

轴的设计

车德臣 王文生 编著

国防工业出版社

机械工业出版社

372634

2002

轴 的 设 计

牛锡传 王文生 编著



国防工业出版社

(京)新登字106号

内 容 简 介

本书除了对轴的常规设计方法作了简要的介绍之外，还在轴所受的载荷、轴的强度计算及轴的临界转速等章节中引进了一些现代设计的理论和方法，如疲劳损伤的线性累积假设、疲劳损伤的断裂力学概念、临界转速计算的普罗尔法、可靠性理论及轴的优化设计等，并附有一些可在微型计算机上应用的简单计算程序。

本书可供从事机械设计的工程技术人员和高等院校师生参考。



牛锡传 王文生 编著

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店经售

北京大兴兴达印刷厂印装

850 × 1168毫米 32开本 印张 6 1/2 171千字

1993年3月第一版 1993年3月第一次印刷 印数：00001—3000册

ISBN 7-118 01047-2/TH·77 定价：6.10元

目 录

第一章 轴的功用、分类及设计准则	7
第一节 轴的功用及分类	1
第二节 轴的失效形式及设计准则	5
第二章 轴的常用材料	8
第三章 轴的结构设计	12
第一节 轴的结构设计任务和原则	12
第二节 轴上零件的定位	12
第三节 轴的轴向定位	26
第四节 轴的结构工艺性	29
第五节 轴的结构设计步骤	34
第四章 轴所承受的载荷	42
第一节 载荷特性	42
第二节 随时间而变化的载荷	43
第三节 服从统计规律的载荷	45
第四节 相对于轴位置发生变化的载荷	47
第五节 零件在轴上的布置及零件结构对载荷分布的影响	49
第六节 轴上载荷的简化	52
第五章 轴的强度计算	55
第一节 按经验关系式或扭转切应力计算法	55
第二节 按许用弯曲应力计算法	58
第三节 安全系数校核法	69
第四节 变载荷下轴的计算	83
第五节 疲劳强度的断裂力学概念	90
第六章 强度计算的统计方法	94
第一节 实际载荷和承载能力的统计特性	94
第二节 零件承载能力与载荷的统计分布间的基本关系	96
第三节 变量的正态分布	97

IV

第四节 安全系数的统计分析	100
第七章 多支点轴的计算	109
第一节 多支点轴的特点	109
第二节 多支点轴内力的计算	109
第八章 轴的刚度计算	118
第一节 轴的弯曲变形计算	118
第二节 轴的扭转变形计算	133
第九章 轴的振动计算	135
第一节 轴的临界转速	135
第二节 轴的扭转振动	148
第十章 计算弯曲振动临界转速的普罗尔法	152
第一节 普罗尔法的基本原理	152
第二节 普罗尔法的计算机程序	160
第十一章 软轴	170
第一节 概述	170
第二节 钢丝软轴	171
第三节 软管的结构形式	174
第四节 软轴接头	176
第五节 软管接头	178
第六节 软轴组件的结构示例	182
第七节 软轴的失效形式	185
第八节 钢丝软轴的选择	186
第九节 软管、软轴接头和软管接头的选择	189
第十节 软轴的使用与维护	190
第十二章 轴的优化设计初步	191
第一节 优化的概念	191
第二节 轴的优化设计实例	196
参考文献	203

第一章 轴的功用、分类及设计准则

第一节 轴的功用及分类

一、轴的功用

轴是组成机器的重要零件之一。它的功用有两个。(1) 支持回转零件(如齿轮、带轮、链轮等),使其有确定的工作位置;(2) 传递运动和转矩。

二、轴的分类

(一) 按照轴线形状分类

轴可分为直轴、曲轴和软轴。

1. 直轴(见图 1-1)

直轴按其外形不同可分为光轴、阶梯轴及一些特殊用途的轴,如凸轮轴、花键轴、连齿轮轴及连蜗杆轴等。

光轴形状简单、加工方便、轴上应力集中源少、成本低;缺点是轴与轴上零件毂孔的配合采用基轴制,零件定位不便,尤其是轴上需安装几个受轴向力的零件时就更加困难,因此,光轴往往只在轴端安装零件。另外,光轴外形与其上弯矩分布不相适应,故多用于传递转矩。

光轴在纺织机械、机床、农业机械中应用较多。

阶梯轴各轴段的直径不同,轴上零件的安装,定位比较方便。由于轴上应力分布通常是中间大、两端小,所以阶梯轴受载比较合理,其外形接近于等强度梁(见图 1-1 b 中虚线所示)。

阶梯轴应用最广。

直轴一般是实心剖面。有时因机器结构要求需在轴中装其它零件或待加工的棒料(如车床主轴),或者需在轴孔中输送润滑

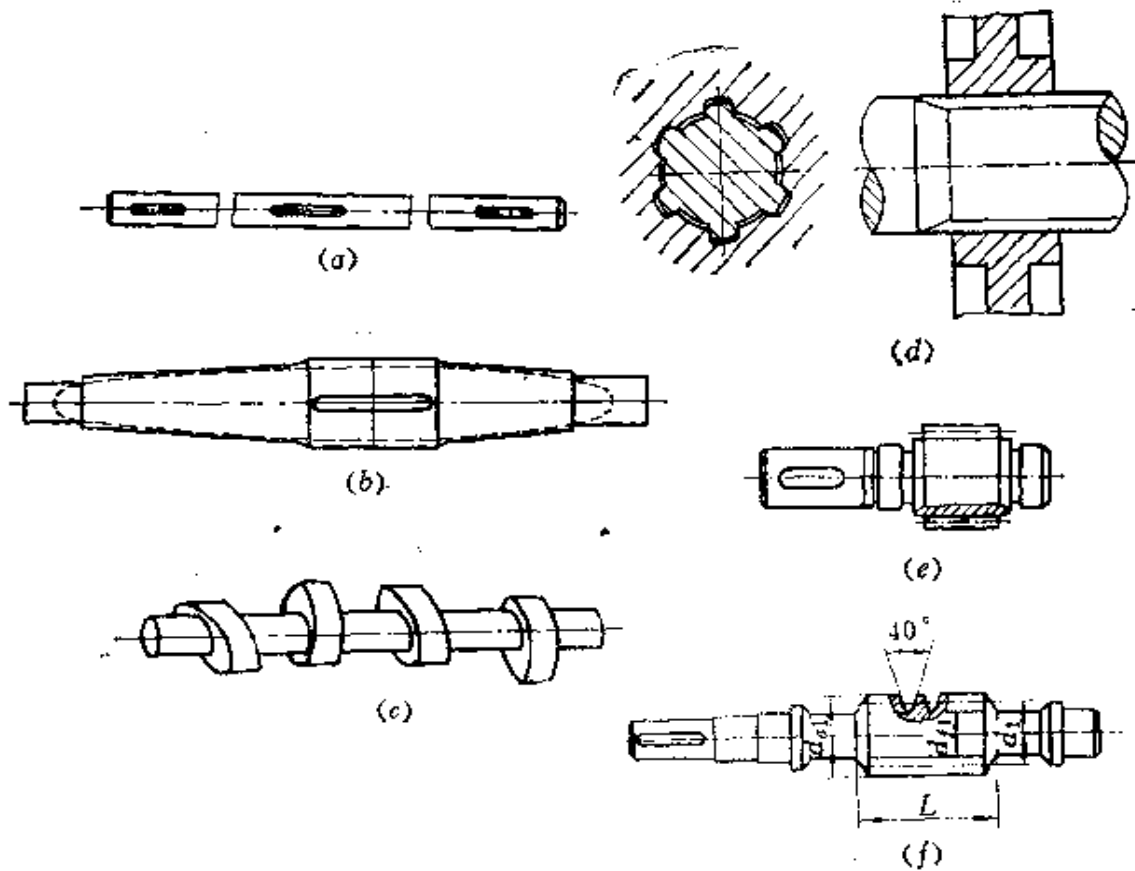


图1-1 直轴

(a) 光轴；(b) 阶梯轴；(c) 凸轮轴；(d) 花键轴；
(e) 连齿轮轴；(f) 连蜗杆轴。

油、冷却液，或者对减轻轴的重量有重大作用时（如水轮发电机轴），则将轴制成空心的。图 1-2 所示为车床主轴。

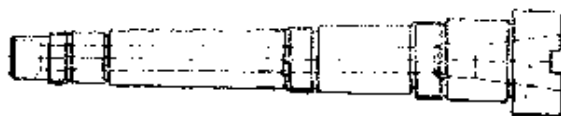


图1-2 车床主轴

由于轴传递转矩时，其外层材料所受剪应力最大（见图 1-3），所以空心传动轴的材料利用较充分。在空心轴和实心轴抗弯剖面模量相等条件下，空心轴减轻重量的程度列于表 1-1。

为保证空心轴有足够的刚度和扭转稳定性，一般要求 $d_2/d_1 = 0.5 \sim 0.6$ 。

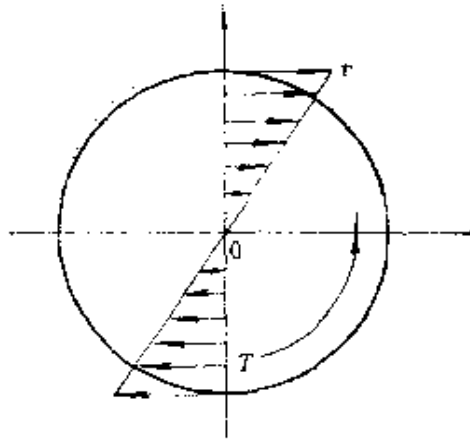


图1-3 轴上扭转剪应力

表1-1 空心轴减轻重量的程度

d_0/d_1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
d_1/d	1.01	1.02	1.05	1.10	1.19	1.47
减轻重量 (%)	15	22	29	39	49	61

注: d_0 —空心轴内径 (mm); d_1 —空心轴外径 (mm); d —实心轴直径 (mm)。

简单的空心轴可用无缝钢管制造。复杂的空心轴需专门制造, 费工、费料。所以必须从经济和技术指标两方面综合分析, 决定其是否有利。

2. 曲轴 (见图1-4)

曲轴是内燃机、曲柄压力机等机器上的专用零件, 用以将往复运动转变为旋转运动, 或作相反转变。

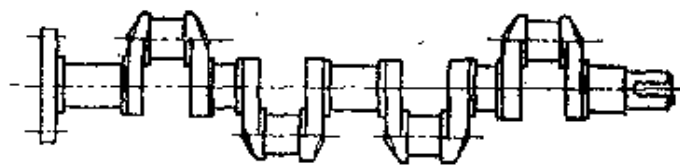


图1-4 曲轴

3. 软轴 (见图1-5)

软轴主要用于两传动轴线不在同一直线或工作时彼此有相对运动的空间传动, 也可用于受连续振动的场合, 以缓和冲击。近年来, 也成功地用于机器人和机械手中。

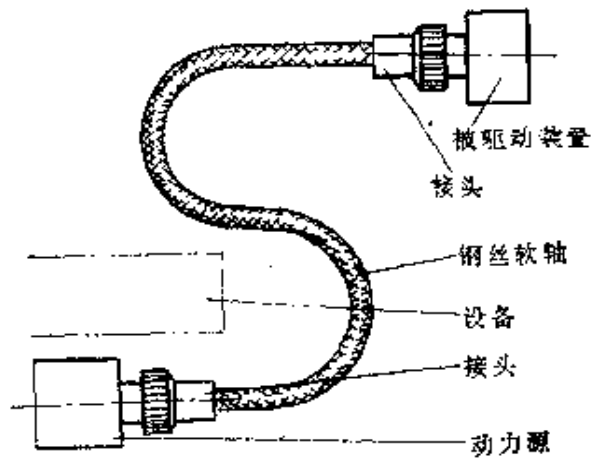


图1-5 软轴

(二) 按照所受载荷性质分类

轴可分为心轴、转轴和传动轴。

1. 心轴 (见图1-6)

通常只承受弯矩而不承受转矩的轴称为心轴。心轴可以是旋转的，如火车轮轴；也有不转动的，如自行车前、后轮轴，汽车轮轴。当心轴上所受的横向力方向不变时，固定心轴上任一点所受的弯曲应力不变，而转动心轴上任一点的弯曲应力是对称循环

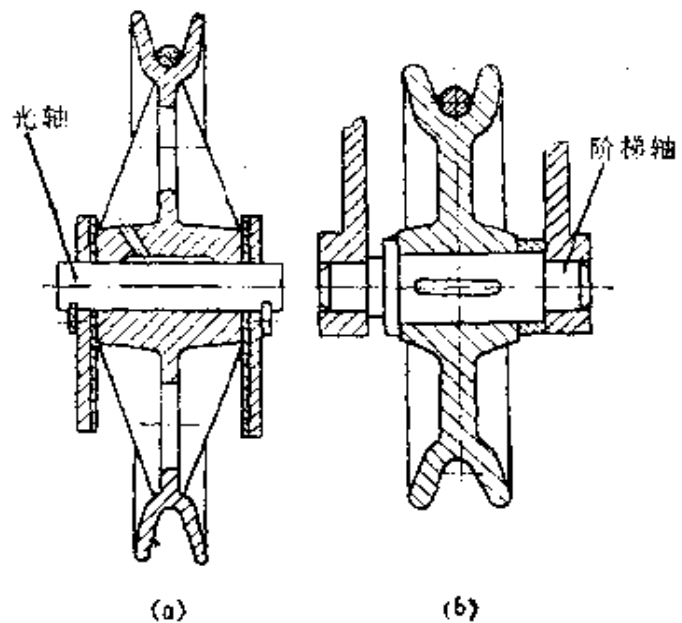


图1-6 心轴

(a) 轴固定不动; (b) 轴随滑轮转动。

的，因此，前者的疲劳强度比后者高。

2. 转轴 (见图1-7)

既受弯矩又受转矩的轴称为转轴。转轴在各种机器中最为常见。

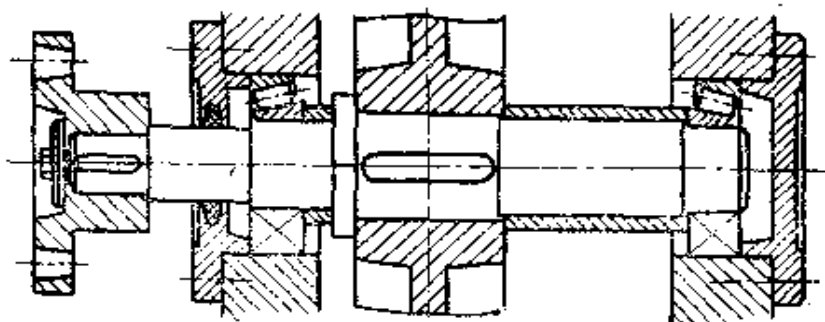


图1-7 转轴

3. 传动轴 (见图1-8)

只受转矩不受弯矩或受很小弯矩的轴称为传动轴。车床上的光杠、船舶螺旋桨轴、连接汽车发动机输出轴和后桥的轴，均是传动轴。

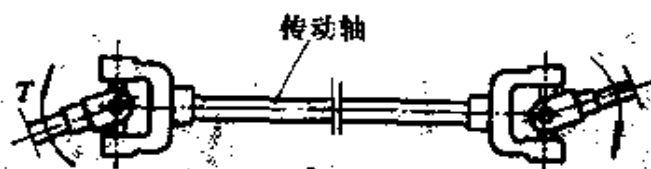


图1-8 传动轴

第二节 轴的失效形式及设计准则

一、轴的失效形式

轴的失效形式与下述因素有关：所受应力的性质和大小、材料的机械性能、结构形状及加工方法和轴的工作环境等。

轴常见的失效形式有：

(一) 因疲劳强度不足而产生疲劳断裂

这种失效形式约占轴的失效总数的40%~50%。其破坏特点是：

(1) 破坏时的应力值低于轴材料的抗拉强度极限 σ_b ，甚至低于材料的屈服极限 σ_s ；

(2) 一般表现为突然的脆断而无明显的塑性变形；

(3) 断口表面（见图 1-9）分为光滑区和晶粒状粗糙区两部分。光滑区有疲劳源和以疲劳源为中心向外扩展的弧形疲劳线，它是裂纹缓慢扩展的痕迹。粗糙区是裂纹加速扩展和最终断裂区，它具有宏观脆性断裂的特征。

工作中过载大的轴会产生低周疲劳断裂。

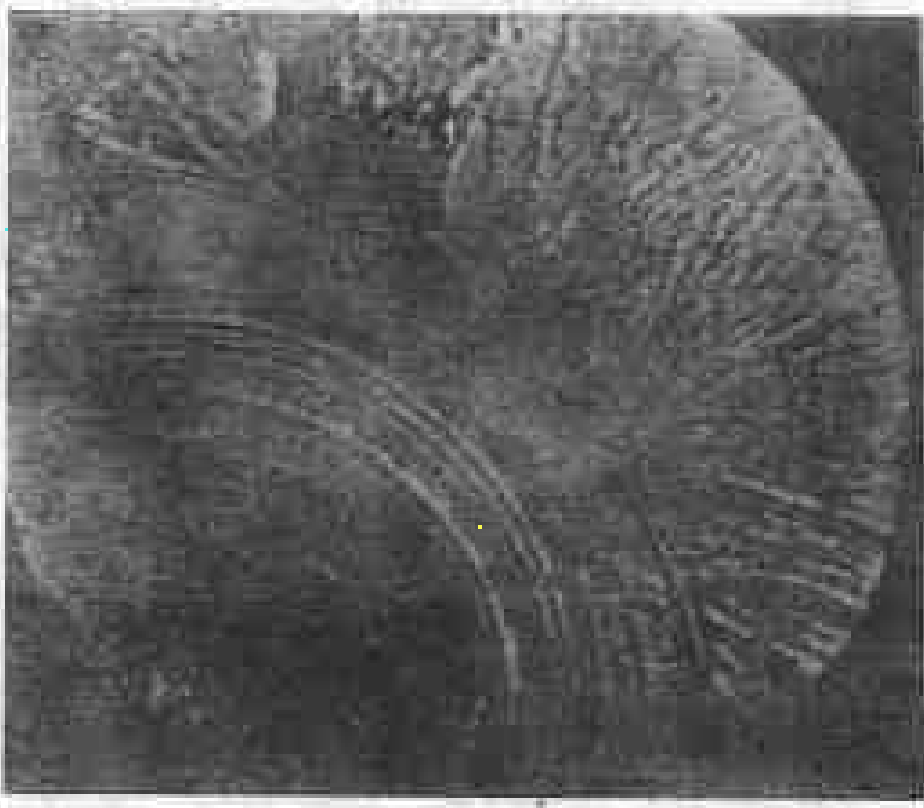


图 1-9 轴的疲劳断口

(二) 由于静强度不足而产生塑性变形或脆性断裂

轴工作过程中若受到振动、冲击、会瞬时过载。如果轴用钢或合金钢制造，当最大工作应力超过材料的屈服极限时，轴将发生塑性变形；若轴用球墨铸铁制造，则最大工作应力超过材料的强度极限时，轴将发生脆性断裂。

- (三) 因刚度不足而产生过大的弯曲变形和扭转变形
- (四) 在高转速下工作时振幅过大
- (五) 其它

如轴颈和花键轴的磨损；过盈配合轴段的擦伤和挤伤；在高温环境中工作时的蠕变；在腐蚀介质中工作时被腐蚀等等。

二、轴的设计准则

为了保证轴在规定寿命下能正常地工作，必须针对上述失效形式进行正确设计。设计轴的主要内容是：

- (1) 根据轴的工作条件、生产批量和经济性原则，选取适合的材料、毛坯形式及热处理方法；
- (2) 根据轴的受力情况、轴上零件的安装位置、配合尺寸及定位方式、轴的加工方法等具体要求，确定轴的合理结构形状及尺寸，即进行轴的结构设计。
- (3) 轴的强度计算或校核。对受力大的细长轴（如蜗杆轴）和对刚度要求高的轴（如车床主轴），还要进行刚度计算。对在高速下工作的轴，因有共振危险，故应进行振动稳定性计算。

第二章 轴的常用材料

轴的材料首先应有足够的强度，对应力集中敏感性低，还应满足刚度、耐磨性、耐腐蚀性及良好的可加工性，以及价格低廉、易于获得的要求。

轴常用的材料主要有碳钢、合金钢、球墨铸铁和高强度铸铁。

碳钢有足够高的强度，对应力集中的敏感性较低，便于进行各种热处理及机械加工，价格低，供应充足，故应用最广。一般机器中的轴，可用30、40、45、50等牌号的优质中碳钢制造，尤以45号钢经调质处理最常用。对低速轻载或不重要的轴，可用A3、A4、A5等普通碳素钢制造。

合金钢的机械性能更高，常用于制造高速、重载的轴，或受大力大而要求尺寸小、重量轻的轴。至于那些处于高温、低温或腐蚀介质中工作的轴，多数用合金钢制造。

为了提高轴的强度及耐磨性，用优质碳素钢或合金钢制造的轴，常进行各种热处理、化学处理及表面强化处理。特别是合金钢，只有进行热处理后才能充分显示其优越的机械性能。

值得注意的是，合金钢对应力集中敏感性高，所以合金钢轴的结构形状必须合理，尽量减少应力集中源，并且要求表面粗糙度数值低，否则就失去用合金钢的意义。另外，在一般工作温度下，合金钢和碳钢的弹性模量十分接近，因此依靠选用合金钢来提高轴的刚度是不行的，此时应通过增大轴径等方式来解决。

球墨铸铁和高强度铸铁的机械强度比碳钢低，但因其铸造工艺性好，易于得到较复杂的外形，吸振性、耐磨性好，对应力集中的敏感性低，价廉，故应用日趋增多。汽车、拖拉机发动机的曲轴，多用球墨铸铁制造。

随着科学技术的发展,近年来逐渐采用复合材料和纤维增强合成树脂材料制造轴,这对减轻轴的重量、简化结构、改进加工方法具有积极意义。

轴的毛坯可用轧制圆钢材、锻造、焊接、铸造等方法获得。对要求不高的轴或较长的传动轴,毛坯直径小于150mm时,可用轧制圆钢材;受力大、生产批量大的重要轴的毛坯为锻件;对直径特大而件数很少的轴可用焊接毛坯;生产批量大、外形复杂、尺寸较大的轴,可用铸造毛坯。

选择轴的材料时,应考虑轴所载荷的大小及性质、转速高低、周围环境、轴的形状和尺寸、生产批量、重要程度、材料机械性能及经济性等因素,全面比较,合理选用。

轴的常用材料及其主要机械性能见表2-1。

表2-1 轴的常用材料及其主要机械性能

材料牌号	热 处 理 方 式	毛 坯 直 径 (mm)	机 械 性 能				硬 度 H B	备 注
			σ_b	σ_s	σ_{-1}	τ_{-1}		
			(MPa)					
A 3		≤ 40	432	233	180	104		用于不重要的或载荷不大的轴
A 5			569	275	228	132		
20	正 火	25	412	243	177	102	≤ 156	用于载荷不大要求韧性较高的轴
	正 火	≤ 100	392	216	163	95	103~156	
		$> 100 \sim 300$	373	196	154	89		
		$> 300 \sim 500$	363	186	148	86		
		$> 500 \sim 700$	353	177	142	83		
回 火								
35	正 火	25	530	314	228	132	≤ 187	有好的塑性和适当的强度,用于对强度和加工塑性均有一定要求的轴,如曲轴等
	正 火	≤ 100	510	265	210	121	143~187	
	正火或 正火+回火	$> 100 \sim 300$	490	255	201	116	143~187	
		$> 300 \sim 500$	471	235	191	110	137~187	
	正火+回火	$> 500 \sim 700$	451	226	183	106	131~187	

(续)

材料牌号	热 处 理 方 式	毛坯直径 (mm)	机械性能				硬 度 HB	备 注
			σ_b	σ_s	σ_{-1}	τ_{-1}		
			(MPa)					
35	调 质	≤ 100	549	294	227	131	163~207	
		$> 100 \sim 300$	530	275	217	126	149~207	
45	正 火	25	598	353	257	148	≤ 241	应用最为广泛
	正 火	≤ 100	588	294	238	138	170~217	
		$> 100 \sim 300$	569	284	230	133	162~217	
	回 火	$> 300 \sim 500$	549	275	222	128	162~217	
		$> 500 \sim 700$	530	265	215	124	156~217	
调 质	≤ 200	637	353	268	155	217~255		
40Cr	调 质	25	981	785	477	275		用于载荷较大而无很大冲击的重要轴
		≤ 100	736	539	344	199	241~286	
		$> 100 \sim 300$	686	490	317	183	241~286	
		$> 300 \sim 500$	637	441	291	168	229~269	
		$> 500 \sim 800$	588	343	251	145	217~255	
35SiMn	调 质	25	883	736	437	253		性能接近于 40Cr, 用于中小型轴
		≤ 100	785	510	350	202	229~286	
$> 100 \sim 300$		736	441	318	184	217~269		
42SiMn		$> 300 \sim 400$	686	392	291	168	217~255	
		$> 400 \sim 500$	637	373	273	158	196~255	
10MoB	调 质	25	981	785	477	275		性能接近于 40Cr, 用于重要的轴
		≤ 100	736	431	331	191	241~286	
40CrNi	调 质	25	981	285	477	275		用于很重要的轴
35CrMo	调 质	25	1000	850	510	285		性能接近于 40CrNi, 用于重要的轴
		≤ 100	750	550	390	200	207~269	

(续)

材料牌号	热处理方式	毛坯直径 (mm)	机械性能				硬 度 HB	备 注
			σ_b	σ_s	σ_{-1}	τ_{-1}		
			(MPa)					
35CrMo	调 质	>100~300	790	500	350	185	207~269	性能接近于40CrNi, 用于重要的轴
38SiMn- Mo	调 质	≤100	736	588	358	206	229~286	性能接近于40CrNi, 用于重要的轴
		>100~500	686	539	331	191	217~209	
		>300~500	637	490	304	176	196~241	
		>500~800	588	392	265	153	187~241	
20Cr	渗 碳 淬 火 回 火	15	834	539	371	214	表 面 HRC 56~62	用于对强度和韧性要求均较高的轴(如齿轮轴、蜗杆等)
		30	637	392	278	160		
		≤60	637	392	278	160		
2Cr13	调 质	≤100	647	441	294	170	197~248	用于腐蚀条件下工作的轴
1Cr18- Ni9Ti	淬 火	≤60	539	216	204	118	≤192	用于高低温及腐蚀条件下工作的轴
		>60~100	530	196	196	113		
		>100~200	490	196	185	107		
QT 400-10			392	294	142	123	156~197	用于制造外形复杂的轴
QT450-5			450	330	160	140	170~207	
QT 500-15			500	380	180	155	187~255	
QT600-2			588	412	212	182	197~269	

注: 1. 表中 σ_{-1} 、 τ_{-1} 系按下列关系计算, 并按四舍五入原则圆整:

钢: $\sigma_{-1} \approx 0.27(\sigma_b - \sigma_s)$; $\tau_{-1} \approx 0.156(\sigma_b + \sigma_s)$

球墨铸铁: $\sigma_{-1} \approx 0.36\sigma_b$; $\tau \approx 0.31\sigma_b$

2. 其它性能, 一般可取 $\tau_s \approx (0.55 \sim 0.62)\sigma_s$; $\sigma_0 \approx 1.4\sigma_{-1}$; $\tau_0 \approx 1.5\tau_{-1}$

