

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 凸轮机构在自动机械中的作用	1
第二节 凸轮机构速度类型的判别	3
第三节 凸轮机构的分类	5
第四节 凸轮机构的发展概况	10
第二章 凸轮机构的运动规律	19
第一节 引言	19
一、传递函数的类型	19
二、运动参数的无因次化	21
三、运动规律的特性值	22
第二节 基本运动规律	24
一、等速运动规律	24
二、等加速度运动规律	25
三、梯形运动规律	25
四、圆弧运动规律	31
五、简谐运动规律	31
六、摆线运动规律	32
七、椭圆运动规律	34
第三节 简谐梯形组合运动规律	36
一、修正等速运动规律	37
二、修正梯形运动规律	40
三、修正正弦运动规律	40
四、通用简谐梯形运动规律	41
第四节 多项式运动规律和富氏级数运动规律	48
一、幂函数多项式运动规律	48
二、富氏级数运动规律	55

V

三、其他多项式函数运动规律	61
第五节 指数函数运动规律	63
第六节 凸轮机构运动规律的选用	64
第三章 平面凸轮机构的运动学分析	67
第一节 平面啮合基本原理	67
一、一对定轴转动的平面共轭曲线	68
二、一对作平面运动的共轭曲线	76
三、共轭曲线的曲率	79
第二节 基本平面凸轮机构的轮廓及其压力角、曲率半径的计算	82
一、基本平面凸轮机构的轮廓曲线的通用计算方法	83
二、压力角	88
三、刀具中心轨迹	93
四、曲率半径	95
第三节 平行分度凸轮机构	95
一、主要特点和基本参数	96
二、凸轮轮廓的制约条件	100
三、设计步骤	111
第四章 空间凸轮机构的运动学分析	114
第一节 空间凸轮机构轮廓曲面的通用计算方法	114
第二节 常用空间凸轮机构轮廓曲面的计算及其通用程序框图	125
一、摆动从动件圆柱空间凸轮机构—— z 向排列滚子从动件 空间凸轮	125
二、直动从动件圆柱空间凸轮机构	132
三、滚子齿式空间凸轮机构—— x 向排列滚子从动件 空间凸轮	133
第三节 空间凸轮曲面的压力角与曲率分析	138
一、空间凸轮机构的压力角计算	138
二、空间凸轮曲面的曲率分析	140
第四节 空间分度凸轮机构的设计计算	146
一、引言	146
二、圆柱分度凸轮机构的设计参数选择	146
三、圆柱分度凸轮轮廓的设计计算	150

四、滚子齿式（凹桶形）分度凸轮机构的设计计算	156
第五章 凸轮机构的受力分析	161
第一节 载荷分析	161
一、工作载荷	161
二、惯性力	161
三、阻尼力	162
四、封闭力	162
五、实例	162
第二节 基型凸轮机构的受力分析	165
第三节 转化摩擦系数	167
一、从动滚子	167
二、悬臂型直动从动杆	168
三、摆动从动杆	170
四、圆柱凸轮机构	173
第四节 凸轮机构的效率	175
第五节 力封闭弹簧参数的优化	177
第六节 接触应力计算	178
第六章 凸轮机构的动力学分析与综合	185
第一节 引言	185
第二节 动力学模型的建立	187
一、实际机构的简化	187
二、构件离散参数的确定	189
三、传动比与参数转化	191
四、非线性参数	195
五、实例	201
第三节 凸轮机构的动力学分析	207
一、集中参数模型动力学微分方程的建立	207
二、集中参数模型动力方程的解法	220
三、动力学响应的频域表示法	232
第四节 凸轮机构的动力学综合	242
一、凸轮机构按单自由度模型的综合	242
二、非设计工况下的凸轮轮廓综合	245

三、影响因素分析	248
第七章 凸轮机构的设计	254
第一节 几何尺寸及轮廓曲线的设计	254
一、设计步骤与内容	254
二、设计实例	263
第二节 结构设计	269
一、平面凸轮	269
二、空间凸轮	272
三、从动件	273
第三节 凸轮机构的摩擦学问题	277
一、油膜厚度分析	277
二、材料匹配	282
第四节 凸轮机构的优化设计	283
一、优化模型的建立	283
二、平板凸轮机构按最小尺寸的优化设计	286
三、按最佳尺寸的凸轮优化设计	290
四、凸轮机构的动力学优化设计	291
第八章 凸轮的制造	293
第一节 概述	293
第二节 凸轮的仿形加工	295
一、机械仿形	296
二、液压仿形	299
三、数控仿形	300
第三节 凸轮的数控加工	301
一、数控加工的优越性	301
二、基本原理	302
第四节 凸轮体的检测	311
一、比较测量法	312
二、功能检验法	312
三、直接测量法	313
第五节 凸轮 CAD/CAM 系统及其发展前景	318
一、计算机辅助设计	318

二、计算机辅助制造	322
三、CAD 与 CAM 一体化	324
四、展望	326
附录	328
附录 I 复极矢量	328
一、复极矢量	323
二、矢量的回转与坐标系的回转变换	329
三、矢量函数	330
四、矢量的微分	331
附录 II 空间回转变换张量	334
一、矢量的反对称张量、自并矢张量与补并矢张量	334
二、空间矢量回转变换张量	337
三、回转变换张量函数及其微分	344
附录 III 空间曲线和空间曲面微分几何基本知识	345
一、空间曲线	345
二、空间曲面	347
三、曲面上的曲线及其切向矢量, 曲面上的切平面 与法向矢量	348
四、曲面的第一基本形式和第二基本形式	349
五、曲面的法曲率、主曲率	351
附录 IV 空间啮合原理简介	355
一、空间啮合曲面方程的求解	355
二、空间啮合曲面的曲率分析	356
附录 V 常用构件的等效刚度与等效质量	360
附录 VI 凸轮机构典型零部件的动力学模型	369
附录 VII 凸轮机构简化为四自由度动力学模型的分析	372
参考文献	383

第一章 绪 论

第一节 凸轮机构在自动机械中的作用

当前，机械产品正沿着两个方向发展：一是大型化、自动化、精密化、高速化和成套化；二是小型化、多功能、结构简单、使用可靠和成本低廉。在此发展进程中，各种各样的自动机械占有令人瞩目的重要地位。

随着微电子技术的发展，微机控制的自动机械也有了较快的发展。然而，由于它受运行速度、可靠性与价格等因素的限制，在较长时期内仍然不可能大量取代采用凸轮及其组合机构的自动机械。以凸轮机构为核心，已发展出成千上万种高效、小型、简易、精密、价廉的自动机械，遍布各行各业。例如自动包装机、自动成型机、自动装配机、自动机床、纺织机械、农业机械、印刷机械、自动办公设备、自动售货机、电子元件的自动加工机械、自动化仪表、服装加工机械，以及各种轻工自动机械等。

凸轮机构之所以能在上述自动机械中获得如此广泛的应用，是因为它兼有传动、导向及控制机构的各种功能。当凸轮机构用作传动机构时，可以产生复杂的运动规律，包括变速范围较大的非等速运动，乃至暂时停留或各种步进运动。凸轮机构也适宜于用作导向机构，使工作机构产生复杂的运动轨迹。当凸轮机构用作控制机构时，可以控制执行机构的自动工作循环，或作为函数发生器。凸轮机构作为机械式运动传递与信息储存的基本元件时，具有构件数少和空间体积小等固有的特点。当然，由于凸轮机构是高副机构，制造较难，其应用范围受到一定的限制。表 1-1 列出了凸轮机构与连杆机构和液、气、电气元件组成的传动或控制机构的性能比较。

表1-1 凸轮，连杆与液、气、电机构的比较

性能	凸 轮	连 杆	液、气、电系统
制造容易性	因 难	简 单	变 化 的
设计容易性	简 单	复 杂	变 化 的
应用范围	没 有 限 制	限制参数的数目	理论上没有限制
可调节性	好	不好	极 好
磨损的影响	起决定作用	不起决定作用	变 化 的
承载能力	中 等	高	低
紧凑性	好	差	极 好
润 滑	重 要	简 单	变 化 的
调 整	要 求 高	通常要求不高	通常要求不高
平 衡	简 单	直接的但不是明显的	简 单
运 转 速 度	中	高	低
加 速 度 峰 值	设计时低，实际上可能高	比凸轮高20~30%	低速可控制的
噪 声	好	极 好	差
可 靠 性	好	极 好	差
运 转 精 度	好	极 好	差
能 量 消 耗	低	低	中等到高
同 步 作 用	好	极 好	差
对加工误差的敏感度	高	低	低

随着计算机辅助设计/计算机辅助制造 (CAD/CAM) 技术的日益普及，新材料与热处理新工艺的发展，凸轮的设计与制造已变得十分方便而精确，凸轮的使用寿命大幅度延长，制造成本不断下降。可以预计，凸轮机构在自动机械中的应用范围，将越来越广泛，其工作性能将获得明显的改善，从而将更好地促进自动机械的发展。

第二节 凸轮机构速度类型的判别

表 1-1 “运转速度”一栏中的“高、中、低”分类，是相对而言的。凸轮机构在自动机械中大多处于中速状态下运行。但是，这并不意味着凸轮机构不能在高速状态下运转。

这里，有必要对机构速度类型的概念进行讨论。要注意，凸轮机构的速度类型与它的运转速度并不是一回事。如果某一凸轮机构属于高速机构，即一方面这一机构要在较高速度下运行，另一方面要求对这一机构进行动力学分析与综合，以便获得满意的工作性能。然而，对于低速凸轮机构，设计者就不必费心去进行复杂的动力学研究，只要进行运动学与静力学分析与综合就可以了。

几十年来，不少机构学家都在探讨建立一个合理而实用的机构速度类型的判别准则。最初，人们仅仅把凸轮转速作为速度类型高低的判别准则。例如，有人提出凸轮转速超过 $500\text{r}/\text{min}$ 的凸轮机构叫做高速凸轮机构。对于同一类型的特定凸轮机构，按此判别，具有一定的参考价值，但没有普遍意义。因为某些自动机械中的凸轮机构运转时的惯性力较大，而刚度不高，即使转速低于 $500\text{r}/\text{min}$ ，仍会产生强烈的振动。于是苏联学者奥尔尼科夫（Орликов）在早期著作〔1〕中提出了按机构所受惯性力 F_i 与所受静载荷 F_s 之比 F_i/F_s 来判别凸轮机构的速度类型，即：

$F_i/F_s < 1/4$ —— 低速机构

$1/4 < F_i/F_s < 4$ —— 中速机构

$F_i/F_s > 4$ —— 高速机构

这种判别准则很直观地反映了机构转速越高，动载荷越大这一事实，但这仅是一种经验性的处理方法。因为凸轮机构受惯性力作用产生的振动大小与机构的刚度、阻尼和运动规律等动力学参数有关。刚度很好的凸轮机构，即使转速很高，惯性力很大，振动也不很明显，因而不能只凭惯性力的大小判别凸轮机构的速度类型。事实上，有些自动机械的静载荷只有摩擦阻力，它相对

于惯性力可以忽略不计，如果按上述判别准则，就会得出这些自动机械的凸轮机构不管在何种情况下均为高速机构的荒谬结论。

对于多数自动机械的凸轮机构，由于工作载荷不大，构件较轻，其惯性力是主要的激励力，有的学者提出按从动件的加速度或速度大小来判别凸轮机构的速度类型，即

$$a_n \leq 1g \text{ (或 } v_n = 1 \text{ m/s)} \text{——低速机构}$$

$$1g < a_n \leq 3g \text{ (或 } 1 \text{ m/s} < v_n \leq 2 \text{ m/s)} \text{——中速机构}$$

$$3g < a_n \leq 8g \text{ (或 } 2 \text{ m/s} < v_n \leq 3 \text{ m/s)} \text{——高速机构}$$

式中， a_n 、 v_n 为从动件的最大加速度和最大速度； g 为重力加速度。

在一般情况下，上述经验判别准则能够满足工程设计需要。但对动力性能要求高的机械，这种准则显然不够合理。

由机构动力学的一般原理可知，当机构运转速度 (ω_d) 接近其固有频率 (ω_n) 时，其振幅最大。据此，美国学者梯萨尔 (Tesar) 与马修 (Matthew) 在他们的专著〔2〕中提出按比值 ω_d/ω_n 来判别机构的速度类型，令

$$\omega_d/\omega_n = 10^{-d} \quad (1-1)$$

则判别准则为

$$d = 3 \text{ ——低速机构}$$

$$d = 2 \text{ ——中速机构}$$

$$d = 1 \text{ ——高速机构}$$

式 (1-1) 中的机构固有频率 ω_n ，可通过把机构简化为单自由度系统模型，由该系统的等效质量 m 与等效刚度 k 求得，即

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (1-2)$$

这一判别准则反映了机构设计运行转速偏离机构固有频率的程度。若 $d \approx 1$ ，意味着机构在与固有频率对应的共振峰附近运行，振动比较明显；相反，若 $d > 3$ ，则机构在远离共振峰的情况下运行，振动将很小。这样，式 (1-1) 就从本质上反映了影响机构动力学行为的多方面因素，比单纯以转速或惯性力大小的判别准则前进了一大步。实践表明，梯萨尔等人的判别准则偏于保

守，而且没有考虑运动规律的影响。

德国学者伏尔默 (Volmer) 在其专著〔3〕中指出：“是否应该对一个凸轮机构可能产生的振动加以分析，要取决于从动件的弹性及其最低自振频率，并取决于运动规律以及凸轮的驱动转速”。遗憾的是，伏尔默提到了运动规律的影响，却引用了与前一准则相似的数据，即

$$15 < T/\tau < \infty \text{——低速机构}$$

$$6 < T/\tau \leq 15 \text{——中速机构}$$

$$0 < T/\tau \leq 6 \text{——高速机构}$$

式中， T 为从动件的激振周期，即运动区段的周期； τ 为自由振动的振动周期。

这一判别准则仍然没有考虑凸轮的运动规律的影响。最近，孔午光等人提出了根据凸轮运动规律、系统固有频率和转速，并用响应谱来进行凸轮机构速度类型判别的新方法〔4〕。

关于响应谱的细节，将在第六章中讨论。对于一个确定的凸轮机构，改变运动规律或凸轮轮廓，即可测出或算出在一定凸轮转速下从动件动力学响应（位移、速度或加速度随 T/τ 的变化曲线）。这一曲线就称为响应谱。常见运动规律的响应谱的波形幅值大体上随 T/τ 的增大迅速衰减。当 T/τ 大到一定程度时，波幅趋于稳定，幅值很小，接近于静态处理的结果。当 T/τ 较小时，波幅的包络线斜率较大，这时的波幅值也较大，属于应进行动力学分析的范围。当 T/τ 很小时，由于响应波幅剧增，机构便无法正常工作。

由于响应谱只与运动规律有关，在第六章给出了某些典型运动规律的响应谱，设计者只须根据所设计的凸轮机构的固有频率（或 τ ）及凸轮的转速（或 T ），即可查出相应的响应谱。根据对凸轮机构的工作精度要求，即可判别这一机构的速度类型。

第三节 凸轮机构的分类

凸轮机构一般由三个零件组成：凸轮、从动件与支架，如图

1-1 所示。凸轮与从动件之间保持高副接触，二者并可在机架上转动或滑动。

凸轮机构可以按照输入/输出运动的型式以及从动件结构和凸轮的形状等进行分类。

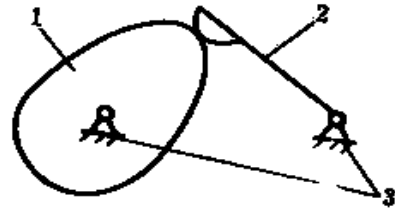


图1-1 凸轮机构的基本组成

1—凸轮 2—从动件 3—机架

1. 输入/输出运动型式

(1) 旋转凸轮-直动从动件
(图1-2 a)

(2) 旋转凸轮-摆动从动件
(图1-2 b)

(3) 移动凸轮-直动从动件 (图1-2 c)

(4) 移动凸轮-摆动从动件 (图1-2 d)

(5) 固定凸轮-直动从动件 (图1-2 e)

(6) 固定凸轮-旋转从动件 (图1-2 f)

(7) 双输入凸轮机构 (图1-2 g, h, i, j)

(8) 旋转主动件-逆凸轮从动件 (图1-2 k)

2. 从动件端部结构

(1) 尖端从动件 (图1-3 a)

(2) 滚子从动件 (图1-3 b)

(3) 平底从动件 (图1-3 c)

(4) 球面从动件 (图1-3 d)

(5) 曲面从动件 (图1-3 e)

除了按从动件端部形状分类之外，根据从动杆轴线是否与凸轮轴线相交，凸轮机构又可分为对心式 (图1-3 a、b) 与偏置式 (图1-3 c、d)。

3. 凸轮形状

(1) 平板或盘形凸轮

1) 力封闭式，如图 1-3 所示。这类盘形凸轮机构的从动件在与凸轮转轴相垂直的平面内运动，并靠重力 (图1-3 a)、弹簧 (图1-3 b) 或气压 (图1-3 c) 等外力使从动杆与凸轮轮廓始终

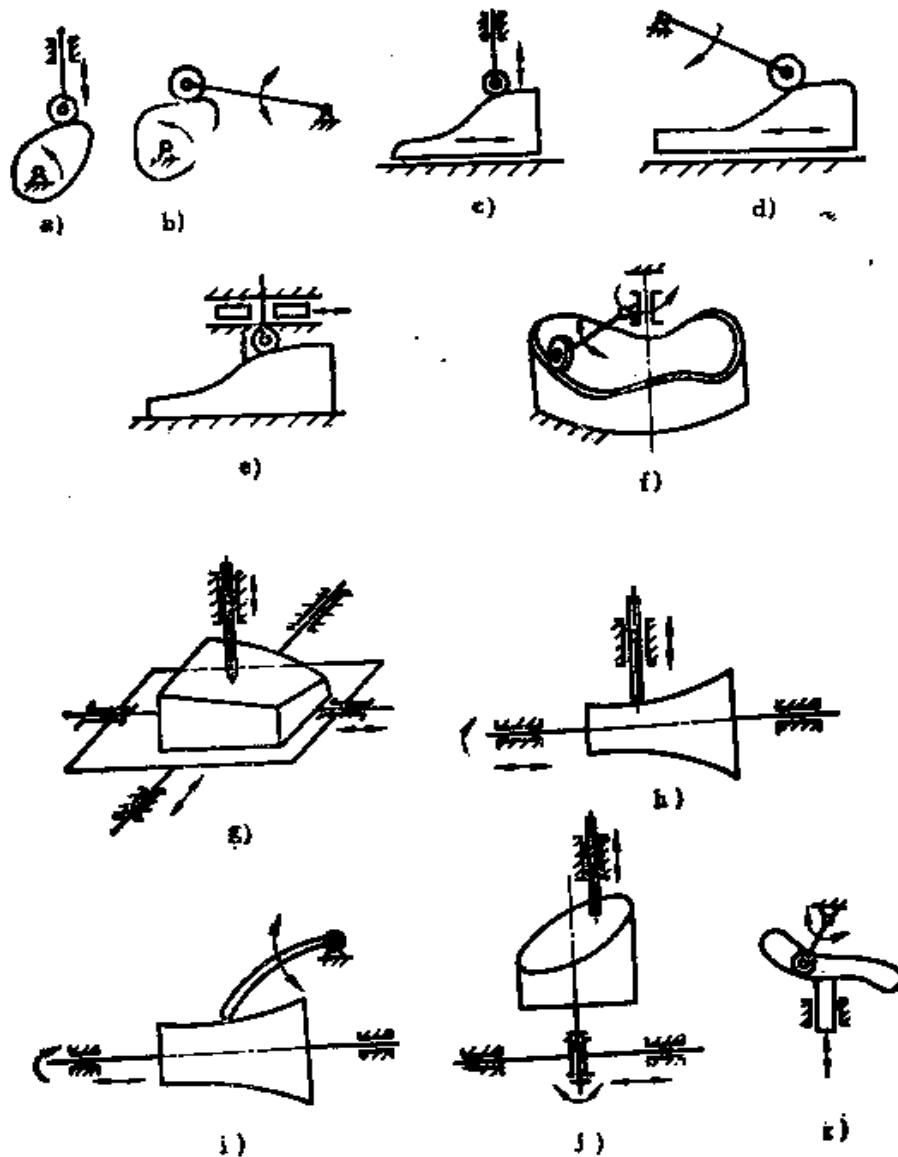


图1-2 凸轮机构的运动型式

a) 旋转/直动 b) 旋转/摆动 c) 移动/直动 d) 移动/摆动 e) 固定/直动 f) 固定/旋转 g) 双向移动/直动 h) 鼓形凸轮旋转与移动/直动 i) 旋转与移动/摆动 j) 端面凸轮移动与旋转/直动 k) 旋转/直动

保持接触，通常称为力封闭式凸轮。

2) 几何封闭式。这类盘形凸轮机构的从动件与凸轮轮廓是靠凸轮的几何形状来保持接触的。如图1-4 a 所示，为常见的槽凸轮结构，从动滚子只能在沟槽内运动。有的凸轮轮廓为突起的肋，

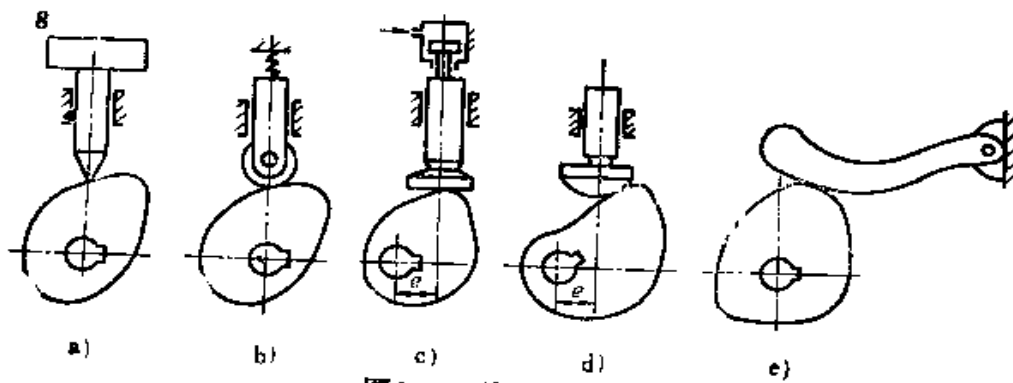


图1-3 从动件结构

a) 尖端对心 b) 滚子对心 c) 平底偏置 d) 球面偏置 e) 曲面

用两个滚子与之保持接触，如图1-4 b 所示。图1-4 c 所示结构称为共轭凸轮，从动件有两个滚子分别与两个相互共轭的凸轮接触。图1-4 d 所示的两个共轭凸轮不在同一转轴上，但同时与一个滚子接触。在某些特殊情况下，一个具有特殊轮廓的盘形凸轮可保证同时与安装在从动件上的两个滚子或平面接触，如图1-4 e 所示的等径凸轮和图1-4 f 所示的等宽凸轮。

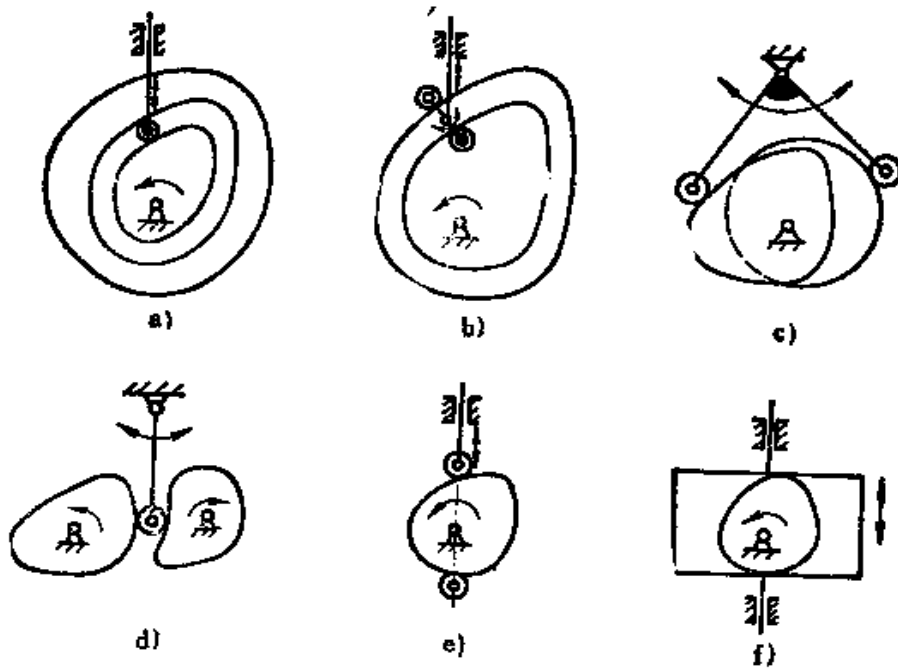


图1-4 几何封闭凸轮机构

a) 槽凸轮 b) 肋凸轮 c) 双滚共轭凸轮 d) 单滚共轭凸轮
e) 等径凸轮 f) 等宽凸轮

(2) 圆柱与圆锥凸轮

滚子沿圆柱(图1-5 a)或圆锥(图1-5 b)表面的曲线沟槽运动时,可使从动件移动或摆动。

(3) 桶形凸轮

圆桶形凸轮的外表纵向母线是一外凸的圆弧(图1-6 a)或内凹的圆弧(图1-6 b)。

(4) 端面凸轮

端面凸轮具有一个圆柱、圆锥或球形回转体,直动或摆动从动杆与回转体端面的轮廓接触,如图1-7所示。

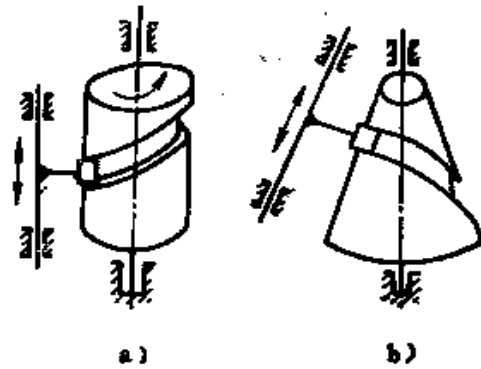


图1-5 圆柱与圆锥凸轮机构

a) 圆柱凸轮 b) 圆锥凸轮

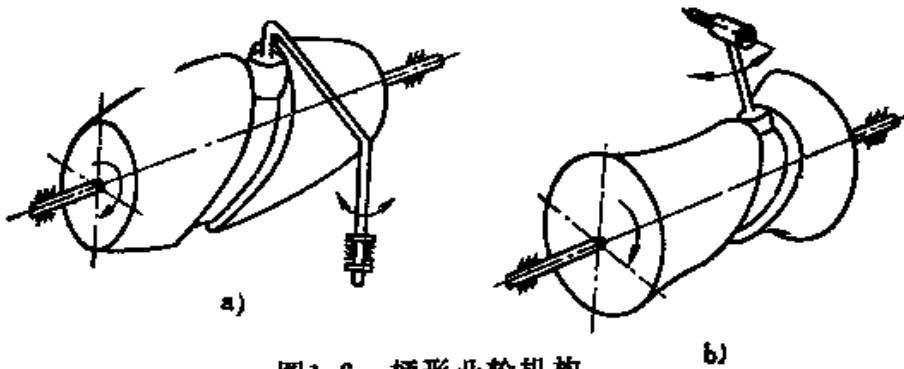


图1-6 桶形凸轮机构

a) 凸桶形 b) 凹桶形

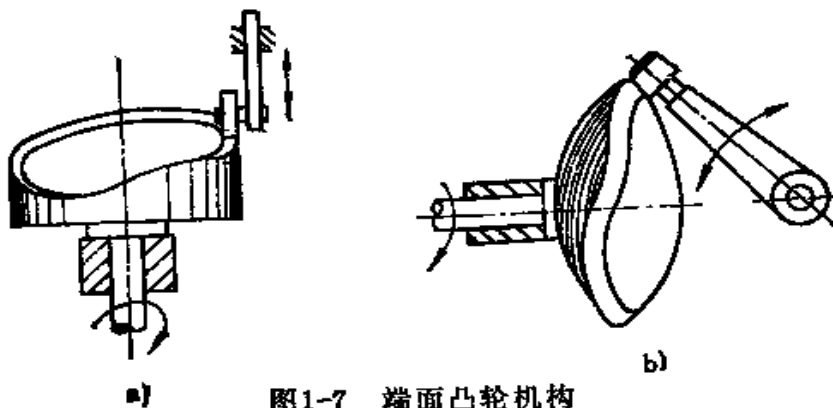


图1-7 端面凸轮机构

a) 圆柱 b) 球面

第四节 凸轮机构的发展概况

早在东汉时期，我国古代杰出的科学家张衡（78~139年）发明的水力天文仪中，就已采用凸轮作为机构元件之一。但直到19世纪末，对凸轮机构还未曾有过系统的研究。随着资本主义工业化的进展，要求设计出高效自动机械，以改善飞机、汽车用内燃机配气机构的工作性能，至本世纪初凸轮机构的研究才开始受到重视。

弗尔曼（F. D. Furman）所著的凸轮专著〔5〕是早期系统介绍凸轮设计的著作之一。在30年代，除了少数学者对内燃机配气机构用的凸轮-从动件系统的振动作过一些初步研究外，其它方面的进展不大。在40年代以后，由于内燃机转速增加，引起故障增多，才开始对配气凸轮机构的振动进行深入研究，并从经验设计过渡到有理论根据的运动学与动力学分析。

苏联学者涅谢托夫（Нешетов）在此期间所开展的研究工作，不仅涉及配气凸轮机构，还涉及到自动机械等方面应用的各种高速凸轮机构〔6〕。

在日本，对凸轮机构的研究最先也是为了改进航空发动机的配气机构〔7〕。

那时，罗勒斯（Hrones）〔8〕等人已经注意到从动件的刚度对凸轮机构动力学响应有明显的影响。

在1950年，米切尔（Mitchell）〔9〕最先提出对凸轮机构进行实验研究。他记录了三种基本运动规律的从动件动力学响应，但没有获得满意的结论。后来，不少学者采用多种仪表，包括高速摄影机〔10〕、加速度分析仪〔11〕和动态应变仪〔12〕等，对高速凸轮机构的动力学响应进行了测量，获得了许多重要的成果。

计算机的发展，使凸轮的计算机辅助设计/计算机辅助制造（CAD/CAM）获得巨大成功。因此，凸轮机构的研究经历了从经验设计到优化设计，从单纯运动学分析到动力学研究，从手工加工到计算机辅助制造等发展阶段。

凸轮的运动学分析首先是研究它的运动规律。几乎所有关于凸轮的专著,都对运动规律进行了系统的介绍[2, 3, 5, 13~25]。早期的著作只是介绍了一些适合低速机构的等速、简谐、摆线、圆弧等基本运动规律。60年代以后,由于科学技术的发展,各种适合于中速与高速的优良运动规律相继提出,基本上满足了中、高速凸轮机构的要求。本书作者在牧野洋[25]等提出的简谐梯形组合运动规律的基础上,进行了运动学优化[26],设计了一些运动特性值较好的凸轮曲线,编制了用于凸轮设计的完整的程序,为在自动机械中广泛应用的中速凸轮机构提供了较完整的运动规律设计数据。高速凸轮机构大多采用多项式运动规律,梯萨尔等的著作[2]中对此有较详细的论述。其中包括:韦伯(Weber)[27]、盖特曼(Gutman)[28]与弗鲁德斯坦(Freudenstein)[29]等人提出的富氏级数运动规律;斯托达德(Stoddart)[30]与福西特(Fawcett)[31]等提出的多项式动力运动规律。

根据各种从动件系统设计出能实现选定运动规律的凸轮轮廓数据,是凸轮运动学分析比较困难的一个课题。早期的工程技术人员大多采用作图法绘制凸轮轮廓。这种方法的效率低,精度差,很难精确地得到压力角和曲率半径等设计参数。后来,许多学者就某些简单的运动规律和特定的凸轮-从动件系统提出了不同的解析公式和专用数表。克鲁莫克(Kloomok)与马弗利(Muffley)[32]和罗斯巴特(Rothbart)[33]分析了凸轮压力角;卡弗(Carver)与奎因(Quinn)[34],霍洛汶科(Holowenko)与霍尔(Hall)[35]等对凸轮的曲率半径进行了探讨。他们总结并发展了这方面的研究成果。随着电子计算机的广泛应用,以矢量法[25]为代表的各种新算法相继出现,把凸轮轮廓参数计算推进到一个崭新的阶段[36~38]。在探索通用性较强的凸轮轮廓计算的过程中,国内外一些学者[39~41]建立了不同的公式、算法或程序包。对于自动机械常用的滚子从动件系统,上述方法因易于理解和便于计算而获得广泛应用。不过,这些成果仍然存在一定局限性,并不能包括所有类型的从动件系统,特别是平底与曲面从动

件结构, 以及伍德里奇 (Wunderlich) 提出的单盘双滚子摆杆凸轮机构〔42〕等。

对于圆柱与桶形等空间凸轮轮廓, 早期多借用平面凸轮的公式进行近似计算。这种方法只能得到局部轮廓的压力角与曲率半径数据。精确的计算必须利用微分几何及空间曲面啮合原理等较深的数学工具。牧野洋曾提出用旋转张量法来设计空间凸轮〔25〕, 这是一种易于理解的精确解法。

查克拉波斯蒂 (Chakrabosty) 与德汉迪 (Dhande) 建立了一种适合于平面与空间凸轮-从动件系统的统一计算方法〔43〕, 能直接求出各种凸轮机构凸轮轮廓的所有数据, 为平面与空间凸轮轮廓计算奠定了比较完整的理论基础。在前述研究的基础上, 本书作者建立了一套以旋转张量为主要数学工具的、更为系统的算法与程序, 将在下述章节中介绍。

凸轮机构动力学研究是当前十分活跃的一个领域, 正不断地向纵深发展。考虑构件弹性、间隙和其它实际运行因素等所建立的动力学模型, 能使所得结果更接近于真实的运行情况。研究这方面问题的学者也越来越多, 相应的研究成果大量发表在有关会议或杂志上〔44~51〕。在前面提到的某些专著中, 凸轮动力学的分析占有较大的篇幅, 例如科斯特 (Koster) 的专著〔52〕系统地讨论了凸轮机构动力学模型, 从单自由度发展到了涉及许多实际因素的多自由度模型; 对凸轮机构进行的有限元分析亦已开始出现〔53〕, 非线性问题已经受到重视〔54, 55〕。

近年来, 由于计算机辅助设计的发展, 凸轮机构的优化设计问题已提高到一个新水平。过去所采用的解析法只能对直动从动件那样的简单结构按压力角或基圆为最小等准则优选个别几何参数〔18, 21〕。现在, 由于采用非线性规划方法, 能够对复杂的凸轮-从动件系统按运动学或动力学进行多参数的优化设计。克瓦凯马克 (Kwakemaak) 与斯密特 (Smit)〔45〕提出按残留振动为目标函数来设计凸轮轮廓。威德里奇 (Wiederrich)〔46〕按位移的均方根误差为目标函数来控制凸轮轮廓的谱量。从动滚子与凸

轮的接触应力,是目前研究者广泛使用的一种目标函数〔57~60〕。当然,凸轮机构优化设计研究还有许多问题值得进一步探讨,如来虔等提出的按最佳加速度设计凸轮廓线等〔96,97〕。此外,实用而简便的计算机程序还有待开发。

凸轮的加工、材料匹配,以及润滑等问题,在凸轮机构研究中同样占有重要的地位。琼斯(Jones)编著的论文集〔61〕中收集了有关这些内容的部分研究成果。误差分析是凸轮机构学研究的难题之一,上述文集中也有反映。这方面的文献还有〔62,63〕等。

凸轮的计算机辅助设计与计算机辅助制造(CAD/CAM)研究已经获得初步成果,设计者利用计算机终端,只要给定原始数据即可设计出总体上的最优的凸轮;不用画图,直接把信息传递给数控机床,并对刀具磨损、加工时的热变形、电压波动引起的切削参数变化等不定因素进行自适应控制(AC),即可自动加工出高精度凸轮。

总之,凸轮机构的研究与开发涉及到众多学科,例如系统工程与设计学、机构学(运动学与动力学)、材料科学、摩擦学、机械加工工艺学、CAD/CAM、控制工程与计算机技术等。正是由于这些相关学科的发展,才使得凸轮机构在自动机械中获得日益广泛的应用,并开发出一系列以凸轮为核心部件的产品。最典型的凸轮机构产品如下:

1. 平行分度凸轮机构

图 1-8 所示平行分度凸轮机构是图 1-4 c 机构的一种特殊应用。当凸轮轴等速旋转时,滚子从动盘作间歇转动,可以代替槽轮机构,



图1-8 平行分度凸轮机构

从而大大改善了转位起始与终止时的运动特性,避免了槽轮机构在这两段时间内难以克服的冲击振动。这种机构最先由美国发明,在日本得到充分的发展,形成系列化产品,在第三章中将详细讨论。

2. 圆柱分度凸轮机构

如图 1-5 a 所示的圆柱凸轮机构，当从动件变为一个可回转的圆盘时，便形成图 1-9 所示的圆柱分度凸轮机构。这种间歇转位机构尤其适用于分度数较多的场合，加工比桶形凸轮容易，但传动精度较差，影响了工作速度的提高，故多用于中、低速自动机械上。



图1-9 圆柱分度凸轮机构

3. 桶形分度凸轮机构

利用图 1-6 b 所示凹桶形凸轮，配以滚子从动盘，可以形成目前应用很多的一种桶形分度凸轮机构，如图 1-10 所示。这种机构的传动类似于一个滚子齿轮与蜗形凸轮的啮合运动，工程上通常把它称为滚子齿式凸轮机构。它与平行分度凸轮机构一样，可以通过预载消除啮合间歇，传动精度很高，是目前工作性能最好的一种间歇转位机构。这种机构的缺点是加工较难，因而制造成本较高。

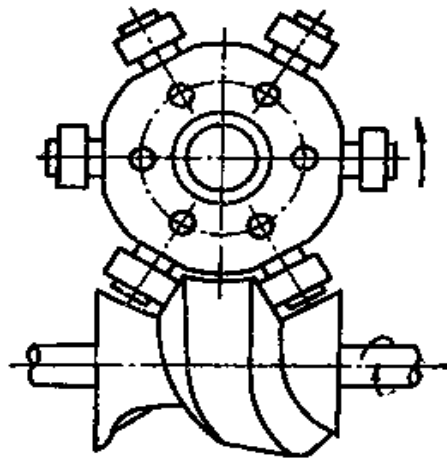


图1-10 滚子齿式凸轮机构

4. 直线送进凸轮机构

通常，将回转运动变为长行程直线运动均采用齿轮-齿条或螺旋-螺母机构。这些机构的最大缺点是在用异步交流电动机驱动主动件时，从动件运动的起始与终止时会发生冲击振动。如果要适当控制运动起止时的回转速度，必须采用伺服马达，从而导致机构复杂、成本增加。采用图1-11所示凸轮式直线送进机构〔64〕，

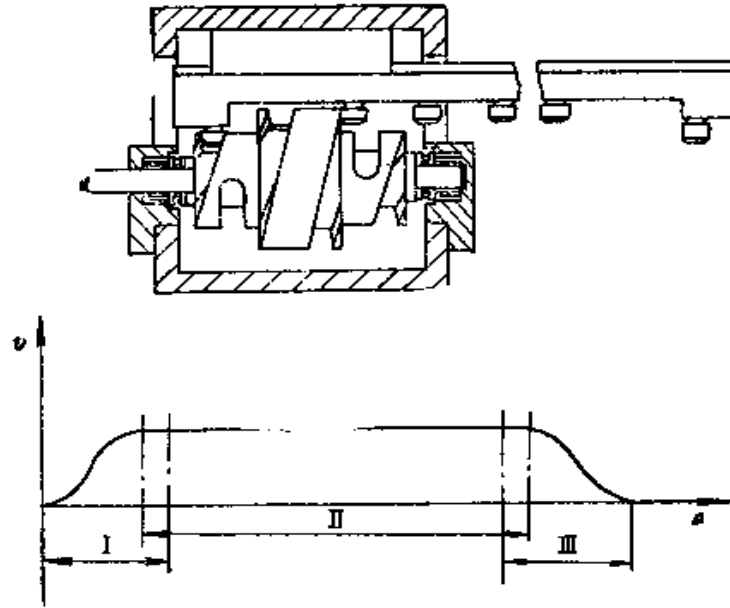


图1-11 直线送进凸轮机构

θ —凸轮轴转角 v —从动滑板速度 I—小直径凸轮动作区间(起始)
II—大直径凸轮动作区间 III—小直径凸轮动作区间(终止)

就可以消除从动件运动起止时的冲击振动。其中，小直径凸轮控制从动件两端的两个滚子按规定的运动规律平滑地起动和停止，大直径凸轮控制从动件中间均布的若干滚子作等速直线运动，这样，当凸轮轴制动或起动时，也不会有明显的冲击振动。

5. 不等速回转平行凸轮机构

自动机械常用的不等速回转机构有偏心链轮机构、曲柄摇杆式链轮机构、偏置曲柄机构、椭圆齿轮机构和凸轮组合机构（与斜齿轮、四连杆或差动轮系组合）〔67〕。其中以椭圆齿轮机构的传动特性为最佳，但是设计与制造都比较困难。最近已开发出可以代替椭圆齿轮机构的平行凸轮机构，加工大为简化。其工作原理如图1-12所示。这种凸轮机构适合于一阶、二阶、三阶，乃至更高阶的椭圆齿轮传动机构使用。

6. 凸轮式机械手

尽管智能化机器人发展很快，但目前仍然不能取代凸轮式固定程序型机械手，因为后者在可靠性、高速、价格等方面具有十

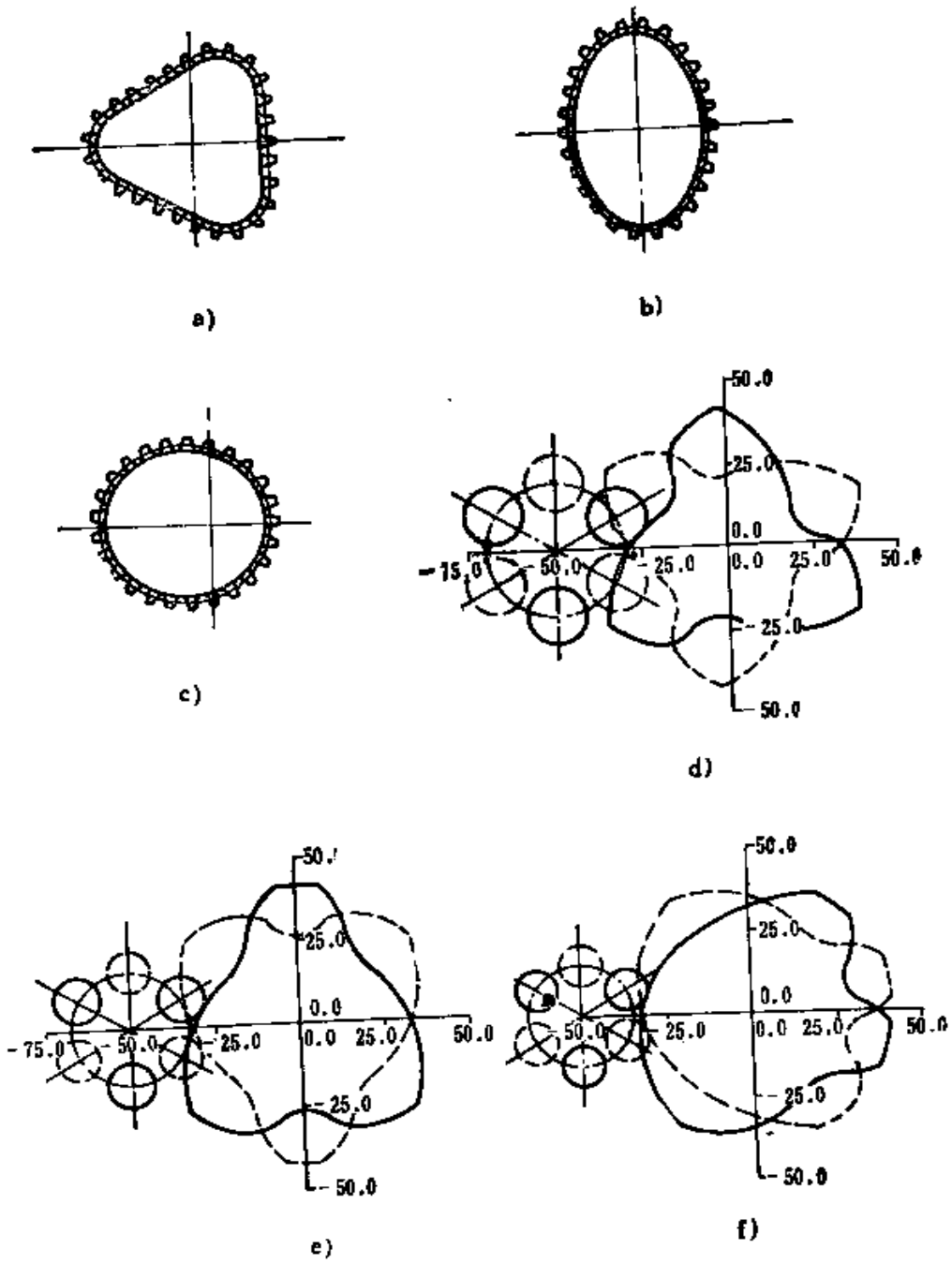


图1-12 不等速回转平行凸轮机构

- a) 三阶椭圆齿轮 b) 二阶椭圆齿轮 c) 一阶椭圆齿轮 d) 三阶椭圆
 齿轮形凸轮 e) 二阶椭圆齿轮形凸轮 f) 一阶椭圆齿轮形凸轮

表1-2 PP装置定型产品的凸轮机构组合

	平板凸轮	平板槽凸轮	圆柱凸轮	平行分度凸轮	滚子-齿式凸轮
平板凸轮	PL-1B型① DICK BOY FPS系列	PL-1MmK II型 复合凸轮①	PA-1型①	O1FN- O1FS②	旋转/直线式 机械手E型③
平板槽凸轮		PL-小型 PL-轻型①	PA-1型① 凸轮式机械 手LR系列③		18FN型② 抓放装置④ OPO OPL系 列
圆柱凸轮			凸轮式机械 手L系列③ 传送器 T. TB系列⑤		
平行分度凸轮				RHP- DT型⑥	
滚子-齿式 凸轮					8G, 6GV, 5GV, 8F, 11 F型② CAMBOT 型⑦

- ① 协和凸轮公司 (日);
 ② 三共制作所 (日);
 ③ 弗古逊 (Ferguson) 公司 (美);
 ④ 大塚凸轮公司 (日);
 ⑤ 斯特隆 (Stelron) 部件、机械公司 (美);
 ⑥ 东芝精机 (日);
 ⑦ 椿本链条公司 (日)。

分突出的优越性。凸轮式机械手又称抓放装置,简称PP \ominus 装置,已形成众多系列化产品,能完成直动与直动、直动与转动、转动与转动的简单二重运动的组合^[65]。这种二重运动可采用不同型式的凸轮机构实现,从而出现不同规格的PP装置。表1-2综合了美国与日本主要生产厂家推出的PP装置定型产品,被广泛应用于高速冲压设备的上、下料。本书第七章第一节中的设计示例就是一种由两组平板凸轮组合而成的PP装置(参见图7-10、图

\ominus 全称为Pick & Place unit。

7-11)。表 1-2 中各产品型号后面的数码是生产厂家的代号,厂家具体名称见表下说明。

7. 凸轮式自动换刀装置

早期的自动机床、加工中心的自动换刀装置(ATC)多采用油缸或气缸驱动。在高速时冲击振动大,可靠性不高,寿命短。为了克服这些缺点,近来开发出性能优良的凸轮式 ATC 装置,利用滚子齿式凸轮机构与平板槽凸轮实现自动换刀动作^[66],使得高速运行时十分平稳。

第二章 凸轮机构的运动规律

第一节 引言

一、传递函数的类型

凸轮机构作为传动机构或控制机构，最重要的特性是它的传递函数。如图2-1所示，其输入量一般是时间 t 。如果凸轮轴刚度很大，且以角速度 ω 作等速转动，输入量也可采用转角 $\theta \left(= \frac{t}{\omega} \right)$ 。

输出变量一般是从动件的位移 s ，或 $\frac{d^p s}{dt^p}$ 。当 $p = 0$ 时，即 s 本身，当 $p = 1$ 时，为速度 $v = \frac{ds}{dt}$ ，当 $p = 2$ 时，为加速度 $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ ，当 $p = 3$ 时，为跃度 $j = \frac{d^3 s}{dt^3}$ ，当 $p = 4$ 时，为跳度 $q = \frac{d^4 s}{dt^4}$ ，…直到更高的阶次 $\frac{d^p s}{dt^p}$ 。

假如所有构件都具有理想的刚性，而且全部运动副都无间隙，则从动件的输出位移与凸轮轮廓曲线具有相同的运动规律。一般说来，从动件输出位移 s 随输入时间 t 而变化，其函数式为

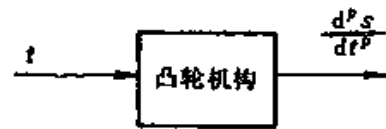


图2-1 凸轮机构传递函数

$$s = f(t)$$

称为凸轮机构的位移传递函数。无论传递函数多么复杂，在凸轮机构中，都可以归结为三种基本运动规律，即图2-2所示的双停留(D—R—D)，单停留(D—R—R)和无停留(R—R—R)运动规律。

双停留运动规律是凸轮机构最常用的运动规律，也是连杆机构及其他机构不易实现的运动规律。图2-2 a所示的双停留曲线，

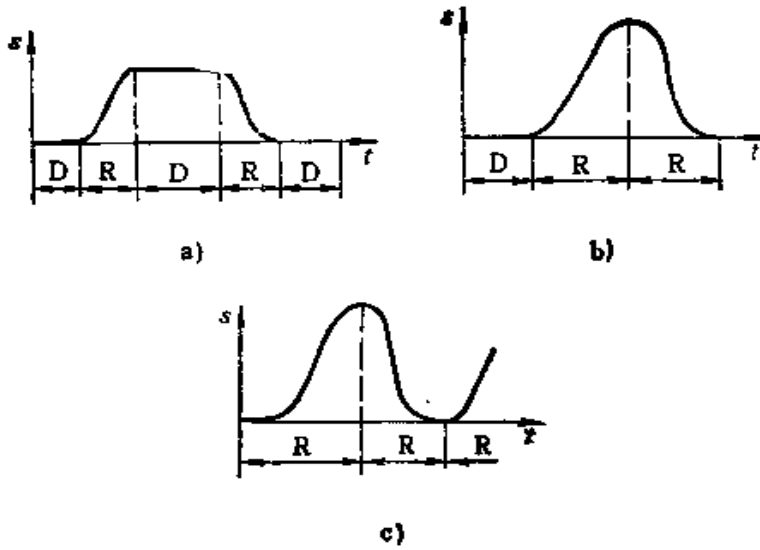


图2-2 运动规律类型
a) 双停留 b) 单停留 c) 无停留

实际上包括两部分双停留曲线：前半段D—R—D是指停—升—停；后半段D—R—D是指停—回—停。

单停留曲线在停—回之间无停留。图 2-2 b 上的 D—R—R 是停—升—回，即在最低位置停留，最高位置处无停留。但是，单停留 D—R—R 也可以是停—回—升，即在最高位置处停留，到最低位置时无停留。

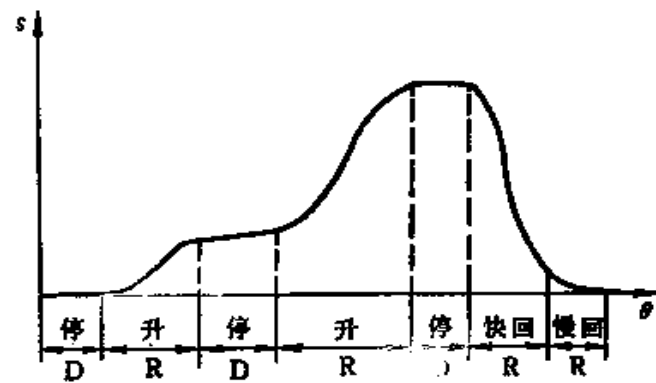


图2-3 凸轮挑线机构的运动规律

无停留运动规律，如无特殊要求，也可采用连杆机构实现。

实际工作所需的运动规律，都由上述三种基本规律组合而成。例如，图 2-3 所示 JA 型家用缝纫机的凸轮挑线机构从动件的运动规律，就是由双停留运动规律组合而成的。它的复杂关系是由

挑线工艺要求决定的：停(协调)—升(供线)—停(成线环)—升(给摆梭供线)—停(让摆梭转过一定角度，以免挑线时产生断线)—快回(快速挑线)—慢回(慢速收紧线迹)。

二、运动参数的无因次化

从前面的分析已经看到，对凸轮机构的运动规律的要求是千差万别的。为了便于研究这些运动规律的共同特性，常常把输入量时间 t 、位移 s 、速度 v 、加速度 a 等运动参数进行无因次处理，变成用大写字母表示的相应的无因次量，其定义如下：

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{t}{t_h} \\ S &= \frac{s}{h} \\ V &= \frac{dS}{dT} = \frac{v}{h/t_h} \\ A &= \frac{d^2S}{dT^2} = \frac{a}{h/t_h^2} \\ J &= \frac{d^3S}{dT^3} = \frac{j}{h/t_h^3} \\ Q &= \frac{d^4S}{dT^4} = \frac{q}{h/t_h^4} \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式中， t_h 为升程或回程的总时间间隔； h 为与 t_h 相对应的位移。

无因次时间 T 与无因次位移 S 与具体的升回总时间 t_h 或总位移 h 无关，在 $0 \sim 1$ 范围内变化。无因次速度 V 可看成是实际速度 v 与升程或回程的平均速度 $\frac{h}{t_h}$ 的比值，所以也称为速度系数。

无因次加速度 A 、跃度 J 、跳度 Q 等具有类似的物理意义。

按照上述定义对时间和位移进行归一化处理后，各类运动规律的起止边界条件可写成：

双停留运动规律

$$\begin{cases} T = 0 \text{ 时, } S = 0, V = 0, A = 0 \\ T = 1 \text{ 时, } S = 1, V = 0, A = 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

单停留运动规律

$$\begin{cases} T = 0 \text{ 时, } S = 0, V = 0, A = 0 \\ T = 1 \text{ 时, } S = 1, V = 0, A = \text{任意值} \end{cases} \quad (2-3)$$

无停留运动规律

$$\begin{cases} T = 0 \text{ 时, } S = 0, V = 0, A = \text{任意值} \\ T = 1 \text{ 时, } S = 1, V = 0, A = \text{任意值} \end{cases} \quad (2-4)$$

如果运动规律满足如下关系:

$$\begin{cases} S(1-T) = 1 - S(T) \\ V(1-T) = V(T) \\ A(1-T) = -A(T) \end{cases} \quad (2-5)$$

则称为对称运动规律。显然,对于这种运动规律,当 $T = 0.5$ 时,有 $S = 0.5$,速度达到最大值 V_m ,加速度为零。

不满足关系式(2-5)的运动规律,称为非对称运动规律。采用不同的非对称运动规律,可以达到不同的设计目的。最常见的非对称运动规律是使减速段所占时间间隔大于0.5,负加速度的最大值(绝对值)小于最大正加速度值。这样设计出的非对称运动规律,可以减少终止点处的跃度值 J ,达到减少停留时的残留振动,保证动作精度的目的。另外,对于采用弹簧作封闭力的凸轮机构,当最大负加速度值(绝对值)较低时,可选取较小的弹簧刚度或预载。然而,这种非对称运动规律的最大加速度较大,凸轮载荷增大,不利于减少磨损和能耗。因此,在一些凸轮机构中,特别是几何封闭凸轮机构中,要求设计成加速段较长的非对称运动规律,以便降低最低载荷值,减少磨损。

三、运动规律的特性值

评价各种运动规律,常常按照一些与运动学或动力学有关的特性值。通过这些特性值的比较,可以大体分析出凸轮机构选用这种运动规律时的运动或动力特性,甚至可以反映出工作行为、结构或寿命等方面的基本趋势。运动规律常用的特性值有以下几

种。

1. 最大速度 V_m

众所周知, 凸轮机构的轮廓压力角一般随速度的增大而增加。压力角过大, 会导致磨损加剧, 效率下降, 甚至自锁咬死。为了减小压力角, 应选用 V_m 较小的运动规律。如果压力角选定时, 较小的 V_m , 可以得到较小的基圆半径, 因而能减小凸轮机构的尺寸。低速机构一般按 V_m 较小的原则选用运动规律。

此外, 工作机构的速度越大, 工作机构的动量越大, 当因意外事故而要求紧急制动时, 工作机构的动量即会转变成巨大的冲量。因此, 从保证工作机构的安全角度看, 也希望选取 V_m 较小的运动规律。

2. 最大加速度 A_m

前面讲过, 在高速凸轮机构中, 与加速度成正比的惯性力是载荷的主要组成部分。较大的惯性力不但使构件受力增加, 构件之间磨损加剧, 由于振动分量的存在, 还导致从动件振动加大, 严重影响工作精度。因此, A_m 是选用运动规律时必须考虑的主要特性, 特别是在中、高速机构中, 更要选用较小的 A_m 。

速度与加速度的增加还导致轮廓曲率半径的减小, 使接触应力增加。

3. 加速度均方根值 A_{rms}

加速度的均方根值定义如下:

$$A_{rms} = \sqrt{\int_0^1 A^2 dT} \quad (2-6)$$

这个特性值可以看成是运动规律的加速度值的一个均值度量, 反映了机构受惯性力作用后偏离平均位置的动力扭曲程度。在对动作精度要求比较严格的凸轮机构中, 应选用 A_{rms} 较小的运动规律。

4. 动载转矩特性值 $(AF)_m$

后面将会看到, 与动载惯性力对应的凸轮轴转矩正比于 (AF) , 它的最大值 $(AF)_m$ 决定动载转矩的最大值。为了减少凸

轮轴转矩，降低电动机功率，应选用 (AV) 较小的运动规律。

5. 动载转矩变化率特性值 τ 。

动载转矩对时间微分，得到它的变化率为

$$\tau = \frac{d(AV)}{dT} = VJ + A^2 \quad (2-7)$$

它的最大值 τ 。一般出现在动载转矩特性值 (AV) 反号处，即 $T = 0.5$ 附近的 $A = 0$ 处。由于转矩反号，在几何封闭凸轮机构中存在啮合间隙时，从动滚将从凸轮轮廓一侧冲向另一侧，引起横越冲击。这就是几何封闭凸轮机构中噪声的重要来源，而且在这一横越点附近，造成严重的磨损。因此，在几何封闭凸轮机构中，除了通过预载或其它结构措施来消除间隙，减少噪声和磨损外，还应选用 τ 较小的运动规律。

6. 最大跃度 J 和最大跳度 Q 。

在高速机构中，要求高阶导数值连续，而且绝对值尽量小，以便减少机构的振动，提高工作机构的运动精度。作为位移三阶导数的跃度 J 和四阶导数的跳度 Q ，通常要求控制其最大值 J 或 Q 。不要超过某一数值。例如，在后面将要讨论的高速凸轮机构的轮廓动力学综合中，为了保证综合后的轮廓光滑，要求运动规律的 Q 较小。

第二节 基本运动规律

一、等速运动规律

等速运动规律从 $T = 0$ 到 $T = 1$ 具有同样的速度，其位移方程是直线方程

$$S = T \quad (2-8)$$

无因次速度 $V = V_n = 1$ ；起止点的加速度 $A = \infty$ ，其余各点 $A = 0$ 。运动曲线如图 2-4 所示：

这种运动规律最初用在要求等速进给的自动机床上，由于它的 $V_n = 1$ ，是所有运动规律中最小者，因而可以得到很小的压力角；对于对心直动从动杆圆盘凸轮，其轮廓是阿基米德螺旋线，

可以用范成法在专用机床上加工出来。因此，等速运动规律广泛应用于自动机床等各种低速重载的工作机构上。

但是，从运动特性看，等速曲线是最差的曲线，起止点的速度不连续，理论上会有无穷大加速度，会产生硬冲击。因此，等速曲线不适用于中、高速机构。

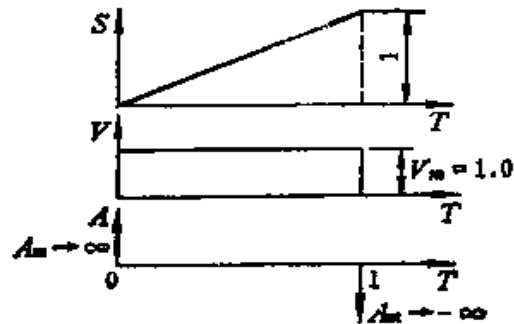


图2-4 等速运动曲线

二、等加速度运动规律

等加速度运动规律是指加速与减速段具有相同加速度值（绝对值）的运动规律，在所有运动规律中，具有最小的最大加速度值 $A_m = 4$ 。其运动方程如下（见图2-5）：

$0 \leq T \leq 0.5$ 时

$$\begin{cases} S = 2T^2 \\ V = 4T \\ A = 4 \end{cases} \quad (2-9a)$$

$0.5 \leq T \leq 1$ 时

$$\begin{cases} S = -2T^2 + 4T - 1 \\ V = -4T + 4 \\ A = -4 \end{cases} \quad (2-9b)$$

等加速度运动曲线如图 2-5 所示。 $V_m = 2$ ， $A_m = 4$ 。加速度不连续，在 $T = 0, 0.5, 1$ 处，跃度 $J = \infty$ 。因此，不适用于中、高速机构。

三、梯形运动规律

梯形运动规律是指位移、速度、加速度、跃度或更高阶的导数随时间的变化曲线呈梯形规律。等速曲线的位移呈三角形，速度呈矩形，属于梯形的特殊情况。为了研究具有普遍意义的梯形曲线，引入一尖括弧 $\langle \cdot \rangle$ 算符，以便描述不连续的折线。它的定义如下：

$$\begin{cases} \text{当变量} < 0 \text{ 时, } \langle \text{变量} \rangle = 0, \\ \text{当变量} \geq 0 \text{ 时, } \langle \text{变量} \rangle = \text{变量} \end{cases}$$

利用这一算符来表示等速运动曲线的运动方程时, 有

$$\begin{cases} S = V \langle T - T_0 \rangle & (T_0 = 0) \\ V = V \langle T - T_0 \rangle^0 \end{cases} \quad (2-10)$$

加速度曲线可看成是在 $T = 0$ 处, 有一个面积为 $V = 1$ 的脉冲。

对于图 2-6 所示的一般情况, 其位移方程可表示成

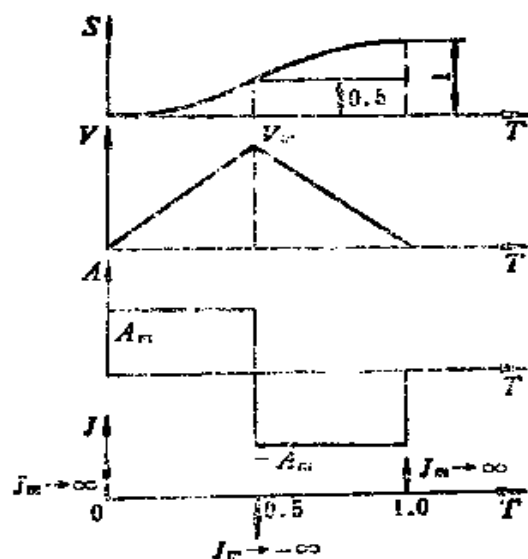


图2-5 等加速度运动曲线

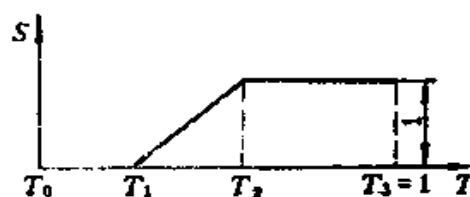


图2-6 梯形位移曲线

$$S = \begin{cases} 0 & (0 < T < T_1) \\ V(T - T_1) & (T_1 < T < T_2) \\ 1 & (T_2 < T) \end{cases}$$

上式可以简化为

$$S = V \langle T - T_1 \rangle - V \langle T - T_2 \rangle \quad (2-11)$$

把上述尖括弧算符推广到更一般情况, 有

$$\langle T - T_1 \rangle^n = \begin{cases} 0 & (T < T_1) \\ (T - T_1)^n & (T \geq T_1, n > 0) \end{cases} \quad (2-12)$$

微分上式可得

$$\begin{cases} \frac{d\langle T - T_1 \rangle^n}{dT} = n\langle T - T_1 \rangle^{n-1} & (n \geq 0) \\ \frac{d\langle T - T_1 \rangle_c}{dT} = \langle T - T_1 \rangle_{n+1} & (n < 0) \end{cases} \quad (2-13)$$

积分式(2-12)可得

$$\begin{cases} \int \langle T - T_1 \rangle^n dT = \frac{\langle T - T_1 \rangle^{n+1}}{n+1} + C & (n \geq -1) \\ \int \langle T - T_1 \rangle_c dT = \langle T - T_1 \rangle_{n+1} + C & (n < 0) \end{cases} \quad (2-14)$$

式中, C 为积分常数。

角标 $n > 0$ 时, 角标置右上方, 其微积分运算法则与常用的一样。当 $n < 0$ 时, 角标置右下角, 微积分运算按特殊规则进行, 这样就使得不连续函数的微积分具有具体的含义了。例如, 图 2-4 中 $T = 0$ 处, 虽然其加速度绝对值为无穷大, 但可看成是一个具有面积为 V_m 的脉冲, 用尖括弧算符可表示成

$$A = V_m \langle T - T_0 \rangle_{-1} \quad (2-15)$$

按式(2-14)法则积分, 得

$$V = V_m \langle T - T_0 \rangle^0 \quad (2-16)$$

这是阶跃函数的表达式。 $T < T_0$ 时, $V = 0$; $T > T_0$ 时, $V = V_m$ 。

对式(2-16)再次积分, 便得到式(2-8)的位移表达式。

利用上述描述非连续函数的特殊运算符号, 就很容易建立图 2-7 所示的梯形加速度运动规律的表达式。

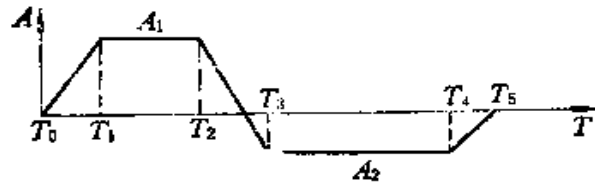


图2-7 梯形加速度运动曲线

图 2-7 所示曲线实际上是不连续的折线, 在 T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 、 T_5 等处高阶导数有突变。这一梯形曲线可利用式(2-11)表示成

$$A = \frac{A_1 - 0}{T_1 - T_0} (\langle T - T_0 \rangle - \langle T - T_1 \rangle) + \frac{A_2 - A_1}{T_3 - T_2} (\langle T - T_2 \rangle - \langle T - T_3 \rangle) + \frac{0 - A_2}{T_5 - T_4} (\langle T - T_4 \rangle - \langle T - T_5 \rangle)$$

因为 $T_0 = 0$, $T_5 = 1$, $T - T_5 \leq 0$, 故 $\langle T - T_5 \rangle = 0$, 于是上式可简化成

$$A = \frac{A_1}{T_1} (\langle T \rangle - \langle T - T_1 \rangle) + \frac{A_2 - A_1}{T_3 - T_2} (\langle T - T_2 \rangle - \langle T - T_3 \rangle) - \frac{A_2}{1 - T_4} \langle T - T_4 \rangle \quad (2-17)$$

按式(2-14)积分上式一次和二次, 得

$$V = \frac{A_1}{2T_1} (\langle T \rangle^2 - \langle T - T_1 \rangle^2) + \frac{A_2 - A_1}{2(T_3 - T_2)} \times (\langle T - T_2 \rangle^2 - \langle T - T_3 \rangle^2) - \frac{A_2}{2(1 - T_4)} \langle T - T_4 \rangle^2 \quad (2-18)$$

$$S = \frac{A_1}{6T_1} (\langle T \rangle^3 - \langle T - T_1 \rangle^3) + \frac{A_2 - A_1}{6(T_3 - T_2)} (\langle T - T_2 \rangle^3 - \langle T - T_3 \rangle^3) - \frac{A_2}{6(1 - T_4)} \langle T - T_4 \rangle^3 \quad (2-19)$$

上述各式中, 最大加速度值 A_1 和 A_2 可由边界条件求出, 即由 $T = T_5 = 1$ 时, $V_5 = 0$ 与 $S_5 = 1$, 有

$$\begin{cases} 0 = \frac{A_1}{2T_1} (\langle 1 \rangle^2 - \langle 1 - T_1 \rangle^2) + \frac{A_2 - A_1}{2(T_3 - T_2)} \times (\langle 1 - T_2 \rangle^2 - \langle 1 - T_3 \rangle^2) - \frac{A_2}{2(1 - T_4)} \langle 1 - T_4 \rangle^2 \\ 1 = \frac{A_1}{6T_1} (\langle 1 \rangle^3 - \langle 1 - T_1 \rangle^3) + \frac{A_2 - A_1}{6(T_3 - T_2)} \times (\langle 1 - T_2 \rangle^3 - \langle 1 - T_3 \rangle^3) - \frac{A_2}{6(1 - T_4)} \langle 1 - T_4 \rangle^3 \end{cases} \quad (2-20)$$

整理后写成

$$\begin{cases} 0 = a_1 A_1 + a_2 A_2 \\ 6 = b_1 A_1 + b_2 A_2 \end{cases}$$

其中

$$a_1 = \frac{1 - (1 - T_1)^2}{T_1} + \frac{(1 - T_2)^2 - (1 - T_3)^2}{T_2 - T_3}$$

$$a_2 = -\frac{(1 - T_2)^2 - (1 - T_3)^2}{T_2 - T_3} - (1 - T_4)$$

$$b_1 = \frac{1 - (1 - T_1)^3}{T_1} + \frac{(1 - T_2)^3 - (1 - T_3)^3}{T_2 - T_3}$$

$$b_2 = -\frac{(1 - T_2)^3 - (1 - T_3)^3}{T_2 - T_3} - \frac{(1 - T_4)^3}{1 - T_4}$$

由上述方程组，不难解得

$$A_1 = -\frac{6a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad A_2 = \frac{6a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (2-21)$$

梯形加速度曲线的跃度是不连续的阶跃函数，因此，运动特性仍不理想。对于高速凸轮机构，应寻求位移的更高阶导数连续的运动规律。为此，可以设计图 2-8 所示的梯形跃度曲线。

类似地，由式(2-11)可写出梯形跃度的表达式为

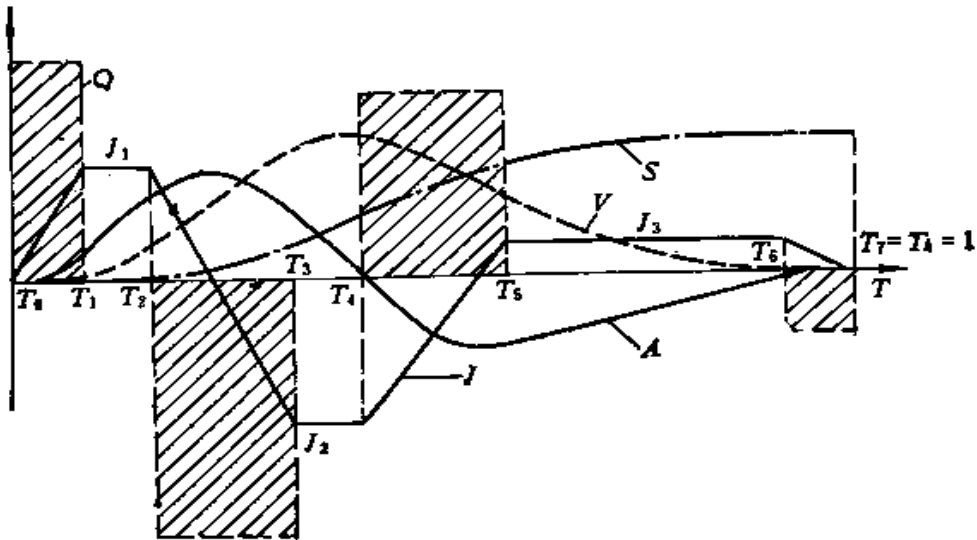


图2-8 梯形跃度曲线

$$J = -\frac{J_1}{T_1}(\langle T \rangle - \langle T - T_1 \rangle) + \frac{J_2 - J_1}{T_3 - T_2}(\langle T - T_2 \rangle - \langle T - T_3 \rangle) \\ + \frac{J_3 - J_2}{T_5 - T_4}(\langle T - T_4 \rangle - \langle T - T_5 \rangle) + \frac{J_3}{1 - T_6} \langle T - T_6 \rangle$$

逐次积分，可以写出 A 、 S 、 V 的表达式。积分常数 C_1 、 C_2 、 C_3 可根据边界条件： $T = T_0 = 0$ 时， $A_0 = 0$ ， $V_0 = 0$ ，和 $S_0 = 0$ 求得。 J_1 、 J_2 、 J_3 可根据边界条件 $T = T_7 = 1$ 时， $A_7 = 0$ ， $V_7 = 0$ 和 $S_7 = 1$ 求出，所求 J_1 、 J_2 、 J_3 的方程组矩阵式为：

$$[T_{ij}] \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2A_7 - 2C_1 \\ 6V_7 - 6(C_1 T_7 + C_2) \\ 24S_7 - 24\left(\frac{C_1}{2} T_7^2 + C_2 T_7 + C_3\right) \end{Bmatrix}$$

式中

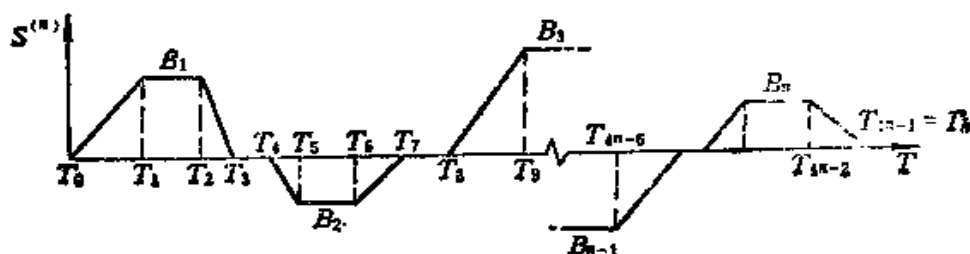
$$T_{ij} = \frac{(T_7 - T_{2j-2})^{i+1} - (T_7 - T_{2j-1})^{i+1}}{T_{2j-1} - T_{2j-2}} \\ - \frac{(T_7 - T_{2j})^{i+1} - (T_7 - T_{2j+1})^{i+1}}{T_{2j+1} - T_{2j}} \\ i, j = 1, 2, 3$$

将上述结果推广到更高阶的普遍情况，如图 2-9 所示的位移的 n 阶导数 $S^{(n)}$ 梯形曲线，求各极值 B_i 的方程组为

$$[T_{ij}] \begin{Bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2S_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ (i+1)! S_0^{(i-1)} \\ \vdots \\ (n+1)! S_0 \end{Bmatrix} \\ - \begin{Bmatrix} 2S_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ (i+1)! \sum_{k=1}^i \frac{S_0^{(n-k)} T_A^{i-k}}{(i-k)!} \\ \vdots \\ (n+1)! \sum_{k=1}^n \frac{S_0^{(n-k)} T_A^{k-1}}{(n-k)!} \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

$i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\text{式中 } T_{ij} = \frac{(T_k - T_{4j-4})^{i+1} - (T_k - T_{4j-2})^{i+1}}{T_{4j-2} - T_{4j-4}} - \frac{(T_k - T_{4j-2})^{i+1} - (T_k - T_{4j-1})^{i+1}}{T_{4j-1} - T_{4j-2}}$$

图2-9 $S^{(n)}$ 梯形曲线

四、圆弧运动规律

如前所述，等速运动规律不适合于中、高速凸轮机构。早期，工程人员常用圆弧过渡来改善等速曲线起止端的硬冲击现象。如图2-10所示，在 $0 \sim \theta_1$ 和 $\theta_2 \sim \theta_4$ 两段时间间隔内，位移按圆弧过渡，中间仍为等速运动，即直线。圆弧段的运动方程可由图示几何关系：

$$\theta = h \sin \alpha, \quad s = h(1 - \cos \alpha)$$

求得

$$\begin{cases} s = h - \sqrt{h^2 - \theta^2} \\ v = \frac{\theta}{(h^2 - \theta^2)^{1/2}} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \\ a = \frac{h^2}{(h^2 - \theta^2)^{3/2}} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{cases} \quad (2-23)$$

由图2-10可见，圆弧过渡曲线虽然使位移曲线光滑，速度曲线连续，但加速度仍然是不连续的，不能用于中、高速机构。

五、简谐运动规律

简谐运动规律的特点是它的加速度与位移成正比而反向。如图2-11所示，简谐曲线是由直径为1的圆上各点向垂直轴投影而构成的，其表达式为

$$\begin{cases}
 S = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi T) \\
 V = \frac{\pi}{2} \sin \pi T \\
 A = \frac{\pi^2}{2} \cos \pi T \\
 J = -\frac{\pi^3}{2} \sin \pi T
 \end{cases} \quad (2-24)$$

由图2-11可见，简谐运动曲线的速度曲线是光滑的，但起止点不连续，因而跃度 J 在端点趋于无穷大。所以，这种曲线不能用于要求单、双停留的场合，多用于无停留场合。

六、摆线运动规律

摆线运动规律曲线是由一个小圆沿纵轴滚动时，圆上一点的轨迹——摆线向垂直轴投影而构成的，如图2-12所示。其具体作图过程是：以 A 点为圆心， $R = \frac{S_1}{2\pi}$ 为半径画圆。

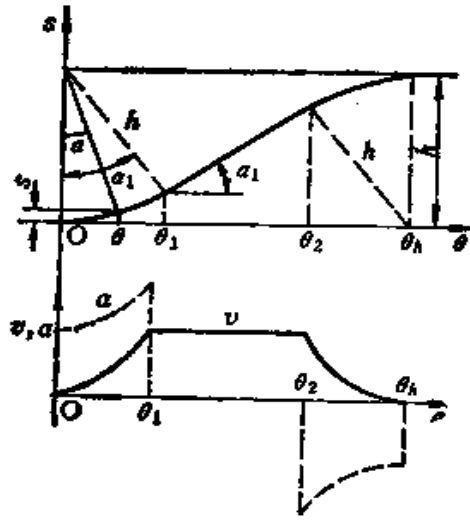


图2-10 圆弧过渡曲线

将此圆等分成与横轴 AB 相同的等分数。从这些点在纵轴上的投影出发作与对角线 AD 平行的线，这些线与各分隔纵线的交点即为所求的位移。

按摆线运动曲线产生原理，位移方程可写成

$$S = \overline{Aa} - \overline{ab} = R\phi - R\sin\phi$$

但是，因有 $\frac{T}{T_1} = \frac{\phi}{2\pi}$ ， $2\pi R = S_1$ ，代入上式可得位移方程以及其它运动参数：

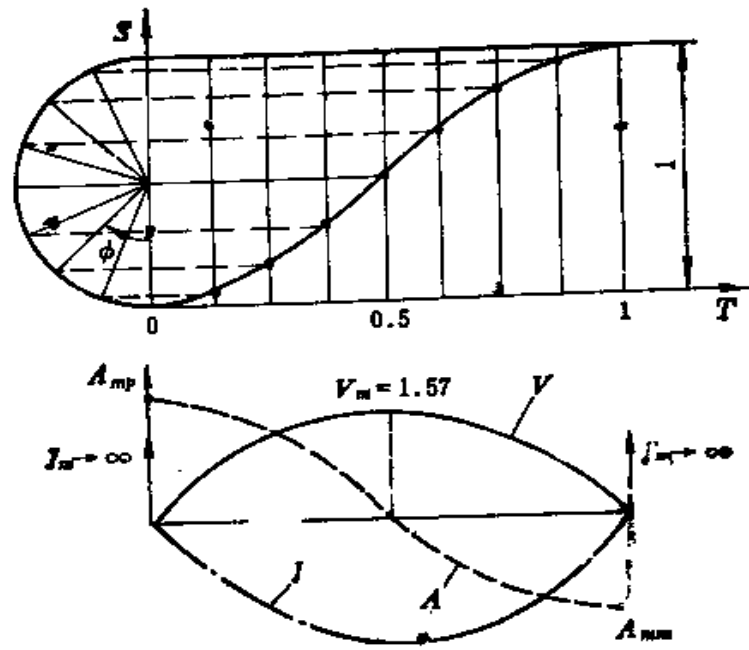


图2-11 简谐曲线

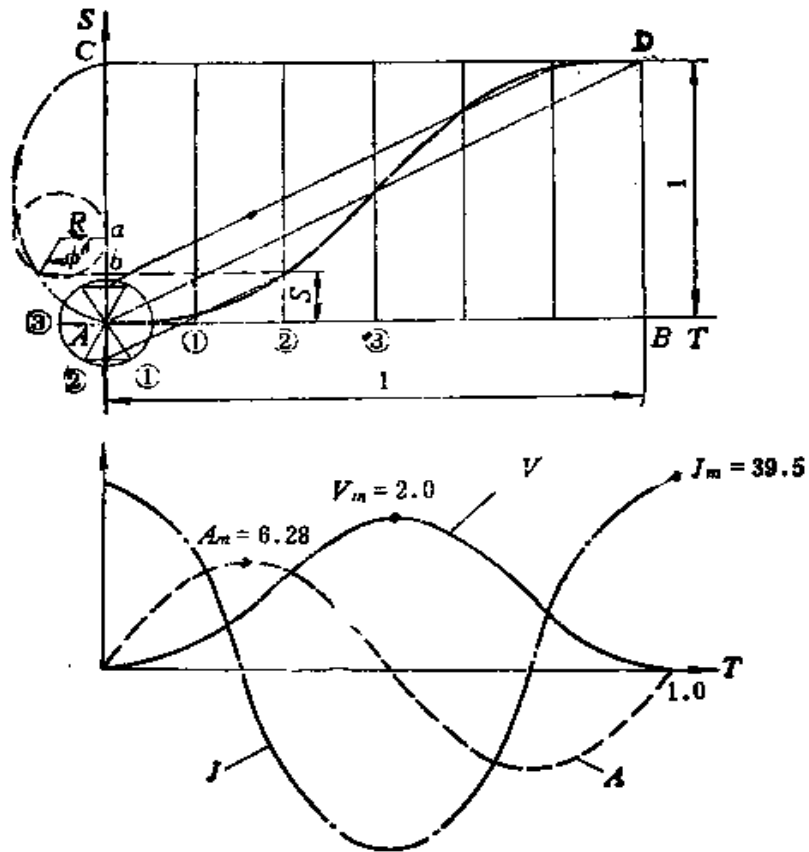


图2-12 摆线运动规律

$$\begin{cases} S = T - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi T \\ V = 1 - \cos 2\pi T \\ A = 2\pi \sin 2\pi T \\ J = 4\pi^2 \cos 2\pi T \end{cases} \quad (2-25)$$

这是一种光滑的、在端点又连续而无冲击的加速度曲线，因此，早期广泛用于中速凸轮机构。但是， $A_m (= 6.28)$ 较大，端点的 J 又不连续，即端点跳度 Q 将趋于无穷大，所以不适于高速场合。

七、椭圆运动规律

椭圆的基本方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2-26)$$

式中， a 与 b 分别为椭圆的半长轴与半短轴。椭圆运动曲线就是根据这一关系绘制出来的，如图2-13所示。从动件总位移 S_1 等于椭圆的短轴，以此为直径，先画一个半圆；然后，再以长轴为直径画一同心半圆；在它们之间按椭圆方程画出半个椭圆。将这些半圆弧线等分成与横轴相同的等分，这些分度线与椭圆的交点即为所求位移。

由图2-13可见，当 $T = 0$ 时， $\phi = 0$ ；当 $T = T_1 = 1$ 时， $\phi = \pi$ ；因此

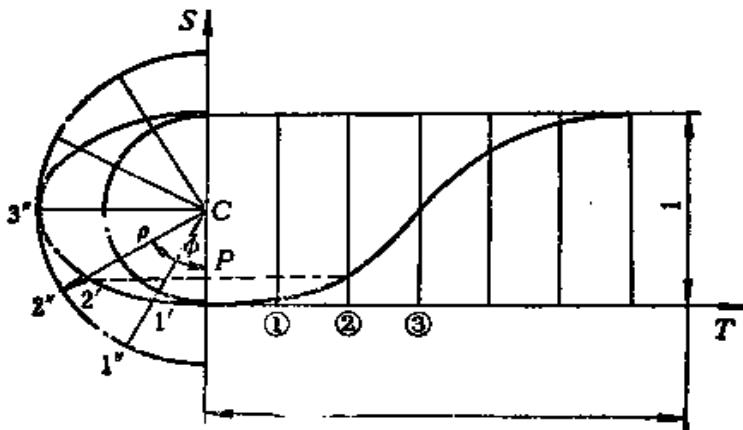


图2-13 椭圆运动位移曲线

$$\phi = \frac{\pi}{T} T = \pi T \quad (2-27)$$

利用方程(2-26), 椭圆的极坐标可表示成

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2$$

按图中三角形 $\triangle CP2'$, 并利用式(2-27), 得

$$\rho^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \rho^2 \sin^2 \pi T$$

由此可解出

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{1 - a \sin^2 \pi T}}$$

其中, $a = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2}$, $n = \frac{a}{b}$ 。因为半短轴 $b = \frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}$,

参考图上的几何关系可得位移方程为

$$S = \frac{1}{2} - \rho \cos \phi$$

将 ρ 与 ϕ 的关系代入, 逐次微分, 可得椭圆运动方程为

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos \pi T}{\sqrt{1 - a \sin^2 \pi T}} \right) \\ V = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \pi T}{n^2 (1 - a \sin^2 \pi T)^{3/2}} \\ A = \frac{\pi^2}{2} \cos \pi T \frac{1 + 2a \sin^2 \pi T}{n^2 (1 - a \sin^2 \pi T)^{5/2}} \end{cases} \quad (2-28)$$

当 $n = 1$ 时, $a = 0$, 则上述方程与简谐运动方程完全一致。图2-14画出了 $n = 1.0$ 、 1.1 、 1.2 和 1.3 时的速度与加速度曲线。由图可见, A_m 随 n 的增大而增加, 所以 n 不宜取得过大。与简谐曲线一样, 椭圆曲线端点加速度也是不连续的, 但随 n 的增加能有所缓和。

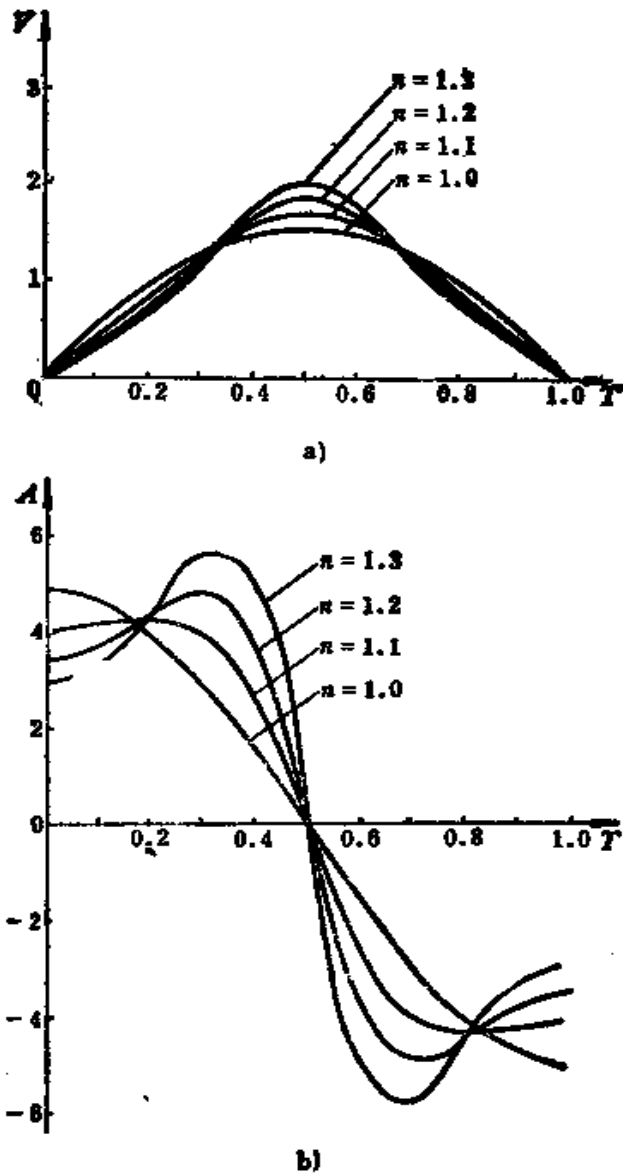


图2-14 椭圆运动规律的速度与加速度曲线
a) 速度 b) 加速度

第三节 简谐梯形组合运动规律

前述各种基本运动规律虽然都有各自的优点，但同时也有某些不足，甚至有严重的缺点。我们可以根据各种具体设计要求，

将上述基本曲线经过组合与修正，从而得到运动特性值优良的一系列曲线，供设计者选用。在自动机械凸轮机构中，应用最广泛的是由简谐与梯形曲线组合而成的所谓通用曲线，尤其是它的三种特殊情况：修正等速度、修正梯形和修正正弦曲线。

一、修正等速运动规律

它是由对等速度曲线的修正而得，即在等速度曲线的两端各加上一段组合简谐曲线作为过渡曲线（图2-15）。这样，既保留了等速度曲线 V_m 小的优点，又克服了它两端的 V 不连续的缺点。

如图2-15所示，加速度曲线由加速段、等速段、减速段等五段曲线组成：

加速段：由正弦曲线 I 和余弦曲线 II 构成。

等速段：为一与 T 轴重合的直线 III。

减速段：由简谐曲线 IV、V 组合而成，与加速段相对称。

由简谐曲线的特点，可令加速段曲线表达式如下：

曲线 I： $A = A_m \sin k_1 T$ ($0 \leq T < T_a$)

曲线 II： $A = A_m \cos k_2 (T - T_a)$ ($T_a \leq T < T_b$)

式中， k_1 、 k_2 分别是两段简谐曲线的圆频率， T_a 为两段曲线自变量定义域的分界点，也表示曲线 II 与标准余弦曲线的相位差。

为了保证组合简谐曲线的连续性，曲线 I 和 II 都应是各自相应的整周期简谐曲线的 1/4 周期段，即

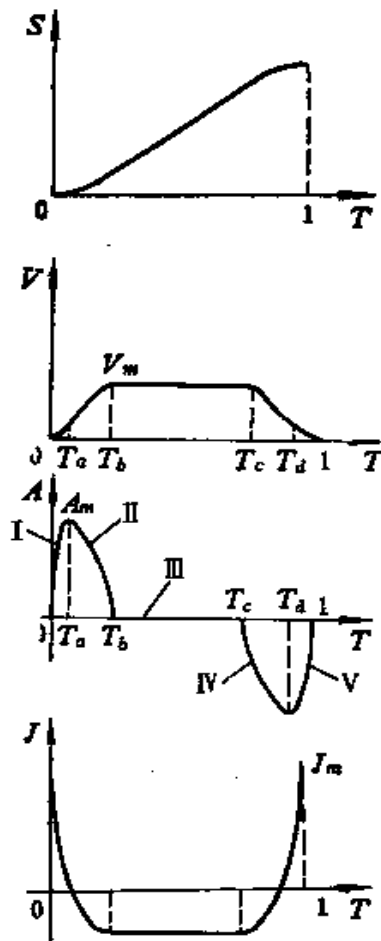


图2-15 修正等速度曲线

曲线 I 的周期 $t_1 = 4T_0$

曲线 II 的周期 $t_2 = 4(T_1 - T_0)$

这样, 由简谐曲线的圆频率与周期的关系可得

$$k_1 = \frac{2\pi}{t_1} = \frac{\pi}{2T_0}$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{t_2} = \frac{\pi}{2(T_1 - T_0)}$$

由此可得加速段曲线的表达式为

$$\text{曲线 I: } A = A_m \sin \frac{\pi T}{2T_0} \quad (0 \leq T < T_0)$$

$$\text{曲线 II: } A = A_m \cos \frac{\pi(T - T_0)}{2(T_1 - T_0)} \quad (T_0 \leq T < T_1)$$

对 A 微分一次可得跃度曲线

$$\text{曲线 I: } J = \frac{\pi}{2T_0} A_m \cos \frac{\pi T}{2T_0} \quad (0 \leq T < T_0)$$

$$\text{曲线 II: } J = \frac{-\pi \cdot A_m}{2(T_1 - T_0)} \sin \frac{\pi(T - T_0)}{2(T_1 - T_0)} \quad (T_0 \leq T < T_1)$$

对 A 积分一次可得速度曲线

$$\text{曲线 I: } V = -\frac{2T_0}{\pi} A_m \cos \frac{\pi T}{2T_0} + C_1 \quad (0 \leq T < T_0)$$

$$\text{曲线 II: } V = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} A_m \sin \frac{\pi(T - T_0)}{2(T_1 - T_0)} + C_2 \quad (T_0 \leq T < T_1)$$

式中, C_1 、 C_2 是积分常数。

由 $T = 0$, $V = 0$ 可求得

$$C_1 = \frac{2T_0}{\pi} A_m$$

由 $T = T_0$ 时, 曲线 I 与曲线 II 的 V 值相等可得

$$C_2 = C_1 = \frac{2T_0}{\pi} A_m$$

由此可得速度曲线的表达式为

$$\text{曲线 I: } V = \frac{2T_0}{\pi} A_m \left(1 - \cos \frac{\pi T}{2T_0} \right) \quad (0 \leq T < T_0)$$

$$\text{曲线 II: } V = \frac{2(T_1 - T_2)}{\pi} A_m \sin \frac{\pi(T - T_2)}{2(T_1 - T_2)} + \frac{2T_2}{\pi} A_m$$

$$(T_2 \leq T < T_1)$$

将 $T = T_1$ 代入曲线 II 的速度表达式可得到 T_1 时的速度值 $V_1 = \frac{2T_1}{\pi} A_m$ 。由图 2-15 可知, V_1 实际上就是最大速度值 V_m , 即

$$V_m = V_1 = \frac{2T_1}{\pi} A_m$$

由此可得等速段的速度表达式为

$$V = \frac{2T_1}{\pi} A_m \quad (T_2 \leq T < T_1)$$

由位移曲线的边界条件 ($T = 0, S = 0; T = 1, S = 1$) 可知, 速度函数 V 在整个区间 $[0, 1]$ 里的积分应为 1, 即图 2-15 所示之各段速度曲线下的面积之和为 1。另外, 由于加速段与减速段的速度曲线是对称的, 所以曲线 I、II 下的面积与曲线 IV、V 下的面积是相等的。这样, 由前述的各段速度曲线的表达式可得

$$2 \left\{ \int_0^{T_2} \frac{2T_2}{\pi} A_m \left(1 - \cos \frac{\pi T}{2T_2} \right) dT + \int_{T_2}^{T_1} \frac{2(T_1 - T_2)}{\pi} A_m \right. \\ \left. \times \left[\sin \frac{\pi(T - T_2)}{2(T_1 - T_2)} + \frac{2T_2}{\pi} A_m \right] dT \right\} + \int_{T_1}^1 \frac{2T_1}{\pi} A_m dT = 1$$

求出上式中的各定积分值, 可求得最大加速度

$$A_m = \frac{\pi/2}{\left(2 - \frac{8}{\pi} \right) T_2 T_1 + \left(\frac{4}{\pi} - 2 \right) T_1^2 + T_2}$$

由 J 的表达式可以求得最大跃度

$$J_m = \frac{\pi}{2T_2} A_m$$

由以上分析可知, 修正等速度曲线的 A_m 、 V_m 等特性值取决于 T_2 、 T_1 的大小。减小 T_2 可以减小 A_m , 从而也使 V_m 减小, 但

f_n 会增大。增大 T_s 可使 A_n 减小，但会使 V_n 增大。实践表明，取 $T_s = \frac{1}{16}$ ， $T_s = \frac{1}{4}$ 时，综合性能比较好。这时， $V_n = 1.28$ ， $A_n = 3.01$ ， $J_n = 201.4$ 。显然，这种曲线的特点是 V_n 小而 A_n 、 J_n 较大，但总的效果比前述圆弧过渡曲线要好。这种曲线一般不适用于中速，多用于需要 V_n 很小或必须有等速运动部分的凸轮从动件。

二、修正梯形运动规律

它是由对等加速度曲线修正而得，即在等加速度的不连续处（两端和中间）加上简谐曲线作为过渡曲线（见图2-16）并且仍保持其对称性，即

$$T_s = 0.5 - T_s = T_s - 0.5 = 1 - T_s$$

各段简谐曲线的周期都是 $4T_s$ 。

由边界条件可求得特性值的表达式为

$$A_n = \frac{4}{1 - 4 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) T_s}$$

$$V_n = 2$$

显然， T_s 越小， A_n 越小（实际上也就越接近等加速度曲线）。

但这样会导致 J_n 增大。 T_s 的值可以在 0 至 $\frac{1}{4}$ 之间选取。 $T_s = 0$ 时，变为等加速度曲线。 $T_s = 1/4$ 时，变为正弦曲线。一般将 T_s 取在区间 $(0, 1/4)$ 的中点较为合适，即 $T_s = 1/8$ 。这时， $A_n = 4.89$ ， $J_n = 61.4$ 。

这种曲线保留了等加速度曲线 A_n 小的优点，又克服了其不连续的缺点。可用于中速轻载的场合。

三、修正正弦运动规律

这种曲线是用与上述类似的方法对余弦曲线修正的结果，即在余弦曲线的两端各加上一段正弦曲线作过渡曲线（见图2-17）。这样，既保持了余弦曲线 V_n 、 A_n 两者都比较小的优点，又克服了其两端加速度不连续的缺点。当然，修正后仍保持对称性，即

$$T_s = 1 - T_s$$

两端的正弦曲线的周期都是 $4T_s$ ，而当中的余弦曲线的周期由修正前的 2 压缩为 $2 - 4T_s$ 。由接点处的边界条件可求出下列特性值表达式：

$$A_s = \frac{\pi^2}{2 - (8 - 2\pi)T_s}$$

$$V_s = \frac{A_s}{\pi}$$

$$J_s = \frac{\pi}{2T_s} A_s$$

显然， T_s 越接近于零， A_s 越小， V_s 也越小，但 J_s 却增大。 T_s 可在 0 到 $\frac{1}{4}$ 之间变化。当 $T_s = 0$ 时，变为余弦曲线； $T_s = 1/4$ 时，变为正弦曲线。类似修正梯形曲线， T_s 取在区间 $[0, 1/4]$ 的中间较为合适，即 $T_s = 1/8$ 。这时的特性值为： $A_s = 5.53$ ， $V_s = 1.76$ ， $J_s = 69.5$ 。

与修正等速度、修正梯形曲线相比，修正正弦曲线的优点是 A_s 、 V_s 两者都比较小， J_s 也不太大，综合性能很好。因此，这种曲线通用性最强，适用于中速的情况（重载、轻载皆宜）。特别是在负载情况不明时，用该曲线最为保险。另外，在常用的双停留标准曲线中，修正正弦曲线具有最小的 $(AV)_s$ 值 $[(AV)_s = 5.46]$ 。因此，在其他条件相同时，使用这种曲线可使动载转矩最小。一般地说，修正正弦曲线是比较理想的双停留标准曲线。

四、通用简谐梯形运动规律

目前工程上应用很广的中速机构的运动规律，是把简谐函数

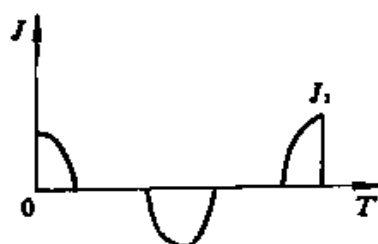
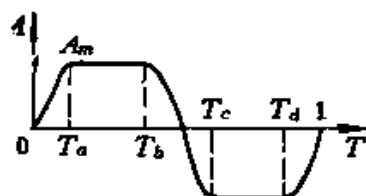
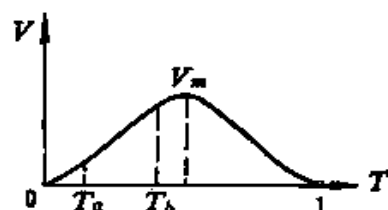
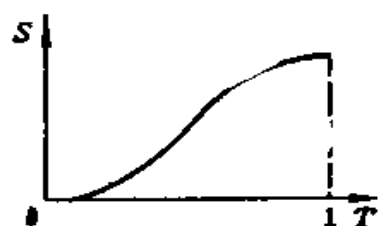


图2-16 修正梯形曲线

与梯形运动规律组合起来，形成一类运动特性优良的新运动规律；它兼有最大加速度 A_m 低的梯形规律的优点和简谐函数在两端运动规律连续的优点。图2-18所示曲线就是这样一种性能良好的曲线，而且也是一种比较通用的曲线，因为选择不同的 T_i 值就得到前述各种运动曲线和其它文献中介绍的常用运动曲线。”这种曲线各段的加速度表达式为：

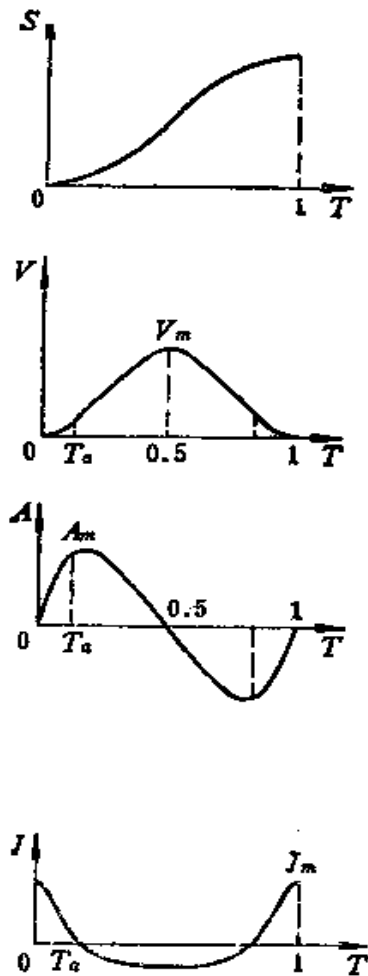


图2-17 修正正弦曲线

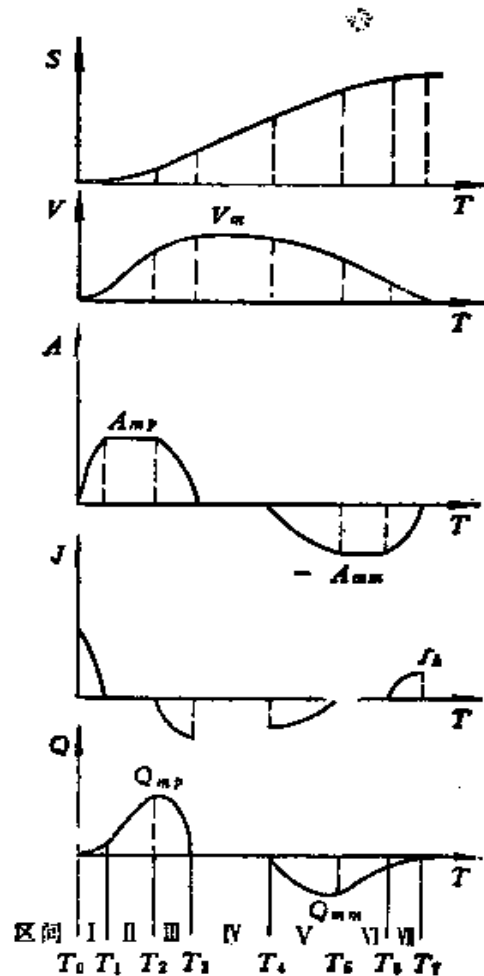


图2-18 通用简谐梯形曲线

$$A = \begin{cases} A_1 \sin\left(\frac{T}{T_1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) & (0 \leq T \leq T_1) \\ A_1 & (T_1 < T \leq T_2) \\ A_1 \cos\left(\frac{T - T_2}{T_3 - T_2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) & (T_2 < T \leq T_3) \\ 0 & (T_3 < T \leq T_4) \\ -A_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T - T_4}{T_5 - T_4}\right) & (T_4 < T \leq T_5) \\ -A_2 & (T_5 < T \leq T_6) \\ -A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T - T_6}{T_7 - T_6}\right) & (T_6 < T \leq T_7) \end{cases} \quad (2-29)$$

常用曲线的各 T_i 值列于表 2-1 中。

式 (2-29) 中的 A_2 值取绝对值, 利用三角函数的诱导关系, 式 (2-29) 还可进一步简化。令

$$P_i = \left[(T - T_{i-1}) / F_i + (i - 1) \frac{\pi}{4} \right] \quad (2-30)$$

$$F_i = (T_i - T_{i-1}) / \frac{\pi}{2} \quad (2-31)$$

则式 (2-29) 可以简写为

$$A = \begin{cases} A_1 \sin P_i & (i = 1, 3) \\ A_2 \sin P_i & (i = 5, 7) \\ A_1 & (i = 2) \\ 0 & (i = 4) \\ -A_2 & (i = 6) \end{cases} \quad (2-32)$$

对式 (2-32) 微分, 可得跃度 J 的表达式为

$$J = \begin{cases} \frac{A_1 \cos P_i}{F_i} & (i = 1, 3) \\ \frac{A_2 \cos P_i}{F_i} & (i = 5, 7) \\ 0 & (i = 4, 2, 6) \end{cases} \quad (2-33)$$

对式 (2-33) 逐次积分两次, 便得到速度和位移的表达式

表2-1 通用修正梯形曲线的特殊 T_i 值

曲线名称	T_i								
	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	
等 速 度	0	0	0	0	1	1	1	1	
等 加 速 度	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5	1	1	
余 弦	0	0	0	0.6	0.5	1	1	1	
摆 线	0	1/4	1/4	1/2	1/2	3/4	3/4	1	
修 正 等 速	0	1/16	1/16	1/4	3/4	15/16	15/16	1	
修 正 梯 形	0	1/8	3/8	1/2	1/2	5/8	7/8	1	
修 正 正 弦	0	1/8	1/8	1/2	1/2	7/8	7/8	1	
非 对 称 摆 线	0	0.2	0.2	0.4	0.4	0.7	0.7	1	
斜 修 正 梯 形	0	0.1	0.3	0.4	0.4	11/20	17/20	1	
梯 形 摆 线	0	1/8	3/8	1/2	1/2	5/8	5/8	1	
单 停 留 摆 线	0	0	0	0.5	0.5	0.75	0.75	1	
单 停 留 修 正 梯 形	0	1/8	3/8	1/2	1/2	5/8	1	1	
单 停 留 修 正 正 弦	0	1/8	1/8	1/2	1/2	1	1	1	
单 停 留 梯 形 摆 线	0	1/8	3/8	1/2	1/2	1	1	1	
无 停 留 修 正 梯 形	0	0	1/4	1/2	1/2	3/4	1	1	
无 停 留 修 正 等 速	0	0	0	1/4	3/4	1	1	1	

$$V = \begin{cases} -A_1 F_i \cos P_i + C_i & (i = 1, 3) \\ -A_2 F_i \cos P_i + C_i & (i = 5, 7) \\ A_1 T + C_2 & (i = 2) \\ C_4 & (i = 4) \\ -A_2 T + C_6 & (i = 6) \end{cases} \quad (2-34)$$

$$S = \begin{cases} -A_1 F_1^2 \sin P_1 + C_1 T + B_1 & (i = 1, 3) \\ -A_2 F_7^2 \sin P_7 + C_7 T + B_7 & (i = 5, 7) \\ A_1 T^2 / 2 + C_2 T + B_2 & (i = 2) \\ C_4 T + B_4 & (i = 4) \\ -A_2 T^2 / 2 + C_6 T + B_6 & (i = 6) \end{cases} \quad (2-35)$$

利用 $T_0 = 0$ 处, $V = 0$ 与 $S = 0$ 、 $T_7 = 1$ 处 $V = 0$ 与 $S = 1$, 以及 $T_1 \sim T_6$ 处 S 与 V 的连续条件, 共计 16 个条件, 从方程 (2-34) 与 (2-35) 中, 可以解出 C_i 、 B_i 、 A_1 、 A_2 共 16 个未知系数:

$$\begin{cases} C_1 = F_1 A_2 \\ C_2 = -A_1 T_1 + C_1 \\ C_3 = A_1 T_2 + C_2 \\ C_4 = A_1 F_3 + C_3 \\ C_5 = -A_2 F_6 + C_4 \\ C_6 = A_2 T_5 + C_5 \\ C_7 = -A_2 T_6 + C_6 \end{cases} \quad (2-36)$$

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ B_2 = -A_1 \left(F_1^2 + \frac{1}{2} T_1^2 \right) + T_1 (C_1 - C_2) + B_1 \\ B_3 = A_1 \left(F_3^2 + \frac{1}{2} T_2^2 \right) + T_2 (C_2 - C_3) + B_2 \\ B_4 = T_3 (C_3 - C_4) + B_3 \\ B_5 = T_4 (C_4 - C_5) + B_4 \\ B_6 = A_2 \left(F_6^2 + \frac{1}{2} T_5^2 \right) + T_5 (C_5 - C_6) + B_5 \\ B_7 = -A_2 \left(F_7^2 + \frac{1}{2} T_6^2 \right) + T_6 (C_6 - C_7) + B_6 \end{cases} \quad (2-37)$$

$$\begin{aligned} A_1 = & \left(\left[F_3^2 + \frac{(T_2 - T_1)^2}{2} - F_1^2 + F_3(1 - T_3) + (T_2 - T_1)(1 - T_2) \right. \right. \\ & + F_1 - M \left. \left. \left\{ F_7^2 + \frac{(T_6 - T_5)^2}{2} - F_6^2 + (T_6 - T_5)(1 - T_6) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + F_6(1 - T_6) \right\} \right] (F_1 + F_2 + F_3) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2-38)$$

式中

$$M = (F_1 + F_2 + F_3) / (F_5 + F_6 + F_7)$$
$$A_2 = MA_1 \quad (2-39)$$

上述计算过程已编成子程序。首先利用表 2-1 所列的各种运动规律的 T_i 值作为已知数据输入，调用时只需输入该曲线的固定编号，子程序即自动输入其对应的 T_i 值。然后，利用式 (2-31)、式 (2-36) ~ 式 (2-39) 算出 16 个待定系数。最后，利用式 (2-32) ~ 式 (2-35) 算出在 $T = 0 \sim 1$ 范围内某时刻的 S 、 V 、 A 、 J 值。若在主程序中把 $T = 0 \sim 1$ 分为 N 等分，重复调用上述子程序，则可算出 $(N + 1)$ 组数据。

表 2-1 中的不同曲线，其运动特性值具有很大的差别，修正等速曲线的 V_m 较小，修正梯形曲线的 A_m 较小，修正正弦曲线的 $(AV)_m$ 较小，等等。但是，为了满足某一特定的设计要求，这些曲线没有达到最优状态。例如，改变表列修正等速度曲线的 T_i 值，在顾及 A_m 、 J_m 不超过允许值的条件下，可以作到使 V_m 小于前述修正等速度曲线的 $V_m (= 1.28)$ 值。

优化目标函数采用 A_1 ，即求

$$\min_{T \in R^6} A_1(T)$$

其中，设计变量 $T = [T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6]^T$ ，

约束条件有

$$\begin{cases} V_m = \int_0^{T_2} A dt = A_1 \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \right) (T_2 - T_1) + \frac{2}{\pi} T_3 \right] \leq [V] \\ J_m = A_m \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{T_1} \leq [J] \\ 0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 \leq T_5 \leq T_6 < 1 \\ M \leq 1 \end{cases}$$

其中， $[V]$ 与 $[J]$ 为最大速度与最大跃度的允许值，可根据设计要求给定。

上述优化的数学模型，因约束条件为变量 T 的非线性函数，寻优计算所需机时较长，收敛速度慢。为此，可以采用另外一种

优化模型，采用如下的目标函数。

$$F(T) = A_1(1 + w_0 k_0 + w_j k_j)$$

其中，
$$k_0 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(T_2 - T_1) + \frac{2}{\pi}T_3$$

$$k_j = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{T_1}$$

w_0 与 w_j 为根据具体设计要求可以选取的权重因子。这时约束条件变成很简单的线性关系，即

$$\begin{cases} 0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 \leq T_5 \leq T_6 < 1 \\ M \leq 1 \end{cases}$$

对于不同的设计要求，可以建立不同的目标函数，例如低速重载凸轮机构，应按 V_m 为目标函数进行优化；高速轻载应取 J_m 等等。表 2-2 给出了三条适合中速机构的优化通用凸轮曲线的 T_i 值与特性值。

由表 2-2 所列数据可见：

(1) 曲线 I 与曲线 II 基本保持了修正等速曲线 V_m 小的优点，但 V_m 有明显的降低，只是曲线 II 的 J_m 偏大。

表 2-2 优化通用凸轮曲线的参数

曲线名称	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	V_m	A_m	J_m
优化曲线 I	0.0884	0.1903	0.2405	0.7572	0.8701	0.9685	1.30	6.87	122
优化曲线 II	0.0320	0.1520	0.2131	0.7490	0.8686	0.9582	1.28	6.98	342
优化曲线 III	0.1290	0.2799	0.3597	0.6296	0.8203	0.9686	1.54	5.31	65

