虑进一步减小 $\Delta t$ 。读者需注意，不要盲目地减小 $\Delta t$ ，一方面，这会使计算工作量大幅度地上升，另一方面，过小的 $\Delta t$ 导致运算步骤过多，而这会使计算过程中的圆整误差的积累上升，也影响精度。

## 2. 两步矩形法

上述一步矩形法中，为了求时刻 $t_{i+1}$ 的运动 $x_{i+1}$ ， $\dot{x}_{i+1}$ 及 $\ddot{x}_{i+1}$ ，只用到其前一时间 $t_i$ 的数值 $x_i$ ， $\dot{x}_i$ 及 $\ddot{x}_i$ ，事实上，为了提高计算精度，可以利用前面已经算出来的多步数值，以便将更多的信息纳入考虑。这里介绍“两步法”，即计算 $t_{i+1}$ 时刻的运动时，要利用到已经掌握的 $t_i$ 及 $t_{i-1}$ 时刻的数值。其要点是假

定在时间  $t_{i-1} \sim t_{i+1}$  中，加速度是常值，取其区间中间  $t_i$  处的数值，即

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t_i) = \ddot{x}_i, \quad t \in (t_{i-1}, t_{i+1}),$$

于是按匀变速运动的公式，由  $t_i$  时刻分别向  $t_{i+1}$  及  $t_{i-1}$  时刻计算，有

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t, \quad (14.3-8)$$

$$\dot{x}_{i-1} = \dot{x}_i - \ddot{x}_i \Delta t, \quad (14.3-9)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i (\Delta t)^2, \quad (14.3-10)$$

$$x_{i-1} = x_i - \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i (\Delta t)^2. \quad (14.3-11)$$

由(14.3-8)减(14.3-9)式，由(14.3-10)加(14.3-11)式，并移项，分别得

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_{i-1} + \ddot{x}_i (2\Delta t), \quad (14.3-12)$$

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \ddot{x}_i (\Delta t)^2, \quad (14.3-13)$$

由(14.3-1)式，

$$\ddot{x}_{i+1} = f(x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, t_{i+1}). \quad (14.3-14)$$

按以上三式，可分别由  $t_i$ 、 $t_{i-1}$  时刻的运动推算出  $t_{i+1}$  时刻的运动。

这种迭代依赖于前两个时刻的值，而初始条件只给出  $t_1$  时刻的  $x_1$  及  $\dot{x}_1$ ，再由运动方程(14.3-4)，可算出  $\ddot{x}_1$ ，还需算出  $t_2$  时刻的  $x_2$ 、 $\dot{x}_2$  及  $\ddot{x}_2$  以后，整个迭代程序才启动。为了计算  $x_2$ 、 $\dot{x}_2$ ，可假定在时间区间中加速度为定值，即令

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_1, \quad t \in (t_1, t_2),$$

于是可用前面的单步矩形法算出  $\dot{x}_2$ 、 $x_2$ ，

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \ddot{x}_1 \Delta t, \quad (14.3-15)$$

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_1 (\Delta t)^2, \quad (14.3-16)$$

再由(14.3-1)式算出  $\ddot{x}_2$ ,

$$\ddot{x}_2 = f(x_2, \dot{x}_2, t_2). \quad (14.3-17)$$

然后可用公式(14.3-12)~(14.3-14)式依次推导出  $\dot{x}_3$ 、 $x_3$ 、 $\ddot{x}_3$ 、 $\dot{x}_4$ 、 $x_4$ 、 $\ddot{x}_4$ 、…等等。其计算流程如图14.3-2所示。