第三章 轴的结构设计

第一节 轴的结构设计任务和原则

功用相同的轴却有各不相同的结构形状。这是因为，影响轴的结构形状因素很多，这些因素是：载荷的大小、方向、性质及其分布状态，轴上零件的数量及安装位置、定位方法，轴的制造工艺和生产规模等。

轴的结构设计的任务，就是在满足强度、刚度和振动稳定性的基础上，根据轴上零件的定位要求及轴的加工、装配工艺性要求，合理地定出轴的结构形状和全部尺寸。

轴的结构设计的原则是：（1）受力合理，有利于提高轴的强度和刚度；（2）轴和轴上零件有确定的工作位置。即保证轴相对于机架定位可靠，轴上零件的轴向和周向定位可靠；（3）轴有良好的结构工艺性，包括：便于加工制造，轴上应力集中小，材料省、重量轻；轴上零件装、拆和调整方便，保证每个零件装配到轴上时，不论其配合性质如何，均能自由地通过前面各轴段，而不损伤其表面；（4）对重型轴还应考虑毛坯制造、探伤、运输、吊装等特殊要求。

第二节 轴上零件的定位

一、轴上零件的轴向定位

零件在轴上的轴向定位方法，主要取决于它所受轴向力的大小。此外，还应考虑轴的制造及轴上零件装拆的难易程度、所占地位大小、对轴强度的影响及工作可靠性等因素。

当轴上零件所受轴向力的值大时，常用轴肩、轴环、过盈配合等定位方式；受中等轴向力时，可用轴套、圆螺母、轴端挡

板、圆锥面、圆锥销钉等定位方式；受小的轴向力时，可用弹性挡圈、挡环、紧定螺钉等方式。

(一) 轴肩²⁾(见图 3-1)

轴肩由定位面和过渡圆角组成。为保证零件端面能靠紧定位面，轴肩圆角半径必须小于零件毂孔的圆角半径或倒角高度；为保证有足够强度来承受轴向力，轴肩高度值为 $h = (2 \sim 3)R$ 。与轴径 d 相对应的轴肩圆角半径 r 、毂孔圆角半径 R 或倒角高度 C 值列于表 3-1。

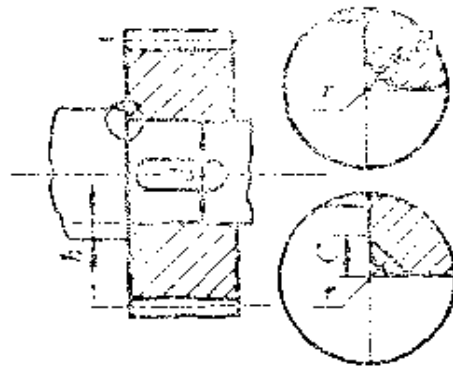


图3-1 轴肩

表3-1 轴肩圆角半径 (JB5-59)

d (mm)	>10~18	>18~30	>30~50	>50~80	>80~120	>120~180
r (mm)	1	1.5	2	2.5	3	4
R 或 C (mm)	1.5	2	2.5	3	4	5

与滚动轴承配合的轴肩尺寸，另有规定，其中轴肩高度应低于滚动轴承内圈端面的高度，以便拆卸轴承（见图3-2）。轴肩尺寸参看表3-2。

在轴径 d 一定时，轴肩过渡圆角半径 r 愈小或高度 h 愈大，则过渡圆角处的应力集中越严重。因此，在保证定位可靠的前提下，应尽量使 h 小些、 r 大些。非定位轴肩的高度无严格规定，一般取 $h = 1.5 \sim 2\text{mm}$ ， r 值也比定位轴肩的相应值大。

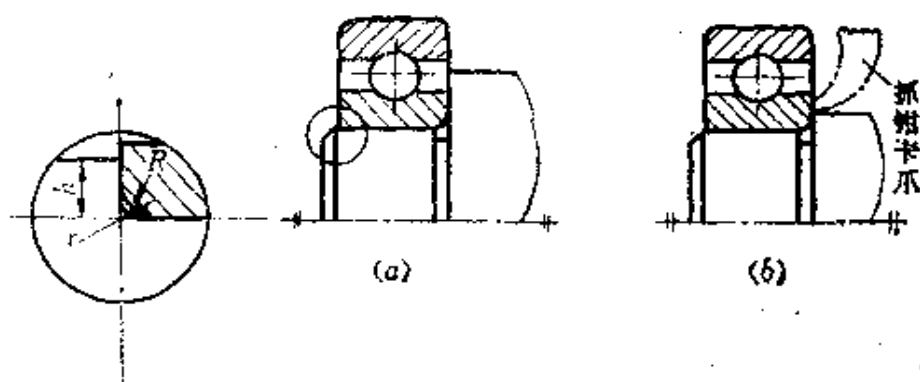


图3-2 滚动轴承定位轴肩

表3-2 滚动轴承定位轴肩尺寸 (mm)

R	1	1.2	1.5	2	2.5	3	3.5	4
r_{max}	0.6	0.8	1	1	1.5	2	2	2.5
h	2.5	3	3	3.5	4.5	5	6	7

(二) 轴环 (见图 3-3)

轴环的功用及尺寸参数与轴肩相同, 宽度 $b \approx 1.4h$ 。若轴环毛坯是锻造而成, 则用料少、重量轻、比轴肩优越, 若由圆钢毛坯车制而成, 则浪费材料及加工时间。

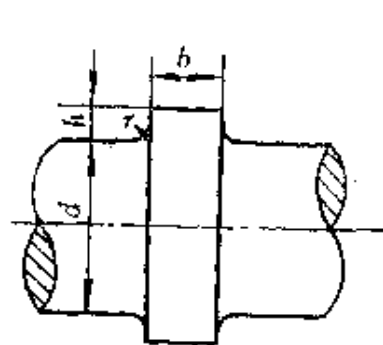


图3-3 轴环

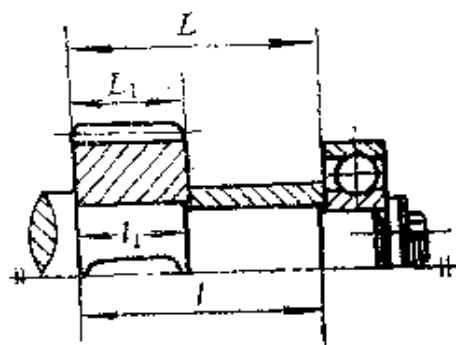


图3-4 轴套定位

(三) 轴套 (见图 3-4)

轴套是借助于位置已确定的零件来定位的, 它的两个端面为定位面, 因此应有较高的平行度和垂直度。为防止轴套端面顶在轴肩过渡圆角处而不能压紧被定位零件, 应使轴段长度比零件长

长短 2~3mm。

采用轴套定位，可减少轴肩数或降低轴肩高度，能缩小轴径，简化结构，减小应力集中，但增加了制造轴套所用的工时及材料。轴套不宜过长。轴套与轴配合较松，两者难以同心，故不宜用于高速轴上，以免产生不平衡力。

(四) 圆螺母 (见图 3-5)

当轴上两个零件之间距离较大，且允许在轴上切制螺纹时，可用圆螺母端面压紧零件端面来定位。为减小对轴的强度的削弱程度和增强防松能力，常用细牙螺纹。圆螺母定位装拆方便，但螺纹对轴的强度削弱较大，又引起很大的应力集中。

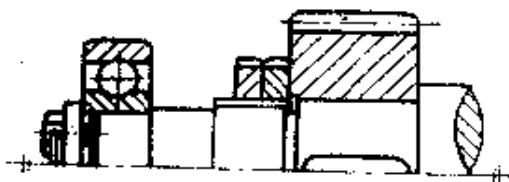


图3-5 圆螺母定位

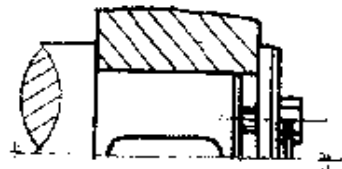


图3-6 轴端挡板定位

(五) 轴端挡板 (见图 3-6)

当零件位于轴端时，可用轴端挡板与轴肩 (见图 3-5 左端)、轴端挡板与圆锥面 (见图 3-6) 使零件双向固定。挡板用螺钉紧固在轴端并压紧被定位零件的端面。此种定位方法简单可靠、装拆方便，但需在轴端加工螺纹孔。

(六) 圆锥面 (见图 3-7)

圆锥面常与轴端挡板 (见图 3-6) 或螺母联合使用，使位于轴端的零件轴向定位，也兼作周向定位。轻载时，圆锥面与轴端挡板联合使用；载荷大时，圆锥面与螺母联合使用。配合面的锥度小时，所需轴向力小，但不易拆卸；锥度大时反之。通常取锥度为 1:30~1:8。

圆锥面定位可靠，能承受冲击载荷，但加工不便。

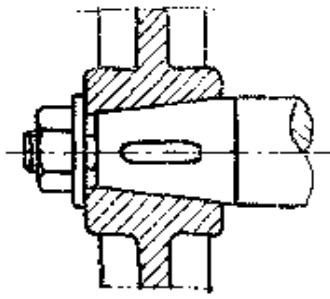
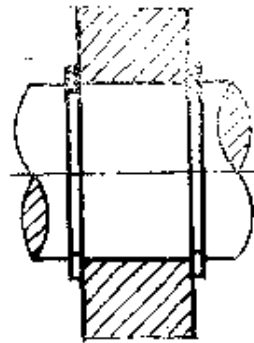
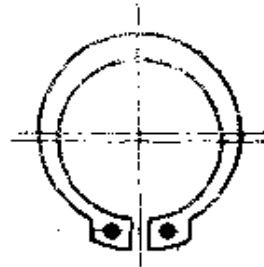


图3-7 圆锥面



(a)



(b)

图3-8 弹性挡圈

(七) 弹性挡圈 (见图 3-8)

在被定位零件两侧的轴上切出环形槽，将弹性挡圈嵌入槽中，利用它的侧面压紧被定位零件的端面。这种定位方法工艺性好、装拆方便，但对轴的强度削弱较大，常用于所受轴向力小而刚度大的轴，如车床中的轴。

(八) 圆锥销 (见图 3-9)、锁紧挡圈 (见图 3-10)、紧定螺钉 (见图 3-11)

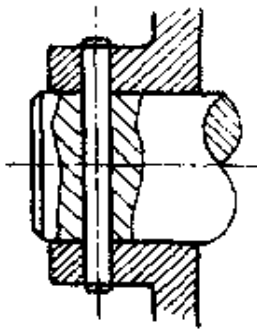


图3-9 圆锥销钉

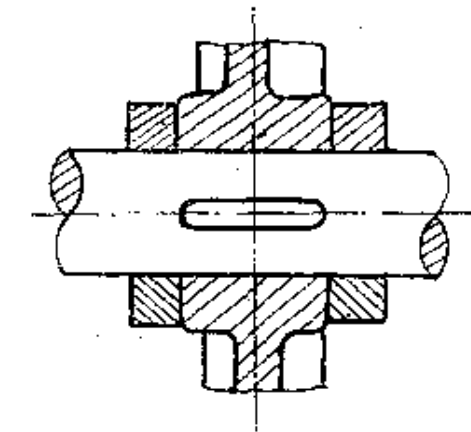
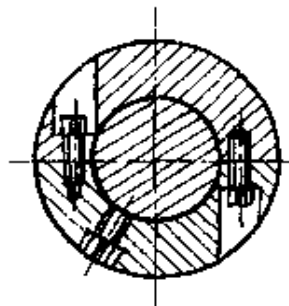


图3-10 锁紧挡圈

这三种定位方法常用于光轴。其中圆锥销钉能承受较大的轴向力和圆周力，但对轴的强度削弱很大，重载时不宜采用。紧定螺钉也可兼作周向定位。锁紧挡圈定位对轴的强度不削弱，且能调整零件在轴上的位置。

二、轴上零件的周向定位（轴毂联结）

齿轮、带轮等传递转矩的零件，除轴向定位外，还需周向定位。定位方式根据其传递转矩的大小和性质、零件对中精度的高低、加工难易等因素来选择。常用的周向定位方法有：

（一）过盈配合连接（见图3-12）

由于过盈配合两表面互相挤压，产生径向正压力，所以连接工作时，配合表面能产生足够的摩擦力和摩擦力矩，阻止两表面在轴向和周向的相对运动。

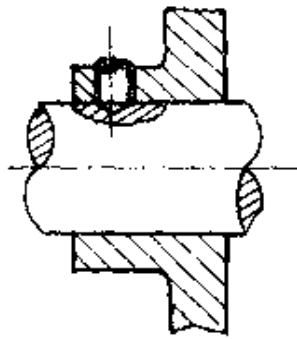


图3-11 紧定螺钉

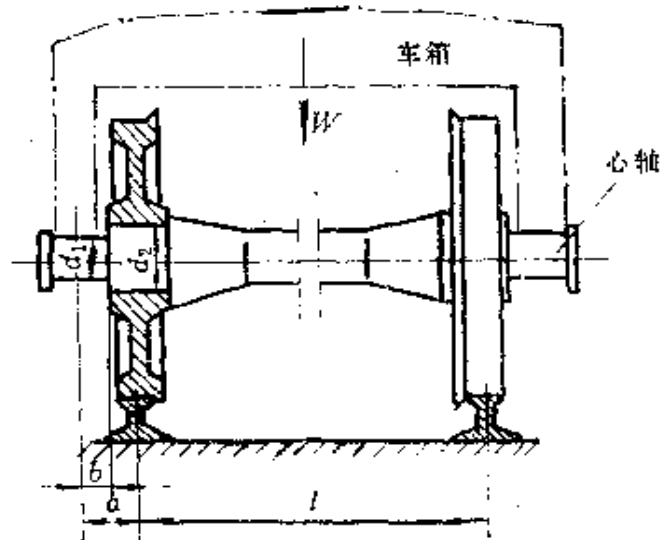


图3-12 火车轮与轴的过盈配合

根据过盈量的大小，过盈配合分为重压、中压和轻压三种。常用的重压配合有H7/t6、H7/u6、H6/t5。它们能传递很大的转矩。由于过盈量大，常用温差法或用压力机装配，为永久性结合，如火车车轮与轴的配合。常用的中压配合有H7/s6、H6/s5，也用温差法或压力机装配，可作为永久性或半永久性结合，如曲柄销和曲拐的配合。常用的轻压配合有H7/n6、H7/p6、H7/r6。因过盈量小，装配时用手锤打入，可以拆卸。传递的转矩小。当传递大转矩或有冲击时，还需附加键。轻压配合应用较广，如齿轮、联轴器等与轴的配合。

过盈配合连接结构简单、对中性好、能承受冲击载荷，但装拆不便，配合边缘有较大的应力集中。

(二) 键联结

键分为平键、半圆键、楔键和切向键，其中平键最为常用。键已标准化。设计时，首先根据联结的结构特点、使用要求和工作条件，选择键的类型；然后根据装键轴段的直径及轮毂长度选择键的尺寸；最后校核键的挤压强度和剪切强度。

1. 平键联结 (见图 3-13)

平键分普通平键(GB1096—79)和导向平键 (GB1097—79)。后者允许联结零件轴向移动。平键的两个侧面为工作面，与轴槽配合较紧，依靠键和键槽两侧面的挤压力传递转矩。平键联结的

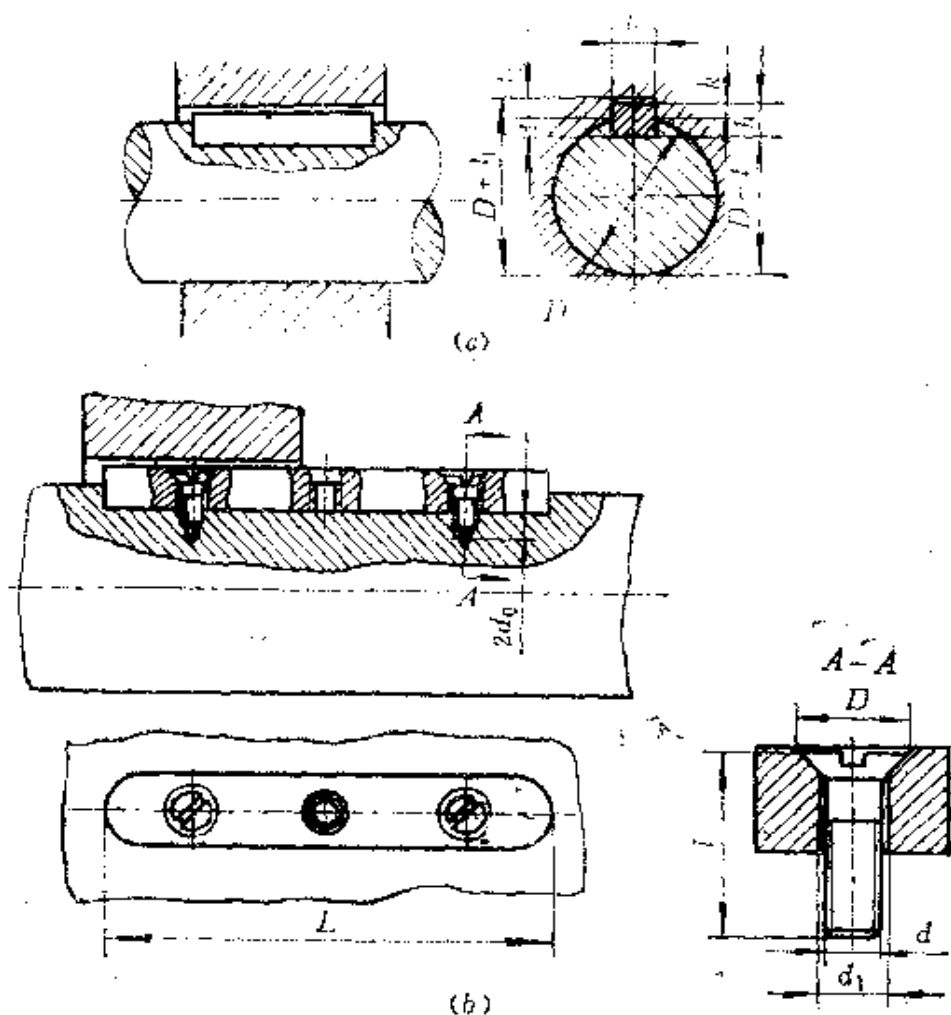


图3-13 平键联结
(a) 普通平键, (b) 导向平键。

对中性好。

普通平键有A型、B型和C型（见图3-14）。A型用于端铣刀加工的轴槽；B型用于盘铣刀加工的轴槽；C型用于轴端，便于拆卸。

2. 半圆键联结（见图3-15）

半圆键（GB1099—79）也是两侧面为工作面。由于键在键槽中能绕槽底圆弧的曲率中心摆动，故能自动适应轮毂键槽底面的倾斜。半圆键结构简单、安装方便，但键槽深，对轴的强度削弱

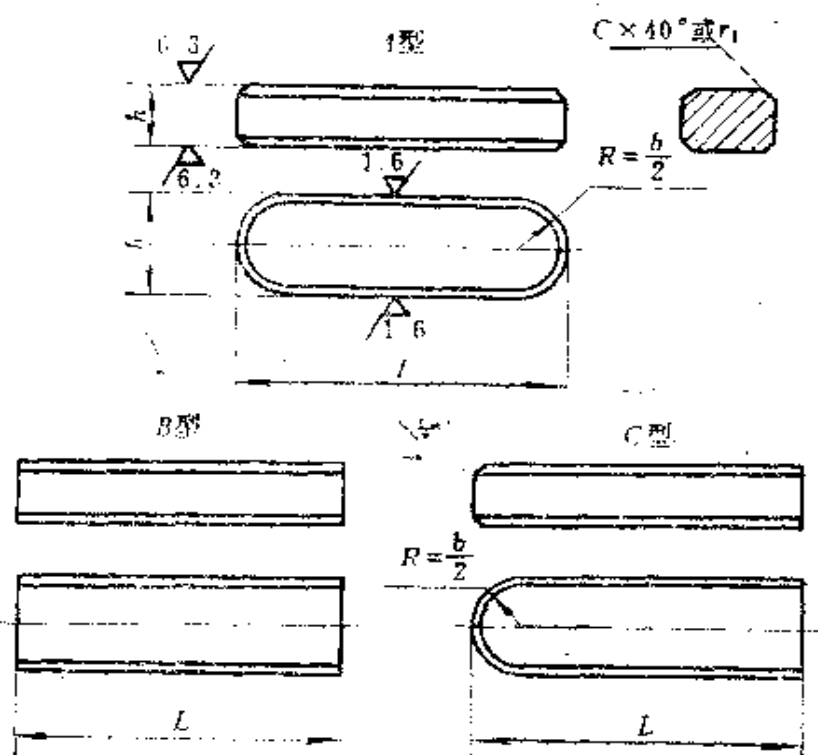


图3-14 平键形状

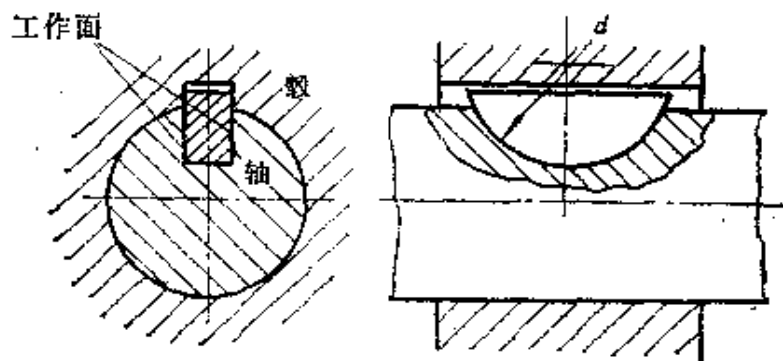


图3-15 半圆键联结

较大，一般用于轻载联结。

3. 楔键联结 (见图 3-16)

楔键分普通楔键 (GB1564—79) 和钩头楔键 (GB1565—79) (见图 3-16 b)。键的顶面与轮毂槽底面均有 1:100 的斜度。装配时将楔键沿轴向打入 (见图 3-16 a)，靠两斜面之间及轴与轮毂接触面间的摩擦力传递转矩，同时能承受单向轴向力。楔键的上、下面为工作面。打入楔键会使轴和毂孔不同心，产生偏心和偏斜。在高速下，偏心会引起振动，偏斜会导致零件轴向受力不均。所以楔键联结只用于对中要求不高、载荷较大的低速传动。

楔键联结多用于轴端，以便装拆。当用于轴中部时，轴上键槽长度应是楔键长度的两倍以上。钩头楔键装拆方便，当用于轴端时应加保护罩。

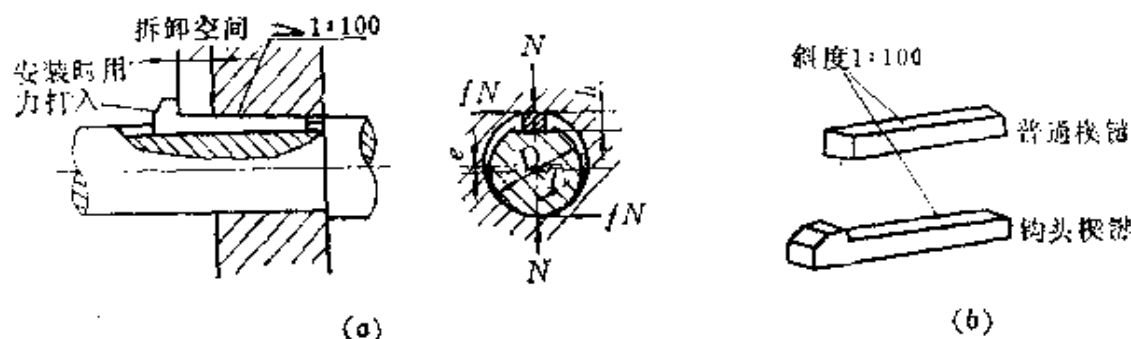


图3-16 楔键联结

(a) 楔键的装配; (b) 楔键的分类。

4. 切向键联结 (见图 3-17)

切向键 (GB1974—80) 由一对斜度为 1:100 的楔键组成，安装时将两键从两侧打入。键的上下两面 (窄面) 为工作面。键的

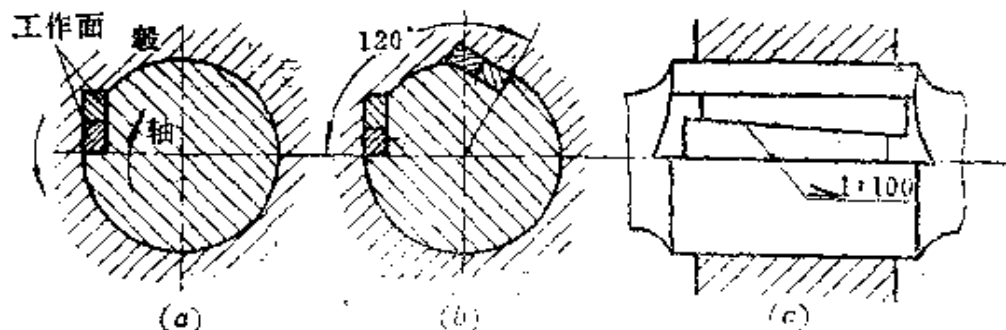


图3-17 切向键联结

宽面沿轴的切线方向，窄面沿轴的半径方向。一对切向键只能传递单向转矩。若传递双向转矩时，则需两对切向键，互成 120° 布置。这样布置对轴的强度削弱相对小些，又增大了轮毂和轴的接触面积，工作稳定性得到提高。

切向键联结能传递很大的转矩，但对轴的强度削弱大，主要用于轴径 $d > 100\text{mm}$ 、对中性要求不高的重载轴，如矿井卷扬机主轴与卷筒的联结。

(三) 花键联结

花键轴刚性大、强度高、承载能力大。花键联结的对中性、导向性和配合精度高，在批量大、受力大的高速、精密机械如机床、汽车、拖拉机中应用很多。

花键轴和花键孔需在专门机床上制造，成本较高。

1. 矩形花键联结 (GB1144—74) (见图 3-18)

矩形花键键齿两侧面平行，便于加工，并可用磨削方法获得较高精度和低的表面粗糙度。应用很广，但齿根应力集中较大。

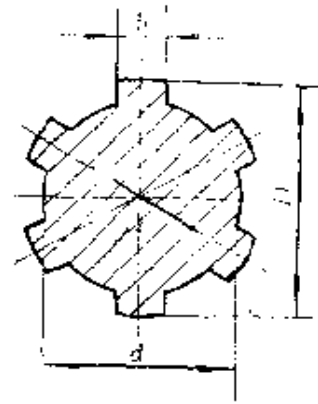


图3-18 矩形花键

矩形花键按齿高和齿数不等可分为轻载、中载、重载和补充系列等四个尺寸系列。

矩形花键定心方式有外径定心、内径定心和齿侧定心 (见图 3-19)。

外径定心加工方便，外径 D 可磨削，内花键孔用拉刀加工，定心精度高。一般情况下均采用外径定心。

内径定心加工不很方便，内径 d 需磨削。外花键的内径还需用成型砂轮磨削。一般在下述情况下应用：(1) 花键孔热处理后表面硬度在 HRC40 以上，变形不能修正时；(2) 花键孔的定心面粗糙度数值小，用花键拉刀加工达不到要求时；(3) 花键外径 D 大于 120mm，制造这样大的花键拉刀工艺性差、价格贵时。

