

弹性 薄壁梁桥 分析

TANXING BAOWI LIANGQIAO FENXI

倪元增 钱寅泉 著

人民交通出版社

弹性薄壁梁桥分析

倪元增 钱寅泉 著

人民交通出版社

内 容 提 要

本书作者用板元位移模式法分析弹性薄壁梁桥的各种变形特征,并依此建立相应的控制方程,再用简化的有限元法和加辽金法求数值解,为薄壁箱梁、T梁的弯扭分析和计算提供了简捷的方法,很有实用价值。

图书在版编目 (C I P) 数据

弹性薄壁梁桥分析/倪元增, 钱寅泉著. -北京: 人民交通出版社, 2000
ISBN 7-114-03573-X

I. 弹… II. ①倪… ②钱… III. 薄壁结构-梁桥-弹性分析 IV. U448.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 10060 号

弹性薄壁梁桥分析

倪元增 钱寅泉 著

版式设计: 周 国 责任校对: 戴瑞萍 责任印制: 张 凯

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街 10 号 010 64216602)

各地新华书店经销

北京牛山世兴印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 6.875 字数: 178 千

2000 年 6 月 第 1 版

2000 年 6 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数: 0001—3100 册 定价: 18.00 元

ISBN 7-114-03573-X

U · 02575

前 言

这是一本用截面板元位移模式法的概念来分析弹性薄壁梁桥的各种基本变形特性,从而建立起相应的计算方法的专著。它是作者多年来在教学和科研工作中的总结,是在为研究生授课所编写的讲义的基础上,从概念上加以归纳和深化而重新编写的,因而是一本可供工程师们继续学习的教科书。

本书首先从预备知识入手,回顾了应变和应变能的概念,引入了变分法,此是建立各种控制方程的有效工具。精确的解析解以及近似的有限元法和 Galerkin(加辽金)法解,是本书要分别应用的基本解法,亦在第一章的分析应用中加以介绍。为便于工程师的学习备忘,章末简要地附有:附 I——两个微积分法则;附 II——任意区间上的三角级数;附 III——直梁的杆件有限元法。

第二章是形成截面板元位移模式法的概念。利用截面板元,简易地解决了大曲率弯梁的应变分析问题,建立起更深层次的应变和应变曲率与初曲率的关系,为薄壁弯桥分析打下了基础。该章归纳的形导函数乘积的三种积分类型,是计算截面刚度矩阵的有效手段。

在薄壁梁桥的拉压弯、扭转与扭翘、剪滞及畸变的基本变形中,拉压弯作为最简单的平截面模式,在第二章进行了研究。在第三章接着来研究扭转与扭翘。板元的自身扭曲,是分离于中面的扭翘,存在着自身扭曲的切应变是刚性截面扭转角的二倍关系。通过截面板元的位移函数,在全截面确定扭翘位移模式,这是本书的又一特色。

第四章的剪滞分析,研究了剪滞翘曲的近似位移函数、剪滞翘曲位移函数的幅值与翼板板元的宽度和至中和轴距离的关系、全

截面剪滞翘曲位移模式与轴向拉压的耦联与解耦这三个问题。

第五章对弹性薄壁梁桥建立了按刚性截面分析的控制方程。对于段元法方程,可分建立变形分量截面刚度矩阵和段元节点位移分量的段元刚度矩阵两个阶段。三截面方程的等带宽存储及其求解方法,便于实用。按截面板元算出的内力,便于钢筋混凝土梁的配筋设计,这亦是板元模式法的一个优点。

截面畸变分离于刚性截面的整体分析,在第六章中形成了如下一系列概念:截面畸变可用各肋梁间的相对错动位移来描述;截面的等效平面框架上各节点的线位移分量,可按机动分析与错动位移建立关系;实际畸变位移是错动位移的一半;畸变内力在全截面应构成内力自平衡;对于弯梁还应考虑腹板的畸变转角的附加效应,这些皆被算例一一证实。利用畸变方程还可作所需的横隔数的分析。

第七章用板元模式段元法列出了几个算例作检验比较。对于单室矩形弯箱梁的简化方程可供简支梁实用。

第八章的肋板式多肋T梁桥,与箱梁桥有所差异的是在畸变中应考虑各肋梁的扭转角,还可以按刚接梁法直接建立控制方程。

在前面的研究中未尽的一些问题,放在第九章一并加以讨论,以提供处理的方法。

最后的第十章是板元模式段元法的程序实施要点,它亦可以起到概括一下板元模式段元法概念的作用。此法是本书落实于工程设计的实用算法。对于一般的有限元法或有限条法,其输出结果,工程师要考虑结构受力的机制和从中寻求各种变形因素相互之间的关系是困难的,会导致忽略对结构特性的真正把握。板元模式法则克服了此一弊端,有利于工程师进行概念设计。

阅读本书的各章,可先读其小结,便于掌握要点。本书如果能使读者对弹性薄壁梁桥的分析,形成一个清晰而完整的概念,是作者的愿望。但作者水平有限,书中难免有不当与错误之处,恳请赐教。本书的出版得到了刘效尧高级工程师和吴德心副总编辑的大力支持,在此深表感谢。

目 录

第一章 预备知识	1
§ 1-1 引言	1
§ 1-2 应变能	1
§ 1-3 弹性体系的总势能和最小势能原理	5
§ 1-4 变分法	7
§ 1-5 能量守恒原理的运用	11
§ 1-6 矩形截面直梁的弯翘分析	12
§ 1-7 钢与混凝土组合梁考虑滑移的分析	18
§ 1-8 Galerkin 法	24
§ 1-9 小结	27
附 I 两个微积分法则	27
附 II 任意区间上的三角级数	29
附 III 直梁的杆件有限元法	30
第二章 位移模式法概念	34
§ 2-1 薄壁梁桥的基本构件及截面板元	34
§ 2-2 板元的应变与位移关系式	36
§ 2-3 小曲率弯梁的应变曲率和扭率	39
§ 2-4 大曲率弯梁的应变与应变曲率的关系	42
§ 2-5 截面板元的基本位移函数及其形函数	44
§ 2-6 直梁拉压弯的截面板元应变表达式	45
§ 2-7 直梁拉压弯变形的位移模式及其变分方程	48
§ 2-8 弹性薄壁梁桥的基本变形及其位移模式	52
§ 2-9 形导函数乘积的积分类型	54
§ 2-10 小结	56

第三章	扭转与扭翘	57
§ 3-1	板元的中面法线转角与截面扭转角	57
§ 3-2	扭转及扭翘的截面板元位移模式	59
§ 3-3	直梁桥的约束扭转控制微分方程	65
§ 3-4	对 Vlasov 方程与 Umanskii 方程的讨论	71
§ 3-5	大曲率弯梁的扭翘位移模式讨论	74
§ 3-6	小结	75
第四章	剪滞分析	77
§ 4-1	引言	77
§ 4-2	矩形箱梁剪滞翘曲位移模式	77
§ 4-3	静定梁的解析解分析	81
§ 4-4	槽形宽梁剪滞翘曲位移模式	86
§ 4-5	单室薄壁箱梁剪滞翘曲位移模式	90
§ 4-6	剪滞翘曲的截面板元位移模式	95
§ 4-7	小结	98
第五章	弹性薄壁梁桥控制方程	99
§ 5-1	引言	99
§ 5-2	对应变形分量的截面板元刚度矩阵	100
§ 5-3	弹性薄壁梁桥控制微分方程	105
§ 5-4	截面板元位移模式的段元方程	108
§ 5-5	三截面方程及其截面逆阵消元法	112
§ 5-6	截面板元的内力计算	115
§ 5-7	小结	119
第六章	箱梁的畸变分析	120
§ 6-1	引言	120
§ 6-2	截面畸变的机动分析	124
§ 6-3	肋梁错动的纵向弯曲位移模式及刚度矩阵	125
§ 6-4	截面畸变的荷载势能与等效畸变转角	133
§ 6-5	箱梁畸变的弹性控制微分方程及其讨论	135
§ 6-6	箱梁畸变的段元方程	138

§ 6-7	小结	141
第七章	箱梁桥的计算及其简化	143
§ 7-1	箱梁桥的计算	143
§ 7-2	矩形单室箱弯梁的应变能及其刚度的简化	145
§ 7-3	矩形单室箱弯梁的弹性控制微分方程	150
§ 7-4	矩形单室箱简支弯梁桥的三角函数解	153
§ 7-5	小结	156
第八章	肋板式多肋 T 梁桥分析	157
§ 8-1	引言	157
§ 8-2	肋梁的应变曲率及畸变模式和刚度矩阵	158
§ 8-3	多肋 T 梁桥的畸变方程	164
§ 8-4	刚接梁法弹性控制微分方程	167
§ 8-5	多肋 T 梁桥段元方程	169
§ 8-6	多肋 T 梁桥算例	171
§ 8-7	小结	173
第九章	薄壁梁桥设计中的几个问题	175
§ 9-1	引言	175
§ 9-2	正交构造异性板面	175
§ 9-3	局部荷载的横向传递问题	178
§ 9-4	温度与收缩应力	179
§ 9-5	预应力	182
§ 9-6	独立柱点铰支座	186
§ 9-7	斜交支座及位移自由度变换	189
§ 9-8	斜支多肋 T 梁桥	193
§ 9-9	小结	200
第十章	板元模式段元法的程序实施要点	202
§ 10-1	引言	202
§ 10-2	基本输入	202
§ 10-3	形导函数的输入及其乘积的积分	203
§ 10-4	截面板元位移模式下的应变	204

§ 10-5	截面板元的刚度矩阵计算	204
§ 10-6	畸变刚度矩阵及荷载列阵	205
§ 10-7	段元刚度矩阵的形成	206
§ 10-8	三截面方程的等带宽存储及其求解	206
§ 10-9	弹性支承的刚度矩阵	206
§ 10-10	多工况荷载列阵	207
§ 10-11	受约束支点的变换矩阵	207
§ 10-12	截面的变形分量、应力与内力计算	208
参考文献		209

第一章 预备知识

§ 1-1 引 言

本书研究弹性薄壁梁桥的应力应变分析,需要运用弹性力学的变分原理^[1],本章作为预备知识给以简述之。

由于某些函数的物理意义,常常使得与其性状有关的某种泛函取驻值。如弹性力学中的最小势能原理:在所有的容许位移函数中,真实的位移使总势能取极小值。在此,总势能是容许位移场函数的函数,即泛函。变分法就是在一组容许函数中选定一个函数,使给定的泛函取驻值。弹性力学问题可以通过泛函的驻值条件,提供问题的控制微分方程和边界条件,如从最小势能原理的驻值条件导出弹性平衡方程和求解边界条件。由于能量泛函具有明确的物理意义,且在坐标变换中保持不变,可方便地推出各种坐标系表示的控制微分方程和求解边界条件。它亦容易地对能量泛函采用直接法求解,如用有限元法建立弹性体的节点平衡方程,求得近似解。

§ 1-2 应 变 能

以一弹簧为例,如图 1-1 所示,其弹簧常数为 k ,弹簧从自由状态的零伸长到 Δ ,弹簧力与伸长 u 成正比例变化,即 $P = ku$ 。于是,该弹簧储存了应变能

$$U = \int_0^{\Delta} k u du = \frac{1}{2} k \Delta^2 \quad (1-1)$$

取单元体的简单应变,线弹性模量和剪切模量分别为 E 和 G , 而 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, μ 为泊桑比。图 1-2a 为简单线应变,有单位体积的应变能

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon = \int_0^\epsilon E\epsilon d\epsilon \\
 &= \frac{1}{2} E\epsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma\epsilon
 \end{aligned}
 \tag{1-2}$$

图 1-2b 为纯剪切应变,有单位体积应变能

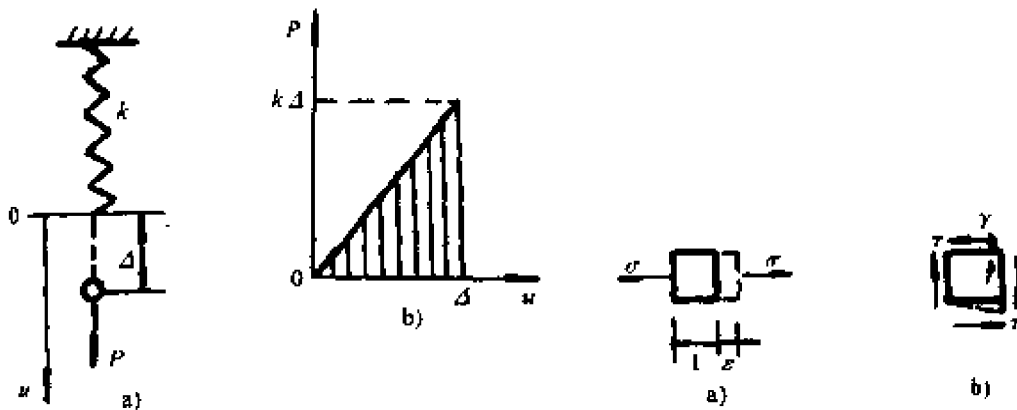


图 1-1 弹簧模型

图 1-2 单元体简单应变

$$U_0 = \int_0^\gamma \tau d\gamma = \int_0^\gamma G\gamma d\gamma = \frac{1}{2} G\gamma^2 = \frac{1}{2} \tau\gamma
 \tag{1-3}$$

在直角坐标系中,各应变分量及应力分量彼此正交。对于复杂应力状态,单位体积应变能为

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})
 \tag{1-4}$$

取一单位长度的等截面直杆,如图 1-3 所示,横截面积为 A ,

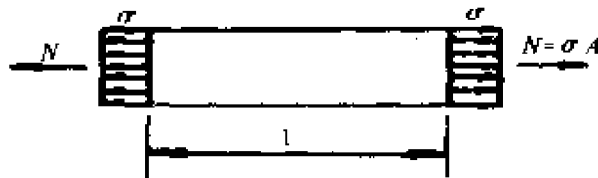


图 1-3 简单拉伸

轴力为 N , 横截面上有均匀分布的正应力 σ , 轴向有均匀的线应变 ϵ , 单位体积应变能 $U_0 = E\epsilon^2/2$, 则该直杆有应变能

$$U = \int_A U_0 dA = \frac{1}{2} EA\epsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \quad (1-5)$$

取一单位长度的矩形等截面直梁, 如图 1-4 所示, 按平截面假

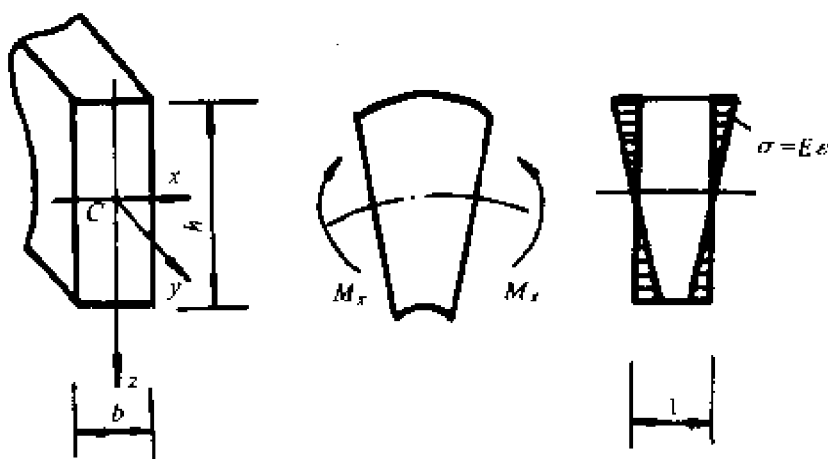


图 1-4 纯弯曲

设, 有线应变 $\epsilon = -z \frac{d^2 w}{dy^2}$, 而应变能

$$\begin{aligned} U &= \int_A \frac{1}{2} E \left(z \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dA \\ &= \frac{E}{2} \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 \int_A z^2 dA = \frac{EI_x}{2} \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (1-6)$$

式中: $I_x = \int_A z^2 dA$, 为横截面对主形心轴 x 的惯性矩;

w ——为梁的 z 向挠度。

又弯矩

$$M_x = \int_A \sigma z dA = -EI_x \frac{d^2 w}{dy^2} \quad (1-7)$$

因而, 应变能又可写为

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI_x} \quad (1-8)$$

取一单位长度的圆轴, 如图 1-5 所示, 按刚性截面假设, 剪应变

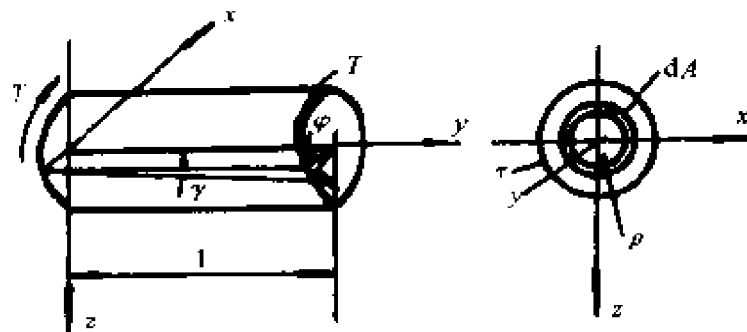


图 1-5 圆轴扭转

$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dy}$, 有应变能

$$\begin{aligned}
 U &= \int_A \frac{1}{2} G \left(\rho \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 dA \\
 &= \frac{G}{2} \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 \int_A \rho^2 dA = \frac{GJ_p}{2} \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2
 \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中: $J_p = \int_A \rho^2 dA$, 为圆截面的极惯矩。

又扭矩

$$T = \int_A \tau \rho dA = GJ_p \frac{d\varphi}{dy} \quad (1-10)$$

因而, 应变能又可写为

$$U = \frac{1}{2} \frac{T^2}{GJ_p} \quad (1-11)$$

以一单位长度的等截面轴心受力直杆为例, 若轴向线应变为 ϵ_1 和 ϵ_2 之和, 则应变能为

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} EA(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 \\
 &= \frac{1}{2} EA\epsilon_1^2 + \frac{1}{2} EA\epsilon_2^2 + EA\epsilon_1\epsilon_2
 \end{aligned} \quad (1-12)$$

可见对于线性弹性体, 应变具有叠加关系, 而应变能不存在叠加关系, 一般具有耦联项 $\epsilon_1\epsilon_2$ 。

再取一单位长度的矩形等截面直梁, 承受轴力 N_y 、变矩 M_x 和 M_z 作用, C_{xz} 为横截面主形心坐标。对应于 N_y 、 M_x 和 M_z 的某

点的轴向线应变分别为 $\frac{dv}{dy}$ 、 $-z \frac{d^2w}{dy^2}$ 和 $-x \frac{d^2u}{dy^2}$, u 、 v 和 w 分别为 x 、 y 和 z 轴的位移分量。根据应变的叠加关系,有轴向线应变

$$\begin{aligned}\epsilon_y &= \frac{dv}{dy} - z \frac{d^2w}{dy^2} - x \frac{d^2u}{dy^2} \\ &= v' - zw'' - xu''\end{aligned}\quad (1-13)$$

于是有应变能

$$\begin{aligned}U &= \int \frac{1}{2} E (v' - zw'' - xu'')^2 dA \\ &= \frac{1}{2} EA (v')^2 + \frac{1}{2} EI_x (w'')^2 + \frac{1}{2} EI_z (u'')^2\end{aligned}\quad (1-14)$$

式中: $I_x = \int_A z^2 dA$; $I_z = \int_A x^2 dA$ 。

该式对于横截面主形心坐标系 Cxz , 其静面矩 $S_x = \int_A z dA = 0$, $S_z = \int_A x dA = 0$ 以及惯性积 $I_{xz} = \int_A xz dA = 0$, 使直梁的轴向变形和两向弯曲的应变能彼此独立, 无耦联关系, 即存在正交性, 此时有叠加关系。

又取一单位长度的圆轴, 承受弯矩 M_x 和扭矩 T_y 作用, Cxz 为圆截面的形心坐标, 如式(1-4)所示, 线应变与剪应变存在正交性, 其应变能彼此独立, 有叠加关系, 即

$$U = \frac{1}{2} EI_x (w'')^2 + \frac{1}{2} GJ_p (\varphi')^2 \quad (1-15)$$

§ 1-3 弹性体系的总势能和最小势能原理

对于弹性体系的杆件, 应变能为弹性势能。对于外荷载则具有重力势能。现在考虑的外力, 可以是广义力, 且皆视为具有重力势能。取对应的位移或广义位移的参考零点, 外力对应于位移的功与该外力的势能反号。如外力 P 与位移 u 的正方向一致, 外力矩 M 与转角 φ 的正方向一致, 则其势能分别为

$$V_p = -Pu \quad (1-16)$$

$$V_m = -M\varphi \quad (1-17)$$

弹性体系的总势能 Π 为应变能 U 与外力势能 V 之和, 即

$$\Pi = U + V \quad (1-18)$$

对于悬挂一重物 P 的弹簧, 如图 1-6 所示, 有弹簧常数 k , 该体系的总势能为

$$\Pi = \frac{1}{2}ku^2 - Pu \quad (1-19)$$

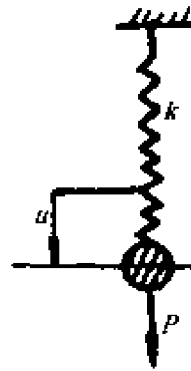


图 1-6 弹簧体系

对于如图 1-7 所示的直梁体系, 承受双向弯曲的横向分布荷载 q_x 和 q_z , 扭转分布力矩 m_y , 分布轴向荷载 q_y , 以及滑动铰支端的 N_1 、 M_{x1} 、 M_{z1} 和 T_1 , 其总势能为

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l (EA(v')^2 + EI_x(w'')^2 + EI_z(u'')^2 + GJ_\rho(\varphi')^2) dy \\ & - \int_0^l (q_y v + q_z w + q_x u + m_y \varphi) dy \\ & - N_1 v(l) - M_{z1} w'(l) - M_{x1} u'(l) - T_1 \varphi(l) \end{aligned} \quad (1-20)$$

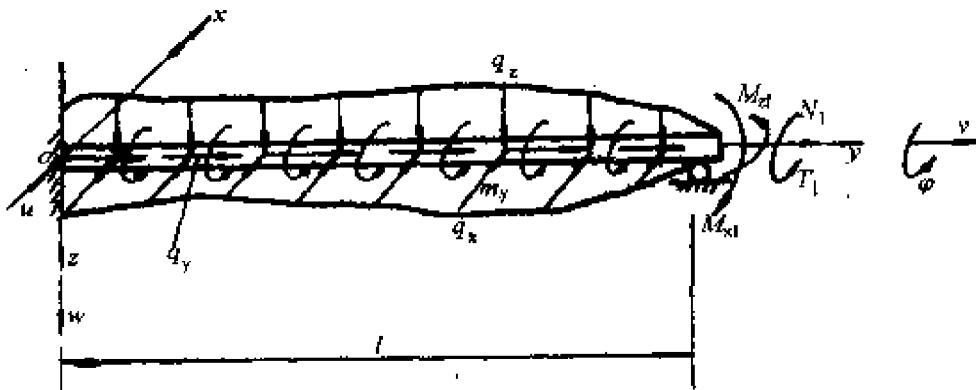


图 1-7 直梁体系

对于一般的各向同性弹性体, 由式(1-4)和广义虎克定律, 可求得单位体积应变能

$$\begin{aligned} U_0 = & \frac{E\mu}{2(1+\mu)(1-2\mu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 \\ & + G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \end{aligned} \quad (1-21)$$

可见, 弹性应变能是应变分量的正定函数。

以图 1-6 的弹簧体系为例, 式(1-19)的总势能 Π 为简单变量

u 的函数。对 u 求 Π 的极小值,即

$$\frac{d\Pi}{du} = ku - P = 0 \quad (1-22)$$

此为该弹性体系的平衡方程。再求一次导数,得

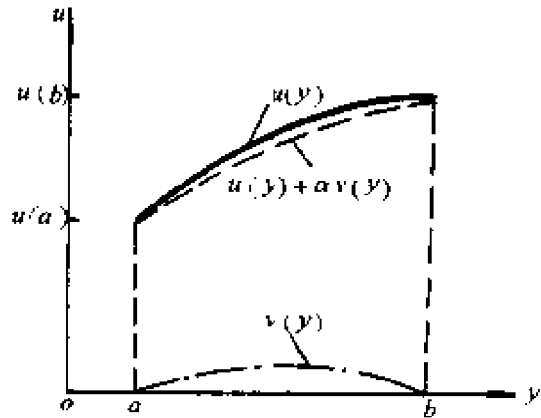
$$\frac{d^2\Pi}{du^2} = k > 0 \quad (1-23)$$

可见平衡方程为总势能的极小值条件,两者是等价的。它可归结为最小势能原理:在所有满足给定几何边界条件的容许位移 u 、 v 和 w 中,真实的位移使总势能取极小值。

在一般的弹性体系中,如总势能式(1-20),容许的位移是空间点的函数,是一族位移场,总势能为该族位移函数的函数,即泛函。在该族位移函数中使泛函取极小值的是真实的处于弹性平衡状态的位移场。而求某一函数使泛函有极小值,这是数学中的变分问题。

§ 1-4 变 分 法

在变分法中,通常用 δu 来表示 u 的变分, u 为自变函数。譬如 u 为一位移场,对于直梁则 $u(y)$ 为一挠曲线,如图 1-8 所示,并有端点条件 $u(a)$ 和 $u(b)$ 。在给定的端点条件下,该位移曲线容许改变为 $u(y) + \alpha v(y)$,而 $v(y)$ 为容许改变的位移曲线,有端点条件 $v(a) = v(b) = 0$ 。于是 u 的变分 δu 为^[2]



$$\delta u = \alpha v \quad (1-24) \quad \text{图 1-8 位移曲线的变分关系}$$

其中 α 是任意小的实数,意味着 u 的改变是任意小的。同时,对 $\frac{du}{dy}$ 、 $\frac{d^2u}{dy^2}$ 、 \dots 亦视为独立的自变函数,可有变分为

$$\delta\left(\frac{du}{dy}\right) = \alpha \frac{dv}{dy}, \delta\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \alpha \frac{d^2v}{dy^2}, \dots \quad (1-25)$$

δ 称为变分算子, 而 δu 、 $\delta\left(\frac{du}{dy}\right)$ 、 \dots 称为 u 、 $\frac{du}{dy}$ 、 \dots 的一阶变分。

引入任意小的实数 α 后, 泛函 $F = F(y, u, u')$ 成为 $F = F(y, u + \alpha v, u' + \alpha v')$, 即为 α 的函数, 求极值时即作微分运算:

$$\frac{d}{d\alpha} F(y, u + \alpha v, u' + \alpha v') = \frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u'} v' \quad (1-26)$$

此式遵循复合函数求导规则。将此式乘以 α , 并考虑到式(1-24)、(1-25), 现可定义: 泛函 $F = F(y, u, u')$ 的一阶变分为

$$\begin{aligned} \delta F &= \alpha \left(\frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u'} v' \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \end{aligned} \quad (1-27)$$

应该注意到, 在变分运算中自变量 y 坐标不变, 只对自变函数求变分。遵此, 变分的运算法则与微分的运算法则相似, 只要用 δ 算子取代 d 算子。变分算子亦能与微分和积分算子交换:

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dy}(\delta u) = \frac{d}{dy}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dy} = \delta\left(\frac{du}{dy}\right) \quad (1-28)$$

$$\textcircled{2} \quad \delta\left(\int_l u dy\right) = \alpha \int_l v dy = \int_l \alpha v dy = \int_l \delta u dy \quad (1-29)$$

二阶变分按定义为

$$\begin{aligned} \delta^2 F &= \delta(\delta F) \\ &= \alpha^2 \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u'} v' \right) \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} v v' + \frac{\partial^2 F}{(\partial u')^2} (v')^2 \right) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (\delta u)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} \delta u \delta u' + \frac{\partial^2 F}{(\partial u')^2} (\delta u')^2 \end{aligned} \quad (1-30)$$

现求泛函

$$I(u) = \int_a^b F(y, u, u') dy, u' = \frac{du}{dy} \quad (1-31)$$

的驻值条件 $\delta I = 0$ 。有

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b \delta F dy \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right) dy = 0\end{aligned}\quad (1-32)$$

为消去式中的 $\delta u'$, 利用分部积分, 而 $\delta u' = (\delta u)'$, 有

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' dy = \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \delta u dy \quad (1-33)$$

可将式(1-32)改写为

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dy + \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_a^b = 0 \quad (1-34)$$

当两端的 u 值给定时, 即端点的 $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$, 上式的第二项恒为零, 而第一项积分式中的 δu 为任意的容许变分。为满足上式, 应使积分式中的方括号的微分式为零, 即

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (1-35)$$

该方程称为泛函(1-31)的 Euler 方程。

上面给定了端点的几何边界条件。如果某一端的几何边界条件未定, 譬如说 $\delta u(b) \neq 0$, 为满足式(1-34), 除了 Euler 方程外, 尚须补充条件:

$$\frac{\partial F(b)}{\partial u'} = 0 \quad (1-36)$$

称此为自然边界条件。

以图 1-7 的直梁为例, 对式(1-20)求一阶变分 $\delta \Pi = 0$, 有

$$\begin{aligned}\delta \Pi &= \int_0^l (EA v' \delta v' + EI_x w'' \delta w'' + EI_z u'' \delta u'' + GJ_\rho \varphi' \delta \varphi' \\ &\quad - q_y \delta v - q_x \delta w - q_z \delta u - m_y \delta \varphi) dy \\ &\quad - N_1 \delta v(l) - M_{x1} \delta w'(l) - M_{z1} \delta u'(l) - T_1 \delta \varphi(l) \\ &= 0\end{aligned}\quad (1-37)$$

而

$$\begin{aligned}\delta^2 \Pi &= \int_0^l (EA (\delta v')^2 + EI_x (\delta w'')^2 + EI_z (\delta u'')^2 \\ &\quad + GJ_\rho (\delta \varphi')^2) dy > 0\end{aligned}\quad (1-38)$$

可见 Π 确有极小值。

利用分部积分一次或二次,有

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 EA v' \delta v' dy &= [\delta v EA v']_0^1 - \int_0^1 EA v'' \delta v dy, \\
 \int_0^1 EI_x w'' \delta w'' dy &= [\delta w' EI_x w'']_0^1 - \int_0^1 EI_x w'' \delta w' dy \\
 &= [\delta w' EI_x w'']_0^1 - [\delta w EI_x w''']_0^1 + \int_0^1 EI_x w^{IV} \delta w dy, \\
 \int_0^1 EI_z u'' \delta u'' dy &= [\delta u' EI_z u'']_0^1 - \int_0^1 EI_z u'' \delta u' dy \\
 &= [\delta u' EI_z u'']_0^1 - [\delta u EI_z u''']_0^1 + \int_0^1 EI_z u^{IV} \delta u dy, \\
 \int_0^1 GJ_\rho \varphi' \delta \varphi' dy &= [\delta \varphi GJ_\rho \varphi']_0^1 - \int_0^1 GJ_\rho \varphi'' \delta \varphi dy \quad (1-39)
 \end{aligned}$$

代入式(1-37),整理后可写为

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 [-(EA v'' + q_y) \delta v + (EI_x w^{IV} - q_z) \delta w + (EI_z u^{IV} - q_x) \delta u \\
 - (GJ_\rho \varphi'' + m_y) \delta \varphi] dy + [\delta v EA v']_0^1 + [\delta w' EI_x w'']_0^1 \\
 - [\delta w EI_x w''']_0^1 + [\delta u' EI_z u'']_0^1 - [\delta u EI_z u''']_0^1 + [\delta \varphi GJ_\rho \varphi']_0^1 \\
 - N_1 \delta v(l) - M_x \delta w'(l) - M_z \delta u'(l) - T_1 \delta \varphi(l) = 0 \quad (1-40)
 \end{aligned}$$

为满足上式,推得 Euler 方程,即平衡方程:

$$\left. \begin{aligned}
 EA v'' &= -q_y \\
 EI_x w^{IV} &= q_z \\
 EI_z u^{IV} &= q_x \\
 GJ_\rho \varphi'' &= -m_y
 \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

以及相应的边界条件。它与材料力学的方程相同。方程表明,各基本变形彼此独立,各边界条件根据具体情况写出。

对应固定端 $y=0$,全部为几何边界条件:

$$\begin{aligned} v(0) = 0, w(0) = 0, u(0) = 0, \varphi(0) = 0, \\ w'(0) = 0, u'(0) = 0 \end{aligned} \quad (1-42)$$

对应滑动铰支端 $y = l$, 有几何边界条件:

$$w(l) = 0, u(l) = 0 \quad (1-43)$$

和自然边界条件:

$$\left. \begin{aligned} EA v'(l) = N_1, EI_x w''(l) = M_{x1} \\ EI_z u''(l) = M_{z1}, GJ_\rho \varphi'(l) = T_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

如果 $y = l$ 为自由端, 则全部为自然边界条件, 除式(1-44)外, 再有

$$EI_x w'''(l) = 0, EI_z u'''(l) = 0 \quad (1-45)$$

§ 1-5 能量守恒原理的运用

以图 1-9 所示等截面悬臂梁的平面弯曲为例, 在固定端受几何约束, $w(0) = w'(0) = 0$, 有总势能

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (w'')^2 dy - \int_0^l q_z w dy - Q_1 w(l) + M_{x1} w'(l) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (w'')^2 dy - \int_0^l q_z w dy - [Qw - M_x w']_0^l \end{aligned} \quad (1-46)$$

考虑微段的平衡, 有 $Q = \frac{dM_x}{dy}$ 和

$$q_z = - \frac{dQ}{dy} = - \frac{d^2 M_x}{dy^2} \text{ 关系式。对}$$

$\int_0^l q_z w dy$ 作二次分部积分得

$$\int_0^l q_z w dy = [-Qw]_0^l$$

$$+ [M_x w']_0^l - \int_0^l M_x w'' dy \quad (1-47)$$

$$\text{亦即} \quad \int_0^l q_z w dy + [Qw - M_x w']_0^l = - \int_0^l M_x w'' dy \quad (1-48)$$

此式表明能量守恒。即外力在可能位移上所作之功, 等于内力在可能变形上所作之功。将该式代入式(1-46), 可将总势能改写为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (w'')^2 dy + \int_0^l M_x w'' dy \quad (1-49)$$

再求
$$\delta \Pi = \int_0^l (EI_x w'' + M_x) \delta w'' dy = 0 \quad (1-50)$$

得控制微分方程,即为内力与变形关系:

$$EI_x w'' = -M_x \quad (1-51)$$

对于静定梁用此式是方便的。

其实,式(1-48)直接可以根据能量守恒原理写出。可见,在能量泛函中用能量等效来作替换是方便的。在后面的具体问题处理中,会用到相应的能量等效替换。

§ 1-6 矩形截面直梁的翘曲分析

在一般的材料力学中所研究的梁,是建立在平截面假设基础上的初等梁理论,不考虑剪切变形的影响。初等梁理论只适用于长梁(即跨度比截面尺寸大许多倍)的情况,而短梁(即跨度比截面尺寸大不了多少倍)则不能忽略剪切变形的影响^[1]。通常采用 Timoshenko 附加剪切变形挠度项的方法来解决短梁的变形问题,这对于计算挠度和固有振动问题是有效的,但不能解决横截面的应力分布问题。本节在势能泛函中补充了横向弯曲剪应变的应变能,而伴随弯曲剪应变的截面翘曲位移函数事先设定,从而解决了短梁的横截面应力的非线性分布问题^[3]。它作为运用本书预备知识的一个简单实例,亦为后面的研究打下基础。

现取直梁的尺寸和坐标如图 1-10 所示。

设横截面的翘曲位移函数为 $f(z)$, 作为广义坐标,与其对应的沿轴线变化的广义位移为 $u(y)$, 直梁沿轴线的挠曲位移为 $w(y)$, 于是

$$\begin{aligned} w &= w(y) \\ v &= f(z)u(y) - zw'(y) \end{aligned} \quad (1-52)$$

式中: w ——轴线挠度,向下为正;

v ——各横截面上任一点的轴向位移,向右为正。

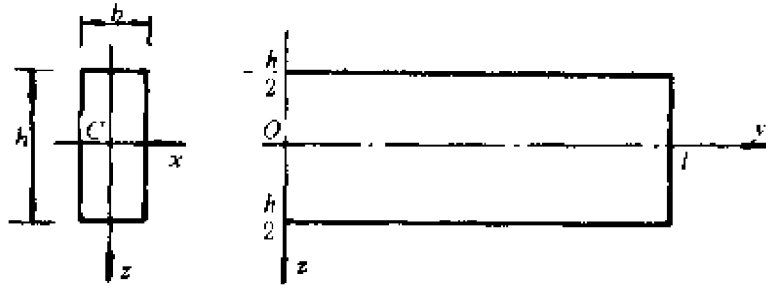


图 1-10 直梁的尺寸和坐标

它是服从平截面假设的弯曲以及因剪应变引起的截面翘曲组合叠加的位移。

按此,不考虑横向挤压应变,则

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial v}{\partial y} = f(z)u' - zw'' \\ \gamma &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = f'(z)u \end{aligned} \right\} \quad (1-53)$$

其总势能有

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Eb}{2} \varepsilon^2 dz dy + \int_0^1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Gb}{2} \gamma^2 dz dy + \int_0^1 Mw'' dy \\ &= \frac{Eb}{2} \int_{-h/2}^{h/2} f^2(z) dz \int_0^1 (u')^2 dy - Eb \int_{-h/2}^{h/2} zf(z) dz \int_0^1 u'w'' dy \\ &\quad + \frac{Eb}{2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int_0^1 (w'')^2 dy + \frac{Gb}{2} \int_{-h/2}^{h/2} (f'(z))^2 dz \int_0^1 u^2 dy \\ &\quad + \int_0^1 Mw'' dy \end{aligned} \quad (1-54)$$

式中: $M = M(y)$, 为截面弯矩。

$$\left. \begin{aligned} EI &= Eb \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = E \frac{bh^3}{12} \\ C_1 &= Eb \int_{-h/2}^{h/2} f^2(z) dz \\ C_2 &= Eb \int_{-h/2}^{h/2} zf(z) dz \\ C_3 &= Gb \int_{-h/2}^{h/2} (f'(z))^2 dz \end{aligned} \right\} \quad (1-55)$$

则式(1-54)可简写为

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^1 EI (w'')^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^1 C_1 (u')^2 dy - \int_0^1 C_2 u' w'' dy \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 C_3 u^2 dy + \int_0^1 M w'' dy \end{aligned} \quad (1-56)$$

于是 $\delta\Pi = 0$, 为

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_0^1 [(EIw'' - C_2u' + M)\delta w'' + (C_1u' - C_2w'')\delta u' \\ & + C_3u\delta u] dy \\ = & \int_0^1 [(EIw'' - C_2u' + M)\delta w'' - (C_1u'' - C_2w''' - C_3u)\delta u] dy \\ & + [\delta u (C_1u' - C_2w'')]_0^1 = 0 \end{aligned} \quad (1-57)$$

得控制微分方程:

$$\left. \begin{aligned} EIw'' - C_2u' &= -M \\ C_1u'' - C_2w''' - C_3u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-58)$$

和边界条件:

$$\delta u (C_1u' - C_2w'') = 0 \quad (1-59)$$

它可以给定几何边界条件: $\delta u = 0$; 当 $\delta u \neq 0$ 时, 亦可以要求自然边界条件: $C_1u' - C_2w'' = 0$ 。

将式(1-58)、(1-59)变换整理后, 可写成如下的控制微分方程:

$$\left. \begin{aligned} u'' - k^2u &= -k_1M' \\ w'' &= -\frac{M}{EI} + k_2u' \end{aligned} \right\} \quad (1-60)$$

和自然边界条件:

$$u' + k_1M = 0 \quad (1-61)$$

式中: $k^2 = C_3/(C_1 - C_2^2/EI)$, $k_1 = k_2/(C_1 - C_2^2/EI)$, $k_2 = C_2/EI$

由 Schwarz 不等式

$$\int_a^b z^2 dz \int_a^b f^2(z) dz - \left[\int_a^b zf(z) dz \right]^2 \geq 0 \quad (1-62)$$

可得

$$C_1 - C_2^2/EI \geq 0 \quad (1-63)$$

可见 k^2 为正值。于是 u 有通解

$$u = a_1 \operatorname{sh}ky + a_2 \operatorname{ch}ky + u^* \quad (1-64)$$

其中 u^* 为方程的特解。

挠曲线方程为

$$w = \iint \frac{-M}{EI} dydy + k_2 \iint u' dydy + a_3 y + a_4 \quad (1-65)$$

下面来研究弯翘位移函数。现设弯翘位移函数

$$f(z) = \sum_{m=1}^{3,5,\dots} d_m \sin \frac{m\pi z}{h} \quad (1-66)$$

则有

$$f'(z) = \sum_{m=1}^{3,5,\dots} d_m \frac{m\pi}{h} \cos \frac{m\pi z}{h} \quad (1-67)$$

满足 $f'(\pm h/2) = 0$, 即剪应变为零的边界条件。并设直梁某段有一近似的强迫挠度曲线

$$w = w_0 \sin \frac{\pi y}{l} \quad (1-68)$$

并令

$$u(y) = \cos \frac{\pi y}{l} \quad (1-69)$$

则式(1-52)有

$$v = f(z) \cos \frac{\pi y}{l} - zw_0 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \quad (1-70)$$

这样,在强迫位移 $w_0 \sin \frac{\pi y}{l}$ 下的总势能式(1-54)有

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{Ebl}{4} \left[\frac{\pi^2}{l^2} \int_{-h/2}^{h/2} f^2(z) dz - 2w_0 \frac{\pi^3}{l^3} \int_{-h/2}^{h/2} zf(z) dz + w_0^2 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{h^3}{12} \right] \\ & + \frac{Gbl}{4} \int_{-h/2}^{h/2} (f'(z))^2 dz \quad (1-71) \end{aligned}$$

其中利用了积分 $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi y}{l}\right) dy = \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi y}{l}\right) dy = \frac{l}{2}$ 。将式(1-66)、(1-67)代入上式,考虑到三角级数项的正交性,得

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{Ebl}{4} \left[\frac{\pi^2}{l^2} \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{3,5,\dots} d_m^2 - 2w_0 \frac{\pi^3}{l^3} \frac{2h^{2,3,5,\dots}}{\pi^2} \sum_{m=1} \left(\frac{d_m}{m^2} \sin \frac{m\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + w_0^2 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{h^3}{12} \right] + \frac{Gbl}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{3,5,\dots} (m^2 d_m^2) \end{aligned} \quad (1-72)$$

该势能泛函已蜕变成待定系数 d_m 的简单函数,由 $\frac{\partial \Pi}{\partial d_m} = 0$,得

$$d_m = \frac{4h \sin \frac{m\pi}{2}}{\left(1 + m^2 \frac{G}{E} \frac{l^2}{h^2} \right) m^2 \pi l} w_0, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (1-73)$$

可见式(1-66)为交错级数,随 m 的增大收敛极快。一般在高跨比 $h/l < l/2$ 时,约有 $d_3 < 0.02d_1$ 。因而取第一项就可达很高的精度。于是取翘曲位移函数近似式为

$$f(z) = \sin \frac{\pi z}{h} \quad (1-74)$$

截面的各几何常数按式(1-55)算得为

$$C_1 = E \frac{bh}{2}, \quad C_2 = E \frac{2bh^2}{\pi^2}, \quad C_3 = G \frac{b\pi^2}{2h} \quad (1-75)$$

这种正弦分布的翘曲位移函数曾被 R. D. Mindlin(1951)用来分析厚板动力学问题。

现以均布荷载的简支梁来说明方程(1-60)的解析题。对于均载 q 下的简支梁,有 $M(y) = q(l-y)y/2, M'(y) = Q(y) = q(l-2y)/2$ 。于是方程的第一式为

$$u'' - k^2 u = -k_1 \frac{q}{2} (l-2y) \quad (1-76)$$

有特解 $u^* = k_1 \frac{q}{2k^2} (l-2y)$, 通解为

$$u = a_1 \operatorname{sh} ky + a_2 \operatorname{ch} ky + k_1 \frac{q}{2k^2} (l-2y) \quad (1-77)$$

而 $u' = a_1 k \operatorname{ch} ky + a_2 k \operatorname{sh} ky - k_1 \frac{q}{k^2}$ (1-78)

设该梁简支端可自由翘曲,有端点条件: $y=0, u'=0$;再考虑

对称性,有条件: $y = l/2, u = 0$ 。由后一条件可得

$$a_2 = -a_1 \operatorname{sh} \frac{kl}{2} / \operatorname{ch} \frac{kl}{2} \quad (1-79)$$

代入式(1-77)、(1-78)可得

$$u = a_1 \frac{\operatorname{sh}(ky - \frac{kl}{2})}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} + k_1 \frac{q}{2k^2} (l - 2y) \quad (1-80)$$

$$u' = a_1 k \frac{\operatorname{ch}(ky - \frac{kl}{2})}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} - k_1 \frac{q}{k^2} \quad (1-81)$$

再由梁端点的自由翘曲条件,得

$$a_1 = k_1 \frac{q}{k^3} \quad (1-82)$$

由方程的第二式可解得

$$w = \frac{-q}{2EI} \left(\frac{ly^3}{6} - \frac{y^4}{12} \right) + \frac{k_2 a_1}{k} \frac{\operatorname{ch}(ky - \frac{kl}{2})}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} - k_2 k_1 \frac{q}{k^2} \frac{y^2}{2} + a_3 y + a_4 \quad (1-83)$$

由边界条件: $y = 0, w = 0$ 和 $y = l/2, w' = 0$ 得

$$a_3 = \frac{ql^3}{24EI} + k_2 k_1 \frac{q}{k^2} \frac{l}{2}, \quad a_4 = -\frac{k_2 a_1}{k} \quad (1-84)$$

跨中挠度可整理得

$$w_{l/2} = \frac{5ql^4}{384EI} + a_4 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right) + k_2 k_1 \frac{q}{k^2} \frac{l^2}{8} \quad (1-85)$$

可见,与初等梁理论相比,增加了挠度。

横截面上的正应力:

$$\begin{aligned} \sigma &= Eu' \sin \frac{\pi z}{h} - Ezw'' \\ &= \frac{Mz}{I} + Eu' \left(\sin \frac{\pi z}{h} - k_2 z \right) \end{aligned} \quad (1-86)$$

由该式可见,最后项构成弯矩自平衡,即有 $\int_A \left(\sin \frac{\pi z}{h} - k_2 z \right) z dA = 0$

剪应力按与正应力的平衡来计算,即

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{-h/2}^z -\frac{\partial \sigma}{\partial y} dz \\ &= -\frac{Q}{2I} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) + Eu'' \left[\frac{h}{\pi} \cos \frac{\pi z}{h} + \frac{k_2}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-87)$$

式中:
$$u'' = a_1 k^2 \frac{\text{sh} \left(ky - \frac{kl}{2} \right)}{\text{ch} \frac{kl}{2}} \quad (1-88)$$

用微机算出本文解^[3]与弹性力学解的比较列于表 1-1。

计算比较 ($E=1, E/G=2.5, h=1$) 表 1-1

项目 h/l	跨中挠度 $w_{l/2}$		跨中最大正应力 σ_{\max}	
	本文解	弹性力学解	本文解	弹性力学解
0.1	1599.90	1597.20	75.27	75.20
0.2	107.00	106.30	19.02	18.95
0.5	3.99	3.89	3.27	3.20

由表可见,即使 $h/l=0.5$,本文解与弹性力学解仍相当接近。但作为短梁,简支梁的高跨比应在 $1/2$ 以下。对于更短的深梁,按弹性力学解亦需另作处理。

这种直梁的弯翘分析方法,对于固端约束,不存在弹性力学中难以处理的问题,它能更真实地反映变形和应力分布。

§ 1-7 钢与混凝土组合梁考虑滑移的分析

作为预备知识另一个实例是钢与混凝土组合梁分析。组合梁充分利用钢与混凝土的材料特性,具有显著的技术经济效果。通常在按弹性理论计算中,钢与混凝土之间的较微小的滑移被忽略

不计^[4]。事实上,组合梁在受力变形时会产生结合面间的相对滑移。下面就来研究组合梁考虑相对滑移的分析^[5]。

在外荷载作用下,钢与混凝土组合梁的应变有:服从平截面假设的弯曲、钢与混凝土各自保持平截面伸缩的相对滑移。

与上节相同,竖向平面弯曲服从平截面假设,用横截面纵向位移函数可表达为

$$g(z) = -z \quad (1-89)$$

式中 z 坐标见图 1-11, 其 oy 轴与组合梁的中和面重合。于是有弯曲应变模式:

$$\epsilon_b(\gamma, z) = g(z)w''(\gamma) \quad (1-90)$$

式中: $w(\gamma)$ ——梁的轴线挠度。

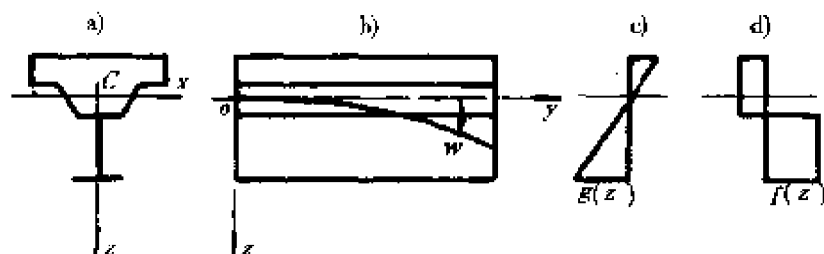


图 1-11 组合梁

再设钢与混凝土产生相对滑移,各自保持均匀的平截面伸缩,而横截面相对作一单位错动,如图 1-11d。对于梁应保持轴力自平衡,则横截面的纵向位移模式可表达为

$$f(z) = \begin{cases} -nA_s/(A_c + nA_s), & \text{混凝土板} \\ A_c/(A_c + nA_s), & \text{钢梁} \end{cases} \quad (1-91)$$

式中: $n = E_s/E_c$; A_c ——混凝土横截面积;

A_s ——钢梁横截面积。

于是相对滑移的应变模式:

$$\epsilon_s(\gamma, z) = f(z)u'(\gamma) \quad (1-92)$$

式中: $u(\gamma)$ ——钢与混凝土结合面的相对滑移量。

将上述两项应变叠加,得线弹性应变场:

$$\epsilon(\gamma, z) = \epsilon_b(\gamma, z) + \epsilon_s(\gamma, z)$$

$$= g(z)w''(y) + f(z)u'(y) \quad (1-93)$$

于是可以写出全梁的线应变能:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_1 [EI(w'')^2 - 2EI_1 w''u' + EI_2 (u')^2] dy \quad (1-94)$$

$$\text{式中: } I = \int_A z^2 dA; I_1 = \int_A zf(z) dA; I_2 = \int_A f^2(z) dA$$

截面按混凝土换算,则 $E = E_c$

现尚应考虑相对滑移存在的应变能:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_1 k_s u^2 dy \quad (1-95)$$

式中: k_s ——连接件沿梁轴线单位长度相对滑移一单位的剪切刚度。

外荷载势能,对于简支梁有

$$V = - \int_1 qwdy = \int_1 Mw'' dy \quad (1-96)$$

于是,全梁的总势能为

$$\Pi = U_b + U_s + V \quad (1-97)$$

取 $\delta\Pi = 0$,可推出弹性控制微分方程:

$$Ehw'' - EI_1 u' = -M \quad (1-98)$$

$$u'' - k^2 u = -k_1 M' \quad (1-99)$$

$$\text{式中: } k^2 = \frac{k_s}{E} / (I_2 - I_1^2/I), k_1 = \frac{I_1}{EI} / (I_2 - I_1^2/I)$$

边界条件,如 $y = a$ 为简支端,则有

$$w(a) = 0$$

$$u(a) = 0 (\text{端部滑移受约束,几何条件})$$

$$\text{或 } I_2 u'(a) - I_1 w''(a) = 0 (\text{端部滑移无约束,自然条件})$$

$$(1-100)$$

如 $y = b$ 为固定端,则有

$$w(b) = w'(b) = u(b) = 0 \quad (1-101)$$

可以看出,此组方程与上节的弯翘方程相同,有相同的解析解。

下面让我们采用有限元法求解之。

按照考虑滑移的组合梁应变模式的假定,弯曲部分仍采用通常的二节点四自由度的三次多项式单元,即在以 i, j 为端节点的单元上,其挠曲线为

$$\begin{aligned} w &= (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4)(w_i \ \varphi_i \ w_j \ \varphi_j)^T \\ &= \{N_b\}^T \{w\} \end{aligned} \quad (1-102)$$

其中用 $(*)$ 表示行阵, $\{*\}$ 表示列阵(下同)。而

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, N_2 = (\eta - 2\eta^2 + \eta^3)c \\ N_3 &= 3\eta^2 - 2\eta^3, N_4 = (-\eta^2 + \eta^3)c \\ \eta &= y/c \end{aligned} \quad (1-103)$$

式中: c ——单元长度。

在此,弯曲部分的线应变沿轴线为线性函数,与其对应的相对滑移的线应变亦以采用线性函数为宜,这样就应在单元轴线的中点 k 增设一个相对滑移分量 w_k ,与两端的 w_i, w_j 相对滑移分量一起,用二次多项式来确定 ij 单元的相对滑移:

$$u = (N_5 \ N_6 \ N_7)(u_i \ u_k \ u_j)^T = \{N_s\}^T \{u\} \quad (1-104)$$

式中: $N_5 = 1 - 3\eta + 2\eta^2, N_6 = 4\eta - 4\eta^2, N_7 = -\eta + 2\eta^2$

现将单元的势能按表达式(1-97)对单元长 c 的积分,用式(1-102)、(1-104)代入,归并后可得

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{1}{2} (w \ u) \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2^T & k_3 \end{bmatrix} (w \ u)^T - (w \ u)(R \ 0)^T \\ & \quad (1-105) \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} [k_1] &= EI \int_c \{N'_b\} (N'_b) dy \\ &= EI \begin{bmatrix} 12/c^3 & 6/c^2 & -12/c^3 & 6/c^2 \\ & 4/c & -6/c^2 & 2/c \\ \text{对称} & & 12/c^3 & -6/c^2 \\ & & & 4/c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[k_2] = -EI \int_c \{N'_b\} (N'_s) dy$$

$$= -EI_1 \begin{bmatrix} 4/c^2 & -8/c^2 & 4/c^2 \\ 3/c & -4/c & 1/c \\ -4/c^2 & 8/c^2 & -4/c^2 \\ 1/c & -4/c & 3/c \end{bmatrix}$$

$$[k_3] = EI_2 \int_c \{N'_s\} (N'_s) dy + k_s \int_c \{N_s\} (N_s) dy$$

$$= EI_2 \begin{bmatrix} 7/3c & -8/3c & 1/3c \\ & 16/3c & -8/3c \\ \text{对称} & & 7/3c \end{bmatrix} + k_s c \begin{bmatrix} 2/15 & 1/15 & -1/30 \\ & 8/15 & 1/15 \\ \text{对称} & & 2/15 \end{bmatrix}$$

为使应力分析从简,外荷载仅考虑为节点力:

$$\{R\} = (P_i \quad 0 \quad P_j \quad 0)^T$$

由以上的单元刚度矩阵块 $[k_1]$ 、 $[k_2]$ 、 $[k_3]$ 和等效节点力列阵 $\{R\}$,即可列出全梁的节点平衡的位移法方程,问题得解。为便于全梁组装,可将单元的节点位移分量 $(w_i \quad \varphi_i \quad w_j \quad \varphi_j \quad u_i \quad u_k \quad u_j)$ 重新排列为 $(w_i \quad \varphi_i \quad u_i \quad u_k \quad w_j \quad \varphi_j \quad u_j)$,相应的刚度矩阵及荷载列阵的元素亦作变动。

由于无单元的节间荷载,可以直接用位移函数计算变形分量。

按式(1-102)有

$$w'' = (N'_1 \quad N'_2 \quad N'_3 \quad N'_4) (w_i \quad \varphi_i \quad w_j \quad \varphi_j)^T$$

$$= [(-6 + 12\eta)/c^2 \quad (-4 + 6\eta)/c \quad (6 - 12\eta)/c^2 \quad (-2 + 6\eta)/c] \{w\}$$

(1-106)

于是,对于 i 节点有 $\eta = 0$,可得

$$w''_i = (-6/c^2 \quad -4/c \quad 6/c^2 \quad -2/c) \{w\}$$

(1-107)

对于 j 节点有 $\eta = 1$,可得

$$w''_j = (6/c^2 \quad 2/c \quad -6/c^2 \quad 4/c) \{w\}$$

(1-108)

由式(1-104)可得

$$u' = [(-3 + 4\eta)/c \quad (4 - 8\eta)/c \quad (-1 + 4\eta)/c] \{u\}$$

(1-109)

于是,对于 i 和 j 节点分别有

$$u'_i = [-3/c \quad 4/c \quad -1/c] \{u\}$$

(1-110)

$$u'_j = [1/c \quad -4/c \quad 3/c] \{u\} \quad (1-111)$$

这样,按式(1-90)、(1-92)可算得截面的线应变分布:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_i(z) \\ \varepsilon_j(z) \end{Bmatrix} = g(z) \begin{bmatrix} \frac{-6}{c^2} & \frac{-4}{c} & \frac{6}{c^2} & \frac{-2}{c} \\ \frac{6}{c^2} & \frac{2}{c} & \frac{-6}{c^2} & \frac{4}{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} + f(z) \begin{bmatrix} \frac{-3}{c} & \frac{4}{c} & \frac{-1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{-4}{c} & \frac{3}{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_k \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (1-112)$$

截面的正应力分布为

$$\sigma_i(z) = E\varepsilon_i(z), i = i, j \quad (1-113)$$

式中 E 对于钢梁和混凝土板分别用 E_s 和 E_c 。

连接件沿轴线方向单位长度的剪切力可简单地用下式算出:

$$V_i = k_s u_i, i = i, k, j \quad (1-114)$$

取受检验的钢与混凝土组合梁的横截面如图 1-12 所示。混凝土采用 C20, $E_c = 25.50\text{GPa}$, 钢梁采用 I40a, $E_s = 206\text{GPa}$, $n = E_s/E_c = 8.08$ 。结合面采用双排 $\phi 22$ 圆柱头焊钉, 沿轴向间距为 15cm, 估计在使用阶段的剪切刚度系数 $k_s = 760\text{MPa}$ 。算出的 $g(z)$ 和 $f(z)$ 分别见图 1-12b、c。用悬臂梁作为检验算例, 梁长 400cm, 自由端受一向上的集中力 $P = -100\text{kN}$, 端部滑移无约束, 等分成四个单元。计算结果表明, 有限元法与解析法比较, 两者几乎重合, 表明该 7 自由度组合梁单元有很高的精度。自由端的挠度与不考虑滑移的挠度相比增加了 18.3%。在固端产生的正应力分布见图 1-12d。

通过此例可以看到, 由势能泛函不仅可以建立控制微分方程, 求得解析解, 还可建立有限元的位移法方程, 求得近似解。后者是具有实用价值的通用方法(本法将在后面的研究中落实为板元模式段元法), 而前者则可以加强对各种变形概念的理解。