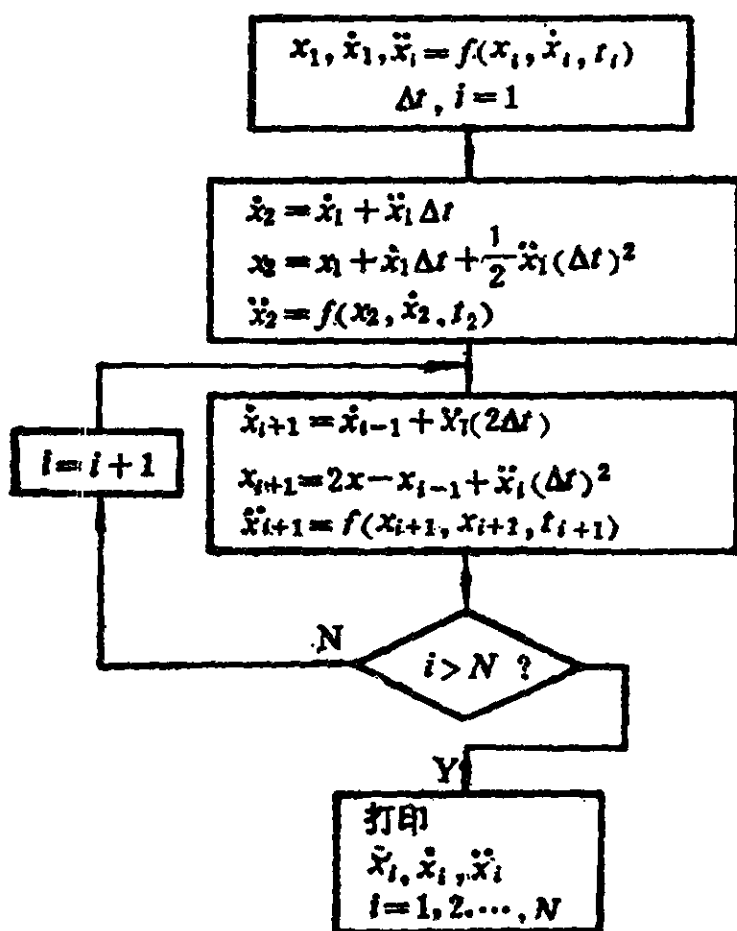


图 14.3-2

例14.9 设一谐振子的强迫振动运动微分方程为

$$4 \ddot{x} + 2000x = F(t), \quad (a)$$

其激振力  $F(t)$  由图14.3-3定义, 初始条件为  $x_1 = \dot{x}_1 = 0$ , 试以双步矩形法计算其响应的时间历程。



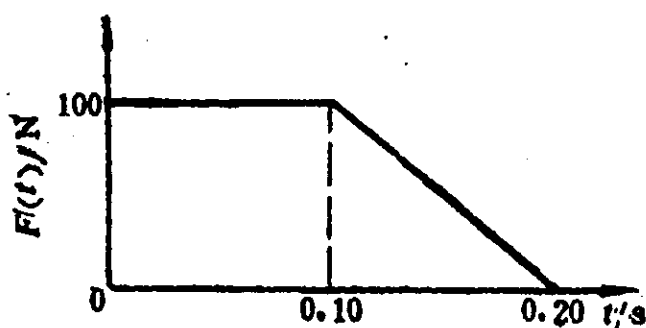


图 14.3-3

解：系统的自然频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2000}{4}} = 22.4 \text{ rad/s}$$

自由振动的周期为

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.281 \text{ s}$$

取  $\Delta t = 0.030 \text{ s}$  ( $\approx \tau/10$ )。将振动方程改写为

$$\ddot{x} = \frac{1}{4}F(t) - 500x, \quad (b)$$

由于  $x_1 = 0$ ，得

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{4}F(t_1) - 500x_1 = \frac{1}{4} \times 100 = 25,$$

由(14.3-17)式，得

$$x_2 = \frac{1}{2} \times 25 \times 0.030^2 = 0.0113,$$

由(b)式，得

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{4} \times 100 - 500 \times 0.0113 = 19.35,$$

利用公式(14.3-12)~(14.3-14)式可依次算出  $\dot{x}_3, x_3, \ddot{x}_3; \dot{x}_4, x_4, \ddot{x}_4, \dots$ ，其结果列于表14.3-1，而响应  $x(t)$  的时间曲线如图14.3-4所示，该图将离散时刻的值  $x_1, x_2, \dots$ ，连成了光滑的曲线。

表14.3-1 例14.9的计算结果

$i$	$t$	$\frac{1}{4}F(t)$	$500x$	$\bar{x}$	$\bar{x}\Delta t^2$	$x$
1	0	25.0	0	25.00	0.0225	0
2	0.030	25.0	5.65	19.35	0.0174	0.0133
3	0.060	25.0	20.00	5.00	0.0045	0.0400
4	0.090	25.0	36.60	-11.60	-0.0104	0.0732
5	0.120	20.0	48.00	-28.00	-0.0252	0.0960
6	0.150	12.5	46.80	-34.30	-0.0309	0.0936
7	0.180	5.0	30.15	-25.15	-0.0226	0.0603
8	0.210	0	2.20	-2.20	0.0020	0.0044
9	0.240	0	-26.75	26.75	0.0241	-0.0585
10	0.270	0	-43.75	43.65	0.0393	-0.0873
11	0.300	0	-40.90	40.90	0.0368	-0.0818
12	0.330	0	-18.75	19.75	0.0178	-0.0395
13	0.360	0	10.30	-10.30	-0.0093	0.0206
14	0.390	0	35.70	-35.70	-0.0321	0.0714
15	0.420	0	45.05	-45.05	-0.0405	0.0901
16	0.450	0				0.0683