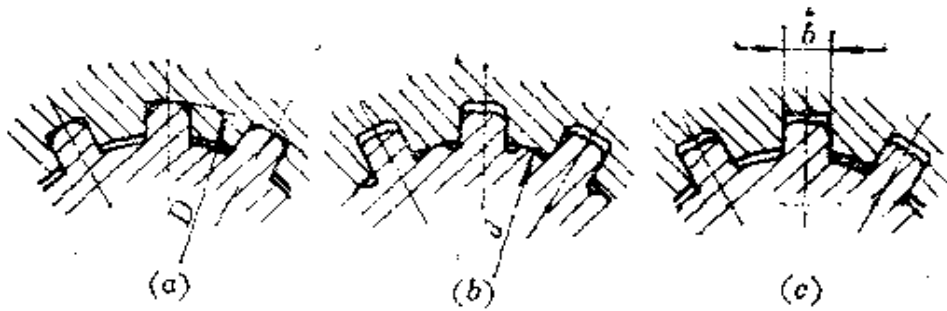


图3-19 矩形花键联结的定心方式
(a) 外径定心, (b) 内径定心, (c) 齿侧面定心。

齿侧定心是以齿宽 b 为配合尺寸, 齿面接触好、受力均匀, 所以能承受大的转矩和冲击载荷, 但不能保证轴、毂精确同心, 所以常用于定心精度要求不高而传递转矩较大的联结, 如汽车万向联轴器的联结。

2. 渐开线花键联结 (GB1104—72) (见图 3-20)

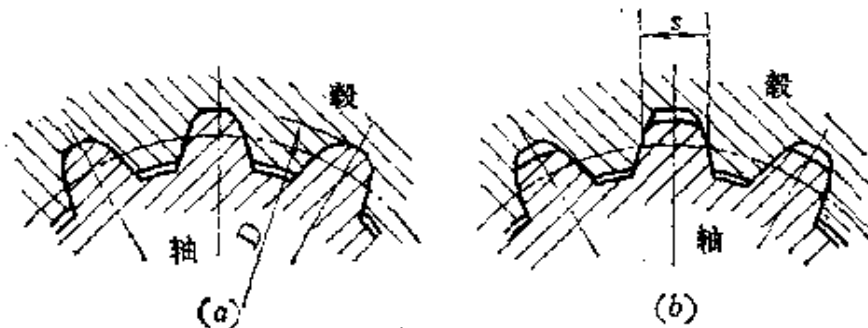


图3-20 渐开线花键联结
(a) 外径定心, (b) 侧面定心。

渐开线花键的齿廓为渐开线, 加工方法与渐开线齿轮相同, 工艺性好。其齿根厚、圆角半径大、应力集中小、强度高, 易对中, 联结稳定性好。常用于传递转矩大、对中要求高及尺寸较大的联结。

渐开线花键有齿侧定心和外径定心两种, 一般采用齿侧定心。

3. 三角形花键联结 (GB1145—74) (见图 3-21)

三角形花键联结的内花键齿形为三角形, 外花键齿廓是压力

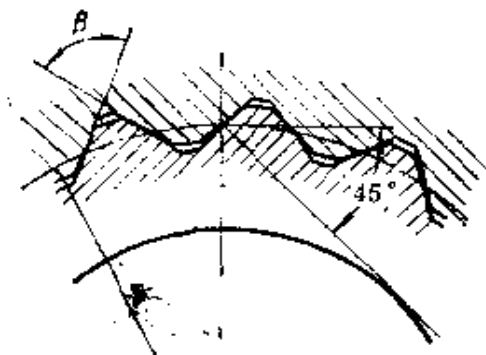


图3-21 三角形花键联结

角为 45° 的渐开线。因键齿细小，故传递转矩小。主要用于薄壁零件与轴的联结以及直径小、转矩小的操纵机构和调整机构。

(四) 型面联结 (见图 3-22)

型面联结就是安装轮毂的轴段做成非圆剖面的光滑柱体 (图 a) 或锥体 (图 b)，轮毂上制成相应的孔，两者配合构成的联结。

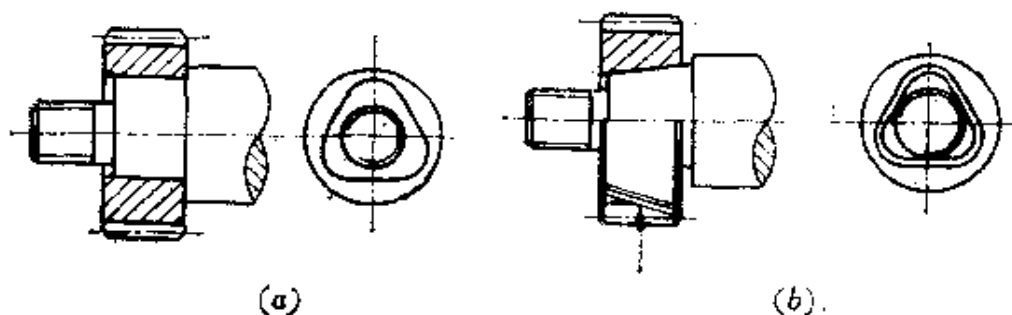


图3-22 型面联结

(a) 柱体；(b) 锥体。

常用的型面曲线有摆线和等距曲线。手柄、手轮常用方形剖面。

型面联结能传递大的转矩，对中性好，联结面上无尖角和键槽，应力集中小，装拆方便。但加工复杂，有的需用专用机床加工，目前应用尚不广泛。

(五) 弹性环联结 (见图 3-23)

弹性环联结是在轴和毂孔之间放 2~4 对弹性环。每对弹性环由外环 2 和内环 3 组成，外环的外表面是圆柱面，内孔为圆锥

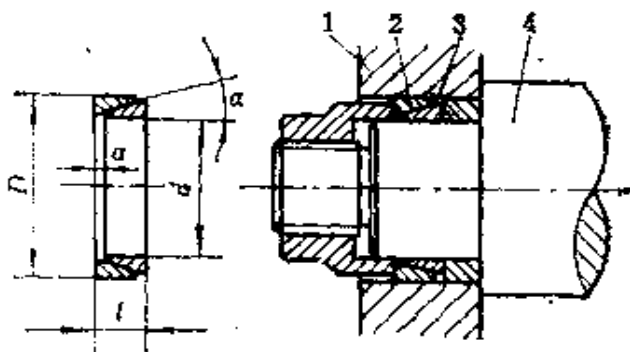


图3-23 弹性环联接

1—机座；2—外环；3—内环；4—轴。

面；内环的内孔为圆柱面，外表面为圆锥面。锥角 $\alpha = 14^\circ \sim 17^\circ$ 。内、外环与轴和毂孔的配合通常取 H7/h6（当 $d \leq 38\text{mm}$ 时）和 H8/h7（当 $d > 38\text{mm}$ 时）。

当对弹性环施加轴向力后，内、外环沿锥面相对移动而楔紧，外环胀开，外径增大，将毂孔压紧；内环受压、内径缩小，将轴径压紧。弹性环联结就是利用轴和毂孔与弹性环接触表面上产生的摩擦力来传递转矩和轴向力的。

所传递的转矩为

$$T = \frac{pf\pi d^2(l-a)}{2} \text{ N}\cdot\text{m} \quad (3-1)$$

式中 d 、 l 、 a ——尺寸如图 3-23 所示；

f ——摩擦系数，一般取 $f = 0.1 \sim 0.16$ ；

p ——接触面的平均比压，其值为

$$p = \frac{P}{\pi d(l-a)(\text{tg}\alpha + 2f)} \text{ MPa} \quad (3-2)$$

式中 P ——轴向压紧力 (N)。

当采用弹性环组合时（见图 3-24），若用同一轴向压紧力，则因轴向摩擦阻力的作用，轴向力传到第二对、第三对弹性环时会依次降低，所传递的转矩第二对为第一对的 50%，第三对是一对的 25%，所以一个联结中所用的弹性环对数不宜过多。

弹性环联结的另一种结构是用紧定螺钉将弹性环锁紧（见图 3-25）。它包括两个剖分的外环和内环以及两个双锥面张紧环。紧

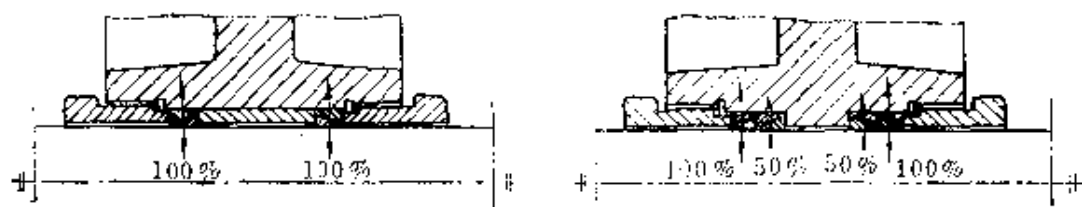


图3-24 弹性环组合

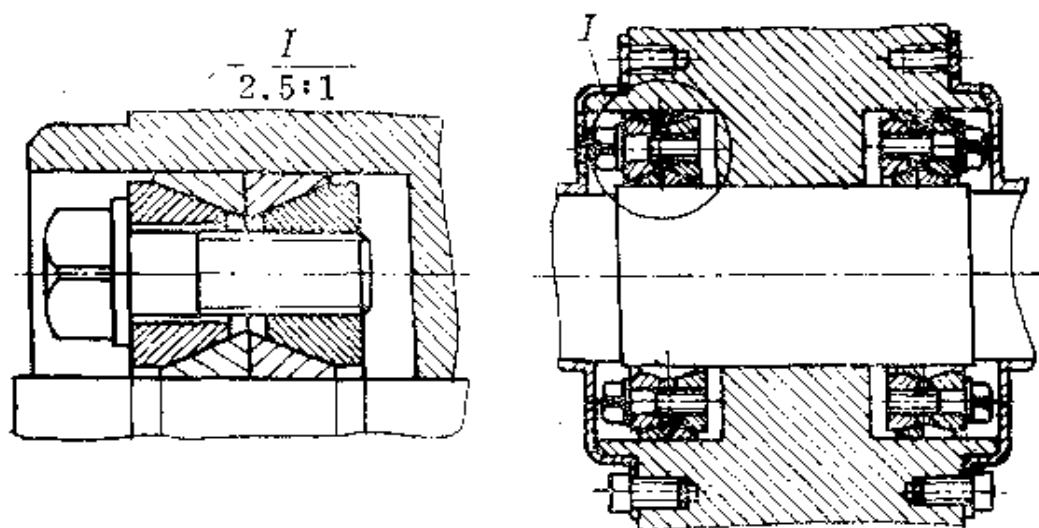


图3-25 用螺钉锁紧的弹性环联结

固螺钉将张紧环拉紧，张紧环将迫使外环胀开压紧毂孔，内环收缩压紧轴径。这种联结能传递大的转矩，并可制成大的尺寸。

当轴向尺寸受限制时，可采用由碟形弹簧制成的夹紧联结。施加轴向力后，碟簧向外伸直，将轴和毂夹紧。在碟形弹簧上开有径向槽，以减小锁紧力和碟簧中的应力。

弹性环联结对中性好，安装方便，应力集中小，传递转矩大。零件可紧固在轴上任意位置，且有安全保护作用。缺点是结构较复杂，弹性环加工精度要求高。

第三节 轴的轴向定位

为保证轴上零件有确定的工作位置，还要求轴相对机架轴向定位，以防窜动。轴的轴向定位是通过轴承的轴向定位实现的。常见的滚动轴承轴向定位方法如下所述。

一、两端单向固定（见图 3-26）

这种定位方式是轴承内圈靠过盈配合紧固在轴颈上，且用轴肩挡住，轴承外圈用轴承端盖挡住。两端轴承分别阻止轴的单向窜动。为防止轴受热伸长将轴承卡死，对向心轴承，轴承端盖与轴承外圈端面之间留有 $0.2\sim 0.3\text{mm}$ 的间隙；对向心推力轴承，依靠轴承端盖与轴承座之间的一组垫片来调节轴承内部间隙。该定位方式适用于传递转矩小、工作温度低的短轴。

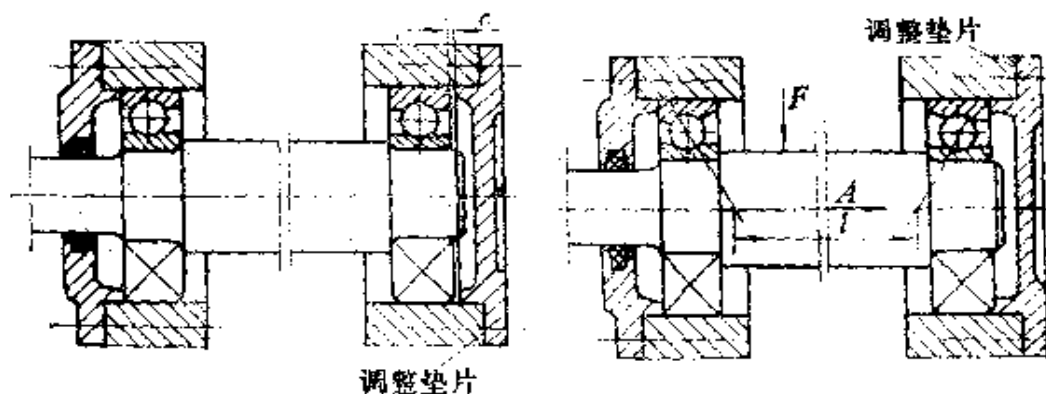


图3-26 两端单向固定支承

二、一端双向固定、一端游动（见图 3-27～图 3-30）

一端轴承的内、外圈双向固定，承受双向轴向力。另一端轴承轴向不固定，允许受热膨胀了的轴自由伸长。由于轴承类型的不同，所以“双向固定”及“游动”的结构也不相同，本书只举

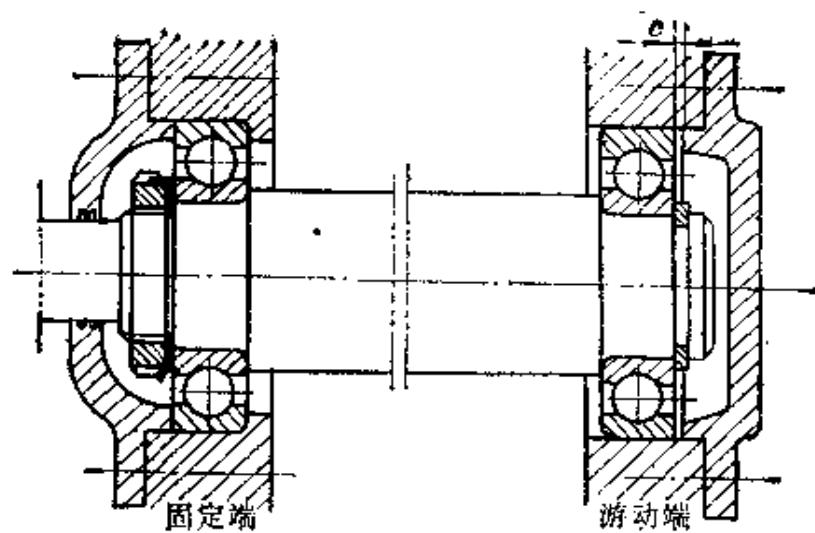


图3-27 一端双向固定一端游动结构之一

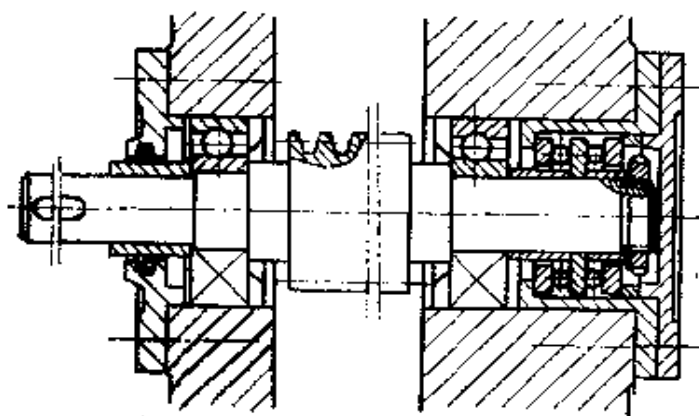


图3-28 一端双向固定一端游动结构之二

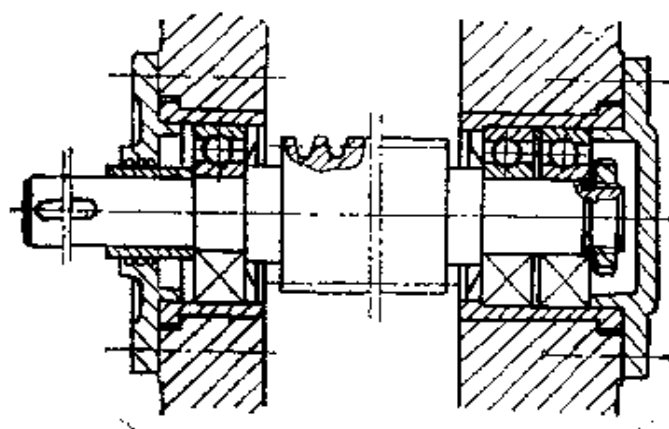


图3-29 一端双向固定一端游动结构之三

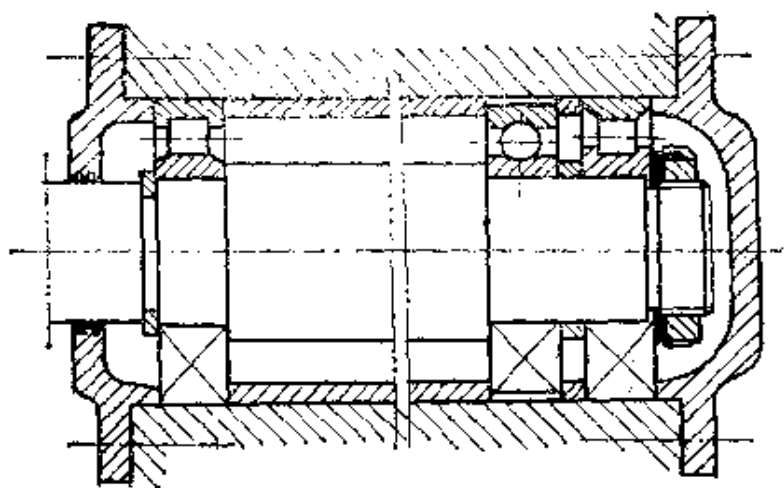


图3-30 一端双向固定一端游动结构之四

四例。通常将受较小径向力的轴承双向固定，以承受轴向力，并协调两轴承的寿命；当轴上无轴向力时，则受较小径向力的轴承游动，使游动方便。

此种定位方式常用于跨距大的轴或工作温度高的轴。

三、两端支承游动（见图 3-31）

一对人字齿轮啮合时，因制造和安装误差，会产生轻微的轴向窜动。为防止齿轮卡死，常将小人字齿轮轴上两支承设计成游动方式，大人字齿轮轴上两支承为固定式。

当轴的支承为滑动轴承时，轴依靠轴肩轴向定位。当需要一

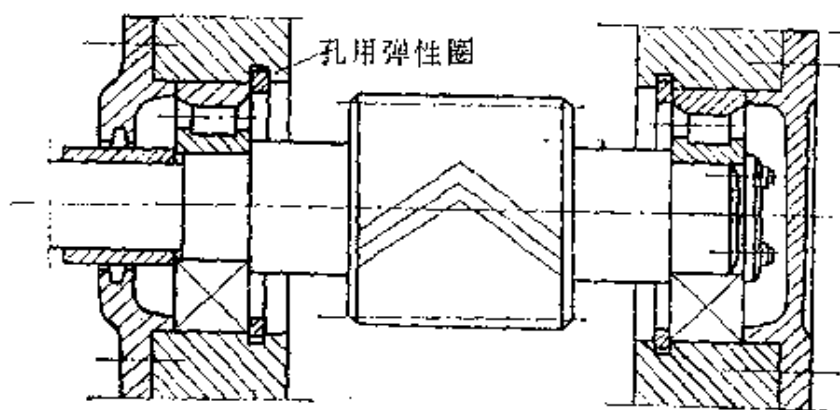


图3-31 两端游动支承

端固定时，则固定端的轴颈两侧都做出轴肩（或轴环），或者用径向滑动轴承与推力滑动轴承的组合。具体结构此处从略。

第四节 轴的结构工艺性

所谓轴的结构工艺性，是指轴的结构应尽量简单，有良好的加工和装配工艺性，以利于减少劳动量，提高劳动生产率及减小应力集中，提高轴的疲劳强度。

一、设计合理结构，利于加工和装配

1. 为减少加工时换刀时间及装夹工件时间，同根轴上所有圆角半径、倒角尺寸、退刀槽宽度，应尽可能统一；同根轴上不同轴段的花键尺寸也应统一；当轴上有两个以上键槽时，应置于轴的同一条母线上，且槽宽相同，以便一次装夹后用一把铣刀切出（见图 3-32）

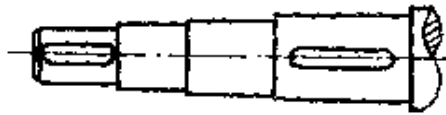


图3-32 键槽的布置

2. 轴上某轴段需磨削时，应留有砂轮越程槽。需切削螺纹时，应留有退刀槽（见图 3-33）。

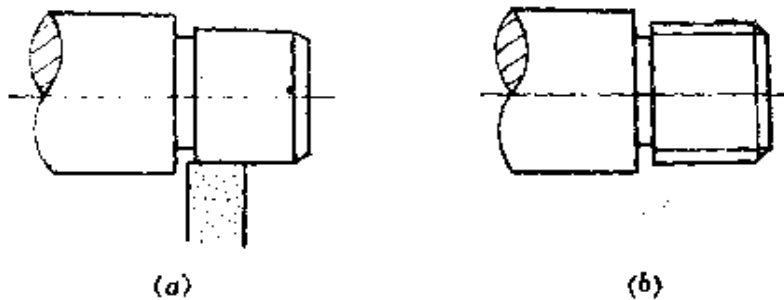


图3-33 砂轮越程槽和退刀槽

(a) 砂轮越程槽；(b) 退刀槽。

3. 在多刀车床上批量加工阶梯轴时，应使各轴段长度相等或成倍于其中最短轴段的长度（见图 3-34）。这可以使刀架行程

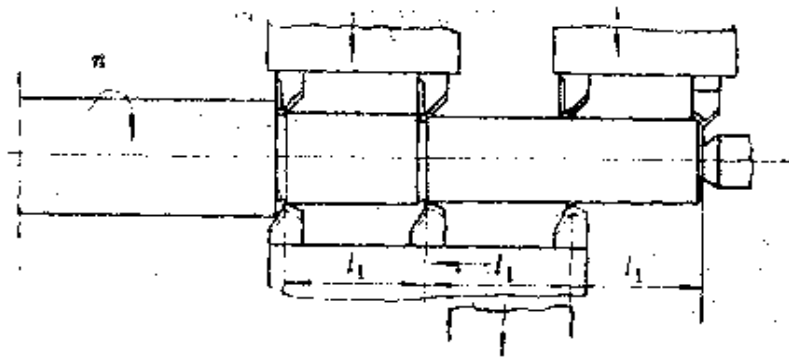
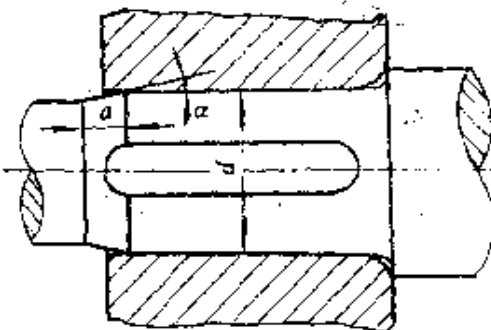


图3-34 多刀车床上加工的轴

最短，提高劳动生产率。

4. 为去掉毛刺，利于装配，轴端应倒角。当采用过盈配合联结时，配合轴段的零件装入端，常加工成导向锥面。若还附加键，则键槽长度延长到圆锥面处，便于轮毂上键槽与键对中（见图3-35）。



d (mm)	a (mm)	α ($^{\circ}$)
$>30\sim45$	3	10
$>45\sim100$	5	30
$>100\sim200$	8	10

图3-35 过盈配合的轴段结构

如果需从轴的一端装入两个过盈配合的零件，则轴上两配合轴段的直径不应相等，否则第一个零件压入后，会把与第二个零件配合的轴段表面拉毛，影响配合。

5. 当轴上必须制出横孔时，则应做成圆孔或长圆孔（见图3-36），避免采用矩形孔，以便加工。

横孔两端要倒角，既能降低应力集中，又可避免淬火时孔端产生裂纹或锐边烧熔。

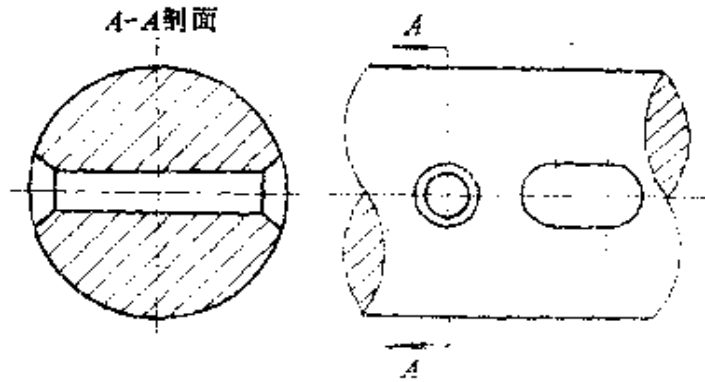


图3-36 轴上横孔形状

二、改进轴的结构、减小应力集中

1. 本章第二节已述及，轴肩高度愈大、圆角半径愈小，应力集中愈严重。因此，轴上相邻轴段的直径不应相差过大，在直径变化处，尽量用圆角过渡而不用环形槽，因后者应力集中较大。圆角半径尽可能增大（见图 3-37）。当圆角半径增大受到结构限制时，可将圆弧延伸到轴肩中，称为内切圆角。也可加装过渡肩环使零件轴向定位。有时将过渡曲线做成椭圆弧或由二、三个曲率半径组成的过渡曲线。