(2) 曲线 I 与 II 的等速段($T_4 - T_3$)均大于 0.5，能满足某些自动机械中要求等速段有一定长度的要求。

(3) 曲线 III 的 V_m 、 A_m 与 J_m 均小于修正正弦曲线，因此，可以说这条优化曲线的综合性能最好，适用于较为广泛的场合。

在工程中，常要求凸轮曲线是对称的。这时 $M = 1$ ，在 $T_1 \sim T_6$ 六个变量中，只有两个是独立的。对于这种情况，寻优计算将

大为简化。表 2-3 给出了优化修正等速与优化修正梯形曲线的优化参数与特性值。

由表 2-3 所列数据可见：

(1) 优化修正等速曲线 I 的等速段为 0.484，比表 2-1 所列的标准修正等速曲线只短 0.016，但 A_m 下降了。随着等速段的进一步减少，如曲线 II 与 III 所示， A_m 将明显降低。当然， V_m 也相应地有所增加。

表 2-3 优化对称通用凸轮曲线的参数

曲线名称	T_1	T_2	T_3	V_m	A_m	J_m
优化修正等速曲线 I	0.0622	0.0622	0.2553	1.281	7.883	199.1
优化修正等速曲线 II	0.0622	0.0622	0.2606	1.288	7.761	196.0
优化修正等速曲线 III	0.0580	0.0580	0.2751	1.301	7.431	201.3
优化修正梯形曲线	0.114	0.385	0.5	1.987	4.791	86.01

(2) 就综合性能而言，对称曲线不如表 2-2 所示的非对称曲线好。

(3) 优化修正梯形曲线的 A_m 值比表 2-1 中的标准修正梯形曲线还要低一些，可以认为它是同类曲线中的最优曲线。

第四节 多项式运动规律和富氏级数运动规律

简谐梯形组合曲线虽然可以组合出一系列性能优良的运动规律，但一般只用在中速凸轮机构上。因为这种运动规律的跃度 J 在端点常常不连续，即跳度 θ 可能趋于无穷大，因而不适合于高速凸轮机构。解决办法之一是采用级数运动规律。

一、幂函数多项式运动规律

这种运动规律通用性最强，可以按照任给的若干运动特性要求来设计运动规律。运动特性的约束条件越多，多项式的项数或幂次数就越高。只要幂次数取得足够高，对应的高阶导数总是光滑的和端点连续的，因此，在高速机构中应用广泛。

多项式运动规律的通式可写成

$$S = C_0 T^0 + C_1 T^1 + C_2 T^2 + \dots + C_n T^n \quad (2-40)$$

式中, $p < q < r < \dots < t$ 均为整数幂指数。

对式 (2-40) 逐次微分, 可以得到速度、加速度、跃度以及更高阶导数的表达式

$$\left\{ \begin{array}{l} V = S^{(1)} = pC_p T^{p-1} + qC_q T^{q-1} + rC_r T^{r-1} + \dots + tC_t T^{t-1}, \\ A = S^{(2)} = p(p-1)C_p T^{p-2} + q(q-1)C_q T^{q-2} \\ \quad + r(r-1)C_r T^{r-2} + \dots + t(t-1)C_t T^{t-2} \\ \vdots \\ S^{(i)} = \frac{p!}{(p-i)!} C_p T^{p-i} + \frac{q!}{(q-i)!} C_q T^{q-i} \\ \quad + \frac{r!}{(r-i)!} C_r T^{r-i} + \dots + \frac{t!}{(t-i)!} C_t T^{t-i} \\ \vdots \\ S^{(t)} = t! C_t \end{array} \right. \quad (2-41)$$

$$\text{式中, } \frac{j!}{(j-i)!} = \begin{cases} \frac{j!}{(j-i)!} & (j \geq i) \\ 0 & (j < i) \end{cases}$$

式 (2-40) 与式 (2-41) 共有 $(t+1)$ 个方程, 如果在 $T_0 = 0$ 处有 m 个非零导数值, 例如 $S_0^{(k)} \neq 0$, 则式 (2-41) 中的 $S^{(k)}$ 公式, 除 $i = k$ 项外, 等式右边各项均为零, 只剩下

$$S_0^{(k)} = k! C_k$$

由此可求得待定系数

$$C_k = S_0^{(k)} / k!$$

因为有 $T_0 = 0$ 处的 m 个非零导数值, 可求得 m 个 C_k , 其余还有 $N = (t+1) - m$ 个未知的待定系数, 须利用 $T_k = 1$ 处的各阶导数指定值加以确定。于是, 式 (2-40) 可改写成

$$C_p T^p + C_q T^q + C_r T^r + \dots + C_t T^t = S - \sum_{k=1}^m C_k T^k$$

在选定 $T_k = 1$ 处各非零导数值后, 可写出如下矢量方程

$$[A_{ij}] \{C_j\} = \left\{ S_0^{(i)} - \sum_{k=1}^m \frac{k!}{(k-i)!} C_k \right\} \quad (2-42)$$

式中, 按式 (2-41) 中的定义, $A_{ij} = \frac{j!}{(j-i)!}$, i 为对应于式

以此为例，对于 C_p ，有

$$C_p = \frac{1}{\Delta}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\ 0 & q & & r & & s & & \dots \\ 0 & q(q-1) & & r(r-1) & & s(s-1) & & \dots \\ 0 & q(q-1)(q-2) & & r(r-1)(r-2) & & s(s-1)(s-2) & & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

展开后可以得到这种特殊端点条件下的多项式系数公式，为

$$\begin{cases} C_p = \frac{qrs\dots}{(q-p)(r-p)(s-p)\dots} \\ C_q = \frac{qrs\dots}{(p-q)(r-q)(s-q)\dots} \\ C_r = \frac{pqs\dots}{(p-r)(q-r)(s-r)\dots} \\ C_s = \frac{pqr\dots}{(p-s)(q-s)(r-s)\dots} \end{cases} \quad (2-44)$$

这些系数公式的规律是：对于系数 C_i 的下角标“ i ”，在分子中总是不出现，在分母的各因子中，总是其第二项。这些系数公式在计算和使用时十分方便。

除了上述标准的端点连续条件之外，在实际中常常还要求对某些特定时刻的某些运动性能进行局部控制。现以下述实例来说明这个问题。

〔例题〕 已知 $S_0 = S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = S_0^{(3)} = 0$ ， $S_1 = 1$ ， $S_1^{(1)} = S_1^{(2)} = S_1^{(3)} = 0$ ，试设计一多项式曲线满足 $V_m = S_m^{(1)} \leq 1.85$ 。

解：首先利用标准多项式曲线来进行试算。这里有三个初始导数值为零，即 $p-1=3$ ，故 $p=4$ ， $s=2p-1=7$ ，所以应为(4-5-6-7)多项式曲线，

$$S = C_4 T^4 + C_5 T^5 + C_6 T^6 + C_7 T^7$$

利用系数公式(2-44)得：

$$\begin{cases} C_4 = \frac{7 \times 6 \times 5}{(7-4)(6-4)(5-4)} = 35 \\ C_5 = \frac{7 \times 6 \times 4}{(7-5)(6-5)(4-5)} = -84 \\ C_6 = \frac{7 \times 5 \times 4}{(7-6)(5-6)(4-6)} = 70 \\ C_7 = \frac{6 \times 5 \times 4}{(6-7)(5-7)(4-7)} = -20 \end{cases}$$

这样，按端点连续条件的运动规律方程为

$$S = 35T^4 - 84T^5 + 70T^6 - 20T^7$$

$$V = 140T^3 - 420T^4 + 420T^5 - 140T^6$$

$$A = 420T^2 - 1680T^3 + 2100T^4 - 840T^5$$

图2-19上的实线给出了这一运动规律的曲线，但它的速度最大值为2.185，不能满足设计要求。为了把 $T = 0.5$ 处的这一速度峰值降低到设计要求的范围内，需引入如下两个局部控制条件

$$\begin{cases} S_{0.5}^{(1)} = V_{0.5} = 1.85 \\ S_{0.5}^{(2)} = A_{0.5} = 0 \end{cases}$$

多项式函数则应扩大成 (4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9) 多项式形式

$$S = C_4 T^4 + C_5 T^5 + C_6 T^6 + C_7 T^7 + C_8 T^8 + C_9 T^9$$

式中的这6个未知系数，不能用式(2-44)来计算了，而应利用 $T = T_1 = 1$ 处的4个条件，加上两个局部控制条件，建立线性方程组求解。最后的结果如图2-19上的虚线所示， V_m 降低到1.85，符合了设计要求；当然， A_m 有所增加。

如果认为 $T = 0.75$ 处的 A_m 过大，不能满足弹簧力封闭结构的要求，可以再加上两个局部控制条件

$$\begin{cases} S_{0.75}^{(2)} = A_{0.75} = -6.0 \\ S_{0.75}^{(3)} = J_{0.75} = 0 \end{cases}$$

则多项式函数扩大成11次多项式函数

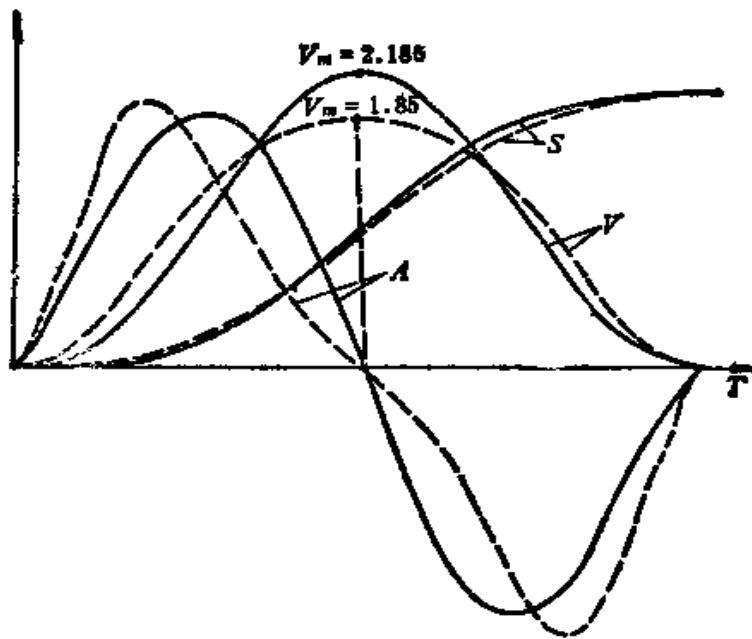


图2-19 标准7次和特殊9次多项式曲线

$$S = C_1 T^4 + C_2 T^5 + C_3 T^6 + C_7 T^7 + C_8 T^8 \\ + C_9 T^9 + C_{10} T^{10} + C_{11} T^{11}$$

按上述解法，可得到同时满足两组局部控制条件的11次多项式曲线。

如果要求设计非对称的多项式曲线，可取幂次数的间隔大于2，例如采用(4-6-8-10)、(4-7-10-13)、(4-8-12-16)、…等多项式曲线。间隔越大，非对称性越强，高阶导数越光滑，但低阶导数的变化幅值也相应增加。图2-20给出了非对称多项式曲线的变化情况。

多重动力凸轮曲线用的多项式方程，除了端点条件外，还应考虑 V_m 最小或残留振动较小等条件。伯扎克(Berzak)与弗鲁德斯坦根据不同条件，给出了下列5条凸轮曲线的多项式方程：

A曲线——考虑运动规律为对称的，有

$$S = 7T^3 - 21T^5 + 21T^7 - 6T^9$$

B曲线——满足 $V_m = 1.929$ ，在这类多项式曲线中 V_m 处于最小值，有

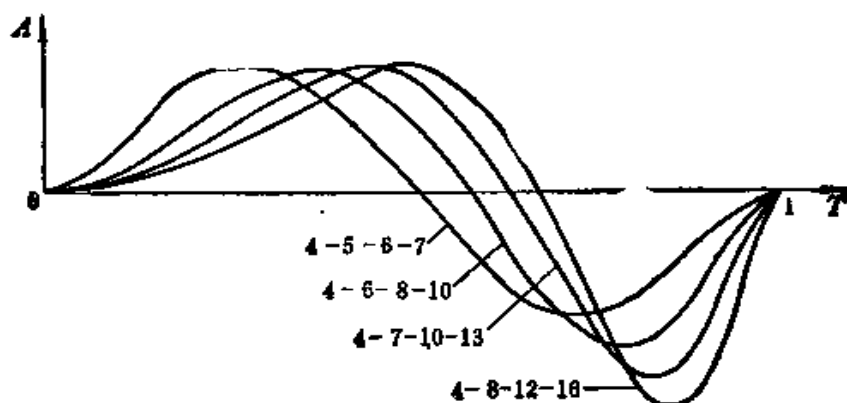


图2-20 非对称多项式曲线的变化

$$S = 5.367T^3 - 11.200T^4 + 7.934T^5 - 1.100T^7$$

C 曲线——考虑在 $0.3226 < \tau < 0.2778$ 范围内残留振动为最小，其中 $\tau = T/t_n$ ， T_n 为从动系统自然振动的周期，则有

$$S = 8.75T^3 - 31.5T^5 + 35T^6 - 11.25T^7$$

D 曲线——考虑对称，而且在 $\tau = 0.3509$ 时没有残留振动，则有

$$S = 12.1T^3 - 25.5T^4 + 24.9T^5 - 14.7T^6 + 4.2T^7$$

E 曲线——考虑对称，而且在 $\tau = 0.3252$ 时没有残留振动，则有

$$S = 5.35T^3 + 8.20T^4 - 35.74T^5 + 32.46T^6 - 9.27T^7$$

这五条多项式曲线的运动学与动力学特性各有所长。B 与 D 曲线的 V_n 较小；D 曲线的 $A_n = 5.6$ ，为其中最小者；E 曲线的 J_n 较小，为 41；C 曲线与 E 曲线的残留振动较小。

多项式曲线亦可构成单停留曲线，端点条件为 $S(0) = V(0) = A(0) = V(1) = J(1) = 0$ ， $S(1) = 1$ ， $A(1)$ 任意，则有

$$S = \frac{20}{3}T^3 - \frac{25}{3}T^4 + \frac{8}{3}T^5$$

多项式运动规律的均方根值很容易从它的表达式求得。例如，

$$S = \sum_i C_i T^i \quad (i = p, q, r, s, \dots, t)$$

则
$$A = \sum_i i(i-1)C_i T^{i-2}$$

和
$$A^2 = \sum_i \sum_j i(i-1)C_i j(j-1)C_j T^{i+j-2},$$

$$(i, j = p, q, r, s, \dots, t)$$

因为加速度的均方根按定义有

$$A_{rms} = \sqrt{\int_0^1 A^2 dT}$$

所以，可以得到任何多项式运动规律的加速度均方根值，为

$$A_{rms} = \sum_i \sum_j \frac{i(i-1)C_i j(j-1)C_j}{i+j-3} \quad (2-45)$$

$$(i, j = p, q, r, s, \dots, t)$$

标准多项式与特殊多项式运动规律的计算已编出计算程序，只需给出端点条件，或其它特殊要求的局部控制条件，便可很方便地算出多项式曲线及其特性值。

二、富氏级数运动规律

设计运动曲线时，除了前面提到的应使最大加速度 A_m 等特性值尽可能小些外，高次谐量的多少对于高速机构共振的产生有不可忽视的重要影响。例如，等加速度曲线虽然 $A_m = 4.00$ ，为最小者，但把 $A(T)$ 展开成富氏级数时，有无穷多项，即存在着无穷多个高次谐量，其中有些谐量对应的激振频率可能与凸轮机构的共振频率相同，因而产生不能容忍的振动。特别是在凸轮机构运转速度变化范围较大时，就一定会发生一个或更多个谐波和共振频率重合。摆线运动规律只有一个谐波，产生共振的可能性最小；但 $A_m = 6.28$ ，比等加速度曲线的 A_m 大 57%，同样会因动载过大而产生振动。因此，最优的曲线应是 A_m 不高，而谐波数又较少。利用有限三角级数设计运动规律，就具备了控制谐量数的可能性。

盖特曼提出的1—3简谐曲线就是根据等加速度曲线按富氏级数展开, 并保留前两项时得到的, 其运动方程为:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = T - \frac{15}{32\pi} \sin 2\pi T - \frac{1}{96\pi} \sin 6\pi T \\ V = 1 - \frac{15}{16} \cos 2\pi T - \frac{1}{16} \cos 6\pi T \\ A = \frac{15}{8} \pi \sin 2\pi T + \frac{3\pi}{8} \sin 6\pi T \\ J = \frac{15\pi^2}{4} \cos 2\pi T + \frac{9\pi^2}{4} \cos 6\pi T \end{array} \right. \quad (2-46)$$

如果保留富氏级数的前三项时, 便得到盖特曼1—3—5简谐曲线, 其运动方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} S = T - \frac{135}{256\pi} \sin 2\pi T + \frac{5}{1536\pi} \sin 6\pi T + \frac{9}{2560\pi} \sin 10\pi T \\ V = 1 - \frac{135}{128} \cos 2\pi T + \frac{5}{256} \cos 6\pi T + \frac{9}{256} \cos 10\pi T \\ A = \frac{135\pi}{64} \sin 2\pi T - \frac{15\pi}{128} \sin 6\pi T - \frac{45\pi}{128} \sin 10\pi T \\ J = \frac{135\pi^2}{32} \cos 2\pi T - \frac{45\pi^2}{64} \cos 6\pi T - \frac{225\pi^2}{64} \cos 10\pi T \end{array} \right. \quad (2-47)$$

这两种运动规律的加速度曲线如图2-21所示, 其形状与修正梯形曲线相近。盖特曼1—3曲线的 $A_n = 5.13$, 介于常用的修正正弦和修正梯形之间, 适用于中速轻载场合。盖特曼1—3—5曲线的 $A_n = 6.74$, 大于修正正弦等曲线, 但这一曲线具有在全区间内 J 连续, 端点的 J 值为零的特点, 在高速机构有一定的实用价值。

与上述曲线类似, 弗鲁德斯坦根据动力加速度因子(即凸轮加速度与机构输出动力学响应的乘积)为最小, 设计出F1—3简谐曲线, 其运动方程为

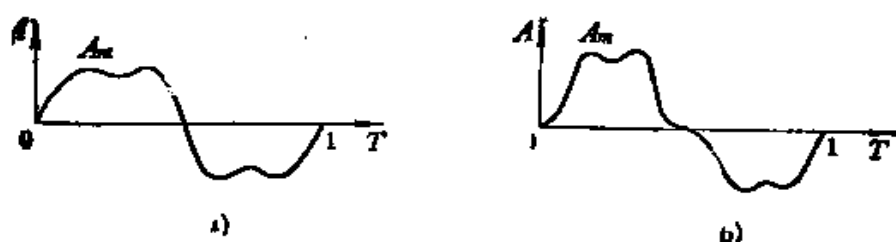


图2-21 盖特曼 (Gutman) 曲线

a) 1-3简谐 b) 1-3-5简谐

$$\left\{ \begin{array}{l} S = T - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{27}{28} \sin 2\pi T + \frac{1}{84} \sin 6\pi T \right) \\ V = 1 - \frac{27}{28} \cos 2\pi T - \frac{1}{28} \cos 6\pi T \\ A = 2\pi \left(\frac{27}{28} \sin 2\pi T + \frac{3}{28} \sin 6\pi T \right) \\ J = 4\pi^2 \left(\frac{27}{28} \cos 2\pi T + \frac{9}{28} \cos 6\pi T \right) \end{array} \right. \quad (2-48)$$

这一曲线的 $A_n = 5.39$ ，低于修正正弦曲线。

弗鲁德斯坦的 1—3—5 简谐曲线运动方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} S = T - \frac{m}{2\pi} \left(\sin 2\pi T + \frac{1}{54} \sin 6\pi T + \frac{1}{1250} \sin 10\pi T \right) \\ V = 1 - m \left(\cos 2\pi T + \frac{1}{18} \cos 6\pi T + \frac{1}{250} \cos 10\pi T \right) \\ A = 2\pi m \left(\sin 2\pi T + \frac{1}{6} \sin 6\pi T + \frac{1}{50} \sin 10\pi T \right) \\ J = 4\pi^2 m \left(\cos 2\pi T + \frac{1}{2} \cos 2\pi T + \frac{1}{10} \cos 10\pi T \right) \end{array} \right. \quad (2-49)$$

其中， $m = \frac{1125}{1192}$ 。

F 1—3—5 简谐曲线的 $A_n = 5.06$ ，比 F 1—3 曲线要低一些，适用于中速机构。

推广到一般情况，位移的三角级数表达式为

$$S = \sum_{i=0}^m (\alpha_i \cos i\pi T + \beta_i \sin i\pi T) \quad (2-50)$$

式中， m 为选取的有限项数； α_i 、 β_i 为待定系数。

待定系数总数为 $2m$ 个，一部分由给定的 P 个约束条件确定，如在规定时刻的 S 、 V 、 A 等。约束条件数 P 必定少于系数总数 $2m$ ，其余的 $q = 2m - P$ 个系数，可由优化准则确定。优化目标函数 F_i 通常被定义成 S 、 V 、 A 等的误差函数，每个误差函数对应使用加权因子 g_i ，最终组合成统一的误差函数

$$F = \sum_{i=1}^q g_i F_i \quad (2-51)$$

为了使 F 为最小，令 F 对 q 个系数的偏微分为零，得到 q 个线性方程，与约束条件一起，可决定方程(2-50)的全部系数 α_i 与 β_i 。有时，为了计算简便，可取 α_i 或 β_i 为零。

m 的选取最好使末级谐波最高频率低于第一个危险结构频率，这样的有限谐波数目的曲线就可以避免共振的产生。一般情况下，三角级数曲线的设计原则是，在保证误差函数最小的前提下，兼顾 A_n 尽可能低。

〔例题〕设计一有限谐波凸轮曲线，使某自动机最高谐波阶数以上的谐波全都等于零。已知自动机的运转角速度为 $\omega_n = 12\pi$ (rad/s)，凸轮机构共振频率为 $\omega_r = 60\pi$ (rad/s)， $\theta = \frac{\pi}{2} \sim \pi$ ，

为升程； $\theta = \pi \sim \frac{3\pi}{2}$ ，为回程。

解：最高谐波的谐波阶数为

$$n = \frac{\omega_n}{\omega_r} = \frac{60\pi}{12\pi} = 5$$

采用 β_i 为零的方程(2-50)，最高阶数 $m = 5$ ，则有 $S =$

$$\sum_{i=0}^5 a_i \cos i \pi T = \sum_{i=0}^5 a_i \cos i \theta \quad \text{其中, } \theta = \pi T.$$

已知约束条件为:

(1) $\theta < \frac{\pi}{2}$ 与 $\theta > \frac{3}{2}\pi$ 时, $S \rightarrow 0$ 。由于谐波数只取 5 个, 因此实际位移不可能为零, 但应当是工程上允许的最小值。

(2) $\theta = \pi$ 时, $S = 1$ (总升程)。

按条件 (1) 可以用误差的最小二乘准则描述, 寻求停止区的平方误差最小值可表示成

$$\min F = \min \left[\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{i=0}^5 a_i \cos i \theta \right)^2 \right] d\theta$$

按条件 (2), 有

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = 1$$

因为设计要求凸轮曲线为单停留型, 即 $\theta = \pi$ 时不停留, 加速度在该处达到最大值 A_m , 其表达式为

$$A_m = a_1 - 4a_2 + 9a_3 - 16a_4 + 25a_5$$

将条件 (2) 与 A_m 的关系代入条件 (1) 的关系式, 得优化目标函数为

$$F = f(a_2, a_3, a_4, a_5)$$

令其偏导数等于零, 使误差函数减至最小值, 于是有

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_4} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_5} = 0$$

求解由上述四个线性方程构成的方程组, 即可求出 a_2, a_3, a_4, a_5 , 再代入前面的条件 (2) 与 A_m , 即可求出全部系数, 其计算结果如下:

$$a_0 = -0.0325A_m + 0.317$$

$$a_1 = 0.0423A_m - 0.509$$

$$a_2 = 0.0028A_m + 0.240$$

$$a_3 = -0.0317A_m - 0.019$$

$$a_1 = 0.0289A_m - 0.0546$$

$$a_2 = -0.0113A_m + 0.0304$$

将上述系数代入上述平方误差关系式，有

$$F = 10^{-6}(0.3047A_m^2 + 2.101A_m + 3.627)$$

这一误差函数如图 2-22 a 所示，为抛物线函数。实际应用范围只在实线所示的 I 区，对区域 II 是不感兴趣的，因为误差和加速度两者都增加。区域 III 的误差过大， $\theta = \pi$ 处 $A \rightarrow A_m$ 的条件也不满足，所以没有实用意义。设计者应权衡最大加速度与停止段的平方误差这两个矛盾因素，合理选定 A_m 或 F 值。 A_m 选定后， a_i 即可全部算出。图 2-22 b 给出了位移 S 与加速度 A 的曲线。图上虚线同时给出摆线运动规律的相应曲线，以便与有限谐

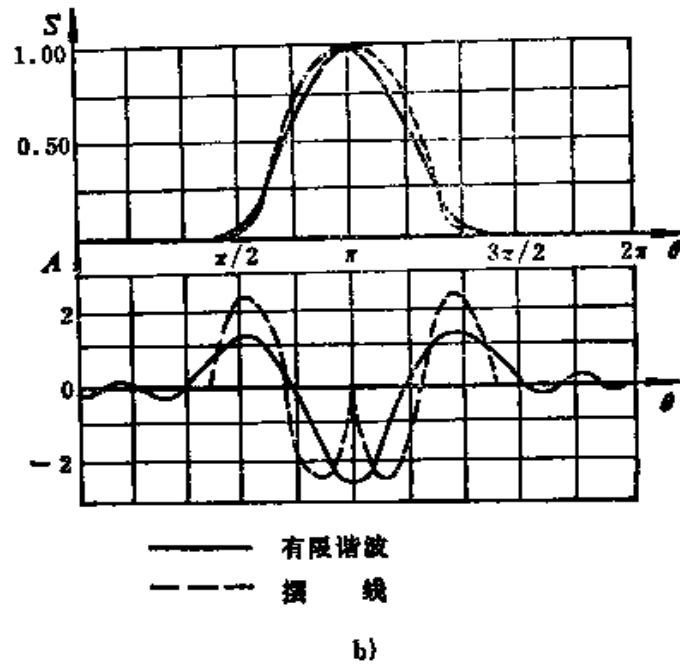
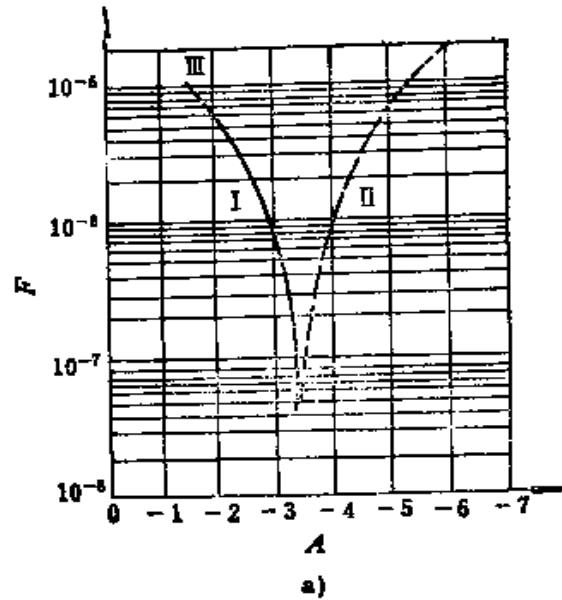


图 2-22 有限谐波凸轮曲线
a) A_m 与 F 关系 b) S 与 A 曲线

波曲线比较。

由图可见，停止段的误差不可能为零，只能通过提高 A_n 使之变小，这是富氏级数截取有限项后所固有的误差。例如，对于 $h = 80\text{mm}$ 的凸轮，若取 $a_n = 89\text{m/s}^2$ 时， $\sqrt{F} = 0.8\text{mm}$ ；但取 $a_n = 123\text{m/s}^2$ 时，则 $\sqrt{F} = 0.07\text{mm}$ 。因此，前者虽然最大加速度较低（与摆线相等），但停止时的误差较大；后者牺牲了加速度特性，以求得停止误差最小。总之，二者不可能同时达到最小，只能根据具体情况来合理选定。

三角级数曲线还可以很方便地用于设计过渡曲线。例如，图 2-23 上有两段等速位移直线，其斜率分别为 V_1 与 V_2 ，在 T_1 到 T_2 区间，需设计一过渡曲线，把这段等速直线光滑连接起来。利用三角级数可写出这段过渡曲线的位移方程为

$$S = S_1 + (T - T_1)V_c - P \sum_{j=1}^N a_j \frac{T_2 - T_1}{2\pi j} \sin \left(2\pi j \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \right) - Q \sum_{k=1}^M a_k \frac{T_2 - T_1}{(2k - 1)\pi} \sin \left[(2k - 1)\pi \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \right] \quad (2-52)$$

式中， V_c 为过渡曲线弦的斜率， $P = V_c - \frac{V_1 + V_2}{2}$ ， $Q = \frac{V_2 - V_1}{2}$ ，

$\sum_{j=1}^N a_j = 1$ ， $\sum_{k=1}^M a_k = 1$ ， N 为富氏偶级数的项数， M 为富氏奇级数的项数。

三、其他多项式函数运动规律

用前述简单的幂函数多项式来构造满足各种要求的运动规律，虽然具有简便、灵活和对数学知识要求不高等优点，但随着控制条件的增加，阶次增高，运算也是比较困难的。因为阶次越

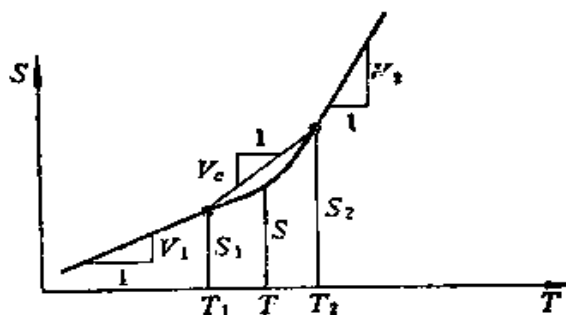


图 2-23 三角级数过渡曲线

高，为确定系数所要求解的线性方程组的阶次也越高，容易出现病态，计算时间较长。采用正交多项式来构造运动曲线，可以避免上述缺点。位移的正交多项式表达式为

$$S(T) = \sum_{i=0}^m a_i P_i(T) \quad (2-53)$$

式中， a_i 为系数， $P_i(T)$ 为正交多项式，具有如下正交性质：

$$j \neq k \text{ 时, } \gamma_{jk} = \sum_{i=1}^N P_j(T_i) P_k(T_i) = 0$$

$$j = k \text{ 时, } \gamma_{jk} = \sum_{i=1}^N [P_j(T_i)]^2 \neq 0$$

其中， N 为满足多项式是正交的各 T_1, T_2, \dots, T_N 值的数目。

最常用的正交多项式是密切多项式。当阶次不同时，有不同的密切多项式基函数。例如，在区间 $[0, T_h]$ 内，能进行三阶导数插值的三阶密切多项式为

$$S(T) = H_{01}^{(3)}(T) S(0) + H_{02}^{(3)}(T) S(T_h) + H_{11}^{(3)}(T) V(0) \\ + H_{12}^{(3)}(T) V(T_h) + H_{21}^{(3)}(T) A(0) + H_{22}^{(3)}(T) A(T_h) \\ + H_{31}^{(3)}(T) J(0) + H_{32}^{(3)}(T) J(T_h) \quad (2-54)$$

式中，各基函数的表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} H_{01}^{(3)}(T) &= \frac{1}{T_h^7} (T_h^7 - 35T_h^5 T^2 + 84T_h^3 T^4 - 70T_h T^6 + 20T^7) \\ H_{02}^{(3)}(T) &= \frac{1}{T_h^7} (35T_h^5 T^2 - 84T_h^3 T^4 + 70T_h T^6 - 20T^7) \\ H_{11}^{(3)}(T) &= \frac{1}{T_h^6} (T_h^6 T - 20T_h^4 T^3 + 45T_h^2 T^5 - 36T_h T^6 + 10T^7) \\ H_{12}^{(3)}(T) &= \frac{1}{T_h^6} (-15T_h^4 T^3 + 39T_h^2 T^5 - 34T_h T^6 + 10T^7) \\ H_{21}^{(3)}(T) &= \frac{1}{2T_h^5} (T_h^5 T^3 - 10T_h^3 T^4 + 20T_h T^5 - 15T_h T^6 + 4T^7) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} H_{22}^{(8)}(T) &= \frac{1}{2T_1^2} (5T_1^3 T^4 - 14T_1^2 T^5 + 13T_1 T^6 - 4T^7) \\ H_{31}^{(3)}(T) &= \frac{1}{6T_1^4} (T_1^4 T^3 - 4T_1^3 T^4 + 6T_1^2 T^5 - 4T_1 T^6 + T^7) \\ H_{32}^{(3)}(T) &= \frac{1}{6T_1^4} (-T_1^4 T^4 + 3T_1^3 T^5 - 3T_1 T^6 + T^7) \end{aligned} \right.$$

假设 $T_0 = 0$ 时, $S(0) = 0$, $V(0) = 0$, $A(0) = 0$,
 $J(0) = 0$; $T_1 = 1$ 时, $S(T_1) = 1$, $V(T_1) = 0$, $A(T_1) = 0$,
 $J(T_1) = 0$, 则式 (2-54) 变成

$$S(T) = H_{02}^{(3)}(T) S(T_1) = 35T^4 - 84T^5 + 70T^6 - 20T^7$$

这一结果完全与由式 (2-43) 求出的标准幂函数多项式一样, 而计算要简便得多。

第五节 指数函数运动规律

尽管采用高次多项式曲线能保证端点高阶导数连续, 但次数过高, 将给运算带来很大困难。

利用以 e 为底的指数函数微分即其自身的性质, 由它构成运动曲线时, 无穷次微分是可能的, 它的 n 次微分都是连续的。例如, V 可用下式给出

$$V = k \exp\left[-\frac{1}{T(1-T)}\right] \quad (2-55)$$

当 $T = 0$ 和 $T = 1$ 时, V 对 T 的无限次微分值均为零。上式中 k 为常数, V 对 T 逐次微分, 可得 A 、 J 等。位移 S 可由 V 的积分求得。如果取 $T = 1$ 时, $S = 1$, 则有

$$S = \frac{\int_0^T \exp\left[1 - \frac{1}{\tau(1-\tau)}\right] d\tau}{\int_0^1 \exp\left[-\frac{1}{\tau(1-\tau)}\right] d\tau} = \frac{1}{B} \int_0^T \exp\left[-\frac{1}{\tau(1-\tau)}\right] d\tau \quad (2-56)$$

其中,

$$B = \frac{1}{k} = \int_0^1 \exp\left[-\frac{1}{\tau(1-\tau)}\right] d\tau = 0.0070298584$$

指数函数曲线如图2-24所示, 其 A_m 与 V_m 值较大, 但曲线 S 的上升段非常缓慢, 在 $T = 0.15$ 时, 位移仅上升 $S = 0.00101$ 。如果可以把0.1%以内的位移看作为零, 则 T 两端各15%以内可以忽略不计。因而, 如果本来是按 $\theta_1 = 70^\circ$ 来设计的凸轮曲线, 在位移误差允许小于0.1%的情况下, 采用指数曲线时, 可把 θ_1 扩大到 100° 。由式(2-1)知, 实际加速度与 θ_1^2 (或 t_1^2)成反比, 尽管 $A_m = 11.04$, 但实际加速度因 θ_1^2 扩大而降低 $\left(\frac{7}{10}\right)^2$ 倍, 相当于 $A_m = 5.51$ 。此值与修正正弦曲线相近。但是, 因为两端无限次导数为零, 尤其适用于要求停留时残留振动小的高速凸轮机构。

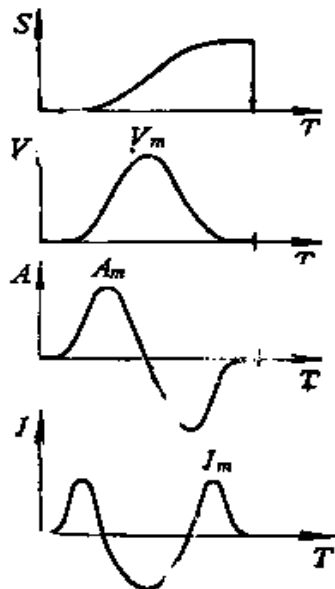


图2-24 指数函数曲线

第六节 凸轮机构运动规律的选用

对自动机械凸轮机构运动曲线的研究, 随着数学与计算机的发展而日益深入和完善, 获得了如前所述的众多凸轮曲线。它们的特性值综合在表2-4中, 供选用时参考。

对于上表所列各种曲线的选用原则可以归纳如下:

- (1) 低速机构应选 V_m 较小的曲线, J_m 值允许较大。
- (2) 中速重载情况, 应选 V_m 与 $(AV)_m$ 较小的曲线, 以改善受力条件。
- (3) 中速轻载情况, 应选用 A_m 与 J_m 较小的曲线, 以保证从动件运转时的工作精度。
- (4) 中速几何封闭型凸轮机构, 应选 τ_m 较小的曲线, 使横

表2-4 凸轮曲线的特性值

№	曲线名称	V_m	A_m	$(AV)_m$	A_{rms}	J_m	τ_m
1	等速度	1.0	∞	—	—	—	—
2	等加速度	2.0	4.0	8.0	4.0	∞	—
3	简谐(余弦)	1.571	4.935	3.855	3.371	∞	23.82
4	摆线(正弦)	2.0	6.283	8.162	4.443	39.48	44.14
5	修正等速	1.275	8.013	5.671	4.001	201.4	63.3
6	修正梯形	2.0	4.888	8.048	4.232	61.43	26.71
7	修正正弦	1.76	5.528	5.435	3.908	69.47	34.17
8	通用优化 I	1.307	6.873	7.561	4.01	122.1	51.63
9	通用优化 II	1.276	6.979	7.472	3.985	112.6	49.19
10	通用优化 III	1.541	5.309	6.686	3.795	64.64	31.19
11	优化修正等速 I	1.281	7.883	4.549	3.693	199.1	44.70
12	优化修正等速 II	1.288	7.761	4.423	3.683	186.0	44.2
13	优化修正等速 III	1.301	7.431	4.432	3.607	201.3	40.92
14	优化修正梯形	1.997	4.791	8.055	4.241	66.01	25.66
15	非对称摆线	2.0	7.854	10.20	4.534	61.69	69.39
16	斜修正梯形	2.0	6.110	9.935	4.289	95.98	40.69
17	梯形摆线	2.182	6.170	10.79	4.769	77.54	42.81
18	单停留摆线	1.76	5.528	6.318	3.843	34.73	34.17
19	单停留修正梯形	1.917	4.685	7.392	3.963	58.87	24.54
20	单停留修正正弦	1.66	5.215	4.836	3.625	65.53	30.40
21	单停留梯形摆线	1.76	4.30	6.23	3.75	54.04	29.89
22	无停留修正梯形	1.718	4.199	6.032	3.555	—	17.63
23	无停留修正等速	1.222	7.678	4.686	3.574	—	53.86
24	3-4-5多项式	1.875	5.773	6.694	4.140	60.0	36.72
25	4-5-6-7多项式	2.188	7.511	10.75	5.045	52.5	64.25
26	5-6-7-8-9多项式	2.461	9.372	15.43	5.937	78.75	101.5
27	6-7-8-9-10-11多项式	2.708	11.26	20.62	6.798	108.2	148.1
28	4-6-8-10多项式	2.281	9.239	13.36	5.378	67.12	96.36
29	Gutman1-3	2.0	6.101	7.994	4.248	59.22	32.2
30	Gutman1-3-5	2.0	6.695	10.24	4.258	70.53	63.68
31	Freudenstein1-3	2.0	5.385	7.917	4.311	50.76	31.04
32	Freudenstein1-3-5	2.0	5.06	7.754	4.252	59.62	59.62
33	指数函数	2.605	11.04	18.19	6.656	82.16	137.7

越冲击产生的噪声与磨损尽可能减少。

(5) 对工作精度要求较高时, 为了减少动载扭曲, 应选

A_{max} 较小的曲线。

(6) 高速轻载凸轮机构，一般应考虑 J_n 与 Q_n 较小的曲线。

(7) 结构固有频率较低的凸轮机构，选用曲线时要使最高阶谐波频率低于固有频率。

(8) 凸轮轮廓进行动力学综合时，为了轮廓光滑，要选 Q_n 较小的曲线。

第三章 平面凸轮机构的运动学分析

平面凸轮机构是最常用的凸轮机构。它的运动学分析和设计计算最基本的内容是凸轮轮廓曲线及其压力角、曲率半径的计算。求解凸轮轮廓线的传统方法是图解法。近年来，一方面由于凸轮机构在高速度、高精度方面的要求越来越高；另一方面由于计算机与数控机床的广泛应用，图解法已逐渐被解析法所代替。目前，一般的解析法大多是利用矢量（更多的是复极矢量）法求出各种类型的平面凸轮机构的计算公式。由于凸轮机构种类繁多，所涉及的参数量大，所以公式的种类也多，而且比较繁杂。本章综合了现有的各种解析法的长处，建立了通用的平面凸轮机构的几何模型，推导出了一套通用计算公式，使计算程序大为简化。该方法有两个显著的特点：

（1）运用平面曲线啮合原理，考察从动件曲线与凸轮廓线接触点处的几何关系，从而直接求出接触点的轨迹——凸轮廓线及其压力角和曲率半径。这就抓住了各类平面凸轮机构高副啮合的共性和本质。在下一章中，我们将会看到，这种方法的基本思想还可以方便地推广到空间凸轮机构，从而使二维、三维凸轮的设计计算的理论、方法乃至计算公式的形式都基本统一起来，因而，也使难度很大的空间凸轮的分析计算比较容易理解和掌握。

（2）通用性强、适应面广。用该方法所得出的通用公式不但适用于常用的各类基本平面凸轮机构，也适用于从动件作平面运动、凸轮作非匀速运动等特殊情况。

本章所用的数学工具是复极矢量法（参见附录 I）。

第一节 平面啮合基本原理

若平面曲线 I 和 II 分别在它们所处的同一平面上运动，在运

动过程中，I 与 II 在每个瞬时都保持相切接触。这样的一对曲线 I、II 称为平面共轭曲线（简称共轭曲线）。一般地说，共轭曲线在接触点既有相对滚动，又有相对滑动。各种平面凸轮机构、轴线相互平行的齿轮机构等平面高副机构的运动都可以抽象为一对平面共轭曲线的啮合运动。

一、一对定轴转动的平面共轭曲线

作定轴转动的一对共轭曲线的运动，如图3-1 a 所示，共轭曲线 I、II 分别绕 o_1 、 o_2 回转。选定下述三个坐标系：

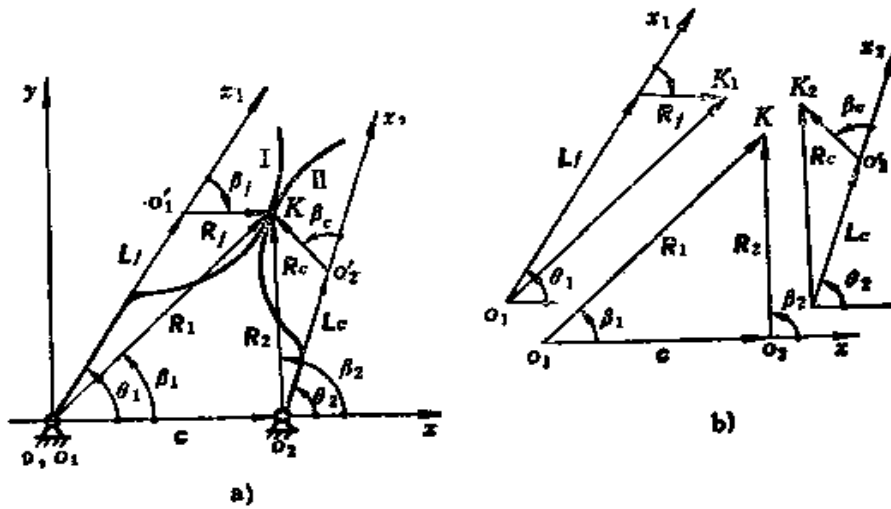


图3-1 定轴转动的一对共轭曲线

固定坐标系 xoy ：坐标原点 o 与曲线 I 的回转中心 o_1 重合， x 轴与中心线 o_1o_2 重合。

动坐标系 $x_1o_1y_1$ 与 $x_2o_2y_2$ ：它们分别以回转中心 o_1 、 o_2 为原点，且分别与曲线 I、II 固接。图中， o_1' 、 o_2' 分别为曲线 I、II 的几何基准点。通常取曲线的形心或其他能够使曲线表达式简单明了的点作为基准点。 x_1 、 x_2 轴分别与 o_1o_1' 、 o_2o_2' 重合，基准点 o_1' 、 o_2' 在 x_1 、 x_2 轴上的位置是固定的。

设在某个时刻 t ，曲线 I 上（即在动坐标系 $x_1o_1y_1$ 中）的点 K_1 与曲线 II 上（即动坐标系 $x_2o_2y_2$ 中）的点 K_2 相重合。在固定坐标系中与 K_1 、 K_2 相重合的点为 K 。 K 称为 t 时刻的啮合点， K_1 、

K_2 称为 t 时刻的一对接触点。图3-1中的 θ_1 、 θ_2 分别为 x_1 、 x_2 轴与 x 轴之间的夹角（都以 x 轴为始边）。它们分别表示曲线 I 与 II 相对固定坐标系 xoy 转动的角位移。

显然，在啮合运动过程中， K_1 的轨迹就是曲线 I； K_2 的轨迹就是曲线 II。啮合点 K 在固定坐标系 xoy 中形成的轨迹称为啮合线。为了方便起见，曲线 I、II 的表达式分别以基准点 o'_1 、 o'_2 为原点，即分别以 $R_f = \overrightarrow{o'_1 K_1}$ 、 $R_c = \overrightarrow{o'_2 K_2}$ 表示曲线 I、II 的矢量函数。为了建立一对接触点与啮合点之间的关系，引入下列不同坐标系中的矢量：

(1) 动坐标系 $x_1 o_1 y_1$ 中的矢量

$$\left. \begin{aligned} L_f &= \overrightarrow{o_1 o'_1} = l_f \text{ (} o'_1 \text{ 的位置矢量)} \\ R_f &= \overrightarrow{o'_1 K_1} = r_f e^{j\beta_f} \text{ (I 的矢量函数)} \end{aligned} \right\} (3-1 a)$$

(2) 动坐标系 $x_2 o_2 y_2$ 中的矢量

$$\left. \begin{aligned} L_c &= \overrightarrow{o_2 o'_2} = l_c \text{ (} o'_2 \text{ 的位置矢量)} \\ R_c &= \overrightarrow{o'_2 K_2} = r_c e^{j\beta_c} \text{ (II 的矢量函数)} \end{aligned} \right\} (3-1 b)$$

(3) 固定坐标系 xoy 中的矢量

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \overrightarrow{o_1 K} = r_1 e^{j\beta_1} \text{ (} K \text{ 相对于 } o_1 \text{ 的位置矢量)} \\ R_2 &= \overrightarrow{o_2 K} = r_2 e^{j\beta_2} \text{ (} K \text{ 相对于 } o_2 \text{ 的位置矢量)} \end{aligned} \right\} (3-1 c)$$

$$C = \overrightarrow{o_1 o_2} = c \text{ (回转中心距矢量)}$$

上述各矢量的长度（模）为：

$$\left. \begin{aligned} l_f &= o_1 o'_1 \\ r_f &= o'_1 K_1 \\ l_c &= o_2 o'_2 \\ r_c &= o'_2 K_2 \\ c &= o_1 o_2 \end{aligned} \right\} (3-2)$$

在这里, l_1 、 l_2 与 c 都是常数。另外, L_1 、 L_2 、 C 三矢量分别与 x_1 、 x_2 、 x 轴重合, 方向也一定。所以, 这三个矢量是常矢量。

由于 x_1 、 x_2 轴分别与曲线 I、II 固接; 所以, θ_1 、 θ_2 实际上就是曲线 I、II 作定轴转动的运动参数。我们可以把 θ_1 、 θ_2 都表示为时间 t 的函数, 即

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_{10} + \theta_1(t) \\ \theta_2 &= \theta_{20} + \theta_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3-3a)$$

θ_{10} 、 θ_{20} 为 θ_1 、 θ_2 的初始值。通常取 $\theta_{20} = 0$ 。有时以 θ_2 (或 θ_1) 作自变量, 用函数

$$\theta_1 = \theta_{10} + \theta_1(\theta_2) \quad (3-3b)$$

来表示两曲线的相对运动关系。

曲线 I 和 II 几何形状的矢量函数 R_1 、 R_2 通常分别用 β_1 、 β_2 的一元矢量函数表示。按函数的极坐标形式, r_1 、 r_2 分别是 β_1 、 β_2 的函数, 即

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_1(\beta_1) \\ r_2 &= r_2(\beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-4a)$$

因此有

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= r_1(\beta_1)e^{j\beta_1} \\ R_2 &= r_2(\beta_2)e^{j\beta_2} \end{aligned} \right\} \quad (3-4b)$$

式 (3-4b) 是曲线方程的复极矢量形式 (参见附录 I)。 β_1 、 β_2 可以分别作为确定曲线 I 与 II 上点的几何位置的参数。有时, R_1 、 R_2 分别以 r_1 、 r_2 为自变量, 即 r_1 、 r_2 作为确定曲线上点的几何位置的参数。这时的函数表达式为

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= r_1 e^{j\beta_1(r_1)} \\ R_2 &= r_2 e^{j\beta_2(r_2)} \end{aligned} \right\} \quad (3-5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \beta_1(r_1) \\ \beta_2 &= \beta_2(r_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-5b)$$

由图 3-1b 所示矢量关系图和矢量回转变换关系 (参见附录 I) 可得

$$R_1 = (L_f + R_f)e^{j\theta_1} \quad (3-6 a)$$

$$R_2 = (L_c + R_c)e^{j\theta_2} \quad (3-6 b)$$

$$R_1 = R_2 + C \quad (3-6 c)$$

综合以上三式可得

$$R_c = [(L_f + R_f)e^{j\theta_1} - C]e^{-j\theta_2} - L_c \quad (3-7 a)$$

将式(3-1)中设定的参数代入该式又可得

$$r_c e^{j\beta_c} = [(l_f + r_f e^{j\beta_f})e^{j\theta_1} - c]e^{-j\theta_2} - l_c \quad (3-7 b)$$

式(3-7 a)或(3-7 b)表达了 R_c 矢量与 R_f 以及其他运动参数和几何参数之间的关系。设曲线Ⅱ是主动曲线,曲线Ⅰ是从动曲线。在凸轮机构中,曲线Ⅰ就是从动件参与啮合的曲线(通常是圆、直线等形状简单的曲线),而曲线Ⅱ就是凸轮轮廓曲线。在完成了初步设计之后,从动曲线的几何形状函数 R_f 、运动参数 θ_1 、 θ_2 ,几何参数 l_f 、 l_c 以及相对几何位置参数 c 都是已知的。由这些已知参数求解凸轮轮廓曲线矢量函数 R_c 是凸轮设计计算中的一个基本问题。但是,由上述已知参数并不能直接用式(3-7 a)或式(3-7 b)求出 R_c 。因为已知曲线Ⅰ的几何形状,即 R_f 的表达式,并不能确定每个时刻接触点 K_1 在曲线Ⅰ上的具体位置。因此,必须先求出 K_1 点的几何位置参数 β_f (或 r_f),才能利用式(3-7 a)或式(3-7 b)求解 R_c 。事实上,若求出了 β_f (或 r_f),则可由给定的曲线Ⅰ几何形状函数关系求出另一个参数 r_f (或 β_f)。这样,式(3-7 b)右边的参数全部为已知值,即可直接求出 R_c 。

可以通过共轭曲线的啮合关系求出接触点 K_1 的几何位置参数 β_f (或 r_f)。式(3-6)各式的两边都对 t 求导(复极矢量的求导法则参见附录 I),并考虑到 L_f 、 L_c 、 C 三矢量都是常矢量,则有

$$\dot{R}_1 = \dot{R}_f e^{j\theta_1} + j\dot{\theta}_1 R_1 \quad (3-8 a)$$

$$\dot{R}_2 = \dot{R}_c e^{j\theta_2} + j\dot{\theta}_2 R_2 \quad (3-8 b)$$

$$\dot{R}_1 = \dot{R}_2 \quad (3-8 c)$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} V_{r,1} &= \dot{R}_1 e^{j\theta_1} \\ V_{r,2} &= \dot{R}_2 e^{j\theta_2} \\ V_{c,1} &= j\dot{\theta}_1 R_1 \\ V_{c,2} &= j\dot{\theta}_2 R_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

$$\text{则} \quad \left. \begin{aligned} \dot{R}_1 &= V_{r,1} + V_{c,1} \\ \dot{R}_2 &= V_{r,2} + V_{c,2} \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

\dot{R}_1 是 K_1 在动坐标系 $x_1 o_1 y_1$ 中的速度矢量，沿着曲线 I 在 K_1 点的切线方向。 $V_{r,1} = \dot{R}_1 e^{j\theta_1}$ 是 K_1 在固定坐标系中的相对速度矢量，其方向仍为曲线 I 的切向。 $V_{c,1}$ 是 K_1 点随动坐标系转动的速度矢量，即牵连速度矢量。类似地， $V_{r,2}$ 是 K_2 点的相对速度矢量， $V_{c,2}$ 是 K_2 点随 $x_2 o_2 y_2$ 坐标系转动的牵连速度矢量。

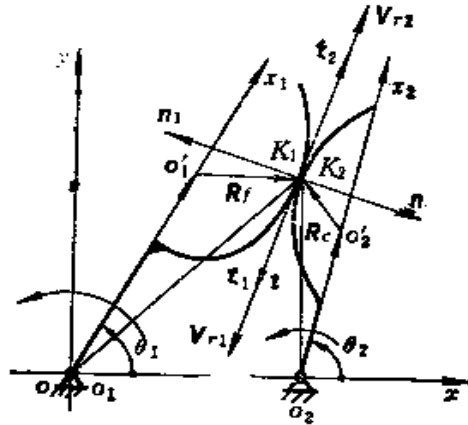


图3-2 共轭曲线在接触点的相对速度

如图3-2所示，在固定坐标系 xoy 中， K_1 、 K_2 点的相对速度矢量 $V_{r,1}$ 、 $V_{r,2}$ 与曲线 I、II 在 K_1 (K_2) 点的公切线 T 重合，即 $V_{r,1}$ 与 $V_{r,2}$ 共线。二者的差值

$$V_{12} = V_{r,1} - V_{r,2} \quad (3-11)$$

是 K_1 、 K_2 之间的相对滑动速度。它亦与 T 共线。因此， V_{12} 应与曲线 I 在 K_1 点的单位法向矢量 n_1 （或曲线 II 在 K_2 点的单位法向矢量 n_2 ）正交，即

$$V_{12} \cdot n_1 = 0 \quad (3-12)$$

式 (3-12) 中的点表示 V_{12} 与 n_1 二矢量作数积运算。该式称为共轭曲线的啮合条件。 V_{12} 与 n_1 必须是同一坐标系中的矢量。在这里，它们都处在固定坐标系 xoy 中。设在动坐标系 $x_1 o_1 y_1$ 中，曲线 I 在 K_1 点的单位法向矢量为 n_1 ，则由坐标变换关系有

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_f e^{j\theta_1} \\ n_2 &= n_c e^{j\theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

同理有

式中, n_c 为 $x_2 o_2 y_2$ 坐标系中, 曲线 II 在 K_2 的单位法向矢量。

由式(3-8 c)、(3-9)、(3-10)、(3-11)可得

$$\left. \begin{aligned} V_{12} &= V_{c2} - V_{c1} \\ \text{或} \quad V_{12} &= j\dot{\theta}_2 R_2 - j\dot{\theta}_1 R_1 \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

上式表明, 共轭曲线在一对接触点的相对滑动速度等于接触点的牵连速度之差。而牵连速度是接触点随坐标系运动的速度, 是很容易求得的。将式(3-6 b)、(3-6 c)等代入式(3-14), 即可得 V_{12} 的计算公式:

$$\left. \begin{aligned} V_{12} &= j(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) R_1 - j\dot{\theta}_2 C \\ \text{或} \quad V_{12} &= j[(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)(l_1 + r_1 e^{j\beta_1})e^{j\theta_1} - c\dot{\theta}_2] \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

由式(3-15)可知, V_{12} 可表成曲线 I 的矢量函数参数 r_1 与 β_1 的函数。

另外, 由矢量微分关系, 也可以将曲线 I 的单位法向矢量 n_1 表成 r_1 与 β_1 的函数。对曲线 I 的矢量函数 $R_1 = r_1 e^{j\beta_1}$ 求导, 可得到其上任一点 K_1 的速度矢量(沿着切向)为(参见附录 I):

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= (\dot{r}_1 + j r_1 \dot{\beta}_1) e^{j\beta_1} \\ \text{再令} \quad \dot{R}_1 &= \dot{s}_1 e^{j\varphi_1} \end{aligned} \quad (3-16)$$

则可得速度矢量的模, 即曲线 I 弧长的导数[参见附录 I 式(I-7)、(I-9)]为:

$$\dot{s}_1 = \sqrt{\dot{r}_1^2 + (r_1 \dot{\beta}_1)^2} \quad (3-17)$$

其幅角为

$$\varphi_1 = \beta_1 + \arctan \frac{r_1 \dot{\beta}_1}{\dot{r}_1} \quad (3-18)$$

由式(3-16)所设, 曲线 I 的单位切向矢量为

$$t_1 = e^{j\varphi_1}$$

单位法向矢量可由 t_1 回转 $\frac{\pi}{2}$ (假设按逆时针方向回转) 而得, 即

$$n_f = jt_f = je^{j\varphi_f} \quad (3-19)$$

t_f 、 n_f 都是坐标系 x_1, o, y_1 中的矢量，将它们转换到固定坐标系中，则可得相应的切向和法向单位矢量，分别为

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= t_f e^{j\theta_1} = e^{j(\varphi_f + \theta_1)} \\ n_1 &= n_f e^{j\theta_1} = jt_1 = je^{j(\varphi_f + \theta_1)} \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

类似地，对曲线 II 来说亦有

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_c &= \dot{s}_c e^{j\varphi_c} \\ t_2 &= t_c e^{j\theta_2} = e^{j(\varphi_c + \theta_2)} \\ n_2 &= n_c e^{j\theta_2} = je^{j(\varphi_c + \theta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

将 V_{12} 的表达式 (3-15) 与 n_1 的表达式 (3-20) 代入啮合条件 (3-12) 可得

$$(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)R_1 \cdot t_1 - \dot{\theta}_2 C \cdot t_1 = 0 \quad (3-22)$$

将 R_1 的表达式 (3-6 a) 和 t_1 的表达式 (3-20) 代入 (3-22) 就可得一标量表达式：

$$\begin{aligned} [l_f(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c\dot{\theta}_2 \cos\theta_1] \cos\varphi_f + c\dot{\theta}_2 \sin\theta_1 \sin\varphi_f \\ + r_f(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \cos(\varphi_f - \beta_f) = 0 \end{aligned} \quad (3-23)$$

由式 (3-18) 可知， φ_f 是 r_f 、 β_f 的函数。所以，式 (3-23) 是由啮合条件给出的 r_f 与 β_f 的关系式。式 (3-22) 还可转化为曲线 I 与曲线 II 的瞬时角速比计算公式

$$\theta'_1 = 1 - \frac{C \cdot t_1}{R_1 \cdot t_1} \quad (3-24 a)$$

$$\text{或} \quad \theta'_1 = 1 + \frac{c \cos(\varphi_f + \theta_1)}{l_f \cos\varphi_f + r_f \cos(\varphi_f - \beta_f)} \quad (3-24 b)$$

式中， $\theta'_1 = \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{d\theta_1}{d\theta_2}$ ，是二曲线回转角速度之比。

一般地说，曲线 I 的切线的方向角 φ_f 要由式 (3-18) 计算，这是比较麻烦的。当曲线 I 为简单曲线，如圆和直线时， φ_f 则很容易求出。在平面凸轮机构中，从动曲线一般不是圆（滚子从动件），就是直线（平底从动件）。若是圆，有 $\dot{r}_f = 0$ ，则

$$\varphi_I = \beta_I + \frac{\pi}{2}$$

若是直线, 有 $\dot{\beta}_I = 0$, 则

$$\varphi_I = \beta_I$$

以上二式可统一地写成:

$$\varphi_I = \beta_I + \frac{\pi}{2} \delta_I \quad (3-25)$$

式中

$$\delta_I = \begin{cases} 1, & \text{曲线 I 为圆时} \\ 0, & \text{曲线 I 为直线时} \end{cases}$$

将式 (3-25) 代入式 (3-23), 就可得到曲线 I 为圆或直线时的 r_I 与 β_I 的关系式

$$\left. \begin{aligned} & Q_1 \sin \varphi_I + Q_2 \cos \varphi_I + Q_3 r_I = 0 \\ \text{或 } & Q_1 \sin \left(\beta_I + \delta_I \frac{\pi}{2} \right) + Q_2 \cos \left(\beta_I + \delta_I \frac{\pi}{2} \right) + Q_3 r_I = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

式中, Q_1 、 Q_2 、 Q_3 是与 r_I 、 β_I 无关的系数。它们代表二曲线的速度属性, 可以由已知的几何参数、运动参数计算出来, 其计算公式为

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= c \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \\ Q_2 &= l_I (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \\ Q_3 &= (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \cos \left(\delta_I \cdot \frac{\pi}{2} \right) = (1 - \delta_I) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

当曲线 I 为圆时, r_I 为常数, $\delta_I = 1$, $Q_3 = 0$ 。由式 (3-26) 可计算出曲线参数 β_I , 即

$$\beta_I = \arctan \frac{Q_1}{Q_2} = \arctan \frac{c \dot{\theta}_2 \sin \theta_1}{l_I (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c \dot{\theta}_2 \cos \theta_1} \quad (3-28)$$

当曲线 I 为直线时, β_I 为常数, $\delta_I = 0$ 。由式 (3-26) 可计算出曲线参数 r_I , 即

$$r_I = \frac{Q_1 \sin \beta_I + Q_2 \cos \beta_I}{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2} \quad (3-29)$$

综上所述，将式(3-7b)与(3-26)联立，即

$$\begin{cases} r_c e^{j\beta_c} = [(l_f + r_f e^{j\beta_f}) e^{j\theta_1} - c] e^{-j\theta_2} - l_c \\ Q_1 \sin\left(\beta_f + \delta_f \cdot \frac{\pi}{2}\right) + Q_2 \cos\left(\beta_f + \delta_f \cdot \frac{\pi}{2}\right) + Q_3 r_f = 0 \end{cases} \quad (3-30)$$

就可得到定轴转动的共轭曲线的基本方程组。其中的第一式表示共轭曲线的位移关系；第二式表示共轭曲线的速度关系。该方程组给出了二曲线下列三种参数之间的关系：

运动参数 θ_1, θ_2

几何参数 l_f, l_c, c

形状参数 $r_f, \beta_f, r_c, \beta_c$

三者之间的关系。在给出了凸轮机构的初步设计之后，以下六个参数为已知值：

运动参数 θ_1, θ_2

几何参数 l_f, l_c, c

形状参数 r_f (或 β_f)

要求的未知数是 β_f (或 r_f)、 r_c 、 β_c ，共三个。而方程组即式(3-30)的第一式为矢量方程，所以它包含三个标量方程，可以求出三个未知数。实际上，可由式(3-30)的第二式直接求出 β_f (或 r_f)，也就是由式(3-28)求出 β_f ，或由式(3-29)求出 r_f 。然后，将求出的 β_f (或 r_f) 代入式(3-30)的第一式，就可求得曲线 II 的曲线参数 r_c 、 β_c ，从而求得其矢量函数 R_c 。

二、一对作平面运动的共轭曲线

如果将上述一对定轴转动的共轭曲线中的常矢量 L_f 、 L_c 改变为变矢量（长度变化，方向不变化），即在图3-1a中的二曲线回转轴 o_1, o_1' 与 o_2, o_2' 上增加一个滑动副（如图3-3所示），

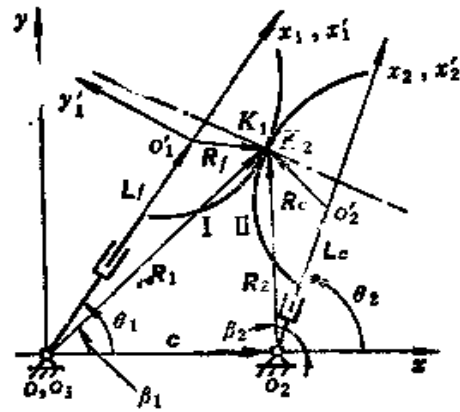


图3-3 作平面运动的共轭曲线

那么,我们就可以方便地将上述结果推广到二共轭曲线作平面运动的情形。在图3-3中,我们仍然用 θ_1 、 θ_2 分别表示曲线 I、II 的转动量;用矢量 L_1 、 L_2 分别表示它们的移动量。为了表示二曲线的移动,应增加两个动坐标系:

$x'_1 o'_1 y'_1$: 与曲线 I 固接。它与曲线 I 一起既随着 $x_1 o_1 y_1$ 坐标系绕 $o(o_1)$ 点转动,又沿着轴 x_1 滑动,即轴 x'_1 总是与轴 x_1 重合,轴 y'_1 总是与轴 y_1 平行。原点 o'_1 是曲线 I 的基准点。

$x'_2 o'_2 y'_2$: 与曲线 II 固接。与 $x'_1 o'_1 y'_1$ 一样,相对于固定坐标系既作转动,又作滑动。轴 x'_2 总是与轴 x_2 重合,轴 y'_2 总是与轴 y_2 平行。原点 o'_2 是曲线 II 的基准点。

与前述一对定轴转动的共轭曲线不同的是,动坐标系 $x_1 o_1 y_1$ 、 $x_2 o_2 y_2$ 不再与曲线 I、II 相固接。这两个坐标系仍作定轴转动,它们的转动分别代表曲线 I 与曲线 II 的转动。因此,它们虽然不与曲线 I 或曲线 II 固接,但仍分别与曲线 I、曲线 II 保持着同样的“方位”。因为矢量 L_1 、 L_2 只是分别沿着坐标轴 x_1 、 x_2 平移,所以它们的变化对二曲线的公切线方向、法线方向都没有影响。啮合条件式(3-12)在这里同样适用。因此,我们完全可以沿用上述推导过程,求得形式大体相同而更带普遍性的结果。不同的是,这里,必须把 L_1 、 L_2 作为变矢量处理。具体过程简述如下。

由图3-3,可得与式(3-6)同样的矢量方程式,

$$R_1 = (L_1 + R_1) e^{j\theta_1} \quad (3-31 a)$$

$$R_2 = (L_2 + R_2) e^{j\theta_2} \quad (3-31 b)$$

$$R_1 = R_2 + C \quad (3-31 c)$$

由此可得计算曲线 II 的矢量函数的公式

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= [(L_1 + R_1) e^{j\theta_1} - C] e^{-j\theta_2} - L_2 \\ \text{或} \quad r_2 e^{j\theta_2} &= [(l_1 + r_1 e^{j\theta_1}) e^{j\theta_1} - c] e^{-j\theta_2} - l_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-32)$$

该式与式(3-7)在形式上是完全相同的。不同的是,这里的 l_2 、 l_1 是变量,式(3-7)是(3-32)的特殊情况。式中, θ_1 、 θ_2 分别表示曲线 I、II 的转动; l_1 、 l_2 分别表示曲线 I、II 的移动。在一

般的情况下, θ_1 、 θ_2 、 l_1 、 l_2 都是运动参数。 c 是表示二曲线相对位置的几何参数。如前所述, 在曲线 I 的几何形状, 即 r_f 与 β_f 的函数关系确定后, 必须先由啮合条件求出每个瞬时的 β_f (或 r_f), 才能由式(3-32)解出 R_c 。

对式(3-31)中各式求导, 可得下列矢量微分方程式:

$$\dot{R}_1 = (\dot{L}_f + \dot{R}_f)e^{j\theta_1} + j\dot{\theta}_1 R_1 \quad (3-33 a)$$

$$\dot{R}_2 = (\dot{L}_c + \dot{R}_c)e^{j\theta_2} + j\dot{\theta}_2 R_2 \quad (3-33 b)$$

$$\dot{R}_1 = \dot{R}_2 \quad (3-33 c)$$

令 K_1 、 K_2 点的相对速度矢量分别为

$$\left. \begin{aligned} V_{r1} &= \dot{R}_f e^{j\theta_1} \\ V_{r2} &= \dot{R}_c e^{j\theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (3-34 a)$$

牵连速度矢量分别为

$$\left. \begin{aligned} V_{e1} &= j\dot{\theta}_1 R_1 \\ V_{e2} &= j\dot{\theta}_2 R_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-34 b)$$

综合上述各式, 可得 K_1 、 K_2 二点之间的相对滑动速度矢量为

$$\begin{aligned} V_{12} &= V_{r1} - V_{r2} \\ &= V_{e2} - V_{e1} + \dot{L}_c e^{j\theta_2} - \dot{L}_f e^{j\theta_1} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{即 } V_{12} &= j[(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)R_1 - \dot{\theta}_2 C] + \dot{L}_c e^{j\theta_2} - \dot{L}_f e^{j\theta_1} \\ \text{或 } V_{12} &= j[(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)(l_f + r_f e^{j\beta_f})e^{j\theta_1} - c\dot{\theta}_2] + \dot{l}_c e^{j\theta_2} - \dot{l}_f e^{j\theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

而曲线 I 的单位法向矢量的表达式与式(3-20)相同, 式(3-17)、(3-18)及(3-25)等在这里也适用。因此, 由啮合条件 $V_{12} \cdot n_1 = 0$, 可得从动曲线 I 是圆或直线时, r_f 与 β_f 之间的关系式

$$Q_1 \sin\left(\beta_f + \delta_f \frac{\pi}{2}\right) + Q_2 \cos\left(\beta_f + \delta_f \frac{\pi}{2}\right) + Q_3 r_f = 0 \quad (3-36)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中, } Q_1 &= l_f - l_c \cos(\theta_1 - \theta_2) + c\dot{\theta}_2 \sin\theta_1 \\ Q_2 &= l_f(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - l_c \sin(\theta_1 - \theta_2) - c\dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \\ Q_3 &= (1 - \delta_f)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

当从动曲线是圆时, r_f 是常数 (即圆的半径), $\delta_f = 1$ 、 $Q_3 = 0$, 因而有

$$\beta_f = \arctan \frac{Q_1}{Q_2} \quad (3-38)$$

当曲线 I 为直线时, β_f 为常数 (通常取为零), $\delta_f = 0$, 因而有

$$r_f = \frac{Q_1 \sin \beta_f + Q_2 \cos \beta_f}{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2} \quad (3-39)$$

由此可以看出, 对于二曲线都作平面运动的一般情况, 当曲线 I 为圆或直线时, 其曲线参数的计算式 (3-38) 或式 (3-39) 与式 (3-28)、(3-29) 的形式基本相同。不同的是系数 Q_1 、 Q_2 中含有表示滑动速度的 l_1 与 l_2 。显然, 式 (3-27) 是式 (3-37) 的特殊情况。

同样, 我们可以将式 (3-32) 与式 (3-36) 联立:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_f e^{j\beta_f} = [(l_1 + r_f e^{j\beta_f}) e^{j\theta_1} - c] e^{-j\theta_2} - l_2 \\ Q_1 \sin\left(\beta_f + \delta_f \cdot \frac{\pi}{2}\right) + Q_2 \cos\left(\beta_f + \delta_f \cdot \frac{\pi}{2}\right) + Q_3 r_f = 0 \end{array} \right. \quad (3-40)$$

构成一对作平面运动的共轭曲线的基本方程组。通过该方程组, 可以由以下的已知参数求出 β_f (或 r_f) 以及曲线 II 的矢量函数 R_2 :

运动参数 θ_1 、 θ_2 、 l_1 、 l_2 ;

几何参数 c ;

形状参数 r_f (或 β_f)。

三、共轭曲线的曲率

曲率是共轭曲线的重要特性, 它对共轭曲线的啮合性能、接触应力影响很大。

如前所述, 一般曲线 I 是已知的形状简单的曲线, 其曲率很容易确定。曲线 II 的曲率可在其矢量函数求出后, 利用附录 I 中的式 (I-17) 或式 (I-18) 求解。由于曲率与一、二阶导数有关, 而曲线 II 的矢量函数本身已很复杂, 所以计算过程非常繁杂。利用曲线 I 与 II 在接触点处的相对速度关系, 以及前面已求得的

参数, 可以比较方便地求出曲线 II 的曲率。

设一对共轭曲线 I 与 II 如图 3-3 a 所示, 作一般平面啮合运动。由式 (3-34 a) 得, 接触点 K_1 与 K_2 之间的相对滑动速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{12} &= \mathbf{V}_{r1} - \mathbf{V}_{r2} \\ &= \dot{\mathbf{R}}_1 e^{j\theta_1} - \dot{\mathbf{R}}_c e^{j\theta_2} \end{aligned}$$

再由式 (3-16) 与式 (3-21) 所设, 有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_1 &= \dot{s}_1 e^{j\varphi_1} \\ \dot{\mathbf{R}}_c &= \dot{s}_c e^{j\varphi_c} \\ \text{因此 } \mathbf{V}_{r1} &= \dot{\mathbf{R}}_1 e^{j\theta_1} \\ \mathbf{V}_{r2} &= \dot{\mathbf{R}}_c e^{j\theta_2} \end{aligned} \quad (3-41)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \mathbf{V}_{12} &= \dot{s}_1 e^{j(\varphi_1 + \theta_1)} \\ &\quad - \dot{s}_c e^{j(\varphi_c + \theta_2)} \end{aligned} \quad (3-42)$$

如图 3-4 所示, \mathbf{V}_{r1} 、 \mathbf{V}_{r2} 共线, 即单位矢量 $e^{j(\varphi_1 + \theta_1)}$ 与 $e^{j(\varphi_c + \theta_2)}$ 共线, 因此有

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \theta_1 &= \varphi_c + \theta_2 + \delta_c \pi \\ &\quad (3-43) \end{aligned}$$

$$\text{式中 } \delta_c = \begin{cases} 1, & \mathbf{V}_{r1} \text{ 与 } \mathbf{V}_{r2} \text{ 反向时} \\ 0, & \mathbf{V}_{r1} \text{ 与 } \mathbf{V}_{r2} \text{ 同向时} \end{cases}$$

显而易见, \mathbf{V}_{12} 亦与 \mathbf{V}_{r1} 、 \mathbf{V}_{r2} 共线, 令

$$\mathbf{V}_{12} = \dot{s}_{12} e^{j\varphi_{12}} \quad (3-44)$$

\dot{s}_{12} 与 φ_{12} 分别为 \mathbf{V}_{12} 的大小与幅角。由式 (3-42) 有

$$\dot{s}_{12} = \dot{s}_1 \pm \dot{s}_c \quad (3-45 a)$$

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \theta_1 = \varphi_c + \theta_2 + \delta_c \pi$$

式 (3-45 a) 中的正负号由 \mathbf{V}_{r1} 与 \mathbf{V}_{r2} 的方向决定。二者同向时 (即 $\delta_c = 0$) 时, 取负号; 二者反向 (即 $\delta_c = 1$) 时, 取正号。

式 (3-45 a) 亦可写成

$$\dot{s}_c = \pm (\dot{s}_{12} - \dot{s}_1) \quad (3-45 b)$$

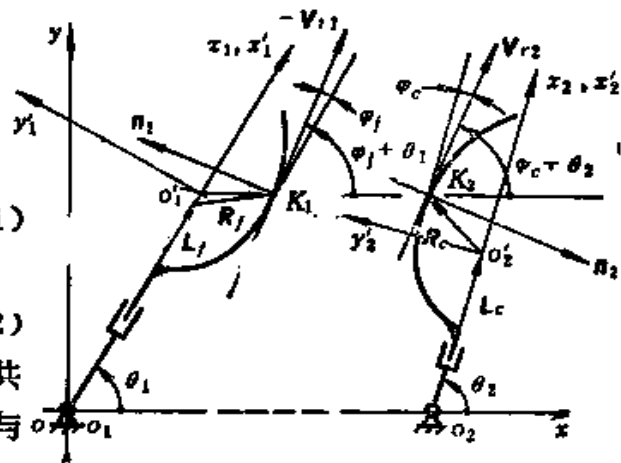


图 3-4 作平面运动的共轭曲线在接触点的相对速度

因为在移项时变号，所以，式(3-45 b)的正负号取法正好与式(3-45 a)相反。

对式(3-43)两边求导，可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_I + \dot{\theta}_1 &= \dot{\varphi}_c + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\varphi}_c &= \dot{\varphi}_I + \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-46)$$

或

根据附录 I 的式(I-14)，曲线 II 的曲率应为：

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{d\varphi_c}{ds_c} = \frac{\dot{\varphi}_c}{\dot{s}_c}$$

将式(3-45 b)和式(3-46)代入可得

$$\frac{1}{\rho_c} = \pm \frac{\dot{\varphi}_I + \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}{\dot{s}_{12} - \dot{s}_I} \quad (3-47)$$

式中， ρ_c 是曲线 II 在接触点 K_2 处的曲率半径。

式(3-47)右边的参数都可由已知参数求出。角速度 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 一般是给定的。下面，依次介绍 \dot{s}_{12} 、 $\dot{\varphi}_I$ 与 \dot{s}_I 的计算方法。

(1) \dot{s}_{12}

由式(3-44)所设， \dot{s}_{12} 是相对滑动速度 V_{12} 的模。由式(3-35)可求出

$$\dot{s}_{12} = Q_2 \sin \varphi_I - Q_1 \cos \varphi_I + Q_3 \delta_I r_I \quad (3-48)$$

式中， φ_I 、 δ_I 的意义与表达式同式(3-25)；系数 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 的表达式同式(3-37)。

(2) $\dot{\varphi}_I$

对于一般的平面曲线 I 来说， $\dot{\varphi}_I$ 要由式(3-18)计算，是相当复杂的。对于圆或直线来说，由式(3-25)可得

$$\dot{\varphi}_I = \dot{\beta}_I \quad (3-49)$$

当曲线 I 为直线时， β_I 为常数，则有

$$\dot{\varphi}_I = \dot{\beta}_I = 0 \quad (3-50)$$

当曲线 I 为圆时， β_I 由式(3-38)计算。对该式两边求导可得

$$\dot{\beta}_I = \frac{\dot{Q}_1 \cdot Q_2 - Q_1 \cdot \dot{Q}_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \quad (3-51)$$

(3) \dot{s}_I

由式 (3-17) 求解, 当曲线 I 为圆或直线时, 有

$$\dot{s}_f = \begin{cases} r_f \dot{\beta}_f, & \text{曲线 I 为圆时} \\ \dot{r}_f, & \text{曲线 I 为直线时} \end{cases}$$

利用式 (3-25) 中的 δ_f , 上式亦可表示为

$$\dot{s}_f = \delta_f r_f \dot{\beta}_f + (1 - \delta_f) \dot{r}_f \quad (3-52)$$

当曲线 I 为直线时, r_f 由式 (3-39) 计算。对该式两边求导可得

$$\dot{r}_f = \frac{(\dot{Q}_1 \sin \beta_f + \dot{Q}_2 \cos \beta_f)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - (Q_1 \sin \beta_f + Q_2 \cos \beta_f)(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2)}{(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2} \quad (3-53)$$

将式 (3-49)、式 (3-52) 代入式 (3-47) 可得

$$\frac{1}{\rho_c} = \pm \frac{\dot{\beta}_f + \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}{\dot{s}_{12} - \delta_f r_f \dot{\beta}_f - (1 - \delta_f) \dot{r}_f} \quad (3-54)$$

这就是一对作平面运动的共轭曲线中, 曲线 II (复杂曲线) 曲率的计算公式。相应的曲线 I 是简单的曲线——圆或直线。式中的 $\dot{\beta}_f$ 、 \dot{s}_{12} 、 \dot{r}_f 分别由式 (3-51) [或式 (3-50)]、(3-48)、(3-53) 求解。式 (3-51)、(3-53) 等中的系数 Q_1 、 Q_2 及其导数 \dot{Q}_1 、 \dot{Q}_2 由式 (3-37) 确定。对该式求导可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \dot{l}_f - \dot{l}_c \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{l}_c (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + c \ddot{\theta}_2 \sin \theta_1 + c \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{Q}_2 &= \dot{l}_f (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + \dot{l}_f (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - \dot{l}_c \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - \dot{l}_c (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - c \ddot{\theta}_2 \cos \theta_1 + c \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (3-55)$$

\dot{Q}_1 、 \dot{Q}_2 代表共轭曲线在接触点处的加速度属性。在一般的凸轮机构中, 凸轮的转动或移动是匀速的, 所以, 通常取 $\ddot{\theta}_2 = 0$ 或 $\dot{l}_c = 0$ 。

第二节 基本平面凸轮机构的轮廓及其压力角、曲率半径的计算

应用前一节由平面曲线啮合原理推导出来的基本公式可以解决各种平面凸轮轮廓曲线的计算问题。任何一种平面凸轮机构的

主动件与从动件的啮合关系都不过是一对作平面运动的共轭曲线啮合关系的特例。

一、基本平面凸轮机构的轮廓曲线的通用计算方法

在自动机械中常用的凸轮机构的凸轮及其从动件的运动形式是非常简单的：不是作直线移动就是作定轴转动；从动件的曲线形状也是非常简单的，不是直线，就是圆（或圆弧），甚至只是一个点。从动件的运动形式、从动件的曲线形状和凸轮的运动形式三个要素经过不同的组合就构成了各种基本平面凸轮机构，可用下列字母表示上述三个要素：

S (slide)： 直动（滑动）从动件

O (oscillation)： 摆动从动件

R (rotation)： 定轴转动凸轮

T (translation)： 直线移动凸轮

C (circle)： 滚子从动件或球面从动件（圆或圆弧）

F (flat surface)： 平底从动件（直线）

K (knife edge)： 尖端（刃形）从动件（点）

按从动件的运动形式——从动件的曲线形状——凸轮运动形式的顺序编排，就可得到各种基本平面凸轮机构的代号。如

S—F—R，代表直动平底从动件回转凸轮机构；

O—C—T，代表摆动滚子从动件直动凸轮机构。

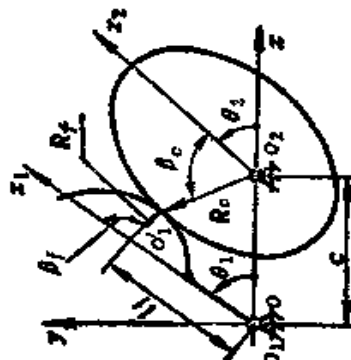
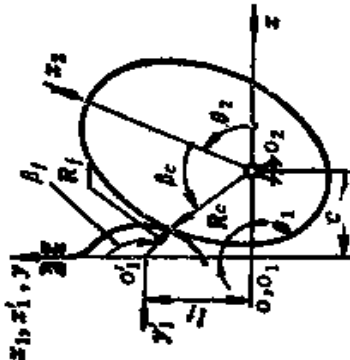
共计有十种基本平面凸轮机构。实际上，只有一半左右是常用的，如，尖端从动件极易磨损，很少使用。在自动机械中，大量使用的是各种滚子从动件平面凸轮机构。

各种基本平面凸轮机构的结构简图、参考坐标系及有关参数如表 3-1 所列。

下面，以最常用的直动滚子从动件回转凸轮（*S—C—R*型）机构为例，说明应用上一节通用公式计算凸轮轮廓曲线的方法。这种凸轮机构的简图如图 3-5 所示。

按前一节一般共轭曲线参考坐标系的设定原则，建立如图 3-5 所示之四个坐标系：

表3-1 各类基本平面凸轮机构的参数

种	类	曲线参数		机构简图及坐标系		运动参数及几何参数				
		凸轮从动件	r_f	β_f			θ_1	θ_2	t_f	t_c
凸 轮	回 转	滚动	常数	$\beta_f(t)$		0	$\theta_1(t)$ $\theta_2(t)$ 常量 $t_f = 0$ $t_c = 0$			
		从动件		常量						
	凸 轮	直 动	滚动	常数	$\beta_f(t)$		0	$\frac{\pi}{2}$ $\dot{\theta}_1 = 0$ $\theta_2(t)$ $t_f(t)$ $t_c = 0$		
			从动件		常量					

直 动 凸 轮		摆 动			$\theta_1(t)$ $\frac{x}{2}$ $\theta_2 = 0$	常 量 $i_f = 0$	$i_o(t)$
		从 动 件	从 动 件				
直 动 凸 轮		直 动			$\frac{x}{2}$ $\theta_1 = 0$	常 量 $\theta_2 = 0$	$i_o(t)$
		从 动 件	从 动 件				

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta}_1 = 0$$

$$l_c = 0, \quad \dot{l}_c = 0$$

将这些特殊值、几何参数 σ 和运动参数 θ_2 、 l_f 代入式 (3-37)，求出 Q_1 、 Q_2 ，再由式 (3-38) 求得 β_f 。最后，将 β_f 代入式 (3-32)，即可求出凸轮轮廓曲线矢量函数 R_c 。

从这个例子可以看出，只要按照上节一般共轭曲线分析过程中所确定的准则，适当地建立坐标系和选定参数，用上节的通用公式求解凸轮轮廓曲线是很方便的。由表 3-1 所列的参数可知，在 l_f 、 θ_1 、 l_c 、 θ_2 、 r_f 、 β_f 三组参数中，每一组都有一个常量（几何参数），而另一个是变量（运动参数）。其规律是：

	常量	变量
滚子从动件 (C)	r_f	β_f
平底从动件 (F)	β_f	r_f
直动从动件 (S)	θ_1	l_f
摆动从动件 (O)	l_f	θ_1
直动凸轮 (T)	θ_2	l_c
回转凸轮 (R)	l_c	θ_2

尖端从动件可以作为滚子从动件的特例（即 $r_f = 0$ ），故未列入。

摆动平底从动件回转凸轮机构 (O—F—R) 的各参考坐标系与有关参数如图 3-6 所示。其中， l_f 、 β_f 、 l_c 是常数 ($l_c = 0$)。因此有

$$l_f = l_c = 0$$

$$\beta_f = 0$$

再将这些特殊值与其他已知参数依次代入式 (3-37)、(3-39) 及 (3-32)，即可求出凸轮轮廓曲线的矢量函数 R_c 。

其他各类基本平面凸轮机构的参考坐标系、特殊参数如表 3-1 所列。

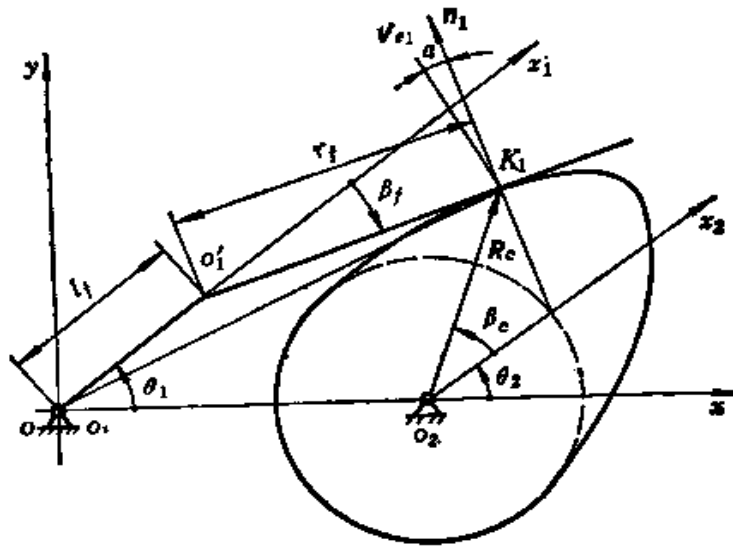


图3-6 O—F—R型凸轮机构

二、压力角

压力角是反映凸轮与从动件之间速度与力传递关系的重要参数。压力角过大会导致自锁而使凸轮机构无法运转。因此，在初步确定凸轮的几何尺寸时，就要根据最大允许压力角估算凸轮基圆半径等基本参数。在计算出凸轮轮廓矢量函数之后，还要计算出每点的压力角进行校核。若超过允许值，须对一些几何参数进行调整，直至满足要求为止。

在不考虑摩擦力时，压力角是某瞬时接触点处的公法线方向与从动件运动方向之间的夹角。直动从动件上每一点的运动方向都是相同的，可任取一点（一般取基准点 o_1' ）的运动方向作为从动件运动方向。摆动从动件上的点的运动方向与该点和回转中心的连线垂直。对于摆动滚子从动件，一般取滚子中心 o_2 点的速度代表整个从动件的运动方向。因此，对于滚子从动件，无论是直动的还是摆动的，都可以用滚子中心 o_2 的速度方向作为从动件的运动方向。

现以图 3-7 所示摆动滚子从动件回转凸轮为例说明滚子从动

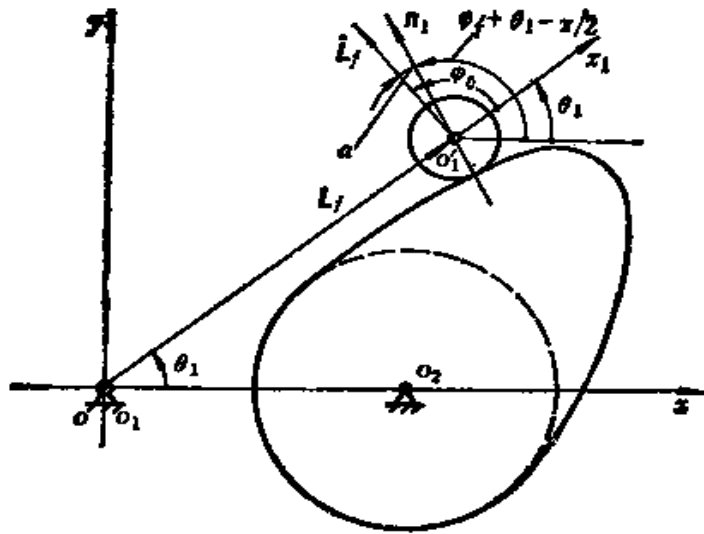


图3-7 凸轮机构的压力角

件凸轮压力角的计算方法。在推导过程中考虑了其他类型的情况,所以,后面得到的结果对其他类型的滚子从动件也是适用的。

令滚子中心 o_2 在固定坐标系中的位置矢量为 L_1 , 则显然有

$$L_1 = L_1 e^{j\theta_1} = l_1 e^{j\theta_1}$$

L_1 是 o_2 在 x_1, y_1 坐标系中的位置矢量。它的方向为 x_1 轴的正向, 即 $L_1 = l_1$ 。因此, L_1 的速度矢量为

$$\dot{L}_1 = (i_1 + j l_1 \dot{\theta}_1) e^{j\theta_1} \quad (3-56)$$

在这里, 考虑到一般情况, 把 l_1 看作变量。令

$$\dot{L}_1 = \dot{\delta}_1 e^{j\theta_1}$$

则与式 (3-18) 类似, 有

$$\varphi_1 = \theta_1 + \arctan \frac{l_1 \dot{\theta}_1}{\dot{\delta}_1}$$

显然, 对直动滚子从动件, $\dot{\theta}_1 = 0$; 对摆动滚子从动件, $\dot{\delta}_1 = 0$ 。因此, 上式亦可写成与式 (3-25) 同样的形式:

$$\varphi_1 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} \delta_1 \quad (3-57)$$

式中,

$$\delta_1 = \begin{cases} 1, & \text{摆动从动件} \\ 0, & \text{直动从动件} \end{cases}$$

此外，由式(3-20)可知，从动滚子曲线法线方向的单位矢量为

$$n_1 = j e^{j(\varphi_f + \theta_1)} = e^{j\left(\varphi_f + \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

而压力角 α 应为 L_1 与 n_1 二矢量的幅角之差(见图3-7)，即

$$\alpha = \left(\varphi_f + \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\theta_1 + \delta_1 \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{即} \quad \alpha = \beta_f + \left(1 - \frac{\delta_1}{2}\right) \pi \quad (3-58)$$

该式即滚子从动件凸轮机构压力角的通用计算公式。 β_f 由式(3-38)计算。由式(3-58)可以看出，滚子从动件的压力角主要与 β_f 有关，同时亦与从动件的运动方式(用 δ_1 表示)有关。

由式(3-58)算出 α 之后，一般可利用式

$$\alpha = \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

将其转换成锐角。这里的反正切函数是一般的主值区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的反正切函数。

在进行回转凸轮的初步设计时，要确定凸轮的最小外径——基圆半径。为了节省材料，在保证凸轮轴的尺寸的前提下，应使基圆半径尽可能小一点。但在完成同样的从动件行程的条件下，基圆半径越小，轮廓曲线就越“陡”，即压力角越大。因此，一般在初步设计中都根据最大允许压力角估算凸轮的基圆半径。但是，要在初步设计完成之前确定基圆半径与压力角的关系是很

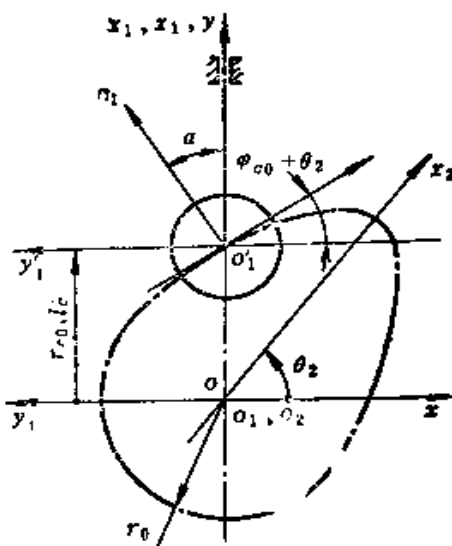


图3-8 直动滚子从动件
对心回转凸轮

困难的。一般把各种盘形回转凸轮机构近似地看成直动滚子从动件对心回转凸轮机构，进行基圆半径的估算。

直动滚子从动件对心回转凸轮机构的特殊参数值如下（见图 3-8）：

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta}_1 = 0; \quad l_c = 0, \quad \dot{l}_c = 0,$$

$$c = 0$$

为了运算简便，可以考察滚子中心 o_1 在凸轮坐标系中的轨迹。令该轨迹的矢量函数为

$$R_{c0} = r_{c0} e^{j\beta_{c0}} \quad (3-59)$$

显然， R_{c0} 是滚子半径 $r_f = 0$ 时的 R_{c0} ，把 $r_f = 0$ 和上述特殊参数值代入式 (3-32) 可得

$$R_{c0} = r_{c0} e^{j\beta_{c0}} = l_f e^{-j\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (3-60)$$

即

$$\left. \begin{aligned} r_{c0} &= l_f \\ \beta_{c0} &= \frac{\pi}{2} - \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-61)$$

对式 (3-60) 两边求导，并令

$$\dot{R}_{c0} = \dot{s}_{c0} e^{j\varphi_{c0}}$$

则可得

$$\begin{aligned} \dot{R}_{c0} e^{j\theta_2} &= \dot{s}_{c0} e^{j(\varphi_{c0} + \theta_2)} \\ &= l_f \dot{\theta}_2 + \dot{l}_f j \end{aligned}$$

进而可得

$$\tan(\varphi_{c0} + \theta_2) = \frac{\dot{l}_f}{l_f \dot{\theta}_2} \quad (3-62a)$$

由图 3-8 的几何关系和前面的关于压力角的分析可知，在这里，压力角

$$\alpha = \varphi_{c0} + \theta_2$$

因此

$$\tan \alpha = \frac{\dot{l}_f}{l_f \dot{\theta}_2} \quad (3-62b)$$

利用式 (2-1) 可以将移动速度 l_j 和转动速度 $\dot{\theta}_2$ 无因次化, 即

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\theta_s}{t_s} \\ & l_j = \frac{h}{t_s} V \end{aligned} \right\} \quad (3-63)$$

式中, t_s 是完成一个升程 (或回程) 所需要的时间; h 是一个升程 (或回程) 的总位移; θ_s 是完成一个升程 (或回程), 凸轮所转过的角度, 称为动程角。凸轮一般作匀速转动, 所以, 角速度 $\dot{\theta}_2$ 等于平均速度 θ_s/t_s 。 V 是从动件运动的无因次速度, 由选定的运动规律确定。将式 (3-63) 代入式 (3-62b), 并考虑到式 (3-61) 所给出的 $r_{c0} = l_j$, 可得

$$\tan \alpha = \frac{hV}{r_{c0}\theta_s} \quad (3-64)$$

式 (3-64) 中, h 与 θ_s 是给定的常数。可以近似地令速度最大处的压力角为最大, 即当 $V = V_m$ 时, $\alpha \approx \alpha_m$ 。对于对称运动规律, 当从动件完成行程的一半时, 速度达到最大值, 这时

$$r_{c0} = r_b + \frac{h}{2}$$

式中, r_b 即为基圆半径。将该式代入式 (3-64), 并以最大允许压力角 α_p 代替 α_m , 就可得到基圆半径 r_b 的估算公式:

$$r_b = \frac{hV_m}{\theta_s \tan \alpha_p} - \frac{h}{2} \quad (3-65a)$$

式中, r_b 是滚子中心轨迹 (不是凸轮轮廓) 的基圆半径。对于摆动从动件凸轮, 可以取

$$h = l_j \tau_s \quad (3-65b)$$

即以滚子中心在一个行程中走过的弧长代替 h 。 τ_s 是摆动从动件在一个行程中转过的角度。

平底从动件的压力角一般可以不用校核。因为, 这时 β_j 为常数, 由几何结构确定。当

$$\beta_j = 0 \quad (\text{对摆动从动件})$$

或 $\beta_f = \frac{\pi}{2}$ (对直动从动件)

时, 接触点处的运动方向与从动件运动方向重合, 故压力角恒为零。 β_f 即使不为零或 $\frac{\pi}{2}$, 压力角的值也很容易通过改变 β_f , 使其保持在允许值范围之内。由图 3-6 中的几何关系, 可得平底从动件回转凸轮的的压力角为

$$\alpha = \beta_f - \arctan \frac{r_f \sin \beta_f}{l_f + r_f \cos \beta_f} \quad (3-66)$$

式中, α 虽然是变量, 但变化很小。

三、刀具中心轨迹

为了加工凸轮, 必须给出铣刀中心的轨迹。由已经计算出来的凸轮轮廓曲线矢量函数 R_c 和单位法向矢量 n_c , 可以方便地计算出刀具中心轨迹的矢量函数。

设圆 o_d 为刀具的横截面曲线, 它与凸轮轮廓曲线啮合关系如图 3-9 所示。凸轮坐标系 $x_2 o_2 y_2$ 和 $x'_2 o'_2 y'_2$ 及其参数 θ_2 、 L_c 、 R_c 的意义同前。 o'_2 为凸轮轮廓曲线的基准点。再令 $R_d = \overrightarrow{K_2 o_d}$ (与 n_c 共线), $R_s = \overrightarrow{o'_2 o_d}$ (刀具中心轨迹的矢量函数)。 R_d 、 R_s 与 R_c 都是凸轮坐标系 $x_2 o_2 y_2$ 中的矢量函数, 显而易见, 三者的关系是

$$R_s = R_c + R_d \quad (3-67)$$

图 3-9 中, n_1 是固定坐标系中 K_1 点的单位法向矢量, 将它变换到 $x'_2 o'_2 y'_2$ 中, 就成为 R_d 矢量的单位方向矢量 (即与 n_c 共线)。

考虑到滑移矢量 L_c 并不影响 n_1 的方向, R_d 的长度为 $\frac{d}{2}$, 则通过坐标变换可得,

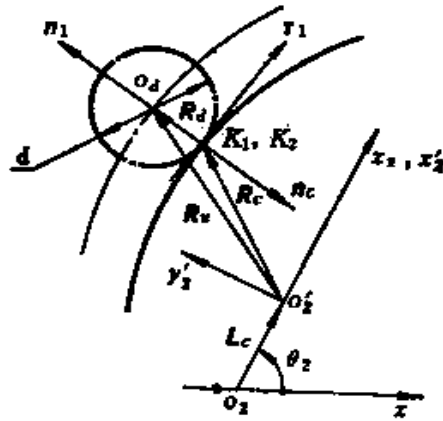


图3-9 刀具中心轨迹

$$R_d = \frac{d}{2} n_1 e^{-j\theta_2}$$

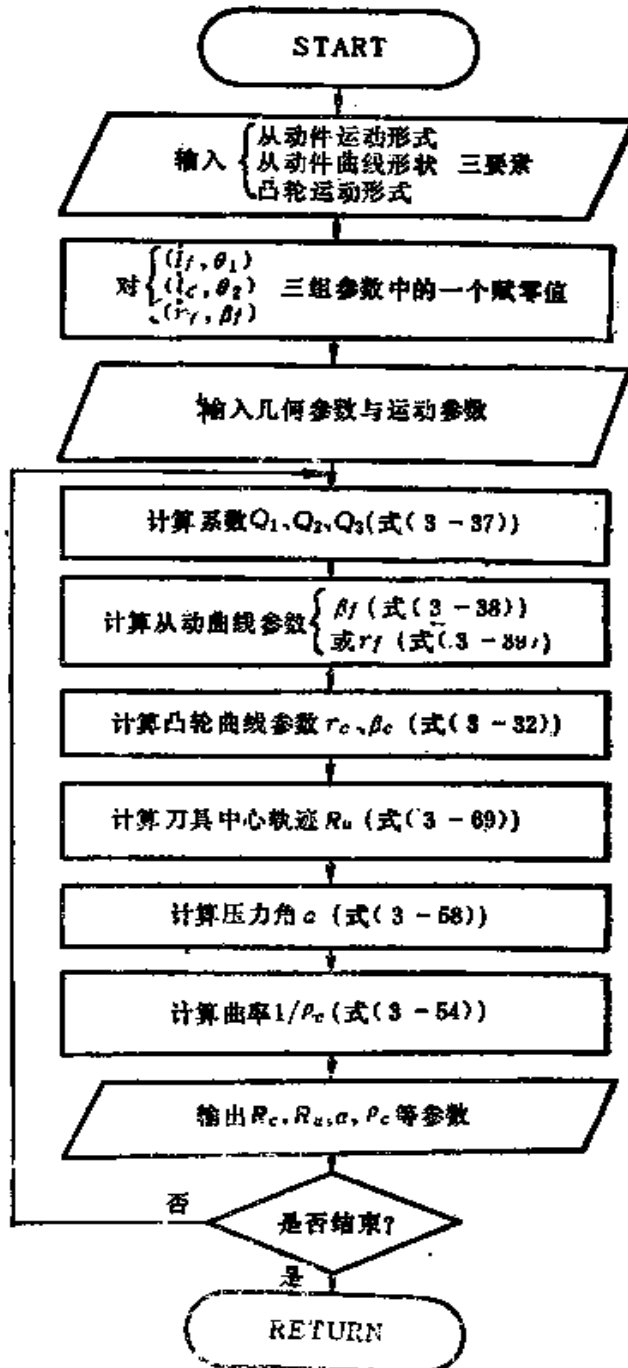


图3-10 凸轮轮廓曲线计算子程序框图

将式 (3-20) 代入得

$$R_d = \frac{d}{2} j e^{j(\varphi_f + \theta_1 - \theta_2)} \quad (3-68)$$

将式 (3-68) 代入式 (3-67), 即可得刀具中心轨迹的计算公式:

$$R_c = R_c + \frac{d}{2} j e^{j(\varphi_f + \theta_1 - \theta_2)} \quad (3-69)$$

式中, $\varphi_f = \beta_f + \frac{\pi}{2} \delta_f$, d 为刀具直径, β_f 由式 (3-38) 确定。

四、曲率半径

利用上一节的曲率半径通用计算公式, 可按下述步骤计算凸轮轮廓曲线的曲率半径:

- (1) 将已知的特殊参数值、运动参数和几何参数代入式 (3-37), 求得系数 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 ;
- (2) 由式 (3-55) 计算 \dot{Q}_1 、 \dot{Q}_2 ;
- (3) 由式 (3-51) 或式 (3-50) 确定 β_f , 当从动曲线为直线时, 再由式 (3-53) 计算 $\dot{\beta}_f$;
- (4) 由式 (3-52) 计算 \dot{s}_f ;
- (5) 由式 (3-48) 计算 \dot{s}_{12} ;
- (6) 将已知量和计算出的 β_f 、 \dot{s}_{12} 、 \dot{s}_f 代入式 (3-54), 即可求出凸轮轮廓曲线的曲率。

综上所述, 利用一般平面共轭曲线作为统一的几何模型, 可以根据平面啮合原理建立一套适用于各类基本平面凸轮的通用计算公式。根据通用计算公式编制的程序简短清晰。图3-10是计算各类平面凸轮机构轮廓曲线、刀具中心轨迹、压力角和曲率半径的子程序框图。

第三节 平行分度凸轮机构

平行分度凸轮是近年新开发的凸轮间歇运动机构^[25]。这种凸轮机构是一种多个从动滚子的共轭凸轮机构。常用的是图3-11 a 所示外接式结构, 也有用图3-11 b 所示的直线式机构和图3-11

c) 所示的内接式结构。本节只介绍外接式平行分度凸轮。

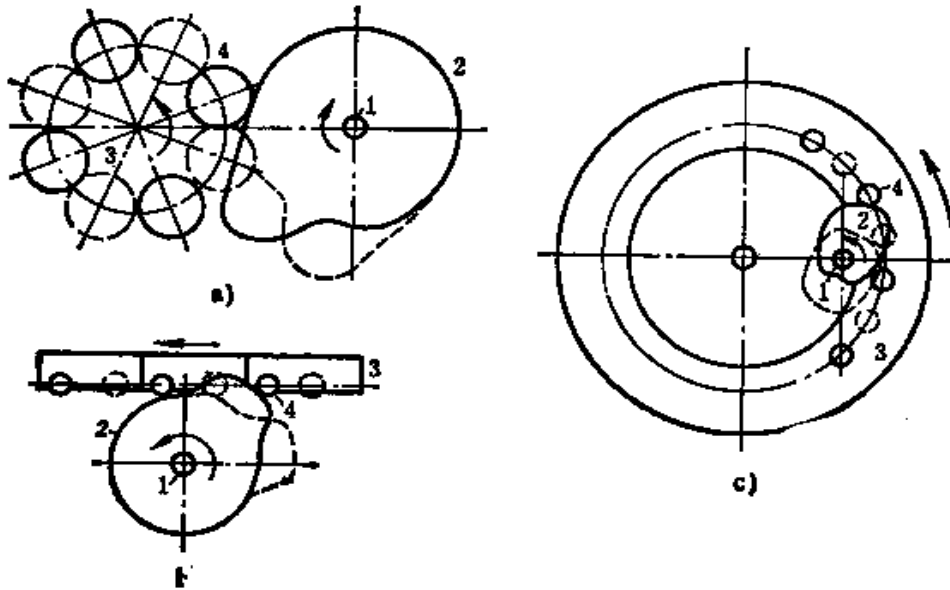


图3-11 平行分度凸轮的三种结构型式

a) 外接式 b) 直线式 c) 内接式

这种结构的输入端为一对平面共轭凸轮，从动端为装着两排滚子的从动盘。如图3-12 b 所示，实线画的滚子与轮廓 I、III 接触；虚线画的滚子（在从动盘背面）与轮廓 II、IV 接触。轮廓 I、II 是升程轮廓，推动滚子转动，称为主轮廓；III、IV 是回程轮廓，起闭锁作用，称为副轮廓。共轭凸轮作匀速转动时，从动盘作间歇运动。

一、主要特点和基本参数

这种由平面共轭凸轮构成的间歇运动机构有以下几个优点：

(1) 与槽轮、不完全齿轮等间歇运动机构相比，运动性能好，高速下运转振动与噪声比较小。这是因为凸轮机构可以设计合适的轮廓曲线以实现给定的运动特性优良的从动盘运动规律。另外，这种结构还可以施加一定的预载，消除凸轮与从动滚子之间的间隙，从而减小冲击与噪声。

(2) 这种机构的输入轴与输出轴互相平行, 与常用的槽轮机构一样, 其体积大小亦差不多。因此, 在分度数、中心距等条件相同时, 可以很方便地用平行分度凸轮机构代替槽轮机构。这对现有的自动机的改造意义很大。基本上不改变原机器的结构就可以用运动特性好的平行分度凸轮代替槽轮机构, 达到提高速度、减少振动、降低噪声等目的。

(3) 与后面介绍的空间凸轮间歇运动机构相比, 该机构的凸轮都是平面凸轮, 加工方便, 容易推广。

平行分度凸轮机构除了基圆半径 (r_b)、动程角 (θ_d)、压力角 (α)、曲率半径 (ρ_c) 等一般凸轮机构的基本参数以外, 还有一些该类机构所特有的重要参数:

(1) 动静比 d : 表示一个周期中, 从动件运动的时间与静止时间的比值, 它是间歇运动机构的基本参数。

在这里, 凸轮的动程角 θ_d (为完成从动滚子一个升程, 凸轮所转过的角度) 对应于从动件运动时间, 而 $2\pi - \theta_d$ 则对应于从动件静止时间。所以动静比

$$d = \frac{\theta_d}{2\pi - \theta_d} \quad (3-70)$$

动静比一般由机器的工艺要求决定, 在设计中一般是给定的。给定 d 后, 即可算出凸轮的动程角为

$$\theta_d = \frac{d}{1+d} 2\pi \quad (3-71)$$

(2) 分度数 n 与分度角 τ_d : 从动盘在回转一周的过程中, 转动的次数称为分度数 (n), 每次转动回转的角度称为分度角 (τ_d)。显然有,

$$\tau_d = \frac{2\pi}{n} \quad (3-72)$$

(3) 从动滚子数 m 和凸轮头数 G_n : 从动滚子数 m 为从动盘上滚子的总数, 在如图3-11 a 所示的机构中, $m = 8$ 。

凸轮头数 G_n 为滚子数除以分度数的商, 即

$$G_n = \frac{m}{\pi} \quad (3-73)$$

它是指从动盘在完成一个分度（回转 τ_h ）的过程中，凸轮所需要推动的滚子数，相当于蜗杆的头数。图 3-12 表示 $G_n = 1, 2, 4$ 的凸轮形状。显而易见， G_n 越大，凸轮的形状越复杂。一般常取 $G_n = 2$ 。

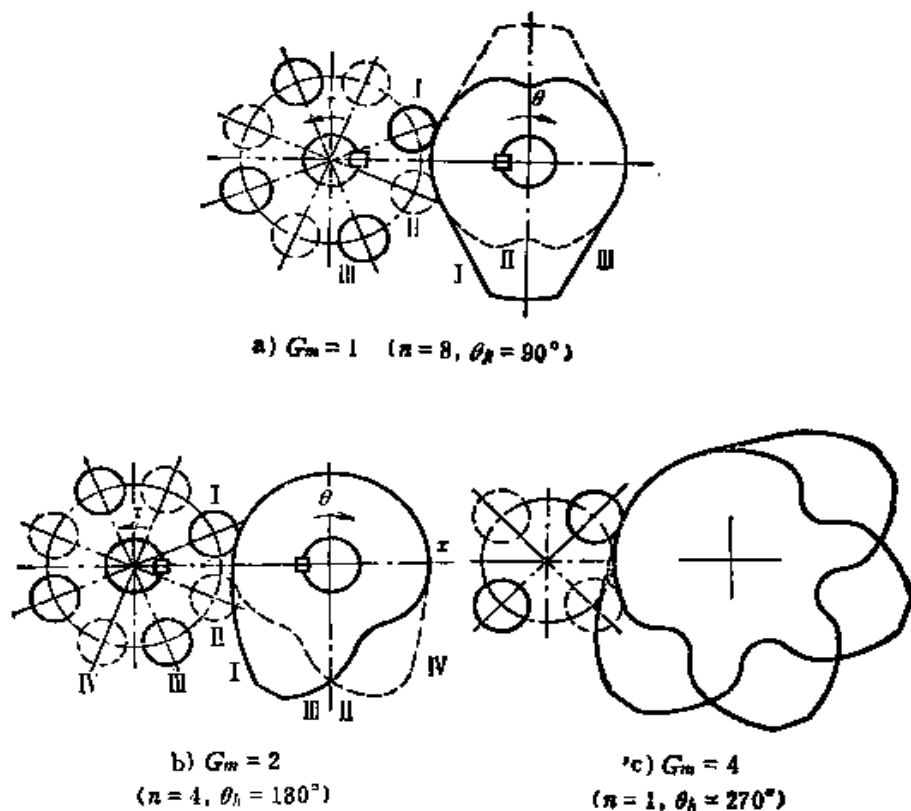


图3-12 $G_n = 1, 2, 4$ 的示例

(4) 滚子初始位置角 τ_{n0} 为了便于施加预载，滚子在起始位置时的配置如图3-11 a 所示。各滚子的初始位置角为：

$$\tau_{n0} = \frac{\tau_h(1.5 - G_n)}{G_n} \quad (3-74)$$

式中， τ_h 、 G_n 分别表示分度角与头数； G_n 为滚子序号。一排滚

子（如图3-11中的实线圆）的 G_1 为奇数；另一排滚子（同图中的虚线圆）的 G_1 为偶数。一般滚子数为分度数的 G_1 倍。如图3-11 a 所示，分度数 $n = 4$ ， $G_1 = 1, 2, 3, \dots, 8$ 。而分度角 $\tau_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 。即凸轮每转一圈（顺时针），从动盘转动（逆时针）角度为 $\frac{\pi}{2}$ 。

由式 (3-74) 可算出图3-11 a 所示平行分度凸轮机构各滚子的初始位置为

$$\begin{aligned}\tau_{10} &= \frac{\tau_1}{4} = \frac{\pi}{8} \\ \tau_{20} &= -\frac{\tau_1}{4} = -\frac{\pi}{8} \\ &\vdots \\ \tau_{30} &= -\frac{7\tau_1}{4} = -\frac{7\pi}{8} \\ &\vdots \\ \tau_{40} &= -\frac{13\tau_1}{4} = -\frac{13\pi}{8}\end{aligned}$$