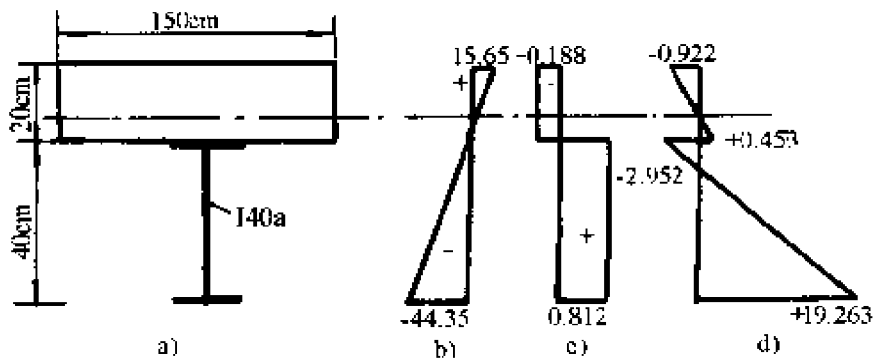


图 1-12 钢与混凝土组合梁截面及计算结果

§ 1-8 Galerkin 法

我们从式(1-40)可以看出,对于所设的位移函数 u 、 v 、 w 、 φ , 如果梁两端的几何边界条件和自然边界条件皆得到满足,并考虑到 δu 、 δv 、 δw 、 $\delta \varphi$ 是彼此独立的,则式(1-40)可写成 Galerkin 法方程:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l (EA v'' + q_y) \delta v dy &= 0 \\ \int_0^l (EI_x w^{IV} - q_z) \delta w dy &= 0 \\ \int_0^l (EI_z u^{IV} - q_x) \delta u dy &= 0 \\ \int_0^l (GJ_\rho \varphi'' - m_y) \delta \varphi dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-115)$$

现在取其第二式,即竖向弯曲的变分式:

$$\int_0^l (EI_x w^{IV} - q_z) \delta w dy = 0 \quad (1-116)$$

为例来说明用 Galerkin 法求解平衡方程:

$$EI_x w^{IV} - q_z = 0 \quad (1-117)$$

的方法。

对于简支梁,可设位移函数为三角级数:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi y}{l} \quad (1-118)$$

显然此函数能满足全部边界条件:

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0 \quad (1-119)$$

在 Galerkin 法中,取

$$\delta w = \sum_{k=1}^{\infty} \delta a_k \sin \frac{k\pi y}{l} \quad (1-120)$$

将其代入式(1-116),由于 δa_k 的任意性,可得

$$\int_0^l (EI_x w^{IV} - q_z) \sin \frac{k\pi y}{l} dy = 0 \quad (1-121)$$

该方程式的个数与待定系数 a_k 的个数相等,所设的位移函数得解。

注意到三角级数各项乘积积分存在如下的正交关系:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi y}{l} dy &= \frac{l}{2} \\ \int_0^l \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} dy &= 0 (m \neq n) \end{aligned} \right\} \quad (1-122)$$

将式(1-118)代入式(1-121),并设 $q_z = \text{常数}$,可得:

$$EI_x a_k \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} + \left[q_z \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi y}{l} \right]_0^l = 0 \quad (1-123)$$

由于存在着三角函数的正交性,使求解待定系数 a_k 的方程彼此不耦联,给求解带来了极大的方便。由上式可解得:

$$a_k = \frac{4q_z l^4}{EI_x (k\pi)^5}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (1-124)$$

而

$$w = \frac{4q_z l^4}{EI_x} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{(k\pi)^5} \sin \frac{k\pi y}{l} \quad (1-125)$$

该级数收敛很快。仅取第一项时,与精确解相比,误差仅为 0.26%。

方程(1-121)亦可视为以 $\sin \frac{k\pi y}{l}$ 为权函数,对平衡方程的加权残数式,即满足平衡方程的误差在权函数积分意义上为零。可见,

Galerkin 法是加权残数式的一个特例。当所设的权函数与位移函数不相同,且还可以放松对自然边界条件的要求,有时亦称为广义 Galerkin 法。

当遇到集中荷载与某一函数乘积的积分时,可利用狄拉克 δ 函数的特性求解。如在 $y = y_i$ 点有一集中力 P ,它可以通过狄拉克 δ 函数表达成分布荷载

$$q_z = P\delta(y - y_i) \quad (1-126)$$

其中

$$\delta(y - y_i) = \begin{cases} \infty, & (y - y_i = 0) \\ 0, & (y - y_i \neq 0) \end{cases} \quad (1-127)$$

它有如下积分特性:

$$\int_0^1 \delta(y - y_i) dy = 1 \quad (1-128)$$

$$\int_0^1 f(y) \delta(y - y_i) dy = f(y_i) \quad (1-129)$$

例如在式(1-121)中,有

$$q_z = P\delta\left(y - \frac{l}{2}\right) \quad (1-130)$$

意为在跨中作用一集中力 P ,于是对权函数 $\sin \frac{k\pi y}{l}$ 乘积的积分为

$$\int_0^1 q_z \sin \frac{k\pi y}{l} dy = P \sin \frac{k\pi}{2} \quad (1-131)$$

这时,式(1-123)为

$$EI_x a_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} - P \sin \frac{k\pi}{2} = 0 \quad (1-132)$$

得解:
$$a_k = \frac{2Pl^3}{EI_x (k\pi)^4} \sin \frac{k\pi}{2} \quad (1-133)$$

取级数第一项有
$$w = \frac{Pl^3}{48.7EI_x} \quad (1-134)$$

与精确解的误差为 1.46%。

Galerkin 法可以不必计算结构的总势能,而直接由平衡方程开始求解,较为简便。对于简支梁段,采用三角级数更是简便。在工

程设计中用它来作估算是很方便的。

§ 1-9 小 结

本章作为预备知识,首先介绍了直梁的各种基本变形的应变能的计算,并用简单的弹簧体系引出了最小势能原理。对于一般的弹性体系,运用最小势能原理是一个对能量泛函求极小值的变分问题。本书仅涉及沿梁轴线的一维泛函的变分问题,为此对其基本概念及其运算规则作了介绍。借助于应变能的计算及对总势能的变分法运算,很方便地能得到平衡方程。它省去了直接建立平衡方程时的麻烦,且不易发生疏漏。只要各项变形的应变及总势能计算得合理,就可机械地用变分法的运算规则,得到控制微分方程及其边界条件或有限元方程。本章通过矩形截面直梁的弯翘分析和钢与混凝土的组合梁分析两个算例,进一步找到用最小势能原理,运用变分法推出平衡方程的途径。这两个算例,还有着相同形式的控制微分方程,它与以后要研究的剪滞分析的控制微分方程有相同的形式。为此对其精确的解析解作了介绍。

作为精确的解析解,本书还用以对某些变形的性质进行了研究讨论。对于工程设计,还是落实在有限段元法上。对于用三角级数作为近似的位移函数表达的简支桥跨,Galerkin法是一个特别简便的实用算法,收敛很快。用它来讨论某些变形性质是很方便的,故本书往往要采用这种讨论方法。同时它还可以作为对工程设计进行估算的简便方法。对于连续梁,可以取其某一跨段为简支跨段进行简化计算。

附 I 两个微积分法则

一、复合函数的求导法则

1. 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 可导,函数 $y = f(u)$ 在其对应点 u 也可导,则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x 可导,且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (I-1)$$

或写为
$$y'_x = y'_u u'_x \quad (I-2)$$

2. 设函数 $u = \varphi(x, y)$ 、 $v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 有连续偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 有连续偏导数, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 有对 x 及 y 的连续偏导数并且它们由下列公式给出:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (I-3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (I-4)$$

3. 设 $z = f(u, v, w)$, 中间变量 $u = \varphi(t)$ 、 $v = \psi(t)$ 、 $w = \omega(t)$, 则复合函数 $z = f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]$ 只是一个自变量 t 的函数, 可有全导数:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dt} \quad (I-5)$$

4. 对泛函 $F = F(y, u, u')$, 引入任意小的实数 α 后成为 $F = F(y, u + \alpha v, u' + \alpha v')$, 即为 α 的函数, 其全导数为

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} F(y, u + \alpha v, u' + \alpha v') &= \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{d(u + \alpha v)}{d\alpha} \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial u'} \cdot \frac{d(u' + \alpha v')}{d\alpha} \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u'} v' \end{aligned} \quad (I-6)$$

此式为书中的式(1-26), 其中考虑到 $\frac{dy}{d\alpha} = 0$ 、 $\frac{d(u + \alpha v)}{d\alpha} = v$ 、 $\frac{d(u' + \alpha v')}{d\alpha} = v'$

二、定积分的分部积分法

1. 设函数 $u(x)$ 、 $v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续导数 $u'(x)$ 、 $v'(x)$, 则有 $(uv)' = uv' + v u'$ 。在这等式的两边各取由 a 到 b 的定积分, 即

$$[uv]_a^b = \int_a^b uv' dx + \int_a^b vu' dx,$$

移项后有

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu' dx \quad (I-7)$$

或

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du \quad (I-8)$$

这就是定积分的分部积分公式。

2. 对泛函作一阶变分后,如在书中的式(1-32)中,要将 $\delta u'$ 降阶为 δu ,就要作分部积分运算,如式(1-33)有

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' dy = \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_a^b - \int_a^b \delta u \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) dy \quad (I-9)$$

附 II 任意区间上的三角级数

一、在区间 $[-l, l]$ 上满足收敛条件的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数的形式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (II-1)$$

其中系数 a_n, b_n 为

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (II-2)$$

在区间 $[0, l]$ 上函数 $f(x)$ 的正弦级数的形式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (II-3)$$

其中系数 b_n 为

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (II-4)$$

又在区间 $[0, l]$ 上函数 $f(x)$ 的余弦级数形式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (II-5)$$

其中系数 a_n 为

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (II-6)$$

二、三个积分公式

$$\int_0^1 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \quad (\text{II-7})$$

$$\int_0^1 \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \quad (\text{II-8})$$

$$\int_0^1 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} \left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n} \right) \frac{l}{\pi} & (m-n, m+n \text{ 为奇数}) \\ 0 & (m-n, m+n \text{ 为偶数}) \end{cases} \quad (\text{II-9})$$

三、三角函数项在 $[0, l]$ 区间的正交关系

$$\int_0^1 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (\text{II-10})$$

$$\int_0^1 \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (\text{II-11})$$

附 III 直梁的杆件有限元法

一、直梁的有限元剖分

现研究在 oyz 平面上的直梁, 坐标系如书中所示, y 轴为梁轴线, z 轴竖直向下, 荷载与变形皆在该平面内。

按杆件有限元法, 将直梁剖分成 n 个有限段, 每段为一个杆件单元。在连接各单元的节点 i 上有位移分量 $\Delta_i = (v_i, w_i, \varphi_i)$, 它们依次分别表示节点的轴向位移、挠曲位移和截面转角。一个长为 a 的杆件单元有两个端节点 i 和 j , 通常, 杆件单元内的轴向位移 v_e 和挠曲位移 w_e 用两端的节点位移分量 $(\Delta_i, \Delta_j) = (v_i, w_i, \varphi_i, v_j, w_j, \varphi_j)$ 来描写, 如下式所示:

$$\begin{Bmatrix} v_e \\ w_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{V1} & 0 & 0 & N_{V2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{W1} & N_{W3} & 0 & N_{W2} & N_{W4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i^T \\ \Delta_j^T \end{Bmatrix} \quad (\text{III-1})$$

其中的位移插值函数, 即形函数。令 $\eta = y_e/a$, y_e 以 i 点为原点, 则有

$$\begin{aligned}
 N_{v1} &= 1 - \eta, & N_{v2} &= \eta \\
 N_{w1} &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, & N_{w2} &= 3\eta^2 - 2\eta^3 \\
 N_{w3} &= (\eta - 2\eta^2 + \eta^3)a, & N_{w4} &= (-\eta^2 + \eta^3)a
 \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

二、杆件单元的刚度矩阵

由于轴向拉压与弯曲变形的应变能不耦联, 杆件单元的应变能 U_e 有

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{1}{2} \int_0^a (EA(\psi_e')^2 + EI(w_e'')^2) dy_e \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta_i^T \\ \Delta_j^T \end{Bmatrix}^T [K_e] \begin{Bmatrix} \Delta_i^T \\ \Delta_j^T \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

式中 EA 和 EI 分别为杆件单元的抗拉和抗弯刚度; 单元的刚度矩阵可将式(III-1)代入后积分求得:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{a} & 0 & 0 & -\frac{EA}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & 0 & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ -\frac{EA}{a} & 0 & 0 & \frac{EA}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & 0 & \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix} \quad (\text{III-4})$$

三、杆件单元的节点力

设杆件单元的节点力为

$$(R_e) = \{R_e\}^T = (R_{ie} \quad R_{je}) \quad (\text{III-5})$$

式中 i 和 j 两节点分别有节点力分量为

$$\begin{aligned}
 (R_{ie}) &= \{R_{ie}\}^T = (Y_i \quad Z_i \quad T_i) \\
 (R_{je}) &= \{R_{je}\}^T = (Y_j \quad Z_j \quad T_j)
 \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

式中分量依次分别表示节点的轴向力、横向力和力矩。

节点力有势能

$$\left. \begin{aligned} V_i &= -(\Delta_i) \{R_{ie}\} \\ V_j &= -(\Delta_j) \{R_{je}\} \end{aligned} \right\} \quad (III-7)$$

当沿单元轴线有分布的横向荷载 q 时, q 与 w_e 的正向一致, 其势能为

$$V_{qe} = - \int_0^a q w_e dy_e \quad (III-8)$$

将式(III-1)代入并积分可得

$$V_{qe} = -(\Delta_i \Delta_j) \left\{ \begin{array}{l} R_{qie} \\ R_{qje} \end{array} \right\} \quad (III-9)$$

对均布荷载按此能量等效转换有等效节点力:

$$(R_{qie} \ R_{qje}) = \left(0 \quad \frac{qa}{2} \quad \frac{qa^2}{12} \quad 0 \quad \frac{qa}{2} \quad -\frac{qa^2}{12} \right) \quad (III-10)$$

若在单元轴线的 η_p 点有横向集中力 P 时, P 与 w_e 的正向一致, 其等效节点力为

$$(R_{pie} \ R_{pje}) = P[0 \quad N_{w1}(\eta_p) \ N_{w3}(\eta_p) \ 0 \quad N_{w2}(\eta_p) \ N_{w4}(\eta_p)] \quad (III-11)$$

四、节点平衡的位移方程

将全梁各单元的应变能及其节点荷载(包括等效节点力)的势能叠加起来, 得到以全梁的节点位移分量表达的总势能:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^T \\ \Delta_2^T \\ \Delta_3^T \\ \vdots \\ \Delta_i^T \\ \Delta_j^T \\ \vdots \\ \Delta_n^T \\ \Delta_{n+1}^T \end{array} \right\}^T [K] \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^T \\ \Delta_2^T \\ \Delta_3^T \\ \vdots \\ \Delta_i^T \\ \Delta_j^T \\ \vdots \\ \Delta_n^T \\ \Delta_{n+1}^T \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^T \\ \Delta_2^T \\ \Delta_3^T \\ \vdots \\ \Delta_i^T \\ \Delta_j^T \\ \vdots \\ \Delta_n^T \\ \Delta_{n+1}^T \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \\ R_{n+1} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta)[k]\{\Delta\} - (\Delta)\{R\} \quad (\text{III-12})$$

式中按全梁剖分成 n 个单元,有 $n+1$ 个节点,总刚度矩阵 $[K]$ 为将各单元的刚度矩阵元素按相应的位移分量的排序对号入座,叠加而得。各节点力亦作相应的排序叠加。

取变分 $\delta H = 0$, 可得

$$\delta H = (\delta\Delta)\{[K]\{\Delta\} - \{R\}\} = 0 \quad (\text{III-13})$$

由于 $(\delta\Delta)$ 的任意性, 应有

$$[K]\{\Delta\} - \{R\} = \{0\} \quad (\text{III-14})$$

该式应作支点约束条件的处理: 在总刚度矩阵及节点力列阵中, 对受约束的位移分量的行列划去, 或充零后将总刚度矩阵中的相应主元素改成 1。此为节点平衡的位移方程。这样求得的才是满足边界条件的可能位移中处于平衡状态的位移。

五、单元杆端的内力计算

求得各节点的位移分量后, 可用单元的刚度矩阵算出单元杆端的内力(轴力、剪力、弯矩):

$$\begin{aligned} & (-N_{ie} \quad Q_{ie} \quad -M_{ie} \quad N_{je} \quad -Q_{je} \quad M_{je})^T \\ & = [K_e](\Delta_i \quad \Delta_j)^T - \sum (R_{qie} \quad R_{qje})^T \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

式中 $\sum (R_{qie} \quad R_{qje})$ 为沿单元轴线各种荷载的等效节点力之和。

第二章 位移模式法概念

§ 2-1 薄壁梁桥的基本构件及截面板元

薄壁梁桥可以是钢桥或是钢筋混凝土桥,其截面可以是箱形的或是多肋 T 形的,其梁轴线可以是直的或是弯的。本书要研究的是梁轴线水平的直梁桥或弯梁桥。这类桥型的基本构件是板元和横隔板(框、梁)组成不同截面形式的薄壁梁桥,如图 2-1 所示。

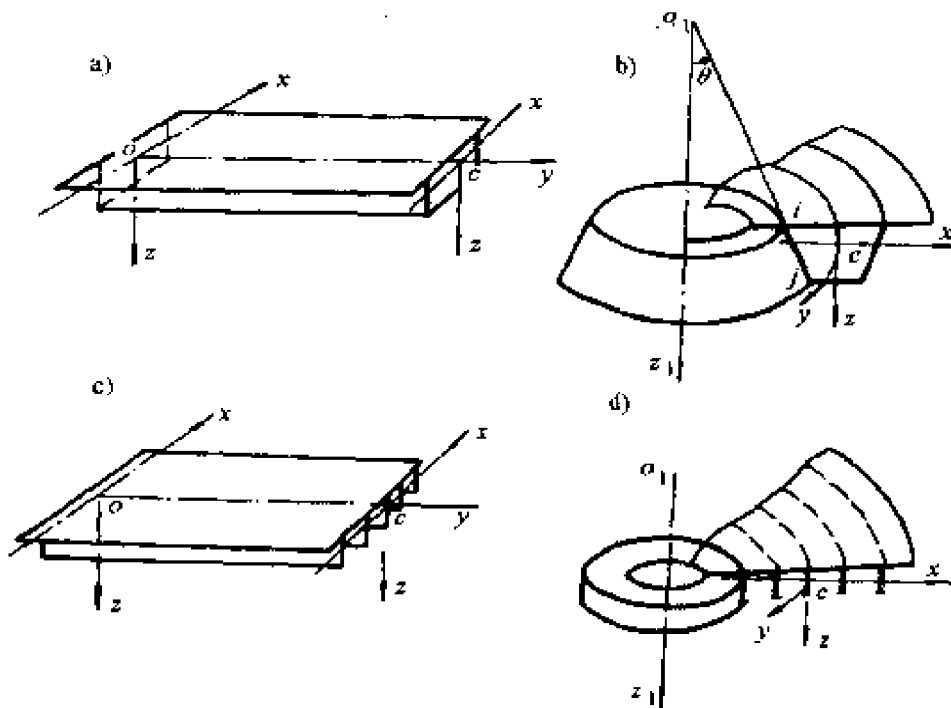


图 2-1 薄壁梁桥

所谓板元是指沿纵向构成薄壁梁桥的直平板或圆锥曲板,各板元的交线为中线或节线,其间不再细分,因而节线间故可视为

曲板就是板元。

图 2-1a 为薄壁箱形直梁桥,各板元是一些直平板;图 2-1b 为薄壁箱形弯梁桥,各板元是一些圆锥曲板,它们有共同的圆锥轴线 o_1z_1 ;图 2-1c 为薄壁肋板式多肋 T 形直梁桥,各板元是一些直平板;图 2-1d 为薄壁肋板式多肋 T 形弯梁桥,各板元是一些圆锥曲板,它们有共同的圆锥轴线 o_1z_1 。其实,当弯梁桥的曲率为零时,则就蜕变为直梁桥。因而直梁桥可视为弯梁桥的特例。

设任一单室箱形截面的弯梁桥,其截面如图 2-2 所示,它由 ①、②、③、④ 四片板元组成,有共同的圆锥轴线 o_1z_1 。板元的节线在横截面上为节点,可以排出序号。如板元②,可称为截面板元

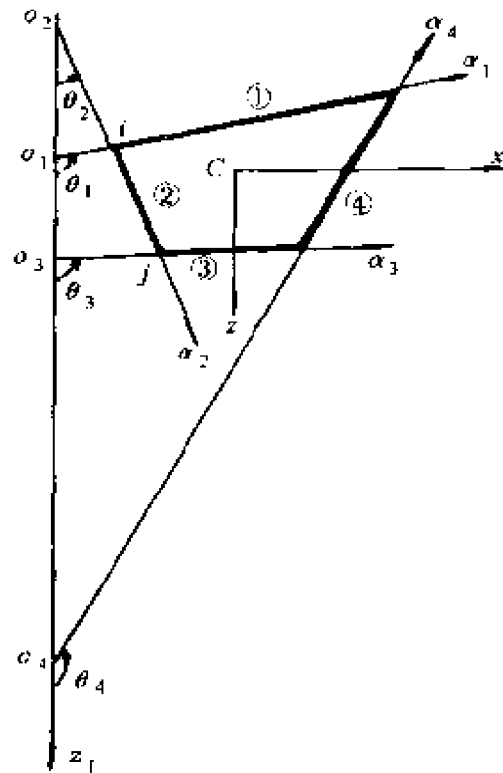


图 2-2 薄壁截面上的板元

ij , 它为横截面上 i 和 j 号节点间的板元, 忽略其加腋的构造措施, 设为等厚度的。该截面板元的延长线与圆锥轴线在 O_2 点相交, 以 O_2 点为原点, 沿截面板元方向取 α_2 轴线, 指定 i 点为近 O_2 点,

而 j 点为远 O_2 点, 从 i 至 j 为 α_2 的正向。 $o_1 z_1$ 轴与 α_2 轴的夹角 θ_2 称为该截面板元的倾角。 在以后讨论任一个板元时, 不再将 α 和 θ 标记脚标。 该整体截面的形心为 C 点, 有水平坐标轴 Cx 和竖直向下的坐标轴 Cz , 按 $Czxy$ 的右手规则构成正交坐标轴 Cy 。 Czx 为整体截面的形心坐标系, 但不一定是主形心坐标系。 对于直梁桥, 在整体截面的左侧任取一 $o_1 z_1$ 轴, 亦可定出各板元的 α 轴的正向和倾角 θ 。

有了截面板元的概念, 就可以将薄壁梁桥的分析建立在对板元的分析基础上, 使问题化简。

§ 2-2 板元的应变与位移关系式

从一般的角度看, 取一圆锥曲板如图 2-3 所示, 此一圆锥曲板是薄曲板, 其两表面间之距离较其它尺寸为小。 距两表面等远的轨迹为曲板中面。 在中面上任意点作垂线, 该垂线被两表面截割的这段长度被定义为曲板的厚度。 曲板的边缘总视为由边线上的中面垂线构成。 下面就可以用中面来讨论薄曲板。

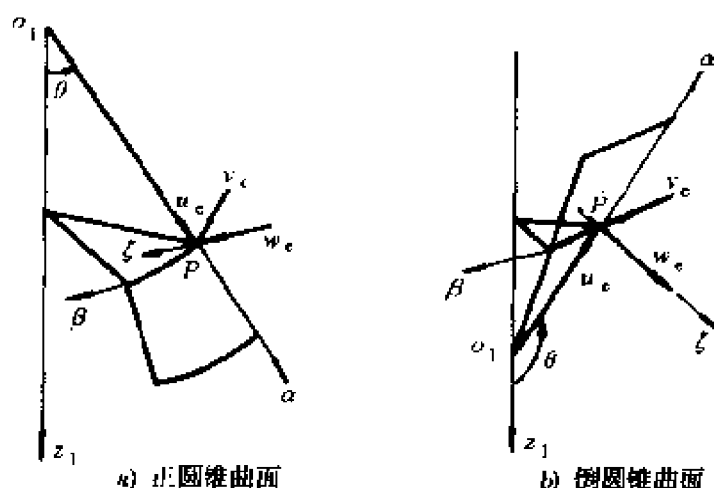


图 2-3 薄壁圆锥曲板

图 2-3 所示的圆锥曲板, 其圆锥轴线为 $o_1 z_1$, 以竖直向下为正。 用中面表示的圆锥曲面的母线与 $o_1 z_1$ 的夹角为圆锥角 θ , 圆

锥曲面的母线为表面上的 α 线, 设圆锥曲面与水平截面的交线为 β 线, α 和 β 两族坐标曲线在圆锥曲面上是正交坐标系, 图中示出其正方向, α 以 o_1 点为起点, β 以梁桥一端为起点。在表面上的任一 P 点, 只有一对完全确定的 (α, β) 值。再按右手系规则, 可确定 P 点的曲面法线 ζ , 如图中所示, 正圆锥曲面: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ζ 以曲面的内法线向为正; 倒圆锥曲面: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, ζ 以曲面的外法线向为正, 这样就构成了圆锥曲面 P 点的局部坐标系 (α, β, ζ) , 相对应的位移分量为 (u_c, v_c, w_c) 。它就可以用来建立弹性薄壁梁桥板元的应变位移关系式。按小变形理论忽略高阶小量。

现取圆锥曲面上 P 点以 α 和 β 为边线的微元体, 如图 2-4 所示。 P 点为 (α, β) 点, 在水平面上有 β 线的圆弧半径 $r = \alpha \sin \theta$, 该曲板微元的边长分别为 $d\alpha$ 和 $r d\beta$ 。在弹性薄壁梁桥的分析中, 忽略沿 α 线, 即板元的横截面线的 u_c 方向的位移变化, 于是该向的线应变:

$$\epsilon_\alpha = \frac{\partial u_c}{\partial \alpha} = 0 \quad (2-1)$$

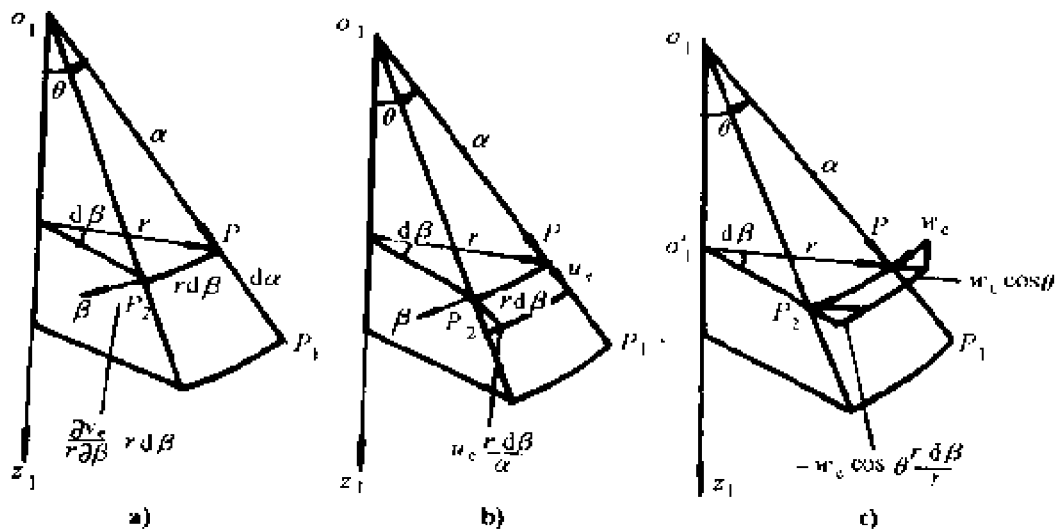


图 2-4 β 方向的线应变分析

至于 β 方向的线应变, 由图 2-4 中所示的三部分组成。图 a 表明, P_2 相对于 P 有线长增量 $\frac{\partial v_c}{r \partial \beta} r d\beta$; 图 b 表明, P 牵连 P_2 沿各自的

α 线有 u_e 的位移,按 O_1PP_2 相似三角形的关系,位移后的微元边线增长了 $u_e \frac{rd\beta}{\alpha}$;图 c 表明, P 牵连着 P_2 沿各自的 ζ 线有 w_e 的位移,沿 O'_1 的位移分量为 $w_e \cos\theta$,按 O'_1PP_2 相似三角形的关系,位移后的微元边线增长了 $-w_e \cos\theta \frac{rd\beta}{r}$,这一关系对于倒圆锥曲板亦成立。于是 β 方向的线应变为这三个线长增量之和除以原边长 $rd\beta$,而有

$$\begin{aligned} \epsilon_\beta &= \frac{\partial v_e}{r\partial\beta} + \frac{u_e}{\alpha} - \frac{w_e \cos\theta}{r} \\ &= \frac{\partial v_e}{\alpha \sin\theta \partial\beta} + \frac{u_e \sin\theta - w_e \cos\theta}{\alpha \sin\theta} \end{aligned} \quad (2-2)$$

对于剪应变关系式的建立,象线应变的讨论一样取微元体,如图 2-5 所示,剪应变亦由三部分组成。图 a 表明, P_1 相对于 P 有

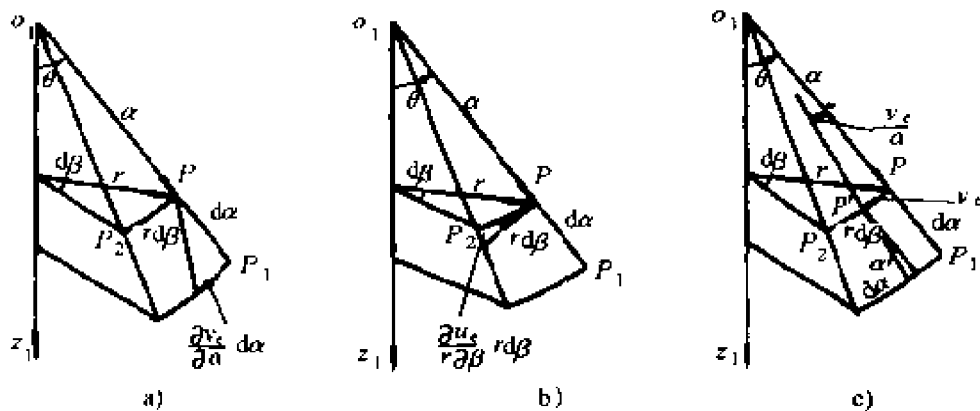


图 2-5 剪应变分析

位移增量 $\frac{\partial v_e}{\partial\alpha} d\alpha$,产生的剪切角为 $\frac{\partial v_e}{\partial\alpha}$;图 b 表明, P_2 相对于 P 有位移增量 $\frac{\partial u_e}{r\partial\beta} r d\beta$,产生的剪切角为 $\frac{\partial u_e}{r\partial\beta}$;图 c 表明,由于 P 点因 v_e 而移至 P' 点,位移后 P' 点的微元边 da' 相对于原先的 $d\alpha$ 边,由 O_1PP' 三角形的相似关系,增加了 $\frac{v_e}{\alpha}$ 角,它起到抵消剪应变的效应。于是曲板中面的剪应变变为

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\partial u_e}{r\partial\beta} + \frac{\partial v_e}{\partial\alpha} - \frac{v_e}{\alpha} \\ &= \frac{\partial u_e}{\alpha\sin\theta\partial\beta} + \frac{\partial v_e}{\partial\alpha} - \frac{v_e}{\alpha}\end{aligned}\quad (2-3)$$

式(2-2)、(2-3)为一般的圆锥曲板的线应变 ϵ_β 和剪应变 γ 与位移分量的关系式。它亦适用于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的扇形平板。

当 $\theta = 0$ 时,圆锥曲板蜕变为圆柱曲板,有 $\alpha\sin\theta \rightarrow r_c = \text{常数}$, 而 $\alpha \rightarrow \infty$, 于是上两式蜕变为

$$\epsilon_\beta = \frac{\partial v_e}{r_c\partial\beta} - \frac{v_e}{r_c}\quad (2-4)$$

$$\gamma = \frac{\partial u_e}{r_c\partial\beta} + \frac{\partial v_e}{\partial\alpha}\quad (2-5)$$

再当 $r_c \rightarrow \infty$ 时,圆柱曲板展成平面直板,有 $r_c\partial\beta = \partial y$, 于是上两式蜕变为

$$\epsilon_\beta = \frac{\partial v_e}{\partial y}\quad (2-6)$$

$$\gamma = \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{\partial v_e}{\partial\alpha}\quad (2-7)$$

§ 2-3 小曲率弯梁的应变曲率和扭率

所谓小曲率弯梁是指计算应变时可以不考虑初曲率的影响,即直接按梁轴线的微元长 dy 来计算应变。但横截面的转动,即位移分量的方向改变,应考虑初曲率的影响。

设一水平圆弧弯梁轴线 y 以及正交的水平轴 x 和竖向轴 z , 示于图 2-6, 梁轴线的初曲率半径为 R 。 $Cxyz$ 遵循右手规则。与其对应的轴向位移为 u, v, w , 相对于 y 轴的截面扭转角为 φ_y 。在拉压和弯曲时,截面服从平截面假设,扭转时服从刚性周边假设。

现取一微小弧段 $dy = R d\beta$, 起点为 1, 终点为 2, 如图 2-7a 所示。与其对应的平面圆弧曲线上的位移分量分别为 u, v 和 $u +$

$\frac{du}{dy} dy$ 、 $v + \frac{dv}{dy} dy$ 。由于初曲率的影响,还附带着方向的改变,因而应将点2的位移分量补充为 $u + \frac{du}{dy} dy - \frac{v}{R} dy$ 和 $v + \frac{dv}{dy} dy + \frac{u}{R} dy$,其中的附加项由图中与 O_112 三角形相似的关系所确定。于是,该两点的轴向位移差为

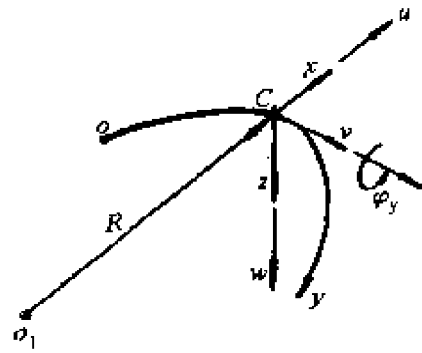


图 2-6 梁轴线坐标轴线及位移分量

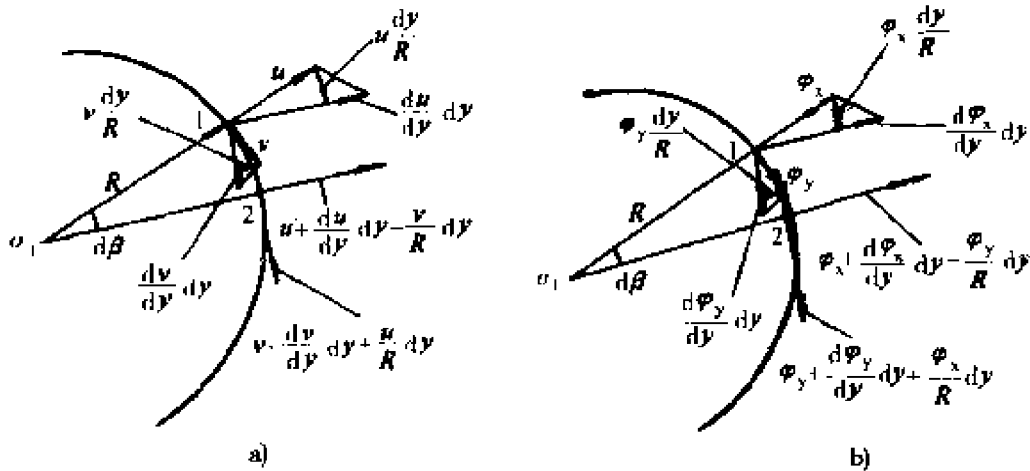


图 2-7 初曲率对应复曲率和扭率的影响

$$dv_{12} = \frac{dv}{dy} dy + \frac{u}{R} dy \quad (2-8)$$

而轴向线应变为

$$\epsilon_y = \frac{dv_{12}}{dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{u}{R} \quad (2-9)$$

即存在初曲率的附加项。

同理,该两点的水平挠度差为

$$du_{12} = \frac{du}{dy} dy - \frac{v}{R} dy \quad (2-10)$$

而得绕 z 轴的截面转角为

$$\varphi_z = -\frac{du}{dy} + \frac{v}{R} \quad (2-11)$$

也存在初曲率的附加项。该应变曲率即为

$$k_z = \frac{d\varphi_z}{dy} = -\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dy} \quad (2-12)$$

如果考虑 z 轴为截面的中和轴, 有 $\varepsilon_y = 0$, 按式(2-9)应有

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{u}{R} \quad (2-13)$$

此时的应变曲率可简化为仅与 u 有关, 而得

$$k_z = -\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{u}{R^2} \quad (2-14)$$

在一般情况下, 还是应采用式(2-12)。

在水平弯梁上, 位移分量 w 沿轴线无方向的改变, 但由它引起的截面转角 φ_x 沿轴线有着方向的改变, 它与截面扭转角 φ_y 有着相互影响的关系, 如图 2-7b 所示, 与图 a 有着相似的关系。因而, 考虑轴线的初曲率影响后, 1、2 两点的截面转角分量分别为 φ_x 、 φ_y 和 $\varphi_x + \frac{d\varphi_x}{dy} dy - \frac{\varphi_y}{R} dy$ 、 $\varphi_y + \frac{d\varphi_y}{dy} dy + \frac{\varphi_x}{R} dy$ 。该两点的截面转角差为

$$d\varphi_{x12} = \frac{d\varphi_x}{dy} dy - \frac{\varphi_y}{R} dy \quad (2-15)$$

而该应变曲率为

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{d\varphi_x}{dy} - \frac{\varphi_y}{R} \\ &= \frac{d^2w}{dy^2} - \frac{\varphi_y}{R} \end{aligned} \quad (2-16)$$

同理, 该两点的截面扭转角差为

$$d\varphi_{y12} = \frac{d\varphi_y}{dy} dy + \frac{\varphi_x}{R} dy \quad (2-17)$$

而该应变扭率为

$$k_y = \frac{d\varphi_y}{dy} + \frac{\varphi_x}{R}$$

$$= \frac{d\varphi_y}{dy} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dy} \quad (2-18)$$

上述水平弯梁的应变曲率和扭率是 1930 年由 S. Timoshenko 提供的。

由所推导的结果可知,弯梁的纵向线应变 ε_y 与应变曲率 k_x 因初曲率而彼此存在耦联的附加项;应变曲率 k_x 与扭率 k_y 亦因初曲率而彼此存在耦联的附加项。这是弯梁的一个特点。

§ 2-4 大曲率弯梁的应变与应变曲率的关系

所谓大曲率弯梁是指在计算应变时应考虑初曲率的影响,即过各点有不同的微元弧长 $r d\beta = a \sin\theta d\beta$ 。为此,应再从式(2-8)的沿截面均匀的轴向位移差;式(2-11)的绕 z 轴的平截面转角;式(2-15)的绕 x 轴的平截面转角差;式(2-17)的绕 y 轴的刚性周边的截面扭转角差的式子出发,来计算各点的应变。在此,仍服从平截面假设。

以一般的圆锥曲板为例,将式(2-8)除以板元上任一点的微元弧长 $a \sin\theta d\beta$,则得线应变:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\beta &= \frac{dv_{12}}{a \sin\theta d\beta} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{a \sin\theta d\beta} + \frac{u}{R} \cdot \frac{dy}{a \sin\theta d\beta} \\ &= \frac{dv}{a \sin\theta d\beta} + \frac{u}{a \sin\theta} \end{aligned} \quad (2-19)$$

由于 $u = u_c \sin\theta - w_c \cos\theta$,可见此式与式(2-2)是恒等的。在此,再将 $d\beta = dy/R$ 代入,即可写出相对于整体截面的梁轴线的线应变式:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\beta &= \frac{R}{a \sin\theta} \cdot \frac{dv}{dy} + \frac{u}{a \sin\theta} = \frac{R}{a \sin\theta} \left(\frac{dv}{dy} + \frac{u}{R} \right) \\ &= \frac{R}{a \sin\theta} \varepsilon_y \end{aligned} \quad (2-20)$$

将式(2-11)乘某一截面的板元上任一点的坐标值 x ,即为整体截面绕 z 轴转动时,该点的轴向位移 v_c ,取其微分再除以微元

弧长 $\alpha \sin\theta d\beta$, 即得线应变:

$$\epsilon_{\beta} = \frac{x d\varphi_z}{\alpha \sin\theta d\beta} = \frac{-x d^2 u}{\alpha \sin\theta d\beta dy} + \frac{x}{R} \cdot \frac{dv}{\alpha \sin\theta d\beta} \quad (2-21)$$

再写成相对于整体截面的梁轴线的线应变式:

$$\epsilon_{\beta} = \frac{xR}{\alpha \sin\theta} \left(-\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dy} \right) = \frac{xR}{\alpha \sin\theta} k_z \quad (2-22)$$

将式(2-15)乘某一截面的板元上任一点的坐标值 $-z$, 即为整体截面绕 x 轴转动时, 该点沿圆弧微元的伸长, 将其除以 $\alpha \sin\theta d\beta$, 则得线应变:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\beta} &= \frac{-z d\varphi_{x12}}{\alpha \sin\theta d\beta} = \frac{-z d\varphi_x}{\alpha \sin\theta d\beta} + \frac{z\varphi_y}{\alpha \sin\theta} \\ &= \frac{-z d^2 w}{\alpha \sin\theta d\beta dy} + \frac{z\varphi_y}{\alpha \sin\theta} \end{aligned} \quad (2-23)$$

再写成相对于整体截面的梁轴线的线应变式:

$$\epsilon_{\beta} = \frac{-zR}{\alpha \sin\theta} \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{\varphi_y}{R} \right) = \frac{-zR}{\alpha \sin\theta} k_x \quad (2-24)$$

将式(2-17)乘以某一截面的板元绕其扭心的转动半径 ρ_n , 即为该板元上任一点 α 方向的相对剪切位移 u_s , 将其除以 $\alpha \sin\theta d\beta$ 即得由扭转产生的剪切角:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\rho_n d\varphi_{y12}}{\alpha \sin\theta d\beta} = \frac{\rho_n d\varphi_y}{\alpha \sin\theta d\beta} + \frac{\rho_n \varphi_x}{\alpha \sin\theta} \\ &= \frac{\rho_n d\varphi_y}{\alpha \sin\theta d\beta} + \frac{\rho_n dw}{\alpha \sin\theta dy} \end{aligned} \quad (2-25)$$

同样可写成相对于整体截面的梁轴线的剪切角:

$$\gamma_1 = \frac{\rho_n R}{\alpha \sin\theta} \left(\frac{d\varphi_y}{dy} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dw}{dy} \right) = \frac{\rho_n R}{\alpha \sin\theta} k_y \quad (2-26)$$

将 $\alpha \sin\theta \rightarrow r_c$ 即得圆柱曲板的算式。当 $\frac{R}{\alpha \sin\theta} \rightarrow 1$, 即蜕变为直平板的算式。

由上面所推出的式子可知, 大曲率弯梁与小曲率弯梁的差异是在计算应变与应变曲率等的关系时, 大曲率弯梁应考虑将应变

曲率乘以 $\frac{R}{a \sin \theta}$ 因子。由于以板元为分析单位, 对大曲率弯梁的计算已无困难, 以后就不再去分出小曲率弯梁。

关于大曲率弯梁, 由李国豪教授的研究表明^[6], 梁轴初始曲率半径 R 与梁宽 B 的比例 $R/B < 10$ 的大曲率情况, 应考虑初曲率沿梁宽方向的变化来分析线应变和剪应变。

§ 2-5 截面板元的基本位移函数及其形函数

对于弹性薄壁梁桥, 完全用解析法求解是困难的, 而对截面位移需要有一些设定。其实, 平截面假设, 就是对截面位移的一种设定。相对于截面板元来说, 则需要沿 α 线设定相应的位移函数。

在全梁横截面上取任意的 ij 板元, 设该板元的宽为 a , 并取 ξ 为沿 α 线的局部无量纲坐标线, 以 i 为起点, 有 $\xi = 0$; 以 j 为终点, 有 $\xi = 1$, 并令 $\alpha_i = \xi_i a$ 。于是, 在 ij 板元上任意点的 α 坐标值为

$$\alpha = a(\xi_i + \xi) \quad (2-27)$$

为适应服从平截面假设的整体拉压或弯曲变形, 沿截面板元的 α 线可设位移函数:

$$V_0 = N_0 = 1, V_b = aN_b = a\left(\frac{1}{2} - \xi\right) \quad (2-28)$$

其中, N_0, N_b 为无量纲函数, 便于以后积分。以后不另加说明时, 一般将带有不同脚标的 N 记为无量纲的函数, 称为形函数。

为适应横截面的翘曲, 对应于 i 和 j 点可设位移函数:

$$V_i = N_i = 1 - \xi, V_j = N_j = \xi \quad (2-29)$$

为适应一般翼板上的剪滞翘曲, 沿截面板元的 α 线可设位移函数:

$$V_s = N_s = 4(\xi - \xi^2) \quad (2-30)$$

对于外伸翼板则应设

$$V_{si} = N_{si} = 1 - \xi^2 \quad (2-31)$$

或

$$V_{ij} = N_{rj} = 2\xi - \xi^2 \quad (2-32)$$

这些形函数的图线如图 2-8 所示。

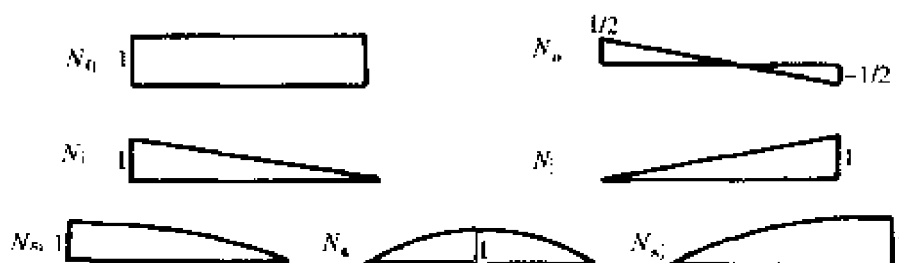


图 2-8 形函数曲线

上述的任一形函数 N_* 对 α 的导数 $\frac{dN_*}{d\alpha}$ 应为

$$\frac{dN_*}{d\alpha} = \frac{dN_*}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{d\alpha} = N_*' \cdot \frac{1}{a} \quad (2-33)$$

§ 2-6 直梁拉压弯的截面板元应变表达式

为明确截面板元的位移模式法的概念, 先来研究直梁拉压弯变形的截面板元应变表达式。按式(2-6)、(2-7)有

$$\begin{aligned} \epsilon_{\beta} &= \frac{\partial v_e}{\partial y} \\ \gamma &= \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{\partial v_e}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

现在用截面板元上所设的位移函数, 以形函数的形式来表达之。

一、拉压。设在直梁的全截面上有均匀的轴向位移 v_0 , 则截面板元有位移:

$$\left. \begin{aligned} u_e &= 0 \\ v_e &= N_0 v_0 \\ w_e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-34)$$

将其代入式(2-6)、(2-7)可得应变为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\beta} &= N_0 \frac{dv_0}{dy} = 1 \times \frac{dv_0}{dy} \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-35)$$

二、水平弯曲。设在直梁的全截面上有均匀的 x 向挠曲位移 u ，同时有绕 C_z 轴服从平截面假设的截面转角：

$$\varphi_z = -\frac{du}{dy} \quad (2-36)$$

又设截面板元按圆锥角计的倾角为 θ ，如图 2-9 的分解关系，则在该截面板元上有位移：

$$\left. \begin{aligned} u_e &= uN_0 \sin\theta \\ w_e &= -uN_0 \cos\theta \\ v_e &= \varphi_z(x_{bc}N_0 - aN_b \sin\theta - \zeta N_0 \cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2-37)$$

其中第三式的圆括号亦是截面板元上任意点的 x 坐标关系式：

$$x = x_{bc}N_0 - aN_b \sin\theta - \zeta N_0 \cos\theta \quad (2-38)$$

式中： x_{bc} ——截面板元形心的 x 坐标值。

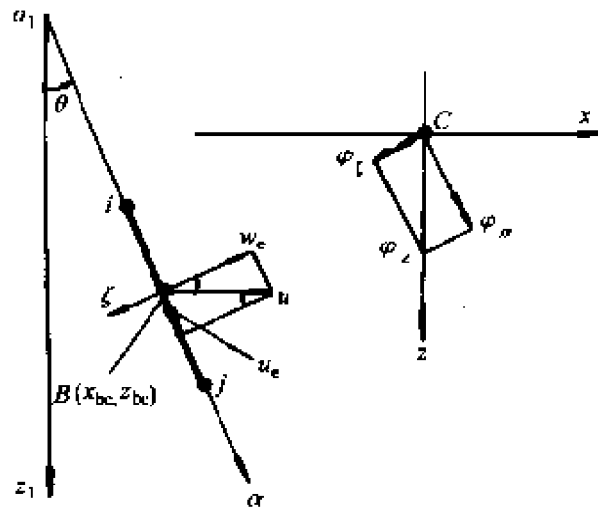


图 2-9 水平弯曲位移在截面板元上的分解

将式(2-37)代入式(2-6)、(2-7)可得应变为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\beta} &= -\frac{d^2 u}{dy^2} (x_{bc} N_0 - a N_b \sin \theta - \zeta N_0 \cos \theta) \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-39)$$

由此式可以看出,服从平截面假设的弯曲变形的剪应变为零,已被忽略。

三、竖向弯曲。设在直梁的全截面上有均匀的 z 向挠曲位移 w , 同时有绕 C_x 轴服从平截面假设的截面转角:

$$\varphi_x = \frac{dw}{dy} \quad (2-40)$$

又设截面板元按圆锥角计的倾角为 θ , 如图 2-10 的分解关系, 则在该截面板元上有位移:

$$\left. \begin{aligned} u_e &= w N_0 \cos \theta \\ w_e &= w N_0 \sin \theta \\ v_e &= \varphi_x (-z_{bc} N_0 + a N_b \cos \theta - \zeta N_0 \sin \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2-41)$$

其中第三式的圆括号亦表达截面板元上任意点的 z 坐标关系式:

$$z = z_{bc} N_0 - a N_b \cos \theta + \zeta N_0 \sin \theta \quad (2-42)$$

式中: z_{bc} ——截面板元形心的 z 坐标值。

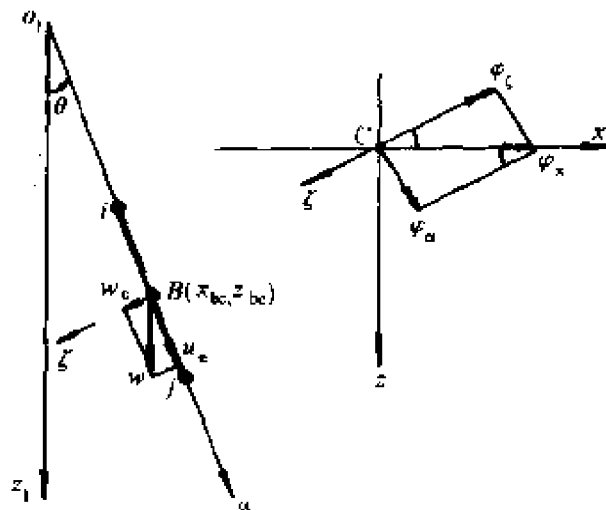


图 2-10 竖向弯曲位移在截面板元上的分解

将式(2-41)代入式(2-6)、(2-7)可得应变为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\beta} &= \frac{d^2 w}{dy^2} (-z_{bc} N_0 + a N_b \cos \theta - \zeta N_0 \sin \theta) \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-43)$$

同样,服从平截面假设的弯曲变形的剪应变为零,已被忽略。

§ 2-7 直梁拉压弯变形的位移模式及其变分方程

在上一节的研究中,如对截面板元上的轴向位移 v_e ,在拉压、水平弯曲和竖向弯曲的变形中,已分别写出

$$v_e = N_0 v_0 \quad (2-44)$$

$$v_e = (x_{bc} N_0 - a N_b \sin \theta - \zeta N_0 \cos \theta) \varphi_z \quad (2-45)$$

$$v_e = (-z_{bc} N_0 + a N_b \cos \theta - \zeta N_0 \sin \theta) \varphi_x \quad (2-46)$$

它们皆服从平截面假设。在这些式子中, N_0 、 $(x_{bc} N_0 - a N_b \sin \theta - \zeta N_0 \cos \theta)$ 和 $(-z_{bc} N_0 + a N_b \cos \theta - \zeta N_0 \sin \theta)$ 分别表示在截面板元上拉压、水平弯曲和竖向弯曲的位移分布,它们是相应的变形位移在整体截面上的广义坐标,亦称之为相应变形的位移模式,而这三个式中的 v_0 、 φ_z 和 φ_x 则分别为相应变形的广义位移。

可以看出,对于由多片板元组成的整梁截面,对于截面板元的位移分布用位移函数通过形函数来描述,而在整体截面上对各片板元的位移分布则用位移模式来描述。在第一章的弯翘分析中,整体截面只有一片板元,因而位移函数就是位移模式。对应于各种基本变形的位移模式的概念,对于以后要研究的扭翘、剪滞和畸变等的变形更为需要,它可以方便地写出对应于各基本变形的应变能表达式,及其相应的截面(刚度)矩阵,进而可推导出相应的弹性控制微分方程,或者建立有限元法的位移法方程。下面先来研究直梁拉压弯变形的应变能表达式。

现将截面板元的应变式(2-35)、(2-39)、(2-43)归并起来,可写出

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\beta} &= N_0 \frac{dv_0}{dy} + (-x_{bc}N_0 + aN_b \sin\theta + \zeta N_0 \cos\theta) \frac{d^2u}{dy^2} \\ &\quad + (-z_{bc}N_0 + aN_b \cos\theta - \zeta N_0 \sin\theta) \frac{d^2w}{dy^2} \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-47)$$

在整梁上取一单位长度的微段,则在任一板元上的应变能为

$$U_b^e = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-l/2}^{l/2} D_{\beta} \epsilon_{\beta}^2 a d\zeta d\xi \quad (2-48)$$

式中, t 为板元厚。在梁桥分析中,对于各向同性材料,纵向直接取 $D_{\beta} = E$, 横向因侧向受约束而取 $D_{\alpha} = \frac{E}{1-\mu^2}$, E 为线弹性模量, μ 为泊桑比。将式(2-47)代入上式积分之,由于圆括号内的三项的乘积积分是彼此不耦联的,式(2-48)可以写成:

$$\begin{aligned} U_b^e &= \frac{1}{2} \int_0^1 E \left(\frac{dv_0}{dy} - x_{bc} \frac{d^2u}{dy^2} - z_{bc} \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 a t d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 E \left(a \sin\theta \frac{d^2u}{dy^2} + a \cos\theta \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 N_b^2 a t d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 E \left(\cos\theta \frac{d^2u}{dy^2} - \sin\theta \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 \frac{a t^2}{12} d\xi \end{aligned} \quad (2-49)$$

考虑到 $N_0 = 1$, $N_b = a \left(\frac{1}{2} - \xi \right)$, 积分可得

$$\begin{aligned} U_b^e &= \frac{E}{2} \left[\left(\frac{dv_0}{dy} - x_{bc} \frac{d^2u}{dy^2} - z_{bc} \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 a t \right. \\ &\quad + \left(\sin\theta \frac{d^2u}{dy^2} + \cos\theta \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 \frac{a^3 t}{12} \\ &\quad \left. + \left(\cos\theta \frac{d^2u}{dy^2} - \sin\theta \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 \frac{a t^3}{12} \right] \end{aligned} \quad (2-50)$$

将其表达成矩阵式,可写成:

$$\begin{aligned}
U_b^e &= \frac{E}{2} \begin{Bmatrix} \frac{dv_0}{dy} \\ \frac{d^2u}{dy^2} \\ \frac{d^2w}{dy^2} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} at & -x_{bc}at & -z_{bc}at \\ -x_{bc}at & \begin{pmatrix} x_{bc}^2at \\ +s^2a^3t/12 \\ +c^2at^3/12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{bc}z_{bc}at \\ +sca^3t/12 \\ -sca^3t/12 \end{pmatrix} \\ -z_{bc}at & \begin{pmatrix} x_{bc}z_{bc}at \\ +sca^3t/12 \\ -sca^3t/12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} z_{bc}^2at \\ +c^2a^3t/12 \\ +s^2at^3/12 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dv_0}{dy} \\ \frac{d^2u}{dy^2} \\ \frac{d^2w}{dy^2} \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} v'_0 \\ u'' \\ w'' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_0 \\ u'' \\ w'' \end{Bmatrix} \quad (2-51)
\end{aligned}$$

其中设 $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$

在整体截面上将各板元的应变能叠加起来,得单位长度整体截面微段的应变能:

$$U^e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} v'_0 \\ u'' \\ w'' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sum_e k_{11}^e & \sum_e k_{12}^e & \sum_e k_{13}^e \\ \sum_e k_{21}^e & \sum_e k_{22}^e & \sum_e k_{23}^e \\ \sum_e k_{31}^e & \sum_e k_{32}^e & \sum_e k_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_0 \\ u'' \\ w'' \end{Bmatrix} \quad (2-52)$$

其中的刚度矩阵可称为对应于变形分量的截面刚度矩阵。相应的沿单位长度梁轴线分布的荷载势能为

$$V^e = - \begin{Bmatrix} v_0 \\ u \\ w \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} q_y \\ q_x \\ q_z \end{Bmatrix} \quad (2-53)$$

于是全梁有总势能:

$$\Pi = \int_0^l (U^e + V^e) dy \quad (2-54)$$

取 $\delta\Pi = 0$ 得

$$\delta\Pi = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} \delta v'_0 \\ \delta u'' \\ \delta w'' \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} \sum_e k_{11}^e & \sum_e k_{12}^e & \sum_e k_{13}^e \\ \sum_e k_{21}^e & \sum_e k_{22}^e & \sum_e k_{23}^e \\ \sum_e k_{31}^e & \sum_e k_{32}^e & \sum_e k_{33}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v'_0 \\ u'' \\ w'' \end{array} \right\} dy$$

$$- \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} \delta v_0 \\ \delta u \\ \delta w \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} q_y \\ q_x \\ q_z \end{array} \right\} dy = 0 \quad (2-55)$$

再用分部积分将变分 $(\delta v'_0 \delta u'' \delta w'')$ 降阶,可得:

$$\left[\left\{ \begin{array}{c} \delta v_0 \\ \delta u' \\ \delta w' \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} \sum_e k_{11}^e & \sum_e k_{12}^e & \sum_e k_{13}^e \\ \sum_e k_{21}^e & \sum_e k_{22}^e & \sum_e k_{23}^e \\ \sum_e k_{31}^e & \sum_e k_{32}^e & \sum_e k_{33}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v'_0 \\ u'' \\ w'' \end{array} \right\} \right]_0^1$$

$$- \left[\left\{ \begin{array}{c} \delta u \\ \delta w \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} \sum_e k_{21}^e & \sum_e k_{22}^e & \sum_e k_{23}^e \\ \sum_e k_{31}^e & \sum_e k_{32}^e & \sum_e k_{33}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v'_0 \\ u'' \\ w'' \end{array} \right\} \right]_0^1$$

$$- \int_0^1 \delta v_0 \left(\sum_e k_{11}^e v''_0 + \sum_e k_{12}^e u'''' + \sum_e k_{13}^e w'''' \right) dy$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} \delta u \\ \delta w \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} \sum_e k_{21}^e & \sum_e k_{22}^e & \sum_e k_{23}^e \\ \sum_e k_{31}^e & \sum_e k_{32}^e & \sum_e k_{33}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v''_0 \\ u'''' \\ w'''' \end{array} \right\} dy$$

$$- \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} \delta v_0 \\ \delta u \\ \delta w \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} q_y \\ q_x \\ q_z \end{array} \right\} dy = 0 \quad (2-56)$$

即得弹性控制微分方程及其边界条件。该弹性控制微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum_c k_{11}^e v_0'' + \sum_c k_{12}^e u''' + \sum_c k_{13}^e w'' &= -q_y \\ \sum_c k_{21}^e v_0''' + \sum_c k_{22}^e u^{IV} + \sum_c k_{23}^e w^{IV} &= q_x \\ \sum_c k_{31}^e v_0''' + \sum_c k_{32}^e u^{IV} + \sum_c k_{33}^e w^{IV} &= q_z \end{aligned} \right\} \quad (2-57)$$