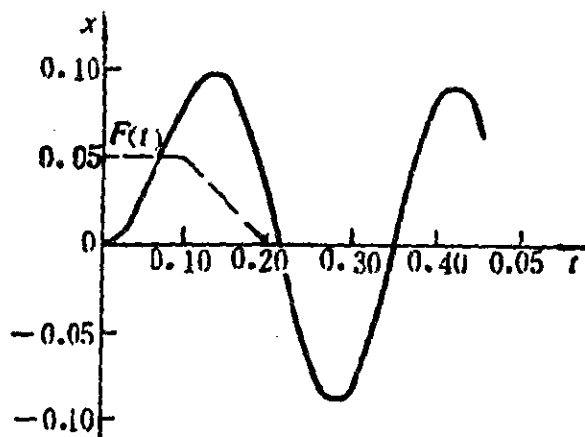


图 14.3-4

### 3. 对两步矩形法的改进

上述两步矩形法有一点不足的地方：当初始条件为零，即

$x_1 = \dot{x}_1 = 0$ , 且  $F(t_1) = 0$  时, 由(14.3-2)及(14.3-15)~(14.3-17)式可知,  $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_2 = \ddot{x}_2 = 0$ , 再由(14.3-12)~(14.3-14)式知  $x_{i+1} = \dot{x}_{i+1} = \ddot{x}_{i+1} = 0$ ,  $i = 3, 4, \dots$ . 即算来算去总是零, 迭代过程无法启动。但实际上系统是会振动起来的, 因其激振力  $F(t)$  只是在  $t = t_1$  时为零, 其余时刻并不为零。为了克服这一困难, 可以假定在时段  $(t_1, t_2)$  中, 加速度成线性地增加, 即

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_1 + a(t - t_1), \quad (14.3-18)$$

积分一次, 并注意到  $\dot{x}_1 = 0$ , 得

$$\dot{x}(t) = \ddot{x}_1(t - t_1) + \frac{1}{2}a(t - t_1)^2, \quad (14.3-19)$$

再积分一次, 并注意到  $x_1 = 0$ , 得

$$x(t) = \frac{1}{2}\ddot{x}_1(t - t_1)^2 + \frac{1}{6}a(t - t_1)^3. \quad (14.3-20)$$

从(14.3-18)、(14.3-19)两式中消去  $a$ , 令  $t = t_2$ , 并考虑到  $\ddot{x}_1 = 0$ , 得

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}\ddot{x}_2\Delta t. \quad (14.3-21)$$

从(14.3-18)、(14.3-20)两式中消去  $a$ , 令  $t = t_2$ , 同样计及  $\ddot{x}_1 = 0$ , 得

$$x_2 = \frac{1}{6}\ddot{x}_2(\Delta t)^2. \quad (14.3-22)$$

此外, 由(14.3-1)式, 有

$$\ddot{x}_2 = f(x_2, \dot{x}_2, t_2), \quad (14.3-23)$$

联立解(14.3-21)~(14.3-23)式, 可求出  $x_2$ ,  $\dot{x}_2$  及  $\ddot{x}_2$ , 然后, 以上述的两步法进行迭代, 可求出全部时间历程。

## 14.3.2 梯形法

### 1. 基本方法

其要点是假定在每一时间分段 $(t_i, t_{i+1})$ 中, 加速度均呈线性地变化, 即

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_i + \alpha(t - t_i), \quad \text{当 } t \in (t_i, t_{i+1}), \quad (14.3-24)$$

这里 $\alpha$ 是加速度的变化率, 假定为常数。注意, 在矩形法中我们假定在一时间分段中, 加速度是常数, 而这里假定加速度的变化率是常数。后者的假定当然更精细, 能更好地反映实际情况。可是与前述改进两步矩形法一样, 这样的假设导致解联立方程的必要, 计算量很大。将(14.3-24)式连续积分两次, 分别得

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_i + \ddot{x}_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \alpha(t - t_i)^2, \quad (14.3-25)$$

$$x(t) = x_i + \dot{x}_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \ddot{x}_i(t - t_i)^2 + \frac{1}{6} \alpha(t - t_i)^3. \quad (14.3-26)$$

令(14.3-24)、(14.3-25)、(14.3-26)式中 $t = t_{i+1}$ , 得

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \alpha \Delta t, \quad (14.3-27)$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2, \quad (14.3-28)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \alpha (\Delta t)^3. \quad (14.3-29)$$

分别由(14.3-27)与(14.3-28)式, (14.3-27)与(14.3-29)式消去 $\alpha$ , 得

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{1}{2} (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \Delta t, \quad (14.3-30)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{6} (2\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) (\Delta t)^2. \quad (14.3-31)$$

由(14.3-1)式,

$$\ddot{x}_{i+1} = f(x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, t_{i+1}), \quad (14.3-32)$$

要利用方程(14.3-30)~(14.3-32)由 $t_i$ 时刻的 $x_i$ ,  $\dot{x}_i$ 及 $\ddot{x}_i$ 推出 $t_{i+1}$ 时刻的 $x_{i+1}$ ,  $\dot{x}_{i+1}$ 与 $\ddot{x}_{i+1}$ , 需要解联立方程组, 计算量很大. 为了减小计算量, 可采用所谓的“预报-校正”法.