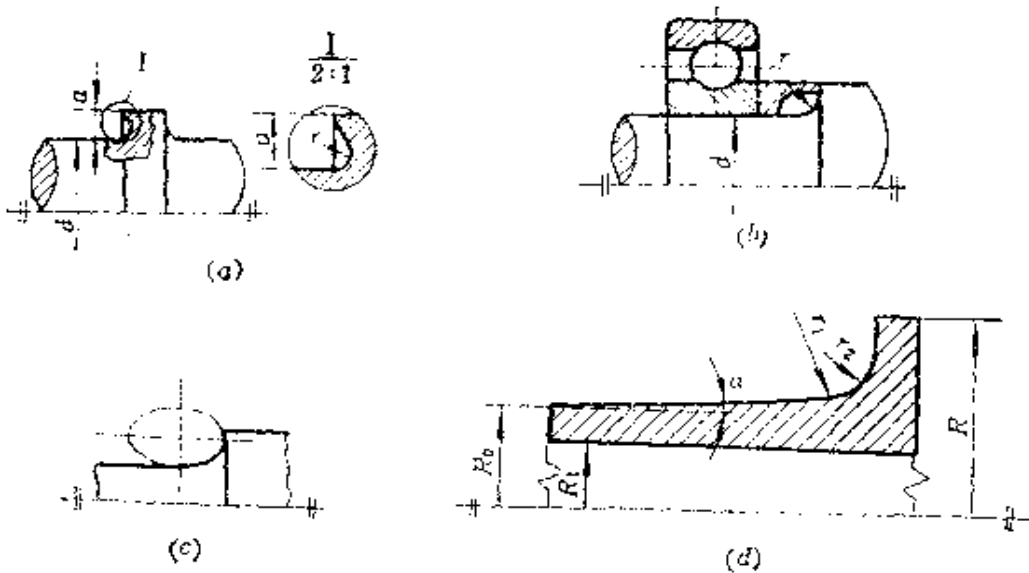


图3-37 增大过渡圆角半径

(a) 凹切圆角；(b) 过渡肩环；(c) 椭圆形圆角；
(d) 锥形过渡及双圆弧圆角。

2. 轴上与零件毂孔配合的轴段，也产生应力集中。配合愈紧、零件材料愈硬，应力集中愈大。其原因是，零件轮毂刚度比轴大，在横向力作用下，两者变形不协调，相互挤压，导致应力集中。尤其在配合边缘，应力集中更为严重（见图 3-38 a）。

减小因配合引起应力集中的主要方法是减小配合边缘的压力。其措施有：

- (1) 在轮毂上开卸载槽（见图 3-38 b）；
- (2) 在轴上开卸载槽（见图 3-38 c）；
- (3) 加大配合轴段直径，以获有大的圆角。但该轴段的长度应不大于轮毂长度（见图 3-38 d）；
- (4) 措施（1）、（2）、（3）并用，效果更佳。

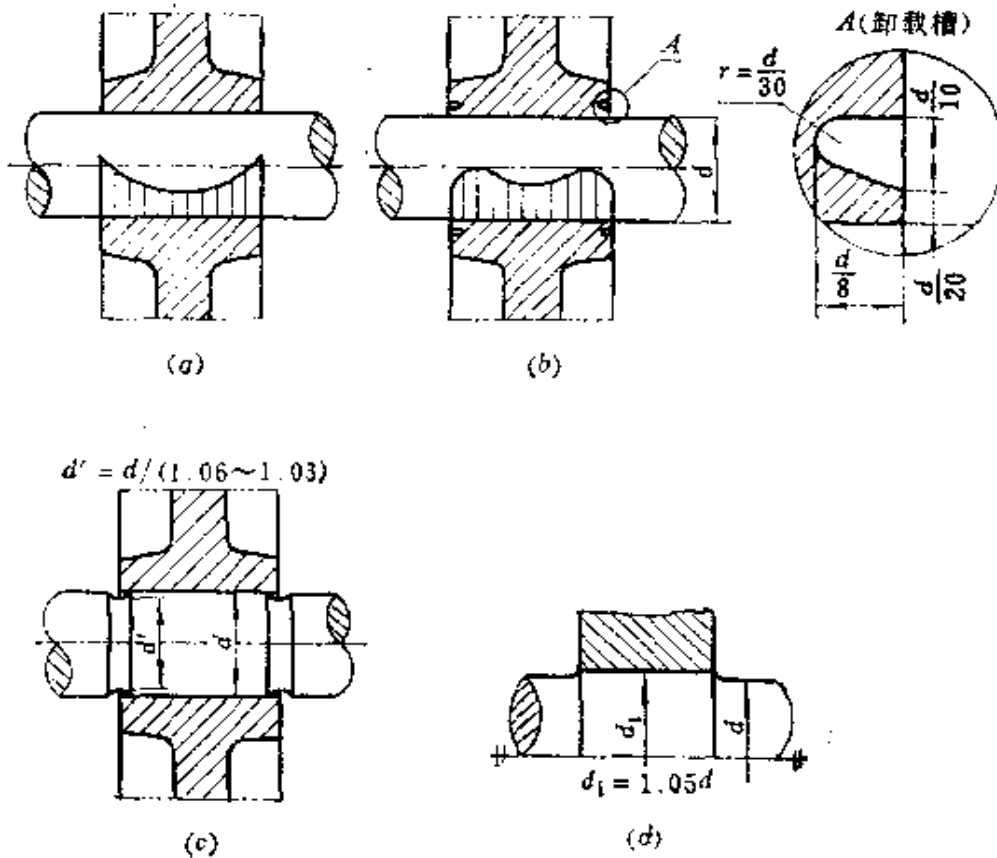


图3-38 降低过盈配合处应力集中的措施

- (a) 过盈配合处的应力集中；(b) 轮毂上开卸载槽后的应力分布；
(c) 轴上开卸载槽以降低应力集中；(d) 增大配合处直径。

3. 选用应力集中小的定位方法

(1) 采用紧定螺钉、圆锥销钉、弹性挡圈、圆螺母等定位时，需在轴上加工出凹坑、横孔、环槽、螺纹，引起较大的应力集中，应尽量不用，用轴套定位无应力集中。

(2) 在条件允许时，用渐开线花键代替矩形花键，用盘铣刀加工的键槽代替端铣刀加工的键槽，均可减小应力集中。

4. 合理设计轴的形状，减小内应力

图 3-39 为铸造曲轴。为减轻重量并使壁厚均匀，曲柄是空心的，横截面为圆弧形并有卸载槽，可减小内应力，有利于提高疲劳强度。

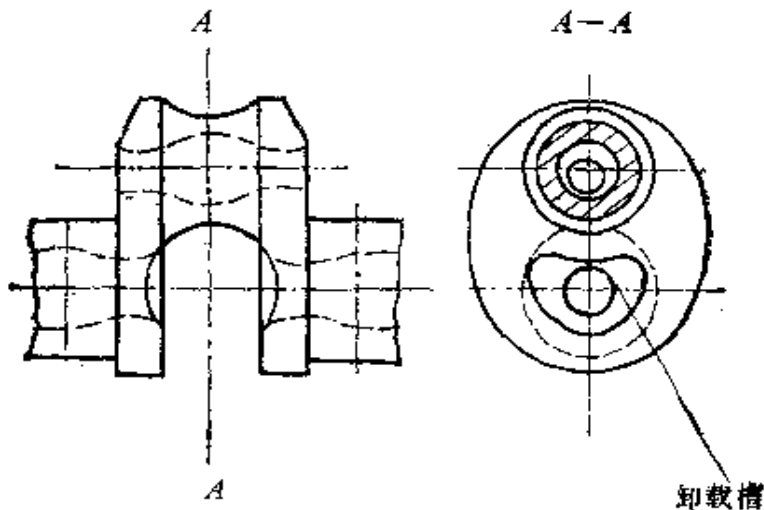


图3-39 带卸载槽的铸造曲轴

5. 提高轴的表面质量，减小应力集中

轴表面的加工刀痕，也是一种应力集中源。减小轴表面的粗糙度值，有利于减小应力集中。对受变载荷的重要轴和合金钢轴，为提高表面质量，常需精车或磨削，同时常进行表面热处理（高频淬火、渗碳、氰化等）和冷作加工（滚压、喷丸等）。

三、采取结构措施，改变轴上载荷分布及载荷性质（参阅第四章第五节）。

四、合理确定轴的结构，以便节约材料、减轻重量、减少加工时间

轴的重量与轴长及轴径的平方成正比。在保证轴的工作能力条件下，缩短轴长、缩小轴径可节约材料，减轻重量、减少加工时间，从而降低成本。

(1) 严格控制锻件、铸件的误差及毛坯的加工余量；当采用钢棒作轴的毛坯时，尽量不用轴环定位，以免花费很多工时切削多余的金属（见图 3-40）。

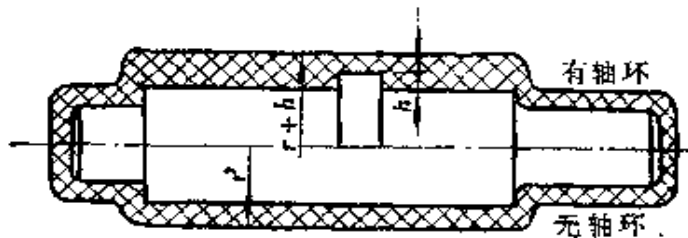


图3-40 轴环及加工余量

- (2) 减少轴肩数和轴肩高度。
- (3) 合理布置轴上零件的位置，选择合适的定位方法，缩短轴长。
- (4) 需要时，用钢管制造空心轴。

第五节 轴的结构设计步骤

轴的结构设计须在经过初步强度计算，已知轴的最小直径以及轴上零件的尺寸（主要是毂孔直径及宽度）后才能进行。其主要步骤为：

一、确定轴上零件的装配方案

轴的结构形状与轴上零件的位置及从轴的哪一端装配有关。如图 3-41 所示，大齿轮 7 可以在两支承的中间，但多数情况下是偏置一侧。(a)、(b) 两图中大齿轮偏向左侧轴承；(c) 图中

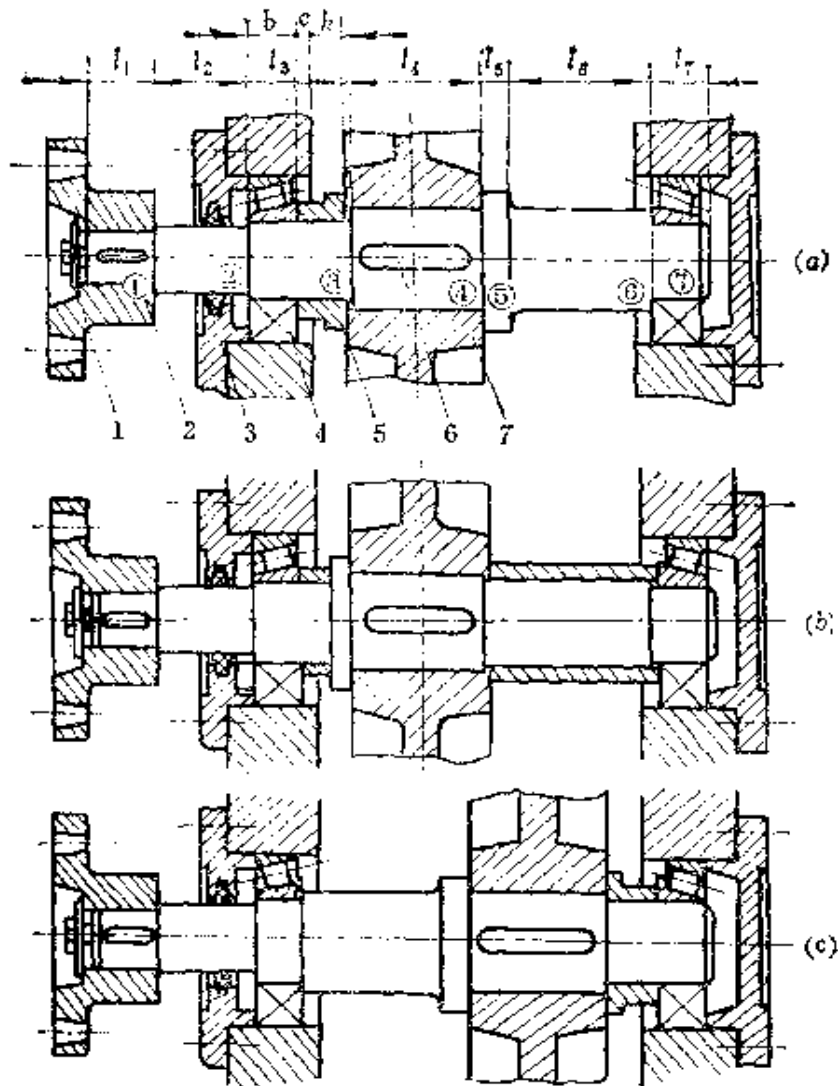


图3-41 轴上零件的装配方案

(a)、(b) 齿轮偏于左侧轴承；(c) 齿轮偏于右侧轴承。

1—轴端挡板；2—联轴器；3—轴承端盖；4—轴承；

5—套筒；6—垫圈；7—齿轮。

大齿轮偏向右侧轴承。从轴的弯曲变形和扭转变形对齿轮啮合的影响及两轴承受力大小比较，(c) 图布置比较合理。此时，齿轮啮合时，载荷沿齿宽分布比较均匀；左、右轴承受力相差不大，寿命比较接近。

(a)、(b) 两图相比较，虽然齿轮在轴上位置相同，但(a) 图中齿轮从轴的左端装入，(b) 图中齿轮从右端装入，后者多一

个长的定位轴套，增加了材料消耗和加工时间，因此不够合理。(b)、(c)两图相比，虽然齿轮均从轴的右端装入，但位置不同，(c)图中的定位轴套比(b)图中短很多，所以比较合理。

综上所述，(c)图所示方案合理。

二、确定轴上零件的定位方式

图3-41(c)中，联轴器用轴肩和轴端挡板双轴向定位，周向固定用过盈配合加平键联结。滚动轴承依靠轴肩或轴套轴向定位，依靠过盈配合实现周向定位；齿轮通过轴环和轴套实现双轴向定位，依靠过盈配合附加平键联结实现周向定位。

三、确定各轴段的直径

各轴段的最小直径，是由强度计算得出的。如安装齿轮的轴段直径，是按许用剪应力方法或许用弯曲应力方法计算后得到的；安装联轴器和轴承的轴段直径，分别是根据联轴器和滚动轴承所受力的大小，经过计算，选择出合用的型号，由联轴器孔径和滚动轴承内径所决定的。在强度计算基础上，根据轴向定位的

表3-3 标准尺寸 (GB2822—81摘录)

R_2 10系列	10	12		15		20		25								
R_2 20系列	10	11	12	14	16	18	20	22	25							
R_2 40系列		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	24	25		
R_4 10系列			32			40			50							
R_4 20系列		28	32	36	40	45	50	56								
R_4 40系列	26	28	30	32	34	36	38	40	42	45	48	50	53	56	60	
R_6 10系列	63		80			100			125							
R_6 20系列	63	71	80	90	100	110	125	140								
R_6 40系列	63	67	71	75	80	85	90	95	100	106	110	120	125	130	140	150

注：选用标准尺寸的优先顺序为 R_2 10、 R_2 20、 R_2 40。

要求，定出各轴段的最终直径。通常情况下，考虑安装和轴向定位之后定出的各轴段直径，比由强度计算得出的直径要大很多。

配合轴段的直径应选标准尺寸（见表 3-3）。非配合轴段的直径可不受此限制。

四、确定各轴段的长度

在图 3-41(a) 中，配合轴段 (1)、(4) 的长度 l_1 、 l_4 根据配合零件的毂孔长度而定，一般较相应的毂孔长短 2~3mm，以便零件轴向定位可靠。轴段 (7) 的长度 l_7 由轴承宽度决定。轴段 (2) 的长度 l_2 由轴承端盖的厚度、安装联轴器所需的空间尺寸、联轴器端部到轴承端盖应有的间隔距离等尺寸决定。轴段 (3) 的长度 l_3 等于轴承宽度 b 、轴承端面到箱体内壁的距离 e 及齿轮端面到箱体内壁的距离 k 的和。 l_5 即轴环宽度；轴段 (6) 的长度 $l_6 = l - (l_3 + l_4 + l_5 + b)$ ， l 是轴的跨距。

五、确定轴的结构细节

如倒角尺寸、过渡圆角半径、退刀槽尺寸、轴端螺纹孔尺寸；选择键槽尺寸等。

六、确定轴的加工精度、尺寸公差、形位公差、配合、表面粗糙度数值及技术要求

轴的精度等级根据配合要求和加工可能而定。精度愈高，同一公称尺寸下的公差愈小、成本愈高。通用机器中的轴的精度多为 IT5~IT7。

轴应根据装配需要，定出合理的形位公差，主要有：配合轴段的直径相对于轴颈（基准）的同轴度及它的圆度、圆柱度；定位轴肩的垂直度；键槽相对于轴心线的平行度和对称度等。具体数据可查有关手册。

轴表面的粗糙度数值及其加工方法列于表 3-4。

配合轴段所采用的配合代号、配合特性、装配方法可参看表

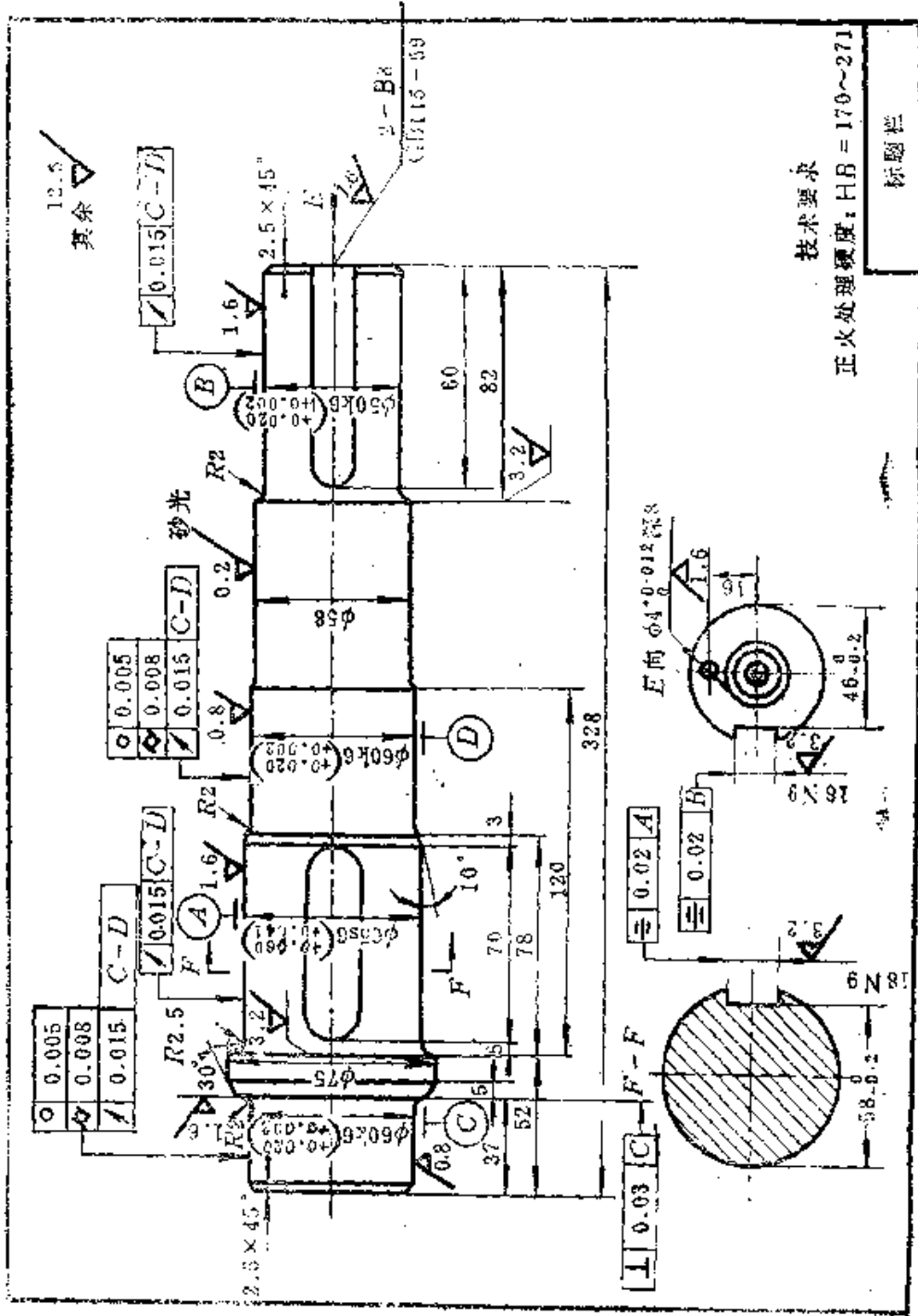


图3-42 轴的工作图

3-5。

表3-4 轴表面的粗糙度数值

表面位置		粗糙度数值 R_a 不大于 (μm)	加工方法
轴颈	与非液体摩擦滑动轴承配合	0.2~3.2	精车、半精车
	与液体摩擦滑动轴承配合	0.1~0.4	精磨
	与G级滚动轴承配合	0.8~1.6	精车或磨削
带密封件的轴段	橡胶密封	0.2~0.8	精车或磨削
	毛毡密封	0.4~0.8	精车
	迷宫密封	1.6~3.2	半精车
	隙缝密封	1.6~3.2	半精车
与键孔配合表面		0.8~1.6	精车或磨削
键槽	侧面	1.6	铣
	底面	6.3	
轴肩(轴环)	定位G级滚动轴承	1.6	半精车
定位端面	定位E、D、C级滚动轴承	0.8 ($d \leq 80$)	精车
		1.6 ($d > 80$)	半精车
中心孔		1.6	钻孔后绞孔
端面、倒角及其它表面		12.5	粗车

表3-5 轴与轴上零件的配合

配合位置	配合代号	装配方法	配合特性
减速器中轴与蜗轮的配合。大、中型减速器中低速级齿轮与轴的配合	$\frac{H7}{S6}$	压力机压入或温差法	传递转矩小，分组选配或加键联结可传递较大的转矩
重载齿轮与轴的配合、联轴器与轴的配合(均需附加键)	$\frac{H7}{r6}$	同上	只能受很小转矩和轴向力，传递转矩时需加键。需要时可拆卸

(续)

配合位置	配合代号	装配方法	配合特性
有振动的机械(如破碎机)的齿轮与轴的配合, 爪型联轴器与轴的配合, 受特重载荷和重冲击的滚子轴承与轴颈的配合	$\frac{H7}{n6}$ $\frac{H8}{n7}$ $n6$	压力机压入	同轴度和配合紧密性好, 定位精度高。附加键后可承受振动、冲击并能传递较大转矩。不经常拆卸
键与键槽配合	$\frac{N9}{h9}$	手锤打入	有不大的过盈量
齿轮与轴的配合, 重载和有冲击载荷的滚子轴承和大型球轴承与轴颈的配合	$\frac{H7}{m6}$ $\frac{H8}{m7}$ $m6$	手锤打入	平均有不大大过盈量, 同轴度好。能保证配合的紧密性
机床齿轮与轴、电动机轴端与联轴器或带轮的配合, 中载和经常拆装的重载滚动轴承与轴颈的配合	$\frac{H7}{k6}$ $\frac{H8}{k7}$ $k6$	手锤轻轻打入	平均没有间隙, 同轴度好, 能精密定位, 可经常拆卸, 传递转矩要附加键
机床挂轮与轴、可拆皮带轮与轴端的配合, 轻载、高速滚动轴承与轴颈的配合	$\frac{H7}{js6}, \frac{H8}{js7}$ $js6$	手或木锤装拆	平均稍有间隙, 同轴度不高, 可频繁拆卸
可拆卸的齿轮、带轮与轴的配合, 离合器与轴的配合	$\frac{H8}{h8}$ $\frac{H9}{h9}$	加油后用手旋进	同轴度不高、易于拆卸, 传递转矩靠键或销
磨床、车床分度头主轴轴颈与滑动轴承的配合	$\frac{H7}{g6}$ $\frac{G7}{h6}$	手旋进	配合间隙小。用于转速不高但要求运动精度较高的精密装置中
轴上空转齿轮与轴的配合, 机床中滑动轴承与轴颈的配合	$\frac{H7}{f7}$	手推滑进	有中等间隙, 零件可在轴上自由转动或滑动

(续)

配合部位	配合代号	装配方法	配合特性
用普通润滑油或润滑脂润滑的滑动轴承、含油轴承与轴颈的配合，皮带导轮、链条张紧轮与轴的配合，曲轴主轴承与轴颈的配合	$\frac{H8}{f9}$ $\frac{F8}{h9}$	同上	配合间隙较大，同轴度不高，但能保证良好润滑，允许在工作中发热
外圆磨床主轴与滑动轴承的配合，蜗轮发电机主轴与滑动轴承的配合，凸轮轴与滑动轴承的配合	$\frac{H7}{e8}$ $\frac{E8}{h8}$	手轻推进	配合间隙较大，用于转速高、载荷不大的轴与轴承的配合

七、画出轴的工作图

轴的结构设计常与轴的强度和刚度计算、轴承及联轴器的尺寸选择计算，键联结强度校核计算等交叉进行，反复修改，最后确定最佳结构方案，画出轴的工作图（见图3-42）。

第四章 轴所承受的载荷

第一节 载荷特性

设计转轴、心轴时，应当保证其静强度、疲劳强度、刚度和其它的特殊要求。因此，应当采用工作载荷中基本上能确定轴的静承载能力和疲劳强度的载荷作为计算载荷。这样，了解轴在工作时所承受的载荷特性，就显得十分必要。

机器在工作时，作用在轴上的载荷可能是静载荷（不随时间而变化的载荷），也可能是随时间而变化的载荷。在大多数情况下，轴受到的是随时间而变化的载荷。

对那些长期作用在轴上并且在加载和卸载过程中变化不大的载荷，可看做是静载荷。像轴的自重、旋转时的离心力、套装零件对轴的扣紧力等等，就是这一种载荷。若实际载荷是在偏离某一个平均值 $\pm 10\% \sim 15\%$ 的范围内变化，考虑到零件计算的近似特性，也可将这种载荷看做是静载荷。连续进给的带式输送机、流量恒定的离心泵、流水作业线上的剪板机、毛坯尺寸一定的曲柄压力机等等机器上的轴，作用在其上的载荷就属于此类。化学和食品工业上用的机器装备，经常遇到连续搅拌、辗磨等工艺过程，其上的载荷也属静载荷，但应考虑到启动和过载时引起的载荷变化。

静载荷在零件中不仅能引起静应力，还可能引起随时间而变化的应力。例如：当轴在方向不变的载荷作用下转动时，轴的横截面内会产生随时间而作周期变化的应力（弯曲应力）。静载荷可以是和轴一起旋转的，也可以是相对机座是静止的。前者产生的是静应力，如不平衡重量引起的离心载荷所产生的应力，后者产生的是变应力，如齿轮轮齿间的作用力在轴上引起的弯曲应力。

在进行轴的计算时，合理地确定计算载荷和研究决定轴强度的应力状态，是很重要的。因此，在很多情况下，必须综合研究轴所受到的多种不同的载荷和相应的应力状态，还有它的工作情况。例如：启动、正常工作、长期或短期过载、制动、振动、共振等。此外，还要考虑轴在机器传动链中的位置。因为，一般情况下，作用在传动链中的力和由它所克服的生产阻力，在数值上是不同的，而且是随时间而变化的。计算对象既可能是传动链中的始端轴或末端轴，也可能是任一中间轴，而任一中间轴上的载荷要根据传动链中末端轴上载荷的变化规律来确定。

第二节 随时间而变化的载荷

载荷随时间按一定方式变化的情况，可在很多机器和机械中看到。这种载荷通常发生在进行周期性作用的机器中，例如：起重机、摩擦压力机、曲柄压机、轧钢机等。起重机从起吊、运送重物、释放重物到再起吊可视为一个工作循环；曲柄压机每压制一个工件计为一个工作循环；轧钢机每轧制一种钢材要完成由若干工序组成的工作循环。这些机械，轴所受载荷就是按工作循环作周期性的重复变化。