一般情况下,反映整体截面的截面特征常数为非零值。当截面对称于 C_z 轴时,则仅有

$$\sum_c k_{11}^e = EA, \quad \sum_c k_{22}^e = EI_z, \quad \sum_c k_{33}^e = EI_x \quad (2-58)$$

式中: A 、 I_z 、 I_x ——分别为整体截面的面积和惯性矩。

其余皆为零。

方程(2-57)成为

$$\left. \begin{aligned} EA v_0'' &= -q_y \\ EI_z u^{IV} &= q_x \\ EI_x w^{IV} &= q_z \end{aligned} \right\} \quad (2-59)$$

§ 2-8 弹性薄壁梁桥的基本变形及其位移模式

上面已经讨论了拉压弯变形及其位移模式。总体上说,弹性薄壁梁桥的变形可分为截面不变的和截面可变的两类。在截面不变的变形中,除拉压、水平弯曲和竖向弯曲外,还有扭转、扭翘和剪滞等变形,共有六种基本变形。截面可变的变形即为畸变。图 2-11 示出了以单室矩形截面箱形直梁为例的截面不变的六种基本变形的位移模式。前三种基本变形已经说过,是服从平截面假设的位移模式。现在再来说一下后三种基本变形。

一、扭转(图 2-11d),为横截面绕扭心轴的刚性转动,有扭转角 φ_{yc} 。在任一片板元上沿 α 线的 u_e 位移为

$$u_e = \rho_n \varphi_y = \rho_n N_0 \varphi_y \quad (2-60)$$

式中: ρ_n ——板元对整体截面扭心的转动半径;

$\rho_n N_0$ ——整体截面的扭转在板元上的位移 u_e 的分布模式,亦

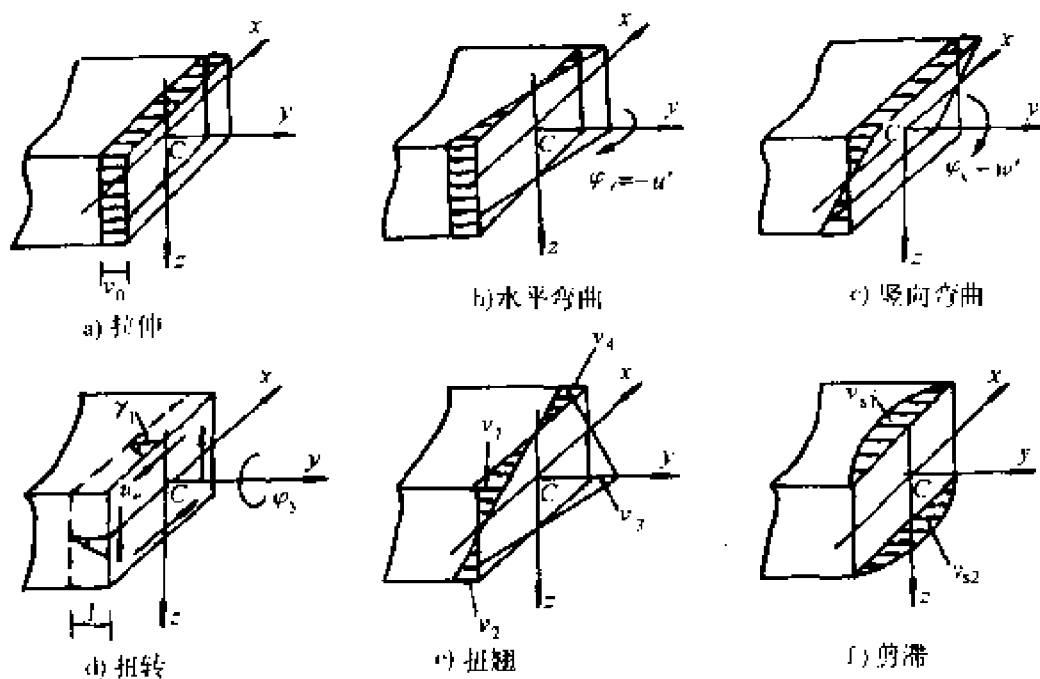


图 2-11 矩形箱梁的基本变形及其位移模式

即广义坐标；

φ_y ——整体截面扭转角沿梁轴线的变化，即广义位移。

二、翘翘(图 2-11e)，假设各板元有服从线性变化的翘翘位移，可用形函数 N_i 、 N_j 来描述，而各节点有翘翘位移分量 v_i 、 v_j 。在任一片板元上的翘翘位移为

$$v_e = (v_i N_i + v_j N_j) v_l \quad (2-61)$$

在此， $(v_i N_i + v_j N_j)$ 为整体截面的翘翘在板元上的位移 v_e 的分布模式，即广义坐标，而 v_l 为整体截面按此位移模式的翘翘沿梁轴线的变化，即广义位移。

三、剪滞效应对于宽翼板是不能忽略的，如图 2-11f 所示，顶板和底板的剪滞翘翘位移的幅值分别为 v_{s1} 和 v_{s2} ，即在任一翼板板元上有剪滞翘翘位移为

$$v_e = v_{sk} N_s v_s, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2-62)$$

其中， $v_{sk} N_s$ 为整体截面的剪滞翘翘在板元上的位移 v_e 的分布模式，即广义坐标，而 v_s 为整体截面按此位移模式的剪滞翘翘沿梁轴线的变化，即广义位移。

有关扭转、扭翘、剪滞以及畸变的位移模式，即在整体截面上按板元分布的相应于各基本变形的位移模式，在后面将一一加以研究。

§ 2-9 形导函数乘积的积分类型

在 § 2-7 中已经遇到过在截面板元上 $\int_0^1 N_0^2 d\xi$ 、 $\int_0^1 N_0 N_b d\xi$ 、 $\int_0^1 N_b^2 d\xi$ 的形函数乘积的无量纲积分。在一般的情况下，对于弯梁，可归结为对形函数或其导函数的乘积的如下三种类型的积分：

$$JF_a = \int_0^1 N_{k1} N_{k2} d\xi \quad (2-63)$$

$$JF_b = \int_0^1 N_{k1} N_{k2} (\xi_i + \xi) d\xi \quad (2-64)$$

$$JF_c = \int_0^1 \frac{N_{k1} N_{k2}}{\xi_i + \xi} d\xi \quad (2-65)$$

式中： N_{k1} 、 N_{k2} ——形导函数。

JF_a 型积分：在直桥以及弯桥的圆柱曲板板元上总是用到这种类型的积分，它不难直接用手算积分，亦可以用编程积分。在一个子程序中，可按如下几步进行积分。

1. 将 N_{k1} 和 N_{k2} 的各项系数分别存入 $N_{k1}(i_1)$ 和 $N_{k2}(i_2)$ ， $i_1 = 0, 1, 2, 3$ ； $i_2 = 0, 1, 2, 3$ 。
2. 将 $N_{k1}(i_1)N_{k2}(i_2)$ 的各项系数的乘积累加到 $N_1 N_2(k)$ ， $k = i_1 + i_2 = 0, 1, 2, 3, \dots, 6$ 项中去。
3. 将 $N_1 N_2(k)$ 的各项按下式作积分累加：

$$N_1 N_2 JF = N_1 N_2 JF + N_1 N_2(k) \frac{1}{k+1} \quad (2-66)$$

4. 将 $N_1 N_2 JF$ 存入 N_{k1} 和 N_{k2} 分别按 $(N_0, N_b, N_i, N_j, N_s)$ 排列的矩阵中，相应于 N_{k1} 按行排列， N_{k2} 按列排列，构成 $N_1 N_2 JF(N_{k1}, N_{k2})$ ，它分别对应于形函数或不同阶导函数的乘积积分值。该矩

阵可设为 $NNJF(o, m, n, i, j)$, 其中 o 表示为 JF_a 型, m 和 n 分别为 N_{k1} 和 N_{k2} 的导数的阶数, i 和 j 为按 $(N_o, N_l, N_i, N_j, N_s)$ 排列的形函数的序号。这样就便于在计算中取用。

JF_b 型积分: 它可以写成

$$JF_b = \xi_i \int_0^1 N_{k1} N_{k2} d\xi + \int_0^1 \xi N_{k1} N_{k2} d\xi \quad (2-67)$$

其第一项为 ξ_i 乘 JF_a 型积分, 而第二项为将 $N_{k1}(i_1) N_{k2}(i_2)$ 的乘积 $N_1 N_2(k)$ 升一次幂后积分之。若先将第一项置于 $N_1 N_2 JF$, 第二项再按下式作积分累加:

$$N_1 N_2 JF = N_1 N_2 JF + N_1 N_2(k) \frac{1}{k+2} \quad (2-68)$$

该积分存储在 $NNJF(1, m, n, i, j)$ 矩阵中, 其中 1 表示为 JF_b 型积分, 其它下标同上。

JF_c 型积分: 它需将乘积 $N_{k1} N_{k2}$ 的多项式逐项用递推积分公式累加之。设乘积的多项式为

$$N_{k1} N_{k2} = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + \cdots + C_6 \xi^6 \quad (2-69)$$

则积分

$$\begin{aligned} JF_c &= C_0 \int_0^1 \frac{1}{\xi_i + \xi} d\xi + C_1 \int_0^1 \frac{\xi}{\xi_i + \xi} d\xi + C_2 \int_0^1 \frac{\xi^2}{\xi_i + \xi} d\xi \\ &\quad + \cdots + C_6 \int_0^1 \frac{\xi^6}{\xi_i + \xi} d\xi \\ &= C_0 J_0 + C_1 J_1 + C_2 J_2 + \cdots + C_6 J_6 \end{aligned} \quad (2-70)$$

其中, J_0, J_1, J_2, \cdots 可用如下的递推公式:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^1 \frac{1}{\xi_i + \xi} d\xi = \int_0^1 \frac{1}{\xi_i + \xi} d(\xi_i + \xi) = \ln\left(1 + \frac{1}{\xi_i}\right) \\ J_1 &= \int_0^1 \frac{\xi}{\xi_i + \xi} d\xi = \int_0^1 d\xi - \int_0^1 \frac{\xi_i}{\xi_i + \xi} d\xi = 1 - \xi_i J_0 \\ J_2 &= \int_0^1 \frac{\xi^2}{\xi_i + \xi} d\xi = \int_0^1 (\xi_i + \xi) d\xi - \int_0^1 \frac{2\xi_i \xi}{\xi_i + \xi} d\xi - \int_0^1 \frac{\xi_i^2}{\xi_i + \xi} d\xi \\ &= \frac{(\xi_i + 1)^2 - \xi_i^2}{2} - 2\xi_i J_1 - \xi_i^2 J_0 \end{aligned}$$

$$J_3 = \int_0^1 \frac{\xi^3}{\xi_i + \xi} d\xi = \frac{(\xi_i + 1)^3 - \xi^3}{3} - 3\xi_i J_2 - 3\xi_i^2 J_1 - \xi_i^3 J_0$$

.....

(2-71)

该积分存储在 $NNJF(2, m, n, i, j)$ 矩阵中, 其中 2 表示为 JF_c 型积分, 其它下标同上。

应该注意到, JF_a 型积分与板元的位置无关, 任一板元皆有相同的积分值; 而 JF_b 和 JF_c 型积分与板元的位置 ξ_i 有关, 应对具体的板元作积分。

§ 2-10 小 结

对于弹性薄壁梁桥的分析, 本书统一用截面板元位移模式法 (简称为板元模式法) 的概念。它是在横截面的各板元上, 按相应的基本变形, 设定其位移模式。在本章仅对直梁的拉压弯, 具体地按平截面假设, 在整体截面上对截面板元建立了相应的位移模式表达式。它是通过形函数来描述截面板元上变形沿 α 线的变化规律。

设定了各基本变形在横截面上各板元的位移分布, 就可按板元来分析相应的应变分量。圆锥曲板是具有一般性的板元, 其应变分量受初曲率影响, 因而在本章首先作了研究。尤其是对大曲率弯梁的应变与应变曲率与初曲率关系的结论, 为薄壁弯桥分析打下了基础。

本章对薄壁直梁的拉压弯板元模式的建立, 并再次运用变分法得到平衡方程, 以循序渐进地掌握这一解决问题的方法。并且应该看到, 在式(2-55)中相对于各变形分量 (v' , u'' , w'') 形成截面刚度矩阵, 表达了整体截面的截面特征常数。

在计算截面板元的应变能时, 亦是形成截面刚度矩阵的过程。这时会遇到形导函数乘积的三种积分类型, 可以很方便地用编程来计算, 此为计算截面刚度矩阵的有效手段。

第三章 扭转与扭翘

§ 3-1 板元的中面法线转角与截面扭转角

与前一样,取圆锥曲板的微元体如图 3-1 所示,在 P 点有遵守右手规则的局部坐标系 $P\alpha\beta\zeta$, 曲面外的位移 w_e 的正向与 ζ 方

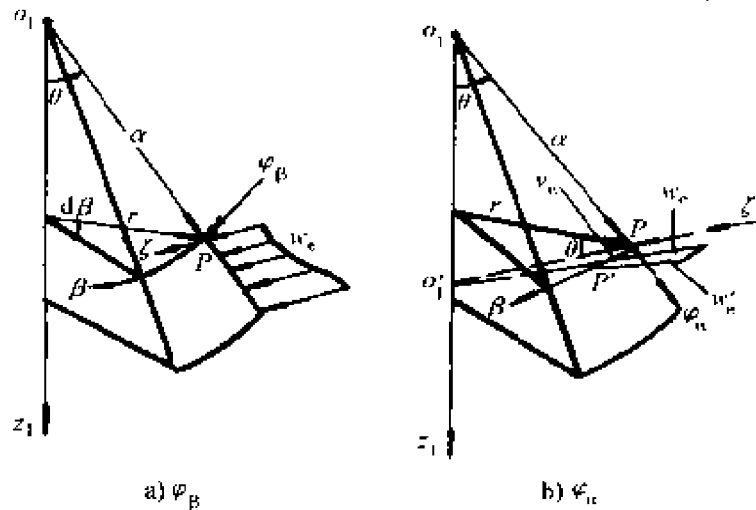


图 3-1 圆锥曲板的中面法线转角分析

向一致。图 3-1a 表明, P 点的中面法线绕 β 线的转角为

$$\varphi_{\beta} = - \frac{\partial w_e}{\partial \alpha} \quad (3-1)$$

图 3-1b 表明, P 点的中面法线绕 α 线的转角为

$$\varphi_{\alpha} = \frac{\partial w_e}{r \partial \beta} - \frac{\cos \theta}{r} v_e \quad (3-2)$$

式中: $r = \alpha \sin \theta$

右边第二项为由 v_e 而牵连坐标系的附加项, 因 $O'P = \frac{r}{\cos \theta}$,

而当 P 点移至 P' 点时,中面法线改变了角度,按 O',PP' 三角形的相似关系,即为中面法线转角的牵连量,它是负效应。

再考虑薄壁弯梁桥有刚性截面扭转角 φ_y ,它计入了初曲率的影响。在整体截面上,取某一板元截面的任一点的位移分量有

$$\left. \begin{aligned} u_e(\zeta) &= \zeta\varphi_\beta + \rho_n\check{\varphi}_y = -\zeta\frac{\partial w_e}{\partial\alpha} + \rho_n\check{\varphi}_y \\ v_e(\zeta, \alpha) &= -\zeta\varphi_\alpha + v_{ij}(\alpha) \approx -\zeta\frac{\partial w_e}{\alpha\sin\theta\partial\beta} + v_{ij}(\alpha) \end{aligned} \right\} (3-3)$$

式中: ρ_n ——板元绕整体截面扭心的转动半径;

v_{ij} ——扭翘位移,仅考虑沿截面的 α 线的线性变化,忽略板元自身的扭翘项。

在代入 φ_α 的式(3-2)时忽略 $\zeta/r(\zeta/a)$ 级小量,在下面的运算中同样加以忽略。

考虑到刚性截面转动有 $\check{\varphi}_y = \varphi_\beta = -\frac{\partial w_e}{\partial\alpha}$,则板元的 ζ 层的剪应变由式(2-3)可得:

$$\begin{aligned} \gamma(\zeta, \alpha) &= \frac{1}{\alpha\sin\theta} \cdot \frac{\partial u_e(\zeta)}{\partial\beta} + \frac{\partial v_e(\zeta, \alpha)}{\partial\alpha} - \frac{v_e(\zeta, \alpha)}{\alpha} \\ &= -2\zeta\frac{\partial^2 w_e}{\alpha\sin\theta\partial\beta\partial\alpha} + \rho_n\frac{\partial\check{\varphi}_y}{\alpha\sin\theta\partial\beta} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial\alpha} - \frac{v_{ij}}{\alpha} \\ &= 2\zeta\frac{\partial\check{\varphi}_y}{\alpha\sin\theta\partial\beta} + \rho_n\frac{\partial\check{\varphi}_y}{\alpha\sin\theta\partial\beta} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial\alpha} - \frac{v_{ij}}{\alpha} \end{aligned} \quad (3-4)$$

式中,右边第一项为板元的自身扭曲项;后三项为中面的扭剪与扭翘项。在计算其应变能时,板元中的自身扭曲项与中面的扭剪和扭翘项是不耦联的。还可以看出,在板元自身扭曲的剪应变中, α 与 β 向有相等的剪切角效应 $\zeta\frac{\partial\check{\varphi}_y}{\alpha\sin\theta\partial\beta}$,剪应变为其二倍。

现计算板元自身扭曲项。沿梁轴线取单位长度的微段,在其截面板元的单位宽度上的应变能为

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_{-v_2}^{v_2} G\gamma_1^2(\zeta)d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} G(2\xi)^2 d\xi \left(\frac{\partial \check{\varphi}_y}{\alpha \sin\theta \partial \beta} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} G \left(\frac{t^3}{3} \right) \left(\frac{\partial \check{\varphi}_y}{\alpha \sin\theta \partial \beta} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} T_1 \frac{\partial \check{\varphi}_y}{\alpha \sin\theta \partial \beta} \quad (3-5)
\end{aligned}$$

式中: $T_1 = GJ_{pl} \frac{\partial \check{\varphi}_y}{\alpha \sin\theta \partial \beta}$, 为板元单位宽度上的扭矩;

$J_{pl} = \frac{t^3}{3}$, 为板元单位宽度的自身抗扭惯矩。

在式(3-4)中, 还可以将中面的扭剪和扭翘的剪应变项分为扭转和扭翘的剪切角两项。考虑到弯梁应将 $\frac{d\varphi_y}{dy}$ 表达成 $k_y = \frac{d\varphi_y}{dy} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dy}$, 则扭转剪切角为

$$\gamma_\varphi = \rho_n \frac{\partial \check{\varphi}_y}{\alpha \sin\theta \partial \beta} = \frac{\rho_n R}{\alpha \sin\theta} k_y \quad (3-6)$$

扭翘剪切角为

$$\gamma_v = \frac{\partial v_{ij}}{\partial \alpha} - \frac{v_{ij}}{\alpha} \quad (3-7)$$

其剪应变能的计算, 只能用 $\gamma_\varphi + \gamma_v$ 构成中面的剪应变才可进行。

§ 3-2 扭转及扭翘的截面板元位移模式

扭转, 在此所指的是截面绕扭心转动时产生的相对错动, 可称为扭剪。现取任一截面板元 ij , 示于图 3-2, 整体截面的形心坐标系为 Cxz , $N(x_n, z_n)$ 为其扭心; 该板元的倾角为 θ , 厚为 t , 宽为 a , 其形心为 $B(x_{bc}, z_{bc})$ 。于是该板元 ij 绕扭心 $N(x_n, z_n)$ 的转动半径为

$$\rho_n = (z_{bc} - z_n) \sin\theta - (x_{bc} - x_n) \cos\theta \quad (3-8)$$

当全截面作刚性转动的扭转角为 φ_y 时, 该截面板元沿 α 向的位移, 如式(2-60)所示为

$$u_e = \rho_n N_0 \varphi_y$$

经过式(3-4)的推导,对于弯梁,按式(2-26)亦即式(3-6),而有扭

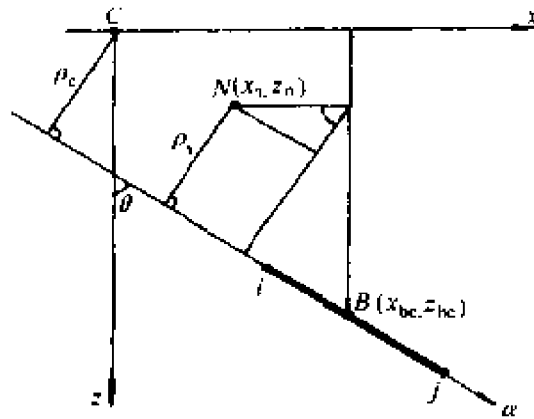


图 3-2 转动半径计算

转剪切角:

$$\gamma_\varphi = \frac{\rho_n R}{\alpha \sin \theta} k_y N_0$$

伴随着扭转的是扭翘,如式(2-61)所示,在该截面板元上有扭翘位移为

$$v_e = (v_i N_i + v_j N_j) v_t$$

按式(3-7),有扭翘剪切角:

$$\gamma_v = \left(\frac{N'_i}{a} - \frac{N_i}{a} \right) v_i v_t + \left(\frac{N'_j}{a} - \frac{N_j}{a} \right) v_j v_t \quad (3-9)$$

合并扭转与扭翘的剪切角而得剪应变:

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau q} &= \gamma_\varphi + \gamma_v \\ &= \frac{\rho_n R}{\alpha \sin \theta} N_0 k_y + \left(\frac{N'_i}{a} - \frac{N_i}{a} \right) v_i v_t \\ &\quad + \left(\frac{N'_j}{a} - \frac{N_j}{a} \right) v_j v_t \end{aligned} \quad (3-10)$$

可将其写成矩阵式:

$$\gamma_{\tau q} = (V_{\tau q}) \{ v_{\tau q} \} \quad (3-11)$$

式中:

$$(V_{nq}) = \{V_{nq}\}^T = \left(\frac{\rho_n R}{\alpha \sin \theta} \frac{N'_i}{a} - \frac{N_j}{a} \frac{N'_j}{a} - \frac{N_j}{\alpha} \right) \quad (3-12)$$

$$(v_{nq}) = \{v_{nq}\}^T = (k_y v_i v_l v_j v_l) \quad (3-13)$$

于是圆锥曲板的截面板元相对纵轴 y 的单位长度上的剪应变能为

$$U_{nq}^e = \frac{1}{2} (v_{nq}) \int_0^1 G \{V_{nq}\} (V_{nq}) \frac{\alpha \sin \theta}{R} a t d\zeta \{v_{nq}\} \quad (3-14)$$

该截面板元的刚度矩阵为

$$[K_{nq}^e] = \int_0^1 G \{V_{nq}\} (V_{nq}) \frac{\alpha \sin \theta}{R} a t d\zeta \quad (3-15)$$

将各板元的扭翘分量 $(v_i v_l v_j v_l)$ 排队编号成 n 个元素的 (v_l) , 就可“对号入座”地形成自由扭转下整体截面的扭转与扭翘总势能的变分为零而得的平衡方程:

$$\begin{bmatrix} k_{kk} & k_{kv} \\ k_{vk} & k_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_y \\ v_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-16)$$

扭翘模式是在单位扭率 $k_y = 1$ 和单位扭翘位移 $v_l = 1$ 下的各截面板元的相对翘曲位移 $(v) = \{v\}^T = (v_1 v_2 \cdots v_i v_j \cdots v_n)$ 。于是由上式的第二行可得:

$$\{v\} = -[k_{vv}]^{-1} \{k_{vk}\} \quad (3-17)$$

它是一个不定式, 需处理成定式。现将 $[k_{vv}]$ 的末行末列及 $\{k_{vk}\}$ 的末行划去, 即令 $v_n = 0$, 而成定式:

$$\{v\}_{n-1} = -[k_{vv}]_{n-1}^{-1} \{k_{vk}\}_{n-1} \quad (3-18)$$

由于扭翘产生的剪应变只与翘曲的相对值有关, 因而设 $v_n = 0$, 不影响相对的翘曲位移。

应该注意到, 在转动半径的式(3-8)中, 扭心坐标 (x_n, z_n) 是待定值。将该截面板元的形心坐标 (x_{bc}, z_{bc}) 的确定值与待定值分开写, 即为

$$\begin{aligned} \rho_n &= (z_{bc} \sin \theta - x_{bc} \cos \theta) + x_n \cos \theta - z_n \sin \theta \\ &= \rho_c + x_n \cos \theta - z_n \sin \theta \end{aligned} \quad (3-19)$$

于是 $\{k_{vk}\}_{n-1}$ 可写成

$$\{k_{vk}\}_{n-1} = \{K_{vk}^0\}_{n-1} + x_n \{k_{vk}^{xn}\}_{n-1} + z_n \{k_{vk}^{zn}\}_{n-1} \quad (3-20)$$

相应地有

$$\{v\}_{n-1} = \{v_{pc}\}_{n-1} + x_n \{v_{xn}\} + z_n \{v_{zn}\} \quad (3-21)$$

在此, (x_n, z_n) 以及在全截面加一均匀的位移 v_n 值皆为待定值。它们可以由扭翘产生的正应力在整体截面上应构成轴力及双向弯矩自平衡的三个条件来确定。

作为圆锥曲板的截面板元, 由扭翘位移 v_e 产生的线应变, 现在可以写成:

$$\begin{aligned} \epsilon_\beta = & N_i (v_{pci} + x_n v_{xni} + z_n v_{zni}) \frac{R}{\alpha \sin \theta} \frac{dv_i}{dy} \\ & + N_j (v_{pcj} + x_n v_{xnj} + z_n v_{znj}) \frac{R}{\alpha \sin \theta} \frac{dv_j}{dy} \\ & + N_0 v_n \frac{R}{\alpha \sin \theta} \frac{dv_i}{dy} \end{aligned} \quad (3-22)$$

则在整体截面上内力自平衡的条件为

$$\left. \begin{aligned} \sum_e \int_0^1 \epsilon_\beta a t d\zeta &= 0 \\ \sum_e \int_0^1 \epsilon_\beta x a t d\zeta &= 0 \\ \sum_e \int_0^1 \epsilon_\beta z a t d\zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

式中: \sum_e ——在整体截面上对各板元求和。

将式(3-22)代入式(3-23), 且消去公因子 $\frac{dv_i}{dy}$, 即得:

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_0^1 [(N_i v_{pci} + N_j v_{pcj}) + x_n (N_i v_{xni} + N_j v_{xnj}) \\ & + z_n (N_i v_{zni} + N_j v_{znj}) + v_n N_0] \frac{Rt}{(\zeta_i + \zeta) \sin \theta} d\zeta = 0, \\ & \sum_e \int_0^1 [(N_0 x_{bc} - N_b a \sin \theta) ((N_i v_{pci} + N_j v_{pcj}) \\ & + x_n (N_i v_{xni} + N_j v_{xnj}) + z_n (N_i v_{zni} + N_j v_{znj})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_n N_0 \int_0^1 \frac{Rt}{(\zeta_i + \zeta) \sin \theta} d\zeta = 0, \\
& \sum_i \int_0^1 (N_0 z_{bc} - N_b a \cos \theta) [(N_i v_{\rho ci} + N_j v_{\rho cj}) \\
& + x_n (N_i v_{xni} + N_j v_{xnj}) + z_n (N_i v_{zni} + N_j v_{znj}) \\
& + v_n N_0] \frac{Rt}{(\zeta_i + \zeta) \sin \theta} d\zeta = 0 \quad (3-24)
\end{aligned}$$

这时,该式需要用 JF_c 型积分。对于直桥以及弯桥的圆柱曲板板元,则蜕变为 JF_a 型积分。解此三元一次方程,即可求出 v_n 和 (x_n, z_n) ,从而确定出整体截面的扭翘位移模式 $\{v_{nq}\}$:

$$\{v_{nq}\} = \begin{Bmatrix} v_{nq1} \\ v_{nq2} \\ \vdots \\ v_{nqi} \\ \vdots \\ v_{nq(n-1)} \\ v_{nqn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_n \\ v_n \\ \vdots \\ v_n \\ \vdots \\ v_n \\ v_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{\rho c1} & + x_n v_{xn1} & + z_n v_{zn1} \\ v_{\rho c2} & + x_n v_{xn2} & + z_n v_{zn2} \\ \vdots & & \\ v_{\rho ci} & + x_n v_{xni} & + z_n v_{zni} \\ \vdots & & \\ v_{\rho c(n-1)} & + x_n v_{xn(n-1)} & + z_n v_{zn(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (3-25)$$

这种扭翘位移模式与经典理论中直梁截面的主扇性坐标一致,而现在以截面板元为分析单位,就能方便地确定出弯梁截面的扭翘位移模式。下面列举如图 3-3 ~ 图 3-6 所示的四个截面的算例,位移分量列于表 3-1 ~ 表 3-4。

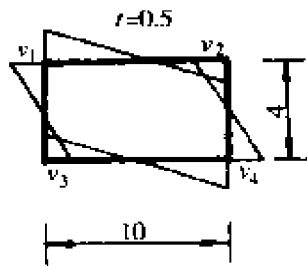


图 3-3 截面扭翘位移模式

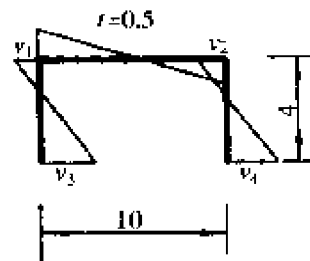


图 3-4 截面扭翘位移模式

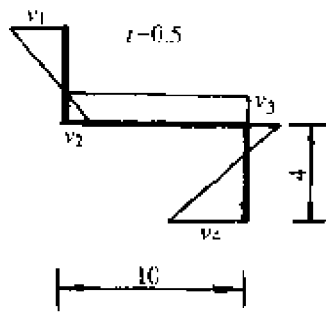


图 3-5 截面扭翘位移模式

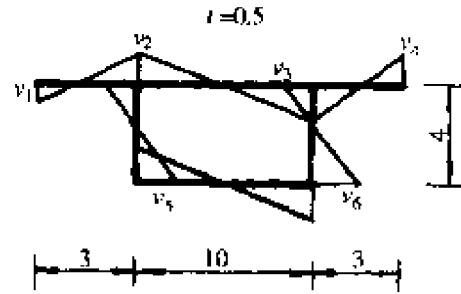


图 3-6 截面扭翘位移模式

图 3-3 截面的扭翘位移模式

表 3-1

计算值 R	截面扭心坐标		扭翘位移模式的节点分量			
	x_n	z_n	v_1	v_2	v_3	v_4
∞	0	0	4.2857	-4.2857	-4.2857	4.2857
10^4	-0.00008	0	4.2848	-4.2866	-4.2848	4.2866
10^3	-0.00084	0	4.2768	-4.2945	-4.2768	4.2945
10^2	-0.00823	0	4.1922	-4.3686	-4.1922	4.3686
20	-0.01956	0	3.7163	-4.5880	-3.7163	4.5880

图 3-4 截面的扭翘位移模式

表 3-2

计算值 R	截面扭心坐标		扭翘位移模式的节点分量			
	x_n	z_n	v_1	v_2	v_3	v_4
∞	0	-2.30	7.0588	-7.0588	-12.9412	12.9412
10^4	-0.0004	-2.299	7.0573	-7.0604	-12.9357	12.9467
10^3	-0.0426	-2.288	7.0430	-7.0744	-12.8861	12.9959
10^2	-0.4258	-2.1614	6.8872	-7.2005	-12.3726	13.4692
20	-2.0501	-1.4347	5.9366	-7.4538	-9.7961	15.1066

图 3-5 截面的扭翘位移模式

表 3-3

计算值 R	截面扭心坐标		扭翘位移模式的节点分量			
	x_n	z_n	v_1	v_2	v_3	v_4
∞	0	0	15.5556	-4.4445	-4.4445	15.5556

续上表

计算值 R	截面重心坐标		翘曲位移模式的节点分量			
	x_n	z_n	v_1	v_2	v_3	v_4
10^4	-0.005	0.0016	15.5478	-4.4422	-4.4467	15.5633
10^3	-0.050	0.0156	15.4774	-4.4221	-4.4666	15.6330
10^2	-0.499	0.1629	14.7409	-4.2117	-4.6550	16.2926
20	-2.353	0.9150	10.9804	-3.1373	-5.2288	18.3007

图 3-6 截面的翘曲位移模式

表 3-4

计算值 R	截面重心坐标		翘曲位移模式的节点分量					
	x_n	z_n	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
∞	0	0.4188	-2.2412	3.9564	-3.9564	2.2412	-4.6150	4.6150
10^4	0.00014	0.4190	-2.2455	3.9564	-3.9564	2.2369	-4.6142	4.6159
10^3	0.00143	0.4210	-2.2839	3.9567	-3.9562	2.1987	-4.6061	4.6237
10^2	0.01462	0.4349	-2.6785	3.9636	-3.9578	1.8253	-4.5142	4.6900
40	0.04094	0.4358	-3.3815	3.9965	-3.9727	1.2345	-4.3175	4.7486

§ 3-3 直梁桥的约束扭转控制微分方程

我们知道,对于水平弯梁桥,其竖向弯曲与扭转是耦联的,不便于分析一些扭转中的基本问题,在此先用直梁桥来加以研究。

设一闭口薄壁单室等截面的直箱梁,其横截面如图 3-7 所示,在横截面自由翘曲的均匀扭转中,横截面上不产生翘曲正应力,仅有剪应力。这种扭转称为自由扭转,亦称为 Saint Venant 扭转或纯扭转。如图中在 dy 微段上截取 ab 小片,考虑其轴向平衡:

$$\tau_1 t_1 dy = \tau_2 t_2 dy \quad (3-26)$$

即得

$$q_1 = q_2 = q \quad (3-27)$$

亦就是说,绕闭口薄壁截面的剪力流不变,为一常数。

在截面中线的点 A 处,取微元 ds 的剪力流对任意 B 点之力

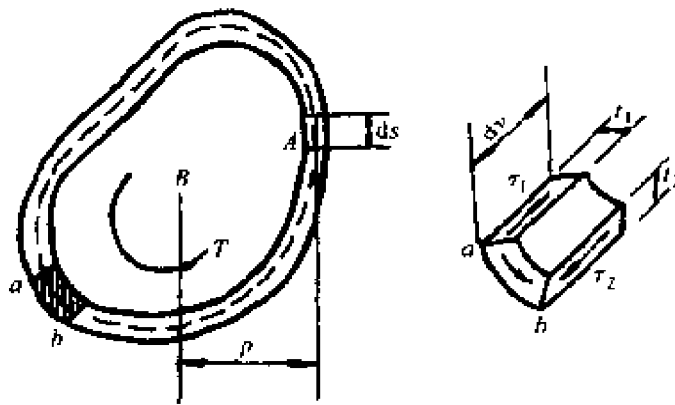


图 3-7 闭口薄壁截面的剪力流

矩为

$$dT = q \rho ds \quad (3-28)$$

沿截面中线积分得：

$$T = q \oint \rho ds = 2qF \quad (3-29)$$

式中： F ——截面中线所封闭的图形面积。

而

$$q = T/2F \quad (3-30)$$

$$\tau = T/2Ft \quad (3-31)$$

取一长为 l 的单室闭口薄壁等截面杆件，受均匀的自由扭转，两端的扭矩为 T ，其刚性截面的相对扭转角为 φ_y ，由能量守恒关系：

$$\frac{1}{2} \varphi_y T = \frac{l}{2} \oint \frac{\tau^2 t}{G} ds \quad (3-32)$$

将式(3-31)代入，可得：

$$\frac{\varphi_y}{l} = \frac{d\varphi_y}{dy} = \frac{T}{G} \frac{\oint \frac{ds}{t}}{4F^2} \quad (3-33)$$

考虑到扭率 $\frac{d\varphi_y}{dy} = \varphi_y' = \frac{T}{GJ_p}$ ，即可写出单室闭口薄壁截面的等效极惯矩为

$$J_p = 4F^2 / \oint \frac{ds}{t} \quad (3-34)$$

称为 Saint Venant 扭转常数，简称为扭转常数。于是纯扭转的应变

能为

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^l GJ_p (\varphi_y')^2 dy \quad (3-35)$$

当为约束扭转时,即截面的扭翘受约束,此时的扭翘位移模式按式(3-25)确定,与主扇性坐标一样,而记为 ω 。由此,扭翘线应变可设为

$$\varepsilon_\beta = \omega \varphi_y'' \quad (3-36)$$

于是有线应变能

$$\begin{aligned} U_w &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A E \varepsilon_\beta^2 dA dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \omega^2 dA E (\varphi_y'')^2 dy \end{aligned} \quad (3-37)$$

$$\text{令 } I_w = \int_A \omega^2 dA \quad (3-38)$$

称为截面的扭翘常数。于是可将约束扭翘的应变能写成:

$$U_w = \frac{1}{2} \int_0^l EI_w (\varphi_y'')^2 dy \quad (3-39)$$

设外荷载对扭心轴作用着分布力矩 m_y ,则该势能为

$$V = - \int_0^l m_y \varphi_y dy \quad (3-40)$$

于是有总势能

$$\begin{aligned} \Pi &= U_s + U_w + V \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l GJ_p (\varphi_y')^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^l EI_w (\varphi_y'')^2 dy \\ &\quad - \int_0^l m_y \varphi_y dy \end{aligned} \quad (3-41)$$

求一阶变分 $\delta\Pi = 0$,并作二次分部积分,可得:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= [GJ_p \varphi_y', \delta\varphi_y]_0^l + [EI_w \varphi_y'', \delta\varphi_y']_0^l \\ &\quad - [EI_w \varphi_y''', \delta\varphi_y]_0^l \\ &\quad + \int_0^l (EI_w \varphi_y^{IV} - GJ_p \varphi_y'' - m_y) \delta\varphi dy = 0 \end{aligned} \quad (3-42)$$

即得直梁桥的约束扭转控制微分方程:

$$EI_w \varphi_y'' - GJ_p \varphi_y'' = m_y \quad (3-43)$$

以及边界条件:

$$[\delta \varphi_y (GJ_p \varphi_y' - EI_w \varphi_y'')]_0^l = 0 \quad (3-44)$$

和

$$[\delta \varphi_y' EI_w \varphi_y'']_0^l = 0 \quad (3-45)$$

若位移变分 $\delta \varphi_y$ 或 $\delta \varphi_y'$ 在端点不为零, 则应构成相应的自然边界条件。方程 (3-43) 亦就是弹性薄壁直杆约束扭转的 Vlasov 方程^[7]。

由式 (3-44) 可见, 与转角 φ_y 相对应的圆括号内的广义力为扭矩, 它由两部分组成, 即

$$T = T_s + T_w \quad (3-46)$$

其中

$$T_s = GJ_p \varphi_y' \quad (3-47)$$

为 St. Venant 纯扭转的扭矩。而

$$T_w = -EI_w \varphi_y''' \quad (3-48)$$

为约束扭转的扭矩。

由式 (3-45) 可见, 与广义位移 φ_y' 相联系的是横截面的扭翘位移 $v = \omega \varphi_y'$, 其线应变即为式 (3-36)。因而与 φ_y' 相对应的广义力称之为双力矩, 记为 B_i , 量纲单位为 $(N \cdot m^2)$ 。有

$$B_i = EI_w \varphi_y'' \quad (3-49)$$

现在, 按自由扭转由式 (3-31) 和式 (3-33)、(3-34) 可以得知, 其剪应变为

$$\gamma = \frac{J_p}{2Ft} \varphi_y' \quad (3-50)$$

而刚性截面扭转错动的剪切角为

$$\gamma_\varphi = \rho_n \varphi_y' \quad (3-51)$$

因而扭翘的剪切角模式应为 $\omega' = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}$:

$$\omega' = \frac{J_p}{2Ft} - \rho_n \quad (3-52)$$

考虑扭翘为独立于扭转角 φ_y 的另一个自由度, 为扭翘位移 v_t , 它

是广义位移,使横截面上分布着扭翘的剪切角:

$$\gamma_v = \omega' v_t = \left(\frac{J_p}{2Ft} - \rho_n \right) v_t \quad (3-53)$$

于是,扭转伴随着扭翘的剪应变:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_\varphi + \gamma_v \\ &= \rho_n \varphi'_y + \left(\frac{J_p}{2Ft} - \rho_n \right) v_t \end{aligned} \quad (3-54)$$

此时单位段长上的剪应变能为

$$\begin{aligned} U_{sl} &= \frac{1}{2} \int_A G \gamma^2 dA = \frac{1}{2} \int_A G \left[\rho_n \varphi'_y + \left(\frac{J_p}{2Ft} - \rho_n \right) v_t \right]^2 dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A G \left(\rho_n^2 (\varphi'_y)^2 + 2 \left(\frac{J_p}{2Ft} \rho_n - \rho_n^2 \right) \varphi'_y v_t \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{J_p^2}{4F^2 t^2} - \frac{J_p}{Ft} \rho_n + \rho_n^2 \right) v_t^2 \right) dA \end{aligned} \quad (3-55)$$

令 $J_\rho = \int_A \rho_n^2 dA$, 并注意到 $dA = t ds$ 和式(3-34), 得:

$$\int_A \frac{J_p}{2Ft} \rho_n dA = \oint \frac{J_p}{2Ft} \rho_n ds = J_p \quad (3-56)$$

$$\int_A \frac{J_p^2}{4F^2 t^2} dA = \oint \frac{J_p}{t} \cdot \frac{ds}{t} = J_p \quad (3-57)$$

因而式(3-55)可改写成:

$$U_{sl} = \frac{1}{2} G J_p (\varphi'_y)^2 + G (J_p - J_\rho) \varphi'_y v_t - \frac{1}{2} G (J_p - J_\rho) v_t^2 \quad (3-58)$$

这样,弹性薄壁直箱梁约束扭转的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_1 \left[(G J_p (\varphi'_y)^2 - 2G (J_p - J_\rho) \varphi'_y v_t + G (J_p - J_\rho) v_t^2 \right] dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_1 E I_w (v'_t)^2 dy - \int_1 m_y \varphi_y dy \end{aligned} \quad (3-59)$$

其中考虑到应将扭翘线应变式(3-36)改为

$$\varepsilon_{\beta} = \omega v_t' \quad (3-60)$$

将 $\delta\Pi = 0$, 即有

$$\begin{aligned} & [\delta\varphi_y(GJ_p\varphi_y' - G(J_p - J_p)v_t)]_0^l + [\delta v_t EI_w v_t']_0^l \\ & - \int_0^l \delta\varphi_y [GJ_p\varphi_y'' - G(J_p - J_p)v_t' + m_y] dy \\ & - \int_0^l \delta v_t [G(J_p - J_p)\varphi_y' + EI_w v_t'' - G(J_p - J_p)v_t] dy \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-61)$$

于是可得弹性控制微分方程^[8]:

$$\left. \begin{aligned} GJ_p\varphi_y'' - G(J_p - J_p)v_t' + m_y &= 0 \\ G(J_p - J_p)\varphi_y' + EI_w v_t'' - G(J_p - J_p)v_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-62)$$

将第一式写成:

$$v_t' = \frac{J_p}{J_p - J_p} \varphi_y'' + \frac{m_y}{G(J_p - J_p)} \quad (3-63)$$

求导二次有

$$v_t''' = \frac{J_p}{J_p - J_p} \varphi_y^{IV} + \frac{m_y''}{G(J_p - J_p)} \quad (3-64)$$

另将第二式求导一次有

$$G(J_p - J_p)\varphi_y'' + EI_w v_t''' - G(J_p - J_p)v_t' = 0 \quad (3-65)$$

将式(3-63)、(3-64)代入上式, 并令 $\beta = \frac{J_p}{J_p - J_p}$, 且不计 m_y'' 项, 可得:

$$\beta EI_w \varphi_y^{IV} - GJ_p \varphi_y'' = m_y \quad (3-66)$$

它为弹性薄壁直杆约束扭转的 Umanskii 方程。

此时由式(3-61)的对应项可以看出, 扭矩为

$$T = GJ_p \varphi_y' - G(J_p - J_p)v_t \quad (3-67)$$

双力矩为

$$B_t = EI_w v_t' \quad (3-68)$$

将方程(3-43)与(3-66)加以比较, 从形式上看只引入了 β 系数, 而后者即考虑了扭翘剪应变的二次效应的影响, 它对于闭口薄

壁截面箱梁的计算精度有很大提高。

方程(3-66)可以改写成:

$$\varphi_y^{IV} - \alpha^2 \varphi_y'' = \frac{m_y}{\beta EI_w} \quad (3-69)$$

式中: $\alpha^2 = \frac{GJ_p}{\beta EI_w}$ (3-70)

方程(3-43)亦有相似的形式,在形式上只要取 $\beta = 1$ 。方程(3-69)的通解为

$$\varphi_y = C_1 + C_2 y + C_3 \operatorname{sh} \alpha y + C_4 \operatorname{ch} \alpha y + \varphi_y^* \quad (3-71)$$

式中: C_1, C_2, C_3, C_4 ——四个积分常数;

φ_y^* ——特解。

它们可以用有关 φ_y, φ_y', T 和 B_i 的边界条件确定之。相应的 v_t 可对方程(3-63)进行积分。在此对于具体的积分方法不作详述,需要时可参考有关书籍。但应该指出,方程(3-43)与方程(3-66)的积分结果是不同的,因为后者还涉及 v_t 这个扭翘位移。 v_t 会对方程的解带来什么样的影响,还是简便地用 Galerkin 法,并取三角级数解在下节给以讨论。

§ 3-4 对 Vlasov 方程与 Umanskii 方程的讨论

现在用 Galerkin(加辽金)法对 Vlasov(伏拉索夫)方程与 Umanskii(乌曼斯基)方程加以讨论。取简支梁跨中作用一集中外扭矩 M , 对于 Vlasov 方程:

$$EI_w \varphi^{IV} - GJ_p \varphi = m$$

设满足边界条件和对称性的解为

$$\varphi = \sum_{m=1,3,5,\dots} a_m \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (3-72)$$

式中: l ——简支跨度。

将式(3-72)代入方程(3-43),并按 Galerkin 法乘以权函数 $\sin \frac{m\pi y}{l}$

后沿全梁轴线积分,利用三角级数项的正交性,且注意到跨中的集中
外扭矩 M ,用 δ 函数表示即有

$$\int_0^l m \sin \frac{m\pi y}{l} dy = \int_0^l M \delta\left(y - \frac{l}{2}\right) \sin \frac{m\pi y}{l} dy$$

$$= M \sin \frac{m\pi}{2} \quad (3-73)$$

于是可得 Galerkin 方程:

$$EI_w \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} a_m + GJ_p \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \frac{l}{2} a_m = M \sin \frac{m\pi}{2} \quad (3-74)$$

得待定系数:

$$a_m = \frac{2M \sin \frac{m\pi}{2}}{l \left(EI_w \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + GJ_p \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \right)} \quad (3-75)$$

按式(3-49)可得双力矩:

$$B_i = -EI_w \sum_{m=1}^{3,5,\dots} a_m \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (3-76)$$

对于 Umanskii 方程:

$$GJ_p \varphi'' - G(J_p - J_p) v'_1 + m = 0$$

$$G(J_p - J_p) \varphi' + EI_w v''_1 - G(J_p - J_p) v_1 = 0$$

设满足边界条件和对称性的解为

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{m=1}^{3,5,\dots} a_m \sin \frac{m\pi y}{l} \\ v_1 &= \sum_{m=1}^{3,5,\dots} b_m \cos \frac{m\pi y}{l} \end{aligned} \right\} \quad (3-77)$$

将其代入方程(3-62),其第一式以 $\sin \frac{m\pi y}{l}$ 为权函数,第二式以 $\cos \frac{m\pi y}{l}$ 为权函数,于是可写出如下的 Galerkin 方程:

$$\left. \begin{aligned} -GJ_p \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} a_m + G(J_p - J_p) \frac{m\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} b_m &= -M \sin \frac{m\pi}{2} \\ G(J_p - J_p) \frac{m\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} a_m - EI_w \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} b_m - G(J_p - J_p) \frac{l}{2} b_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-78)$$

得待定系数：

$$a_m = b_m \frac{EI_w \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + G(J_p - J_p)}{G(J_p - J_p) \frac{m\pi}{l}} \quad (3-79)$$

$$b_m = \frac{2M \sin \frac{m\pi}{2}}{l \left(\beta EI_w \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 + GJ_p \frac{m\pi}{l} \right)} \quad (3-80)$$

按式(3-68)可得双力矩：

$$B_i = -EI_w \sum_{m=1}^{3,5,\dots} b_m \left(\frac{m\pi}{l} \right) \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (3-81)$$

将式(3-76)与式(3-81)的对应项系数相比,可得：

$$\frac{B_{imv}}{B_{imu}} = \frac{\beta EI_w \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + GJ_p}{EI_w \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + GJ_p} \quad (3-82)$$

此式为 Vlasov 解的系数与 Umanskii 解的系数之比。

对于矩形箱梁,设沿周边的壁厚相同,而两垂直边有如表 3-5 所列的各种比例关系,则可算出相应的 β 值。

矩形箱型截面的 β 值

表 3-5

边长比	$a = 2b$	$a = 3b$	$a = 4b$	$a = 10b$
β	9.009	4.000	2.778	1.497

可见, β 是大于 1 的值。式(3-82)的比值表明, Vlasov 解的系数大于 Umanskii 解的系数。可以看出,随着 m 的增加,其增大值愈显著。

由文献[9]对悬臂薄壁箱梁的研究表明, Vlasov 解在固定端附近存在着局部效应。在固定端,扭翘正应力 σ_w 的 Vlasov 解将近 Umanskii 解的 3 倍。如果采用积分意义下的平均算法,如在 Galerkin 法中取很少几项,或在有限元法中取较大的单元,皆会使局部效应削平。

本书已从独立的扭翘自由度出发,建立了扭翘位移模式,自然地归结为按 Umanskii 理论进行分析。

§ 3-5 大曲率弯梁的扭翘位移模式讨论

作者在文献[10]中推出了在扇性平板横截面上的扭翘位移函数的微分方程解,以此来讨论在 § 3-2 中所建立的扭翘位移模式的精确度。

先考虑初曲率对自由扭转的影响。在扇性平板上取一极坐标微元,在自由扭转下仅有剪应力 $\tau_{\alpha\beta}$,如图 3-8 所示,可推得平衡方程:

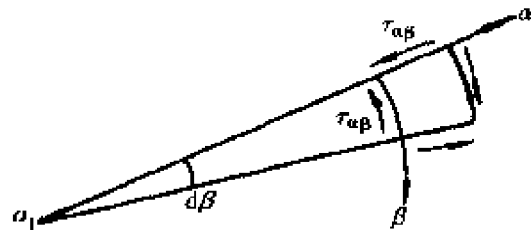


图 3-8 极坐标微元

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + 2 \frac{\tau_{\alpha\beta}}{\alpha} = 0 \quad (3-83)$$

令剪力流

$$q = \tau_{\alpha\beta} t \quad (3-84)$$

式中: t ——平板厚。

将 q 代替 $\tau_{\alpha\beta}$, 可得:

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} + 2 \frac{q}{\alpha} = 0 \quad (3-85)$$

该方程有解为

$$q = \frac{C}{\alpha^2} k_y \quad (3-86)$$

相应的剪应力为

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{C}{t\alpha^2} k_y \quad (3-87)$$

剪应变为

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{C}{Gt\alpha^2} k_y \quad (3-88)$$

由式(3-86)可见,剪力流与 α 有关,即因初曲率而不再保持常量。而

$\gamma_{\alpha 1} = \gamma_{\varphi} + \gamma_v$, 由式(3-6)、(3-7)得:

$$\gamma_v = \frac{\partial v_e}{\partial \alpha} - \frac{v_e}{\alpha} = \left(\frac{C}{Gt\alpha^2} - \frac{\rho_n R}{\alpha} \right) k_y \quad (3-89)$$

设 $v_e = (\omega - \omega_0)v_t$, 又令 $v_t = 1, k_y = 1$, 则上式可写成:

$$\frac{d\omega}{d\alpha} - \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{C}{Gt\alpha^2} - \frac{\rho_n R}{\alpha} \quad (3-90)$$

式中: $(\omega - \omega_0)$ ——扭翘位移模式;

ω_0 ——任意常数。

方程的解为

$$\omega = C_1 \alpha - \frac{C}{2Gt\alpha} + \rho_n R + \omega_0 \quad (3-91)$$

对于某一扇性平板板元, 有 $\alpha = a(\zeta_i + \zeta)$, 上式可整理成:

$$\omega - \omega_0 = D_1 \zeta - D_2 \frac{1}{1 + \zeta/\zeta_i} + D_3 \quad (3-92)$$

其中, 可将 $\frac{1}{1 + \zeta/\zeta_i}$ 写成:

$$\frac{1}{1 + \zeta/\zeta_i} \approx 1 - \zeta/\zeta_i + (\zeta/\zeta_i)^2 \quad (3-93)$$

应该注意到, 它是交错级数, 若舍去 $(\zeta/\zeta_i)^2$ 项, 其误差不会超过此项。

现设大曲率弯梁有 $R/B \approx 2.5$, 并设某一扇性平板板元的宽 $a = B/2$, 于是可有 $\zeta/\zeta_i \approx 1/5 = 0.2$ 。可见, 与 1 相比, 式(3-93)舍去 $(\zeta/\zeta_i)^2$ 项的误差不超过 0.04。它表明用在截面板元上取线性的扭翘位移函数, 其误差是不大的。且采用能量泛函建立扭翘位移模式, 是在积分意义下的平均, 会有更小的误差。

§ 3-6 小 结

本章首先用板元的中面法线转角研究了板元的自身扭曲, 在任意 ζ 层的剪应变是刚性截面扭转角的二倍效应, 由此推得其板

元单位宽度的自身抗扭惯矩为 $\frac{t^3}{3}$ 。它的剪应变及其剪应变能与板元中面的剪应变及其剪应变能不耦联。

板元中面的剪应变是由扭转剪切角与扭翘剪切角合成的。扭翘的截面板元位移模式,在各片板元沿 α 线是线性分布;在全截面上,对各板元应满足全截面的轴力和两向弯矩的自平衡,从而确定出扭心坐标和扭翘的板元模式,即各节点的扭翘分量。

有了扭翘的板元模式,自然可以将扭翘作为一个基本变形。按此模式可以直接将由此产生的线应变及剪应变,计入应变能的计算中去。但是为了对 Vlasov 方程与 Umanskii 方程进行比较讨论,还是在本章做了稍感烦琐的推导。研究表明,Umanskii 方程的解不存在 Vlasov 方程的解的局部效应,而有较好的结果。因而,将扭翘作为一个基本变形是适宜的,以后可以直接用它的板元模式来计算。

关于扭翘位移沿 α 线的线性分布的精度问题,亦与扇性平板的精确解进行了比较,其误差很小。这一结论与通常的材料力学的处理方法是一致的。例如在材料力学的曲杆分析中,变形时截面仍服从平截面假设,而应变应考虑各点的初曲率影响。

第四章 剪滞分析

§ 4-1 引言

按照初等梁理论，翼板上的正应力沿宽度方向是均匀分布的。实际上，梁肋弯曲时，翼板上的正应力是靠剪应力来传递的。剪切变形将使离梁肋愈远其正应力愈小，其间存在着传力滞后现象，它与初等梁理论的正应力的分布不同，称之为剪滞效应。这种效应对于宽翼梁不能忽略。在桥梁设计中，若未对剪滞效应作周全的分析，往往会发生不应有的裂缝^[11]。

最早涉及剪滞问题是 1924 年 T. Von Karman 在研究宽翼梁时提出的。1946 年 E. Reissner 用最小势能原理分析矩形截面箱梁的剪力滞效应，假设翼板纵向翘曲位移沿横向为二次抛物线分布^[12]。近来，有些学者探讨用三次或四次曲线分布。这一问题是本章首先要研究的。进而在研究槽形截面宽梁时，由于截面不像矩形截面箱梁那样属于双轴对称，因而不能简单地在翼板上附加一纵向翘曲位移，还需在全截面上附加一均匀的轴向位移，使两者附加的纵向位移在全截面上构成轴力自平衡。这是作者在 1986 年指出的^[13]。接着作者在 1989 年发表了对于带对称伸臂的单室箱梁，由于截面上下不对称，除考虑轴力自平衡外，如何确定不同宽度翼板的翘曲幅度和顶底板的不同翘曲幅度问题^[14]。这些问题亦将在本章阐明之。

§ 4-2 矩形箱梁剪滞翘曲位移模式

取薄壁矩形截面箱梁的截面尺寸和坐标如图 4-1 所示，剪滞

效应是伴随着竖向弯曲而存在的。在横截面上存在着服从平截面假设的竖向弯曲和由剪滞效应附加的翘曲位移。

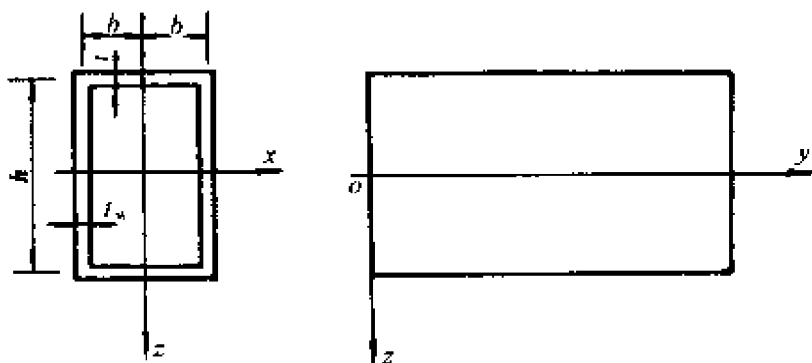


图 4-1 薄壁矩形箱梁

现考虑双轴对称截面的竖向平面弯曲，可设上下翼板的这种剪滞翘曲位移函数 $g(x)$ 对称于 z 轴(图 4-2)。在上下两翼板上将 $g(x)$ 反号设置，而在腹板上设为零。这样，全截面的剪翘位移模式为

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{下翼板} \\ -g(x), & \text{上翼板} \end{cases} \quad (4-1)$$

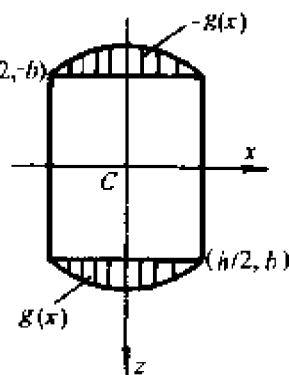


图 4-2 剪滞位移模式

于是横截面的纵向位移为

$$v(x, y, z) = f(x)v_s(y) - zw'(y) \quad (4-2)$$

式中： $v_s(y)$ ——剪滞翘曲位移，是一个广义位移；

$w'(y)$ ——由竖向弯曲挠度 $w(y)$ 产生的截面转角。

在写梁的总势能表达式时，应考虑剪滞翘曲的剪应变。对于静定梁的总势能可写成

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_A E \epsilon^2 dA dy + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_A G \gamma^2 dA dy \\ & + \int_0^1 M w' dy \end{aligned} \quad (4-3)$$

而

$$\epsilon = \frac{\partial v}{\partial y} = f(x)v'_s - zw'' \quad (4-4)$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} = f'(x)v_s \quad (4-5)$$

于是

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_A E f^2(x) dA \int_0^l (v'_s)^2 dy - \int_A E f(x) z dA \int_0^l v'_s w'' dy \\ & + \frac{1}{2} \int_A E z^2 dA \int_0^l (w'')^2 dy + \frac{1}{2} \int_A G (f'(x))^2 dA \int_0^l v_s^2 dy \\ & + \int_0^l M w'' dy \end{aligned} \quad (4-6)$$

已知 $I_x = \int_A z^2 dy$, 又令

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \int_A E f^2(x) dA \\ C_2 &= \int_A E f(x) z dA \\ C_3 &= \int_A G (f'(x))^2 dA \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

式(4-6)可简写为

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l [EI_x (w'')^2 + C_1 (v'_s)^2 - 2C_2 v'_s w'' + C_3 v_s^2] dy \\ & + \int_0^l M w'' dy \end{aligned} \quad (4-8)$$