## 2. 预报-校正法

由(14.3-30)与(14.3-31)式可知, 为求 $x_{i+1}$ ,  $\dot{x}_{i+1}$ 需知道 $\ddot{x}_{i+1}$ , 而由(14.3-32)式可知, 为求 $\ddot{x}_{i+1}$ 又需知道 $\dot{x}_{i+1}$ 及 $x_{i+1}$ , 因此导致解联立方程的需要. 为了摆脱这一困境, 可以按前述矩形的(14.3-5)~(14.3-7)式计算 $\dot{x}_{i+1}$ ,  $x_{i+1}$ 及 $\ddot{x}_{i+1}$ , 这称为“预报”.

$$\dot{x}_{i+1}^{(0)} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t,$$

$$x_{i+1}^{(0)} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i (\Delta t)^2,$$

$$\ddot{x}_{i+1}^{(0)} = f(x_{i+1}^{(0)}, \dot{x}_{i+1}^{(0)}, t_{i+1}),$$

上标“(0)”表示“预报”. 然后再按公式(14.3-30)~(14.3-32)式进行“校正”.

$$\dot{x}_{i+1}^{(1)} = \dot{x}_i + \frac{1}{2} (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}^{(0)}) \Delta t,$$

$$x_{i+1}^{(1)} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{6} (2\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}^{(0)}) (\Delta t)^2,$$

$$\ddot{x}_{i+1}^{(1)} = f(x_{i+1}^{(1)}, \dot{x}_{i+1}^{(1)}, t_{i+1}),$$

上标“(1)”表示第一次“校正”. 还可进行第二次校正,

$$\dot{x}_{i+1}^{(2)} = \dot{x}_i + \frac{1}{2} (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}^{(1)}) \Delta t,$$

$$x_{i+1}^{(2)} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{6} (2\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}^{(1)}) (\Delta t)^2,$$

$$\ddot{x}_{i+1}^{(2)} = f(x_{i+1}^{(2)}, \dot{x}_{i+1}^{(2)}, t_{i+1}).$$

但可以证明, 从精度等级上来说, 校正一次就够了.

### 14.3.3 Runge-Kutta法

此法的特点是将每一时间区段  $(t_i, t_{i+1})$  以其中点  $t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \left(i + \frac{1}{2} - 1\right)\Delta t$  分成两部分,  $(t_i, t_{i+\frac{1}{2}})$ 、 $(t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+1})$ , 先由  $t_i$  时刻的值  $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$  按一步矩形法“预报”  $t_{i+\frac{1}{2}}$  时刻的中值,

$$x_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} = x_i + \dot{x}_i \frac{\Delta t}{2},$$

$$\dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \frac{\Delta t}{2},$$

$$\ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} = f(x_{i+\frac{1}{2}}^{(0)}, \dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(0)}, t_{i+\frac{1}{2}}).$$

然后对中值按梯形法进行“校正”,

$$x_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} = x_i + \dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{\Delta t}{2},$$

$$\dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} = \dot{x}_i + \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{\Delta t}{2},$$

$$\ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} = f(x_{i+\frac{1}{2}}^{(1)}, \dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)}, t_{i+\frac{1}{2}}).$$

再按两步矩形法(实际上是“两个半步”), 计算  $t_{i+1}$  时刻的末值,

$$x_{i+1}^{(1)} = x_i + \dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} \Delta t,$$

$$\dot{x}_{i+1}^{(1)} = \dot{x}_i + \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} \Delta t,$$

$$\ddot{x}_{i+1}^{(1)} = f(x_{i+1}^{(1)}, \dot{x}_{i+1}^{(1)}, t_{i+1}).$$

而区间  $(t_i, t_{i+1})$  中  $\dot{x}(t)$  及  $\ddot{x}(t)$  的均值  $\tilde{\dot{x}}_i$  与  $\tilde{\ddot{x}}_i$  取以上诸值的加权平均,