这里的角度都是以 x 轴正向为始边，除 I 号滚子外，其它滚子的初始角都是负角（从始边作顺时针回转而成）。

(5) 径距比 k ：滚子中心回转半径 l_f 与从动盘和凸轮的中心距 c 的比值称为径距比，即

$$k = \frac{l_f}{c} \quad (3-75)$$

这是平行分度凸轮的一个基本几何参数。

平行分度凸轮机构是一种比较复杂的共轭凸轮机构，在一个运动周期中，每个凸轮都要依次推动若干个滚子。每个滚子都有一段相应的凸轮轮廓曲线，这些轮廓曲线象接力赛似的，一段接一段推动相应的滚子完成各自的角位移。因此，每个凸轮轮廓曲线都是由几段简单凸轮轮廓曲线组合而成的。另外，作为共轭凸

轮，两个凸轮的啮合运动还必须有一定的重合度，以实现闭锁。基于上述两方面的原因，构成平行分度凸轮轮廓的制约因素比较多，设计计算也要比一般平面凸轮要麻烦得多。

可以证明，如果从动盘的运动规律为对称曲线时（实际上，一般都采用对称曲线），平行分度凸轮的轮廓曲线成轴对称〔68〕。这给设计与加工带来了很大的方便。在设计计算时，只需考虑两个凸轮之一就行了。

二、凸轮轮廓的制约条件

1. 外径条件

根据共轭凸轮的基本原理，为了使平行分度凸轮机构运动连续、稳定，在运动过程中的任一时刻，必须至少有一个滚子与升程轮廓（传动扭矩为正值）接触。同时，至少有一个滚子与回程轮廓接触。另外，同一凸轮上的各段轮廓（如图3-12 b的轮廓I与III、II与IV）必须在某一合适的点相交，否则，就不可能组成完整的凸轮形状。为满足上述两方面的条件，动程角、径距比等参数必须限定在某个范围内。

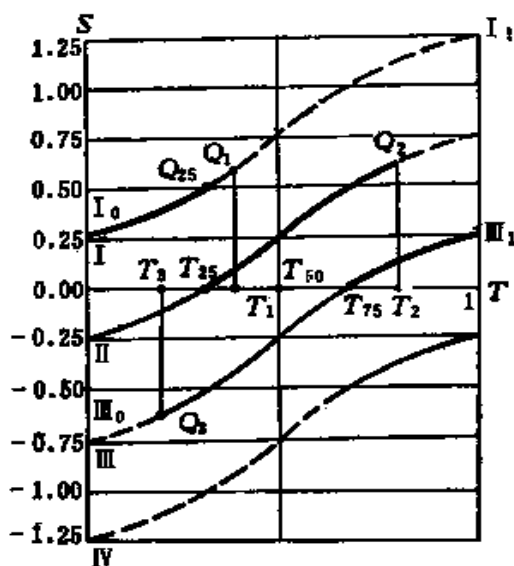


图3-13 从动滚子位移曲线

图3-13表示图3-11 a所示之平行分度凸轮机构在一个运动周期内各滚子的无因次位移曲线（一般都是对称曲线），从上至下依次是滚子I、II、III、IV的位移曲线。各曲线在T轴上方的部分表示滚子处在x轴上方（图3-11 a），这时滚子受到正扭矩。图3-13中用粗实线表示滚子受正扭矩的运动段。滚子I与II受正扭矩运动一段后与凸轮轮廓脱离接触，仍随从动盘继续运动，这一段“脱空”运行曲线用虚线表示。而在T轴下方的曲线表示滚子在x轴下方的运动。细实

线表示滚子与凸轮轮廓接触，受负扭矩，虚线表示滚子尚未与凸轮轮廓接触的随动运动段。

图 3-13 中横坐标标出的几个无因次时间的意义如下：

T_1 、 T_2 ：滚子 I、II 脱离凸轮轮廓的时刻；

T_3 、 T_4 ：滚子 III、IV 开始进入啮合的时刻 (T_4 未标出)；

$T_{1/4}$ ：各滚子完成行程 $\frac{1}{4}$ 的时刻；

$T_{1/2}$ ：各滚子完成行程 $\frac{1}{2}$ 的时刻；

$T_{3/4}$ ：各滚子完成行程 $\frac{3}{4}$ 的时刻。

从图上可以看出，因为滚子 II 从 $T_{2/4}$ 起才进入啮合而受正扭矩作用，因此，为了保证任何时刻至少有一个滚子被作用于正扭矩，必须有

$$T_1 > T_{2/4} \quad (3-76)$$

类似地，为了保证任何时刻至少有一个滚子受负扭矩作用，必须有

$$T_3 < T_{3/4} \quad (3-77)$$

同理，亦必有

$$\begin{cases} T_2 > T_{7/8} \\ T_4 < T_{7/8} \end{cases} \quad (3-78)$$

图 3-14 表示一个凸轮理论轮廓的构成。当滚子 I 完成一个升程，从 I_0 位置回转到 I'_0 位置时，相应的凸轮轮廓理论廓线为曲线 I_0I_1 ，而受同一凸轮驱动的滚子 III 从 III_0 位置运动到 III'_0 (与 I_0 重合) 时，相应的凸轮轮廓理论廓线为 III_0III_1 。令曲线 I_0I_1 与 III_0III_1 相交于 Q 点。显然，只有廓线 I_0Q 与 $QIII_1$ 才是有效的。曲线 QI_1 实际上对应于图 3-13 中滚子 I 的位移曲线中的虚线段 Q_1I_1 ，而曲线 III_0Q 则对应于滚子 III 的位移曲线的虚线段 III_0Q_3 。因此，推动滚子 I 与 III 的凸轮轮廓理论廓线应是由曲线 I_0Q 与 $QIII_1$ 连结而成的曲线 I_0QIII_1 。令 $O_2Q = r_{11}$ ，显而易见， r_{11} 就是理论廓线的

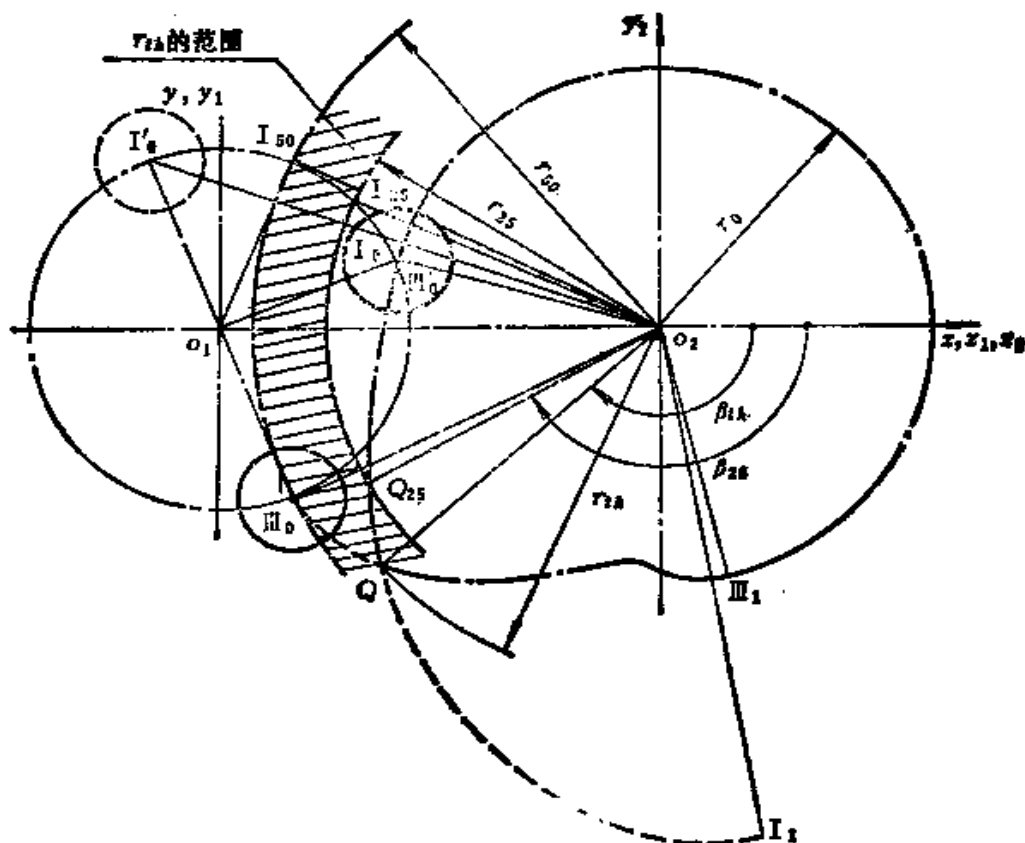


图3-14 一个凸轮的理论轮廓构成

最大外径。

由图 3-13 和图 3-14 分析滚子 I、III 的运动过程可知，Q 点是滚子 III 进入啮合的始点 (T_2 时刻)，也是滚子 I 脱离接触的终点 (T_1 时刻)。Q 点的位置因轮廓曲线 I_0I_1 与 III_0III_1 的形状不同而不同。由前两节可知，在各几何参数和运动参数 (θ_k 、从动件运动曲线) 确定之后，凸轮轮廓曲线可以表成时间 t 或无因次时间 T 的矢量函数。若令廓线 I_0I_1 与 III_0III_1 的矢量函数分别是 $R_{c1}(T)$ 与 $R_{c2}(T)$ 。因为 Q 是二者的交点，其对应的 T 分别为 T_1 、 T_2 ，所以有

$$R_{c1}(T_1) = R_{c2}(T_2) = r_{1k} e^{j\beta_{1k}} \quad (3-79)$$

式中， β_{1k} 为 Q 点的幅角 (参见图 3-14)。该矢量方程包含着两个标量方程，相当于一个二元非线性方程组。解之，即可求得 T_1 、

T_{20} 。从而求出 r_{1k} 。具体求法可见参考文献[68]。实际上, 利用 xy 绘图仪, 可以容易地绘出廓线 I_0I_1 与 III_0III_1 , 从而求得交点 Q 和 r_{1k} 的近似值。

为了实现正常的啮合运动, Q 点的位置 (或 r_{1k}) 必须限定在一定的范围内。具体地说:

$$(1) \quad r_{1k} > r_{20} \quad (3-80)$$

式中, $r_{20} = C_2I_{20} = O_2Q_{20}$, 是理论廓线 I 在 $T = T_{20}$ 时刻的矢径长度。图 3-14 中的 I_{20} 点是 $T = T_{20}$ 时刻, 滚子 I 的中心点位置, 由于 T_{20} 表示滚子完成了 $\frac{1}{4}$ 行程的时刻, 所以 $\angle I_{20}O_1I_0 = \frac{\tau_A}{4} = Q_{20}$ 为廓线 I 上对应于 I_{20} 的点, 由共轭凸轮的啮合要求, 即式 (3-76)

$$T_1 > T_{20}$$

可得

$$r_{1k} > r_{20}$$

这是显而易见的, 因为滚子 I 在运动过程中, 随着时间 T 的增加, 滚子中心不断地远离凸轮中心 O_2 , 没有“回折”现象, 所以 T 越大, 对应的理论廓线的矢径长度亦越大。而 r_{1k} 、 r_{20} 正是对应于 T_1 、 T_{20} 时刻的矢径。

$$(2) \quad r_{1k} < r_{30} \quad (3-81)$$

式中, $r_{30} = O_2I_{30}$, 是理论廓线 III 在 T_{30} 时刻的矢径, 即

$$\angle I_{30}O_1I_0 = \frac{\tau_A}{2} \quad (3-82)$$

由图 3-14 可知, r_{1k} 的值不得大于 O_2III_0 , 即

$$r_{1k} \leq O_2III_0 \quad (3-83)$$

否则, 滚子 III 和凸轮都无法正常运动。在 r_{1k} 等于 O_2III_0 时, 交点 Q 与 III_0 点重合, 这时 $T_2 = 0$, 即滚子 III 一开始就进入啮合 (图 3-13, 运动曲线 III_0III_1 中没有虚线段)。因此 O_2III_0 是极大值。由滚子初始位置角的计算公式 (3-74), 在常见的 G_n 为 2 的情况下, 滚子 I 、 III 的初始角分别为

$$\tau_{10} = \angle I_0 O_1 O_2 = \frac{1}{4} \tau_A$$

$$\tau_{20} = \angle O_2 O_1 III_0 = -\frac{3}{4} \tau_A$$

而在 $T = T_{20}$ 时, 滚子 I 的中心的位置角为

$$\angle I_{20} O_1 O_2 = \angle I_{20} O_1 I_0 + \angle I_0 O_1 O_2 = \frac{\tau_A}{2} + \frac{\tau_A}{4} = \frac{3}{4} \tau_A$$

因此,

$$\angle I_{20} O_1 O_2 = -\tau_{20}$$

所以点 III_0 与 I_{20} 关于 x 轴对称, 则它们到凸轮回转中心 O_2 的距离亦相等, 即

$$O_2 I_{20} = O_2 III_0$$

或

$$r_{20} = O_2 III_0$$

代入式 (3-83) 有

$$r_{12} \leq r_{20}$$

该式亦意味着

$$T_1 \leq T_{20} \quad (3-84)$$

则

$$\left. \begin{aligned} T_{20} < T_1 \leq T_{20} \\ 0 \leq T_2 < T_{20} \end{aligned} \right\} \quad (3-85)$$

综合式 (3-80) 与式 (3-81) 可得 r_{12} 所允许的范围为

$$r_{20} < r_{12} \leq r_{10} \quad (3-86)$$

则交点 Q 必须落在图 3-14 中由 r_{20} 与 r_{10} 所限定的圆环范围内。

为满足式 (3-85), 机构的运动参数与几何参数须有所限制。

图 3-15 表示交点 Q 与其对应的滚子 I 中心点位置 Q_1 、滚子 III 中心点位置 Q_2 的几何关系。设凸轮廓线廓线上的交点 Q 在 T_2 时刻顺时针转 θ_{12} 角到达 Q_2 位置 (滚子 III 开始进入啮合状态)。在 T_1 时刻, 顺时针转 θ_{11} 角到达 Q_1 位置 (滚子 I 开始脱离啮合状态)。则可得下列几何关系

$$O_2 Q_2 = O_2 Q_1 = r_{20}$$

$$\beta_{12} - \theta_{12} = \beta_{11} \quad (3-87)$$

$$\beta_{14} - \theta_{11} + 2\pi = \beta_{11} \quad (3-88)$$

$$\beta_{11} = -\beta_{13} \quad (3-89)$$

上列诸式中, $\beta_{11} = \angle PO_2Q_1$, $\beta_{13} = \angle PO_2Q_3$, $\beta_{14} = \angle PO_2Q_4$, 我们规定, 角度都在区间 $[-\pi, \pi]$ 中取值, 因此图中 β_{13} 、 β_{14} 为负值, β_{11} 正值。而 θ_{11} 、 θ_{13} 恒取正。

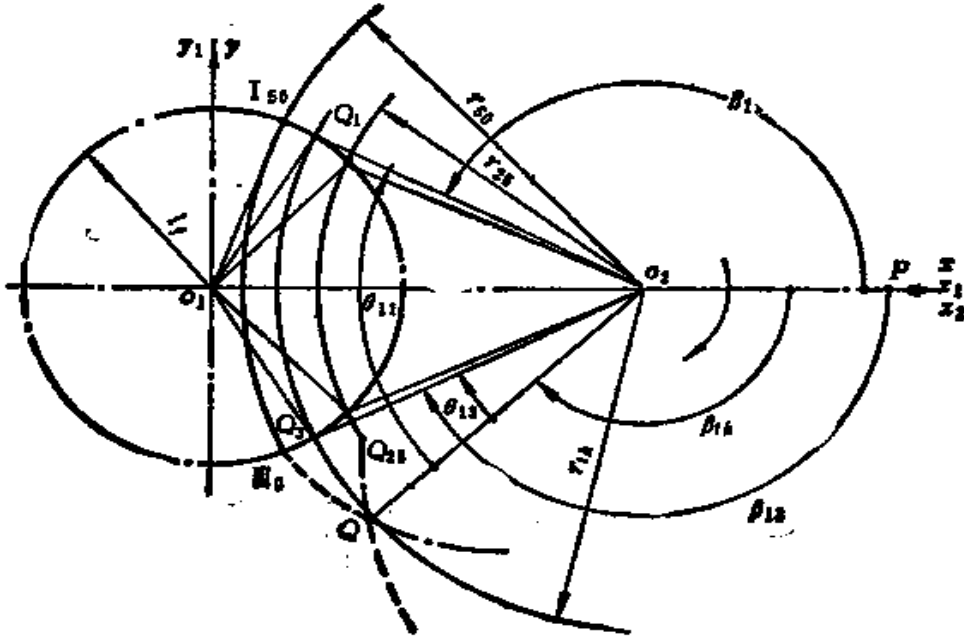


图3-15 T_1 与 T_2 的关系

综合式 (3-87)、(3-88) 及 (3-89), 可得

$$\theta_{11} + \theta_{13} = 2(\beta_{14} + \pi) \quad (3-90)$$

$$\theta_{11} - \theta_{13} = 2(\pi - \beta_{11}) \quad (3-91)$$

而 θ_{11} 、 θ_{13} 又可用无因次时间表示, 即

$$\begin{cases} \theta_{11} = \theta_s T_1 \\ \theta_{13} = \theta_s T_2 \end{cases} \quad (3-92)$$

式中, θ_s 是凸轮的动程角。

将式 (3-92) 代入式 (3-90)、式 (3-91), 得

$$T_1 + T_3 = \frac{2(\beta_{1k} + \pi)}{\theta_k} \quad (3-93)$$

$$T_1 - T_3 = \frac{2(\pi - \beta_{11})}{\theta_k} \quad (3-94)$$

再由图3-15可知

$$\angle Q_1 O_2 O_1 = \pi - \beta_{11}$$

将其代入式(3-94)有

$$T_1 - T_3 = \frac{2 \angle Q_1 O_2 O_1}{\theta_k}$$

或

$$\theta_k = \frac{2 \angle Q_1 O_2 O_1}{T_1 - T_3} \quad (3-95)$$

由式(3-85)有

$$0 < T_1 - T_3 \leq T_{50} \quad (3-96)$$

而 $\angle Q_1 O_2 O_1$ 的变化范围为

$$\angle I_{25} O_2 O_1 < \angle Q_1 O_2 O_1 \leq \angle I_{50} O_2 O_1 \quad (3-97)$$

实际上,在一般的情况下, $\angle Q_1 O_2 O_1$ 的变化范围是很小的,可以认为 $\angle Q_1 O_2 O_1 \approx \angle I_{50} O_2 O_1$,综合以上三式,可求得动程角 θ_k 的允许值应为

$$\theta_k > \frac{2 \angle I_{50} O_2 O_1}{T_{50}}$$

一般从动盘的运动曲线都是对称曲线,所以

$$T_{50} = \frac{1}{2}$$

因此,

$$\theta_k > 4 \angle I_{50} O_2 O_1 \quad (3-98)$$

解 $\triangle I_{50} O_1 O_2$,并注意到

$$\begin{aligned} \angle I_{50} O_1 O_2 &= \tau_{10} + \frac{1}{2} \tau_k \\ &= \frac{1}{4} \tau_k + \frac{1}{2} \tau_k = \frac{3}{4} \tau_k \end{aligned}$$

可得

$$\theta_A > 4 \arctan \frac{l_f \sin\left(\frac{3}{4} \tau_A\right)}{c - l_f \cos\left(\frac{3}{4} \tau_A\right)} \quad (3-99)$$

如前所述, $l_f = O_1 I_{50}$, 为滚子中心回转半径, $c = o_1 o_2$, 为从动盘与凸轮的中心距。

由式 (3-99) 可得

$$k = \frac{l_f}{c} < \frac{\sin\left(\frac{\theta_A}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A + 3\tau_A}{4}\right)} \quad (3-100)$$

式 (3-100) 就是由外径限制条件所确定的几何参数径距比 k 的取值范围。

2. 不根切条件

平行分度凸轮的滚子中心在一个运动周期中的运动轨迹 (圆弧) 与中心线 $O_1 O_2$ 的相互位置关系是多种多样的, 不象一般摆动滚子从动件凸轮那样简单。如图 3-14 所示, 滚子 III 和 II 在一个行程中的运动轨迹横跨一、四两个象限。在它们到达水平位置时, 凸轮理论轮廓矢径为最小值 ($c - l_f$)。因此, 这段轮廓曲线是凹曲线, 有可能出现环状, 即发生根切现象, 如图 3-16 所示。

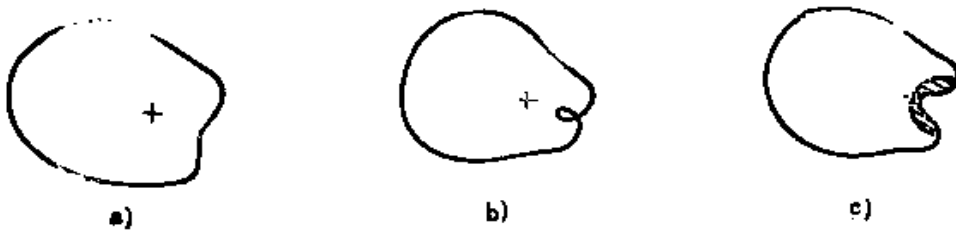


图3-16 根切示意图

a) 未根切时理论廓线 b) 产生根切时理论廓线 c) 根切

下面，以滚子Ⅲ所对应的轮廓曲线Ⅲ为例，分析不产生根切的条件。设凸轮理论轮廓曲线的矢量函数为

$$R_r = r_r e^{j\beta_r}$$

式中， r_r 为矢径， β_r 为幅角。它们都可作为时间 t 的函数。为了不发生根切，幅角 β_r 必须在 $[0, 2\pi]$ 整个区间内都是增函数，即

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\beta_r}{dt} &\geq 0 \\ \text{或} \quad \dot{\beta}_r &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-101)$$

凸轮理论轮廓曲线 R_r 实际上就是令滚子半径 $r_f = 0$ 时所求得的凸轮实际轮廓曲线的矢量函数 R_o 。由本章前一节，取 $r_f = 0$ ， $l_o = 0$ ，根据式 (3-32) 可得

$$R_o = R_r = r_r e^{j\beta_r} = (l_1 e^{j\theta_1} - c) e^{-j\theta_2}$$

θ_2 是有向角，逆时针回转为正，反之为负。而在所设定的条件下，凸轮总是作顺时针回转。故 θ_2 应取负值，动程角 θ_1 亦随之取负值〔参见后面的式 (3-104)〕。为了计算方便，在平行分度凸轮的设计计算中，定 θ_1 为正值，因此， θ_2 亦取正值。所以上式中的 θ_2 前面的符号应变号。据此，经过变换可得

$$r_r e^{j(\beta_r - \theta_2)} = l_1 e^{j\theta_1} - c \quad (3-102)$$

由前两节所设， θ_1 表示从动滚子回转的角位移。在这里

$$\theta_1 = \tau_{00} + \tau = \tau_{00} + \tau_1 S$$

如前所述， τ_{00} 表示滚子Ⅲ的初始位置角， τ 是 T 时刻滚子Ⅲ回转的角度， S 是 T 时刻的无因次位移。

对式 (3-102) 两边求导，得

$$[j\dot{\beta}_r + j(\dot{\beta}_r - \dot{\theta}_2)r_r] e^{j(\beta_r - \theta_2)} = j l_1 \dot{\theta}_1 e^{j\theta_1}$$

由此式可解得

$$\dot{\beta}_r = \frac{l_1}{r_r} \dot{\theta}_1 \cos[\theta_1 - (\beta_r - \theta_2)] + \dot{\theta}_2 \quad (3-103)$$

将 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 无因次化（参见第二章第一节），有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \dot{\tau} = \frac{\tau_A}{t_A} V \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\theta_A}{t_A} \end{aligned} \right\} \quad (3-104)$$

式中, t_A 为完成一个分度所需的时间; τ_A 是从动盘分度角; θ_A 是凸轮的动程角; V 是从动盘无因次速度。将式 (3-104) 代入式 (3-103), 并由 $\beta_p \geq 0$, 可得

$$l_f \tau_A V \frac{-\cos[\theta_1 - (\beta_p - \theta_2)]}{r_p} \leq \theta_A \quad (3-105)$$

显然, 该不等式的左边取最大值的位置, 就是最容易发生根切处。在 R_p 转到水平位置, 即滚子 III 的中心 M_{T5} 处在 x 轴上的时候 (参见图 3-17), 有

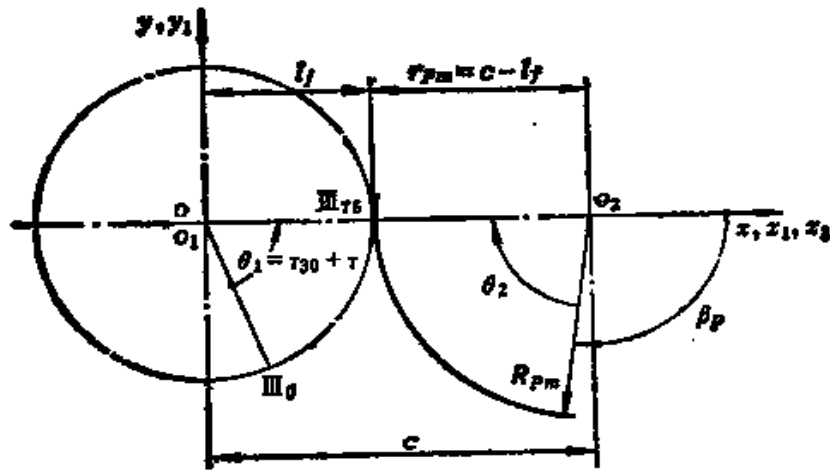


图3-17 滚子中心在 x 轴上时的矢量关系

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \tau_{01} + \tau = 0 \\ \beta_p - \theta_2 &= -\alpha \quad (\beta_p \text{ 是负值}) \\ r_p &= r_{pm} = c - l_f \\ R_p &= R_{fm} \end{aligned} \right\} \quad (3-106)$$

r_{pm} 是 r_p 的最小值。另外, 这时的 V 亦接近于最大值。对于滚子 III 来说, 此时,

$$V = V_{T5}$$

V_{75} 是完成了 $\frac{3}{4}\tau_A$ 时的无因次速度。综合上述因素，滚子Ⅲ的中心到达中心连线（ x 轴）时，式（3-105）左端取最大值。即对应于此时刻的轮廓段最容易发生根切。将式（3-106）的各有关数值代入式（3-105），就可以得到保证不根切的条件：

$$\frac{l_f}{c - l_f} \tau_A V_{75} \leq \theta_A \quad (3-107)$$

对于滚子Ⅱ来说，我们也可以推出该式，不过要取 $V = V_{25}$ （若是对称曲线， $V_{25} = V_{75}$ ）。 V_{25} 、 V_{75} 都由给定的运动规律中的速度曲线确定，如变形正弦曲线的 $V_{75} = V_{25} = 1.51$ 。式（3-107）亦可写成

$$k = \frac{l_f}{c} \leq \frac{\theta_A}{\tau_A V_{75} + \theta_A} \quad (3-108)$$

这是由不根切条件决定的径距比 k 的取值范围。为了保险起见，可以把取值范围控制得更严一些，把 V_{75} 改成最大值 V_m （对称曲线的 $V_m = V_{50}$ ，如变形正弦曲线的 $V_m = V_{50} = 1.76$ ）。

3. 压力角条件

由于平行分度凸轮的从动件是多个滚子构成的，很难保证各个滚子的初始位置都配置得合理。有些滚子的压力角比较大。但由于凸轮总是有两个轮廓同时啮合，所以计算最大压力角的方法与一般的摆动从动件凸轮有所不同。

如前所述，把给滚子施加正扭矩的轮廓称为主轮廓，施加负扭矩的称为副轮廓。一般地说，只要主轮廓的最大压力角小于允许值，机构就能正常运转。分析与计算实践表明，一般常用的平行分度凸轮机构主轮廓的最大压力角常出现在运动起始处和速度最大的位置的附近。为了计算方便，常取主轮廓初始位置时的压力角作为最大压力角的近似值〔68〕。

由上一节的式（3-58）可得平行分度凸轮最大压力角的近似值为

$$\alpha_n = \beta_{f_0} + \frac{\pi}{2} \quad (3-109)$$

式中, β_{f_0} 为起始时刻的 β_f , 在第一节的式 (3-28) 中, 代入 $\dot{\theta}_1 = 0$ (起始时刻速度为零) 和 $\theta_1 = \tau_0$ (起始时刻 $\tau = 0$, 而 $\theta_1 = \tau_0 + \tau$), 则可得

$$\beta_{f_0} = \arctan \frac{c \sin \tau_0}{l_f - c \cos \tau_0} \quad (3-110)$$

由式 (3-109) 有:

$$\tan \alpha_n = -\operatorname{ctg} \beta_{f_0}$$

再由式 (3-110) 有

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha_n &= \frac{c \cos \tau_0 - l_f}{c \sin \tau_0} \\ \text{或} \quad \alpha_n &= \arctan \frac{c \cos \tau_0 - l_f}{c \sin \tau_0} \end{aligned} \right\} \quad (3-111)$$

令最大压力角的允许值为 α_p , 则应有

$$\alpha_n \leq \alpha_p$$

或

$$\frac{c \cos \tau_0 - l_f}{c \sin \tau_0} \leq \tan \alpha_p \quad (3-112)$$

亦可改写成:

$$k = \frac{l_f}{c} \geq \cos \tau_0 - \tan \alpha_p \sin \tau_0 \quad (3-113)$$

式 (3-113) 是由压力角条件决定的径矩比 k 的取值范围。

三、设计步骤

1. 选择从动盘运动规律

一般多用综合性能好的修正正弦曲线。在根切条件为主要矛盾时 (一般在分度数 n 比较小的时候), 可选用最大速度 V_n 比较小的修正等速度曲线。

2. 确定动程角 θ_d

根据运动特性系数 (动静比 d) 确定动程角 θ_d 。

一般地说, 考虑到头数 G_n , 式 (3-71) 应写为

$$\theta_1 = \frac{d}{1+d}(G_n \pi)$$

3. 求径矩比 l_j/c

根据外径、不根切和压力角三个制约条件求出比值 l_j/c

由不根切条件式 (3-105) 和外径条件式 (3-100) 可以求得 l_j/c 的上限。

而 l_j/c 的下限由压力角条件给出, 即取决于式 (3-113), 此时, 许用压力角 α_s 一般可取 60° , 也可取到 65° 左右 (因为最大压力角一般在惯性力矩很小的起始点处)。

在可能的条件下, 应尽量选较大的 l_j/c 。这样, 不但可以减小最大压力角, 还可以选用较大的滚子。

4. 求 l_j, c

根据工艺、结构等要求设定从动滚子中心回转半径 l_j , 再通过上面确定的比值 l_j/c 求出中心距 c 。

5. 计算 r_{1a}

计算凸轮轮廓的最大理论外径 r_{1a} , 并确定实际理论外径。

如前所述, 由方程组 (3-79) 求出 T_1 和 T_2 , 进而求得 S_1 和 S_2 。则最大理论外径为 (参见图3-14),

$$r_{1a} = \sqrt{l_j^2 + c^2 - 2l_j c \cos \tau_1}$$

其中,

$$\tau_1 = \tau_{s1} + \tau_s S_1$$

在最大理论外径处会发生尖点, 这必然会导致冲击。因此, 实用的理论外径 r_s 一般比 r_{1a} 要小一些, 也即相当于增加了一个倒角。为了保证 $T_1 \geq T_{2s}$, 实用理论外径应满足下面条件

$$r_s \geq \sqrt{c^2 + l_j^2 - 2cl_j \cos(0.5\tau_1)}$$

6. 计算轮廓曲线

计算方法与前两节基本相同。所不同的是同一个凸轮轮廓 (除了圆弧部分外) 要分段计算。例如, 对于图3-11a 中的实线轮廓来说, 轮廓 I 由 $T=0$ 计算到 T_1 , 轮廓 II 由 $T=T_1$ 算到 $T=1$ 。

7. 校核压力角、曲率半径和接触应力

所用方法亦与前两节所介绍的相同。如果不符合要求，则要调整 θ_1 、 k 等参数，重新计算，直到符合要求为止。

必要时，还须校核强度与接触应力。其方法与一般凸轮相同，可参见后面第七章。

压力角过大是平行分度凸轮的一大缺点。为了克服这个缺点，可以再增加一个凸轮和一排滚子，作成所谓三联凸轮。这种三联平行分度凸轮的最大压力角小，刚度大，特别适用于高速以及分度数 n 很小的情况。

由于前述种种限制条件，本节所介绍的外接式平行分度凸轮机构只能用于分度数 $n \leq 8$ 的场合。在 $n > 8$ 时，可采用内接式平行分度凸轮机构。

第四章 空间凸轮机构的运动学分析

空间凸轮机构在缝纫机、封罐机、灯泡机械、自动成型机械、自动装配机械等自动机械中有着广泛的应用。与平面凸轮机构相比，空间凸轮机构具有体积小、结构紧凑、刚性好、传动扭矩大等优点。目前，空间凸轮机构大多用于把连续运动转换为间歇运动，即作为空间分度机构应用。与平行分度凸轮机构相比，空间凸轮分度机构除了上述优点之外，还有分度数大等优点。例如，图 1-9 所示圆柱形凸轮分度机构的分度数可以达到 60；图 1-10 所示滚齿式凸轮分度机构的分度数也可以达到 24。所以，目前在分度数大于 8，转速高、扭矩大等场合，一般都用空间凸轮分度机构。空间凸轮机构的缺点是设计计算繁杂和加工制造麻烦。本章运用空间回转张量作分析工具，建立了空间凸轮统一的数学模型，给出了与平面凸轮类同的通用计算公式和计算框图，其逻辑结构简单、易懂，便于掌握。随着 CAD/CAM（计算机辅助设计与制造）技术的不断推广应用，空间凸轮机构的设计与制造上的困难将逐渐得到克服，从而大大扩展其应用范围。

与平面凸轮机构的分析方法类似，本章用空间啮合原理分析从动曲面与凸轮曲面在接触线位置的几何关系^[69, 70]，推导出常用空间凸轮机构轮廓曲面及其曲率分析的通用计算公式。所用的数学工具有回转变换张量^[71, 75]（参见附录 II）和微分几何基本理论（参见附录 III）。

第一节 空间凸轮机构轮廓曲面的通用计算方法

常用的三种空间凸轮机构的主从动件空间相对位置和运动变换关系，如图 4-1 和图 4-2 所示。图 4-1 a、b 分别表示圆柱式凸轮机构和滚子齿式（凹桶形）凸轮机构。它们的共同点是：凸

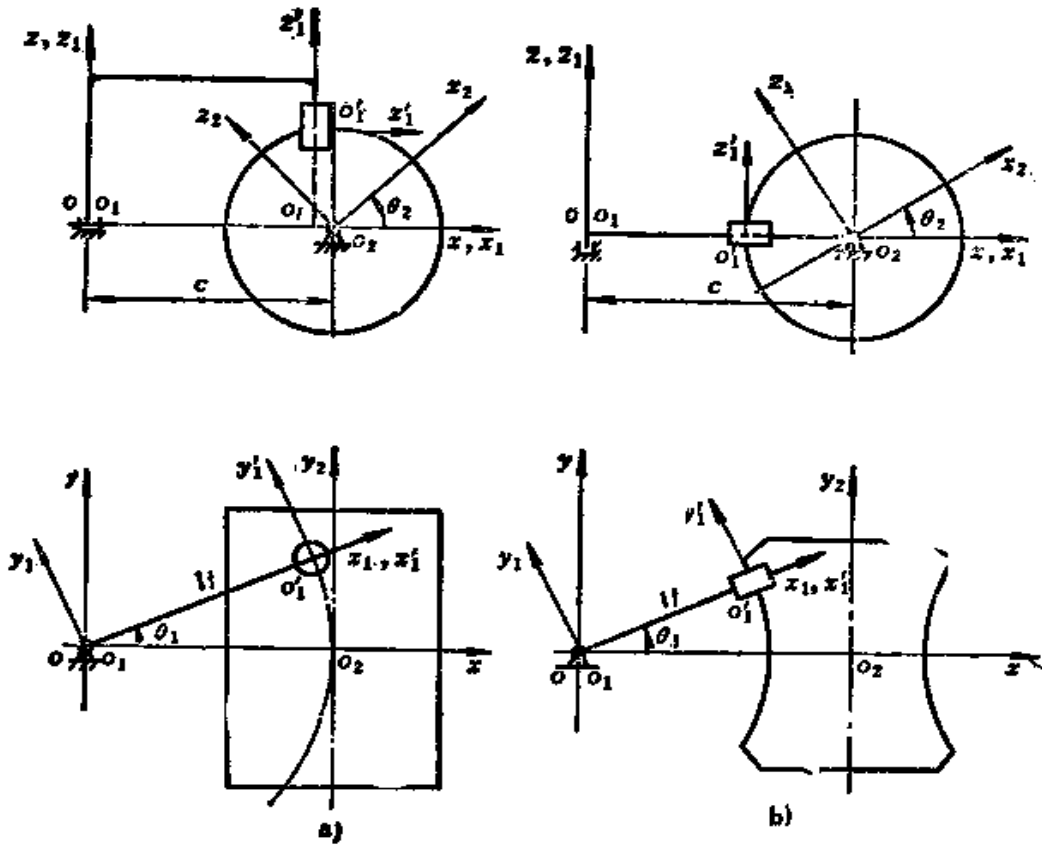


图4-1 空间凸轮运动变换关系示意图

a) 圆柱式 b) 滚子齿式

轮与从动件都作定轴转动，其回转轴在空间垂直而不相交。

为此，建立如图所示四个坐标系：

固定坐标系 $o-xyz$ ； z 轴与从动件回转轴重合， x 轴重合于凸轮回转轴 (y_2) 与从动件回转轴 (z) 的公垂线。 x 轴与 z 轴的交点即为原点 o ， x 轴与凸轮回转轴 y_2 的交点设为 o_2 ， x 轴的正向由 o_1 指向 o_2 。 y 轴与凸轮回转轴 y_2 平行。

从动件坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ ：与从动件固接的坐标系。原点 o_1 与 o 重合， z_1 为从动件回转轴， x_1 轴与从动件回转臂中心线 o_1o_1' 重合。该坐标系随从动件一起绕 z 轴作定轴转动，其角位移用 θ_1 表示。

滚子坐标系 $o'_1-x'_1y'_1z'_1$ 与从动件固接的坐标系，其原点为滚子的基准点 o'_1 （一般取其形心）。 x'_1 、 y'_1 、 z'_1 轴分别与 x_1 、 y_1 、 z_1 轴平行。因此，该坐标系与 $o_1-x_1y_1z_1$ 基本上一致，只是原点 o'_1 与 o_1 不重合。引进该坐标系是为了简化从动曲面方程。

凸轮坐标系 $o_2-x_2y_2z_2$ 与凸轮固接的坐标系。 y_2 轴为凸轮的回转轴，恒与 y 平行。原点 o_2 为凸轮曲面的基准点。该坐标系随凸轮绕 y_2 轴作定轴转动，其角位移用 θ_2 表示。

选择上述坐标系就可使常用的两种空间凸轮机构——圆柱式与滚子齿式的空间运动相对关系一致起来，从而可以用统一的数学模型来进行两种空间凸轮机构的计算。由图 4-1 a、b 可以明显地看出，这两种型式的凸轮机构的区别只在于从动件滚子中心线的方位不同：圆柱式凸轮机构滚子中心线与 x 、 x_1 轴平行；而滚子齿式凸轮机构的滚子中心线与 x_1 轴重合（或平行）。

图 4-2 是直动从动件圆柱式凸轮机构，它可以看成是图 4-1 a 的特殊情况（即从动滚子的回转半径为无穷大时），其设计计算要简单一些。

下面，我们以图 4-1 a 所示的圆柱式凸轮机构为例，阐述空间凸轮机构轮廓曲面参数的求解方法。其结果具有通用性，更换若干参数或稍作改动就可以得到其他类型的求解公式。关于从动曲面的形状，则先讨论最常见、最简单的情况——圆柱面，然后再推广到圆锥面和一般的鼓形曲面等较为复杂的情况。

为了考察空间各矢量之间的关系，将图 4-1 a 放大为图 4-3。与前述平面曲线的啮合相类似，图 4-3 中的有关参数所表示的意

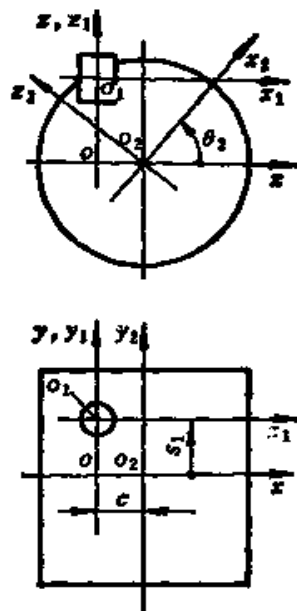


图4-2 直动从动件
圆柱凸轮机构运动变
换关系示意图

又如下:

$c = o_1o_2$: 从动件回转轴 z_1 (即 z 轴) 与凸轮回转轴 y_2 之间的最短距离。

$l_f = oo'_1$: 从动件回转半径, 即 z'_1 轴与 z 轴之间的距离。

$\delta_0 = o_1o'_1$: 从动坐标系原点 o_1 到 xoy 平面的距离。

$$\theta_1 = \angle o'_1oo_2 = \theta_{10} + \theta_{1t} \quad (4-1)$$

式中, θ_1 表示动坐标系, 即从动件相对于固定坐标系 $o-xyz$ 的角位移; θ_{10} 为初始位置, 即 $t = 0$ 时 θ_1 的值; $\theta_{1t} = \theta_1(t)$ 为时间 t 的函数, 是 t 瞬时 $o_1-x_1y_1z_1$ 对固定坐标系的角位移量。

$$\theta_2 = \angle x_2o_2x = \theta_{20} + \theta_{2t} \quad (4-2)$$

式中, θ_2 为动坐标系 $o_2-x_2y_2z_2$, 即凸轮相对于固定坐标系的角位移; θ_{20} 是 θ_2 的初始值; θ_{2t} 为 t 瞬时的角位移。一般都取 $\theta_{20} = 0$, 则 $\theta_2 = \theta_{2t}$ 。

上述参数中, l_f 、 c 、 δ_0 和 θ_{10} 是几何参数。对于一确定的空间凸轮机构, 它们都是常量, 而 θ_{1t} 、 θ_{2t} 是运动参数, 分别表示从动件与凸轮的定轴转动量。

与平面凸轮一样, 用图 4-3 中的矢量表示从动件与凸轮之间的运动关系与几何关系。设 t 瞬时, 从动曲线上的 K_1 点与凸轮曲线上的 K_2 点啮合于固定坐标系上的 K 点。图中所示的矢量, 按其所处的坐标系, 可以分为以下四类:

(1) 滚子坐标系 $o'_1-x'_1y'_1z'_1$ 中的矢量

设从动曲面的几何形状矢量函数为 R_f , 其表达式为

$$\mathbf{R}_f = \overrightarrow{o'_1K_1} = R_f(\beta_f, \delta_f)$$

式中, β_f 、 δ_f 为其曲面参数。

(2) 从动坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 中的矢量

设从动件回转臂矢量为 L_f , 滚子中心高度矢量为 D_f , 滚子中心 o'_1 在坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 中的位置矢量为 R_{f0} 。它们的表达式如下:

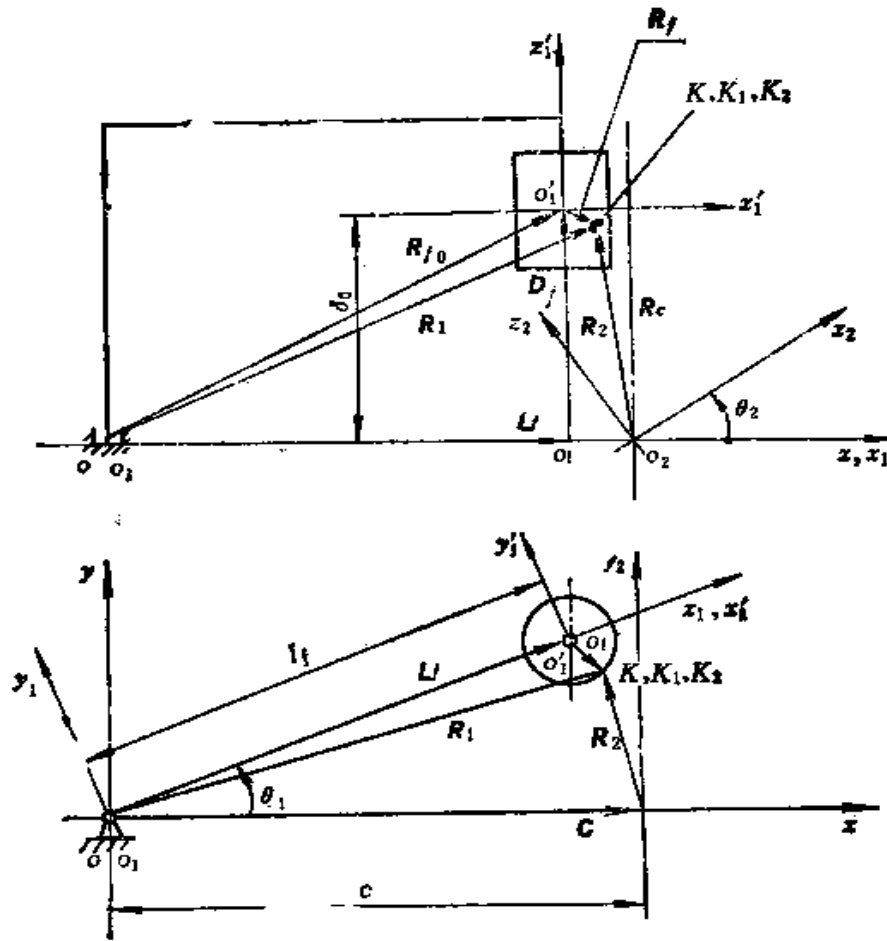


图4-3 空间凸轮机构的矢量关系图

$$\vec{L}_f = \vec{o_1 o_1'} = l_f \vec{i}$$

$$\vec{D}_f = \vec{o_1 o_1'} = \delta_0 \vec{k}$$

$$\vec{R}_{f0} = \vec{o_1 o_1'} = \vec{L}_f + \vec{D}_f \quad (4-3)$$

式中， \vec{i} 与 \vec{k} 分别表示 x 轴方向与 z 轴方向的单位矢量，即

$$\vec{i} = [1, 0, 0]^T$$

$$\vec{k} = [0, 0, 1]^T$$

(3) 固定坐标系 $o-xyz$ 中的矢量

设 R_1 、 R_2 分别是啮合点 K 在固定坐标系中相对于 o_1 、 o_2 点的位置矢量， C 为从动件与凸轮的回转中心相对位置的中心距矢

量，它是一常矢量。由图 4-3，它们可表成

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \overrightarrow{o_1 K} \\ \mathbf{R}_2 &= \overrightarrow{o_2 K} \\ \mathbf{C} &= \overrightarrow{o_1 o_2} = ci \end{aligned}$$

三者之间的关系为

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{C} \quad (4-4)$$

(4) 凸轮坐标系 $o_2-x_2y_2z_2$ 中的矢量

设 R_c 为凸轮轮廓曲面的几何形状函数，凸轮面参数为 β_c 、 δ_c ，则 R_c 可表成

$$\mathbf{R}_c = \overrightarrow{o_2 K_2} = R_c(\beta_c, \delta_c)$$

利用回转变换张量（参见附录 II），可以方便地把 R_c 、 R_f 转换为固定坐标系中的矢量 R_1 、 R_2 ：

$$\mathbf{R}_1 = e^{j\theta_1}(R_f + R_{f_0}) = e^{j\theta_1}(R_f + L_f + D_f) \quad (4-5)$$

$$\mathbf{R}_2 = e^{j\theta_2}(R_c) \quad (4-6)$$

式 (4-5) 表明，滚子坐标系中的矢量 R_f 经过一次平移变换（加上 R_{f_0} ），变为从动件坐标系中的矢量，再经过一次回转变换成为固定坐标系中的矢量。式 (4-6) 则说明，凸轮曲面矢量函数经过一次回转变换就成为固定坐标系中的矢量。

综合式 (4-4)、(4-5) 及 (4-6)，可以得到由从动曲面矢量函数 R_f 求解凸轮曲面矢量函数 R_c 的矢量方程：

$$\mathbf{R}_c = e^{-j\theta_2}[e^{j\theta_1}(R_f + L_f + D_f) - \mathbf{C}] \quad (4-7)$$

代入各有关矢量的表达式可得：

$$\mathbf{R}_c = e^{j\theta_2}[e^{j\theta_1}(R_f + l_f i) - (ci - \delta_c k)] \quad (4-8)$$

式 (4-7) 或式 (4-8) 就是凸轮曲面与从动曲面之间的一般关系式。它对于二曲面都作定轴转动，且回转轴垂直而不相交的空间啮合曲面都是适用的。该式与平面曲线啮合中的式 (3-7a) 类同。与平面问题类似，如果已知从动曲面的矢量函数 $R_f(\beta_f, \delta_f)$ 的表达式（即已知曲面的几何形状）和其他有关运动参数、几何

参数, 要求解凸轮曲面的矢量函数 R_i , 必须先求出每个瞬时的接触线的方程。与平面啮合中的求解接触点位置参数类似, 可以通过空间啮合条件求解接触线方程, 具体解法如下。

对式 (4-4) 求导, 并注意 C 是常矢量, 得

$$\dot{R}_1 = \dot{R}_2 \quad (4-9)$$

而由式 (4-5)、式 (4-6) 以及回转张量微分法则〔附录 II 之式 (II-38)〕, 并注意 R_{f_0} 为常矢量, 则有

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= \theta_1 J_1 e^{j_1 \theta_1} (R_f + R_{f_0}) + e^{j_1 \theta_1} (\dot{R}_f) \\ &= \theta_2 J_1 e^{j_1 \theta_2} (R_c) + e^{j_1 \theta_2} (\dot{R}_c) \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \left. \begin{aligned} \dot{R}_1 &= \theta_1 J_1 R_1 + e^{j_1 \theta_1} (\dot{R}_f) \\ \dot{R}_2 &= \theta_2 J_2 R_2 + e^{j_2 \theta_2} (\dot{R}_c) \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} V_{1r} &= e^{j_1 \theta_1} (\dot{R}_f) \\ V_{2r} &= e^{j_2 \theta_2} (\dot{R}_c) \\ V_{12} &= V_{1r} - V_{2r} \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

并将式 (4-10) 代入式 (4-9), 可得

$$V_{12} = \theta_2 J_2 R_2 - \theta_1 J_1 R_1 \quad (4-12)$$

再代入关系式 (4-4), 又可得

$$V_{12} = (\theta_2 J_2 - \theta_1 J_1) R_1 - \theta_2 J_2 C \quad (4-13)$$

再根据回转张量运算性质 (参见附录 II) 有

$$J_j i = -k = -[0, 0, 1]^T$$

$$J_j k = i = [1, 0, 0]^T$$

因此, 式 (4-10) 变为:

$$V_{12} = (\theta_2 J_2 - \theta_1 J_1) e^{j_1 \theta_1} (R_f + l_j i) + \theta_2 (ck + \delta_0 i) \quad (4-14)$$

式 (4-11) 中的 V_{1r} 是从动曲面上 K_1 点的切向速度, 即 K_1 点的相对速度矢量; V_{2r} 是凸轮曲面上 K_2 点的切向速度—— K_2 的相对速度矢量。由式 (4-11) 可知, V_{1r} 、 V_{2r} 都是固定坐标系中的矢量。当 K_1 、 K_2 啮合时, 即都重合于 K 点时, V_{1r} 、 V_{2r} 都处于过 K 点 (亦过 K_1 、 K_2 点) 的二曲面的公切面上。 V_{12} 则为二曲面在啮合处的相对滑动速度, 即 K_1 相对于 K_2 的速度。

再由附录Ⅲ式(Ⅲ-9)可得从动曲面在 K_1 点的单位法向矢量为

$$n_f = \left(\frac{\partial R_f}{\partial \beta_f} \times \frac{\partial R_f}{\partial \delta_f} \right) / \left| \frac{\partial R_f}{\partial \beta_f} \times \frac{\partial R_f}{\partial \delta_f} \right|$$

它也是曲面参数 β_f 、 δ_f 的函数。在 t 瞬时，从动曲面绕 z 轴回转了 θ_1 ， K_1 点与凸轮曲面上的 K_2 点啮合， K_1 点的法向矢量 n_f 亦随从动曲面绕 z 轴回转了 θ_1 ，与二曲面在 K_1 、 K_2 点的公法线方向单位矢量 n_1 重合。即

$$n_1 = e^{J_1 \theta_1} (n_f) \quad (4-15)$$

将式(4-14)、式(4-15)代入附录Ⅳ的空间啮合条件式(Ⅳ-1)

$$V_{12} \cdot n_1 = 0 \quad (Ⅳ-1)$$

可得

$$[e^{J_1 \theta_1} (n_f)] \cdot [(\dot{\theta}_2 J_2 - \dot{\theta}_1 J_1) e^{J_1 \theta_1} (R_f + l_f i) + \dot{\theta}_2 (ck + \delta_0 i)] = 0 \quad (4-16)$$

式中， $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 分别是从动件和凸轮的角速度， θ_1 是从动件的角位移，由其运动规律决定。上述运动参数和几何参数 c 、 l_f 、 δ_0 在初步设计后都是已知量。而 n_f 、 R_f 都是从动曲面参数 β_f 、 δ_f 的函数。所以，式(4-16)是 β_f 、 δ_f 的函数关系式。

式(4-16)的展开运算是相当复杂的。利用回转变换张量可以简化运算过程。首先将式(4-14)的 V_{12} 表达式作如下变换：

$$V_{12} = e^{J_1 \theta_1} [(\dot{\theta}_2 H - \dot{\theta}_1 J_1) (R_f + l_f i) + \dot{\theta}_2 (ck + \delta_0 r)] \quad (4-17)$$

$$\text{式中, } H = e^{-J_1 \theta_1} J_2 e^{J_1 \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & -\sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r = e^{-J_1 \theta_1} (i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由附录Ⅱ式(Ⅱ-24)可知， J_2 与 $e^{J_1 \theta_1}$ 有关系

$$J_2 e^{J_1 \theta_1} = e^{J_1 \theta_1} J_2$$

即二者相乘符合交换律。而

$$J_j e^{j_1 \theta_1} = e^{j_1 \theta_1} (e^{-j_1 \theta_1} J_j e^{j_1 \theta_1}) = e^{j_1 \theta_1} H$$

即 J_j 与 $e^{j_1 \theta_1}$ 相乘不符合交换律。这是因为 J_j 与 $e^{j_1 \theta_1}$ 的回转轴不相同的缘故。另外, 考虑到

$$k = e^{j_1 \theta_1} k$$

$$i = e^{j_1 \theta_1} (e^{-j_1 \theta_1} i) = e^{j_1 \theta_1} r$$

就很容易得到式 (4-17) 了。再令

$$V_{12}^{(1)} = (\dot{\theta}_2 H - \theta_1 J_2)(R_j + l_j i) + \dot{\theta}_2 (ck + \delta_0 r) \quad (4-18)$$

则有,
$$V_{12} = e^{j_1 \theta_1} (V_{12}^{(1)}) \quad (4-19)$$

$V_{12}^{(1)}$ 实际上是从动坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 中的相对滑动速度矢量。将式 (4-15)、(4-19) 代入啮合条件式 (IV-1) 得,

$$[e^{j_1 \theta_1} (n_j)] [e^{j_1 \theta_1} (V_{12}^{(1)})] = 0$$

由回转变换张量性质式 (II-30) 有

$$n_j \cdot V_{12}^{(1)} = 0 \quad (4-20)$$

将式 (4-18) 展开可得

$$V_{12}^{(1)} = \dot{\theta}_2 \left\{ \begin{array}{l} \theta_1' y_j + (z_j + \delta_0) \cos \theta_1 \\ -\theta_1' (x_j + l_j) - (z_j + \delta_0) \sin \theta_1 \\ -(x_j + l_j) \cos \theta_1 + y_j \sin \theta_1 + c \end{array} \right\} \quad (4-21)$$

式中, $\theta_1' = \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{d\theta_1}{d\theta_2}$, 是从动件相对于凸轮的角速度。 x_j 、 y_j 、

z_j 是从动曲面矢量函数 R_j 在 x_1 、 y_1 、 z_1 坐标轴上的分量, 都是曲面参数 β_j 、 δ_j 的函数, 即

$$R_j = [x_j, y_j, z_j]^T \quad (4-22)$$

再令
$$n_j = [\lambda_j, \mu_j, \nu_j]^T \quad (4-23)$$

则由式 (4-20)、式 (4-21) 可得

$$P_1 \sin \theta_1 + P_2 \cos \theta_1 + P_3 = 0 \quad (4-24)$$

式中 $P_1 = \nu_j y_j - \mu_j (z_j + \delta_0)$

$$P_2 = \lambda_j (z_j + \delta_0) - \nu_j (x_j + l_j)$$

$$P_3 = \theta_1' [\lambda_j y_j - \mu_j (x_j + l_j)] + c \nu_j$$

只要给定从动曲面的几何形状, 就可以知道

$$R_j = [x_j, y_j, z_j]^T \text{ 与 } n_j = [\lambda_j, \mu_j, \nu_j]^T \text{ 关于曲面参数 } \beta_j,$$

δ_j 的表达式, 从而求得系数 P_1 、 P_2 、 P_3 , 代入式 (4-24) 就可得到 β_j 与 δ_j 的隐函数表达式。一般地说, 系数 P_1 、 P_2 、 P_3 都是含有 $\sin\beta_j$ 、 $\cos\beta_j$ 项的函数。对圆柱、圆球等简单曲面来说, 式 (4-24) 通常可化成为如下的形式:

$$Q_1 \sin\beta_j + Q_2 \cos\beta_j + Q_3 = 0 \quad (4-25)$$

Q_1 、 Q_2 、 Q_3 都是 δ_j 的函数。经过适当的三角变换, 就可将 β_j 与 δ_j 的隐函数变为下述形式的显函数:

$$\left. \begin{aligned} \beta_j &= 2 \arctan \frac{-Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3^2}}{Q_1 - Q_2} \\ \text{在 } Q_3 &= 0 \text{ 时,} \\ \beta_j &= \arctan \left(-\frac{Q_2}{Q_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

为了上机运算方便, 我们规定 β_j 在区间 $[-\pi, \pi]$ 中选取。一般地说, 本书中的一切反正切函数如不作特殊说明, 都是用算法语言中的 ATN2 函数。故这里的 β_j 应有两个解, 这说明可以同时存在两个符合条件的凸轮曲面与滚子接触。

综上所述, 求解空间凸轮轮廓曲面须应用下列一个矢量方程和一个标量方程组成的方程组, 即由式 (4-20) [或式 (4-25)] 和式 (4-8):

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{V}_{12}^{(1)} &= 0 \\ \mathbf{R}_c &= e^{-j\theta_2} [e^{j\theta_1} (\mathbf{R}_j + l_j \mathbf{i}) - (c\mathbf{i} - \delta_0 \mathbf{k})] \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

用式 (4-25) 代替式 (4-20), 并将 \mathbf{R}_c 的表达式展开, 则式 (4-27) 也可写成:

$$\left\{ \begin{aligned} Q_1 \sin\beta_j + Q_2 \cos\beta_j + Q_3 &= 0 \\ \mathbf{R}_c &= [x_c, y_c, z_c]^T \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} x_c &= (x_j + l_j) \cos\theta_1 \cos\theta_2 - y_j \sin\theta_1 \cos\theta_2 - (x_j + \delta_0) \sin\theta_2 - c \cos\theta_2 \\ y_c &= (x_j + l_j) \sin\theta_1 + y_j \cos\theta_1 \\ z_c &= (x_j + l_j) \cos\theta_1 \sin\theta_2 - y_j \sin\theta_1 \sin\theta_2 + (x_j + \delta_0) \cos\theta_2 - c \sin\theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (4-29)$$

事实上，正如附录IV中所指出的一样，在式(4-27)〔或式(4-28)〕中，第一式给出了某瞬时从动曲面上的一条曲线——接触线；第二式是将接触线的方程从从动坐标系转换到凸轮坐标系中。各个瞬时的被转换到凸轮坐标系中的接触线的集合就是凸轮曲面，其矢量函数就是 R_c 。利用方程组(4-28)可以方便地求解各种绕相互垂直而不相交的轴作定轴转动的共轭曲面问题。

图4-2所示之直动从动件空间凸轮机构可以按上述凸轮机构的特例来处理。事实上，只需把式(4-27)中的第二式稍作变动就可得直动从动件空间凸轮机构曲面的求解方程组：

$$\left. \begin{aligned} n_1 \cdot V_{12} &= 0 \\ R_c &= e^{-J_1 \theta_1} [R_f + s_1 j - (c i - \delta_0 k)] \end{aligned} \right\} \quad (4-30)$$

第二式是很容易推得的，这里从动件的运动是平移，其线位移量为 s_1 ，方向沿着 y 轴，即凸轮轴线方向，故只须加上 $s_1 j$ (j 是 y 方向的单位矢量)，作平移变换。 c 、 δ_0 等参数的涵义同式(4-27)。用同样的方法，可求得相对滑动速度

$$V_{12} = \dot{\theta}_2 J_2 [R_f + s_1 j - (c i - \delta_0 k)] - \dot{s}_1 j \quad (4-31)$$

式中， $\dot{s}_1 = \frac{ds_1}{dt}$ ，是从动件直动的速度。由于这里从动曲面只作平移运动，所以其上任一点的单位法向矢量在从动坐标系和固定坐标系中的表达式是相同的，即

$$n_1 = n_f = [\lambda_f, \mu_f, \nu_f]^T$$

令 $s'_1 = \frac{\dot{s}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{ds_1}{d\theta_2}$ ，则由 V_{12} 与 n_1 的数积为零可得 β_f 与 δ_f 的函数关系式：

$$-\lambda_f(z_f + \delta_0) + \mu_f s'_1 + \nu_f(c - x_f) = 0 \quad (4-32)$$

而角度 β_f 在该式中往往以 $\sin \beta_f$ 、 $\cos \beta_f$ 的形式出现。这样，式(4-30)也可以写成下述形式：

$$\left\{ \begin{aligned} Q_1 \sin \beta_f + Q_2 \cos \beta_f + Q_3 &= 0 \\ R_c &= [x_c, y_c, z_c]^T \end{aligned} \right\} \quad (4-33)$$

式中, 系数 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 由式 (4-32) 确定。而 R_c 在坐标轴上的分量的表达式为:

$$\left. \begin{cases} x_c = (x_f - c) \cos \theta_2 - (z_f + \delta_0) \sin \theta_2 \\ y_c = y_f + s_1 \\ z_c = (x_f - c) \sin \theta_2 + (z_f + \delta_0) \sin \theta_2 \end{cases} \right\} \quad (4-34)$$

第二节 常用空间凸轮机构轮廓曲面的计算 及其通用程序框图

本节介绍利用上节的通用公式计算常用的几种空间凸轮机构的轮廓曲面的具体方法与步骤。

一、摆动从动件圆柱空间凸轮机构——z向排列滚子从动件空间凸轮

其结构示意图如图 4-1 a 所示。滚子一般为圆柱形, 也有圆锥形、鼓形等形状。

1. 圆柱形从动滚子

与滚子固结的从动坐标系及其曲面参数 β_f 、 δ_f 如图 4-4 所示。因此, 该圆柱面的矢量函数为:

$$R_f = \begin{Bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_f \cos \beta_f \\ r_f \sin \beta_f \\ \delta_f \end{Bmatrix} \quad (4-35)$$

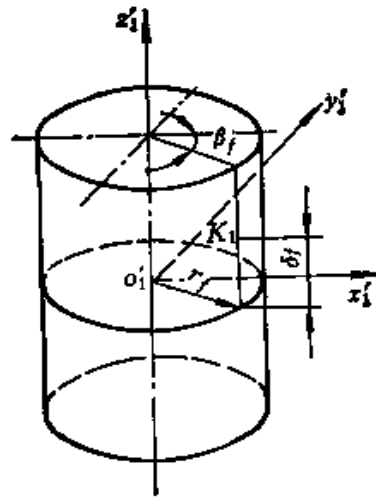


图 4-4 圆柱形从动滚子的坐标参数

式中, r_f 是圆柱的半径。由附录 III 式 (III-9), 可得其单位法向矢量为:

$$n_f = \begin{Bmatrix} \lambda_f \\ \mu_f \\ \nu_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-36)$$

按式 (4-22) 所设, 则有

$$\begin{cases} x_f = r_f \cos \beta_f \\ y_f = r_f \sin \beta_f \\ z_f = \delta_f \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_f = \cos \beta_f \\ \mu_f = \sin \beta_f \\ \nu_f = 0 \end{cases}$$

将这些值代入式 (4-24)、(4-25) 及 (4-26) 即可得到 β_f 与 δ_f 的关系式, 并可表示为下述显函数形式:

$$\beta_f = \arctan \frac{(\delta_f + \delta_0) \cos \theta_1}{l_f \theta_1' + (\delta_f + \delta_0) \sin \theta_1} \quad (4-37)$$

显然, β_f 与滚子半径 r_f 无关。将式 (4-37) 与 R_f 的表达式联立, 即为从动曲面上瞬时接触线方程。下面, 具体分析一下接触线的几种特殊情况。

由于 θ_1' 是相对角速度 $\frac{d\theta_1}{d\theta_2}$, 所以在一个行程的起始和终了时刻, $\theta_1' = 0$ 。令起始时刻, 即 $t = 0$ 时, $\beta_f = \beta_{10}$, $\theta_1 = \theta_{10}$; 在终了时刻, 即 $t = t_A$ 时, $\beta_f = \beta_{1A}$, $\theta_1 = \theta_{1A}$ 。将 $\theta_1' = 0$ 代入式 (4-37) 可得:

$$\tan \beta_{10} = \operatorname{ctg} \theta_{10}$$

$$\tan \beta_{1A} = \operatorname{ctg} \theta_{1A}$$

这说明, β_{10} 与 θ_{10} 、 β_{1A} 与 θ_{1A} 都互为余角, 考虑到在所选的坐标系下, 有:

$$|\theta_{10}| < \frac{\pi}{2}$$

$$|\theta_{1A}| < \frac{\pi}{2}$$

若再规定 β_{10} 、 β_{1A} 取 $(-\pi, \pi)$ 区间中的值, 则由式 (4-37) 可得:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{10} \pm \theta_{10} &= \pm \frac{\pi}{2} \\ \beta_{1A} + \theta_{1A} &= \pm \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-38)$$

以上分析说明，在起始和终了时刻，曲面圆周方向参数 β_j 与母线方向参数 δ_j 无关，而只与从动曲面相对固定坐标系的初始（或终了）位置有关。这时接触线是平行于轴线的母线。其位置如图 4-5 a 所示。 K_{10} 、 K'_{10} 为初始时刻接触线的位置（说明从动圆柱曲面可同时与两个凸轮曲面啮合）， K_{1h} 、 K'_{1h} 表示终了时刻的接触线位置。

当 $\theta_1 = 0$ 时，即 x_1 轴与 x 轴重合时，滚子运动到中间位置，完成了行程的一半，这时有

$$\beta_j = \arctan \frac{\delta_j + \delta_0}{l_j \theta'_j}$$

即 β_j 的正切值与曲面高度参数 δ_j 成线性关系。这时的接触线为图 4-5 b 中的 ab 与 $a'b'$ 。

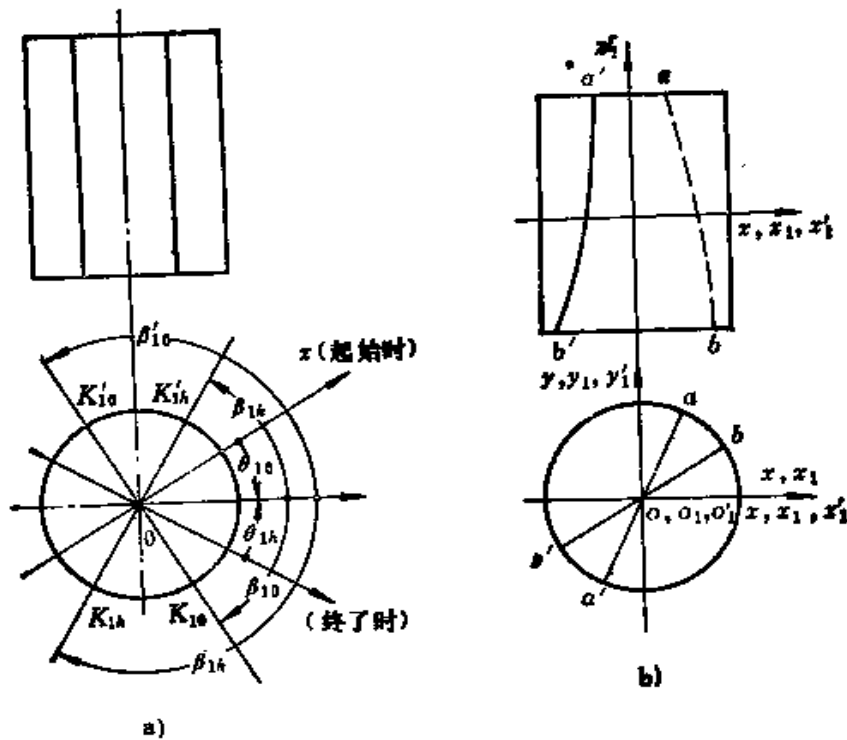


图 4-5 圆柱滚子的接触线

a) 起始和终了时刻的接触线 b) $\theta_1 = 0$ 时的接触线

将式 (4-35) 代入式 (4-28), 即可得凸轮曲面矢量函数:

$$\begin{cases} x_c = r_f \cos \theta_2 \cos(\beta_f + \theta_1) + l_f \cos \theta_1 \cos \theta_2 - (\delta_f + \delta_0) \sin \theta_2 - c \cos \theta_2 \\ y_c = r_f \sin(\beta_f + \theta_1) + l_f \sin \theta_1 \\ z_c = r_f \sin \theta_2 \cos(\beta_f + \theta_1) + l_f \cos \theta_1 \sin \theta_2 + (\delta_f + \delta_0) \cos \theta_2 - c \sin \theta_2 \end{cases} \quad (4-39)$$

该式中, r_f , l_f , δ_0 , c 都是已知的几何参数。由式 (4-1)、式 (4-2) 所设:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_{10} + \theta_{1t} \\ \theta_2 &= \theta_{2t} \end{aligned}$$

θ_{10} 也是已知几何参数。而 θ_{1t} 和 θ_{2t} 都是运动参数, 即时间 t 的函数。因此, 将式 (4-37) 代入式 (4-39), 就可得到凸轮曲面的参数方程, 其形式可表示为:

$$\begin{cases} x_c = x_c(\delta_f, t) \\ y_c = y_c(\delta_f, t) \\ z_c = z_c(\delta_f, t) \end{cases} \quad (4-40)$$

其参数为 δ_f 与 t 。在给定的某一瞬时, 给定一系列的圆柱面高度参数 δ_f , 就可得到一条在凸轮坐标系中的曲线(瞬时接触线)。而在 $[0, t_1]$ 区间中变换 t , 就可得到一曲线的集合, 即凸轮曲面。

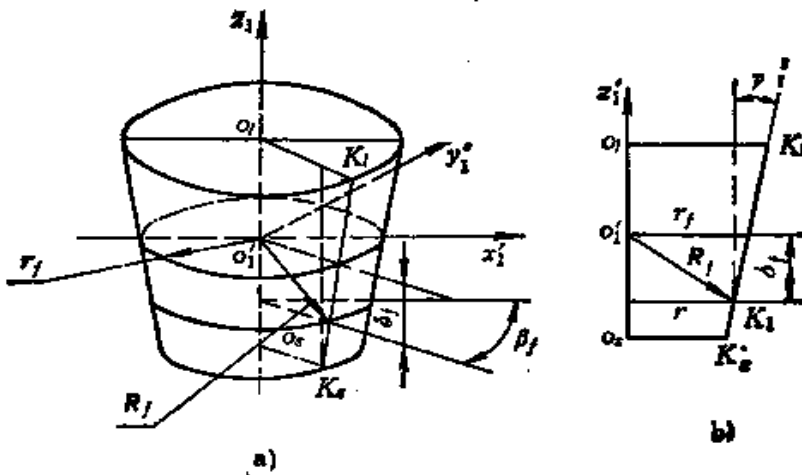


图4-6 圆锥形从动滚子的坐标参数

2. 圆锥形从动滚子

从动曲面的坐标系和曲面参数 β_f 与 δ_f 如图4-6所示。与圆柱面类似, β_f 为圆周参数, δ_f 为高度参数。 γ 为圆锥的锥度角, r_f 为坐标平面 $x'_f o'_f y'_f$ 所截的圆之半径。将图4-6 a 中的梯形 $o_f K_f K_f o_f$ 表示在图4-6 b 中, 各有关参数如图示。则很容易得到圆锥面上任一点 K_f 的坐标所表示的圆锥面的几何形状矢量函数:

$$R_f = \begin{Bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (r_f + \delta_f \tan \gamma) \cos \beta_f \\ (r_f + \delta_f \tan \gamma) \sin \beta_f \\ \delta_f \end{Bmatrix} \quad (4-41)$$

由此可求得法向矢量函数为:

$$n_f = \begin{Bmatrix} \lambda_f \\ \mu_f \\ \nu_f \end{Bmatrix} = \cos \gamma \begin{Bmatrix} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \\ \tan \gamma \end{Bmatrix} \quad (4-42)$$

代入式(4-24), 化简可得式(4-25)中的系数为:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -(r_f + \delta_f \tan \gamma) \tan \gamma \sin \theta_1 - (\delta_f + \delta_0) \sin \theta_1 - l_f \theta'_1 \\ Q_2 &= (\delta_f + \delta_0) \cos \theta_1 + (r_f + \delta_f \tan \gamma) \tan \gamma \cos \theta_1 \\ Q_3 &= l_f \tan \gamma \cos \theta_1 - e \tan \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4-43)$$

将这些值代入式(4-26), 求得 β_f , 再将 β_f 和式(4-41)的值代入式(4-27), 就可求出凸轮曲面的矢量函数。

3. 一般鼓形回转曲面从动滚子

上述方法可推广到一般的鼓形回转曲面。设一回转曲面的正视图, 即在 $x'_f o'_f z'_f$ 平面上的投影, 如图4-7 a 所示。该曲面由母线——平面凸曲线 $C-C$ 绕 z_f 轴回转而成。

令 $C-C$ 曲线的方程为

$$r = r(\delta_f)$$

式中, r 是曲线上任一点的回转半径, 实际上即为 x'_f 坐标, δ_f 为 z'_f 坐标, 就是前述曲面母线方向的参数。 r_f 为 $\delta_f = 0$ 时 r 的值。再令该曲面圆周方向的参数为 β_f (与前面的两种曲面一样, β_f 角以 x'_f 轴为始边), 则可得该回转曲面的矢量函数为

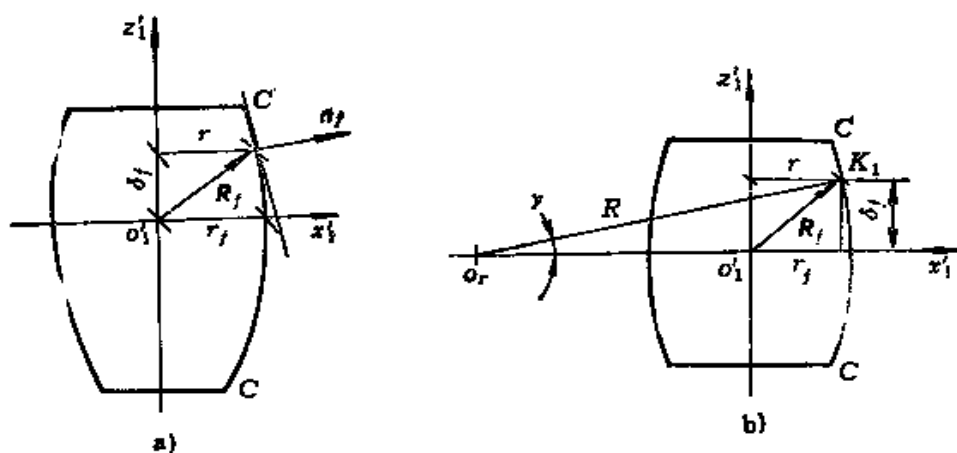


图4-7 鼓形回转曲面从动滚子的坐标参数

a) 一般鼓形 b) 圆弧鼓形

$$\mathbf{R}_f = \begin{Bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \cos \beta_f \\ r \sin \beta_f \\ \delta_f \end{Bmatrix} \quad (4-44)$$

由附录 III 的式 (III-9), 可得单位法向矢量函数为

$$\mathbf{n}_f = \begin{Bmatrix} \lambda_f \\ \mu_f \\ \nu_f \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \begin{Bmatrix} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \\ -r' \end{Bmatrix} \quad (4-45)$$

其方向如图4-7所示。

式中,
$$r' = \frac{dr}{d\delta_f} \quad (4-46)$$

将式 (4-44)、式 (4-45) 代入式 (4-24), 再与式 (4-25) 对照, 可得式 (4-26) 中的系数为

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -(\delta_f + \delta_0 + rr') \sin \theta_1 - l_f \theta_1' \\ Q_2 &= (\delta_f + \delta_0 + rr') \cos \theta_1 \\ Q_3 &= (l_f \cos \theta_1 - c) r' \end{aligned} \right\} \quad (4-47)$$

与前面的计算过程一样, 接着可以算出 β_f 与 R_0 。从上述分析过程可以看出, 与平面凸轮机构一样, 求解 R_0 的关键是求出系数 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 , 即求出 β_f 关于 δ_f 的关系式。而式 (4-47) 对一

切摆动从动回转曲面都是适用的。很容易验证，该式适用于前述圆柱面与圆锥面。

对于圆柱面，因为母线是与回转轴平行的直线，所以，按图4-7 a 所示之符号，有

$$r = r_f = \text{常数}, \quad r' = 0$$

代入式(4-47)可得：

$$Q_1 = -(\delta_f + \delta_0)\sin\theta_1 - l_f\theta_1'$$

$$Q_2 = (\delta_f + \delta_0)\cos\theta_1$$

$$Q_3 = 0$$

代入式(4-26)，即可得到式(4-37)。

对于圆锥曲面来说，参照图4-6、图4-7，可知以斜直线作为母线时，

$$r = r_f + \delta_f \tan\gamma$$

$$r' = \tan\gamma$$

代入式(4-47)，就可得与式(4-43)同样的结果。

运用通用性强的式(4-47)，可以方便地求解图4-7 b 所示之圆弧鼓形曲面从动滚子空间凸轮曲面。这种从动曲面是很有实用价值的。如图所示，母线 $C-C$ 是关于 x_1' 轴对称的一段圆弧，其半径为 R ，圆心在 x_1' 轴上。图示其他参数的意义同前。由几何关系易得

$$r = r_f + \sqrt{R^2 - \delta_f^2} - R$$

$$r' = -\frac{\delta_f}{\sqrt{R^2 - \delta_f^2}} = -\tan\gamma$$

其中， $\gamma = \angle K_1 O_1 O_1'$ ，是 δ_f 的函数。将上述 r 、 r' 的值代入式(4-47)得

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -[(\delta_f + \delta_0) - (r + \sqrt{R^2 - \delta_f^2} - R)\tan\gamma]\sin\theta_1 - l_f\theta_1' \\ Q_2 &= [(\delta_f + \delta_0) - (r + \sqrt{R^2 - \delta_f^2} - R)\tan\gamma]\cos\theta_1 \\ Q_3 &= -(l_f\cos\theta_1 - c)\tan\gamma \end{aligned} \right\} (4-48)$$

再由式 (4-26)、式 (4-29), 即可求出凸轮轮廓曲面 R_c 。

这样, 就可以得到从动曲面是任意回转曲面的摆动从动件圆柱空间凸轮曲面形状的通用计算公式。把式 (4-44) 代入式 (4-29) 得

$$\begin{cases} x_c = [r \cos(\beta_f + \theta_1) + l_f \cos \theta_1 - c] \cos \theta_2 - (\delta_f + \delta_0) \sin \theta_2 \\ y_c = r \sin(\beta_f + \theta_1) + l_f \sin \theta_1 \\ z_c = [r \cos(\beta_f + \theta_1) + l_f \sin \theta_1 - c] \sin \theta_2 + (\delta_f + \delta_0) \cos \theta_2 \end{cases} \quad (4-49)$$

其中, β_f 由式 (4-26) 确定, 即

$$\beta_f = 2 \arctan \frac{-Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3^2}}{Q_1 - Q_2}$$

Q_1 、 Q_2 、 Q_3 则由式 (4-47) 确定。因此, 只要给定从动曲面的几何形状 (即 r 、 r' 的表达式) 和其他几何参数 (δ_0 、 l_f 、 c 等)、运动参数 (θ_1 、 θ_2), 依次代入式 (4-47)、(4-26)、(4-49), 就可求出以 δ_f 、 t (或 θ_2) 为曲面参数的凸轮曲面函数 R_c 。

二、直动从动件圆柱空间凸轮机构

1. 圆柱形从动滚子

在这里, 从动曲面的坐标系及有关参数与图 4-4 所示完全相同, 因此有

$$R_f = \begin{cases} x_f \\ y_f \\ z_f \end{cases} = \begin{cases} r_f \cos \beta_f \\ r_f \sin \beta_f \\ \delta_f \end{cases}$$

$$n_f = \begin{cases} \lambda_f \\ \mu_f \\ \nu_f \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_f^2}} \begin{cases} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \\ 0 \end{cases}$$

将它们代入式 (4-32), 并对照式 (4-33), 可得

$$Q_1 = s_f'$$

$$Q_2 = -(\delta_f + \delta_0)$$

$$Q_3 = 0$$

如前所述, s_f' 是从动件移动的速度。再由式 (4-26), 有

$$\beta_f = \arctan \frac{\delta_f + \delta_0}{s'_1} \quad (4-50)$$

将 R_f 与 β_f 的表达式代入式 (4-34), 就可求得 R_0 。

2. 一般鼓形从动滚子

其坐标系与参数同图4-7。仿照前面的摆动鼓形滚子的计算过程, 按直动从动件空间凸轮的计算公式 (4-32) 及式 (4-33) 等, 依次可以得到下列结果:

$$\begin{aligned} R_f &= \begin{Bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \cos \beta_f \\ r \sin \beta_f \\ \delta_f \end{Bmatrix} \\ n_f &= \begin{Bmatrix} \lambda_f \\ \mu_f \\ \nu_f \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \begin{Bmatrix} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \\ -r' \end{Bmatrix} \\ \left. \begin{aligned} Q_1 &= s'_1 \\ Q_2 &= rr' - (\delta_f + \delta_0) \\ Q_3 &= -cr' \end{aligned} \right\} \quad (4-51) \end{aligned}$$

将上述有关值代入式 (4-34), 即可求得凸轮曲面矢量函数 R_0 。

三、滚子齿式空间凸轮机构—— x 向排列滚子从动件空间凸轮

先考察从动曲面为圆柱面的情况。该机构的运动变换关系如图 4-1 b 所示。其从动曲面的参数如图 4-8 a 所示, 仍用 δ_f 表示母线方向的参数, β_f 为圆周方向的参数。显然有

$$\left. \begin{aligned} R_f &= \begin{Bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_f \\ r_1 \cos \beta_f \\ r_1 \sin \beta_f \end{Bmatrix} \\ n_f &= \begin{Bmatrix} \lambda_f \\ \mu_f \\ \nu_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4-52)$$

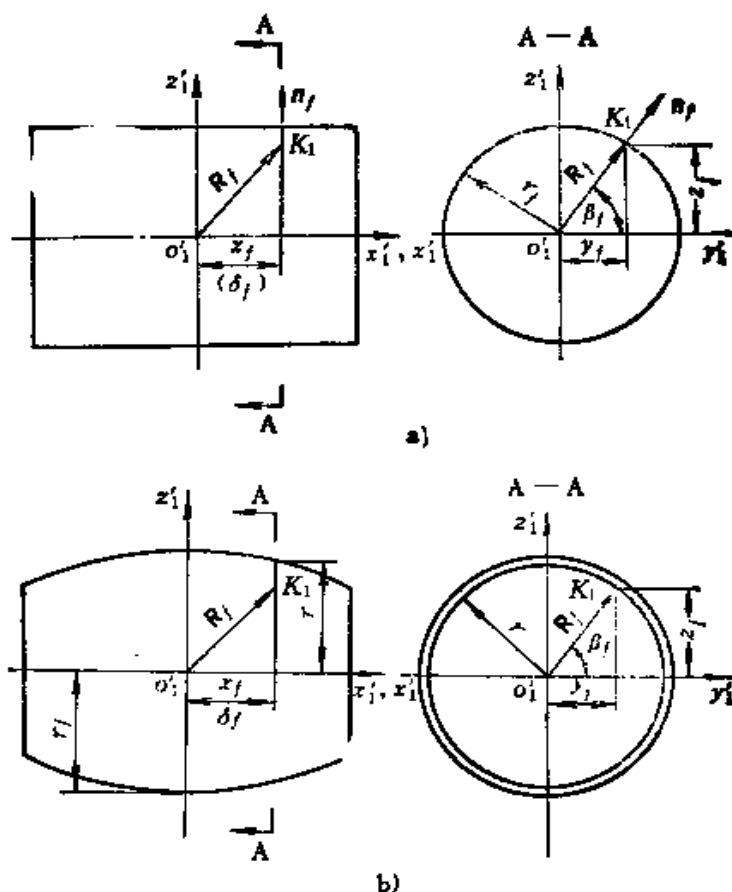


图4-8 滚子齿式凸轮机构的从动滚子

a) 圆柱面 b) 一般凸回曲面

将上述二式的值代入式 (4-24), 再与式 (4-25) 对照, 并考虑到这里的 δ_0 一般为零, 就可以得

$$Q_1 = c - (\delta_f + l_f) \cos \theta_1$$

$$Q_2 = -(\delta_f + l_f) \theta'_1$$

$$Q_3 = 0$$

将这些值代入式 (4-26), 有

$$\beta_f = \arctan \frac{(\delta_f + l_f) \theta'_1}{c - (\delta_f + l_f) \cos \theta_1} \quad (4-53)$$

与 z 向圆柱面一样, β_f 与圆柱面的半径 r_f 无关。在起始和终了时刻, $\theta_1 = 0$ 。因此, β_f 为 0 或 π 。这就说明, 在这两个极限位

置, 接触线为一平行于 x_1 轴的母线。

将式 (4-52)、式 (4-53) 代入式 (4-29), 即可得凸轮曲面矢量函数。

同样, 也可以把上述结果推广到一般凸回转面。其有关参数如图4-8 b 所示。从动曲面由母线 C—C 绕 x_1 轴回转而成。令 C—C 曲线的方程为

$$r = r(\delta_f)$$

C—C 曲线在 $x_1' o_1' z_1'$ 平面上。 r 、 δ_f 分别代表 C—C 曲线的 z 、 x 坐标。据此, 就可以得到该曲面及其单位法向矢量的函数:

$$\left. \begin{aligned} R_f &= \begin{Bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_f \\ r \cos \beta_f \\ r \sin \beta_f \end{Bmatrix} \\ n_f &= \begin{Bmatrix} \lambda_f \\ \mu_f \\ \nu_f \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \begin{Bmatrix} -r' \\ \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4-54)$$

式中, $r' = \frac{dr}{d\delta_f}$ 。再通过式 (4-24)、式 (4-25) 可得

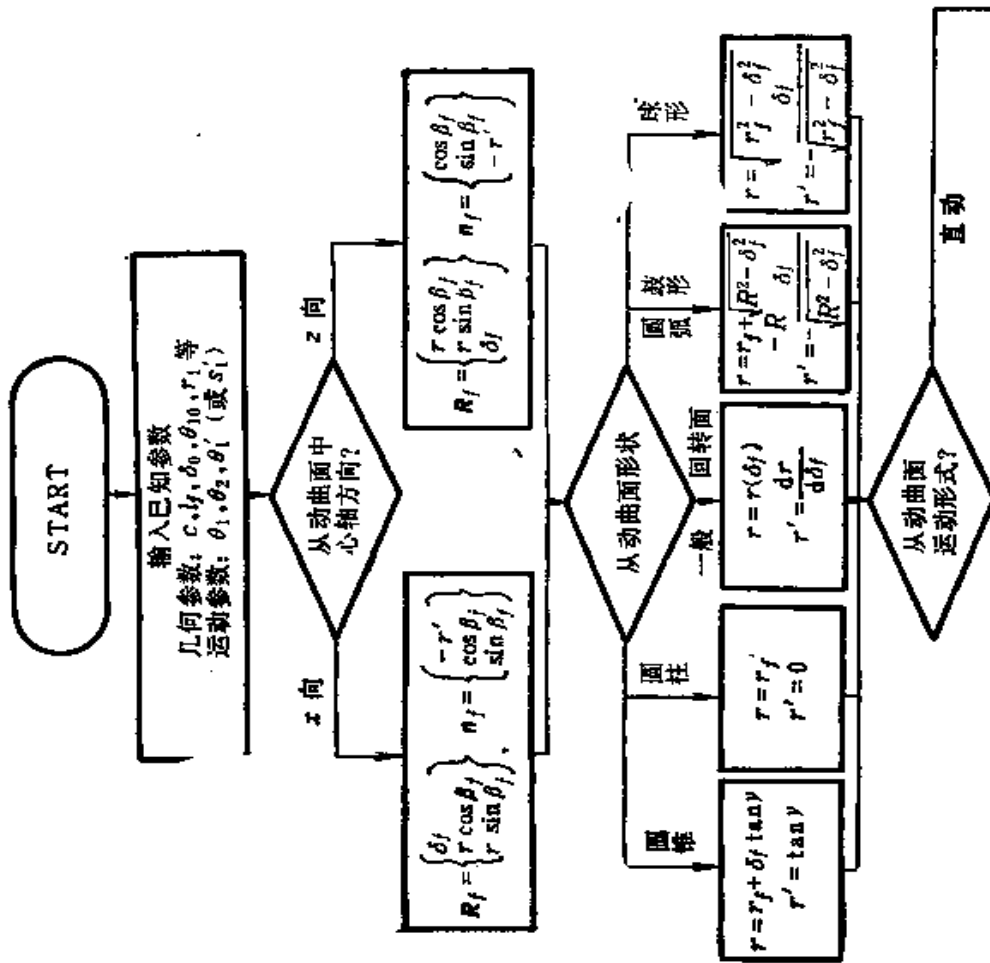
$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= c - (rr' + \delta_f + l_f) \cos \theta_1 \\ Q_2 &= -(rr' + \delta_f + l_f) \theta_1' \\ Q_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-55)$$

然后, 由 (4-26) 得

$$\beta_f = \arctan \frac{(rr' + \delta_f + l_f) \theta_1'}{c - (rr' + \delta_f + l_f) \cos \theta_1} \quad (4-56)$$

这是各种 x 向从动回转曲面空间凸轮的通用公式。代入式 (4-29), 即可求得 R_c 。显然, 这类问题的计算要简单些。

空间凸轮机构因从动曲面的形状、运动及空间配置不同而有各种不同的型式。其计算公式繁多, 计算过程复杂。在实际设计计算时, 对直动或摆动圆柱空间凸轮, 常将其展开, 作为一平面直动凸轮进行近似计算。但因误差较大, 又不得不作修正, 因此, 这种展开法最终仍不能达到简化计算、提高精度的目的。而对滚子



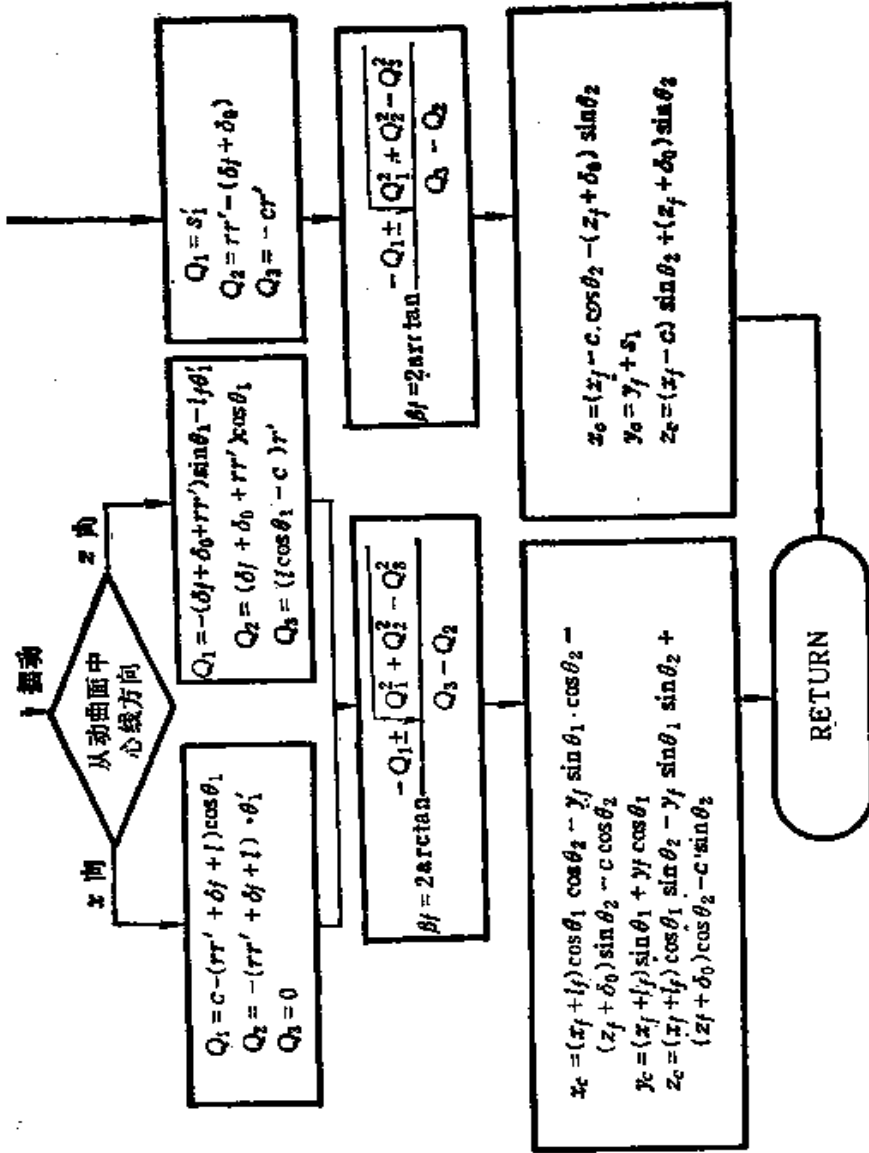


图4-9 空间凸齿轮廓曲面通用计算程序框图

齿式（ x 向滚子）空间凸轮，因为无法近似地展开成平面曲线，因此，许多不熟悉空间曲面理论的技术人员常常感到束手无策。即使掌握了空间共轭曲面的基本原理，也往往由于采用的数学符号、公式繁杂而难以理解和应用。本章所采用的方法克服了上述缺点，其基本特点是：

（1）用形式与性质与复极矢量类同的回转变换张量作为数学工具，得到与平面啮合问题形式大体相同的计算公式，便于理解和运用。

（2）建立了统一的数学模型，能用基本统一的公式计算常用的各种类型的空间凸轮机构。据此编出的程序简单明了，其框图如图4-9所示。这种公式稍加修改与变换，即可用于其他复杂的共轭曲面问题的求解。

第三节 空间凸轮曲面的压力角与曲率分析

一、空间凸轮机构的压力角计算

与平面曲线啮合一样，压力角是空间曲面啮合运动与动力传递的重要参数。它关系到能否正常地传递运动和机构效率的高低，对运动精度也有较大的影响。在压力角较大时，机构的加工、安装等方面的误差就会对位移、速度、加速度等输出运动参数产生明显的影响。一般要求空间凸轮机构的压力角的绝对值不大于 $55^\circ \sim 60^\circ$ 。

压力角是从动曲面在接触点处所受的凸轮驱动力与该点速度方向之间的夹角。与滚子从动件平面凸轮一样，在忽略摩擦力的情况下，一般取滚子中心的速度方向（令其单位矢量为 t_1 ）作为同一瞬时的接触点的速度方向，把从动曲面在接触点的法线方向 n_1 ，

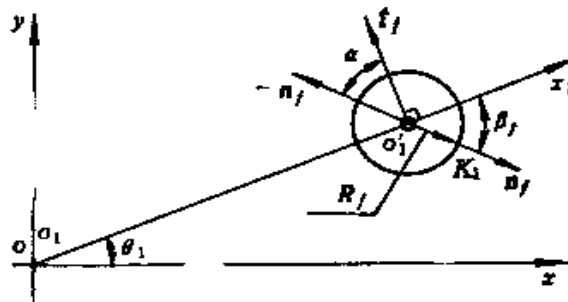


图4-10 空间凸轮机构的压力角

的反方向作为凸轮驱动力的方向。因此，压力角 α 可由下式计算

$$\cos \alpha = -n_1 \cdot t_1 \quad (4-57 a)$$

一般最后结果都取 α 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内。式 (4-57 a) 中的单位矢量 n_1 与 t_1 都是固定坐标系中的矢量。由于 α 是从动曲面法向矢量和速度矢量之间的夹角，因此，它的值与这两个矢量所处的坐标系无关，但它们必须处于同一坐标系中。因此，压力角也可以用从动件坐标系中的法向矢量和速度矢量来计算，即

$$\cos \alpha = -n_f \cdot t_f \quad (4-57 b)$$

下面，先以圆柱滚子从动件圆柱凸轮为例说明压力角的计算方法。

在图4-3的俯视图中标出单位矢量 n_f 、 t_f 和压力角 α ，如图4-10所示。在这里， t_f 与 x_1 轴垂直，即与 y_1 轴重合； n_f 为圆柱面的径向（注意， n_f 与 R_f 并不重合，它只是与 R_f 在 x_1, y_1 平面上的投影重合）。由上节的式 (4-36) 有：

$$n_f = \begin{Bmatrix} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

而

$$t_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

将它们代入式 (4-57 b) 可得：

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \sin \beta_f \\ \text{或} \quad \alpha &= \beta_f \pm \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-58)$$

当 $\beta_f > 0$ 时，取负号，反之取正号。式 (4-58) 说明， α 与 β_f 的绝对值互为余角。 α 的正负表示驱动力方向—— $-n_f$ 与速度矢量 t_f 的前后（一般在一个圆周中，角度大的矢量为前）位置关系。

由式(4-45)可将上述结果推广到一般鼓形滚子从动件圆柱形凸轮。这时,

$$n_f = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \begin{Bmatrix} \cos\beta_f \\ \sin\beta_f \\ -r' \end{Bmatrix} \quad (4-59)$$

而 t_f 仍然是 $[0, 1, 0]^T$ 。则由式(4-57 a)得压力角计算公式为:

$$\cos\alpha = \frac{-\sin\beta_f}{\sqrt{1+r'^2}} \quad (4-60)$$

显然,式(4-58)是式(4-60)的特殊情况(当 $r'=0$ 时)。式(4-60)对摆动滚子和直动滚子圆柱凸轮都适用。

用同样的方法很容易由式(4-54)等求得 x 向滚子——滚子齿式空间凸轮的的压力角计算公式:

$$\cos\alpha = \frac{-\cos\beta_f}{\sqrt{1+r'^2}} \quad (4-61)$$

综合式(4-60)、(4-61),可得各种常用的一般鼓形滚子从动件凸轮的的压力角通用计算公式为:

$$\cos\alpha = \frac{-\sin\left(\beta_f - \delta_a \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1+r'^2}} \quad (4-62)$$

式中, δ_a 是取决于从动滚子配置方向的系数。若为 z 向滚子, $\delta_a=0$;若为 x 向滚子, $\delta_a=1$ 。

二、空间凸轮曲面的曲率分析

空间凸轮曲面曲率分析的重点在于计算出从动滚子曲面与凸轮曲面在各啮合点的诱导主曲率。为此,要先求出这两个曲面各自的主曲率。从动滚子一般是回转曲面,其各点的主曲率和主方向是很容易确定的,如圆柱面的主曲率分别为:

$$k_1^I = \frac{1}{r_f}, \quad k_2^I = \infty \quad (r_f \text{是圆柱半径})$$

其相应的第一主方向和第二主方向分别为横截圆周的切向和母线

方向 (参见附录 III)。如图 4-7、图 4-8 b 所示, 一般回转面的主方向与主曲率也容易确定, 其第一主方向一般与圆柱面一样, 是横截圆的切向; 其第二主方向则为母线 $C-C$ 曲线的切向。因此, 对应的主曲率为:

$$\left. \begin{aligned} k_1^I &= \frac{1}{r} \\ k_2^I &= k_c \end{aligned} \right\} \quad (4-63)$$

式中, k_c 是母线 $C-C$ 曲线在所考察的接触点的曲率。若母线是一段圆弧 (图 4-7 b), 则 $k_c = \frac{1}{R}$ 。

由附录 IV 式 (IV-5) 可知, 如果确定了从动曲面的主曲率 k_1^I 和 k_2^I , 那么, 只要求出主动曲面——凸轮曲面在 i_1^I 、 i_2^I 、 i_3 三个方向上的法曲率 $k_1^{(1)}$ 、 $k_2^{(2)}$ 、 k_3^I 以及 i_3 的方向角 q_3 , 就可从该方程解出凸轮曲面的主曲率 k_1^I 、 k_2^I 。上述凸轮曲面的三个法曲率 $k_1^{(1)}$ 、 $k_2^{(2)}$ 、 k_3^I 和 q_3 可以由啮合条件求得。

对啮合条件式 (IV-1), 参见附录 IV,

$$\mathbf{V}_{12} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$$

两边都对时间 t 求导, 得:

$$\dot{\mathbf{V}}_{12} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{V}_{12} \cdot \dot{\mathbf{n}}_1 = 0 \quad (4-64)$$

对于回转从动滚子空间凸轮来说, 对式 (4-13) 两边求导, 并注意凸轮角速度 $\dot{\theta}_2$ 为常量, \mathbf{C} 为常矢量, 可得

$$\dot{\mathbf{V}}_{12} = (\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k) \dot{\mathbf{R}}_1 - \ddot{\theta}_1 J_k \mathbf{R}_1$$

再代入式 (4-10)、式 (4-11), 有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{12} &= (\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k) (\dot{\theta}_1 J_k \mathbf{R}_1 + \mathbf{V}_{1r}) - \ddot{\theta}_1 J_k \mathbf{R}_1 \\ &= (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 J_j J_k - \dot{\theta}_1^2 J_k^2 - \ddot{\theta}_1 J_k) \mathbf{R}_1 + (\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k) \mathbf{V}_{1r} \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad A_{12} = \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 J_j J_k - \dot{\theta}_1^2 J_k^2 - \ddot{\theta}_1 J_k \quad (4-65)$$

则二曲面相对速度的变化率——相对加速度的表达式可简单地写为:

$$\dot{\mathbf{V}}_{12} = A_{12} \mathbf{R}_1 + (\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k) \mathbf{V}_{1r} \quad (4-66)$$

式中, A_{12} 是一由凸轮的角速度 $\dot{\theta}_2$ 、从动件的角速度 $\dot{\theta}_1$ 、角加速

度 $\dot{\theta}_1$ 以及基本回转张量 J_j 、 J_k 决定的 3×3 矩阵,它表示二曲面啮合点处加速度的相对关系,可以由已知值算出; V_{1r} 是从动曲面上 K_1 点的切向速度,由式(4-11)确定。

再对式(4-15)求导,可得

$$\dot{n}_1 = \dot{\theta}_1 J_k n_1 + e^{J_k \theta_1}(\dot{n}_j)$$

$$\text{令} \quad \dot{n}_{1r} = e^{J_k \theta_1}(\dot{n}_j) \quad (4-67)$$

$$\text{则有} \quad \dot{n}_1 = \dot{\theta}_1 J_k n_1 + \dot{n}_{1r} \quad (4-68)$$

式(4-68)表示公法线矢量(也就是从动曲面在固定坐标系中的法向矢量)矢端的速度由两项组成。一项是随从动坐标系一起运动的牵连速度 $\dot{\theta}_1 J_k n_1$,一项是在从动曲面上的相对速度 \dot{n}_{1r} 。将式(4-66)、(4-68)代入式(4-64),得:

$$(A_{12}R_1) \cdot n_1 + (\dot{\theta}_1 J_k n_1) \cdot V_{12} + [(\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k)V_{1r}] \cdot n_1 + \dot{n}_{1r} \cdot V_{12} = 0 \quad (4-69)$$

矢量 \dot{n}_{1r} 一定落在二曲面过啮合点 K 的公切面 π 上^[70]。 V_{12} 、 V_{1r} 当然也处在公切面 π 上。将这三个矢量在从动曲面 Σ_1 的主方向 i_1^1 与 i_2^1 上分解,得:

$$\left. \begin{aligned} V_{12} &= v_{12}^1 i_1^1 + v_{12}^2 i_2^1 \\ V_{1r} &= v_{1r}^1 i_1^1 + v_{1r}^2 i_2^1 \\ \dot{n}_{1r} &= \dot{n}_{1r}^1 i_1^1 + \dot{n}_{1r}^2 i_2^1 \end{aligned} \right\} \quad (4-70)$$

另根据罗德里克方程〔附录Ⅲ式(Ⅲ-31)〕,有

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_{1r}^1 &= -k_1^1 v_{1r}^1 \\ \dot{n}_{1r}^2 &= -k_1^2 v_{1r}^1 \\ \dot{n}_{1r}^1 &= -k_2^1 v_{1r}^2 \\ \dot{n}_{1r}^2 &= -k_2^2 v_{1r}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-71)$$

再设

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= (A_{12}R_1)n_1 + \dot{\theta}_1 J_k n_1 \cdot V_{12} \\ a_1 &= [(\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k)i_1^1] \cdot n_1 - k_1^1 v_{1r}^1 \\ a_2 &= [(\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k)i_2^1] \cdot n_1 - k_1^2 v_{1r}^1 \end{aligned} \right\} \quad (4-72)$$

则可得一相对速度 V_{1r} 在主方向 i_1^1 、 i_2^1 上的分量之间的关系式:

$$a_1 v_{1r}^1 + a_2 v_{1r}^2 + a_0 = 0 \quad (4-73)$$

由式 (4-72) 可看出, a_1 、 a_2 、 a_3 都可以由已知量求得。根据式 (4-73) 等式可以求出凸轮曲面三个方向的法曲率和接触线方向角 q_i 。

1. 凸轮曲面在从动曲面两个主方向 i_1^1 和 i_2^1 的法曲率 $k_1^{(1)}$ 、 $k_2^{(1)}$

先求 $k_1^{(1)}$ 。在这种情况下, 凸轮曲面在所考察的接触点 K_2 处的相对速度 V_{2r} 沿 i_1^1 方向。由于 i_1^1 与 i_2^1 正交, 所以 V_{2r} 在 i_2^1 方向上的分量为零, 即

$$v_{2r}^2 = 0$$

再由式 (4-11) 和式 (4-70) 有

$$v_{2r}^2 = v_{1r}^1 - v_{12}^1 \quad (4-74)$$

所以

$$v_{1r}^1 = v_{12}^1$$

代入式 (4-73), 得

$$v_{1r}^1 = -(a_3 + a_2 v_{12}^1) / a_1$$

因此

$$\begin{aligned} v_{2r}^1 &= v_{1r}^1 - v_{12}^1 \\ &= -(a_3 + a_2 v_{12}^1 + a_1 v_{12}^1) / a_1 \end{aligned} \quad (4-75)$$

下面再求 \dot{n}_2^1 。与式 (4-15) 类似, 凸轮曲面在 K_2 点的法向矢量为

$$n_2 = e^{J_2 \theta_2} (n_c) \quad (4-76)$$

n_c 为凸轮曲面在凸轮坐标系 $o_2-x_2y_2z_2$ 中的法向矢量。在啮合点 K 有

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_2 \\ \dot{n}_1 &= \dot{n}_2 \end{aligned} \right\} \quad (4-77)$$

对式 (4-15)、式 (4-76) 微分, 并令 $\dot{n}_{1r} = e^{J_1 \theta_1} (\dot{n}_f)$, $\dot{n}_{2r} = e^{J_2 \theta_2} (\dot{n}_c)$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= \dot{\theta}_1 J_1 n_1 + e^{J_1 \theta_1} (\dot{n}_f) = \dot{\theta}_1 J_1 n_1 + \dot{n}_{1r} \\ \dot{n}_2 &= \dot{\theta}_2 J_2 n_2 + e^{J_2 \theta_2} (\dot{n}_c) = \dot{\theta}_2 J_2 n_2 + \dot{n}_{2r} \end{aligned} \quad (4-78)$$

代入式 (4-77), 可得二曲面法向矢量矢端相对速度的关系为

$$\dot{n}_{1r} - \dot{n}_{2r} = (\dot{\theta}_2 J_2 - \dot{\theta}_1 J_1) n_1 \quad (4-79)$$

或

$$\dot{n}_{2r} = \dot{n}_{1r} - (\dot{\theta}_2 J_2 - \dot{\theta}_1 J_1) n_1 \quad (4-80)$$

将该式的各矢量投影到 i_1^I 方向上, 并代入式(4-71)可得标量关系式

$$\dot{n}_{2r}^I = -k_1^I v_{1r}^I - [(\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k) n_i] \cdot i_1^I \quad (4-81)$$

比较式(4-81)与式(4-72), 再注意到:

$$[(\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k) i_1^I] \cdot n_1 = -[(\dot{\theta}_2 J_j - \dot{\theta}_1 J_k) n_i] \cdot i_1^I$$

则可得
$$\dot{n}_{2r}^I = -k_1^I v_{1r}^I + a_1 + k_1^I v_{12}^I$$

再将式(4-74)代入该式, 得

$$\dot{n}_{2r}^I = -k_1^I v_{2r}^I + a_1 \quad (4-82)$$

附录Ⅲ中曲面某方向的法曲率定义式(Ⅲ-17)、式(Ⅲ-20)可以变换成下述计算公式〔43〕:

$$k_n = -\frac{dR \cdot dn}{ds^2} = -\frac{V_r \cdot \dot{n}}{V_r \cdot V_r} \quad (4-83)$$

式中, V_r 为曲面上被考察点沿给定方向的相对速度, \dot{n} 是单位法向矢量矢端在给定方向上相对速度。由此公式可得凸轮曲面在 i_1^I 方向的法曲率为

$$k_{2r}^{(1)} = -\frac{(v_{2r}^I i_1^I) \cdot (\dot{n}_{2r}^I i_1^I)}{(v_{2r}^I)^2} = -\frac{\dot{n}_{2r}^I}{v_{2r}^I}$$

将式(4-82)及式(4-74)代入, 得

$$k_{2r}^{(1)} = k_1^I - \frac{a_1^2}{a_2 + a_2 v_{12}^I + a_1 v_{12}^I} \quad (4-84)$$

用同样的方法可求得

$$k_{2r}^{(2)} = k_1^I - \frac{a_2^2}{a_2 + a_2 v_{12}^I + a_1 v_{12}^I} \quad (4-85)$$

令
则

$$a_4 = a_2 + a_2 v_{12}^I + a_1 v_{12}^I \quad (4-86)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{2r}^{(1)} &= k_1^I - \frac{a_1^2}{a_4} \\ k_{2r}^{(2)} &= k_1^I - \frac{a_2^2}{a_4} \end{aligned} \right\} \quad (4-87)$$

2. 求接触线切线方向角 q :

根据接触线切线方向二曲面的法曲率相等性质, 容易求得

接触线切线方向角 q_i 的计算公式为〔70〕

$$\tan q_i = \frac{v_{2r}^I}{v_{2r}^I} = \frac{a_1}{a_2} \quad (4-88)$$

3. 凸轮曲面在接触线切线方向 t_i 的法曲率 k_2^I

由附录Ⅲ欧拉公式（Ⅲ-29）和式（4-88），可求得

$$k_2^I = k_1^I = k_1^I \cos^2 q_i + k_1^I \sin^2 q_i$$

或

$$k_2^I = \frac{k_1^I a_2^2 + k_1^I a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \quad (4-89)$$

到此为止，就可以利用附录Ⅳ中的方程（Ⅳ-5）求出凸轮曲面的主曲率与主方向的计算公式：

$$k_2^I = \frac{1}{2} \left[(k_1^I + k_1^I) - \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_4} \right] + \frac{1}{2 \cos 2\sigma} \left[(k_1^I - k_1^I) - \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_4} \right]$$

$$k_2^I = (k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) - k_2^I$$

式中的 2σ 由下式决定：

$$\tan 2\sigma = \frac{2k_2^I - (k_2^{(1)} + k_2^{(2)})}{(k_2^{(1)} - k_2^{(2)}) \sin 2q_i} - \cos 2q_i$$

(4-90)

将式（4-87）、式（4-88）及式（4-89）代入式（4-90）的第三式，即可求出凸轮曲面的第一主方向的方向角。

凸轮曲面与滚子曲面接触线上各点的综合曲率，即诱导主曲率的最大值可由附录Ⅳ的式（Ⅳ-11）以及式（4-90）、式（4-87）求得：

$$\begin{aligned} k_{12}^* &= (k_1^I + k_1^I) - (k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) = (k_1^I + k_1^I) - (k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) \\ &= -\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_4} \end{aligned} \quad (4-91)$$