此式与 § 1-6 的弯翘分析中的总势能式(1-55)相同,因而可推得相同的控制微分方程(1-57)和边界条件(1-58),现在可以写为

$$\left. \begin{aligned} EI_x w'' - C_2 v'_s &= -M \\ C_1 v'_s - C_2 w''' - C_3 v_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

和边界条件:

$$\delta v_s (C_1 v'_s - C_2 w'') = 0 \quad (4-10)$$

下面对剪滞翘曲位移函数 $g(x)$ 的选取加以研究。设剪滞翘

曲位移函数:

$$g(x) = \sum_{m=1}^{3,5,\dots} a_m \cos \frac{m\pi x}{2b} \quad (4-11)$$

它对称于 z 轴, 并满足 $g(\pm b) = 0$ 。又设直梁某段有一近似的强迫挠曲线:

$$w = w_0 \sin \frac{\pi y}{l} \quad (4-12)$$

相应地可设

$$v = f(x) \cos \frac{\pi y}{l} - zw_0 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \quad (4-13)$$

这样在强迫位移 $w_0 \sin \frac{\pi y}{l}$ 下的总势能式(4-6)可写成:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{EtI}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \int_{-b}^b g^2(x) dx - \frac{Etlh}{2} \frac{\pi^3}{l^3} w_0 \int_{-b}^b g(x) dx \\ & + \frac{EI_x l}{4} \frac{\pi^4}{l^4} w_0^2 + \frac{Gtl}{2} \int_{-b}^b (g'(x))^2 dx \end{aligned} \quad (4-14)$$

再将式(4-11)代入上式, 并考虑到三角级数的正交性, 得:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{Et\pi^2}{2l} \left[b \sum a_m^2 - w_0 \frac{4bh}{l} \sum \left(\frac{a_m}{m} \sin \frac{m\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + w_0^2 \frac{I_x}{2t} \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{G}{E} \frac{l^2}{4b^2} \sum (m^2 a_m^2) \right] \end{aligned} \quad (4-15)$$

由 $\frac{\partial \Pi}{\partial a_m} = 0$ 得:

$$a_m = \frac{2h \sin \frac{m\pi}{2}}{ml \left(1 + \frac{G}{E} \frac{l^2}{4b^2} m^2 \right)} w_0, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (4-16)$$

可见三角级数(4-11)为交错级数, 收敛很快。一般在跨宽比 $l/b > 3$ 时, $a_3 < a_1 \times 5\%$, 因而取第一项已有足够精度。亦即用余弦级数首项构造剪翘位移函数, 具有很好的近似性。

由 $\cos x$ 的幂级数 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots (-\infty < x < \infty)$, 取二

项,即 $\cos \frac{\pi x}{2b} \approx 1 - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{x}{b}\right)^2$, 而二次抛物线分布为 $1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2$ 。由于该级数的余项为正,因而这两种分布是很接近的,可见 E. Reissner 选用二次抛物线分布是有理由的。我们用有限条法亦验证了这一结论,与三、四次位移曲线方程相比,有更高的精度^[15]。在此设

$$g(x) = \cos \frac{\pi x}{2b} \quad (4-17)$$

按式(4-7)有横截面几何常数:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 2Et \int_{-b}^b \cos^2 \frac{\pi x}{2b} dx = 2Et b \\ C_2 &= Eth \int_{-b}^b \cos \frac{\pi x}{2b} dx = 4Ethb/\pi \\ C_3 &= Gt \frac{\pi^2}{2b^2} \int_{-b}^b \sin \frac{\pi x}{2b} dx = Gt\pi^2/2b \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

§ 4-3 静定梁的解析解分析

方程(4-9)可整理成与方程(1-59)相同:

$$\left. \begin{aligned} v''_s - k^2 v_s &= -k_1 M' \\ w'' &= -\frac{M}{EI_x} + k_2 v'_s \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

于是有剪滞翘曲位移的通解:

$$v_s = a_1 \operatorname{sh}ky + a_2 \operatorname{ch}ky + v_s^* \quad (4-20)$$

和挠曲线方程:

$$w = \iint \frac{-M}{EI_x} dy dy + k_2 \iint v'_s dy dy + a_3 y + a_4 \quad (4-21)$$

对于静定梁,弯矩方程不受剪滞影响,由它可求出剪滞翘曲位移,而梁的挠曲线则受剪滞翘曲位移的影响。

我们对 a 均载简支梁; b 均载悬臂梁和 c 端力悬臂梁例求解。为便于讨论其相互关系,三种情况的受力及坐标示如图 4-3。三种情况的弯矩方程分别为

$$M_1(y) = -q \frac{(l-y)^2}{2} + ql(l-y) \quad (4-22)$$

$$M_2(y) = -q \frac{(l-y)^2}{2} \quad (4-23)$$

$$M_3(y) = ql(l-y) \quad (4-24)$$

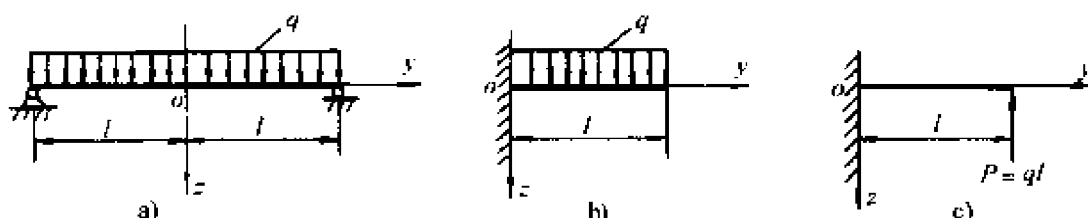


图 4-3 三种静定梁例

方程(4-19)第一式的特解分别为

$$v_s^* = -\frac{k_1}{k^2} qy \quad (4-25)$$

$$v_s^* = \frac{k_1}{k^2} q(l-y) \quad (4-26)$$

$$v_s^* = -\frac{k_1}{k^2} ql \quad (4-27)$$

先考虑简支端和自由端截面可自由翘曲, 和对称受载的简支梁跨中及固端截面翘曲受约束的情况, 应满足边界条件 $y=0, v_s=0$ 和 $y=l, v_s'=0$, 而得

$$a_2 = -v_s^*(0), \quad a_1 = \frac{v_s^*(0)kshkl - v_s^{*'}(l)}{kchkl} \quad (4-28)$$

对上述三种情况得如下各解:

(1) 均载简支梁

$$a_1 = \frac{k_1 q}{k^3 chkl}, \quad a_2 = 0 \quad (4-29)$$

(2) 均载悬臂梁

$$a_1 = \frac{k_1 q}{k^3} \frac{ldshkl + 1}{chkl}, \quad a_2 = -\frac{k_1 ql}{k^2} \quad (4-30)$$

(3) 端力悬臂梁

$$a_1 = -\frac{k_1 ql}{k^2} \operatorname{th} kl, \quad a_2 = \frac{k_1 ql}{k^2} \quad (4-31)$$

由解可见,情况(1)的解为情况(2)和(3)的解之和。

横截面上正应力有

$$\sigma = E \frac{\partial v}{\partial y} = E(f(x)v'_s(y) - zw''(y)) \quad (4-32)$$

利用方程(4-19)第二式可得:

$$\sigma = \frac{Mz}{I_x} + Ev'_s(f(x) - k_2 z) \quad (4-33)$$

其中右端第一项为初等梁理论的正应力部分,而第二项为剪滞效应引起的截面剪滞翘曲位移附加的正应力部分。由于

$$\int_A E(f(x) - k_2 z)z dA = \int_A (Ef(x)z - \frac{C_2}{I_x} z^2) dA \equiv 0 \quad (4-34)$$

即因截面剪滞翘曲附加的正应力构成弯矩自平衡。由截面剪滞翘曲附加的剪应力有:

$$\tau = G \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4-35)$$

在腹板与翼板的相交处有剪应力的最大值:

$$\tau_w = \left. G \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=+b} = G \frac{\pi}{2b} v_s(y) \quad (4-36)$$

以某梁为例,为有可比性,荷载值相应取按初等梁理论算出的肋翼交线上的最大正应力为 1 计。如图 4-4a 表示初等梁理论的正应力 σ_e 沿梁轴线的变化曲线,当 $\eta = \frac{y}{l} = 0$ 时, $\sigma_e = 1$,它对应于简支梁的跨中和悬臂梁的固端。与其对应的翘曲正应力 σ_w 、总正应力 $\sigma = \sigma_e + \sigma_w$ 和剪应力 τ_w 曲线分别由图 4-4b、c、d 表示。悬臂梁的最大翘曲正应力可达初等梁最大正应力的 50% ~ 80%,受剪滞效应的影响严重。简支端及自由端的翼板上皆会产生相当大的剪应力,简支端的可达初等梁最大正应力的 50% 多。是容易发生裂缝的部位,宜施加足够的横向预应力等有效防患措施。

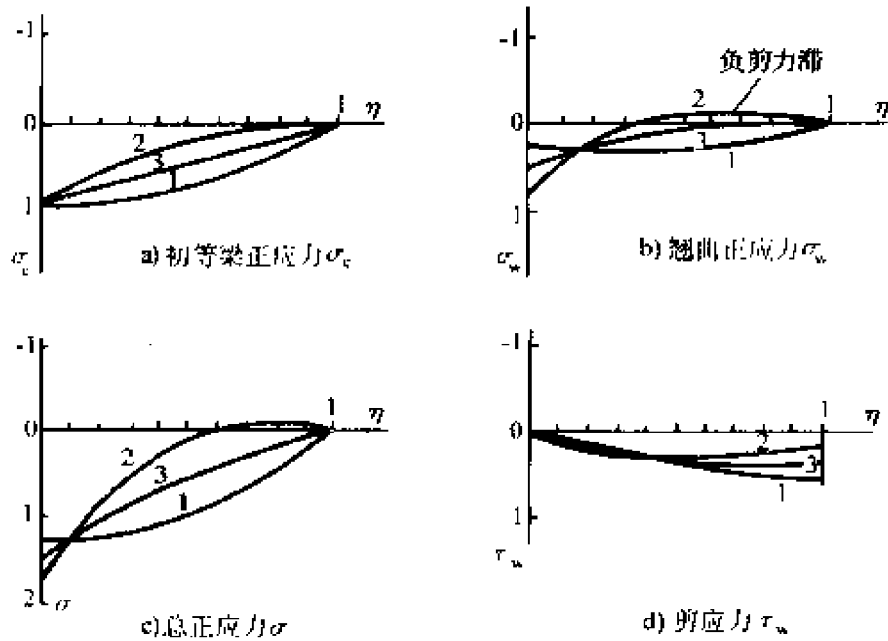


图 4-4 几种情况的肋翼交线的应力比较

现考虑简支端和自由端截面翘曲受绝对刚性的端横隔梁约束, 而设 $y = l, v_s = 0$ 。这样, 剪滞翘曲的待定系数应为

$$a_2 = -v_s^*(0), \quad a_1 = \frac{v_s^*(0) \operatorname{ch} kl - v_s^*(l)}{\operatorname{sh} kl} \quad (4-37)$$

对上述三种情况有如下各解:

(1) 均载简支梁

$$a_1 = \frac{k_1 ql}{k^2 \operatorname{sh} kl}, \quad a_2 = 0 \quad (4-38)$$

(2) 均载悬臂梁

$$a_1 = \frac{k_1 ql}{k^2} \operatorname{cth} kl, \quad a_2 = -\frac{k_1 ql}{k^2} \quad (4-39)$$

(3) 端力悬臂梁

$$a_1 = \frac{k_1 ql}{k^2} \frac{1 - \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl}, \quad a_2 = \frac{k_1 ql}{k^2} \quad (4-40)$$

其间亦存在叠加关系。

将剪滞效应在肋翼交线上引起的正应力和剪应力部分与初等梁理论在此线上的最大正应力之比作为比较指标, 即

$$\hat{\sigma} = \sigma_w / \sigma_{emax} \quad (4-41)$$

和

$$\hat{\tau} = \tau_w / \sigma_{emax} \quad (4-42)$$

在图 4-5 中示出有刚性端横隔和无端横隔两种端点情况下,三种梁荷情况的 $\hat{\sigma}$ 和 $\hat{\tau}$ 曲线。由图可见,①设置端横梁约束的剪滞翘

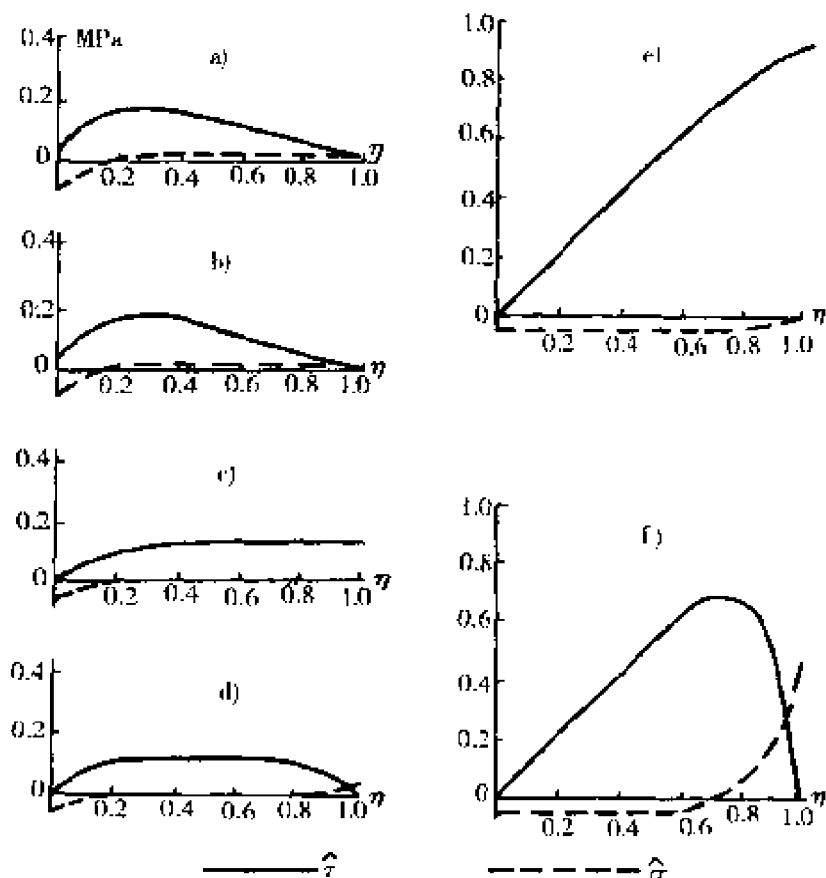


图 4-5 有刚性端横梁和无端横梁的比较

a)均载悬臂梁无端横梁;b)均载悬臂梁有端横梁;c)端力悬臂梁无端横梁;d)端力悬臂梁有端横梁;e)均载简支梁无端横梁;f)均载简支梁有端横梁

曲,仅在距梁端 $0.2l$ 左右的范围内受影响,即只是局部效应。②由于剪滞翘曲受约束,使端部的剪应力为零,而引起了相当大的翘曲约束正应力,应由端横梁来承担。③在这三种情况中,简支梁支座端对翘曲约束的相对影响最大,翘曲约束正应力可接近初等梁在此肋翼交线上最大正应力的 50%,且为负剪力滞。④简支梁端

由剪滞效应引起未约束的翘曲剪应力可达初等梁在此交线上最大正应力的 93%。可见,有足够的竖向和水平向刚度的端横梁,除了可保证桥面的整体性外,还起到限制剪滞翘曲剪应力的作用。由于剪滞翘曲约束只是局部效应,因而在支座附近加强或加密横梁的布置,会抑制翘曲剪应力,或施加横向预应力以抑制裂缝开展。应该指出,初等梁理论在该线上的最大剪应力仅为最大正应力的 1.63% (情况 1 和 2) 和 0.82% (情况 3)^[16]。

§ 4-4 槽形宽梁剪滞翘曲位移模式

槽形宽梁是铁路梁桥常用的一种形式,其横截面如图 4-6 所示。由于底板较宽,存在着不可忽视的剪滞效应。在底部翼板上,剪滞翘曲位移函数仍可采用余弦函数 $\cos \frac{\pi x}{2b}$ 。但由于截面仅与 z 轴对称,与 x 轴不对称,这样,在翼板上的剪滞翘曲位移函数引起的翘曲正应力不能构成轴力自平衡。为与轴向变形分离,应在全截面加一均匀的轴向位移一起,使整个截面的翘曲位移产生的正应力构成轴力自平衡^[13]。

于是,在 Cxz 的截面主形心坐标系中,槽形宽梁的剪滞翘曲位移模式可假设如图 4-7 所示。亦即

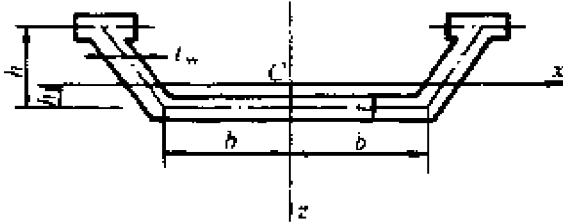


图 4-6 槽形宽梁横截面

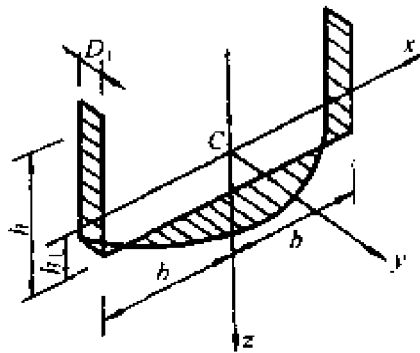


图 4-7 槽形宽梁剪滞位移模式

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2b} - D_1 \quad (4-43)$$

在截面处理上,可视斜腹板为竖腹板,其宽度与斜腹板的水平向投影宽度相同。

此项剪滞翘曲正应力分布为

$$\sigma_w = Ef(x)w'(y) \quad (4-44)$$

考虑轴力为零,应使 $\int_A f(x)dA = 0$, 可得:

$$D_1 = 4bt/\pi A \quad (4-45)$$

式中: A ——槽形宽梁的横截面积。

现在可以按照式(4-2),与服从平截面假设的轴向位移一起,横截面的轴向位移表为

$$\begin{aligned} v &= f(x)v_s(y) - zw'(y) \\ &= \left(\cos \frac{\pi x}{2b} - D_1 \right) v_s(y) - zw'(y) \end{aligned} \quad (4-46)$$

总势能泛函与式(4-6)相同,而截面常数:

$$C_1 = \int_A Ef(x)^2 dA = E \left(tb - D_1 \frac{8bt}{\pi} + D_1^2 A \right) \quad (4-47)$$

$$C_2 = \int_A Ef(x)z dA = E \frac{4bth_1}{\pi} \quad (4-48)$$

$$C_3 = \int_A G(f'(x))^2 dA = G \frac{t\pi^2}{4b} \quad (4-49)$$

控制微分方程及其解,亦与式(4-19)、(4-20)、(4-21)完全相同。

我们用上海铁道大学陆光间的槽形梁有机玻璃模型试验为例^[17],模型的截面如图 4-6 所示,模型长度为 667mm。有机玻璃弹性模量 $E = 2.84\text{GPa}$,泊桑比 $\mu = 0.4$,荷载集度 $p = 19.6\text{kN/m}^2$,作用在宽度 243mm 的范围内,沿桥跨满布。可算得 $h_1 = 17.01\text{mm}$, $A = 4909\text{mm}^2$, $I_x = 3.6316 \times 10^6\text{mm}^4$, $q = 2.381\text{N/mm}$ 。按方程(4-19)解得的简支梁跨中截面的计算值与试验值列于表 4-1 中。由表可见,梁肋底正应力及底板中点正应力与试验值符合良好,而梁肋底的挠度的计算值较试验值为小,可见所设定的剪滞翘

曲位移模式是正确的。而梁的弯曲尚需考虑梁弯曲的剪切变形对挠度的影响^[13]。

现按 Timoshenko 梁考虑剪切变形的假设, 设 ψ 为剪力 Q 产生的剪切角, 于是在挠度 w 中由弯矩产生的曲率应为 $(w'' - \psi')$, 而 ψ 亦就是以平截面为翘曲位移模式的广义剪翘位移。于是在总势能式(4-8)中, 计入剪翘项而可改写成:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (w'' - \psi')^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^l C_1 (v'_s)^2 dy - \int_0^l C_2 v'_s (w'' - \psi') dy \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l C_3 v_s^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{GA}{\alpha} \psi^2 dy + \int_0^l M (w'' - \psi') dy - \int_0^l \theta \psi dy \end{aligned} \quad (4-50)$$

式中: α ——平截面翘曲模式的修正系数, 按矩形截面取 $\alpha = 1.2$ 。

又考虑到外力势能, 根据 $q = -Q' = -M''$, 而有:

$$\begin{aligned} \int_0^l q w dy &= \int_0^l -Q' w dy \\ &= [-Qw]_0^l + \int_0^l Q w' dy \\ &= [-Qw]_0^l + \int_0^l [M' (w' - \psi) + Q\psi] dy \\ &= [-Qw]_0^l + [M (w' - \psi)]_0^l \\ &\quad - \int_0^l M (w'' - \psi') dy + \int_0^l Q\psi dy \end{aligned} \quad (4-51)$$

因而有外力势能:

$$V = \int_0^l M (w'' - \psi') dy - \int_0^l Q\psi dy \quad (4-52)$$

由 $\delta\Pi = 0$ 得控制微分方程:

$$\left. \begin{aligned} EI_x (w'' - \psi') - C_2 v'_s + M &= 0 \\ C_3 v_s + C_2 (w''' - \psi'') - C_1 v'_s &= 0 \\ GA\psi - \alpha Q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-53)$$

和边界条件:

$$\delta v_s (C_1 v'_s - C_2 (w'' - \psi')) = 0 \quad (4-54)$$

变换整理后得下列方程：

$$\left. \begin{aligned} v''_s - k^2 v_s &= -k_1 M' \\ w'' &= -\frac{M}{EI_x} + k_2 v'_s + \frac{\alpha Q'}{GA} \\ \psi &= \frac{\alpha Q}{GA} \end{aligned} \right\} \quad (4-55)$$

和边界条件：

$$\delta v_s (v'_s + k_1 M) = 0 \quad (4-56)$$

方程表明，剪切变形仅改变挠度，而对剪滞控制微分方程(4-55)的第一式无影响。将第二式二次积分后，得梁的挠曲线：

$$\begin{aligned} w &= \int \left[\int \frac{-M}{EI_x} dy \right] dy + k_2 \left[\frac{a_1}{k} \operatorname{ch}ky + \frac{a_2}{k} \operatorname{sh}ky + \int v_s^* dy \right] \\ &\quad + \int \left[\int \frac{\alpha Q'}{GA} dy \right] dy + a_3 y + a_4 \end{aligned} \quad (4-57)$$

若令初等梁挠度为

$$w_0 = \int \left[\int \frac{-M}{EI_x} dy \right] dy + a_{30} y + a_{40} \quad (4-58)$$

由剪滞效应使刚度降低产生的附加挠度为

$$w_1 = k_2 \left[\frac{a_1}{k} \operatorname{ch}ky + \frac{a_2}{k} \operatorname{sh}ky + \int v_s^* dy \right] + a_{31} y + a_{41} \quad (4-59)$$

由剪切变形产生的附加挠度为

$$w_2 = \int \left[\int \frac{\alpha Q'}{GA} dy \right] dy + a_{32} y + a_{42} \quad (4-60)$$

则梁的总挠度为

$$w = w_0 (1 + \delta_1 + \delta_2) \quad (4-61)$$

式中： $\delta_1 = w_1/w_0$ ， $\delta_2 = w_2/w_0$ ，分别为剪滞和剪切的挠度增加系数。

以等截面简支梁作用正弦分布荷载 $q_0 \sin \frac{\pi y}{l}$ 为例，可算得跨中挠度增加系数为

$$\delta_1 = \frac{k_1 k_2 \pi^2}{k^2 l^2 + \pi^2}, \quad \delta_2 = \frac{\alpha EI_x \pi^2}{GA l^2} \quad (4-62)$$

根据槽形宽梁模型实例,按式(4-57)算得的跨中挠度与试验值符合得很好。可见 δ_1 与 δ_2 的挠度影响效应是同量级的。数据皆列于表 4-1,以作比较。

跨中截面计算与试验值比较

表 4-1

方 法	梁肋底正应力 σ (MPa)	底板中点正应力 σ (MPa)	梁肋底挠度 (mm)
按方程(4-19)	1.141	0.455	0.65
按方程(4-55)	1.141	0.455	0.75
试验值	1.133	0.450	0.75

§ 4-5 单室薄壁箱梁剪滞翘曲位移模式

单室薄壁箱梁是一种广为采用的梁桥形式,其横截面如图 4-8 所示。它与矩形双轴对称的薄壁箱梁相比,其横截面仅对称于 z 轴。对于剪滞效应,因各翼板及上下板离中和轴距离不同,其剪滞翘曲的幅值各异。本节就要解决剪滞翘曲的幅值与翼板宽度及上下板的关系问题。进而根据轴力自平衡条件,构成全截面的剪滞翘曲位移模式^[14]。先来分析在同一水平位置上,不同宽度翼板的剪滞翘曲幅度关系。

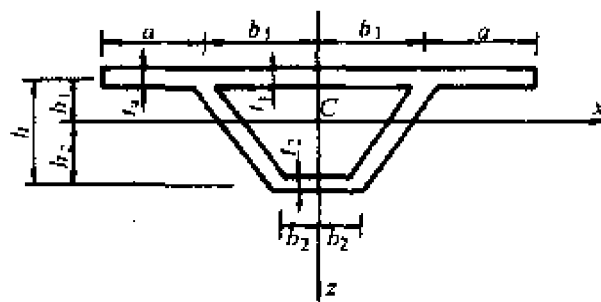


图 4-8 单室梯形箱梁截面

如果简支梁有一近似的强迫的挠曲线 $w = w_0 \sin \frac{\pi Y}{l}$, 则可设

页板的任意横截面有沿 y 轴的轴向位移为

$$v = w_0 \frac{\pi h_1}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + v_0 \cos \frac{\pi x}{2b_1} \cos \frac{\pi y}{l} \quad (4-63)$$

式中右边第一项为由平截面假设下竖向弯曲产生的均匀位移,第二项为剪滞效应引起的翘曲位移。按此,有应变:

$$\epsilon = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi y}{l} \left(w_0 \frac{\pi h_1}{l} + v_0 \cos \frac{\pi x}{2b_1} \right) \quad (4-64)$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\pi}{2b_1} v_0 \cos \frac{\pi y}{l} \sin \frac{\pi x}{2b_1} \quad (4-65)$$

利用最小势能原理,有泛函:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b_1}^{b_1} \frac{E\pi^2}{l^2} t_1 \sin^2 \frac{\pi y}{l} \left(w_0 \frac{\pi h_1}{l} + v_0 \cos \frac{\pi x}{2b_1} \right)^2 dx dy \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b_1}^{b_1} G t_1 \left(\frac{\pi}{2b_1} \right)^2 v_0^2 \cos^2 \frac{\pi y}{l} \sin^2 \frac{\pi x}{2b_1} dx dy \end{aligned} \quad (4-66)$$

由

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_0} = \frac{E\pi^2}{2l} t_1 \left(4w_0 \frac{b_1 h_1}{l} + b_1 v_0 \right) + \frac{G l \pi^2 v_0}{8b_1} t_1 = 0 \quad (4-67)$$

考虑到 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ 得

$$v_0 = \frac{-32(1+\mu)b_1^2 h_1}{l(8b_1^2(1+\mu) + l^2)} w_0 \quad (4-68)$$

它与板厚无关。同理可得图 4-8 中的外伸翼板的剪滞翘曲位移有

$$v_{01} = \frac{-32(1+\mu)a^2 h_1}{l(8a^2(1+\mu) + l^2)} w_0 \quad (4-69)$$

底板的剪滞翘曲位移有

$$v_{02} = \frac{32(1+\mu)b_2^2 h_2}{l(8b_2^2(1+\mu) + l^2)} w_0 \quad (4-70)$$

若以 v_0 为基准,则可建立如下的比例关系:

$$\frac{v_{01}}{v_0} = \frac{8b_1^2(1+\mu) + l^2}{8a^2(1+\mu) + l^2} \cdot \frac{a^2}{b_1^2} = \beta_1 \frac{a^2}{b_1^2} = \alpha_1 \quad (4-71)$$

和

$$\frac{v_{02}}{v_0} = \frac{8b_1^2(1+\mu) + l^2}{8b_2^2(1+\mu) + l^2} \cdot \frac{-b_2^2 h_2}{b_1^2 h_1} = \beta_2 \frac{-b_2^2 h_2}{b_1^2 h_1} = \alpha_2 \quad (4-72)$$

可以看出,当 $l \rightarrow \infty$ 时,有 $\beta_1 = \beta_2 = 1$; 当 l 较大时, $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1$, 即剪滞翘曲位移基本上与宽度 (b_1 、 b_2 或 a) 的平方及翼板距中和轴的距离 (h_1 或 h_2) 成正比; 当 l 较小时, 则 β_1 和 β_2 应作具体计算。

综合分析, 该横截面的剪滞翘曲位移模式可设为

$$f(x) = \begin{cases} -\cos \frac{\pi x}{2b_1} + D_1, & \text{顶部内翼板} \\ -\alpha_1 \cos \frac{\pi x_a}{2a} + D_1, & \text{顶部外伸翼板} \\ -\alpha_2 \cos \frac{\pi x}{2b_2} + D_1, & \text{底部内翼板} \\ D_1, & \text{腹板} \end{cases} \quad (4-73)$$

式中: D_1 ——满足全截面的轴力自平衡的附加轴向位移。

由 $\int_A f(x) dA = 0$ 可得:

$$D_1 = \frac{2(A_1 + \alpha_1 A_3 + \alpha_2 A_2)}{\pi A} \quad (4-74)$$

式中: A ——箱梁横截面积;

A_1 、 A_2 ——分别为箱梁顶、底板的横截面积;

A_3 ——两外伸翼板的横截面积之和。

该剪滞翘曲位移模式如图 4-9 所示。

按此一剪滞翘曲位移模式, 可以算得如下的截面常数:

$$C_1 = \int_A E f^2(x) dA$$

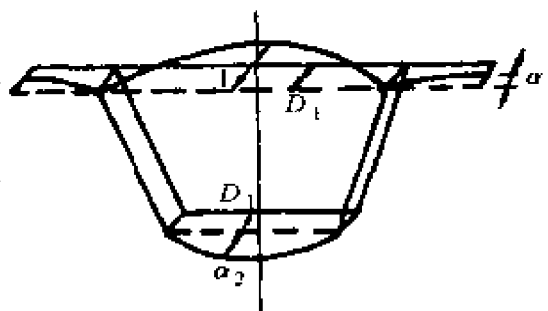


图 4-9 单室梯形箱梁剪滞翘曲位移模式

$$= E \left[A_1 \left(D_1^2 - \frac{4D_1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) + A_2 \left(D_1^2 - \frac{4D_1\alpha_2}{\pi} + \frac{\alpha_2^2}{2} \right) + A_3 \left(D_1^2 - \frac{4D_1\alpha_1}{\pi} + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) + A_4 D_1^2 \right] \quad (4-75)$$

$$C_2 = \int_A E f(x) z dA$$

$$= E \left[-h_1 A_1 \left(D_1 - \frac{2}{\pi} \right) + h_2 A_2 \left(D_1 - \frac{2\alpha_2}{\pi} \right) - h_1 A_3 \left(D_1 - \frac{2\alpha_1}{\pi} \right) + D_1 S_4 \right] \quad (4-76)$$

$$C_3 = \int_A G (f'(x))^2 dA$$

$$= \frac{G\pi^2}{8} \left(\frac{A_1}{b_1^2} + \frac{A_2\alpha_2^2}{b_2^2} + \frac{A_3\alpha_1^2}{a^2} \right) \quad (4-77)$$

式中： A_4 ——两腹板的横截面积； $S_4 = \int_{A_4} z dA$ 。

令 $\sigma_0 = \frac{Mz}{Ix}$ 为按初等梁理论计算的翼板上的正应力，则定义剪滞系数为

$$\lambda = \sigma / \sigma_0 \quad (4-78)$$

其中 σ 为考虑剪滞翘曲算得翼板上的正应力。

以等截面简支梁为例，在正弦荷载 $q \sin \frac{\pi y}{l}$ 作用下， $M(y) = q \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{l}$ ，则方程：

$$v''_s - k^2 v_s = - \frac{k_1 q l}{\pi} \cos \frac{\pi y}{l} \quad (4-79)$$

有通解：

$$v_s = a_1 \operatorname{sh} ky + a_2 \operatorname{ch} ky + \frac{k_1 q l}{\pi (k^2 + \pi^2 / l^2)} \cos \frac{\pi y}{l} \quad (4-80)$$

由边界条件 $v'_s(0) = 0$ 和 $v_s(l/2) = 0$ 得 $a_1 = 0$ 和 $a_2 = 0$ 。于是得解：

$$v_s = \frac{k_1 q l}{\pi(k^2 + \pi^2/l^2)} \cos \frac{\pi Y}{l} \quad (4-81)$$

$$\sigma = \frac{Mz}{I_x} - \frac{Ek_1 q \sin \frac{\pi Y}{l}}{k^2 + \pi^2/l^2} (f(x) - k_2 z) \quad (4-82)$$

跨中截面的剪滞系数:

$$\lambda = 1 - \frac{EI_x k_1}{z(1 + k^2 l^2 / \pi^2)} (f(x) - k_2 z) \quad (4-83)$$

现以如图 4-10 所示的单室箱梁截面为例,取材料线弹性模量 $E = 2.842 \times 10^5 \text{MPa}$,泊桑比 $\mu = 0.4$, $h = 56 \text{mm}$, $b_1 = b_2 = 75 \text{mm}$, $t_1 = t_2 = t_3 = 4 \text{mm}$, $t_w = 6 \text{mm}$ 。简支梁上作用着正弦分布荷载 $q = 100 \sin \frac{\pi Y}{l} (\text{N/cm})$ 。图 a 的外伸翼板宽 $a = b_1$,而图 b 的 $a = b_1/2$ 。用上述推得的算式与有限条法的计算结果比较见表 4-2,所得的剪滞系数相当接近,表明所确定的以余弦分布式(4-73)的剪滞翘曲位移模式是正确的。

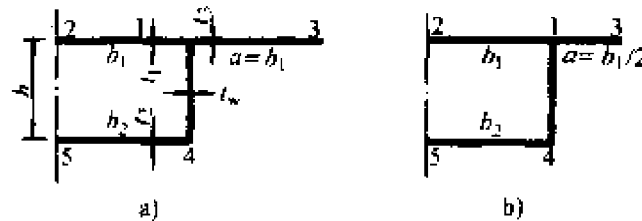


图 4-10 算例截面
剪滞系数计算比较^[15]

表 4-2

跨径 $l(\text{mm})$	算例截面	图 4-10a					图 4-10b				
		剪滞系数	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
800	有限条法	1.075	0.956	0.956	1.065	0.947	1.055	0.939	1.024	1.064	0.947
	余弦模式	1.073	0.952	0.952	1.063	0.941	1.055	0.934	1.022	1.062	0.941
400	有限条法	1.280	0.839	0.839	1.239	0.813	1.203	0.789	1.071	1.235	0.810
	余弦模式	1.271	0.822	0.822	1.230	0.782	1.201	0.765	1.063	1.223	0.786

§ 4-6 剪滞翘曲的截面板元位移模式

前面已经对剪滞翘曲有了一定的了解,现在对常见截面的弯梁按截面板元建立剪滞翘曲位移模式。

弯梁在竖向弯曲的应变曲率 $k_x = \frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{\varphi_y}{R}$ 下,按式(2-24)有线应变:

$$\epsilon_{\beta 1} = \frac{-zR}{a \sin \theta} k_x \quad (4-84)$$

而在任一翼板板元上的剪滞翘曲位移,按式(2-62)有: $v_e = v_{sk} \times N_s v_s$, 其中下标 k 为翼板号。而 N_s 对于外伸翼板应取为 N_{si} 或 N_{sj} 。于是剪滞翘曲引起的线应变为

$$\epsilon_{\beta 2} = \frac{dv_e}{a \sin \theta d\beta} = \frac{v_{sk} N_s R}{a \sin \theta} \cdot \frac{dv_s}{dy} \quad (4-85)$$

再引入截面中线的坐标值 z :

$$z = z_{bc} N_0 - a N_b \cos \theta \quad (4-86)$$

而有

$$\begin{aligned} \epsilon_{jz} &= \epsilon_{\beta 1} + \epsilon_{\beta 2} \\ &= - \left(1 - \frac{aN_b \cos \theta}{z_{bc}} \right) \frac{R}{a \sin \theta} z_{bc} k_x + \frac{v_{sk} N_s R}{a \sin \theta} \cdot \frac{dv_s}{dy} \end{aligned} \quad (4-87)$$

剪应变为

$$\gamma_{jz} = \left(\frac{N'_s}{a} - \frac{N_s}{a} \right) v_{sk} v_s \quad (4-88)$$

该截面板元沿纵轴 y 的单位长度上的应变能,考虑到各点坐标弧线随曲率半径的变化,相对于纵轴 y 有 $d\beta = dy/R$, 则

$$\begin{aligned} U_{jz}^e &= \frac{1}{2} \int_0^1 E a t \epsilon_{jz}^2 \frac{a \sin \theta}{R} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 G a t \gamma_{jz}^2 \frac{a \sin \theta}{R} d\xi \\ &= \frac{1}{2} (Z_{bc} k_x \quad v_{sk} v'_s) \frac{ERt}{\sin \theta} \int_0^1 |N_{jz}| (N_{jz}) \frac{d\xi}{\xi_i + \xi} (z_{bc} k_x \quad v_{sk} v'_s)^T \\ &\quad + \frac{1}{2} v_s G a t \int_0^1 v_{sk}^2 (N_{jz})^2 \frac{a \sin \theta}{R} d\xi v_s \end{aligned} \quad (4-89)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} (N_{jz}) &= \{N_{jz}\}^T = \left(- \left(1 - \frac{aN_b \cos \theta}{z_{bc}} \right) N_s \right) \\ N_{jzy} &= \left(\frac{N'_s}{a} - \frac{N_s}{\alpha} \right) = \frac{1}{a} \left(N'_s - \frac{N_s}{\xi_i + \xi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-90)$$

考虑到 $\frac{\alpha \sin \theta}{R}$ 作为由弯梁到直梁的整体参数，而令：

$$\begin{bmatrix} k_{kk}^e & k_{kv}^e \\ k_{vk}^e & k_{vv}^e \end{bmatrix} = \frac{ERt}{a \sin \theta} \int_0^1 \{N_{jz}\} (N_{jz}) \frac{d\xi}{\xi_i + \xi} \quad (4-91)$$

$$k_y^e = Gt \frac{\alpha \sin \theta}{R} \int_0^1 (aN_{jzy})^2 (\xi_i + \xi) d\xi \quad (4-92)$$

其中，式(4-91)用 JF_c 型积分，而式(4-92)则归结为 JF_a 、 JF_b 、 JF_c 三种类型的积分。式(4-89)可改写成：

$$U_{jz}^e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} k_x \\ v'_s \\ v_s \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} az_{bc}^2 k_{kk}^e & az_{bc} v_{sk} k_{kv}^e & 0 \\ az_{bc} v_{sk} k_{vk}^e & av_{sk}^2 k_{vv}^e & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} v_{sk}^2 k_y^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ v'_s \\ v_s \end{Bmatrix} \quad (4-93)$$

由此对截面板元可写出总势能泛函：

$$\Pi_{jz}^e = \int_0^1 V_{jz}^e dy - \int_0^1 k_x m dy \quad (4-94)$$

求 $\delta \Pi_{jz}^e = 0$ 可得：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \begin{Bmatrix} \delta k_x \\ \delta v'_s \\ \delta v_s \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} az_{bc}^2 k_{kk}^e & az_{bc} v_{sk} k_{kv}^e & 0 \\ az_{bc} v_{sk} k_{vk}^e & av_{sk}^2 k_{vv}^e & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} v_{sk}^2 k_y^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ v'_s \\ v_s \end{Bmatrix} dy \\ = \int_0^1 \begin{Bmatrix} \delta k_x m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dy \end{aligned} \quad (4-95)$$

对该式的第二行作分部积分，且与第三行合并而得：

$$\left. \delta v_s (az_{bc} v_{sk} k_{vk}^e \quad av_{sk}^2 k_{vv}^e) \begin{Bmatrix} k_x \\ v'_s \end{Bmatrix} \right|_0^1 - \int_0^1 \delta v_s (az_{bc} v_{sk} k_{vk}^e \quad av_{sk}^2 k_{vv}^e \quad \frac{1}{a} v_{sk}^2 k_{\gamma}^e) \begin{Bmatrix} k_x \\ v'_s \\ v_s \end{Bmatrix} dy = 0 \quad (4-96)$$

其自然边界条件在前式的第二行的齐次式中满足。所得的平衡方程为

$$-av_{sk}^* k_{vv}^e v''_s + \frac{1}{a} v_{sk} k_{\gamma}^e v_s = az_{bc} k_{vk}^e k_x \quad (4-97)$$

在此,近似地设 $v''_s = 0$, 它适应于按有限元法解, 而设 $v_s(\gamma)$ 为线性函数的状况, 亦适应于跨径较长的状况。再令 $k_x = 1$ 和 $v_s = 1$, 则可得:

$$v_{sk} = \frac{a^2 z_{bc} k_{vk}^e}{k_{\gamma}^e} \quad (4-98)$$

而对于直梁有 $\frac{a \sin \theta}{R} \rightarrow 1$, 且 k_{vk}^e/k_{γ}^e 对于各板元为常量, 可见截面各板元的剪滞翘曲位移的分布 v_{sk} 基本上与板元的宽度平方 a^2 及其至中和轴的坐标 z_{bc} 的乘积成正比。

现取 $k = b$ 号的板元为基准板元, 有

$$v_{sb} = \left(\frac{a^2 z_{bc} k_{vk}^e}{k_{\gamma}^e} \right)_{k=b} \quad (4-99)$$

可令剪滞翘曲的板元幅值分布系数:

$$C_{sk} = \frac{v_{sk}}{v_{sb}} = \frac{a^2 z_{bc} k_{vk}^e}{k_{\gamma}^e} / \left(\frac{a^2 z_{bc} k_{vk}^e}{k_{\gamma}^e} \right)_{k=b} \quad (4-100)$$

即有

$$v_{sk} = C_{sk} v_{sb} \quad (4-101)$$

$$v_{sk}' = C_{sk} v_{sb}' \quad (4-102)$$

它就确定了整体截面的剪滞翘曲位移模式。在此不再去考虑轴力自平衡而引起均匀的附加轴向位移 D_1 。因而对于一般截面, 如有横坡的弯梁截面, 弯、扭与拉压皆是耦联的, 无须先将剪滞翘曲与

轴向位移解耦。将各板元的式(4-101)、(4-102)代入式(4-93),即得以 v_{yb} 为基准的相应板元的应变能,进而可在全截面上叠加之,从而建立对应于广义位移 v_0 和 v_0' 的方程式。

§ 4-7 小 结

剪滞效应在宽翼梁桥的设计中是不能被忽视的。本章先从双轴对称的矩形箱梁开始研究,解决了剪滞翘曲位移函数的近似曲线问题。再研究了槽形宽梁的剪滞翘曲位移模式的轴力自平衡,以使与轴力平衡方程解耦。进而研究了任意薄壁箱梁的任意宽度和高度位置上的剪滞翘曲的幅值问题,得出了剪滞翘曲的幅值基本上与该翼板的宽度平方与至中和轴的距离的乘积成正比的结论。

通过对静定梁的解析解的分析,对于无剪滞约束的简支端,会产生很大的剪滞剪应力,存在着沿纵向错动剪开的危险。当有强劲的水平刚度的端横梁约束剪滞翘曲时,其剪应力在简支端附近骤然减小,它是个局部效应。这时,端横梁要承担相当大的侧向力。

最后,在板元模式法中,将整体截面的剪滞翘曲位移取用基准板元,在直梁上,其它翼板板元的幅值分布系数与宽度平方与至中和轴距离的乘积成正比,形成了全截面的剪滞翘曲位移模式。这样,基准板元的剪滞翘曲位移就成为全截面的广义位移,由此可以得出全截面的剪滞翘曲的线应变和剪应变,从而可以计算相应的应变能项,而得到截面刚度矩阵的相应元素。应该注意到,在截面板元的剪滞翘曲位移模式中,未考虑轴力自平衡,因而在总方程中是与轴力平衡方程相耦联的。在截面板元上,是用二次抛物线来取代余弦曲线作为剪滞翘曲位移函数,以便于积分计算。

第五章 弹性薄壁梁桥控制方程

§ 5-1 引 言

前面已经讨论了拉压、弯曲、扭转与扭翘和剪滞的截面板元位移模式,亦分别建立了直梁的各种变形的控制微分方程,它们是彼此独立、不耦联的。对于弯梁,由应变曲率可知,拉压与水平弯曲、竖向弯曲与扭转相互存在着耦联关系,进而如果还存在横坡面,其横截面是任意不对称的,则各种变形间皆存在彼此耦联的关系。本章就是对此类任意的一般截面的水平圆弧弯梁建立其弹性控制方程。

任意一般截面如图 5-1 所示,过截面形心 C 的 Cx 为水平轴线, Cz 为竖向轴线,按右手规则构成 $Cxyz$ 坐标系, y 轴为圆弧曲线,这些坐标约定与图 2-1、2-2 相同。 $Cxyz$ 为形心坐标系,一般不是主坐标系,因而各变形皆存在着耦联。

下面先按截面板元位移模式,将截面板元上的各基本变形的应变叠加之,再积分计算其应变能,即可建立起相对于各基本变形分量的、截面板元的刚度矩阵,进而组装成全截面的截面刚度矩阵。

这种相对于各基本变形分量的截面刚度矩阵,是截面刚度的特征值,按此可以形成沿梁轴线的弹性控制微分方程,或沿梁轴线形成有限段元法方程。则对各截面板元的内力或应力的计算还是

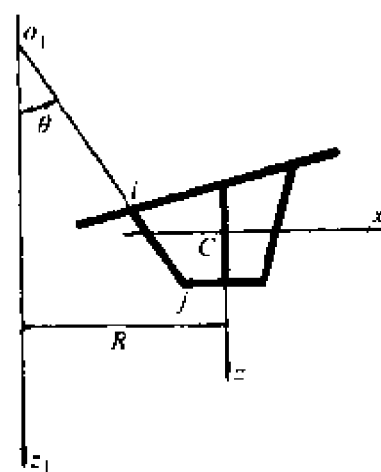


图 5-1 薄壁截面

要回到相对于各基本变形分量的截面刚度矩阵。这些就是本章所要研究的主要内容。

§ 5-2 对应变形分量的截面板元刚度矩阵

对于弯梁桥,按照已设定的截面板元位移模式,截面不变的基本变形的线应变可归结为下列各式:

拉伸压缩,按式(2-20)为

$$\epsilon_{\beta 1} = \frac{R}{\alpha \sin \theta} N_0 \left(\frac{dv}{dy} + \frac{u}{R} \right) \quad (5-1)$$

水平弯曲,按式(2-21)和式(2-38)为

$$\epsilon_{\beta 2} = (-x_{bc} N_0 + \alpha \sin \theta N_b + \zeta \cos \theta N_0) \frac{R}{\alpha \sin \theta} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{dv}{R dy} \right) \quad (5-2)$$

竖向弯曲,按式(2-24)和(2-42)为

$$\epsilon_{\beta 3} = (-z_{bc} N_0 + \alpha \cos \theta N_b - \zeta \sin \theta N_0) \frac{R}{\alpha \sin \theta} \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{\varphi_y}{R} \right) \quad (5-3)$$

扭翘,按式(3-25)所确定的截面板元两节点*i*和*j*的扭翘位移模式分量 v_{nqi} 和 v_{nqj} ,可写成线应变式为

$$\epsilon_{\beta 4} = (v_{nqi} N_i + v_{nqj} N_j) \frac{R}{\alpha \sin \theta} \frac{dv_t}{dy} \quad (5-4)$$

翼板剪滞翘曲,按式(4-85)和式(4-101)、(4-102)有:

$$\epsilon_{\beta 5} = C_{sk} v_{sb} N_s \frac{R}{\alpha \sin \theta} \frac{dv_s}{dy} \quad (5-5)$$

关于扭转与扭翘及剪滞的剪应变,按式(3-4)、(3-10)和(4-88)有:

$$\begin{aligned} \gamma_{nq} = & (\rho_n + 2\zeta) \frac{R}{\alpha \sin \theta} N_0 \left(\frac{d\varphi_y}{dy} + \frac{dw}{R dy} \right) \\ & + \left(v_{nqi} \left(\frac{N'_i}{a} - \frac{N_j}{\alpha} \right) + v_{nqj} \left(\frac{N'_j}{a} - \frac{N_j}{\alpha} \right) \right) v_t \end{aligned} \quad (5-6)$$

$$\gamma_{jz} = C_{sk} v_{sb} \left(\frac{N'_s}{a} - \frac{N_s}{a} \right) v_s \quad (5-7)$$

为便于将各基本变形的线应变叠加,并计算其应变能,将式(5-1)~(5-5)列成表 5-1。

按表 5-1 可以写出线应变的一般表达式:

$$\epsilon_{\beta} = \sum_i (\sum_h YB_1(i, h) N_h) \Delta_{ei} \quad (5-8)$$

其中,变形分量 Δ_{ei} 按如下列阵排序:

$$(\Delta_{\epsilon}) = \{\Delta_{\epsilon}\}^T = \left(\frac{dv}{dy} u \quad \frac{d^2 u}{dy^2} \quad \frac{dv}{dy} \quad \frac{d^2 w}{dy^2} \quad \varphi_y \quad \frac{dv_t}{dy} \quad \frac{dv_s}{dy} \right) \quad (5-9)$$

对于翼板的剪滞翘曲,内翼板取 i_1 或 j_1 为第 8 行,左外翼板取第 9 行,右外翼板取第 10 行。按此式可计算该截面板元沿纵轴 y 的单位长度的应变能:

$$\begin{aligned} U_{\epsilon}^e &= \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} E \epsilon_{\beta}^2 \frac{\alpha \sin \theta}{R} a d\zeta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \{\Delta_{\epsilon}\}^T [K_{\epsilon}^e] \{\Delta_{\epsilon}\} \end{aligned} \quad (5-10)$$

其中,截面刚度矩阵 $[K_{\epsilon}^e]$ 中的任一元素为

$$k_{ij\epsilon}^e = \sum_h \sum_k \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} E YB_1(i, h) YB_1(j, k) N_h N_k \frac{\alpha \sin \theta}{R} a d\zeta d\xi \quad (5-11)$$

对于弯梁的 ξ 积分需要用到 JF_C 型积分。还应注意到,对于沿厚度 ζ 的积分, h 或 k 的前 7 列元素与第 8 列元素的乘积积分不耦联。前 7 列元素互乘的积分为

$$\int_{-l/2}^{l/2} d\zeta = l \quad (5-12)$$

而第 8 列元素的互乘积分为

$$\int_{-l/2}^{l/2} \zeta^2 d\zeta = \frac{l^3}{12} \quad (5-13)$$

前者对应于薄板中面的线应变能项,后者则对应于板面外弯曲的线应变能项。在确定扭翘或剪滞翘曲位移模式时,只涉及中面的线应变能项。积分式(5-11),对于圆柱曲板应将 $\alpha \sin \theta$ 改为该曲板

表 S-1

$YB_1(i, h)$ 或 $YB_1(j, k)$

编号	i 或 j	h 或 k	1	2	3	4	5	6	7	8
		形函数 变形分量	$N_1 = N_0 = 1$	$N_2 = N_0 = 1/2 - \xi$	$N_3 = N_1 = 1 - \xi$	$N_4 = N_j = \xi$	$N_5 = N_0 = 4(\xi - \xi^2)$	$N_6 = N_0 = 1 - \xi^2$	$N_7 = N_0 = 2\xi - \xi^2$	$N_8 = N_0 = 1$
0	0	$\frac{dv}{dy}(\epsilon_\gamma)$	$\frac{R}{a \sin \theta}$							
1	1	u	$\frac{1}{a \sin \theta}$							
2	2	$\frac{d^2 u}{dy^2}(k_s)$	$\frac{-x_{1c} R}{a \sin \theta}$	$\frac{a \sin \theta R}{a \sin \theta}$						$\frac{\xi \cos \theta R}{a \sin \theta}$
3	3	$\frac{dv}{dy}$	$\frac{x_{1c}}{a \sin \theta}$	$\frac{-a \sin \theta}{a \sin \theta}$						$\frac{-\xi \cos \theta}{a \sin \theta}$
4	4	$\frac{d^2 w}{dy^2}(k_s)$	$\frac{-x_{1c} R}{a \sin \theta}$	$\frac{a \cos \theta R}{a \sin \theta}$						$\frac{-\xi \sin \theta R}{a \sin \theta}$
5	5	φ_γ	$\frac{x_{1c}}{a \sin \theta}$	$\frac{-a \cos \theta}{a \sin \theta}$						$\frac{\xi \sin \theta}{a \sin \theta}$
6	6	$\frac{dv_1}{dy}$			$\frac{v_{eq} R}{a \sin \theta}$					
7	7	$\frac{dv_1}{dy}$				$\frac{v_{eq} R}{a \sin \theta}$				
8	8	$\frac{dv_s}{dy}$					$\frac{C_{\Delta} v_{\Delta} R}{a \sin \theta}$			
9	9	$\frac{dv_s}{dy}$						$\frac{C_{\Delta} v_{\Delta} R}{a \sin \theta}$		
10	10	$\frac{dv_s}{dy}$							$\frac{C_{\Delta} v_{\Delta} R}{a \sin \theta}$	

的曲率半径 r_{bc} , 其积分为 JF_a 型。当 $\frac{1}{\alpha \sin \theta} \rightarrow 0, \frac{R}{\alpha \sin \theta} \rightarrow 1, \frac{R}{r_{bc}} \rightarrow 1$ 时, 即蜕变为直梁。

对于剪应变

$$\gamma = \gamma_{nq} + \gamma_{jz} \quad (5-14)$$

可以类似于线应变, 将式(5-6)、(5-7)列成表 5-2。按此表可以写出剪应变的一般表达式:

$$\gamma = \sum_h (\sum_i YB_2(i, h) N_h) \Delta_{\gamma i} \quad (5-15)$$

其中, 变形分量 $\Delta_{\gamma i}$ 按如下列阵排序:

$$(\Delta_{\gamma}) = \{\Delta_{\gamma}\}^T = \left(\frac{d\varphi_y}{dy} \frac{dw}{dy} v_t v_s \right) \quad (5-16)$$

对于翼板的剪滞翘曲, 内翼板取 i_1 或 j_1 为第 4 行, 左外翼板取第 5 行, 右外翼板取第 6 行。按此式可计算该截面板元沿纵轴 y 的单位长度的剪切应变能:

$$\begin{aligned} U_{\gamma}^e &= \frac{1}{2} \int_{\sigma} \int_{-\nu^2}^{\nu^2} G\gamma^2 \frac{a \sin \theta}{R} a d\zeta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \{\Delta_{\gamma}\}^T [K_{\gamma}^e] \{\Delta_{\gamma}\} \end{aligned} \quad (5-17)$$

其中, 截面刚度矩阵 $[K_{\gamma}^e]$ 中的任一元素为

$$k_{ij}^e = \sum_h \sum_k \int_{\sigma} \int_{-\nu^2}^{\nu^2} GYB_2(i, h) YB_2(j, k) N_h N_k \frac{a \sin \theta}{R} a d\zeta d\xi \quad (5-18)$$

对于弯梁的 ξ 积分需要同时用到 JF_a 、 JF_b 、 JF_c 三种积分类型。对于沿板厚的 ζ 积分, 与线应变能相同。中面的剪切应变能与板自身扭曲的剪切应变能是不耦合的, 它们分别用式(5-12)和式(5-13)。同样, 对于圆柱曲板, 应将 $a \sin \theta$ 改为该曲板的曲率半径 r_{bc} , 且有 $\frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$, 其积分为 JF_a 型。当 $\frac{1}{\alpha \sin \theta} \rightarrow 0, \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$, 而 $\frac{R}{\alpha \sin \theta} \rightarrow 1$ 时, 即蜕变为直梁。

现在就可以用对应变形分量的截面板元刚度矩阵, 在全截面形成沿纵轴 y 的单位长度的应变能:

表 5-2

$YB_2(i, h)$ 或 $YB_2(j, k)$

编号	i 或 j	h 或 k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	i 或 j	形函数 变形分量	$N_1 = N_0 = 1$	$N_2 = N_1' = -1$	$N_3 = N_2' = 1$	$N_4 = N_3' = 4(1-2\xi)$	$N_5 = N_4' = -2\xi$	$N_6 = N_5' = 2-2\xi$	$N_7 = N_6' = 1-\xi$	$N_8 = N_7' = \xi$	$N_9 = N_8' = 4(\xi-\xi^2)$	$N_{10} = N_9' = 1-\xi^2$	$N_{11} = N_{10}' = 2\xi-\xi^2$	$N_{12} = N_{11}' = 1$
1	0	$\frac{d\varphi_1(k_j)}{dy}$	$\frac{\rho_n R}{\alpha \sin \theta}$											$\frac{2\xi R}{\alpha \sin \theta}$
2	1	$\frac{dw}{dy}$	$\frac{\rho_n}{\alpha \sin \theta}$											$\frac{2\xi}{\alpha \sin \theta}$
3	2	v_1		$\frac{v_{\max}}{\alpha}$					$-\frac{v_{\max}}{\alpha}$					
	3	v_1			$\frac{v_{\max}}{\alpha}$					$-\frac{v_{\max}}{\alpha}$				
4	4	v_1				$\frac{C_{sk} v_{sh}}{\alpha}$					$-\frac{C_{sk} v_{sh}}{\alpha}$			
4	5	v_1					$\frac{C_{sk} v_{sh}}{\alpha}$					$-\frac{C_{sk} v_{sh}}{\alpha}$		
	6	v_1						$\frac{C_{sk} v_{sh}}{\alpha}$					$-\frac{C_{sk} v_{sh}}{\alpha}$	

$$\begin{aligned}
U_1 &= \sum_{\epsilon} U_{\epsilon}^e + \sum_{\gamma} U_{\gamma}^e \\
&= \frac{1}{2} \{\Delta_{\epsilon}\}^T [\sum_{\epsilon} K_{\epsilon}^e] \{\Delta_{\epsilon}\} + \frac{1}{2} \{\Delta_{\gamma}\}^T [\sum_{\gamma} K_{\gamma}^e] \{\Delta_{\gamma}\} \\
&= \frac{1}{2} \{\Delta_{\epsilon}\}^T [K_{\epsilon}] \{\Delta_{\epsilon}\} + \frac{1}{2} \{\Delta_{\gamma}\}^T [K_{\gamma}] \{\Delta_{\gamma}\} \quad (5-19)
\end{aligned}$$

其中, $[K_{\epsilon}] = [\sum_{\epsilon} K_{\epsilon}^e]$, $[K_{\gamma}] = [\sum_{\gamma} K_{\gamma}^e]$ 是全截面对应变分量截面的刚度矩阵。

这个对应变分量的能量式(5-18)是形成弹性薄壁梁桥的控制微分方程或有限段元法方程的出发点。

§ 5-3 弹性薄壁梁桥控制微分方程

为便于变分运算,将式(5-9)中的两个 $\frac{dv}{dy}$ 合并而记为

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\epsilon}) &= \{\Delta_{\epsilon}\}^T = \left(u \frac{d^2 u}{dy^2} \frac{dv}{dy} \frac{d^2 w}{dy^2} \varphi_y \frac{dv_t}{dy} \frac{dv_s}{dy} \right) \\
&= (u \ u'' \ v' \ w'' \ \varphi_y \ v'_t \ v'_s) \quad (5-20)
\end{aligned}$$