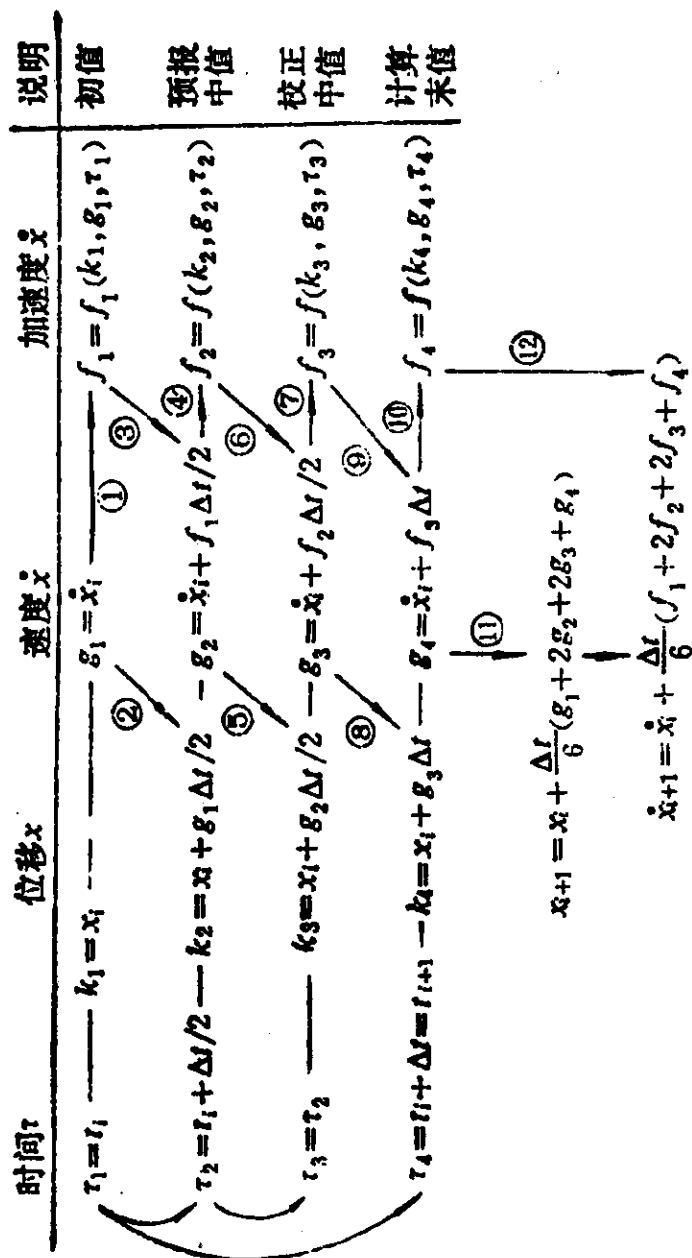


图 14.3-5

$$\dot{\tilde{x}}_i = \frac{1}{6}(\dot{x}_i + 2\dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} + 2\dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} + \dot{x}_{i+1}^{(1)}),$$

$$\ddot{\tilde{x}}_i = \frac{1}{6}(\ddot{x}_i + 2\ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} + 2\ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} + \ddot{x}_{i+1}^{(1)}).$$

加权的系数是按照误差最小的原则确定的，在此不详细讨论。由此可求出 $t_{i+1}$ 时刻的位移、速度与加速度分别为

$$x_{i+1} = x_i + \tilde{x}_i \Delta t,$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \dot{\tilde{x}}_i \Delta t,$$

$$\ddot{x}_{i+1} = f(x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, t_{i+1}).$$

Runge-Kutta法的计算量显然比前述矩阵法、梯形法大，但精度要比它们高得多，总的说来还是合算的，因此用得比较普遍。

Runge-Kutta法的计算机流程图如图14.3-5所示。

以数字计算方法求解系统的运动方程，其结果是系统的时间历程在一系列离散点上的数值，也可用绘图机绘制成连续的曲线。数字方法的特点是精度高，机动灵活，适用性强，但计算速度可能较慢，往往不能满足“实时”、“在线”仿真，或者与真实系统联机运行的要求，而且计算成本也较高。此外，采用数字仿真的方法，只能就具体的条件（初始条件或激励规律）进行计算，并得出具体的响应，而较难归纳出一般的结论或普遍的规律。

## 思考题

1. 对于广义特征值问题 $[k]\{u\} = \lambda[m]\{u\}$ ，如引入动力矩阵 $[D] = [k]^{-1}[m]$ ，则可化成标准特征值问题 $[D]\{u\} = \mu\{u\}$ ，其中 $\mu = 1/\lambda$ 。那么为什么还需要采用Cholesky的三角分解法，以得到标准特征值问题，即



(14.1-10)式?

2. 矩阵迭代法中, 采用构造 $[D]^{(2)}$ ,  $[D]^{(3)}$ , ...,  $[D]^{(n)}$ 来求高阶特征向量与高阶特征值的方法, 又称为“矩阵降阶法”. 而另有一种方法, 称为“向量降阶法”, 它并不去构造新的矩阵, 而去构造一个新的试算向量:  $\{u_0^{(2)}\} = \{u\}_{i+1} - \{u\}_i$ , 其中 $\{u\}_{i+1}$ 与 $\{u\}_i$ 是在求第一阶特征向量与特征值时相邻两次迭代得出的试算向量. 理论上以 $[D]$ 对 $\{u_0^{(2)}\}$ 反复作用后, 即可收敛于第二特征向量与第二特征值 $\{u^{(2)}\}$ 及 $\mu_2$ , 这是为什么? 实际上这种方法并不适用, 其问题在哪里?

3. 在图14.1-2中,  $\{u^{(1)}\}$ 与 $\{u^{(2)}\}$ 两特征向量并不正交, 可是我们知道, 同一线性系统对应于两个不同的特征值的特征向量应该满足正交关系, 这如何解释?