载荷随时间而变化的特性，以履带式铲掘机为例进行说明。当机器刚开始铲拔树桩时，树桩未动，载荷达到最大值，随着树桩被慢慢拔起，载荷逐渐下降，直到树桩被全部拔起载荷降为零为止。图 4-1(a) 给出的是这种机器的工作转矩随时间变化的曲线。这是一条光滑曲线，为了计算方便，通常用阶梯形的载荷图来代替曲线形的载荷图，如图 4-1(b) 所示。图中垂直坐标 m 表示相对载荷（占最大载荷的比例），横坐标表示相对应应力循环数（占总应力循环数的比例）。用阶梯形载荷图来确定相当载荷和相当应力循环数（见第五章）是很方便的。

图 4-2 是起重机起吊机构的载荷图。机构从起吊—运动—制动，完成一个工作循环。大多数起重机零件都是按照这种载荷图来进行计算的。

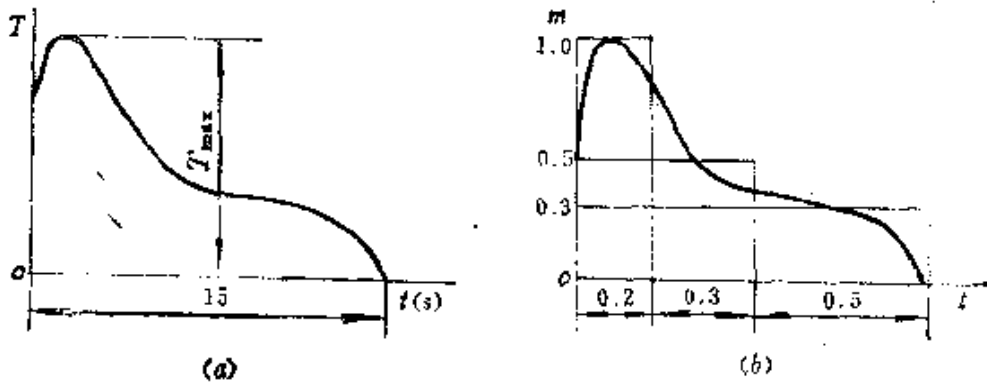


图4-1 铲掘机的载荷图
(a) 光滑曲线图；(b) 阶梯形图。

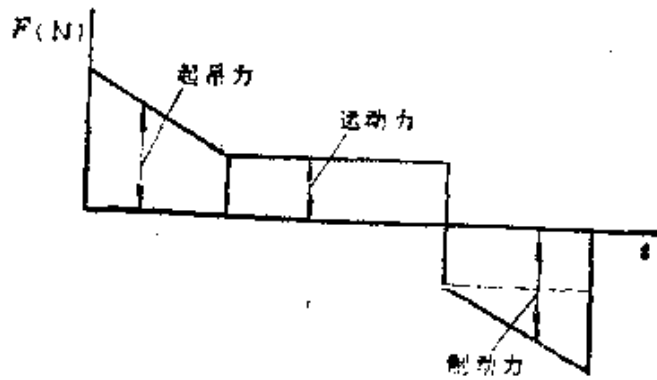


图4-2 起重机起吊机构的载荷图

图 4-3 为摩擦压力机的载荷图。 T_1 — T_2 为向下运动， T_2 — T_3 为工件变形， T_3 — T_4 为向上运动， T_0 为空行程。

图 4-4 为轧钢机由 5 个工序组成的工作循环的载荷变化图，图中 τ 为工作周期。

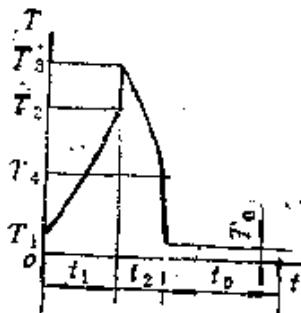


图4-3 摩擦压力机的载荷图



图4-4 轧钢机的载荷图

上述几个例子，载荷都是随时间而变化的，当在某一时间间隔内载荷是按某一曲线规律变化时，均可按图 4-1(b)的办法来加以处理。

第三节 服从统计规律的载荷

前节所述载荷均为有规律变化的载荷，即载荷的大小和其作用时间之间的变化，不是随机的，而是按一特定规律变化的，这种载荷可通过计算或现场实测加以确定。但是，远不是所有情况下载荷与其作用时间都存在某种规律性的关系，大部分机器中的载荷往往带有随机的特性。例如汽车通过障碍地带时后桥车轮轴上的载荷，挖进机以及农用机械上内燃机曲轴上的载荷都具有很大的随机特性。如果我们按照统计学的方法对这种随机载荷加以分析研究，会发现它们还是遵循某种规律在变化，即所谓统计规律。

图 4-5 是用记录仪记录下来的攻丝机的 3 个工序的载荷图。

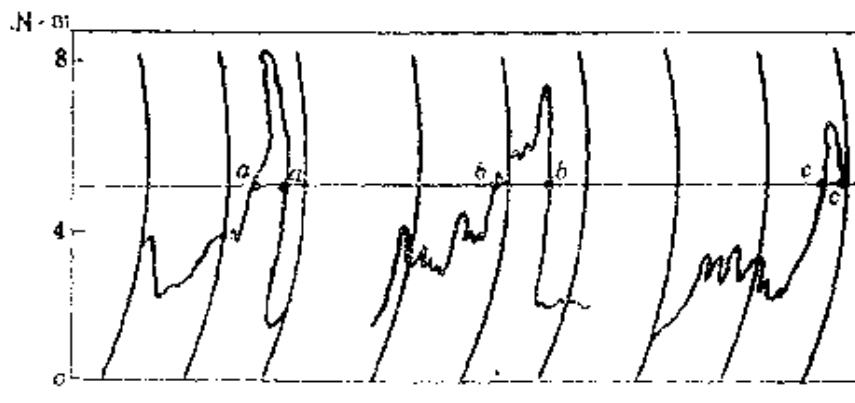


图 4-5 攻丝机的载荷图

若在载荷图上依次作出不同高度的载荷水平线，并量出相应于该载荷下的作用时间，即图中所示的水平线段 \overline{aa} 、 \overline{bb} 、 \overline{cc} ， $\overline{a_1a_1}$ 、 $\overline{b_1b_1}$ 、 $\overline{c_1c_1}$ ，…… $\overline{a_n a_n}$ 、 $\overline{b_n b_n}$ 、 $\overline{c_n c_n}$ ，然后将不同载荷和其相应的作用时间画在 $t - m$ 坐标上（其中 $m = T/T_{max}$ ， $t = t_{\Sigma}/t_n$ ， t_n 为三个工序总的作用时间），就可作出图 4-6 所示的阶梯形载荷图，它可近似地用曲线 1 来代替。如果将曲线 1 求导数，则可

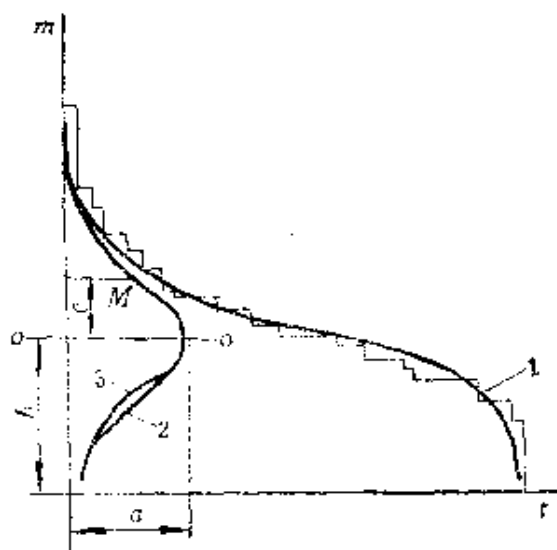


图4-6 攻丝机统计载荷图

得到曲线2，曲线2非常接近正态分布曲线3，因此可以说攻丝机工作机构上的载荷与作用时间之间的关系服从统计规律（正态分布规律）。

曲线3可用下式来表示

$$\frac{dt}{dm} = ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-\bar{m}}{C}\right)^2}$$

式中 e ——自然对数的底；

C ——曲线3对称轴线 oo 到曲线拐点 M 的距离。

图4-7为农用康拜因机后桥的载荷的统计分布特性图，这也是典型的正态分布曲线。垂直坐标 n 表示载荷分布的概率密度。

在第六章里我们将介绍零件载荷和承载能力的统计特性。

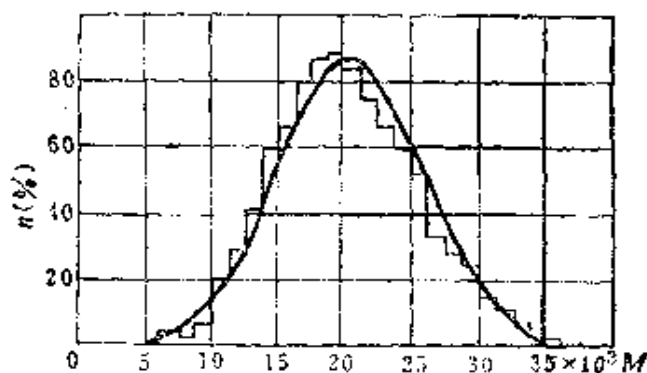


图4-7 农用康拜因后桥的统计载荷特性

第四节 相对于轴位置发生变化的载荷

除载荷大小外，载荷相对于轴的位置（周向、轴向）对轴的承载能力也有很大影响。在实际计算时，常把载荷区分为相对于加载轴是旋转的和不旋转的两种。这种区分在决定轴的弯曲应力分量时是方便的（因为轴的强度主要是疲劳问题，而对疲劳产生主要影响的是应力幅）。不旋转的载荷产生不变的弯曲应力，即平均应力 σ_m ；旋转的载荷产生变动的弯曲应力，即应力幅。弯曲应力的循环分量按下式计算

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$$

相对轴是旋转的载荷，相对于机座可能是不旋转的也可能是旋转的（以不同于轴的角速度旋转）。一般说来，这种载荷决定了应力循环的应力幅。两者的差别在于：相对机座是不旋转的载荷在轴上引起的应力循环数与相同时间间隔内轴的转速相同；相对机座是旋转的载荷在轴上引起的应力循环数等于轴与载荷角速度的代数差。

下面以图 4-8 所示的行星齿轮机构为例来说明这种载荷的特性。功率由轴 1 输入，经齿轮 10、4 传到轴 3，功率的一部分经主动半联轴器 2 输出，一部分经行星齿轮的中心轮 9、行星轮 8、转臂 5 由轴 6 输出。现分析作用于轴 3 上的载荷。作用于主动半联轴器 2 上的反转矩在轴端产生一个随轴 3 一起旋转的不平衡力；作用在齿轮 4 上的力相对机座是不旋转的，它以等于轴的角速度相对轴 3 而旋转；作用在中心轮 9 上的载荷有来自行星轮的反转矩，当不存在自动调节装置时，各行星轮受力是不均匀的，因而在轴 3 右端引起一个与转臂 5 一同旋转的不平衡力，该力相对于轴 3 和机座都是旋转的。轴 3 与转臂 5 的转向一致。根据受力情况可画出轴 3 的弯矩图，如图 4-8 所示。对于轴 3 上任

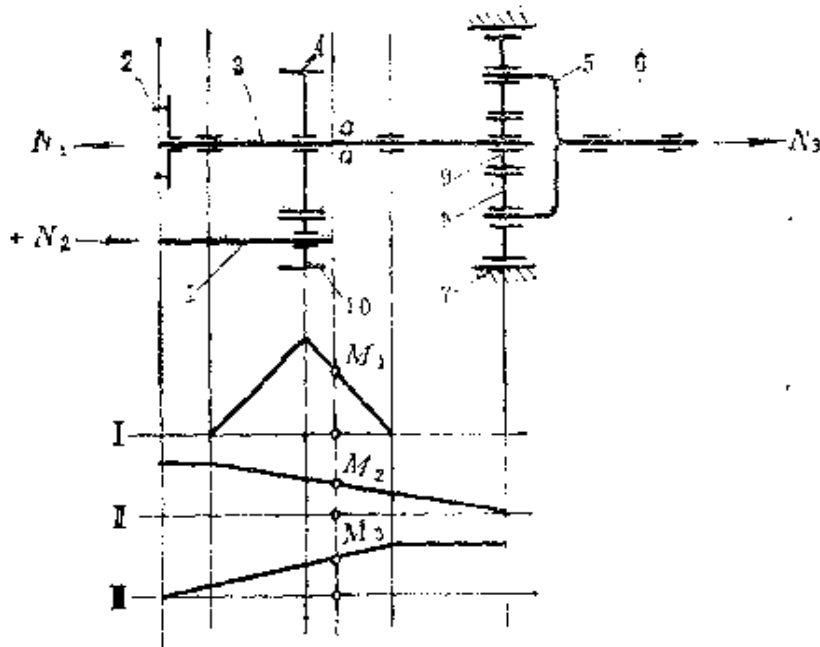


图4-8 行星齿轮机构传动简图和轴3的弯矩图

意截面 $a-a$ 所受的弯矩 M_1 、 M_2 、 M_3 来说，它们具有不同的作用周期， M_1 的作用周期为 $2\pi/\omega_4$ ， M_3 的作用周期为 $2\pi/(\omega_4 - \omega_5)$ (ω_4 、 ω_5 分别为轴3和转臂5的角速度)， M_2 为常量弯矩。

图4-9所示为轴3 $a-a$ 截面的弯曲应力的变化图。总的弯曲应力 σ_2 应为 σ_1 、 σ_3 、 σ_4 的代数和。图中横坐标为时间 t 。

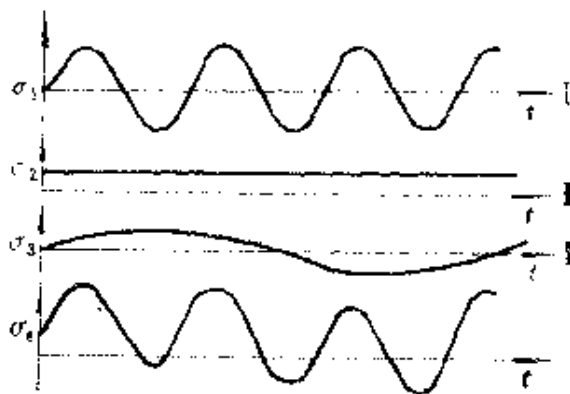


图4-9 轴3(图4-8) $a-a$ 截面的弯曲应力

Ⅰ—由作用在齿轮4上的力产生的弯矩图；Ⅱ—由半联轴器2上的不平衡力产生的弯矩图；Ⅲ—由齿轮9上的不平衡力产生的弯矩图。

有的情况下，载荷沿轴向间歇地在改变其作用位置，例如机床主轴箱、汽车变速箱的轴，在换档时载荷作用位置随之改变，轴的危險截面也随之而变。

还有一种情况，轴上载荷沿轴向连续地改变其作用位置，圆弧点啮合齿轮轴就是一个典型的例子。因为圆弧齿轮的啮合线为一平行于轴线的直线，齿廓接触点的移动速度为 $v_s = v \operatorname{ctg} \beta_0$ ，式中 v 为齿轮圆周速度， β_0 为齿轮的螺旋角。可见，轮齿间的啮合力以大于齿轮圆周速度的速度沿轴向高速移动。如设齿宽为 b ，齿轮相对支点为对称布置，当接触点从齿的一端移到另一端时，不同接触点轴的弯矩图是不同的，图 4-10 给出了在 1、2、3 点接触时轴的弯矩图。

对任一截面 1—1 来说，每当齿轮转过一个齿距 $t_s = t_0 \operatorname{tg} \beta_0$ (t_0 —轴向齿距)，弯曲应力就由某一最大值变到某一最小值。

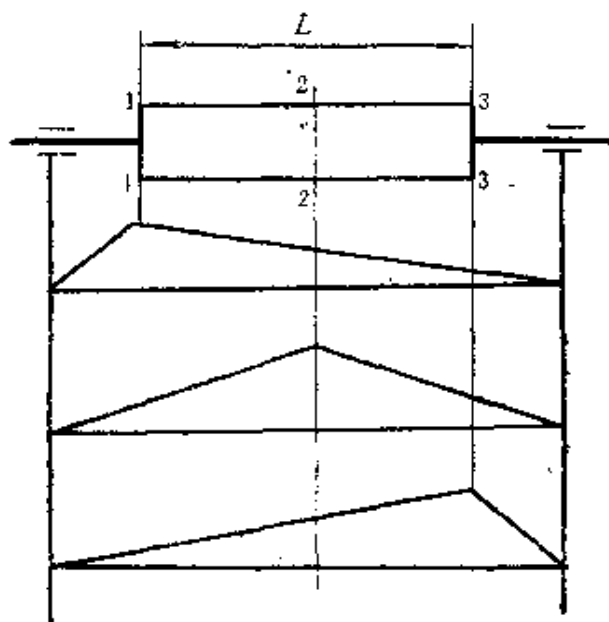


图4-10 圆弧齿轮轴的弯矩图

第五节 零件在轴上的布置及零件结构对载荷分布的影响

零件在轴上的布置及零件结构对载荷分布有不可忽视的影响。如果零件在轴上布置得恰当，将会使载荷分布得比较合理；

反之，则会使轴的工作情况变得极为不利。

如图 4-11 所示的转轴，若功率由轮 1 输入，通过轮 2、3、4 输出。各轮如图 (a) 那样布置，轴所受的最大扭矩为 $T_{\max} = T_2 + T_3 + T_4$ ，若按图 (b) 布置，则 $T_{\max} = T_3 + T_4$ 。显然，图 (b) 的布置方案是合理的。

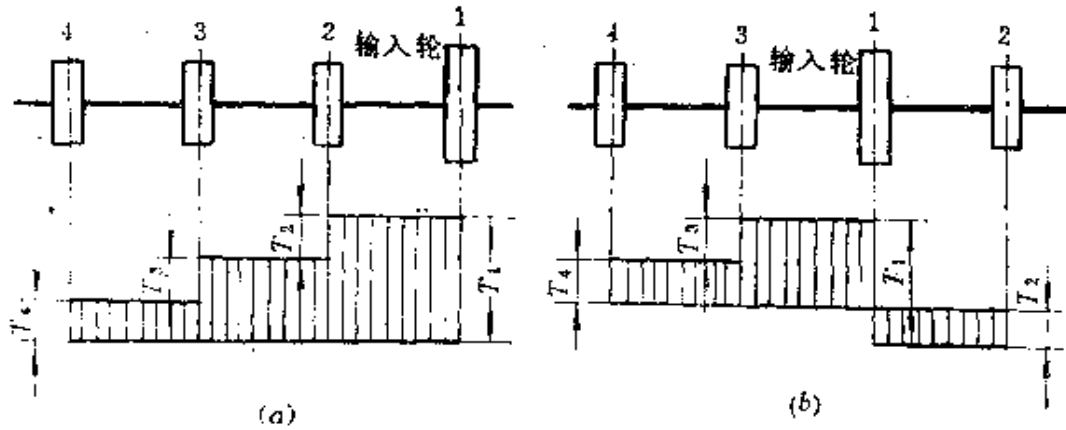


图 4-11 轴上零件的合理布置

(a) 不合理，(b) 合理。

图 4-12 为一铰车轮毂结构示意图。图 (a)，图 (b) 两种结构略有差别，轴的弯矩图也不相同，但图 (b) 所示结构最大弯矩显然比图 (a) 所示的结构要小。此两种结构的轴属不转动的心轴，任一截面所受弯矩是恒定不变的，应考虑其静强度；若轴与轮毂制成一体，则轴变为转轴，其上的弯曲应力是交变的，此时应考虑轴的疲劳强度。

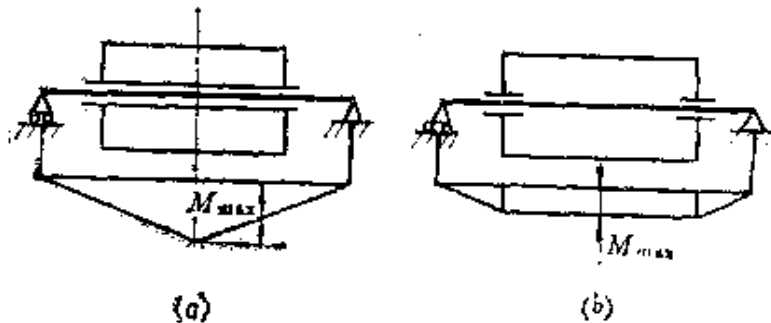


图 4-12 铰车轮的两种轮毂结构

(a) 铰车轮毂结构 I；(b) 铰车轮毂结构 II。

第六节 轴上载荷的简化

作用在轴上的载荷是通过其上的零件如齿轮轮毂、联轴器、键等来传递的。

如图 4-15 所示的轴 3，转矩由联轴器 5 输入，由作用于齿轮 1 和 4 上的转矩来平衡。齿轮 1、4 上的径向力、圆周力以及作用于联轴器销轴上的横向力都使轴产生弯曲，但是齿轮的径向力、圆周力是沿齿宽分布的（并非均匀分布），联轴器销轴上的力也不是集中作用的，这些载荷通过轮毂作用于轴上时，也是一种分布载荷，是沿轮毂长度分布的。

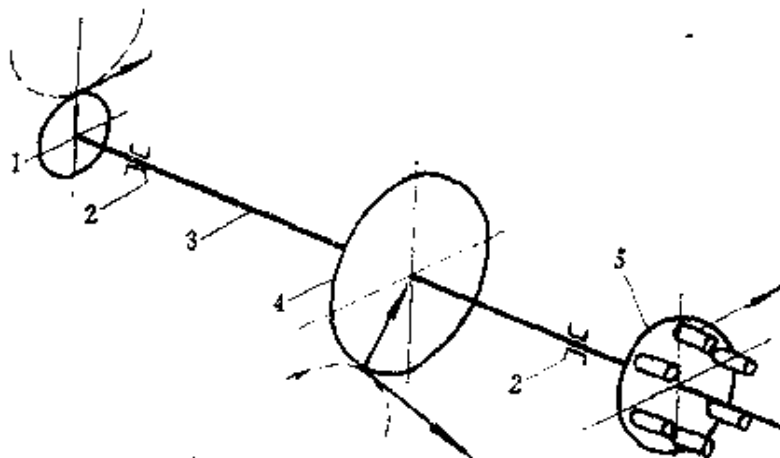


图4-15 轴上载荷的传递

载荷沿轮毂的分布，取决于在外载荷作用下轮毂与轴的组合变形。由于套装零件对轴的作用，使轴在工作时卸去了其上的一部分载荷，同时提高了轴的刚度，这对轴的工作是有利的。但是，要计算这种组合变形下的载荷分布是很困难的，这不仅是因为套装零件的变形计算复杂，而且还涉及到接触应力问题。通过试验方法确定载荷分布也不那么容易，因此，到目前为止还没有一种用来计算轴毂配合处载荷分布的满意方法，只能近似地加以估计。

多数情况下，可认为轮毂作用于轴上的载荷是集中力或集中力矩，这样可使计算大为简化。

现分析图 4-16 所示的轴。载荷通过套装零件传到轴上，若零

件与轴为有间隙的配合，则可认为载荷比较集中地作用在轮毂的边缘，轴的受力与弯矩图如图 4-16(a) 所示；若零件与轴为过盈配合，则外载荷产生的分布载荷将与未加载时轮毂给与轴的分布力相叠加，反而卸去轴上的一部分载荷，此时的载荷分布和弯矩图如图(b) 所示。

当轮毂直径 D 大于轴径 d 的两倍，即 $D > 2d$ ，则轮毂的刚度大于轴的刚度，此时可认为轮毂传到轴上的载荷是以两个集中力的形式作用在轮毂的边缘。

当刚性轮毂以过盈与轴配合时，由于轮毂受力的结果而使轴卸载，此时有条件地认为是两个作用在轮毂边缘的集中力矩同外载荷叠加的结果。不过在计算内力时，该集中力矩可不予考虑。

当轮毂与轴为有间隙的配合，且轮毂刚度较小 ($D/d \leq 1.2$) 时，可认为载荷是以集中力的形式作用在轮毂的中央；如果轮毂刚度较小，且与轴的配合带有过盈，可认为载荷是以两个集中力的形式作用在从轮毂边缘算起约 $b/3$ 的地方 (b 为轮毂长度)，如果轮毂为中等刚度 ($1.2d < D < 2d$)，且配合有间隙时，可认为是两个集中力作用在距轮毂边缘 $b/3$ 处；若配合有过盈，则作用在 $b/5$ 处。

如果套在轴上的零件（如调整环、套筒等）并不传递载荷，

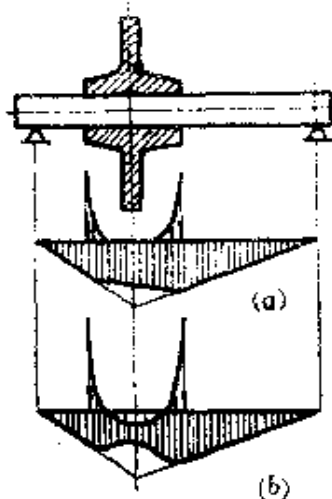


图4-16 套装零件对轴的加载

(a) 间隙配合下的弯矩图，

(b) 过盈配合下的弯矩图

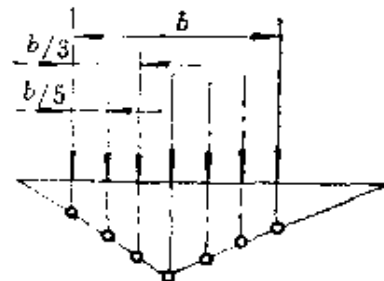


图4-17 有套装零件时轴的弯矩图

这些零件对轴上载荷的影响可略去不计。

图 4-17 指出了轴与轮毂配合时集中力的作用位置和轴的弯矩图。

当轴是通过键或花键来传递转矩时，若键长小于轴的直径，则可认为在轮毂中央截面上作用一集中转矩。若键的长度较大，则应考虑键沿其长度方向上的变形。此时，可认为转矩沿毂长直线变化，如图 4-18 所示。

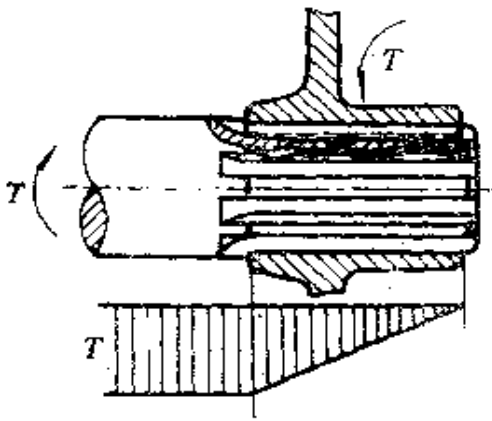


图4-18 沿花键长度的转矩分布

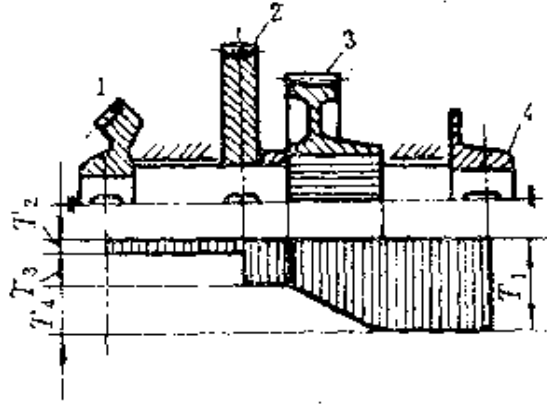


图4-19 具有花键转轴的转矩图

图 4-19 为一机床的分配轴，功率由齿轮 4 输入，而由齿轮 1、2、3 分别输出到进给机构、液压提升机构和工作轴，由于齿轮 3 与轴用较长的花键联结，故该段轴上的转矩应按直线规律变化。