分析式（4-91）可知，当某点的 $a_4 = 0$ 时，综合曲率为无穷大。这说明该点为表面上的奇异点，表明凸轮曲面可能发生过切等现象，这是必须避免的。因此，对每个接触点都要求

$$a_4 \neq 0 \quad (4-92)$$

式（4-92）是保证二曲面正常啮合的基本条件，称为不过切条

件。

第四节 空间分度凸轮机构的设计计算

一、引言

空间凸轮最重要的应用之一，是作为自动机械的间歇转位（分度）或不等速回转传动机构。前一章介绍过的平行分度凸轮机构，虽然具有良好的运动学和动力学性能，但是在分度数、传动刚度、传动轴空间位置的布置等方面，存在着一定的局限性。因此，在自动机械中，常常采用圆柱凸轮或凹桶形凸轮来构成空间分度凸轮机构。圆柱分度凸轮机构具有分度数允许很多、制造容易等优点，但只适用于中、低速机构；凹桶形（滚子齿式）分度凸轮机构传动性能最好，但加工较难。二者在设计上是相近的，故下面着重就圆柱分度凸轮机构进行讨论。

二、圆柱分度凸轮机构的设计参数选择

圆柱分度凸轮机构的结构示意图已在图1-9上给出，几何啮合关系简图如图4-1 a 所示。图4-11 a 给出了这种分度凸轮机构的主要几何关系。为了便于分析，常将圆柱凸轮轮廓展开成图4-11 b 所示形状。

设计者必须根据圆柱分度凸轮机构的工作要求来确定一系列的原始设计参数，它们是：

1. 分度数与分度角

分度数 n 是由所服务的自动机械决定的。如前所述，这种类型的分度凸轮机构一般适合于 $n = 6 \sim 60$ r/min 的情况。 n 太小时，压力角很大，传动特性很差； n 过大时，结构很复杂，从动盘尺寸太大，转动惯量限制其不能高速运转或消耗功率过多。 n 确定之后，图示对称情况下的从动盘的分度角则为

$$\theta_{10} = \theta_{11} = \frac{360^\circ}{2n}$$

2. 凸轮动程角与动静比

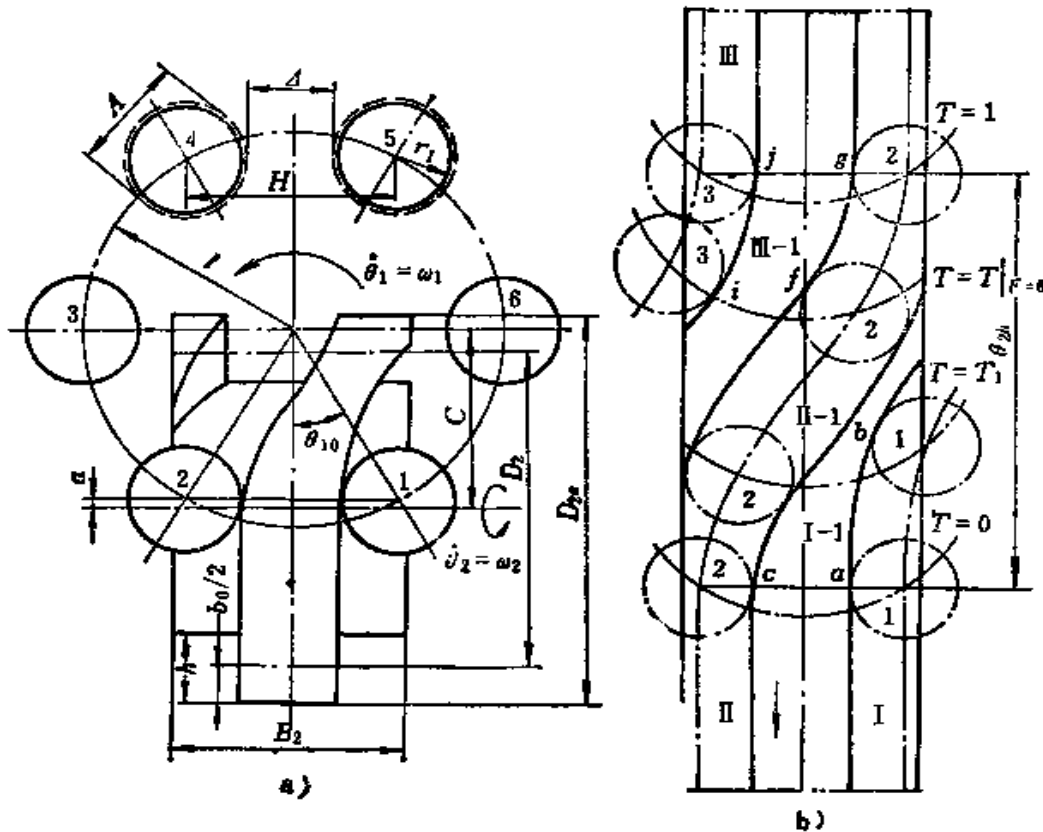


图4-11 圆柱分度凸轮机构的几何关系

a) 几何关系图 b) 凸轮轮廓展开图

自动机械对分度机构的动静比有一定的要求。通常希望动静比 $k_t = t_d/t_j$ 小一些为好。这里的 t_d 与 t_j 为每次分度周期中的转位分度时间与停歇时间。 k_t 越小，意味着在每次分度周期内，停歇供工作机构操作的时间越长，非操作的转位时间越短，因而生产率较高。 t_d 与 t_j 是由凸轮轮廓的动程角 θ_{2d} 与停歇角 $(360^\circ - \theta_{2d})$ 决定的，即

$$k_t = \frac{t_d}{t_j} = \frac{\theta_{2d}}{2\pi - \theta_{2d}}$$

3. 从动盘直径

从动盘的直径与工作机构的外形尺寸和分度数有关。从图4-

11. 上可见, 从动滚子之间的距离 H 应大于工作机构的最大外形尺寸 A , 留下一定的空隙 Δ 。一般取 $\Delta = 10 \sim 20 \text{mm}$ 。于是从动盘滚子中心节圆半径可按下式计算:

$$l = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{A + \Delta}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

4. 滚子尺寸

滚子半径通常取 $r_1 = (0.25 \sim 0.30)H$

滚子宽度通常取 $b_1 = (0.8 \sim 1.2)r_1$

5. 凸轮尺寸

凸轮的基圆半径应通过后面章节将要讨论的优化设计方法来确定。其总的原则是在保证接触应力最大值小于许用应力的前提下, 尽可能紧凑一些。根据压力角计算公式可推出, 圆柱凸轮的基圆直径可以由下式给出

$$D_2 = \frac{2HV_m}{\theta_{2s} \tan \alpha_m}$$

式中, V_m 为最大无因次速度; α_m 为最大压力角。圆柱凸轮的外径则为

$$D_{2e} = D_2 + b_0$$

凸轮槽深度 h 一般应略大于滚子宽度 b_0 , 比 b_0 大多少则由公差要求确定。

凸轮体宽度 B_2 应保证分度运动的连续性, 太窄会导致前一个滚子脱离与轮廓的啮合时, 后一滚子还未进入与另一轮廓的啮合状态; 太宽也没有必要, 不仅增加了加工量, 并可能出现与其它滚子的位置干涉。因此, B_2 以保证适当的啮合重叠段为宜, 对于图 4-11 a 所示情况, B_2 的范围为

$$2(l - r_1) > B_2 > H$$

6. 中心距

凸轮中心线与从动盘中心线之间的距离, 可以采用下式求得:

$$c = l \cos \frac{\pi}{n} \pm a$$

式中， a 为凸轮中心线偏离滚子起始与终止位置中心连线的距离，一般情况下 $a = 0$ 。

凸轮中心线与从动盘基准面（通常为上表面）的距离取决于凸轮体外径 D_{2c} 、滚子销轴向尺寸和从动盘厚度等结构参数，应尽量使凸轮外缘靠近从动盘底面，以减少滚子销轴的悬臂长度。由此可确定图4-3中的参数 δ_0 。

7. 结构型式

图4-11所示圆柱凸轮结构型式具有 I、II、III 三个凸轮槽，靠凸脊实现停歇段的定位。与此相反，还存在着一种靠凸轮槽实现停歇定位的圆柱凸轮型式，只有两个凸轮槽，结构简图与展开图如图4-12 a、b 所示。

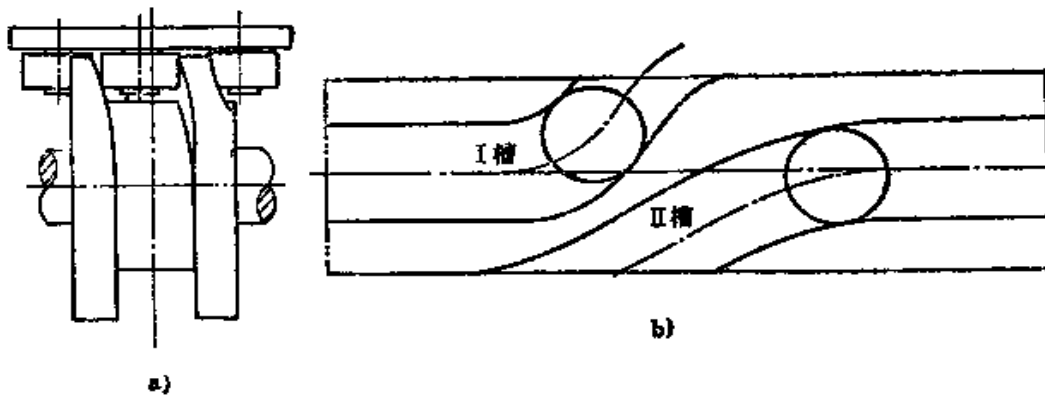


图4-12 槽定位圆柱分度凸轮机构
a) 结构简图 b) 圆柱凸轮轮廓展开图

后面的分析将会看到，脊定位圆柱分度凸轮机构型式的传动性能优于槽定位型式。

8. 运动规律

圆柱分度凸轮机构的运动规律可以依照第二章中阐述的原则，选取前面介绍过的几十种运动规律中某些性能优良者。一般情况下，分度机构的工作载荷不大，总载荷 F 的主要成分是从动盘的惯性力，因此首先应考虑 (AV) 较小的运动规律。对于

低速分度机构，尤其当分度数较少时，减少最大压力角是十分重要的，因而宜选取 V_n 较小的运动规律。但是，对于多数中速分度机构，应选取 A_n 较小而且连续的运动规律。由于圆柱凸轮机构靠轮廓实现传动的几何封闭，滚子与凸轮槽之间必须留有适当的间隙。在分度运动过程中，当总载荷接近于零而即将反向时，即在加速度由正向负过渡的瞬间，会出现滚子从凸轮轮廓一侧向另一侧横越冲击的现象，为此，应选取在该时刻动载转矩变化率特性值 τ 较小的运动规律，以减少横越冲击引起的振动、噪声与磨损。综合上述分析，目前工程上应用较广泛的运动规律有修正等速、修正正弦、修正梯形等运动学与动力学特性均好的运动规律。

运动规律选定后，由第二章第二节中的公式可以算出各个时刻的 θ_1 与 θ_2 值。

三、圆柱分度凸轮轮廓的设计计算〔72〕

在完成了上述原始设计参数选择之后，就可以按图4-9所示程序 z 向分支框图进行凸轮轮廓坐标的计算，再用第三节的方法进行压力角、曲率等数据的计算。

为了便于讨论，以自动封罐机的六分度圆柱凸轮分度机构为例进行具体分析。该凸轮等速转动，动程角 $\theta_{24} = 125.7^\circ$ ，动静比 $k_1 = 0.53649$ ， $l = 89\text{mm}$ ， $r_1 = 25\text{mm}$ ， $b_1 = 25\text{mm}$ ， $D_{2r} = 356\text{mm}$ ， $B_2 = 104\text{mm}$ ， $c = 81\text{mm}$ 。

老式自动封罐机的圆柱分度凸轮机构，为了设计和加工方便，采用的是三段圆弧连接成的组合曲线运动规律，其特征值为 $V_n = 1.844$ ， $A_n = 8.777$ ， $J_n = 644.134$ ；在前两段圆弧的连接点处的加速度不连续，有跃度突变；在后两段圆弧的连接点处的速度不连续，有加速度突变。这样的运动规律显然不符合中、高速机械的要求，即使在低速工况下运行，振动、噪声、磨损仍然很大。新式的自动机械中，圆柱分度凸轮机构的运动规律多采用修正正弦等特性优良的曲线。图4-13^a给出了图4-12所示槽型圆柱分度凸轮机构凸轮体槽I与槽II产生的角位移曲线。由图可见，

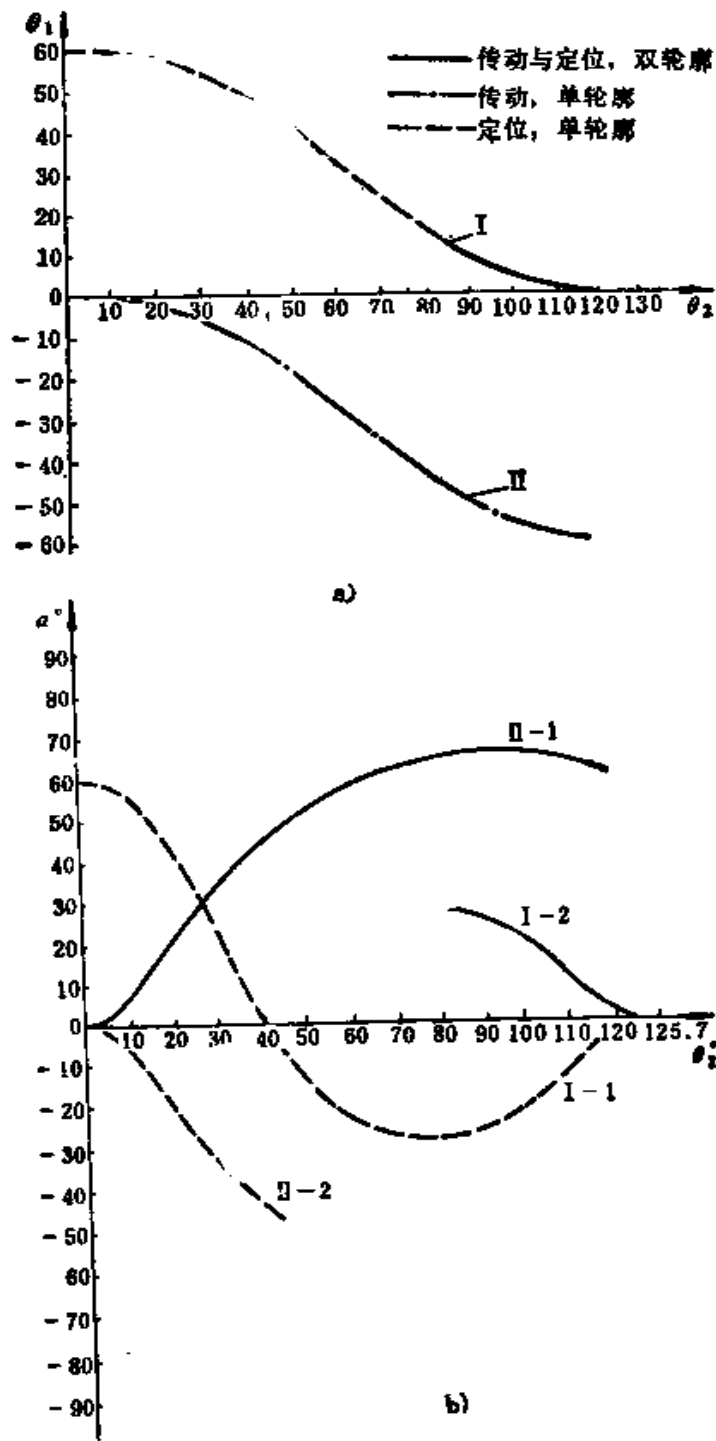


图4-13 槽型圆柱分度凸轮机构的角位移与压力角曲线
a) 角位移 b) 压力角

首先槽 I 与滚子 1 啮合，拨动从动盘转位， $\theta_{10} = 0$ ；当 $\theta_2 = 47.9^\circ$ 以后，滚子只与 I-2 轮廓啮合；在 $\theta_2 = 81.8^\circ \sim 125.7^\circ$ 之间，滚子 1 与槽 II 的两侧轮廓均啮合，其余部分只起几何封闭作用，不起传递运动作用。

图 4-13 b 给出了按上述原始参数计算出的凸轮体基圆 D_2 处的压力角变化曲线。四个轮廓的压力角变化曲线是不同的。如果取许用的最大压力角，槽 II 允许的啮合区段只能是 $\theta_2 = 0^\circ \sim 51^\circ$ 范围内，槽 I 允许的啮合区段则为 $\theta_2 = 81.8^\circ \sim 125.7^\circ$ 范围内。这样，在 $\theta_2 = 51^\circ \sim 81.8^\circ$ 之间的传递运动的轮廓压力角均大于 50° 。因此，这种槽型凸轮的传动特性不符合设计要求。

为了改善传动特性，目前工程上多采用图 4-11 所示的脊型圆柱分度凸轮机构。这种凸轮的角度位移曲线如图 4-14 a 所示。滚子 1 首先与槽 I 的轮廓 I-1 啮合，实现分度传动，其 $\theta_{10} = -30^\circ$ ，啮合区段为 $\theta_2 = 0^\circ \sim 64^\circ$ 。滚子 2 与槽 II 在 $\theta_2 = 0^\circ \sim 125.7^\circ$ 的全区段内均啮合，但起传递运动的区段只有 $\theta_2 = 40.9^\circ \sim 125.7^\circ$ ，同时与 II-1 与 II-2 两侧轮廓啮合的区段为 $40.9^\circ \sim 88.9^\circ$ 之间。压力角变化曲线如图 4-14 b 所示。若仍选取许用的最大压力角为 50° ，则传递运动的轮廓 I-1 的合适区段为 $\theta_2 = 0^\circ \sim 25.9^\circ$ ，传递运动的轮廓 II-2 的合适区段为 $\theta_2 = 41.5^\circ \sim 125.7^\circ$ ；与槽型凸轮的情况相比，有所改善，但仍有一小段 ($\theta_2 = 25.9^\circ \sim 41.5^\circ$) 不符合压力角设计要求。在分度数 $n = 6$ 的下限情况下，减少轮廓的最大压力角是比较困难的，如采用修正正弦等 V_n 较小的运动规律，加大凸轮基圆半径，或设计成图 4-14 c 所示偏置结构型式等办法，可以获得令人满意的结果。

由于不可避免地存在着从动盘滚子中心的位置误差、滚子及销轴的加工误差及其必要的公差配合间隙、凸轮轮廓的加工误差、凸轮轴的加工误差、以及它们的装配误差等等，为了防止滚子与轮廓之间的啮合干涉，滚子与槽间常常设计有适当的间隙，即选取适当精度的动配合。最简便的办法是，凸轮轮廓按理论计算出的坐标数据进行加工，滚子直径适当地比公称直径小一点。

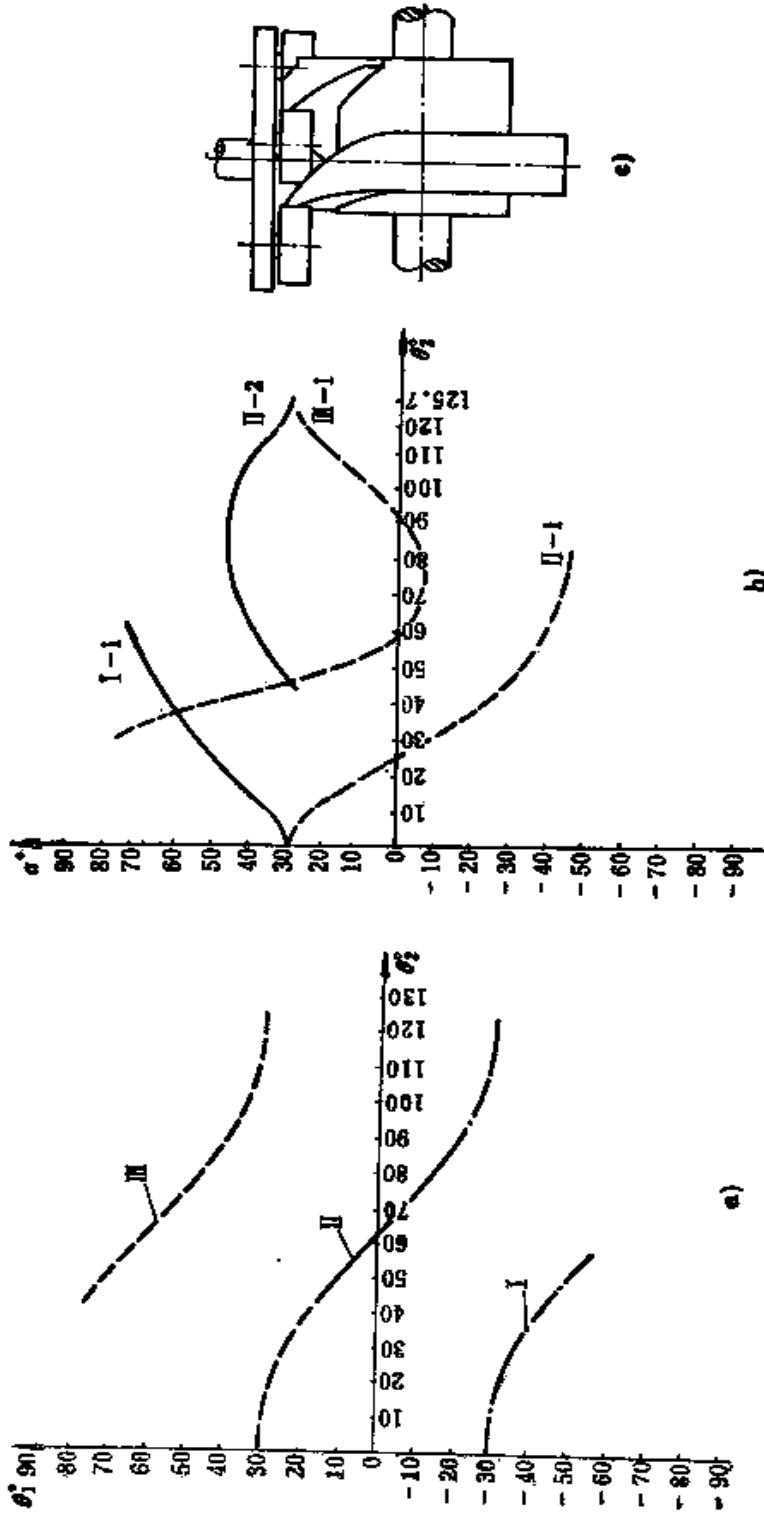


图4-14 背型圆柱分度凸轮机构的角位移、压力角曲线与偏置结构
 *) 角位移 b) 压力角 c) 偏置结构简图

滚子与凸轮槽之间的动配合选择，应足以补偿前述各零件的制造误差。除此之外，在工程上还要对凸轮轮廓的坐标值进行必要的修正，以保证传动特性较好的轮廓区段起主要啮合作用，而让传动特性较差的轮廓区段只起几何封闭作用。

凸轮轮廓修正所涉及的问题是比较复杂的，就圆柱分度凸轮这类无预紧力的情况而言，只须从几何学角度考虑啮合特性即可。例如，图4-14c所示的偏置脊型圆柱分度凸轮的理论轮廓展开图，如图4-15上的实线所示。滚子1首先由轮廓I-1推动实现分度转动。由图4-14b可见，压力角随 θ_2 的增加而迅速增大；但是，轮廓II-2初始段的压力角是比较小的，因此，一旦滚子2能与轮廓II-2啮合，应让轮廓II-2起主要的传动作用。为了实现这一转变，必须在该时刻($T = T_1$)以后的轮廓I-1削掉一点，即应把轮廓I-1的实线 bb' 所示轮廓修正成虚线 bb'' 所示的轮廓。最大修正量的大小一般与滚子和凸轮槽之间的设计间隙相同，按正弦之类缓变规律，从 b 点开始逐渐加大修正量，到 b'' 点时达到最大修正量。在这段期间，轮廓I-1只起辅助的几何封闭作用，为了避免轮廓与滚子发生啮合干涉，亦对轮廓II-1进行适当修正，比如把轮廓 cd 修正成 ce 所示虚线轮廓。前面曾讨论过，自动机械分度凸轮机构的总载荷 F 的主要成分是惯性力，由于加速度在分度中点附近要反号，总载荷必然会在某一时刻为零，即存在 $T = T|_{F=0}$ 时刻，滚子2将在这一时刻从与轮廓II-2啮合转向与轮廓II-1啮合，产生横越冲击。由图4-14b可见，轮廓II-1的压力角比可起同样主要受力作用的轮廓III-1的压力角为大，所以轮廓II-1继续修正直到 e' 为止，最后起主要受力作用的轮廓是III-1的 ij 段，滚子3在 $T = T|_{F=0}$ 时刻之前的理论轮廓 hi 应修正成 $h'i$ 。滚子2在 $T = T|_{F=0}$ 之后的理论轮廓 $f'g$ 则应修正成 $f'g'g$ 。为了保证停歇时的定位精度，在 $T = 0$ 和 $T = 1$ 的起始与终止时刻，轮廓不应修正。

凸轮轮廓的坐标值应按上述修正过的数据重新进行计算，作为数控加工编程的依据。对于轮廓I-1应为 abb'' ，轮廓II-1应为

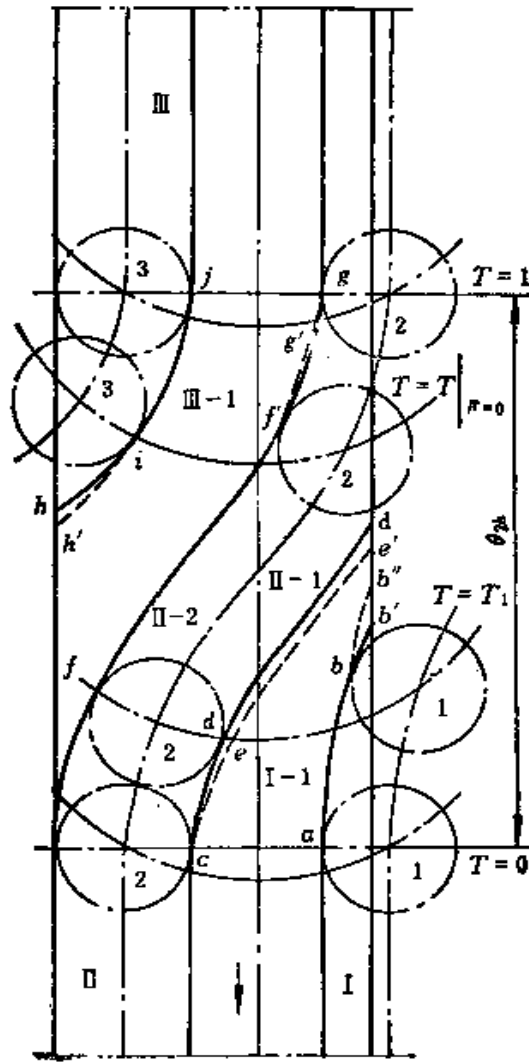


图4-15 圆柱分度凸轮轮廓的修正

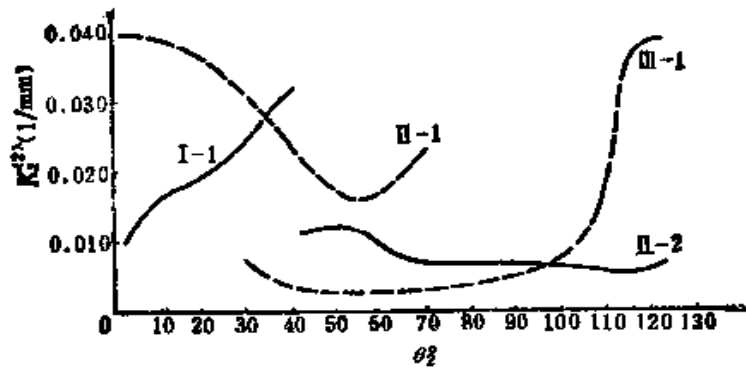


图4-16 圆柱凸轮轮廓的主曲率

cee' , 轮廓 II-2 应为 $ff'g'g$, 轮廓 III-1 应为 $h'ij$ 。

圆柱凸轮轮廓设计比较麻烦的一部分是轮廓的曲率分析。其计算公式在第三节中已推导出来, 并编成了计算机辅助设计软件。图4-16给出了前述脊型圆柱分度凸轮轮廓的主曲率变化曲线。由图可见, 凸轮轮廓的最大主曲率 $k_2^I = 0.03967 \text{ 1/mm}$, 小于滚子的主曲率 $k_1^I = 0.04 \text{ 1/mm}$, 即凸轮曲面上各点均能与滚子充分接触, 滚子在与凸轮轮廓啮合过程中不会出现“浮起”现象。

为了检验在加工过程中是否存在过切现象和进行接触应力的计算, 要求给出凸轮轮廓与滚子在啮合过程中的诱导主曲率曲线。最后的计算结果如图4-17所示。由图可见, 诱导主曲率不存在因式(4-91)中 $a_4 = 0$ 而使 k_{12}^* 为无穷大的奇异点, 所以凸轮轮廓没有过切。从 k_{12}^* 的绝对值看, 小于滚子主曲率的2倍, 一般符合接触应力验算对 k_{12}^* 的要求。

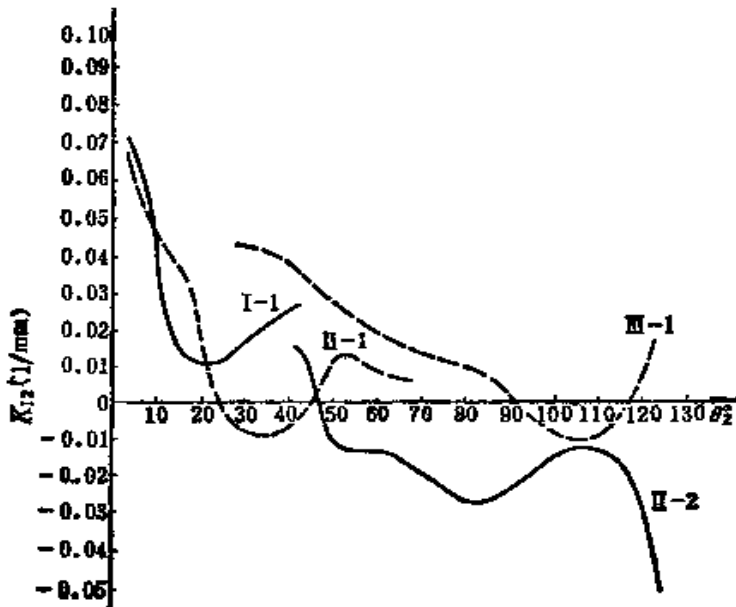


图4-17 圆柱分度凸轮的曲率

四、滚子齿式(凹桶形)分度凸轮机构的设计计算

凹桶形分度凸轮的设计内容与步骤, 大体与圆柱分度凸轮机构相似。首先, 应确定一系列原始设计参数。

分度数一般在 $n = 1 \sim 12$ 之间选择, 由于结构限制, 不可能实现像圆柱分度凸轮机构那样多的分度数。

动程角与动静比的选择与圆柱分度凸轮机构一样。

从动盘中心至滚子长度一半处 (通常称为节点处) 的距离 l_1 (参见图 4-1 b), 取决于分度数和工作机构的外形尺寸。

滚子直径 d_1 一般可在 $12 \sim 36 \text{ mm}$ 之间选取, 滚子长度 b_1 可近似在 $(0.6 \sim 0.8)d_1$ 之间选取。

凸轮体宽度 B_2 的选择, 应保证滚子与凸轮轮廓有一定啮合重叠度。 B_2 太小, 可能出现当滚子 1 与凸轮轮廓脱离啮合时, 滚子 2 还未进入与凸轮另一轮廓的啮合状态, 产生传动中断现象。 B_2 太大, 轮廓重叠段过多, 容易产生啮合干涉, 并增加制造工作量。图 4-18 给出了确定两种型式的滚齿式凸轮体宽度示意图。

根据图 4-18 中的几何关系, 不难求得凸轮体的最大节圆半径为

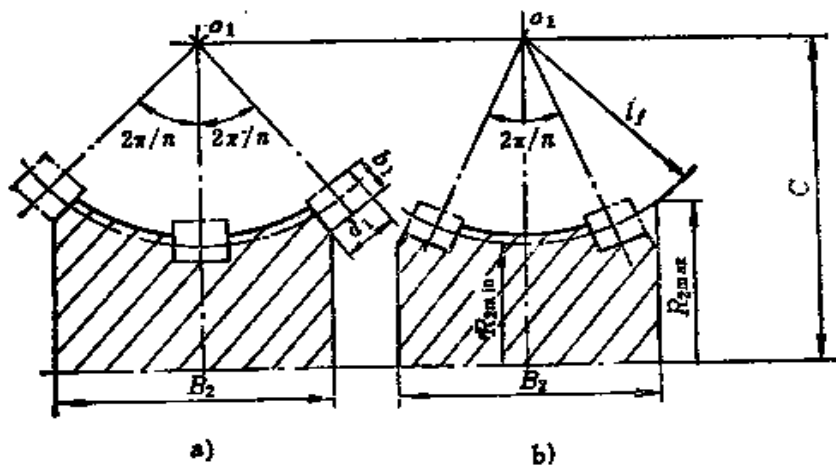


图4-18 滚齿式凸轮宽度的确定

a) 槽型凸轮 b) 管型凸轮

$$R_{\max} = c - \sqrt{l_1^2 - \frac{B_2^2}{4}}$$

$$R_{2\min} = c - l_f$$

利用近似公式，可以确定节圆轮廓各点的压力角，即

$$\tan \alpha = \frac{l_f \theta_{1h} V}{R_2 \theta_{2h}}$$

当选择对称运动规律时， V_m 出现在 $T = 0.5$ 的中央位置，使压力角达到或接近最大值 α_m ，这时的凸轮基圆半径为 $R_{2\min}$ 。于是上式变成

$$\tan \alpha_m = \frac{l_f \theta_{1h} V_m}{R_{2\min} \theta_{2h}} = \frac{l_f \theta_{1h} V_m}{(c - l_f) \theta_{2h}}$$

或

$$\tan \alpha_m = \frac{\frac{l_f}{c} \theta_{1h} V_m}{\left(1 - \frac{l_f}{c}\right) \theta_{2h}}$$

如果 α_m 取为许用压力角，运动规律、分度数与动程角选定后，便可利用上式求出比值 l_f/c ：

$$\frac{l_f}{c} = \frac{1}{1 + \frac{\theta_{1h} V_m}{\theta_{2h} \tan \alpha_m}}$$

运动规律的选择原则，基本上与圆柱分度凸轮机构一样。由于这种机构可以应用于更为高速的情况，工程上常常采用第二章中介绍过的一些适合高速机构的运动规律，如弗雷德斯坦与盖特曼曲线等。

凹桶形凸轮轮廓的轮廓坐标、压力角和曲率半径计算，同样可以采用图 4-10 所示的程序框图和第三节的公式，沿 x 向分支进行。

这种凸轮的轮廓无法像圆柱凸轮那样沿周向展开成平面图。为了直观地研究凸轮的工作曲面，可以选定若干个凸轮的轴向截面，画出这些截面上的平面轮廓线形状，便于设计时进行形象的分析比较。然而，上述办法难以表达全貌，常常利用计算机辅助作图技术，绘出图 4-19 所示的三维图形，可以从凹桶形凸轮的

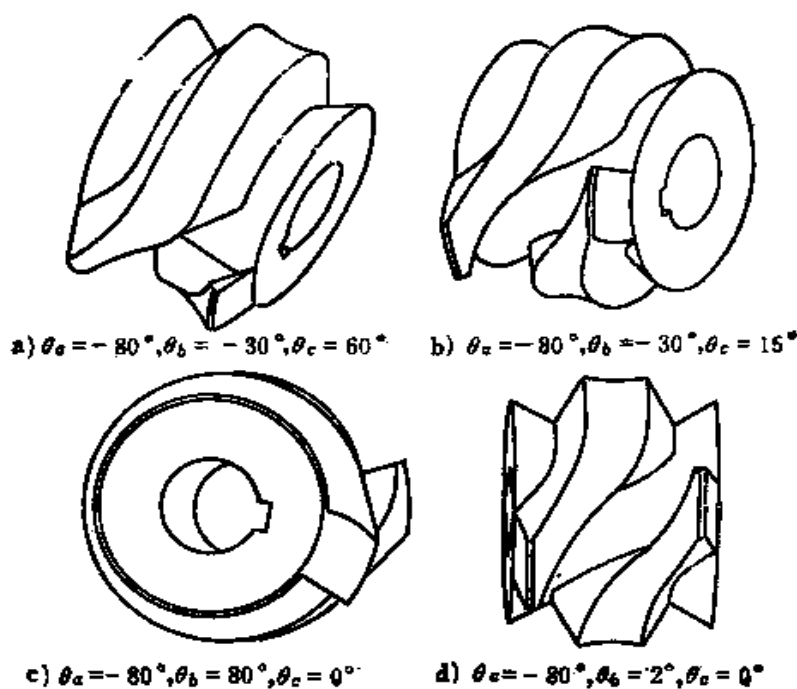


图4-19 凹桶形凸轮的三维图形

各个方向清晰地观察凸轮的轮廓线形状。

无论是凹桶形空间凸轮，还是圆柱形空间凸轮，它们的三维图形均可采用图4-20所示作图程序框图对应的专用程序绘出。首先输入空间凸轮的已知几何参数与运动参数，计算出空间凸轮曲面的矢量函数 R 。(参见图4-10)。然后再计算凸轮曲面与凸轮体内、外凹圆弧回转面的交线——棱线。这样的棱线有好几条，应按一定规则进行编号，以示区别。为了绘制三维轴侧图，必须对这些棱线进行投影变换运算。输入投影方向由 θ_a 、 θ_b 、 θ_c 三个参数确定，即先把 $T = 0$ 初始时刻的凸轮轮廓绕轴 y_2 回转 θ_a ，然后绕轴 x_2 回转 θ_b ，最后再绕轴 y_2 回转 θ_c 。从轴 z_2 的正向将凸轮轮廓棱线投影到 x_2 - y_2 平面，就可得到凸轮体的三维轴侧投影图。变换 θ_a 、 θ_b 、 θ_c ，就可得到不同方向的轴测投影图，如图4-19所示^[25]。这些图形是经过消隐处理的，即将求出的各部分曲面的外轮廓线，分为可见部分与不可见部分，确定其交界点，将棱线的不可见部分消去，留下可见部分画出来，构成立体感鲜

明的三维轴测图。

关于压力角与曲率计算，大体与圆柱凸轮情况相似。应注意的是，滚齿式分度凸轮机构具有能通过增加预紧力消除啮合间隙的优点，使得传动精度更高，动刚度较大，能运用于高速机构上。预紧力的大小与制造和装配精度等因素有关。

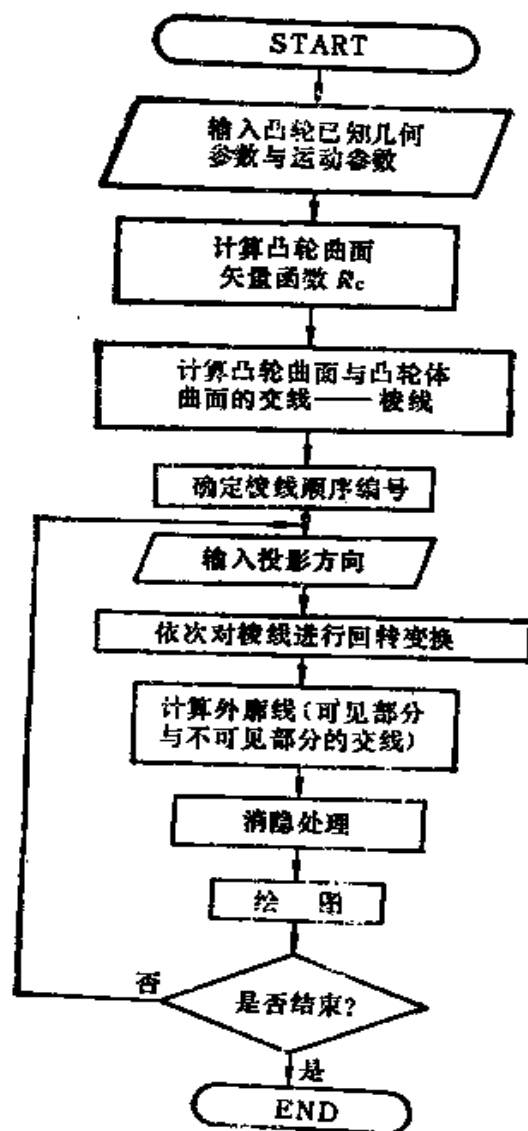


图4-20 空间凸轮作图程序框图

第五章 凸轮机构的 受力分析

第一节 载荷分析

凸轮机构在运动过程中，受到各种载荷的作用。一般地讲，这些载荷是：工作载荷，惯性力，阻尼力与封闭力，这些力或载荷的大小、方向和作用点，在凸轮运转的每一个循环内，常常是变化的。设计凸轮最重要的是从动件与凸轮轮廓接触点处的作用力。其大小与凸轮机构的结构有关。

一、工作载荷

工作载荷是指凸轮机构在做功过程中作用于凸轮上的载荷。由于工作对象不同，工作载荷可能是渐变式的、突变式的或冲击式的。对于低速凸轮机构，工作载荷一般可以看成渐变的静载荷。如果静载荷的方向与从动件升程方向相反，则在加速段，此载荷与惯性力同向；但在减速段，工作载荷与惯性力反向，工作载荷有减缓惯性力引起的冲击与振动的趋势。

在高速凸轮机构中，常常会出现从动件相对凸轮轮廓的冲击载荷。对于力封闭凸轮机构，当弹簧预载不够时，会出现这种冲击。对于几何封闭凸轮，若从动件与凸轮啮合存在间隙，在加速度反号时也会产生横越冲击。

二、惯性力

具有一定质量的机构在非匀速移动或转动过程中，不可避免会产生惯性力。惯性力的大小是从动件质量与加速度的乘积，方向与加速度相反，通过从动件的重心作用。

对于高速凸轮机构，在运转过程中各弹性构件因弹性变形而振动。构件本身的振动还会产生振动惯性力，并要叠加到前述的

整体惯性力上。这些惯性力的振动分量的大小与机构动力学响应特性有关。

三、阻尼力

凸轮机构中各构件的相对运动，必然会相互摩擦，产生静或动摩擦力。摩擦力的大小与正压力成正比，方向与构件运动方向相反。摩擦系数与材料匹配、表面质量、润滑状况等因素有关。凸轮机构的摩擦系数很难从有关资料中查到精确的数值。最好的办法是对机构进行实测。

在低速情况下，可以认为摩擦力与相对速度无关，即只存在所谓的库仑摩擦力。当速度较高时，常假定摩擦力与速度成正比，即存在粘性摩擦；这时总的摩擦力包括库仑摩擦力与粘性摩擦力两部分。

伴随构件振动，阻尼力还包括构件的内摩擦产生的结构阻尼力。

四、封闭力

在力封闭凸轮机构中，可以采用弹簧、气（液）压或重量来产生封闭力，使从动件与凸轮在运转中始终保持接触。

弹簧封闭力一般与从动件的位移成正比。弹簧刚度与预载的选择有关，应保证总载荷大于零，并有一定裕量。振动力越大时，这一裕量要越多。

五、实例

图5-1 a 所示的典型凸轮机构中，当凸轮等速转动时，从动件在升—停—降—停过程中，受到上述几种载荷的作用。工作载荷 Q_w 仅在某一段升程期间存在。惯性力 Q_i 与加速度响应 A 成正比。阻尼力 Q_f 与速度 v 有关。弹簧封闭力 Q_s 则主要与位移 s 有关。各载荷及其总载荷 Q 的变化曲线如图 5-1 b 所示。

由图可见，总载荷 Q 是变化的。最大载荷 Q_m 出现在升程工作载荷最大处；如果工作载荷很小，一般出现在最大加速度附近。 Q_s 是力封闭型凸轮机构保证从动件与凸轮始终保持接触所需的安全裕载。

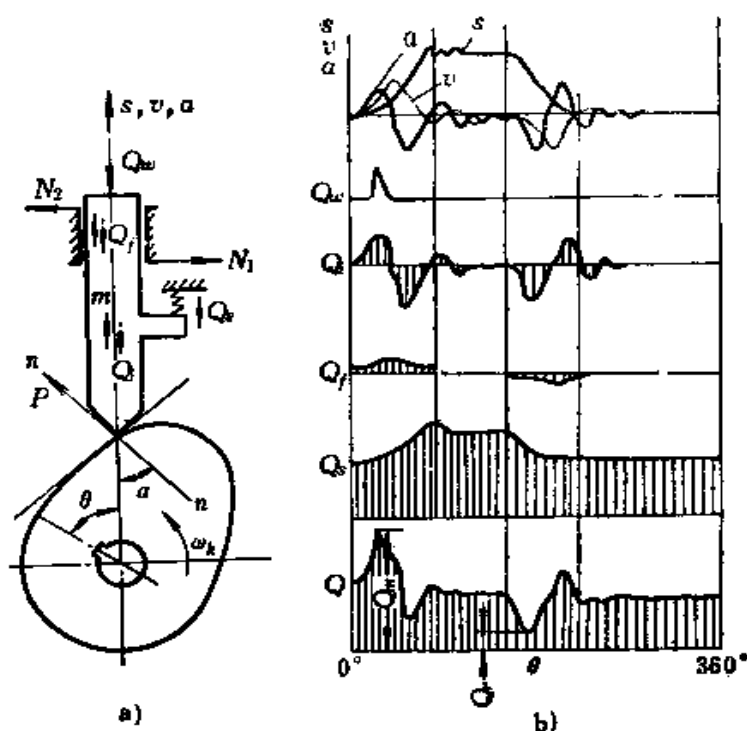


图5-1 典型凸轮机构的载荷变化曲线

a) 凸轮机构简图 b) 载荷曲线

根据上述载荷分析，可以算出凸轮轴的转矩。由于

$$Q = Q_v + Q_f + Q_r + Q_0$$

$$= Q_v + ma + [(N_1 + N_2)f + cv] + (kS + Q_0) \quad (5-1)$$

其中， m 为从动件质量； f 为导向支承与从动件间的摩擦系数； c 为粘性阻尼系数； k 为弹簧刚度； Q_0 为弹簧预载。

假定凸轮轴以角速度 ω_k 等速转动，并在 t_k 时间内，转过 θ_k （弧度）角。显然，时间 t 与转角 θ 成正比，即 $T = \frac{t}{t_k} = \frac{\theta}{\theta_k}$ ， $\omega_k = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_k}{t_k} = \text{常数}$ 。设凸轮轴的转矩为 M_0 ，凸轮旋转 $d\theta$ 时，从动件移动了 ds ，这时输入功为 $M_0 d\theta$ 。另一方面，输出功为 $Q ds$ 。如果从凸轮轴到从动件之间没有传动损耗，则二者应相等。于是有

$$M_0 = Q \frac{ds}{d\theta} = Q \frac{ds}{dt} \frac{t_k}{\theta_k} = Q v \frac{t_k}{\theta_k}$$

把式 (5-1) 和式 (2-1) 代入上式, 经整理可得

$$M_0 = \frac{mh^2}{\theta_s t_s^2} (AV) + \frac{ch^2}{\theta_s t_s} V^2 + \frac{kh^2}{\theta_s} (SV) + \frac{[(N_1 + N_2)f + Q_w + Q_0]k}{\theta_s} V \quad (5-2)$$

对于从动件为摆杆结构时, 上式中的第一项动载转矩可改写成

$$M_i = \frac{I\psi_s^2}{\theta_s t_s^2} (AV) \quad (5-3)$$

式中, I 为摆动从动杆的转动惯量; ψ_s 为摆动从动杆的总摆动角位移。

在高速凸轮机构中, 摩擦力和粘性阻尼力相对于惯性力来说, 可以忽略不计; 对于几何封闭凸轮机构, $k = 0$ 和 $Q_0 = 0$; 如果工作载荷 Q_w 比惯性力小得多, 加上一些考虑不到的实际因素, 工程上可以近似地用下式计算凸轮轴转矩

$$M_0 = bM_i \quad (5-4)$$

式中, b 为安全系数, 一般取 $b = 1.5$ 。

当忽略接触点的摩擦力时, 凸轮对从动件的接触反力 P 作用在凸轮轮廓法线 $n-n$ 上, 其大小与压力角 α 有关, 即

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad (5-5)$$

由于 P 的作用线与从动件运动方向不一致, 将在导向支承上产生两个反力 N_1 与 N_2 。如果不计导向摩擦力, 反力 N_1 与 N_2 将与运动方向垂直。

设计凸轮时, 还要校核由于 P 而产生的接触应力。 P 大于总载荷 Q , 其比值称为力增大系数 ϵ , 即

$$\epsilon = \frac{P}{Q} \quad (5-6)$$

为了减少凸轮轮廓与从动件端部的磨损, 应使力增大系数 ϵ 尽可能小一些。

第二节 基型凸轮机构的受力分析

为了便于分析不同结构的凸轮机构的受力情况，我们首先研究图 5-2 所示的基型凸轮机构。

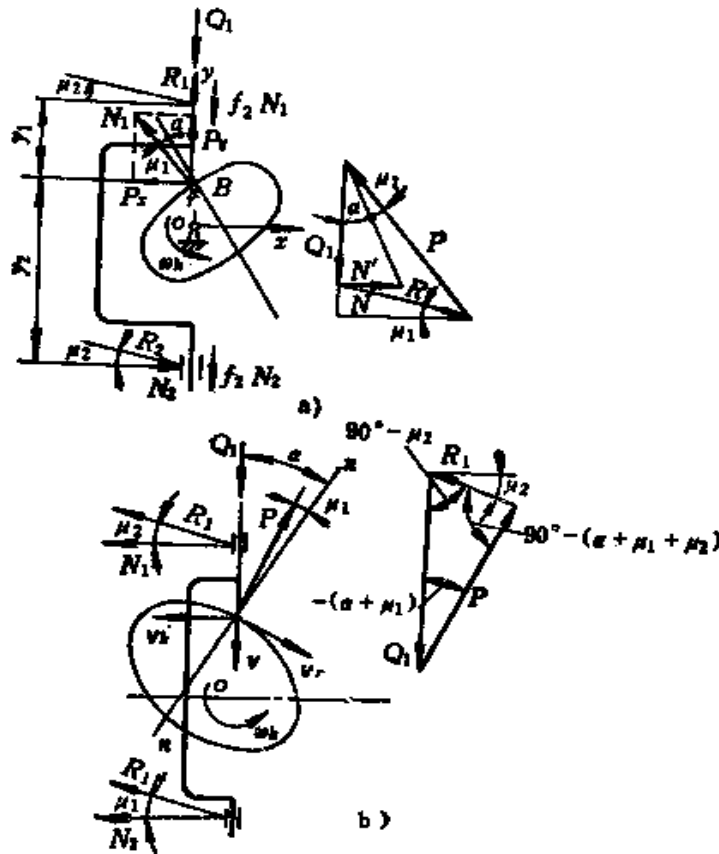


图5-2 Q_1 向下的基型凸轮机构

a) 升程 b) 回程

这种结构的支承位于凸轮上下两侧，支承中线通过旋转中心。不包括摩擦力的载荷 Q_1 沿中线向下作用。凸轮对从动件端部的反力 P 偏非法线的角度，即摩擦角 $\mu_1 = \arctan f_1$ ，其中 f_1 是凸轮与从动件之间的摩擦系数。

支承对从动件的反力 R_1 和 R_2 与垂直反力 N_1 和 N_2 也偏离一个摩擦角 $\mu_2 = \arctan f_2$ ， f_2 为从动件与支承之间的摩擦系数。

令 $R = R_1 + R_2$, Q_1 、 P 和 R 作升程时的力三角形如图5-2 a 所示。利用正弦定理, 求得力增大系数为

$$\varepsilon = \frac{P}{Q_1} = \frac{\cos \mu_2}{\cos(\alpha + \mu_1 + \mu_2)} \quad (5-7)$$

总反力 R 可由下式求得

$$\frac{R}{Q_1} = \frac{\sin(\alpha + \mu_1)}{\cos(\alpha + \mu_1 + \mu_2)} \quad (5-8)$$

两支承反力将随接触点的位置不同而变化, 即

$$R_1 = R \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad R_2 = R \frac{y_1}{y_1 + y_2} \quad (5-9)$$

支承摩擦力只与垂直反力 N_1 、 N_2 有关, 即应为 $f_2 N_1$ 与 $f_2 N_2$ 。凸轮反力的水平与垂直分量分别为

$$P_x = N_1 + N_2$$

$$P_y = Q_1 + f_2(N_1 + N_2) = P_x \operatorname{ctg}(\alpha + \mu_1)$$

由此可得

$$\frac{Q_1}{P_x} = \operatorname{ctg}(\alpha + \mu_1) - f_2 \quad (5-10)$$

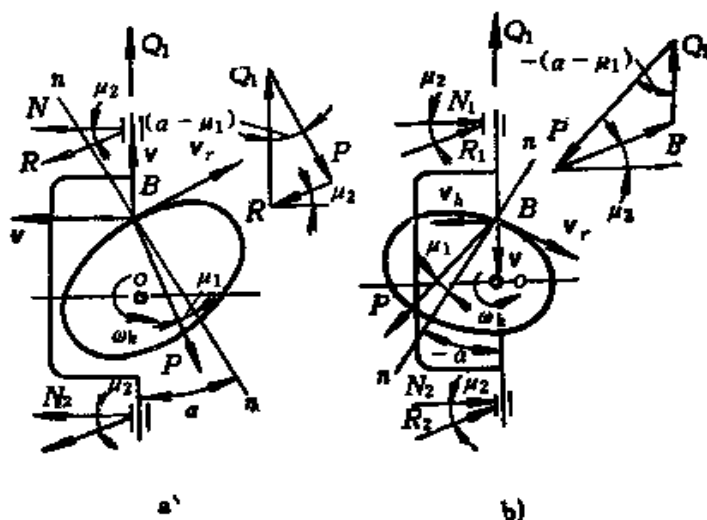


图5-3 Q_1 向上的基型凸轮机构

a) 升程 b) 回程

凸轮轴上受到的力矩将为

$$M_0 = Pr \sin(\alpha + \mu_1) \quad (5-11)$$

当凸轮机构处于回程时, 受力情况如图5-2 b 所示。按力三角形关系, 可知力增大系数的计算公式与式(5-7)相同。

在几何封闭凸轮机构中, 当惯性力是载荷的主要组成时, Q_1 将有可能在(向下作用的)负加速度段内向上作用, 如图5-3所示。

力增大系数可由力三角形关系求得, 为

$$e = \frac{P}{Q_1} \cdot \frac{\cos \mu_2}{\cos(\alpha - \mu_1 - \mu_2)} \quad (5-12)$$

与式(5-7)合并成力增大系数的通式, 有

$$e = \frac{\cos \mu_2}{\cos(\alpha \pm \mu_1 \pm \mu_2)} \quad (5-13)$$

其中, 当 Q_1 向下时, 取上面的符号; Q_1 向上时, 取下面的符号。

第三节 转化摩擦系数

为了方便地进行非基型凸轮的受力分析, 引入一转化摩擦系数 $f_{i,d}$, 其定义如下:

$$f_{i,d} = \nu_i f_i \quad (5-14)$$

其中, f_i 为非基型凸轮机构 i 摩擦副的摩擦系数; ν_i 为与凸轮机构结构和构件尺寸有关的转化系数。

一、从动滚子

从动件与凸轮之间的转化摩擦系数为

$$f_{i,d} = \nu_i f_i \quad (5-15)$$

式中, f_i 为从动件与凸轮接触面上的滑动摩擦系数; ν_i 为对应的转化系数。

对于尖端或平底从动杆,

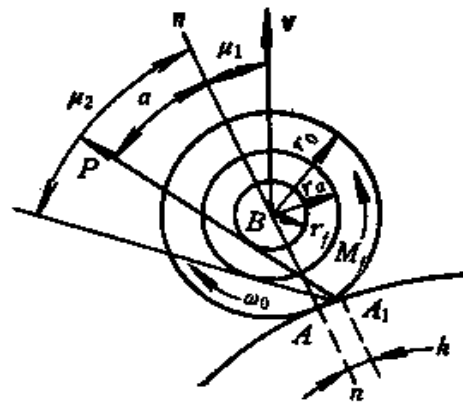


图5-4 从动滚子的受力图

$\nu_1 = 1$ 。如果从动杆装有滚子，则滚子轴销上的摩擦力矩（图5-4）为

$$M_f = Pr_f$$

其中， r_f 是半径为 r_0 的滚子与半径为 r_0 的轴销之间的摩擦圆半径。

根据实验结果，对于一般的轴孔配合后的情况，有如下关系：

$$r_f \approx 1.27f_1r_0 \quad (5-16)$$

式中， f_1 为轴孔与轴之间的滑动摩擦系数。

滚动摩擦系数 k 是指反力 P 作用点 A_1 偏离法线 $n-n$ 与轮廓的交点 A 的距离，即 $k = \overline{AA_1}$ ， P 的作用方向应与摩擦圆相切。这时的转化摩擦系数及其摩擦角，按定义为

$$f_{1d} = \tan \mu_{1d} = \frac{k + r_f}{r_0} = \nu_1 f_1$$

将式 (5-16) 代入上式，考虑到 $k \ll \nu_1 r_0$ ，可以推出转化系数为

$$\nu_1 = 1.27 \frac{r_0}{r_0} \quad (5-17)$$

一般 $1.27r_0 < r_0$ ，故 $\nu_1 < 1$ ，因此，从动滚子与凸轮间的转化摩擦系数总是小于尖端或平底从动杆与凸轮间的摩擦系数。在计算 ε 时，可把式 (5-13) 中的 μ_1 改成数值较小的 μ_{1d} ，显然结果会大大改善。

二、悬臂型直动从动杆

对于如图 5-5 所示的悬臂型直动从动杆的支承结构，支承与从动杆之间的转化摩擦系数 $f_{2d} = \nu_2 f_2$ 中的转化系数 ν_2 ，可通过受力分析求得。

由于从动件与支承之间存

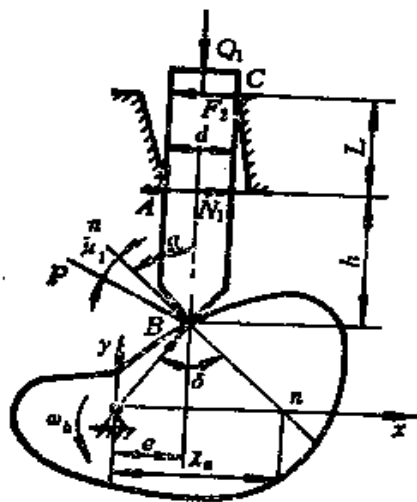


图5-5 悬臂型直动从动杆
凸轮机构受力图

在间隙, 在反力 P 作用下, 支承的法向反力 N_1, N_2 与摩擦力 F_1, F_2 将作用在 A 与 C 点。不包括摩擦力的总载荷 Q_1 沿从动杆轴线向下作用, 由力平衡条件有

$$P_x = P \sin(\alpha + \mu_1) = N_1 - N_2 \quad (5-18)$$

$$P_y = P \cos(\alpha + \mu_1) = Q_1 \pm F_1 + F_2$$

当升程时 (法线与 x 轴交点的横坐标 $x_0 > 0$) 取正号, 回程时 ($x_0 < 0$), 取负号。

因为

$$F_1 = f_2 N_1, \quad F_2 = f_2 N_2$$

式中, f_2 为从动杆与支承之间的滑动摩擦系数, 所以

$$P \cos(\alpha + \mu_1) = Q_1 \pm f_2 N_1 \pm f_2 N_2 \quad (5-19)$$

由式 (5-18) 与式 (5-19) 可解出反力为

$$\begin{cases} N_1 = \frac{P \cos(\alpha + \mu_1) - P f_2 \sin(\alpha + \mu_1) - Q_1}{2 f_2} \\ N_2 = \frac{P \cos(\alpha + \mu_1) + P f_2 \sin(\alpha + \mu_1) - Q_1}{2 f_2} \end{cases}$$

由对 A 点的力矩平衡条件有

$$P \sin(\alpha + \mu_1) h \pm f_2 N_2 d + Q_1 \frac{d}{2} - P \cos(\alpha + \mu_1) \frac{d}{2} - N_2 L = 0$$

式中的 L 与 h 的定义参见图 5-5。把前面求得的 N_1, N_2 代入上式, 经整理可得这种机构的力增大系数公式为

$$\epsilon = \frac{P}{Q_1} = \frac{1}{\cos(\alpha + \mu_1) \mp f_2 \sin(\alpha + \mu_1) \left(1 + \frac{2h}{L} \mp \frac{f_2 d}{L} \right)}$$

若假定

$$f_{2d} = \tan \mu_{2d} = \pm f_2 \left(1 + \frac{2h}{L} \mp \frac{f_2 d}{L} \right)$$

则有

$$\epsilon = \frac{\cos \mu_{2d}}{\cos(\alpha + \mu_1 + \mu_{2d})} \quad (5-20)$$

式中, μ_{2d} 是这种机构的从动杆与支承间的转化摩擦角。

将式 (5-20) 与基型凸轮机构的公式 (5-7) 比较, 可知这时的转化系数为

$$\nu_2 = 1 + \frac{2h}{L} \mp \frac{f_{2d}}{L} \quad (5-21)$$

于是, 凸轮对从动杆的接触反力为

$$P = \varepsilon Q_1$$

凸轮轴的驱动力矩为

$$M_0 = Pr \sin(\delta + \mu_1) \quad (5-22)$$

其中, $\delta = \alpha + \arcsin \frac{e}{r}$ 。

不考虑摩擦力时

$$M'_0 = x_0 Q_1$$

式中 x_0 的定义参见图 5-5。

三、摆动从动杆

对于图 5-6 a 所示摆动从动杆凸轮机构, 载荷为力矩 M , 摆杆臂长为 l , 转销半径为 r_0 , 转销与摆杆孔之间的摩擦圆半径 $r_f = 1.27 f_2 r_0$ [见式 (5-16)]。转销反力 R 与 P 大小相等, 方向平行并与摩擦圆相切。根据平衡条件有

$$[P \cos(\alpha + \mu_1)] l - M - Pr_f = 0$$

令 $Q_1 = \frac{M}{l}$, 可得力增大系数

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{P}{Q_1} &= \frac{1}{\cos(\alpha + \mu_1) - \frac{1.27 f_2 r_0}{l}} \\ &= \frac{1}{\cos(\alpha + \mu_1) - \frac{1.27 f_2 \gamma_0}{l \sin(\alpha + \mu_1)} \sin(\alpha + \mu_1)} \\ &= \frac{\cos \mu_{2d}}{\cos(\alpha + \mu_1 + \mu_{2d})} \end{aligned} \quad (5-23)$$

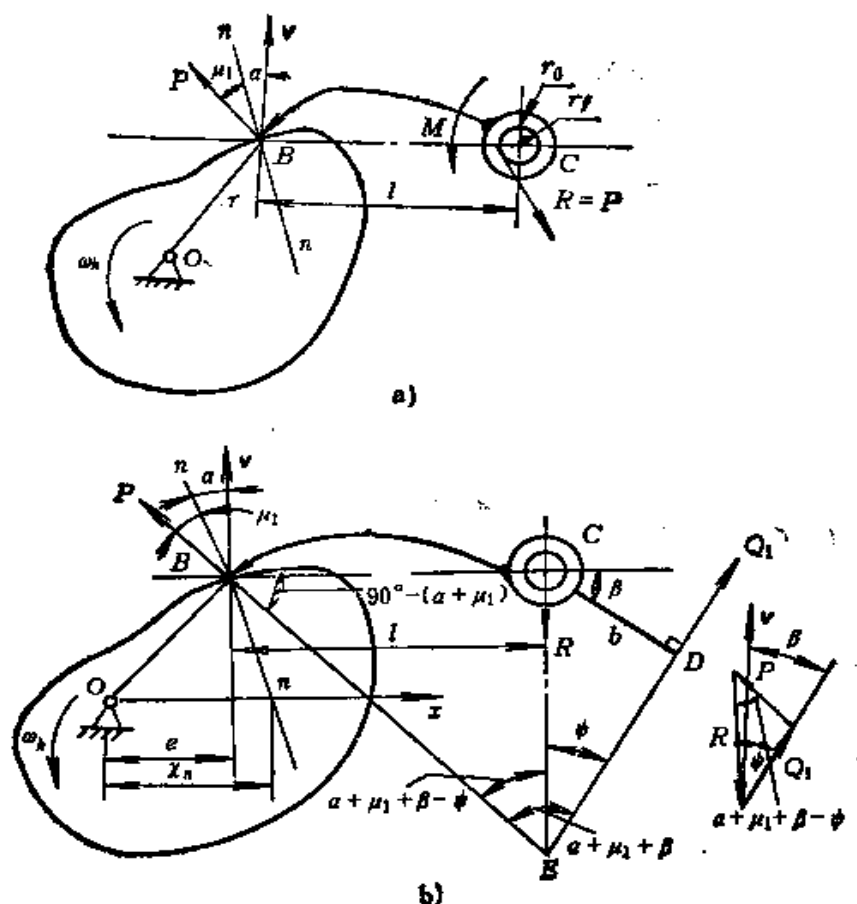


图5-6 摆动从动杆凸轮机构受力图
a) 力矩型载荷 b) 力型载荷

其中，转化摩擦角公式为

$$f_{zd} = \tan \mu_{zd} = \frac{1.27 f_2 r_0}{l \sin(\alpha + \mu_1)}$$

由此得转化系数为

$$\nu_2 = \frac{1.27 r_0}{l \sin(\alpha + \mu_1)} \quad (5-24)$$

因为 $l \gg r_0$ ，一般情况下， $\nu_2 < 1$ 。这就是摆动从动杆凸轮机构的力增大系数较直动从动杆小的原因。

如图5-6 b所示，设载荷是力 Q_1 。不计转销反力 R 所产生的摩擦力矩，则 R 将通过接触反力 P 与 Q_1 的交点 E 。作 $CD \perp Q_1$ ，

由图上所示力三角形, 可得

$$\varepsilon = \frac{P}{Q_1} = \frac{\sin \psi}{\sin(\alpha + \mu_1 + \beta - \psi)} \quad (5-25)$$

由 $\triangle CDE$ 和 $\triangle CBE$ 求得

$$\overline{CE} = \frac{b}{\sin \psi} = \frac{l \cos(\alpha + \mu_1)}{\sin(\alpha + \mu_1 + \beta - \psi)}$$

由此式可解出

$$\operatorname{ctg} \psi = \operatorname{ctg}(\alpha + \mu_1 + \beta) \left[1 + \frac{l \cos(\alpha + \mu_1)}{b \cos(\alpha + \mu_1 + \beta)} \right] \quad (5-26)$$

将此关系代入式 (5-25), 整理后可得

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{P}{Q_1} = \frac{1}{\sin(\alpha + \mu_1 + \beta) \operatorname{ctg} \psi - \cos(\alpha + \mu_1 + \beta)} = \frac{b}{l} \\ &\times \frac{1}{\cos(\alpha + \mu_1)} \end{aligned} \quad (5-27)$$

由图示力三角形, 有

$$\frac{R}{P} = \frac{\sin(\alpha + \mu_1 + \beta)}{\sin \psi}$$

或

$$\frac{R}{P_s} = \frac{\sin(\alpha + \mu_1 + \beta)}{\sin(\alpha + \mu_1) \sin \psi} \quad (5-28)$$

半径为 r_0 的转销的摩擦力矩为

$$M_f = 1.27 r_0 f_2 R$$

与从动杆运动速度反向的总摩擦力则为

$$F = \frac{M_f}{l} = \frac{1.27 r_0 f_2 R}{l} \quad (5-29)$$

按转化摩擦系数的定义, 有

$$f_{2d} = \tan \mu_{2d} = \frac{F}{P_s} = \frac{f \Sigma |N_i|}{P_s} = \nu_2 f_2$$

把式 (5-24) 与式 (5-25) 代入上式, 可求得转化系数为

$$\nu_2 = \frac{1.27 r_0}{l} \frac{\sin(\alpha + \mu_1 + \beta)}{\sin(\alpha + \mu_1)} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi}$$

将式 (5-26) 代入上式, 得

$$v_2 = \frac{1.27r_0}{l} \times \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha + \mu_1) \left\{ 1 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 + 2\frac{l}{b} [\cos\alpha - \sin\alpha \tan(\alpha + \mu_1)] \right\}} \quad (5-30)$$

四、圆柱凸轮机构

对于图5-7 a 所示非悬臂型从动杆圆柱凸轮机构, 在载荷 Q_1 作用下, 由于反力 P 相对轴线倾斜 $(\alpha + \mu_1)$, 在导向支承 A 与 C 处将分别产生摩擦力。

利用力与力矩的平衡条件, 有

$$A_x - C_x = 0$$

$$A_y - C_y - P \sin(\alpha + \mu_1) = 0$$

$$P \cos(\alpha + \mu_1) - F_A - F_C - F_m - Q_1 = 0$$

$$A_y L - [P \sin(\alpha + \mu_1)] B = 0$$

$$P \cos(\alpha + \mu_1) B - A_x a = 0$$

$$[P \sin(\alpha + \mu_1)] B - N a = 0$$

式中, L 、 B 、 a 的定义参见图 5-7; $F_A = (A_x + A_y) f_2$; $F_C = (C_x + C_y) f_2$; $F_m = N f_2$ 。

利用上述关系, 可以求得

$$Q_1 = P \cos(\alpha + \mu_1) - 2[P \cos(\alpha + \mu_1)] \frac{B}{L} f_2 - [P \sin(\alpha + \mu_1)] f_2 - [P \sin(\alpha + \mu_1)] \frac{B}{a} f_2$$

由此得力增大系数为

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{P}{Q_1} &= \frac{1}{\cos(\alpha + \mu_1) - f_2 \sin(\alpha + \mu_1) \left[2 \frac{B}{L} \operatorname{ctg}(\alpha + \mu_1) + 1 + \frac{B}{a} \right]} \\ &= \frac{\cos \mu_{2d}}{\cos(\alpha + \mu_1 + \mu_{2d})} \end{aligned}$$

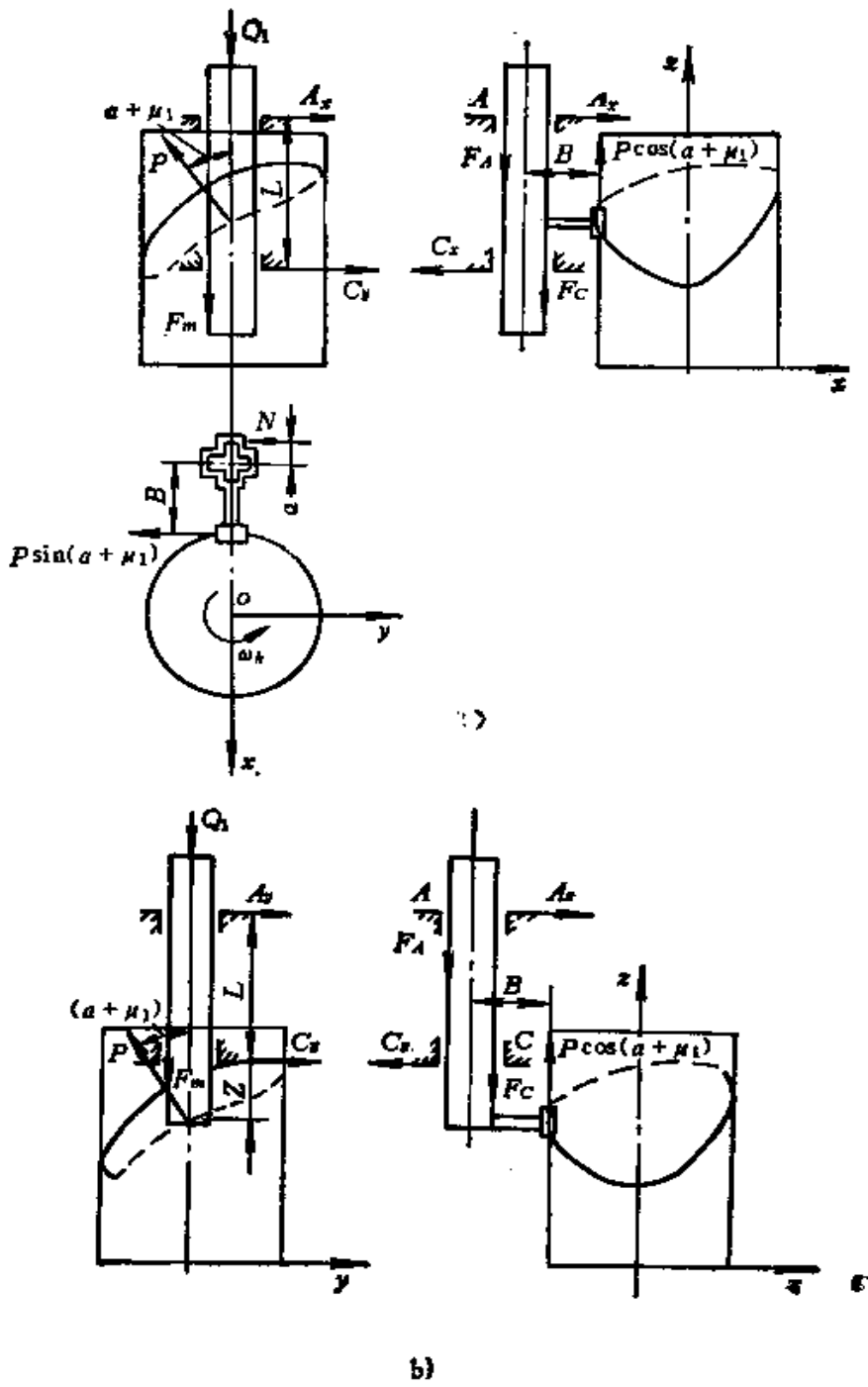


图5-7 圆柱凸轮机构受力图

a) 非基臂型 b) 基臂型

式中, 转化摩擦角 $\mu_2' = \arctan \nu_2 f_2$, 因而转化系数为

$$\nu_2 = 2 \frac{B}{L} \operatorname{ctg}(\alpha + \mu_1) + 1 + \frac{B}{a} \quad (5-31)$$

对于图5-7 b 所示悬臂型圆柱凸轮机构, 类似地可推得

$$\nu_2 = 2 \frac{B}{L} \operatorname{ctg}(\alpha + \mu_1) + 1 + \frac{B}{a} + \frac{2Z}{L} \quad (5-32)$$

半径为 R_0 的圆柱凸轮的驱动力矩则为

$$M_0 = PR_0 \sin(\alpha + \mu_1) \quad (5-33)$$

第四节 凸轮机构的效率

凸轮机构的效率在运转过程中是随位置不同而变的。以下首先研究图 5-2 所示的基型凸轮机构。若凸轮转过角度 $d\theta$, 使从动件上升 ds 。凸轮转过 $d\theta$, 在不考虑摩擦的情况下所做的有用功为

$$A' = M_0' d\theta$$

式中, M_0' 为不考虑摩擦时凸轮轴上的驱动力矩。

考虑摩擦时, 凸轮转过相同角度所消耗的功为

$$A = M_0 d\theta$$

基型凸轮机构的效率则为

$$\eta = \frac{A'}{A} = \frac{M_0' d\theta}{M_0 d\theta} = \frac{M_0'}{M_0}$$

按式 (5-22), 考虑摩擦时的凸轮轴转矩为

$$M_0 = Pr \sin(\alpha + \mu_1)$$

不考虑摩擦时的凸轮轴转矩为

$$M_0' = x_s Q$$

将上述关系代入上述 η 的公式, 考虑到 $x_s = r \tan \alpha$, 得

$$\eta = \frac{Q}{P} \cdot \frac{\tan \alpha}{\sin(\alpha + \mu_1)} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\tan \alpha}{\sin(\alpha + \mu_1)}$$

再把 ϵ 的公式 (5-7) 代入, 则得

$$\eta = \frac{\tan \alpha \cos(\alpha + \mu_1 + \mu_2)}{\sin(\alpha + \mu_1) \cos \mu_2} = \tan \alpha [\operatorname{ctg}(\alpha + \mu_1) - \tan \mu_2]$$

利用关系 $\tan \mu_1 = f_1$, $\tan \mu_2 = f_2$

和
$$\operatorname{ctg}(\alpha + \mu_1) = \frac{1 - \tan \alpha \tan \mu_1}{\tan \alpha + \tan \mu_1}$$

可得效率计算公式为

$$\eta = \frac{1 - f_1 f_2 - (f_1 + f_2) \tan \alpha}{1 + f_1 \tan \alpha} \quad (5-34)$$

由条件 $\frac{d\eta}{d\alpha} = 0$, 可求得最大效率 η_{\max} 对应的压力角 α^* 为

$$\tan \alpha^* = \sqrt{\frac{f_1(1 + f_1^2)}{f_1 + f_2}} - f_1 \quad (5-35)$$

因此, 最大效率为

$$\eta_{\max} = \tan \alpha^* [\operatorname{ctg}(\alpha^* + \mu_1) - \tan \mu_2] \quad (5-36)$$

由式 (5-34) 可画出效率 η 在不同 f_1 与 f_2 值情况下随压力角变化的关系曲线, 如图 5-8 所示。显而易见, f_1 对 η 的影响很大。为了提高凸轮机构的效应, 应采用 f_1 值较小的滚子从动杆。从图中还可看到, 压力角过大或过小, 其效率都很差; 只有在 $\alpha = \alpha^*$ 时, 效率最高, $\eta = \eta_{\max}$, 因此, 在

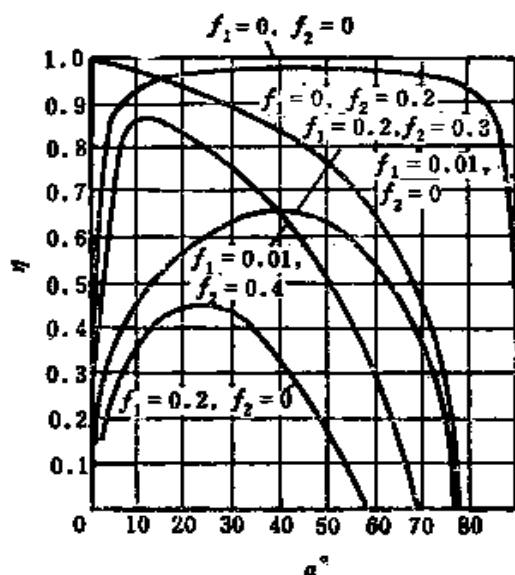


图5-8 基型凸轮机构的效率变化曲线

从动杆上升或下降过程中, 效率从零开始增加, 在 $\alpha = \alpha^*$ 处达到最大值 η_{\max} , 运动终止时效率再下降为零。

对于几何封闭凸轮机构, 当 Q_1 的方向向上时 (图5-3), 类似地可推导出这种情况的效率公式为

$$\eta = \frac{1 - f_1 \operatorname{ctg} \alpha}{1 - f_1 f_2 + (f_1 + f_2) \tan \alpha} \quad (5-37)$$

$$\tan \alpha^* = \sqrt{\frac{f_1(1 + f_1^2)}{f_1 + f_2}} + f_1 \quad (5-38)$$

对于非基型凸轮机构的效率计算，只须将上述公式的摩擦系数 f 改为转化摩擦系数 f_t 即可。

第五节 力封闭弹簧参数的优化

对于弹簧力封闭的凸轮机构，为了保证在整个运转过程中从动件与凸轮之间不会分离，必须选用合理的弹簧参数，使图 5-1 中的封闭力 Q_c 足够大，以致安全裕载 Q_s 能大于零。

问题的复杂性不仅在于凸轮机构的各种载荷随从动件位移的变化关系难以确定，而且弹簧封闭力也因弹簧刚度的非线性而变得十分复杂。

为了便于分析弹簧参数确定的有关因素，以载荷仅由线性弹簧封闭力和惯性力组成的简单情况为例。如图 5-9 a 所示，惯性力 Q_i 是按正弦规律变化的，即与加速度 a 成正比； $Q_i = ma$ ， m 是从动件的质量，封闭力 Q_c 可按位移 s 的公式算出，即 $Q_c = ks$ ，其中 k 是弹簧的刚度。由忽略摩擦力情况下的总载荷 $Q = Q_i + Q_c$ 曲线（图 5-9）可见， $Q_c > 0$ ，满足不分离条件。在一般情况下，为了保证安全，对于低速机构，取 $Q_s = (1.2 \sim 1.3) Q_m$ ， Q_m 为 Q_i 的极值，对于高速机构，如果没有进行动力学分析，求出其实际的加速度响应，仍按凸轮曲线的加速度计算惯性力时，考虑到振动分量较大，取 $Q_s = (2 \sim 2.5) Q_m$ 。

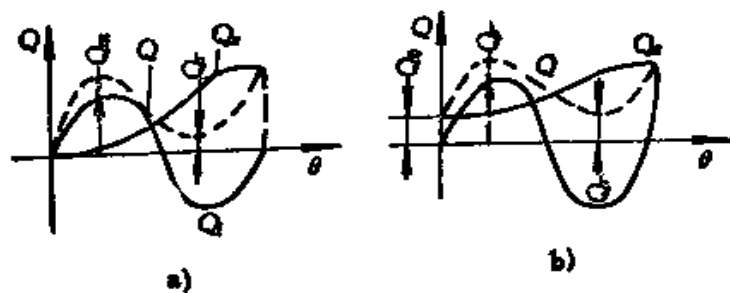


图 5-9 封闭弹簧参数的影响

a) 无预载 b) 有预载

如果 Q_r 小于上述安全裕量,可增加弹簧刚度 k ,或增加弹簧预载 Q_0 ,如图5-9 b所示。 k 与 Q_0 的合理选择原则是使 Q_m 最小。从图5-9的曲线比较,显然是 $Q_0 = 0$ 较好,然而,图5-9 a中的无预载情况是不可取的,因为在开始上升时期 $Q < Q_r$,在 $\theta = 0$ 处, $Q_{min} = 0$ 。为了保证在初始阶段 $Q > Q_r$,必须取 $Q_0 > Q_r$ 。所以,一般情况下,总要有一定的预载。

为了比较精确计算弹簧参数的优化值,可建立如下的优化模型:

$$\begin{cases} \min Q_m(\mathbf{X}) \\ \mathbf{x} \in R^n \\ Q - k_r Q_r \geq 0 \end{cases} \quad (5-39)$$

其中, $\mathbf{X} = [k, Q_0]^T$; k_r 为安全系数,低速机构取1.2~1.3,高速取2~2.5。

按上述优化模型求出的 k 与 Q_0 值,可保证在不发生分离的条件下,作为优化目标函数的总载荷的最大值 Q_m 为最小。

第六节 接触应力计算

凸轮与从动滚子之间传递载荷时,接触处将形成一个有限大的接触面,相应地将会在凸轮与从动滚子接触区附近产生接触应力。接触应力与凸轮—从动滚子系统的载荷 Q (或接触反力 P)、几何形状、材料性能和表面处理等因素有关。这一幅值较大的交变接触应力,将会引起凸轮与滚子的剧烈磨损,以致破坏凸轮机构的工作性能。因此,在凸轮机构设计中,主要还应校核接触应力强度。

接触应力的计算建立在古典的赫兹(Hertz)理论的基础上。把凸轮与从动滚子看成是两个在坐标原点接触的弹性体,如图5-10所示,通过这一点存在一个切平面。如果载荷作用在公法线上,由于弹性变形,接触点将变成一个很小的接触面,现假定凸轮与滚子的材料各向同性,且为弹性体,符合虎克定律;此外,只考虑法向压力,忽略 xy 平面内的相对滑动与剪力。

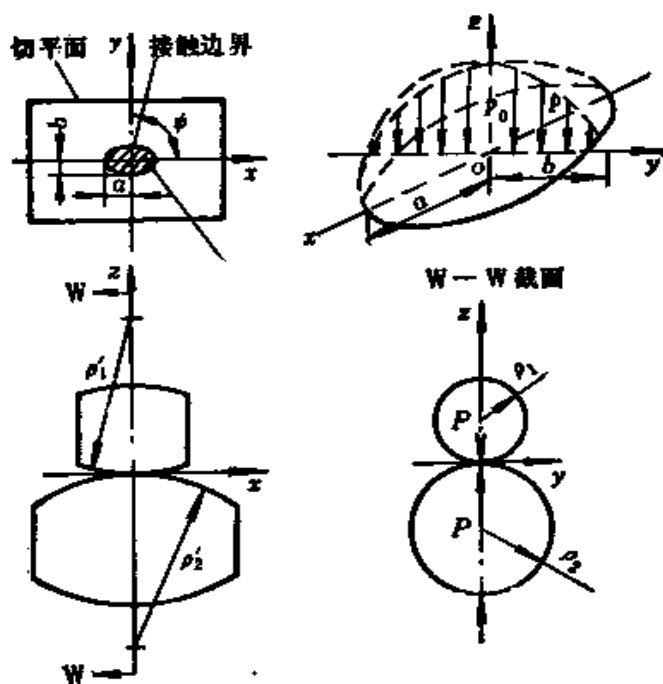


图5-10 凸轮与滚子弹性接触模型图

根据上述假设，利用势能理论，赫兹指出，两个弹性体间的压力分布呈半椭球形，接触面在切面上将有一个椭圆边界，如图5-10所示。接触面上的压力强度 p 满足如下椭球关系：

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad (5-40)$$

式中， a 与 b 为椭圆边界的半长轴与半短轴。压力强度最大值 p_0 出现在接触面中心点 O ，并且

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi ab} \quad (5-41)$$

式中， P 为接触面上相互作用的正压力。接触边界椭圆的半轴 a 与 b 为

$$\begin{cases} a = \pi \left[\left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{P\Delta}{A+B} \right) \right]^{1/3} \\ b = \pi \left[\left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{P\Delta}{A+B} \right) \right]^{1/3} \end{cases} \quad (5-42)$$

式中, Δ 为材料因子, 与两种材料的泊松比 μ_1, μ_2 和弹性模量 E_1, E_2 有关, 即

$$\Delta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \quad (5-43)$$

m 和 n 为接触椭圆常数, 与弹性体接触点的曲率半径有关, 其数值列于表5-1内。

表5-1 接触椭圆常数

θ	m	n	θ	m	n
35°	2.397	0.530	65°	1.378	0.759
40°	2.136	0.567	70°	1.284	0.802
45°	1.926	0.604	75°	1.202	0.846
50°	1.754	0.641	80°	1.128	0.893
55°	1.611	0.678	85°	1.061	0.944
60°	1.486	0.717	90°	1.000	1.000

其中, $\cos \theta = \frac{B - A}{B + A}$ 。 A 与 B 为由接触点各曲率半径决定的因子。若令 ρ_1 与 ρ_2 为最小曲率半径, ρ'_1 与 ρ'_2 为最大曲率半径, 而 ψ 为曲率 $\frac{1}{\rho_1}$ 与 $\frac{1}{\rho_2}$ 所在平面间的夹角, 则有

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2} \right) \\ A - B = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho'_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho'_2} \right)^2 \right. \\ \quad \left. + 2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho'_1} \right) \left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos 2\psi \right]^{1/2} \end{cases} \quad (5-44)$$

因此, 式 (5-42) 表示的椭圆半轴 a 、 b 与两个接触体的形状、载荷和材料特性有关。

对于两个无限长的柱体相互接触, 上述关系可以简化。设接触点处曲率半径为 ρ_1 与 ρ_2 , 柱体轴线互相平行, 如图5-11所示, 则接触边界将变成两条平行线; 对于长度为 L 的柱体, 接触区可近似看成一矩形, 其宽度 $2b$ 可写成

$$2b = \left(\frac{16P'\rho}{\pi E} \right)^{1/2} \quad (5-45)$$

式中, $\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$; $P' = \frac{P}{L}$ 。可见, 对于图 5-11 所示的特殊情况, 接触区尺寸与载荷为 $1/2$ 次方关系, 而前面图 5-10 所示空间情况, 则为 $1/3$ 次方关系。

沿接触区宽度方向的法向压强分布为

$$p = p_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad (5-46)$$

式中, $p_0 = \frac{2P'}{\pi b}$ 。

由图 5-11 上所示圆的几何关系可见, 压缩深度 h_1 与 h_2 为

$$\begin{cases} h_1 = \rho_1 - \sqrt{\rho_1^2 - b^2} \\ h_2 = \rho_2 - \sqrt{\rho_2^2 - b^2} \end{cases} \quad (5-47)$$

利用牛顿势函数, 接触弹性体内的整个应力均可以求得。图 5-12 给出了一个典型的接触应力随表层下深度而变化的变化曲线。由图可见, 最大剪应力 $\tau_{yz}(45^\circ)$ 约等于 $0.3p_0$, 出现在深度 $0.786b$ 处。最大正应力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) 出现在接触面上, 均为压应力, 它们的联合应力将产生一个剪切分量, 其最大值位于表层下面某点。因为凸轮一般采用钢材制作, 它的流动取决于剪应力。前述表层下的最大剪应力将引起凸轮表面局部下陷, 这就是凸轮破坏的主要原因之一。

对于图 5-10 与图 5-11 所示两种情况的最大接触应力计算公式分别为

$$\sigma_{\max} = 0.578 \left[\frac{P \left(\frac{\rho_1 \pm \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)^2}{\Delta^2} \right]^{1/3} \quad (5-48)$$

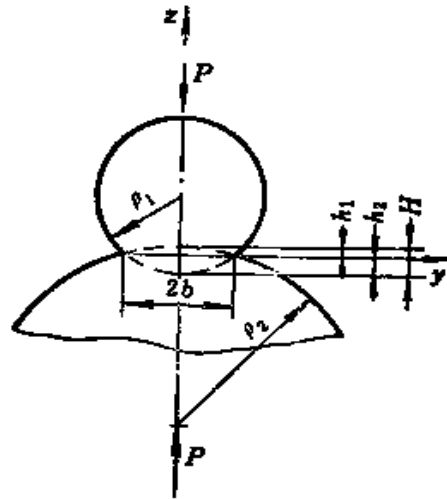
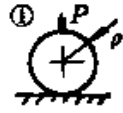


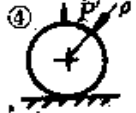




图 5-11 柱体的弹性接触

表5-2 接触应

No.	几何形状	相异金属	
		$p_0 = \sigma_2 = \sigma_{\max}$	
1	球与平面		$0.578 \left[\frac{P}{P^2 \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2} \right]^{1/3}$
2	球与球		$0.578 \left[\frac{P \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)^2}{\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2} \right]^{1/3}$
3	球与球穴		$0.578 \left[\frac{P \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)^2}{\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2} \right]^{1/3}$
4	圆柱与平面		$0.564 \left[\frac{P'}{\rho \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)} \right]^{1/2}$
5	圆柱与圆柱		$0.564 \left[\frac{P' \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}} \right]^{1/2}$
6	圆柱与圆柱沟		$0.564 \left[\frac{P' \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}} \right]^{1/2}$

注: P = 总载荷 $P' = P/\pi$ = 单位宽度的载荷

力计算公式综合

相同金属	$E_1 = E_2 = E, \mu_1 = \mu_2 = 0.3$		
$P_0 = \sigma_2 = \sigma_{max}$	τ_{max}	r_{max} 的深度	$a = b'$ (No. 1, 2, 3) b (No. 4, 5, 6)
$0.388 \left[\frac{PE^2}{\rho^2} \right]^{1/3}$	$0.33P_0$	$0.25a$	$1.11 \left[\frac{PR}{E} \right]^{1/3}$
$0.388 \left[PE^2 \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)^2 \right]^{1/3}$	$0.33P_0$	$0.25a$	$1.11 \left[\frac{P}{E} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \right]^{1/3}$
$0.388 \left[PE^2 \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)^2 \right]^{1/3}$	$0.33P_0$	$0.25a$	$1.11 \left[\frac{P}{E} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \right) \right]^{1/3}$
$0.418 \left[\frac{P'E}{\rho} \right]^{1/2}$	$0.30P_0$	$0.79b$	$3.04 \left[\frac{P'\rho}{E} \right]^{1/2}$
$0.418 \left[P'E \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right) \right]^{1/2}$	$0.30P_0$	$0.79b$	$3.04 \left[\frac{P'}{E} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \right]^{1/2}$
$0.418 \left[P'E \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right) \right]^{1/2}$	$0.30P_0$	$0.79b$	$3.04 \left[\frac{P'}{E} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \right) \right]^{1/2}$

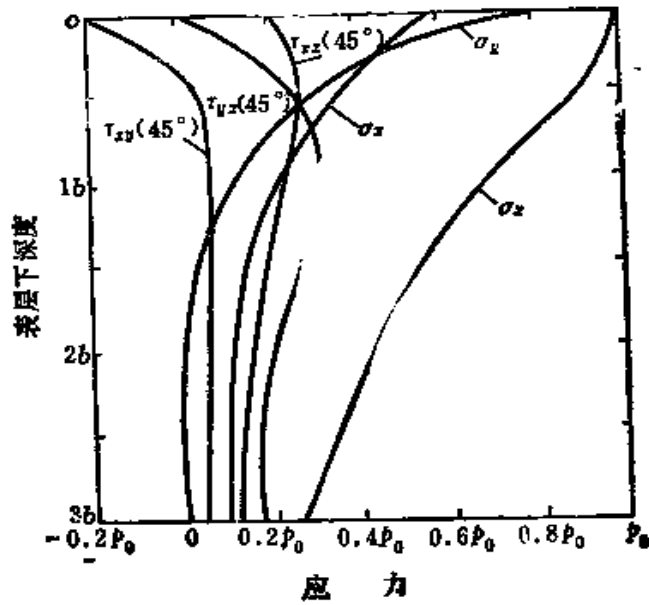


图5-12 接触应力随表层下深度而变化的变化曲线

或

$$\sigma_{max} = 0.564 \left[\frac{P' \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)}{\Delta} \right]^{1/2} \quad (5-49)$$

式中符号“-”对应于凸轮轮廓为凹形的情况，各种情况的接触应力计算公式以及 τ_{max} 及其位置等的计算公式，均归纳在表5-2中。

第六章 凸轮机构的动力学 分析与综合

第一节 引言

当机器在低速下运转，或凸轮机构各构件的刚度很大而质量较轻时，从动件的运动规律基本上受所设计的凸轮轮廓线的控制，设计凸轮机构时，只需进行运动学分析。但是，如果机器的运转速度增加，或各构件的刚度较差以及质量较大，则从动件的运动规律将由于整个凸轮机构受激振动而发生畸变。例如，图6-1表示某低刚度、大质量的高速凸轮机构从动件质心的加速度响应 \ddot{X} 与原设计的加速度 A 有明显差异。

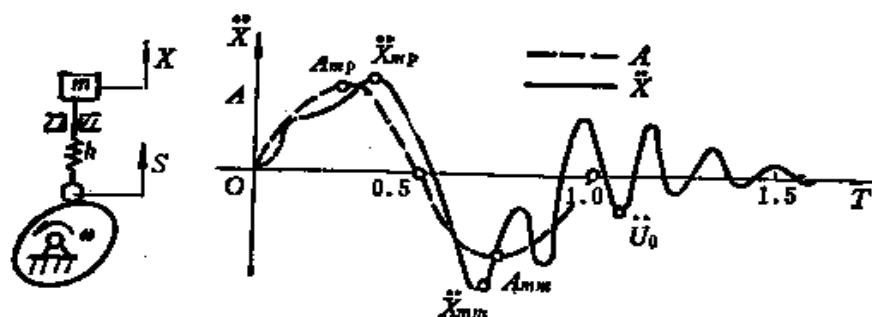


图6-1 高速凸轮机构的动力学响应

同样，从动杆的位移与速度响应 X 与 \dot{X} 也与原来的运动规律 S 与 V 不一致。 X 、 \dot{X} 、 \ddot{X} 统称为动力学响应。

由图可见，加速度动力学响应与原设计的加速度有两个重大差异是设计人员最为关心的，即：

- (1) 在 $T < 1$ 的凸轮升程（或回程）期间，最大正负加速

度响应 \ddot{X}_{max} 与 \ddot{X}_{min} 的绝对值均大于对应的 A_{max} 与 A_{min} 。这意味着实际惯性力比前面受力分析中按额定值算得的值要大得多。

(2) 当 $T > 1$ 时, 按原设计要求从动件应完全静止, $A = 0$ 。然而, \dot{X} 却仍有残留振动; 第一个最大的残留振动幅值 \dot{U}_0 可能很大, 随后逐渐衰减。残留振动的衰减快慢取决于机构的阻尼大小。同样, 位移动力学响应 X 在 $T > 1$ 后也存在残留振动, 这对于要求停位精度很高的凸轮机构是不允许的。

因此, 在设计高速凸轮机构时, 必须研究它的动力学。所谓凸轮机构的动力学, 就是研究构件位移、速度、加速度等状态变量随时间的变化和引起这些变化的原因。

在大约1925年之前, 设计者还只是从运动学角度来选择运动规律, 局限于从最大加速度值(即最大动载荷)来考虑问题, 很少提及动力学概念。随后的研究发现, 不仅加速度最大值很重要, 高速凸轮机构还要求跃度 (Jerk) J ($= \ddot{\dot{S}}$) 与跳度 (Quirk) Q ($= \ddot{\ddot{S}}$) 不能太大, 才能保证 \dot{X}_{max} 与 \dot{U}_0 不致过大。

1948年罗勒斯^[8]最早用单自由度动力学模型考虑从动杆的柔度, 对它的动力学响应进行了分析。第一个实验验证是由米切尔^[9]于1950年提出的。他们的研究指出, 采用最大跃度 J_{max} 为无穷大的等加速度或余弦等运动规律, 动力学响应的特性是很差的。第二章中介绍的许多所谓适合中、高速凸轮机构的运动规律, 正是近20年来为改善动力学特性而研究出来的。

斯托达德^[30]在1953年提出用多重动力 (polydyne) 法来设计高速凸轮机构, 曾引起人们的极大兴趣。这种方法在设计凸轮轮廓时, 用多项式运动规律把从动件因动载荷而产生的弹性变形这一影响考虑在内, 从而保证在规定的转速下动力学响应曲线十分平滑。但是, 这种凸轮的使用灵活性较差, 只适用于一种运转速度, 从动件的刚度和质量的设计值不能改变。梯萨尔和马修^[2]提出的单自由度与双自由度模型的凸轮机构综合理论, 进一步系统地阐述了高速凸轮机构的凸轮轮廓在考虑动载荷、构件阻尼与构件弹性变形后的设计方法, 并给出了较完整的计算机辅

助设计程序。

凸轮机构的动力学分析正在向模型的精细化方向发展,并计及各种非线性效应。如F. Y. 陈等^[54]与J. S. 劳 (Rao) 等^[55]研究了包括粘性阻尼、平方阻尼、库仑阻尼和静摩擦组合等因素的非线性系统的动力学;柯斯特^[52]对驱动马达及凸轮轴的角度速度变化、凸轮轴的变形、传动链与凸轮槽等的间隙和油膜等非线性效应都作过较深入的研究。

适合各种动力学模型的解法,近年来发表了很多,主要有:拉普拉斯变换法,状态变量法,有限差分法和有限元素法等。在F. Y. 陈的遗著^[19]中,曾系统地介绍了前三种解法,并从时域扩展到频域内来研究动力学响应,给出了一些计算机程序。

总的说来,凸轮机构动力学研究还很不充分,在精细模型的建立、方程的解法,完整的系统分析、综合与参数识别,以及通用设计程序的编制等方面,存在着不少值得深入探讨的课题。本章将对凸轮机构的动力学主要问题进行初步的讨论,并从中导出一些工程上实用的考虑了动力学响应的设计准则。

第二节 动力学模型的建立

一、实际机构的简化

为了研究实际凸轮机构系统的动力学行为,首先必须找到一种称为模型的抽象构成物,它可以等效地预示所研究凸轮机构的动力学响应,而分析模型的响应却比分析真实机构要简单得多。为了把复杂的实际机构简化成模型,一般要作如下一些合理假设:

(1) 将连续系统简化为离散系统

当考虑构件的弹性时,构件的各物理参数(质量、刚度、阻尼)都具有连续分布性质,描述机构运动的动力学方程是偏微分方程。但是,由于构件结构形状的复杂性,即使是单个构件,求解它的偏微分方程,计算无穷多个点的状态变量响应,都是很困难的。因此,常将机构这一连续系统离散化,即将它简化为离散系

统。离散系统只具有有限多个自由度，描述其运动的动力学方程将是常微分方程，求解较易。

(2) 非线性系统的线性化

由前述可知，当系统的惯性力、阻尼力和弹性力分别与加速度、速度、位移的一次方成正比时，该系统称为线性系统。它的运动方程是线性微分方程。当然，真实凸轮机构都是非线性系统。但在振幅不大时，常常可以近似认为其刚度和阻尼特性是线性的。将系统线性化后所构成的线性微分方程自然易于求解。对许多准线性系统，在一定运行条件下，其解也是足以满足设计要求的。

(3) 忽略次要因素

在研究机构的弹性动力学时，影响因素很多，若把所有因素都考虑进去，会使问题变得十分复杂。建立模型时，应区别影响因素的主次，抓住主要的，忽略次要的。

例如，图 6-2 a 所示的真实凸轮机构是由电动机、联轴节、凸轮轴、滚子、从动杆、复位弹簧和支承等零部件组成的一个连续系统。首先把电动机与联轴节的分布质量简化成只有转动惯量 J_m 的离散参数，忽略质量对其它方向振动的影响。联轴节与凸轮之间只考虑扭转刚度 k_m 和阻尼 c_m 等两个集中参数，忽略凸轮轴的横向位移的影响。凸轮简化成刚体，只要用转动惯量 J_c 一个集中参数来描述。滚子质量转化到质心上，用 m_r 表示。滚子与凸轮表面的接触弹性和阻尼用 k_r 与 c_r 表示。从动件的质量转化到质心上，用 m_f 表示，它的刚度和阻尼由 k_f 与 c_f 表示。复位弹簧只考虑弹性与阻尼 k_s 与 c_s ，忽略质量影响。于是，这一实际连续系统可以用图 6-2 b 所示由离散参数表示的简化模型来等效。

这个简化模型只有 5 个自由度，即转角 θ_m 、 φ_m 和位移 x_c 、 x_r 、 x_f 。事实上，对于每一个质点，应该是 6 个自由度（3 个移动分量和 3 个转动分量），这里仅考虑其中一个最主要的，而忽略了其余 5 个次要的。因此，大大减少了计算工作量。保留或舍

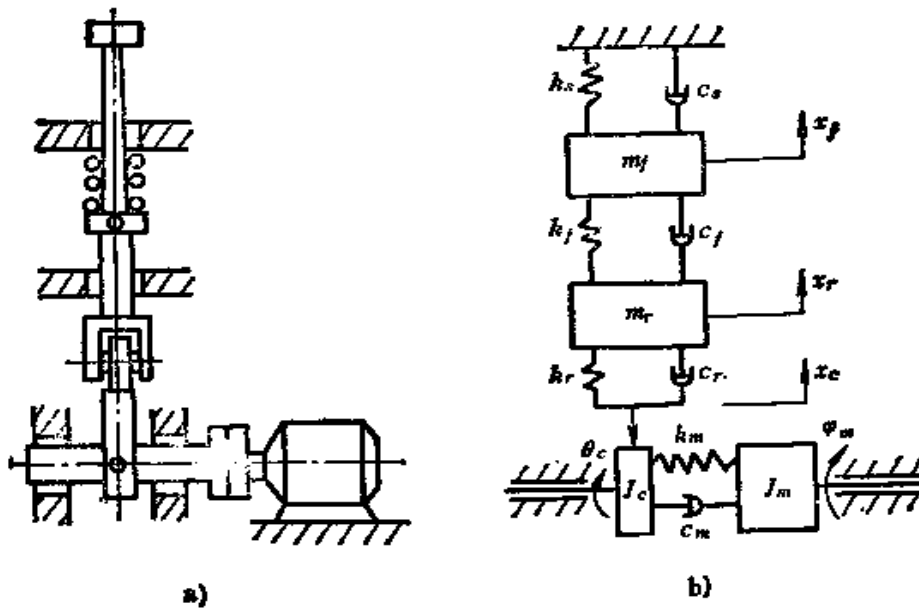


图6-2 凸轮机构及其简化模型

a) 结构简图 b) 模型图

去哪些自由度，完全由设计人员的经验来判断，也可进行某些简单计算。随着计算机的发展，有限元法的应用，对自由度的取舍已经不是令人为难的问题。在计算机容量许可的条件下，上述例子可以考虑更多的自由度，如凸轮轴的横向位移，从动杆的扭转或水平方向弯曲变形等，使模型能更精确地代表真实系统的行为。

必须指出，凸轮机构一般不是一个线性系统，特别是滚子位移 x_c 与凸轮转角 θ_c 之间的耦合是随凸轮矢径而变化的。与此有关的运动方程则是变系数的非线性微分方程；其余部分，如果 k 、 c 等为常数，则为线性微分方程。

二、构件离散参数的确定

将实际构件简化为离散系统有两种方法，集中质量法和能量法。

所谓集中质量法是将构件上连续分布的质量人为地集中在若干个选定的点上，从而将连续系统简化为具有有限个自由度的离

散系统，以图 6-3 所示的构件为例说明如下。

这是一根左端固定的纵向振动构件，长为 l ，质量为 m ，假定为等截面 A 。按集中质量法简化时，可将此构件分成若干段，不一定按等长度分，然后，将各小段质量依照各小段质心位置按比例地分配到小段的两端，即得图示模型。如果等分为四小段，则各集中质量的大小为：

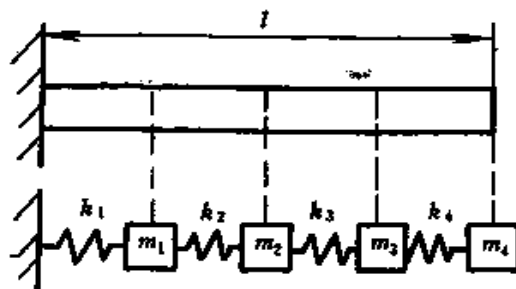


图6-3 纵向振动构件简化的集中质量法

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{m}{4}, \quad m_4 = \frac{m}{8}$$

在模型中，各集中质量之间的弹簧元件已经没有质量，因此，其刚度 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ 可按静态纵向变形的刚度来计算，即

$$k = \frac{EA}{l/4} = \frac{4EA}{l} \quad (6-1)$$

式中， E 为构件的弹性模量。

上述方法对于复杂构件在其它方向振动的离散化也是适用的。显然，分段数越多，模型越精确；但是，自由度数及其对应的运动微分方程数也随之增多，计算过程也就越复杂。分段数过少时，又会使模型的误差过大。因此，目前在工程上很少采用集中质量法来建立模型，而是采用能量法。

用能量法建立模型的基本出发点在于，弹性构件在低频外力作用下的动力学响应可按各阶主振型分解为无穷多个分量，而其中按第一阶主振型振动的分量在总响应中占主导地位。于是构件的弹性变形位能与动能可以近似按第一阶振型计算。根据位能与动能等效，可以推出离散化的等效的刚度和质量。

一些凸轮机构的常用构件按能量法或集中质量法确定其离散参数的过程与计算公式列于附录 V。

三、传动比与参数转化

凸轮机构的各构件输入与输出位移之间的关系，常用称为传动比的运动传递函数来表示，它是构件尺寸和瞬时位置的连续变量。当假定构件无弹性变形，摆角很小而臂长 a 与 b 又较长时，如图 6-4 a 所示摆杆，输入与输出位移 h_{in} 与 h_{out} 可近似认为是直线，其传动比为常数，称为线性传动比，即

$$i = \frac{h_{out}}{h_{in}} = \frac{b}{a} \quad (6-2)$$

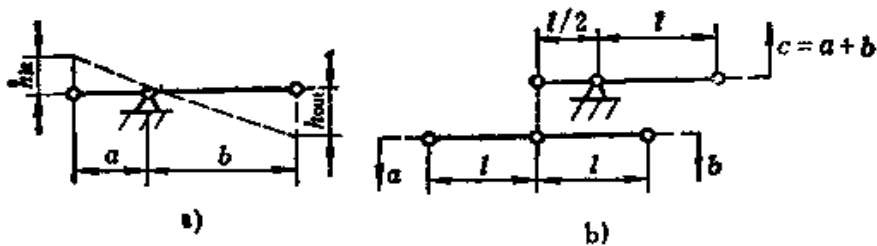


图6-4 杠杆式构件的传动比与运动叠加模型
a) 杠杆简图 b) 运动叠加模型图

利用线性传动比概念，可以构成由两平行运动 a 与 b 叠加所得的输出运动 c 的等效模型（图 6-4 b）。因为当 b 静止时， $c = a$ ， a 静止时， $c = b$ ；若 a 与 b 同时运动，则输出 $c = a + b$ 。

凸轮与从动滚子之间的传动比，由于轮廓为曲线，凸轮轴一般会发生弹性变形，故二者的运动传递关系比较复杂。如图 6-5 a 所示， A 为滚子未受力、轴未变形时的位置，这时的滚子的位移与 θ 有关， $h_c = h(\theta)$ 。当滚子在压力角为 α 的轮廓处受到法向力作用时，其中向下作用的分力 F 将使轴心从 O 移至 M ，滚子也相应下降一段位移 $z = OM$ 。由于接触力沿水平方向也存在分量 $F \tan \alpha$ 的作用，使轴向左变形，如 M 点不动，则相当于滚子从 A 点移至 B 点，位移为 y ，下降位移为 $y \tan \alpha$ 。把这三个位移叠加起来，即得滚子的总位移：

$$h_c = h(\theta) - y \tan \alpha - z \quad (6-3)$$

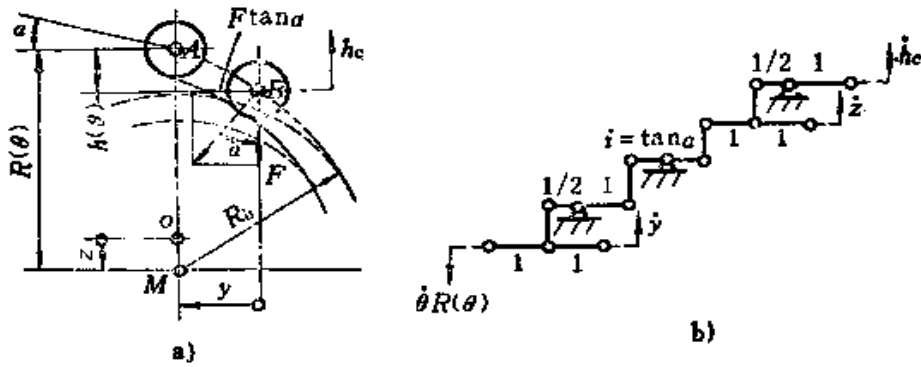


图6-5 凸轮与从动滚子的简化模型

a) 机构简图 b) 简化模型图

其中， $\tan \alpha$ 是输出 (h_c) 与微小水平变形 ($|y| \ll R(\theta)$) 的线性传动比，可表示成 θ 的函数，即

$$\tan \alpha = \frac{1}{R(\theta)} \frac{dh(\theta)}{d\theta} \quad (6-4)$$

式中， $R(\theta)$ 为没有变形时 (即图上 A 处的滚子) 理论轮廓的瞬时矢径。对式 (6-3) 微分，并利用关系式 (6-4)，得

$$dh_c = \tan \alpha [R(\theta)d\theta - dy] - dz$$

或
$$\dot{h}_c = \tan \alpha [\dot{\theta}R(\theta) - \dot{y}] - \dot{z} \quad (6-5)$$

利用前述速度叠加模型构成方法，可得图 6-5 b 所示凸轮机构的模型。

可利用参数转化方法将模型进一步简化，即把模型中的传动比消去，把所有各点的运动转化到感兴趣的点上，如输出点上。经转化后，模型的动力学特性不变。各参数的转化公式分别为：

(1) 线性尺寸

以图 6-6 a 所示的间隙 (如凸轮槽与滚子间隙，齿侧间隙等) 为例，设传动比 $i = b/a$ ，间隙 δ 在 A 端，它转化到

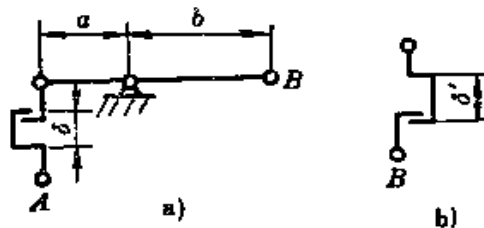


图6-6 间隙尺寸的转化

a) 间隙模型图 b) 转化间隙模型图

到

B 端时, 得图 6-6 b 所示模型, 其转化间隙为

$$\delta' = i\delta \quad (6-6)$$

(2) 质量

图 6-7 a 上 A 点处的质量 m 可在不改变系统的惯性前提下用在 B 点处的 m' 来代替。为了推导二者的关系, 如图 6-7 b 所示, 设在 B 点有一作用力 F , 则在 A 点将产生一加速度 $a_A = iF/m$, 而 B 点的加速度为 $a_B = ia_A = i^2F/m$ 。若在 B 点引入转化质量

$$m' = \frac{m}{i^2}, \quad i = \frac{b}{a} \quad (6-7)$$

就可在保持惯性不变的情况下, 代替 A 点的 m , 如图 6-7 c 所示。

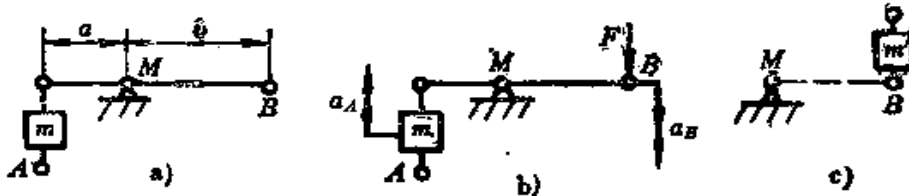


图6-7 质量的转化

a) 质量模型图 b) 力等效图 c) 转化质量模型图

(3) 刚度

为了把图 6-8 a 上 A 点的刚度 k 在保持系统弹性不变前提下用 B 点的 k' 代替, 在 B 点加一外力 F , 如图 6-8 b 所示, 则在 A 点产生一位移 $f_A = Fi/k$, 而 B 点的位移则为 $f_B = if_A = Fi^2/k$, 因此

$$k' = \frac{k}{i^2} \quad (6-8)$$

转化模型如图 6-8 c 所示。

(4) 线性粘滞阻尼系数

为了把图 6-9 a 上 A 点的阻尼系数 c 转化成 B 点的 c' , 在 B 点加一外力 F , 如图 6-9 b 所示, 则在 A 点将产生一速度 $v_A = Fi/c$, 而在 B 点的速度则为 $v_B = iv_A = Fi^2/c$ 。因此