这样在按式(5-11)计算 k_{ij}^e 时,应将 $YB_1(i, h)$ 或 $YB_1(j, k)$ 的第 0 行叠加到第 3 行去。式(5-16)不变而记为

$$(\Delta_{\gamma}) = \{\Delta_{\gamma}\}^T = (\varphi'_y \ w' \ v_t \ v_s) \quad (5-21)$$

于是全截面的应变能式(5-19)可写为

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{2} \{\Delta_{\epsilon}\}^T [K_{\epsilon}] \{\Delta_{\epsilon}\} + \frac{1}{2} \{\Delta_{\gamma}\}^T [K_{\gamma}] \{\Delta_{\gamma}\} \\
&= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u \\ u'' \\ v' \\ w'' \\ \varphi_y \\ v'_t \\ v'_s \end{Bmatrix}^T [K_{\epsilon}] \begin{Bmatrix} u \\ u'' \\ v' \\ w'' \\ \varphi_y \\ v'_t \\ v'_s \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varphi'_y \\ w' \\ v_t \\ v_s \end{Bmatrix}^T [K_{\gamma}] \begin{Bmatrix} \varphi'_y \\ w' \\ v_t \\ v_s \end{Bmatrix} \quad (5-22)
\end{aligned}$$

设全梁长为 l , 则有总应变能:

$$U = \int_0^l U_1 dy \quad (5-23)$$

再可写出外荷载的总势能为

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^l (uq_x + vq_y + wq_z + \varphi_y m_y) dy \\ &= - \int_0^l \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_y \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ m_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dy \end{aligned} \quad (5-24)$$

式中: q_x, q_y, q_z, m_y —— 分别为相应的分布力或力矩。

全梁有总势能

$$\Pi = U + V \quad (5-25)$$

根据最小总势能原理, 取 $\delta\Pi = 0$, 即得:

$$\int_0^l \left[\begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta u'' \\ \delta v' \\ \delta w'' \\ \delta \varphi_y \\ \delta v'_1 \\ \delta v'_2 \end{Bmatrix}^T [K_e] \begin{Bmatrix} u \\ u' \\ v' \\ w'' \\ \varphi_y \\ v'_1 \\ v'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \varphi'_y \\ \delta w' \\ \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{Bmatrix}^T [K_\gamma] \begin{Bmatrix} \varphi'_y \\ w' \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta \varphi_y \\ \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ m_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] dy = 0 \quad (5-26)$$

将其作分部积分, 使有关导数的变分降阶, 即有:

$$\int_0^l \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ \delta u' \\ \delta v \\ \delta w' \\ 0 \\ \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{Bmatrix}^T [K_e] \begin{Bmatrix} u \\ u' \\ v' \\ w'' \\ \varphi_y \\ v'_1 \\ v'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \varphi_y \\ \delta w \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T [K_\gamma] \begin{Bmatrix} \varphi'_y \\ w' \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \right] dy$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\begin{array}{c} 0 \\ \delta u \\ 0 \\ \delta w \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]^T [K_\epsilon] \left[\begin{array}{c} u' \\ u''' \\ v'' \\ w''' \\ \varphi'_y \\ v''_t \\ v''_s \end{array} \right] + \int_0^l \left[\begin{array}{c} \delta u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \varphi_y \\ 0 \end{array} \right]^T [K_\epsilon] \left[\begin{array}{c} u \\ u' \\ v' \\ w'' \\ \varphi_y \\ v'_t \\ v'_s \end{array} \right] \\
& - \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \delta v \\ 0 \\ \delta v_t \\ \delta v_s \end{array} \right]^T [K_\epsilon] \left[\begin{array}{c} u' \\ u''' \\ v'' \\ w''' \\ \varphi'_y \\ v''_t \\ v''_s \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \delta u \\ 0 \\ \delta w \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]^T [K_\epsilon] \left[\begin{array}{c} u'' \\ u^{1v} \\ v''' \\ w^{1v} \\ \varphi''_y \\ v'''_t \\ v'''_s \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \delta v_t \\ \delta v_s \end{array} \right]^T [K_\gamma] \left[\begin{array}{c} \varphi'_y \\ w' \\ v_t \\ v_s \end{array} \right] \\
& - \left[\begin{array}{c} \delta \varphi_y \\ \delta w \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] [K_\gamma] \left[\begin{array}{c} \varphi''_y \\ w'' \\ v'_t \\ v'_s \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ d\varphi_y \\ \delta v_t \\ \delta v_s \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} q_x \\ q_y \\ q_z \\ m_y \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] dy = 0 \quad (5-27)
\end{aligned}$$

为使该积分对任意 $(\delta u, \delta v, \delta w, \delta \varphi_y, \delta v_t, \delta v_s)$ 满足,则应满足该式的边界条件和如下的微分方程:

$$\left. \begin{aligned}
& (K_\epsilon)_1 (u u'' v' w'' \varphi_y v'_t v'_s)^T \\
& + (K_\epsilon)_2 (u'' u^{1v} v''' w^{1v} \varphi_y'' v_t''' v_s''')^T = q_x \\
& - (K_\epsilon)_3 (u' u''' v'' w''' \varphi_y' v_t'' v_s'')^T = q_y \\
& (K_\epsilon)_4 (u'' u^{1v} v''' w^{1v} \varphi_y'' v_t''' v_s''')^T \\
& - (K_\gamma)_2 (\varphi_y'' w'' v_t' v_s')^T = q_z \\
& (K_\epsilon)_5 (u u'' v' w'' \varphi_y v'_t v'_s)^T \\
& - (K_\gamma)_1 (\varphi_y'' w'' v_t' v_s')^T = m_y \\
& - (K_\epsilon)_6 (u' u''' v'' w''' \varphi_y' v_t'' v_s'')^T \\
& + (K_\gamma)_3 (\varphi_y' w' v_t v_s)^T = 0 \\
& - (K_\epsilon)_7 (u' u''' v'' w''' \varphi_y' v_t'' v_s'')^T \\
& + (K_\gamma)_4 (\varphi_y' w' v_t v_s)^T = 0
\end{aligned} \right\} \quad (5-28)$$

其中, $(K_x)_i$ 或 $(K_y)_i$ 的下标 i 表示 $[K_x]$ 或 $[K_y]$ 的第 i 行元素。该式为任意薄壁截面弹性弯梁的一般控制微分方程。

如以矩形薄壁截面弹性弯梁为例, 仅考虑竖向弯曲及扭转与扭翘三种基本变形, 且设扭翘位移:

$$v_i = \varphi'_y \quad (5-29)$$

则对应着方程(5-28)可写出:

$$\left. \begin{aligned} \left(EI_x + \frac{EI_w}{R^2} \right) w^{1v} - \frac{GJ_p}{R^2} w'' + \frac{EI_w}{R} \varphi_y^{1v} \\ - \frac{EI_x + GJ_p}{R} \varphi_y'' = q_z \\ EI_w \varphi_y^{1v} - GJ_p \varphi_y'' + \frac{EI_x}{R^2} \varphi_y + \frac{EI_w}{R} w^{1v} \\ - \frac{EI_x + GJ_p}{R} w'' = m_y \end{aligned} \right\} \quad (5-30)$$

式中按式(3-28)算出的截面的刚度常数已计入初曲率的影响, 无须区分大曲率还是小曲率。该方程为弯梁的 Vlasov 方程^[7]。

对于简支梁, 设各位移函数为相应的三角级数, 用 Galerkin 法来求解方程(5-28)或(5-30)是方便的。

§ 5-4 截面板元位移模式的段元方程

现在将全截面的应变能表达成段元的应变能。设段元的长为 l , 段元两端的横截面分别为 i_y 和 j_y 。由变形分量式(5-20)、(5-21)的 $\{\Delta_\varepsilon\}$ 和 $\{\Delta_\gamma\}$ 可知, 位移分量 u 和 w 的最高阶导数为 $\frac{d^2 u}{dy^2}$ 和 $\frac{d^2 w}{dy^2}$, 其它位移分量的最高阶导数为一阶。再考虑段元两端横截面上的位移分量的连续性, 取 u 和 w 为三次位移函数:

$$u = u_i N_{w1} + u'_i l N_{w3} + u_j N_{w2} + u'_j l N_{w4} \quad (5-31)$$

$$w = w_i N_{w1} + w'_i l N_{w3} + w_j N_{w2} + w'_j l N_{w4} \quad (5-32)$$

其中有形函数:

$$\left. \begin{aligned} N_{w1} &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \\ N_{w2} &= 3\eta^2 - 2\eta^3 \\ N_{w3} &= \eta - 2\eta^2 + \eta^3 \\ N_{w4} &= -\eta^2 + \eta^3 \end{aligned} \right\} \quad (5-33)$$

式中： η ——段元轴线的局部坐标， iy 截面为 $\eta = 0$ ， jy 截面为 $\eta = 1$ 。

按相同的 η 坐标，取其它位移分量为一次位移函数。此处为简便起见，不像式(1-104)那样取成二次函数。欲有较高计算精度，可细分单元。于是有：

$$v = v_i N_i + v_j N_j \quad (5-34)$$

$$\varphi_y = \varphi_{yi} N_i + \varphi_{yj} N_j \quad (5-35)$$

$$v_i = v_{ii} N_i + v_{ij} N_j \quad (5-36)$$

$$v_s = v_{si} N_i + v_{sj} N_j \quad (5-37)$$

其中有形函数：

$$\left. \begin{aligned} N_i &= 1 - \eta \\ N_j &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (5-38)$$

按所设的位移函数，有：

$$u'' = \frac{u_i}{l^2} N_{w1}'' + \frac{u_i'}{l} N_{w3}'' + \frac{u_j}{l^2} N_{w2}'' + \frac{u_j'}{l} N_{w4}'' \quad (5-39)$$

$$w'' = \frac{w_i}{l^2} N_{w1}'' + \frac{w_i'}{l} N_{w3}'' + \frac{w_j}{l^2} N_{w2}'' + \frac{w_j'}{l} N_{w4}'' \quad (5-40)$$

$$v' = \frac{v_i}{l} N_i' + \frac{v_j}{l} N_j' \quad (5-41)$$

$$\varphi_y' = \frac{\varphi_{yi}}{l} N_i' + \frac{\varphi_{yj}}{l} N_j' \quad (5-42)$$

$$v_i' = \frac{v_{ii}}{l} N_i' + \frac{v_{ij}}{l} N_j' \quad (5-43)$$

$$v_s' = \frac{v_{si}}{l} N_i' + \frac{v_{sj}}{l} N_j' \quad (5-44)$$

将上面所设的各位移函数及其导函数代入式(5-25)，即得段

元的节点位移分量:

$$\{\Delta_{ey}\} = \{\Delta_{ey}\}^T = (\Delta_{iy} \quad \Delta_{jy}) \quad (5-45)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta_{iy}\} &= \{\Delta_{iy}\}^T = (u_i \ u_i' \ v_i \ w_i \ w_i' \ \varphi_i \ v_{ti} \ v_{si}) \\ \{\Delta_{jy}\} &= \{\Delta_{jy}\}^T = (u_j \ u_j' \ v_j \ w_j \ w_j' \ \varphi_j \ v_{tj} \ v_{sj}) \end{aligned} \right\} \quad (5-46)$$

所表达的段元总势能:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\Delta_{ey}\}^T [K_e] \{\Delta_{ey}\} - \{\Delta_{ey}\}^T \{R_{eq}\} \quad (5-47)$$

式中: $\{R_{eq}\}$ ——等效节点力。

而段元刚度矩阵 $[K_e]$ 由 $[K_e]$ 和 $[K_y]$ 分别转换后叠加而得。按表 5-3 的截面变形刚度矩阵与段元刚度矩阵转换关系可写出段元刚度矩阵的任意元素:

$$\begin{aligned} K_e(h, k) &= k(i, j) \times NNJF(0, m, n, f, g) \\ &\quad \times DXS(m, f) \times DXS(n, g) l \end{aligned} \quad (5-48)$$

式中: $k(i, j)$ ——可以分别为 $[K_e]$ 或 $[K_y]$ 的对应元素;

$NNJF(0, m, n, f, g)$ ——按 § 2-8 的设定;

$DXS(m, f)$ 、 $DXS(n, g)$ ——按表 5-4 所列的形函数编号, 可取得各阶导函数的计算系数值。

截面变形刚阵与段元刚阵转换

表 5-3

项 目	[K _e]							[K _y]			
	u	u'	v'	w'	φ	v' ₁	v' ₀	φ'	w'	v ₁	v ₀
变形分量 i 或 j	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
Δ _{iy}	u _{iy}	u' _{iy}	v' _{iy}	w' _{iy}	φ _{iy}	v' _{0iy}	v' _{1iy}	φ' _{iy}	w' _{iy}	v _{1iy}	v _{0iy}
形函数号 f 或 g	3	3	1	3	1	1	1	1	3	1	1
导数阶数 m 或 n	0	2	1	2	0	1	1	1	1	0	0
刚阵行列号 h 或 k	1	1	3	4	6	7	8	6	4	7	8
Δ' _{iy}	u' _{iy}	u'' _{iy}		w'' _{iy}					w' _{iy}		
形函数号 f 或 g	5	5		5					5		

续上表

项 目	[K _e]						[K _γ]					
	导数阶数 <i>m</i> 或 <i>n</i>	0	2		2					1		
刚阵行列号 <i>h</i> 或 <i>k</i>	2	2		5					5			
$\Delta_{j\gamma}$	$u_{j\gamma}$	$u_{j\gamma}$	$v_{j\gamma}$	$w_{j\gamma}$	$\varphi_{j\gamma}$	$v_{ij\gamma}$	$v_{ij\gamma}$	$\varphi_{j\gamma}$	$w_{j\gamma}$	$v_{ij\gamma}$	$v_{aj\gamma}$	
形函数号 <i>f</i> 或 <i>g</i>	4	4	2	4	2	2	2	2	4	2	2	
导数阶数 <i>m</i> 或 <i>n</i>	0	2	1	2	0	1	1	1	1	0	0	
刚阵行列号 <i>h</i> 或 <i>k</i>	8+1	8+1	8+3	8+4	8+6	8+7	8+8	8+6	8+4	8+7	8+8	
$\Delta'_{j\gamma}$	$u'_{j\gamma}$	$u'_{j\gamma}$		$w'_{j\gamma}$					$w'_{j\gamma}$			
形函数号 <i>f</i> 或 <i>g</i>	6	6		6					6			
导数阶数 <i>m</i> 或 <i>n</i>	0	2		2					1			
刚阵行列号 <i>h</i> 或 <i>k</i>	8+2	8+2		8+5					8+5			

形函数编号及其导函数的计算系数 *DXS* 表 表 5-4

形 函 数	N_i	N_j	N_{w1}	N_{w2}	N_{w3}	N_{w4}				
编号 <i>f</i> 或 <i>g</i>	1	2	3	4	5	6				
位移函数	N_i	N_j	N_{w1}	N_{w2}	lN_{w3}	lN_{w4}				
0 阶计算系数	1	1	1	1	l	l				
1 阶导函数	$\frac{N'_i}{l}$	$\frac{N'_j}{l}$	$\frac{N'_{w1}}{l}$	$\frac{N'_{w2}}{l}$	N'_{w3}	N'_{w4}				
1 阶计算系数	$\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l}$	1	1				
2 阶导函数	0	0	$\frac{N'_{w1}}{l^2}$	$\frac{N'_{w2}}{l^2}$	$\frac{N'_{w3}}{l}$	$\frac{N'_{w4}}{l}$				
2 阶计算系数	0	0	$\frac{1}{l^2}$	$\frac{1}{l^2}$	$\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l}$				

现取全梁有 n 个段元, 有 $n+1$ 个段元端截面——节点。全梁的各节点位移分量依序排列为

$$\{\Delta_o\} = \{\Delta_o\}^T = (\Delta_{1y} \Delta_{2y} \cdots \Delta_{iy} \cdots \Delta_{(n+1)y}) \quad (5-49)$$

就可以将各段元的总势能式(5-47)组装成全梁的总势能

$$\Pi = \frac{1}{2} \{\Delta_o\}^T [K_o] \{\Delta_o\} - \{\Delta_o\}^T \{R_o\} \quad (5-50)$$

式中： $\{R_0\}$ ——包含等效节点荷载列阵的节点力列阵；

$[K_0]$ ——由 $[K_e]$ 组装而成。

根据最小势能原理，设 $\{\Delta_0\}$ 为满足全梁支承条件的节点位移列阵，且取 $\delta II = 0$ ，即得全梁的节点平衡方程：

$$[K_0]\{\Delta_0\} = \{R_0\} \quad (5-51)$$

可以看出，它是一个三截面方程。若全梁分成四段，则可将式(5-51)写成：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & & & \\ & k_{32} & k_{33} & k_{34} & & & \\ & & k_{43} & k_{44} & k_{45} & & \\ & & & k_{54} & k_{55} & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1y} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} \\ \Delta_{5y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} \quad (5-52)$$

它有5个截面，在总刚度矩阵中，任一截面的位移分量的刚度仅与相邻两截面的位移分量的刚度耦联，因而可将这类方程称为三截面方程。

三截面方程，可使总刚度矩阵的存储大为压缩，并可采用下节的截面逆阵消元法求解。

§ 5-5 三截面方程及其截面逆阵消元法

现将式(5-52)写成 n 个截面， $(n-1)$ 个段元，且有 m 个节点力列阵，即 m 个工况荷载的段元法方程：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & & & \\ & k_{32} & k_{33} & k_{34} & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & k_{i(i-1)} & k_{ii} & k_{i(i+1)} & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & k_{n(n-1)} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1y} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3y} \\ \vdots \\ \Delta_{iy} \\ \vdots \\ \Delta_{ny} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \vdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \vdots & R_{2m} \\ R_{31} & R_{32} & & R_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{i1} & R_{i2} & \vdots & R_{im} \\ R_{n1} & R_{n2} & \vdots & R_{nm} \end{bmatrix} \quad (5-53)$$

将 $[K_0]$ 压缩存储为

$$[K_0] \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ & k_{22} & k_{23} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ & & \cdots & \\ & & & k_{ii} & k_{i(i+1)} \\ & & & & \cdots \\ & & & & & k_{nn} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-54)$$

它为 $8n$ 行 16 列的等带宽存储,按如下步骤作截面逆阵消元法求解。

写出第一截面的方程时,应将其作支座的约束位移处理,而得:

$$[k_{11}]\{\Delta_{1y}\} + [k_{12}]\{\Delta_{2y}\} = [R_{11} \ R_{12} \cdots R_{1m}] \quad (5-55)$$

求 $[k_{11}]$ 的逆阵 $[k_{11}]^{-1}$, 可得:

$$\{\Delta_{1y}\} = -[k_{11}]^{-1}[k_{12}]\{\Delta_{2y}\} + [k_{11}]^{-1}[R_{11} \ R_{12} \cdots R_{1m}] \quad (5-56)$$

将其代入第二截面,得第二截面的方程:

$$\begin{aligned} & [[k_{22}] - [k_{12}]^T [k_{11}]^{-1} [k_{12}]] \{\Delta_{2y}\} + [k_{23}]\{\Delta_{3y}\} \\ & = [R_{21} \ R_{22} \cdots R_{2m}] - [k_{12}]^T [k_{11}]^{-1} [R_{11} \ R_{12} \cdots R_{1m}] \end{aligned} \quad (5-57)$$

在此利用了总刚度矩阵的对称性 $[k_{21}] = [k_{12}]^T$ 。如该截面仍有支座约束,还要对其作约束位移处理后,再将该式归结成:

$$[\hat{k}_{22}]\{\Delta_{2y}\} + [k_{23}]\{\Delta_{3y}\} = [\hat{R}_{21} \ \hat{R}_{22} \cdots \hat{R}_{2m}] \quad (5-58)$$

进而可得:

$$\{\Delta_{2y}\} = -[\bar{k}_{22}]^{-1}[k_{23}]\{\Delta_{3y}\} + [\bar{k}_{22}]^{-1}[\bar{R}_{21} \bar{R}_{22} \cdots \bar{R}_{2m}] \quad (5-59)$$

一个一个截面逆阵往下传递,且作约束位移处理后,最后可得:

$$[\bar{k}_{nn}]\{\Delta_{ny}\} = [\bar{R}_{n1} \bar{R}_{n2} \cdots \bar{R}_{nm}] \quad (5-60)$$

解得:

$$\{\Delta_{ny}\} = [\bar{k}_{nn}]^{-1}[\bar{R}_{n1} \bar{R}_{n2} \cdots \bar{R}_{nm}] \quad (5-61)$$

再一一回代,直至式(5-59)和式(5-56),全部解出 $\{\Delta_{ny}\} \cdots \{\Delta_{1y}\}$ 。在此应该注意到,右端项为 m 列阵,因而对应的解也为 m 列,有:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1y} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3y} \\ \vdots \\ \Delta_{iy} \\ \vdots \\ \Delta_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{1y1} & \Delta_{1y2} & \cdots & \Delta_{1ym} \\ \Delta_{2y1} & \Delta_{2y2} & \cdots & \Delta_{2ym} \\ \Delta_{3y1} & \Delta_{3y2} & \cdots & \Delta_{3ym} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Delta_{iy1} & \Delta_{iy2} & \cdots & \Delta_{iym} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Delta_{ny1} & \Delta_{ny2} & \cdots & \Delta_{nym} \end{bmatrix} \quad (5-62)$$

由式(5-57)、(5-58)可知:

$$[\bar{k}_{ii}] = [k_{ii}] - [k_{(i-1)i}]^T [\bar{k}_{(i-1)(i-1)}]^{-1} [k_{(i-1)i}] \quad (5-63)$$

$$[\bar{R}_{i1} \bar{R}_{i2} \cdots \bar{R}_{im}] = [R_{i1} R_{i2} \cdots R_{im}]$$

$$- [k_{(i-1)i}]^T [\bar{k}_{(i-1)(i-1)}]^{-1} [\bar{R}_{(i-1)1} \bar{R}_{(i-1)2} \cdots \bar{R}_{(i-1)m}] \quad (5-64)$$

作为中间存储,可以有:

$$[\bar{K}_0] \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11}^{-1} & -k_{11}^{-1}k_{12} \\ \bar{k}_{22}^{-1} & -\bar{k}_{22}^{-1}k_{23} \\ \bar{k}_{33}^{-1} & -\bar{k}_{33}^{-1}k_{34} \\ \cdots & \cdots \\ \bar{k}_{ii}^{-1} & -\bar{k}_{ii}^{-1}k_{i(i+1)} \\ \cdots & \cdots \\ \bar{k}_{nn}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-65)$$

$$[\bar{R}_u] \rightarrow \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ \bar{R}_{21} & \bar{R}_{22} & \cdots & \bar{R}_{2m} \\ \bar{R}_{31} & \bar{R}_{32} & \cdots & \bar{R}_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{R}_{i1} & \bar{R}_{i2} & \cdots & \bar{R}_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{R}_{n1} & \bar{R}_{n2} & \cdots & \bar{R}_{nm} \end{bmatrix} \quad (5-66)$$

最后用回代式

$$\begin{aligned} [\Delta_{i1} \Delta_{i2} \cdots \Delta_{im}] &= - [k_{ii}]^{-1} [k_{i(i+1)}] [\Delta_{(i+1)1} \Delta_{(i+1)2} \cdots \Delta_{(i+1)m}] \\ &\quad + [k_{ii}]^{-1} [\bar{R}_{i1} \bar{R}_{i2} \cdots \bar{R}_{im}] \end{aligned} \quad (5-67)$$

得全部位移分量解。可见,对于多工况的荷载列阵,求解是方便的,且求逆阵仅为 8×8 阶矩阵。

§ 5-6 截面板元的内力计算

对于段元 (i_y, j_y) 已求得某一工况荷载的位移解 $(\Delta_{iy}, \Delta_{jy})$ 后,即可用该段元的刚度矩阵 $[K_e]$ 算出两端截面上的各广义内力。由于段元刚度矩阵 $[K_e]$ 是由 $[K_x]$ 和 $[K_y]$ 按式(5-48)转换而得,分别记为 $[K_x^e]$ 和 $[K_y^e]$,在计算内力时仅计入中面应变,它对应着按式(5-45)、(5-46)排列的节点位移分量。于是,可以将端截面上的广义内力分为由线应变和剪应变产生的两部分。

由线应变产生的截面广义内力记为

$$(M_{iy}^e) = (Q_{xiy}^e - M_{ziy}^e - N_{iy}^e \quad Q_{ziy}^e - M_{xiy}^e \quad 0 - B_{iy}^e - M_{siy}^e) \quad (5-68)$$

$$(M_{jy}^e) = (-Q_{xjy}^e \quad M_{zjy}^e \quad N_{jy}^e - Q_{zjy}^e \quad M_{xjy}^e \quad 0 \quad B_{jy}^e \quad M_{sjy}^e) \quad (5-69)$$

由剪应变产生的截面广义内力记为

$$(T_{iy}^e) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 - T_{\varphi iy}^e - T_{vij}^e - Q_{siy}^e) \quad (5-70)$$

$$(T_{jy}^e) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T_{\varphi jy}^e \quad T_{vjy}^e \quad Q_{sjy}^e) \quad (5-71)$$

它们可按下式求得：

$$\left. \begin{aligned} (M_{iy}^e \ M_{jy}^e)^T &= [K_c^e] \{ \Delta_{ey} \} - \{ R_{eq}^{ee} \} \\ (T_{iy}^e \ T_{jy}^e)^T &= [K_c^e] \{ \Delta_{ey} \} - \{ R_{eq}^{e\sigma} \} \end{aligned} \right\} \quad (5-72)$$

式中： $\{ R_{eq}^{ee} \}$ ——对应于 u, v, w 的等效节点力；

$\{ R_{eq}^{e\sigma} \}$ ——对应于 φ 的等效节点力。

由于存在段元节间内的荷载，而不能直接用位移函数来计算变形分量。

如果在式(5-19)中形成全截面变形分量刚度矩阵时，附带形成仅计入中面应变对应于应变曲率的截面刚度矩阵，即对应于

$$\left. \begin{aligned} \{ \Delta_{ek} \} &= (\epsilon_y \ k_z \ k_x \ v'_t \ v'_s) \\ \{ \Delta_{yk} \} &= (k_y \ v_t \ v_s) \end{aligned} \right\} \quad (5-73)$$

的截面刚度矩阵 $[K_{ek}]$ 和 $[K_{yk}]$ ，它们是分别由全截面的截面板元的刚度矩阵 $[K_{ek}^e]$ 和 $[K_{yk}^e]$ 叠加成的。即有：

$$\left. \begin{aligned} [K_{ek}] &= \sum_e [K_{ek}^e] \\ [K_{yk}] &= \sum_e [K_{yk}^e] \end{aligned} \right\} \quad (5-74)$$

于是，任一截面的广义内力为

$$[K_{ek}] \begin{Bmatrix} \epsilon_y \\ k_z \\ k_x \\ v'_t \\ v'_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_z \\ M_x \\ B \\ M_s \end{Bmatrix} \quad (5-75)$$

和

$$[K_{yk}] \begin{Bmatrix} k_y \\ v_t \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_\varphi \\ T_v \\ Q_s \end{Bmatrix} \quad (5-76)$$

此两式的右端项已由式(5-72)算出，且应注意其正负号的关系。由这两个式子即可算出相应于全截面广义内力的变形分量：

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon_y k_z k_x v_t' v_s')^T &= [K_{ek}]^{-1} (N M_z M_x B M_s)^T \\ (k_y v_t v_s)^T &= [K_{yk}]^{-1} (T_\varphi T_v Q_s)^T \end{aligned} \right\} \quad (5-77)$$

进而可以用式(5-8)和式(5-15)算得各截面板元上的线应变 ϵ_β 和剪应变 γ , 以及相应的正应力和剪应力。再将其在截面板元上作如下积分, 即可分别得该截面板元的轴力 N_e :

$$N_e = \int_0^1 E a t N_o \epsilon_\beta d\xi \quad (5-78)$$

平面内弯矩 M_e :

$$M_e = \int_0^1 E a^2 t N_b \epsilon_\beta d\xi \quad (5-79)$$

扭转与扭翘及剪滞产生的剪力 Q_e :

$$Q_e = \int_0^1 G a t N_o \gamma d\xi \quad (5-80)$$

应该注意到, 由式(5-72)算得的全截面剪力 $Q_{x_{iy}}^e$ 、 $Q_{z_{iy}}^e$ 或 $Q_{x_{jy}}^e$ 、 $Q_{z_{jy}}^e$, 可记为 Q_x 、 Q_z , 是直接从平衡方程中得到的, 与截面的变形假设无关。因为在前面已经知道, 服从平截面假设的弯曲, 不能从变形中算得剪应力。为得到剪力在截面板元上的分配, 在此采用一个简单的弯翘假设。对于箱形截面梁, 可以假设弯曲的剪翘有与平截面转动那样的翘曲, 但它是与截面转动无关的另一自由度, 是平截面剪翘假设。这种假设对于多肋 T 形截面的肋板式梁, 因腹板上的剪应变分布颇不均匀, 会有些出入, 好在只是为了求分配系数。

按此一平截面剪翘假设, 取截面板元 ij , 其倾角为 θ , i 点有坐标值 (x_i, z_i) , j 点有坐标值 (x_j, z_j) , 沿截面的 α 向的板元宽度为 a , 板元厚为 t , 于是绕 x 轴弯曲引起的剪翘使 j 点相对于 i 点产生的纵轴 y 向翘曲位移之差为

$$\Delta v_{yx} = v_z(z_j - z_i) \quad (5-81)$$

式中: v_z ——与整体截面的剪翘平截面模式相适应的位移分量, 对应于变形后的截面有一确定值。

由此产生的剪应变为

$$\gamma_{ze} = v_z \frac{\Delta v_{ze}}{a} \quad (5-82)$$

其剪应力为

$$\tau_{ze} = G\gamma_{ze} = Gv_z \frac{\Delta v_{ze}}{a} \quad (5-83)$$

将其合成而得沿截面 α 向的剪力为

$$Q_{ze} = \tau_{ze} a t = Gv_z \Delta v_{ze} t \quad (5-84)$$

它沿 z 向的分量为

$$Q_{zze} = Gv_z \Delta v_{ze} t \cos\theta \quad (5-85)$$

将其对全截面合成而得整体截面剪力:

$$Q_z = \sum_e Q_{zze} = Gv_z \sum_e (\Delta v_{ze} t \cos\theta) \quad (5-86)$$

于是可得:

$$Gv_z = \frac{Q_z}{\sum_e (\Delta v_{ze} t \cos\theta)} \quad (5-87)$$

将其代入式(5-84)得:

$$Q_{ze} = Q_z \frac{\Delta v_{ze} t}{\sum_e (\Delta v_{ze} t \cos\theta)} \quad (5-88)$$

即截面板元上的剪力按此式分配。

同理,绕 z 轴弯曲的剪翘,使 j 点相对于 i 点产生的纵轴 y 向的翘曲位移之差为

$$\Delta v_{xe} = v_x (x_j - x_i) \quad (5-89)$$

式中: v_x ——与整体截面的剪翘平截面模式相适应的位移分量,对应于变形后的截面有一确定值。

最后可得:

$$Q_{xe} = Q_x \frac{\Delta v_{xe} t}{\sum_e (\Delta v_{xe} t \sin\theta)} \quad (5-90)$$

将 Q_{ze} 与 Q_{xe} 合成,得:

$$Q_e = Q_{ze} + Q_{xe} \quad (5-91)$$

即为两向弯曲时,分配在截面板元上的剪力。

至此,算出了截面板元平面上的内力(N_e, M_e, Q_e)。按此内

力,对于矩形截面的板元进行钢筋混凝土梁的配筋是无困难的,且使配筋能准确到以板元为单位,这亦是截面板元法所具有的优点。

应该指出,取段元的节点截面计算其应力和内力,左右截面呈阶梯状。如果取段元中点截面计算其应力和内力,则将是连续的。

§ 5-7 小 结

通过本章的研究可以知道,无论是建立控制微分方程还是段元法方程,皆要以截面刚度矩阵对应于各变形分量表达的应变能为基础,而它又是以各基本变形的截面板元位移模式为基础的。相应于各变形分量列出应变表 YB_1 和 YB_2 ,有利于对截面刚度矩阵的各元素按式(5-11)和式(5-18)作编程计算。这一过程就像简单的实梁计算抗弯刚度 EI 一样。

对于弹性控制微分方程的建立,只需直接运用变分法运算。对于段元法方程的建立,它需要将各变形分量用梁轴线方向的位移函数来表达,最后归结为用段元节点的相应的位移分量来表达,以形成段元刚度矩阵。由此可以列出全梁的段元法节点平衡方程。关于截面刚度矩阵向段元刚度矩阵的转换,可按式(5-48)作编程计算。

三截面方程的等带宽存储,可使内存大为节省,且能方便地用截面逆阵消元法求解。对于多工况荷载列阵亦无困难。

关于截面应力的计算,可以按截面板元进行。对于弹性控制微分方程的解,可以直接用算得的各变形分量来计算,但弯曲剪应力不能直接算出。对于段元法解,先得由仅计入中面应变的段元刚度矩阵计算出段元节点截面的广义内力,再用对应于各变形分量的截面刚度矩阵,按算得的广义内力,用逆阵法求出相应的变形分量;最后用截面板元的应变与变形分量的关系式,算出相应的应力,再将其在截面板元上积分,即得其轴力和平面内弯矩。此有利于配筋设计。在段元法解的截面广义内力中已算得截面剪力,本章按平截面剪翘假设,将其分配到各片板元上去。

第六章 箱梁的畸变分析

§ 6-1 引 言

畸变是一种截面可变的变形,它是在截面不变的弯曲和扭转变形基础上附加的变形,因而其截面应力为自平衡力系。

为便于讨论,现取双轴对称的矩形箱梁微段,如图 6-1 所示。若该微段有一荷载力偶矩 qb 作用,则就有与其平衡的畸变反力偶矩 ph 。考虑到两向自平衡力偶矩做功相等而截面不转动,则 x 与 z 轴必有相等相反的畸变转角 θ ,截面的畸变角 $\gamma = 2\theta$ 。由图中的几何关系可知

$$\theta = \frac{2w_1}{b} = \frac{2u_1}{h} = \frac{\gamma}{2} \quad (6-1)$$

这一截面畸变应有如图 6-2 所示的四个基本变形组成,图中示出畸翘线应变变量。按式(6-1)有

$$w_1 = w_2 = \gamma b/4 \quad (6-2)$$

$$u_1 = u_2 = \gamma h/4 \quad (6-3)$$

相对于截面畸变角 γ ,可叠加成如图 e 的应变分布。应该注意到,它是图 a、b、c、d 四图的叠加,不是图 a、b 两图的叠加,因而角点上

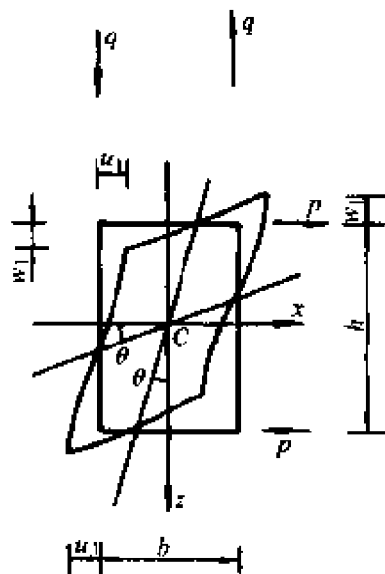


图 6-1 矩形截面畸变

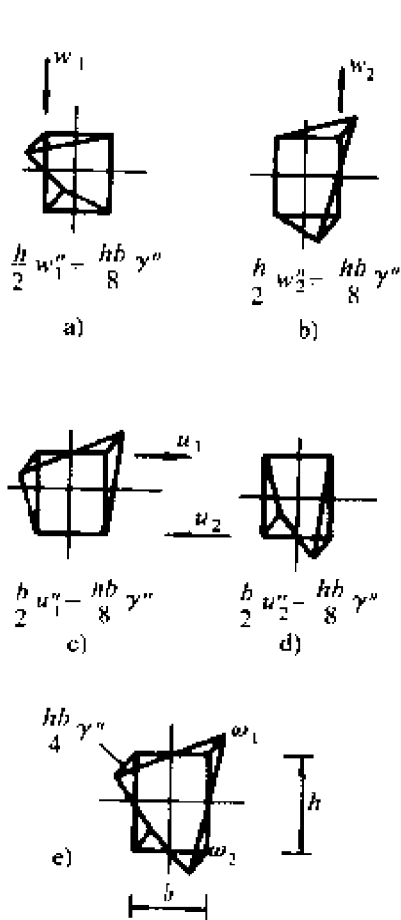


图 6-2 畸变翘曲分析

的畸变线应变量为 $\frac{hb}{4} \gamma''$ 而非 $\frac{hb}{8} \gamma''$ 。即当两腹板的竖向相对畸变位移为 w_1 ，相当于两腹板各自相对错动位移为 $2w_1$ ，它对应于畸变角 γ 是畸变转角 θ 的两倍。于是，畸变模式与腹板的相对错动相一致。这一概念为多室截面的分析带来方便和统一。

在此应该指出，在 R. Dabrowski^[18] 的推导中，有关畸变线应变与变形分量的关系存在着错误。为方便讨论，仍用图 6-2 的矩形截面直箱梁为例，其畸变翘曲位移模式，对应于畸变角 γ ，在四个角点有大小相等的

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{hb}{4} \quad (6-4)$$

呈反对称分布，将该图形记为 ω 。

文献[18]令截面各点的畸变正应力为

$$\sigma = f\omega \quad (6-5)$$

在此照它简写出如下关系式：

$$\left. \begin{aligned} w''_1 &= -\frac{f}{Eh}(\omega_1 + \omega_2) \\ w''_2 &= -\frac{f}{Eh}(\omega_1 + \omega_2) \\ u''_1 &= -\frac{f}{Eb}2\omega_1 \\ u''_2 &= -\frac{f}{Eb}2\omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

问题就出在这里。如在图 6-2 中所讨论的， ω_1 或 ω_2 是两向弯曲效应的叠加，使得在角点处有纵向线应变：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\beta} &= \omega_1 \gamma'' = \frac{h}{2} w''_1 + \frac{b}{2} u'' \\ &= 2 \times \frac{hb}{8} \gamma'' = \frac{hb}{4} \gamma''\end{aligned}\quad (6-7)$$

而两向弯曲分别只存在 $\omega_1/2$ 的效应,因而应将式(6-6)的右端项各除以 2,且 $\omega_1 = \omega_2$,该式应为

$$\left. \begin{aligned}w''_1 &= -\frac{f}{Eh}\omega_1 \\ w''_2 &= -\frac{f}{Eh}\omega_1 \\ u''_1 &= -\frac{f}{Eb}\omega_1 \\ u''_2 &= -\frac{f}{Eb}\omega_1\end{aligned}\right\} (6-8)$$

畸变角 γ 为

$$\gamma = \frac{w_1 + w_2}{b} + \frac{u_1 + u_2}{h} \quad (6-9)$$

于是有

$$\gamma'' = \frac{w''_1 + w''_2}{b} + \frac{u''_1 + u''_2}{h} = -\frac{4f}{Ehb}\omega_1 = -\frac{f}{E} \quad (6-10)$$

进而按式(6-5),截面各点的畸变正应力为

$$E\omega\gamma'' = -f\omega = -\sigma \quad (6-11)$$

而改正前按式(6-6)有 $\gamma'' = -\frac{8f}{Ehb}\omega_1 = -\frac{2f}{E}$,这样,只有

$$E\frac{\omega}{2}\gamma'' = -f\omega = -\sigma \quad (6-12)$$

即当 γ'' 一定时,由上两式的左端可以看出,按应变能可推出该项刚度为改正前的四倍。

现在直接用腹板,即肋梁的相对错动模式来描述多室截面的畸变^[19]。不失一般性地取如图 6-3 所示的双室三肋梁的薄壁箱形截面,各肋梁顺 z 轴方向有 w_{d1} 、 w_{d2} 和 w_{d3} 的相对错动的畸变弯曲,由此引起的各肋梁的翘翘位移模式分别为 v_{d1} 、 v_{d2} 和 v_{d3} ,它们已构

成轴力自平衡,而忽略对 z 轴的弯矩自平衡。在下面的分析中,作为一个简化,假设认为对 z 轴弯矩的自平衡能近似满足。

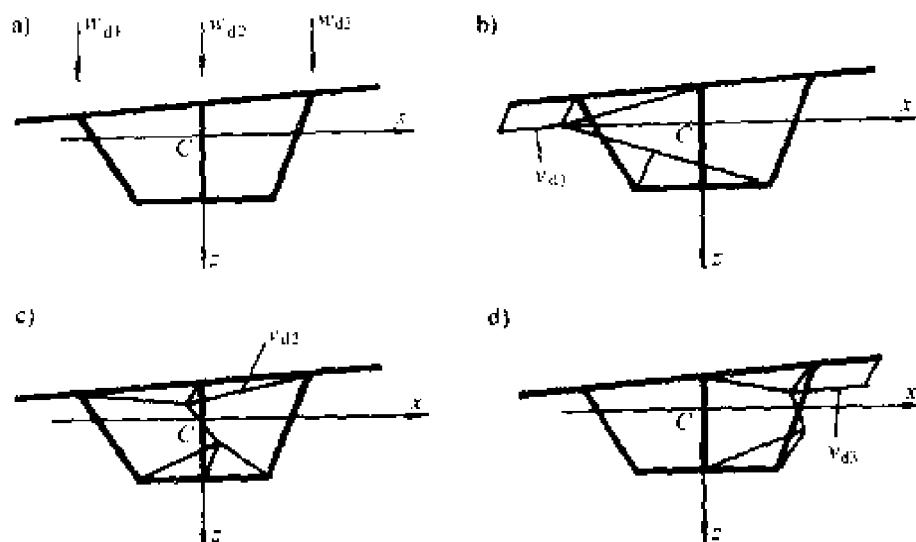


图 6-3 多室截面畸变位移模式

这种多肋梁截面,若在截面微段的各肋梁上作用着荷载 q_1 、 q_2 、 q_3 ,则就有与其平衡的畸变反力 p_1 、 p_2 、 p_3 。考虑到两向自平衡力做功相等而截面形心不动,

则必有相等相反的畸变位移,它应是相对错动的一半,类似于 $\theta = \gamma/2$ 。如图 6-4 所示,在肋梁 2 有荷载 q_2 ,则在肋梁 1 和 3 产生畸变的自平衡反力 p_1 和 p_3 ,它们在相等相反的畸变位移 $w_d/2$ 上作相等的功。

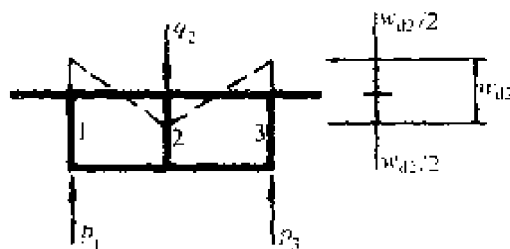


图 6-4 畸变位移与相对错动

畸变位移 w_2 为肋梁 2 相对于肋梁 1 和 3 的相对错动 w_{d2} 的一半,而保持截面形心不动。一般地有:

$$w_i = w_{di}/2 \quad (6-13)$$

由于各肋梁直接分布着荷载,因而 w_{d1} 、 w_{d2} 、 w_{d3} 与荷载的分布有关,它不能有一个与荷载分布无关的全截面唯一的畸变位移模式。由于需要引入竖向弯矩的自平衡条件,因而对于有 n 个肋梁

的畸变模式仅有 $n-1$ 个自由度,对于畸变转角 θ 亦需要按能量等效原理来确定。这些都应在本章研究之。

§ 6-2 截面畸变的机动分析

在整体截面畸变中,由于 $w_{d1}, w_{d2}, w_{d3}, \dots$ 将使整体截面像平面框架那样地变形,每一截面板元就象平面框架上的一根杆件单元。在此应该指出,截面畸变只研究将荷载简化到肋梁上,即只存在节点荷载的整体效应,不去研究非节点荷载附近的局部效应。这种整体截面的平面框架,变形时忽略杆长即板元宽度的改变,但在各肋梁相对错动 w_{di} 的位移下,会使平面框架中的各杆元产生横向弯曲,称为截面畸变的横向弯曲。各杆元横向弯曲的节点线位移分量在小变形下可用平面机构的运动学与 w_{di} 建立起关系式。

现将平面框架的各节点视为铰链,成为一机构。设整体截面的顶底板分别在各自的一个平面上,即平面框架的上下弦杆在各自的直线上,因而肋梁腹杆杆件单元的节点位移只能垂直于相应的弦杆单元。如图 6-5a 所示,上弦的倾角为 θ_1 ,下弦的倾角为 θ_2 ,任一 i 肋梁的腹杆的倾角为 θ_i 。设该肋梁的相对错动位移 w_{di} 竖直向下,此时相邻两肋梁固定。如图 6-5b 所示, i_1 点只能有垂

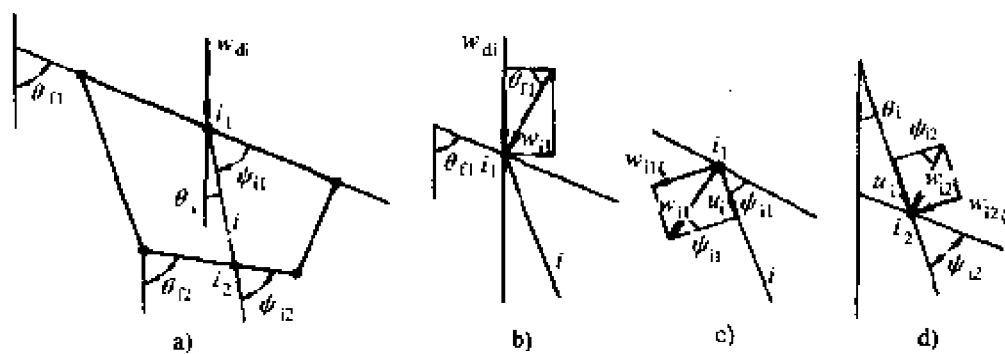


图 6-5 位移分量的机动分析

直上弦的位移 w_{i1} ,而 w_{di} 仅是它的竖向分量,于是有:

$$w_{i1} = w_{di} / \sin \theta_1 \quad (6-14)$$

这时沿腹杆 i 的位移分量如图 c 所示为

$$u_i = w_{i1} \sin \psi_{i1} = w_{d1} \sin \psi_{i1} / \sin \theta_{i1} \quad (6-15)$$

式中: $\psi_{i1} = \theta_{i1} - \theta_{i0}$

而垂直于腹杆的位移分量为

$$w_{i1\zeta} = w_{i1} \cos \psi_{i1} = w_{d1} \cos \psi_{i1} / \sin \theta_{i1} \quad (6-16)$$

对于下节点 i_2 , 其位移方向只能垂直于下弦杆。又按机构运动的速度投影定理: 当刚体作平面运动时, 其上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。于是有节点位移:

$$w_{i2} = u_i / \sin \psi_{i2} = w_{d1} \frac{\sin \psi_{i1}}{\sin \theta_{i1} \sin \psi_{i2}} \quad (6-17)$$

而垂直于腹杆的位移分量为

$$w_{i2\zeta} = w_{d1} \frac{\sin \psi_{i1} \cos \psi_{i2}}{\sin \theta_{i1} \sin \psi_{i2}} \quad (6-18)$$

式中: $\psi_{i2} = \theta_{i2} - \theta_{i0}$

由机动分析, 已经将肋梁的竖向相对错动位移与各杆元的节点线位移分量建立了关系, 即对于节点线位移分量, 每个肋梁只有一个自由度, 而每个节点的转角自由度是独立的。由此可以用平面框架有限元法来确定截面畸变的横向弯曲的刚度矩阵。

§ 6-3 肋梁错动的纵向弯曲 位移模式及刚度矩阵

在 § 6-1 中已经讨论过, 截面畸变可采用由各肋梁的相对错动的变形, 在翼板间耦联的各肋梁模式, 如图 6-3 所示, 对应于相对错动 w_{d1} 、 w_{d2} 、 w_{d3} 的各肋梁的位移模式分别为 v_{d1} 、 v_{d2} 、 v_{d3} , 这些位移模式应构成轴力自平衡, 因而在腹板上是由弯曲位移函数 $v_b = \alpha N_b$ 和均匀拉伸位移函数 $v_o = N_o$ 所组成, 它们皆牵连着遵循线性分布的翼板翘曲。外伸翼板所牵连的翘曲为均匀伸长。一般地, 可将肋梁的畸变位移模式分解为如图 6-6 所示的 v_b 和 v_o 两部分。

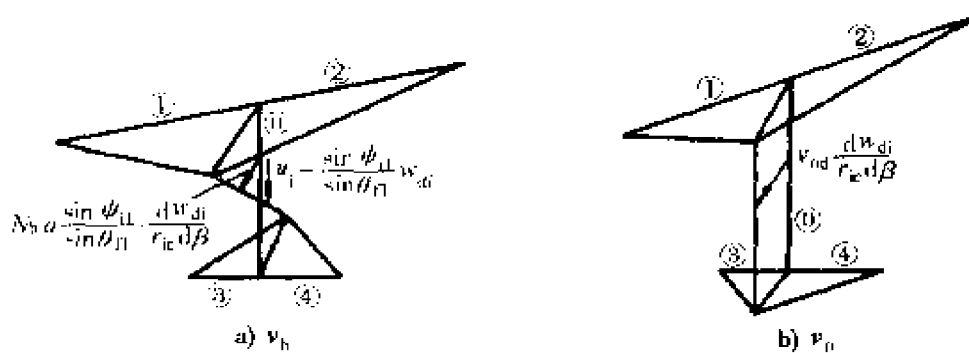


图 6-6 肋梁的畸变位移模式分解

设在弯梁上某一肋梁 i 的腹板形心的曲率半径为 r_{ic} , 畸变的竖向相对错动位移为 w_{di} , 则肋梁的各板元上的纵向位移为

$$v_e = \begin{cases} \left(N_b a \frac{\sin \psi_{il}}{\sin \theta_{il}} + N_v v_{odi} \right) \frac{R}{r_{ic}} \frac{dw_{di}}{dy}, & 0 \text{ 号腹板} \\ \left(N_j \frac{a}{2} \frac{\sin \psi_{il}}{\sin \theta_{il}} + N_j v_{odi} \right) \frac{R}{r_{ic}} \frac{dw_{di}}{dy}, & 1 \text{ 号翼板} \\ \left(N_i \frac{a}{2} \frac{\sin \psi_{il}}{\sin \theta_{il}} + N_i v_{odi} \right) \frac{R}{r_{ic}} \frac{dw_{di}}{dy}, & 2 \text{ 号翼板} \\ \left(-N_j \frac{a}{2} \frac{\sin \psi_{il}}{\sin \theta_{il}} + N_j v_{odi} \right) \frac{R}{r_{ic}} \frac{dw_{di}}{dy}, & 3 \text{ 号翼板} \\ \left(-N_i \frac{a}{2} \frac{\sin \psi_{il}}{\sin \theta_{il}} + N_i v_{odi} \right) \frac{R}{r_{ic}} \frac{dw_{di}}{dy}, & 4 \text{ 号翼板} \end{cases} \quad (6-19)$$

其中, 肋梁中各板元的编号如图 6-6 所示。

腹板由式(6-15)的 u_i 引起的截面转角为

$$\frac{du_i}{r_{ic} d\beta} = \frac{\sin \psi_{il}}{\sin \theta_{il}} \cdot \frac{R}{r_{ic}} \frac{dw_{di}}{dy} \quad (6-20)$$

于是肋梁各板元上的纵向线应变相对于纵轴 y 为

$$\epsilon_{\beta} = \frac{R dv_e}{a \sin \theta dy}$$

$$= \begin{cases} \left(N_b a \frac{\sin\phi_{il}}{\sin\theta_{fl}} + N_o v_{odi} \right) \frac{R^2}{r_{ic} a \sin\theta} \frac{d^2 w_{di}}{dy^2}, 0 \text{ 号腹板} \\ \left(N_j \frac{a}{2} \frac{\sin\phi_{il}}{\sin\theta_{fl}} + N_j v_{odi} \right) \frac{R^2}{r_{ic} a \sin\theta} \frac{d^2 w_{di}}{dy^2}, 1 \text{ 号翼板} \\ \left(N_i \frac{a}{2} \frac{\sin\phi_{il}}{\sin\theta_{fl}} + N_i v_{odi} \right) \frac{R^2}{r_{ic} a \sin\theta} \frac{d^2 w_{di}}{dy^2}, 2 \text{ 号翼板} \\ \left(-N_j \frac{a}{2} \frac{\sin\phi_{il}}{\sin\theta_{fl}} + N_j v_{odi} \right) \frac{R^2}{r_{ic} a \sin\theta} \frac{d^2 w_{di}}{dy^2}, 3 \text{ 号翼板} \\ \left(-N_i \frac{a}{2} \frac{\sin\phi_{il}}{\sin\theta_{fl}} + N_i v_{odi} \right) \frac{R^2}{r_{ic} a \sin\theta} \frac{d^2 w_{di}}{dy^2}, 4 \text{ 号翼板} \end{cases} \quad (6-21)$$

据此可以将表 5-1 列成续表 6-1。

在式(6-21)或表 6-1 中,若翼板为外伸板,则应用 N_o 来替代 N_j 或 N_i 。

在这一位移模式中, v_{odi} 应由该肋梁的轴力自平衡来确定,即有方程:

$$\sum_{e=0}^4 \int_0^l \frac{R dv_e}{(\xi_i + \xi) \sin\theta dy} N_o t d\xi = 0 \quad (6-22)$$

其中 v_e 用式(6-19)代入,会遇到 $\int_0^l \frac{N^* N_o}{\xi_i + \xi} d\xi$ 型的积分,其中 N^* 可为 N_o 、 N_b 、 N_j 或 N_i 。对于直桥则成为 JF_u 型积分,从而确定该肋梁的 v_{odi} 值。此一位移模式构成了轴力自平衡,亦使肋梁接近于对 z 轴弯矩的自平衡。

按上面所确定的各肋梁错动的纵向弯曲位移模式,即可算得全截面畸变的截面刚度矩阵,可按式(5-11)计算出各板元的刚度而累加之。该刚度矩阵对应于各肋梁的相对错动的纵向弯曲变形分量 $\left(\frac{d^2 w_{d1}}{dy^2} \frac{d^2 w_{d2}}{dy^2} \dots \frac{d^2 w_{di}}{dy^2} \dots \frac{d^2 w_{dn}}{dy^2} \right) = \left(\frac{d^2 w_d}{dy^2} \right) = \left\{ \frac{d^2 w_d}{dy^2} \right\}^T$,最后可形成

表 6-1

YB₁(i, h) 或 YB₁(j, k) 续表

编号		h 或 k	1	2	3	4
i 或 j	i ₁ 或 j ₁	形函数 变形分量	$N_1 = N_0 = 1$	$N_2 = N_b = \frac{1}{2} - \xi$	$N_3 = N_t = 1 - \xi$	$N_4 = N_j = \xi$
	肋梁的 板元号		$\frac{v_{odi} R^2}{r_w \alpha \sin \theta}$	$\frac{\sin \psi_{j1}}{\sin \theta_n} \cdot \frac{\alpha R^2}{r_w \alpha \sin \theta}$		
11	0	$\frac{d^2 w_{di}}{dy^2}$				$\left(\frac{\alpha \sin \psi_{j1}}{2 \sin \theta_n} + v_{odi} \right) \times \frac{R^2}{r_w \alpha \sin \theta}$
12	1	$\frac{d^2 w_{di}}{dy^2}$	左外翼板将此行第四列元素移至此			
13	2	$\frac{d^2 w_{di}}{dy^2}$	右外翼板将此行第三列元素移至此		$\left(\frac{\alpha \sin \psi_{j1}}{2 \sin \theta_n} + v_{odi} \right) \times \frac{R^2}{r_w \alpha \sin \theta}$	
14	3	$\frac{d^2 w_{di}}{dy^2}$	左外翼板将此行第四列元素移至此			$\left(\frac{-\alpha \sin \psi_{j1}}{2 \sin \theta_n} + v_{odi} \right) \times \frac{R^2}{r_w \alpha \sin \theta}$
15	4	$\frac{d^2 w_{di}}{dy^2}$	右外翼板将此行第三列元素移至此		$\left(\frac{-\alpha \sin \psi_{j1}}{2 \sin \theta_n} + v_{odi} \right) \times \frac{R^2}{r_w \alpha \sin \theta}$	

$$[EI_{jb}] = \begin{bmatrix} EI_{11} & EI_{12} & & & & & \\ EI_{21} & EI_{22} & EI_{23} & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & EI_{i(i-1)} & EI_{ii} & EI_{i(i+1)} & & \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & EI_{n(n-1)} & EI_{nn} \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

由于各相邻肋梁有翼板相连而存在耦联项,用该刚度矩阵可写出全截面畸变的纵向弯曲沿纵轴 y 的单位长度的应变能为

$$U_{jbl} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w'_{d1} \\ w'_{d2} \\ \vdots \\ w'_{di} \\ \vdots \\ w'_{dn} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI_{11} & EI_{12} & & & & & \\ EI_{21} & EI_{22} & EI_{23} & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & EI_{i(i-1)} & EI_{ii} & EI_{i(i+1)} & & \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & EI_{n(n-1)} & EI_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w''_{d1} \\ w''_{d2} \\ \vdots \\ w''_{di} \\ \vdots \\ w''_{dn} \end{Bmatrix} \quad (6-24)$$

可见,对应地有各肋梁的畸变弯矩:

$$\begin{Bmatrix} M_{d1} \\ M_{d2} \\ \vdots \\ M_{di} \\ \vdots \\ M_{dn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{11} & EI_{12} & & & & & \\ EI_{21} & EI_{22} & EI_{23} & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & EI_{i(i-1)} & EI_{ii} & EI_{i(i+1)} & & \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & EI_{n(n+1)} & EI_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w''_{d1} \\ w''_{d2} \\ \vdots \\ w''_{di} \\ \vdots \\ w''_{dn} \end{Bmatrix} \quad (6-25)$$

这些畸变弯矩应构成竖向弯矩自平衡,即:

$$\sum_{i=1}^n M_{di} = 0 \quad (6-26)$$

考虑到式(6-25),即可写成:

$$\left(\sum_{j=1}^n EI_{j1} \sum_{j=1}^n EI_{j2} \cdots \sum_{j=1}^n EI_{ji} \cdots \sum_{j=1}^n EI_{jn} \right) \times (w_{d1}'' w_{d2}'' \cdots w_{di}'' \cdots w_{dn}'')^T = 0 \quad (6-27)$$

可得

$$w_{dn}'' = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{EI_{di}}{EI_{dn}} w_{di}'' = - \sum_{i=1}^{n-1} k_i w_{di}'' \quad (6-28)$$

式中: $EI_{di} = \sum_{j=1}^n EI_{ji}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 。

可见,相对错动只有 $n-1$ 个自由度。该式亦可以写成:

$$w_{dn} = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{EI_{di}}{EI_{dn}} w_{di} = - \sum_{i=1}^{n-1} k_i w_{di} \quad (6-29)$$

它是构成畸变弯矩自平衡的条件。

现需要将全截面的纵向畸变弯曲的应变能式(6-24)中的 w_{dn}'' 用式(6-28)代入而消去之,即应采用下一变换关系:

$$\begin{Bmatrix} w_{d1}'' \\ w_{d2}'' \\ \vdots \\ w_{di}'' \\ \vdots \\ w_{d(n-1)}'' \\ w_{dn}'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & 0 & & & & & \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_i & \cdots & -k_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{d1}'' \\ w_{d2}'' \\ \vdots \\ w_{di}'' \\ \vdots \\ w_{d(n-1)}'' \end{Bmatrix} \quad (6-30)$$