第五章 轴的强度计算

轴的强度计算的目的在于根据轴的强度条件（静强度和疲劳强度）确定轴的直径。若轴径已由经验关系或结构设计所确定，计算的目的是验算已定的轴直径是否满足强度要求。

工程上常用的计算方法有以下几种：

（1）按经验关系或按扭转切应力计算法 此法适用于主要用来传递转矩（扭矩）的轴。由于计算简单方便，常在设计的最初阶段用来初估轴的直径，作为进行结构设计的依据，并为以后的精确计算提供必要的条件。

（2）按许用弯曲应力计算法 此法计算时考虑了支承的特点、轴的跨距及轴上载荷分布等因素，因此与轴的实际工作情况较接近。但因结构设计细节尚未完成，不可能精确考虑结构因素对强度的影响，故计算仍带有条件性。常用于承受较大弯矩的轴。

（3）安全系数校核法 此法通常在结构设计完成之后进行。由于是在前法的基础上较精确地考虑了应力集中、尺寸大小及表面质量等因素对强度的影响，常用来精确地校核轴的强度余度。

第一节 按经验关系式或扭转切应力计算法

一、按经验关系确定轴的直径

在设计的最初阶段，所掌握的原始数据不多，不可能按强度条件精确地定出轴的直径。例如设计减速器，当传动方案及齿轮的设计完成后，只有轴所传递的功率（或转矩）是已知的，此时往往根据一些经验关系式来初步确定轴的直径。如：

对于一般用途的齿轮减速箱，与电机轴（轴径为 d_e ）相连的输入轴轴端直径 d ，常按下述关系确定。

当电机转速为 1500 r/min 时, $d_r = 1.19d_a$

当电机转速为 1000 r/min 时, $d_r = 1.07d_a$

当电机转速为 750 r/min 时, $d_r = 0.93d_a$

减速器输出轴轴端直径可按 $d_c = k \sqrt{T}$ 来计算, 其中 T 为转矩 ($N \cdot mm$), k 为常数, 可取 1.07~1.16。

对于多级齿轮减速器, 第 i 级低速轴与齿轮配合处的直径 d , 可按下式确定:

$$d = (0.33 \sim 0.45) a_i$$

式中 a_i —— 第 i 级中心距。

机床主轴轴径的大小往往根据其主要几何参数来确定, 如车床主轴直径是按主轴中心高 (可加工的最大工件半径) 来确定的。

有时也采用类比的办法来确定轴的直径。

二、按扭转切应力确定轴的直径

轴受转矩作用时的强度条件为:

$$\tau = \frac{T}{W_\tau} = \frac{9550 \times 10^3 \frac{N}{n}}{0.2d^3} \leq [\tau] \quad \text{MPa} \quad (5-1)$$

由上式可求得按许用扭转切应力 $[\tau]$ 确定轴径 d 的公式:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{9550 \times 10^3}{0.2[\tau]} \cdot \frac{N}{n}} = A \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \text{mm} \quad (5-2)$$

式中 N —— 传递的功率 (kW);

n —— 轴的转速 (r/min);

$A = \sqrt[3]{\frac{9550 \times 10^3}{0.2[\tau]}}$ 与轴的材料有关的设计常数, 可按表 5-1 选取。

对于空心轴, 当轴的内、外径之比 $d_o/d = \beta$ 时, 抗弯断面模数 $W_\tau = 0.2d^3(1 - \beta^4)$, 式 (5-2) 变为:

$$d \geq A \sqrt[3]{\frac{N}{n} \frac{1}{1 - \beta^4}} \quad (5-3)$$

系数 $\sqrt[3]{\frac{1}{1-\beta^4}}$ 可按 β 值大小由图 5-1 查取。

对有键槽的轴段按式 (5-1)、式 (5-2) 求得的直径应放大 3%~5% (一个键槽) 或 7%~10% (两个键槽), 然后圆整到标准直径 (JB176-60)。

表 5-1 几种常用材料的 $[\tau]$ 及 A 值

轴的材料	A3, 20	35	45	40Cr, 35SiMn, 42SiMn, 20CrMnTi, 20CrB
$[\tau]$ (MPa)	12~20	20~30	30~40	40~52
A	160~135	135~118	118~107	107~98

注: 1. 当弯矩相对转矩很小或只受转矩时, $[\tau]$ 取较大值, A 取较小值;
2. 当用 A3 及 35SiMn 时, $[\tau]$ 取较小值, A 取较大值。

按许用扭转切应力计算出的直径可以作为轴的最小直径, 并依此进行轴的结构设计。

由于计算中未考虑弯矩的影响, 为补偿弯曲应力对强度的影响, 应采用较低的许用应力, 表 5-1 给出的几种常用材料的 $[\tau]$ 及 A 值, 是降低了的许用应力值。对于减速器轴的伸出部分可取 $[\tau] \approx 0.025 \sim 0.03 \sigma_b$ (σ_b 为材料的强度极限)。

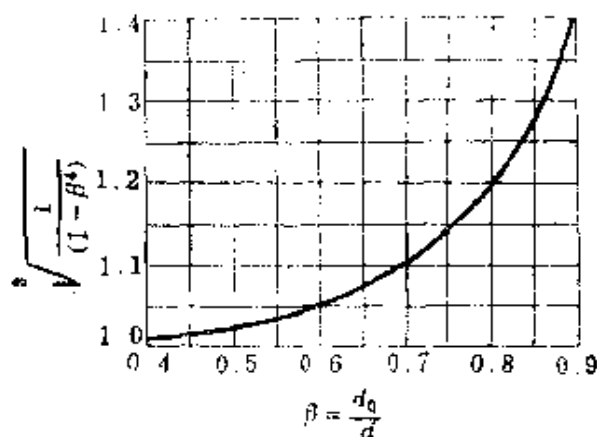


图 5-1 空心圆轴的 $\sqrt[3]{\frac{1}{1-\beta^4}}$ 值

第二节 按许用弯曲应力计算法

一、支承的简化

轴通常被当作具有铰接刚性支承的梁来设计计算的，这种假设对两边分别用一个滚动轴承支承的轴（见图 5-2 a, b）是足够精确的。对两边分别用两个滚动轴承支承的轴（见图 5-2 c）来说，支承反力主要由内侧的轴承来承受，外侧的轴承只承受很小一部分支反力。因此，对图 5-2 (c) 所示的支承，其支点位置应放在内侧轴承的中央，或向外偏离 $l/3$ 处。

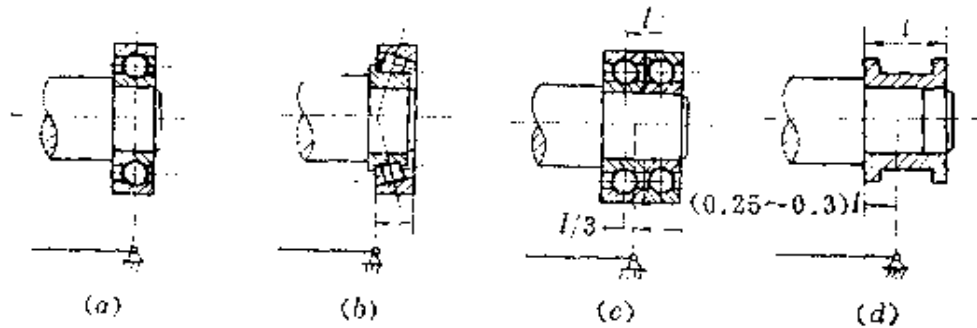


图 5-2 轴上支承反力的作用点

(a)、(b) 轴端用一个轴承支承；(c) 轴端用两个轴承支承；
(d) 轴端用滑动轴承支承。

对于滑动轴承（不能调心的），由于轴的变形，压力沿轴承长度上的分布是不对称的，此时支点位置应放在从轴承内侧面算起 $(0.25 \sim 0.3)l$ 处（见图 5-2 d），但不大于轴颈直径的一半。

对于用滚动轴承支承的多支点轴，应作为铰接弹性支座来考虑。由于工作时的接触变形会给轴上的载荷分布带来一定的影响，因此在精确计算多支点轴时应对此加以考虑。依轴承类型及几何尺寸，可按下列式计算接触变形 δ 。

$$\delta = 0.1 \left[K + \frac{10}{EJ} \left(1 + \frac{d}{D} \right) \right] F, \quad \mu\text{m} \quad (5-4)$$

式中 F_r —— 轴承的径向载荷 (N)；

d —— 轴承内径 (mm)；

D ——轴承外径 (mm);

B ——轴承宽度 (mm)。

系数 K 与轴承类型有关, 其值按下式确定:

$$\text{单列向心球轴承 } K = \frac{0.7 + 0.02 d}{\sqrt[3]{0.1 F_r}} \quad (5-5)$$

$$\text{圆柱滚子轴承 } K = 0.032 + 0.00026 d \quad (5-6)$$

$$\text{圆锥滚子轴承 } K = 0.022 + 0.00015 d \quad (5-7)$$

二、双支点轴静力学计算

受横向力和力矩作用的双支点轴, 可按材料力学的方法计算支反力和弯矩。

若轴上载荷作用在不同平面上, 可将它们分别投影到相互垂直的两个平面上, 分别计算每个平面上载荷分量产生的支反力和弯矩。如果载荷所在平面间的夹角不大于 30° , 可认为是作用在同一平面上, 而不会给计算带来明显的误差。一般情况下, 投影平面应这样选择: 使其中一个平面包含一个或两个作用力。如果一个平面上的作用力偏离坐标平面并小于 15° , 可认为该力与后者重合。图5-3所示的齿轮轴两齿轮的径向力 F_{r1} 与 F_{r2} , 作用在不同的轴向平面内, 因两平面间的夹角等于 30° , 所以可认为

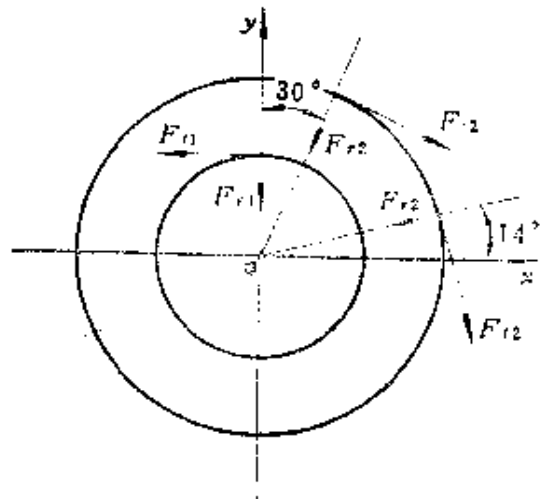


图5-3 作用于不同轴向平面的齿轮作用力

F_{r_1} 及 F_{r_2} 作用在同一轴向平面内。若 F_{r_2} 与 x 轴的夹角小于 15° (图中为 14°)，则认为 F_{r_2} 与 x 轴重合。

图 5-4 的齿轮轴，圆周力 F_t ，径向力 F_r 及轴向力 F_a 三者互相垂直，可选取 xoy 与 xoz 平面为投影平面，其中 F_t 、 F_a 在 xoy 平面内， F_r 可投影在 xoz 平面内，分别计算这两个平面内的支反力和弯矩，然后矢量合成。

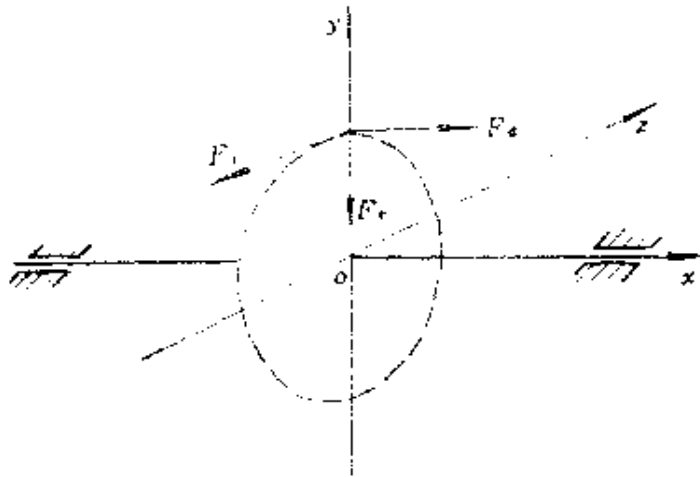


图5-4 齿轮上的作用力

总的支反力按下式计算：

$$R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2} \quad (5-8)$$

$$R_2 = \sqrt{R_{2x}^2 + R_{2y}^2} \quad (5-9)$$

任一截面总的弯矩按下式计算

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (5-10)$$

为简化计算，当进行弯矩合成时，可近似认为合成弯矩成线性变化（见图 5-5）。

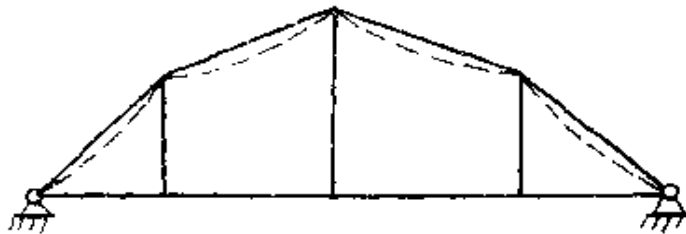


图5-5 合成弯矩的简化

三、力的简化

通过轴上零件（齿轮、带轮、链轮等）传递到轴上的力和力矩应按第四章所述那样加以考虑，但为简化计，通常都当作作用在轮毂中央的集中力和集中力矩来处理。

如果轴端安装有弹性圈柱销或尼龙柱销联轴器，考虑到安装误差或弹性元件的不均匀磨损，柱销间的载荷分布将是不均匀的。因而会使轴受到一个集中力的作用，该力可取为 $(0.2 \sim 0.35) \frac{2T}{D}$ ，其中 T 为转矩， D 为柱销中心所在圆直径。

当轴端安装有齿形联轴器时，齿啮合过程中将产生很大的轴向摩擦力，使轴产生弯曲。该弯矩可按下式计算， $M = kT$ ，系数 $k = 0.07 \sim 0.13$ 。润滑条件好时，取小值；润滑条件差时取大值。该弯矩矢量与轴线垂直，并随轴一同旋转。

应当指出的是主动轴的转向对轴的受载有不可忽视的影响，如图 5-6 所示的多级齿轮传动，如改变主动轴 1 的转向，则 F_{r2} 将与 F_{r1} 反向，同样 F_{r3} 也将与 F_{r2} 反向，这对轴 2 的受载情况是有利的。若为斜齿轮，则螺旋角的旋向应选择得使轴 2 上两齿轮所受轴向力方向相反，以减轻轴承的负担。

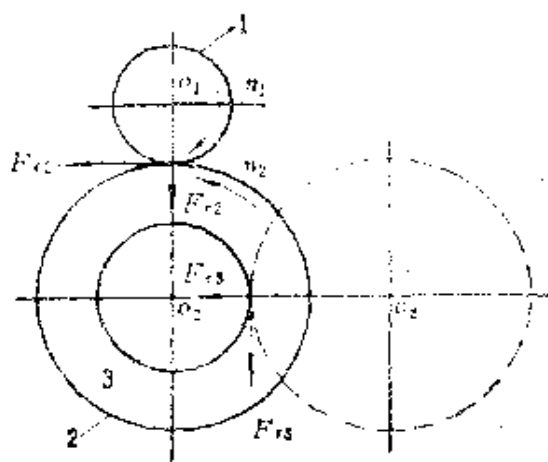


图 5-6 齿轮转向对轴受载的影响

四、按许用弯曲应力确定轴的直径

(一) 轴的疲劳强度计算

当轴同时承受弯矩 M 及转矩 T 时 (M 、 T 应是长期作用的 M_{\max} 、 T_{\max})，根据第三强度理论可求得相当弯矩 M_{eq} 为：

$$M_{eq} = \sqrt{M^2 + (\alpha T)^2} \quad (5-11)$$

式中 α ——为了将转矩 T 折合成相当弯矩而引进的折算系数。因为由弯矩引起的弯曲应力通常是对称循环变化的，而转矩引起的切应力则认为脉动变化的。而不同的应力循环特征对轴的疲劳强度的影响是不同的。 α 值取决于切应力的循环特征：

当扭转切应力对称循环变化时， $\alpha = 1$

当扭转切应力脉动循环变化时， $\alpha = [\sigma_{-1}] / [\sigma_0] = 0.6$

当扭转切应力不变化时， $\alpha = [\sigma_{-1}] / [\sigma_{+1}] = 0.3$

表5-2 轴的许用弯曲应力 $[\sigma]$ (MPa)

材料	σ_b	$[\sigma_{+1}]$	$[\sigma_0]$	$[\sigma_{-1}]$
碳钢	400	130	70	40
	500	170	75	45
	600	200	95	55
	700	230	110	65
合金钢	800	270	130	75
	900	300	140	80
	1000	330	150	90
	1200	400	180	110
铸钢	400	100	50	30
	500	120	70	40
灰铸铁	400	65	35	25

表中 $[\sigma_{-1}]$ 、 $[\sigma_0]$ 及 $[\sigma_{+1}]$ 分别表示轴在对称循环、脉动循环变化及静应力下的许用弯曲应力，其值可概略地按表5-2选取。

轴的危险截面的强度条件为：

$$\sigma = \frac{M_{eq}}{W} = \frac{\sqrt{M^2 + (\alpha T)^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (5-12)$$

对于实心圆轴, 抗弯断面模数 $W = \frac{\pi}{32} d^3 \approx \frac{d^3}{10}$ (见表 5-3), 空心圆轴 $W = \frac{\pi}{32} d^3 (1 - \beta^4) \approx \frac{d^3}{10} (1 - \beta^4)$, 代入上式

对于实心圆轴有:

$$\sigma = \frac{10}{d^3} M_{\max} = \frac{10\sqrt{M^2 + (\alpha T)^2}}{d^3} \leq [\sigma] \text{ MPa} \quad (5-13)$$

或
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{M^2 + (\alpha T)^2}}{[\sigma]}} \text{ mm} \quad (5-14)$$

对于空心圆轴有:

$$\sigma = \frac{10\sqrt{M^2 + (\alpha T)^2}}{d^3} \frac{1}{(1 - \beta^4)} \leq [\sigma] \text{ MPa} \quad (5-15)$$

或
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{M^2 + (\alpha T)^2}}{[\sigma]} \frac{1}{(1 - \beta^4)}} \text{ mm} \quad (5-16)$$

式中 $[\sigma]$ ——轴的许用弯曲应力, 可按表 5-2 选取或按下述公式进行计算,

$$[\sigma] = [\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1} \varepsilon_s \beta}{[n] K_\sigma} \text{ MPa} \quad (5-17)$$

式中 σ_{-1} ——对称循环应力下材料的弯曲疲劳极限, 见表 2-1;

ε_s ——弯曲时的尺寸系数;

β ——表面状况系数;

K_σ ——有效应力集中系数;

$[n]$ ——抗疲劳损坏的许用安全系数。

在未进行结构设计之前, 系数 ε_s 、 β 及 K_σ 还难以确定, 一般可近似地取 $\frac{K_\sigma}{\varepsilon_s \beta} \approx 3 \sim 5$ 。轴毂联结处的直径, 若采用过盈配合则取大值, 否则取小值。当结构设计完成以后, 若需按式(5-13)、式(5-15)验算轴的强度时, ε_s 、 β 及 K_σ 可按表 5-5、表 5-4 (或图 5-13) 及表 5-6~表 5-11 选取。若表面强化, 一般应按表 5-4 选取 β 值, 否则按图 5-13 选取 β 值。许用安全

系数可取 $[\sigma] = 2$ ，或采用本章第三节的推荐值。

当弯曲应力是脉动循环变化时，上述各式中的许用应力取 $[\sigma] = [\sigma_0] \approx 1.6[\sigma_{-1}]$ 。

(二) 轴的静强度计算

进行轴的静强度计算时，仍可采用上述式(5-13)~式(5-16)，但取 $\alpha = 1$ ， M 、 T 应取短期作用的 M_{\max} 、 T_{\max} ，许用应力则按材料的屈服极限 σ_s 由下式求得：

$$[\sigma] = [\sigma_{s1}] = \frac{\sigma_s}{[n_s]} \quad (5-18)$$

式中 $[n_s]$ ——安全系数， $[n_s] \approx 1.3 \sim 1.6$ 。

例题 5-1 设计双级圆柱齿轮减速器的中间轴，已知转矩 $T = 1.31 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$ ，转速 $n = 647.5 \text{ r/min}$ ，齿轮 1、2 的分圆直径分别为 $d_1 = 88.5 \text{ mm}$ ， $d_2 = 270.24 \text{ mm}$ ，轴的材料为 40Cr， $\sigma_b = 800 \text{ MPa}$ ， $\sigma_s = 600 \text{ MPa}$ ，齿轮 1、2 上的作用力如图 5-7 所示。根据结构上的考虑及轴上零件的布置给出支承间跨距 $l = 181 \text{ mm}$ ，齿轮 2 中央截面至右支承的距离 $l_2 = 46 \text{ mm}$ ，两齿轮中央截面间的距离 $l_1 = 72.5 \text{ mm}$ 。

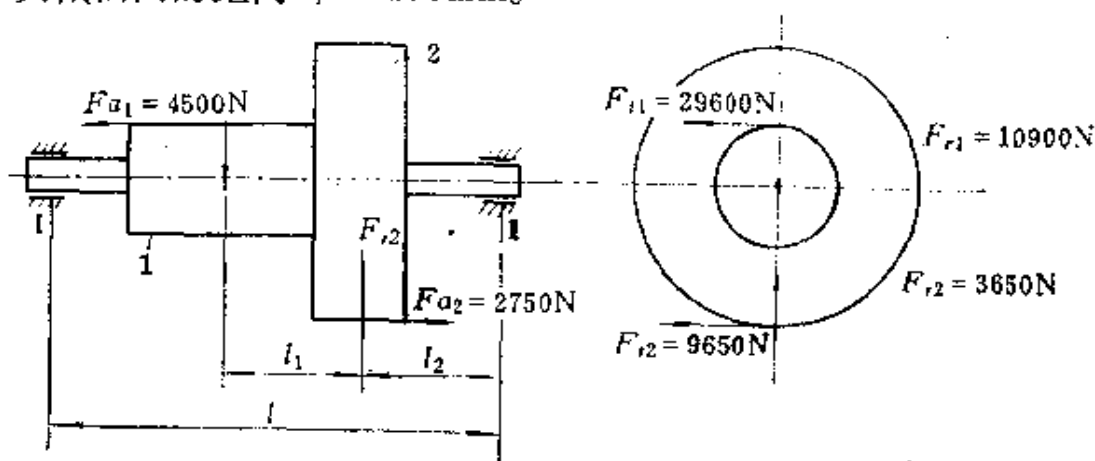


图5-7 例题5-1图

解 由图 5-7 可知， F_{a1} 和 F_{a2} 产生的力矩为：

$$M_{x1} = F_{a1} d_1 / 2 = 4500 \times 88.5 / 2 \approx 200000 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$M_{x2} = F_{a2} d_2 / 2 = 2750 \times 270.24 / 2 \approx 371600 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

按许用弯曲应力计算轴的直径：

(1) 根据给定条件作轴在 xoy 平面的受力图(见图 5-8 a).
决定支反力及弯矩图(见图 5-8 b)。

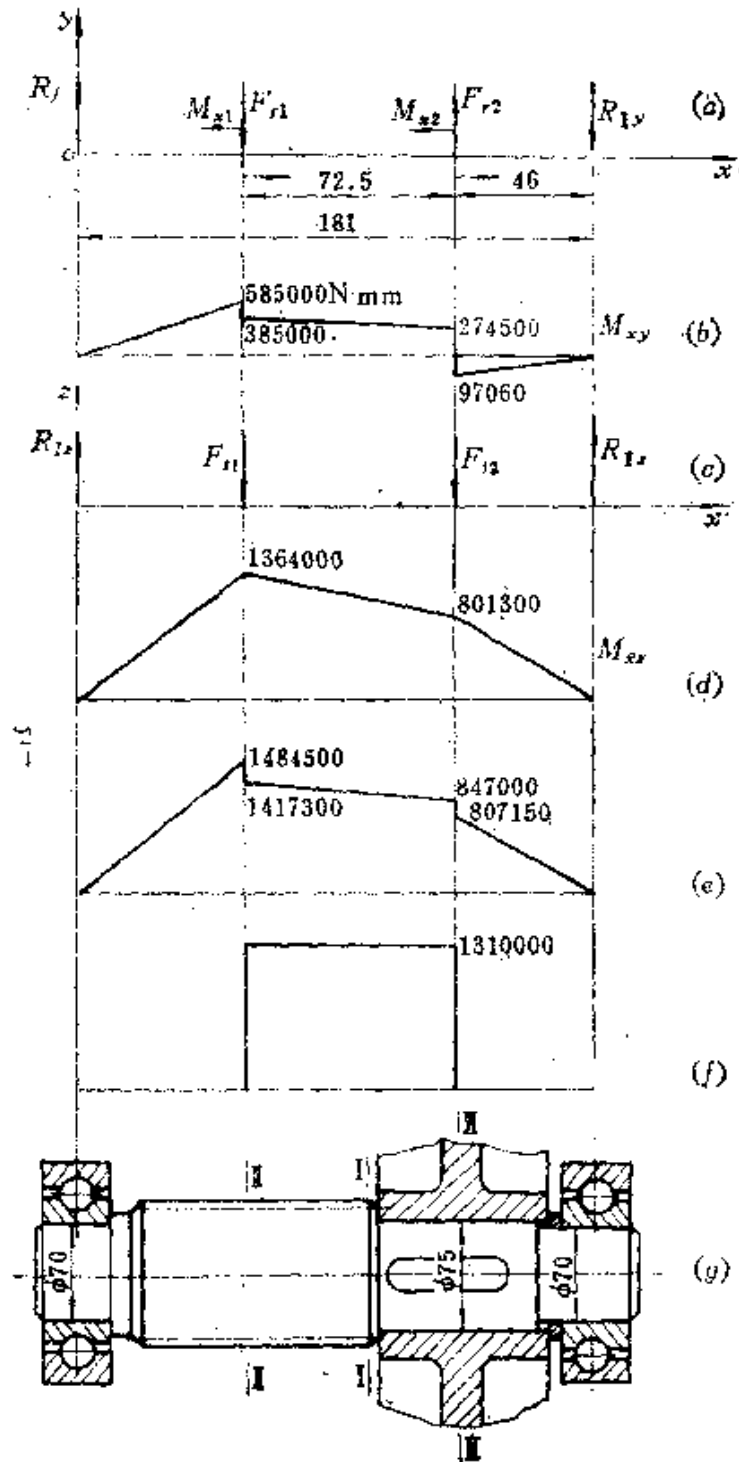


图5-8 弯矩、转(扭)矩图

分别对支点 II 及 I 取矩可求得 xoy 平面的支反力

$$\begin{aligned} R_{1y} &= [F_{r_1}(l_1+l_2) - F_{r_2}l_2 + M_{x_1} + M_{x_2}] / l \\ &= [10900(72.5+46) - 3650 \times 46 + 200000 \\ &\quad + 371600] / 181 \\ &\approx 9360 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1x} &= [F_{r_2}(l_1-l_2) - F_{r_1}(l-l_1-l_2) + M_{x_1} + M_{x_2}] / l \\ &= [3650(181-46) - 10900(181-72.5-46) + 200000 \\ &\quad + 371600] / 181 \\ &\approx 2110 \text{ N} \end{aligned}$$