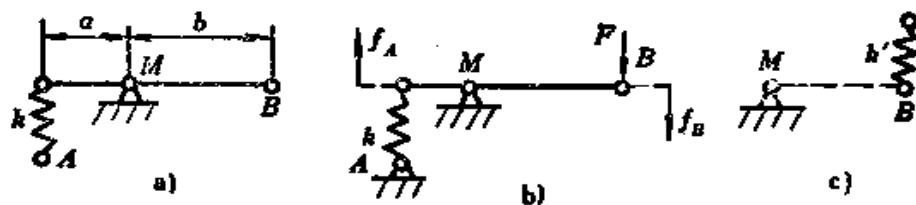


图6-8 刚度的转化

a) 刚度模型图 b) 力等效图 c) 转化刚度模型图

$$c' = \frac{c}{i^2} \quad (6-9)$$

转化模型如图 6-9 c 所示。

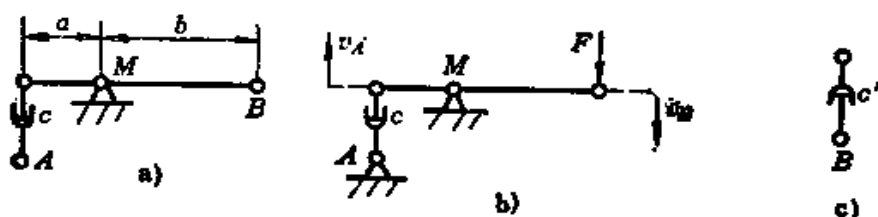


图6-9 阻尼的转化

a) 阻尼模型图 b) 力等效图 c) 转化阻尼模型图

(5) 粘度

间隙内油膜的挤压现象可以用下式描述〔52〕，即挤压力为

$$F = 12\pi\eta v b_f \left(\frac{R_c}{2\delta_f} \right)^{3/2} \quad (6-10)$$

式中， η 为油膜的粘度； v 为两零件接触表面的接近速度； b_f 、 δ_f 为油膜的宽度与厚度； $R_c = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$ ，为两零件接触表面曲率半径 R_1 与 R_2 的等效半径。

如果把图 6-10 a 上 A 点处的粘度 η 转化到 B 点而保持挤压现象不变，则可在 B 点加一外力 F ，如图 6-10 b 所示，此时在 A 点可得一速度 $v_A = \frac{Fi}{12\pi\eta b_f (R_c/2\delta_f)^{3/2}}$ 。按式 (6-6)，将 A 点的线性尺寸都转化到 B 点，得 $b'_f = i b_f$ ， $R'_c = i R_c$ ， $\delta'_f = i \delta_f$ ，B 点的速度则为

$$v_B = i v_A = \frac{F i^3}{12 \pi \eta b'_i (R'_i / 2 \delta'_i)^{3/2}}$$

因此, 转化到 B 点的粘度为

$$\eta' = \frac{\eta}{i^3} \quad (6-11)$$

粘度的转化模型如图6-10 c 所示。

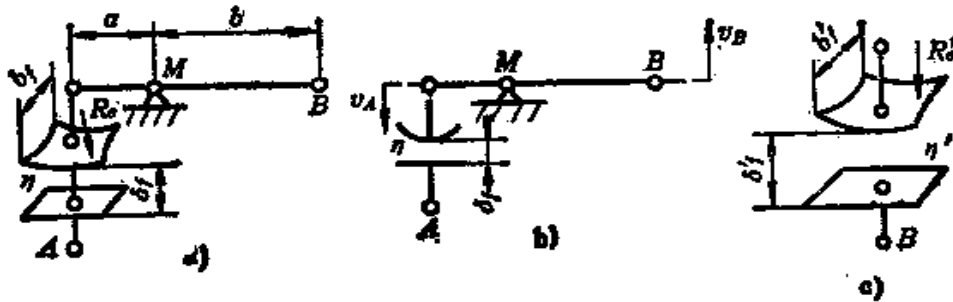


图6-10 粘度的转化

a) 粘度模型图 b) 力等效图 c) 转化粘度模型图

根据前述分析与讨论, 利用附录 V 中所述的常用构件的动力学简化模型, 并引入传动比及参数转化的概念, 就可以建立起凸轮机构各零部件的简化动力学模型。附录 VI 中列出了凸轮机构典型零部件的动力学模型。

四、非线性参数

尽管多数场合都把系统线性化, 使模型大为简化, 而分析求解仍具有足够的精度, 但在有些场合则必须考虑构件动力学参数的非线性才能获得满意的结果。

图6-11给出了非线性弹簧的力 F 与变形 x 的关系曲线。图6-11 a 为常见的硬化弹簧, 可用幂级数表示:

$$F(x) = kx + \sum \alpha_n x^n \quad (n = 3, 5, 7, \dots) \quad (6-12 a)$$

式中, $F(x)$ 是 x 的单值函数; k 与 α_n 为常数。也可用正切函数表示成

$$F(x) = \frac{2ka}{\pi} \tan \frac{\pi x}{2a} \quad (-a < x < a) \quad (6-12 b)$$

式中, a 为常数, 相当于变形极限。

图6-11 b 所示软化弹簧的 F 与 x 关系不常见, 它没有支承重载的能力。该曲线可采用幂级数或双曲正切函数来表示:

$$F(x) = kx - \sum \alpha_n x^n \quad (n = 3, 5, 7, \dots) \quad (6-13 a)$$

或
$$F(x) = F_0 \operatorname{th}\left(\frac{kx}{F_0}\right) \quad (6-13 b)$$

式中, F_0 为常数, 相当于极限载荷。

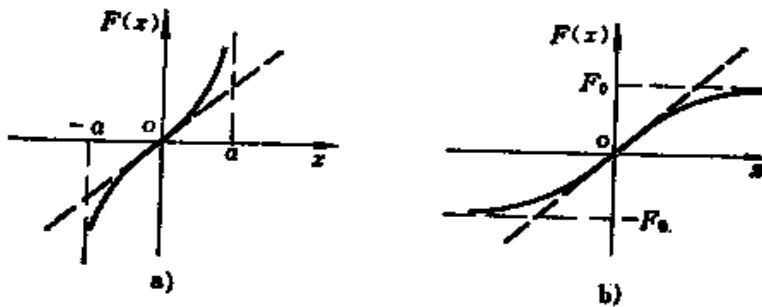


图6-11 非线性弹簧的变形曲线

a) 硬化弹簧 b) 软化弹簧

表 6-1 列出了某些分段线性的弹簧组合情况。

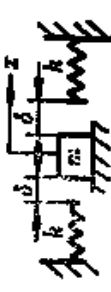
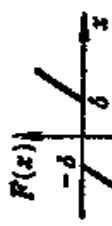
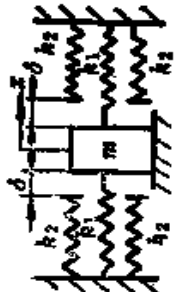
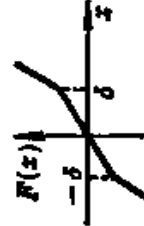
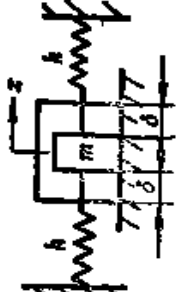
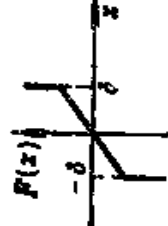

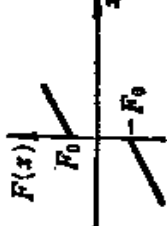
表 6-1 a 所示系统中, 在 $|x| < \delta$ 区间内, 弹簧与质量不接触。这种非线性即前面介绍过的间隙。由于加工误差, 安装不当, 受力变形, 温度变化, 以及其它不定因素, 都可能在齿侧、铰链内、凸轮槽与滚子之间等处产生间隙。

表 6-1 b 所示系统为对称双线性型非线性弹簧。一组弹簧在任意 x 处都与 m 接触, 但另一组弹簧仅在 $|x| > \delta$ 区间内接触。由于第二组弹簧的作用使特性变陡, 因而起到了一个弹性挡块的缓冲作用。表 6-1 c 则是 b 的第二组弹簧刚度为无穷大的特例, e 为非对称双弹簧情况。


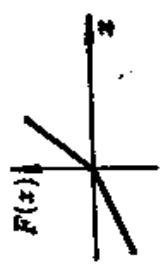
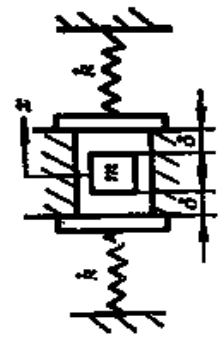
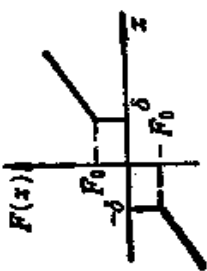
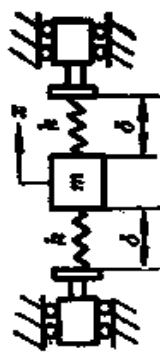
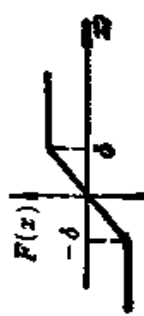
表 6-1 d 为预载非线性刚度。弹簧有初压力 F_0 , 使质量在受力超过 F_0 时才能移动。将预载与间隙组合起来, 即得表 6-1 f。

表 6-1 g 为饱和性非线性刚度。当弹簧变形超过某一极限 δ

表6-1 分段线性的非线性弹簧特性

名称	简图	特性图
a) 间隙		
b) 对称双弹簧		
c) 刚性挡块		
d) 弹簧预载		

(续)

名称	简图	特性图
<p>•) 非对称双弹簧</p>		
<p>f) 预载与间隙</p>		
<p>g) 饱和</p>		

时，弹簧力便停止增加，挡块打滑。

非线性阻尼与阻尼流体的流变性能、阻尼器结构和尺寸等因素有关，一般的表达式为

$$F(\dot{x}) = c\dot{x}|\dot{x}|^{n-1} \quad (6-14)$$

式中， c 为阻尼系数； n 为常数。当 $n = 0$ 时，为库仑摩擦； $n = 1$ 时，为一般的粘性阻尼； $n = 2$ 时，为二次阻尼。实际的阻尼是静摩擦、库仑摩擦、粘性阻尼和二次阻尼的联合作用的结果，其特性如图 6-12 所示。

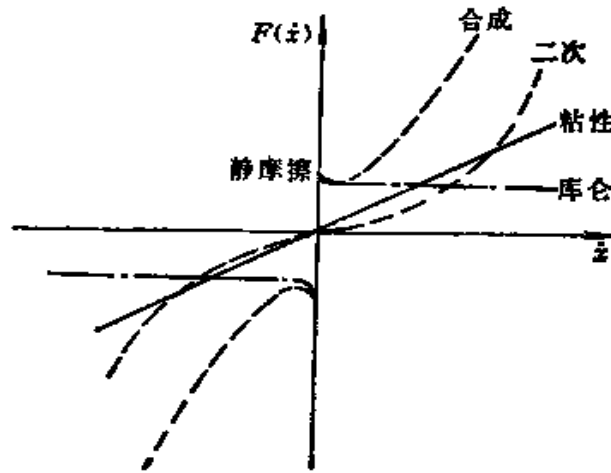


图6-12 非线性阻尼的特性

若阻尼不大且输入为简谐力，则实际非线性阻尼可用一等效的粘性阻尼 c_e 来代替。等效是基于阻尼力所作的功相等。

振动理论表明，在

$1/4$ 振动周期内阻尼力所作功的等效可表示成

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} c_n \dot{x}^n \dot{x} dx = c_e \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \dot{x} \dot{x} dx$$

由此可得等效粘性阻尼为

$$c_e = c_n x^{n-1} \omega^{n-1} \gamma_n \quad (6-15)$$

式中， x 为简谐振幅； ω 为简谐频率； γ_n 为与 n 有关的常数；

对库仑摩擦 ($n = 0$)， $\gamma_n = \frac{4}{\pi}$ ，对粘性阻尼 ($n = 1$)， $\gamma_n = 1$ ，

对二次阻尼 ($n = 2$)， $\gamma_n = \frac{8}{3\pi}$ 。

对于各种具有相对运动的零件有不同的阻尼特性。例如，滑动副的阻尼主要是由接触表面的摩擦造成的。影响阻尼的因素有

载荷、润滑条件、公差配合、表面粗糙度、引起尺寸变化的温度变化等。

沟槽凸轮的间隙内的油膜，由于式(6-10)所示关系，亦相当于一非线性阻尼。如图6-13 a所示，凸轮的垂直位移为 h_c ，从动滚子的位移为 h_r ，此时压力角为 α ，则滚子表面至凸轮轮廓的瞬时距离，即油膜厚度为

$$\delta_f = (h_r - h_c) \cos \alpha$$

油膜挤压速度 $v = -\dot{\delta}_f$ ，即

$$v = (\dot{h}_c - \dot{h}_r) \cos \alpha + (h_r - h_c) \dot{\alpha} \sin \alpha$$

一般研究凸轮间隙问题时，主要考虑载荷反向点，即加速度反号点。在这一点出现滚子从轮廓的一侧向另一侧的横越冲击，引起噪声与磨损。实际上，在这一点附近的压力角不超过 45° ，其变化率 $\dot{\alpha}$ 亦很小，故上式第二项可以忽略，即

$$v = (\dot{h}_c - \dot{h}_r) \cos \alpha$$

把 δ_f 与 v 代入式(6-10)，得

$$F = 12\pi\eta(\dot{h}_c - \dot{h}_r)b_f \left[\frac{R_c}{2(h_r - h_c)} \right]^{3/2} \cos^{-\frac{1}{2}} \alpha$$

再考虑到一般 $\alpha < 45^\circ$ ， $\cos^{1/2} \alpha > 0.85$ ，可近似取 $\cos^{-1/2} \alpha \approx 1$ ，则有

$$F = (h_c - h_r)(c' + c'') \quad (6-16)$$

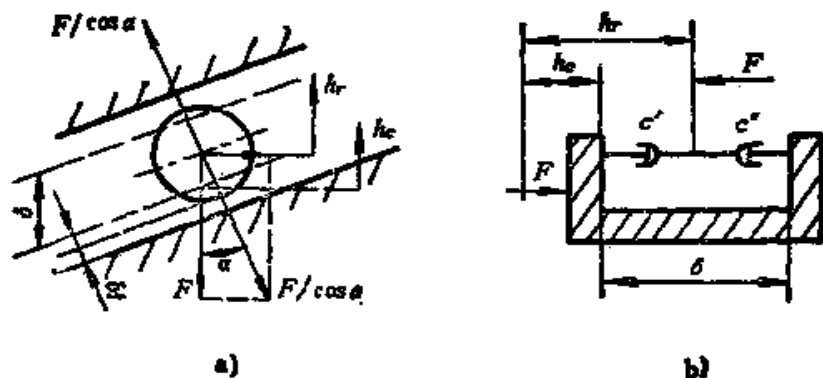


图6-13 沟槽凸轮的间隙等效模型

a) 俯视图 b) 等效模型

其中，两个等效阻尼系数分别为：

$$\begin{cases} c' = \eta_s \left(\frac{1}{h_r - h_s} \right)^{3/2} & (h_r > h_s) \\ c'' = \eta_s \left(\frac{1}{h_s + \delta - h_r} \right)^{3/2} & (h_s + \delta > h_r) \end{cases} \quad (6-17)$$

$$\eta_s = 12\pi\eta b_f \left(\frac{R_s}{2} \right)^{3/2} \quad (6-18)$$

式中， δ 为间隙。

相应的等效模型如图6-13 b 所示。

由图6-13可见，若 $\dot{h}_s > \dot{h}_r$ ，则 $c'' = 0$ ；若 $\dot{h}_s < \dot{h}_r$ ，则 $c' = 0$ 。

五、实例

综上所述，对于一个复杂的具有连续参数的凸轮机构，可以采取以下步骤来建立简化动力学模型：

- (1) 根据结构的节点数确定系统的自由度；
- (2) 假定每个部件的位移函数；
- (3) 计算弹性势能与动能；
- (4) 计算构件的离散参数并建立动力学模型；
- (5) 简化动力学模型。

随后的任务将是建立运动方程并求解，在后面将详细讨论。以图6-14所示凸轮机构为例，说明如何利用前面讨论的结果来得到它的简化动力学模型。这是一个弹簧9加载的凸轮机构，凸轮轮廓位移函数为 $h(t)$ 。输入蜗杆轴角速度为 $\dot{\phi}$ ，半径为 R_1 的蜗轮1的角速度为 $\dot{\phi}_1$ ，其间有齿侧间隙角 δ_1 ，蜗轮厚 b_1 。凸轮轴2上装有沟槽凸轮3，其角速度为 $\dot{\theta}$ ，瞬时矢径为 $R(\theta)$ ，总升程为 h_s ，瞬时轮廓曲率半径为 ρ_r 。从动滚子半径为 R_r ，宽 b_r ，与凸轮间的间隙为 δ_r ，油膜粘度为 η_r 。滚子装在长为 a 的摆杆4上的 b 处。运动经连杆5、转臂6、立轴7传到从动件8。

利用前述的离散参数简化模型，可得图6-15所示动力学模型。

利用前述的传动比与参数转化公式，可得到图6-16所示的初

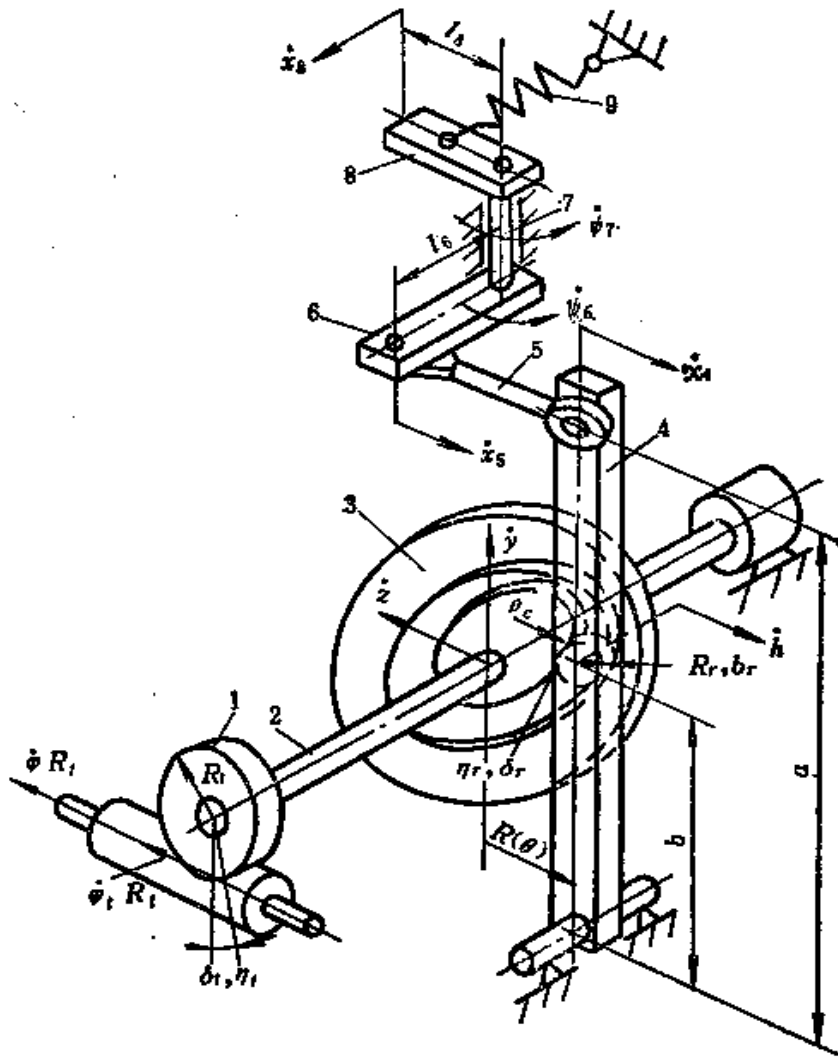


图6-14 平板凸轮机构实例

1—蜗轮 2—凸轮轴 3—凸轮 4—摆杆 5—连杆 6—转臂
7—立轴 8—从动件 9—弹簧

步简化模型。构件4、5、6经传动比 i_1 转化，蜗轮蜗杆经传动比 i_2 转化，变成带上角标“ $'$ ”的新参数。

如果不考虑间隙和阻尼，加之数值很小的 k_0 相对于总的从动杆刚度来说可忽略不计，图6-16的模型可进一步简化，推广到一般情况有图6-17所示模型。注意其中的传动比 $\tan\alpha$ 和矢径 $R'(\theta)$ 均是变量。

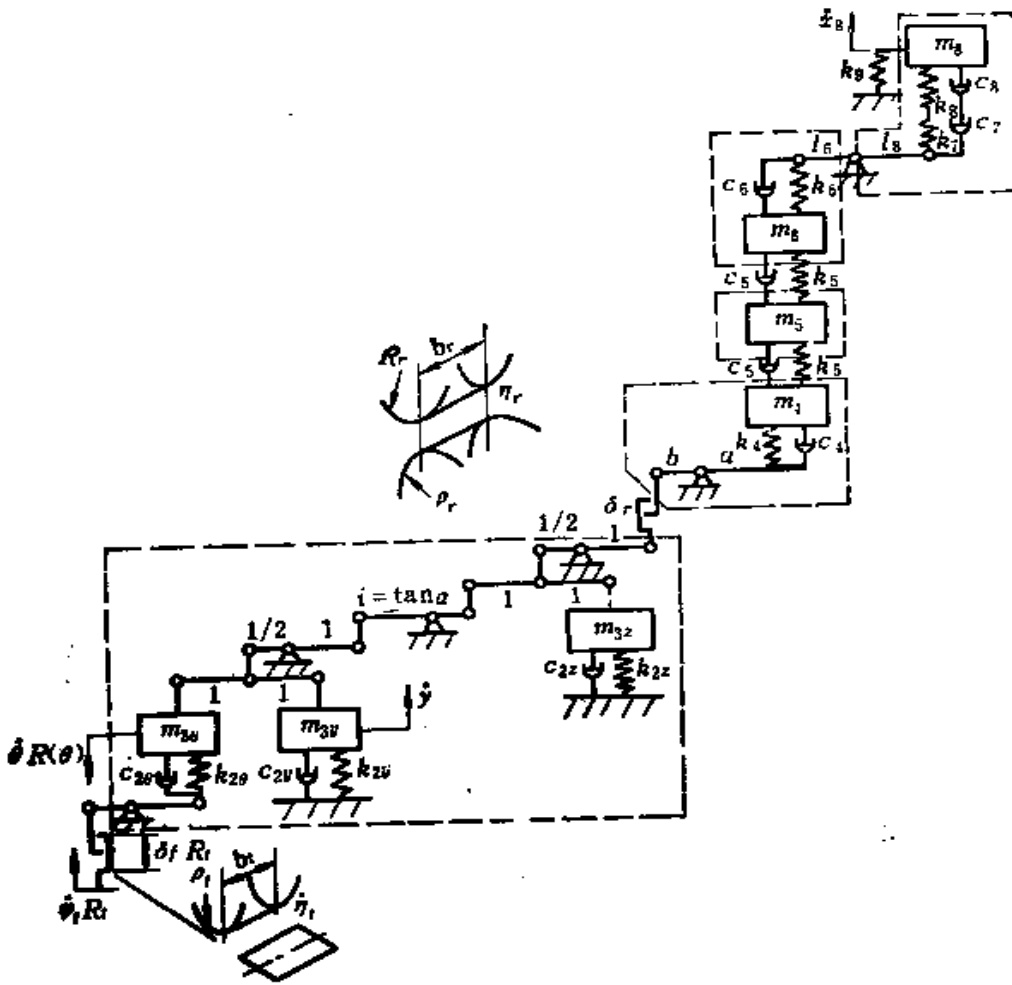


图6-15 图6-14实例的动力学模型

自由度 $\theta R'(\theta)$ 和 y' 一方面互相耦合,另一方面又通过可变传动比 $\tan \alpha$ 与自由度 x 和 z' 耦合。后一耦合是凸轮角位移 θ 的函数,因而导出一变系数线性微分方程组。

由于凸轮矢径 R' 为 θ 的函数,转化凸轮质量 $m'_0 = J_0/R'(\theta)^2$ 和转化扭转刚度 $k'_0 = k/R'(\theta)^2$ 都是变量, k 为轴的扭转刚度。

如果进一步消去可变传动比 $\tan \alpha$,则 m''_0 和 k''_0 为 $R'(\theta)$ 与 $dh'(\theta)/d\theta$ 的函数,而 m''_0 与 k''_0 仅是 $dh'(\theta)/d\theta$ 的函数,其简化模型如图6-18所示。

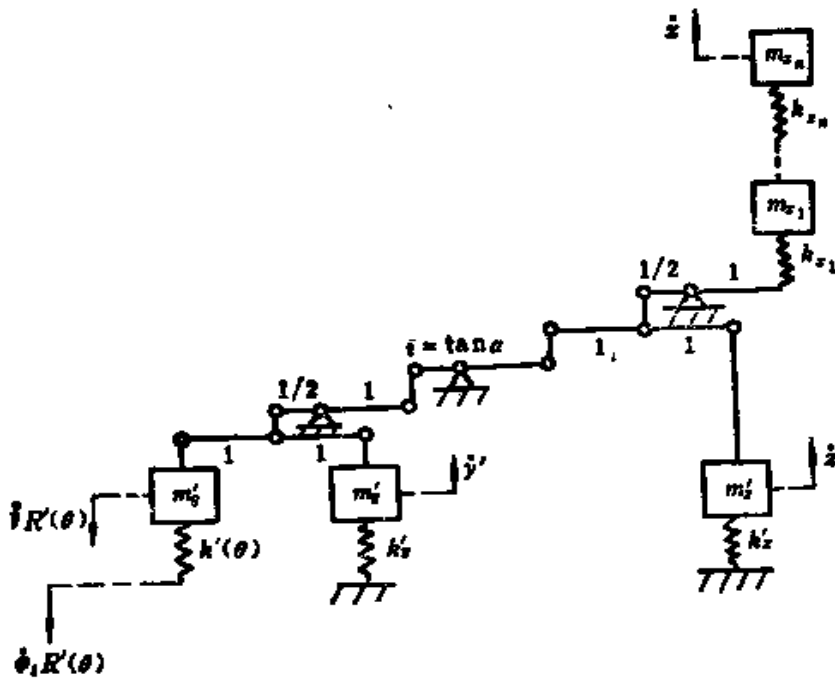
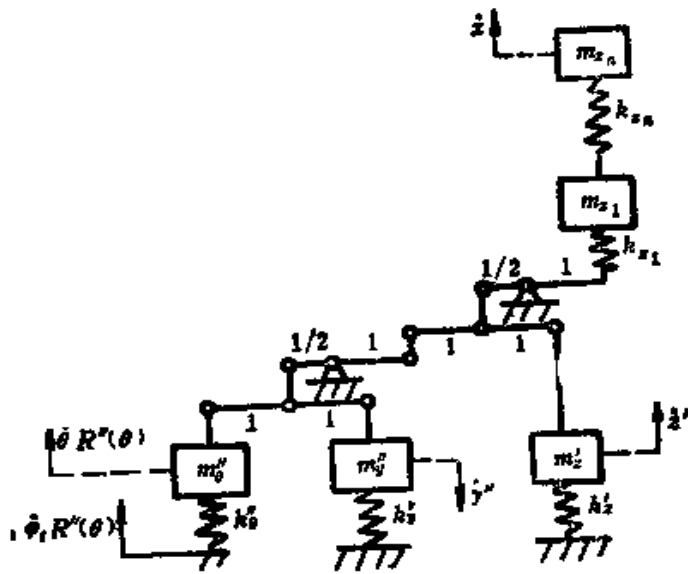


图6-17 一般情况下的简化模型

图6-18 消去 $i = \tan \alpha$ 的动力学模型

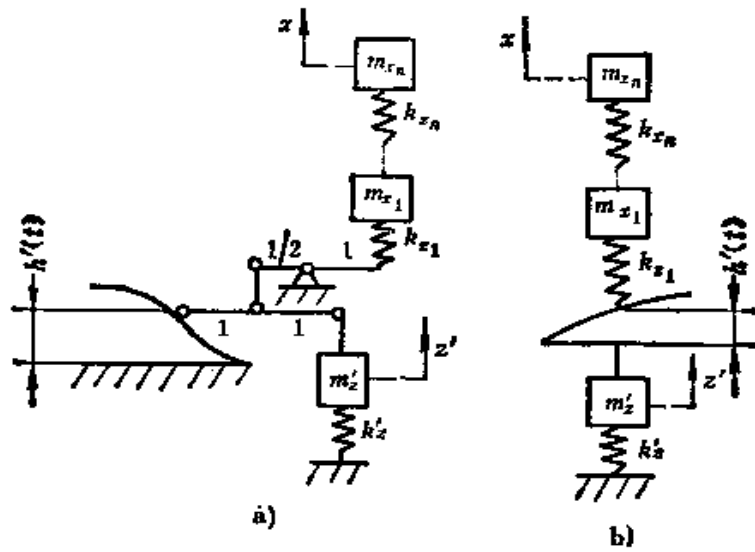


图6-19 刚性轴凸轮机构的动力学模型

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k'_z} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_{x_i}}$$

结果得到图6-20 a 所示的单自由度模型。

当存在线性阻尼，其等效阻尼系数为 c 时，其动力学模型如图6-20 b 所示。

更精细地描述凸轮机构的动力学行为可考虑采用有限元法。有限元法无法使用上述集中参数模型把系统等效表示出来，而是把真实的连续系统离散化为有限多个单元体，彼此间只在数目有限的指定

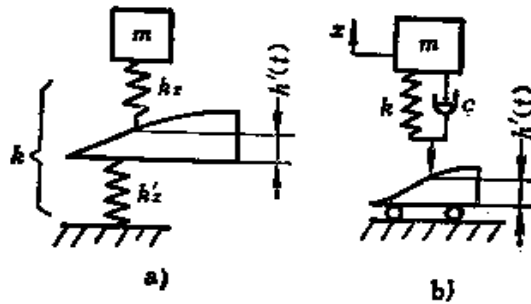


图6-20 凸轮机构的单自由度模型

a) 无阻尼 b) 有阻尼

点（称为结点）处互相连结，组成一个具有有限多个自由度的单元集合体，以代替原来的连续体，又在结点上引进等效力以代替实际作用于单元上的外力，使问题简化为适合于数值解法的结构型问题。

第三节 凸轮机构的动力学分析

一、集中参数模型动力学微分方程的建立

1. 线性模型

在没有间隙的情况下, 图6-20 b 所示单自由度线性模型在绝对坐标系内的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{h}(t) + kh(t) \quad (6-19 a)$$

由于从动系统内的应力、凸轮表面的接触应力和输入与输出间的运动偏差等, 均与相对坐标 $\xi = x - h(t)$ 成正比, 故常用相对坐标 ξ 来表示系统的运动方程, 有

$$m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k\xi = -m\ddot{h}(t) \quad (6-19 b)$$

$$\text{或} \quad \ddot{\xi} + 2\zeta\omega_c\dot{\xi} + \omega_c^2\xi = -\ddot{h}(t) \quad (6-19 c)$$

其中阻尼因子 $\zeta = c/(2m\omega_c)$ 。

若令 $\tau = \omega_c t$, 则 $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \omega_c \frac{d\xi}{d\tau} = \omega_c \xi'$, $\ddot{\xi} = \frac{d^2\xi}{dt^2} = \omega_c^2 \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \omega_c^2 \xi''$ 。代入式 (6-19 b), 则假想时域 τ 内的运动方程为

$$\xi'' + 2\zeta\xi' + \xi = -h''(\tau) \quad (6-19 d)$$

在不失普遍性的前提下, 系统的初始条件可表示成 $\xi(0) = \xi_0$ 和 $\dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_0$ 或 $\xi'(0) = \xi'_0$ 。

利用参变量法可使上述二阶微分方程的数学表达式大为简化, 尤其适用于在时域求解。而且, 参变量法也能处理多自由度系统。

参变量法是通过令 $\xi = x_1$ 和 $\dot{\xi} = x_2$ 把方程 (6-19) 规格化为

$$\dot{x}_2 = -\omega_c^2 x_1 - 2\zeta\omega_c x_2 - \ddot{h}(t)$$

式中, x_1 与 x_2 表示系统的相对位移和相对速度, 被选作参变量。

合起来可用矢量矩阵形式表示成

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_c^2 & -2\zeta\omega_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{h}(t) \end{Bmatrix} \quad (6-20)$$

相应的初始坐标为 $x_1(0) = x_{10}$ 和 $x_2(0) = x_{20}$ 。

对于图6-19所示的多自由度系统模型, 考虑存在有线性粘滞阻尼 c_i 的情况下, 变成为图6-21所示模型。

这一模型的运动微分方程可写成

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{h}) + k_1(x_1 - h) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \quad - k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\ \quad - k_3(x_3 - x_2) = 0 \\ \dots\dots \\ m_i \ddot{x}_i + c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + k_i(x_i - x_{i-1}) - c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \\ \quad - k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = 0 \\ \dots\dots \\ m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} - c_{n-1}(\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-2}) + k_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ \quad - c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) - k_n(x_n - x_{n-1}) = 0 \\ m_n \ddot{x}_n + c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + k_n(x_n - x_{n-1}) = 0 \end{array} \right.$$

用相对位移 $\xi_1 = x_1 - h$, $\xi_2 = x_2 - x_1$, $\dots \xi_i = x_i - x_{i-1}$, $x_i =$

$\sum_{j=1}^i \xi_j + h$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 代入上述方程组, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{\xi}_1 + c_1 \dot{\xi}_1 + k_1 \xi_1 - c_2 \dot{\xi}_2 - k_2 \xi_2 = -m_1 \ddot{h} \\ m_2 (\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) + c_2 \dot{\xi}_2 + k_2 \xi_2 - c_3 \dot{\xi}_3 - k_3 \xi_3 = -m_2 \ddot{h} \\ \dots\dots \\ m_{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \ddot{\xi}_j \right) + c_{n-1} \dot{\xi}_{n-1} + k_{n-1} \xi_{n-1} - c_n \dot{\xi}_n - k_n \xi_n \\ = -m_{n-1} \ddot{h} \\ m_n \left(\sum_{j=1}^n \ddot{\xi}_j \right) + c_n \dot{\xi}_n + k_n \xi_n = -m_n \ddot{h} \end{array} \right. \quad (6-21)$$

其矢量矩阵形式为

$$[m]\{\ddot{\xi}\} + [c]\{\dot{\xi}\} + [k]\{\xi\} = -\{M\}\ddot{h} \quad (6-22)$$

式中, $\{\dot{\xi}\} = \{P\}$

则式 (7-38) 变成

$$\{\dot{X}(t)\} = [A]\{X\} + [B]\{u\} \quad (6-24)$$

式中,

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c] \end{array} \right]$$

$$[B] = [I]$$

$$\{u\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -[m]^{-1}\{M\}\dot{h} \end{array} \right\}$$

初始条件为 $X(0) = X_0$ 。

2. 非线性模型

由于库仑摩擦、静摩擦、粘性阻尼和二次阻尼的联合作用呈现的非线性阻尼现象, 非线性弹簧具有的非线性刚度, 以及间隙存在引起的几何参数非线性变化等等, 使得凸轮机构的动力学模型相关参数呈现非线性。

图6-22为一包含有非线性阻尼元件的单自由度模型。阻尼器是粘性阻尼、二次阻尼和库仑摩擦的联合作用型, 可分别用 c 、 α 和 β 代表这三种阻尼的系数。其它参数与前述线性系统一样。相对于平衡位置的运动微分方程则为

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{h}) + k(x - h) + \alpha|\dot{x} - \dot{h}|(\dot{x} - \dot{h}) + \beta \frac{\dot{x} - \dot{h}}{|\dot{x} - \dot{h}|} = 0$$

引入相对坐标 $\xi = x - h$, 上式变为

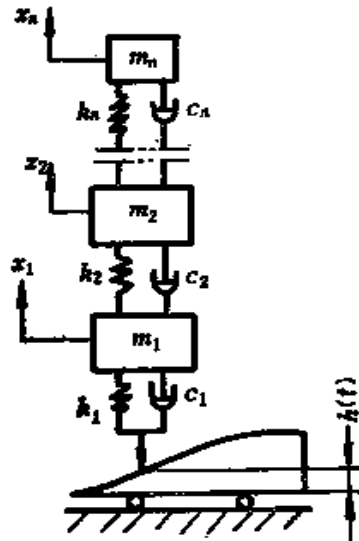


图6-21 多自由度凸轮机构的线性模型

$$m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k\xi = -m\dot{h} - \alpha |\dot{\xi}| \dot{\xi} - \beta \frac{\dot{\xi}}{|\dot{\xi}|}$$

$$\text{或} \quad \ddot{\xi} + 2\zeta\omega_n\dot{\xi} + \omega_n^2\xi = -\omega_n^2\delta \quad (6-25)$$

$$\text{其中,} \quad \delta = \frac{\dot{h}}{\omega_n^2} + \frac{\alpha}{m\omega_n^2} |\dot{\xi}| \dot{\xi} + \frac{\beta}{m\omega_n^2} \frac{\dot{\xi}}{|\dot{\xi}|}$$

ω_n 为自然频率, ζ 为系统的粘性阻尼因子。

对于具有总间隙 δ 的沟槽凸轮机构, 参考图 6-13, 其单自由度模型如图 6-23 所示。

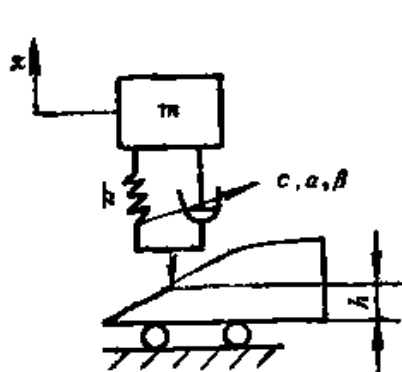


图6-22 非线性阻尼的
单自由度模型

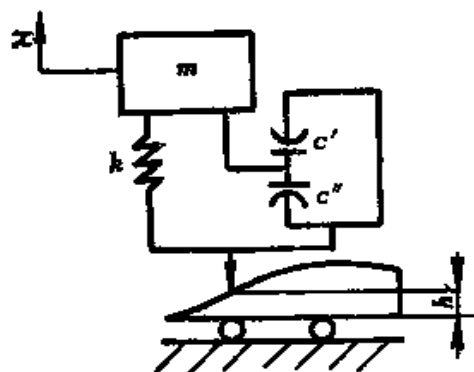


图6-23 带间隙的单自由
度模型

当从动件的位移 x 大于凸轮升程 h 时, 阻尼 c' 起作用。如前推导, 考虑油膜挤压情况下 c' 的计算公式为 $c' = \eta_s \left(\frac{1}{x-h} \right)^{3/2}$,

这时的运动方程为

$$m\ddot{x} + c'\dot{x} + kx = kh + c'\dot{h} \quad (x > h) \quad (6-26 a)$$

当凸轮升程 h 加上间隙 δ 后比从动件位移 x 大时, 阻尼 c'' 起作用, 它的公式为 $c'' = \eta_s \left(\frac{1}{h+\delta-x} \right)^{3/2}$, 其运动方程为

$$m\ddot{x} + c''\dot{x} + kx = kh + c''\dot{h} \quad (h + \delta > x) \quad (6-26 b)$$

在一般情况下, 对于如图 6-24 所示的多自由度系统, x_1, x_2, \dots, x_n 为各从动件质量的绝对位移, $h(t)$ 为作为输入运动的凸轮升程, 令相对坐标 $\xi_1 = x_1 - h, \xi_2 = x_2 - x_1, \dots, \xi_n =$

$x_n - x_{n-1}$, 则运动方程的普遍式为

$$\begin{aligned} & m_i \ddot{\xi}_i + G_i(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ & + H_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ & = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (6-27 a)$$

其中,

$$f_1 = -m_1 \ddot{h}(t) + F_1(t)$$

$$f_i(t) = F_i(t) \quad (i \geq 2)$$

式中, $F_i(t)$ 表示作用在第 i 个质量上的外力; $G_i(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 表示第 i 个非线性阻尼力; $H_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 表示第 i 个非线性弹簧力。

方程 (6-27 a) 可改写成

$$\ddot{\xi}_i + 2\zeta_i \omega_{e_i} \dot{\xi}_i + \omega_{e_i}^2 \xi_i = -\omega_{e_i}^2 \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6-27 b)$$

式中, $\Gamma_i = \frac{1}{\omega_{e_i}^2} \left(G_i + H_i - 2\zeta_i \omega_{e_i} \dot{\xi}_i - \omega_{e_i}^2 \xi_i - \frac{f_i}{k_i} \right)$

k_i 为与第 i 个非线性弹簧有关的线性弹簧刚度, $\omega_{e_i} = \sqrt{k_i/m_i}$ 为第 i 阶自然频率, ζ_i 为系统的第 i 个粘性阻尼因子。

【例题】一双自由度系统, 只存在非线性弹簧, 其弹簧力可用式(6-30 a)按立方关系表示($F(x) = kx + \alpha x^3$), 没有非线性阻尼项和外力, 则这两个质量按牛顿第二定律可分别列出其运动方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + \alpha_2 x_2^3 - c_1 \dot{x}_1 \\ \quad - k_1 x_1 - \alpha_1 x_1^3 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 - \alpha_2 x_2^3 \end{cases}$$

引入相对坐标 $\xi_1 = x_1 - h$, $\xi_2 = x_2 - x_1$, 经整理得式 (6-27 b) 形式的方程为

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + 2\zeta_1 \omega_{e_1} \dot{\xi}_1 + \omega_{e_1}^2 \xi_1 = -\omega_{e_1}^2 \Gamma_1 \\ \ddot{\xi}_2 + 2\zeta_2 \omega_{e_2} \dot{\xi}_2 + \omega_{e_2}^2 \xi_2 = -\omega_{e_2}^2 \Gamma_2 \end{cases}$$

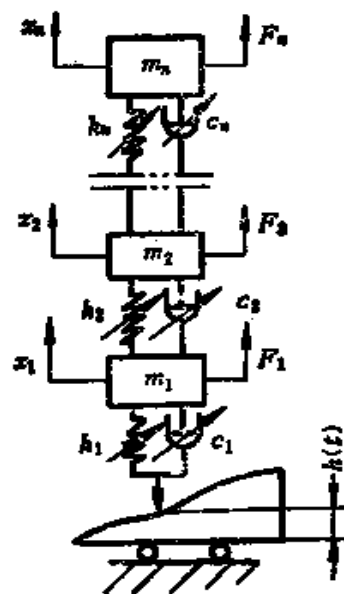


图6-24 非线性多自由度系统的模型

其中

$$\Gamma_1 = \frac{\bar{k}}{\omega_{r_1}^2} - \frac{c_2}{k_1} \dot{\xi}_2 - \frac{k_2}{k_1} \xi_2 + \frac{\alpha_1}{k_1} \xi_1^3 - \frac{\alpha_2}{k_1} \xi_2^3$$

$$\Gamma_2 = -\frac{c_1}{m_1 \omega_{r_1}^2} \dot{\xi}_1 + \frac{c_2}{m_2 \omega_{r_2}^2} \dot{\xi}_2 - \frac{\omega_{r_1}^2}{\omega_{r_2}^2} \xi_1 + \frac{m_2}{m_1} \xi_2$$

$$-\frac{1}{m_1 \omega_{r_2}^2} \xi_1^3 + \frac{\alpha_2}{k_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \xi_2^3$$

3. 柔性轴单自由度模型

在高速重载而且凸轮轴刚度有限的情况下，必须考虑凸轮轴的弹性变形对从动件位移的影响。

图 6-18 给出了典型的柔性凸轮轴的多自由度模型。假定各从动件质量 $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$ 都等效成一个集中质量 m ；各刚度 $k_{x_1}, k_{x_2}, \dots, k_{x_n}$ 都等效成一个刚度 k_x ；凸轮轴的横向与扭转等效质量 m'_x 与 m'_θ 相对于 m 来说较小，一般可忽略不计；输入角速度 $\dot{\phi}$ 与力矩无关，并等于定值 ω_0 。于是图 6-18 所示多自由度模型可简化成图 6-25 a 所示单自由度模型。利用传动比关系进行转化，最后可得图 6-25 b 所示简化柔性轴模型。

由前述可知，扭转刚度 k'_θ 是凸轮矢径 $R'(\theta)$ 的函数。已

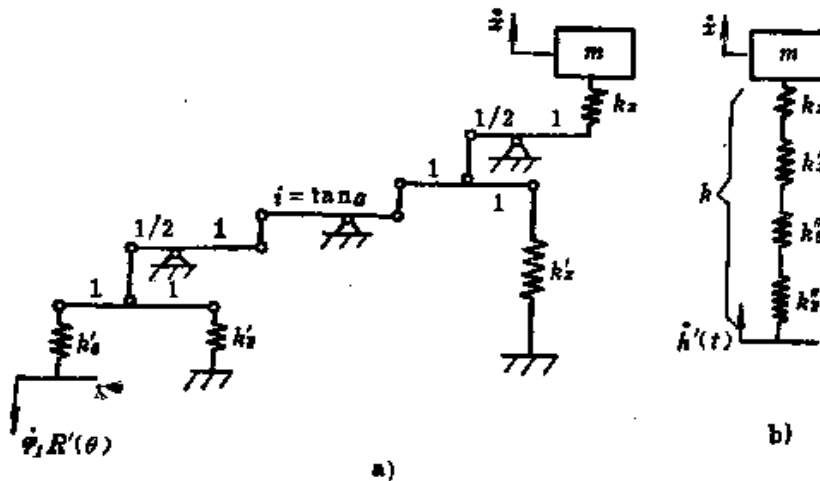


图6-25 柔性凸轮轴简化模型

a) 单自由度模型 b) 简化模型

知, $\tan \alpha = \frac{1}{R'(\theta)} \frac{dh'(\theta)}{d\theta}$ 也是 $R'(\theta)$ 的函数。对于轴向凸轮, $R'(\theta)$ 即节圆半径, 为常数。对于径向凸轮, $R'(\theta)$ 随 θ 而变, 常假定 $R'(\theta) = R'_{1/2} = \text{常数}$ 。

图6-25 b 所示简化模型的总刚度与各个刚度有如下关系:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_x} + \frac{1}{k'_z} + \frac{1}{k''_0} + \frac{1}{k''_y} \quad (6-28 a)$$

其中, $k''_0 = \frac{k'_n}{\tan^2 \alpha} = \frac{GI_p}{l} \left(\frac{d\theta}{dh'(\theta)} \right)^2$, 仅仅是 $\frac{dh'}{d\theta}$ 的函数,

$k''_y = \frac{k'_y}{\tan^2 \alpha} = h'_y [R''(\theta)]^2 \left(\frac{d\theta}{dh'(\theta)} \right)^2$ 同时为 $\frac{dh'}{d\theta}$ 与 $R'(\theta)$

的函数。对于有对称加速度运动规律的凸轮曲线, $\frac{dh'}{d\theta}$ 的最大值

位于 $\theta = \frac{1}{2}\theta_m$ 处, 即图 6-26 上的 A 点。如果 k'_y 为无穷大, 总

刚度 k 的极小值可能与 k''_0 的极小值一致, 即在 $\frac{dh'}{d\theta}$ 为最大的 A

点。然而, 若 k'_y 为无穷大, k_{min} 将位于 k''_0 最小

处, 即在 $\frac{dh'}{d\theta}$ 的极大

值处, 如图 6-26 上的 B 点所示, 略超前于

$\theta = \frac{1}{2}\theta_m$ 。由于 k'_y 和 k''_0

均不是无穷大, 实际的极小刚度将位于 A 与 B

点之间的 C 点处。由于 C 接近 A 点, 为了计算

方便, 计算刚度时所用

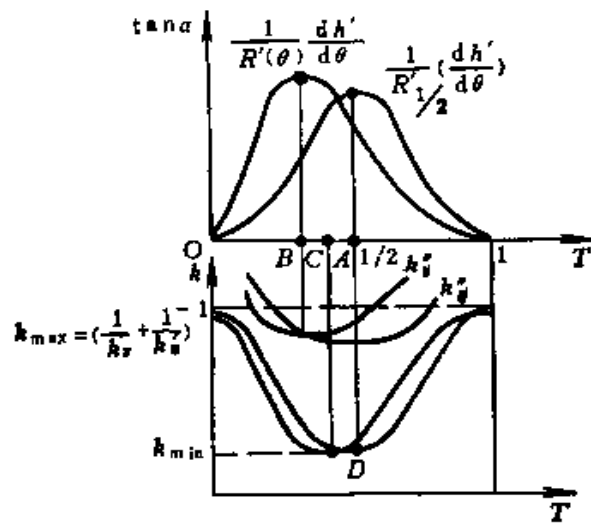


图6-26 刚度与凸轮曲线的斜率间的关系

的 $R'(\theta)$ 可近似选 A 点的值, 即 $R'(\theta) = R'_{1/2} = R'_0 + \frac{1}{2} h'_m, h'_m$

为总升程。当 $k'_0 \ll k'_1$ 和 $h'_0 \ll R'_1$ 时, 上述近似引起的误差 不大。

式 (6-43 a) 可改写成由常数项与变化项两项组成:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_c} + \frac{\tan^2 \alpha}{k_t} \quad (6-28 b)$$

其中,

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{k_x} + \frac{1}{k'_x}$$

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k'_0} + \frac{1}{k'_y}$$

当凸轮轴以角速度 ω_s 等速转动时, 凸轮曲线的输入速度转化到输出端时有 $\dot{h}' = \omega_s R''(\theta) = \omega_s R'(\theta) \tan \alpha$, 其输入位移则为

$$h'(t) = \omega_s \int_0^t R'(\theta) \tan \alpha dt \quad (6-29)$$

如果考虑到从动系统的粘性阻尼 c , 其运动方程可写成

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{h}') + k(x - h') = 0$$

因 $\tan \alpha = \frac{1}{R'(\theta)} \frac{dh'}{d\theta}$, 再利用式 (6-43 b), 得

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{h}') + \frac{k_c}{1 + \frac{k_c}{k_t} \left(\frac{1}{\omega_s R'_{1/2}} \dot{h}' \right)^2} (x - h') = 0 \quad (6-30 a)$$

引入如下无因次参数: $T = \frac{t}{t_m}$, $H = \frac{h'}{h_m}$, $\dot{H} = \frac{\dot{h}' t_m}{h_m}$, $X = \frac{x}{h_m}$, $\dot{X} = \frac{\dot{x} t_m}{h_m}$, $\ddot{X} = \frac{\ddot{x} t_m^2}{h_m}$, 以及 $\tau_c = \frac{2\pi}{t_m} \sqrt{\frac{m}{k_c}}$, $\zeta = \frac{c\tau_c}{4\pi}$, $F = \frac{k_c}{k_t} \left(\frac{h_m}{R'_{1/2} \theta_m} \right)^2$, $\theta_m = \omega_s t_m$, 其中 h_m 为总升程, t_m 为对应的时间。于是方程 (6-30 a) 变成

$$\begin{aligned} & (1 + \dot{H}^2 F) \ddot{X} + 2\zeta (1 + \dot{H}^2 F) \left(\frac{2\pi}{\tau_c} \right) \dot{X} + \left(\frac{2\pi}{\tau_c} \right)^2 X \\ & = 2\zeta (1 + \dot{H}^2 F) \left(\frac{2\pi}{\tau_c} \right) \dot{H} + \left(\frac{2\pi}{\tau_c} \right)^2 H \end{aligned} \quad (6-30 b)$$

这是一个二阶变系数线性微分方程。

4. 柔性轴双自由度模型

前面的推导曾假定凸轮轴等速转动，即 $\omega_c = \text{常数}$ 。然而，当动载和压力角较大，驱动轴刚度较差时，凸轮轴会出现扭转振动现象。如图6-27 a 所示凸轮机构，其输入角速度 $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_c = \text{常数}$ ，凸轮开始推动从动滚子时，由于巨大的阻力作用使轴受阻扭转，转动变慢，即转速 $d\theta/dt < \omega_c$ 。当阻力矩变小后，贮存在轴内的弹性势能释放出来，使轴加速，赶上并超过 ω_c 。因此，凸轮的转速是周期性变化的。

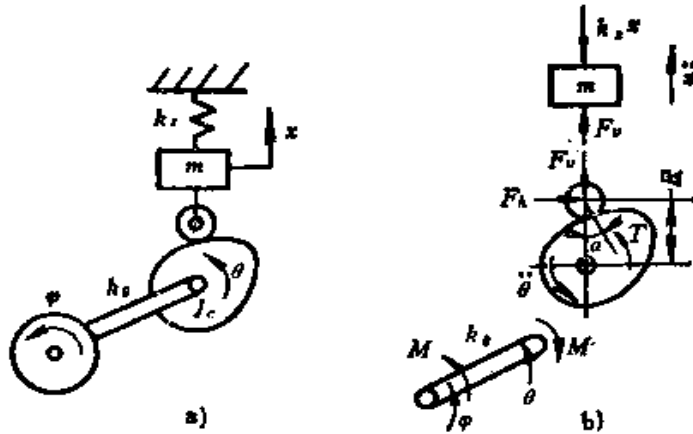


图6-27 柔性凸轮轴的模型

a) 机构简图 b) 系统自由体图

设从动件质量为 m ，凸轮相对轴线的极惯性矩为 I_c ，约束弹簧刚度为 k_s ，轴的扭转刚度为 k_o ，则由图 6-27 b 所示该系统的自由体，可列出以下平衡方程：

$$m\ddot{x} = F_o - k_s x$$

$$I_c \ddot{\theta} = M - F_A R$$

$$M = k_o(\varphi - \theta)$$

$$\tan \alpha = \frac{F_A}{F_o}$$

式中, F_v 与 F_h 为接触反力的垂直与水平分量; α 为压力角; M 为凸轮轴所受的力矩。

从上式中消去 F_v , 经整理可得

$$I_c \ddot{\theta} + m \bar{x} R \tan \alpha + k_\theta \theta = k_\theta \varphi - k_x x R \tan \alpha \quad (6-31 a)$$

由于 $x = h(\theta)$, 故 $\dot{x} = h'(\theta)\dot{\theta} + h''(\theta)\dot{\theta}^2$, 其中上角标“'”代表对 θ 的微分。

对于径向凸轮, $R = R_0 + h(\theta)$, R_0 为基圆半径, 而且

$$\tan \alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} = \frac{h'(\theta)}{R_0 + h(\theta)}$$

把这些关系代入式 (6-31 a), 得柔性凸轮轴的运动方程:

$$\begin{aligned} & \{I_c + m[h'(\theta)]^2\} \ddot{\theta} + m h'(\theta) h''(\theta) \dot{\theta}^2 + k_\theta \theta \\ & = k_\theta \varphi - k_x h(\theta) h'(\theta) \end{aligned} \quad (6-31 b)$$

这也是一个二阶变系数的非线性微分方程。

5. 柔性轴的多自由度模型

上述模型大体上能分别代表从动系统和柔性轴的动力特性, 但在一些实际机构中, 有时不够精确。图 6-28 a 给出了一个能描述更接近真实动力学行为的有 11 个自由度的复杂模型。这个模型可分解为三个子系统。图 6-28 b 为沿 x 方向运动的 5 自由度从动子系统的模型, 其运动方程可写为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_5 + c_{f1}(\dot{x}_5 - \dot{x}_4) + k_{f1}(x_5 - x_4) = 0 \\ m_f \ddot{x}_4 - c_{f1}(\dot{x}_5 - \dot{x}_4) + \frac{1}{2} c_{f1} \dot{x}_4 + k_{rc}(x_4 - x_2) - k_{f1}(x_5 - x_4) = 0 \\ m_{f1} \ddot{x}_3 + \frac{1}{2} c_{f1} \dot{x}_3 + k_{r3}(x_3 - x_2) - k_{rc}(x_4 - x_2) \\ + F_f + k_{r2} x_3 = 0 \\ m_r \ddot{x}_2 - k_{r3}(x_3 - x_2) - F_c \cos \alpha = 0 \\ m_c \ddot{x}_1 + c_{v1} \dot{x}_1 + k_{v1} x_1 + F_c \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (6-32 a)$$

图 6-28 c 为沿 y 方向运动的 3 自由度从动子系统模型, 其运动方程为

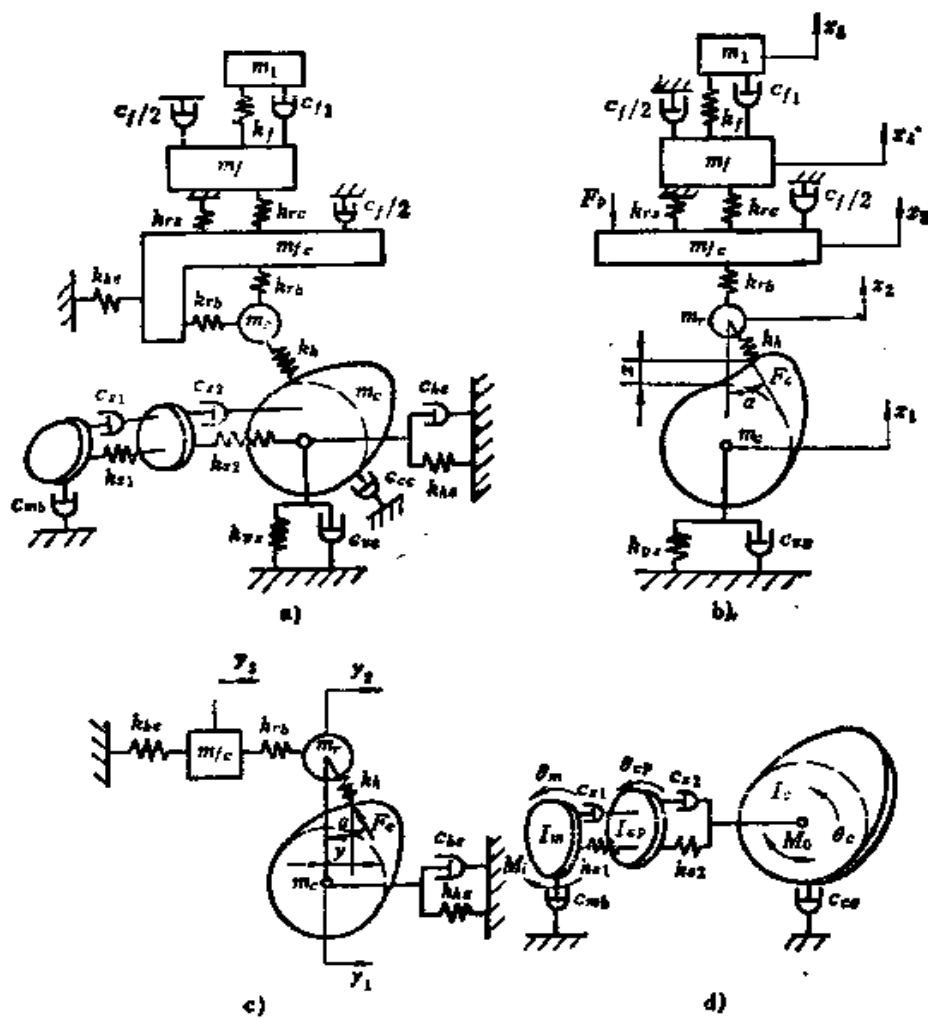


图6-28 11个自由度的凸轮机构模型

- a) 复杂模型图 b) x方向子系统模型
c) y方向模型 d) 驱动系统模型

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_3 - k_{r3}(y_2 - y_3) + k_{A3} y_3 = 0 \\ m_r \ddot{y}_2 + k_{r4}(y_2 - y_3) + F_c \sin \alpha = 0 \\ m_c \ddot{y}_1 + c_{A3} \dot{y}_1 + k_{A3} y_1 - F_c \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (6-32b)$$

图6-28 d 为电机、联轴节与驱动轴子系统的3自由度扭转模型，其运动方程为

$$\begin{cases} I_m \ddot{\theta}_m + c_{s_1}(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_{c,p}) + c_{s_2} \dot{\theta}_m + k_{s_1}(\theta_m - \theta_{c,p}) - M_i = 0 \\ I_{c,p} \ddot{\theta}_{c,p} - c_{s_1}(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_{c,p}) + c_{s_2}(\dot{\theta}_{c,p} - \dot{\theta}_c) - k_{s_1}(\theta_m - \theta_{c,p}) \\ + k_{s_2}(\theta_{c,p} - \theta_c) = 0 \\ I_c \ddot{\theta}_c - c_{s_2}(\dot{\theta}_{c,p} - \dot{\theta}_c) + c_{c_1} \dot{\theta}_c - k_{s_2}(\theta_{c,p} - \theta_c) + M_o = 0 \end{cases} \quad (6-32c)$$

在上列各式中各符号的意义如图 6-27 所示。其中， M_i 与 M_o 为输入与输出力矩； F_p 为弹簧预载； F_c 为凸轮与滚子接触反力。

根据能量守恒原理，有如下关系

$$M_o = \frac{x}{\theta} F_c \cos \alpha$$

阻尼力 $\frac{1}{2} c_j \dot{x}_1$ 和 $\frac{1}{2} c_j \dot{x}_2$ 就是由于接触反力 F_c 在导向机构中产生的摩擦力 F_1 与 F_2 。前面已推导过从动系统不同结构型式的导向摩擦力的计算公式。

设弹簧预载 F_p 引起的压缩长度为 δ_{r_1} ，则

$$F_p = k_r \delta_{r_1}$$

其中，总的等效弹簧刚度 k_t 可由下式求得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_t} &= \frac{1}{k_{r_2}} + \frac{1}{k_{r_1}} + \frac{\cos^2 \alpha}{k_h} + \frac{1}{k_{v_2}} \\ &= \frac{k_{r_2} k_h k_{v_2} + k_{r_2} k_h k_{v_1} + k_{r_1} k_{r_2} k_{v_2} \cos^2 \alpha + k_{r_2} k_{r_1} k_h}{k_{r_2} k_{r_1} k_h k_{v_2}} \end{aligned}$$

接触刚度 k_h 可由前面推导过的接触应力产生的滚子与凸轮的弹性变形量 h_1 与 h_2 确定，即总变形 $(h_1 + h_2)$ 的倒数

$$k_h = \frac{1}{h_1 + h_2}$$

当 $x_2 < x + x_1 + \frac{F_p}{k_h}$ 时，接触反力 F_c 存在，即

$$F_c = k_h(x + x_1 - x_2) \cos \alpha + F_p \cos \alpha$$

当 $x_2 > x + x_1 + \frac{F_p}{k_h}$ 时，接触反力不存在，即 $F_c = 0$ 。因此，

可认为 $x_0 = x + x_1 + \frac{F_p}{k_s}$ 为接触分离阈。

二、集中参数模型动力方程的解法

求解上述由系数随时间变化及非简谐激励的二阶线性或非线性微分方程所描述的初值问题，一般都采用数值近似法，只有一些简单情况才可能用解析法求得精确解。

前面介绍过的参变量法，把单自由度与多自由度模型统一起来，用矩阵矢量形式表示，便于线性微分方程的推导和用数值法求解。

对于较复杂的情况，特别是非线性微分方程，多采用有限差分法求解。

下面仅就这三种方法进行介绍。

1. 解析法〔19〕

以单自由度线性系统为例来说明当输入位移 $h(t)$ 具有简单的摆线运动规律时，采用解析法的求解过程。

假定阻尼很小，可忽略不计，方程 (6-19a) 变成

$$m\ddot{x} + kx = kh(t) \quad (6-33)$$

$$\text{其中, } \begin{cases} h(t) = \frac{h_m}{t_m} t - \frac{h_m}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{t_m} & (0 < t < t_m) \\ h(t) = h_m & (t \geq t_m) \end{cases}$$

初始条件为 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 。

单自由度系统的自然振动周期为 $T_n = 2\pi(m/k)^{1/2}$ ，定义无因次量为： $\tau_n = T_n/t_m$ ， $T = t/t_m$ ， $X = x/h_m$ ， $\dot{X} = \dot{x}t_m^2/h_m$ ，则方程 (6-33) 的无因次解在 $0 < t < t_m$ 期间为

$$X = T - \frac{1}{1-\tau_n^2} \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi T) + \frac{\tau_n^2}{1-\tau_n^2} \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_n} T\right)$$

$$\dot{X} = \frac{\tau_n^2}{1-\tau_n^2} 2\pi \sin(2\pi T) - \frac{\tau_n}{1-\tau_n^2} 2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_n} T\right)$$

响应 X 与输入 $H(= h/h_m)$ 的位置误差则为

$$U = X - H = \frac{\tau_s^2}{1 - \tau_s^2} \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi T) + \frac{\tau_s^2}{1 - \tau_s^2} \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_s} T\right) \quad (6-34 a)$$

式中，第一项与输入运动的加速度成正比，第二项为在自然振动频率 $\omega_s = \frac{T_s}{2\pi}$ 下的波动项。

对于 $t \geq t_s$ 期间， $h(t) = h_s$ ，按 $t = t_s (T = 1)$ 时的 X 与 \dot{X} 值为初始条件，对上述方程求解，得：

$$\begin{cases} U = \frac{\tau_s^2}{1 - \tau_s^2} \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\tau_s} \cos \left[\frac{\pi}{\tau_s} (2T - 1) \right] \\ \dot{U} = \frac{-\tau_s}{1 - \tau_s^2} 4\pi \sin \frac{\pi}{\tau_s} \cos \left[\frac{\pi}{\tau_s} (2T - 1) \right] \end{cases} \quad (6-34 b)$$

这就是残留振动的无因次值，也称为相对位置误差。显然这一误差为时间 T 的余弦函数，属波动型，其波动的最大幅值为

$$U_0 = \frac{\tau_s^2}{1 - \tau_s^2} \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{\pi}{\tau_s} \right| \quad (6-35)$$

残留振动的加速度幅值则为

$$\dot{U}_0 = \frac{4\pi\tau_s}{1 - \tau_s^2} \left| \sin \frac{\pi}{\tau_s} \right| \quad (6-36)$$

图6-29画出了线性单自由度模型对摆线输入的动力学响应曲线。标准摆线相当于 $\tau_s = 0$ 的情况，随着 τ_s 值增加，动态误差明显增大。表6-2给出了不同 τ_s 值下残留振动的幅值。可见 U_0 和 \dot{U}_0 随 τ_s 值的增大而增大。

根据上述计算结果可知，为了减少残留振动，应使 $\tau_s = T_s / t_s$ 和 h_s 值保持尽可能小的值。从设计者角度来说，应在满足工作要求的前提下，尽量选择较小的升程 h_s ，凸轮机构系统刚度 k 尽可能高，从动系统等效质量 m 尽量小，使自然频率 ω_s 较高，即自然振动周期 T_s 较小。

当存在阻尼项或激励型式较复杂时，常常采用拉普拉斯变换

法来求解。这种方法的主要优点在于它可以较方便地处理不连续的输入函数，把微分方程变成代数方程，并自动地把初始条件包括在内，以简单的代数式表示出激励与响应的关系。

以方程 (6-19 d) 为例来说明此法的求解过程。即

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2\zeta\dot{\xi} + \xi = -\dot{h}(\tau) \\ \xi(0) = \xi_0, \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_0 \end{cases}$$

对上列方程各式进行拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(s) &= \mathcal{L}[\xi(\tau)] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \xi(\tau) d\tau \\ \bar{\dot{\xi}}(s) &= \mathcal{L}[\dot{\xi}(\tau)] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \frac{d\xi}{d\tau} d\tau \\ &= e^{-s\tau} \xi(\tau) \Big|_0^{\infty} \\ &\quad + s \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \xi(\tau) d\tau \\ &= s\bar{\xi}(s) - \xi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\ddot{\xi}}(s) &= \mathcal{L}[\ddot{\xi}(\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} d\tau \\ &= s^2\bar{\xi}(s) - s\xi(0) - \dot{\xi}(0) \end{aligned}$$

于是微分方程被变换成代数方程：

$$s^2\bar{\xi} + 2\zeta s\bar{\xi} + \bar{\xi} = -\mathcal{L}[\dot{h}(\tau)] + \xi_0(s + 2\zeta) + \dot{\xi}_0$$

由此可求得

$$\bar{\xi}(s) = \frac{-\mathcal{L}[\dot{h}(\tau)]}{(s + \zeta)^2 + \eta^2} + \frac{\xi_0(s + 2\zeta)}{(s + \zeta)^2 + \eta^2} + \frac{\dot{\xi}_0}{(s + \zeta)^2 + \eta^2}$$

其中，

$$\eta^2 = 1 - \zeta^2$$

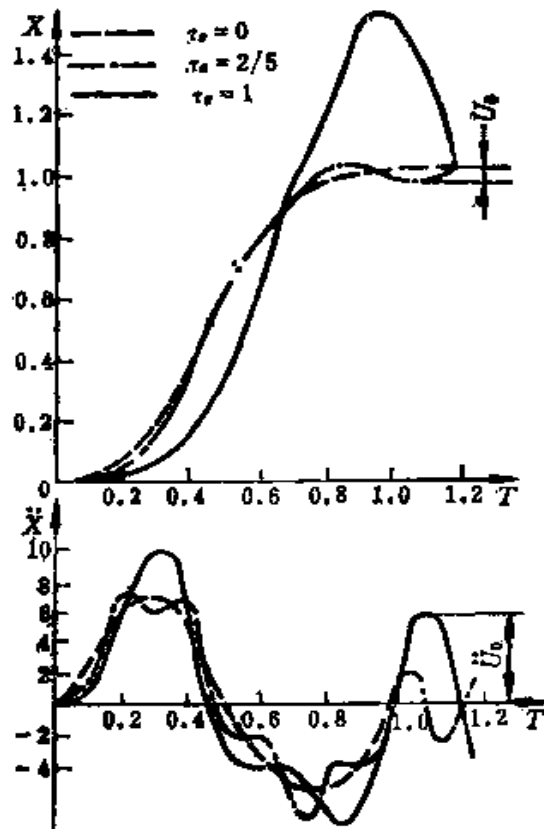


图6-29 线性单自由度模型摆线输入的动态响应曲线

表6-2 线性自由度系统的残留振动 U_0 与 \dot{U}_0

τ_0	U_0	\dot{U}_0
0.105	3.75×10^{-4}	1.34
0.202	3.5×10^{-3}	2.65
0.286	7.64×10^{-3}	3.91
0.4	2.43×10^{-2}	5.98
0.60	1.88×10^{-1}	15.2

对上式进行逆变换，得 τ 域内的 ξ 解为

$$\xi(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-\mathcal{L}(\ddot{h})}{(s + \zeta)^2 + \eta^2} + e^{-\zeta\tau} \left(\frac{\dot{\xi}_0 + \zeta\xi_0}{\eta} \sin\eta\tau + \xi_0 \cos\eta\tau \right) \right]$$

$$= [\xi(\tau)]_{ss} + [\xi(\tau)]_t \quad (6-37)$$

式中，第一项为稳态位移响应，即强迫振动项；第二项为过渡位移响应。经微分可得到速度与加速度响应 $\dot{\xi}(\tau)$ 与 $\ddot{\xi}(\tau)$ 。动力学响应与 \ddot{h} ， $\mathcal{L}(\ddot{h})$ 和 $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(\ddot{h})]$ 有关，因此只有某些函数有解析解。

〔例题〕仍以前述摆线激励为例，频率为 ω 的激励的加速度 $\ddot{h}(\tau)$ ，如图6-30所示为一个正半周正弦曲线，可用两个半周正弦叠加而成，即

$$\ddot{h}(\tau) = \ddot{h}_1(\tau) + \ddot{h}_2(\tau)$$

$$\text{其中，} \begin{cases} \ddot{h}_1(\tau) = a_n \sin\omega_s \tau \\ \ddot{h}_2(\tau) = 0 \end{cases} \quad \left(0 < \tau < \frac{\pi}{\omega_s} \right) \quad (6-38a)$$

$$\begin{cases} \ddot{h}_1(\tau) = 0 \\ \ddot{h}_2(\tau) = -\ddot{h}_1(\tau - \pi/\omega_s) \end{cases} \quad \left(\tau > \frac{\pi}{\omega_s} \right) \quad (6-38b)$$

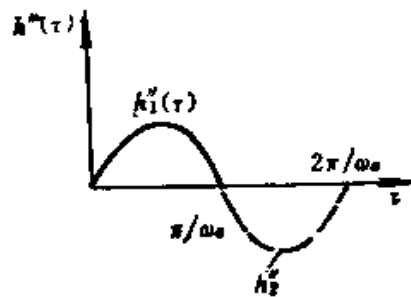


图6-30 摆线激励的叠加示意图

因此, $\ddot{h}(\tau)$ 的相对位移响应给出为

$$\begin{aligned} [\xi(\tau)]_{..} &= [\xi_1(\tau)]_{..} + [\xi_2(\tau)]_{..} \\ &= [\xi_1(\tau)]_{..} + \left[-\xi_1 \left(\tau - \frac{\pi}{\omega} \right) \right]_{..} \end{aligned}$$

式中, $\xi_1(\tau)$ 为 $\ddot{h}_1(\tau)$ 正半周正弦激励产生的系统位移响应, $\xi_2(\tau)$ 为 $\ddot{h}_2(\tau)$ 的响应。

为了求 $[\xi(\tau)]_{..}$, 须对式 (6-38 a) 作拉普拉斯变换:

$$[\xi(\tau)]_{..} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ a_u \frac{-\omega_c (1 + e^{-\frac{\pi}{\omega_c} s})}{(s^2 + \omega_c^2)[(s + \zeta)^2 + \eta^2]} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{或 } \frac{[\xi(\tau)]_{..}}{a_u} &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-\omega (1 + e^{-\frac{\pi}{\omega_c} s})}{(s^2 + \omega_c^2)(s^2 + 2\zeta s + 1)} \right] \\ &= \frac{-\omega_c}{\sqrt{(1 - \omega_c^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_c^2}} \left\{ \frac{1}{\omega_c} \sin(\omega_c \tau - \psi_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\zeta \tau}}{\eta} \sin(\eta \tau - \psi_2) + \frac{1}{\omega_c} \sin \left[\omega \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_c} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \psi_1 \right] \mathcal{H} \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_c} \right) + \frac{e^{-\zeta \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_c} \right)}}{\eta} \right. \\ &\quad \left. \times \sin \left[\eta \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_c} \right) - \psi_2 \right] \mathcal{H} \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_c} \right) \right\} \end{aligned}$$

式中, \mathcal{H} 表示赫维赛德 (Heaviside) 单位阶跃函数; 相位角为

$$\psi_1 = \arctan \left(\frac{2\zeta \omega_c}{1 - \omega_c^2} \right) \quad 0 \leq \psi_1 \leq \pi$$

$$\psi_2 = \arctan \left(\frac{-2\zeta \eta}{\omega_c^2 + 2\zeta^2 - 1} \right) \quad \pi \leq \psi_2 \leq 2\pi$$

$[\xi(\tau)]_{..}$ 必须按不同时间区间分别计算, 对于 $0 < \tau <$

$\frac{\pi}{\omega_c}$,

$$\frac{[\xi(\tau)]_{ss}}{\dot{H}} = \frac{-\omega_c}{\sqrt{(1-\omega_c^2)^2 + 4\zeta^2\omega_c^2}} \left[\frac{1}{\omega_c} \sin(\omega_c\tau - \psi_1) + \frac{e^{-\zeta\tau}}{\eta} \sin(\eta\tau - \psi_2) \right] \quad (6-39a)$$

对于 $\frac{\pi}{\omega_c} < \tau < \frac{2\pi}{\omega_c}$,

$$\begin{aligned} \frac{[\xi(\tau)]_{ss}}{\dot{H}} &= \frac{-\omega_c}{\sqrt{(1-\omega_c^2)^2 + 4\zeta^2\omega_c^2}} \left\{ \frac{1}{\omega_c} \sin(\omega_c\tau - \psi_1) + \frac{e^{-\zeta\tau}}{\eta} \sin(\eta\tau - \psi_2) + \frac{1}{\omega_c} \sin \left[\omega_c \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_c} \right) - \psi_1 \right] - \frac{e^{-\zeta \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_c} \right)}}{\eta} \sin \left[\eta \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_c} \right) - \psi_2 \right] \right\} \\ &= \frac{-\omega_c}{\sqrt{(1-\omega_c^2)^2 + 4\zeta^2\omega_c^2}} \left[\frac{e^{-\zeta\tau}}{\eta} \sin(\eta\tau - \psi_2) - e^{-\frac{\zeta\pi}{\omega_c}} \sin \left(\eta\tau - \psi_2 - \eta \frac{\pi}{\omega_c} \right) \right] \end{aligned} \quad (6-39b)$$

对于 $\tau > \frac{2\pi}{\omega_c}$,

$$\begin{aligned} \frac{[\xi(\tau)]_{ss}}{\dot{H}} &= \frac{-\omega_c}{\sqrt{(1-\omega_c^2)^2 + 4\zeta^2\omega_c^2}} \left[\frac{e^{-\zeta\tau}}{\eta} \sin(\eta\tau - \psi_2) + e^{-\frac{\zeta\pi}{\omega_c}} \sin \left(\eta\tau - \psi_2 - \eta \frac{\pi}{\omega_c} \right) - \sin \left(\eta\tau - \frac{2\eta\pi}{\omega_c} - \psi_2 \right) - e^{-\frac{\zeta\pi}{\omega_c}} \sin \left(\eta\tau - \frac{3\eta\pi}{\omega_c} - \psi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (6-39c)$$

当不存在阻尼时, $\zeta = 0$, $\eta = 1$, 式(6-37)的结果与式(6-34a)一致。图6-31画出了相对阻尼 $\zeta \neq 0$ 时, 残留振动逐渐衰减的情况。停留期的第 n 个偏差幅值 \dot{U}_{0n} 相对于最大偏差 \dot{U}_{00} 的比值为

$$\frac{\dot{U}_{0n}}{\dot{U}_{00}} = e^{-n} \frac{2n\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \quad (6-40)$$

式中, $n = t_d / \tau_0 t_m$, t_d 为停留时间。如果取 $\tau_0 = 0.15$, $t_d / t_m = 1.5$, 和 $\zeta = 0.06$, 则 $n = 10$, $\frac{\ddot{U}_{0n}}{\ddot{U}_{00}} = 0.02$, 即只有 2% 的残留振动, 大大低于无阻尼情况。因此, 为了保证残留振动不致影响下一个凸轮上升运动的行为, 必须增大系统的阻尼。

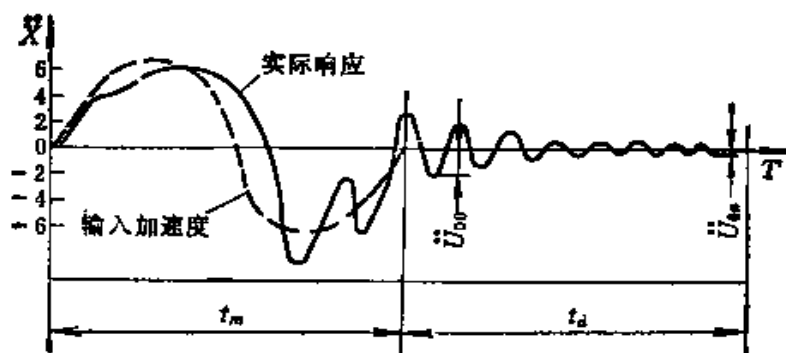


图6-31 阻尼对残留振动的影响实例

一般情况下, 方程 (6-19 a) 可改写为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (6-41)$$

式中, $F(t)$ 可理解为任意的激励力。利用上述拉普拉斯变换法, 可得到它的一般响应表达式为

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_c(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau + \frac{X_0}{\eta} e^{-\zeta\omega_c t} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_c t} \sin\omega_d t \quad (6-42)$$

式中, $\psi = \arctan \frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}}$, $\omega_d = \eta\omega_c$ 。

现在我们利用一般式 (6-42) 来研究凸轮槽与滚子之间存在间隙时的动态响应。为了简单起见, 忽略阻尼, 即 $\zeta = 0$, $\eta = 1$ 。

由于间隙的存在, 滚子将在加速度反号点附近从轮廓一侧向另一侧横越, 出现冲击现象。如果以出现横越的时刻为起始点,

即令此时 $t = 0$ ，则可认为冲击是一种输入速度的突变（图 6-32）：

$$\begin{cases} \text{若 } t < 0, \dot{h} = 0 \text{ 和 } h = 0 \\ \text{若 } t \geq 0, \dot{h} = v_b \text{ 和 } h = v_b t \end{cases}$$

对于这种情况，式（6-52）变成

$$m\ddot{x} + kx = v_b t$$

利用一般响应表达式（6-42），经整理得位移响应为

$$x(t) = v_b t - \frac{v_b}{\omega_c} \sin \omega_c t$$

响应偏差则为

$$u = x - v_b t = \frac{v_b}{\omega_c} \sin \omega_c t$$

其最大值为 $u_{..n} = \frac{v_b}{\omega_c}$ 和 $\ddot{u}_{..n} = \omega_c^2 v_b$ 。

令 $r_c = v_b t_n / h_n$ ，它表示实际冲击速度 v_b 与凸轮升程的平均速度 (h_n / t_n) 之比。于是响应偏差最大值的无因次值为

$$\begin{cases} U_{..n} = \frac{u_{..n}}{h_n} = \frac{r_c \tau_c}{2\pi} \\ \ddot{U}_{..n} = \frac{\ddot{u}_{..n} t_n^2}{h_n} = \frac{2\pi r_c}{\tau_c} \end{cases} \quad (6-43)$$

由此可见，位移响应偏差 $U_{..n}$ 与 τ_c 成正比，而加速度偏差 $\ddot{U}_{..n}$ 与 τ_c 却成反比。

为了计算 r_c （即 v_b ），可认为在 $t = 0$ 时滚子还未开始横越，这时的位移差值 $\Delta h_c = 0$ ，而且速度差值 $\Delta \dot{h}_c = 0$ 和加速度差值 $\Delta \ddot{h}_c = 0$ 。一旦 $t > 0$ ，滚子与一侧轮廓脱离接触，这时的凸轮曲线的跃度 \ddot{h} 使加速度差值增大，即 $\Delta \ddot{h} = \ddot{h} t$ ，而速度差值则为 $\Delta \dot{h} = \frac{1}{2} \ddot{h} t^2$ 。当横越到另一侧时，即 $t = t_b$ ，速度差值为

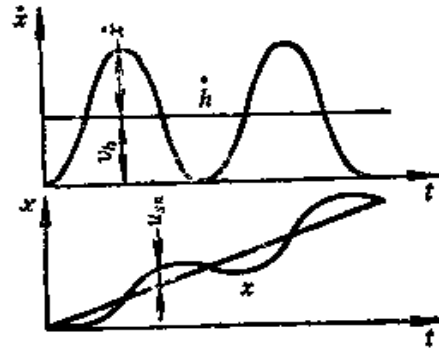


图6-32 冲击函数 ($\dot{h} = v_b t$) 的响应 (x)

$$v_s = \frac{1}{2} \bar{h} t_s^2$$

在 $t = t_s$ 时刻, 如果横越的间隙厚度为 δ , 则

$$\delta = \frac{1}{6} \bar{h} t_s^3$$

由上述二式不难求得冲击速度为

$$v_s = \frac{1}{2} (\bar{h})^{1/3} (6\delta)^{2/3}$$

于是
$$r_s = \frac{1}{2} |\ddot{H}|^{1/3} \left(\frac{6\delta}{h_m} \right)^{2/3} \quad (6-44)$$

例如摆线运动规律的 $\ddot{H} = \pm 4\pi^2$, 这时的 r_s 则为

$$r_s = (18\pi^2)^{1/3} \left(\frac{\delta}{h_m} \right)^{2/3}$$

由式 (6-44) 可见, 为了减少间隙冲击, 应选取加速度反号点附近 $|H|$ 较小的运动规律, 并减少间隙厚度。

2. 参变量法

如式 (6-24) 所示, 参变量法把不管是单自由度或是多自由度系统的运动微分方程, 统一地用矩阵型式表示, 便于推导, 表述简便, 易于数值计算的编程。

多自由度系统运动方程的矢量矩阵表达式 (6-24) 为

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]\{u\}$$

已知初始条件为 $\{X(0)\} = \{X_0\}$, 可用矩阵指数求解。在方程两边同乘以 $e^{-[A]t}$, 得

$$e^{-[A]t} \{\dot{X}\} = e^{-[A]t} [A] \{X\} + e^{-[A]t} [B] \{u\}$$

或等效成
$$\frac{d}{dt} (e^{-[A]t} \{X\}) = e^{-[A]t} [B] \{u\}$$

从 0 到 t 积分, 得

$$\begin{aligned} e^{-[A]t} \{X\} \Big|_0^t &= e^{-[A]t} \{X\} - \{X_0\} \\ &= \int_0^t e^{-[A](t-\tau)} [B] \{u(\tau)\} d\tau \end{aligned}$$

乘以 $e^{-[A]t}$, 得

$$\{X\} = e^{[A]t} \{X_0\} + e^{[A]t} \int_0^t e^{-[A]\tau} [B] \{u(\tau)\} d\tau \quad (6-45 a)$$

其中, $e^{[A]t}$ 是已知的, 可展开成

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + [A]^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + [A]^n \frac{t^n}{n!} + \dots$$

当 $t = n\Delta T$ 时, 其中, ΔT 为时间增量, $n = 0, 1, 2, \dots$ 由 (6-45 a) 得

$$\{X(n\Delta T)\} = e^{[A]n\Delta T} \{X_0\} + e^{[A]n\Delta T} \int_0^{n\Delta T} e^{-[A]\tau} [B] \{u(\tau)\} d\tau \quad (6-45 b)$$

同样地, 当 $t = (n+1)\Delta T$ 时, 有

$$\begin{aligned} \{X[(n+1)\Delta T]\} &= e^{[A](n+1)\Delta T} \{X_0\} \\ &+ e^{[A](n+1)\Delta T} \int_0^{(n+1)\Delta T} e^{-[A]\tau} [B] \{u(\tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (6-45 c)$$

由式 (6-45 c) 减去式 (6-45 b) 后乘以 $e^{-[A]\Delta T}$, 得

$$\begin{aligned} \{X[(n+1)\Delta T]\} &= e^{[A]\Delta T} \{X(n\Delta T)\} \\ &+ e^{[A](n+1)\Delta T} \int_{n\Delta T}^{(n+1)\Delta T} e^{-[A]\tau} [B] \{u(\tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (6-45 d)$$

当激励函数是任意而连续的时, 上式中的积分可利用辛普生公式得到如下的递推公式:

$$\begin{aligned} \{X[(n+1)\Delta T]\} &= e^{[A]\Delta T} \left[\{X(n\Delta T)\} + \frac{\Delta T}{6} [B] \{u(n\Delta T)\} \right] \\ &+ \frac{2\Delta T}{3} e^{[A]\left(\frac{\Delta T}{2}\right)} [B] \left\{ u \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta T \right] \right\} \\ &+ \frac{\Delta T}{6} [B] \{u[(n+1)\Delta T]\} + R \end{aligned} \quad (6-45 e)$$

其中, R 是误差项, 当 ΔT 充分小时, 它可以忽略不计。注意,

解出的 $\{X\}$ 代表位移和速度两部分响应，代入式(6-24)即可得到加速度响应。

3. 有限差分法

非线性系统一般很难有解析解。对于非线性多自由度系统，通常采用数值近似法求解。有限差分法是其中最常见的一种。

首先研究一个较简单的柔性轴单自由度系统，它的运动方程如式(6-31 b)所示，它的系数是随时间变化的，不是常数。因此，无法用上述解常系数微分方程的方法求解，只能用近似数值法。为了计算方便，假定不计阻尼，则式(6-31 b)可改写成

$$\ddot{X} = \left(\frac{2\pi}{\tau_c} \right)^2 \frac{H - X}{1 + \dot{H}^2 F} \quad (6-46 a)$$

令 X_1 和 \dot{X}_1 为 T_1 时刻的位移与速度响应(图6-33)。假定在时间增量 ΔT 内的加速度 \ddot{X} 为常数，

并等于时间增量一半处 $\left(\theta = \frac{1}{2} \Delta T \right)$ 的值，式(6-46 a)可由下式近似表示为

$$\ddot{X} = \left(\frac{2\pi}{\tau_c} \right)^2 \frac{H_0 - (X + \delta X)}{1 + \dot{H}_0^2 F}$$

其中，未知位移增量 δX 可由下式计算：

$$\delta X = \dot{X}_1 \theta + \frac{1}{2} \ddot{X} \theta^2$$

把 δX 代入，得

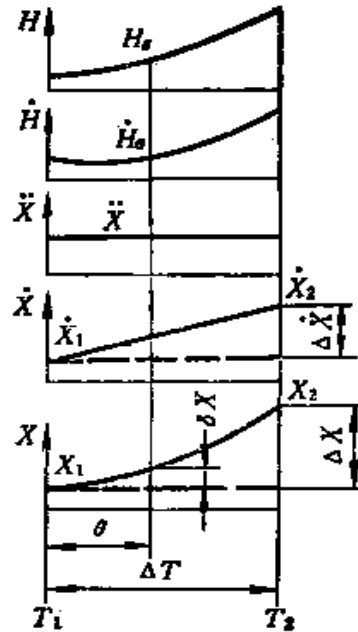


图6-33 有限差分法
计算用图

$$\ddot{X} = (H_0 - X_1 - \dot{X}_1 \theta) \left[\left(\frac{\tau_c}{2\pi} \right)^2 (1 + F\dot{H}^2) + \frac{1}{2}\theta^2 \right]^{-1} \quad (6-46b)$$

当凸轮运动规律确定后, H_0 与 \dot{H}_0 是已知的。由于在步长 ΔT 的端点的 \ddot{X} 可以算出, 并被假定在 ΔT 期间为常数, 则可知 \dot{X} 为直线, 而 X 为抛物线关系:

$$\Delta \dot{X} = \ddot{X} \Delta T \quad (6-46c)$$

$$\dot{X}_2 = \dot{X}_1 + \Delta \dot{X} \quad (6-46d)$$

$$\Delta X = \left(\dot{X}_1 + \frac{1}{2} \Delta \dot{X} \right) \Delta T \quad (6-46e)$$

$$X_2 = X_1 + \Delta X \quad (6-46f)$$

上述计算过程的程序框图如图 6-34 所示。若 $\Delta T < 0.1\tau_c$, 计算过程是稳定的, 具有足够的精度。例如, 当 ΔT 从 $0.1\tau_c$ 降至 $0.01\tau_c$ 时, 算出的残留振动幅值变化仅为 1.5%。

在这个框图中标明的凸轮曲线是摆线, 当然也可采用其它凸轮曲线。图 6-35 给出了不同刚度轴的凸轮机构对摆线激励的响应曲线。

由图可见, 在加速期间由于柔性轴的扭转和横向变形所贮存的能量将会在减速期间释放出来, 像弹弓一样, 使凸轮加速运动。在转速较高 (τ_c 小) 和轴刚性差 (F 大) 的情况下, 从动件的残留最大减速度甚至会超过额定最大减速度。

由于柔性轴系统的等效刚度在运转过程中是随 T 变化的, 所以系统的自然振动频率 ω_c 也随 T 而变化。在 T 时的自然振动频率为:

$$\omega_{c,T} = \frac{\omega_{c,0}}{(1 + \dot{H}^2 F)^{1/2}}$$

式中, $\omega_{c,0}$ 为起始位置时的自然振动频率。显然, 在 $T = 0.5$ 时, $\dot{H} = 2$ 为最大值, 这时的自然振动频率 ω_c 为最小值。

前面对简单模型的分析已近似地得到了系统的动力学响应特性。从附录 VII 中对更复杂的四自由度模型的分析结果将会看到,

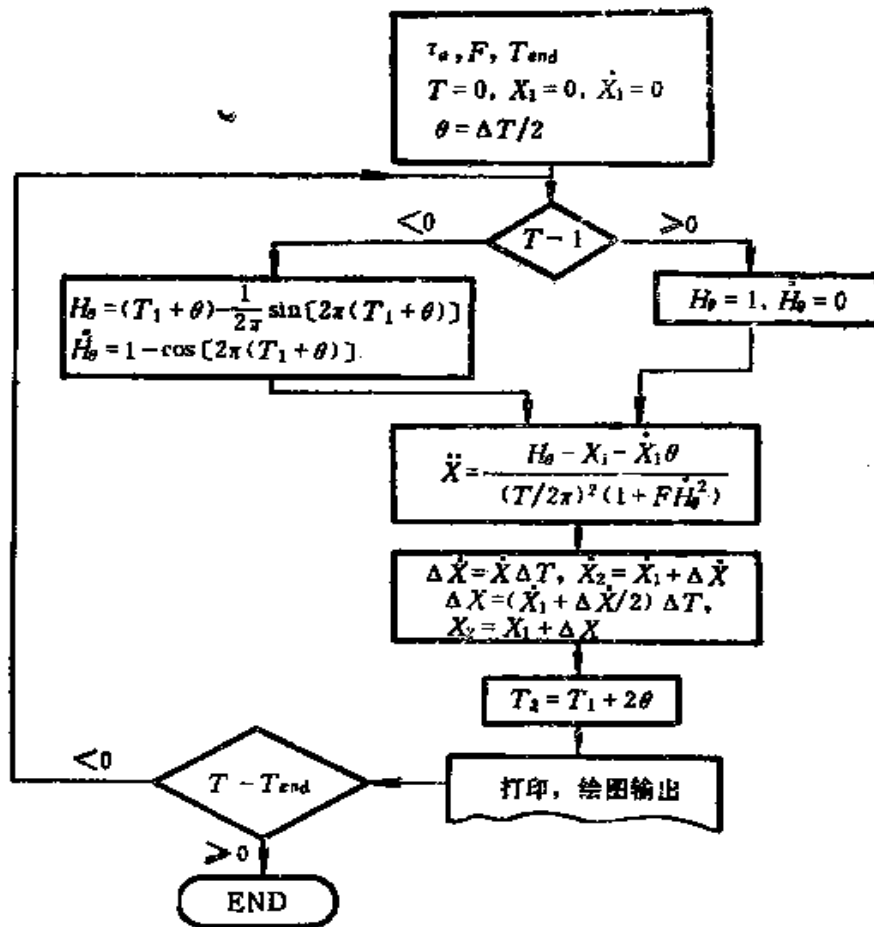


图6-34 求柔性轴单自由度无阻尼系统响应的计算框图

单自由度模型和双自由度模型的动力学分析，基本上与多自由度模型分析的结果相近，一般情况下能满足工程设计的要求。只是在要求更高的高速凸轮机构设计时，才有必要按附录Ⅶ中介绍的方法或其它更精细的分析方法进行计算。显然，这些方法的计算工作量将是很大的。附录Ⅶ给出了一个典型平面凸轮机构四自由度动力学模型的分析过程、计算公式及部分结果。这些结果与前面单自由度模型的分析结果没有很大差别。

三、动力学响应的频域表示法

表示凸轮机构动力学响应特性的一种有用方法是响应的频

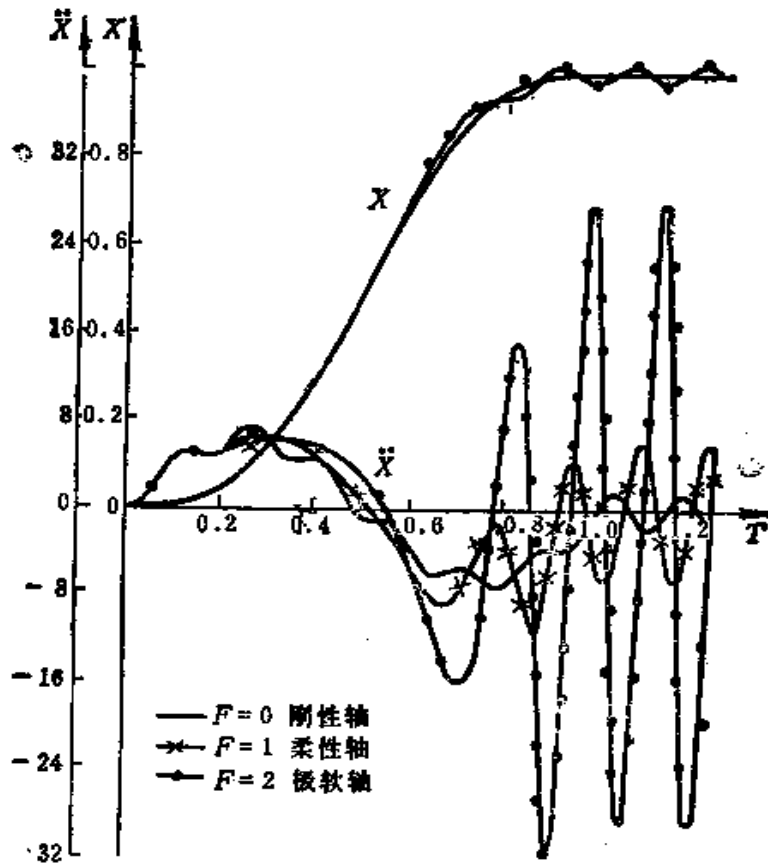


图6-35 柔性轴凸轮机构对摆线激励的响应

域表示法，即以动力学响应频谱DRS \ominus 来表示。这种图谱给出一种独特的信息，能帮助设计者迅速看出机械冲击对系统的影响。同时它还有以下两点好处：

(1) 它使设计者看到系统各部件承受的动载有统一的指标，从而有助于估计潜在的损伤。

(2) 它向试验人员提供了一种很灵敏的技术，有助于保证过渡响应试验的重复性。

动力学响应谱被定义成受特定的暂态输入作用的许多单自由度质量—弹簧系统的各个最大加速度响应的图形。其纵坐标一般

\ominus 全称为 Dynamic Response Spectrum。

为加速度，或某些与加速度有关的规一化的表达式，而横坐标是系统的自然频率，或脉冲持续时间与系统自然周期之比。阻尼是参变量，它的数值应注明。若未注明，则假定为零。

动力学响应谱的图示定义如图6-36所示。首先输入一个给定的脉冲，通过计算得到一个单自由度系统对于输入的反应。例如，

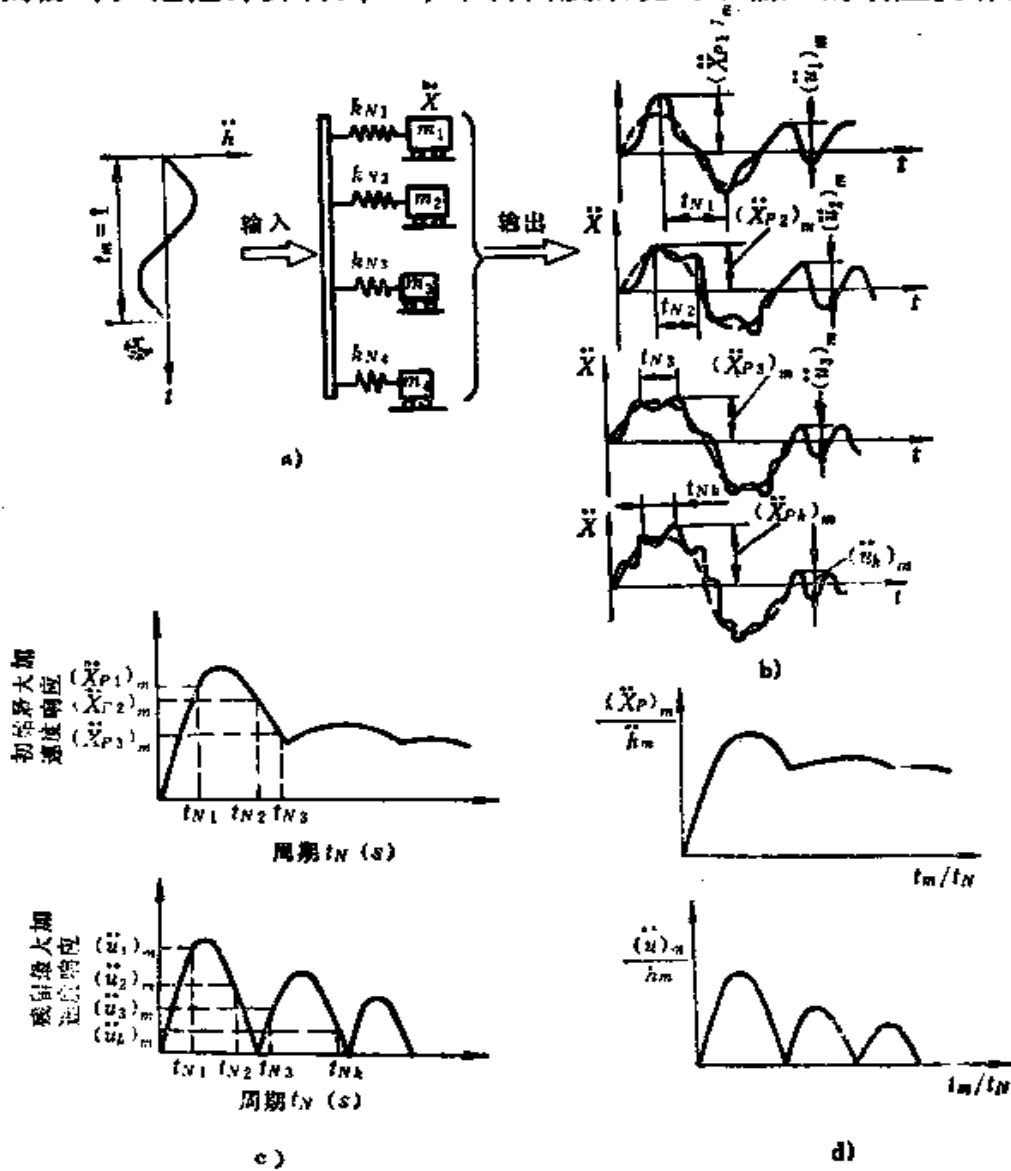


图6-36 动力学响应谱

- a) 不同周期的单自由度系统
- b) 从动件的加速度响应
- c) 加速度响应谱
- d) 无量纲加速度响应谱

可首先计算从动件加速度随时间的变化。然后取出最大的从动件加速度，并按单自由度系统的基本周期把它画在图上。作这样一次数学运算，在图上给出一个点。如果保持系统的阻尼不变，而通过改变弹簧刚度使系统的自然频率或周期变化，进行同样的计算，则可给出许多这样的点；由这些点连成的曲线就是响应谱。然后对所设其它阻尼比值重复计算，得到一组曲线，每条曲线对应于不同的阻尼比。这组曲线就构成动力学响应谱。

系统加上暂态输入期间出现的最大响应称为“初始谱”[⊖]。这些加速度幅值是没有方向的，可正可负，但不会同时为正或为负。在暂态输入终止后的峰值响应称为“残留谱”[⊖]。残留谱常常表现出小于或等于初始谱的正与负加速度响应幅值。残留响应一般与交变疲劳应力相联系。

响应谱不只有加速度响应谱，也可选择位移或速度响应谱。由系统基频 ω_n 乘最大位移得到的量，具有速度单位，称为谱速度或伪速度。用 ω_n 再乘伪速度一次，得另一个量，称为伪加速度或谱加速度。于是，可按如下关系定义DRS：

$$\begin{cases} S_D = x_n \\ S_V = \omega_n S_D \\ S_A = \omega_n S_V \end{cases} \quad (6-47)$$

当系统无阻尼时，按上式定义的 S_V 与 S_A 是严格的。当系统存在阻尼时，这些关系是近似的。因为响应不是严格的正弦函数， ω_n 值与阻尼自然频率 ω_d 不完全相等。然而，当阻尼不大时，近似程度一般能满足实际应用要求。

经过规一化的无因次DRS图比一般带量纲的图更有用，因为一个规一化的图满足类似脉冲形状激励的所有幅值。规一化位移、速度和加速度DRS被定义为

⊖ 英文为Primary Spectrum。

⊖ 英文为Residual Spectrum。

$$\begin{cases} S_{ND} = \frac{x_m}{h_m} \\ S_{NV} = \frac{\omega_n x_m}{h_m} \\ S_{NA} = \frac{\omega_n^2 x_m}{h_m} \end{cases} \quad (6-48)$$

图6-37 a 与 b 表示按立体图画出的DRS实例。它们是修正梯形运动规律在阻尼为 0%，0.05%，0.1%，0.2%和0.3%的凸轮机构的响应谱。这些图形表明了谱的特征和性质。曲线在系统一个或数个自然周期值处呈现峰值；这就是说，有某些自然周期的系统特别易被特定的暂态输入所激励，因为输入运动的频率分量与系统的自然频率相重合。

像这样的响应谱在设计时是很有用的，因为利用这些谱，设计人员能立即确定不同周期的系统如何对应于某些给定的输入激励。

为了对不同凸轮轮廓的动力学特性进行直接比较，可以近似地用一部分残留振动的包络曲线来代替残留振动曲线精确形状。这样，可能偏于保守，但不会影响结果的比较。

图6-38表示12种不同凸轮的 S_{NA} 。图中的实线为残留响应，虚线为初始响应。图6-39表示各主要运动规律构成的轮廓的最大初始振动的比较，图6-40表示这些轮廓残留振动包络随 t_m/t_N 比增加时的不同变化曲线。残留响应谱的包络构成如图6-41所示。

对这些图形和列在表6-3中的结果的研究可得到如下结论：

(1) 在所分析的凸轮轮廓中，修正梯形、Gutman1-3，Freudenstein1-3简谐、修正正弦、Berzak-Freudenstein3-4-5-6-7多项式（D曲线）和修正摆线等的最大加速度值较低。11次多项式，Berzak-Freudenstein3-4-5-6-7多项式（D曲线），4-5-6-7多项式和Freudenstein1-3简谐等在 $T_1/T_N > 4$ 的频率范围内的残留振动水平较低，以11次多项式为最低。

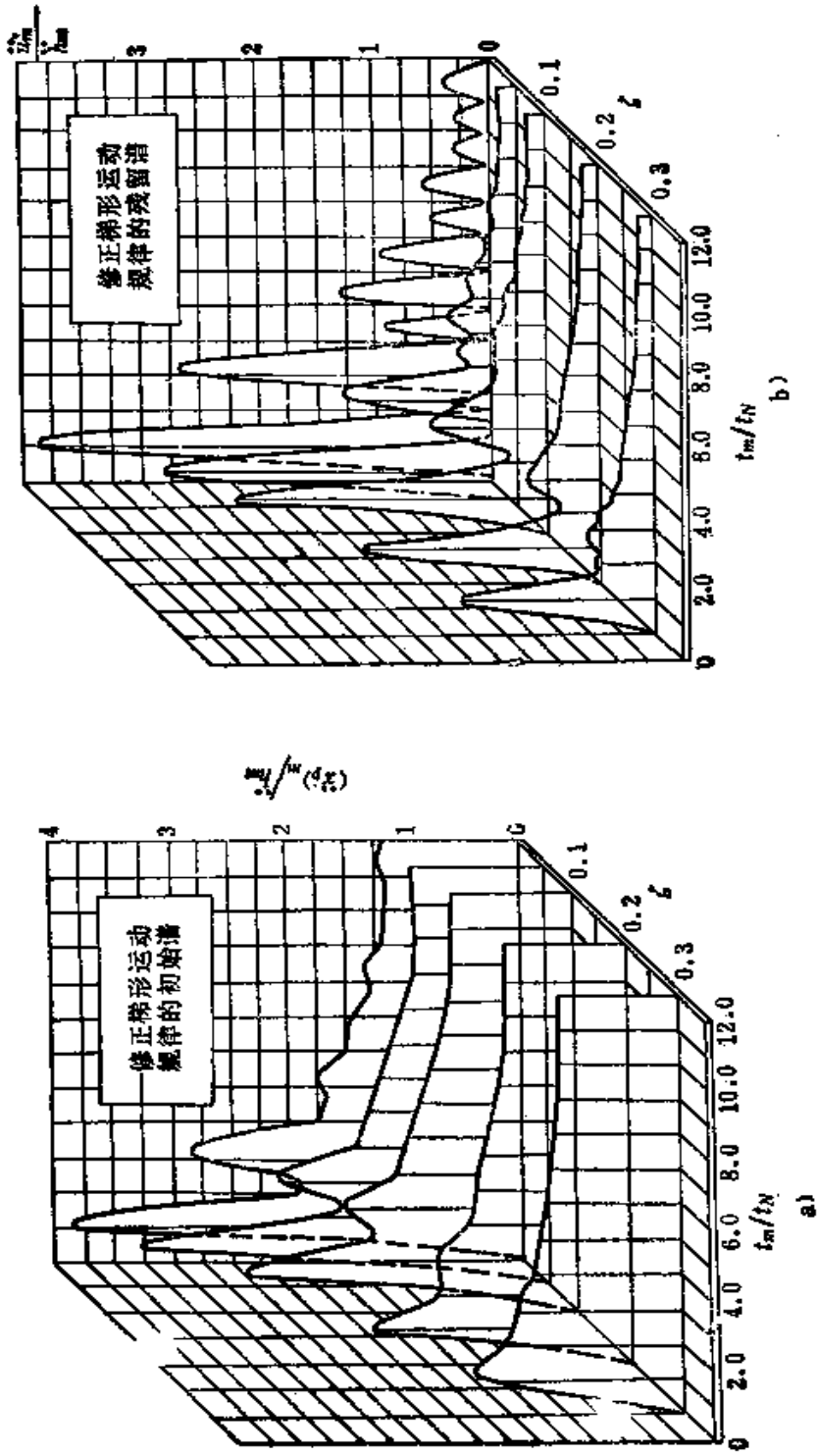


图6-37 修正梯形运动规律凸轮机构的DRS立体示意图

a) 初始谱 b) 残留谱

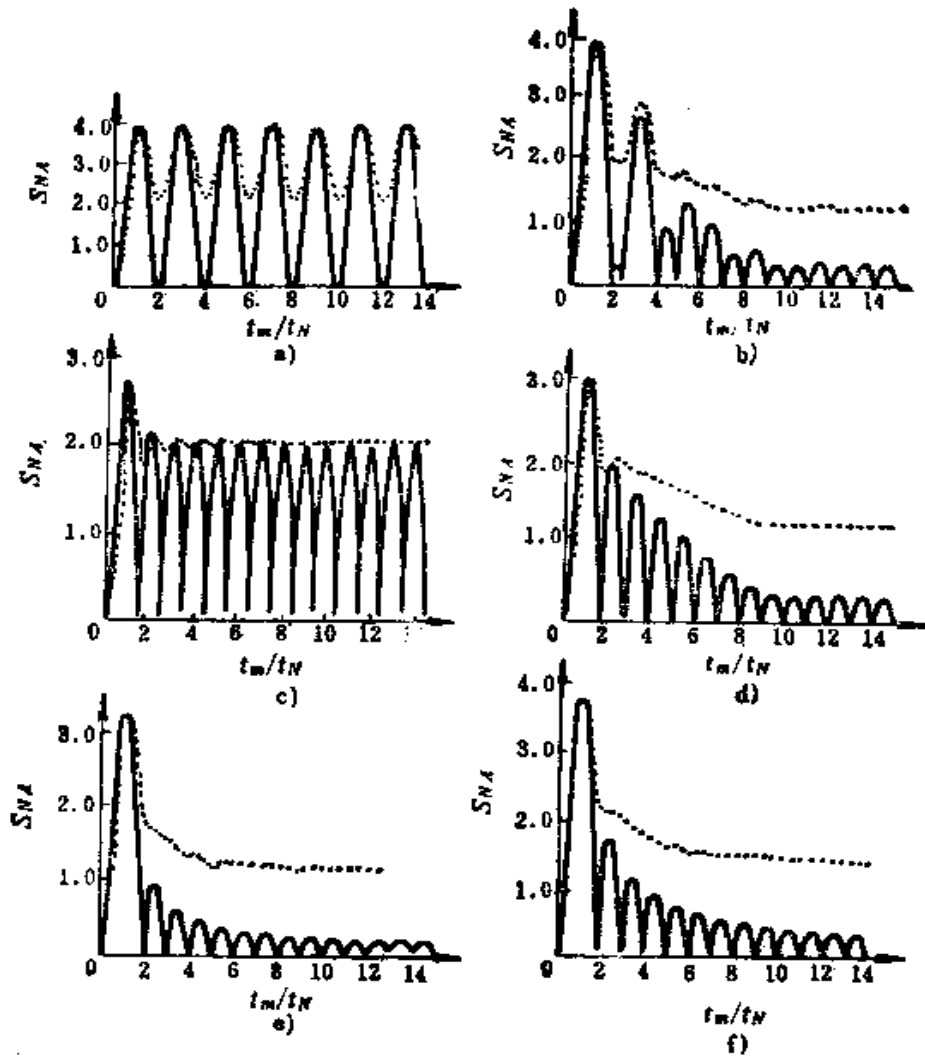
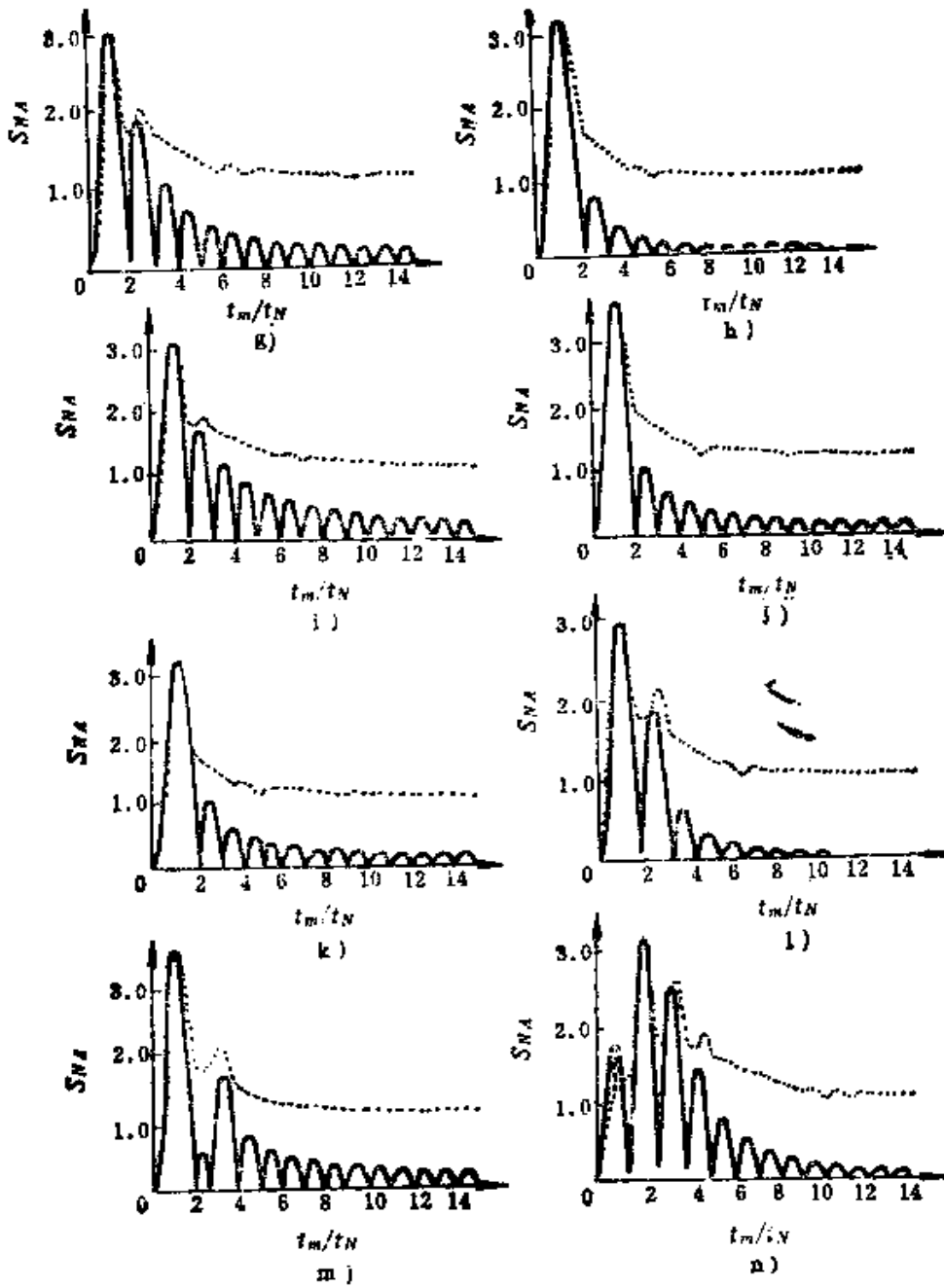