或简写成:

$$\{w_d\}_n = [H_d] \{w_d\}_{(n-1)} \quad (6-31)$$

于是式(6-24)可以写成:

$$U_{pb1} = \frac{1}{2} \{w_d\}_{(n-1)}^T [H_d]^T [EI_{jb}] [H_d] \{w_d\}_{(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \{w''_d\}_{(n-1)}^T [EI_d] \{w''_d\}_{(n-1)} \quad (6-32)$$

式中: $[EI_d] = [H_d]^T [EI_{jb}] [H_d]$

关于截面畸变的横向弯曲,其平面框架杆件单元的位移形函数与式(5-33)相同,只要将 η 改成 ξ 。此杆件单元的位移函数可写成:

$$\begin{aligned} (W) &= \{W\}^T \\ &= (N_{w1} \quad N_{w2} \quad aN_{w3} \quad aN_{w4}) \end{aligned} \quad (6-33)$$

它对应着节点位移分量:

$$(w_{jb} \quad \varphi_{jb}) = (w_{ie} \quad w_{je} \quad \varphi_{ie} \quad \varphi_{je}) \quad (6-34)$$

其中,下标 ie, je 为杆件的节点号。对于 w_{ie} 和 w_{je} ,上弦杆件按式(6-14)算得,下弦杆件按式(6-17)算得,腹杆按式(6-16、18)算得,它归结为仅与 w_{di} 和 w_{dj} 有关,可以一般地写成 $w_{ie} = H_{ie} w_{di}$ 和 $w_{je} = H_{je} w_{dj}$ (弦杆)或 $w_{je} = H_{je} w_{di}$ (腹杆)。于是可以记:

$$(w_{jb} \quad \varphi_{jb}) = (H_{ie} w_{di} \quad H_{je} w_{dj} \quad \varphi_{ie} \quad \varphi_{je}), \text{弦杆}$$

或

$$(w_{jb} \quad \varphi_{jb}) = (H_{ie} w_{di} \quad H_{je} w_{di} \quad \varphi_{ie} \quad \varphi_{je}), \text{腹杆} \quad (6-35)$$

此时,杆件单元的横向弯曲的应变曲率为

$$\begin{aligned} k_{jb} &= (w''_d)(w_{jb} \quad \varphi_{jb})^T \\ &= \left(\frac{N''_{w1}}{a^2} H_{ie} \quad \frac{N''_{w2}}{a^2} H_{je} \quad \frac{N''_{w3}}{a} \quad \frac{N''_{w4}}{a} \right) (w_d \quad \varphi_{jb})^T \\ &= (w''_d)(w_d \quad \varphi_{jb})^T \end{aligned} \quad (6-36)$$

该杆件单元,即截面板元沿纵轴 y 的单位长度上的应变能为

$$U_{j12}^e = \frac{1}{2} (w_d \quad \varphi_{jb}) \int_0^1 D_\alpha \{w''_d\} (w''_d) \frac{t^3}{12} \frac{a^2 \sin \theta}{R} (\xi_i + \xi) d\xi (w_d \quad \varphi_{jb})^T \quad (6-37)$$

当为直梁时,此式中的 $\frac{a \sin \theta}{R} (\xi_i + \xi) \rightarrow 1$; 对于弯梁的圆柱曲板,应

有 $\frac{a \sin \theta}{R} (\xi_i + \xi) \rightarrow \frac{r_{ie}}{R}$ 。相应的积分由 JF_b 型转变为 JF_a 型。

令截面板元横向弯曲的刚度矩阵为

$$[K_{jb}^e] = \begin{bmatrix} K_{ww}^e & K_{w\varphi}^e \\ K_{\varphi w}^e & K_{\varphi\varphi}^e \end{bmatrix} = \int_0^l D_a \{w''_d\} (w''_d) \frac{t^3}{12} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{R} (\xi_i + \xi) d\xi \quad (6-38)$$

因横向弯曲受纵向的约束而取 $D_a = E/(1 - \mu^2)$ 。将全截面的横向弯曲的节点位移分量排列成：

$$\begin{aligned} (\Delta_{jb}) &= \{\Delta_{jb}\}^T \\ &= (w_{d1} \ w_{d2} \cdots w_{di} \cdots w_{dn} \ \varphi_{11} \ \varphi_{21} \cdots \varphi_{i1} \cdots \varphi_{n1} \ \varphi_{12} \ \varphi_{22} \cdots \varphi_{i2} \cdots \varphi_{n2}) \end{aligned} \quad (6-39)$$

就可将式(6-38)组装成全截面横向弯曲的截面刚度矩阵：

$$[K_{jb}] = \begin{bmatrix} K_{ww} & K_{w\varphi} \\ K_{\varphi w} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

在式中，节点转角的排列，记 φ_{i1} 为上弦节点转角， φ_{i2} 为下弦节点转角。

考虑到畸变弯矩自平衡条件，应将式(6-30)作变换，则应将式(6-39)排列为

$$\begin{aligned} (\Delta_d) &= \{\Delta_d\}^T \\ &= (w_{d1} \ w_{d2} \cdots w_{di} \cdots w_{d(n-1)} \ \varphi_{11} \ \varphi_{21} \cdots \varphi_{i1} \cdots \varphi_{n1} \ \varphi_{12} \ \varphi_{22} \cdots \varphi_{i2} \cdots \varphi_{n2}) \\ &= ((w_d)_{(n-1)} \ \varphi) \end{aligned} \quad (6-41)$$

而式(6-40)的截面刚度矩阵变换成：

$$[K_d] = \begin{bmatrix} H_d^T K_{ww} H_d & H_d^T K_{w\varphi} \\ K_{\varphi w} H_d & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ww}^d & K_{w\varphi}^d \\ K_{\varphi w}^d & K_{\varphi\varphi}^d \end{bmatrix} \quad (6-42)$$

最后，可以将全截面畸变横向弯曲的应变能组装成：

$$U_{jb2} = \frac{1}{2} \{\Delta_d\}^T [K_d] \{\Delta_d\} \quad (6-43)$$

与式(6-32)一起，得全截面畸变沿纵轴 y 单位长度的总应变能：

$$\begin{aligned} U_{jb} &= U_{jb1} + U_{jb2} \\ &= \frac{1}{2} \{w''_d\}_{(n-1)}^T [EI_d] \{w''_d\}_{(n-1)} + \frac{1}{2} \{\Delta_d\}^T [K_d] \{\Delta_d\} \end{aligned} \quad (6-44)$$

§ 6-4 截面畸变的荷载势能与等效畸变转角

在本章的开头就已经讨论过,在用肋梁腹板的竖向相对错动来描述畸变时,由于它是自平衡的变形,会自动由应变能储存着的能量转变为平衡反力,根据能量平衡即势能不变,应由外荷载与自平衡力作功相等可得,荷载作用的畸变位移应为相对错动的一半。应按式(6-39)排列位移分量,即可写出沿纵轴 y 单位长度上荷载的畸变势能:

$$V_{jbl} = \frac{-1}{2}(\Delta_{jb})\{q\} \quad (6-45)$$

其中, $\{q\}$ 的各分量可以是对应于 w_{di} 的分布力,亦可以是对应于 φ_{i1} 或 φ_{i2} 的分布力矩。往往对畸变采用简化的计算,即对内翼板上的荷载按杠杆法简化到节点上,对外伸翼板上的荷载直接简化到节点上,皆不计入力矩的作用。这样就可以将式(6-45)简化成:

$$V_{jbl} = \frac{-1}{2}(w_{d1} \ w_{d2} \cdots w_{di} \cdots w_{dn})(q_1 \ q_2 \cdots q_i \cdots q_n)^T, \quad (6-46)$$

再作式(6-30)的变换可得

$$\begin{aligned} V_{jbl} &= \frac{-1}{2}(w_{d1} \ w_{d2} \cdots w_{di} \cdots w_{d(n-1)})[H_d]^T(q_1 \ q_2 \cdots q_i \cdots q_n)^T \\ &= \frac{-1}{2}(w_{d1} \ w_{d2} \cdots w_{di} \cdots w_{d(n-1)}) \\ &\quad \times [(q_1 - k_1 q_n) \ (q_2 - k_2 q_n) \cdots (q_i - k_i q_n) \cdots (q_{(n-1)} - k_{(n-1)} q_n)]^T \\ &= \frac{-1}{2}(w_{di})_{(n-1)}\{q_i - q_n k_i\}_{(n-1)} \end{aligned} \quad (6-47)$$

对于弯梁还要研究截面腹板的等效畸变转角 θ_w 。对于多肋梁的截面,由于各肋梁的相对错动 w_{di} 与外荷载有关,要建立起截面的畸变转角与 w_{di} 的关系,采用能量等效关系是方便的。

设多肋截面有一等效的截面畸变角 γ ,如图 6-7 所示,对应于 i 肋梁的腹板有相对错动

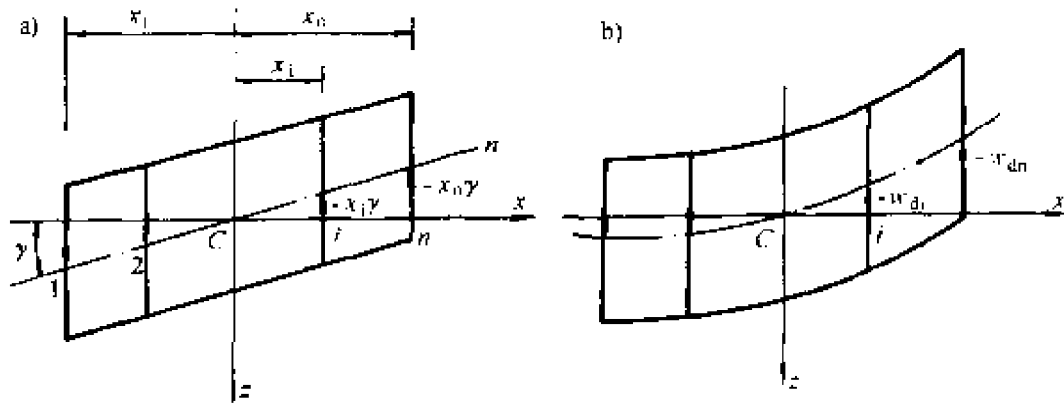


图 6-7 等效畸变角 γ 与实际错动 w_{di}

$$w_{\gamma i} = -x_i \gamma \quad (6-48)$$

此时实际的相对错动为 w_{di} 。考虑到各肋梁的 w_{di} 与 w'_{di} 有相同的比例关系,取虚位移:

$$\delta w_{\gamma i} = -x_i \delta \gamma \quad (6-49)$$

则按虚应变能相等可以写出:

$$\begin{aligned} & \delta \gamma (-x_1 - x_2 \cdots - x_n) [EI_{jb}] \begin{Bmatrix} w_{d1} \\ w_{d2} \\ \vdots \\ w_{dn} \end{Bmatrix} \\ &= \delta \gamma (-x_1 - x_2 \cdots - x_n) [EI_{jb}] \begin{Bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{Bmatrix} \gamma \quad (6-50) \end{aligned}$$

即可得:

$$\gamma = \frac{(-x_1 - x_2 \cdots - x_n) [EI_{jb}] (w_{d1} w_{d2} \cdots w_{dn})^T}{(-x_1 - x_2 \cdots - x_n) [EI_{jb}] (-x_1 - x_2 \cdots - x_n)^T} \quad (6-51)$$

由于 $\gamma = 2\theta$, 即截面的顶板有等效的畸变转角 θ , 而各腹板有相等相反的畸变转角 $-\theta = \theta_w$, 即有:

$$\theta_w = \frac{1}{2} \frac{(x_1 x_2 \cdots x_n) [EI_{jb}] (w_{d1} w_{d2} \cdots w_{dn})^T}{(x_1 x_2 \cdots x_n) [EI_{jb}] (x_1 x_2 \cdots x_n)^T}$$

$$= \sum_{i=1}^n C_i w_{di} = (C_i) \{w_{di}\}_n \quad (6-52)$$

式中:

$$(C_i) = \frac{1}{2} \frac{(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) [EI_{jb}]}{(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) [EI_{jb}] (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T} \quad (6-53)$$

由于 θ_w 是截面畸变时肋梁的转角, 对于弯梁, 按式(2-16)各肋梁应引起竖向弯曲的附加应变曲率 $-\theta_w/R$, 与其对应的截面弯矩为 M_x 。此项势能可写为

$$V_{jb2} = -M_x \frac{\theta_w}{R} = -\frac{M_x}{R} (w_{di})_n \{C_i\} \quad (6-54)$$

再作式(6-30)的变换可得:

$$V_{jb2} = -\frac{M_x}{R} (w_{di})_{(n-1)} \{C_i - C_n K_i\}_{(n-1)} \quad (6-55)$$

最后, 截面畸变的全梁总势能为

$$\Pi_{jb} = \int_0^l (U_{jb1} + U_{jb2} + V_{jb1} + V_{jb2}) dy \quad (6-56)$$

其中应该注意到, 势能项 V_{jb2} 是与截面弯矩 M_x 耦联的, 因而弯梁的畸变方程与整体的弯曲方程是耦联的。在此却近似地忽略了畸变对弯梁的弯曲影响, 而在畸变方程中则不能忽略 M_x 的影响。这在后面的算例中可以得到证实。对于直梁, 截面畸变与整体的拉压弯扭基本上不耦联, 而是独立的。

§ 6-5 箱梁畸变的弹性控制微分方程及其讨论

对式(6-56)求 $\delta\Pi_{jb} = 0$, 可推出多室曲线箱梁桥的畸变方程^[19]:

$$\left. \begin{aligned} & [EI_d] \{w_d^{iv}\}_{(n-1)} + [K_{ww}^d] \{w_d\}_{(n-1)} + [K_{w\varphi}^d] \{\varphi\} \\ & = \left\{ \frac{1}{2} q_i - \frac{1}{2} q_n K_i \right\}_{(n-1)} + \frac{M_x}{R} \{C_i - C_n K_i\}_{(n-1)} \\ & [K_{\varphi w}^d] \{w_d\}_{(n-1)} + [K_{\varphi\varphi}^d] \{\varphi\} = \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (6-57)$$

式中 M_x 可由方程(5-28)或(5-30)的解算得:

$$M_x = -EI_x(w'' - \varphi_y/R) \quad (6-58)$$

由方程(6-57)的第二式可知,外荷载未考虑截面节点的分布力矩,即为齐次式,而有:

$$\{\varphi\} = -[K_{\varphi\varphi}]^{-1}[K_{\varphi w}^d]\{w_d\}_{(n-1)} \quad (6-59)$$

将其代入第一式,消去 $\{\varphi\}$,并令:

$$[K_{dw}] = [K_{ww}^d] - [K_{w\varphi}^d][K_{\varphi\varphi}][K_{\varphi w}^d] \quad (6-60)$$

则方程可归并为

$$\begin{aligned} & [EI_d]\{w_d^{iv}\}_{(n-1)} + [K_{dw}]\{w_d\}_{(n-1)} \\ & = \left\{ \frac{1}{2}q_i - \frac{1}{2}q_n K_i \right\}_{(n-1)} + \frac{M_x}{R}\{C_i - C_n K_i\}_{(n-1)} \end{aligned} \quad (6-61)$$

对于单室箱弯桥,其 $n=2$,得到以相对错动为广义位移的畸变方程,与以畸变角为广义位移的 Dabrowski 方程^[18]是相当的。但应再次强调,截面畸变时存在自平衡的调整,使荷载的作用位移为相对错动的一半,因而在计算畸变刚度时不要少算了,而在计算荷载项时不要多算了。

将方程(6-61)用三角函数按 Galerkin 法求解是方便的。下面用它来讨论梁跨内横隔数的效应。为便于讨论,仅考虑为单室直箱梁桥。

薄壁梁桥的横隔板起着保证各片板元相互联结成整体的作用。一般地,两个端横隔板是不可缺少的。对于桥跨内的横隔板,能使截面的畸变量减小,荷载的横向分布趋于均匀,减轻翼板发出纵向裂缝的隐患。这些都与截面畸变量的大小有关。

设桥跨内的横隔板在其平面内为无限刚性,即在横隔板处不能发生截面畸变,而在其平面外为无限柔性,即在横隔板处梁板元可以自由转动。对于单室直箱梁桥,可将方程简写成:

$$EI_d w_d^{iv} + K_d w_d = q_d \quad (6-62)$$

而可设

$$w_d = \bar{w}_d \sin \frac{\pi y}{l} \quad (6-63)$$

式中: l ——两横隔的间距。

并设荷载项为

$$q_d = \bar{q}_d \sin \frac{\pi y}{l} \quad (6-64)$$

这样就可直接代入方程(6-62)而得:

$$\left(EI_d \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 + K_d \right) \bar{w}_d = \bar{q}_d \quad (6-65)$$

进而得:

$$\bar{w}_d = \frac{\bar{q}_d}{EI_d + K_d \left(\frac{l}{\pi} \right)^4} \left(\frac{l}{\pi} \right)^4 \quad (6-66)$$

若 $q_d =$ 常量, 为均布荷载, 将式(6-64)的两边乘以 $\sin \frac{\pi y}{l}$, 则有

$$\begin{aligned} \bar{q}_d &= \frac{2}{l} \int_0^l q_d \sin \frac{\pi y}{l} dy \\ &= \frac{4}{\pi} q_d \end{aligned} \quad (6-67)$$

可见, \bar{q}_d 与 l 无关, 可以假设 \bar{q}_d 为常量。

若桥跨两端横隔板的间距为 l , 而 m 为跨内的横隔数, 则两横隔板的间距为 $l/(m+1)$ 。根据横隔板平面内无限刚、平面外无限柔的假设, 在两横隔间可设:

$$w_{dm} = \bar{w}_{dm} \sin \frac{(m+1)\pi y}{l} \quad (6-68)$$

而有

$$\bar{w}_{dm} = \frac{\bar{q}_d}{EI_d + K_d \left(\frac{l}{(m+1)\pi} \right)^4} \left(\frac{l}{(m+1)\pi} \right)^4 \quad (6-69)$$

于是可有

$$\frac{\bar{w}_{dm}}{\bar{w}_d} = \frac{EI_d + K_d \left(\frac{l}{\pi} \right)^4}{EI_d + K_d \left(\frac{l}{(m+1)\pi} \right)^4} \cdot \frac{\left(\frac{l}{(m+1)\pi} \right)^4}{\left(\frac{l}{\pi} \right)^4} \quad (6-70)$$

当桥跨内的横隔板数 m 为 0、1、3、5 时, 相应的 $\frac{1}{m+1}$ 分别为 1、 $\frac{1}{16}$ 、

$\frac{1}{256}$ 、 $\frac{1}{1296}$, 收敛很快。一般地, 设置跨中一道横隔板的效应是显著的。

当设置三、五道跨内横隔板时, 则可以视为截面不再畸变。当横隔间距相当大时, 不能忽视对畸变的计算, 以保证薄壁梁桥的纵横向的强度。一旦设了跨中一道横隔板, 则设三、五道亦是设, 而畸变分析即可确定需要设多少道横隔板为宜。

由式(6-36)还可以看出, 当增加箱梁截面的室数时, 亦会显著地增加畸变的横向刚度 K_d , 从而由式(6-66)以使畸变量减小, 而省去跨内横隔板。

§ 6-6 箱梁畸变的段元方程

像在上一章所采用的, 可将截面畸变的全梁总势能式(6-56)用段元法表达。当不考虑截面节点的分布力矩作用, 可消去式中的 $\{\varphi\}$, 而截面畸变的横向弯曲刚度矩阵按式(6-60)聚缩, 于是式(4-56)可改成:

$$\begin{aligned} \Pi_{jb} = & \int_0^l \left(\frac{1}{2} \{w''_{di}\}_{(n-1)} [EI_d] \{w''_{di}\}_{(n-1)} \right. \\ & + \frac{1}{2} \{w_{di}\}_{(n-1)}^T [K_{dw}] \{w_{di}\}_{(n-1)} \\ & - \frac{1}{2} \{w_{di}\}_{(n-1)} \{q_i - q_n K_i\}_{(n-1)} \\ & \left. - \frac{M_x}{R} \{w_{di}\}_{(n-1)} \{C_i - C_n K_i\}_{(n-1)} \right) dy \quad (6-71) \end{aligned}$$

取段元长为 l , 段元两端的横截面分别为 i_y 和 j_y , 按上式能量泛函, 可设各肋梁相对错动的位移函数为

$$\begin{aligned} w_{di} = & w_{di1} N_{w1} + w'_{di1} l N_{w3} + w_{di2} N_{w2} + w'_{di2} l N_{w4} \\ & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6-72)$$

式中: w_{di1} 、 w'_{di1} ——分别为 i_y 截面的肋梁错动及其转角;

w_{di2} 、 w'_{di2} ——分别为 j_y 截面的肋梁错动及其转角。

现将段元的节点位移分量排列为

$$(\Delta_{ey}) = \{\Delta_{ey}\}^T = (\Delta_{iy} \quad \Delta_{jy}) \quad (6-73)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} (\Delta_{iy}) &= \{\Delta_{iy}\}^T = (w_{d1iy} \quad w'_{d1iy} \cdots w_{d2iy} \quad w'_{d2iy} \cdots w_{d(n-1)iy} \quad w'_{d(n-1)iy}) \\ (\Delta_{jy}) &= \{\Delta_{jy}\}^T = (w_{d1jy} \quad w'_{d1jy} \cdots w_{d2jy} \quad w'_{d2jy} \cdots w_{d(n-1)jy} \quad w'_{d(n-1)jy}) \end{aligned} \right\} \quad (6-74)$$

将所设的位移函数式(6-72)及其导函数代入式(6-71),可写成:

$$\Pi_{jb}^e = \frac{1}{2} \{\Delta_{ey}\}^T [K_e] \{\Delta_{ey}\} - \{\Delta_{ey}\}^T \{R_{eq}\} \quad (6-75)$$

其中, $\{R_{eq}\}$ 为等效节点力, 而段元刚度矩阵 $[K_e]$ 由 $[EI_d]$ 和 $[K_{dw}]$ 分别转换后叠加而得, 它仍可按式(5-48)作转换。类似于表 5-3, 该转换关系如表 6-2 所列。

畸变的变形刚阵与段元刚阵转换

表 6-2

项 目	$[EI_d]$		$[K_{dw}]$	
	w''_{di} 或 w'_{dj}	w'_{di} 或 w'_{dj}	w_{di} 或 w_{dj}	w_{di} 或 w_{dj}
变形分量	i 或 j	i 或 j	i 或 j	i 或 j
变形分量编号	i 或 j	i 或 j	i 或 j	i 或 j
Δ_1 和 Δ'_1	w_{di1}	w'_{di1}	w_{di1}	w'_{di1}
形函数号 f 或 g	3	5	3	5
导数阶数 m 或 n	2	2	0	0
刚阵行列号 h 或 k	$2i-1$ 或 $2j-1$	$2i$ 或 $2j$	$2i-1$ 或 $2j-1$	$2i$ 或 $2j$
Δ_2 和 Δ'_2	w_{di2}	w'_{di2}	w_{di2}	w'_{di2}
形函数号 f 或 g	4	6	4	6
导数阶数 m 或 n	2	2	0	0
刚阵行列号 h 或 k	$nr+2i-1$ 或 $nr+2j-1$	$nr+2i$ 或 $nr+2j$	$nr+2i-1$ 或 $nr-2j-1$	$nr+2i$ 或 $nr+2j$

注: $nr = 2(LS - 1)$, 其中 LS 为肋梁数;

形函数按表 5-4 编号。

设全梁有 n 个段元, 有 $n+1$ 个段元端截面——节点。全梁的各节点位移分量依序排列可与式(5-49)相同, 全梁的总势能与节点平衡方程亦与式(5-50)和(5-51)雷同, 它仍可以按 § 5-5 的三截面方程按截面将其对支座的约束位移作处理后存储求解。进而可按式(6-29)算出:

$$\left. \begin{aligned} w_{dny} &= - \sum_{i=1}^{n-1} K_i w_{dii} \\ w'_{dny} &= - \sum_{i=1}^{n-1} K_i w'_{dii} \\ w_{dnjy} &= - \sum_{i=1}^{n-1} K_i w_{dijy} \\ w'_{dnjy} &= - \sum_{i=1}^{n-1} K_i w'_{dijy} \end{aligned} \right\} \quad (6-76)$$

对于段元 (i_y, j_y) 已求得某一工况荷载的位移解 $(\Delta_{i_y}, \Delta_{j_y})$, 它已经可以写出:

$$\begin{aligned} (\Delta_{i_y}) &= \{\Delta_{i_y}\}^T = (w_{d1iy} \ w'_{d1iy} \cdots w_{diiy} \ w'_{diiy} \cdots w_{dniy} \ w'_{dniy}) \\ (\Delta_{j_y}) &= \{\Delta_{j_y}\}^T = (w_{d1jy} \ w'_{d1jy} \cdots w_{dijy} \ w'_{dijy} \cdots w_{dnjy} \ w'_{dnjy}) \end{aligned} \quad (6-77)$$

相应地,为计算内力,该段元的畸变纵向弯曲刚度矩阵 $[K_{el}]$ 应由 $[EI_{jb}]$ 按式(5-48)作转换而得。又设两端截面上各肋梁的剪力和弯矩为

$$\begin{aligned} (Q_{diy} \ M_{diy}) &= (Q_{d1iy} \ M_{d1iy} \cdots Q_{diiy} \ M_{diiy} \cdots Q_{dniy} \ M_{dniy}) \\ (Q_{dijy} \ M_{dijy}) &= (Q_{d1jy} \ M_{d1jy} \cdots Q_{dijy} \ M_{dijy} \cdots Q_{dnjy} \ M_{dnjy}) \end{aligned} \quad (6-78)$$

即有:

$$\begin{Bmatrix} Q_{diy} \\ M_{diy} \\ Q_{dijy} \\ M_{dijy} \end{Bmatrix} = [K_{el}] \begin{Bmatrix} \Delta_{i_y} \\ \Delta_{j_y} \end{Bmatrix} - \{R_{eq}\} \quad (6-79)$$

在此可以近似地认为各肋梁的剪力直接由相应的腹板承担。下面来计算各肋梁的弯矩如何分配到各片板元上去。

设该段元已算得某一端截面各肋梁的畸变弯矩: $(M_d) = \{M_d\}^T = (M_{d1} \cdots M_{di} \cdots M_{dn})$, 则按式(6-25)有:

$$[EI_{jb}] \{w'_d\} = - \{M_d\} \quad (6-80)$$

于是该截面各肋梁畸变的应变曲率应为

$$\{w'_d\} = -[EI_p]^{-1}\{M_d\} \quad (6-81)$$

进而就不难按式(6-21)算出截面上各板元的纵向线应变及其正应力,还可以按式(5-78)、(5-79)算出该截面板元的轴力和弯矩。

还有,该段元的畸变横向弯曲的内力,则先应按式(6-59)算得该截面节点的转角 $\{\varphi\}$,再用式(6-38)的板元刚度矩阵求出节点处的横向内力——分布剪力和弯矩。

§ 6-7 小 结

对于单室箱形截面只存在扭转型的畸变角 γ ;对于多室箱形截面除了存在扭转型的等效畸变角外,还存在弯曲型的畸变错动。无论是扭转型的还是弯曲型的畸变,皆应处于截面内力自平衡状态。根据能量平衡,保持势能不变,由外荷载与自平衡力作功相等可得,荷载作用的畸变位移应为相对错动的一半。外荷载的势能仅为在相对错动位移的一半上作功的负值。

由于用肋梁相对错动位移来描述截面畸变,因而可以对多室箱梁的畸变建立起控制方程,而单室箱梁仅是其特例。

各肋梁相对竖向错动位移,对于各肋梁及其各板元的节点线位移分量,需要用截面的等效框架作机动分析而建立关系式。对于 n 个肋梁仅需用 n 个竖向错动位移 w_d ,加之各节点的转角来描述截面的畸变。在各肋梁的位移模式已满足轴力自平衡的情况下,各肋梁的竖向弯矩应在全截面为自平衡力系,因而竖向错动位移仅有 $n-1$ 个自由度,相应的截面刚度矩阵应进行聚缩变换。截面刚度矩阵应分为竖向弯曲的刚度矩阵和横向弯曲的刚度矩阵。荷载列阵亦应作相应的聚缩变换。

对于弯梁,由于各肋梁的腹板存在畸变转角 θ_w ,因而因初曲率还存在与刚性截面的弯矩的附加应变能。而腹板的畸变转角 θ_w 按能量等效求得。

段元方程的建立及其求解,雷同于刚性截面的过程。再利用竖向弯矩自平衡的条件,补充算出被聚缩去的那个肋梁的错动位

移,这时就可以雷同于刚性截面的算法,计算各板元的应力和内力。

利用畸变的弹性控制微分方程,藉助于三角级数的 Galerkin 法解,可以方便地研究横隔板的效应,以确定所需要的横隔板数,使箱梁成为刚性截面状态。

作畸变分析时,只要在两横隔间梁段上进行计算,视横隔端为简支的。

第七章 箱梁桥的计算及其简化

§ 7-1 箱梁桥的计算

前面已经研究了刚性截面的整体分析和箱梁的畸变分析，皆建立了段元方程。对于连续的、变截面的箱梁用段元法来计算是方便的。为检验其计算的可靠性，取用下面的简支梁模型为算例。

例 7-1 采用文献^[20]的单室简支箱梁模型，如图 7-1 所示，以作检验比较。

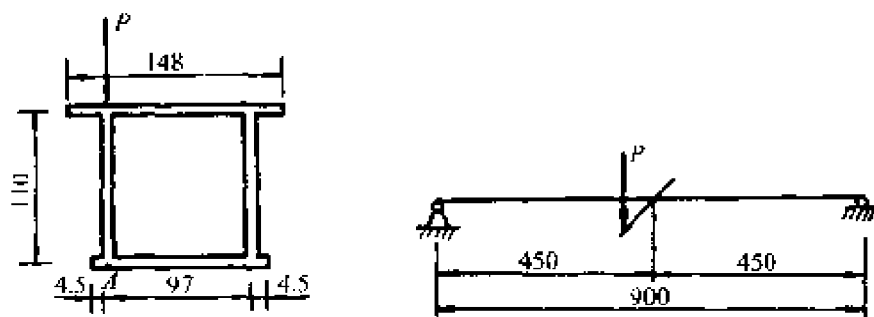


图 7-1 薄壁直箱梁模型(尺寸单位: mm)

模型梁是用 3mm 厚有机玻璃制作的简支矩形箱梁，梁端支座处设有端横隔板。有机玻璃的弹性模量 E 及泊桑比 μ 通过单向拉伸试验测定，其值为 $E = 3.268\text{GPa}$ ， $\mu = 0.3668$ 。偏心荷载 $P = 294\text{N}$ 施加在跨中，作用线通过腹板平面。我们采用对荷载腹板的跨中底部 A 点作为应力比较的点，它有最大应力，其应力测定的状况亦应较为可靠。计算值与实测值的比较列于表 7-1。

A 点应力的计算值与实测值比较(10kPa) 表 7-1

项 目	文献[20]解析解	板元模式段元法解
弯曲应力 σ_b	134.85	156.8
扭翘应力 σ_w	-7.15	-2.2
畸变应力 σ_d	114.17	83.8
计算总应力 σ	241.87	238.4
实测总应力 σ_s	207.66	

需要说明的是,板元模式段元法的截面刚度直接按中至中的尺寸算出;其弯曲应力包含了剪滞应力。还应该注意,用 Dabrowski 的刚度算出的畸变应力过大。由表 7-1 可见,用前面所研究的板元模式段元法(等分成 10 个段元)算得的计算值与实测值符合良好。

例 7-2 为研究薄壁弯梁的剪滞和畸变效应, Kristek^[21] 用折板理论对图 7-2 所示的双轴对称矩形箱梁进行了数值计算。梁轴线的曲率半径 $R = 12700\text{mm}$, 跨径 $L = 9144\text{mm}$, 箱宽 $B = 3658\text{mm}$, $R/B = 3.4718$, $L/B = 2.4997$ 。沿两侧腹板作用均布荷载,按梁轴线计有 $q = 1\text{N/mm}$,且两腹板上作用的总荷载相等。取材料的弹性

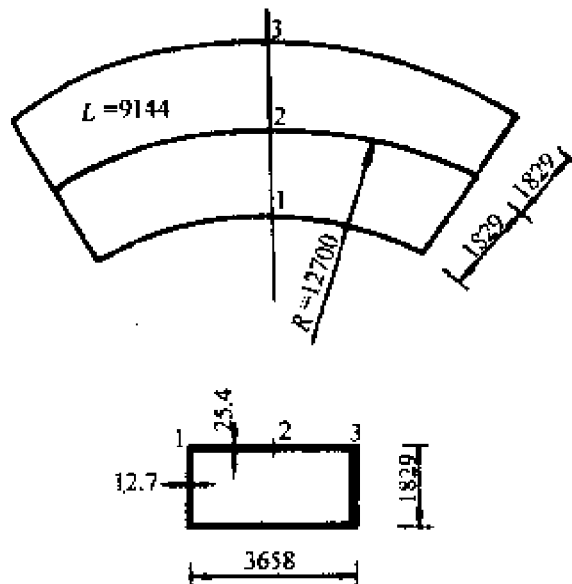


图 7-2 简支薄壁弯梁模型(尺寸单位:mm)

模量 $E = 2 \times 10^5 \text{MPa}$, 泊桑比 $\mu = 0.3$, 计算值的对比列于表 7-2。比较表明, 板元模式段元法(等分成 10 个段元)的计算值与折板理论计算值符合良好, 表明所设的剪滞翘曲位移函数对于大曲率弯梁亦是适宜的; 对于弯梁的附加畸变荷载 M_x/R 项的计算亦是必须考虑的和适用的。

板元模式段元法解与折板解比较(MPa) 表 7-2

项 目	点 1	点 2	点 3
弯曲应力 σ_b	-0.08978	-0.07685	-0.06718
剪滞应力 σ_s	0	0.02834	0
扭翘应力 σ_w	-0.00083	0.00004	0.00069
畸变应力 σ_d	-0.02577	0.00272	0.0241
段元法解 $\sigma = \sum \sigma_i$	-0.116	-0.046	-0.042
折板解 σ_n	-0.126	-0.049	-0.032
简化解 ^[22] σ	-0.129	-0.046	-0.027

应该指出, 表中的弯曲应力 σ_b 已经包含了剪滞效应, 而剪滞应力 σ_s 仅是按剪滞翘曲位移函数算得的那部分。表中的简化解为随后就要研究的, 经简化而得的单室箱梁的弹性控制微分方程, 用三角级数为近似函数的 Galerkin 法解的结果。

§ 7-2. 矩形单室箱弯梁的应变能 及其刚度的简化^[22]

曲线箱梁桥, 通常的梁轴线曲率半径 R 与箱宽 B 之比大于 10, 为左右对称带外伸板的矩形截面薄壁箱, 如图 7-3 所示。为便于工程设计实用, 可作如下简化假设:

- 1) 弯梁的应变及应变曲率按小曲率梁计;
- 2) 竖向弯曲是最主要的变形, 计算其纵向线应变要进一步考虑初曲率的影响;
- 3) 剪滞只与竖向弯曲的线应变能耦联;
- 4) 扭转及扭翘与畸变忽略其应变能耦联。

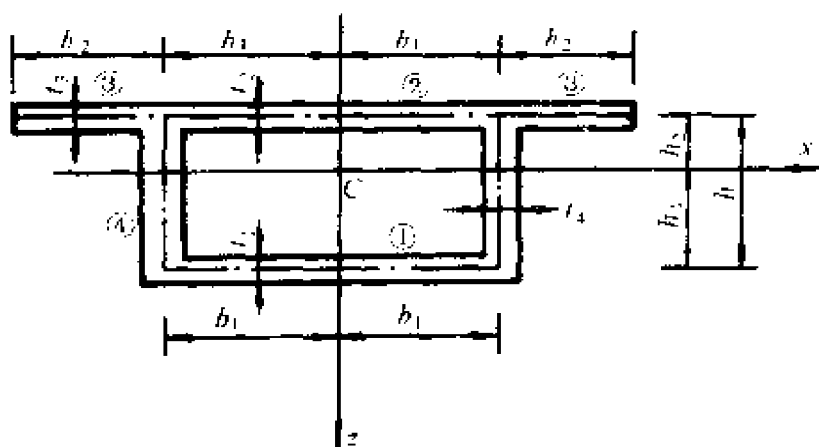


图 7-3 矩形箱梁截面

由此可以写出各基本变形沿梁轴线 y 的单位长度应变能表达式如下:

1. 轴向拉压应变能

$$U_N = \frac{1}{2} EA \epsilon_y^2 = \frac{1}{2} EA \left(\frac{dv}{dy} + \frac{u}{R} \right)^2 \quad (7-1)$$

式中: A ——横截面面积;

ϵ_y ——按式(2-9)计算。

2. 水平弯曲应变能

$$U_{Mz} = \frac{1}{2} EI_z K_z^2 = \frac{1}{2} EI_z \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{u}{R^2} \right)^2 \quad (7-2)$$

式中: $I_z = \int_A x^2 dA$; K_z ——按式(2-14)计算。

3. 竖向弯曲与剪滞翘曲的线应变能

$$U_{Mx} = \frac{1}{2} EI_x K_x^2 - EI_{xs} v'_s K_x + \frac{1}{2} EI_s (v'_s)^2 \quad (7-3)$$

式中: K_x ——按式(2-16)计算。

而关于 I_x 、 I_{xs} 和 I_s 的计算应作如下的研究。

对于矩形箱梁截面,取剪滞翘曲位移模式为

$$w_s = f_0(x, z) + D \quad (7-4)$$

使其保持轴力自平衡。

式中:

$$f_0(x, z) = \begin{cases} \alpha_1 \cos \frac{\pi x}{2b_1} & \text{底板} \\ -\cos \frac{\pi x}{2b_1} & \text{顶板} \\ -\alpha_3 \cos \frac{\pi(x - b_1 - b_2)}{2b_2} & \text{外伸板} \\ 0 & \text{腹板} \end{cases} \quad (7-5)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{2(A_2 + \alpha_3 A_3 - \alpha_1 A_1)}{\pi A} \\ \alpha_1 &= \frac{h_1}{h_2} \\ \alpha_3 &= \frac{b_2^2 [8b_1^2(1 + \mu) + L^2]}{b_1^2 [8b_2^2(1 + \mu) + L^2]} \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

其中: L ——简支跨长;

h_1, h_2 ——底、顶板至截面形心距离;

A_1, A_2, A_3 ——分别为箱梁底板、顶板及两外伸板的横截面积;

μ ——泊桑比。

此剪滞翘曲位移模式如图 7-4 所示, 其线应变为

$$\epsilon_{\beta x} = \omega_x v_x' \quad (7-7)$$

而对于竖向弯曲, 取肋梁考虑其初曲率的影响, 近似地可写成:

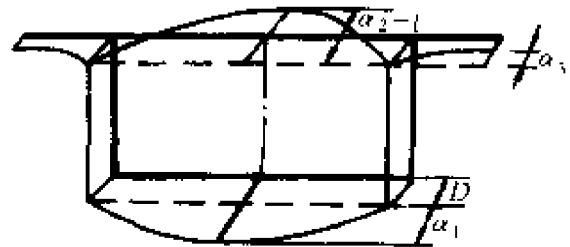


图 7-4 剪滞翘曲位移模型

$$\epsilon_{\beta \max} = -\frac{R^2}{r^2} z K_x \quad (7-8)$$

它在计算正应力时是需要考虑的。但计算表明, 在计算截面常数时, 可近似地作如下计算:

$$I_x = \int_A \frac{R^4}{r^4} z^2 dA \approx \int_A z^2 dA \quad (7-9)$$

$$\begin{aligned}
 I_{xs} &= \int_A \frac{R^2}{r^2} z \omega_s dA \approx \int_A z \omega_s dA \\
 &= h_1 A_1 \left(D + \frac{2\alpha_1}{\pi} \right) - h_2 A_2 \left(D - \frac{2}{\pi} \right) - h_2 A_3 \left(D - \frac{2\alpha_3}{\pi} \right) + DS_4
 \end{aligned} \tag{7-10}$$

式中: $S_4 = \int_{A_4} z dA$, 为两腹板对中和轴的面积矩。

而

$$\begin{aligned}
 I_s &= \int_A \omega_s^2 dA \\
 &= A_1 \left(D^2 + \frac{4D\alpha_1}{\pi} + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) + A_2 \left(D^2 - \frac{4D}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad + A_3 \left(D^2 - \frac{4D\alpha_3}{\pi} + \frac{\alpha_3^2}{2} \right) + A_4 D
 \end{aligned} \tag{7-11}$$

4. 剪滞翘曲剪切应变能

$$U_{sr} = \frac{1}{2} GK_s v_s^2 \tag{7-12}$$

式中:

$$\begin{aligned}
 K_s &= \int_A \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial r} - \frac{\omega_s}{r} \right)^2 dA \approx \int_A \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial r} \right)^2 dA \\
 &= \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{A_1 \alpha_1^2}{b_1^2} + \frac{A_2}{b_1^2} + \frac{A_3 \alpha_3^2}{b_2^2} \right)
 \end{aligned} \tag{7-13}$$

5. 自由扭转应变能

$$U_{TS} = \frac{1}{2} GJ_p K_y^2 = \frac{1}{2} GJ_p \left(\frac{d\varphi_y}{dy} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dy} \right)^2 \tag{7-14}$$

式中: J_p ——按式(3-34)计算;

K_y ——按式(2-18)计算。

6. 扭转翘曲应变能, 按 Vlasov 假设有:

$$U_{Bi} = \frac{1}{2} EI_w (K_y')^2 = \frac{1}{2} EI_w \left(\frac{d^2 \varphi_y}{dy^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 \tag{7-15}$$

式中: $I_w = \int_A \omega^2 dA$, ω 按扭翘模式或主扇性坐标计算。

7. 畸变翘曲应变能

$$U_{dl} = \frac{1}{2} EI_d (w_{dl}''')^2 - \frac{M_x}{R} \frac{w_{dl}}{2b_1} \quad (7-16)$$

对于单室箱左右对称的截面,按肋梁各自反向相对错动 w_{dl} ,形成反对称的畸变翘曲模式 ω_d ,如图 7-5 所示,外伸板与前面的均布假设有差异。由于顶板有外伸板,而使 $\beta \neq \frac{1}{2}$,它需要用 M_x 的自平衡条件来确定,即应使:

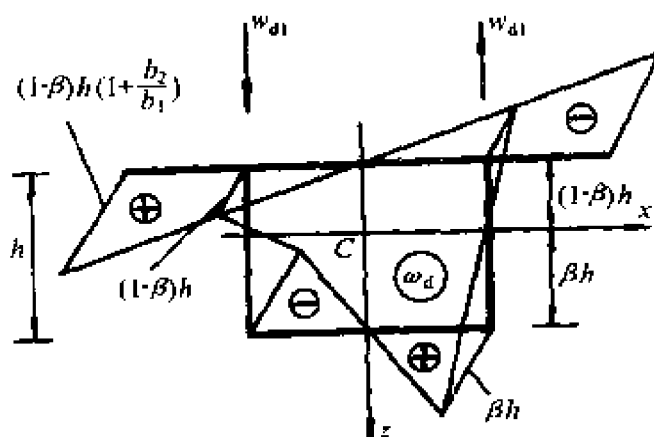


图 7-5 单室箱型截面畸变翘曲模式

$$\int_A x \omega_d dA = 0 \quad (7-17)$$

可得:

$$\beta = \frac{\left(1 + \frac{b_2}{b_1}\right)^3 + \frac{3h}{2b_1}}{1 + \left(1 + \frac{b_2}{b_1}\right)^3 + \frac{3h}{b_1}} \quad (7-18)$$

于是有:

$$I_d = \int_A \omega_d^2 dA \quad (7-19)$$

在式(7-16)中还考虑到腹板的畸变转角为

$$\theta_w = \frac{w_{dl}}{2b_1} \quad (7-20)$$

8. 畸变横向弯曲应变能

$$U_{d2} = \frac{1}{2} K_d w_{d1}^2 \quad (7-21)$$

截面畸变的横向弯曲按等效框架计算。按杆件有限元分析,其节点位移分量如图 7-6 所示。对应于节点位移分量(w_{d1} φ_1 φ_2),可以写出如下刚度矩阵:

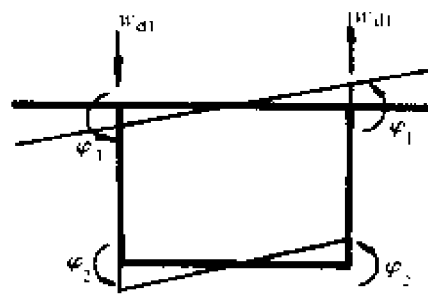


图 7-6 畸变等效框架的位移分量

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ww} & (K_{w\varphi}) \\ \{K_{\varphi w}\} & [K_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \quad (7-22)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} K_{ww} &= \frac{6}{b_1^3} (D_1 + D_2) \\ (K_{w\varphi}) &= \{K_{\varphi w}\}^T = \left(-6 \frac{D_2}{b_1^2} \quad -6 \frac{D_1}{b_1^2} \right) \\ [K_{\varphi\varphi}] &= \begin{bmatrix} \frac{6D_2}{b_1} + \frac{8D_4}{h} & \frac{4D_4}{h} \\ \frac{4D_4}{h} & \frac{6D_1}{b_1} + \frac{8D_4}{h} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

而横向抗弯刚度为

$$D_i = \frac{Et_i^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (7-23)$$

式中: i ——板号,按图 7-3 所注。

于是不难求得:

$$K_d = K_{ww} - (K_{w\varphi}) [K_{\varphi\varphi}]^{-1} \{K_{\varphi w}\} \quad (7-24)$$

§ 7-3 矩形单室箱弯梁的弹性控制微分方程

上节已经对矩形单室箱弯梁的应变能及其刚度的简化计算写出了算式,现在再将其外荷载势能按梁轴线 y 的单位长度写出:

$$V = - \left(q_x u + q_y v + q_z w + m_y \varphi_y + \frac{1}{2} (q_1 - q_2) w_{dl} \right) \quad (7-25)$$

式中: q_x, q_y, q_z ——沿梁轴线的各向分布荷载;

m_y ——绕扭心轴线的分布力矩;

q_1, q_2 ——作用于两腹板上的外荷载,以向下为正,它在实际的腹板畸变挠度,即一半的相对错动位移上作功。

至此可以算出全梁的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi = \int_0^l (U_N + U_{Mz} + U_{Mx} + U_{Sc} + U_{Ts} + U_{Bi} + U_{dl} \\ + U_{\Omega} + V) dy \end{aligned} \quad (7-26)$$

在作 $\delta \Pi = 0$ 的变分运算时,视式(7-16)中的 M_x 为常量。最后可得矩形单室箱弯梁的弹性控制微分方程:

$$EA \left(v'' + \frac{u'}{R} \right) + q_y = 0 \quad (7-27)$$

$$EI_z (u'' + 2u'''/R^2 + u'/R^4) - q'_x + q_y/R = 0 \quad (7-28)$$

$$\begin{aligned} \left(EI_x + \frac{EI_w}{R^2} \right) w^{1v} - \frac{GJ_p}{R^2} w'' + \frac{EI_w}{R} \varphi_y^{1v} - \frac{EI_x + GJ_p}{R} \varphi_y' \\ - EI_{xs} v_s''' = q_z \end{aligned} \quad (7-29)$$

$$\begin{aligned} EI_w - \varphi_y^{1v} - GJ_p \varphi_y'' + \frac{EI_x}{R^2} \varphi_y + \frac{EI_w}{R} w^{1v} - \frac{EI_x + GJ_p}{R} w'' \\ + \frac{EI_{xs}}{R} v_s' = m_y \end{aligned} \quad (7-30)$$

$$EI_{xs} w''' - \frac{EI_{xs}}{R} \varphi_y' - EI_s v_s'' + GK_s v_s = 0 \quad (7-31)$$

$$EI_d w_{dl}^{1v} + K_d w_{dl} = \frac{1}{2} (q_1 - q_2) + \frac{M_x}{2b_1 R} \quad (7-32)$$

可以说,前五个方程是考虑了剪滞效应的 Vlasov 方程,后一个是以肋梁的相对错动为广义位移的 Dabrowski 方程。

边界条件应满足:

$$\left. \begin{aligned}
& \delta v \left[EA \left(v' + \frac{u}{R} \right) \right] = 0 \\
& \delta u' \left[EI_z \left(u'' + \frac{u}{R^2} \right) \right] = 0 \\
& \delta u \left[EI_z \left(u''' + \frac{u'}{R^2} \right) \right] = 0 \\
& \delta w' \left[EI_x \left(w' - \frac{\varphi_y}{R} \right) + \frac{EI_w}{R} \left(\varphi_y'' + \frac{w''}{R} \right) - EI_{xs} v_s' \right] = 0 \\
& \delta w \left[EI_x \left(w''' - \frac{\varphi_y}{R} \right) + \frac{EI_w}{R} \left(\varphi_y''' + \frac{w'''}{R} \right) \right. \\
& \quad \left. - EI_{xs} v_s'' - \frac{GI_p}{R} \left(\varphi_y' + \frac{w'}{R} \right) \right] = 0 \\
& \delta \varphi_y \left[EI_w \left(\varphi_y''' + \frac{w'''}{R} \right) - GJ_p \left(\varphi_y' + \frac{w'}{R} \right) \right] = 0 \\
& \delta v_s \left[EI_s v_s' - EI_{xs} \left(w' - \frac{\varphi_y}{R} \right) \right] = 0 \\
& \delta \varphi_y' \left[EI_w \left(\varphi_y'' + \frac{w''}{R} \right) \right] = 0 \\
& \delta w_{dl}' \left[EI_d w_{dl}'' \right] = 0 \\
& \delta w_{dl} \left[EI_d w_{dl}''' \right] = 0
\end{aligned} \right\} \quad (7-33)$$

视具体情况确定其几何边界条件或自然边界条件。对于简支端有几何边界条件：

$$w = 0, \varphi_y = 0, w_{dl} = 0, v = 0, u = 0$$

及自然边界条件：

$$\begin{aligned}
w'' = 0, \varphi_y'' = 0, v_s' = 0, w_{dl}'' = 0 \\
v' = 0, u'' = 0
\end{aligned}$$

由方程(7-27 ~ 32)可见,方程(7-27)、(7-28)为轴向拉压与水平弯曲方程,彼此耦联。方程(7-29) ~ (7-31)为竖向弯曲、扭转与剪滞的方程,彼此耦联。方程(7-32)为独立的畸变方程。

横截面上各点的正应力：

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_{M_x} + \sigma_s + \sigma_w + \sigma_d + \sigma_N + \sigma_{M_z} \\
&= -E \frac{R^2}{r^2} z \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{\varphi_y}{R} \right) + E w_s \frac{dv_s}{dy} + E \omega \left(\frac{d^2 \varphi_y}{dy^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \\
&\quad + E \omega_d \frac{d^2 w_{dl}}{dy^2} + E \left(\frac{dv}{dy} + \frac{u}{R} \right) - E x \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{u}{R^2} \right) \quad (7-34)
\end{aligned}$$

关于横向弯曲的等效框架,先按下式算出节点转角:

$$(\varphi_1 \quad \varphi_2)^T = -[K_{\varphi\varphi}]^{-1} \{K_{\varphi w}\} w_{dl} \quad (7-35)$$

即可用 $(w_{dl} \quad \varphi_1 \quad \varphi_2)$ 来计算各杆件单元的内力。

例 7-3 采用文献^[23]的悬臂弯箱梁的模型,其截面尺寸如图 7-7a 所示。该模型由软钢板制成,材料弹性模量 $E = 2 \times 10^5 \text{MPa}$,泊桑比 $\mu = 0.27$,跨径 $L = 1500 \text{mm}$,在弯梁自由端外侧腹板上施加 8kN 的集中力。图 7-7b 示出 $7/8$ 弧长截面处箱壁外侧面横向应力分布。文献^[23]将悬臂弯梁划分成 17 个梁单元,共有 18 个节点 162 个自由度,实线为其计算结果;虚线为按畸变方程式(7-32)用解析法算得^[22],其结果与实验值符合良好。将畸变的横向弯曲应力与板内的局部荷载效应的应力组合起来,可以进行横向配筋的设计或作强度验算。

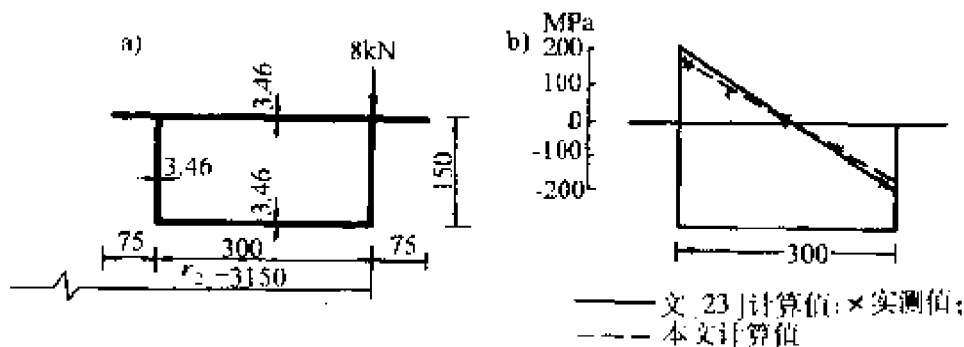


图 7-7 悬臂薄壁弯箱梁模型(尺寸单位: mm)

§ 7-4 矩形单室箱筒支弯梁桥的三角函数解

本节对于矩形单室箱内无横隔板的筒支梁,用 Galerkin 法求解在竖向荷载作用下的内力,它仅需利用方程(7-29)~(7-32),轴

向拉压与水平弯曲的解为零,不耦联。现仅用三角级数的一项,对简支弯箱梁桥提供一个简便的解法。

设简支弯箱梁有满足边界条件的如下近似位移曲线:

1. 刚性截面挠度曲线

$$w = \bar{w} \sin \frac{\pi y}{L} \quad (7-36)$$

2. 刚性截面扭转角

$$\varphi_y = \bar{\varphi}_y \sin \frac{\pi y}{L} \quad (7-37)$$

3. 剪滞翘曲位移

$$v_s = \bar{v}_s \cos \frac{\pi y}{L} \quad (7-38)$$

4. 肋梁错动挠度曲线

$$w_{dl} = \bar{w}_{dl} \sin \frac{\pi y}{L} \quad (7-39)$$

按此可导出(7-29)~(7-31)三式的 Galerkin 方程:

$$\left. \begin{aligned} k_{11} \bar{w} + k_{12} \bar{\varphi}_y + k_{13} \bar{v}_s &= \bar{q}_z \\ k_{21} \bar{w} + k_{22} \bar{\varphi}_y + k_{23} \bar{v}_s &= \bar{m}_y \\ k_{31} \bar{w} + k_{32} \bar{\varphi}_y + k_{33} \bar{v}_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-40)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \left(EI_x + \frac{EI_w}{R^2} \right) \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + \frac{GJ_p}{R^2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \\ k_{12} = k_{21} &= \frac{EI_w}{R} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + \frac{EI_x + GJ_p}{R} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \\ k_{13} = k_{31} &= -EI_{xs} \left(\frac{\pi}{L} \right)^3 \\ k_{22} &= EI_w \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + GJ_p \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \frac{EI_x}{R^2} \\ k_{23} = k_{32} &= -\frac{EI_{xs}}{R} \cdot \frac{\pi}{L} \\ k_{33} &= EI_s \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + GK_s \end{aligned} \right\} \quad (7-41)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_z &= \frac{2}{L} \int_0^L q_y \sin \frac{\pi y}{L} dy \\ \bar{m}_y &= \frac{2}{L} \int_0^L m_y \sin \frac{\pi y}{L} dy \end{aligned} \right\} \quad (7-42)$$

畸变方程(7-32)的 Galerkin 方程为

$$\bar{w}_{dl} \left(EI_d \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + K_d \right) = \frac{1}{L} \int_0^L \left(q_1 - q_2 + \frac{M_x}{b_1 R} \right) \sin \frac{\pi y}{L} dy \quad (7-43)$$

例 7-4 采用 Erans^[24] 的简支矩形弯箱梁模型。该模型用环氧树脂和砂的混合物制成, $E = 13800\text{MPa}$, $\mu = 0.2$, $L = 1552.47\text{mm}$ 。工况 A 为全跨作用均布荷载 $q = 0.0021\text{N/mm}^2$; 工况 B 为二侧腹板跨中各作用集中力 $P = 444\text{N}$; 工况 C 为外侧腹板跨中作用集中力 $P = 444\text{N}$ 。模型横截面如图 7-8。

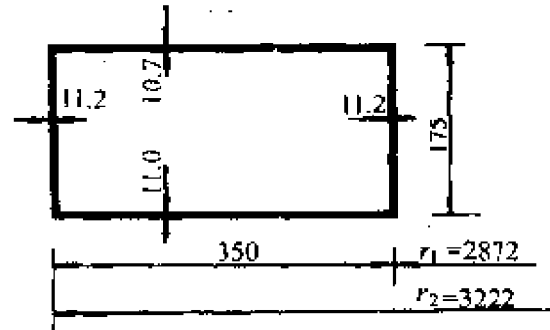


图 7-8 计算模型截面(尺寸单位:mm)

图 7-9 示出三种工况跨中正应力分布。文献^[24]考虑收敛性, 将简支曲梁划分成 120 个单元, 共计 130 个结点 780 个自由度, 实线为其计算值; 虚线为本节 Galerkin 法计算值。可见本节算法简便易行, 且具有很高的精度。

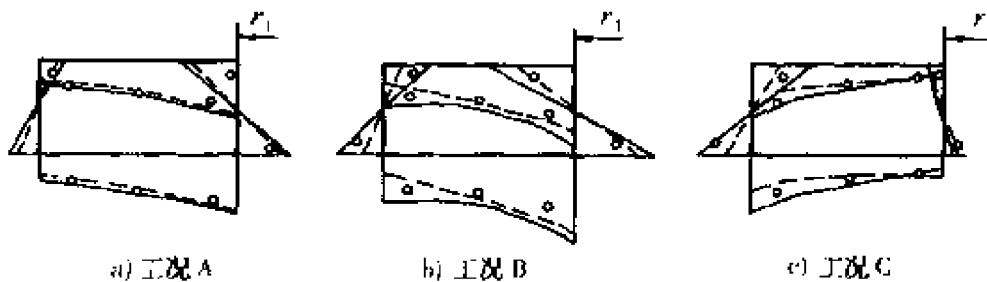


图 7-9 Evans 模型计算比较

另外, 还对例 7-2 进行了计算, 该结果列于表 7-2 的简化解一行中, 它与折板解非常接近。可见此一简化解对于大曲率梁亦是

适用的。

§ 7-5 小 结

板元模式段元法是计算连续的、变截面的直箱梁或弯箱梁桥的有效方法。为检验其计算的可靠性,取用简支梁模型为算例,以作比较。计算表明,与试验值或其它计算值比较符合良好。在此再次要强调,由例 7-1 可以看出,按 Dabrowski 模式算出的畸变应力过大,对其改正是必要的。又对于剪滞效应亦不能忽视,本章的计算考虑了剪滞效应,使弯曲应力增大,应引起设计的注意。这亦是板元模式法的一个优点,它可以将剪滞效应反映到板元应力及其内力中去,而便于配筋设计,无须涉及剪滞系数。对于板元模式段元法而言,考虑剪滞效应是随手可得的事。在例 7-2 中,还证实了所设的剪滞翘曲位移函数对于大曲率弯梁亦是适宜的;对于腹板的畸变转角的能量等效的分析,进而对于弯梁产生附加畸变荷