(2) 作 xoz 平面的受力图 (见图 5-8 c), 求支反力, 作弯矩图 (图 5-8 d), 分别向两支点取矩得:

$$\begin{aligned} R_{1z} &= [F_{t_1}(l_1+l_2) + F_{t_2}l_2] / l \\ &= [29600(72.5+46) + 9650 \times 46] / 181 \\ &\approx 21830 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1x} &= [F_{t_1}(l-l_1-l_2) + F_{t_2}(l-l_2)] / l \\ &= [29600(181-72.5-46) + 9650(181-46)] / 181 \\ &\approx 17420 \text{ N} \end{aligned}$$

(3) 作合成弯矩图 (见图 5-8 e) 合成弯矩 $M = \sqrt{M_{x_1}^2 + M_{z_1}^2}$ 的计算结果示于图 5-8(e), 其中截面 II-II、III-III 的合成弯矩为:

$$M'_{1-II} = \sqrt{585000^2 + 1364000^2} = 1484500 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M''_{1-II} = \sqrt{385000^2 + 1364000^2} = 1417300 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M'_{1-III} = \sqrt{274500^2 + 801300^2} = 847000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M''_{1-III} = \sqrt{97060^2 + 801300^2} = 807150 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

(4) 确定危险截面 根据齿轮几何尺寸和估计的跨距 l , 决定小齿轮 1 作成连轴的, 大齿轮作成套装的, 轴的大致结构如图 5-8(g) 所示, 由合成弯矩图及转 (扭) 矩图可选取截面 I-I 及 II-II 为危险截面。

(5) 确定危险截面处轴的直径

I-I 截面:

由合成弯矩图可求得 I - I 截面的弯矩为:

$$M_{I-I} = 847000 + \frac{(1417300 - 847000) \times 27.5}{72.5}$$

$$= 10.63 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$T_{I-I} = 1.31 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

已知材料为 40Cr, $\sigma_b = 800 \text{ MPa}$, 由表 5-2 得:

$$[\sigma_0] = 130 \text{ MPa}, [\sigma_{-1}] = 75 \text{ MPa}$$

$$a = \frac{[\sigma_{-1}]}{[\sigma_0]} = \frac{75}{130} = 0.577$$

$$d_{I-I} \geq \sqrt[3]{\frac{10 \sqrt{M_{I-I}^2 + (a T_{I-I})^2}}{[\sigma_{-1}]}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{10 \sqrt{(10.63 \times 10^5)^2 + (0.577 \times 1.31 \times 10^6)^2}}{75}}$$

$$= 55.8 \text{ mm}$$

或按公式 $[\sigma] = [\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1}}{(n) K_\sigma / (\epsilon_\sigma \beta)}$ 计算许用弯曲应

力, 由表 2-1 查得 $\sigma_{-1} = 500 \text{ MPa}$, 选取 $(n) = 2$, $K_\sigma / (\epsilon_\sigma \beta) = 4$,

由此得 $[\sigma] = [\sigma_{-1}] = \frac{500}{2 \times 4} = 62.5 \text{ MPa}$, 则

$$d_{I-I} \geq \sqrt[3]{\frac{10 \sqrt{(10.63 \times 10^5)^2 + \left(\frac{62.5}{130} \times 1.31 \times 10^6\right)^2}}{62.5}}$$

$$= 58.25 \text{ mm}$$

I - I 截面:

由合成弯矩图及转(扭)矩图得:

$$M_{I-I} = 1484500 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$T_{I-I} = 1.31 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$d_{I-I} \geq \sqrt[3]{\frac{10 \sqrt{(1.4845 \times 10^6)^2 + (0.577 \times 1.31 \times 10^6)^2}}{75}}$$

$$= 60.56 \text{ mm}$$

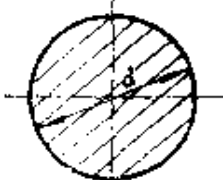
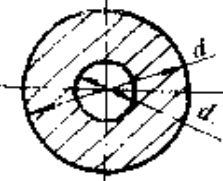
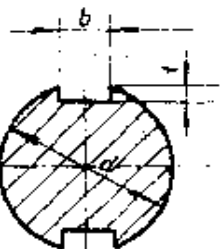
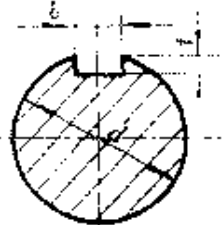
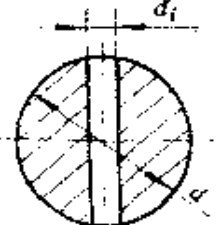
根据标准直径系列取

$$d_{1-1} = 60 \text{ mm}, d_{I-I} = 65 \text{ mm}$$

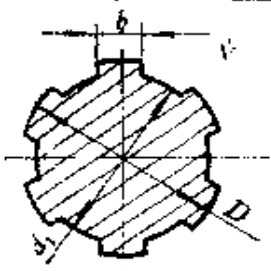

考虑到 1-1 截面处有键槽，故取 $d_{1-1} = 65\text{mm}$

(6) 根据计算出的危险截面处直径进行结构设计 (见图 5-89)。因齿轮 1 是连轴的，为避免轴段落差过大，将 d_{1-1} 增大到 75mm，安装滚动轴承处的轴颈取为 70mm。

表 5-3 抗弯、抗扭断面模数 W 、 W_T 的计算公式

断面形状	W	W_T
	$\frac{\pi d^3}{32} \approx d^3/10$	$\frac{\pi d^3}{16} \approx d^3/5$
	$\frac{\pi d^3}{32} (1 - \beta^4) \approx d^3 (1 - \beta^4) / 10$ $\beta = \frac{d_0}{d}$	$\frac{\pi d^3}{16} (1 - \beta^4) \approx d^3 (1 - \beta^4) / 5$ $\beta = \frac{d_0}{d}$
	$\frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$	$\frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$
	$\frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$	$\frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$
	$\frac{\pi d^3}{32} \left(1 - 1.69 \frac{d_i}{d}\right)$	$\frac{\pi d^3}{16} \left(1 - \frac{d_i}{d}\right)$

(续)

断面形状	W	W_T
	$\frac{\pi d_1^3 + bz(D - d_1)(D + d_1)^2}{32D}$ <p>(z — 花键齿数)</p>	$\frac{\pi d_1^3 + bz(D - d_1)(D + d_1)^2}{16D}$ <p>(z — 花键齿数)</p>
	$\approx \frac{\pi d^3}{32} \approx \frac{d^3}{10}$	$\approx \frac{\pi d^3}{16} \approx \frac{d^3}{5}$

第三节 安全系数校核法

一、轴上应力的变化特性

图5-9所示为轴上应力的变化特性。其中 $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ ，称为循环特征。 σ_s 、 σ_m 与 σ_{\max} 、 R 存在下述关系：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2} (1 - R) \sigma_{\max} \\ \sigma_m &= \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = \frac{1}{2} (1 + R) \sigma_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

通常作用在轴上的转矩是恒定的，考虑到起动停车或工作阻力矩的随机变化，一般将转矩产生的切应力看作是脉动循环变化的，即

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_T}, \quad \tau_{\min} = 0 \quad (5-20)$$

$$\tau_s = \tau_m = \frac{\tau_{\max}}{2} = \frac{T}{2W_T} \quad (5-21)$$

由弯矩产生的弯曲应力一般是对称循环应力，故

$$\sigma_s = \sigma_{\max} = \frac{M}{W}, \quad \sigma_m = 0 \quad (5-22)$$

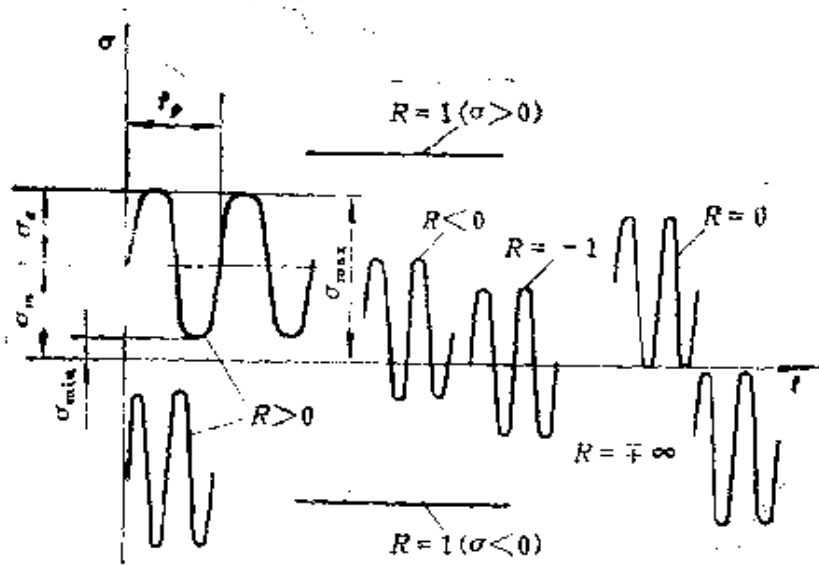


图5-9 轴上应力的变化特性

若应力循环一次的周期是 t_p (见图5-9), 则在时间间隔 t_h 内应力循环次数为:

$$N_c = t_h / t_p \quad (5-23)$$

对于弯曲应力, $t_p = \frac{1}{60n}$, n 为转速 (r/min)。若 t_h 是轴总的工作时间, 则弯曲应力的循环总数为:

$$N_o = t_h / t_p = 60nt_h \quad (5-24)$$

二、疲劳曲线

图5-10、图5-11所示为钢试件的疲劳曲线, 其中图5-11采用的是双对数坐标。由试验可知, 随着应力循环数 N_o 的增加, $d\sigma/dN_o$ 的绝对值减小, 当 N_o 达到某一数值时, $d\sigma/dN_o \rightarrow 0$, 此时的 N_o 用 N_o 表示, 称为循环基数。由此可知, 疲劳曲线具有一水平渐近线。

对应于无限应力循环数, 零件或试件所能承受的最大循环应力(具有给定的破坏概率), 称为零件或试件的持久疲劳极限(或持久极限), 用 σ_{RD} 或 σ_R 表示。当循环特征 $R = -1$ (对称循环)时, 正应力用 σ_{-1D} 或 σ_{-1} 表示, 切应力用 τ_{-1D} 或 τ_{-1} 表示。

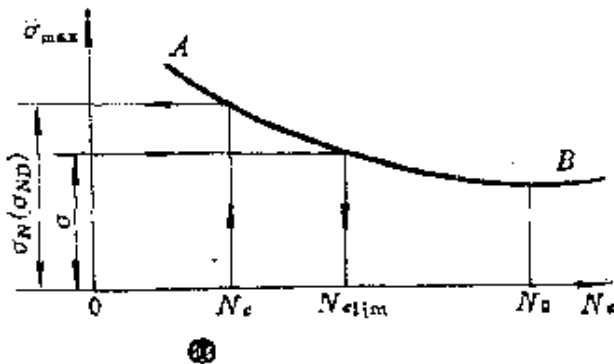


图5-10 疲劳曲线

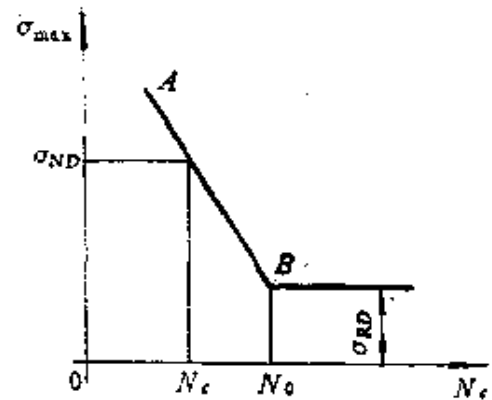


图5-11 双对数坐标的疲劳曲线

当应力循环次数 $N_c < N_0$ 时，零件或试件所承受的最大循环应力（具有给定的破坏概率）称为零件或试件的有限疲劳极限，用 σ_{ND} 或 σ_N 表示。一般地说轴大都是按无限疲劳极限进行设计。

疲劳曲线的曲线段 AB 可近似地（具有足够的精度）用下式来表示：

$$\sigma_{ND}^m N_c = \text{常数} \quad (5-25)$$

或
$$\sigma^m N_{elim} = \text{常数} \quad (5-26)$$

式中 m ——指数，与应力状态、零件形状、机械特性及热处理等因素有关，通常取 $m = 6 \sim 9$ 。

从上述二式可知， σ 值的降低，会使 N_e 值急剧增加。当工作应力 σ 给定时，可利用疲劳曲线求得极限应力循环数；若给定应力循环数 N_e 则可求得极限应力值。

若将疲劳曲线上 B 点的坐标 (N_0, σ_{RD}) 代入式 (5-25) 可得：

$$\sigma_{ND}^m N_c = \sigma_{RD}^m N_0 \quad (5-27)$$

或
$$\sigma_{ND} = \sigma_{RD} \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_c}} = \sigma_{RD} \cdot k_{ec} \quad (5-28)$$

上式即为应力循环数 $N_c \leq N_0$ 时的零件极限应力计算式。若循环特征 $R = -1$ ，则式 (5-28) 可写为：

$$\sigma_{ND} = \sigma_{-1D} \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_c}} = \sigma_{-1D} k_{\sigma} \quad (5-29)$$

式中 $k_{\sigma} = \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_c}}$ 称为应力折算系数。

设计轴时，可取 $m = 9$ ， $N_0 = 10^7$ (大截面轴) 或 $N_0 = (3 \sim 5) \cdot 10^6$ (小截面轴)。

类似地可得极限切应力的计算式为：

$$\tau_{ND} = \tau_{RD} \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_c}} = \tau_{RD} k_{\tau} \quad (5-30)$$

实际计算时，可近似地取 $k_{\sigma} = k_{\tau}$ ，当 $N_c > N_0$ 时，取 $k_{\sigma} = k_{\tau} = 1$ 。

三、极限应力

如果将试件的极限应力画在 σ_m 、 σ_a 坐标上，极限应力幅 σ_{allim} 是一条如图5-12虚线所示的椭圆曲线。但是对于各种材料要想得到这条曲线不是件容易的事，通常都是以通过点 $A(0, \sigma_{-1})$ 、 $B(\frac{1}{2}\sigma_0, \frac{1}{2}\sigma_0)$ 的直线来代替该曲线，此处 σ_0 是循环特征 $R = 0$ (即脉动循环) 时的疲劳极限。

不同循环特征 R 下的极限应力都可按下法确定：过图5-12所

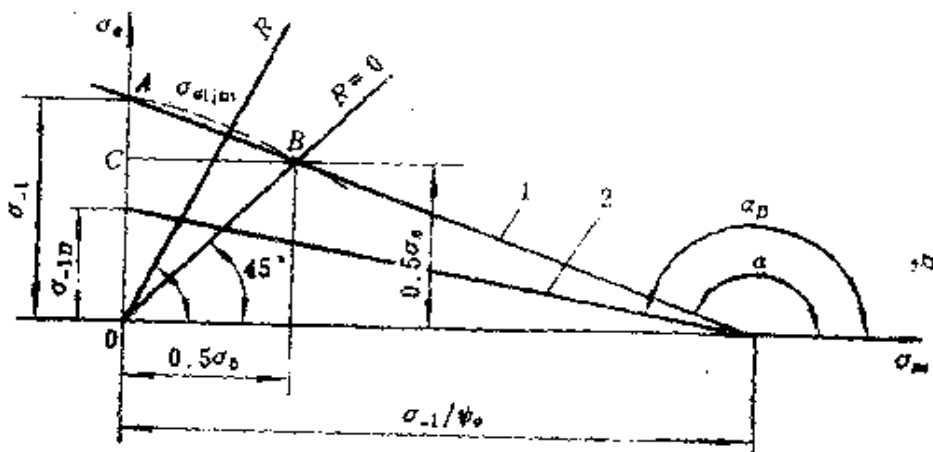


图5-12 极限应力图

以坐标系原点 O 作射线 OR , 则对应于循环特征 R 的所有可能的 σ_a 值都应落在该射线上, 且

$$\sigma_a = \sigma_m \operatorname{tg} \gamma \quad (5-31)$$

式中 $\operatorname{tg} \gamma = (1 - R)/(1 + R)$ (见式 5-19)

在图 5-12 中分别画出了 $R = 1, 0, -1$ 几条射线。

直线 AB 的方程式为:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + \sigma_m \operatorname{tg} \alpha \quad (5-32)$$

式中 $\operatorname{tg} \alpha = -AC/BC = -\left(\sigma_{-1} - \frac{\sigma_0}{2}\right) / \frac{\sigma_0}{2}$
 $= -(2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0$

令 $\psi_\sigma = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0$, 则直线 AB 为:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m$$

当 $\sigma_a = 0$ 时, $\sigma_m = \sigma_{-1} / \psi_\sigma$

图 5-12 中的直线 2 给出了零件的极限应力幅 σ_{aD} 。根据试验知: 在给定的 σ_m 下, 直线 1、2 的纵坐标值之比为: $k_{\sigma D} = \frac{k_\sigma}{e_{\sigma\beta}}$, 可知直线 2 在点 $\sigma_m = \sigma_{-1} / \psi_\sigma$ 处与横坐标轴相交, 因而代表零件极限应力幅 σ_{aD} 的直线 2 的方程式为:

$$\sigma_{aD} = \sigma_{-1D} + \sigma_m \operatorname{tg} \alpha_D \quad (5-33)$$

式中 $\operatorname{tg} \alpha_D = -\sigma_{-1D} / (\sigma_{-1} / \psi_\sigma) = -\psi_\sigma / k_{\sigma D}$

所以 $\sigma_{aD} = \sigma_{-1D} - (\psi_\sigma / k_{\sigma D}) \sigma_m \quad (5-34)$

由式 (5-31) 可知: 在给定的循环特征 R 下, σ_m 为:

$$\sigma_m = \sigma_{aD} (1 + R) / (1 - R)$$

将上式代入式 (5-34), 得到零件的极限应力幅为:

$$\sigma_{aD} = \frac{\sigma_{-1} (1 - R)}{k_{\sigma D} (1 - R) + \psi_\sigma (1 + R)}$$

由式 (5-19) 可得: $\sigma_{\max} = \frac{2\sigma_{aD}}{1 - R}$, 由此求得零件的极限应力 σ_{lim} (循环特征为 R 时) 为:

$$\sigma_{lim} = \sigma_{\max} = \sigma_{RD} = \frac{2\sigma_{aD}}{1 - R} = \frac{2\sigma_{-1}}{(1 - R)k_{\sigma D} + \psi_\sigma (1 + R)} \quad (5-35)$$

若 $N_c < N_0$, 在确定式 (5-33) 中的 $\text{tg} \alpha_D$ 时, 应以 σ_{-1ND} 代替式中的 σ_{-1D} , 此时零件的极限应力为:

$$\sigma_{RND} = \frac{2\sigma_{-1}}{(1-R)k_{\sigma D}/k_{\sigma\sigma} + \psi_{\sigma}(1+R)} \quad (5-36)$$

类似地可得到零件的极限应力为:

$$\tau_{RND} = \frac{2\tau_{-1}}{(1-R)k_{\tau D}/k_{\tau\tau} + \psi_{\tau}(1+R)} \quad (5-37)$$

式 (5-36)、式 (5-37) 可用于 $R = -2 \sim 0$ 的场合, 这对大多数轴来说是适用的。

例如当 $R = -1$ 时, 由式 (5-36) 得 $\sigma_{-1ND} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma D}/k_{\sigma\sigma}}$, 若 $N_c > N_0$, 则 $k_{\sigma\sigma} = 1$, $\sigma_{-1ND} = \sigma_{-1D} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma D}}$; 当 $R = 0$ 时, 可得 $\sigma_{0ND} = \frac{2\sigma_{-1}}{k_{\sigma D}/k_{\sigma\sigma} + \psi_{\sigma}}$ 。

ψ_{σ} , ψ_{τ} 取决于材料和热处理。对碳钢可取 $\psi_{\sigma} = 0.2$, $\psi_{\tau} = 0.1$; 合金钢可取 $\psi_{\sigma} = 0.3$, $\psi_{\tau} = 0.15$ 。对表面强化处理的轴, ψ_{σ} , ψ_{τ} 的值可取得高一些。

在确定钢的疲劳极限时, 如果缺乏可靠的试验数据, 可按下列近似关系计算:

$$\text{弯曲时: } \sigma_{-1} \approx (0.4 \sim 0.46)\tau_b$$

$$\text{剪切时: } \tau_{-1} \approx 0.6\sigma_{-1}$$

$$R = 0 \text{ 时: } \sigma_0 \approx 1.6\sigma_{-1}, \tau_0 \approx 1.9\tau_{-1}$$

四、许用应力与安全系数

许用应力 $[\sigma]$ 、 $[\tau]$ 及计算安全系数 n_{σ} 、 n_{τ} 按下式确定:

$$[\sigma] = \sigma_{lim}/[n_{\sigma}], [\tau] = \tau_{lim}/[n_{\tau}] \quad (5-38)$$

$$n_{\sigma} = \sigma_{lim}/\sigma \geq [n_{\sigma}], n_{\tau} = \tau_{lim}/\tau \geq [n_{\tau}] \quad (5-39)$$

式中 σ_{lim} 、 τ_{lim} —— 极限应力;

σ 、 τ —— 工作应力;

$[n_{\sigma}]$ 、 $[n_{\tau}]$ —— 许用安全系数。

且 $\sigma = \sigma_a + \sigma_m = \sigma_{\max}$, $\tau = \tau_a + \tau_m = \tau_{\max}$ 。

(一) 在静应力以及应力循环次数 $N_0 < 10^8$ 情况下许用应力的确定

对于脆性材料取 $\sigma_{lim} = \sigma_b$, $\tau_{lim} = \tau_b$; 对于塑性材料 $\sigma_{lim} = \sigma_s$, $\tau_{lim} = \tau_s$ 。

当轴在弯、扭联合作用时, 安全系数按下式确定:

$$n_s = n_{\sigma} n_{\tau} / \sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2} \quad (5-40)$$

式中 $n_{\sigma} = \sigma_s / \sigma$,

$$n_{\tau} = \tau_s / \tau。$$

(二) 在变应力情况下许用应力的确定

$\sigma_{lim} = \sigma_{RND}$, $\tau_{lim} = \tau_{RND}$ 。考虑到 $\sigma_{\max} = \frac{2\sigma_a}{(1-R)}$ 及 $\sigma_m = \frac{1+R}{1-R}\sigma_a$, 则

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{RND}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma D}/k_{\sigma \sigma})\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m} \quad (5-41)$$

同理

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{RND}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}}{(k_{\tau D}/k_{\tau \tau})\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m} \quad (5-42)$$

弯扭联合作用时, 安全系数按下式确定:

$$n = n_{\sigma} n_{\tau} / \sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2} \geq [n] \quad (5-43)$$

式中 n_{σ} 、 n_{τ} ——按式(5-41)、式(5-42)确定。

由于零件的外廓尺寸、质量是和许用应力 $[\sigma]$ 成反比的, 而和许用安全系数 $[n]$ 成正比, 因而 $[n]$ 对零件的外廓尺寸、质量影响很大。 $[n]$ 降低, 零件质量可以减小, 但工作可靠性也随之下降, 因而在不增加零件外廓尺寸和质量又要保证必要的可靠性时, 安全系数 $[n]$ 的选择就显得特别重要。但 $[n]$ 的选择并不是件容易的事, 因为材料的机械特性及载荷特性都具有一定的随机性, 此处只能给出一些经验数值, 至于安全系数的理论确定方法可参阅第六章。

$[n]$ 可按下式进行估计:

$$[n] = [n_1][n_2][n_3]$$

式中 $[n_1]$ ——考虑到载荷及应力计算的可靠性，一般取 $[n_1] = 1 \sim 1.5$ ；

$[n_2]$ ——考虑到材料机械性质的均匀性，对碳钢取 $[n_2] = 1.2 \sim 1.5$ ，铸铁取 $[n_2] = 1.5 \sim 2.5$ ；

$[n_3]$ ——考虑到一些特殊的安全要求，一般可取 $[n_3] = 1 \sim 1.5$ 。

当应力是循环变化并按疲劳极限进行计算时，推荐下列数值：一般情况下 $[n] = 1.5 \sim 2.5$ ，若轴径是由刚度条件决定的，则 $[n]$ 值可再大些。

当载荷计算准确、材质均匀且材料各项性能指标又有可靠的试验数据时， $[n] = 1.3 \sim 1.5$ 。

当载荷不能准确计算又无可靠的统计数据，材料机械性能也不能准确检验时，对碳钢取 $[n] = 1.5 \sim 2.1$ ，铸铁 $[n] = 2.0 \sim 2.4$ 。

当按瞬时抗力 ($\sigma_{lim} = \sigma_b$) 进行静强度计算时， $[n] = 2.0 \sim 2.5$ ，若按屈服极限进行静强度计算时，取 $[n] = 1.3 \sim 1.6$ 。在复合应力状态（弯、扭）下，即使计算出的应力多少超过了材料的屈服极限，残余变形也是很小的，对轴的运转特性不会带来什么影响。

五、安全系数的校核

(一) 疲劳强度安全系数的校核

疲劳强度安全系数的校核可按式 (5-43) 进行，其中 $k_{\sigma D} = \frac{k_{\sigma}}{e\beta}$ ， k_{σ} 、 e 、 β 可由表 5-4~表 5-11 及图 5-13 查取，当表面强化处理时，一般按表 5-4 选取 β 值，否则按图 5-13 选取 β 值。 n_o 、 n_r 按式 (5-41)、式 (5-42) 计算。

当轴相对于径向载荷旋转时（例如齿轮轴），轴向力产生的平均应力 $\sigma_m = F_a / A$ (A 为计算截面的面积) 数值很小，一般可以

略去。因此可认为轴上的正应力是对称循环变化的, 即 $R = -1$, 即仅考虑计算弯矩 M_1 所产生的正应力。此时, $\sigma_o = M_1/W_{net}$, 其中 W_{net} 是计算截面的净抗弯断面模数, 可由表 5-3 所列公式进行计算。

对于相对于径向载荷矢量是不旋转的心轴, 当应力为脉动变化时 ($R = 0$), $\sigma_m = \sigma_o = M_1/(2W_{net})$; 若 $R = -1$, 则 $\sigma_o = M_1/W_{net}$, $\sigma_m = 0$ 。