## 习 题

14-1 试对于一般的旋转变换矩阵(14.1-41)式证明(14.1-38)式与(14.1-39)式.

14-2 证明(14.1-52)式与(14.1-42)式等阶以及(14.1-53)、(14.1-54)式与(14.1-45)式等阶.

14-3 试证明(14.1-89)式.

14-4 试证明(14.2-15)~(14.2-17)式.

14-5 试以Cholesky三角分解法与Jacobi旋转迭代法计算以下广义特征值问题的特征向量与特征值:  $[k]\{u\} = \lambda[m]\{u\}$ , 其中

$$[k] = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 11 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 15 \end{pmatrix}, \quad [m] = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 14 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 16 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 12 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

14-6 一个柴油机动力装置经简化为如图14-6所示的轴盘扭转系统, 其中盘的转动惯量( $10\text{N}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2$ )为:

$$J_1 = 35.52,$$

$$I_2 = I_3 = \dots = I_9 = 18.92,$$

$$I_{10} = 6.35, I_{11} = 312.87,$$

$$I_{12} = 10.77, I_{13} = 157.05.$$

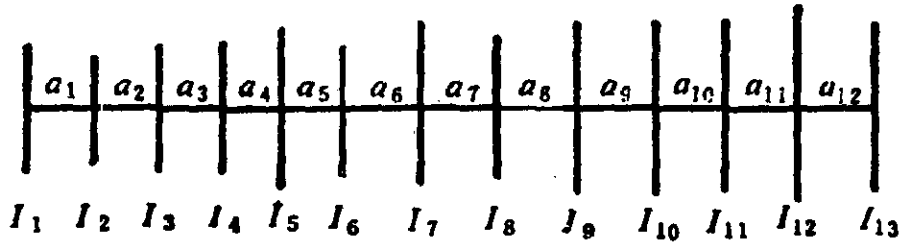


图 14-6

轴段的柔度(rad/10N·cm):

$$a_1 = 7.46 \times 10^{-9},$$

$$a_2 = a_3 = \dots = a_8 = 9.16 \times 10^{-9},$$

$$a_9 = 6.88 \times 10^{-9}, a_{10} = 7.04 \times 10^{-9},$$

$$a_{11} = 25.51 \times 10^{-9}, a_{12} = 926.56 \times 10^{-9}.$$

试以矩阵迭代法求此系统的前七阶自然频率及振型。注意到此系统存在刚体模态，需用到公式(14.1-73)，其中的 $\alpha$ 值可取为1000。由于存在刚体模态，需要算出八阶，才能得到前七阶弹性模态。建议对各阶弹性模态进行迭代时，试算向量取为：

$$\text{第一阶 } \{u\}_0 = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1\}^T;$$

$$\text{第二阶 } \{u\}_0 = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1\}^T;$$

$$\text{第三阶 } \{u\}_0 = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1\}^T;$$

$$\text{第四阶 } \{u\}_0 = \{1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1\}^T;$$

$$\text{第五阶 } \{u\}_0 = \{1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1\}^T;$$

$$\text{第六阶 } \{u\}_0 = \{1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1\}^T;$$

$$\text{第七阶 } \{u\}_0 = \{1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1\}^T.$$

14-7 试以子空间迭代法求图14-7所示四自由度系统的前二阶固有频率

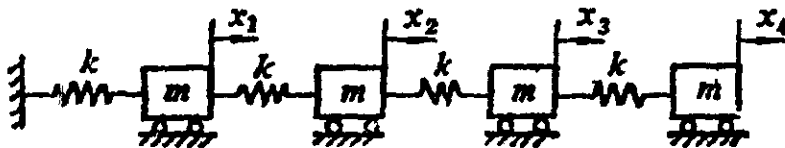


图 14-7

率与振型。

14-8 试以转移矩阵方法计算“弹簧-质块”的谐振子在阶跃载荷  $F(t) = F_0 u(t)$  激励下的响应。

14-9 试证明由例14.6(c)式给定的谐振子的转移矩阵具有(14.2-29)~(14.2-31)式所示的归一性、合成性与可逆性。

14-10 试以Runge-Kutta方法求解Van der pol方程

$$\ddot{x} - \mu \dot{x}(1 - x^2) + x = 0$$

在很小的初始位移下的解，设  $\mu = 1.5$ ，并绘出其时间历程  $x(t)$  及在  $(x, \dot{x})$  相平面上的图形（须得出极限环）。