第八章 肋板式多肋 T 梁桥分析

§ 8-1 引 言

肋板式多肋 T 梁桥如图 2-1c、d 所示。横隔梁在多肋 T 梁桥中起着保证各根主梁相互联结成整体的作用。端横隔梁是必须设置的。而设置中横隔梁,旨在使各主梁在荷载作用下能更好地共同工作,以致荷载横向分布比较均匀,可提高承受单列超重车辆荷载的潜在能力,并可减轻纵向裂缝。关于跨内横隔梁数的分析,像在 § 6-5 对箱梁的讨论那样,可用畸变分析来确定。一旦足够量的横隔梁已经设定,则可视截面为不可变的,就只要按第五章整体截面的弹性薄壁梁桥方程进行变形和内力分析。一般不考虑剪滞效应。

在多肋 T 梁桥的畸变分析中,仍采用与箱梁相同的各肋梁的相对错动模式。但应注意到,箱梁中的各肋梁无相对扭转角,也无相对扭曲率,而在多肋 T 梁桥中则存在不同的相对扭转角。对于弯梁还存在各肋梁的相对错动与扭转角在应变曲率中的耦联。本章首先就要建立起肋梁的应变曲率及其与应变的关系,同时确定其畸变模式和刚度矩阵,进而建立起多肋 T 梁桥的畸变方程。

若在多肋 T 梁桥中,仅设端横隔梁,而不设跨内横隔梁,则刚接梁法^[25]在正交简支多肋梁桥的计算中已被广为应用。它不再将梁桥分成截面不变的和截面可变的。本章将按板元模式法建立其控制方程,形式上与畸变方程相同,便于直接求解,同时亦可以验证畸变方程的正确性。

§ 8-2 肋梁的应变曲率及畸变模式和刚度矩阵

设多肋 T 梁桥的畸变模式如图 8-1 所示。对于 i 号肋梁, 所设的竖向相对错动的纵向位移模式按式(6-19)可以写为

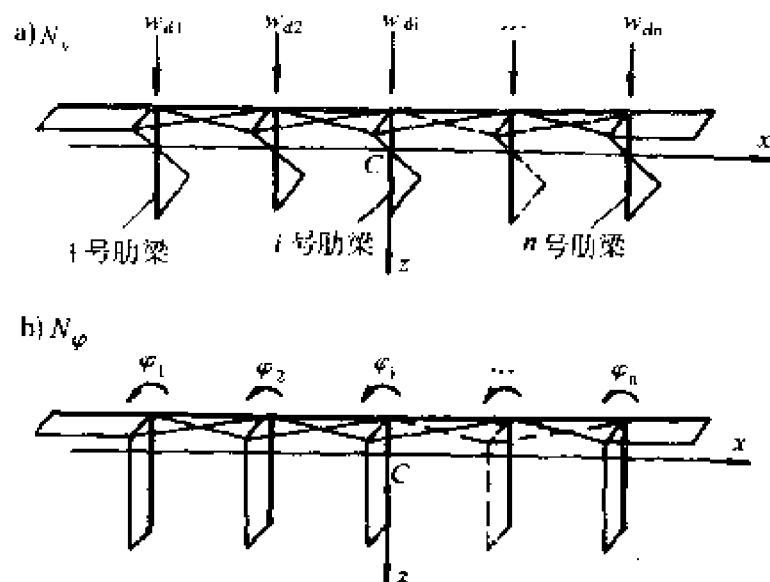


图 8-1 多肋 T 梁桥畸变模式

$$N_{vi} = \begin{cases} N_b a \frac{\sin \phi_{i1}}{\sin \theta_n} + N_o v_{odi}, 0 \text{ 号腹板} \\ N_j \frac{a}{2} \frac{\sin \phi_{ij}}{\sin \theta_n} + N_j v_{odi} (\text{内翼板}) \\ \text{或 } N_o \frac{a}{2} \frac{\sin \phi_{i1}}{\sin \theta_n} + N_o v_{odi} (\text{左外翼板}), 1 \text{ 号翼板} \\ N_i \frac{a}{2} \frac{\sin \phi_{ij}}{\sin \theta_n} + N_i v_{odi} (\text{内翼板}) \\ \text{或 } N_o \frac{a}{2} \frac{\sin \phi_{i1}}{\sin \theta_n} + N_o v_{odi} (\text{右外翼板}), 2 \text{ 号翼板} \end{cases}$$

(8-1)

所设的扭转角模式为

$$N_{\varphi_i} = \begin{cases} N_0, 0 \text{号腹板} \\ N_j (\text{内翼板}) \text{ 或 } N_0 (\text{左外翼板}), 1 \text{号翼板} \\ N_i (\text{内翼板}) \text{ 或 } N_0 (\text{右外翼板}), 2 \text{号翼板} \end{cases} \quad (8-2)$$

设此弯梁桥轴线 y 的曲率半径为 R , 而任一肋梁 i 在腹板上有轴线 y_i , 其曲率半径为 r_i , 则对于肋梁 i 的腹板, 按式(2-15)可写出 1、2 两截面的转角差为

$$d\varphi_{xi12} = \frac{d\varphi_{xi}}{dy_i} dy_i - \frac{\varphi_i}{r_i} dy_i \quad (8-3)$$

按式(2-17)可写出 1、2 两截面的扭转角差为

$$d\varphi_{i12} = \frac{d\varphi_i}{dy_i} dy_i + \frac{\varphi_{xi}}{r_i} dy_i \quad (8-4)$$

式中: $dy_i = r_i d\beta = \frac{r_i}{R} dy$; $\varphi_{xi} = \frac{dw_{di}}{dy_i} = \frac{R dw_{di}}{r_i dy}$

由式(8-3), 按位移模式(8-1), 在肋梁 i 的任一板元上其轴向位移差为

$$dv_{ei2} = N_{vi} d\varphi_{xi12} \quad (8-5)$$

将其除以弧线长 $\alpha \sin\theta d\beta$, 即得线应变:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\beta i} &= \frac{dv_{ei2}}{\alpha \sin\theta d\beta} = N_{vi} \left(\frac{r_i}{\alpha \sin\theta} \frac{d\varphi_{xi}}{dy_i} - \frac{\varphi_i}{\alpha \sin\theta} \right) \\ &= N_{vi} \left(\frac{R^2}{r_i \alpha \sin\theta} \frac{d^2 w_{di}}{dy^2} - \frac{\varphi_i}{\alpha \sin\theta} \right) \\ &= N_{vi} \frac{R^2}{r_i \alpha \sin\theta} \left(\frac{d^2 w_{di}}{dy^2} - \frac{r_i}{R^2} \varphi_i \right) \end{aligned} \quad (8-6)$$

此时, 肋梁 i 的应变曲率对应于纵轴 y 为

$$k_{xi} = \frac{d^2 w_{di}}{dy^2} - \frac{r_i}{R^2} \varphi_i \quad (8-7)$$

而式(8-6)可写成:

$$\epsilon_{\beta i} = N_{vi} \frac{R^2}{r_i \alpha \sin\theta} k_{xi} \quad (8-8)$$

由式(8-4),按扭转角模式(8-2),在肋梁 i 的任一板元上的扭转角差为

$$d\varphi_{i12}^s = N_{\varphi i} d\varphi_{i12} \quad (8-9)$$

对于开口薄壁截面,不计中面的剪应变,其自身扭曲的剪应变按式(3-4),应为

$$\begin{aligned} \gamma_{\zeta i} &= \frac{2\zeta N_{\varphi i} d\varphi_{i12}}{\alpha \sin\theta d\beta} = N_{\varphi i} \frac{2\zeta r_i d\varphi_{i12}}{\alpha \sin\theta dy_i} \\ &= N_{\varphi i} \frac{2\zeta r_i}{\alpha \sin\theta} \left(\frac{d\varphi_i}{dy_i} + \frac{\varphi_{xi}}{r_i} \right) \\ &= N_{\varphi i} \frac{2\zeta R}{\alpha \sin\theta} \left(\frac{d\varphi_i}{dy} + \frac{1}{r_i} \frac{dw_{di}}{dy} \right) \end{aligned} \quad (8-10)$$

此时,肋梁 i 的扭曲率对应于纵轴 y 为

$$k_{yi} = \frac{d\varphi_i}{dy} + \frac{1}{r_i} \frac{dw_{di}}{dy} \quad (8-11)$$

而式(8-10)可写成:

$$\gamma_{\zeta i} = N_{\varphi i} \frac{2\zeta R}{\alpha \sin\theta} k_{yi} \quad (8-12)$$

当为直桥时,则有 $\frac{R^2}{r_i \alpha \sin\theta} \rightarrow 1$, $\frac{R}{\alpha \sin\theta} \rightarrow 1$, 而 $k_{xi} = \frac{d^2 w_{di}}{dy^2}$ 和 $k_{yi} = \frac{d\varphi_i}{dy}$ 。

现取任一板元 ij , 表示 i 和 j 节点分别属于 i 和 j 号肋梁,对于腹板可设 $j=0$, 这样就可将该板元上的线应变写成:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\beta ij} &= \epsilon_{\beta i} + \epsilon_{\beta j} \\ &= \left(N_{vi} \frac{R^2}{r_i \alpha \sin\theta} \quad N_{vj} \frac{R^2}{r_j \alpha \sin\theta} \right) \begin{Bmatrix} k_{xi} \\ k_{xj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8-13)$$

将该板元自身扭曲的剪应变写成

$$\begin{aligned} \gamma_{\zeta ij} &= \gamma_{\zeta i} + \gamma_{\zeta j} \\ &= \left(N_{\varphi i} \frac{2\zeta R}{\alpha \sin\theta} \quad N_{\varphi j} \frac{2\zeta R}{\alpha \sin\theta} \right) \begin{Bmatrix} k_{yi} \\ k_{yj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8-14)$$

于是就不难算出相应的应变能。在此将表 6-1 的 $YB_1(i, h)$ 再补充排列出表 8-1 的 $YB_1(i, h)$ 续表。

$YB_1(i, h)$ 或 $YB_1(j, k)$ 续表

表 8-1

编 号		h 或 k	1	2	3	4	
i 或 j	i_1 或 j_1	肋梁的板元号	形函数 变形分量	$N_1 = N_0 = 1$	$N_2 = N_b = 1/2 - \xi$	$N_3 = N_i = 1 - \xi$	$N_4 = N_j = \xi$
9	16	0	φ_i	$\frac{-v_{odi}}{\alpha \sin \theta}$	$\frac{\sin \psi_{i1}}{\sin \theta_n} \cdot \frac{-a}{\alpha \sin \theta}$		
	17	1	φ_i	左外翼板将此行第四列元素移至此			$\left(\frac{a \sin \psi_{i1}}{2 \sin \theta_n} + v_{odi} \right) \times \frac{-1}{\alpha \sin \theta}$
	18	2	φ_i	右外翼板将此行第三列元素移至此		$\left(\frac{a \sin \psi_{i1}}{2 \sin \theta_n} + v_{odi} \right) \times \frac{-1}{\alpha \sin \theta}$	

而将式(8-10)按表 5-2 的 $YB_2(i, h)$ 制成表 8-2 的 $YB_2(i, h)$ 的续表。

$YB_2(i, h)$ 或 $YB_2(j, k)$ 续表

表 8-2

编 号		h 或 k	1	7	8	
i 或 j	i_1 或 j_1	肋梁的板元号	形函数 变形分量	$N_1 = N_0 = 1$	$N_7 = N_i = 1 - \xi$	$N_8 = N_j = \xi$
5	7	0	φ_i'	$\frac{2\xi R}{\alpha \sin \theta}$		
	8	1	φ_i'	左外翼板将此行第 8 列元素移至此		$\frac{2\xi R}{\alpha \sin \theta}$
	9	2	φ_i'	右外翼板将此行第 7 列元素移至此	$\frac{2\xi R}{\alpha \sin \theta}$	
6	10	0	w_{di}'	$\frac{2\xi R}{r_i \alpha \sin \theta}$		
	11	1	w_{di}'	左外翼板将此行第 8 列元素移至此		$\frac{2\xi R}{r_i \alpha \sin \theta}$
	12	2	w_{di}'	右外翼板将此行第 7 列元素移至此	$\frac{2\xi R}{r_i \alpha \sin \theta}$	

则应有:

$$\left. \begin{aligned} [GJ_{jb}^{ww}] &= [GJ_{jb}^{w\varphi}]^T = \frac{1}{r_i} [GJ_{jb}^{w\varphi}] \\ [GJ_{jb}^{w\varphi}] &= \frac{1}{r_i^2} [GJ_{jb}^{\varphi\varphi}] \end{aligned} \right\} \quad (8-19)$$

全截面畸变沿纵轴 y 的单位长度的纵向弯曲应变能可以写成:

$$U_{jb1} = \frac{1}{2} (w_{di}'' \ \varphi_i) \begin{bmatrix} [EI_{jb}^{ww}] & [EI_{jb}^{w\varphi}] \\ [EI_{jb}^{w\varphi}] & [EI_{jb}^{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{di}'' \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \quad (8-20)$$

而全截面畸变沿纵轴 y 的单位长度的扭转应变能可以写成:

$$U_{jb3} = \frac{1}{2} (\varphi_i' \ w_{di}') \begin{bmatrix} [GJ_{jb}^{\varphi\varphi}] & [GJ_{jb}^{w\varphi}] \\ [GJ_{jb}^{w\varphi}] & [GJ_{jb}^{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i' \\ w_{di}' \end{Bmatrix} \quad (8-21)$$

而全截面畸变沿纵轴 y 的单位长度的横向弯曲应变能可写成:

$$U_{jb2} = \frac{1}{2} (w_{di} \ \varphi_i) \begin{bmatrix} [k_{ww}] & [k_{w\varphi}] \\ [k_{\varphi w}] & [k_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{di} \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \quad (8-22)$$

其中,刚度矩阵按式(6-38)将各板元的贡献在全截面上累加之。

对于畸变弯矩自平衡的条件,仍遵循式(6-29),而未计入由应变曲率因初曲率而存在的扭转角附加项的影响,让其在总方程中自动调整之。于是按式(6-29)和(6-31)有:

$$\{w_{di}\} = [H_d] \{w_{di}\}_{(n-1)} = [H_d] \{w_{dj}\} \quad (8-23)$$

$$\{w_{di}'\} = [H_d] \{w_{di}'\}_{(n-1)} = [H_d] \{w_{dj}'\} \quad (8-24)$$

$$\{w_{di}''\} = [H_d] \{w_{di}''\}_{(n-1)} = [H_d] \{w_{dj}''\} \quad (8-25)$$

其中,记下标 $i = 1, 2, \dots, n$; 而 $j = 1, 2, \dots, (n-1)$ 。于是,式(8-20)~(8-22)的应变能可写成:

$$U_{jb1} = \frac{1}{2} (w_{dj}'' \ \varphi_i) \begin{bmatrix} [EI_{jb}^{ww}]_d & [EI_{jb}^{w\varphi}]_d \\ [EI_{jb}^{w\varphi}]_d & [EI_{jb}^{\varphi\varphi}]_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{dj}'' \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \quad (8-26)$$

$$U_{jb2} = \frac{1}{2} (w_{dj} \ \varphi_i) \begin{bmatrix} [k_{ww}]_d & [k_{w\varphi}]_d \\ [k_{\varphi w}]_d & [k_{\varphi\varphi}]_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{dj} \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \quad (8-27)$$

$$U_{j\text{b}3} = \frac{1}{2} (\varphi_i' \ w_{dj}') \begin{bmatrix} [GJ_{j\text{b}}^{\varphi\varphi}] & [GJ_{j\text{b}}^{\varphi w}]_d \\ [GJ_{j\text{b}}^{w\varphi}]_d & [GJ_{j\text{b}}^{ww}]_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i' \\ w_{dj}' \end{Bmatrix} \quad (8-28)$$

其中,各分块矩阵作如下变换:

$$\begin{aligned} [EI_{j\text{b}}^{ww}]_d &= [H_d]^T [EI_{j\text{b}}^{ww}] [H_d] \\ [k_{ww}]_d &= [H_d]^T [k_{ww}] [H_d] \\ [GJ_{j\text{b}}]_d &= [H_d]^T [GJ_{j\text{b}}] [H_d] \\ [EI_{j\text{b}}^{w\varphi}]_d &= [EI_{j\text{b}}^{\varphi w}]_d^T = [H_d]^T [EI_{j\text{b}}^{\varphi w}] \\ [k_{w\varphi}]_d &= [k_{\varphi w}]_d^T = [H_d]^T [k_{w\varphi}] \\ [GJ_{j\text{b}}^{w\varphi}]_d &= [GJ_{j\text{b}}^{\varphi w}]_d^T = [H_d]^T [GJ_{j\text{b}}^{\varphi w}] \end{aligned}$$

§ 8-3 多肋 T 梁桥的畸变方程

当多肋 T 梁桥的全截面畸变沿纵轴 y 单位长度的应变能已用式(8-26) ~ (8-28)表达,而荷载势能仍可与箱梁一样,用式(6-47)和(6-55)表达,则多肋 T 梁桥畸变的全梁总势能为

$$\Pi_{j\text{b}} = \int_0^l (U_{j\text{b}1} + U_{j\text{b}2} + U_{j\text{b}3} + V_{j\text{b}1} + V_{j\text{b}2}) dy \quad (8-29)$$

对该泛函求 $\delta\Pi_{j\text{b}} = 0$,有:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{j\text{b}} &= \int_0^l \left\{ \begin{Bmatrix} \delta w_{dj}'' \\ \delta \varphi_i \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [EI_{j\text{b}}^{ww}]_d & [EI_{j\text{b}}^{w\varphi}]_d \\ [EI_{j\text{b}}^{\varphi w}]_d & [EI_{j\text{b}}^{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{dj}'' \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \right. \\ &\quad + \begin{Bmatrix} \delta w_{dj} \\ \delta \varphi_i \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [k_{ww}]_d & [k_{w\varphi}]_d \\ [k_{\varphi w}]_d & [k_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{dj} \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \\ &\quad + \begin{Bmatrix} \delta \varphi_i' \\ \delta w_{dj}' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [GJ_{j\text{b}}^{\varphi\varphi}] & [GJ_{j\text{b}}^{\varphi w}]_d \\ [GJ_{j\text{b}}^{w\varphi}]_d & [GJ_{j\text{b}}^{ww}]_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i' \\ w_{dj}' \end{Bmatrix} \\ &\quad - \left. \delta w_{dj} \right\}^T \left\{ \frac{1}{2} q_i - \frac{1}{2} q_n k_j \right\} \\ &\quad - \frac{M_x}{R} \left. \delta w_{dj} \right\}^T [C_j - C_n k_j] \Big| dy = 0 \quad (8-30) \end{aligned}$$

对 $\delta w_{dj}''$ 作二次分部积分, 对 $\delta w_{dj}'$ 和 $\delta \varphi_i'$ 作一次分部积分, 上式可写成:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \left[\{\delta w_{dj}\}^T \left[[EI_{jb}^{ww}]_d \{w_{dj}^{1v}\} + [EI_{jb}^{w\varphi}]_d \{\varphi_i''\} \right. \right. \\
 & + [k_{ww}]_d \{w_{dj}\} + [k_{w\varphi}]_d \{\varphi_i\} \\
 & - [GJ_{jb}^{ww}]_d \{w_{dj}''\} - [GJ_{jb}^{w\varphi}]_d \{\varphi_i''\} \\
 & - \left. \left. \left\{ \frac{1}{2} q_j - \frac{1}{2} q_n k_j \right\} - \frac{M_x}{R} \{C_j - C_n k_j\} \right] \right. \\
 & + \{\delta \varphi_i\}^T \left[[EI_{jb}^{w\varphi}]_d \{w_{dj}''\} + [EI_{jb}^{\varphi\varphi}]_d \{\varphi_i\} \right. \\
 & + [k_{\varphi w}]_d \{w_{dj}\} + [k_{\varphi\varphi}]_d \{\varphi_i\} \\
 & - [GJ_{jb}^{w\varphi}]_d \{w_{dj}''\} - [GJ_{jb}^{\varphi\varphi}]_d \{\varphi_i''\} \left. \right] dy \\
 & + \left[\{\delta w_{dj}'\}^T \left[[EI_{jb}^{ww}]_d \{w_{dj}''\} + [EI_{jb}^{w\varphi}]_d \{\varphi_i''\} \right] \right]' \\
 & - \left[\{\delta w_{dj}\}^T \left[[EI_{jb}^{ww}]_d \{w_{dj}''\} + [EI_{jb}^{w\varphi}]_d \{\varphi_i'\} \right] \right]' \\
 & - \left[[GJ_{jb}^{ww}]_d \{w_{dj}'\} - [GJ_{jb}^{w\varphi}]_d \{\varphi_i'\} \right]' \\
 & + \left. \left[\{\delta \varphi_i\}^T \left[[GJ_{jb}^{w\varphi}]_d \{w_{dj}'\} + [GJ_{jb}^{\varphi\varphi}]_d \{\varphi_i'\} \right] \right]' = 0 \quad (8-31)
 \end{aligned}$$

可推出多肋 T 梁桥畸变的弹性控制微分方程:

$$\left. \begin{aligned}
 & [EI_{jb}^{ww}]_d \{w_{dj}^{1v}\} - [GJ_{jb}^{ww}]_d \{w_{dj}''\} + [k_{ww}]_d \{w_{dj}\} \\
 & + \left[[EI_{jb}^{w\varphi}]_d - [GJ_{jb}^{w\varphi}]_d \right] \{\varphi_i''\} + [k_{w\varphi}]_d \{\varphi_i\} \\
 & = \left\{ \frac{1}{2} q_j - \frac{1}{2} q_n k_j \right\} + \frac{M_x}{R} \{C_j - C_n k_j\} \\
 & \left[[EI_{jb}^{w\varphi}]_d - [GJ_{jb}^{w\varphi}]_d \right] \{w_{dj}''\} + [k_{\varphi w}]_d \{w_{dj}\} \\
 & - [GJ_{jb}^{\varphi\varphi}]_d \{\varphi_i''\} + \left[[EI_{jb}^{\varphi\varphi}]_d + [k_{\varphi\varphi}]_d \right] \{\varphi_i\} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (8-32)$$

对于简支端有边界条件:

$$\left. \begin{aligned}
 & \{w_{dj}\} = \{0\} \\
 & \{\varphi_i\} = \{0\} \\
 & [EI_{jb}^{ww}]_d \{w_{dj}''\} = \{0\}
 \end{aligned} \right\} \quad (8-33)$$

对于简支曲梁可设:

$$\left. \begin{aligned}
 & \{w_{dj}\} = \sum_{k=1}^{2,3,\dots} \{\alpha_k\} \sin \frac{k\pi y}{l} \\
 & \{\varphi_i\} = \sum_{k=1}^{2,3,\dots} \{\beta_k\} \sin \frac{k\pi y}{l}
 \end{aligned} \right\} \quad (8-34)$$

皆满足边界条件。利用 Galerkin 法解方程,可得:

$$\left. \begin{aligned} & [EI_{jb}^{ww}]_d \lambda_k^4 + [GJ_{jb}^{ww}]_d \lambda_k^2 + [k_{ww}]_d \{\alpha_{kj}\} \\ & + \{ [GJ_{jb}^{wp}]_d - [EI_{jb}^{wp}]_d \} \lambda_k^2 + [k_{wp}]_d \{\beta_{ki}\} = \{q_{kj}\} \\ & \{ [GJ_{jb}^{pw}]_d - [EI_{jb}^{pw}]_d \} \lambda_k^2 + [k_{pw}]_d \{\alpha_{kj}\} \\ & + \{ [GJ_{jb}^{pp}]_d \lambda_k^2 + [EI_{jb}^{pp}]_d + [k_{pp}]_d \} \{\beta_{ki}\} = \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (8-35)$$

式中: $\lambda_k = \frac{k\pi y}{l}$;

$$\{q_{kj}\} = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ \left\{ \frac{1}{2} q_j - \frac{1}{2} q_n k_j \right\} + \frac{M_x}{R} \{C_j - C_n k_j\} \right\} \sin \frac{k\pi y}{l} dy$$

此方程可用矩阵求逆解出 $\{\alpha_{kj}\}$ 和 $\{\beta_{ki}\}$, 进而按式(6-29)可算得:

$$\alpha_{kn} = - \sum_{j=1}^{n-1} k_j \alpha_{kj} \quad (8-36)$$

此时式(8-34)的解全部确定。将式(6-25)的 w_{di} 用式(8-7)的 k_{xi} 置换,即为一般弯梁各肋梁的畸变弯矩;用式(8-13)即得各板元畸变的纵向线应变,进而算出该正应力。按式(6-38)的截面畸变横向弯曲的板元刚度矩阵,可求出截面上节点处的纵向分布剪力和弯矩。

式(8-34)的解可以用来讨论跨内不同横隔梁数的效应。设跨内无横隔梁,即 $m=0$,取 $k=1$ 项为解;当跨中有一根横隔梁,即 $m=1$,取 $k=m+1=2$ 项为解;当跨内有均摊的 m 根横隔梁时,则取 $k=m+1$ 项为解。

现仅考虑 i 号肋梁的 α_{ki} 为非零,则方程(8-35)的第一式可简写成:

$$\left(EI_{ii} \lambda_k^4 + GJ_{ii} \frac{1}{r_i^2} \lambda_k^2 + k_{ww}^{ii} \right) \alpha_{ki} = q_{ki} \quad (8-37)$$

即

$$\alpha_{ki} = q_{ki} / \left(EI_{ii} + GJ_{ii} \frac{1}{r_i^2 \lambda_k^2} + k_{ww}^{ii} \frac{1}{\lambda_k^4} \right) \lambda_k^4 \quad (8-38)$$

当 m 足够多时,将 $k=m+1$ 与 $k=1$ 的解相比,且设 q_{ki} 为常量,则近似地有:

$$\frac{\alpha_{(m+1)i}}{\alpha_{1i}} = \frac{EI_{ii} + GJ_{ii} \frac{1}{r_i^2 \lambda_1^2} + k_{ww}^{ii} \frac{1}{\lambda_1^4}}{EI_{ii}} \cdot \frac{1}{(m+1)^4} \quad (8-39)$$

此项比值是 $1/(m+1)^4$ 的速度收敛。

对于多肋 T 梁桥的跨内横隔数的分析,文献^[26]有类似于畸变的相对变形分析方法。分析表明,一般直桥, $l \leq 20\text{m}$ 可设跨中横隔梁一根, $l = 20 \sim 40\text{m}$, 宜设 3 根; $l = 40 \sim 70\text{m}$, 宜设 5 根。对于 $l/R = 1$ 的弯桥,由于肋梁的扭转角的收敛效应稍差,一般 $l \leq 20\text{m}$, 可设横梁 3 ~ 5 根; $l = 20 \sim 70\text{m}$, 宜设 5 ~ 7 根。

§ 8-4 刚接梁法弹性控制微分方程

多肋 T 梁桥的畸变归结为各肋梁的竖向相对错动及扭转,且构成全截面的内力自平衡。其实这一位移模式亦可直接用来计算多肋 T 梁桥^[27],它就是按板元模式法来描述的刚接梁法。

在上面按图 8-1 建立的位移模式中,对于各肋梁,其轴力已自成平衡,且近似地认为其水平弯矩亦接近平衡,而不再考虑水平弯曲的平衡方程。在此按刚接梁法,各肋梁的竖向弯曲及扭转皆作为独立的自由度与外荷载构成平衡方程,它既包含着整体截面的竖向弯曲,又包含着畸变,还包含着扭转及其翘曲,它的应变能可以直接用式(8-20)、(8-22)来表达。这时的荷载势能不再是作用于相对错动位移一半的有效功,而是直接作用于全部位移上;在弯梁上亦不再有因畸变转角引起的附加荷载势能,因而只有:

$$V_{jbl} = - (w_{di} \quad \varphi_i) (q_i \quad m_i)^T \quad (8-40)$$

式中: $(m_i) = \{m_i\}^T = (m_1, m_2 \cdots m_i \cdots m_n)$, 为肋梁节线上的分布力矩;其它同前。

于是全梁有总势能:

$$\Pi = \int_0^l \left[\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{di}'' \\ \varphi_i \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI_{ib}^{wv} & EI_{ib}^{w\varphi} \\ EI_{ib}^{\varphi v} & EI_{ib}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{di}'' \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{di} \\ \varphi_i \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [k_{ww}] & [k_{w\varphi}] \\ [k_{\varphi w}] & [k_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{di} \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varphi_i' \\ w_{di}' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [GJ_{jb}^{w\varphi}] & [GJ_{jb}^{\varphi w}] \\ [GJ_{jb}^{w\varphi}] & [GJ_{jb}^{\varphi w}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i' \\ w_{di}' \end{Bmatrix} \\
& - \begin{Bmatrix} w_{di} \\ \varphi_i \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \end{Bmatrix} \Big] dy \quad (8-41)
\end{aligned}$$

对该泛函求 $\delta\Pi = 0$, 类似于上节的推导, 可得曲线梁桥的弹性控制微分方程:

$$\left. \begin{aligned}
& [EI_{jb}^{ww}] \{w_{di}''\} - [GJ_{jb}^{w\varphi}] \{\varphi_i''\} + [k_{ww}] \{w_{di}\} \\
& + [[EI_{jb}^{w\varphi}] - [GJ_{jb}^{\varphi w}]] \{\varphi_i''\} + [k_{w\varphi}] \{\varphi_i\} = \{q_i\} \\
& [[EI_{jb}^{\varphi w}] - [GJ_{jb}^{w\varphi}]] \{w_{di}''\} + [k_{\varphi w}] \{w_{di}\} \\
& - [GJ_{jb}^{\varphi\varphi}] \{\varphi_i''\} + [[EI_{jb}^{\varphi\varphi}] + [k_{\varphi\varphi}]] \{\varphi_i\} = \{m_i\}
\end{aligned} \right\} \quad (8-42)$$

对于简支端有边界条件:

$$\left. \begin{aligned}
& \{w_{di}\} = \{0\} \\
& \{\varphi_i\} = \{0\} \\
& [EI_{jb}^{ww}] \{w_{di}''\} = \{0\}
\end{aligned} \right\} \quad (8-43)$$

对于简支曲梁可设解为式(8-34), 用 Galerkin 法及正弦项的正交性, 可方便地求得 $\{\alpha_{ki}\}$ 和 $\{\beta_{ki}\}$ 。进而可求得各肋梁的弯矩和剪力:

$$\left. \begin{aligned}
& \{M_i\} = - [EI_{jb}^{ww}] \left\{ w_{di}'' - \frac{r_i}{R^2} \varphi_i \right\} \\
& \{Q_i\} = \left\{ \frac{R}{r_i} M_i' \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (8-44)$$

式中: $\{M_i\} = (M_1 \ M_2 \ \cdots \ M_i \ \cdots \ M_n)^T$

$\{Q_i\} = (Q_1 \ Q_2 \ \cdots \ Q_i \ \cdots \ Q_n)^T$

分别为各肋梁的弯矩和剪力, 而上角标'和''分别记为对 y 轴线的导数。

用文献^[28]的曲线角为 30° 的曲线桥试验模型, 将跨中挠度和

跨中弯矩的横向分布系数 η_w 、 η_m 的计算值 (η_{wc} 、 η_{mc}) 和试验值 (η_{wt} 、 η_{mt}) 比较列于表 8-3, 结果符合得很好。

曲线角 30° 的曲线桥结果比较

表 8-3

加载梁号	梁号	1	2	3	4	5
	项目					
1	η_w	0.5	0.34	0.19	0.05	-0.09
	η_{wc}	0.527	0.354	0.191	0.038	-0.0110
	η_m	0.52	0.29	0.17	0.05	-0.02
	η_{mc}	0.420	0.304	0.203	0.092	-0.020
3	η_w	0.1	0.17	0.22	0.26	0.29
	η_{wc}	0.122	0.173	0.215	0.237	0.252
	η_m	0.09	0.18	0.26	0.25	0.23
	η_{mc}	0.123	0.149	0.198	0.235	0.295
5	η_w	-0.05	0.08	0.18	0.30	0.45
	η_{wc}	-0.051	0.064	0.187	0.324	0.475
	η_m	-0.11	0.03	0.19	0.34	0.57
	η_{mc}	-0.059	0.014	0.195	0.374	0.584

§ 8-5 多肋 T 梁桥段元方程

在上面已经建立起多肋 T 梁桥畸变的全梁总势能式(8-29)和按刚接梁法的全梁总势能式(8-41), 它们有相同的形式, 其差别仅在于前者相对错动的位移变形分量的自由度缩减了一个, 而其荷载势能与畸变效应相对应。

现取段元长为 l , 段元两端的横截面分别为 $i y$ 和 $j y$ 。设该段元的节点位移分量排列为

$$(\Delta_{cy}) = \{\Delta_{ey}\}^T = [(w_{di})_{iy} (\varphi_i)_{iy} (w_{di})_{jy} (\varphi_i)_{jy}] \quad (8-45)$$

其中, 对于畸变式有:

$$(w_{di}) = (w_{d1} \ w_{d2} \ \cdots \ w_{di} \ \cdots \ w_{d(n-1)})$$

对于刚接梁法有:

$$(w_{di}) = (w_{d1} \ w_{d2} \ \cdots \ w_{di} \ \cdots \ w_{dn})$$

扭转角皆有:

$$(\varphi_i) = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_i \ \cdots \ \varphi_n)$$

根据能量泛函中的变形分量的最高阶导数及节点处的连续性条

件,与前面一样,可以设各肋梁段元相对错动的位移函数为

$$w_{die} = (N_{w1} \quad IN_{w3} \quad N_{w2} \quad IN_{w4}) (w_{di1} \quad w_{di1}' \quad w_{di2} \quad w_{di2}')^T$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1) \text{ 或 } n \quad (8-46)$$

其中, w_{di1} 、 w_{di1}' 分别为 iy 截面的肋梁错动及其转角, 而 w_{di2} 、 w_{di2}' 分别为 jy 截面的肋梁错动及其转角。又可设各肋梁段元扭转角的位移函数为

$$\varphi_{ie} = (N_i \quad N_j) (\varphi_{i1} \quad \varphi_{i2})^T \quad (8-47)$$

φ 中的脚标 $i = 1, 2, \dots, n$

其中, φ_{i1} 、 φ_{i2} 分别为截面 iy 和 jy 的 i 号肋梁的扭转角。

将所设的位移函数式(8-46)、(8-47)及其导函数代入式(8-29)或(8-41),可写成:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \{\Delta_{ey}\}^T [K_e] \{\Delta_{ey}\} - \{\Delta_{ey}\}^T \{R_{eq}\} \quad (8-48)$$

其中, $\{R_{eq}\}$ 为等效节点力。而段元刚度矩阵 $[K_e]$ 由式(8-29)或(8-41)中的各刚度矩阵分别转换后叠加而得,它仍可按式(5-48)作转换。类似于表 5-3 和表 6-2,该转换关系如表 8-4 所列。

变形刚度矩阵与段元刚度矩阵转换

表 8-4

项 目	$[EJ_p]$			$[K]$			$[GJ_p]$		
变形分量编号	$i(\text{或 } j)$			$i(\text{或 } j)$			$i(\text{或 } j)$		
变形分量	w_{die}		φ_{ie}	w_{die}		φ_{ie}	w_{die}		φ_{ie}
Δ_1 和 Δ_1'	w_{di1}	w_{di1}'	φ_{i1}	w_{di1}	w_{di1}'	φ_{i1}	w_{di1}	w_{di1}'	φ_{i1}
形函数号 f 或 g	3	5	1	3	5	1	3	5	1
导数阶数 m 或 n	2	2	0	0	0	0	1	1	1
段元刚度行列号 * h 或 k	$3i-2$ 或 $3j-2$	$3i-1$ 或 $3j-1$	$3i$ 或 $3j$	$3i-2$ 或 $3j-2$	$3i-1$ 或 $3j-1$	$3i$ 或 $3j$	$3i-2$ 或 $3j-2$	$3i-1$ 或 $3j-1$	$3i$ 或 $3j$
Δ_2 和 Δ_2'	w_{di2}	w_{di2}'	φ_{i2}	w_{di2}	w_{di2}'	φ_{i2}	w_{di2}	w_{di2}'	φ_{i2}
形函数号 f 或 g	4	6	2	4	6	2	4	6	2
导数阶数 m 或 n	2	2	0	0	0	0	1	1	1
段元刚度行列号 h 或 k	为 * 行的对应值加 nr								

注:①对于畸变式, $nr = 3LS - 2$;

②对于刚接梁法, $nr = 3LS$, 其中 LS 为肋梁数;

③形函数按表 5-4 编号。

设全梁有 n 个段元, 有 $n+1$ 个段元节点——端截面。全梁的各段元节点位移分量依序排列可与式(5-49)相同, 全梁的总势能与节点平衡方程亦与式(5-50)和(5-51)雷同。它仍可以按 § 5-5 的三截面方程, 将其对支座的约束位移作处理后存储求解。对于畸变式, 则可进而按式(6-29)并用式(6-76)算出各段元的 $(w_{dn1y}, w_{dn1y}', w_{dn2y}, w_{dn2y}')$ 。

为计算内力, 该段元的纵向弯曲刚度矩阵 $[K_{ei}]$ 应由 $[EI_{jb}]$ 按式(5-48)作转换而得。相应的两端截面上各肋梁的剪力和弯矩可按式(6-79)那样计算。同样地, 可假设各肋梁的剪力直接由相应的腹板承担。

若该段元已算得某一端截面各肋梁的弯矩: $(M_{di}) = \{M_{di}\}^T = (M_{d1} \cdots M_{di} \cdots M_{dn})$, 则按式(6-25), 一般弯梁有:

$$[EI_{jb}^{*w}] \{K_{xi}\} = - \{M_{di}\} \quad (8-49)$$

于是该截面各肋梁的应变曲率应为

$$\{K_{xi}\} = - [EI_{jb}^{*w}]^{-1} \{M_{di}\} \quad (8-50)$$

进而该截面板元上的线应变由式(8-13)算得, 亦就可得出相应的正应力。还可以按式(5-78)、(5-79)算出该截面板元的轴力和弯矩。

由总方程中直接求得的任一 iy 截面的 ij 板元的位移分量 $(w_{di}, w_{dj}, \varphi_i, \varphi_j)_{iy}$, 可用式(6-38)算出节点处的沿纵向分布的剪力和弯矩。

§ 8-6 多肋 T 梁桥算例

作者曾做过正交简支多肋 T 梁桥的模型试验^[29], 该模型由厚钢板刨铣而成, 端横梁是用环氧树脂胶合上的, 无中间横梁, 具体尺寸如图 8-2 所示。

表 8-5 列出该模型的试验值和按刚接梁法计算的正弦级数解, 正弦级数项取到 $\sin \frac{5\pi y}{l}$, 以及用段元法解的计算值, 其上行按

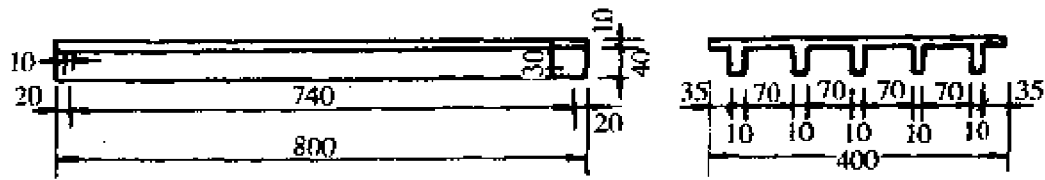


图 8-2 正交简支肋梁桥模型(尺寸单位:mm)

刚接梁法算出,下列按刚性截面与畸变分离算出后叠加而得。可以看出,计算值与试验值符合良好。表 8-5 的比较还表明在前面所建立的畸变分析式的概念是正确的。

正交简支肋梁桥模型的加载肋

跨中加 10kN 结果比较

表 8-5

加载肋号	项目		肋梁号				
			1	2	3	4	5
3	跨中挠度 (mm)	试验值	0.35	0.49	0.58	0.49	0.35
		正弦解	0.253	0.434	0.555	0.434	0.253
		段元解	0.273	0.471	0.601	0.471	0.273
			0.330	0.425	0.488	0.425	0.330
	跨中下缘 线应变 ($\mu\epsilon$)	试验解	142.7	280.0	528.0	280.0	142.7
		正弦解	153.9	290.3	483.9	290.3	153.9
段元解		165.2	312.6	638.0	312.6	165.2	
		232.5	301.7	463.2	301.7	232.5	
4	跨中挠度 (mm)	试验解	0.071	0.268	0.473	0.68	0.648
		正弦解	0.022	0.211	0.434	0.630	0.632
		段元解	0.020	0.229	0.471	0.685	0.690
			-0.009	0.200	0.425	0.637	0.747
	跨中下缘 线应变 ($\mu\epsilon$)	试验解	43.3	142.7	305.5	555.7	419.9
		正弦解	13.2	128.3	290.3	533.0	407.5
		段元解	12.1	140.0	312.6	693.9	439.7
			14.5	145.7	301.7	562.5	509.7

续上表

加载 肋号	肋梁号 项目		1	2	3	4	5
5	跨中挠度 (mm)	试验解	-0.114	0.04	0.31	0.71	1.20
		正弦解	-0.127	0.022	0.253	0.632	1.150
		段元解	-0.146 -0.303	0.020 -0.009	0.273 0.330	0.690 0.747	1.269 1.242
	跨中下缘 线应变 ($\mu\epsilon$)	试验解	30.7	43.3	165.0	392.7	829.0
		正弦解	-79.6	13.2	153.9	407.5	877.2
		段元解	-90.7 -178.7	12.3 12.5	167.4 231.0	445.5 510.4	1070.6 961.6

§ 8-7 小 结

对于肋板式多肋 T 梁桥, 仍可采用按刚性截面的整体分析和可变截面的畸变分析的合成求解, 可称为分离合成法。刚性截面的整体分析的控制方程与箱梁相同, 但一般可不考虑剪滞效应。而可变截面的畸变分析, 比起箱形截面增加了麻烦, 多肋截面的各肋节点的转动角使肋梁产生扭转, 而箱形截面是不出现这种扭转的。对于弯梁而言, 还要考虑肋梁的错动挠曲与扭转之间的应变曲率的耦联。对于不同初曲率的肋梁上的各板元上各点纵向线应变的计算, 与前面的分析相同, 皆要以相对于以梁轴线 y 为基准的转换, 这时所导出的应变曲率与刚性截面的略有不同。以梁轴线 y 为基准是将问题归结为一维, 以使各广义位移函数皆可对 y 轴求解或设置。

肋板式多肋 T 梁桥还可以按刚接梁法直接建立控制方程, 其方程形式与畸变方程相同。但此时的错动挠曲是直接用来描写实际的位移, 可称为直接法。这样就可以对这两种方法进行计算比

较。计算表明,两法的计算结果符合良好,这表明建立畸变方程的一系列概念是正确的。计算还显示出,在集中荷载作用处用直接法算得的变形结果偏大,这是与用截面的等效框架直接作为计算模型削弱了空间作用有关。

建立段元法方程已无实质上的困难,与前面有相同的过程。

第九章 薄壁梁桥设计中的几个问题

§ 9-1 引 言

在前面所研究的是一般的薄壁梁桥问题,假设板元是各向同性的均质板;截面横隔在平面内是无限刚性,而在平面外是无限柔性的;支承正交于梁轴线;不考虑荷载的局部效应,而仅考虑梁的整体变形效应;在荷载作用中未考虑温度与收缩应力及预应力等的初应力。但在设计中会遇到正交异性板面、有限刚度的横隔框架或梁、局部荷载的横向传递、温度与收缩应力及预应力等的初应力、偏心支承及斜交支承等问题。对于这些在设计中要遇到的问题,本章将说明其处理方法。

§ 9-2 正交构造异性板面

肋板式多肋 T 梁桥是一种正交构造异性结构体系,在前面已经研究用刚接梁法来分析,若用等效的连续化板为计算模型,则两正交向就应确定其等效刚度。一般地,纵向和横向的等效抗弯刚度分别为:

$$\left. \begin{aligned} D_y &= \frac{EI_{xi}}{a} \\ D_x &= \frac{EI_{yj}}{b} \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

式中: I_x 、 I_y ——分别为纵、横向 T 形肋梁对各自的形心轴 xi 和 yj 轴的截面惯性矩;

a, b ——分别为纵、横肋的间距。

当无横肋时,则

$$D_x = D_o = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (9-2)$$

式中: t ——板厚。

文献^[30]在计算研究和实验比较中发现,对于无内横肋的肋板系,用 $D_x = D_o$ 作为横向的等效抗弯刚度的折算过小,而宜采用:

$$D_x = D_o + \frac{GJ_{yi}}{2a} \quad (9-3)$$

式中: J_{yi} ——纵向 T 形肋梁的抗扭常数。

文献^[31]从理论上给出了证明。

事实上,对于翼板较薄的无内横肋的肋板系,翼板已处于大挠度变形状态。设翼板中面在 oxy 坐标平面上,则其大挠度的薄板应变^[32]补充了弯曲或扭转的应变后可写成:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - (z - h_o) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

其中,各式右边最后一项为弯曲或扭转的应变; h_o 为纵向 T 梁的中和点离翼板中面的距离。

将上式进行两次相应的求导,可推出如下的应变协调方程:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + h_o \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (9-5)$$

对于无内横肋的肋板系,在翼板中面可取 $\epsilon_x = 0, \gamma = 0$, 而 $\epsilon_y = h_o \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 。于是应变协调方程应为

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (9-6)$$

此即高斯曲率应为零。这一关系对于小挠度当然亦是成立的。高斯曲率为零即表示挠曲面为可展曲面,亦表明抗扭刚度与抗弯刚度有一定的联系。

正交构造异性板的纵向肋梁的均摊抗扭刚度为 $\frac{GJ_{yi}}{a}$ 。由于在等效板中两向的扭率相同,而扭矩相对相等,因而应将 $\frac{GJ_{yi}}{a}$ 平分,而得等效板的纵向肋梁等效抗扭刚度为

$$H^* = \frac{GJ_{yi}}{2a} \quad (9-7)$$

即纵横向的等效抗扭刚度是相同的,因而对纵横向抗弯刚度的贡献亦应相等,设为 D^* 。对于正交构造异性板,可忽略两向的泊桑效应,有:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_y &= -D^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} &= M_{yx} = -H^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

代入式(9-6)可得:

$$\left(\frac{M_{xy}}{H^*} \right)^2 = \frac{M_x M_y}{(D^*)^2} \quad (9-9)$$

而对于各向同性板,忽略泊桑效应时,有:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_y &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9-10)$$

代入式(9-6)可得内力关系:

$$M_{xy}^2 = M_x M_y \quad (9-11)$$

再将其代入式(9-9)可得:

$$D^* = H^* \quad (9-12)$$

即纵肋梁的抗扭刚度对纵横向抗弯刚度的贡献就是 H^* 。对于无内横肋的肋板系有如下的刚度：

$$\left. \begin{aligned} D_y &= \frac{EI_{xi}}{a} + H^* \\ D_x &= D_0 + H^* \\ H &= D_0 + H^* \end{aligned} \right\} \quad (9-13)$$

在板元模式段元法中，当用来分析钢箱梁桥时，如果段元内的各板元无横隔而仅有纵肋，则在计算横向抗弯刚度时就应考虑纵肋梁对它的贡献，而有：

$$D_x = D_0 + H^* \quad (9-14)$$

此时，段元的端横隔往往是一些有限刚度的横隔框架，它可以在段元的端截面上加入横隔框架的横向弯曲的刚度矩阵的贡献。这对于段元法是毫无困难的。

§ 9-3 局部荷载的横向传递问题

在作刚性截面的整体分析时，对于各个荷载可以作刚性截面上的平移简化，最后可以合成为 $(q_x, q_y, q_z, m_x, m_z, m_n)$ ，它们分别是竖向荷载、轴向荷载、水平横向荷载、对于 Cx 轴的力矩、对于 Cz 轴的力矩和对于截面扭心的扭矩，而不需要去区别各个荷载是作用在腹板上还是作用在翼板的任意点上。

但是，在作可变形截面的畸变分析时，对于作用在翼板的任意点上的各个局部荷载简化到腹板节点上去，是需要研究的问题。原则上讲，可按一般的板弯曲的有限元方法，将板元上的局部荷载换算成等效节点力。然而在我们的计算模型中，近似地将横截面用等效平面框架来替代，它不能反映局部荷载的横向传递扩散的空间作用问题。如果桥面上的荷载是一些沿纵轴向为线分布的荷载，而忽略横向传递扩散效应，于是就可以像一般的平面杆件有限元那样，将线分布荷载换算成节线分布荷载。一般地，等效的节线

分布荷载有节线分布力和节线分布力矩。

对于刚度较大的箱梁,不妨将翼板上的线分布荷载按杠杆法分配到相应支承的腹板节线上去,且忽略节线上的分布力矩。如果腹板两侧皆有荷载,其分布力矩会起抵消作用。这种处理方法是简便的,也是接近实际的。对于仅将畸变分析用来研究宜设置多少道跨内横隔数,更是不必顾忌的。

肋板式多肋 T 梁桥与箱梁不同,各 T 梁节线的扭转角直接联系着扭转刚度,对畸变的影响是很敏感的,因而不能忽视节线上的分布力矩。

上面所讨论的是对线分布荷载的近似处理方法,它适宜于处理车队荷载。而对单个超重车辆的验算,则应考虑局部荷载的横向传递扩散效应。原则上说可以用单向板的内力影响面来分析。而在内力组合时,亦需要将局部荷载效应与整体效应进行组合^[33]。至于如何在板元模式法中简化地传递到腹板节线上去,尚需研究。

§ 9-4 温度与收缩应力

就一般的弹性体而言,可承受由于温度变化、材料收缩等引起的初始应变 ϵ_0 ,如图 9-1 所示。设某一梁沿横截面的高度上有一非线性的 ϵ_0 分布,这时,作为梁的纵向纤维间相互约束,且还可以有外支承的约束,而梁的变形应服从平截面假设,其线应变 ϵ 沿横截面的高度呈线性变化。前者作为初始应变 ϵ_0 ,当完全约束其变形时,应有初应力 σ_0 :

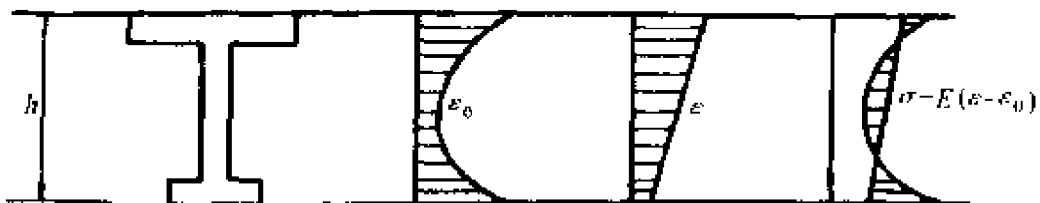


图 9-1 初始应变与弹性应变

$$\sigma_0 = -E\epsilon_0 \quad (9-15)$$

而实际上,梁由此而变形,即形成后者的线应变 ϵ ,它是服从平截面假设的弹性变形。最后形成的应力为

$$\sigma = E\epsilon + \sigma_0 = E(\epsilon - \epsilon_0) \quad (9-16)$$

即温度或收缩应力为弹性应变减去初始应变后的弹性应力。当梁为静定时,这种温度或收缩应力在梁截面上是自平衡的,称为自应力。

将存在着初始应变 ϵ_0 的单位微元体上的弹性应变能写成:

$$U_1 = \frac{1}{2} E(\epsilon - \epsilon_0)^2 \quad (9-17)$$

其变分即为

$$\delta U_1 = \delta\epsilon \times E\epsilon - \delta\epsilon \times E\epsilon_0 \quad (9-18)$$

它符合虚应变能的关系与在 U_1 中存在的常数项无关。于是可以将应变能写成:

$$U_1 = \frac{1}{2} E\epsilon^2 - E\epsilon\epsilon_0 \quad (9-19)$$

按式(5-10),任一截面板元沿纵轴 y 的单位长度的应变能,用上式可改写成:

$$\begin{aligned} U_\epsilon^e &= \frac{1}{2} \int_{\omega} \int_{-v/2}^{v/2} E\epsilon_\beta^2 \frac{\alpha \sin\theta}{R} a d\zeta d\xi \\ &\quad - \int_{\omega} \int_{-v/2}^{v/2} E\epsilon_\beta \epsilon_0 \frac{\alpha \sin\theta}{R} a d\zeta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \{\Delta_\epsilon\}^T [K_\epsilon^e] \{\Delta_\epsilon\} - \{\Delta_\epsilon\}^T \{R_0^e\} \end{aligned} \quad (9-20)$$

其中, $[K_\epsilon^e]$ 仍为式(5-11)的积分,而 $\{R_0^e\}$ 中的任一元素为

$$R_{i0}^e = \sum_h \int_{\omega} \int_{-v/2}^{v/2} EYB_1(i, h) \epsilon_0 N_h \frac{\alpha \sin\theta}{R} a d\zeta d\xi \quad (9-21)$$

式中: ϵ_0 ——沿截面板元 ξ 分布的初始应变,是 ξ 的函数。

对于温度应变,设沿 ξ 的温度改变为 $T(\xi)$,而材料的线膨胀系数为 α ,则温度应变作为初始应变有:

$$\epsilon_0 = \alpha T(\xi) \quad (9-22)$$

式(9-21)可改写成:

$$R_{i0}^e = \sum_{i=1}^n \int_{-v/2}^v \int_{-v/2}^v a E Y B_1(i, h) T(\xi) N_h \frac{a \sin \theta}{R} a d\zeta d\xi \quad (9-23)$$

其中,对应于各变形分量的形函数 N_h 为 ξ 的函数,因而该积分是 $T(\xi) \cdot N_h(\xi)$ 乘积的积分。又 $Y B_1(i, h)$ 的应变系数,对于弯桥皆存在着 $\frac{R}{a \sin \theta}$ 的因子,与积分式中的 $\frac{a \sin \theta}{R}$ 相消,因而,无论是弯桥还是直桥,此积分皆为 $J F_e$ 型。 $\{R_0^e\}$ 在全截面组合成 $\{R_0\}$,增加了控制微分方程的右端项。由式(9-23)算得的 $\{R_0\}$ 对应于式(5-20)的变形分量 $(\Delta_\epsilon) = (u \ u'' \ v' \ w'' \ \varphi_y \ v_1' \ v_2)$,通常,视 $\{R_0\}$ 沿梁的纵轴是不变的。

当采用有限段元法作分析时,应将变形分量 (Δ_ϵ) 用段元的相应的位移函数代入,而作如下式的积分转换:

$$\int_0^l (\Delta_\epsilon) \{R_0\} dy = (\Delta_{ey}) \{R_{\text{req}}\} \quad (9-24)$$

式中: l ——段元长;

(Δ_{ey}) ——按式(5-45)排列;

$\{R_{\text{req}}\}$ ——对应于 (Δ_{ey}) ,由积分转换而得的初始应变的等效作用效应列阵。

此时, $\{R_{\text{req}}\}$ 增加了段元方程的右端项,可作为其中的一个工况。

上面的讨论是按刚性截面作整体分析,它得到的是横截面上的正应力。这种分析方法适用于日照温差应力,其在各截面板元上的温差分布函数 $T(\xi)$ 参照规范或有关资料选用。

预应力混凝土箱梁中出现的纵向裂缝,与剪滞效应及横向温差应力有密切关系。当横向没有预加应力,而纵向有强大的预应力,还将引起横向混凝土抗拉强度的降低。通过对大量试件的试验测定可知,横向混凝土抗拉强度比纵向混凝土的抗拉强度低得多,约为纵向混凝土抗拉强度的 60%,因此横向温差应力对于混

凝土箱梁的影响是一个重要因素,所以一定要验算横向温差应力^[34]。

由于日照降温和寒流降温,沿箱梁四周的板厚会出现非线性的温差分布 $T(\zeta)$,这时可以将全截面作为平面框架,用一般的结构力学方法或有限元法作横向温差应力分析,可见参考文献^[34]。

§ 9-5 预 应 力

对于有粘结预应力混凝土梁,钢筋或索与混凝土已形成整体,用前面的分析方法,可以算出外荷载下全桥的内力包络图,然后可以进行强度设计或验算。分析是在已经配定预应力筋束的状况下进行的。对塑性内力重分布能力较差的预应力混凝土梁,因为直至失效为止全部加载过程中次弯矩始终是存在的,在验算连续梁的极限强度时应考虑次弯矩的作用。

至于有关预应力筋束的配置以及对连续梁的次内力分析,可详见有关文献^[35,36,37]。在此仅简述一些主要概念及在板元模式法中的应用。

为了简化对预应力连续梁的次内力分析,可以对预加力作如下几点假设:

1. 预应力筋的偏心距和梁的跨度相比是很小的,因此预加力的水平分力沿梁全长可以认为是相等的。
2. 忽略因预应力筋的摩擦损失引起的预加力沿程的变化,视预加力沿梁的纵向保持不变。
3. 同样的预应力筋束贯穿于构件的全部长度。
4. 梁的轴向应变不受约束。

根据这些假设,分析时就可以认为:

1. 预加力的轴向分力为常数,其量值等于预加力 p 。
2. 任一截面内混凝土由于预加力引起的初弯矩为:

$$M_1 = pe \quad (9-25)$$

式中: e ——预应力筋面积的形心至混凝土截面形心的偏心距。

由于预加力将对连续梁引起外部反力以及由反力产生的弯矩,分别称为次反力和次弯矩 M_2 ,于是在预应力连续梁的任一截面引起的总预应力弯矩 M 为初弯矩与次弯矩之和,即:

$$M = M_1 + M_2 \quad (9-26)$$

对于预加力引起混凝土应力的分析,亦可以考虑用预应力筋对混凝土构件产生的力来计算。这些力出现于锚具和预应力筋曲线发生改变的部位。后张预应力梁常采用抛物线形预应力筋,如图 9-2 的 AB 梁跨所示,在该梁跨内张拉着抛物线形预应力筋束,在 A 端锚固于截面的形心上,在 B 端锚固于离截面形心为 e 的一点,该筋束在跨中的垂度为 f 。由于抛物线筋束沿全跨的曲率是常量,于是它所承受的是均布荷载 p_s 。根据作用与反作用关系,在混凝土构件上亦作用着与 p_s 相等相反的沿梁轴均布荷载 p_c ,它与两端的锚固力 P 一起,是预应力筋束的等效荷载。其中等效均

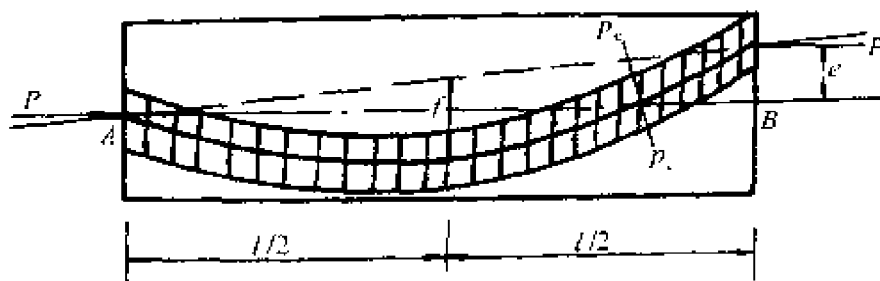


图 9-2 预加力的等效荷载

布荷载为:

$$p_c = p_s = \frac{8pf}{l^2} \quad (9-27)$$

预加力对连续梁引起的总预矩可以用等效荷载法直接求出,不必考虑初弯矩与次弯矩。如需要求次弯矩,则有 $M_2 = M - M_1$ 。

为在连续梁的设计中,做好预应力筋束的配置工作,先要引入两个概念,按直梁叙述之。

1. 线性变换

当预应力连续梁的预应力筋束在各中间支座处的位置被移

动,而不改变该线在每一跨内的原有形状(曲率或弯折)时,称之为线性变换。线性变换的一个重要性质是:线性变换保持预加力引起的总预力矩不变。这一性质可以用等效荷载来理解。如果预应力连续梁的两个端截面上的预加力位置固定而无偏心。中间支座处的预加力的偏心距 e 改变而作线性变换时,各跨内的线形不变。对于抛物线即式(9-27)的 f 不变而等效均布荷载亦不变,中间支座的锚固力左右平衡,于是梁的总预力矩亦必然不变,而初弯矩与次弯矩是会改变的。利用这一性质,可以将预应力筋束的上下保护层设置得适宜。