图6-38 12种不同运动规

a) 双曲 b) 修正梯形 c) 简谐 d) 修正正弦 e) 摆线 f)
 D—曲线 j) Gntman F-3 k) 3-4-5-6-7多项式



律的 S_{NA} 相对 t_m/t_n 的图形

g) 3-4-5多项式 h) 修正摆线 i) 4-5-6-7多项式 j) 2-4-5-6-7多项式
 k) 修正摆线 l) 11阶多项式 m) P1-3傅谱 n) 15阶多项式

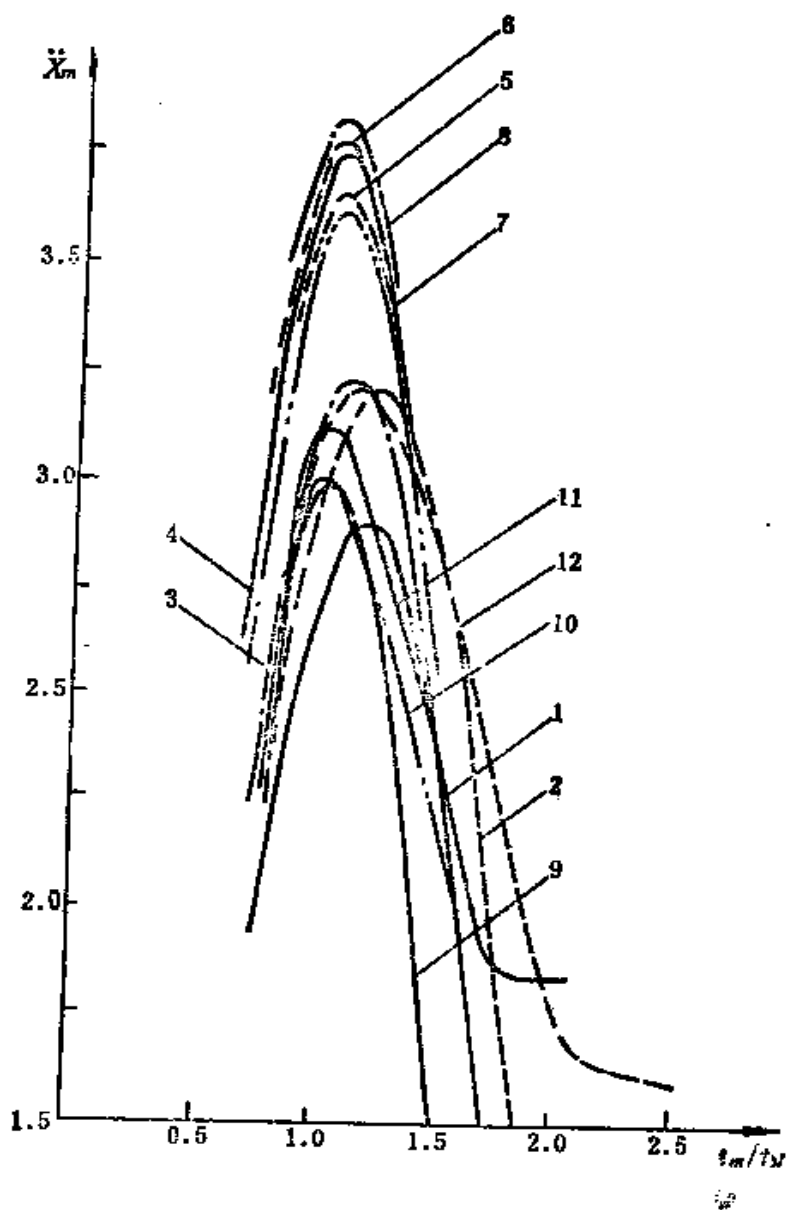


图6-39 初始振动规一化最大加速度幅值的比较

1—11阶多项式 2—4-5-6-7多项式 3—摆线 4—F1-3 5—Gutman1-3
 6—3-4-5多项式 7—F1-3-5 8—修正梯形 9—修正摆线 10—修正正弦
 11—3-4-5-6-7D曲线 12—3-4-5-6-7E曲线

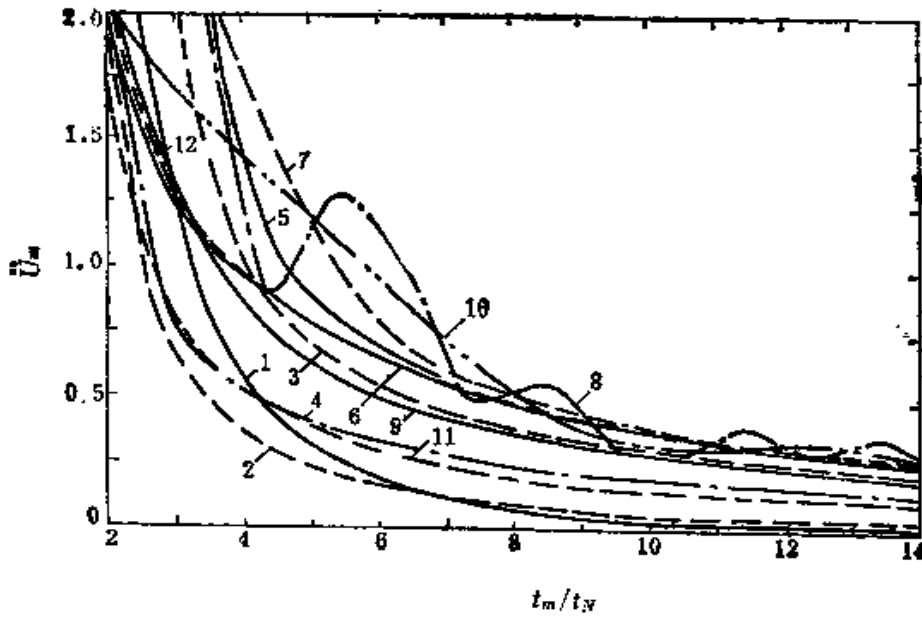


图6-40 残留振动归一化最大加速度幅值包络的比较

(图注同图6-39)

(2) 一般地讲, 凸轮驱动机构的速度是常变的。总可能出现几个激励频率(谐波)与从动系统的自然频率相一致的情况。振动响应的水平正比于相重合的谐波的幅值。如果凸轮加速度曲线只有几个谐波, 或无高频谐波, 最高和最后一个谐波的频率低于系统的第一个危险频率, 则可以避免这一重合。这就可以解释为什么像Gutman1-3, Freudenstein1-3简谐, 以至摆线(最大加速度为6.28)等只包含很少谐波项的凸轮曲线, 一般具有良好的动力学响应。

(3) 对于所有情况, 很难说哪一种凸轮型式是最优的和动力学性能是最好的。响应谱只可能按所施加的条件和在某些频率范围内进行控制, 而且这种控制须在牺牲其它因素或在其它频率范围内增加响应的情况下进行。设计者必须权衡两个最重要而矛盾的因

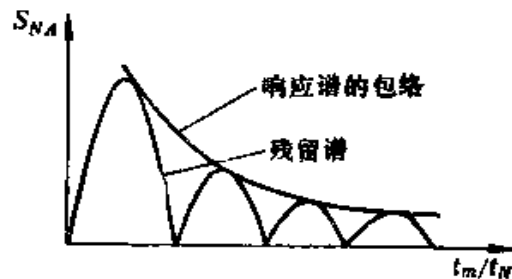


图6-41 残留振动谱包络的构成

表6-3 凸轮轮廓运动学与动力学因子总览表

曲 线 名 称	运 动 学			动 力 学			
	V_m	A_m	J_m	最 大 初始谱	稳 定 水平	最 大 残留谱	稳 定 水平
双曲	2.00	4.00	∞	4.0	4.0	4.0	4.0
简谐	1.57	4.93	∞	2.75	2.0	2.75	2.0
摆线	2.00	6.28	40	3.24	1	3.24	0
修正摆线	1.76	5.89	67	2.98	1	2.98	0
修正梯形	2.00	4.89	61	3.83	1	3.82	0
修正正弦	1.76	5.53	23	3.00	1	3.00	0
3-4-5多项式	1.89	5.77	60	3.76	1	3.76	0
4-5-6-7多项式	2.19	7.52	52	3.23	1	3.20	0
Freudenstein 1-3	2.00	5.39	51	3.61	1	3.61	0
Gutman 1-3	2.00	5.15	168	3.65	1	3.64	0
11阶多项式	2.05	7.91	55	2.91	1	2.90	0
15阶多项式	1.50	6.58	89	3.20	1	3.20	0
Borzak-Freudenstein 3-4-5-6-7多项式 D 曲线	1.80	5.60	73	3.11	1	3.11	0
Borzak-Freudenstein 3-4-5-6-7多项式 E 曲线	2.00	6.50	41	3.20	1	3.20	0

素：最大加速度幅值与残留振动水平。与此有关的其它因素，如在最后对凸轮选型时整个系统各零件的位移精度和速度等，每一设计都应分别根据它的特殊要求进行评价。

第四节 凸轮机构的动力学综合

一、凸轮机构按单自由度模型的综合

所谓凸轮机构的动力学综合，是指按照给定的动力学品质设计凸轮机构的各结构几何参数，这正好与上述的分析过程相反。对于要求满足一定动力学品质的凸轮机构的综合可归纳为下列两种方法。

一种方法是斯托达德提出的多重动方法，其实质是依靠补偿曲线加在基本运动曲线上，以抵消从动系统变形所产生的位置误差。这种方法只宜用于从动系统有一定不变的质量和刚度，而且运转速度只能在设计速度附近一个很小范围内变动的场合，这样

才能获得较满意的结果。

另一种方法是梯萨尔与马修提出的，通过寻求满意的动力学品质的凸轮轮廓，使得所设计的凸轮从动件系统的瞬态振动在一定转速范围内为最小。

为了说明后一方法，首先看图6-42 a 所示的单自由度系统模型。图6-42 b 为其分离体图，其中的作用力有：

$$F_k = k(h - y) + P$$

$$F_{k_r} = k_r y + P$$

$$F_{c_r} = c_r \dot{y}$$

式中， P 是复位弹簧的预加载荷（初弹力）， y 是需要输出的位移（由平衡位置测量起）， h 为凸轮轮廓表面位移的“形状函数”。

输出载荷或有效作用力 F_w 随每一个特殊使用情况而变，对于给定的系统它是已知的，综合时不难计入。为了研究分析方便，下列综合方程中先不计入 F_w ，有

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F_k - F_{k_r} - F_{c_r} \\ &= k(h - y) + P - (k_r y + P) - c_r \dot{y} \end{aligned}$$

或者重新整理为典型的形式：

$$\frac{m}{k} \ddot{y} + \frac{c_r}{k} \dot{y} + \frac{k + k_r}{k} y = h \quad (6-49 a)$$

动力学综合的本质是已知动力学响应 $y(t)$ ，要求函数 $h(t)$ 以

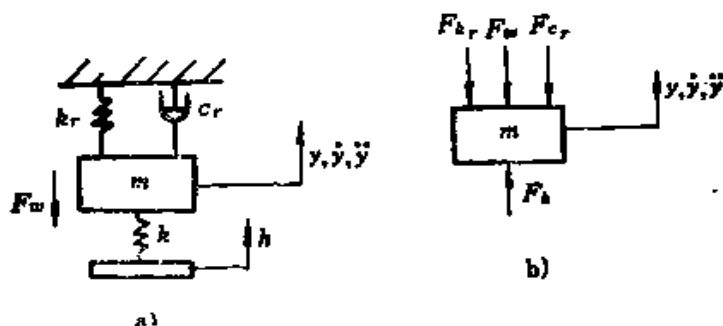


图6-42 凸轮轮廓综合用单自由度系统模型

a) 系统模型图 b) 分离体图

产生确定的响应 $y(t)$ 。

通常，凸轮设计者规定输出运动 y 为输入转角 θ 的函数，这样就可以利用复合函数求导法则，进行下列变换：

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \frac{d\theta}{dt} = y' \omega_d, \quad \omega_d = \frac{d\theta}{dt} = \text{常数}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = y'' \omega_d^2$$

式中， ω_d 为凸轮轴的设计角速度，假定为常数。于是上述综合方程变成

$$h = \frac{m}{k} \omega_d^2 y'' + \frac{c_r}{k} \omega_d y' + \frac{k + k_r}{k} y \quad (6-49b)$$

或
$$h = \mu_m y'' + \mu_c y' + \mu_k y \quad (6-49c)$$

式中， $\mu_m = \omega_d^2 \frac{k}{m} = \omega_d^2 / \omega_s^2$ ， $\mu_c = \frac{c_r}{k} \omega_d$ ， $\mu_k = \frac{k + k_r}{k}$ 。

对于常见的系统， μ_m 在小于 10^{-4} 范围内变化；对于多数实际系统， μ_c 很小，可忽略不计； μ_k 因为 $k_r \ll k$ 而接近于 1。

图6-43给出了梯形加速度曲线综合方程式的各个分量。合成的形状函数 h 是产生从动件按梯形加速度运动的激励函数。图中的高阶导数分量已被夸大。 h 上的明显尖角无疑是不希望有的。显然，作为一个良好设计的最低条件， h 应该处处光滑或斜率连续变化。这个条件意味着凸轮表面形状函数的二阶导数 h'' 应该是有限的。

从综合方程式 (6-49c)， h'' 可由下式给出：

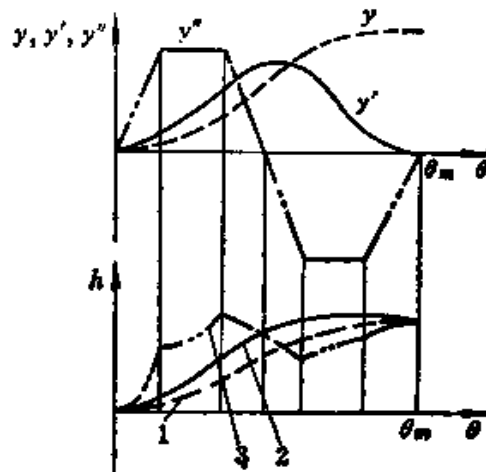


图6-43 凸轮机构动力学综合的图形表示

$$1 - \frac{k + k_r}{k} y \quad 2 - \frac{c_r}{k} \omega_d y' + \frac{k + k_r}{k} y$$

$$3 - h = \frac{m}{k} \omega_d^2 y'' + \frac{c_r}{k} \omega_d y' + \frac{k + k_r}{k} y$$

$$h'' = \mu_a y'' + \mu_c y''' + \mu_s y''$$

因此, 除非 μ_a 如在低速系统中那样取小值, 设计者应力争使运动规律的四阶导数 y'''' 是有限的。

二、非设计工况下的凸轮轮廓综合

从综合方程 (6-49) 可见, 如果设计者假设 $h \equiv y$, 这相当于综合一个 $\omega_d = 0$ 的凸轮, 使之在与设计速度 ω_d 不同的条件下运转, 其中还设 $\mu_s = 1$ 。显然, 实际的机器系统都不是这种情况, 而是在相当大的速度范围内运转。凸轮机构动力学综合需要解决的问题是:

当系统在与设计速度 ω_d 不同的速度 ω 下运转时, 实际系统的输出运动 x 与预期输出运动 y 的偏差 $\delta = x - y$ 有多大?

研究这个问题的目的在于当实际速度 ω 可预知时, 寻求使偏差 δ 尽可能小的凸轮系统参数, 进而确定参数选择的基本法则, 以免除或减少对系统复杂的分析。

在不同于 ω_d 的转速 ω 下运行时, 实际系统的输出 x 的响应方程类似式 (6-49 b), 即

$$h = \frac{m}{k} \omega^2 x'' + \frac{c_r}{k} \omega x' + \frac{k + k_r}{k} x$$

将该方程与式 (6-49 b) 联立, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{m}{k} \omega^2 x'' + \frac{c_r}{k} \omega x' + \frac{k + k_r}{k} x \\ &= \frac{m}{k} \omega_d^2 y'' + \frac{c_r}{k} \omega_d y' + \frac{k + k_r}{k} y \end{aligned} \quad (6-50 a)$$

由于 $\delta = y - x$

故 $x = y - \delta$, $x' = y' - \delta'$, $x'' = y'' - \delta''$

代入式 (6-50 a) 得

$$\begin{aligned} & \delta'' + \frac{c_r}{m\omega} \delta' + \frac{k + k_r}{m\omega^2} \delta \\ &= \left[1 - \left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 \right] y'' + \frac{c_r}{m\omega} \left[1 - \frac{\omega_d}{\omega} \right] y' \end{aligned} \quad (6-50 b)$$

可见, 偏差 δ 与规定的位移 y 没有直接关系, 而是与 y' 与 y'' 有关。为了求此方程的齐次解, 其特征方程为

$$r^2 + \frac{c_r}{m\omega} r + \frac{k+k_r}{m\omega^2} = 0$$

它的根为

$$r_{1,2} = -\frac{c_r}{2m\omega} \pm \sqrt{\left(\frac{c_r}{2m\omega}\right)^2 - \left(\frac{k+k_r}{m\omega^2}\right)}$$

对于 $c_r < [4m(k+k_r)]^{1/2}$ 情况下, 特征根复数形式为

$$r_{1,2} = \bar{\alpha} \pm i\bar{\beta}$$

于是, 式 (6-50 b) 的齐次通解为

$$\delta_h = e^{\alpha\theta} (A \cos \bar{\beta}\theta + B \sin \bar{\beta}\theta)$$

假定式 (6-50 b) 右边已知, 并展开成多项式, 即设 $y =$

$\sum_{k=p}^t c_k \theta^k$, 则该方程的特解亦为多项式, 记为

$$\delta_p = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_{t-1}\theta^{t-1}$$

于是 $\delta_p' = a_1 + 2a_2\theta + 3a_3\theta^2 + \dots + (t-1)a_{t-1}\theta^{t-2}$

$$\delta_p'' = 2a_2 + 6a_3\theta + \dots + (t-2)(t-1)a_{t-1}\theta^{t-2}$$

将上列关系代入式 (6-50 b) 的左边, 使两边同阶项的系数相等, 这些系数由下列矢量方程确定:

$$\begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & 2 & & & & 0 \\ & \xi_0 & 2\xi_1 & 6 & & & \\ & & \xi_0 & 3\xi_1 & 12 & & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ & & & & & (t-1)(t-2) & \\ & 0 & & & & (t-1)\xi_1 & \\ & & & & & \xi_0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (p-1)pc_p & 0 \\ \vdots & pc_p \\ \vdots & \vdots \\ (t-1)tc_t & \\ 0 & tc_t \end{bmatrix} \begin{cases} 1 - \left(\frac{\omega_d}{\omega}\right)^2 \\ \xi_1 \left(1 - \frac{\omega_d}{\omega}\right) \end{cases} \quad (6-51)$$

$$\text{式中, } \xi_0 = \frac{k + k_r}{m\omega^2} = \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2, \quad \xi_1 = \frac{c_r}{m\omega} = \frac{2\xi\omega_n}{\omega}$$

c_0, \dots, c_i 为给定的多项式运动规律的系数。总的偏差响应则为

$$\delta = e^{\xi_0\theta} (A \cos \beta\theta + B \sin \beta\theta) + a_0 + a_1\theta + \dots + a_{i-1}\theta^{i-1} \quad (6-52)$$

式中, a_i 已由式 (6-51) 确定。代入式 (6-51), 得

$$A = \delta_0 - a_0, \quad \delta_0 = \delta|_{\theta=0} \quad (6-53a)$$

由式 (6-52) 的微分, 得

$$B = \frac{\delta'_0 - \beta A - a_1}{\beta}, \quad \delta'_0 = \delta'|_{\theta=0} \quad (6-53b)$$

图6-44给出了从动件质量为 1 kg, $k = 500000\text{N/cm}$, $c_r = 0.23\text{N}\cdot\text{s/cm}$, 和 $k_r = 5000\text{N/cm}$ 的凸轮机构输出偏差计算的结果。设计速度为 2000

r/min, 规定的运动规律为 4-5-6-7 多项式, 在 $\theta = \theta_n$ 时, $y = 1$, $y' = y'' = y''' = 0$, 并假定 $\delta_0 = \delta'_0 = 0$ 。 τ 为时间增量。

由图可见, 当 $\omega < \omega_n$ 时, 偏差曲线形状与规定的加速度负值类似。

对于 ξ_1 较小的小阻尼情况, 这是预料中的, 因为式 (6-51) 右边变成一个列

矢量, 表示规定的加速度与一个负常数

$\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\right]$ 的乘积。对于 $\omega > \omega_n$ 情况, 常数为正, 偏差曲线则与加速度曲线相似。 $\omega = \omega_n$ 时, 式 (6-51) 右

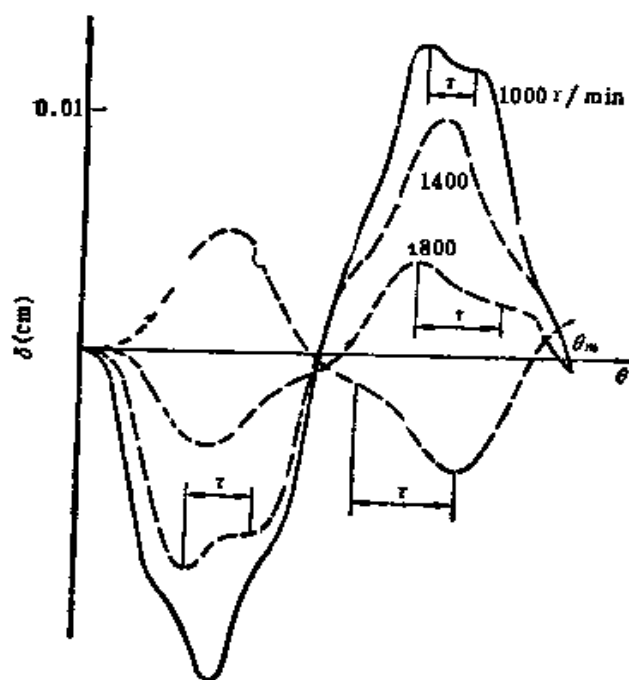


图6-44 输出偏差图

边变成零矢量。由于式(6-51)的矩阵不可能是正则的,其解必然为 $\delta_i = 0$ 。于是由式(6-53),因 $\delta_0 = \delta'_0 = 0$,有 $\delta_i = 0$ 。这样,当系统在设计速度下运行时,实际输出与设计者规定的运动一致,不存在瞬变波动项。

三、影响因素分析

图6-44中的瞬态频率随时间刻度的变化而变化。采用同一组系统参数时(例如 $\mu_n = 7.6 \times 10^{-4}$ 与 $\mu_s = 5.375 \times 10^{-2}$),瞬态振动的最初振幅值 $\bar{A} = \sqrt{A^2 + B^2}$ 将随这些频率值变化, \bar{A} 随 ω/ω_d 变化情况如图6-45上的虚线所示。对于其它多项式运动规律的 \bar{A} 曲线将明显不同,如图上实线所示。所有的多项式运动规律都满足 $y_0 = 0, y_n = 1, y_0^{(i)} = y_n^{(i)} = 0$,其中 $i = 1, 2, 3 \dots$,其上限与多项式的项数一致。显而易见,多项式阶次越高,边界越“光滑”,瞬态波动则越小。如果运行速度超过设计速度20%以上,则瞬变现象将非常坏。一般要求 $\omega_d > 1.1 \omega$ 。

当系统参数改变时,曲线的幅值 \bar{A} 也将变化。图6-46表示4-5-6-7多项式规律下 \bar{A} 值随质量变化的情况。通过数据处理发现,

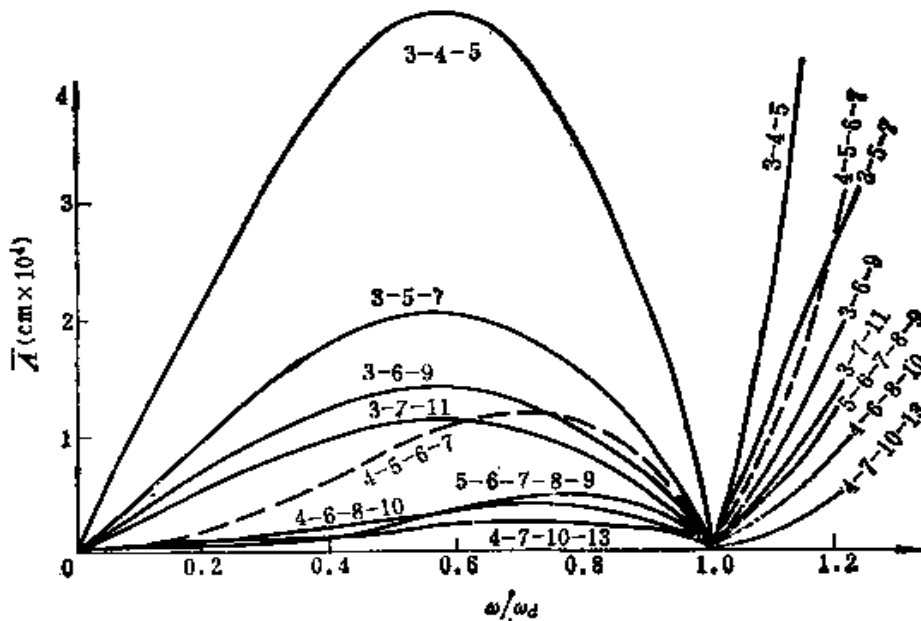


图6-45 各种多项式规律下初幅值随频率变化的曲线

$$\left. \frac{\bar{A}_i}{\bar{A}_0} \right|_{k, \omega, \omega_d = \text{常数}} = \left(\frac{m_i}{m_0} \right)^2 \quad (6-54)$$

i 表示选择的第 i 种与原始质量 M_0 不同的质量的标号。

用同样的办法，可求得瞬态幅值随刚度变化的关系式为

$$\left. \frac{\bar{A}_i}{\bar{A}_0} \right|_{m, \omega, \omega_d = \text{常数}} = \left(\frac{k_i}{k_0} \right)^{-2} \quad (6-55)$$

当设计速度变化时，有

$$\left. \frac{\bar{A}_i}{\bar{A}_0} \right|_{m, k, \omega/\omega_d = \text{常数}} = \left(\frac{\omega_{d_i}^2}{\omega_{d_0}^2} \right)^2 \quad (6-56)$$

把上述关系式综合起来，最后得

$$\left. \frac{\bar{A}_i}{\bar{A}_0} \right|_{\omega/\omega_d = \text{常数}} = \left(\frac{m_i k_0 \omega_{d_i}^2}{m_0 k \omega_{d_0}^2} \right)^2 = \left(\frac{\mu_{m_i}}{\mu_{m_0}} \right)^2 \quad (6-57)$$

对于4-5-6-7多项式的上述结果是通过计算机对式(6-51)反复求解得到的。特解则被用来求式(6-53)所给齐次解的系数。为此，可以不要解式(6-51)求整个列矢量，只要求其中 a_0 与 a_1 即可。为了求得普遍性结果，今作以下简化假定：

(1) 阻尼很小。计算表明阻尼对初始自由振动的幅值影响不大，为了分析方便，令 $c_i = 0$ ，这意味着 $\xi_i = 0$ 。

(2) $k_i \ll k$ 。这对常见凸轮系统均成立。因此， ξ_0 简化成 $\xi = \frac{k}{m\omega^2}$ 。

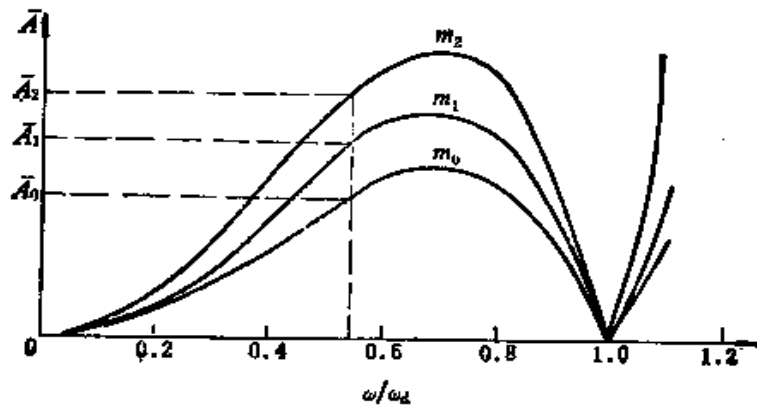


图6-46 不同质量的瞬态幅值

(3) $\omega^2 \ll \omega_{n0}^2$ 。对于设计良好的凸轮系统，这个假定一般是符合实际情况的。如前所述，设计良好的系统都应满足条件 $\omega_i^2 \ll \omega_{n0}^2$ 。

根据这些假定，用 ξ 遍除式 (6-51)，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/\xi & & 0 \\ & 1 & 0 & 6/\xi & \\ & & 1 & 0 & 12/\xi \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 \right] \begin{pmatrix} 0 \\ (p-1)pc_p \\ (q-1)qc_q \\ \vdots \end{pmatrix}$$

或简记为 $[D]\{X\} = K\{C\}$

式中， $K = \frac{1}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 \right]$ ， $\{X\} = [a_0, a_1, a_2, \dots]^T$ ， $\{C\} = [0, (p-1)pc_p, (q-1)qc_q, \dots]^T$ ， $[D]$ 为左边的 $t \times t$ 矩阵。

将上述方程求解，即对矩阵 $[D]$ 求逆，移至右边得：

$$\{X\} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{t-1} \end{pmatrix} = K[D]^{-1}\{C\} \quad (6-58)$$

式中，

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{\xi} & 0 & \frac{24}{\xi^2} & 0 & -\frac{720}{\xi^3} & \dots \\ & 1 & 0 & -\frac{6}{\xi} & 0 & \frac{120}{\xi^2} & 0 & -\frac{5040}{\xi^3} \\ & & 1 & 0 & -\frac{12}{\xi} & 0 & \frac{360}{\xi^2} & 0 & \dots \\ & & & 1 & 0 & -\frac{20}{\xi} & 0 & \frac{840}{\xi^2} & \dots \\ & & & & 0 & 1 & 0 & -\frac{30}{\xi} & 0 & \dots \\ & & & & & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

对初始条件 $(0, 0)$, 由于 $\bar{a} = 0$, 式 (6-53) 简化成

$$A = -a_0, \quad B = -a_1/\sqrt{\xi}$$

为了求 A 与 B , 只要截取式 (6-58) 的头两列即可:

$$\begin{Bmatrix} -A \\ -B\sqrt{\xi} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \text{的头两列} \begin{Bmatrix} (p-1)p c_p \\ (q-1)q c_q \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{\omega_d}{\omega}\right)^2}{\xi} \right.$$

对于 p, q, r, \dots, t 多项式, 在 $\{C\}$ 矢量中的第一个非零项出现在第 $(p-1)$ 列。对于 4-5-6-7 多项式, 具体结果为

$$A = \left(-\frac{2}{\xi^2} 12c_4 + \frac{24}{\xi^3} 30c_6 \right) \left[\left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 - 1 \right]$$

$$B = \left(-\frac{6}{\xi^{5/2}} 20c_6 + \frac{120}{\xi^{7/2}} 42c_7 \right) \left[\left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 - 1 \right]$$

由 $\xi \approx (\omega_d/\omega)^2$, 一般此值比较大 ($\gg 1$), 因上述方程中只有第一项作用最大。而当 A 与 B 被用于求自由振动幅值时, 只有 A 是最重要的, 即

$$\bar{A} = \sqrt{A^2 + B^2} = f\left(\frac{1}{\xi^2}\right) = f\left[\left(\frac{m\omega^2}{k}\right)^2\right]$$

或对于 ω 保持常数情况, 有

$$\frac{\bar{A}_i}{\bar{A}_0} \Big|_{\omega, \omega_d = \text{常数}} = \left(\frac{m_i k_0}{m_0 k_i} \right)^2 \quad (6-59)$$

如果 ω 与 ω_d 变化, 但 ω_d/ω 保持不变, 则 $[(\omega_d/\omega)^2 - 1]$ 保持常数, A 与 B 则直接受 ω 影响。例如, ω_d 加倍, 则 ω 也加倍, ξ 变成原值的 $1/4$, 但 ξ^2 在 A 的公式中位于分母上, 因此 A 与 ω_d^2 有关, 从而证明了式 (6-57) 的关系。

对于 5-6-7-8-9 多项式, 则有

$$A = \left(\frac{24}{\xi^3} \times 30c_0 - \frac{720}{\xi^4} \times 56c_1 \right) \left[\left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 - 1 \right]$$

$$B = \left(-\frac{6}{\xi^{5/2}} \times 20c_2 + \frac{120}{\xi^{7/2}} \times 42c_3 - \frac{5040}{\xi^{9/2}} \times 82c_4 \right) \left[\left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 - 1 \right]$$

这里, B 的影响比 A 大, 所以有

$$\frac{\bar{A}_i}{\bar{A}_0} \Big|_{\omega, \omega_d = \text{常数}} = \left(\frac{\mu_{n_i}}{\mu_{n_0}} \right)^{5/2} \quad (6-60)$$

推而广之, 对于式 (6-58) 可得普遍关系式为

$$\frac{\bar{A}_i}{\bar{A}_0} \Big|_{\omega, \omega_d = \text{常数}} = \left(\frac{\mu_{n_i}}{\mu_{n_0}} \right)^{p/2} \quad (6-61)$$

式中, p 为具有非零值第一个多项式项的指数。这一关系与图 6-45 所示的结果是一致的。选取 p 值较高的高次多项式运动规律, 能显著地减少瞬态振幅。

为了得到一个平均值来表现系统在升程期间的运动变态情况, 对不同 μ_n 值下的均方根偏差 $\delta_{r.m.s.}$ 进行类似的研究, 发现同样存在着 $\delta_{r.m.s.} \propto \mu_n$ 的这一比例性质。对于一个给定的运动规律和一个特定的速比 $\frac{\omega}{\omega_d}$, 又可得出:

$$\frac{(\delta_{r.m.s.})_i}{(\delta_{r.m.s.})_0} = \frac{\mu_{n_i}}{\mu_{n_0}} \quad (6-62)$$

$\delta_{r.m.s.}$ 随速比 $\frac{\omega}{\omega_d}$ 的变化曲线, 与图 6-46 相似, 当 $\frac{\omega}{\omega_d} \leq 1$ 时, 为抛物线, 可用下式表示

$$\delta_{r,m,r} = K_s \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_d} \right)^2 \right| \quad (6-63)$$

式中, K_s 已由计算机模拟实验近似地确定为

$$K_s = 0.32 \mu_m (y''_{m,ax} - y''_{m,ix}) \quad (6-64)$$

这个公式对于凸轮设计者是一个很有用的工具,因为它可给出选取任意质量、变形、设计速度、运行速度和运动规律时引起的运动偏差的范围大小。

对于双自由度模型的动力学综合,可以得到类似的结果,而且,为了改善动力学品质,希望质量大的构件尽量靠近凸轮布置,弹簧刚度大的构件尽量远离凸轮布置。质量与刚度的分配,以差别大些为好, $m_1 = m_2$ 与 $k_1 = k_2$ 将导致从动系统行为恶化。

第七章 凸轮机构的设计

第一节 几何尺寸及轮廓曲线的设计

前面各章已对凸轮机构的运动学、静力学和动力学进行了全面而系统的分析，为设计凸轮机构奠定了理论基础。但是，设计凸轮机构还包括结构、材料和其他工艺参数的选择或确定等内容。一般说来，凸轮机构的设计步骤可用图7-1所示的框图来表示。

一、设计步骤与内容

1. 确定 θ_s 、 h ，选择或设计从动件运动规律

凸轮机构的转速(ω_s)是已知的，机构速度类型因子 d 的初值可适当给定。控制变量 $f \leq 1$ ，表示这时不进行动力学综合。

自动机械工作机构的循环图设计时，在满足工艺要求的前提下，动程角 θ_s 应尽可能取得大些，冲程 h 或 r_s 应尽可能小些。

从动件的运动规律一般可在前面介绍过的凸轮曲线中选用，只有在不能满足设计要求时，才需自行设计。

2. 从动件系统的设计

从动件系统的设计，主要根据自动机械的工艺要求和总体布局进行，可以选择直动型、摆动型、弧度型、正切型、正弦型、摆杆滑块型、连杆型、转动型等。

直动型与摆动型从动系统前面已作过介绍，前者能直接获得直线移动，但效率不如后者高，因而在可能的情况下应尽量选择摆动从动件系统。

如果工作机构要求直线位移，而与凸轮接触的从动件又要求是摆动从动件，其最简单的从动系统是图7-2所示的弧度型系统。按运动规律运动的直杆位移 s ，经齿条—齿轮副，转变为转角

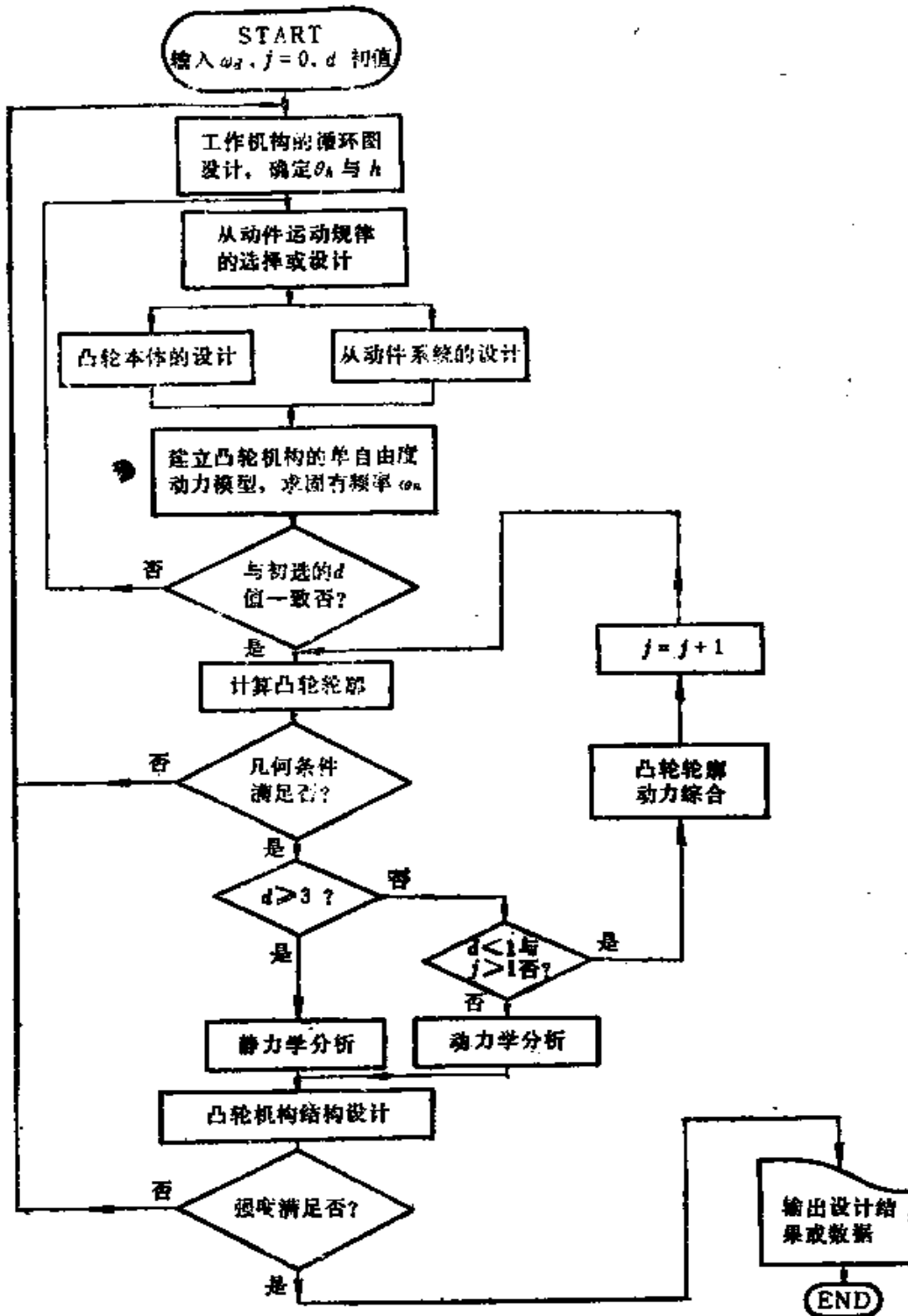


图7-1 凸轮机构设计程序框图

τ ，已知图示杆件尺寸后，即可按摆动从动件公式，得到凸轮轮廓参数。

另一种摆动变直动的从动系统，是图7-3所示的正切型从动系统。由矢量图可见， L_1 由给定的从动件运动规律确定， C_1 已知，故可求得 P_1 ；由于 B_2 与 P_1 只相差一固定的夹角， B_2 也可求得；因凸轮转动中心 O 的坐标已知，由 B_2 与已知的 C_2 ，不难求得计算轮廓坐标的矢量 R_p 。

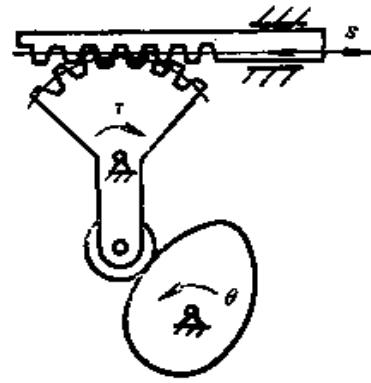


图7-2 刚度型从动系统

如图7-4所示，正弦型从动系统同样可以实现摆动变直动。矢量多边形比前者稍微复杂些。当固定铰链与导轨位置给定后，凸轮轮廓即可由运动规律决定的 L_1 推出。

摆动从动件带动连杆滑块，如图7-5所示，亦可使工作机构直线移动。由矢量多边形 $ABCD$ ， L_1 与 C_1 已知， B_1 与 B_2 的长度已知，可以解得 B 点的位置；再利用图7-6所示的关系，即可求得两个滚子对应的共轭凸轮轮廓。这种结构可实现滚子对轮廓表面的预载调节，从而消除间隙。

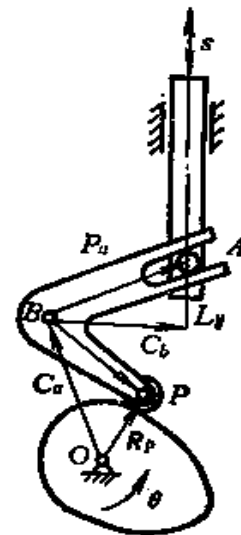


图7-3 正切型从动系统

如果希望凸轮尺寸紧凑，可以采用图7-6所示的能使摆角放大的连杆型从动系统，即摆动从动件的小摆角 ψ_1 经四杆机构放大，获得工作机构的较大摆角 ψ_2 。

为了获得工作机构超过 360° 的转动输出，可以采用图7-7所示的转动型从动系统。图a采用齿轮—齿条机构，输出转角 ψ 的大小取决于杆件的尺寸和小齿轮的节径。图b采用绳索(或钢带)结构，从动绳轮的输出转角大小与杆件的尺寸、绳轮的直径有关。

3. 凸轮本体的设计

凸轮本体设计包括：类型的选择，初步确定基圆半径、中心距（偏置距）、滚子半径等几何尺寸（称为初步设计），作为设计计算的初值。下面以最常用的摆动滚子从动件凸轮机构为例说明几何尺寸初步设计的原则与方法。

(1) 确定基圆半径

基圆半径是决定凸轮尺寸大小的基本参数。在保证压力角

不超过允许值的前提下，一般应尽可能使基圆半径小一些，以便使结构紧凑。如第三章第二节中所述，基圆半径可由式(3-65a)估算，即

$$r_b = \frac{hV_m}{\theta_s \tan \alpha_p} - \frac{h}{2}$$

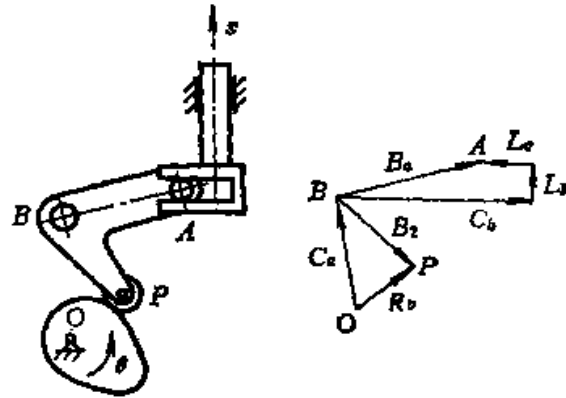


图7-4 正弦型从动系统

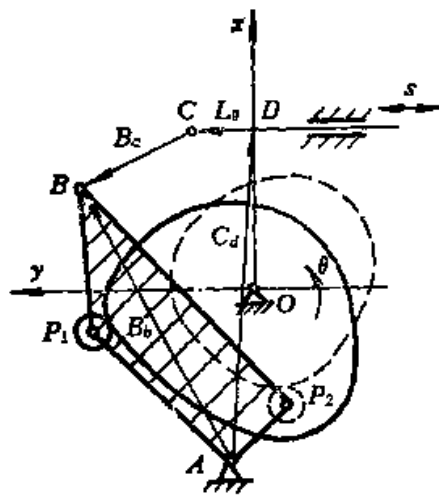


图7-5 摆杆滑块型从动系统

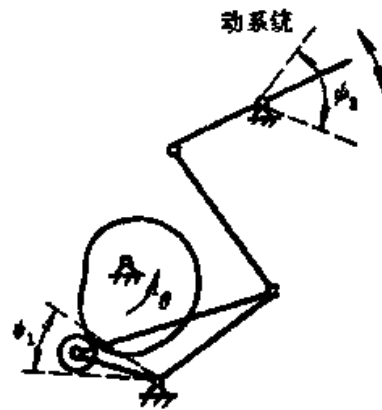


图7-6 摆角放大型从动系统



图7-7 转动型从动系统

a) 齿轮—齿条机构 b) 绳索结构

对于摆动从动件，可以用在一个行程中，滚子中心所划过的弧长 r, τ 代替上式中的 h 。式中 α_p 是压力角的允许值。 α_p 因设计目标不同，可以取不同的值。

(2) 最大压力角允许值 α_p 的确定

若以凸轮尺寸（基圆半径）为最小作为目标函数，则要求选择较大的压力角。但是，压力角不能选得太靠近自锁压力角 α_s 。因为当 $\alpha \rightarrow \alpha_s$ 时，力增大系数 $\varepsilon \rightarrow \infty$ ，接触反力 $P \rightarrow \infty$ ，轮廓与导轨等处的磨损急剧增大，效率很低，甚至出现卡死现象。因此，在选择压力角时，存在着一个合理的极限值，定义为允许压力角 α_p 。

允许压力角应选择在由于凸轮机构制造误差引起的压力角变化 $\Delta\alpha$ ，表面粗糙度或润滑条件波动等引起的摩擦系数相对变化 Δf ，以及由材料强度或寿命裕度所允许的力增大系数相对变化 $\Delta\varepsilon$ 等的范围之内。对应于 α_p 的力增大系数 ε_p ，由第五章所述公式有

$$\varepsilon_p = \frac{1}{\cos\alpha_p [1 \mp (f_1 + f_2)\tan\alpha_p]}$$

当压力角从 α_p 变化成 $\alpha_p + \Delta\alpha$ 时，摩擦系数变化成 $(f_1 + f_2)(1 + \Delta f)$ ，力增大系数则变成

$$\begin{aligned} & \varepsilon_p (1 + \Delta\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\cos(\alpha_p + \Delta\alpha) [1 \mp (f_1 + f_2)(1 + \Delta f)\tan(\alpha_p + \Delta\alpha)]} \end{aligned}$$

由此可推得允许压力角的计算公式为

$$\tan \alpha_p = \frac{(1 + \Delta \varepsilon)[\cos \Delta \alpha \mp (f_1 + f_2)(1 + \Delta f) \sin \Delta \alpha] - 1}{(1 + \Delta \varepsilon)[\sin \Delta \alpha \pm (f_1 + f_2)(1 + \Delta f) \cos \Delta \alpha] \mp (f_1 + f_2)} \quad (7-1)$$

式中的加、减符号选择是：升程时取上面的，回程时取下面的。

表7-1给出了在工程上可能出现的参数变化范围内，允许压力角 α_p 或允许力增大系数 ε_p 的计算结果。

表7-1 按尺寸最小原则的 α_p 与 ε_p 值

$f_1 + f_2$	$\Delta \alpha = 6^\circ$ $\Delta f = 0.5$ $\Delta \varepsilon = 0.5$			$\Delta \alpha = 5^\circ$ $\Delta f = 0.5$ $\Delta \varepsilon = 0.5$			$\Delta \alpha = 5^\circ$ $\Delta f = 0.5$ $\Delta \varepsilon = 0.25$			$\Delta \alpha = 5^\circ$ $\Delta f = 0.25$ $\Delta \varepsilon = 0.5$			$\Delta \alpha = 6^\circ$ $\Delta f = 0.25$ $\Delta \varepsilon = 0.25$	
	升程		回程	升程		回程	升程		升程		升程		升程	
	α_p	ε_p	α_p	ε_p	α_p	ε_p	α_p	ε_p	α_p	ε_p	α_p	ε_p	α_p	ε_p
0.05	65°30'	2.70	—	68°10'	3.08	—	57°30'	2.03	70°10'	3.43	60°10'	2.21		
0.1	69°10'	2.35	—	61°50'	2.60	—	49°30'	1.74	65°30'	3.09	54°30'	2.00		
0.2	47°50'	1.92	80°	59°10'	2.06	77°30'	38°30'	1.47	56°40'	2.62	14°40'	1.76		
0.3	38°30'	1.70	69°	40°50'	1.78	66°	27°30'	1.35	48°40'	2.31	36°30'	1.60		
0.4	31°30'	1.56	60°	33°30'	1.64	57°30'	21°30'	1.33	42°	2.14	30°	1.50		
0.5	25°50'	1.48	53°	27°10'	1.54	50°30'	16°50'	1.24	36°10'	1.95	24°40'	1.43		
0.6	21°10'	1.40	47°	23°10'	1.47	45°	13°10'	1.20	31°10'	1.84	20°20'	1.37		

若以凸轮机构的平均效率最大值 η_m 作为目标函数，如前所述，允许压力角可通过取 $\alpha_p = 1.2\alpha_{\eta_m}$ ，代入效率计算公式得到。对于基型凸轮情况，利用它们的计算公式，可以得到按效率最大原则的允许压力角 α_p 随不同摩擦系数组合值变化的曲线，如图7-8所示。对于其它情况，也可得到类似的结果。

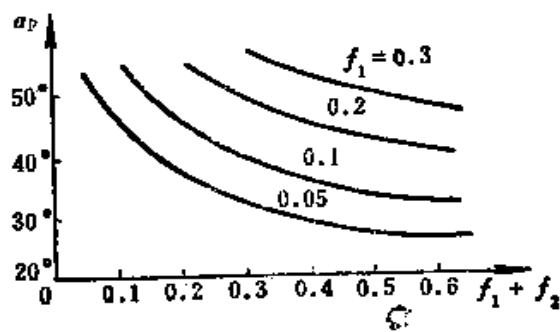


图7-8 按效率最大原则的允许压力角 α_p

(3) 确定中心距 c

摆杆回转中心的位置可由凸轮机构的配置要求确定。它与凸轮轴中心的距离 c 应该足够地大, 以保证凸轮的运转不受妨碍, 一般应有

$$c > r_a + r_r \quad (7-2)$$

式中, r_r 是摆杆回转轴承凸缘的最大外径, r_a 是凸轮的最大外径。

(4) 确定摆杆长度 l_f

为了保证较好的啮合状况, 一般设定凸轮轮廓的划线角 β_k (一个升程或回程的凸轮轮廓曲线所对应的中心角) 与相应的凸轮动程角 θ_k (完成一个升程或回程的过程中, 凸轮所转过的角度) 相等。即应使

$$\beta_k = \theta_k$$

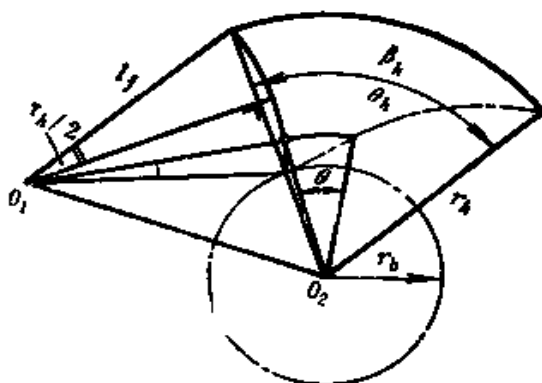


图7-9 摆杆长与中心距的关系

根据这一要求和图7-9所示之几何关系, 可求得摆杆长度, 即摆杆回转中心与滚子中心的距离:

$$\left. \begin{aligned} l_f &= \sqrt{c^2 - r_a r_b} \\ \text{或} \quad l_f &= -r_a \sin \frac{\tau_k}{2} + \sqrt{c^2 - r_b^2 \cos^2 \frac{\tau_k}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

(5) 确定滚子半径 r_f

为了使滚子与凸轮表面保持良好的啮合, 一般滚子半径为:

$$r_f \leq (0.5 \sim 0.8) \rho_{\min}$$

ρ_{\min} 是凸轮理论轮廓 (滚子中心轨迹) 的最小曲率半径的绝对值。但是, 在初步设计完成之前, 计算或估算最小曲率半径是很困难的。简单的方法是根据基圆半径取滚子的初值, 即取滚子半径为:

$$r_f \leq (0.3 \sim 0.4) r_b \quad (7-4)$$

4. 建立凸轮机构的单自由度模型, 判断机构速度类型

为了改善凸轮机构的动力学性能, 从动件系统的刚度应尽量可

能大，质量或转动惯量应尽可能小，而且尽量分布在靠近凸轮的位置。这样，当系统简化为单自由度模型时才能获得较高的固有频率，从而使 d 值尽可能大些，最好使所设计的机构为 $d \geq 3$ 的低速机构类型（参见第一章），以减少复杂的动力分析与综合的计算。对于一般轻载、中低速的自动机械中的凸轮机构，常在选择从动件运动规律之前，利用第一章中介绍的简易的经验法则进行速度类型判别。根据速度类型选择合适的从动件运动规律。

当要设计的凸轮机构属低速或中低速机构时，就不需要进行复杂的动力学分析与综合；对于中、高速，特别是高速凸轮机构，则必须进行动力学分析或综合。

5. 计算凸轮轮廓曲线及其压力角、曲率半径

利用第三章或第四章中介绍的方法，将初步设计确定的运动参数、几何参数输入凸轮轮廓曲线及其压力角、曲率半径计算子程序，就可得到所需要的结果。还可以通过显示器屏幕和绘图仪把凸轮轮廓曲线、压力角、曲率半径分布曲线和从动件运动曲线等显现、记录下来。利用小型计算机或超级微机，还可以在显示器屏幕上再现凸轮及其从动系统的运动。

若计算出来的最大压力角和最小曲率半径超过允许值，就必须调整初步设计的运动参数和几何参数，直到满足要求为止。

6. 动力学分析与综合

若是中速机构 ($1 < d < 3$)，只须作动力学分析；若是高速机构 ($d < 1$)，则还须作凸轮轮廓动力学综合。

7. 静力学分析

对于一般低速凸轮机构 ($d > 3$)，只须按第五章介绍的方法作静力分析。

8. 结构设计（详见后一节）

9. 强度校核

一般滚子从动件凸轮机构需要校核强度的有三处：①从动件滚子销轴，②滚子轴承，③滚子与凸轮轮廓的接触面。

在滚子销轴的直径小于6mm（相应的滚子直径为20mm以下）

时，需要对其进行弯曲强度校核，凸轮轴转速较高时，需要校核滚子轴承的疲劳强度（滚子的转速一般是凸轮转速的数倍）。在一般情况下，只需进行凸轮轮廓表面接触应力的校核，其校核公式可参考第五章第六节，或采用下列公式：

$$\frac{P_{\max}}{\cos \alpha_{\max}} \leq F_p = x b \rho_e \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) [\sigma_H] \quad (7-5)$$

式中， P_{\max} 为滚子与凸轮表面之间的最大压力（从动杆为直动时，其方向为从动杆轴线方向；从动件为摆动时，其方向可近似地看成与从动杆垂直的方向）。在中、高速条件下，主要是动载荷引起的压力； α_{\max} 为最大压力角； F_p 为凸轮表面法线方向允许承载压力； ρ_e 是当量曲率半径，其值由下式确定：

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{1}{r_f} + \frac{1}{\rho_{\min}}$$

（ r_f 为滚子半径； ρ_{\min} 为凸轮轮廓曲线的最小曲率半径，一般是指凸表面曲率半径最小值之绝对值）； b 为凸轮宽度； ν_1 、 ν_2 为滚子与凸轮材料的泊松比（一般钢材取 $\nu = 0.3$ ）； E_1 、 E_2 为滚子与凸轮材料的弹性模量； $[\sigma_H]$ 为许用接触应力（具体数据参见后面的表7-3）。

式(7-5)中，最大压力 P_{\max} 、最大压力角 α_{\max} 和最小曲率半径三个极限值不可能同时出现，所以，一般地说，该式是偏于安全的。

若强度校核不合要求，则须调整尺寸，以满足强度条件。

凸轮机构设计的输出结果，有装配图或零件图、凸轮轮廓加工用的数据表格、纸带等等。

上述方法是在以工程经验与理论分析相结合的初步设计的基础上，进行精确的分析、计算。然后进行校核，通过修正、反复运算，求得合乎要求的设计方案。一般地说，这样得到的结果是所谓可行解（即满足最大压力角、最小曲率半径和强度等约束条件的解）。随着计算机辅助设计的发展和凸轮机构理论研究的深化，凸轮机构的优化设计方法正在逐步被推广、应用。本章第四

节将介绍这种方法。

二、设计实例

下面，以PP机构——抓放传送装置凸轮为例，具体说明凸轮的设计过程。

图7-10 a 表示的是自动装配机等自动机械中常用的抓放传送机构，安装在凸轮轴上的两个凸轮分别驱动操作端作水平方向和垂直方向的运动。这两个运动合成后，形成图7-10 b 所示之倒U形的运动轨迹。

该机构的凸轮设计步骤如下：

1. 确定结构

根据工艺要求等条件，确定其结构如图7-11所示。该机构由两个凸轮机构组合而成。一个推动输出工作端作 x 方向的水平运动；另一个使 W 作 z 方向的垂直运动。从动系统中的三个滑动副可以保证 x 、 z 两个方向的运动互相独立。两个从动件系统可以

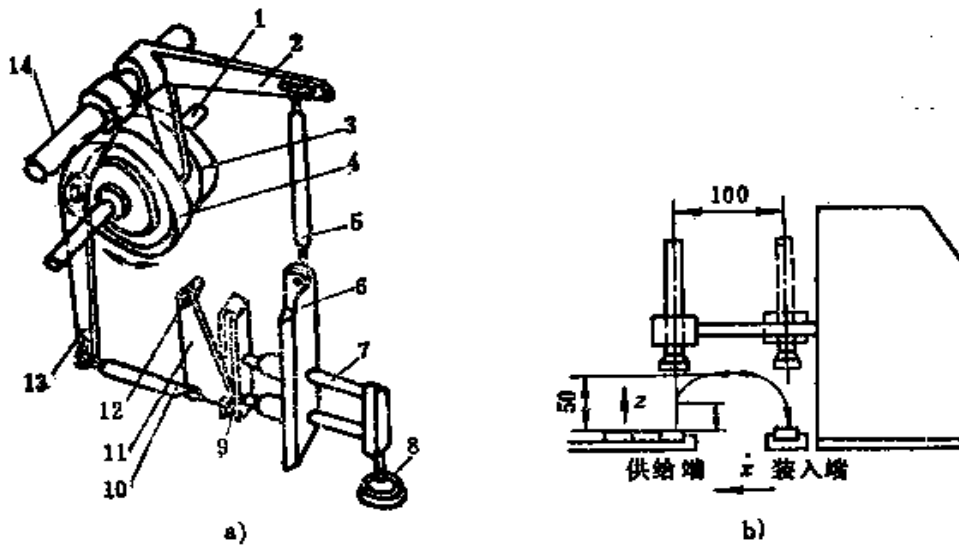


图7-10 抓放传送装置

a) 机构构成 b) 工作状态

1—凸轮轴 2—摆杆 3— z 向凸轮 4— x 向凸轮 5—连杆 6— z 向滑块
7— x 向滑块 8—吸头 9—滑槽 10—连杆 11—摇动板 12—支点
13—摆杆 14—摆杆支点

把行程放大。为了使结构简单一些，两个凸轮都采用沟槽式（图7-11是普通盘形凸轮）。

根据生产要求给定：

行程：x 方向 $h_x = 100\text{mm}$

z 方向 $h_z = 50\text{mm}$

设计速度： $\omega_d = 2\pi\text{s}^{-1}$ （即凸轮转速为60r/min，每秒钟传送一个工件）

2. 确定循环图和动程角 θ_k

设 x 方向和 z 方向的运动完成一个行程的时间分别是 t_{hx} 和 t_{hz} 。相应的凸轮动程角为 θ_{hx} 和 θ_{hz} 。设两个方向取相同的运动规律，而且实际最大加速度也相等，即

$$a_{mx} = a_{mz}$$

由第二章无因次量转换公式(2-1)有：

$$a_{mx} = \frac{h_x}{t_{hx}^2} A$$

$$a_{mz} = \frac{h_z}{t_{hz}^2} A$$

$$\omega_d = \frac{\theta_{hx}}{t_{hx}} = \frac{\theta_{hz}}{t_{hz}}$$

由以上诸式可得以下比例式：

$$h_x : h_z = t_{hx}^2 : t_{hz}^2$$

$$\theta_{hx} : \theta_{hz} = \sqrt{h_x} : \sqrt{h_z} = \sqrt{100} : \sqrt{50} = 1 : 0.7$$

图7-12 a 表示水平和垂直两个方向的运动时间错开时的运动方向示意图。这时运动轨迹为一门字形。在一个运动循环中，x 向要完成两个行程 h_x （③和⑥）；z 向要完成四个行程（①、②、④、⑤）。设在 B 点和 C 点抓放动作都需要相当于凸轮转角 30° 的时间

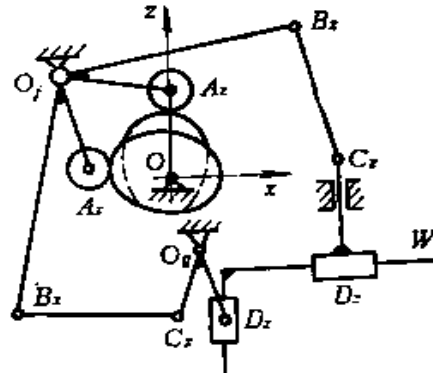


图7-11 抓放传送装置
机构结构示意图

即 $\frac{1}{12} s$)。因此, 应在 300° 凸轮转角内完成上述六个行程。这

样, 就可以求得

$$\theta_{hx} = \frac{300^\circ}{1 \times 2 + 0.7 \times 4}$$

$$\approx 60^\circ$$

$$\theta_{hz} = 60^\circ \times 0.7$$

$$= 42^\circ$$

取整, 定 $\theta_{hz} = 45^\circ$ 。求出 θ_{hx} 、 θ_{hz} , 就可以画出图 7-12 a 所示循环图。为了增大这两个凸轮的动程角, 可让 x 、 z 向的动作有一段时间同时进行, 即采用图 7-12 b 所示循环图。这样, 合成的运动轨迹为图中的倒 U 字形。这时, 取

$$\theta_{hx} = 80^\circ$$

$$\theta_{hz} = 60^\circ$$

3. 选择从动件运动规律

先作速度类型判别。为了运算方便, 采用第一章中介绍的最大速度、加速度经验判别准则。取常用从动件加速度曲线最大值的平均值为 $A_n = 6$ (修正等速度曲线为 8.01, 修正正

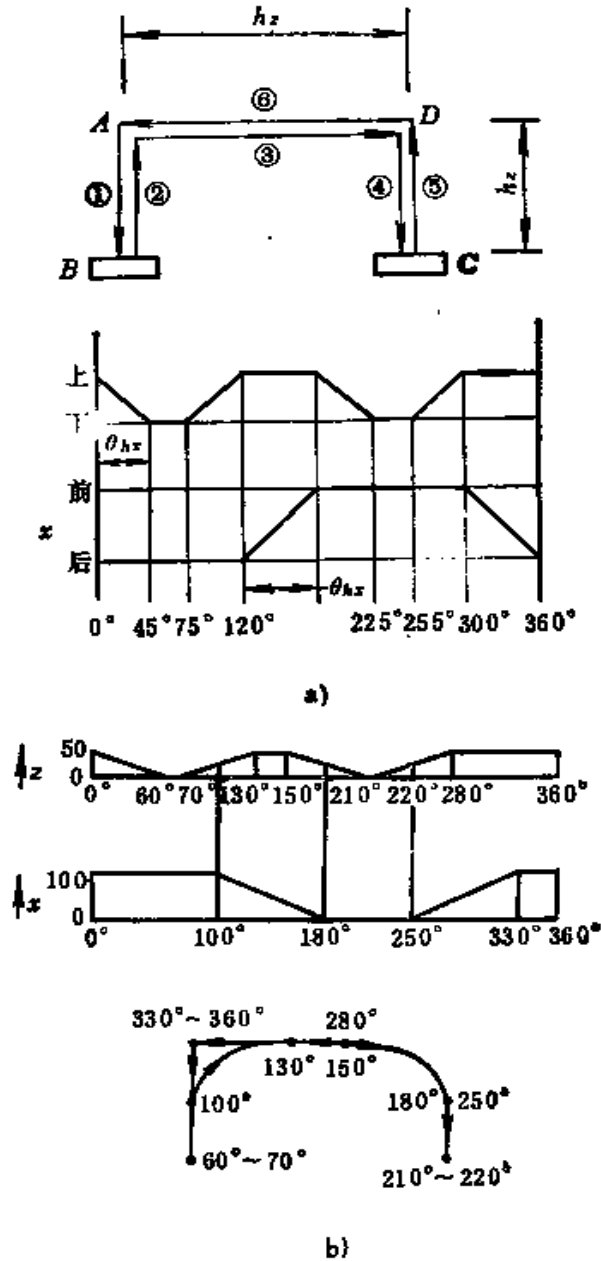


图 7-12 抓放传送装置的循环图与运动轨迹
a) 门字轨迹及其循环图
b) 倒 U 字轨迹及其循环图

弦曲线为5.53, 修正梯形曲线为4.89), 则可先估算出速度较高的 x 方向的实际最大加速度为

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{h}{t^2} A_x = \frac{100}{(80/360)^2} \times 6 \\ &= 12150 \text{ mm/s}^2 \approx 1.24 g \\ &\quad (g \approx 9800 \text{ mm/s}^2) \end{aligned}$$

由第一章加速度经验判别准则可知, 该机构属中、低速类型。又考虑到从动系统较复杂, 刚度不太大等因素, 可选择综合性能好的修正正弦曲线。因为该曲线的 $A_x = 5.53$, 所以从动件实际最大加速度比上述估算值要小一些。

4. 从动系统与凸轮本体几何尺寸的初步设计

(1) 确定基圆半径 r_b

可利用第二章第二节的式(3-65 a)和式(3-65 b)进行估算。式中的行程长度 ($h = l_j \tau_{jx}$) 需要通过从动系统的杆长比由工作端的 h_x 和 h_z 换算出来。设 z 向与 x 向从动系统的杆长比分别为1:2和1:2.5, 即(参看图7-11):

$$O_j A_x : O_j B_x = 1:2$$

$$O_j A_x : O_j B_x = 1:2.5$$

再设 x 向凸轮从动系统中的 $O_x C_x$ 与 $O_x D_x$ 相等。这样, x 向与 z 向的从动件 $O_j A_x$ 与 $O_j A_x$ 端点的行程(圆弧长)约为:

$$r_{jx} \tau_{jx} = \frac{1}{2.5} h_x = 40 \text{ mm}$$

$$r_{jz} \tau_{jz} = \frac{1}{2} h_x = 25 \text{ mm}$$

取最大压力角允许值 $\alpha_p = 40^\circ$, 再代入修正正弦曲线的最大无因次速度值 $V_x = 1.76$, 就可以由式(3-65 a)、(3-65 b)估算出两个凸轮的允许最小基圆半径

$$r_{bx} = \frac{40 \times 1.76}{(80/180) \pi \tan 40^\circ} - \frac{40}{2} \approx 40 \text{ mm}$$

$$r_{bz} = \frac{25 \times 1.76}{(\pi/3) \tan 40^\circ} - \frac{25}{2} \approx 37.5 \text{ mm}$$

凸轮理论轮廓的最大矢径的近似值为

$$r_{Ax} = r_{bx} + r_{jx} \tau_{Ax} = 40 + 40 = 80 \quad \text{mm}$$

$$r_{Az} = r_{bz} + r_{jz} \tau_{Az} = 37.5 + 25 = 62.5 \quad \text{mm}$$

考虑到凸轮轴应有足够的刚度，可取其直径为45mm左右。再考虑到滚子半径，则理论轮廓的基圆半径应不小于55⁶mm。这两个凸轮装在同一根轴上，可以考虑取同样的最大矢径 r_A ，具体数据确定如下：

$$r_{bx} = 55 \text{ mm}, \quad r_{Ax} = 95 \quad \text{mm}$$

$$r_{bz} = 70 \text{ mm}, \quad r_{Az} = 95 \quad \text{mm}$$

再加上滚子半径和凸轮外缘的壁厚，确定两个沟槽凸轮的外圆柱面（毛坯）的直径为240mm。

（2）确定摆杆长度与从动系统其他尺寸

先确定凸轮中心和摆杆回转中心的距离 c 。凸轮的最大回转半径是120mm，再加上摆杆的心轴和凸缘的尺寸，设定

$$c = 180 \quad \text{mm}$$

由式(7-3)可算出两个凸轮摆杆的长度：

$$l_{jx} = \sqrt{c^2 - r_{bx} r_{Ax}} = \sqrt{180^2 - 55 \times 95} \approx 165 \quad \text{mm}$$

$$l_{jz} = \sqrt{c^2 - r_{bz} r_{Az}} = \sqrt{180^2 - 70 \times 95} \approx 160 \quad \text{mm}$$

再由前面设定的杆长比可得：

$$O_1 B_x = 165 \times 2.5 \approx 410 \quad \text{mm}$$

$$O_1 B_z = 160 \times 2 \approx 320 \quad \text{mm}$$

为了提高连杆的传动效率，应尽可能使推杆 $B_x c_x$ 与 z 轴的方向一致；连杆 $B_x c_x$ 与 x 轴方向一致。另外，在工作端 W 的实际位移为

$x = \frac{1}{2} h_x$ 时， $O_1 B_x$ 最好处于水平位置； x 方向的实际位移 $x =$

$\frac{1}{2} h_x$ 时， $O_1 B_z$ 杆最好处于垂直位置。由此，可以确定 $\angle B_x O_1 A_x$

和 $\angle B_z O_1 A_z$ 的大小。从动件系统的其他尺寸可由已确定的尺寸的情况决定。具体数据见表7-2。

（3）确定滚子半径 r_f

表7-2 抓放传送机构初步设计尺寸

尺寸类别 \ 凸轮类别	x 向的凸轮	z 向的凸轮
凸轮外径	240mm	240mm
轴径	45mm	45mm
滚子半径 r_f	15mm	15mm
行程 h	100mm	50mm
最大矢径 r_h	95mm	95mm
基圆半径 r_b	55mm	70mm
动程角 θ_k	80°	60°
杆长比	1:2.5	1:2

考虑到该机构的速度比低速机构略高一些,故应尽量使从动系统质量小一些。由式(7-4),取

$$r_f \leq 0.3r_b$$

取二凸轮基圆半径中的小者,即x方向的凸轮基圆半径 $r_b = 55\text{mm}$,代入上式得

$$r_f \leq 16.5 \text{ mm}$$

取 $r_f = 15\text{mm}$ 。z方向凸轮亦取同样的值。

(4) 计算凸轮轮廓曲线及其压力角、曲率半径

将以上初步设计的数据输入凸轮轮廓计算子程序(参见第三章图3-10),即可得到计算结果(包括刀具中心轨迹)。

由于两个凸轮输出端W与凸轮之间各有一个摆杆滑块机构(z方向)和正弦一四连杆串接机构(x方向),在调用凸轮轮廓计算子程序之前,先要调用从动件系统计算子程序,将输出端W的运动参数转换为凸轮摆杆

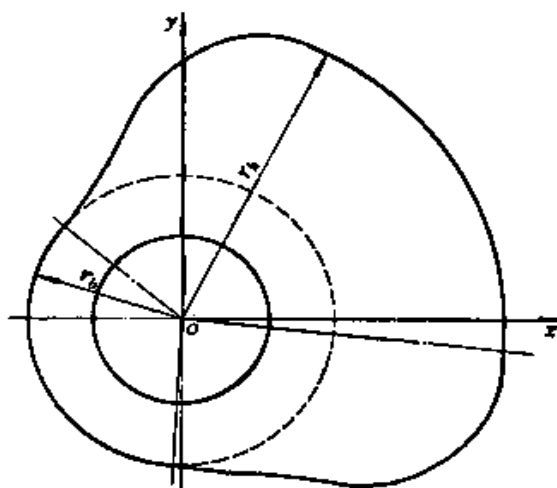


图7-13 x方向凸轮的内轮廓曲线
坐标及其压力角与曲率半径

O_1A_1 、 O_2A_2 的运动参数。

(5) 校核

校核曲率半径、压力角和强度，初步设计符合要求。

图7-13是输出结果的一部分。 x_p 、 y_p 是 x 方向凸轮的实际轮廓(内轮廓)的直角坐标值(升程段)。 AF 、 RC 分别代表压力角与曲率半径。该曲线如图所示。

第二节 结构设计

自动机械中的凸轮机构结构设计应满足工艺要求，能实现预定的运动，能承受工作中连续载荷的作用，尺寸紧凑而符合整机的安装要求，易于加工与装配，而且成本低、寿命长。凸轮机构不象齿轮机构，市场上很少有系列产品出售。因为各种自动机械有各自的专门使用条件，凸轮机构很难通用化、标准化或系列化。只有某些间歇分度凸轮机构有系列产品出售，其他凸轮机构均需根据具体要求进行设计。因此，下面只能对凸轮机构的结构设计提出一些通用原则。

一、平面凸轮

平面凸轮本体的基本形状可分为整体式与组装式两种。中、小型中、高速凸轮机构的凸轮，多采用整体式(图7-14 a)，它具有加工易，精度高和刚度好等优点。为了提高装配精度，减少端面跳动，有的盘形凸轮带有轮毂(图7-14 b)。对于大型低速凸轮机构的凸轮，或者在要求经常调整轮廓形状的场所，常常采用装配式凸轮。图7-14 c所示结构，通过对接盘形凸轮的相对转动一定角度，可以延长或缩短停留段。图7-14 d所示组合结构，轮毂用铸铁或普通碳钢制造，凸轮外缘用合金钢，可以降低大型凸轮的造价。图7-14 e所示结构，可以调整轮廓。

凸轮在轴或轮毂上的固定方式有图7-15所示各种结构。对于精度要求不高的重载情况，可以采用图7-15 a所示键固定方式。这种固定方式简单可靠，安装方便。许多自动机中，常常是在装配时调整好凸轮位置后，采用如图7-15 b所示的配钻定位销。对

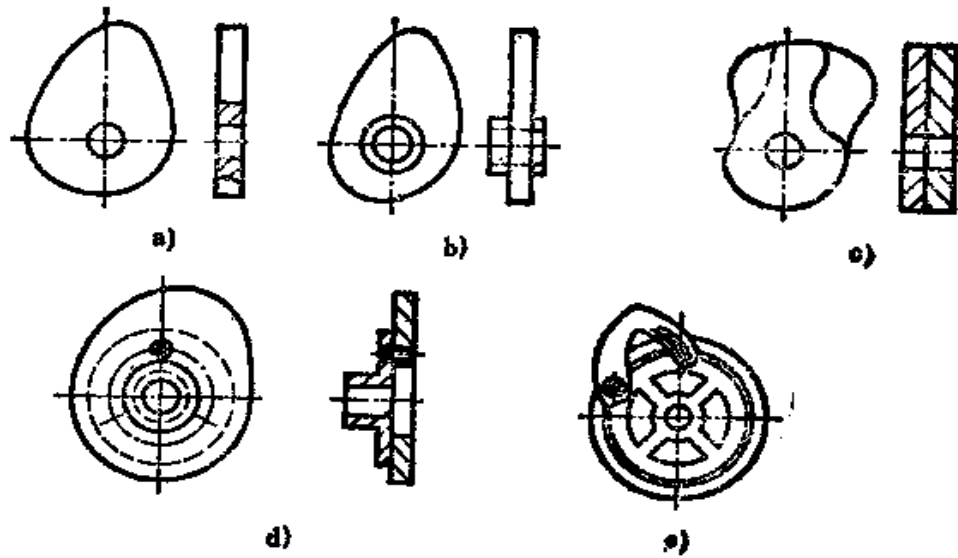


图7-14 平面凸轮的基本形状

a) 无轮壳 b) 有轮壳 c) 可调停留段 d) 组合式 e) 可调轮廓

于精密凸轮，需采用图7-15 c 所示无键锥孔摩擦连接结构，锥孔的锥度一般为1:12。这样，可以通过松开压紧螺母，任意调整凸轮位置而不使轴受损伤。另一种无键连接结构为如图7-15 d 所示的剖切式，靠螺钉把开口轮壳紧固在轴上；轻载高精度凸轮的开口应小些（0.2~0.4mm）；重载凸轮的切口可大些，但会在凸轮副上产生边缘应力。对于特轻载荷情况，如控制微动开关用的凸轮，可以采用7-15 e 或 f 所示顶丝或鞍形压块结构。为了在不卸下凸轮轴的情况下快换凸轮，可以采用图7-15 g 所示的带缺口的凸轮结构，松开压紧螺母，即可直接更换凸轮。对于轴端的凸轮快换结构，可采用图7-15 h 所示细齿联轴器结构，能传递较大的转矩。

象内燃机上的配气凸轮轴那样，把许多凸轮与轴制成一个零件的情况，在自动机械中极为少见。

自动机械中用得较多的一种结构是盘形槽凸轮。它是利用从动滚子在槽中运动来保证机构的强制运动。它不靠弹簧封闭，属于几何封闭的一种型式，具有紧凑、价廉等特点。但是，正如前

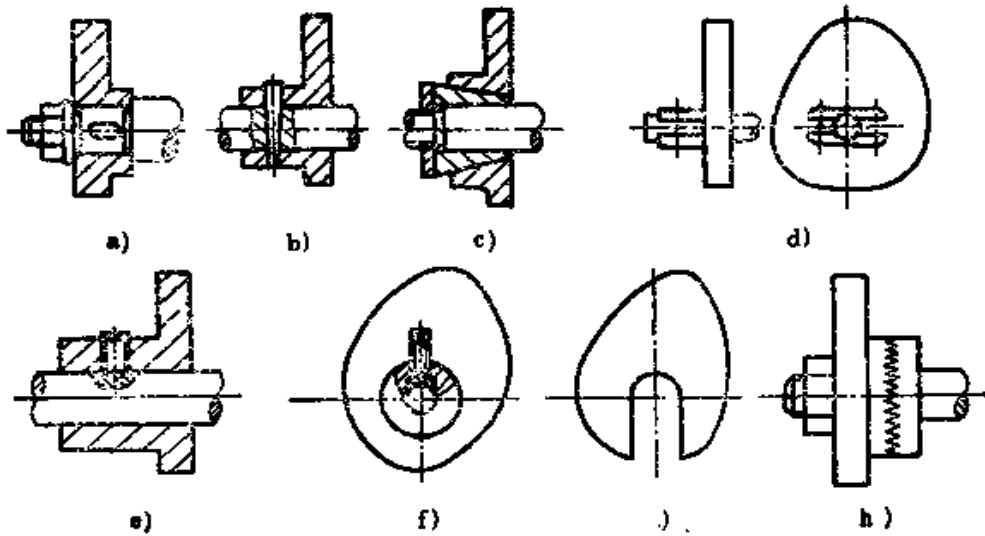


图7-15 凸轮在轴上的固定型式

a) 键 b) 销 c) 锥面 d) 剖切 e) 顶丝
f) 鞍形压块 g) 缺口 h) 齿形联轴器

面分析过的那样,当运动的加速度反号时,滚子与凸轮轮廓的接触点将从一侧横向冲到另一侧,不但会在这个部位附近产生冲击振动,而且因为变换接触点时一定会受到制动,并在相反方向给另一侧轮廓以加速度,从而使两者之间产生相对滑动摩擦,加剧磨损。上述情况可从图7-16 a 表示的滚子与两侧轮廓的线速度分布看出。通常,滚子上侧表面的相对线速度 v_r 与轮廓线速度 v_c 方向相反,绝对速度差值约为 v_c 的两倍。所以,滚子与槽之间必须留有一定间隙,常用的配合为 $\frac{D7}{d7}$ 。为了减少磨损,不但间隙不能过大,还要充分润滑。由于长期运行,随着磨损的加剧,间隙也随之增加,并使运转性能急剧恶化。有些自动机械中,常用图7-16 b 所示双滚子偏心销轴结构。当间隙增大后,能随时调整偏心销轴,使滚子与槽之间的配合间隙保持在合适的范围内,以减小横越冲击。但是,这种结构的销轴悬臂较长,当受力过大或精度不高时,易在凸轮副上产生侧压力。为了减少销轴的悬臂长度,也可采用图7-16 c 所示的双滚子凸缘凸轮结构。

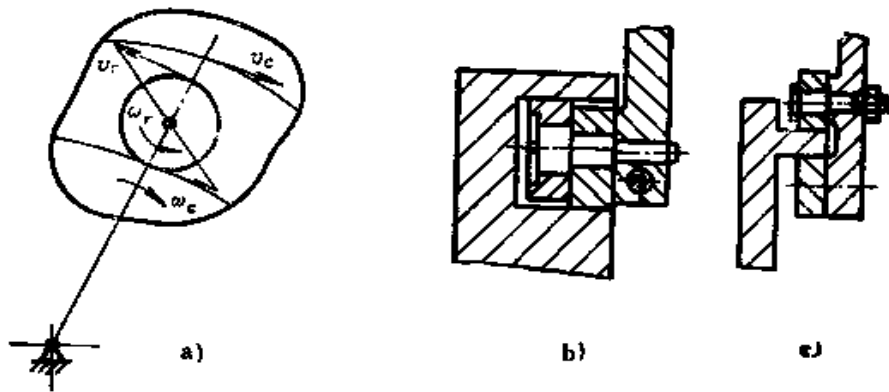


图7-16 盘形凸轮的从动滚结构型式
a) 速度分布图 b) 双滚结构 c) 凸缘凸轮

盘形凸轮的另一种几何封闭型式，是由两个或三个相互固定连接的盘形凸轮构成共轭结构，具有相互并列的内或外凸轮轮廓。这种凸轮结构要求装配精度较高，不能用键联接，最好采用图7-15所示的无键固定方案。共轭凸轮结构虽然制造成本要高些，但因为可以通过调整凸轮轴与从动件摆心之间的中心距来施加预载，能完全消除滚子与轮廓间的啮合间隙，运转中的冲击振动与磨损现象比槽凸轮大为减少，因而在自动机械中的应用日益广泛。

二、空间凸轮

第一章中曾指出，空间凸轮包括圆柱凸轮、鼓形凸轮、端面凸轮和曲面凸轮等型式。

圆柱或鼓形凸轮均为几何封闭型式，与平面凸轮相似，可分为槽凸轮和凸脊凸轮两种型式（图7-17 a、b）。常见鼓形凸轮（图7-17 c）多为凸脊凸轮类型。

对于低速多工况的凸轮机构，为了调整方便，可以采用图7-18 a 所示的镶片式结构，图示为圆柱面的展开图，圆柱上有许多螺孔，镶片可按循环图要求，固定到相应的位置。如果只要求在两种轮廓之间进行切换，速度也较高，则可采用图7-18 b 所示的结构。两个从动滚子只有一个与其中的一个轮廓啮合；切换是靠

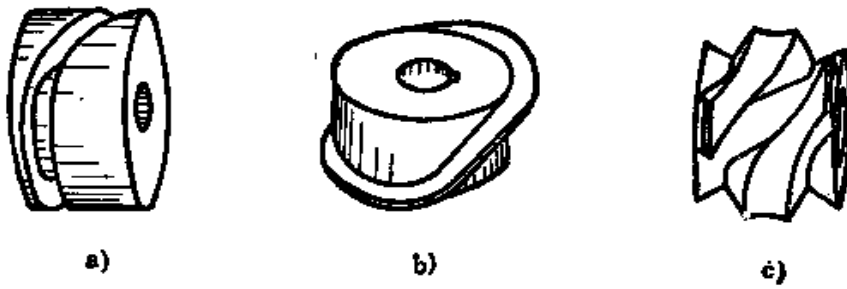


图7-17 圆柱凸轮与鼓形凸轮

a) 槽凸轮 b) 凸脊凸轮 c) 鼓形凸轮

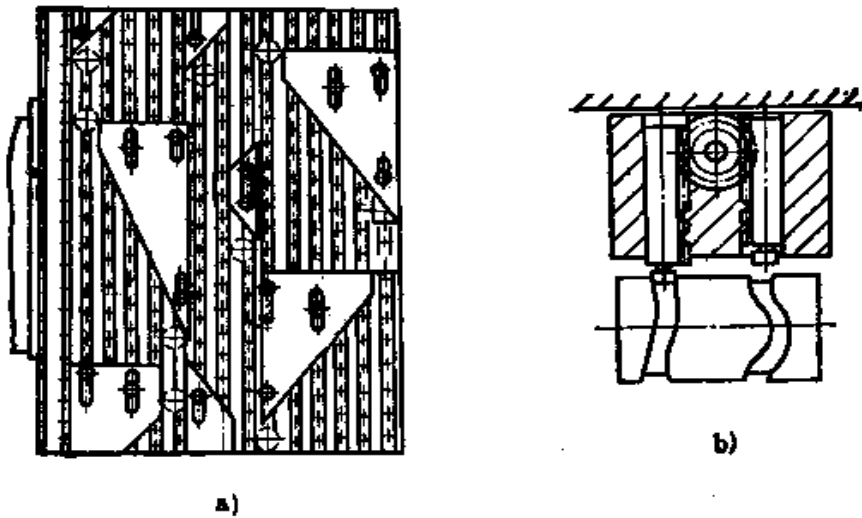


图7-18 可调圆柱凸轮结构

a) 镶片式 b) 双轮廓切换式

转动齿轮，带动齿条，使另一滚子与另一轮廓啮合。

有的自动机械，为了紧凑和节省材料，将圆柱凸轮与端面凸轮安排在一个圆柱体上，如图7-19所示。

三、从动件

作为自动机械的从动件，可分为直动杆和摆杆。分度机构的分度盘是摆动从动杆的一种特殊情况。从动件除受拉、压应力外，还常常受弯矩作用，因此必须具有足够的抗压或抗弯刚度。构成从动系统的某些连杆等环节，应便于调节，以适应工艺变化的可调要求。图7-20给出了一台自动包装机推料机构的凸轮一

从动件系统的结构图。当槽凸轮 1 作等速回转时，摆动从动杆 2 绕支点 A 来回摆动，经连杆 4，牵引摆杆 5 绕支点 B 来回摆动。这样与其端点相连的推板就作左右移动。调整连杆 4 上的指示座 9 和调节螺母 8，即可放大或缩小推板 6 的来回平移行程的大小，以适应不同包装规格的变化要求。

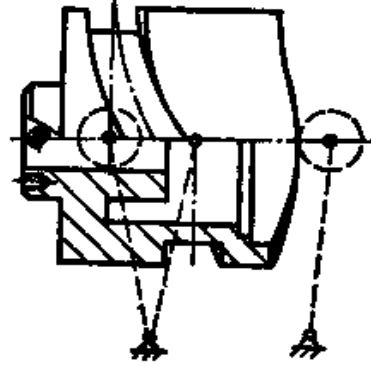


图7-19 圆柱与端面组合
凸轮结构

从动杆上的滚子形状可以是圆柱形、鼓形、锥形、滚针轴承或球轴承。前三种属于滑动轴承型，造价低、空间小，但要注意充分润滑和轴向磨损。后两种属于滚动轴承型，适于中、高速机构，耐冲击，摩擦系数小，但保养不便，尺寸大，造价高。图7-21给出了几种滚子与销轴的典型结构。

图7-21 a 为常见的圆柱滚子；图7-21 b 为适合槽凸轮的圆柱滚子；图7-21 c 为圆柱槽凸轮用的锥滚，这种形状能减少因轮廓圆周速度沿径向变化产生的速度差引起的磨损；图7-21 d 与 e 为两种球轴承作滚子的结构；图7-21 f 为增加滚子宽度的一种组合结构；图7-21 g 为以夹布胶木作外圈的滚针轴承结构。

经验表明，滚子与凸轮轮廓之间很容易出现相对滑动，引起严重的磨损。为了保证图7-22所示滚子在凸轮表面的纯滚动（参考图5-4），其条件应为

$$F_f \leq f_1 N \quad (7-6)$$

其中，牵引力 F_f 产生的牵引力矩 $F_f r_0$ ，应与反力 P 产生滚动摩擦力矩 $P k \cos \mu_{12}$ 、转动惯量为 J_0 的滚子的惯性力矩 $J_0 \epsilon_0$ （ ϵ_0 为滚子的角加速度）、以及外载 F 在内孔上产生的摩擦力矩 $F r_f$ 等三个阻力矩相平衡，则有

$$F_f = \frac{P k \cos \mu_{12} + J_0 \epsilon_0 + F r_f}{r_0}$$

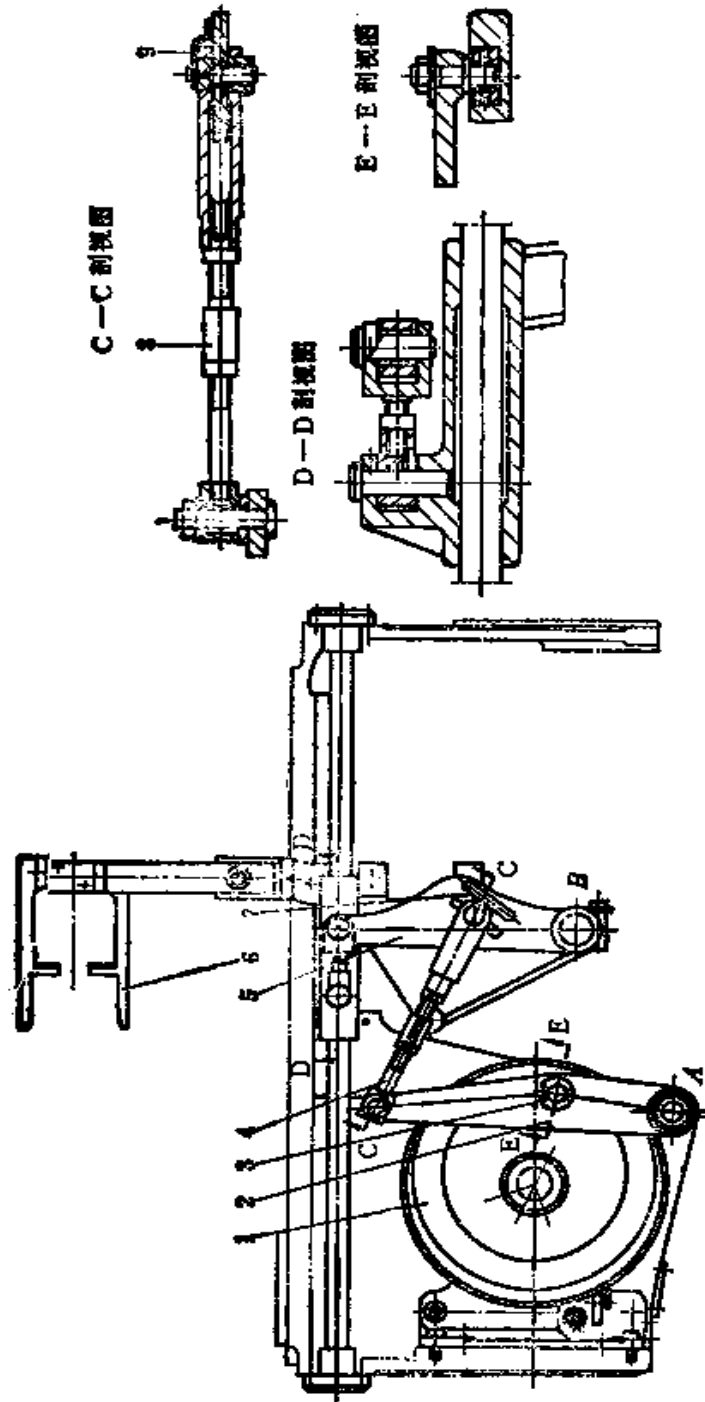


图7-20 典型凸轮—从动杆系统结构图

1—槽凸轮 2、5—压杆 3—滚子 4—连杆 6—推板 7—标尺 8—调节螺母 9—指示座

式中, y 为滚子中心 Q 的位移, r_b 为理论轮廓的基圆半径。

接触点 A 的切线速度为

$$v_A = \overline{AM}\omega = \omega(\overline{MQ} - \overline{AQ}) = \omega[(r_b + y)\cos\alpha - r]$$

此速度应等于滚子的周向速度, 于是可以得到滚子的角速度为

$$\omega_0 = \omega \left(\frac{r_b + y}{r_0} \cos\alpha - \frac{r}{r_0} \right) \quad (7-8)$$

对时间微分, 可得滚子的角加速度为

$$\epsilon_0 = \frac{d\omega_0}{dt} = \omega^2 \left(\frac{\cos\alpha}{r_0} \frac{dy}{d\theta} - \frac{r_b + y}{r_0} \frac{d\alpha}{d\theta} \sin\alpha - \frac{1}{r_0} \frac{dr}{d\theta} \right) \quad (7-9)$$

其中,
$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \left(\frac{\cos\alpha}{r_b + y} \right)^2 \left[(r_b + y) \frac{d^2y}{d\theta^2} - \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{(r_b + y) \frac{dy}{d\theta} - r_0 \frac{dy}{d\theta} \cos\alpha + (r_b + y) r_0 \frac{d\alpha}{d\theta} \sin\alpha}{[(r_b + y)^2 + r_0^2 - 2(r_b + y)r_0 \cos\alpha]^{1/2}}$$

由上述分析可见, 滚子的纯滚动条件除了与滚子在凸轮轮廓上的滚动系数 k 、摩擦角 μ_{12} 、滚子半径 r_0 、滚子转动惯量 J_0 、滚子与轮廓的接触反力 P 、以及滚子与其销轴间的摩擦圆半径 r' 等参数有关之外, 还与滚子的角加速度 ϵ_0 有关。 ϵ_0 值又取决于基圆半径 r_b 、滚子半径 r_0 和凸轮曲线 $y(\theta)$ 。

第三节 凸轮机构的摩擦学问题

一、油膜厚度分析

前面提到, 造成凸轮机构丧失良好工作性能的主要原因是接触应力过大引起的磨损。当然, 产生磨损的原因是十分复杂的, 与材料特性、材料选配、润滑状况和运行条件等都有关系。实际上, 就是接触应力本身, 也与由前面的赫兹公式计算的理论结果有很大区别。如图7-23所示, 由于表面粗糙度的影响, 实际的接触压力与等效条件下的赫兹压力有十分明显的差别, 不仅微观压力分布不同, 平均压力分布也与理论计算值有很大出入。

对于凸轮副来说，工作时接触面之间总存在着一定的润滑油，而且接触面不会停留在一个位置上。这也与赫兹理论论述的前提有很大的差异。按照70年代发展起来的弹性流体动力润滑理论，两个柱体在载荷作用下接触并相对转动时，可能出现图7-24所示的4种状态。轻载时，柱体基本上未变形，中央油膜厚度

$h > 0.25\mu\text{m}$ ，称为流体动力润滑状态。载荷增大时，在很高的接触应力作用下，柱体发生弹性变形，在润滑油出口处有一缩颈，该处为最小油膜厚度

h_{\min} ，一般 $h \approx 0.025 \sim 2.5\mu\text{m}$ ，称为弹性流体动力润滑状态。当载荷进一步增大或不能形成油膜，油膜厚度进一步减少，不足以完全隔离两摩擦表面时，则称为混合或边界润滑状态。

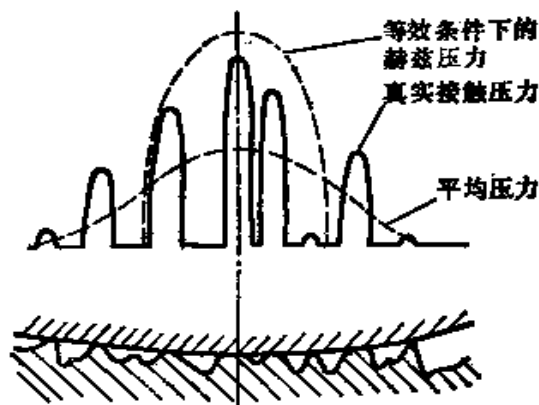


图7-23 接触压力的理论值与实际值比较

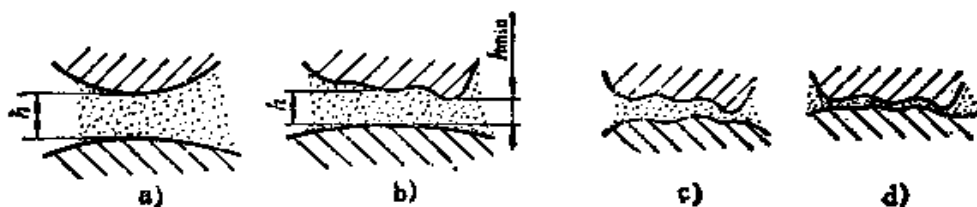


图7-24 润滑状态

a) 流体动力润滑 b) 弹性流体动力润滑 c) 混合润滑 d) 边界润滑

油膜厚度可按弹性流体动力润滑理论公式近似计算求得[73]。对于圆柱—圆柱，最小油膜厚度为

$$H_{\min} = \frac{h_{\min}}{R_c} = \frac{1.6G^{0.6}U^{0.7}}{(W')^{0.13}} \quad (7-10)$$

对于圆柱—平面，有

$$H_{\min} = \frac{2.65G^{0.65}U^{0.7}}{(W')^{0.13}} \quad (7-11)$$

对于球—平面，有

$$H_{\min} = \frac{1.40(GU)^{0.74}}{W^{0.074}} \quad (7-12)$$

式中， $R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ，为半径是 R_1 与 R_2 的两柱体的综合曲率半径；

$G = \frac{2\alpha}{\Delta}$ ， $\Delta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}$ ， α 为润滑油的压力粘度系数；

$U = \frac{\mu_0 u \Delta}{2R_c}$ ， μ_0 为进入接触区域前的润滑油粘度， $u = \frac{u_H}{2}$ ，

称为卷吸速度， $u_H = u_1 + u_2 - 2u_c$ ，称为流体动力有效速度， u_1 、 u_2 为

接触点处的切向分速度， u_c 为接触点的移动速度， $W' = \frac{P' \Delta}{2\rho}$ ，

P' 为单位宽度上的载荷； $W = \frac{P \Delta}{2\rho}$ ， P 为柱体之间的总载荷。

如果两圆柱半径不变，接触点空间位置固定，则 $u_c = 0$ ，

处于稳定状态。但一般为非稳定状态，曲率半径在变化，接触点空间位置不固定，故 $u_c \neq 0$ 。图7-25给出了最小油膜厚度在不同转角 θ 位置时的变化曲线。可见，不同转角和不同转速的 h_{\min} 是不同的。

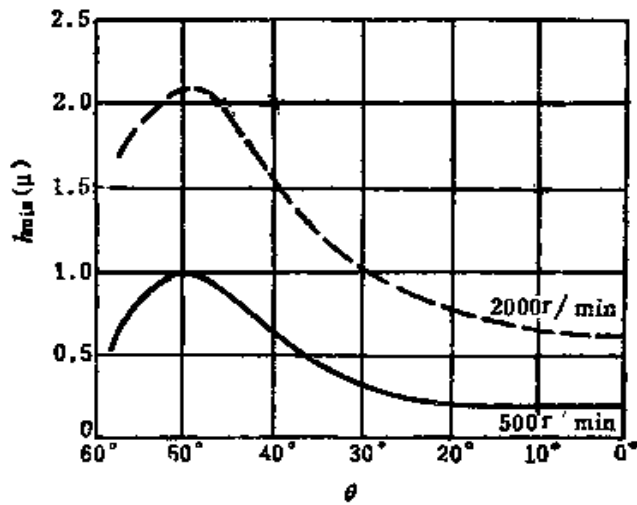


图7-25 不同转速下的最小油膜厚度与凸轮转角关系曲线

实际上，柱体接触表面不是非常光滑的。凸轮表面粗糙度

σ 一般为 $0.3\mu\text{m}$ 。为了便于分析最小油膜厚度对摩擦特性的影响，将决定润滑状态的几何因子定义为膜厚比

$$A = \frac{h_{\min}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \quad (7-13)$$

式中， σ_1 与 σ_2 为两个表面的粗糙度，可用表面实际尺寸算术平均值或均方根值表示。

一般希望膜厚比 A 的数值尽可能大些，如 $A > 4$ ，即认为处于弹性流体动力润滑状态。为此，要求 σ_1 与 σ_2 尽可能小， h_{\min} 尽可能大。前者要求凸轮副的接触表面光洁，所以高速凸轮通常要求其表面粗糙度低于 $0.25 \sim 0.5 \mu\text{m}$ ，从动件则应达到 $0.1 \sim 0.2 \mu\text{m}$ 。这说明凸轮与从动件的最后精加工，以及抛光与跑合等，对凸轮副的寿命具有十分重要的意义。这一要求是针对油膜生成条件提出的，涉及润滑剂、材质、转速和凸轮曲线等许多因素。

凸轮副实际工作时，其接触处的曲率半径、运动情况以及负荷条件都是时刻改变的， h_{\min} 之值亦随之而改变，属于非稳定状态。如果把油膜厚度的改变看作摩擦表面间法向距离的变化，则凸轮副工作时不仅存在由切向运动产生的拖泄承载油膜，同时还存在由法向运动产生的挤压油膜。挤压效应相当于粘性阻尼作用，也就是说，当摩擦表面法向接近时，将润滑油从间隙中挤出，由于润滑油的粘性作用，形成法向承载能力。这样，与外载相平衡的油膜承载能力，除拖泄油膜承载能力之外，还包括法向承载能力。所以，由于挤压效应的作用，实际油膜厚度将大于前述稳态计算结果，因而可以认为稳态计算结果是偏保守的。

根据膜厚计算与表面粗糙度大小，即可分析凸轮失效的几率。凸轮失效型式通常分为擦伤、点蚀与光亮磨损。擦伤出现在润滑不充分和有相对滑动的情况下，导致表面突起接触增多。它是由于表面突起互相咬住，随即擦伤表面，形成局部粗糙；这类破坏的出现与时间无关，出现突然。新零件粗糙度较大时，常常出现这种破坏形式。点蚀则与时间和应力有关，是由表面疲劳引起裂纹扩展形成的。零件表面上的蚀点形状一般是无规律的。提高表面质量和选用优良材质，可以减少点蚀几率。但要注意，改善材质有可能使擦伤几率增大。光亮磨损是介于点蚀与擦伤之间的中间型

表7-3 凸轮与从动滚子的材料匹配及其许用应力值

从动滚子工作 表面材料	布氏硬度 (HB)	凸轮工作 表面材料	布氏硬度 (HR)	$E_0 \times 10^5$ N/mm ²	循 环 次 数					
					10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷	3·10 ⁷	10 ⁸	
表面材料					$[\sigma_j] \times 10^2$ N/mm ²					
工 具 钢 (表面热处理)	480~490	特 铁	140~160	1.34	8.4	6.3	4.6	4.2	(3.8)*	
			160~190	1.38	(9.0)	7.0	5.3	5.0	4.6	
			225~255	1.48	—	8.4	7.0	6.3	(6.3)	
中 碳 钢 (热处理、表面精磨)	480~490	细 铁	290	1.5	14.0	9.8	7.0	5.6	5.6	
			低 碳 钢 (合金中碳钢 (热处理))	130~155	—	16.0	12.0	9.0	8.0	8.0
				270~300	2.3	(15.4)	11.0	8.0	7.0	6.7
工 具 钢 (表面热处理)	580~600	低 碳 钢 (合金中碳钢 (表面氧化处理))	530~590	2.3	—	19.0	17.0	16.0	15.5	
			低 碳 钢 (渗碳、热处理)	—	—	21.7	19.5	19.0	17.5	
				—	—	25.2	22.5	21.0	19.6	
T 10 工 具 钢 (高频淬火)	480~490	与从动滚子相同	—	2.27	(2.0)	21.4	19.0	17.8	16.8	
中 碳 钢 (热处理、表面精磨)	480~490	冷 铸 ZQSn10-1	80	1.45	13.6	9.5	6.8	6.0	6.0	
			220	—	13.0	8.8	6.0	5.0	5.0	
			300	1.5	12.0	8.6	6.3	5.2	5.2	
SAE2515 表面硬化 钢	290	和从动滚子相同	375	—	16.0	10.5	7.0	5.6	5.6	
			290	—	14.0	11.0	8.4	7.4	7.4	
			硬化 深度 mm	2.27	(23.5)	20.7	19.0	18.2	17.5	
铁	290	砂铸 ZQSn10-1	80	1.02	9.8	8.0	6.3	6.0	6.0	

注：括号中的数字建议不用。

式，而且与润滑油等的化学作用有关。

二、材料匹配

凸轮副材质的选配直接与其失效的型式有关。选择材质的基本要求是：具有良好的抗点蚀和抗擦伤性能，同时为了保证高速运转的平稳性，要求振动与噪声尽可能小；此外应考虑由摩擦引起的接触区域的温升。例如，当接触应力较高时，主要失效形式是点蚀，就应选用接触强度高的材质，可以选用淬硬钢和淬硬工具钢匹配。当载荷不大而对平稳性要求较高时，可考虑选用青钢或合成树脂与淬硬钢匹配。若相对滑动严重，则主要失效形式是擦伤，要求材料耐磨，可选用灰铸铁与淬硬钢匹配。表7-3给出了从动滚子与凸轮材料匹配、许用接触应力 $[\sigma_H]$ 的参考数据，设计者可根据具体情况合理选用。

各种材料的热处理技术条件可参考表7-4，表内同时给出了它们的适用范围。近年来蓬勃兴起的表面技术，如等离子喷涂、表面刷镀、真空喷涂等，为提高凸轮工作寿命开辟了新的途径。

表7-4 凸轮材质热处理示例

钢 种	品 种	热 处 理	适 用 范 围
低碳钢	普通结构钢焊 接结构碳素钢锻 件	退 火	低速轻载精度要求 不高的一般凸轮
灰铸铁、球墨铸铁		退火、机加工后软 氮化	大型低精度凸轮
中碳钢	30~55	退火或正火	低速轻载精度要求 不高的一般凸轮
高碳钢	碳素工具钢		
中碳钢	30~55	淬火回火后，在凸 轮表面进行高频或火 焰淬火	中、高速、中载、 中等精度的一般凸轮
合金结构钢	镍铬钢、铬 钢、铬钼钢、液 动轴承钢		
低合金铸铁		凸轮表面冷激	低速轻载

(续)

钢 种	品 种	热 处 理	适 用 范 围
渗碳钢	10~20渗碳用 碳素钢	碳氮共渗、渗碳淬 火	中、高速、低中 载、高精度
中碳铬钢 中碳铬铝钢	铬 钢 铬铝钢	氮化、硫氮共渗、 软氮化	中、高速、低、中 载、高精度
高碳高铬钢	铬钨钢、铬钼 钒钢	氮化	中、高速、中载、 高精度
低合金渗碳钢	铬钢、铬铝钢	氮化处理	中、高速、低、中 载、高精度
合金工具钢 高速钢	铬钨锰钢、钨 铬钒钢	淬火回火后，再进 行一步硫氮共渗、软 氮化	高速重载凸轮 要求耐热性的凸轮
耐磨钢		金属渗入处理	要求耐热性的凸轮
析出硬化型不锈钢		时效处理	要求耐腐蚀性的凸 轮

第四节 凸轮机构的优化设计

图7-1所示的程序框图说明了凸轮机构的设计过程。这种设计的结果——凸轮机构的一组设计参数满足压力角、曲率半径、强度等条件。根据这样一组设计参数所制造的凸轮机构一般能满足我们所预期的工艺要求。因而，这种传统的设计方法可称为可行设计。近年来，有不少学者把优化方法成功地运用到凸轮机构的设计上，得到了比过去的可行设计方法更为满意的结果。

一、优化模型的建立

优化设计首先须设定一个或若干个表征设计对象某些性能的目标函数及其自变量——设计变量。设计变量就是需要确定的基本设计参数。这些设计变量又必须满足一些约束条件。在一定的条件下，应用数学规划方法（即最优化方法）可以寻求到一组最优的设计变量，它可使设定的目标函数最大（或最小），同时满

是约束条件。优化设计的关键在于建立可靠且易解的数学模型，即确定目标函数、设计变量和约束条件。

在凸轮机构的优化设计中，常以凸轮的几何尺寸或重量为最小作为优化目标。但更多的是以凸轮表面与从动件之间的接触应力作为运动学优化目标函数。按这种目标函数优化，不仅可使尺寸或重量减少，还可延长凸轮机构的工作寿命。在动力学优化中，大多采用残留振动作为目标函数，寻求使机构振动或噪声最小的各几何、运动学或动力学参数。

优化问题在数学上可用非线性规划方法求解〔68〕，常常表示成如下的数学形式。

设凸轮机构的优化设计与 n 个设计变量有关，记为

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (\mathbf{X} \in R^n)$$

其中， \mathbf{X} 为 n 维矢量， x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为第 i 个设计变量，它们的可行域是 n 维空间 R^n 。

这些设计变量应满足如下不等式或等式约束条件：

$$g_u(\mathbf{X}) = g_u(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (u = 1, 2, \dots, m)$$

$$h_v(\mathbf{X}) = h_v(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, p < n)$$

同时满足使目标函数

$$F(\mathbf{X}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

为最小的设计变量 \mathbf{X}^* ，即为这一问题的最优解。

通常，优化问题可简化为

$$\begin{cases} \min F(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X} \in R^n \\ g_u(\mathbf{X}) \geq 0 \\ h_v(\mathbf{X}) = 0 \end{cases} \quad (7-14)$$