14-11 试以Runge-Kutta方法求解以下微分方程在很小的初始位移下的解。计算中取  $\Delta t = 0.1333s$ 。

$$\ddot{x} + 0.4\dot{x} + x + 0.5x^3 = 0.5\cos 0.5t,$$

试绘出其相图。

## 参考文献

- 1 Meirovitch L. Elements of Vibration Analysis (Second Edition). U.S.A., McGRAW-Hill Book Company, 1986
- 2 汤姆逊 W T. 振动理论及其应用。胡宗武等译。北京：煤炭工业出版社，1980
- 3 郑兆昌. 机械振动（上）。北京：机械工业出版社，1980
- 4 纽兰 D E. 随机振动与谱分析概论。方同等译。北京：机械工业出版社，1980
- 5 Bishop R E D, Johnson D C. The Mechanics of Vibration. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1960
- 6 谷口修. 振动工程大全（上、下册）。家尹传译。北京：机械工业出版社，1983, 1986
- 7 师汉民. 关于机床自激振动的一个非线性理论模型。应用力学学报，1984, 1(1,2): 1~14, 76~88
- 8 师汉民. 影响机床颤振的几个非线性因素及其数学模型。华中理工大

- 9 户川隼人, 振动分析的有限元方法. 殷荫龙等译. 北京: 地震出版社, 1985

## 思考题参考答案

### 第八章

1) 对(§8.3, §8.5). 2)不确切, 虚位移应满足系统约束的要求(8.3.1小节). 3) 不对, “约束力与施加力”; “内力与外力”是不同的分类方法, 以弹簧连接两质块构成一系统, 则弹簧的恢复力是内力, 但不是约束力; 是施加力, 但不是外力; 一固定支承对梁的作用力是约束力, 但不是内力, 是外力, 但不是施加力. 4)不确切, 单个的广义力 $Q_i$ 只是一种标量(见(8.3-18)与(8.4-3)式),  $n$ 个广义力的集合 $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ 则构成一向量, 但这是线性代数中的一种广义的向量, 并非物理学中的“有方向的量”. 5)不全对, 一般而言, 动能也与广义坐标有关(§8.5). 6) 不对, 分析力学仍然属于牛顿力学的范畴, 其出发点仍然是牛顿的力学方程, 但对该方程的形式进行了改造.

### 第九章

1) 存在一个平稳值(或驻值), 仅在 $\{\mu^{(1)}\}$ 上取局部极小值. 2) Ritz法可用来估算系统前几阶自然频率. 3) Dunkerley 法估算系统的基频下限, Dayleigh 法估算基频上限. 4)须结合边界条件才能确定系统的振动特性.

### 第十章

1) 不对, 一切真实的系统可以说都是具有分布参数的连续系统, 所谓离散系统与连续系统只是真实系统的不同模型. 这两类模型有许多相似之处(本章开头部分, 10.1.1, 10.2.3小节). 2) 不全对, 梁的运动方程与前三者不同(10.9.1小节). 3)不对, 连续系统的自然频率也是离散分布的(10.1.2小节). 4)对(10.5节). 5)不全对, 初位移为 $f(x) = Q_0 x/L$ (例10.2). 6)不对,  $f(x, t) = P_0 \delta(x-L)$ (例10.5, 10.6). 7)对(10.1.2, 10.8.3小节). 8)不对, 不同振型函数的正交性是指同一振动系统而言,

不仅要求同一梁，而且要求两端支承条件相同(§ 10.10)。9)不对(10.10-9式)。10)不对，振型与边界条件有关(10.9.3小节)。

### 第十一章

1)C, 2)A, 3)B, 4)C, 5)D, 6)D,

### 第十二章

1. 1)阅读 12.2.1~12.2.2, 2)阅读 12.2.3, 3)阅读 12.2.4, 4)阅读 12.2.5, 5)阅读 12.2.5, 12.3.2~12.3.3, 12.5.2.6) 阅读 12.2.6, § 12.4前言, 12.4.1, § 12.9前言. 7)阅读 12.3.2, 8)阅读 12.5.1.

2. 阅读 § 12.7节的结尾.

3. 阅读 12.3.3小节的尾部.

4. 无阻尼系统在谐波激励下响应的相位差值只取0与 $\pi$ 两个值, 可由(12.7-9)式中振幅 $A$ 的符号来加以表示.

### 第十三章

1)不对, 自激振动总是发端于外界的某一扰动. 2)“硬自激振动系统”的激励, 要求扰动的强度超过一定的阈值. 3)不一定, 模态耦合也可能引起自激振动, 其中可以不涉及任何阻尼问题. 4)如果非线性因素来不及使自激振动稳定下来, 系统就会被破坏, 振动停止. 5)如果一个系统有几个稳定的与不稳定的极限环, 相间套置, 那么自激振动稳定在哪一个极限环上, 则取决于初始扰动的大小. 6)不对.