2. 吻合束

吻合束是:凡预应力产生的压力线能与预应力筋线形相重合的预应力束。所谓压力线(即 C 线)是指连接预应力混凝土梁内各截面压力作用点(即压力中心)而成的轨迹线。一般地,由于存在次弯矩, C 线与预应力筋束是不重合的。而当次弯矩 $M_2 = 0$ 时,则两者相重合。可见,吻合束亦就是次弯矩为零的预应力束。亦是张拉后不会引起支座反力的约束,有时又称为自由束。

吻合束的一个重要性质是,在任意荷载作用下的连续直梁中,用弯矩图的相似图形配置的预应力筋束线形,就是吻合束。当预加力的大小适当时,则荷载弯矩可与预应力的初弯矩相抵消。这对于只承受恒载的连续梁,预应力筋束的吻合束线形是极易布置的。

由于活载的出现,在设计中不能时时满足吻合束的条件。而当运用线性变换时,亦会破坏吻合束的条件。当 C 线与预应力的合力线不重合时,其间距 a 与次弯矩的关系为

$$a = M_2/P \quad (9-28)$$

了解吻合束的概念并不单纯为了寻求预应力布置方法,而是为了掌握次弯矩的性质和预应力的合力线与混凝土压力线之间的关系。在设计中能利用线性变换与吻合束的概念去布置预应力筋,而达到最佳设计效果。

对于连续曲线梁桥,由于弯曲与扭转的耦联,已使线性变换失

效。在曲线梁桥中,又由于预应力筋束具有水平初曲率而产生水平径向力。若预应力能布置在竖直的腹板上,而该腹板的曲率半径为 r_i ,则由预加力 P 引起的径向分布力 p_{sx} 按图 9-3 的 $d\beta$ 微段

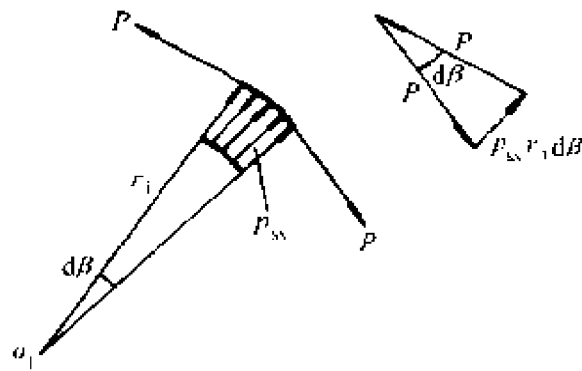


图 9-3 预应力的径向作用力分析

上的平衡关系,有:

$$p_{sx} r_i d\beta = p d\beta \quad (9-29)$$

即得:

$$p_{sx} = P/r_i \quad (9-30)$$

它的竖向位置由预应力束的线形确定。将它在刚性横截面上向扭心简化,可算得预加力的径向等效荷载及其等效扭矩,与竖向的等效荷载一起,就可以用前面的板元模式法的段元方程进行分析。在荷载列阵中,应注意到梁端截面上的预加力作用。

对于“预配索”工作,先算出在“恒载”或“恒载加部分活载”作用下的内力图。用板元模式法可算出各 I 或 T 型肋梁上的轴力、弯矩和剪力 (N_i, M_i, Q_i),它是将按刚性截面分析的应力用畸变分析的各肋梁模式合成的内力,包含着扭转作用。将此内力图近似地用直梁的线性变换和吻合索的概念预配预应力筋束,它亦能起到平衡扭矩的作用。

通过反复的调整和试算,可以使预应力筋配置出满意的结果。剩余内力可布置足够的非预应力钢筋来承担,且能取得较好的延性。

§ 9-6 独立柱点铰支座

对于连续弯梁桥,往往要求桥下具有较大的净空和视野,措施之一是将中间支座做成独立柱点铰支座,在桥的两端还是做成能承受扭矩的抗扭支座。抗扭支座可以由两个或多个点铰组成。点铰由橡胶支座构成。

橡胶支座主要有三种型式^[38]:

1. 加劲板式橡胶支座:一般为矩形板式,中夹加劲钢板,有多种尺寸规格,例如江苏常熟橡胶制品厂生产有 $100\text{mm} \times 150\text{mm} \times 14\text{mm}$ 至 $600\text{mm} \times 600\text{mm} \times 60\text{mm}$ 共 130 多种规格,承压能力 150kN 至 3600kN 不等。

2. 盆式橡胶支座:一般为圆形,在橡胶板外加金属套圈以约束橡胶的侧向变形从而提高其支承能力,国产支座有自 1000kN 以至 20000kN 的规格,大者可达 50000kN 。

3. 滑板式橡胶支座:在上述两类橡胶支座的顶面设置一层四氟乙烯板,其摩擦系数为 0.05 左右,可用做活动支座。

加劲板式橡胶支座的抗压弹性模量受支座的水平面积与胶层侧向面积之比的支座形状系数 S 而变。因为 S 愈大,则橡胶层所受的侧向压缩愈大,使支座的抗压弹性模量增大。表 9-1 所列的为常熟厂生产的板式橡胶支座抗压弹性模量 $E(\text{MPa})$ 的数值。板式橡胶支座的剪切弹性模量约在 $1.2 \sim 1.67\text{MPa}$ 之间。盆式橡胶支座在有侧向约束的情况下,其抗压弹性模量提高到 5400MPa 。

板式橡胶支座受压弹性模量 $E(\text{MPa})$ 表 9-1

S	4	6	8	10	12	14	16	18	20
E	200	340	500	670	860	1060	1310	1590	1900

在弯梁桥上由于初曲率的存在,纵使梁在恒载下亦存在着扭矩,因而独立柱点铰支点的预偏心配置,还可起到消除部分扭矩的作用,就像预应力钢束的配置效果一样。它亦需要“预配置”和反复的调整和试算。

超静定弯梁的另一个问题是,有可能出现某一点铰支点的拔起,尤其在桥台抗扭支座的内支点。因而在支座预偏心的配置与试算过程中,将点铰视为弹性支承是适宜的。

将梁截面作为刚性截面,如图 9-4 所示,其整体位移分量为 (u, v, w, φ) ,截面的扭心点为 $N(x_n, z_n)$ 。设该刚性截面上有一支点为 $B(x_b, z_b)$,于是该支点的位移分量 (u_b, v_b, w_b) 为

$$\left. \begin{aligned} u_b &= u + (z_b - z_n) \varphi_y \\ v_b &= v - x_b u' - z_b w' \\ w_b &= w - (x_b - x_n) \varphi_y \end{aligned} \right\} \quad (9-31)$$

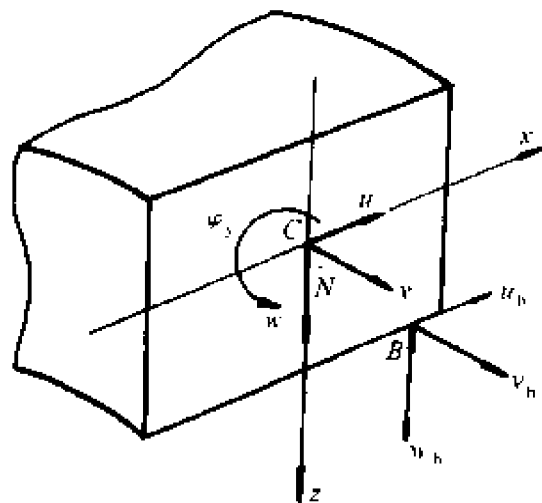


图 9-4 刚性截面的整体位移分量与支点位移分量

其中, v_b 忽略了翘曲和剪滞翘曲的影响。

现设 B 点为弹性支承,对于独立柱点铰支座,将橡胶支座与柱一起可以算得相应的弹性刚度 (k_{ub}, k_{vb}, k_{wb}) 。若设置的为滑板式橡胶支座,则仅有 k_{wb} ,而 k_{ub} 和 k_{vb} 皆为零。对于桥台上的抗扭支座,设置为盆式橡胶支座,各点无水平的位移分量,而仅有竖向 w_b 分量,相应地只要折算出支点的竖向弹性刚度 k_{wb} ,这时的水平刚度 k_{ub} 和 k_{vb} 皆为无穷大(充分大数)。这样就很容易将支点的弹性位移的变形能项叠加到全梁的总刚度矩阵中去。一般地,可以

将支点的弹性位移变形能写成:

$$U_b = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{ub} & 0 & 0 \\ 0 & k_{vb} & 0 \\ 0 & 0 & k_{wb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{Bmatrix} \quad (9-32)$$

将式(9-31)可写为

$$\begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (z_b - z_n) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -x_b & -z_b \\ 0 & 0 & 1 & (x_n - x_b) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_y \\ u' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (9-33)$$

于是可以得:

$$U_b = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_y \\ u' \\ w' \end{Bmatrix}^T [K_b] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_y \\ u' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (9-34)$$

其中,支点的弹性位移刚度矩阵为

$$[K_b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (z_b - z_n) & 0 & (x_n - x_b) \\ 0 & -x_b & 0 \\ 0 & -z_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ub} & 0 & 0 \\ 0 & k_{vb} & 0 \\ 0 & 0 & k_{wb} \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (z_b - z_n) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -x_b & -z_b \\ 0 & 0 & 1 & (x_n - x_b) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-35)$$

这就不难将其叠加到段元方程的总刚度矩阵中去,直接作为支座

条件处理,使方程有解。

当所得的支点反力为上拔力时,则应将橡胶支座的底部垫高,即相当于先设置一个基础底端的强迫位移 $-w_{by}$ 。这时在段元方程的右端应补充一列等效预反力:

$$\{R_b\} = - (0 \ 0 \ 1 \ (x_n - x_b) \ 0 \ 0)^T k_{wb} w_{by} \quad (9-36)$$

它对应于 $(u \ v \ w \ \varphi_y \ n' \ w')$ 的排序。

这样,对于支点的预设置,既包括预偏心的设置,又包括预标高的设置。像预配索那样,可对恒载或恒载加部分活载作用下的内力图及其反力进行反复的调整和试算,还可以与预配索作交替地调整 and 试算,直到满意的结果。我们可以设想,如果将桥端的支点预反力设置得适宜,可以限制其“爬行”。

§ 9-7 斜交支座及位移自由度变换

对于梁端的斜交支座,用段元法分析时,可以取如图 9-5 所示的斜支梯形段元,沿梁轴线 y ,从 iy 截面至 jy 截面有平均长度 l 。在图 a、b 的 iy 截面为梁端斜支,图 c、d 的 jy 截面为梁端斜支,其 AB 线与端横隔板的斜截面相重合,与 x 向成 ψ 角,可称为斜支角,以绕 A 点的逆时针向为正,顺时针向为负,即图 a、c 的 ψ 为正,图 b、d 的 ψ 为负。设端横隔板的斜截面为刚性截面,其扭转角为 φ_x ,它可以由横截面的扭转角 φ_y 和横截面的弯曲转角 $\varphi_x = w'$ 合成,可写成:

$$\varphi_x = \varphi_y \cos \psi + \varphi_x \sin \psi \quad (9-37)$$

该式适用于图 9-5 中的任一斜截面。

若端横隔板置于刚性的抗扭支座上,则有 $\varphi_x = 0$,而式(9-37)应为

$$\varphi_y = -\varphi_x \tan \psi = -w' \tan \psi \quad (9-38)$$

该式限定了其中的一个自由度,即失去了一个自由度。亦就是要将该截面上的位移分量 $(w' \ \varphi)$ 作如下变换:

$$(w' \ \varphi) = (1 \ -\tan \psi) w' \quad (9-39)$$

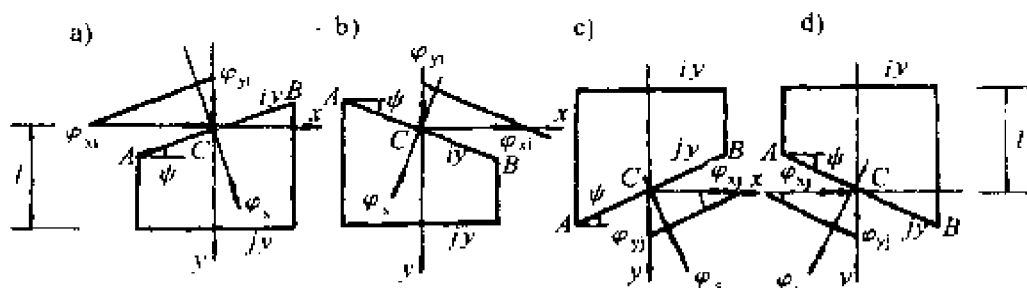


图 9-5 斜支梯形段元

这样,对于固定铰点的抗扭支座,将段元的节点位移分量(Δ_{iy})按式(5-46)排序,就要作如下的变换:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u'_i \\ v_i \\ w_i \\ w'_i \\ \varphi_i \\ v_{ii} \\ v_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\tan\psi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'_i \\ v_{ii} \\ v_{si} \end{Bmatrix} = [H_s] \begin{Bmatrix} w'_i \\ v_{ii} \\ v_{si} \end{Bmatrix} \quad (9-40)$$

其中, (u_i, u'_i, v_i, w_i) 皆受约束, φ_i 亦被式(9-38)制约。如果端横隔板有足够的宽度,以约束端部的扭翘和剪滞翘曲,则 v_{ii} 和 v_{si} 亦应为零,而仅有 w'_i 的一个自由度。当 $\psi = 0$ 时,则成为正交支座的变换,该变换式仍适用。

采用这类变换矩阵 $[H_s]$, 可以很容易地将按三截面方程的等带宽存储的刚度矩阵块及荷载列阵进行变换。若按式(5-58), 对第 i 号截面作变换, 则有:

$$\left. \begin{aligned} [\bar{K}_{ii}]_H &= [H_s]^T [\bar{K}_{ii}] [H_s] \\ [\bar{K}_{i(i+1)}]_H &= [H_s]^T [\bar{K}_{i(i+1)}] \end{aligned} \right\} \quad (9-41)$$

相应的荷载列阵作如下的变换:

$$[\bar{R}_{i1} \bar{R}_{i2} \cdots \bar{R}_{im}]_H = [H_s]^T [\bar{R}_{i1} \bar{R}_{i2} \cdots \bar{R}_{im}] \quad (9-42)$$

它们对应的是有独立自由度的节点位移分量。

对于用滑板式橡胶支座支承的偏心独支,且不考虑弹性压缩时,因

$$w_i - e\varphi_i = 0 \quad (9-43)$$

式中: e ——偏支的 x 坐标值。

于是可以写出如下的变换关系:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u'_i \\ v_i \\ w_i \\ w'_i \\ \varphi_i \\ v_{ti} \\ v_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u'_i \\ v_i \\ w'_i \\ \varphi_i \\ v_{ti} \\ v_{si} \end{Bmatrix} = [H_b] \begin{Bmatrix} u_i \\ u'_i \\ v_i \\ w'_i \\ \varphi_i \\ v_{ti} \\ v_{si} \end{Bmatrix} \quad (9-44)$$

对于弹性支承,只要将相应的弹性支承刚度加到总刚度中去,对其刚性约束则再作变换。

如果要作畸变分析,可在作刚性截面的整体分析时,建议将斜支梯形段元的正交截面取在离钝角一半梁高左右处,视该段元始终为刚性截面,畸变只在正交截面的跨内进行。因而,畸变分析只要作正交支承的分析。

利用变换矩阵 $[H_a]$ 可以缩减变形自由度,取得类似处理删除某些变形方程的效果。例如要处理斜支多室箱梁直桥,可以略去拉压、水平弯曲和剪滞方程,对于任意截面可作如下变换:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u'_i \\ v_i \\ w_i \\ w'_i \\ \varphi_i \\ v_{ti} \\ v_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w'_i \\ \varphi_i \\ v_{ti} \end{Bmatrix} = [H_a] \begin{Bmatrix} w_i \\ w'_i \\ \varphi_i \\ v_{ti} \end{Bmatrix} \quad (9-45)$$

这时的斜支变换为

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u'_i \\ v_i \\ w_i \\ w'_i \\ \varphi_i \\ v_{ti} \\ v_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\tan\psi & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'_i \\ v_{ti} \end{Bmatrix} = [H_s] \begin{Bmatrix} w'_i \\ v_{ti} \end{Bmatrix} \quad (9-46)$$

下面就按这两个变换,作为算例计算一个单箱四室箱梁模型。该模型^[39]是用铝板制成的小尺寸模型,如图 9-6 所示。

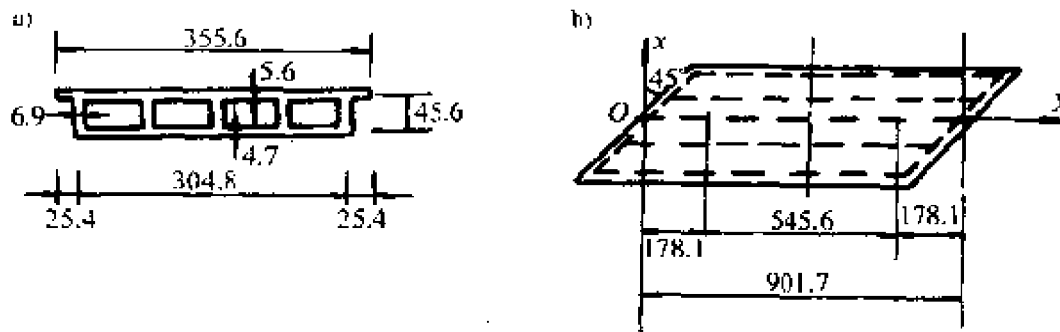


图 9-6 斜支箱梁计算模型(尺寸单位:mm)

沿梁轴线 y 将全梁用正交的横截面分成 8 个段元,其两端段元的轴线长为 178.1mm,中间段元的长度为 90.9mm,如图 9-6b 所示。

图 9-7 示出了文献^[39]的实验曲线和用有限元 CELL 程序算出的计算曲线,同时点出了按板元模式段元法算出的计算点,它们分别是对应于跨中截面顶底板的纵向膜力 $N = \sigma t$ 与跨中集中力 P 的比值。表 9-2 列出了段元法计算值。

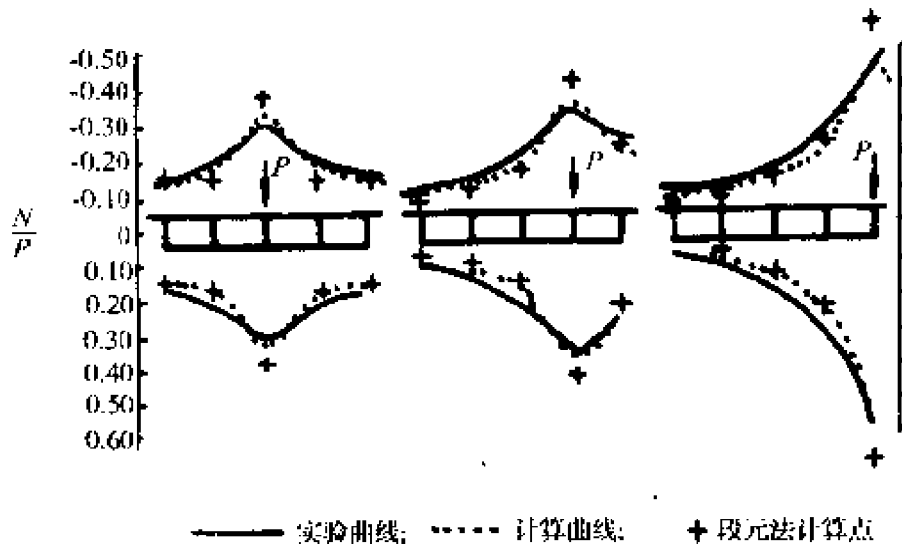


图 9-7 斜支箱梁跨中截面纵向内力分布曲线

板元模式段元法计算值(N/P)

表 9-2

加载肋号	肋号	1	2	3	4	5
	板类					
3号肋	顶板	-0.15	-0.14	-0.39	-0.14	-0.15
	底板	0.15	0.16	0.39	0.16	0.15
4号肋	顶板	-0.08	-0.11	-0.14	-0.43	-0.22
	底板	0.07	0.12	0.16	0.44	0.24
5号肋	顶板	-0.05	-0.07	-0.14	-0.23	-0.59
	底板	0.02	0.07	0.15	0.25	0.70

§ 9-8 斜支多肋 T 梁桥

本节将对斜支多肋 T 梁桥建立弹性控制微分方程,并用 Galerkin 法解出。

设有一等截面的斜交简支多肋 T 梁桥,如图 9-8 所示,桥轴线与 y 轴重合, x 为水平横向坐标轴, z 为竖向坐标轴。两端设置端横梁, x_0 轴与端横梁重合,斜支角为 ψ ,以从 x 轴逆时针转向 x_0 轴

的夹角为正,顺时针为负,图中的 ψ 为负值。按刚接梁法,各肋梁的竖向弯曲位移模式与正交多肋梁桥相同。对于 i 肋梁如图中的 v_i 所示。对于桥面板的横向弯曲,与 x_s 轴平行地取一微条元 dy 为计算模型。

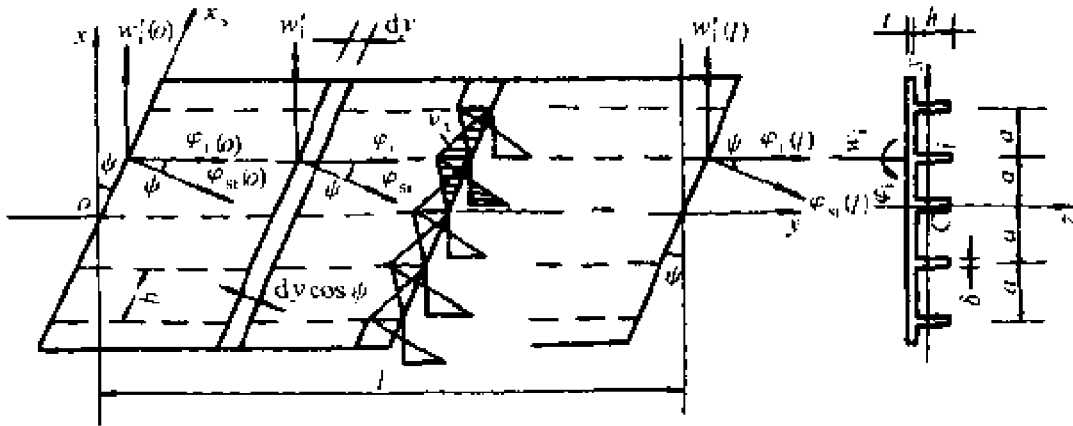


图 9-8 斜支多肋 T 梁桥计算模式

考虑桥面板的横向弯曲,对于 dy 的微条元,垂直于斜截面的宽度为 $dy \cos \psi$ 。设梁肋间距为 a ,则该微条元长度为 $b = a / \cos \psi$ 。对此斜微条元仍采用前面所用的梁的三次多项式位移函数。各肋梁节线上有竖向位移 w_i 和转角 φ_i ,相对于斜微条元有转角:

$$\varphi_{si} = \varphi_i \cos \psi + w_i' \sin \psi \quad (9-47)$$

应注意到,图中的 ψ 为负角。对应于 $(w_i \ w_j \ \varphi_{si} \ \varphi_{sj})$ 位移分量,该微条元的横向弯曲沿 y 向单位长度的刚度矩阵为

$$[K_{ij}^s] = \begin{bmatrix} k_{ww}^s & k_{w\varphi}^s \\ k_{\varphi w}^s & k_{\varphi\varphi}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12D}{b^3} & -\frac{12D}{b^3} & \frac{6D}{b^2} & \frac{6D}{b^2} \\ & \frac{12D}{b^3} & -\frac{6D}{b^2} & -\frac{6D}{b^2} \\ \text{对称} & & \frac{4D}{b} & \frac{2D}{b} \\ & & & \frac{4D}{b} \end{bmatrix} \quad (9-48)$$

式中:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)} \cos\psi \quad (9-49)$$

考虑到式(9-47),将位移分量变换成 $(w_i, w_j, w_i', w_j', \varphi_i, \varphi_j)$,就可将式(9-48)的刚度矩阵变换成下式:

$$[K_{ij}^e] = \begin{bmatrix} k_{ww}^s & k_{w\varphi}^s S & k_{w\varphi}^s C \\ & k_{\varphi\varphi}^s S^2 & k_{\varphi\varphi}^s SC \\ \text{对称} & & k_{\varphi\varphi}^s C^2 \end{bmatrix}$$

式中: $S = \sin\psi, C = \cos\psi$ 。

于是,桥面板的斜截面板元的微条元上的横向弯曲应变能为

$$U_{ij}^e = \frac{1}{2} (w \ w' \ \varphi)_{ij} [K_{ij}^e] (w \ w' \ \varphi)_{ij}^T dy \quad (9-50)$$

式中: $(w \ w' \ \varphi)_{ij} = (w_i \ w_j \ w_i' \ w_j' \ \varphi_i \ \varphi_j)$

若令

$$(w \ w' \ \varphi) = (w_1 \cdots w_i \cdots w_n \ w_1' \cdots w_i' \cdots w_n' \ \varphi_1 \cdots \varphi_i \cdots \varphi_n)$$

则就可将全斜截面的微条元的横向弯曲应变能按各板元叠加成:

$$U_{hw} = \frac{1}{2} (w \ w' \ \varphi) [K_{hw}] (w \ w' \ \varphi)^T dy \quad (9-51)$$

其中, $[K_{hw}]$ 由各板元的 $[K_{ij}^e]$ 组装而得,记为

$$[K_{hw}] = \begin{bmatrix} k_{hw}^{ww} & k_{hw}^{ww'} & k_{hw}^{w\varphi} \\ k_{hw}^{w'w} & k_{hw}^{w'w'} & k_{hw}^{w'\varphi} \\ k_{hw}^{\varphi w} & k_{hw}^{\varphi w'} & k_{hw}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (9-52)$$

对于纵向的竖直弯曲,在全斜截面的微条元上的刚度矩阵,直桥仍可直接取用式(6-23)记为 $[EI]$,它对应于:

$$(w'') = (w_1'' \cdots w_i'' \cdots w_n'') \quad (9-53)$$

而纵向扭转的刚度矩阵,仍可直接取用式(8-18),记为 $[GJ]$,它对应于:

$$(\varphi') = (\varphi_1' \cdots \varphi_i' \cdots \varphi_n') \quad (9-54)$$

于是全梁的总势能可写成:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (w'') [EI] \{w''\} dy$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^l (\varphi') [GJ] \{\varphi'\} dy \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l (w \ w' \ \varphi) [K_{hw}] \begin{Bmatrix} w \\ w' \\ \varphi \end{Bmatrix} dy \\
& - \int_0^l (w) \{q\} dy - \int_0^l (\varphi) \{m\} dy \quad (9-55)
\end{aligned}$$

式中: $\{q\} = \{q\} = (q_1 \cdots q_i \cdots q_n)$, 为肋节线分布力;

$\{m\} = \{m\} = (m_1 \cdots m_i \cdots m_n)$, 为肋节线分布力矩。

将该总势能取 $\delta H = 0$, 并进行变分降阶的分部积分运算, 可得:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l (\delta w) [EI] \{w'''\} dy - [(\delta w) [EI] \{w'''\}]_0^l + [(\delta w') [EI] \{w''\}]_0^l \\
& - \int_0^l (\delta \varphi) [GJ] \{\varphi''\} dy + [(\delta \varphi) [GJ] \{\varphi'\}]_0^l \\
& + \int_0^l (\delta w \ \delta \varphi) \begin{bmatrix} [-k_{hw}^{w'w'}] & [k_{hw}^{ww'} - k_{hw}^{w'w}] & [k_{hw}^{w\varphi}] & [-k_{hw}^{w'\varphi}] & [k_{hw}^{w\varphi\varphi}] \\ [0] & [k_{hw}^{\varphi w'}] & [k_{hw}^{\varphi\varphi}] & [0] & [k_{hw}^{\varphi\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \\
& \quad \times (w'' \ w' \ w \ \varphi' \ \varphi)^T dy \\
& + (\delta w) [[k_{hw}^{w'w}] \ [k_{hw}^{w'w'}] \ [k_{hw}^{w'\varphi}]] (w \ w' \ \varphi)^T]_0^l \\
& - \int_0^l (\delta w) \{q\} dy - \int_0^l (\delta \varphi) \{m\} dy = 0 \quad (9-56)
\end{aligned}$$

考虑到边界条件:

$$w_i = 0 \quad (9-57)$$

和

$$\varphi_{si} = 0 \quad (9-58)$$

由式(9-45)有:

$$\varphi_i = -w_i' \tan \psi \quad (9-59)$$

即有:

$$\{\delta\varphi\} = -\tan\phi\{\delta w'\} \quad (9-60)$$

将其代入式(9-56),则应有自然边界条件:

$$[EI]\{w''\} - \tan\phi[GJ]\{\varphi'\} = \{0\} \quad (9-61)$$

为简化该式,将按式(6-27)计算成各肋梁独立的抗弯刚度:

$$EI_{di} = \sum_{j=1}^n EI_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9-62)$$

同样,对于各肋梁独立的抗扭刚度计算为

$$GJ_{di} = \sum_{j=1}^n GJ_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9-63)$$

于是,式(9-61)可以写成:

$$w_i'' - \varphi_i' C_i \tan\phi = 0 \quad (9-64)$$

式中: $C_i = GJ_{di}/EI_{di}$

由于 $(\delta w \delta\varphi)$ 的任意性,可得弹性控制微分方程:

$$\left. \begin{aligned} & [EI]\{w^{iv}\} - [k_{hw}^{w'w'}]\{w''\} + [k_{hw}^{ww'} - k_{hw}^{w'w}]\{w'\} \\ & + [k_{hw}^{ww}]\{w\} - [k_{hw}^{w\varphi}]\{\varphi'\} + [k_{hw}^{w\varphi}]\{\varphi\} = \{q\} \\ & [k_{hw}^{\varphi w'}]\{w'\} + [k_{hw}^{\varphi w}]\{w\} - [GJ]\{\varphi''\} \\ & + [k_{hw}^{\varphi\varphi}]\{\varphi\} = \{m\} \end{aligned} \right\} \quad (9-65)$$

当 $\phi = 0$ 时,则该方程组及边界条件皆转变为正交简支直梁桥。

现用 Galerkin 法求解。设在斜坐标系中各肋梁有三角级数解:

$$\left. \begin{aligned} w_i &= ((1 - \cos\lambda_2 y)(\cos\lambda_1 y - \cos\lambda_3 y))(\alpha_{i1} \alpha_{i2})^T \\ &+ (\sin\lambda_1 y \sin\lambda_2 y \sin\lambda_3 y \sin\lambda_4 y)(\beta_{i1} \beta_{i2} \beta_{i3} \beta_{i4})^T \\ \varphi_i &= (\cos\lambda_1 y \cos\lambda_2 y)(\psi_{i1} \psi_{i2})^T \\ &+ (\sin\lambda_1 y \sin\lambda_2 y \sin\lambda_3 y \sin\lambda_4 y)(\varphi_{i1} \varphi_{i2} \varphi_{i3} \varphi_{i4})^T \end{aligned} \right\} \quad (9-66)$$

式中: $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

其实,级数项可取得更多。对于正交简支梁桥,其解应不出现余弦项。式(9-66)已满足边界条件式(9-57),再根据式(9-59)、(9-64),可推出:

$$\begin{cases} \alpha_{i0} \\ \alpha_{i1} \\ \psi_{i1} \\ \psi_{i2} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_i}{\lambda_2} & 0 & \frac{C_i \lambda_4}{\lambda_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-C_i \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} & 0 & \frac{-C_i \lambda_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \tan \phi \{ \delta_i \} \quad (9-67)$$

式中: $\{ \delta_i \} = (\beta_{i1} \beta_{i2} \beta_{i3} \beta_{i4} \varphi_{i1} \varphi_{i2} \varphi_{i3} \varphi_{i4})^T$

这样, w_i 和 φ_i 完全可由待定系数 $\{ \delta_i \}$ 来确定。

将用 $\{ \delta_i \}$ 表达的式(9-66)代入微分方程式(9-65), 并分别以 $\sin \lambda_k y$ ($k = 1, 2, 3, 4$) 为权函数, 注意到

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \lambda_m y \sin \lambda_n y dy &= \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ l/2, & (m = n) \end{cases} \quad (9-68) \\ \int_0^l \sin \lambda_m y \cos \lambda_n y dy &= \begin{cases} 0, & (m - n, m + n \text{ 为偶数}) \\ \left(\frac{1}{m - n} + \frac{1}{m + n} \right) \frac{l}{\pi}, & (m - n, m + n \text{ 为奇数}) \end{cases} \end{aligned} \quad (9-69)$$

即可得广义 Galerkin 方程, 解出全部待求系数, 进而求出挠度和应力。如 i 肋梁的腹板有应力:

$$\sigma_i = -E v_i w_i'' \quad (9-70)$$

其中, v_i 为 i 肋梁的位移模式。上述计算可在微机上编程实施之。

用文献^[40]的试验及其有限元计算结果, 与上述算法加以比较。该五肋斜交简支梁桥模型, 斜支角 $\psi = 45^\circ$, 肋板的 $E = 3176\text{MPa}$ 和 $\mu = 0.335$, 桥面板的 $E = 3354\text{MPa}$ 和 $\mu = 0.390$, 其它尺寸见图 9-9。该计算模型的集中力 $P = 100\text{N}$ 作用在桥面板的自由边边缘的中点, 按本节的计算模式, 应将其静力等效地以横向最短距离简化在该边肋梁的节线上, 且伴随一附加力矩。将集中力直接平移至肋梁节线, 而附加力矩考虑其传递扩散效应, 取其一半

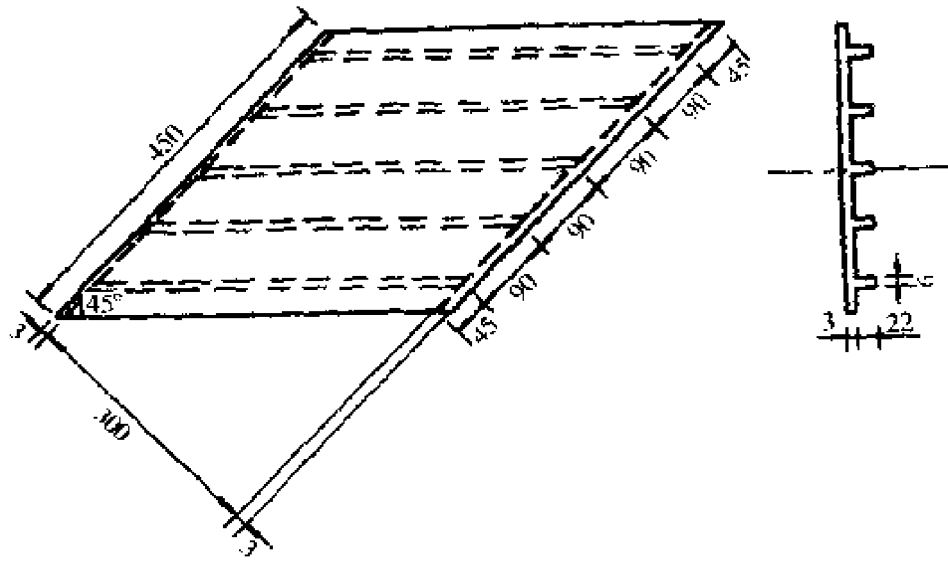


图 9-9 斜交简支梁桥模型(尺寸单位: mm)

作为集中力矩计算。计算比较示于图 9-10 和 9-11。同时绘出按

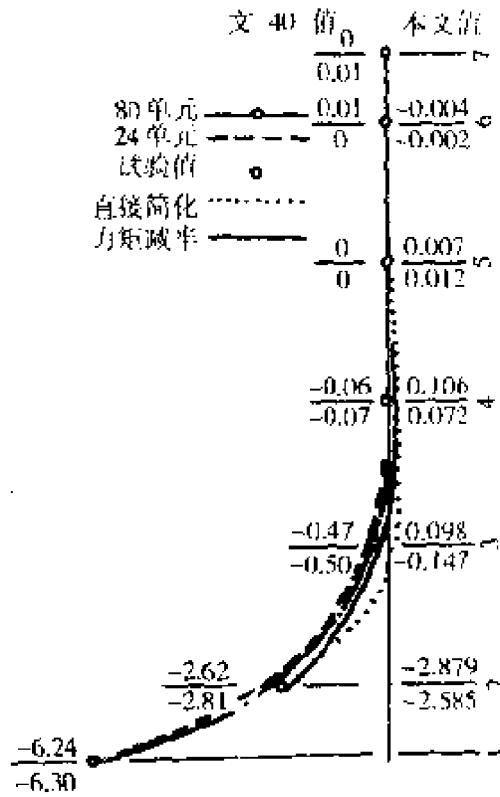


图 9-10 各肋中点挠度 (mm)

直接简化平移力和力矩的计算结果。可以看出,其计入附加力矩的作用过大,而按一半计算其附加力矩符合良好。

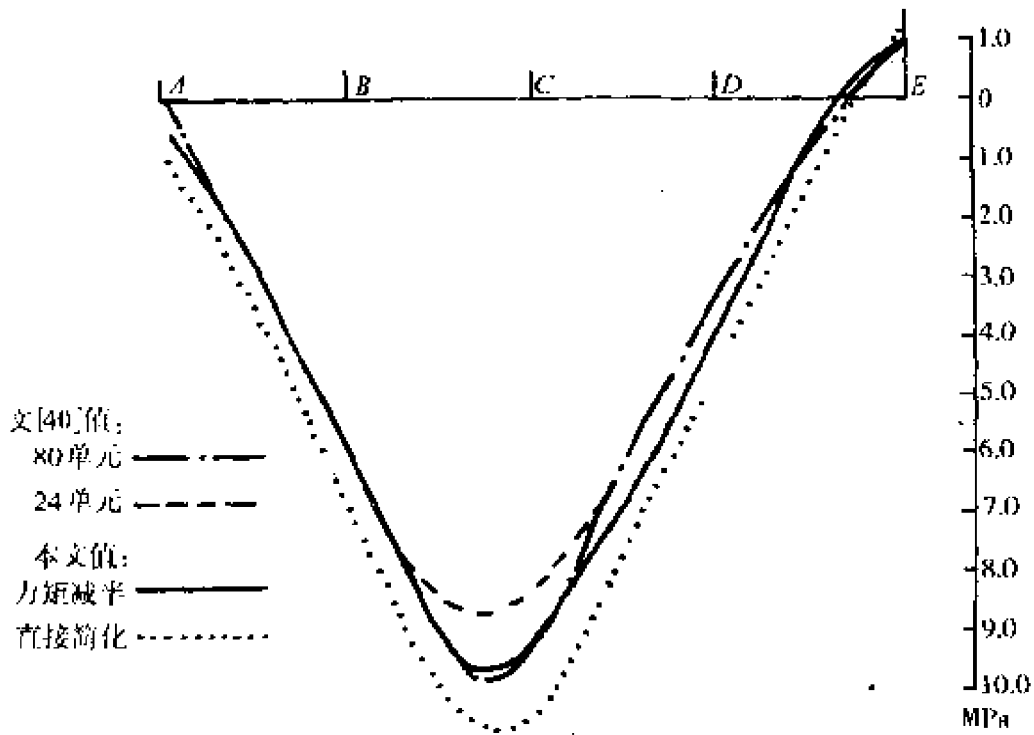


图 9-11 加载边肋底应力(MPa)

§ 9-9 小 结

对于正交构造异性板面,肋的抗扭刚度对抗弯刚度的贡献,在计算钢箱梁桥时应引起注意。对于横隔框架有限刚度的引入,在段元法中亦是无困难的。

由于用等效平面框架来描述横截面的工作,削弱了局部荷载的横向传递扩散的空间作用,对于沿梁轴的线分布荷载影响尚小,而对于集中荷载则不能忽视其空间作用。如何进行简化为宜,尚须研究。在 § 9-8 的算例中的边力矩的折半是一种近似处理方法。

温度或徐变等伸缩必定引起初应变,弹性应变减去初应变后的应变才产生弹性应力,应变能亦由此产生。因而,初应变的存在

亦相当于增加了荷载势能项,根据初应变在截面板元上的分布设定是不难算出此项算值的。于是此项弹性应力就能算出。关于初应变沿板元的变化引起的横向弯曲应力,则可以直接按横截面的等效平面框架来计算。应该注意到预应力混凝土梁对横向强度的削弱。

设计比分析要来得复杂。对于连续梁的预应力筋束的配置,利用线性变换和吻合束这两个概念,使得设计有了着手点。即使对于弯梁,亦可近似地应用之。最终要配置出满意的预配索,还是要通过反复的调整和试算。板元模式段元法可以用等效荷载,做到直接对各肋梁进行预配索,且包含着对扭矩的配置。

独立柱点铰支座的偏心设置,对弯梁亦可以起到对扭矩的配置作用。按弹性支点来分析,还可以算出支反力的大小。当支反力出现上拔力时,还可将支点预先垫高,这亦是个设计问题,要通过反复的调整和试算。

斜交支座以及如不考虑剪滞效应的计算,当一般地对任一截面进行三截面方程的等带宽存储前,可以用减少位移自由度的变换矩阵进行变换。对于正交截面的支座亦可如此处理,是很方便的。对于斜支端的段元可不考虑截面的畸变,因而对畸变分析只是在正交跨段内进行,算例表明是可行的。

本章的最后一节,提供对斜支多肋 T 梁桥的弹性控制微分方程及其近似的解析解,可供设计实用。它亦适用于正支多肋 T 梁桥。

第十章 板元模式段元法的程序实施要点

§ 10-1 引 言

前面已经研究了用截面板元位移模式法来描述梁截面各种基本变形,并且一般地可用有限段元法来求解。本章将其归纳起来,形成一个计算程序的实施思路,一方面可以对板元模式段元法形成一个完整的概念,另一方面对于编程者有一个着眼点。下面按小节,将一一加以说明。

§ 10-2 基本输入

假定所分析的梁桥的箱室或梁肋的个数沿全桥跨是不变的,梁宽是不变的,各段元的梁高可以不同,各板元的板厚可以变化。这样就可以将全截面的各板元、节点及肋梁分别编号,且各段元有相同的编号。如图 10-1 所示,将各板元、节点及肋梁的编号,按自左至右,自上至下的顺序。图中将①、②、…记为板元号;1、2、…记为节点号;[1]、[2]、…记为肋梁号。

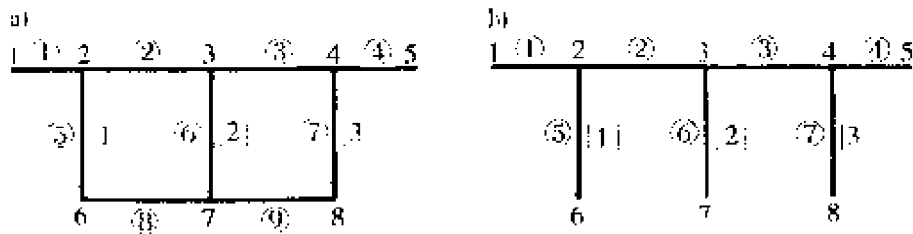


图 10-1 全截面各板元、节点及肋梁的编号

需要输入的基本数据可分为编号个数、截面数据和段元数据:

1. 编号个数:包括截面个数、板元个数、节点个数、肋梁个数、段元个数。

2. 截面数据:包括截面号、节点初始坐标、各板元号下的线弹性模量、泊桑比、剪切弹性模量、板厚、板类指数(顶、腹、底板)、左右节点号、左右肋号(无肋为零)。其中,节点初始坐标以1号节点为(0,0)的各节点的初始坐标 (x_j, z_j) 。子程序可自动算出该截面的各板元宽度和倾角,再求出截面的形心坐标,进而可以算出过形心坐标系 C_{xz} 的各节点坐标值 (x_{ic}, z_{ic}) ,且可以画出截面图以作校核。还应编出肋梁腹板、左右上翼板、左右下翼板的板元号以及左右翼板或外伸板的板类指数。

3. 段元数据:包括段元号、直梁段元或弯梁段元指数、1号节点的曲率半径、1号节点的节线长、所采用的截面号。按截面的形心可算出该段元的轴线长。

§ 10-3 形导函数的输入及其乘积的积分

在截面板元或段元轴长上的位移、变形分量或应变,皆要用形函数或其导函数来表达。这些形函数如式(2-28)~(2-32)和式(5-33)所示,其导函数遵循式(2-33)的运算规则。如在§2-9中所介绍的,将各个形函数编号 k ,再按其导函数的阶数编号 i ,再将其各次幂项的系数存入 $N(k, i, j)$ 矩阵中,其中 j 为幂次。形函数的各阶导函数对应于单元长度的计算系数,亦可存入如表 5-4 所列的 $DSK(j, k)$ 矩阵中,以便计算调用。

有了上面的 $N(k, i, j)$ 存储,对于形导函数乘积的无量纲积分就可按 § 2-9 中所述的编程积分,并将其存储在 $NNJF$ 矩阵中,其中 JF_a 型与板元的 ξ_i 无关, JF_b 和 JF_c 型与板元的 ξ_i 有关,可分别编出子程序计算之。

§ 10-4 截面板元位移模式下的应变

在截面上各板元的应变,现在通过位移模式用形导函数对应各种基本变形来描述。对于拉压弯,直接采用半截面假设的位移模式;对于扭转和扭翘用绕扭心的刚性截面转角和截面翘曲的位移模式,应该按 § 3-2 所研究的来确定截面的扭心和各节点的扭翘位移分量 v_{nqi} ;对于剪滞的翘曲位移模式,按 § 4-6 所研究的,以基准板元的剪滞翘曲分量 v_{sj} 来确定其余各板元的剪滞翘曲分量 $v_{sk} = C_{sk} v_{sj}$;对于畸变的位移模式是一种各肋梁竖向相对错动的模式,按此要作截面框架的机动分析,以确定各板元的横向弯曲的节点位移分量,再对于肋梁错动的纵向弯曲位移模式,要按 § 6-2 来确定各肋梁保证轴力自平衡的 v_{odi} 分量。上述对于各种基本变形所要确定的位移模式的相应分量,皆可编出子程序。

各种基本变形的截面板元位移模式确定后,就可以用形导函数来描述各板元的应变,如表 5-1、表 5-2 和表 6-1 所列。它们亦分别用子程序编出 YB_1 和 YB_2 矩阵。

§ 10-5 截面板元的刚度矩阵计算

截面板元的应变能按式(5-10)和式(5-17)计算,相应的刚度矩阵对应于各变形分量的任一元素按式(5-11)和式(5-18)进行积分。利用已经按各变形分量和形导函数编算出的 YB_1 和 YB_2 矩阵,此一积分是容易实施的。积分时会遇到 JF_a 、 JF_b 、 JF_c 三种积分类型,这些可以有专门子程序供调用。在计算截面刚度矩阵时,应将板元的中面应变的刚度矩阵与板元自身弯曲或自身扭曲的刚度矩阵分开。一般仅需作中面的应力分析时,可忽略后者的刚度。除了开口薄壁截面的抗扭刚度,就是自身扭曲刚度而不能忽略。

应该注意到,对于圆柱曲板,应将 $\alpha \sin \theta \rightarrow r_{1x}$, 且 $\frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$; 对于

直梁,应将 $\frac{1}{\alpha \sin \theta} \rightarrow 0$, $\frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$, 而 $\frac{R}{\alpha \sin \theta} \rightarrow 1$ 。在 YB_1 和 YB_2 矩阵中,亦应有相应地替换。

将全截面各板元的截面刚度矩阵相对于各变形分量组装起来,即为全截面刚度矩阵,并编出子程序。

§ 10-6 畸变刚度矩阵及荷载列阵

对于箱形截面,各肋梁相对错动的纵向弯曲刚度矩阵,用表 6-1 的应变矩阵 YB_1 ,按式(5-11)计算各板元的截面刚度矩阵元素,组合成各肋梁以至全截面的相对于畸变变形分量的刚度矩阵式(6-23)。再按式(6-27)、(6-29)算出各肋梁的抗弯刚度 EI_{di} 及其 K_i 。考虑畸变弯矩自平衡的条件,构成变换矩阵 $[H_d]$,将截面刚度矩阵 $[EI_{jb}]$ 按式(6-32)聚缩变换成 $[EI_d]$ 。应将 $[EI_{jb}]$ 和 $[EI_d]$ 分别存储,以便在计算中可各自调用。这些要编出一个子程序。

对于畸变的横向弯曲刚度矩阵,要按式(6-38)编算截面板元的刚度矩阵,进而组合成全截面横向弯曲的刚度矩阵 $[K_{jb}]$,它亦要按式(6-42)作聚缩变换成 $[K_d]$ 。 $[K_{jb}]$ 和 $[K_d]$ 亦要分别存储。这些都要编出子程序。

对于畸变的荷载列阵,输入后亦要按式(6-47)进行变换。对于弯梁,还要考虑因腹板的等效畸变转角 θ_w ,由式(6-52、53)算出,再按式(6-54、55)算出相应的荷载列阵,将其编成子程序。为此应将在刚性截面分析中得到的 M_s 存起来,以作调用。

对于多肋 T 梁桥,还要引入肋梁绕其节线的扭转角,并算出截面畸变的扭转刚度矩阵式(8-18)。对于弯桥,应考虑初曲率对应变曲率的影响,还要算出式(8-16)和式(8-19)的刚度矩阵块。再要按式(8-23)~(8-28)进行聚缩变换。变换前后的刚度矩阵亦要分别存储,将其亦编成子程序。

这些未聚缩的刚度矩阵在计算截面板元的内力时要用到的。对于刚接梁法则需要直接用它来形成段元的刚度矩阵。

§ 10-7 段元刚度矩阵的形成

上面所谈到的形成各种基本变形的截面刚度矩阵,是相对于截面的变形分量的刚度矩阵,它是取沿梁轴一单位长度的应变能而得。由它来形成段元刚度矩阵,先要将各变形分量用段元沿轴向的位移函数来表达,并应作应变能沿段元轴线的积分,而得出相对于段元节点位移分量的段元刚度矩阵。这种将截面变形刚度矩阵转变成段元刚度矩阵,遵循式(5-48)的运算,其中, DXS 按表 5-4 或表 6-2 所列,并应编出子程序。

§ 10-8 三截面方程的等带宽存储及其求解

按三截面方程的等带宽存储可节省大量内存,还可提高运算效率。在此先应输入全梁分段数及各段所用的段元号。

用上面算出的段元刚度矩阵,它涉及前后两个截面的位移分量。对于刚性截面的整体分析,按式(5-46)各截面有 8 个位移分量;对于箱梁畸变,按式(6-74)各截面有 $2(LS - 1)$ 个位移分量,其中 LS 为肋梁数。设全梁用段元剖分,共有 n 个截面,则全梁的总刚度矩阵按式(5-54)存储,共有 $n \times 8^2 \times 2$ 或 $n \times 4 \times (LS - 1)^2 \times 2$ 个元素。 m 个工况的荷载列阵,按式(5-53)作相应的存储。对于段元内的非节点荷载,按一般杆件单元的方法,将其折算成等效节点力后才能存入。上述将各段元的刚度矩阵形成全梁总刚度矩阵及其荷载列阵的过程应编出子程序。

按截面逆阵消元法,如式(5-65)、(5-66)所示,应具备有中间存储的矩阵,以便按式(5-67)作回代求解。在对各截面的刚度矩阵求逆前,应作好支承约束条件的处理。这些要另编一个子程序。

§ 10-9 弹性支承的刚度矩阵

如果将支点视为弹性支承,并算出各向的弹性刚度,对于受约

束向可处理成有充分大数的刚度,于是就可按式(9-35)算出支点的弹性位移刚度矩阵,它是对应于各段元端截面的位移分量,可以直接叠加到总刚度矩阵里去。此应编制一个子程序。

按弹性支承处理的总刚度矩阵,不会改变其行列数,且可直接求出确定的解,还可直接算出支反力。对于弯桥的中间独柱偏心支点的预设置及检验是否存在上拔力是很方便的。

§ 10-10 多工况荷载列阵

采用截面逆阵消元法,可以很容易地处理多工况荷载列阵问题。将各种工况的荷载列阵均输入相应的荷载矩阵的列阵中。

对于一般荷载,用一般杆件单元的方法,折算成等效节点力后存入之。

对于温度或收缩的初应变荷载,应先按式(9-23)算出对应于变形分量(Δ_e)的分布荷载,再按式(9-24)折算成对应于节点位移分量(Δ_{e_j})的等效节点力。对此要单独编一个子程序。

对于预应力等效荷载,包括锚固端在该截面上的预加力,像一般荷载那样,折算成等效节点力后存入之。另编一个子程序亦是方便的。

对于支点位移荷载,即对某一支点预设一强迫位移 w_{by} ,按式(9-36)会引入一个等效预反力,需要加入到相应的荷载列阵中去。它亦可以编一个子程序。

§ 10-11 受约束支点的变换矩阵

如在§ 9-7中所处理的,对于受约束的位移,不考虑其弹性,则要减少段元端截面的位移分量自由度,为此要作位移分量的变换。对于刚性截面的斜交支承或偏心独支,亦要失去一个自由度,分别可按式(9-40)或(9-44)作位移分量变换。相应的按三截面方程存储的总刚度矩阵,应按式(9-41)作变换,其荷载列阵作式(9-42)的

变换,这样,该截面的段元方程的行列数就会减少,在存储和求解方程时应予以处理,应编出子程序。有关各截面的约束信息,应事先输入,以便处理。

§ 10-12 截面的变形分量、应力与内力计算

用段元法的段元刚度矩阵算出的两端截面或中间截面的内力,还应分配到各片板元上去,才能算出其应力与内力。这时先要由用段元法算出的全截面内力,建立起某一截面的内力与变形分量的关系式(5-75、76),从而用求逆法算出截面的变形分量,如式(5-77)。于是就不难用式(5-8)和(5-15)算得各板元的线应变 ϵ_{β} 和剪应变 γ 以及相应的正应力和剪应力,用式(5-78) ~ (5-80)即可算出各板元的相应内力。对于两向弯曲的剪力,应按式(5-88)和(5-90)算出。

对于畸变分析的各截面板元的应力和内力,亦与上述有相同的过程,但应先按式(6-76)算得 w_{dn} 和 w_{dn}' 。对于多肋 T 梁桥,亦有相同的过程,只是 w_{dn} 和 w_{dn}' 已经直接算出。

子程序应该对刚性截面整体分析、箱梁的畸变分析、多肋 T 梁的畸变分析和刚接梁法分析分别编出。

参 考 文 献

- [1] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 科学出版社, 1981.
- [2] J. N. Reddy. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, 1986.
- [3] 李耀荣、倪元增. 矩形梁的弯翘分析. 东北林业大学学报, 第 16 卷增刊, 1988.
- [4] 周起敬等. 钢与混凝土组合结构设计施工手册. 中国建筑工业出版社, 1991.
- [5] 李丽芬、倪元增. 钢与混凝土组合梁考虑滑移的应力分析——土木工程理论与实践(一). 东北林业大学出版社, 1994.
- [6] 李国豪. 大曲率薄壁箱梁的扭转和弯曲. 土木工程学报, 第 20 卷第 1 期, 1987.
- [7] V. E. Vlasov. *Thin-walled Elastic Beams*. 2nd Ed. 1961.
- [8] 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析(上). 中国铁道出版社, 1983.
- [9] 胡毓仁、陈伯真. 一种新的薄壁杆件单元扭转刚度矩阵. 计算结构力学及其应用, 第 5 卷第 3 期, 1988.
- [10] 钱寅泉、倪元增. 薄壁箱形大曲率梁桥理论分析. 土木工程学报, 第 26 卷第 5 期, 1993.
- [11] 罗旗帜、俞建立. 钢筋混凝土连续箱梁桥翼板横向裂缝问题. 桥梁建设, 总第 117 期, 1997.
- [12] E. Reissner. *Analysis of Shear Lag in Box Beam by the Principle of Minimum Potential Energy*, *Quart. of Appl. Math.* No. 4, 1946.
- [13] 倪元增. 槽型宽梁的剪力滞问题. 土木工程学报, 第 19 卷第 4 期, 1986.
- [14] 钱寅泉、倪元增. 单室箱桥的剪力滞分析. 中国公路学报, 第 2 卷第 2 期, 1989.
- [15] 钱寅泉、倪元增. 箱梁剪力滞计算的翘曲函数法. 铁道学报, 第 12 卷第 2 期, 1990.

- [16]倪元增, II 梁的剪力滞与端横梁的作用. 东北林业大学学报, 第 15 卷第 4 期, 1987.
- [17]陆光闰. 能量法解槽型宽梁的剪力滞问题. 力学与实践, 1985 年第 5 期.
- [18]R. Dabrowski. Curved Thin-walled Girders. 1968.
- [19]倪元增. 多室薄壁箱形曲梁弹性畸变控制微分方程. 第九届全国桥梁学术会议论文集, 杭州, 1990.
- [20]唐家祥、周世军. 薄壁箱梁结构性能的矩阵分析. 土木工程学报, 第 20 卷第 2 期, 1987.
- [21]R. Narayanan. Plated Structures. 1983.
- [22]钱寅泉、倪元增. 曲线箱桥考虑剪力滞和畸变的弹性控制微分方程及其解法. 铁道学报, 第 14 卷第 3 期, 1992.
- [23]张叔辉. 曲桥分析的薄壁箱梁单元. 土木工程学报, 第 17 卷第 2 期, 1984.
- [24]H. R. Evans. An Experimental and Theoretical Investigation of the Behaviour of Box Girders Curved in Plan, Proc. Instn. Civ. Engrs. Part 2, V59, 1975.
- [25]李国豪、石洞. 公路桥梁荷载横向分布计算(第二版). 人民交通出版社, 1984.
- [26]倪元增. 简支 T 梁中间横隔梁数分析. 桥梁建设, 总第 77 期, 1987.
- [27]倪元增. 曲线梁桥的弹性控制微分方程. 中国公路学报, 第 3 卷第 1 期, 1990.
- [28]姚玲森、李新平. 曲线梁桥的实用计算方法——比拟正交异性曲板法. 土木工程学报, 第 19 卷第 3 期, 1986.
- [29]倪元增等. 简支 T 梁桥的电测模型试验, 东北林学院学报, 第 12 卷第 3 期, 1984.
- [30]胡肇滋、钱寅泉. 正交构造异性板刚度计算的探讨. 土木工程学报, 第 20 卷第 4 期, 1987.
- [31]倪元增、钱寅泉. 肋板系肋的抗扭刚度对抗弯刚度的贡献. 力

学与实践,第 15 卷第 3 期,1993.

- [32] A. C. 沃耳密尔. 柔韧板与柔韧壳. 科学出版社, 1959.
- [33] E. C. 汉勃利. 桥梁上部构造性能. 人民交通出版社, 1982.
- [34] 刘兴法. 混凝土结构的温度应力分析. 人民交通出版社, 1991.
- [35] 杜拱辰. 现代预应力混凝土结构. 中国建筑工业出版社, 1988.
- [36] 范立础. 预应力混凝土连续梁桥. 人民交通出版社, 1988.
- [37] 邵容光、夏淦. 混凝土弯梁桥. 人民交通出版社, 1994.
- [38] 王伯惠、徐风云. 柔性墩台梁式桥设计. 人民交通出版社, 1992.
- [39] A. C. Scordelis, Berkeley Computer Programs for the Analysis of Concrete Box Girder Bridges, NATO ASI on Analysis and Design of Bridges, 1984.
- [40] D. J. Just, Behavior of Skewed Beam and slab Bridge Decks, ASCE, Vol. 107, No. ST2, 1981.
- [41] 倪元增、钱寅泉. 分析大曲率薄壁弯梁桥的板元模式段元法. 1998 年全国市政工程学术交流会论文集, 宁波, 1998.