如果目标函数 $F(\mathbf{X})$ 是设计变量的线性函数，而且约束条件是设计变量的线性等式或不等式，在优化理论中，这类问题称为线性规划问题。

一般情况下，凸轮机构的优化设计都是非线性规划问题，求

解比较复杂。与一般机构优化不同的另一个麻烦问题是，凸轮机构的某些约束条件不仅与上述设计变量有关，还取决于时间或凸轮转角。这一参数记为 θ_2 （常称为状态变量），则约束条件将分成一般约束和参数约束两部分：

$$\begin{aligned} \bar{g}_u(\mathbf{X}, \theta_2) &\geq 0 \quad (u = 1, 2, \dots, m') \\ g_u(\mathbf{X}) &\geq 0 \quad (u = m' + 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (7-15)$$

这两种约束条件的基本差别在于，一般约束的最大值可以立即算出，而参数约束的最大值还与 θ_2 有关，事先是未知的，或者很难算出。例如，压力角或曲率半径的极值不仅与几何参数有关，在几何尺寸确定之后，还随转角的不同而变化。又如，残留振动的大小不仅与凸轮转速有关，当转速不变时，其最大值在不同时刻也是不同的。

有时，很难用一个目标函数来评价凸轮机构的优劣，而要采用两个以上的目标函数，这就是所谓的多目标优化问题。最简单的办法是对多目标逐个寻优，然后在这些优化结果中建立适当的折衷关系。多目标优化设计问题的数学模型一般表示为

$$\begin{aligned} &\text{求 } \mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\ &\text{使} \quad \begin{aligned} &\min F_1(\mathbf{X}) \\ &\min F_2(\mathbf{X}) \\ &\vdots \\ &\min F_p(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (7-16) \\ &\text{受约束于 } \begin{aligned} &\bar{g}_u(\mathbf{X}, \theta_2) \geq 0 \quad (u = 1, 2, \dots, m') \\ &g_u(\mathbf{X}) \geq 0 \quad (u = m' + 1, \dots, m) \\ &\bar{h}_v(\mathbf{X}, \theta_2) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, p') \\ &h_v(\mathbf{X}) = 0 \quad (v = p' + 1, \dots, p < n) \end{aligned} \end{aligned}$$

处理多目标优化设计问题的方法很多，常见的有设计分析法，协调曲线法，主要目标法和统一目标法等，尤以后一种方法应用最广。统一目标法的实质是将式 (7-16) 的问题，转化为求式 (7-14) 的问题，其统一目标函数包括各分目标函数，

即

$$F(\mathbf{X}) = F\{F_1(\mathbf{X}), F_2(\mathbf{X}), \dots, F_r(\mathbf{X})\}$$

为了在极小化 $F(\mathbf{X})$ 过程中使各个分目标函数均匀一致地趋向各自的最优值, 可采用很多办法。常用的有目标规划法, 线性组合法和功效系数法等。

求解优化设计问题的方法很多, 现已有适合不同场合的计算机程序可供选用, 如随机方向搜索法, 复合形法, 可行方向法和惩罚函数法等。应用时可参考有关专著。

二、平板凸轮机构按最小尺寸的优化设计

对于图7-26所示平板凸轮机构, 要求设计参数给出凸轮机构的尺寸为最小, 满足如下两个约束条件

$$\alpha_{\max} \leq \alpha_p$$

和

$$\rho_{\min} \geq \rho_p$$

其中, α_{\max} 为在凸轮转一转的最大压力角; α_p 为预定的许用压力角; ρ_{\min} 为凸轮一转内的最小曲率半径; ρ_p 为曲率半径的许用值。

压力角 α 与曲率半径可表示成

$$\alpha = f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s'_1, \theta_2)$$

与

$$\rho = f_\rho(x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s'_1, \theta_2)$$

式中, x_1, x_2, \dots, x_n 为设计变量; s_1 为从动杆的位移 (线位移或角位移); $s'_1 = \frac{ds_1}{d\theta_2}$, 是从动杆的速度; θ_2 为凸轮的转角,

$$0 \leq \theta_2 \leq 2\pi。$$

这两个函数一般为参数型, 是高度非线性超越函数。为了计算 α_{\max} 与 ρ_{\min} , 必须计算

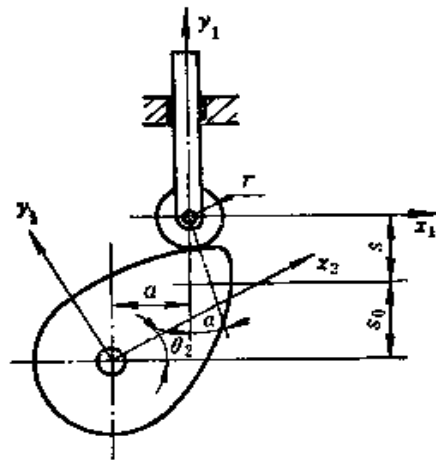


图7-26 直动从动杆平板凸轮机构

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \rho}{\partial \theta_2}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}$$

这些项都很难进行解析计算，因为 α 与 ρ 均为非线性函数，只能用数值法求解，其步骤如下：

(1) 选择一组设计变量的初值，如偏距 a ，从动杆最低点与凸轮轴中心距离 s_0 等。

(2) 设计变量已知后，可用直接搜索法或牛顿—拉普逊法求解方程 $\frac{d\alpha}{d\theta_2} = 0$ 。在每一步叠代中须校核海赛矩阵为正定否。

(3) 由此求得所求 θ_2 对应的压力角最大值 α_{\max} 。

(4) 把 α_{\max} 与允许压力角 α_p 相比较。

(5) 令 ϵ_1 为给定的误差，若 $|\alpha_{\max} - \alpha_p| > \epsilon_1$ ，则重新指定一个或数个设计变量的值，回到第 (2) 步。

(6) 若 $|\alpha_{\max} - \alpha_p| \leq \epsilon_1$ ，则解方程 $\frac{d\rho}{d\theta} = 0$ ；采用与 (2) 类似的方法求得 ρ_{\min} 值。

(7) 若 $|\rho_{\min} - \rho_p| \geq 0$ ，则认为这组设计变量是可行的。若该条件不满足，则修改设计变量并回到第 (2) 步。

(8) 列出不同的设计变量组合，从中选出尺寸为最小的那一组。一般以基圆半径 r_b 作为判别尺寸的主要参数。

在计算过程中，需按工作要求给定从动件的运动规律。首先读入偏距的上下限值 a_u 与 a_l ，计算误差 ϵ_1 ，设计变量的增量 Δa 与 Δs_0 ，压力角与曲率的允许值 α_p 与 ρ_p 等。程序框图如图 7-27 所示。

图 7-28 给出了一个典型的计算结果。图 7-28 a 为压力角 α 的变化曲线，其最大值小于许用值 α_p 。图 7-28 b 为曲率 ρ 的变化曲线，其最小值正好等于许用值 ρ_p ，处于极限状态。图 7-28 c 为凸轮轮廓的优化结果。

对于图 7-29 所示的摆杆平板凸轮机构，其优化设计步骤与直动从动杆情况十分相似。若这时的设计变量是滚子半径 r_f ，基圆半径 r_b ，凸轮轴与摆杆铰链的中心距 c ，摆动从动杆长度 l_f 和摆

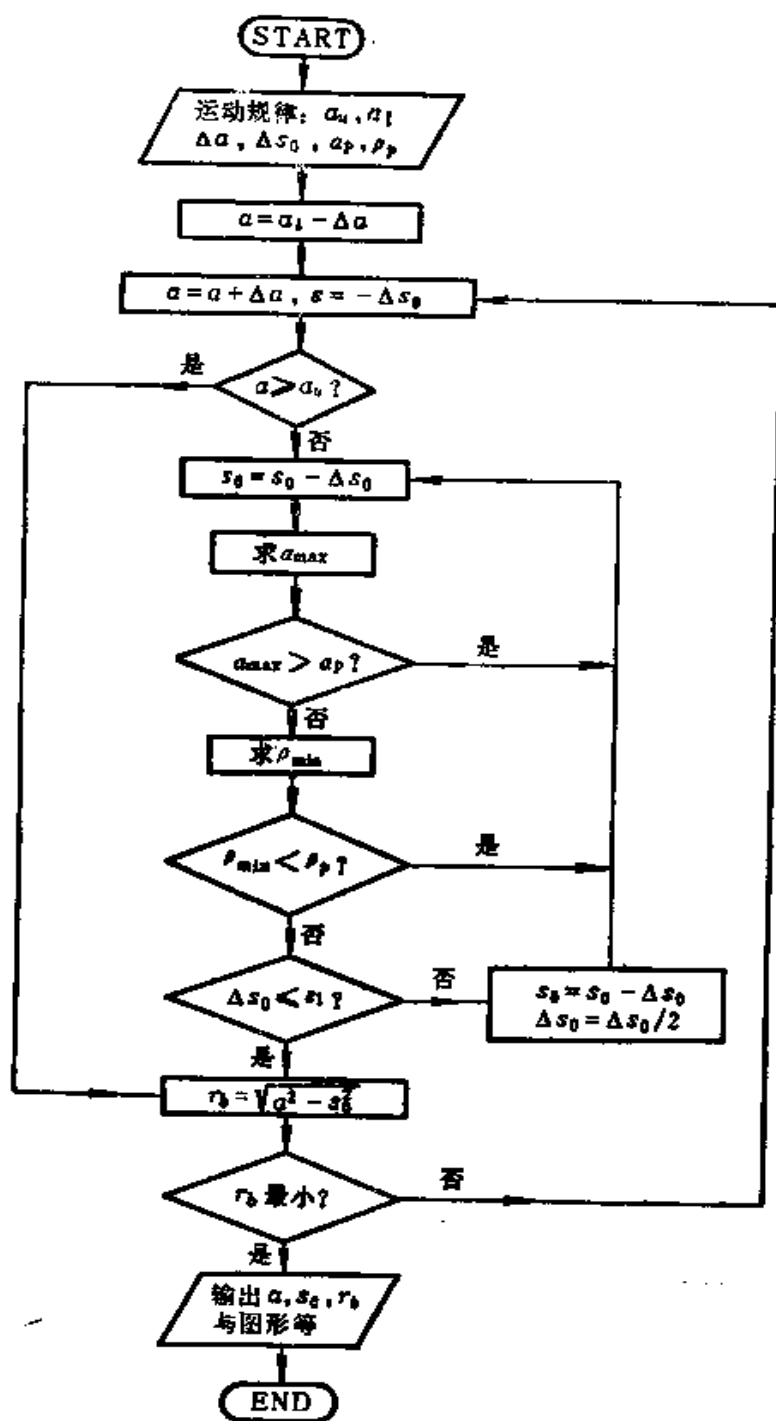


图7-27 直动从动杆平板凸轮机构尺寸优化程序框图

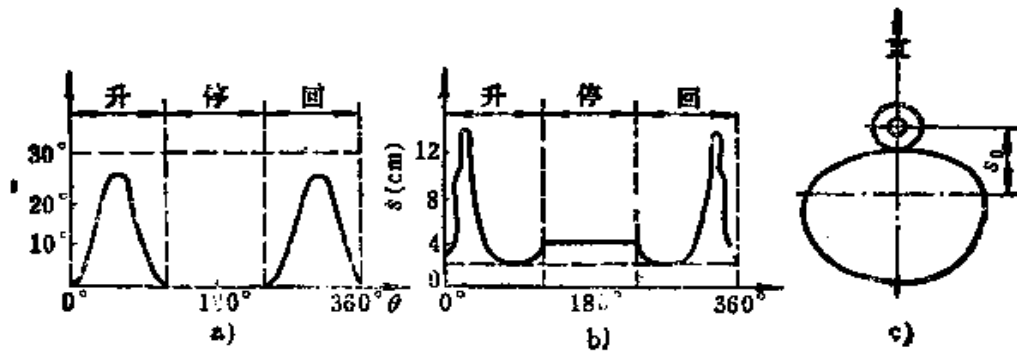


图7-28 直动从动杆平板凸轮优化结果

a) 压力角 b) 曲率 c) 轮廓

杆起始角度 θ_{10} 等。为了计算方便，常把某些设计变量转换成无量纲量，如

$$\eta = \frac{r_f}{l_f}, \quad \lambda = \frac{r_b}{l_f}, \quad \xi = \frac{c}{l_f}$$

优化程序框图与图7-27相似。首先读入各设计变量上下限（由下角标“u”与“l”表示）与增量等参数，输入数据如下

- | | |
|-----------------------------------|--------|
| (1) 滚子半径 r | 1.00cm |
| (2) η 的下限值 η_l | 0.1 |
| (3) η 的上限值 η_u | 0.4 |
| (4) θ_{10} 的下限值 θ_l | 0.0° |
| (5) θ_{10} 的上限值 θ_u | 65.5° |
| (6) 许用最大压力角 α_p | 30.0° |
| (7) 许用最小曲率半径 ρ_p | 2.0cm |
| (8) 运动学数据 | |

θ_2 的范围 (度)	ϕ 的范围 (度)	总位移	运动规律
0 ~ 180	0 ~ 30	30.00	摆线
180 ~ 240	30 ~ 30	0.00	—
240 ~ 360	30 ~ 0	-30.00	摆线

根据输入数据，可以算出不同 η 值下的 λ 值。从中选出最小的 λ 。最后优化结果如下：

(1) 滚子半径 r_f	1.00cm
(2) 摆杆的初始位置 θ_{i0}	41.0547°
(3) 中心距 c	5.0570cm
(4) 摆杆长 l_f	3.8095cm
(5) 基圆半径 r_b	2.3214cm
(6) 压力角最大值 α_{max}	29.7991°
(7) 曲率半径最小值 ρ_{min}	2.00cm

三、按最佳尺寸的凸轮优化设计

从使机器最紧凑的要求出发, 前述按最小尺寸原则进行凸轮机构的优化设计是合适的。然而, 从凸轮与滚子的工作寿命看, 疲劳与磨损起决定的作用。因此, 凸轮机构的最小尺寸一般不能得到最长的工作寿命, 需要另外寻求适合寿命原则的最佳尺寸。

对于中、低速凸轮机构, 常认为凸轮与滚子之间的最大接触应力 σ_{max} 直接与疲劳和磨损有关。因此, 在寻求使凸轮机构尺寸较小时, 应保证有一定的工作寿命, 使 $\sigma_{max} < \sigma_p$ 。 σ_p 为与材质及其热处理特性有关的许用应力值。这样, 目标函数将以机构尺寸参数 R 与其他参数 (x_1, x_2, \dots, x_n)

作为设计变量, 记为 $F(R, x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

当把凸轮转角分成 N 等分时, 每个转角 θ_{2i} ($i = 1, 2, \dots, N$) 处的接触应力是不同的。如果 $\sigma(\theta_{2i}) > \sigma_p$, 则须加上一项 $[\sigma^2(\theta_{2i}) - \sigma_p^2]^2$; 如果 $\sigma(\theta_{2i}) < \sigma_p$, 表明已满足要求, 就不用增加这一项。于是目标函数可以表示为

$$F(R, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^N b(i) [\sigma^2(R, x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_i) - \sigma_p^2]^2$$

(7-17)

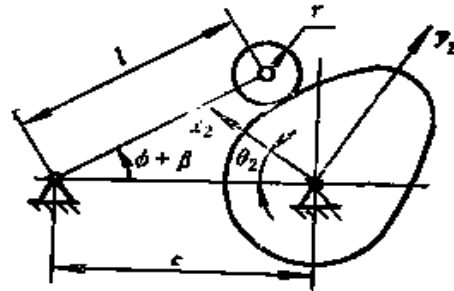


图7-29 摆动从动杆平板
凸轮机构简图

式中, $b(i)$ 的值取决于 $\sigma(\theta_{2i})$; 当 $\sigma(\theta_{2i}) < \sigma_p$ 时, $b(i) = 0$; 当 $\sigma(\theta_{2i}) > \sigma_p$ 时, $b(i) = 1$ 。

对于所有的 θ_{2i} 与 x_i , σ 总是 R 的递减函数。因此, 在 R 增大到某一数值时, 目标函数 F 才等于零 (或接近于零)。按式 (7-17) 的目标函数 F 求得的凸轮机构参数 R , 显然不一定是 R 的最小值 R_{min} 。为了求 R_{min} , 需建立一新的目标函数 F^* , 即

$$F^* = F + a |R|$$

式中, a 是一个很小的正数, $|R|$ 是 R 的绝对值 (模)。第二项 $a |R|$ 在一般情况下总是小于第一项 F 。这样, 当 F 趋近于零时, 使 F^* 取最小值的 R 将很接近于 R_{min} 。

四、凸轮机构的动力学优化设计

考虑动力学性能时, 凸轮机构的优化设计必须研究以下三方面的问题:

- 1) 从动件系统内存在间隙所引起的横越冲击影响;
- 2) 升程或回程期间从动件系统实际速度与加速度响应的极值与理想额定值的偏差;
- 3) 从动件系统停歇期间的残留振动大小。

间隙引起的横越冲击主要发生在加速度符号改变处。为了减少横越冲击, 必须使加速度曲线零点附近的跃度 J 值尽可能小。动力学优化设计中, 一般要求控制跃度值。在起点或终点附近, 应使 $J < 80$; 在轮廓中点附近, 应使 $J > -40$ 。选择运动规律时, 这些条件可以作为约束条件之一。在优化设计时, 可以引入如下二次式目标函数:

$$F_J = \int_0^1 J^2(T) dT \quad (7-18)$$

为了保证动力学响应的偏差值尽可能小, 类似地, 可以引入如下二次式目标函数:

$$F_A = \int_0^1 A^2(T) dT$$

$$F_V = \int_0^1 V^2(T) dT$$

残留振动是动力优化设计中最重要的问题。如第六章所述，残留振动最大幅值 U_0 或 \ddot{U}_0 与 τ_c 值有关，即与凸轮机构的固有频率和运转速度有关。为了衡量残留振动的大小，比较方便的办法也是引入如下二次式目标函数：

$$F_U = \int_0^{\infty} U_0^2(\tau_c) w(\tau) d\tau$$

式中， $w(\tau)$ 为权函数，在不同的 τ_c 值范围内，按其重要性可赋以不同的数值。在特定要求下，可以令权函数为

$$w(\tau_c) = \begin{cases} 1 & \tau_{c1} \leq \tau_c \leq \tau_{c2} \\ 0 & \text{对于其他 } \tau_c \text{ 值} \end{cases}$$

这样，凸轮机构动力学优化设计的一种可行的目标函数形式可以表示成

$$F = F_U + w_J F_J + w_A F_A + w_V F_V \quad (7-19)$$

式中，权重因子 w_J 、 w_A 、 w_V 用于控制跃度、加速度和速度的相对量值关系。能否找到最优解，在一定程度上取决于这些权重因子的处理。

按上述二次式目标函数所得到的最优解，只能从整体上保证动力学响应偏差较小，而不能保证局部值不超过允许极限。为了克服这一缺点，另一种可供选用的目标函数是不同 τ_j 值（如 N 个）的残留振动最大幅值 $U_0(\tau_j)$ 中的最大值，即

$$F = \max_{j=1, \dots, N} [U_0(\tau_j)] \quad (7-20)$$

第八章 凸轮的制造

第一节 概 述

凸轮机构的优良运动特性与动力特性，需要由精确的凸轮曲线来保证。因此，凸轮机构的各构件必须具有较高的加工制造精度。这些构件包括凸轮本体、从动系统各构件、机架等等，其中尤以凸轮本体的制造精度最难保证，但所起的作用却最关键。

凸轮本体的制造精度并不是越精确越好，应综合使用条件和制造成本等诸因素进行选择。对于使用功能、载荷、转速、可靠性、动力特性等要求很高的场合，对凸轮体应规定很严的公差，增加制造与安装调试费用是必要的。但是，对于低速和其他使用性能要求不高的场合，没有必要限定极严的公差，以便降低制造费用。通常，凸轮制造精度等级的合理选择是一件比较困难的工作，在很大程度上取决于设计者的经验和对样机的研究。

凸轮体的公差与其它机器零件类似，包括尺寸公差、外形公差和安装公差等内容。凸轮轮廓或滚子中心轨迹的矢径公差，与一般的长度尺寸公差一样规定，它对凸轮机构的工作性能起决定性影响，凸轮轮廓的外形公差是指表面的波纹度和不平度等。波纹度包括相邻坐标的尺寸偏差，对从动件的加速度高频波动有明显影响。表面不平度除引起从动件加速度高次谐波外，还会中断凸轮与滚子运动副的液体动力润滑。安装公差包括基准孔与槽口、轮槽宽公差等。表面粗糙度要与精度等级适应，否则不能保证工作精度和寿命。

根据目前工厂的经验，对于矢径在 500mm 以下的凸轮，可分为三个精度等级，公差与表面粗糙度推荐如表 8-1 所示。

由表可见，不同的精度等级应采用不同的加工方法。在数控

表8-1 凸轮公差与表面粗糙度推荐值

精度等级	极限偏差 (μm)					表面粗糙度 (μm)		加工方法	使用条件	
	半径	波纹度	不平度	基准孔	槽宽	平板凸轮	凸轮槽			
高	靠模 凸轮体	± 10	≤ 5	≤ 6.3	D	Dd	0.39	0.78	数控铣削 成形磨削 数控铣削 仿形磨削 仿形铣削 刨削加工	高速、精密、样板凸轮 中速、精密或重载凸轮
		± 50 ~ 100	≤ 5	≤ 10	D	Dd	0.39	0.78		
中	靠模 凸轮体	± 20	≤ 5	≤ 10	D3	De4	0.78	1.56	数控铣削 仿形铣削 靠模镗孔	中等载荷、中低速凸轮
		± 100 ~ 200	≤ 5	≤ 10	D3	De4	0.78	1.56		
低	靠模 凸轮体	± 200	≤ 10	≤ 10	D3	De4	0.78	1.56	仿形铣削 手工制造	只起辅助功能或调节功能的低速凸轮
		± 200 ~ 500	≤ 10	≤ 20	D4	De5	0.78	1.56		

(NC) 机床出现之前, 凸轮加工一般采用以下几种方法:

1. 划线手锉法

对于平板凸轮的手工加工, 可以在毛坯上直接划线, 或按设计轮廓加工出一个薄样板, 然后在毛坯上按样板划线; 用钻床沿划线轮廓把不用部分除去, 再用锉刀进一步加工, 直到划线处为止。对于圆柱凸轮, 可将样板卷到圆柱毛坯上进行划线, 钻孔后剔除不用部分之后, 再用锉、铲等方法加工凸轮轮廓。当然, 这种手工加工法不可能十分准确, 即使是圆弧与直线轮廓也很难加工到较高精度; 而且随工人的技术高低不同, 加工精度会有很大的差异, 最高可达 $\pm 0.1 \sim 0.2\text{mm}$ 。

2. 逐点坐标法

利用计算机将刀具中心的坐标 (直角坐标或极坐标), 按凸轮理论轮廓要求, 以很精细的间隔一点一点地给出。按照这些坐标值, 用手动的方法控制万能铣床的铣刀中心或坐标镗床的镗杆中心的运动, 就可以逐点地将凸轮轮廓加工出来。加工精度取决于

间隔的疏密、机床的精度和操作者的经验等。直角坐标值应精确到 $1\mu\text{m}$ ，极坐标上的分度角通常为 $1^\circ\sim 3^\circ$ ，分度精度为 $\pm 1''$ 。最后要把机加工中产生的尖棱、毛刺锉平、打光。

3. 创成法

创成法是利用某些机构构件能产生符合要求的运动轨迹来实行凸轮加工的一种特殊方法。早期曾有利用创成原理的专用机床来加工阿基米德螺线或简谐曲线轮廓的凸轮，最近又有人研究利用曲柄导杆机构组合而成的创成加工机床来制造出7次与11次多项式曲线轮廓的凸轮。但是，创成法加工凸轮的范围总是很有限的，机床的专用性太强，只适合于大批量生产。

4. 仿形加工法

这种方法是指采用仿形机床，通过样板凸轮（靠模）加工出与靠模尺寸完全一样或成正比例的实用凸轮本体。这种方法的优点是能连续切削，生产率高，成本低，能进行磨削加工。但是，加工精度首先取决于样板凸轮的加工精度，同时也与所采用的仿形机床的性能有关。由于这种方法具有上述优点，在凸轮批量化生产中应用比较广泛。

近年来，电子技术的发展使数控机床的价格降低和加工精度提高，从而得到广泛采用。这些数控机床，包括铣床、车床和磨床等，能实现任意给定的连续轨迹控制，为凸轮加工提供了精密、快速和多变的可能性。微机控制的数控机床（或CNC系统），使得凸轮加工能做到自动优化，即能自动选择最佳加工参数等，形成计算机辅助制造（CAM）系统。

把凸轮的计算机辅助设计（CAD）与计算机辅助制造结合起来，形成凸轮的CAD/CAM系统，使凸轮的设计与制造提高到一个崭新的水平。

第二节 凸轮的仿形加工

仿形铣削是采用得最多的一种批量化加工凸轮的经济方法。对于中、高速凸轮，轮廓表面淬火后，还要求进行仿形磨削。

一、机械仿形

仿形是通过靠模的机械接触来进行的，把触头沿靠模运动产生的位移信号转换成相似的刀具运动，从而加工出与靠模形状相似的凸轮体。由于转换装置的工作原理不同，可分为机械仿形、液压仿形和数控仿形等三种形式。

早期常用的仿形装置是如图8-1所示的机械仿形装置。靠模1与被加工的凸轮毛坯2安装在一根心轴上，而直径相同的接触滚子7与铣刀6装在刀具轴上，其高度分别与靠模和凸轮毛坯对应。刀轴按工艺要求等速转动，圆形工作台3按切削要求慢速转动，利用弹簧或重锤产生的压紧力使与工作台连接在一起的

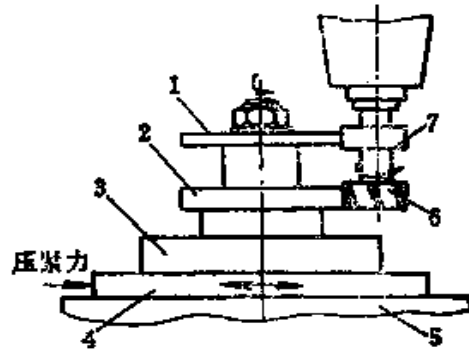


图8-1 机械仿形铣削原理图
1—靠模 2—凸轮毛坯 3—圆形工作台 4—滑台 5—床身
6—铣刀 7—接触滚子

滑台4沿床身5左右移动，保持靠模与接触滚子之间的接触状态。这种仿形加工的加工时间较长，当凸轮轮廓压力角较大时，仿形误差较大；接触滚子与靠模在较大的压紧力作用下容易磨损，特别是在凸轮曲线转折处和升程轮廓上。所以，现在用得越来越少了，尤其是轮廓曲率较小时，根本无法加工。在车床上也可进行凸轮的仿形加工。图8-2给出了这种机械仿形加工凸轮的工作原理。靠模1与被加工凸轮毛坯3分别安装在齿轮传动副2的两个齿轮轴上，滚子和车刀装在同一滑台5上左右移动，借滚子沿靠模轮廓的运动，控制车刀的运动，使其在毛坯上车削出与靠模相似的形状。滚子与靠模间的接触压紧力由弹簧产生。靠模的尺寸大于实际凸轮，这有利于提高凸轮的加工精度。这是因为靠模本身的误差反映到凸轮上比较小。

由于在凸轮转一转的过程中，车刀的切削角度在变化，有的部分切削条件好，有的部分切削条件差，这不仅会使有的轮廓部

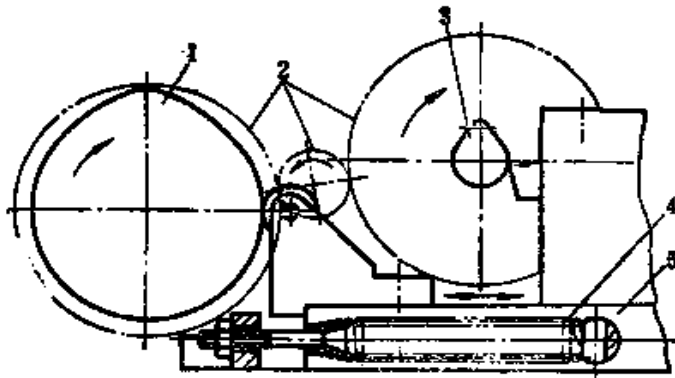


图8-2 仿形车削凸轮原理

1—靠模 2—齿轮传动副 3—凸轮毛坯 4—弹簧 5—滑台

分加工质量较差,还会影响刀具的寿命。为了改进切削条件,最好能使车刀随靠模轮廓的不同而作相应的摆动,以保持切削角度在任何位置都相同。图8-3所示装置能够满足上述要求。靠模2推动大滚子4带动刀架滑台5左右移动,另一个靠模1推动小滚子3使AB杆摆动,再通过连杆BC使安装车刀的刀夹7绕D点摆动。靠模1是控制工件形状的,它的轮廓和需要加工的凸轮轮廓6完全一样,加工过程中靠模2的转速与凸轮毛坯6的转速相同而方向相反。大滚子4的半径应与车刀刀尖E至刀夹摆动中心D的距离DE相等。靠模1是控制切削角度的,它的轮廓设计要求使直线DE始终沿着凸轮6的轮廓法线方向,以保证切削角度保持不变。满足上述要求的靠模1的轮廓,可以用前面介绍过的方法进行设计。

机械仿形磨削凸轮装置的工作原理如图8-4所示。凸轮毛坯4与靠模3同轴安装在一个能绕 O_1 轴摆动的摆架5上,砂轮2和滚轮1分别装在定轴 O_1 与 O_2 上。磨削过程中,弹簧6推动摆架5上的靠模3始终与滚轮1保持接触, O 点的轨迹是以 O_2 为圆心, OO_2 为半径的圆弧,因此 O 点不一定在 O_2O_1 的延长线上。靠模轮廓的设计同样可以根据 O_1 、 O_2 、 O_3 的位置,滚轮与砂轮的半径,以及实际要求的凸轮轮廓等原始数据,按前面介绍过的方法计算。大批量生产用的靠模也可采用反靠法加工出来。这就是把

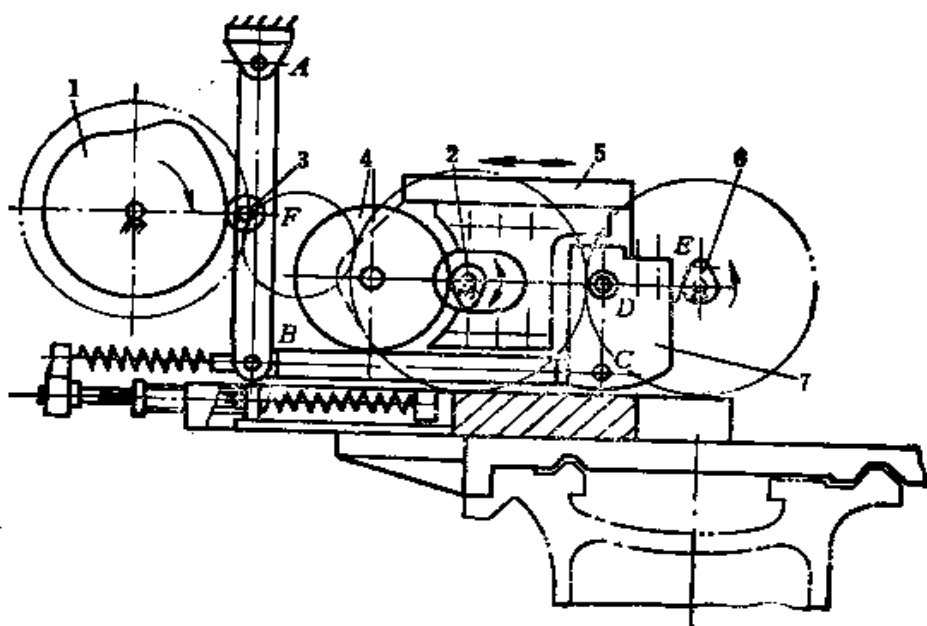


图8-3 切削角度不变的仿形车削装置

1、2—靠模 3、4—滚子 5—刀架滑台 6—凸轮毛坯 7—刀夹

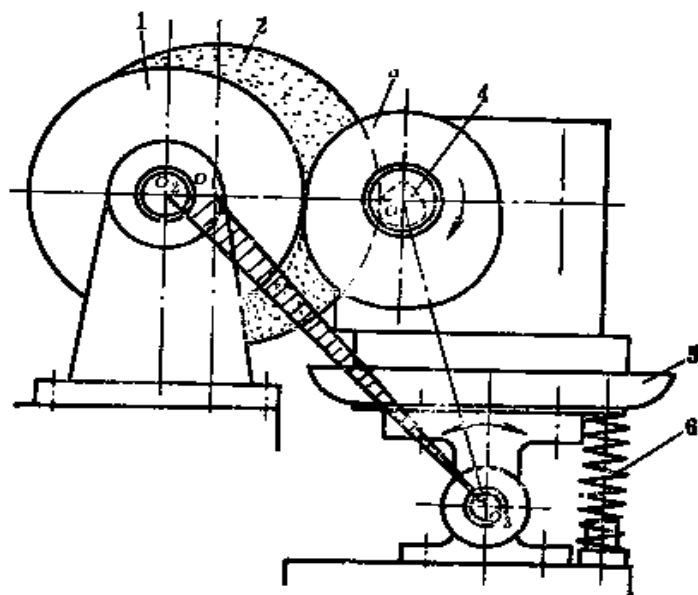


图8-4 机械仿形磨削装置

1—滚轮 2—砂轮 3—靠模 4—凸轮毛坯 5—摆架 6—弹簧

滚轮换成同直径的砂轮，砂轮换成同直径的滚轮，在凸轮毛坯处安装一个精确的标准凸轮，在靠模处安装要加工的靠模毛坯。这样，不需象上面那样去设计靠模轮廓就可以使制造的靠模获得较高的精度。

二、液压仿形

如前所述，机械仿形加工的效率低，精度差，因此逐渐被新型的液压仿形装置所取代。最简单的单坐标液压仿形铣削装置的工作原理如图 8-5 所示。液压随动阀 6 上的触头在小弹簧 9 的作用下，保持与靠模 1 的接触，因为压紧力不大，两者的磨损轻微。被加工的凸轮毛坯与靠模同轴安装在床头箱 5 的主轴夹头 2 上。铣刀 3 的随动靠油缸带动。油泵 8 送出的压力油经滤油器 7、随动阀 6 进入油缸。当滑阀芯被靠模压下时，压力油经随动阀 6 进入油缸的下油腔 10，推动固定铣刀的缸体 11 向下运动，上油腔 4 中的油经滑阀的上泄油口排回油箱；同时，与之相连的随动阀体也向下运动，而阀芯在弹簧作用下始终与靠模接触，直到滑阀芯处于中间位置把上泄油口关闭为止。当滑阀随靠模轮廓向上运动时，压力油同时进入油缸的上油腔 4 与下油腔 10，但因上油腔的有效面积大于下油腔的有效面积，作用在缸体上的合成油压力将使缸体上的铣刀向上运动，随动阀体也随之向上运动，直到滑阀再次处于中间位置时才停止。当靠模转动一周时，完成凸轮的仿形铣削。但是，这种方法不能加工曲率较大或曲率有正负的复杂轮廓。另外，刀具沿凸轮轮廓切线方向的进给速度不是一个常数，因而影响加工质量。为了克服这些缺点，可采用更复杂的双坐标液压仿形系统。

将液压仿形装置稍作改进，还可用来加工滚子齿式空间凸轮，其原理如图 8-6 所示。靠模 5 固定在进给油缸 1 的活塞杆 2 的齿条 4 上。当活塞杆移动时，通过与齿条啮合的小齿轮 3 与传动轴 14，带动凸轮毛坯 12 转动。靠模 5 随活塞杆 2 的运动，使得随动滑阀 7 上的触头 6 上下运动，控制压力油（P）进入随动油缸 13 的上油腔或下油腔。因为它的活塞杆 15 不动，所以缸体将随

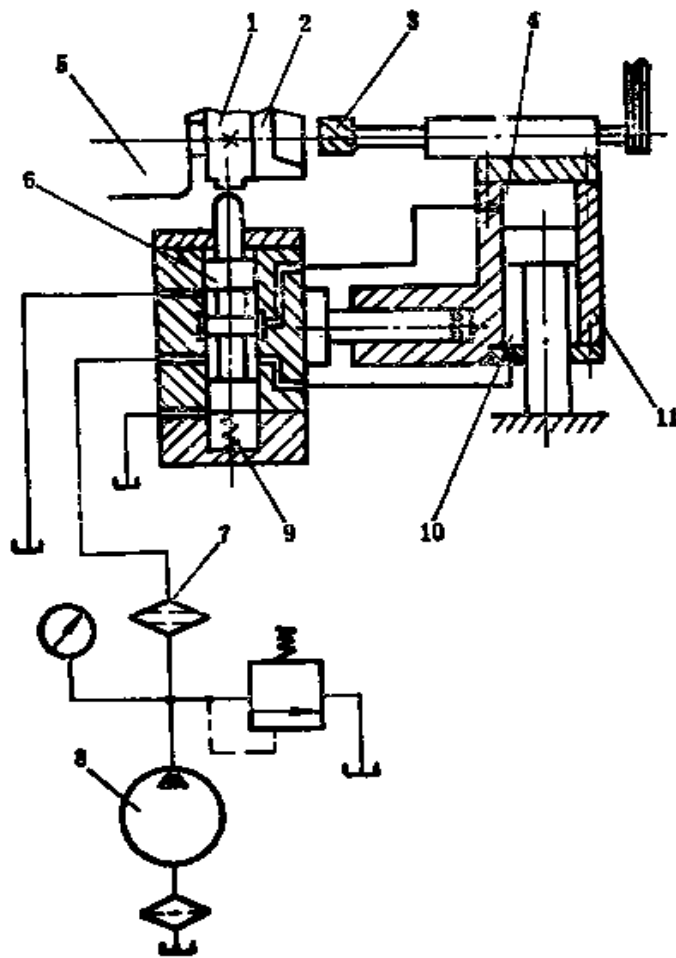


图8-5 单坐标液压仿形系统图

1—靠模 2—夹头 3—铣刀 4—上油腔 5—床头箱 6—随动阀
7—滤油器 8—油泵 9—弹簧 10—下油腔 11—缸体

触头的上下运动而作相应的移动，从而使固定在缸体上的齿条 8 往复移动，经摆动齿轮 10 带动铣刀架 9 及铣刀 11 来回摆动，切削毛坯 12，其摆动角度与靠模轮廓对应。根据分度数的多少，可在铣刀架 *d* 与 *e* 两处再装两把铣刀。铣刀均由刀架上的电动机驱动旋转。

三、数控仿形

近年来，随着数控装置可靠性的提高，售价大幅度下降，配

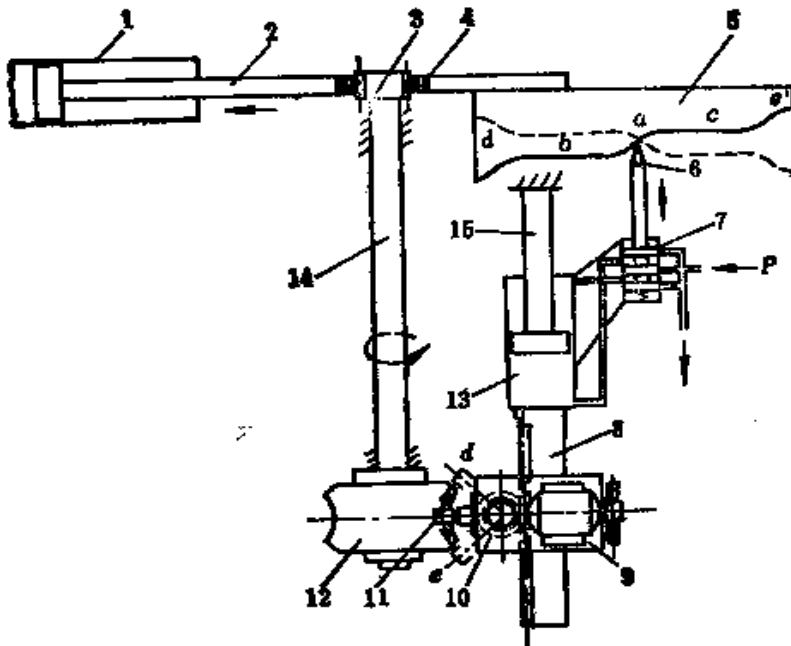


图8-6 滚子齿式空间凸轮的液压仿形加工装置

- 1—进给油缸 2、15—活塞杆 3—小齿轮 4、8—齿条 5—靠模
6—触头 7—随动阀 9—铣刀架 10—摇动齿轮 11—铣刀
12—毛坯 13—随动油缸 14—传动轴

套件系列日益完整，数控仿形机床应用范围有了明显的扩大。与靠模接触的位移传感器产生的连续变化的模拟信号，由模/数转换装置变成数字信号，经过处理与计算，发出各种控制信号，控制机床动作，从而加工出与靠模形状一致的凸轮，这就是数控仿形机床的简单工作原理。基本内容与下一节相近。

第三节 凸轮的数控加工〔74〕

一、数控加工优越性

仿形加工虽然使小批量的凸轮加工部分地实现了自动化，但是需花费许多手工劳动来制造、安装与调试靠模，而且加工精度受到靠模制造精度的限制，缺乏灵活性。特别是有的工业部门对凸轮的要求，不仅精度高，形状复杂，而且批量极小，还经常变

动。这时，仿形加工就不能满足要求了。由于电子、自动化、计算机及精密机械与测量等技术的迅速发展，数控机床较好地解决了复杂、精密、小批、多变的凸轮加工问题。采用数控机床加工凸轮，有以下优点：

1. 提高加工精度

数控机床的加工精度一般在 $0.005\sim 0.100\text{mm}$ 之间，基本满足常用凸轮的精度要求。数控机床加工精度不受凸轮形状复杂程度的影响，能加工一般机床无法加工的复杂凸轮，如滚子齿式空间凸轮等。采用数控机床，不用人工操作，只要输入数据正确，就能自动按规定程序加工出质量稳定的凸轮。

2. 提高生产效率

用数控机床加工凸轮，不用对工件划线，对夹具的要求也不高。因此，缩短了辅助时间；在加工过程中，还省去了对凸轮的多次测量与检验；切削用量可按最优结果预先设定。加工不同的凸轮时，只需更换纸带或在计算机上修改部分指令，大大节省了准备与调整时间，提高了生产效率。

3. 减轻了劳动强度

数控机床在输入纸带并启动后，就自动地连续加工，直至工件加工完毕，才自动停车。使工人的操作大大简化，操作时的紧张程度也大为减轻。

4. 有利于生产管理

用数控机床加工，能准确地计划凸轮的加工工时，简化了检验工作；减轻了工夹具、半成品的管理工作；减少了因操作失误而出废品及损坏刀具的可能性。这些都有利于提高管理水平。

5. 有利于向计算机管理发展

数控机床是计算机辅助制造的基础，它使用标准的数字信号和标准代码输入，最宜于与计算机辅助设计系统联接，形成 CAD/CAM 系统，实现从设计、制造到管理的全盘优化与自动化。

二、基本原理

凸轮的数控加工系统一般由图 8-7 所示两大部分组成：程序

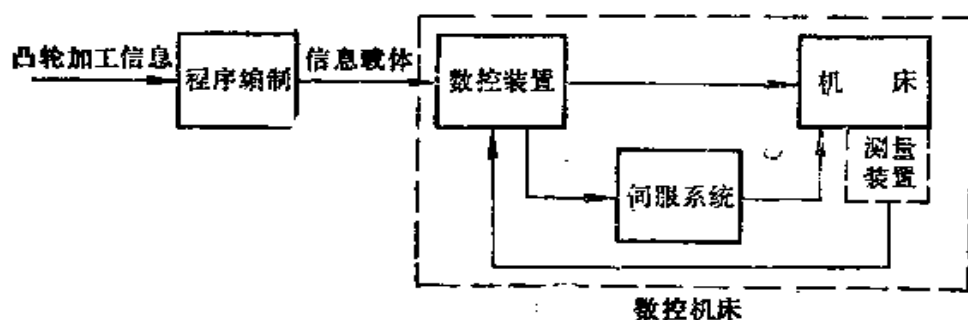


图8-7 凸轮数控加工系统的组成

编制系统与数控机床。

将被加工的凸轮形状、尺寸、工艺要求、切削用量、插补要求、刀具修正、走刀顺序、起刀位置、冷却要求等加工所需的各种信息，用穿孔或录磁等方法记录到穿孔纸带或磁带等信息载体上。在使用穿孔纸带作信息载体时，凸轮加工指令及数据先用规定的文字、数字与符号书写在程序单上，称为零件程序；随后再按一定的规则在纸带上穿出一排排的孔，以表示这些由文字、数字与符号组成的零件程序。纸带上孔的排列规定，称为代码。国际上通用的代码为 EIA 与 ISO 代码。上述过程称为手工程序编制。

对于由简单的直线与圆弧组成的凸轮轮廓曲线，可以由人工完成程序编制。但是，对于具有复杂轮廓曲线的凸轮，特别是空间凸轮，用手工逐段计算与编程，显然十分繁杂，容易出错，因此，不得不求助于自动编程机。自动编程机实际上就是一种专用计算机，带有能采用简单而易懂的语言去描述凸轮的几何形状与加工过程的专用语言系统，能接受和翻译这种语言表示的各种指令，并可以根据指定的要求进行分段与计算，最后处理成数控机床适用的加工纸带。国外较成熟而完善的自动程序编制语言系统是美国的 APT[⊖]系统，经不断改进，目前已发展到 APTV 系统，联邦德国已将它发展成更为方便的 EXAPT 系统。日本的

⊖ 全称为 Automatically Programmed Tools.

FUNAC公司生产的小型自动编程机，使用的是FAPT语言系统。我国已研制出SKC-1、ZCX-1等系统，但只能供二轴联动的三坐标数控铣床使用。APT系统的规模很大，功能十分丰富，但需配备较大型的通用计算机，或使用分时系统，这对于许多中小厂家不很合算。EXAPT与FAPT系统是面向几种典型凸轮的加工而研制的，适用于一定范围，只须采用容量虽小但价格便宜的微型计算机，很受用户的欢迎。这些语言系统在一定程度上实现了刀具、材料、加工步骤、加工数据的系统化和标准化，数据库比较丰富和完备，处理能力较强，自动化程度也比较高。

根据功能的不同，数控语言可分为五种语句，即：几何定义语句，计算参数语句，运动语句，后置处理语句和其它语句。

几何定义语句是用来描写凸轮的几何图形的，可定义点、直线、圆、列表曲线和距离列表曲线为给定距离的过渡曲线等。

计算参数语句是给计算部分提供计算参数的信息。如给出机床和数控装置类型的机床语句，给出允许的程编误差的容差语句，以及刀具直径语句等。

运动语句是用来描述刀具运动状态的。它包括：给出刀具对刀位置的起刀语句，用来使刀具从空间某处运动到所需平面内接触零件轮廓的进刀语句，控制刀具走刀路线的连续运动语句，以及退刀语句等。

后置处理语句是专门用来控制数控机床，使它自动执行一些辅助功能的语句，如进给速度语句、冷却语句、停车语句等。

其它语句如循环语句、条件语句、空语句、转向语句、复合语句等。

下面列出了某平行分度凸轮用二轴(x, y)联动的数控铣床加工时，在FANUC P-E自动编程机上输入的FAPT语句。其中从P1到P165是由CAD系统计算出的非圆弧曲线部分的列表数据，以极坐标形式表示。列表曲线是采用计算简单和适应性强的双圆弧法来拟合的。

0010 PART, INDEXING CAM

0020 MCHN, MILL, ABS
0030 P0 = 0.0
0040 P 200 = 40, 57.258530
0050 P 201 = 40, 70
0060 P 1 = 57.258530, 161.73427 A
0070 P 2 = 57.258873, 162.94536 A
:
:
:
1690 P 164 = 57.255684, - 50.617386 A
1700 P 165 = 57.258179, - 49.453918 A
1710 P 166 = 57.258530, - 48.265701 A
1720 S1 = P 0, P 1
1730 S2 = 52.258530 Y
1740 T1 = P 1, P 166
1750 C1 = P 0, 57.258530
1760 *
1770 FEED
1730 * *
1790 SEQN, 10, INCR, 1, 1
1800 PLANE, XY
1890 PCORD, 0
1900 FROM, P201
1930 CUTTER, 12
1940 THICK, 1
1950 TLRGT
1960 * M03
1970 FCOD, 200
1980 RPD, TO, S2
1990 S2, TANTO, C1
2000 C1, CCW, P1

```

2010 T1, P166, TO, C1
2020 C1, CCW, TANTO, S2
2030 S2, P[-20, 57.258530]
2040 RPD, P201
2050 THICK, 0
2070 RPD, TO, S2
2080 S2, TANTO, C1
2090 C1, CCW, P1
2100 T1, P166, TO, C1
2110 C1, CCW, TANTO, S2
2120 S2, P[-20, 57.258530]
2130 RPD, P201
2150 * *
2160 FEED
2170 FINI
9999 PEND

```

图 8-8 是自动编程机的 X-Y 绘图仪按输入数据与语句画出的该平行分度凸轮的图形。图中表示了起刀位置，半精加工与精加工的刀具中心轨迹，以及加工后的凸轮轮廓。这个图形有助于校核输入是否正确，经检查无误后，自动编程机的穿孔机将后置处理程序处理过的信息，制成适合数控机床输入用的穿孔纸带。

对于滚子齿式空间凸轮，因无法利用只有 x 、 y 、 z 三轴联动的数控铣床来加工，只有利用带有两个旋转坐标（如 θ_1 与 θ_2 ）联动的数控机床才能精确地加工出来。图 8-9 给出了这类空间凸轮的加工坐标示意图。 θ_2 轴均匀转动时， θ_1 轴按给定的运动规律联动旋转，刀具直径与滚子直径对应。由于刀具必须安装在以 θ_1 轴为圆心的旋转台上，结构复杂，因而这种数控机床很贵。

对于图 8-10 a 所示圆柱形凸轮，在沿它的轴线旋转时，从动

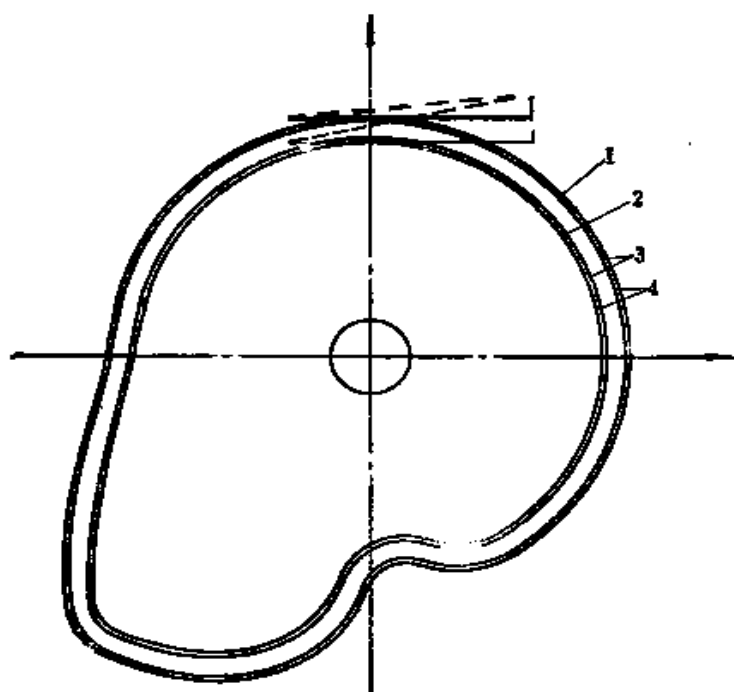


图8-8 平行分度凸轮的加工图形

1—刀具中心轨迹 ($\phi = 12\text{mm}$) 2—凸轮轮廓线
3—半精加工 4—精加工

滚轮的中心轨迹成为圆弧形。若能给出圆柱形凸轮槽的中心轨迹的列表数据，则任何轨迹都可以在带旋转分度头的普通数控铣床上加工出来。通过CAD系统，可以计算出图8-10b所示圆柱凸轮展开图上，凸轮槽中心轨迹上 N 个点的坐标值，用数组表示，即

$$Y(1) = \dots$$

⋮

$$Y(N) = \dots$$

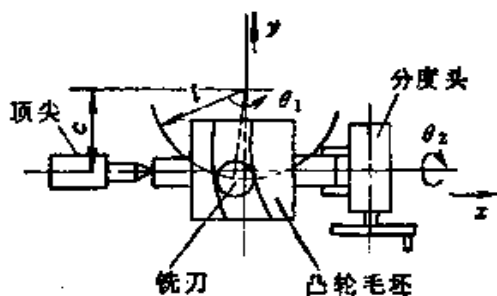


图8-9 滚子齿式空间凸轮加工示意图

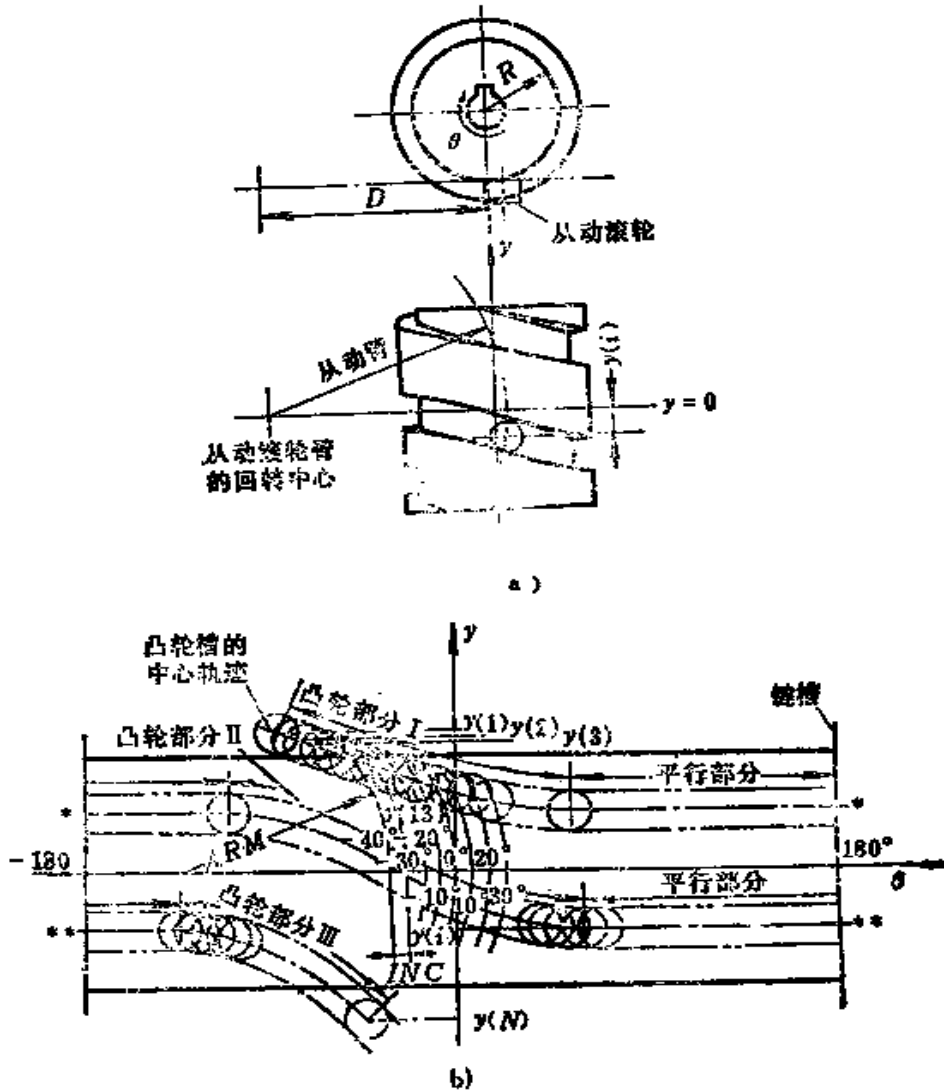


图8-10 圆柱形空间凸轮形态图

a) 零件图 b) 展开图

加工这种凸轮的程序摘要如下:

```

PARTNO CYLINDRICAL CAM
MACHIN/OKIYSD, 840, 1, YZRO1
POSMAP/3516, OPTION, 1, 0, NOW
POSMAP/3639, OPTION, 1, 1, NOW
CLPRNT
  
```

MULTAX

*** VARIABLE INPUT DATA ***

PESERV/Y

Y(1) = -181.00

*

:

Y(100) = 196.86

INC = - 5

N1 = 25

N2 = 74

N3 = 99

N4 = 100

N5 = 0

N6 = 0

A1 = 0

A2 = 120

A3 = 120

A4 = - 25

A5 = 0

A6 = 0

R = 73

ARM = 209

D = 195

FRT = 100

ZTT = 200

** MOTION

FROM/0.0 ZPT, 0, 0, 1

COOLNT/FLOOD

SPINDL/CLW

CUTTER/ 1

** FIRST MOTION

```

DXIST = SQRTF(ARM * ARM - Y(1) * Y(1)) - D
I1ST = SIN( A1 )
K1ST = COS( A1 )
X1ST = R * I1ST + DXIST * K1ST
Z1ST = R * K1ST - DXIST * I1ST
  ** PREFUN/23
FEDRAT/2000
DNTCUT
GOTO/X1ST, Y(1), Z1ST, I1ST, 0, K1ST
GODLTA/(ZPT - R)
CUT
  ** PREFUN/22
GODLTA/(R - ZPT), FRT
  ** PREFUN/23
N = 0
MAC = MACRO/M, ABC
ANG = ABC
IF(M) B, B, A
  A) N = N + 1
  I = SIN(ANG)
  K = COS(ANG)
  DX = SQRTF(ARM * ARM - Y(N) *
    Y(N)) - D
  X = R * I + DX * K
  Z = R * K - DX * I
  GOTO/X, Y(N), Z, 1, 0, K
  ANG = ANG + INC
IF(N - M) A, B, B
  B) TERMAC
CALL /MAC, M = N1, ABC = A1

```

```

CALL /MAC, M = N2, ABC = A2
CALL /MAC, M = N3, ABC = A3
CALL /MAC, M = N4, ABC = A4
CALL /MAC, M = N5, ABC = A5
CALL /MAC, M = N6, ABC = A6
  ** PREFUN/22
GODLTA /(ZPT - R)
  ** PREFUN/23
GOTO /0, 0, ZPT, 0, 0, 1, 2000
COOLNT /OFF
SPINDL /OFF
END
FINI

```

在上述程序中，只要修改其中部分语句，就可用于加工其它尺寸的凸轮。需要修改的语句包括：

- (1) 中心轨迹的 Y 坐标值输入个数 N；
- (2) 用数组表示的 Y 坐标值 $Y(1) = \dots \sim Y(N) = \dots$ ；
- (3) 坐标轴的联动数目，一般需要包含数控分度头的三坐标联动的数控铣床；
- (4) 圆柱凸轮的槽宽；
- (5) 圆柱凸轮的半径 R；
- (6) 从动滚轮的臂长 ARM；
- (7) 起刀点的 Z 坐标值；
- (8) 进给速度；
- (9) 升角 INC 等等。

如果刀具直径不同于滚子直径，刀具中心轨迹的坐标值须逐点沿接触点公法线进行修正。

第四节 凸轮体的检测

对于加工完毕的凸轮体，应按图纸规定的公差和表面质量进

行检验。必须检测的项目一般包括：轮廓坐标的实际值，轴孔与键槽等的位置偏差，轮廓的表面粗糙度。其中后两项属于一般零件的检测内容，只有轮廓坐标测量是凸轮体所特有的。

凸轮轮廓的质量检验可以用比较测量、功能检验和直接测量等方法来进行。

一、比较测量法

这种方法主要用于批量生产的平板凸轮体检验。所用的凸轮比较仪如图 8-11 所示。

将被测凸轮与作为标准件的精密凸轮安装在同一测量心轴上，中间被垫圈隔开一定距离，并用螺栓固定。当触头接触标准件的轮廓表面时，装有测长仪的另一触头将在弹簧作用下与被测凸轮轮廓接触，同时在测长仪上将指示出

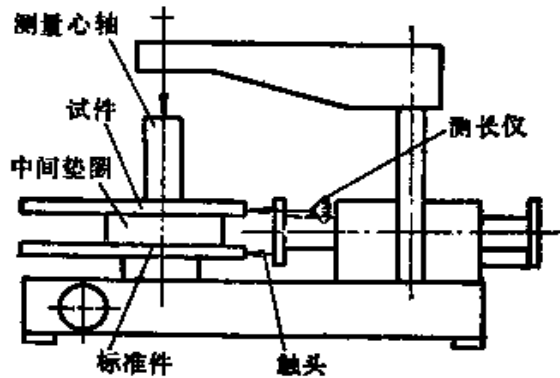


图8-11 凸轮比较仪原理图

加工凸轮触点坐标与标准凸轮对应点坐标的偏差。

这种方法的缺点是，测量结果中还包括加工时由于定位误差产生的全部误差，无法把凸轮轮廓的误差单独测量出来。另外，对于单件或小批量生产情况，加工标准凸轮是不合算的。

二、功能检验法

功能检验可分为静力功能检验与动力功能检验。

静力功能检验是为了确定凸轮机构的静力功能缺陷。例如，共轭凸轮与两个从动滚子之间的间隙，凸轮槽与滚子之间的间隙，这些间隙可以用厚薄规来测定，或者通过凸轮机构静刚度的测量，不仅得出机构静刚度的数据，同时也可测出间隙的大小。如图 8-12 所示，对凸轮机构从动件上加载 (F)，测量对应的变形或位移 (s)。在弹性范围内，两段曲线的平均斜率就是机构的静刚度 (k)， s 轴上两段直线的间断距离 δ 就是凸轮机构的

间隙。

动力功能检验是为了确定加速度性能、振动性能以及运转平稳性等。

由于凸轮轮廓输入与从动件工作端响应之间不存在任何线性关系，凸轮机构的动力学性能不能用幅频特性或相频特性来评价，只能按工作时的振动和噪声作为凸轮机构的评价指标。

动态位移测量比较困难，测量方法也不可靠，不适用于评价凸轮机构的工作性能。速度测量可以在一个较宽的频率范围内比较平均地求得凸轮机构的振动，

但常见速度传感器频率下限偏高，而且质量较大，应用受到限制。最常用的办法是测量加速度，经积分来求取速度与位移。图 8-13a 表示凸轮机构动力测量仪器框图。从安装在凸轮机构从动件上的传感器拾取的加速度信号，用磁带记录仪记录下来，经测振仪放大或积分，得到加速度、速度和位移的时间历程，由光电记录仪显示出来，如图 8-13b 所示。加速度信号经频谱分析仪，可以得到从动件加速度的频谱，如图 8-13c 所示。

测定高速运转下的凸轮机构发出的噪声，同样可以评价凸轮机构的动力性能。一般可以用声级计测量其噪声的声压级；必要时，可用频谱分析仪对噪声进行频谱分析。

三、直接测量法

最常用的直接测量法是利用分度头与测长仪等测量凸轮轮廓各点的极坐标值。精密的分度头每转动 0.125° ，利用位移传感器

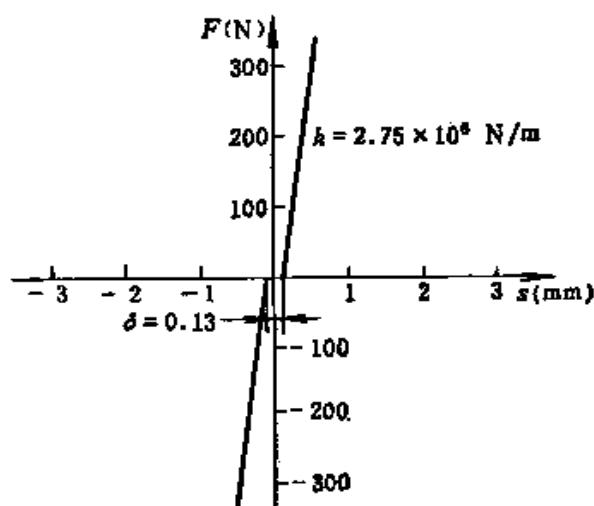


图 8-12 凸轮机构的静刚度

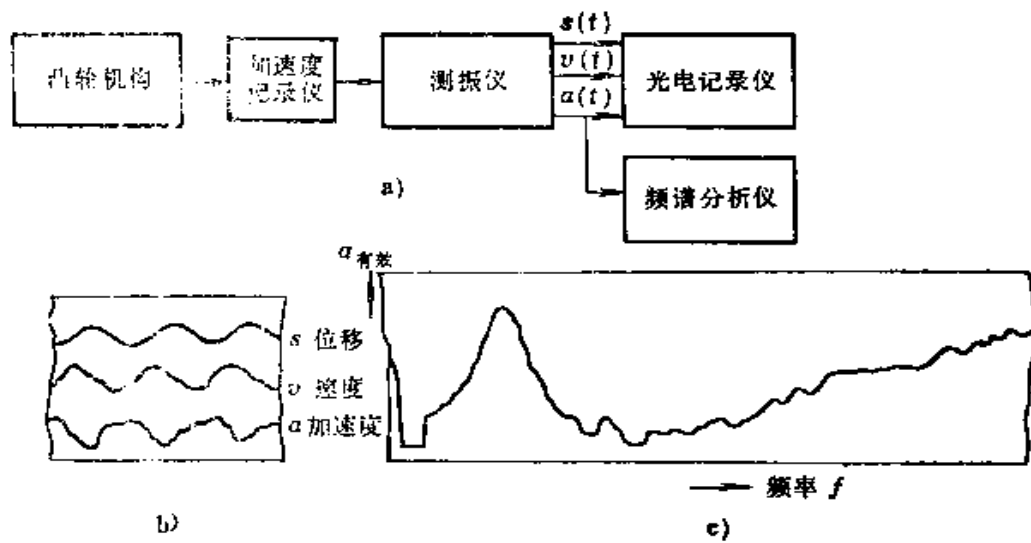


图8-13 凸轮机构振动测量

a) 测量框图 b) 时间历程 c) 频谱图

测一次从动件的位移 y ,从而得到从动件的位移曲线。测量时,应保持从动件与凸轮轮廓间的压力在10N左右。测得的位移曲线往往是不光滑的,可以利用如下五点平滑公式进行局部平滑:

$$\bar{y} = \frac{-3y_{-2} + 12y_{-1} + 17y_0 + 12y_1 - 3y_2}{35} \quad (8-1)$$

式中, \bar{y} 为中心点位移 y_0 的校正值; y_{-2} 、 y_{-1} 、 y_1 、 y_2 为中心点左右相邻四点的位移值。

利用有限差分法,可以从位移曲线的数据算出从动件的速度、加速度和跃度等曲线。这些曲线也可进行上述局部平滑处理。

上述测量数据的记录与处理可以采用计算机自动完成。位移传感器的电平信号为模拟量,经模/数转换装置可转换成数字量后,才能记录在磁带或穿孔纸带上,然后输入计算机,经平滑处理,打印出数据结果,或在X—Y绘图仪上直接绘出从动件的位移、速度或加速度曲线,以便与理论设计值进行比较。

万能工具显微镜同样可以用于对凸轮轮廓进行测量。一般用机械式滚珠触头测量凸轮的各点轮廓。把凸轮装在万能工具显微

镜的工作台上时，首先必须在孔内触试许多点，以便确定并调整孔心的位置。

为了能测量空间凸轮三维曲面上的大量测点，并能直接处理结果，上述方法是不能满足要求的，必须利用三坐标测量机。这种设备很昂贵，其价格甚至高于数控机床，但对于批量生产多品种凸轮的单位，由于这种设备能保证质量检验的精度、效率高，因此也是必备的。对于多数零件，采用三坐标测量机所需测量时间，只有传统测量方式的1/20左右。

三坐标测量机的外形如图8-14所示。测量机上装有沿X、Y、Z轴三个方向互相垂直的读数装置。探头装在Z轴测量柱端部，它由耐磨宝石制成。三坐标测量机的立柱(Z)横梁(X)和支承(Y)，均是刚性大、重量轻的中空箱式结构，动态测定时的变形很小，能保证实现快速而精确的测量。立柱、横梁与支承之间的连接装有空气轴承，能够达到很高的重复精度。机身由整块花岗石制成，这对保证测量机精度十分重要，而且便于安装，对地基要求也不高。

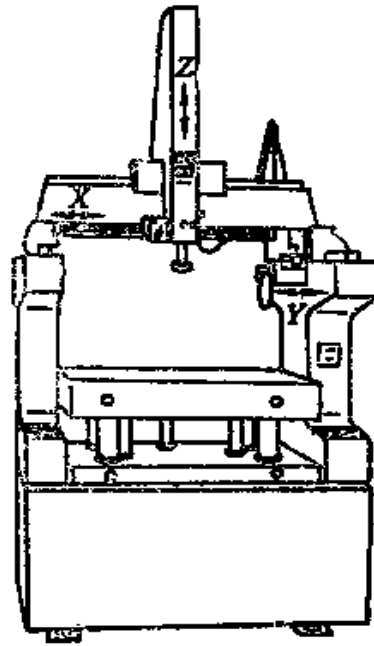


图8-14 小型三坐标
测量机外形图

为了达到更高的测量精度、重复性和稳定性，测量机常常采用双刻度。这样就可以从根本上消除大型测量机上的测量误差，如XY直角误差与X倾斜误差等，可按探头位置对两个刻度的读数进行权重处理。

下面是一台典型的三坐标测量机的技术参数：

测量范围：

X轴：700mm

Y轴: 550mm

Z轴: 400mm

分辨率: $1\mu\text{m}$

测量装置: 编码尺

测量台:

尺寸: $1000 \times 750\text{mm}$

材料: 花岗岩

不平度: $8\mu\text{m}$

被测零件的固定: M8螺孔25个

最大升高: 350mm(分8级, 每级50mm)

驱动方式: 电动机驱动

被测零件的允许高度: 665mm

被测零件的允许重量: 800kg

被测零件的外形尺寸:

长: 1400mm

宽: 1100mm

高: 2610mm

测量机重量: 2050kg

用坐标测量机测量凸轮轮廓的几何参数时, 最简单的方式是图8-15所示的尖端探头浮动式测量法。当探头尖端接触轮廓上的某一点时, 即得该点的坐标值。这种方法的探头尖端易磨损, 测量力难以保持恒定, 现在很少采用。

目前常用的探头形状多为球形。采用球形探头测量凸轮轮廓时, 不能直接得到轮廓的坐标值, 如图8-16所示, 必须根据球心坐标推算出球面与轮廓切点的坐标。

当球形探头紧贴轮廓缓慢移动时, 每隔一定间距 P , 读取球心 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ 的坐标值 (x_i, y_i) 。为了求轮廓上与

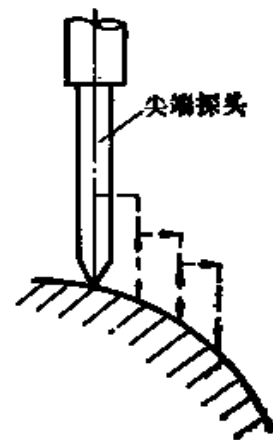


图8-15 尖端探头
测量法

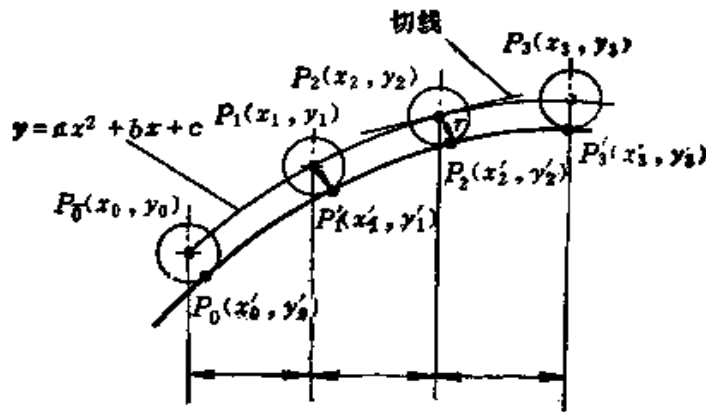


图8-16 球形探头测量法

球面接触点 P'_0 、 P'_1 、 P'_2 、 P'_3 …… P'_n 等的坐标值 (x'_i, y'_i) ，可以先把 n 个点联成的球心轨迹用 $(n-1)$ 次曲线来近似表示，然后再去求接触点的轮廓坐标。常用的方法是根据三个测点数据来构成二次曲线方程 $y = ax^2 + bx + c = f(x)$ 。由 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 、 $P_3(x_3, y_3)$ 的数据可求出此二次曲线在 P_2 点处的斜率为

$$m = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)}{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (8-2)$$

球心 P_2 与接触点 P'_2 间的矢径 r 应与 P_2 点的切线垂直，因而接触点的坐标值为

$$\begin{cases} x'_2 = x_2 + \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 1}} r \\ y'_2 = y_2 + \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 1}} r \end{cases} \quad (8-3)$$

在测量点之间任意 x 处的 y 坐标值，可以利用牛顿二次插值法求得，其插值公式为

$$\begin{aligned}
 y &= f(x_0') + (x - x_0')f[x_0', x_1'] + (x - x_0')(x - x_1') \\
 &\quad \times f[x_0', x_1', x_2'] \\
 &= y_0' + (x - x_0') \frac{y_1' - y_0'}{x_1' - x_0'} + (x - x_0')(x - x_1') \\
 &\quad \times \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2' - x_1'} - \frac{f_1 - f_0}{x_1' - x_0'}}{x_2' - x_0'} \quad (8-4)
 \end{aligned}$$

等间隔不仅可以像图8-16那样沿 x 轴截取, 亦可以将凸轮一周分为两段, 采取不同的方式: 在 $(45^\circ, 135^\circ)$ 与 $(-135^\circ, -45^\circ)$ 两区间内, 沿 x 轴截取等间隔; 在 $(-45^\circ, 45^\circ)$ 与 $(135^\circ, -135^\circ)$ 两区间内, 沿 y 轴截取等间隔, 以免这两段轮廓的斜率太大, 影响计算误差。同样, 等间隔可以是角度 θ , 采用极坐标进行运算时, 凸轮转动, 只测升程。

第五节 凸轮CAD/CAM系统及其发展前景

广泛应用计算机对凸轮机构进行辅助设计, 对凸轮本体进行辅助制造, 正在深刻地改变着凸轮机构设计与制造的面貌, 代表了近年来这一研究领域的发展方向。

一、计算机辅助设计

计算机辅助设计 (CAD) 可以充分利用计算机的高速计算能力、逻辑判断能力、大量存储能力、图象显示能力和人机会话能力, 与设计者的经验与思维能力相结合, 为快速完成高质量的设计工作提供可能性。换言之, 计算机辅助设计使人和计算机将各自最好的特性结合起来, 共同进行设计工作。

在设计凸轮机构时, 由设计者进行整体的构思, 并将设计原则与设计要求通过计算机, 由计算机对运动规律、几何参数、运动与动力特性等进行大量的资料检索与计算, 利用软件进行多种方案的优化选择, 然后通过打印或图形显示出最终的设计结果。设计人员可通过不同媒介对设计作出修改, 使设计更加合理。最后借助自动编程机或计算机本身带有的软件把设计数据转换成适合

数控机床输入的穿孔纸带。如果设计软件比较完善，对一般的凸轮优化设计，从输入数据到输出结果，几十分钟甚至几分钟即可完成，而人工设计常常要花几天时间，还不一定能得到最合理的方案。对于品种多、批量小和形状复杂的凸轮机构设计，CAD具有设计周期短、可靠性高和成本低等优点，提高了自动机械产品的竞争力。

凸轮CAD系统一般采用交互式或会话型系统。交互式系统能够使计算机和人随时交换信息，在一个系统中互相配合，以完成全部设计任务。这种人-机会话型系统对于CAD系统有特别重要的意义。一方面在设计过程中，容易发现错误并随时修正，使复杂的设计得以顺利进行；另一方面，在对设计结果进行评价时，设计者可以利用自身的工程经验和直觉判断，反复修改参数，由计算机自动寻优。

如同一般机械设计过程那样，利用计算机进行凸轮机构设计的全过程，可以用图8-17所示框图表示。

首先根据自动机械总体设计要求，明确对所设计的凸轮机构的具体要求。这些要求或来源于对现有机构存在问题的改进，或来源于新产品、新工艺及新技术的发展。从这些要求出发，定义需要设计的问题或内容，诸如物理与功能特性，运动精度与残留振动，运转噪声，工作寿命，造价，以及结构工艺性等。

凸轮机构的综合与分析关系极为密切，设计时可能要反复交

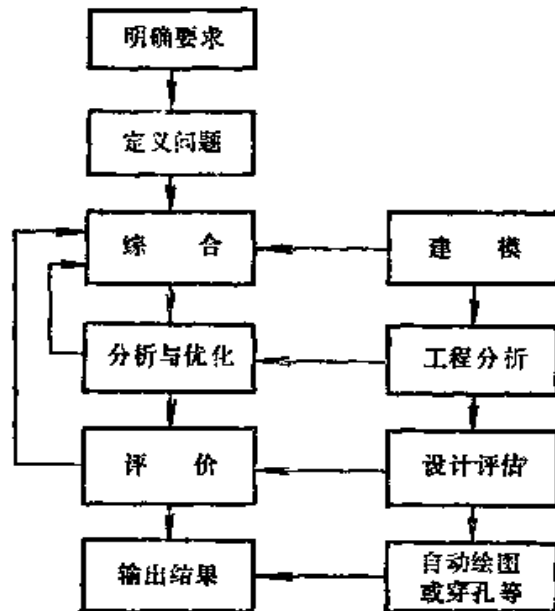


图8-17 计算机辅助设计凸轮机构的过程框图

替多次，直到获得最优解为止。综合与分析所用的模型、公式、参数与工程分析方法等，已在第二章到第七章各节中详细介绍，并编制成了应用程序包。这种程序包由许多子程序组成，包括：运动规律计算，平面凸轮轮廓参数运算，空间凸轮轮廓参数计算，凸轮机构强度校核计算，凸轮机构动力学分析与综合，平行分度凸轮机构等常用凸轮机构的优化设计，以及图形显示等辅助程序，等等。针对不同的设计要求，在人机会话型设计过程中，只须调用上述子程序中的一部分。

设计评估主要指设计精度的校核。传统的设计评价常常要求制作一个原型凸轮机构来进行试验，确定它的运行性能、工作精度、可靠性和其它准则是否达到预期的要求。采用了计算机终端屏幕显示后，设计结果可以全局放大显示出来，供设计者直觉判断。采用计算机模拟技术，还可以在屏幕上展现凸轮机构的动态过程，发现凸轮机构是否会出现干涉或根切等现象。这种动态模拟软件包增强了设计者对机构运行作直观分析的能力。

通过计算机的外围设备，如X-Y绘图仪、打印机、穿孔机、硬拷贝机等，输出最后的设计结果。设计结果可以是传统的设计图纸或轴测图，可以是轮廓各点的坐标值，也可以是能直接用于数控机床输入的穿孔纸带。后者的信息已经用APT等语言进行了变换，并包括了加工工艺数据，由自动编程机自动地实现这一转换。这就使传统的机械制图发生了重大的变化，在凸轮零件图上可以不用画出两面或三面视图和标注尺寸，在CAD系统中，在凸轮图纸上只要注明从动件的运动规律或从动机构的工作循环图，给出基圆半径等最基本的参数或从动件系统的几何参数，计算机便可自动地计算出加工所需的所有数据，并记录在穿孔纸带或磁带上。图8-18是一个典型的例子，其表达方式适用于特定的凸轮CAD系统。图上的数据只是凸轮机构简图的几何参数与从动件位移的循环图。指令语言是该CAD的设计人员针对需要设计的项目编制的CAD程序用输入语言。这种语言可以使设计者与计算机建立方便的联系，提高了设计效率。从动件位移的运

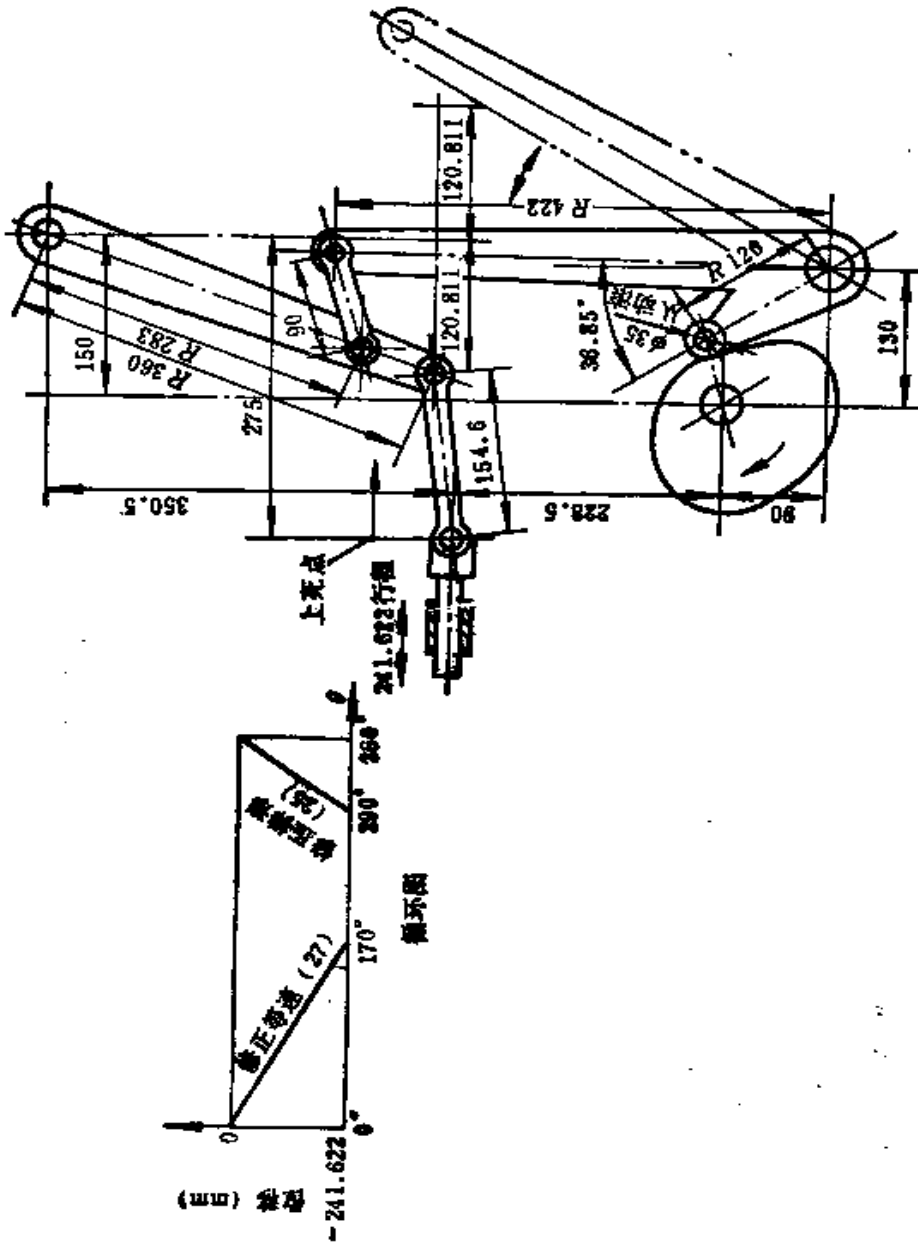


图8-18 凸轮CAD系统的凸轮数据图

动规律，在程序语言中只需给出编号即可。例如，在这一CAD系统的运动规律子程序中，规定修正等速的编号为27，修正梯形为25等。于是，图8-18所示凸轮机构CAD程序输入部分可写出如下：

```
MECHA/LINK, CLINK, 1, ROLL, DISK
LINK/L, 350.5, 180D, 154.6, 360, 150X, 579Y, 0, 283, E
CLINK/1, 90, 422, 130X, -90Y, 36.85D, 120, B
ROLL/35DIA
DISK/CLW
OFFSET/R
INIT/LIN F AR, 275
SET/0, 170, 290, 360
DISP/0, -241.622, -241.622, 0
CURVE/1, 27
CURVE/2, 0
CURVE/3, 25
```

二、计算机辅助制造

狭义的计算机辅助制造 (CAM), 是指利用数控机床对凸轮进行加工。广义的CAM是指把计算机引入凸轮加工过程的各个阶段, 实施人-机结合, 监视、控制与管理全部加工过程, 以提高生产效率, 确保成品质量, 进一步提高生产过程的自动化水平。

凸轮的计算机辅助制造系统应具有如下特性:

(1) 适应性: 凸轮多为小批量多品种零件, 系统应具有柔性, 能适应大范围内品种的变化。

(2) 灵活性: 考虑到CAM系统投资很大, 应在结构上留有由小到大发展的可能性。

(3) 可靠性: 由于系统复杂, 应在保证加工精度的前提下, 要求有较高的可靠性。

(4) 高效率: 这是体现CAM系统优越性最重要的一点。提高效率的主要目标是减少零件在车间的停留时间和上机等待时间。因此必须重视控制与管理的各个环节, 以取得最大的经济效

益。

计算机辅助制造系统由硬件和软件两部分组成。硬件包括机床、测量设备、计算机及有关外围设备等；在自动化车间中还包括自动运输、贮存装置与机器人等。软件是指在计算机上以较短时间简便而廉价地监控、调度、处理并最终控制数据流的各种程序和数据库。这些程序可以直接写入计算机内存，或固化成中央处理机（CPU）的一部分；更多的是记录在软盘或磁带上，需要时再调出使用。

CAM 系统的软件一般包括以下五部分：

1. CAM 数据库

数据库是 CAM 系统中数据的总存贮处，存放由 CAD 系统获得的设计数据，供监控、调度和制造控制等使用。数控机床的生产数据、生产调度数据、监控数据、质量控制数据、切削率数据和有关的生产与管理数据，均存贮在 CAM 数据库内。

2. 工程计划程序

工程计划程序从数据库中取得设计数据和切削率等数据，操作者再把对制造的说明输入该程序，根据这些数据与信息进行分析与处理，从而得出生产数据和所需的在数控机床上加工作件的程序。这些数据经后置处理后，存放在数据库中，供加工控制使用。

3. 生产调度程序

生产过程的管理由生产调度程序控制。它从数据库中取得零件加工数据和各种产品的优先次序安排；不断从现场取得生产情况的反馈信息；将这些信息进行处理，得出零件加工实况、机床实况、实际加工时间与计划加工时间之比等数据；预告或检测机床、设备、系统的故障。同时，生产调度程序对这些数据进行综合，以便决定机床应维持的最佳加工负荷。其结果送到供加工用的预备库内，并向操作者发出有关刀具、装卸时间、加工时间等辅助信息。

4. 加工控制程序

加工控制程序受生产调度程序支配，从预备库中取得零件加工程序以及必要的辅助加工信息。数控机床则在加工控制程序的控制下进行加工。加工状态信息反馈到调度程序以实现调度的优化，而加工过程的信息及机械状况则反馈到数据库中作为监控数据存入。

5. 质量控制程序

质量控制程序接受从操作者送来的质量要求，和由测量设备发出的零件质量信息，然后提供被加工零件的精度情况；如果达不到精度要求，立即向加工控制及调度发出信息。

三、CAD 与 CAM 一体化

凸轮加工自动化的高级阶段是走向设计、制造一体化，即把 CAD 与 CAM 结合起来，形成从产品设计到制造过程的完整系统：CAD/CAM。目前，CAD 系统输出的数据一般还不能直接传输到 CAM 系统中，需要通过穿孔纸带和磁带等媒介。

要实现 CAD 与 CAM 的联接，涉及到比较复杂的接口技术与软件开发，正在加紧研制过程之中，尚未达到比较高级和成熟的阶段。预计在不久的将来，全面实现 CAD/CAM 设想的计算机集成生产系统[⊖]将成为现实。到那时，凸轮的设计、制造、检验与管理等全部信息的存贮与流动，都借助于计算机进行，不用再去绘制传统的图纸了，从而实现从设计到加工的连续处理。加工过程中的各种情况和质量信息将反馈回 CIMS，从而使系统可以在考虑各种制约条件之后，实现生产和管理的最佳化。

CAD/CAM 的发展前景取决于通讯、微处理机，以及相关软件的发展。改善通讯技术将会扩大大、机床、与计算机之间的信息交换能力。系统通信能力强，有可能使设计者或操作者在远离计算中心的终端上进行复杂的大规模运算。这种终端将小到像一个很方便的袖珍计算器，但具有与计算中心通讯的能力。甚至于在这个袖珍终端上，设计者可以进行会话式作图。微型电视可望应用于这一目的，但应具有把视图的任意部分放大的“窗口”

[⊖] Computer Integrated Manufacturing System, 简称 CIMS。

功能。

CAD/CAM发展的另一趋势是广泛采用带有专家或人工智能系统的微型计算机。绘图仪等外围设备具有局部智能系统,只要根据简单的指令就可绘制出复杂的图形。采用智能化终端将构成新一代CAD/CAM系统。随着超大规模集成电路生产技术的进步,CPU的能力将大大增加,智能系统的价格将会降低,故障率将会减少。

以微机为基础的智能系统的广泛应用,亦将影响到机床、机器人与检测装置等的发展,能适应多品种加工的柔性加工系统[⊖],在计算机统一管理下,将达到很高的加工效率,并具有较强的适应性。

计算机存贮容量的扩大与价格的下降,有可能把成千上万张图形的信息直接存贮在计算机内存中,不必依靠外存。

图形显示技术正在改进之中,高分辨率与快速响应的光栅系统已经实用化。现在已有2000条线分辨率的光栅系统问世,4000条线分辨率的光栅系统正在研制之中。新式平板型液晶显示终端将会取代现有的阴极射线显象管终端(CRT)。新式终端具有画面大,厚度薄,清晰精确,电压低,分辨率高等优点。

在计算机图学中采用彩色与立体图形,加上多色绘图仪与彩色复印机,将使绘出的图形更加生动和直观。

把数据库管理系统[⊗]与CAD系统结合起来,将改进数据的存取技术。

能识别声音指令的智能终端将引入CAD/CAM系统。图形识别系统的进展,将促进检测设备与机器人的进一步完善。对机器人的机构动力学,视觉与触觉等传感器,以及其它智能系统的研究,将为机器人的应用开辟广阔的前景。

汉字终端的进一步开发,对我国技术人员使用CAD/CAM系统更具有特殊的意义。

⊖ Flexible Manufacture System, 简称FMS。

⊗ Data Base Management System, 简称DBMS。

总之,新一代 CAD/CAM系统的进一步发展,将逐渐消除设计与制造之间传统的分离,全盘自动化的设计制造一体化系统将变成现实。

四、展望

展望未来,凸轮机构的研究正在向纵深发展,国内外学者拟订了许多研究课题,主要有以下几方面:

1. 运动学设计

- (1) 通用的、性能优良的凸轮机构运动规律的生成与优化;
- (2) 开发包含平面与空间凸轮的凸轮连杆机构的CAD通用程序;
- (3) 凸轮机构的计算机模拟;
- (4) 不等间距系列等特殊凸轮机构设计方法的确定;
- (5) 空间凸轮轮廓曲率分析的简化;
- (6) 并联耦合凸轮组合机构的分析方法研究。

2. 动力学设计

- (1) 作用于凸轮系统上的动载分析与评价;
- (2) 模拟用通用多自由度模型的建立;
- (3) 非线性动力学的研究;
- (4) 凸轮机构的平衡;
- (5) 凸轮机构的防振或控振研究;
- (6) 振动测试技术的研究。

3. 结构设计

- (1) 碳纤维等轻质材料在凸轮从动件上的应用;
- (2) 凸轮的摩擦与磨损研究;
- (3) 凸轮体材质及其表面处理技术的研究;
- (4) 凸轮机构的扩大应用;
- (5) 凸轮与凸轮机构的标准化、系列化。

4. 加工技术

- (1) 精密凸轮加工机床的开发;
- (2) 凸轮轮廓加工的自适应控制技术的研究;

- (3) 空间凸轮刀具补偿技术的开发;
- (4) CAD/CAM 一体化及其后处理程序的开发;
- (5) 凸轮的非切削加工研究;
- (6) 凸轮轮廓测量及其误差分析;
- (7) 计算机集成生产系统的开发。

随着上述技术难题的解决, 凸轮机构在自动机械的发展中, 将会起到越来越重要的作用。

附 录

附录 I 复极矢量

一、复极矢量

在平面矢量分析中，将矢量表示成复数极坐标形式，即复极矢量的形式，是很方便的。

图 3-1 中的 xoy 为一平面直角坐标系。如果把该平面理解为一复平面，则 x 轴为实轴， y 为虚轴。与实轴 x 重合（或平行）、长度为 r 的矢量 R_0 可以用一实标量 r 来表示。与虚轴 y 重合（或平行）、长度为 r 的矢量则可以用一虚标量 rj 表示（ $j = \sqrt{-1}$ ，为虚数单位）。平面上任一矢量 R 都可以由 R_0 旋转某一角度 θ 而得：

$$R = e^{j\theta} R_0 = e^{j\theta} r \quad (\text{I-1})$$

或

$$R = r e^{j\theta} \quad (\text{I-2})$$

本书用粗体字（如 R 、 α 等）表示矢量。

式 (I-1) 或式 (I-2) 就是复极矢量的表达式。式中 r 是矢量的模，表示其长度； θ 是矢量的幅角，表示其方向。式 (I-1) 和式 (I-2) 虽然是等价的，却表示对复极矢量的两种不同的理解。式 (I-1) 中指数形式的复数 $e^{j\theta}$ 可以理解为一平面回转算子，它对一矢量的作用相当于将该矢量回转 θ 角。式 (I-2) 中的 $e^{j\theta}$ 则表示幅角为 θ 的一个单位矢量：

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (\text{I-3})$$

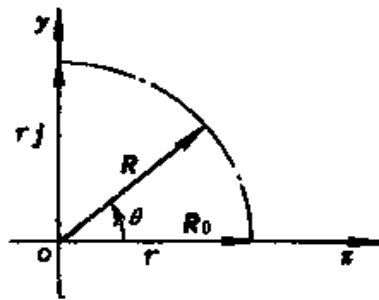


图 I-1 复极矢量

我们规定 θ 角是有向角，它都是以 x 轴为始边的。相对于 x 轴逆时针回转时， θ 取负值；反之，取正值。取其主值范围为： $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 。

二、矢量的回转与坐标系的回转变换

矢量 R 回转 θ 角（逆时针为正，顺时针为负）得矢量 R_1 （见图 I-2 a）。它们的关系为：

$$\text{或} \quad \left. \begin{aligned} R_1 &= e^{j\theta} R \\ R_1 &= R e^{j\theta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-4})$$

事实上， $R_1 = r e^{j\theta_1} = r e^{j(\theta_0 + \theta)} = r e^{j\theta_0} e^{j\theta} = \bar{R} e^{j\theta}$ 。

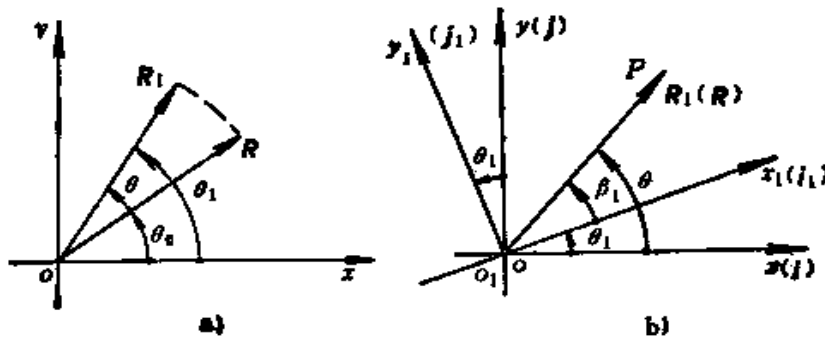


图 I-2 矢量的回转与坐标系的回转

当坐标系 xoy 回转 θ 角成为坐标系 $x_1o_1y_1$ 时，这两个坐标系的变换关系可以用代表坐标轴方向的单位矢量的回转关系来表示。如图 I-2 b 所示。与 x 、 x_1 轴重合的单位矢量分别为 i 、 i_1 ，与 y 、 y_1 轴重合的单位矢量分别为 j 、 j_1 。则由矢量回转前后的关系可得

$$\begin{aligned} i_1 &= i e^{j\theta} \\ j_1 &= j e^{j\theta} \end{aligned}$$

同一矢量在不同的坐标系中有不同的表达式。下面考察一矢量随一动坐标系一起相对于固定坐标系运动时，其表达式的变化。如图 I-2 b 所示，设 R_1 为动坐标系 $x_1o_1y_1$ 中的一矢量，其表达式为

$$R_1 = r_1 e^{j\beta_1}$$

它随 x_1, o_1, y_1 坐标系一起相对于固定坐标系 xoy 作定轴转动。 x_1, o_1, y_1 相对于 xoy 运动的角位移为 θ_1 。显然，矢量 R_1 在 xoy 坐标系中的表达式是

$$R = r e^{j\theta} = R_1 e^{j\theta_1} = r_1 e^{j(\beta_1 + \theta_1)} \quad (\text{I-5a})$$

因此，

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \beta_1 + \theta_1 \\ r &= r_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-5b})$$

反之，有 $R_1 = R e^{-j\theta_1} = r e^{j(\theta - \theta_1)} \quad (\text{I-5c})$

三、矢量函数

矢量可以表示平面上的一个点。当一个动点在平面上按一定的规律连续运动时，就形成一条轨迹——平面曲线。因此，平面曲线可以用矢量函数来表达，平面曲线的几何性质可以由矢量函数的解析性质来体现。

平面曲线函数的表达方法按所采用的坐标系划分有以下三种：

$$\text{直角坐标系}(x-y) \left\{ \begin{array}{l} \text{显函数形式: } y = f(x) \\ \text{隐函数形式: } F(x, y) = 0 \\ \text{参数形式: } \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{极坐标系}(r-\beta): r = r(\beta)$$

$$\text{自然坐标系}(k-s): k = k(s)$$

式中， k 与 s 分别为曲线上某点的曲率与弧长。

上述三种坐标系的函数表达式各有其优缺点和适用范围。复极矢量的函数表达式

$$R = r e^{j\beta}$$

综合了上述三种形式的优点，可以根据需要方便地转化为其他坐标形式。因此，在平面机构学中已普遍采用复极矢量函数作为数学工具。

四、矢量的微分

设矢量在回转时，其模 r 保持不变。式(I-2)等式两边都对 θ 求导，得：

$$\frac{dR}{d\theta} = r j e^{j\theta}$$

令 θ 为时间 t 的函数，式(I-2)等式两边对 t 求导，得：

$$\frac{dR}{dt} = r j e^{j\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

令 $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$ ， $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &= r j \dot{\theta} e^{j\theta} = r \dot{\theta} e^{j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \\ \dot{R} &= j \dot{\theta} R \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-6})$$

或

式中， $\dot{\theta}$ 即矢量回转的角速度。虚数因子 j 表示 \dot{R} 的方向与 R 垂直。微分矢量 \dot{R} 的幅角为 $\theta + \frac{\pi}{2}$ 。

在一般情况下， r 也是变量。这时则有

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &= (\dot{r} + r j \dot{\theta}) e^{j\theta} \\ \dot{R} &= \dot{r} e^{j\theta} + j \dot{\theta} R \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-7})$$

或

式中，右端的第一项表示沿 R 方向速度的分量，即 R 矢量的长度变化引起的速度——径向速度；第二项为横截方向（与 R 垂直的方向）上的速度分量，是 R 的幅角变化（即方向变化）引起的速度（参见图 I-3）。

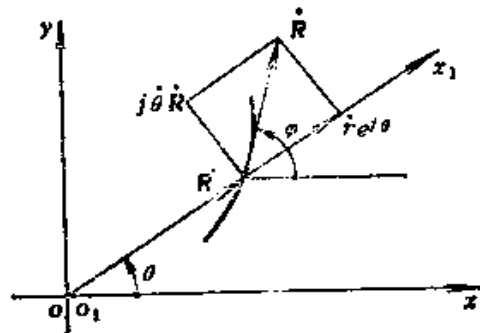


图 I-3 矢量的微分

由矢量分析的基本知识可知，速度矢量 \dot{R} 的方向就是矢端 P 的轨迹的切线方向； \dot{R} 的模就是在 P 点的弧长的导数 \dot{s} 。因此，可以令

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{s}e^{j\varphi} \quad (\text{I-8})$$

式中, φ 为 $\dot{\mathbf{R}}$ 的幅角, 也就是矢端轨迹在 P 点的切线矢量的方向角。再由式(I-7)可得:

$$\dot{s}e^{j\varphi} = (\dot{r} + rj\dot{\theta})e^{j\theta}$$

由此可解得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} + \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-9})$$

由图 I-3 可知, \mathbf{R} 与 $\dot{\mathbf{R}}$ 之间的夹角为:

$$\varphi - \theta = \arctan \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} \quad (\text{I-10})$$

下面, 再考察矢量经回转变换后的微分关系。设图 I-4 中的 xoy 为一定坐标系。 $x_1o_1y_1$ 为相对于 xoy 作定轴转动的动坐标系, 其角位移为 θ_1 。 P 点在 $x_1o_1y_1$ 与 xoy 中轨迹的矢量函数分别为 \mathbf{R}_1 与 \mathbf{R} 。图中所画出的曲线是 \mathbf{R}_1 ,

其复极矢量形式为:

$$\mathbf{R}_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

由矢量的回转变换关系式(I-5 a)有

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 e^{j\theta}$$

等式两边对 t 求导, 得:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_1 e^{j\theta_1} + j\dot{\theta}_1 \mathbf{R}_1 e^{j\theta_1}$$

或 $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_1 e^{j\theta_1} + j\dot{\theta}_1 \mathbf{R}$

$$(\text{I-11})$$

令 $\mathbf{V}_r = \dot{\mathbf{R}}_1 e^{j\theta_1}$, $\mathbf{V}_c = j\dot{\theta}_1 \mathbf{R}$ 。由

质点运动学知识可知, \mathbf{V}_r 是 P 点的相对速度。 $\dot{\mathbf{R}}_1$ 是 P 点在动坐标系中的速度矢量, 其方向沿曲线 \mathbf{R}_1 在 P 点的切线方向。 $\dot{\mathbf{R}}_1$ 乘以因子 $e^{j\theta_1}$ 表示它被转换到定坐标系 xoy 中。 \mathbf{V}_c 则是 P 点的牵连速度, 即 P 点随动坐标系 $x_1o_1y_1$ 运动的速度。式(I-11)说明 P 点在坐标系 xoy 中的速度 $\dot{\mathbf{R}}$ (绝对速度) 为 P 点的相对速度

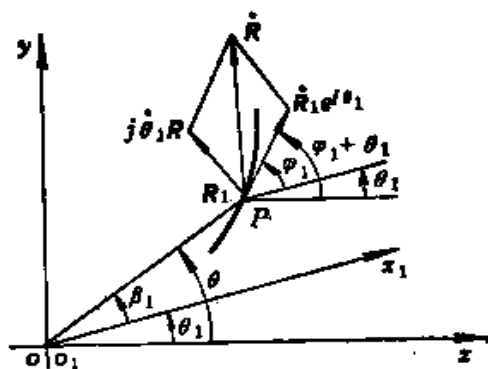


图 I-4 回转变换后的矢量
微分关系

V_r 与牵连速度 V_e 的矢量和 (参见图 I-4)。

式(I-7)等式两边再对 t 求一次导, 就可得到加速度矢量:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{j\theta} + j(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{j\theta} \\ &= \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta\end{aligned}\quad (\text{I-12})$$

式中, $\mathbf{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{j\theta}$, 为径向加速度; $\mathbf{a}_\theta = j(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{j\theta}$, 为横截方向的加速度。其中, $2j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta}$ 为科氏加速度。

如果式(I-8)等式两边对 t 求导, 则可得

$$\ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{s} + j\dot{\varphi}\dot{s})e^{j\varphi}\quad (\text{I-13})$$

而矢端 P 的轨迹的曲率为 [25]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{s}}\quad (\text{I-14})$$

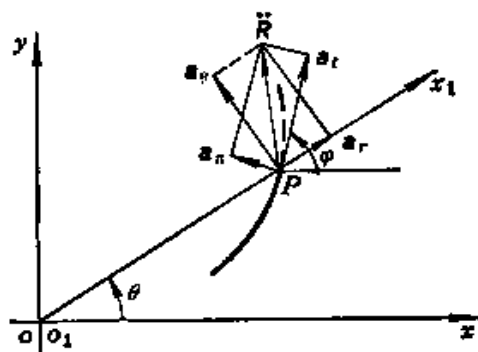


图 I-5 矢端的加速度关系

式中, ρ 为曲率半径。将该式代入式(I-13)得:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \left(\ddot{s} + j\frac{\dot{s}^2}{\rho} \right) e^{j\varphi} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n\quad (\text{I-15})$$

式中, $\mathbf{a}_t = \ddot{s}e^{j\varphi}$, 为切向加速度; $\mathbf{a}_n = j\frac{\dot{s}^2}{\rho}e^{j\varphi}$, 为法向加速度 (参见图 I-5)。

综合式(I-15)及式(I-12), 可得切向加速度与法向加速度的量值分别为:

$$\left. \begin{aligned}\ddot{s} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos(\varphi - \theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin(\varphi - \theta) \\ \frac{1}{\rho}\dot{s}^2 &= -(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin(\varphi - \theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos(\varphi - \theta)\end{aligned}\right\} (\text{I-16})$$

其曲率为:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin(\varphi - \theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos(\varphi - \theta)}{\dot{s}^2}\quad (\text{I-17})$$

再将式(I-9)、式(I-10)代入(I-17), 即可得极坐标的曲率公

式:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\dot{r} - (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)r\dot{\theta}}{\dot{s}^3} \quad (\text{I-18})$$

如果用矢量微分 $\dot{\mathbf{R}}$ 与 $\ddot{\mathbf{R}}$ 来表示, 则有

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{\mathbf{R}} \times \ddot{\mathbf{R}}|}{|\dot{\mathbf{R}}|^3} \quad (\text{I-19})$$

附录 II 空间回转变换张量

一、矢量的反对称张量、自并矢张量与补并矢张量

在空间矢量分析中, 应用回转变换张量是很方便的。其最大的优点是可以得到与平面问题中的复极矢量分析形式相似的公式, 因而使繁杂的空间问题变得简明易懂。

设 ω 为一定义于空间直角坐标系 $o-xyz$ 中的单位矢量, 其方向余弦依次为 λ 、 μ 、 ν 。则 ω 可以表示成列向量形式:

$$\omega = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

1. 基本定义

关于单位矢量 ω , 引进下述基本定义:

$$\text{令} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-1})$$

J 称为 ω 的反对称张量;

$$\text{令} \quad K = \omega\omega^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ \mu\lambda & \mu^2 & \mu\nu \\ \nu\lambda & \nu\mu & \nu^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

K 称为 ω 的自并矢张量;

$$\text{令} \quad I = I_0 - K = \begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu \\ -\mu\lambda & 1 - \mu^2 & -\mu\nu \\ -\nu\lambda & -\nu\mu & 1 - \nu^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II-3})$$

I 称为 ω 的补并矢张量。式中, I_0 为单位张量:

$$I_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上定义中的各张量都是二阶张量, 都用 3×3 矩阵来表达。

I 、 J 、 K 都由 ω 决定。

2. 代数、几何意义

一张量作用于 (乘以) 一矢量, 得到一新矢量。其运算法则与矩阵的乘法法则相同。张量 I 、 J 、 K 作用于 (乘以) 一矢量 $R = [x \ y \ z]^T$ 的意义如下:

$$\begin{aligned} KR &= (\omega\omega^T)R = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} [\lambda \ \mu \ \nu] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} (\omega \cdot R) = (\omega \cdot R)\omega \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

由此式可以看出, K 乘以 R 可得一与 ω 同向的矢量, 其模为 ω 与 R 的数积。换句话说, K 与 R 相乘而得到的矢量为 R 在 ω 上的投影。

$$JR = \begin{bmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega \times R \quad (\text{II-5})$$

该式表明, J 作用于 R 等于 ω 与 R 的矢积。

$$\left. \begin{aligned} IR &= (I_0 - K)R = R - KR \\ \text{或} \quad R &= IR + KR \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-6})$$

另外, 因

$$\begin{aligned} (IR) \cdot (KR) &= (R - KR) \cdot (KR) \\ &= R \cdot (KR) - (KR) \cdot (KR) \\ &= (\omega \cdot R)^2 - (\omega \cdot R)^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-7})$$

故 IR 与 KR 互相垂直。

由以上二式可知, I 作用于 R 得一与 KR 正交, 且可与 KR 合成为 R 的矢量。即分别以 K 、 I 作用于 R , 就可以把 R 在由 ω 与 R 决定的平面上分解为两个互相正交的矢量 KR 与 IR 。

再考虑到式 (II-5)—— $JR = \omega \times R$, 则 IR 、 JR 、 KR 三个矢量可以构成一个正交的右旋坐标系。其中, KR 与 ω 重合, 相当于 k 轴; IR 相当于 i 轴; JR 相当于 j 轴(参见图 II-1)。图 II-1 所示之坐标系各坐标轴方向的单位矢量为:

$$\begin{aligned} i &= \frac{IR}{|IR|} \\ j &= \frac{JR}{|JR|} \\ k &= \frac{KR}{|KR|} = \omega \end{aligned}$$

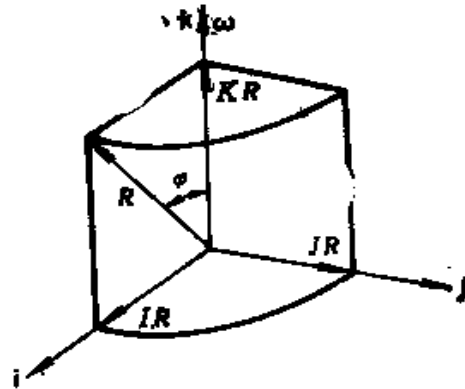


图 II-1 单位矢量 ω 的张量 I 、 J 、 K

令 R 与 ω 之间的夹角为 φ , 则有

$$|IR| = |R| \sin \varphi$$

$$\text{而 } |JR| = |\omega \times R| = |R| \cdot |\omega| \sin \varphi = |R| \sin \varphi$$

单位矢量 ω 的模

$$|\omega| = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

所以,

$$|IR| = |JR| \quad (\text{II-8})$$

即, IR 与 JR 的长度相等。

3. 基本性质

张量与张量相乘仍得一同阶张量。其运算法则同矩阵乘法^[71]。由于 ω 是单位矢量, 它的模为 1。由此可得张量 I 、 J 、 K 下述基本性质:

$$\begin{aligned} (1) \quad JJ = J^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{bmatrix} \\ &= -I \end{aligned}$$

$$(2) \quad KK = K^2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} [\lambda \ \mu \ \nu] \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} [\lambda \ \mu \ \nu] = K$$

$$(3) \quad II = I^2 = (I_0 - K)(I_0 - K) = I_0^2 - 2I_0K + K^2 = I_0 - K = I$$

$$(4) \quad KI = IK = 0$$

$$KJ = JK = 0$$

$$(5) \quad IJ = JI = J$$

$$(6) \quad J^T = -J, \quad K^T = K, \quad I^T = I$$

综上所述, I 、 J 、 K 三张量互乘符合交换律。它们的自乘与互乘关系可简单地用矩阵形式表达:

$$\begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} [I \ J \ K] = \begin{bmatrix} II & IJ & IK \\ JI & JJ & JK \\ KI & KJ & KK \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & J & 0 \\ J & -I & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \quad (\text{II-9})$$

多次自乘关系如下:

$$\left. \begin{aligned} I^n &= I \\ J^n &= \begin{cases} j^n I & (n \text{ 为偶数时}) \\ j^n J & (n \text{ 为奇数时}) \end{cases} \\ K^n &= K \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-10})$$

式中, j 为虚数单位, 即 $j = \sqrt{-1}$ 。 I 、 J 、 K 自乘与互乘的关系, 可将它们依次类比于 1 、 j 、 0 三者之间的关系。这样, 既便于记忆, 又容易理解。性质 (6) 中的 J^T 、 K^T 、 I^T 分别是 J 、 K 、 I 的方阵的转置。该性质是显而易见的, 因为 K 、 I 是对称张量, J 是反对称张量。

二、空间矢量回转变换张量

1. 回转变换张量的引入

设空间一矢量 $R_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ 绕定轴 $\omega = [\lambda, \mu, \nu]^T$ (ω 是该定轴方向的单位矢量) 回转 θ 角。 θ 是有向角, 其正负

由右手法则确定。即从 ω 轴的正向观察，逆时针回转为正，反之为负。回转后得一新矢量 $R_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$ 。以下，求 R_2 与 R_1 、 ω 以及 θ 的关系。

由前所述， IR_1 、 JR_1 、 KR_1 组成如图 II-2 所示之右旋正交坐标系。 R_1 可以分解为两个分量〔由式 (II-6)〕：

$$R_1 = KR_1 + IR_1$$

显然，在 R_1 绕 ω 轴回转到 R_2 的过程中， KR_1 因其与 ω 重合而保持不变。而 IR_1 在 $i-j$ 平面上回转了 θ 角，到达矢量 IR_2 的位置。从 IR_1 回转到 IR_2 是一个平面矢量回转的问题。又由式 (II-8) 可知：

$$|IR_1| = |JR_1|$$

$$\text{所以} \quad |IR_1| = |IR_2| = |JR_1| \quad (\text{II-11})$$

由此，可以把 IR_2 分解为 $i-j$ 平面上的两个分量，即

$$\begin{aligned} IR_2 &= |IR_2| \cdot (i \cos \theta + j \sin \theta) \\ &= (|IR_1| i) \cos \theta + (|JR_1| j) \sin \theta \\ &= \cos \theta (IR_1) + \sin \theta (JR_1) \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad IR_2 = (I \cos \theta + J \sin \theta) R_1 \quad (\text{II-12})$$