### 第十四章

1)因为动力矩阵一般是不对称的, 由它定义的特征值问题无法用 Jacobi方法迭代求解. 2)可证明 $\{u_0^{(2)}\}$ 中并不包含第一特征问题 $\{u^{(1)}\}$ 的分量, 理论上在迭代中该方向的分量不能增加, 而只有 $\{u^{(2)}\}$ 的分量才会上升, 故收敛于 $\{u^{(2)}\}$ 及 $u_2$ , 但实际上计算过程中难免圆整误差的影响, 特别是当 $\{u\}_{i+1}$ 与 $\{u\}_i$ 相当接近时其差值会很小, 圆整误差更突出, 其中偶然偏向 $\{u^{(1)}\}$ 的圆整误差会被不断放大, 积累, 而最后使试算向量仍然趋向 $\{u^{(1)}\}$ . 3)它们在以质量矩阵或刚度矩阵为权的条件下正交, 即 $\{u^{(1)}\}^T \cdot [m]\{u^{(2)}\} = 0$ ,  $\{u^{(1)}\} [k]\{u^{(2)}\} = 0$ .

THE FIRST BATCH OF BOOKS FOR  
GRADUATE STUDENTS

“研究生用书”书目(第一批)

书 名	作 者
机械工程测试·信息·信号分析 Measurement, Information and Signal Analysis in Mechanical Engineering	卢文祥 Lu Wenxiang 杜润生 Du Runsheng
粘弹性力学 Theory of Viscoelasticity	杨挺青 Yang Tingqing
网络分析与综合原理 Network Analysis and Synthesis Theory	曾凡刊 Zeng Fankan
现代数字设计 Modern Digital Design	陈耀奎 Chen Yaokui
随机过程 Stochastic Process	申鼎煊 Sheng Dingxuan
应用泛函简明教程 A Course in Applied Functional Analysis	李大华 Li Dahua
协同学原理和应用 Principles and Application of synergetics	吴大进 Wu Dajin
现代中央银行导论 An Introduction to Modern Central Bank	黄芳泉 Huang Fangquan
高级英语阅读系列文选(I) Advanced English Reading Series(Book1)	朱月珍 Zhu Yuezhen

THE SECOND BATCH OF BOOKS FOR  
GRADUATE STUDENTS

“研究生用书”书目(第二批)

书 名	作 者
高级英语阅读系列文选(Ⅱ) Advanced English Reading Series (Book 2)	樊长荣 等 Fan Changrong
时间序列分析与工程应用(上)(下) Time Serise Analysis in Engineering Application	杨叔子 Yang Shuzi 吴 雅 Wu Ya
实用偏微分方程数值解法 Numerical Solution of Practical Partial Differential Equations	徐长发 Xu Changfa
遥感图象数字处理 Digital Processing of Remotely Sensed Images	万发贯 Wan Faguan 柳健 文灏 Liu Jian Wen Hao
线性多变量系统 Linear Multiple Variable Systems	庞富胜 Pang Fusheng
内燃机燃烧学 Theory of Combustion for Internal Combustion Engines	金国栋 Jin Guodong
控制系统 CAD 基础 CAD Basios of Control Systems	罗宗虔 Luo Zongqian

# THE THIRD BATCH OF BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

## “研究生用书”书目(第三批)

书 名	作 者
企业管理专家模拟系统 An Expert Simulation System for Enterprise Management	黎志成 等 Li Zhicheng et al.
数字语音处理 Digital Speech Processing	姚天任 Yao Tianren
高等内燃机教程 An Advanced Course on Internal Combustion Engines	刘永长 Liu Yongchang
液压故障分析与状态监测 Fault Analysis and Condition Monitoring for Hydraulic Components and Systems	李壮云 Li Zhuangyun
数据库设计与分析 Database Design and Analysis	刘云生 Liu Yunsheng
辩证法史论稿 On Dialectics History	阳作华 Yang Zuohua 张 峰 Zhang Feng
大型复杂结构优化设计 Optimum Design Calculation for Large Complex Structures	宋天霞 等 Song Tianxia et al.
自适应光学 Adaptive Optics	叶嘉雄 Ye Jiaxiong 余永林 Yu Yonglin



# THE FOURTH BATCH OF BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

## “研究生用书”书目(第四批)

书 名	作 者
机械振动系统——分析、测试、建模与对策 (上)(下) Mechanical Vibration System——Analysis Measurement·Modeling·Control	师汉民 等 Shi Hanmin et al.
薄膜生长理论 Theory of Thin Film Growing	王敬义 Wang Jingyi
塑性成型模拟理论 Modeling Theory of Plastic Forming	肖景容 Xiao Jingrong
高等弹性力学 Advanced Elasticity	钟伟芳 等 Zhong Weifang et al.
微波磁学和光磁学 Microwave Magnetism and Photomagnetism	何华辉 He Huahui
有机化学中的单电子转移反应及其应用 Electron Transfer in Organic Chemistry ——Reactions and Applications	赵成学 等 Zhao Chengxue et al.
生命科学中的微量元素硒 Trace Element Selenium in Life Science	徐辉碧 等 Xu Huibi et al.
计算机几何 Computer Geometry	熊有伦 Xiong Youlun