另外，

$$R_2 = KR_2 + IR_2 \quad (\text{II-13})$$

由图 II-2 显而易见

$$KR_2 = KR_1 \quad (\text{II-14})$$

将式 (II-12)、式 (II-14) 代入式 (II-13)，得

$$R_2 = KR_1 + (I \cos \theta + J \sin \theta) R_1$$

$$\text{即} \quad R_2 = (K + I \cos \theta + J \sin \theta) R_1 \quad (\text{II-15})$$

$$\text{令} \quad G = K + I \cos \theta + J \sin \theta \quad (\text{II-16})$$

显然， G 是一取决于回转轴单位矢量 ω 与回转角 θ 的二阶张量，

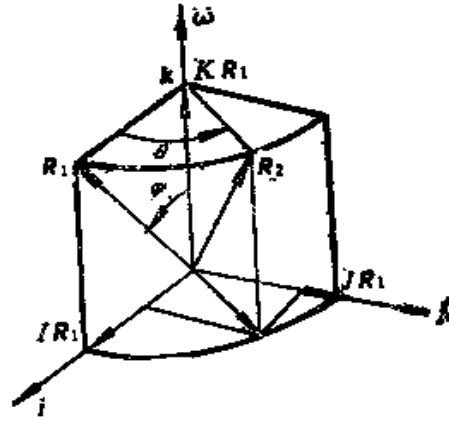


图 II-2 空间矢量的回转变换

称为回转变换张量。为显示其自变量，亦可记为

$$G = G(\omega, \theta)$$

则式(II-15)可简单地表为

$$R_2 = GR_1 = G(\omega, \theta)R_1 \quad (\text{II-17})$$

该式为空间矢量回转变换的基本关系式。

此外，由 I 、 J 、 K 的定义和基本性质可得：

$$\begin{aligned} K &= I_0 - I = I_0 + J^2 \\ I &= -J^2 \end{aligned}$$

代入式(II-16)，得：

$$G = I_0 + J \sin \theta + J^2(1 - \cos \theta) \quad (\text{II-18})$$

$\sin \theta$ 与 $\cos \theta$ 的泰勒展开式分别为

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \\ \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

代入式(II-18)，得：

$$G = I_0 + J\theta + \frac{1}{2!}(J\theta)^2 - \frac{1}{3}J\theta^3 - \frac{1}{4!}J^2\theta^4 + \dots \quad (\text{II-19})$$

又考虑到 J 的性质(式(II-10))：

$$\begin{aligned} J &= -J^3 = J^5 = -J^7 = \dots \\ J^2 &= -J^4 = J^6 = -J^8 = \dots \end{aligned}$$

代入式(II-19)，得

$$G = I_0 + J\theta + \frac{1}{2!}(J\theta)^2 + \frac{1}{3!}(J\theta)^3 + \frac{1}{4!}(J\theta)^4 + \dots \quad (\text{II-20})$$

定义 $e^{J\theta} = I_0$ (类似于 $e^0 = 1$) 为一单位张量，则由指数函数 e^x 的展开式，可将式(II-20)表示为

$$G = e^{J\theta} \quad (\text{II-21})$$

式(II-21)为一用指数函数形式表示的张量函数。它与平面的复

数单位矢量 $e^{j\theta}$ 不但形式类同,而且具有许多相同与相近的性质。

这样,式(II-17)可以表示为

$$R_2 = e^{j\theta} R_1 \quad (\text{II-22})$$

式(II-22)与平面问题中的回转变换形式相同。但是,张量与矢量的乘法不符合交换律^[71],因此,上式不能写成 $R_2 = R_1 e^{j\theta}$ 。这是与平面复极矢量不同的。

由式(II-16)及式(II-21)有

$$e^{j\theta} = K + I \cos \theta + J \sin \theta \quad (\text{II-23})$$

实际上,式(II-23)可以看成是平面单位复极矢量表达式(I-3)

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

的推广。在平面矢量的回转变换中,回转轴是与平面垂直的单位矢量,即

$$\omega = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

这时,与 ω 相对应的基本张量 I 、 J 、 K 分别为:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在平面问题中,只有二维运算是有效的。所以, I 、 J 、 K 可以简化为:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这时,式(II-23)式可简写为:

$$e^{j\theta} = I \cos \theta + J \sin \theta$$

$e^{j\theta}$ 乘以二维列向量与 $e^{j\theta}$ 乘以复数形式的矢量的作用完全是等效的。这是因为 I 、 J 乘以二维列向量与 1 、 j 乘以复数形式的矢量的效果是一样的。

上述张量 I 、 J 、 K 与 $e^{j\theta}$ 都是就给定的回转轴 ω 而言的。显然,回转轴不同,这些张量的“值”(元素的值)也不同。在存

在着多个回转轴时，可将回转轴方向的单位矢量的符号（用小写细体字母）作为各张量的下角标，将上述各张量记为 I_a 、 J_a 、 K_a 、 $e^{j'a}$ ，以示区别。

2. 回转变换张量的基本性质

(1) 交换律

I 、 J 、 K 与 $e^{j\theta}$ 的乘积符合交换律：

$$\left. \begin{aligned} Ie^{j\theta} &= e^{j\theta}I = I\cos\theta + J\sin\theta \\ Je^{j\theta} &= e^{j\theta}J = J\cos\theta - I\sin\theta \\ Ke^{j\theta} &= e^{j\theta}K = K \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-24})$$

由 $e^{j\theta}$ 的展开式和 I 、 J 、 K 的基本性质 (4)、(5) (即 I 、 J 、 K 三者的互乘都符合交换律) 可以很容易地验证式 (II-24)。

一般地说，同一回转轴的回转变换张量的乘积符合交换律。若不是同一回转轴的回转张量相乘，则不符合交换律。即

$$\left. \begin{aligned} e^{j_1\theta_1} \cdot e^{j_2\theta_2} &= e^{j_1\theta_1} \cdot e^{j_2\theta_2} = e^{j_1(\theta_1+\theta_2)} \\ e^{j_2\theta_2} \cdot e^{j_1\theta_1} &\neq e^{j_2\theta_2} \cdot e^{j_1\theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-25})$$

利用 $e^{j\theta}$ 的展开式与 I 、 J 、 K 的基本性质，很容易证明这一点。

(2) 周期性

$$\left. \begin{aligned} e^{j0} &= I_0 = I + K \\ e^{j\pi/2} &= J + K \\ e^{j\pi} &= -I + K \\ e^{j(\theta+\pi/2)} &= Je^{j\theta} + K \\ e^{j(\theta+\pi)} &= -e^{j\theta} + 2K \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-26})$$

上述各式由 $e^{j\theta}$ 的展开式可以直接得到。与 $e^{j\theta}$ 的特性 ($e^{j0} = 1$,

$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, $e^{j\pi} = -1$, $e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})} = je^{j\theta}$, $e^{j(\theta+\pi)} = -e^{-j\theta}$) 相比略有不同。式 (II-26) 中一般总含有 K 。这是因为空间矢量回转时，在回转轴上的投影分量总是保持不变。

(3) 正交性

$$(e^{j\theta})^{-1} = (e^{j\theta})^T = e^{-j\theta} \quad (\text{II-27})$$

式中, $(e^{J\theta})^{-1}$ 与 $(e^{J\theta})^T$ 分别代表 $e^{J\theta}$ 的方阵之逆阵与转置阵, 而 $e^{-J\theta} = e^{J(-\theta)}$ 。式 (II-27) 是很容易证明的。

因
$$e^{J\theta} \cdot e^{J(-\theta)} = e^{J(\theta-\theta)} = e^{J \cdot 0} = I_0$$

故 $e^{J(-\theta)}$ (或 $e^{-J\theta}$) 是 $e^{J\theta}$ 的逆, 即

$$e^{J\theta} = (e^{-J\theta})^{-1}$$

而
$$(e^{J\theta})^T = K^T + I^T \cos \theta + J^T \sin \theta$$

由 I 、 J 、 K 的基本性质 (6) 可得,

$$\begin{aligned} (e^{J\theta})^T &= K + I \cos \theta - J \sin \theta \\ &= K + I \cos(-\theta) + J \sin(-\theta) \\ &= e^{J(-\theta)} \\ &= e^{-J\theta} \end{aligned}$$

故
$$(e^{J\theta})^T = e^{-J\theta} = (e^{J\theta})^{-1}$$

显然, $e^{J\theta}$ 的方阵是一正交阵。

(4) 半角特性

$$e^{J\theta} - I_0 = J(e^{J\theta} + I_0) \tan \frac{\theta}{2} \quad (\text{II-28})$$

证明: 等式右边 = $J(e^{J\theta} + I_0) \tan \frac{\theta}{2}$

$$= J(K + I \cos \theta + J \sin \theta + I_0) \tan \frac{\theta}{2}$$

$$= (J + J \cos \theta - I \sin \theta) \tan \frac{\theta}{2}$$

$$= J \sin \theta + I(\cos \theta - 1)$$

$$= J \sin \theta + I \cos \theta - I$$

等式左边 = $e^{J\theta} - I_0$

$$= K + I \cos \theta + J \sin \theta + I_0$$

$$= I \cos \theta + J \sin \theta - I$$

因此, 式 (II-28) 两边相等, 等式成立。

将式 (II-28) 两边都乘以矢量 R_1 , 可得:

$$(e^{J\theta} - I_0)R_1 = J(e^{J\theta} + I_0) \tan \frac{\theta}{2} R_1$$

令 $R_2 = e^{J\theta} R_1$, 则有:

$$R_2 - R_1 = J(R_2 + R_1) \tan \frac{\theta}{2}$$

因此有

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{|R_2 - R_1|}{|J(R_2 + R_1)|} \quad (\text{II}-29)$$

在已知回转轴和回转前后的矢量 R_1 、 R_2 时, 可利用式 (II-29) 求出回转角 θ 。

(5) 数积不变性

$$[e^{J\theta}(R_1)] \cdot [e^{J\theta}(R_2)] = R_1 \cdot R_2 \quad (\text{II}-30)$$

该式说明, 二矢量在同一空间作回转变换后得到的两个新矢量的数积与原来两矢量的数积相等。这是很容易理解的。因为相同的空间回转变换既没有改变二矢量的相对几何位置 (即二者之间的夹角不变), 也没有改变二矢量的长度, 故二者的数积不变。

(6) 矢积分配律

$$e^{J\theta}(R_1) \times e^{J\theta}(R_2) = e^{J\theta}(R_1 \times R_2)$$

即 $e^{J\theta}$ 对二矢量矢积的乘积符合分配律。因为 $e^{J\theta}$ 对 R_1 、 R_2 、 $R_1 \times R_2$ 三矢量的作用也不改变它们的相对几何位置与长度。

3. 空间坐标系的回转变换

与平面坐标系一样, 当一空间坐标系 $o-i_1, j_1, k_1$ 围绕 ω 轴回转 θ 角变为 $o-i_2, j_2, k_2$ 坐标系时, 新老坐标轴矢量的关系为:

$$i_2 = e^{J\theta} i_1$$

$$j_2 = e^{J\theta} j_1$$

$$k_2 = e^{J\theta} k_1$$

设一矢量 R 在上述两个坐标系中分别用 R_1 、 R_2 表示, 则有:

$$R_2 = e^{-J\theta} R_1 \quad (\text{II}-31)$$

式中, 负号的含义是显而易见的。当坐标系 $o-i_2, j_2, k_2$ 绕 ω 轴相对于坐标系 $o-i_1, j_1, k_1$ 回转 θ 角时, R_1 则相对于 $o-i_2, j_2, k_2$ 坐标系绕 ω 轴回转了 $-\theta$ 角。

三、回转变换张量函数及其微分

当 θ 是变量时, $e^{j\theta}$ 为一张量函数。与一般函数类似, $e^{j\theta}$ 对 θ 的导数也是一张量函数, 记为

$$\frac{d(e^{j\theta})}{d\theta}$$

其微分法则与普通函数的微分法则类同。 $e^{j\theta}$ 对 θ 的导数就是 $e^{j\theta}$ 的各元素对 θ 的导数构成的张量。

由式 (II-23) 可得

$$\frac{d(e^{j\theta})}{d\theta} = \frac{dK}{d\theta} + \frac{d(I\cos\theta)}{d\theta} + \frac{d(J\sin\theta)}{d\theta}$$

设 ω 是空间一确定轴, 则 K 、 I 、 J 都是常张量, 它们对 θ 的导数为 0。所以有

$$\frac{d(e^{j\theta})}{d\theta} = -I\sin\theta + J\cos\theta \quad (\text{II-32})$$

另外,

$$\begin{aligned} J e^{j\theta} &= J(K + I\cos\theta + J\sin\theta) \\ &= J\cos\theta - I\sin\theta \end{aligned} \quad (\text{II-33})$$

对照式 (II-32) 与式 (II-33), 可得,

$$\frac{d(e^{j\theta})}{d\theta} = J e^{j\theta} \quad (\text{II-34})$$

若 θ 是时间 t 的函数, 其导数 (角速度) 为 $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ 。则式 (II-34) 可写为

$$\frac{d(e^{j\theta})}{dt} = J e^{j\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

或简单地表示为,

$$\dot{e}^{j\theta} = \dot{\theta} J e^{j\theta} \quad (\text{II-35})$$

式 (II-35) 与复极矢量单位矢量的微分公式

$$\dot{e}^{j\theta} = \dot{\theta} j e^{j\theta}$$

的形式完全相同。一般地, 有:

$$\frac{d^*(e^{J\theta})}{d\theta} = J^*e^{J\theta} \quad (\text{II-36})$$

当空间矢量函数 R_1 、 R_2 有以下关系时，

$$R_2 = e^{J\theta}(R_1) \quad (\text{II-37})$$

即 R_2 由 R_1 绕 ω 回转 θ 而得， θ 也是时间 t 的函数时，式 (II-37) 两边对 t 求导，可得，

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_2 &= \dot{\theta} J e^{J\theta}(R_1) + e^{J\theta}(\dot{R}_1) \\ \text{或} \quad \dot{R}_2 &= \dot{\theta} J R_2 + e^{J\theta}(\dot{R}_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-38})$$

该式与回转复极矢量微分公式 (I-11) 的形式一样。同样，式 (II-38) 右边的第二项是 R_1 矢端的相对速度，第一项是牵连速度。

运用空间回转变换张量进行空间机构速度、加速度分析是非常方便的。

附录 III 空间曲线和空间曲面微分几何基本知识

一、空间曲线

图 III-1 所示任意的空间曲线 C 在已知直角坐标系中，可用参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

来表示。也可以用矢量函数

$$R = R(t)$$

$$= x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

来表示。

与平面曲线一样，在研究空间曲线性质时，经常引进弧长作为参数。若在空间曲线 C 上取一定点 M_0 ，作为度量弧长的起点，该点对应的参数值为 t_0 ，矢量函数为 R_0 。再取 C 上任一点 M ，参数值为 t ，矢量函数为 R 。设弧长 (参见图 III-1)

$$s = \overline{M_0 M}$$

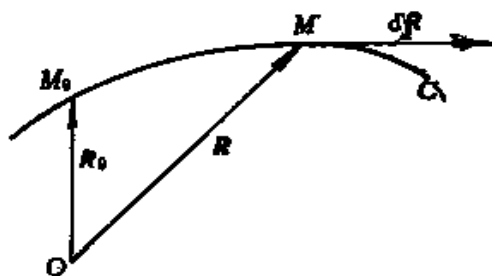


图 III-1 空间曲线的矢量函数及弧长参数

则
$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

弧长的微分
$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (\text{III-1})$$

点 M 的矢量函数 R 的微分为:

$$dR = (\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k)dt \quad (\text{III-2})$$

式中, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ 。

由式 (III-1) 及式 (III-2) 可得 R 的微分, 即切向矢量的模为:

$$|dR| = dR \cdot dR = dR^2 = ds^2 \quad (\text{III-3})$$

一般地说, 可以求出弧长 s 关于 t 的反函数 $t = t(s)$, 代入矢量函数 $R(t)$, 可得到以 s 为参数的矢量函数

$$R = R(s) = x(s)i + y(s)j + z(s)k$$

为了表示空间曲线的弯曲程度, 定义空间曲线在某点的曲率为:

$$k = |R''(s)| \quad (\text{III-4})$$

式中, $R'' = \frac{d^2R}{ds^2}$ 。

为了研究方便, 往往在曲线上设定由三个正交单位矢量构成的动坐标系。其坐标原点为曲线上的某点 M , 三个作为坐标轴的单位矢量为:

切向矢量
$$t(s) = R'(s)$$

主法矢量
$$n(s) = \frac{R''(s)}{|R''(s)|}$$

从法矢量
$$b(s) = R'(s) \times n(s)$$

这种坐标系称为弗雷耐 (Frenet) 坐标系。在该坐标系中有关系式

$$\begin{cases} t' = kn \\ n' = -kt + \tau b \\ b' = -\tau n \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

式 (III-5) 称为弗雷耐公式, 是曲线理论中的基本公式。式中,

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{d^2R}{ds^2} = R''(s)$$

$$n' = \frac{dn}{ds}$$

$$b' = \frac{db}{ds}$$

k 为曲率, 而

$$\tau = \tau(s) = -b \cdot n \quad (\text{III-6})$$

τ 称为空间曲线的挠率。弗雷耐公式还可以写成矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ n \\ b \end{Bmatrix} \quad (\text{III-7})$$

二、空间曲面

对于任意空间曲面, 在已知直角坐标系中, 可以用显式 $z = f(x, y)$ 或隐式 $F(x, y, z) = 0$ 表示。式中, $f(x, y)$ 和 $F(x, y, z)$ 都是连续可微的函数。在讨论曲面的性质时, 用参数方程

$$\begin{cases} x = x(\beta, \delta) \\ y = y(\beta, \delta) \\ z = z(\beta, \delta) \end{cases}$$

和矢量函数

$$R = R(\beta, \delta) = x(\beta, \delta)i + y(\beta, \delta)j + z(\beta, \delta)k$$

表示曲面是很方便的。如图 III-2 所示球面的方程为:

$$R = R(\beta, \delta) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \sin \delta \cos \beta \\ r \sin \delta \sin \beta \\ r \cos \delta \end{Bmatrix}$$

因为空间曲线总可以看作是两个曲面的交线, 因此, 可将两个曲面方程联立表示空间曲线:

$$\begin{cases} R_1 = R_1(\beta, \delta) \\ R_2 = R_2(\beta, \delta) \end{cases}$$

三、表面上的曲线及其切向向量，表面上的切平面与法向向量

在曲面方程 $R = R(\beta, \delta)$ 中，若固定某一参数的值，如令 $\beta = \beta_0$ ，而使 δ 变化，则表面上的点 $R(\beta_0, \delta)$ 的轨迹是表面上的一条曲线，称为 δ 曲线。同样， $R(\beta, \delta_0)$ 称为 β 曲线。 δ 、 β 曲线又称为曲面的坐标曲线，在表面上构成曲线坐标网。与平面曲线一样， β 曲线与 δ 曲线的矢量函数对其自变量的微分就是曲线的切向量，即

$$t_\beta = R_\beta = x_\beta i + y_\beta j + z_\beta k$$

$$t_\delta = R_\delta = x_\delta i + y_\delta j + z_\delta k$$

式中， $R_\beta = \frac{\partial R}{\partial \beta}$ ， $R_\delta = \frac{\partial R}{\partial \delta}$ ， $x_\beta = \frac{\partial x}{\partial \beta}$ ，……， $z_\delta = \frac{\partial z}{\partial \delta}$ ； t_β 、 t_δ 是表面上坐标曲线—— β 曲线和 δ 曲线的切向量。令 C 为表面上任意一条过 $M(\beta, \delta)$ 点的曲线，则其方程可表为

$$R = R[\beta(t), \delta(t)]$$

则曲线 C 在点 M 的切向量为：

$$t = \frac{dR}{dt} = R_\beta \frac{d\beta}{dt} + R_\delta \frac{d\delta}{dt}$$

或

$$t = t_\beta \frac{d\beta}{dt} + t_\delta \frac{d\delta}{dt} \quad (\text{III-8})$$

可见， t 是 t_β 与 t_δ 的组合，三者为共面向量。因此，过表面上任一点 M 的曲面曲线在该点的切线均落在 t_β 与 t_δ 所决定的平面上。这个平面就是曲面在 M 点的切平面。式(III-8)可变为 $t = \frac{d\beta}{dt} (t_\beta +$

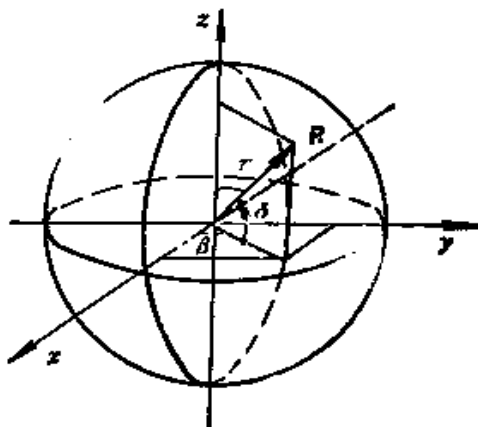


图 III-2 球面及其坐标参数

$t, \frac{d\delta}{d\beta}$ 。由该式可以看出, $\frac{d\beta}{dt}$ 只影响 t 的大小, 与方向无关。

在给定的 M 点, t_p, t_s 是定值。切线 t 的方向取决于 $\frac{d\delta}{d\beta}$ 。因此,

可以用曲线参数之间的变化率 $\frac{d\delta}{d\beta}$ 来表示给定点的切线方向。

与 M 点的切平面垂直的矢量 n 称为曲面在 M 点的单位法向矢量。 n 可表为

$$n = R_\beta \times R_\delta / |R_\beta \times R_\delta| \quad (\text{III-9})$$

四、曲面的第一基本形式和第二基本形式

令曲面上的任一条曲线 C 的参数方程为

$$R = R(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

其弧长参数为 s 。由式 (III-3) 有

$$ds^2 = dR^2$$

若将该曲面上的曲线 C 表为曲面坐标形式, 则为

$$R = R[\beta(t), \delta(t)]$$

由 (III-8) 得其微分矢量为

$$dR = R_\beta d\beta + R_\delta d\delta \quad (\text{III-10})$$

而 $dR^2 = R_\beta^2 d\beta^2 + 2R_\beta \cdot R_\delta d\beta d\delta + R_\delta^2 d\delta^2$

即 $ds^2 = R_\beta^2 d\beta^2 + 2R_\beta \cdot R_\delta d\beta d\delta + R_\delta^2 d\delta^2$

令 $ds^2 = I$, $R_\beta^2 = E$, $R_\beta \cdot R_\delta = F$, $R_\delta^2 = G$, 则

$$I = E d\beta^2 + 2F d\beta d\delta + G d\delta^2 \quad (\text{III-11})$$

式 (III-11) 称为曲面的第一基本形式, E, F, G 称为曲面的第一基本量。它们在曲面研究中占有重要的位置。只要知道 I , 就可以计算出曲面曲线的长度、角度、曲面面积等重要参数。 E, F, G 由曲面矢量函数 R 对曲线坐标 β, δ 的偏导数确定。因此, 它们也是 β, δ 的函数。曲面上一点就有确定的第一基本量 E, F, G 。

由于 $E > 0$, $G > 0$, 根据矢量运算法则

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (\mathbf{R}_\beta)^2(\mathbf{R}_\delta)^2 - (\mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{R}_\delta)^2 \\ &= (\mathbf{R}_\beta \times \mathbf{R}_\delta)^2 > 0 \end{aligned}$$

令 $D^2 = EG - F^2$, 则

$$D = \sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{R}_\beta \times \mathbf{R}_\delta| \quad (\text{III-12})$$

再由式 (III-9) 得知, 法向矢量的模为 D

因此, 单位法向量又可表示为:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}}{D} = \frac{\mathbf{R}_\beta \times \mathbf{R}_\delta}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (\text{III-13})$$

当 \mathbf{R}_β 与 \mathbf{R}_δ 正交时, $F = 0$ 。这时, 我们称坐标曲线正交, 且 $D = \sqrt{EG}$ 。

若表面上的曲线 C 的矢量函数 \mathbf{R} 用弧长 s 作为参数, 即 $\mathbf{R} = \mathbf{R}[\beta(s), \delta(s)]$, 则其矢量微分的形式与式 (III-8) 类同:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{R}_\beta \frac{d\beta}{ds} + \mathbf{R}_\delta \frac{d\delta}{ds} \quad (\text{III-14})$$

若再对 s 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2} &= \mathbf{R}_{\beta\beta} \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 + 2\mathbf{R}_{\beta\delta} \frac{d\beta}{ds} \frac{d\delta}{ds} \\ &+ \mathbf{R}_{\delta\delta} \left(\frac{d\delta}{ds} \right)^2 + \mathbf{R}_\beta \frac{d^2\beta}{ds^2} + \mathbf{R}_\delta \frac{d^2\delta}{ds^2} \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

假定该曲面曲线 C 在 M 点的曲率为 k_M , 单位主法向矢量为 \mathbf{n}_M , 根据弗雷耐公式 (III-5) 有

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k_M \mathbf{n}_M$$

$k_M \mathbf{n}_M$ 称为曲面曲线 C 的曲率矢量。如果曲面在 M 点的单位法向矢量为 \mathbf{n} , 且 \mathbf{n}_M 与 \mathbf{n} 的夹角为 φ (参见图 III-3), 将 \mathbf{n} 与式 (III-15) 作数积, 考虑到 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_\beta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_\delta = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_M = \cos \varphi$, 并令

$$\left. \begin{aligned} L &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_{\beta\beta} \\ M &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_{\beta\delta} \\ N &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_{\delta\delta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E-16})$$

则可得关系式

$$k_M \cos \varphi = \frac{Ld\beta^2 + 2Md\beta d\delta + Nd\delta^2}{ds^2} \quad (\text{III-17})$$

式(III-17)左边的 $k_M \cos \varphi$ 实际上是曲率向量 $k_M r_M$ 在法向矢量 n 上的投影, 称为曲面曲线 C 在 M 点的法曲率, 记为

$$k = k_M \cos \varphi \quad (\text{III-18})$$

$$\text{再令 } \text{II} = Ld\beta^2 + 2Md\beta d\delta + Nd\delta^2 \quad (\text{III-19})$$

并由式(III-11), $ds^2 = \text{I}$, 则式(III-17)又可写为

$$k = \frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{Ld\beta^2 + 2Md\beta d\delta + Nd\delta^2}{Ed\beta^2 + 2Fd\beta d\delta + Gd\delta^2} \quad (\text{III-20})$$

式(III-19)称为曲面的第二基本形式, L 、 M 、 N 称为曲面的第二基本量。式(III-20)是计算曲面曲线 C 在 M 点的法曲率 k 的公式, 它又可写成

$$k = \frac{L + 2M \frac{d\delta}{d\beta} + N \left(\frac{d\delta}{d\beta} \right)^2}{E + 2F \frac{d\delta}{d\beta} + G \left(\frac{d\delta}{d\beta} \right)^2} \quad (\text{III-21})$$

由于对曲面上一定的点 M 来说, 其第一、第二基本量皆为确定值, 因此, 法曲率 k 取决于 $\frac{d\delta}{d\beta}$ 的大小, 即取决于曲面上曲线 C 在 M 点的切线的方向。即在给定的 M 点, 不同的切向, 曲线有不同的法曲率 k 。

五、曲面的法曲率、主曲率

在曲面上的点 M , 给定一切线方向 t (由 $\frac{d\delta}{d\beta}$ 决定)。作通过 M 的法向矢量和包含方向 t 的平面 π , 则在曲面上得一截线——平面曲线 C_0 。 π 称为方向 t 的法截面, C_0 为法截线。只要方向 t 给

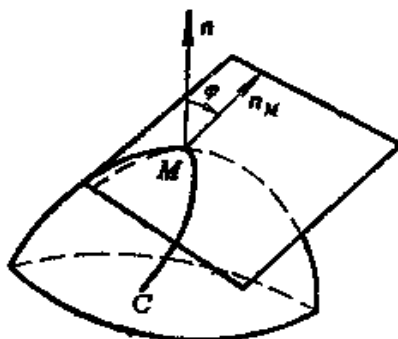


图 III-3 曲面曲线的曲率
矢量与曲面的法向矢量

定, 法截线 C_0 就是确定的。法截线 C_0 在 M 点的曲率 k_n 称为曲面在 M 点沿 t 向的法曲率, 其值由式 (III-20) 给出, 即

$$k_n = \frac{Ld\beta^2 + 2Md\beta d\delta + Nd\delta^2}{Ed\beta^2 + 2Fd\beta d\delta + Gd\delta^2} \quad (\text{III-22})$$

k_n 代表曲面在 M 点, 沿 t 向的弯曲程度。在同一个点, 不同方向的 k_n 是不同的, 即不同方向的弯曲程度是不同的。由式 (III-21) 可以明显地看出, k_n 是代表方向的标量 $\frac{d\delta}{d\beta}$ 的函数。

令 $\lambda = \frac{d\delta}{d\beta}$, 则式 (III-22) 变为:

$$k_n = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \quad (\text{III-23})$$

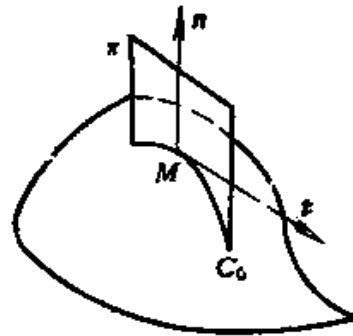


图 III-4 曲面在给定
点 M 、给定方向 t 上的法截
面和法截线

为求 k_n 的极值, 令 $\frac{dk_n}{d\lambda} = 0$, 可得:

$$(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(M + N\lambda) - (L + 2M\lambda + N\lambda^2)(F + G\lambda) = 0 \quad (\text{III-24})$$

将式 (III-23)、(III-24) 中的 λ 消去可得到 k_n 的二次方程:

$$(EG - F^2)k_n^2 - (EN - 2FM + LG)k_n + (LN - M^2) = 0$$

由式 (III-12) 所设, $EG - F^2 = D^2$ 。再令

$$\left. \begin{aligned} LN - M^2 &= Q^2 \\ EN - 2FM + LG &= P^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-25})$$

可求得 k_n 的两个极值:

$$k^{1, 2} = \frac{P^2 \pm \sqrt{P^4 - 4D^2Q^2}}{2D^2} \quad (\text{III-26})$$

它们是 k_n 的极大值与极小值, 称为曲面在 M 点的主曲率, 其相应的方向称为主方向。可以证明这两个方向是正交的。一般习惯于取 k^1 为极小值, k^2 为极大值, 把相应的主方向 t_1 、 t_2 分别称为第

一主方向与第二主方向。再令

$$\begin{aligned} K &= k^I k^{II} \\ H &= \frac{1}{2}(k^I + k^{II}) \end{aligned} \quad (\text{III-27})$$

则由一元二次方程根和系数的关系得

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{Q^2}{D^2} \\ H &= \frac{EN - 2FM + LG}{2(EG - F^2)} = \frac{P^2}{2D^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-28})$$

K 称为总曲率，也称为高斯 (Gauss) 曲率。 H 称为平均曲率。

K 与 H 是考察曲面性能的重要参数。

若在曲面过 M 点的切平面上，建立一以主方向 t_1 、 t_2 为坐标轴的坐标系，则可导出曲面在 M 点的任一方向 t 的法曲率 k_n 与主曲率 k^I 、 k^{II} 的关系式：

$$\begin{aligned} k_n &= k^I \cos^2 \theta + k^{II} \sin^2 \theta \\ (-\pi &\leq \theta \leq \pi) \end{aligned} \quad (\text{III-29})$$

这就是著名的法曲率欧拉 (Euler) 公式。显然，在

$\theta = 0$ 时， $k_n = k^I$ ，取极小值；

$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 时， $k_n = k^{II}$ ，取极大值。

下面，考察一下常见的简单曲面——圆柱面的主曲率与主方向。图 III-6 为半径为 r 的圆柱面。坐标系与曲线坐标如图设定。即选取母线为 δ 曲线，横截圆周为 β 曲线。显然，第一主方向 t_1 为点 M 的横截圆周的切向；第二主方向沿母线方向，与 Z 轴平行。主曲率为： $k^I = \frac{1}{r}$ ， $k^{II} = \infty$ 。在此，曲线 β 与曲线 δ 正交。

并且在 β 、 δ 曲线上所有的点的切线方向都是主方向，象这样的曲线叫作曲率线。在选择曲线坐标时，一般都尽可能地使曲线 β 与曲线 δ 成为曲率线，这样会给计算带来很大的方便。

对于图 III-2 所示球面，显然有：

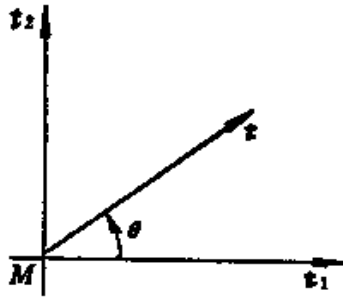


图 Ⅲ-5 曲面上一点的主方向所构成的坐标系

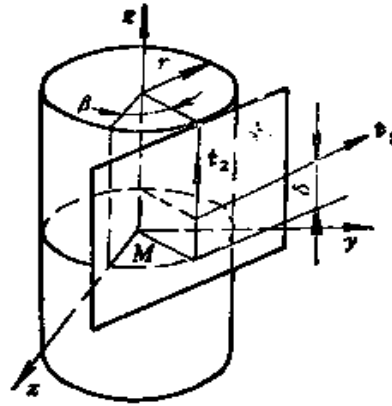


图 Ⅲ-6 圆柱面的主方向

$$k^I = k^II = \frac{1}{r}$$

由欧拉公式 (Ⅲ-29) 可知, 球面上所有的点, 各个方向的法曲率都是 $\frac{1}{r}$ 。其上的任一平面截线 (均为圆) 都是曲率线。

曲率线有一重要的性质: 曲率线上每一点的切向矢量与曲面在该点的法向量的微分平行, 即

$$dn = -k dR \tag{Ⅲ-30}$$

式中, n 是曲率线上某一点的单位法向矢量, dR 为曲率线在该点的切向矢量, 也就是一个主方向。而 dn 为 n 在同一主方向上的微分, 系数 k 则为同一主方向上的主曲率。式 (Ⅲ-30) 也可写成下列标量形式。

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_r^I &= -v_r^I k^I \\ \dot{n}_r^{II} &= -k^{II} v_r^{II} \end{aligned} \right\} \tag{Ⅲ-31}$$

式中, \dot{n}_r^I, v_r^I 是在第一主方向上的 dn 与 dR 的模, \dot{n}_r^{II}, v_r^{II} 为第二主方向上的 dn 与 dR 的模, k^I, k^{II} 分别为第一主曲率与第二主曲率。式 (Ⅲ-30) 或式 (Ⅲ-31) 称为罗德里克 (Rodrigue) 方程。

附录IV 空间啮合原理简介

一、空间啮合曲面方程的求解

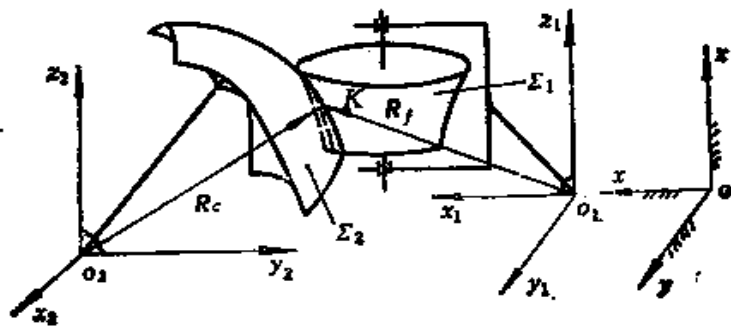
在图IV-1中，空间曲面 Σ_1 与 Σ_2 都是正规的、连续光滑曲面，二者啮合运动，始终保持相切接触。这一对曲面称为共轭曲面。令 Σ_1 是从动件， Σ_2 是主动件。为了建立二曲面的几何关系与运动关系，可建立如图所示的三个坐标系：从动件坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 与从动曲面 Σ_1 固接，并随其一起运动；主动件坐标系 $o_2-x_2y_2z_2$ 与主动曲面 Σ_2 固接，并随其一起运动；固定坐标系 $o-xyz$ 。

并设曲面 Σ_1 的矢量函数为 R_f （在 $o_1-x_1y_1z_1$ 坐标系中），曲面 Σ_2 的矢量函数为 R_c （在 $o_2-x_2y_2z_2$ 坐标系中）。又设 Σ_1 、 Σ_2 的曲面参数分别是 β_f 、 δ_f 与 β_c 、 δ_c ，即

$$R_f = R_f(\beta_f, \delta_f)$$

$$R_c = R_c(\beta_c, \delta_c)$$

一般地说，在某一瞬时 t ，曲面 Σ_1 与 Σ_2 接触于一固定坐标系中的空间曲线 C_t 。设此时在曲面 Σ_1 上的一曲线 C_{1t} 与 C_t 重合；曲面 Σ_2 上的曲线 C_{2t} 与 C_t 重合。 C_t 称为 t 瞬时的啮合线， C_{1t} 、 C_{2t} 分别为 Σ_1 、 Σ_2 曲面上 t 瞬时的接触线。在一个运动周期中，不同时刻的啮合线的集合形成一曲面，称为啮合面。曲线族 C_{1t} 与 C_{2t} 实际上就分别构成了曲面 Σ_1 与 Σ_2 （严格地说，是构成了 Σ_1 、 Σ_2 的工作曲面部分）。



图IV-1 共轭曲面及其坐标系

设 K 是啮合线 C 上的任一点, 称为瞬时啮合点。再令在 t 瞬时, Σ_1 、 Σ_2 上与 K 重合的点分别是 K_1 、 K_2 , K_1 、 K_2 称为瞬时接触点。在 t 时刻, 二曲面有过 K 点(亦过 K_1 、 K_2 点)的公共切平面 π , 因此也就有公共的法矢量 n 。另外, 此时, 在接触点 K_1 、 K_2 处, 二曲面作相对滑动和相对滚动。所以, 点 K_1 、 K_2 在固定坐标系中的速度 V_1 、 V_2 都处在公共切平面 π 上, 其相对滑动速度 $V_{12} = V_1 - V_2$ 也在公切面 π 上。因此有

$$\phi = n \cdot V_{12} = 0 \quad (IV-1)$$

式 (IV-1) 称为空间曲面啮合条件; ϕ 称为啮合函数, 它是曲面坐标 (一般取已知的从动曲面坐标 β_f 、 δ_f) 和时间 t 的函数, 即

$$\phi = \phi(\beta_f, \delta_f, t) \quad (IV-2)$$

空间共轭曲面问题一般是解决从动曲面 R_f 、主动曲面 R_a 、啮合运动 M 三者之间的关系。在我们研究的空间凸轮问题中, 主要是已知从动曲面 R_f 与共轭运动 M , 求解主动曲面(凸轮曲面) R_a 。这类问题一般是用下述方程组求解:

$$\begin{cases} \phi(\beta_f, \delta_f, t) = 0 \\ R_a = M(R_f, t) \end{cases} \quad (IV-3)$$

该方程组中, 第一式为啮合条件, 是各个瞬时的 Σ_1 上的接触线方程。将 Σ_1 上的接触线方程代入第二式就可得到主动曲面 Σ_2 的矢量函数 R_a 。式中, $M(R_f, t)$ 表示一种变换运算, 即按给定的啮合运动, 将各瞬时的接触线方程转换到主动件坐标系 $o_2-x_2y_2z_2$ 中, 从而得到 R_a 。一般地说, 由第三式得到的矢量函数的曲面参数是 t 和 β_f (或 t 和 δ_f)。

二、空间啮合曲面的曲率分析

与平面曲线啮合一样, 为了考察其啮合性能, 对空间啮合曲面必须进行曲率分析。曲率分析的计算是很繁杂的, 不但要分析各个曲面自身的曲率, 还要考察二曲面在各接触点各个方向的曲

率的相对关系。一般用诱导法曲率来表示二曲面在接触点处的相对弯曲程度。

设共轭曲面 Σ_1 、 Σ_2 在某瞬时啮合于接触线 C ， K 为 C 上的接触点。二曲面在 K 点的公切面为 π 。若在 K 点的一切线方向 t (矢量 t 显然应在平面 π 上)，曲面 Σ_1 与 Σ_2 的在 K 点的法曲率分别为 k_{1t} 与 k_{2t} ，则它们的差

$$k_{12} = k_{1t} - k_{2t} \quad (\text{IV-4})$$

称为该二曲面在 K 点 (在 Σ_1 上为 K_1 点，在 Σ_2 上为 K_2 点) 沿 t 方向的诱导法曲率。一对共轭曲面在一啮合点 K 的各个不同方向的诱导法曲率中，有一个极大值和一个极小值。这两个极值称为这对共轭曲面的诱导主曲率，记作 $k_{12}^{(1)}$ 和 $k_{12}^{(2)}$ 。与它们相对应的方向称为诱导主方向。

共轭曲面的曲率分析通常按下述两个步骤进行：

(1) 由已知的简单曲面 Σ_1 的主曲率、主方向求较复杂的曲面 Σ_2 的主曲率、主方向。

在实际的共轭曲面啮合问题中，一般有一个曲面 (一般设为 Σ_1) 的形状和方程是比较简单的，其主方向与主曲率很容易确定。因此，往往通过 Σ_1 、 Σ_2 二曲面的啮合关系，由已知的 Σ_1 的主曲率、主方向求解 Σ_2 的主曲率和主方向。这样，要比由曲面 Σ_2 的方程求解方便得多。具体的方法是，先求出曲面 Σ_2 在三个方向上的法曲率：① k_1^I ：曲面 Σ_1 在 K_1 点的第一主方向上的单位矢量；② k_1^{II} ：曲面 Σ_1 在 K_1 点的第二主方向上的单位矢量；③ k_1^t ：曲面 Σ_1 、 Σ_2 在 K (K_1 、 K_2) 点接触线的切线方向的单位矢量。再令曲面 Σ_2 上的 K_2 点 (与 K_1 点相对应的接触点) 的第一主方向与第二主方向的单位

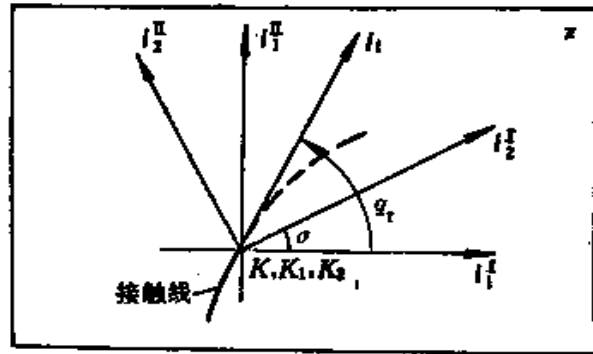


图 IV-2 共轭曲面主方向之间的关系

矢量分别为 i_1^I, i_1^{II} 。则上述五个方向的单位矢量的关系如图 IV-2 所示。它们都处在曲面 Σ_1, Σ_2 在 K 点的公切面 π 上, i_1^I 和 i_1^{II} 垂直, i_2^I 与 i_2^{II} 垂直, i_2^I 与 i_1^I 的夹角为 σ , i_1 与 i_1^I 的夹角为 q_1 。设曲面 Σ_1, Σ_2 在 K_1, K_2 点各有关方向的法曲率用下表中的符号表示:

	Σ_1 曲面	Σ_2 曲面
i_1^I	k_1^I <主曲率>	$k_2^{(1)}$
i_1^{II}	k_1^{II} <主曲率>	$k_2^{(2)}$
i_2^I	—	k_2^I <主曲率>
i_2^{II}	—	k_2^{II} <主曲率>
i_1	—	k_2^I

根据欧拉公式 (III-29) 可得下列三个方程:

$$\left. \begin{aligned} k_2^I \cos^2 \sigma + k_2^{II} \sin^2 \sigma &= k_2^{(1)} \\ k_2^I \cos^2(q_1 - \sigma) + k_2^{II} \sin^2(q_1 - \sigma) &= k_2^I \\ k_2^I + k_2^{II} &= k_2^{(1)} + k_2^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-5})$$

式 (IV-5) 中, 第三式表示, 一曲面在某点的两个互相垂直的方向上的法曲率之和相等, 因而也就等于两个主曲率之和 (因为两个主方向总是相互垂直的)。这个结论很容易从欧拉公式求证。式 (IV-5) 中, 曲面 Σ_2 的法曲率 $k_2^{(1)}, k_2^{(2)}, k_2^I$ 和 q_1 可以由 Σ_1 的主曲率 k_1^I, k_1^{II} 以及曲面 Σ_1, Σ_2 的啮合关系求得 (具体求法可参见第四章第三节)。因此, 可以用式 (IV-5) 求出曲面 Σ_2 在 K_2 点的主曲率 k_2^I, k_2^{II} 以及 σ ——主方向 i_2^I 的方位角。换句话说, 式 (IV-5) 是关于曲面 Σ_2 主方向与主曲率的方程组。变换该方程组可得:

$$\tan 2\sigma = \frac{2k_2^I - (k_2^{(1)} + k_2^{(2)})}{(k_2^{(1)} - k_2^{(2)}) \sin 2q_1} - \text{ctg} 2q_1 \quad (\text{IV-6})$$

$$g_2 = \frac{k_2^{(1)} - k_2^{(2)}}{\cos 2\sigma} \quad (\text{IV-7})$$

式中, $g_2 = k_2^I - k_2^{II}$, 是 Σ_2 曲面 K_2 点的主曲率之差。因此, 最后可解得 Σ_2 的主曲率为:

$$\left. \begin{aligned} k_2^I &= \frac{g_2 + (k_2^{(1)} + k_2^{(2)})}{2} \\ k_2^{II} &= (k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) - k_2^I \end{aligned} \right\} \quad (IV-8)$$

(2) 由一对共轭曲面的主曲率求解诱导法曲率和诱导主曲率。通过式 (IV-7) 及式 (IV-8) 求出曲面 Σ_2 的主曲率、主方向后, 由欧拉公式即可求出曲面 Σ_2 任意方向的法曲率。也可以通过简单的运算求出曲面 Σ_1 、 Σ_2 的诱导法曲率和诱导主曲率。由欧拉公式, 可得 Σ_1 、 Σ_2 在 K 点的任一方向 τ (设该方向与 Σ_1 的主方向 i_1 之间的夹角为 q), K 点的诱导法曲率为:

$$\begin{aligned} k_{12} &= k_{1\tau} - k_{2\tau} \\ &= k_1^I \cos^2 q + k_1^{II} \sin^2 q \\ &\quad - k_2^I \cos^2(q - \sigma) - k_2^{II} \sin^2(q - \sigma) \end{aligned} \quad (IV-9)$$

由上式很容易推得, 两个互相垂直的方向上的诱导法曲率之和是定值, 即:

$$k_{12}^{(1)} + k_{12}^{(2)} = k_1^I + k_1^{II} - k_2^I - k_2^{II} \quad (IV-10)$$

令诱导法曲率 $k_{12}^{(1)}$ 、 $k_{12}^{(2)}$ 所对应的方向角分别为 $q^{(1)}$ 、 $q^{(2)}$, $q^{(1)}$ 、 $q^{(2)}$ 之间的差为 90° 。将 $q^{(1)}$ 、 $q^{(2)}$ 代入式 (IV-9) 就可得到式 (IV-10)。

另外, 由于曲面 Σ_1 、 Σ_2 在接触线切线方向 i_1 上有公共的切向矢量、法向矢量和公共的曲面曲线——接触线, 由附录 III 的式 (III-18) 等式可知, 二曲面在 i_1 方向上的法曲率相等, 因此, 在该方向的诱导法曲率为零。又根据共轭曲面的啮合要求, 两曲面在啮合点 K 处彼此不应嵌入, 这就要求 K 点的各个方向的诱导法曲率不变号^[69], 即式 (IV-10) 中的 $k_{12}^{(1)}$ 与 $k_{12}^{(2)}$ 必须同号。由此可知, 当 $k_{12}^{(1)}$ 、 $k_{12}^{(2)}$ 中有一个取零时, 另一个的绝对值必

然为最大。因此，接触线的切线方向 i_1 以及与其正交的方向为两个诱导主方向，与 i_1 垂直的方向上的诱导法曲率——诱导主曲率之一的绝对值为最大，此诱导主曲率称为综合曲率。由式(IV-10)可知，其值为：

$$k_{12}^n = (k_1^I + k_1^II) - (k_2^I + k_2^II) \quad (IV-11)$$

即一对共轭曲面的综合曲率等于各自的主曲率之和之间的差值。

附录V 常用构件的等效刚度与等效质量

根据能量等效的原理，计算构件振动时，由第一阶主振型的弹性变形位能与动能，可以推出各种形状构件离散化的等效刚度与质量参数。凸轮机构常用构件，按此方法确定其离散参数的过程、计算方法和简化模型，分述如下：

一、简支梁的横向振动

图V-1 a 是一等截面的简支梁，它的第一主振型

$$f(x) = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}$$

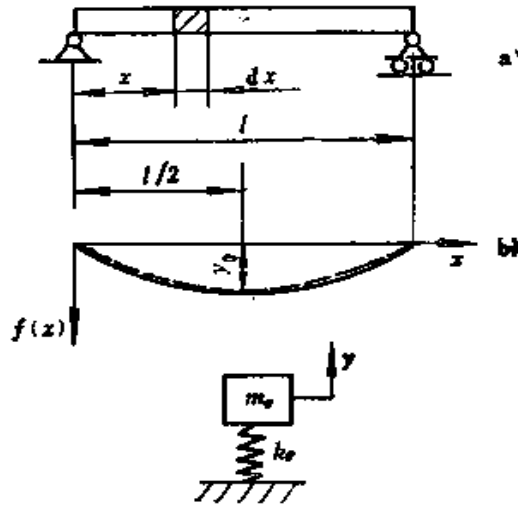
如图V-4 b 中实线所示。当简支梁按角频率 ω 作简谐振动时，梁上各点的横向位移为

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega t$$

于是各点的速度为

$$\dot{y} = y_0 \omega \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega t$$

在梁上取一微小长度 dx ，其质量 $dm = \rho dx$ (ρ 为单位长度的质量)，于是， dm 的动能为



图V-1 简支梁的简化模型

a) 结构简图 b) 挠度曲线
c) 模型图

$$dE_k = \frac{1}{2} \dot{y}^2 dm$$

梁的总动能

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_0^l \dot{y}^2 dm = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left(y_0 \omega \cos \omega t \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx \\ &= \frac{y_0^2 \omega^2 \rho l}{4} \cos^2 \omega t \end{aligned} \quad (\text{V-1})$$

简支梁简化为图 V-1 c 所示离散模型时, 等效质量 m_e 作简谐振动的位移方程为

$$y = y_0 \sin \omega t$$

其速度为

$$\dot{y} = y_0 \omega \cos \omega t$$

等效质量的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m_e \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_e y_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \quad (\text{V-2})$$

比较式 (V-1) 与式 (V-2), 得简支梁在梁中间位置的等效质量为

$$m_e = \frac{1}{2} \rho l \quad (\text{V-3})$$

由雷利 (Raleigh) 法, 当用弹性体在其自重作用下的静变形曲线, 或用集中载荷作用下的静变形曲线近似代替第一主振型时, 求得的最低自振频率与其准确值相差极小。因此, 在求模型的等效质量时, 也可用静变形曲线近似代替第一主振型。简支梁在中间位置作用一集中载荷时, 静变形曲线如图 V-1 b 上的虚线所示, 梁左半部分的静变形曲线方程可表示成

$$f(x) = \frac{y_0}{l^3} (3l^2 x - 4x^3)$$

当梁作简谐振动时, 梁左半部分上任一点的位移和速度为

$$y(x, t) = \frac{y_0}{l^3} (3l^2 x - 4x^3) \sin \omega t$$

$$\dot{y} = \frac{y_0 \omega}{l^3} (3l^2 x - 4x^3) \cos \omega t$$

梁的总动能为

$$\begin{aligned}
 E_k &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{l/2} \dot{y}^2 \rho dx \right) \\
 &= \frac{y_0^2 \omega_0^2 \rho}{l^3} \cos^2 \omega t \int_0^{l/2} (3l^2 x - 4x^3)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{17}{35} y_0^2 \omega_0^2 \rho l \cos^2 \omega t \quad (\text{V-4})
 \end{aligned}$$

比较式 (V-2) 与式 (V-4), 得等效质量为

$$m_e = \frac{17}{35} \rho l = 0.4857 \rho l \quad (\text{V-5})$$

与式 (V-3) 所示的等效质量相比较, 误差仅为 2.86%。

构件的等效刚度应根据位能相等的原理来确定。简支梁的位能按材料力学中的公式为

$$E_p = \frac{1}{2} EI_y \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx$$

式中, E 和 I_y 为梁的杨氏弹性模量和横向断面惯性矩。把第一主振型 $f(x) = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ 作为 $y(x, t)$ 的最大值代入上式, 得简支梁的最大位能为

$$\begin{aligned}
 E_{p_{\max}} &= \frac{1}{2} EI_y \int_0^l \left[\frac{d^2 \left(y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \right)}{dx^2} \right]^2 dx \\
 &= \frac{\pi^4 EI_y y_0^2}{4l^3} \quad (\text{V-6})
 \end{aligned}$$

在图 V-1 c 所示的模型中, 最大变形为 y_0 的弹性元件中的位能相当于外力从零逐渐增到 F_0 时所做的功 $\frac{1}{2} F_0 y_0$, 而 $F_0 = k y_0$, 故当等效质量按 $y_0 \sin \omega t$ 作简谐振动时的最大位能即是 $y = y_0$ 时弹簧中的位能, 即

$$E_{p_{\max}} = \frac{1}{2} k y_0^2 \quad (\text{V-7})$$

比较式 (V-6) 与式 (V-7), 得等效刚度为

$$k_e = \frac{\pi^4 EI_y}{2l^3} = 48.7 \frac{EI_y}{l^3} \quad (\text{V-8})$$

用静变形曲线代替第一主振型所推得的近似静刚度为 $k_e = 48 EI_y/l^3$, 与式 (V-8) 相比较, 其误差仅为 1.46%。

因此, 建立构件模型时, 确定等效质量或刚度时都可以近似地用静变形曲线导出的公式进行计算。下面所列各常用构件的等效质量和刚度公式都是这样推导出来的。

二、构件的纵向振动

图 V-2 a 所示的等截面 A 悬臂梁沿 x 方向纵向振动时, 假定第一主振型或静变形曲线为图 V-2 b 所示的线性函数。根据动能与势能等效, 得图 V-2 c 所示简化模型, 其等效质量与等效刚度可推出为

$$m_e = \frac{1}{3} \rho l \quad (\text{V-9})$$

和
$$k_e = \frac{EA}{l}$$

注意, 如果把悬臂梁作为一段

按集中质量法分配到两端时, 则集中在右端的质量为 $\frac{1}{2} \rho l$, 与式 (V-9) 的精确值差异较大。

对于图 V-2 d 所示连杆的纵向振动, 有

$$\begin{aligned} m_e &= \rho l \\ k_e &= \frac{2EA}{l} \end{aligned} \quad (\text{V-10})$$

三、圆柱弹簧的纵向刚度

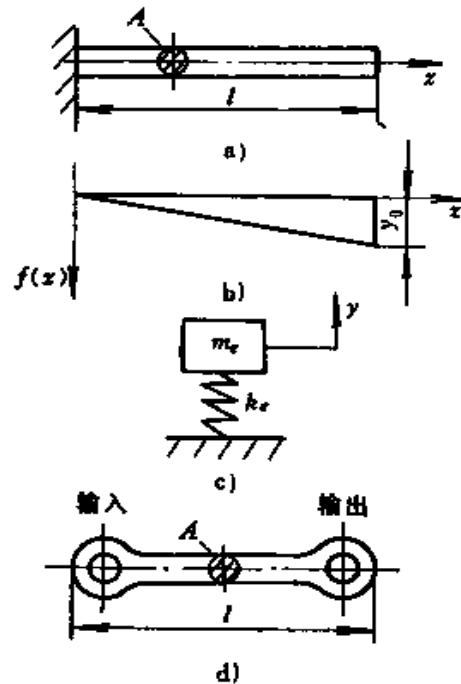


图 V-2 悬臂梁的纵向振动的简化模型

a) 结构简图 b) 变形曲线
c) 模型图 d) 杆结构图

在简化图 V-3 所示拉伸或压缩弹簧时，可以忽略质量，只考虑等效刚度。对于图 V-3 a 的圆截面弹簧，其计算公式为

$$k_s = \frac{Gd^4}{8nD} \quad (\text{V-11})$$

式中， G 为弹簧的切变模量； n 为弹簧的圈数； d 与 D 为弹簧丝直径与弹簧中径。

对于图 V-3 b 所示矩形截面弹簧，有

$$k_s = \frac{4Ghb^3\eta}{\pi nD} \quad (\text{V-12})$$

式中， h 与 b 为矩形截面的高与宽； η 为校正系数，如表 V-1 所示。

对于图 V-3 c 所示圆截面锥形弹簧，有

$$k_s = \frac{Gd^4}{n(d_1 + d_2)^3}$$

式中， d_1 与 d_2 为大小头的中径。

四、悬臂梁的横向摆动

图 V-4 a 所示悬臂梁右端受力 F 的作用，它产生横向振动时的简化模型如图 V-4 b 所示，其等效质量和刚度的公式分别为

$$m_s = \frac{33}{140} \rho l \quad (\text{V-13})$$

$$k_s = \frac{3EI_y}{l^3} \quad (\text{V-14})$$

和

表 V-1 校正系数 η 的数值

h/b	1	1.5	2	3	4
η	0.141	0.190	0.229	0.268	0.281

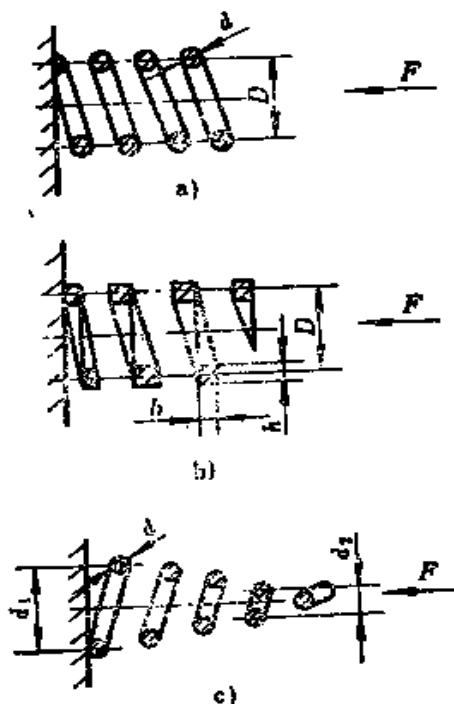


图 V-3 圆柱形弹簧

a) 圆截面 b) 矩形截面
c) 锥形弹簧

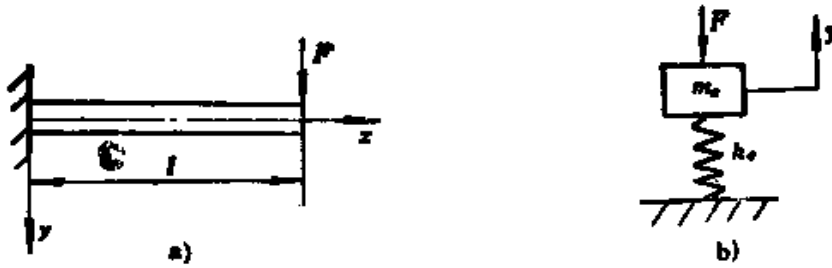


图 V-4 悬臂梁的横向振动的简化模型

a) 结构简图 b) 模型图

五、轴的扭转刚度

图 V-5 a 所示的细长轴，输入端 (*in*) 在距轴心线 R_i 处作用一输入力，输出端 (*out*) 在距轴心线 R_o 处作用一阻力，使轴产生扭转振动。因轴较细长，所以可忽略质量，只考虑扭转刚度，将其简化成图 V-5 b 所示模型，其等效刚度为

$$k_e = \frac{GI_p}{lR_o^2} \quad (\text{V-15})$$

式中的极惯性矩 I_p ，因截面形状而异。

对于图 V-5 c 的圆形截面，有

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

对于图 V-5 d 所示带键槽的轴，有

$$I_p = \frac{\pi d_1^4}{32}$$

对于图 V-5 e 所示花键轴，有

$$I_p = \frac{\pi d_2^4}{32}$$

对于图 V-5 f 所示六方轴，有

$$I_p = \frac{1.1\pi d_3^4}{32}$$

对于图 V-5 g 所示矩形截面轴，有

$$I_p = \frac{ab^4}{32}$$

式中的修正系数 α 值见表 V-2。

表 V-2 修正系数 α 的数值

a/b	1	1.5	2	3	4
α	1.43	2.94	4.57	7.9	11.23

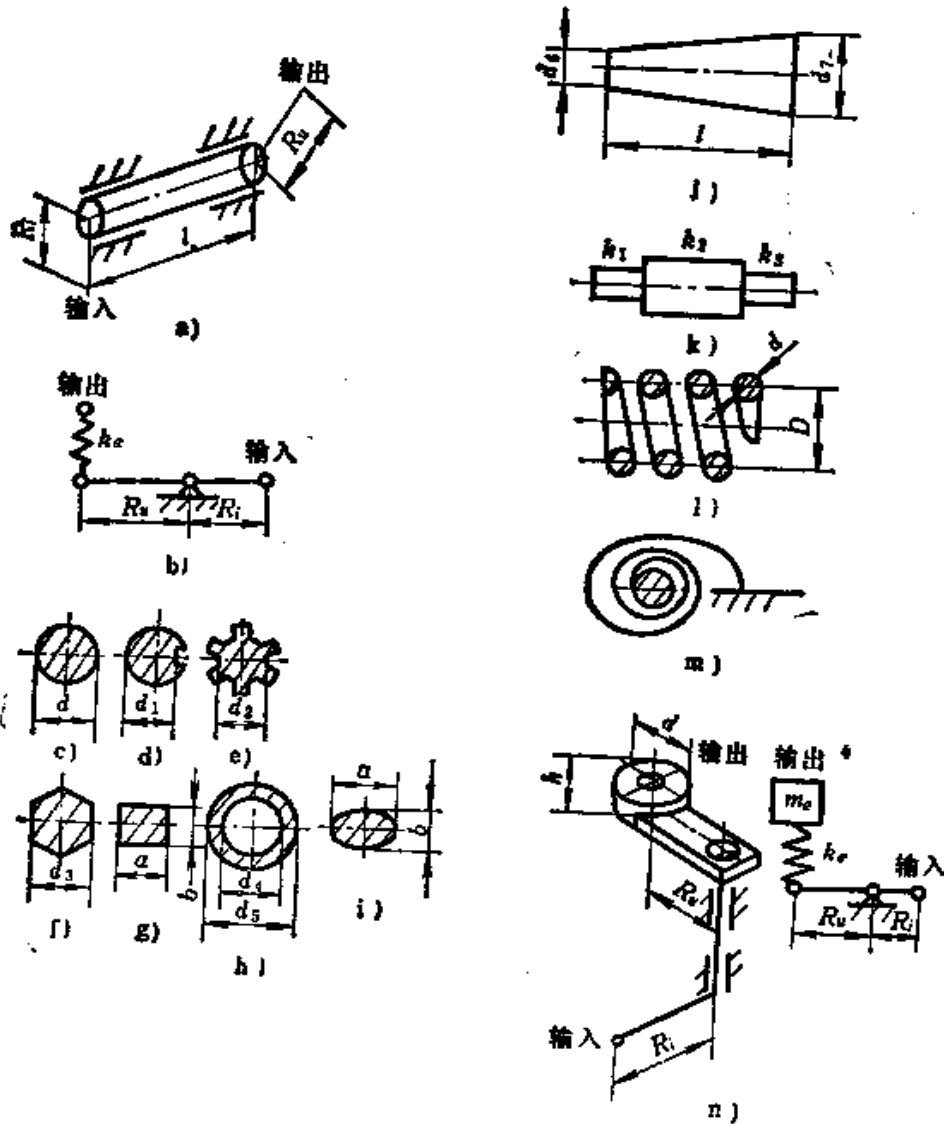


图 V-5 轴的扭转振动的简化模型

- a) 细长轴 b) 模型图 c) 圆轴 d) 带键轴 e) 花键轴
- f) 六方轴 g) 矩形轴 h) 空心轴 i) 椭圆轴 j) 锥形轴
- k) 阶梯轴 l) 圆柱形弹簧 m) 扭簧 n) 转臂

对于图 V-5 h 所示空心轴, 有

$$I_p = \frac{\pi (d_0^4 - d_1^4)}{32}$$

对于图 V-5 i 所示椭圆截面轴, 有

$$I_p = \frac{\pi a^3 b^3}{16(a^2 + b^2)}$$

对于图 V-5 j 所示锥形轴, 有

$$I_p = \frac{3\pi d_0^3 d_1^3 (d_1 - d_0)}{32(d_1^2 - d_0^2)}$$

对于图 V-5 k 所示阶梯轴, 可利用刚度串联公式求得其刚度为

$$k_s = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \quad (\text{V-16})$$

对于图 V-5 l 所示圆柱形扭转弹簧的刚度公式为

$$k_s = \frac{E d^4}{32 n D} \quad (\text{V-17})$$

式中, n 为弹簧圈数。

对于图 V-5 m 所示弹簧丝长为 l 的扭簧, 其刚度为

$$k_s = \frac{EI}{l} \quad (\text{V-18})$$

对于图 V-5 n 所示转轴, 有

$$m_s = \frac{1}{3} m_1 \left(\frac{R_s - \frac{1}{2} d}{R_s} \right)^2 + m_2$$

$$k_s = \frac{3EI}{R_s^3}$$

六、盘状零件的等效模型

对于图 V-6 a 所示的实心圆盘, 可以认为是刚体, 只须考虑它的转动惯量 $J_p = \frac{1}{2} m r^2$ 。式中, m 是圆盘总质量; r 为回转半径。它的等效模型如图 V-6 b 所示, 其等效质量为

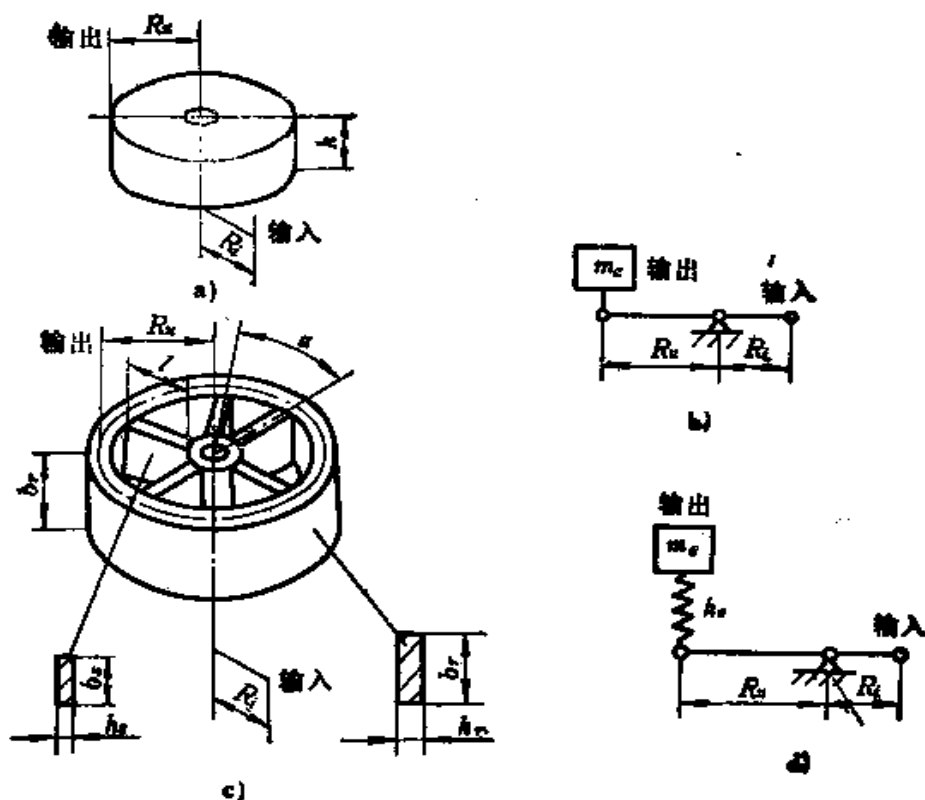


图 V-6 盘状零件的等效模型

- a) 实心圆盘 b) 实心圆盘模型图 c) 带轮辐圆盘
d) 带轮辐圆盘模型图

$$m_e = \frac{m r^2}{2 R_e^2} \quad (\text{V-19})$$

图 V-6 c 所示的盘状零件，如果是由轮辐和轮缘组成的结构，则须考虑轮辐的弯曲刚度，其简化模型如图 V-6 d 所示，其等效质量和刚度可按下列公式近似确定：

$$m_e = \frac{33}{140} \rho_s l \frac{2\pi}{\alpha} + 2\pi \rho_r R_e \quad (\text{V-20})$$

式中， ρ_s 与 ρ_r 为轮辐与轮缘的单位长度质量， α 单位为弧度。

$$k_c = \frac{3EI_s \left(12I_r \frac{2\pi}{\alpha} + \alpha I_s \right)}{l^3 \left(3I_r \frac{2\pi}{\alpha} + \alpha I_s \right)} \quad (\text{V-21})$$

式中, $I_r = \frac{b_r h_r^3}{12}$, $I_s = \frac{b_s h_s^3}{12}$ 。

附录VI 凸轮机构典型零部件的动力学模型

根据前述基本构件的动力学模型及其转化概念, 不难确定凸轮机构常见典型零部件的模型及其转化参数。

一、双侧摆杆

图VI-1 a所示输入与输出在支点两侧的摆杆, 简化模型为图VI-1 b, 其等效质量与刚度公式为

$$m_e = \frac{J_o}{R_o^2}, \quad m_i = \frac{J_i}{R_i^2} \quad (\text{VI-1})$$

式中, J_o 与 J_i 为两侧臂的转动惯量。

$$k_o = \frac{3EI_o}{R_o^3}, \quad k_i = \frac{3EI_i}{R_i^3} \quad (\text{VI-2})$$

式中, I_o 与 I_i 为两侧臂的断面惯性矩。

$$\text{传动比 } i = \frac{R_o}{R_i}$$

二、单侧摆杆

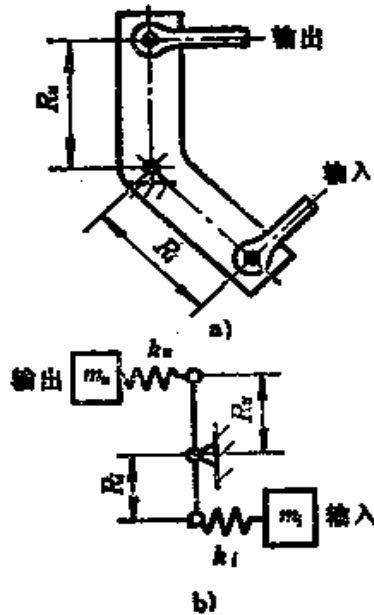
如果输入在输出下面, 具有运动放大作用, 如图VI-2 a所示, 则其简化模型为图VI-2 b, 等效质量与刚度公式为

$$m_e = \frac{J}{R_o^2} \quad (\text{VI-3})$$

式中, J 为摆杆的转动惯量。

$$k_e = \frac{3EI}{R_o^3 i (i - 1)^2} \quad (\text{VI-4})$$

式中, $i = \frac{R_o}{R_i}$, I 为摆杆的断面惯性矩。



图VI-1 双侧摆杆
a) 结构简图 b) 模型图

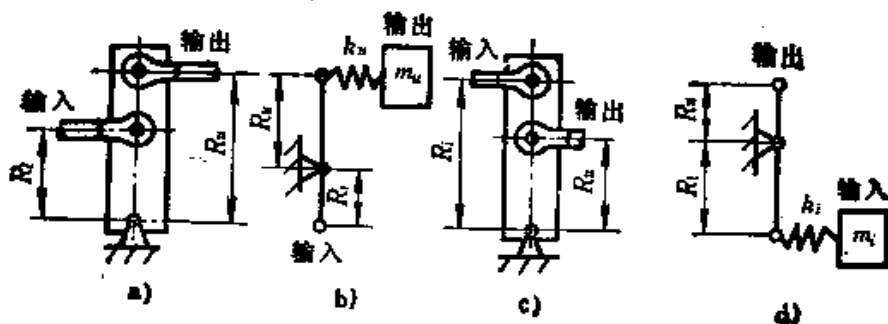


图 VI-2 单侧摆杆

a) 放大杆结构简图 b) 放大模型图 c) 缩小杆结构简图
d) 缩小模型图

但是, 如果输入在输出的上面, 如图 VI-2 c 所示, 则其简化模型为图 VI-2 d, 等效质量与刚度为

$$m_i = \frac{J}{R_i^2}, \quad k_i = \frac{3EI}{R_i^2 i (1-i)^2} \quad (\text{VI-5})$$

三、平板凸轮轴

对于图 VI-3 a 所示的机构, 考虑到凸轮轴的扭转与横向变形, 参考图 6-5, 可得图 VI-3 b 所示的三自由度模型。扭转等效质量为

$$m_o = J_o / R_{i/2}^2, \quad J_o = \frac{1}{2} m_c R_c^2 \quad (\text{VI-6})$$

式中, $R_{i/2}$ 为凸轮理论轮廓在 $T = 1/2$ 时的矢径, R_c 为凸轮的平均半径, $m_c = \pi R_c^2 b_c \rho_c$, 为凸轮质量, ρ_c 为凸轮的密度, b_c 为凸轮的厚度。

横向振动的等效质量为

$$m_y = m_z \approx m_o + m_s + m_d \quad (\text{VI-7})$$

式中, m_s 为轮毂的质量, $m_d \approx \frac{1}{2} \times \frac{\pi d^2}{4} (a+b) \rho_d$ 为轴的等效质量, ρ_d 为轴的密度。

扭转等效刚度按式 (V-15), 有

$$k_o = \frac{GI_p}{l R_{i/2}^2}, \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (\text{VI-8})$$

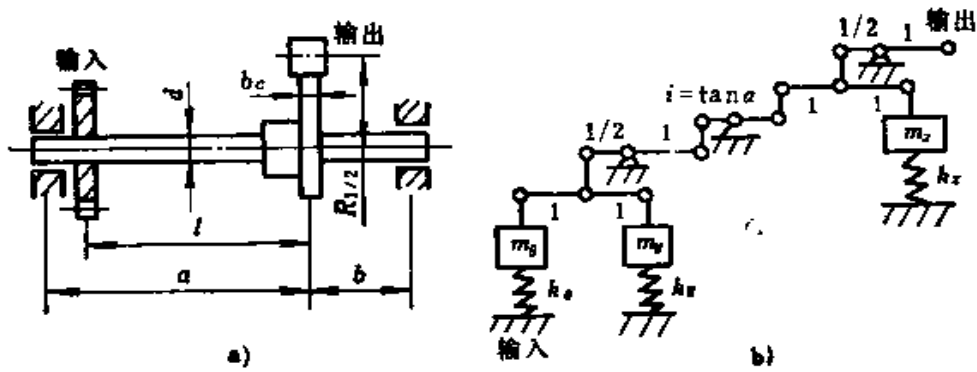


图 VI-3 平板凸轮机构的模型

a) 结构简图 b) 模型图

横向等效刚度计算公式为

$$k_y = k_z = \frac{3EI(a+b)}{a^2b^2}; \quad I = \frac{\pi}{64}d^4 \quad (\text{VI-9})$$

四、空间凸轮轴

图 VI-4 a 所示的空间凸轮轴与平面凸轮类似，它的模型如图 VI-4 b 所示。

扭转等效质量为凸缘质量 m_f 的一半与轮缘质量 m_r 之和，即

$$m_\theta = \frac{1}{2}m_f + m_r \quad (\text{VI-10})$$

等效刚度为

$$k_\theta = GJ_p / lR^2$$

y 向振动质量应计入轮毂的质量 m_h ，即

$$m_y \approx m_f + m_r + m_h \quad (\text{VI-11})$$

等效刚度为 $k_y = 3EI_y(a+b)/(a^2b^2)$ (VI-12)

而 z 向振动质量为

$$m_z = \frac{1}{2}(m_f + m_r) \quad (\text{VI-13})$$

等效刚度与 k_y 相同为

$$k_z = 3EI_z(a+b)/(a^2b^2) \quad (\text{VI-14})$$

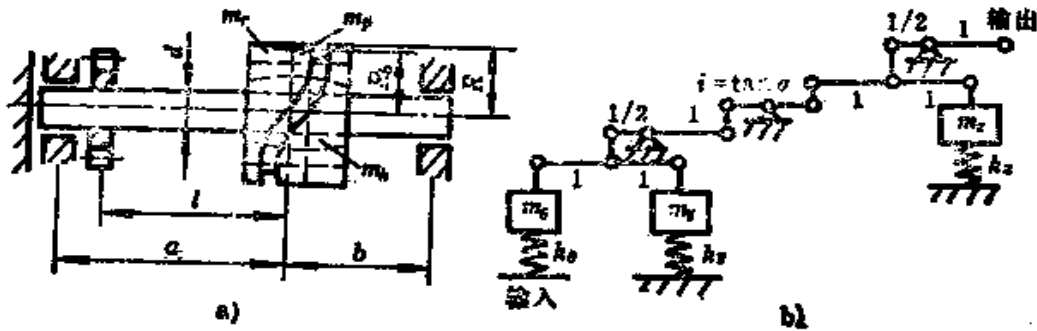


图 VI-4 空间圆柱凸轮机构的模型

a) 结构简图 b) 模型图

附录 VII 凸轮机构简化为 四自由度动力学模型的分析

一般情况下，凸轮机构简化为单自由度或双自由度动力学模型进行分析，可以获得工程上基本满意的近似结果。但是，在机构高速运转或机构工作质量要求较高的情况下，希望有更精确的动力学模型，以便使分析结果更接近于凸轮机构运行时的真实情况。从理论上讲，凸轮机构被离散化的程度越高，即简化为自由度越多的动力学模型进行分析，其结果越精确；但是，计算工作量随自由度数的增加而大大增加。对于结构不太复杂的典型平面凸轮机构，如图 VII-1 所示，可以参考图 VII-3 所示的模型，简化成两个子系统。一个系统是凸轮机构本身，从凸轮轴至从动件，由 θ 、 x 、 y 、 z 四个坐标表示的四自由度模型来描述它的动力学响应，如图 VII-2 所示。另一个系统是电动机至主动齿轮，将轴视为刚性的，由 φ_m 表示的单自由度模型来描述。两个系统是耦合的，即由于凸轮机构系统的运动变化，负载随时波动，将会影响电动机的转速 $\dot{\varphi}_m$ ，使它不可能保持等速旋转。转速的变化取决于电动机的机械特性。

这两个子系统无法单独求解，必须把两个子系统的简化模型所对应的运动微分方程联立求解，才能获得比较接近于真实情况的动力学响应结果。

输出齿轮(φ_i)相对于输入齿轮(φ_n)的瞬时位移为

$$\delta_i = (\varphi_i - \varphi_n)R'_i$$

相对速度 $v = (\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_i)R'_i$

挤压柱长度与齿轮的接触比 ε 有关, 即

$$b = \varepsilon b'_i$$

其中, b'_i 为一个齿的齿宽。

于是, 挤压传动力矩等于

$$M = FR'_i = 12\pi\eta'_i(\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_i)R_i'^{1/2}\varepsilon b'_i \left(\frac{R'_i}{2(\varphi_i - \varphi_n)} \right)^{3/2}$$

挤压项写成

$$V_T = 12\pi\eta'_i\varepsilon b'_i \left(\frac{R'_i}{2} \right)^{3/2} \quad (\text{VII-1})$$

$$\begin{cases} c' = \left(\frac{1}{\varphi_i - \varphi} \right)^{3/2} V_T & (\varphi_i > \varphi) \\ c'' = \left(\frac{1}{\varphi_n + \delta_i - \varphi_i} \right)^{3/2} V_T & (\varphi + \delta_i > \varphi_i) \end{cases} \quad (\text{VII-2})$$

代入上述力矩公式, 整理得

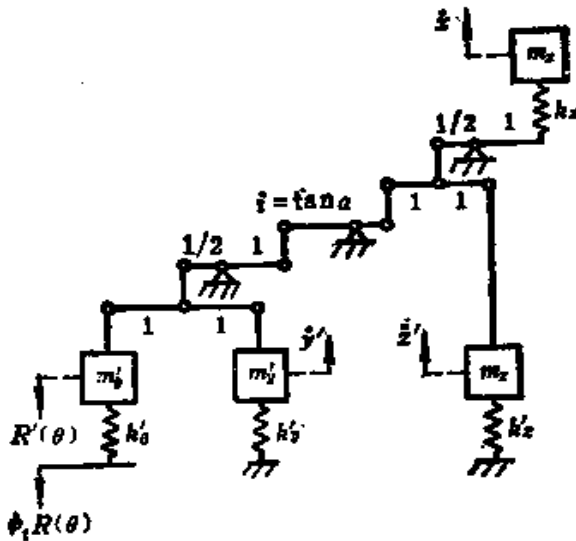


图 VII-2 平面凸轮机构的
四自由度模型

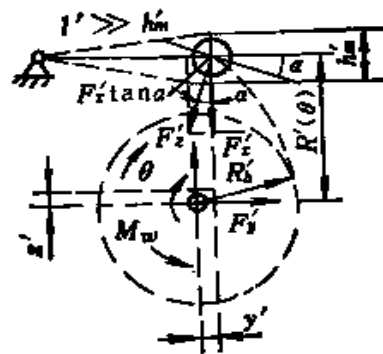


图 VII-3 凸轮与滚子
受力图

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = \varphi_n - \frac{M}{(c' + c'')R_i^{1/2}} \\ \text{若 } \dot{\varphi}_n > \dot{\varphi}_i, \text{ 则 } c'' = 0 \\ \text{若 } \dot{\varphi}_n < \dot{\varphi}_i, \text{ 则 } c' = 0 \end{cases} \quad (\text{VII-3})$$

凸轮轴的扭矩可表示为

$$M = k'_0 R_i'^2 (\varphi_i - \theta) + c'_0 R_i'^2 (\dot{\varphi}_i - \dot{\theta}) \quad (\text{VII-4})$$

凸轮轴沿 y' 与 z' 方向的受力可写成

$$\begin{cases} F'_y = k'_y y' + c'_y \dot{y}' \\ F'_z = k'_z z' + c'_z \dot{z}' \end{cases} \quad (\text{VII-5})$$

凸轮与摆动从动滚子的受力情况如图 VII-3 所示, 它受到两种摩擦力的作用: ① 凸轮轴轴承中的摩擦, ② 滚子在凸轮上的滚动阻力和滚子轴承内的摩擦。这两种力的合力就是作用在凸轮上的摩擦力。其中, 作用在矢径 $R'(\theta)$ 处的后一种摩擦力远大于作用在轴颈上的摩擦力, 即摩擦力矩主要取决于前者, 即由滚子载荷 $F_x / \cos \alpha$ 决定。令摩擦系数为 μ_0 , 则摩擦力矩可写成

$$\begin{cases} M_0 = |F_x| \mu_0 R'(\theta) (1 + \tan^2 \alpha)^{1/2} \\ \text{若 } \dot{\theta} > 0, \text{ 则 } M_0 \text{ 为正} \\ \text{若 } \dot{\theta} < 0, \text{ 则 } M_0 \text{ 为负} \end{cases} \quad (\text{VII-6})$$

凸轮机构的动力学方程则可写成

$$\begin{cases} m'_0 R_i'^2 \ddot{\theta} = M - F_x (\tan \alpha) R'(\theta) - M_0 \\ m'_z \ddot{z}' = F_x - F'_z \\ m'_y \ddot{y}' = F_x \tan \alpha - F'_y \end{cases} \quad (\text{VII-7})$$

凸轮运动规律 $H(B)$ 等已知后, 可求得位移、速度和加速度

为

$$\begin{cases} B = \theta / \theta_n \\ h'(\theta) = h'_n H(B) \\ \frac{dh'(\theta)}{d\theta} = \frac{h'_n}{\theta_n} \cdot \frac{dH}{dB} \\ \frac{d^2 h'(\theta)}{d\theta^2} = \frac{h'_n}{\theta_n^2} \cdot \frac{d^2 H}{dB^2} \end{cases} \quad (\text{VII-8})$$

压力角由前面的定义有

$$\tan \alpha = \frac{1}{R'(\theta)} \cdot \frac{dh'(\theta)}{d\theta} \quad (\text{VII-9})$$

对于平板径向凸轮, 有

$$R'(\theta) = R'_0 + h'(\theta) \quad (\text{VII-10})$$

由式(6-3), 瞬时滚子位移为

$$h'_c = h'(\theta) - (y' \tan \alpha + z') \quad (\text{VII-11})$$

上式对时间微分, 得滚子的速度为

$$\dot{h}'_c = \dot{h}'(\theta) - \left(\dot{y}' \tan \alpha + y' \frac{d \tan \alpha}{d\theta} \dot{\theta} + \dot{z}' \right)$$

其中, $\frac{d \tan \alpha}{d\theta}$

$$= \frac{1}{R'(\theta)} \cdot \frac{d^2 h'(\theta)}{d\theta^2} - \frac{1}{R'(\theta)^2} \cdot \frac{dR'(\theta)}{d\theta} \cdot \frac{dh'(\theta)}{d\theta}$$

由式(VII-10)有 $\frac{dR'(\theta)}{d\theta} = \frac{dh'(\theta)}{d\theta}$ 。代入前式, 得

$$\begin{aligned} \dot{h}'_c = \dot{\theta} \frac{dh'(\theta)}{d\theta} - \left\{ \dot{y}' \tan \alpha + \left[\frac{1}{R'(\theta)} \frac{d^2 h'(\theta)}{d\theta^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{R'(\theta)^2} \left(\frac{dh'(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right] y' \dot{\theta} + \dot{z}' \right\} \quad (\text{VII-12}) \end{aligned}$$

滚子与沟槽凸轮轮廓间的间隙, 如图 VII-4 所示, 当滚子横越时会出现冲击挤压现象。在此过程中, 滚子(h'_c)至凸轮(h'_r)的瞬时距离是

$$\delta_f = (h'_r - h'_c) \cos \alpha$$

挤压速度 $v = -\dot{\delta}_f$, 由上式得

$$v = (\dot{h}'_r - \dot{h}'_c) \cos \alpha + (h'_r - h'_c) \dot{\alpha} \sin \alpha$$

由于 $\dot{\alpha}$ 很小, 上式中的第二项可忽略, 于是

$$v = (\dot{h}'_r - \dot{h}'_c) \cos \alpha$$

等效半径 R_e 与出现间隙横越时刻处的凸轮轮廓曲率半径(ρ)有关。为了计算简便, 可按 $\theta = \frac{1}{2}\theta_m$ 处的理论轮廓的 ρ 计算, 即

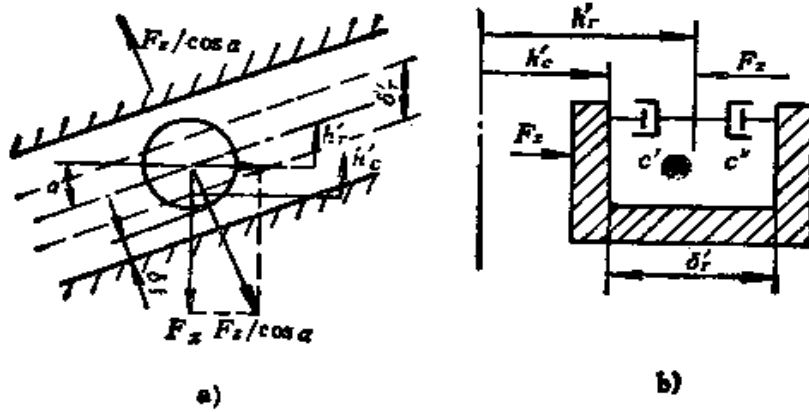


图 4-4 滚子与沟槽壁间的挤压
a) 示意图 b) 模型图

$$\rho = \left| \frac{\left\{ R'(\theta)^2 + \left[\frac{dR'(\theta)}{d\theta} \right]^2 \right\}^{3/2}}{R'(\theta)^2 + 2 \left[\frac{dR'(\theta)}{d\theta} \right]^2 - R'(\theta) \frac{d^2R'(\theta)}{d\theta^2}} \right|$$

实际轮廓的曲率半径则为

$$\rho' = \rho - R'$$

例如，当凸轮曲线为摆线时，有

$$R'(\theta) = R'_i + \frac{h'_m \theta}{\theta_m} - \frac{h'_m}{2\pi} \sin \frac{2\pi\theta}{\theta_m}$$

代入前面的曲率半径公式 $\left(\theta = \frac{1}{2} \theta_m \right)$ ，得

$$\rho'_{1/2} = \frac{R'_i \left[1 + (h'_m/2R'_i)^2 + h'_m/R'_i + 4(h'_m/R'_i\theta_m)^2 \right]^{3/2}}{1 + (h'_m/2R'_i)^2 + h'_m/R'_i + 8(h'_m/R'_i\theta_m)^2} - R'_i$$

如果取 $h'_m/R'_i = 1/2$ ， $h'_m/R'_i\theta_m = 1/2$ ，则

$$\rho'_{1/2} = 1.16R'_i - R'_i$$

显然，升程起点与终点的轮廓曲率半径分别为

$$\rho'_0 = R'_i - R'_i$$

$$\rho'_1 = R'_i + h'_m - R'_i$$

通常，由于 $R'_i \gg R'_r$ ，而且 $\rho' \gg R'_r$ ，有效半径则可由

$$\frac{1}{R'_c} = \frac{1}{R'_r} + \frac{1}{\rho'} \approx \frac{1}{R'_r}$$

得

$$R'_c \approx R'_r \quad (\text{VII-13})$$

将上述推导结果代入挤压力公式, 可得

$$F_x = 12\pi\eta'(\dot{h}'_c - \dot{h}'_r)b'_r \left(\frac{R'_c}{2(\dot{h}'_r - \dot{h}'_c)} \right)^{3/2} \cos^{-1/2} \alpha$$

实际上, 最大压力角一般在 $\frac{\pi}{4}$ 左右, $\cos^{1/2} \alpha$ 不小于 0.85, 故可以近似取 $\cos^{-1/2} \alpha = 1$ 。于是上式变成

$$F_x = 12\pi\eta'(\dot{h}'_c - \dot{h}'_r)b'_r \left(\frac{R'_c}{2(\dot{h}'_r - \dot{h}'_c)} \right)^{3/2} \quad (\text{VII-14})$$

令挤压项为

$$\begin{cases} V_R = 12\pi\eta' b'_r \left(\frac{R'_c}{2} \right)^{3/2} \\ c' = \left(\frac{1}{\dot{h}'_r - \dot{h}'_c} \right)^{3/2} V_R & (\dot{h}'_r > \dot{h}'_c) \\ c'' = \left(\frac{1}{\dot{h}'_c + \delta'_r - \dot{h}'_r} \right)^{3/2} V_R & (\dot{h}'_c + \delta'_r > \dot{h}'_r) \end{cases} \quad (\text{VII-15})$$

则挤压力方程(VI-14)可改写为

$$\begin{cases} \dot{h}'_r = \dot{h}'_c - \frac{F_x}{c' + c''} \\ \text{若 } \dot{h}'_c > \dot{h}'_r, \text{ 则 } c'' = 0 \\ \text{若 } \dot{h}'_c < \dot{h}'_r, \text{ 则 } c' = 0 \end{cases} \quad (\text{VII-16})$$

滚子与槽壁间的挤压阻尼模型如图VII-4 b 所示。

对于从动件的位移 x , 可建立如下关系

$$F_x = k_x(\dot{h}'_r - \dot{x}) + c_x(\dot{h}'_r - \dot{x}) \quad (\text{VII-17})$$

如果从动件的摩擦阻力 F_{fx} 与载荷 F_x 成正比, 其摩擦系数已知为 μ_x , 则有

$$\begin{cases} F_{fx} = \mu_x |F_x| \\ \text{若 } \dot{x} > 0, \text{ 则 } F_{fx} \text{ 为正} \\ \text{若 } \dot{x} < 0, \text{ 则 } F_{fx} \text{ 为负} \end{cases} \quad (\text{VII-18})$$

考虑到外力 $F_{ex} = f(t, \theta, x)$ 和弹簧力 $F_s = F_0 + k_s x$, F_c 为预载, 输出件的运动方程则为

$$m_x \ddot{x} = F_x - (F_{ex} + F_{ox} + F_s) \quad (\text{VII-19})$$

当粘性阻尼因子 $\zeta = c / (2m\omega_n) = c / [2(mk)^{1/2}]$ 已知时, 粘性阻尼系数可由下列各式求得:

$$\begin{cases} c'_\theta = 2\zeta_\theta (m'_\theta k'_\theta)^{1/2} \\ c_x = 2\zeta_x (m_x k_x)^{1/2} \\ c'_y = 2\zeta_y (m'_y k'_y)^{1/2} \\ c'_z = 2\zeta_z (m'_z k'_z)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{VII-20})$$

已知初始条件 (以 0 为下角标者), 则凸轮机构的动力特性可由以下各积分公式求得:

$$\begin{cases} \varphi = \int \dot{\varphi} dt + \varphi_0 \\ h'_z = \int \dot{h}'_z dt + h'_{z0} \\ \varphi_l = \int \dot{\varphi}_l dt + \varphi_{l0} \\ \dot{\theta} = \int \ddot{\theta} dt + \dot{\theta}_0 \\ \theta = \int \dot{\theta} dt + \theta_0 \\ \dot{x} = \int \ddot{x} dt + \dot{x}_0 \\ x = \int \dot{x} dt + x_0 \\ \dot{y}' = \int \ddot{y}' dt + \dot{y}'_0 \\ y' = \int \dot{y}' dt + y'_0 \\ \dot{z}' = \int \ddot{z}' dt + \dot{z}'_0 \\ z' = \int \dot{z}' dt + z'_0 \end{cases} \quad (\text{VII-21})$$

上述积分式中的初值可由前面的公式定出。假定从动件上有约束弹簧, 运动开始之前, 轴等速转动, 从动件不动。

由式(VII-5), $F'_{z0} = k'_z z'_0$

由式(VII-7), $F_{x0} = F'_{z0}$

由式(VII-11), $h'_{c0} = -z'_0$

滚子与凸轮轮廓接触, 故 $h'_{c0} = h'_{r0}$

由式(VII-17), $F_{x0} = k_x (h'_{r0} - x_0)$

由式(VII-19): $F_{x_0} - F_{r_{x_0}} - F_{a_{x_0}} - F_{s_0} = 0$

其中 $F_{r_0} = F_0 + k_r x_0$

由以上关系可推出

$$k'_{r_0} = -\frac{F_{x_0}}{k'_z} \quad (\text{VII-22 a})$$

$$z'_0 = -h'_{r_0} \quad (\text{VII-23 a})$$

$$x_0 = -F_{x_0} \left(\frac{1}{k_x} + \frac{1}{k'_z} \right) \quad (\text{VII-24 a})$$

$$F_{x_0} = \frac{F_{r_{x_0}} + F_{a_{x_0}} + F_0}{1 + k_r/k_x + k_s/k'_z} \quad (\text{VII-25})$$

但是, 如果从动杆没有预载约束弹簧或一定的外力作用, 则滚子的起始位置可能处于沟槽间隙升程的任意处。这个位置必须事先已知, 即

$$h'_{r_0} = \delta'_{r_0} \quad (0 \leq \delta'_{r_0} \leq \delta_r) \quad (\text{VII-22 b})$$

由于滚子并不与槽壁接触, 凸轮无载荷作用, 故

$$z'_0 = 0 \quad (\text{VII-23 b})$$

而且从动杆也无载荷作用, $x_0 = h'_{r_0}$, 故

$$x_0 = \delta'_{r_0} \quad (\text{VII-24 b})$$

由于起始时的凸轮曲线斜率为零, 不论有无弹簧载荷, 其切向变形总是为零的, 即

$$y'_0 = 0 \quad (\text{VII-26})$$

同理, 摩擦力矩为零, 齿轮副上无载荷作用, 输出齿轮可位于间隙的任意位置, 令

$$\varphi_{t_0} = \delta_{\theta_0} \quad (0 \leq \delta_{\theta_0} \leq \delta_t) \quad (\text{VII-27})$$

由于凸轮轴无载荷作用, 故

$$\theta_0 = \delta_{\theta_0} \quad (\text{VII-28})$$

在 $t = 0$ 时刻, 电动机角位置取为零:

$$\varphi_0 = 0 \quad (\text{VII-29})$$

无载的电动机 (φ) 和无载的凸轮 (θ) 开始时均为等速转动, 即

$$\dot{\phi}_0 = \omega_0 \quad (\text{VII-30})$$

$$\dot{\theta}_0 = \omega_0 \quad (\text{VII-31})$$

而且从动件开始时也是静止的，轴没有变形，即

$$\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0 \quad (\text{VII-32})$$

根据有关电动机动力特性的公式，有

$$\begin{cases} \dot{M}_{ee} = \frac{-(G/i_1^2)\Delta\omega - M_{ee}}{T_{e1}} \\ M_{ee} = \int \dot{M}_{ee} dt + M_{ee0} \\ M_{ee0} = 0 \end{cases} \quad (\text{VII-33})$$

$$\frac{J_r}{i_1^2} \Delta\dot{\omega} = M_{ee} - M_{me} \quad (\text{VII-34})$$

$$\begin{cases} \Delta\omega = \int \Delta\dot{\omega} dt + \Delta\omega_0 \\ \Delta\omega_0 = 0 \\ \omega = \omega_0 + \Delta\omega \end{cases} \quad (\text{VII-35})$$

式中， M_{ee} 为电磁力矩；
 G 为线性静特性；
 T_{e1} 为电气时间常数；
 i_1 为减速比；
 J_r 为转子的转动惯量；
 M_{me} 为外力矩。

利用上述公式，对这种四自由度模型表征的平面凸轮机构，可以编制出进行动力学分析的计算机程序；加上电动机驱动系统的单自由度模型分析，实际上要求解一个五自由度系统的动力学问题。

图VII-5是一个平面凸轮机构四自由度模型动学分析的实例。采用摆线运动规律， $\tau_c = 0.161$ ， $k_r \ll k_s$ ， $F_s = k_s/k'_{omr} = k_s \tan^2 \alpha_{mr} / k'_0 = 1.64$ 。其中 k'_{omr} 为凸轮轴的平均刚度； α_{mr} 为平均压力角； $F_m = m_s/m'_{omr} = m_s \tan^2 \alpha_{mr} / m'_0 = 2.42$ ，其中 m'_{omr} 为凸轮轴的平均等效质量。图VII-5 a 为从动件的无因次加速度 \ddot{x} ；图VII-5 b 为凸轮

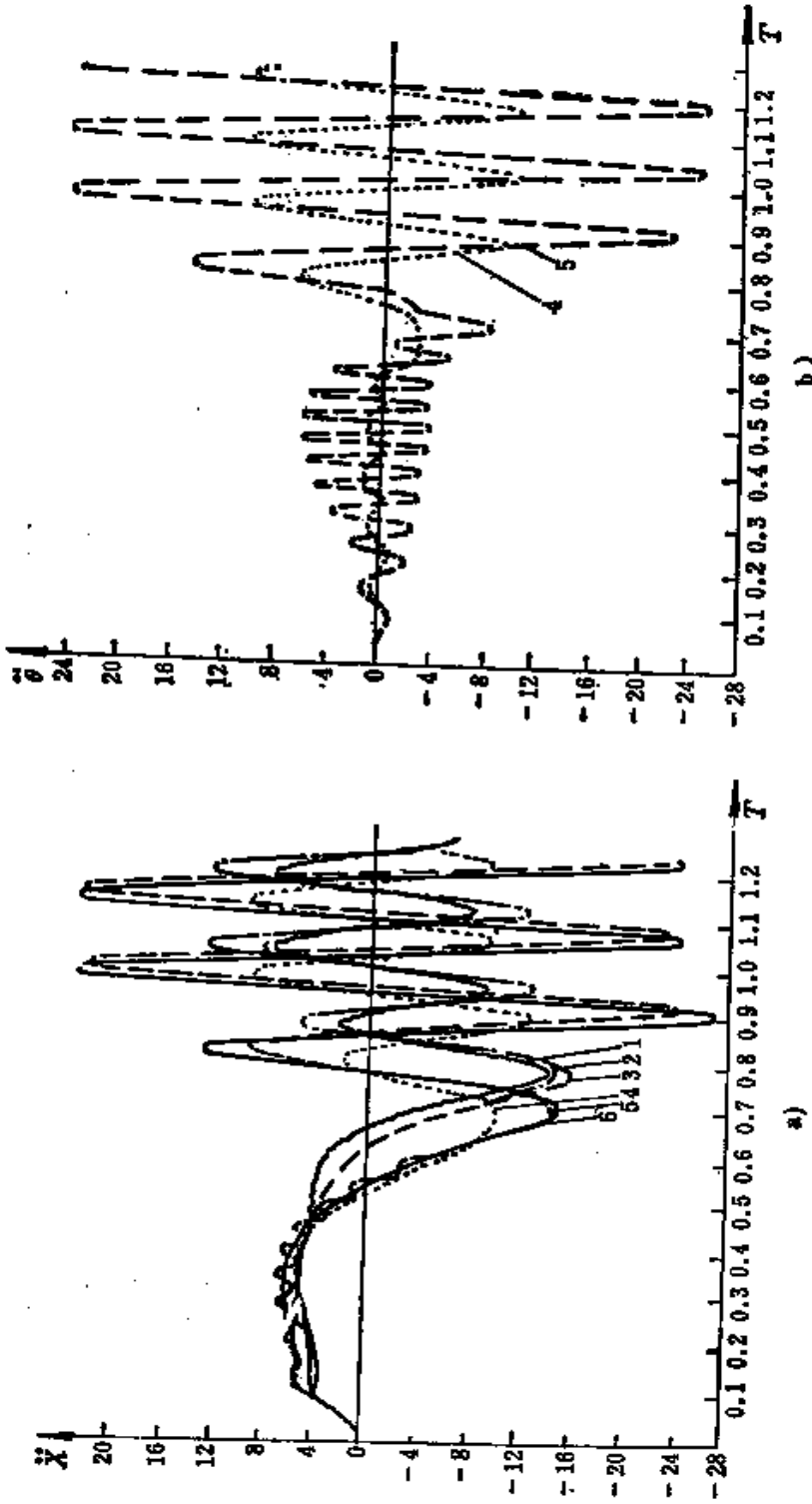


图 5 平面凸轮机构的动力学响应

1—测量值 2—四自由度模型计算值 3—无阻尼四自由度模型计算值 4—无阻尼、无从动件弹簧四自由度模型计算值
5—无阻尼、无从动件弹簧单自由度模型计算值 6—无阻尼、无从动件弹簧单自由度模型计算值

的无因次角加速度。在图上同时列出了同一机构的测量值、单自由度与双自由度模型的计算结果。由图Ⅶ-5可以看出，四自由度模型的计算结果比较接近于实测结果，忽略阻尼的影响并不很大，但忽略间隙对计算结果有明显的影响，单自由度与双自由度无阻尼、无从动件力封闭弹簧模型的计算结果差别不大，与四自由度模型计算结果有一定差异，主要是残留振动差别较大，但基本规律是相近的，在转位期间的计算结果差异不大。

参 考 文 献

- 〔1〕 М. Л. Орликов; *Кулачковые механизмы машин-автоматов*, Машгиз (1955).
- 〔2〕 D. Tesar and G. K. Matthew; *The dynamic synthesis, analysis, and design of modeled cam system*, Lexington Books (1976).
- 〔3〕 郭连声、柴邦衡译; 《凸轮机构》, 机械工业出版社, 1981.
- 〔4〕 孔午光、王晶、赵卫军; 《高速凸轮的判别准则》, 中国机械工程学学会第三届机构学年会论文 (1985).
- 〔5〕 F. D. Furman; *Cams-elementary and advanced*, John Wiley and Son, New York (1921).
- 〔6〕 Л. Н. Решетов; *Кулачковые механизмы токарных автоматов*, М. Кимми, 1934.
- 〔7〕 F. Nakanishi; *On cam forms which induce no surging in valve springs*. Report of the Aeronautical Research Institute. 220, 271-280, Tokyo Imperial University (1941).
- 〔8〕 J. A. Hrones; *Analysis of dynamic forces in a cam-driven system*, Trans ASME 70, 473-482 (1948).
- 〔9〕 D. B. Mitchell; *Tests on dynamic response of cam-follower system*, Mech. Engng. 72, 467-471 (1950).
- 〔10〕 T. R. Thoren, H. H. Engemann and D. A. Stoddart; *Cam design as related to valve train dynamics*, SAE Q. Trans. 6, 1-14 (1952).
- 〔11〕 M. G. Turkish; *Relationship of valve-spring design*

to valve gear dynamics and hydraulic lifter pump-up. SAE Trans. 61, 706-716 (1953).

[12] P. Barkan and R. V. McGarrity, *A spring-actuated, cam follower system, Design theory and experimental results* J. Engng. Ind. Trans. ASME 87B, 279-286 (1965).

[13] Л. Н. Решетов, *Кулачковые механизмы*, Машгиз (1953). 邓梅丹等译, 《凸轮机构》, 机械工业出版社 (1957).

[14] К. В. Тир, *Комплексный расчёт Кулачковых механизмов*, Машгиз (1958).

[15] М. В. Семенов, *Механизмов и машин, Структура и кинематика кулачковых механизмов. Лекции* (1961).

[16] Б. Е. Горский и Я. Л. Чернявский, *Модернизация кулачковых механизмов машин. Машиностроение* (1964).

[17] Н. И. Левитский, *Кулачковые механизмы*, Машиностроение (1964).

[18] Н. Н. Попов, *Расчёт и проектирование кулачковых механизмов. Машиностроение* (1965).

[19] Fan Y. Chen, *Mechanics and design of cam mechanisms*. Pergamon Press (1982).

[20] P. W. Jensen, *Cam, Design and manufacture*. Industrial Press, New York (1965).

[21] H. A. Rothbart, *Cams-design, dynamics, and accuracy*. Wiley, New York (1956).

[22] C. N. Neklutin, *Mechanisms and cams for automatic machines*. Elsevier, New York (1969).

[23] 中井英一, 《实用カム設計法》, 日刊工業新聞社 (1963).

[24] 小川潔, 《リンケ・カムの設計》, オーム社 (1967).

[25] 牧野洋, 《自动機械機構学》, 日刊工業新聞社 (1976).

[26] 肖正扬, 杨洋, 刘晓云, 自动机械凸轮从动件简谐梯形通用运动曲线运动学优化. 《西北轻工业学院学报》, 1985年第二期, 20~30.

[27] T. Weber Jr., *Cam dynamics via filter theory*. Machine Design 32 (21), 160-165 (1960).

- [28] A. S. Gutman; *To avoid vibration-try this new cam profile*. *Prod. Engng.* 32 (44), 42-48 (1961).
- [29] F. Freudenstein; *On the dynamics of high-speed cam profiles*. *Int. J. Mech. Sci.* 1, 342-349 (1960).
- [30] D. A. Stoddart; *Polydyne cam design*. *Machine Design*, 25 (1), 121-135 (1953); 25 (2), 146-154 (1953); 25 (3), 149-164 (1953).
- [31] G. F. Fawcett and J. N. Fawcett; *Comparison of polydyne and non-polydyne cams*. *Proc. Conf. Mech. Cams and Cam Mechanisms*, Liverpool Polytechnic, England (1974).
- [32] M. Klopmok and R. V. Muffley; *Determining of pressure angles for swinging-follower cam systems*. *Trans. ASME* 78, 803-806 (1956).
- [33] H. A. Rothbart; *Limitations on cam pressure angles*, *Prod. Engng.* 29 (19), 193-195 (1957).
- [34] W. B. Carver and B. E. Quinn; *An analytical method of cam design*. *Mech. Engng.* 67, 522-526 (1954).
- [35] A. R. Holowenko and A. S. Hall; *Cam curvature*. *Machine Design* 25 (8), 170-177 (1953); 25 (9), 162-169 (1953); 25 (11), 148-156 (1953).
- [36] A. D. Thumim; *Cam design by computer*. *Machine Design* 43 (21), 81-84 (1971).
- [37] M. Zigo; *A general numerical procedure for the calculation of cam profiles from arbitrarily specified acceleration curves*. *J. of Mechanisms* 2 (4), 407-414 (1967).
- [38] 田中义弘; コンピュータにすむ新レムカム設計.《機械設計》, 21卷, 3号 (1977).
- [39] 肖正扬; 平面凸轮轮廓压力角与曲率半径的分析计算——速度、加速度传递关系法.《西北轻工业学院学报》, 1984年第1期.
- [40] 殷鸿梁; 《圆柱凸轮分度机构的计算机辅助设计》, 全国第三届机构学年会论文 (1985).
- [41] J. De Fraley; *Integration of computer aided design and computer aided manufacturing for cams driving mechanisms*.

ms. Proc. of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 122-125 (1979).

[42] W. Wunderlich, *Single-disk cam mechanisms with oscillating double roller follower*. MMT 19 (4/5), 409-415 (1984).

[43] J. Chakraborty and S. G. Dhande, *Kinematics and geometry of planar and spatial cam mechanisms*. John Wiley & Sons (1977).

[44] J. Dominguez, J. Garcia-Lomas and J. Martinez, *Dynamic synthesis of cam profiles minimizing vibrations and pressure*. Proc. of the 6th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms-1983, 1225-1229.

[45] H. Kwakemaak and J. Smit, *Minimum vibration cam profile*. J. Mech. Engng. Sci. 10, 219-227 (1968).

[46] J. L. Wiederrich and B. Roth, *Design of low vibration cam Profiles*. Cams and Cam Mechanisms, 3-8, Mech. Engng. Publications Ltd (1978).

[47] Э. Е. Пейсах, *Влияние упругости толкателя на динамику кулачковых механизмов и коэффициенты динамичности*. Изв. высших учебн. заведений «Машиностроение», No. 2 (1963).

[48] A. Midha, M. L. Badlani and A. G. Erodman, *Periodic response of high-speed cam mechanism with flexible follower and camshaft using a closed-form numerical algorithm*. Proc. of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 1311-1314 (1979).

[49] 栗山明海, *カムベ駆動される多自由度系の残留过渡振動*. 《精密機械》, 37 (12), 881-887 (1971).

[50] 彭国勋、田惠民, *高速糖果包装机的运动学与动力学初探*. 《包装科技》, No2, 1-6 (1984).

[51] 彭玉才, *凸轮从动件系统对输入运动的动态响应*. 《哈尔滨工业大学学报》, No1 (1981).

[52] M. P. Koster, *Vibration of cam mechanisms*. Macmillan

(1974).

[53] A. J. Klein Breteler, *The disc cam regarded as a special finite element in kinematics*. Proc. of the 6th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 1217-1220 (1983).

[54] F. Y. Chen and N. Polvanich, *Dynamic responses of a cam-actuated mechanism with pneumatic coupling*. Trans. ASME, J. Eng. Ind. 99B (2), 300-306 (1977).

[55] E. Raghavachyarulu and J. S. Rao, *Nonlinear vibration analysis of cam-follower systems with pneumatic coupling*. Proc. of the 6th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 1213-1216 (1983).

[56] F. Y. Chen and A. M. Shah, *Optimal design of the geometric parameters of a cam mechanism using a sequential random vectors technique*. ASME Paper No. 72-Mech-73 (1972).

[57] R. G. Fenton, *Optimum design of disc cams*. Proc. of the 4th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, 781-783 (1975).

[58] Peng Guoxun, Xiao Zhengyang and Tian Huiming, *Optimization on external parallel index cam mechanism*. Proc. of Intern-Packaging Conference 85/Beijing, 799-804 (1985).

[59] S. G. Dhande and T. G. Kale, *Optimal design of disc cam mechanisms*. Proc. of the 6th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 1195-1200 (1983).

[60] Y. Terauchi, *A computer-aided method for optimum design of plane cam size avoiding undercutting and separation phenomena*. MMT 18 (2), 157-163 (1983).

[61] J. R. Jones, *Cams and cam mechanisms*. Mech. Engng. Publications Ltd. (1978).

[62] F. Giordana and V. Ragnoni, *The influence of construction errors in the law of motion of cam mechanisms*. MMT 15 (1), 29-45 (1980).

[63] S. S. Rao, *Error analysis of cam-follower system, a*

probabilistic approach. Proc. Intern. Engrs. Vol. 198C, No. 12, 155-162 (1984).

[64] 新井哲夫: 最近のカムの特征と応用例, 《自動化技術》, 第17卷第1号, 64-67 (1985)。

[65] 加藤平三郎: カム式ピックアンドプレースユニット, 《機械設計》, 第30卷第15号, 80-84 (1986年12月号)。

[66] 新井哲夫: カム式ATC装置, 《機械設計》, 第30卷第15号, 75-79 (1986年12月号)。

[67] 彭国勋: 《包装机械浅论》, 机械工业出版社 (1985)。

[68] 田惠民: 不同类型平行分度凸轮机构的通用优化设计, 《西北轻工业学院硕士学位论文》 (1987)。

[69] 沈蕴方、容尔谦、李寅年、冯德坤: 《空间啮合原理及SG-71型蜗轮副》, 冶金工业出版社 (1983)。

[70] Ф. Л. Литвин; Теория зубчатых зацеплений, М. Физматгиз (1960)。

[71] 盛正华: 《线性代数与张量解析》, 湖南科学技术出版社 (1984)。

[72] 曹巨江: 圆柱分度凸轮机构的运动学、几何学分析及CAD/CAM, 《西北轻工业学院硕士学位论文》 (1987)。

[73] J. 霍林主编, 上海交通大学译: 《摩擦学原理》, 机械工业出版社 (1981)。

[74] 高木浩孝、下里省吾: カムの材質と加工, 《機械設計》, 第23卷第15号, 38-42 (1979年12月号)。

[75] 肖正扬, 鞠传章: E^3 空间旋转矩阵算子及其在曲线、曲面理论中的应用, 《西北轻工业学院学报》, 1986年第一期, p20~36。