当作用在轴上的转矩是反向对称时 (工作时轴经常正反转), 可认为切应力是对称变化的。此时 $\tau_o = T/W_{Tnet}$, $\tau_m = 0$ 。否则转矩按脉动变化, $\tau_o = \tau_m = T/(2W_{Tnet})$ 。其中 W_{Tnet} 是计算截面的净抗扭断面模数, 可由表 5-3 所列公式计算。

k_o 在大多数情况下计算比较困难, 通常取 $k_{cr} = 1$ 。

(二) 静强度安全系数的校核

在严重过载情况下, 为避免产生塑性变形, 应按式 (5-39)、式 (5-40) 校核安全系数, 此时 $\sigma_{lim} = \sigma_o$, $\tau_{lim} = \tau_o$ 。

例题 5-2 验算例题 5-1 的减速器中间轴 I-I、II-II 截面的疲劳强度安全系数。减速器寿命 10 a (年), 两班制工作, 每班 8 h。

解 前例中已求出 I-I 截面的弯矩和转矩为:

$$M_{1-1} = 10.63 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$T_{1-1} = 13.1 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

弯矩产生的应力是对称循环的, 转矩产生的切应力按脉动循环考虑, 所以

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_o = M_{1-1}/W = \frac{10.63 \times 10^5}{\pi 75^3/32} = 26 \text{ MPa}$$

$$\tau_o = \tau_m = T_{1-1}/2W_\tau = \frac{13.1 \times 10^5}{2 \times \pi \times 75^3/16} = 7.9 \text{ MPa}$$

按推荐值取 $\sigma_{-1} = 0.43\sigma_b$, $\sigma_o = 1.6\sigma_{-1}$, $\tau_{-1} = 0.6\sigma_{-1}$ 。由第二章表 2-1 查得 $\sigma_b = 800 \text{ MPa}$, 所以

$$\sigma_{-1} = 0.43 \times 800 = 344 \text{ MPa}$$

$$\sigma_0 = 1.6\sigma_{-1} = 1.6 \times 344 = 550 \text{MPa}$$

$$\tau_{-1} = 0.6\sigma_{-1} = 0.6 \times 344 = 206 \text{MPa}$$

$$\tau_0 = 1.9\tau_{-1} = 1.9 \times 206 = 391 \text{MPa}$$

应力循环次数

$$N_o = 300 \times 10 \times 8 \times 2 \times 60 \times 647.5 = 1.86 \times 10^6$$

$N_o > N_b = 4 \times 10^6$, 所以取 $N_o = N_b$, $k_{\sigma\sigma} = k_{\sigma\tau} = 1$ 。

截面 I-I 处有两个应力集中源 (过渡圆角、过盈配合), 由表 5-6 查得圆角的有效应力集中系数

$$\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} = 2.18, \quad \frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}} = 1.80$$

由表 5-11 查得过盈配合处应力集中系数

$$\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} = 4.02, \quad \frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}} = 4.42$$

若同一截面同时有多个应力集中源, 则应取其中数值最大的一个进行计算, 即应取 $\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} = 4.02$, $\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}} = 4.42$ 。

因表面未作强化处理, 故由图 5-13 查得表面状况系数 $\beta = 0.78$, 故

$$k_{\sigma D} = \frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta} = \frac{4.02}{0.78} = 5.15$$

$$k_{\tau D} = \frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \beta} = \frac{4.42}{0.78} = 5.67$$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma D}}{k_{\sigma\sigma}} \sigma_0 + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma D}}{k_{\sigma\sigma}} \sigma_0} = \frac{344}{5.15 \times 26} = 2.57$$

取 $\psi_{\tau} = 0.2$ 则

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau D}}{k_{\tau\tau}} \tau_0 + \psi_{\tau} \tau_m} = \frac{206}{5.67 \times 7.9 + 0.2 \times 7.9} = 4.4$$

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2.57 \times 4.4}{\sqrt{2.57^2 + 4.4^2}} = 2.18 > [n] = 1.5 \sim 2.1$$

截面 II-II:

$$M_{II-II} = 847000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$T_{II-II} = 1310000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$W_{net} = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}, \quad W_{Tnet} = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$$

对 $d = 75 \text{ mm}$, 标准键宽 $b = 20 \text{ mm}$, $t = 6 \text{ mm}$, 所以

$$W_{net} = \frac{\pi \times 75^3}{32} - \frac{20 \times 6 (75 - 6)^2}{2 \times 75} = 37587.68 \text{ mm}^3$$

$$W_{Tnet} = \frac{\pi \times 75^3}{16} - \frac{20 \times 6 (75 - 6)^2}{2 \times 75} = 78984.17 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_s = \frac{M_{II-II}}{W_{net}} = \frac{847000}{37587.68} = 22.53 \text{ MPa}$$

$$\tau_s = \tau_m = \frac{T_{II-II}}{2W_{Tnet}} = \frac{1310000}{2 \times 78984.17} = 8.29 \text{ MPa}$$

由表 5-5 查得 $\varepsilon_\sigma = 0.75$, $\varepsilon_\tau = 0.64$

由表 5-9 查得键槽之 $k_\sigma = 2.0$, $k_\tau = 1.9$

所以 $\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma} = \frac{2.0}{0.75} = 2.67$, $\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau} = \frac{1.9}{0.64} = 2.97$

由于截面 II-II 也同时有两个应力集中源 (键槽、过盈配合), 仍应取其中较大的 $\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma}$ 、 $\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau}$, 今取过盈配合 $\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma} = 4.02$, $\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau} = 4.42$, $\beta = 0.78$, 得

$$k_{\sigma D} = \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} = \frac{4.02}{0.78} = 5.15$$

$$k_{\tau D} = \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} = \frac{4.42}{0.78} = 5.67$$

$$n_\sigma = \frac{344}{5.15 \times 22.53} = 2.96$$

$$n_\tau = \frac{206}{5.67 \times 8.29 + 0.2 \times 8.29} = 4.23$$

$$n = \frac{2.96 \times 4.23}{\sqrt{2.96^2 + 4.23^2}} = 2.43 > [n] = 1.5 \sim 2.1$$

表5-4 表面强化的极限应力强化系数

表面强化方法	心部材料 强度 σ_s (MPa)	普通轴	低应力集中 的轴 $K_\sigma = 1.5$	高应力集 中的轴 $K_\sigma = 1.8 \sim 2.0$
			强化系数 β	
高频淬火	600~800	1.5~1.7	1.6~1.7	2.4~2.8
	800~1000	1.3~1.5	—	—
氮化 渗碳淬火	900~1200	1.1~1.25	1.5~1.7	1.7~2.1
	400~600	1.3~2.0	3	—
	700~800	1.4~1.5	—	—
	1000~1200	1.2~1.3	2	—
喷丸处理	600~1500	1.1~1.25	1.5~1.6	1.7~2.1
滚压	—	1.2~1.3	1.5~1.6	1.8~2.0

* 表列数值是对于小试件；对大截面轴数值略有减少。

表5-5 尺寸系数

应力状态和材料	对应轴直径 (mm) 的 e 值							
	15	20	30	40	50	70	100	200
碳钢弯曲	0.95	0.92	0.88	0.85	0.81	0.76	0.70	0.61
高强度合金钢弯曲及 所有钢的扭转	0.87	0.83	0.77	0.73	0.70	0.65	0.59	0.52

表5-6 过渡圆角的有效应力集中系数

应力状态	σ_b (MPa)	r/d								
		0.01	0.02	0.03	0.05	0.10	0.01	0.02	0.03	0.05
弯曲		$t/r = 1$					$t/r = 2$			
	500	1.35	1.45	1.65	1.6	1.45	1.55	1.8	1.8	1.75
	700	1.4	1.5	1.7	1.7	1.55	1.6	1.9	1.95	1.9
	900	1.45	1.55	1.8	1.8	1.65	1.65	2.0	2.05	2.0
	1200	1.5	1.6	1.9	1.9	1.8	1.7	2.15	2.25	2.2
(K_σ)		$t/r = 3$					$t/r = 5$			
	500	1.9	1.95	1.95	—	—	2.1	2.15	—	—
	700	2.0	2.1	2.1	—	—	2.25	2.3	—	—
	900	2.1	2.2	2.25	—	—	2.35	2.45	—	—
	1200	2.2	2.4	2.45	—	—	2.50	2.65	—	—

(续)

应力状态	σ_b (MPa)	r/d								
		0.01	0.02	0.03	0.05	0.10	0.01	0.02	0.03	0.05
扭转		$t/r = 1$				$t/r = 2$				
	700	1.3	1.35	1.45	1.45	1.4	1.4	1.6	1.6	1.6
	1200	1.3	1.4	1.5	1.55	1.5	1.45	1.7	1.7	1.75
(K_T)		$t/r = 3$				$t/r = 5$				
	500	1.55	1.6	1.65	—	—	2.2	2.1	—	—
	700	1.6	1.7	1.7	—	—	2.3	2.15	—	—
	900	1.65	1.75	1.75	—	—	2.4	2.25	—	—
	1200	1.75	1.85	1.9	—	—	2.6	2.40	—	—

表5-7 沟槽的有效应力集中系数

应力状态	σ_b (MPa)	r/d								
		0.01	0.02	0.03	0.05	0.10	0.01	0.02	0.03	0.05
弯曲		$t/r = 0.5$				$t/r = 1$				
	500	1.95	1.85	1.75	1.65	1.5	2.15	2.05	1.95	1.85
	700	2.05	1.95	1.85	1.75	1.55	2.25	2.15	2.1	1.95
	900	2.15	2.05	1.95	1.9	1.6	2.4	2.3	2.2	2.1
	1200	2.3	2.2	2.1	2.05	1.75	2.6	2.5	2.35	2.25
(K_D)		$t/r = 2$				$t/r = 3$				
	500	2.35	2.25	2.15	—	—	2.45	2.35	—	—
	700	2.5	2.4	2.3	—	—	2.65	2.5	—	—
	900	2.65	2.5	2.4	—	—	2.8	2.65	—	—
	1200	2.85	2.7	2.6	—	—	3.05	2.85	—	—
扭转 (K_T)	500	1.7	1.6	1.5	1.4	1.2	—	—	—	—
	700	1.9	1.75	1.65	1.5	1.25	—	—	—	—
	900	2.1	1.95	1.8	1.65	1.3	—	—	—	—
	1200	2.4	2.2	2.05	1.8	1.4	—	—	—	—

表5-8 横向孔有效应力集中系数

σ_b (MPa)	d_0/d		
	0.05~0.1	0.15~0.25	0.05~0.25
	K_D		K_T
≤ 700	2.0	1.8	1.75
900	2.15	1.9	1.9
≥ 1000	2.3	2.1	2.0

表5-9 键槽在弯曲情况下的有效应力集中系数

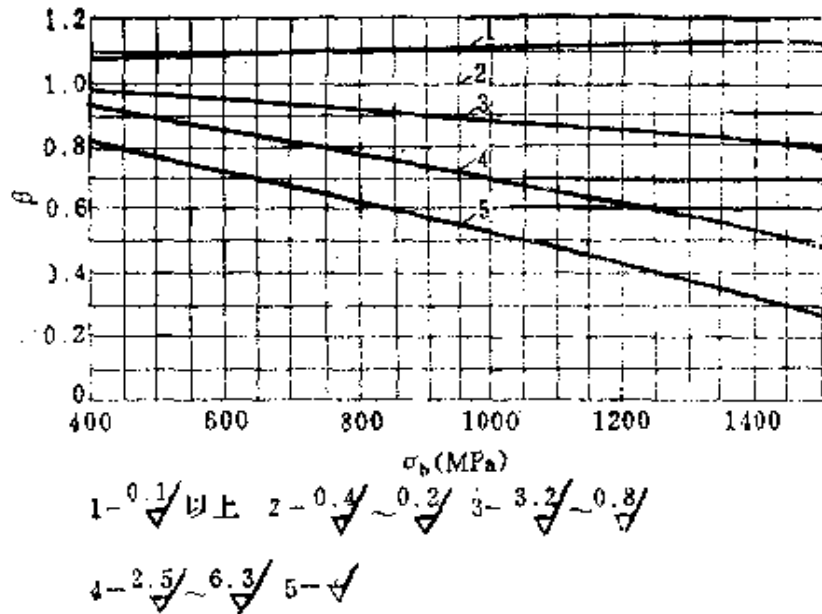
σ_b (MPa)	K_σ	K_τ
500	1.6	1.4
600	1.75	1.5
700	1.9	1.7
800	2.0	1.9
1000	2.3	2.2

表5-10 花键、螺纹有效应力集中系数

σ_b (MPa)	K_σ		K_τ	
	花 键	螺 纹	矩形花键	渐开线花键
400	1.35	1.45	2.10	1.40
500	1.45	1.80	2.25	1.43
600	1.55	1.95	2.36	1.46
700	1.60	2.20	2.45	1.49
800	1.65	2.30	2.55	1.52
900	1.70	2.45	2.65	1.55
1000	1.72	2.60	2.70	1.58
1200	1.75	2.90	2.80	1.60

表5-11 过盈配合的 K_σ/ϵ 值

轴径 (mm)	配合	对应 σ_b (MPa) 的 K_σ/ϵ 值						
		500	600	700	800	900	1000	1200
30	H7/r6	2.5	2.75	3.0	3.25	3.5	3.75	4.25
	H7/k6	1.9	2.05	2.25	2.45	2.6	2.8	3.2
	H7/h6	1.6	1.8	1.95	2.10	2.3	2.45	2.75
50	H7/r6	3.05	3.35	3.65	3.95	4.3	4.6	5.2
	H7/k6	2.3	2.5	2.75	3.0	3.2	3.45	3.9
	H7/h6	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.4
100以上	H7/r6	3.3	3.6	3.95	4.25	4.6	4.9	5.6
	H7/k6	2.45	2.7	2.95	3.2	3.45	4.0	4.2
	H7/h6	2.15	2.35	2.55	2.75	3.0	3.2	3.6

图5-13 各种加工情况的表面质量系数 β

第四节 变载荷下轴的计算

一、变载荷下轴的计算

图5-14所示为最常见的变载荷工作循环图，其中 Q 表示载荷（ Q 可能是力 F 、弯矩 M 或转矩 T ）。在处理变动载荷时，可采取下述两种方案之一。

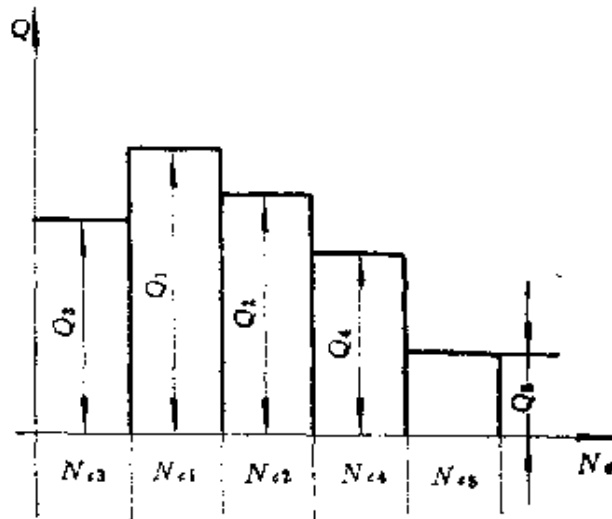


图5-14 变载荷工作循环

(1) 任意假定一计算载荷 Q_j （一般取 $Q_j = Q_{\max}$ ），求一等效的应力循环数 N_{eq} ，使得在 N_{eq} 作用下， Q_j 对轴的疲劳影响与给定

的变载荷作用时相同 (见图5-15)。

(2) 假定一计算的应力循环数 N_{ef} , 求一等效载荷 Q_{eq} , 使 Q_{eq} 在 N_{ef} 下对轴疲劳的影响与给定的变载荷作用时相同 (见图5-15)。

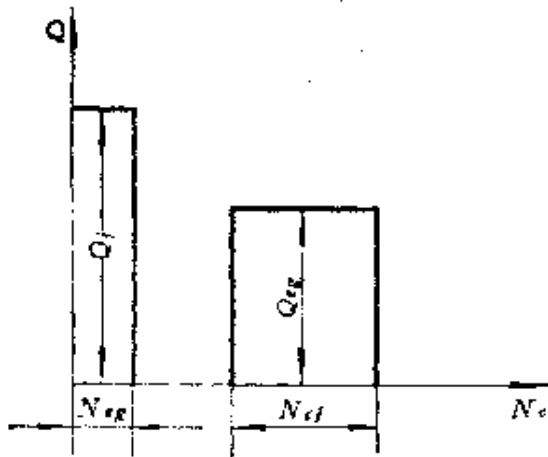


图5-15 等效载荷图

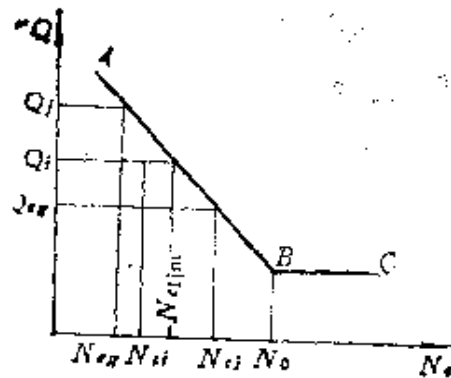


图5-16 计算零件的疲劳曲线

在决定 N_{eq} 和 Q_{eq} 时, 利用疲劳曲线可得到第 i 个载荷 Q_i 与其对应的极限应力循环数 N_{elim} 的关系

$$Q_i^m N_{elim} = \text{常数} \quad (5-44)$$

点 (N_{eq}, Q_i) 与点 (N_{ef}, Q_{eq}) 应落在疲劳曲线上 (图5-16), 对上述第一种方案, 下述关系成立。

$$Q_i^m N_{elim} = Q_{eq}^m N_{eq} \quad (5-45)$$

上式可改写成:

$$\frac{N_{ef}}{N_{elim}} = \frac{N_{ef}}{(Q_i/Q_{eq})^m N_{eq}} \quad (5-46)$$

若 $i = 1, 2 \dots k$, 则可写出 k 个与式 (5-46) 类似的式子, 将所有这些式子相加得:

$$\sum_1^k \left(\frac{N_{ef}}{N_{elim}} \right) = \sum_1^k \frac{N_{ef}}{(Q_i/Q_{eq})^m N_{eq}} \quad (5-47)$$

式中 $\sum_1^k \left(\frac{N_{ef}}{N_{elim}} \right) = a$, a 值通常在 $0.5 \sim 2$ 之间, 详见本节(二)。

由式 (5-47) 得:

$$N_{eq} = \frac{1}{a} \sum_1^k [(Q_i/Q_j)^m N_{ci}] \quad (5-48)$$

同理, 对第二种方案可写出下述关系式

$$\sum_1^k \frac{N_{ci}}{N_{ci/mi}} = \sum_1^k \left[\frac{N_{ci}}{(Q_{eq}/Q_i)^m N_{ci}} \right] = a \quad (5-49)$$

由此得:

$$Q_{eq} = \sqrt[m]{\frac{1}{a} \sum_1^k [Q_i^m (N_{ci}/N_{ci})]} \quad (5-50)$$

若将载荷用应力表示, 即 $Q_i = \Omega \sigma_i$ 及 $Q_{eq} = \Omega \sigma_{eq}$, 上式变为:

$$\sigma_{eq} = \sqrt[m]{\frac{1}{a} \sum_1^k [\sigma_i^m (N_{ci}/N_{ci})]} \quad (5-51)$$

式 (5-29)、(5-30) 中的系数 $k_{c\sigma}$ 、 $k_{c\tau}$ 按下式计算

$$k_{c\sigma} = \sqrt[m]{N_0/N_{eq}}, \quad k_{c\sigma} \approx k_{c\tau} \quad (5-52)$$

当 $N_{eq} > N_0$ 时, 取 $N_{eq} = N_0$ 。

如果疲劳曲线有水平部分, 则式 (5-50)、式 (5-51) 中的 $N_{ci} = N_0$ 。

若按式 (5-51) 计算出的 $\sigma_{eq} > \sigma_{max}$ (σ_{max} 是最大载荷产生的应力), 说明轴是在疲劳曲线的水平部分工作, 此时可取 $\sigma_{eq} = \sigma_{max}$ 。

N_{eq} 与 Q_{eq} 确定后, 就可按强度条件进行轴的计算。此时, 轴的极限应力应按式 (5-29)、式 (5-30) 及式 (5-52) 计算。

变载荷下, 安全系数的校核仍可按式 (5-41)、(5-42) 进行, 只是式中的 σ_s 、 τ_s 、 τ_m 应按计算载荷 M_l 、 T_l (即长期作用的最大载荷) 进行计算。

二、疲劳损伤的线性累积假设

为确定等效载荷 (应力)、循环数 N_{eq} 和等效载荷 Q_{eq} , 涉及

到一个合式 $\sum_1^k (N_{ci}/N_{cilm_i})$ 。要确定该式，就要利用 N_{ci} 与零件

工作能力损失之间的线性关系，即疲劳损伤的线性累积假设。该假设的含义如下：若零件在整个工作期间承受如图5-17所示的不稳定变载荷 $Q_1, Q_2 \dots Q_k$ ，与之对应的载荷循环数为 $N_{c1}, N_{c2}, \dots, N_{ck}$ ，疲劳曲线上与 $Q_1, Q_2 \dots Q_k$ 相对应的极限应力循环数分别为 $N_{cilm_1}, N_{cilm_2} \dots N_{cilm_k}$ (见图5-18)。假定载荷每循环一次都对零件材料起相同的破坏作用，则载荷 Q_i 每循环一次对材料的损伤率应为 $1/N_{cilm_i}$ ，当循环 N_{ci} 次时，损伤率应为 N_{ci}/N_{cilm_i} ，令

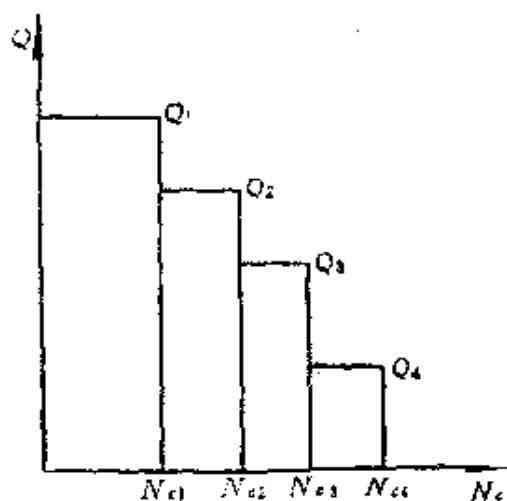


图5-17 不稳定变载荷

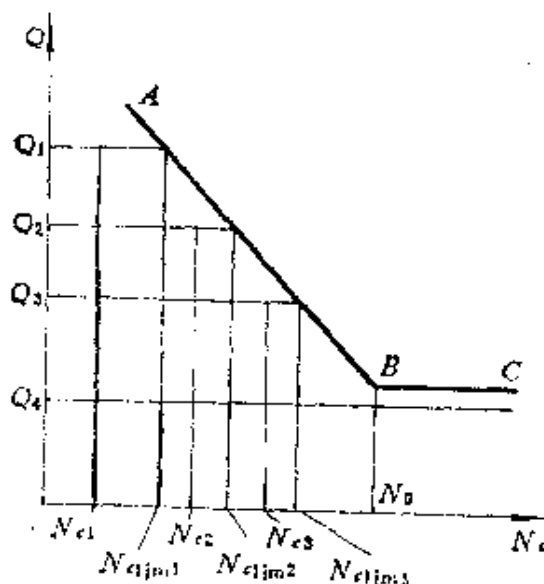


图5-18 极限应力循环数

零件的整个工作寿命为1，那么为保证零件在 $Q_1, Q_2 \dots Q_k$ 作用下不发生损坏，应满足下述关系：

$$N_{c1}/N_{cilm_1} + N_{c2}/N_{cilm_2} + \dots + N_{ck}/N_{cilm_k} < 1$$

极限情况下有：

$$\sum_1^k (N_{ci}/N_{cilm_i}) = 1 \quad (5-53)$$

上式称为疲劳损伤的线性累积假设。

若材料的疲劳曲线有水平部分，式(5-53)左边的合式应除去 $\sigma_i < \sigma_{sD}$ 对零件的损伤率，因此时 $N_{cilm_i} = \infty$ ， $N_{ci}/N_{cilm_i} = 0$ 。

试验指出： $\sum_1^k (N_{ci}/N_{climi})$ 与载荷的变化特性有关，其值可大大地小于1，也可以大于1，加之试验数据的离散性，合式 $\sum_1^k (N_{ci}/N_{climi}) = a$ 可以在0.01~100之间变化，若 a 等于0.01，由此得出的零件工作寿命误差可相差一百倍，这当然与实际情况不符。目前往往采用大量试件进行试验（如20~50件），按每一载荷下的平均值 \bar{N}_{ci} ， \bar{N}_{climi} 计算 a 值，即 $a = \sum_1^k (\bar{N}_{ci}/N_{climi})$ ，这样得到的 a 值在0.5~2之间变化。这与式（5-53）就无多大矛盾，当最大载荷与最小载荷差别较小而且无短期过载时，完全可以期望 a 值处于上述范围内。此时寿命估计的误差约为式（5-53）的5倍。

若将图5-17的坐标用 $(t, \sigma_i/\sigma_{max})$ 代之（见图5-19），试验证实， a 值随图中阴影部分面积的减小而减小，令 $\xi = \sum \left(\frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{max}} \right) t_i$ 表示阴影部分面积，根据试验数据的统计分析可得到损伤率总和的计算值 a_j 的计算式：

$$a_j = \frac{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{-1D}} \xi - K}{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{-1D}} - K} \quad (5-54)$$

若按式（5-54）计算出的 $a_j < 0.2$ ，则取 $a_j = 0.2$ ，因为小于0.2的数值不能用试验数据来验证。

式（5-54）中的 $K = 0.5 \sim 0.7$ ，它的引入指出了对零件起损伤作用的应力幅的相对水平，可由试验确定。如 $\sigma_{ci} < K\sigma_{-1D} = (0.5 \sim 0.7)\sigma_{-1D}$ ，则此 σ_{ci} 不起损伤作用，计算时可不予考虑。因此式（5-54）仅考虑了数值超过 $K\sigma_{-1D}$ 的那些应力幅。由此得：

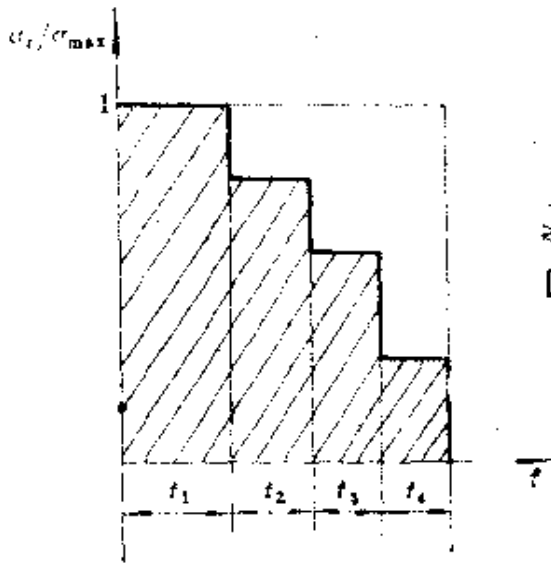
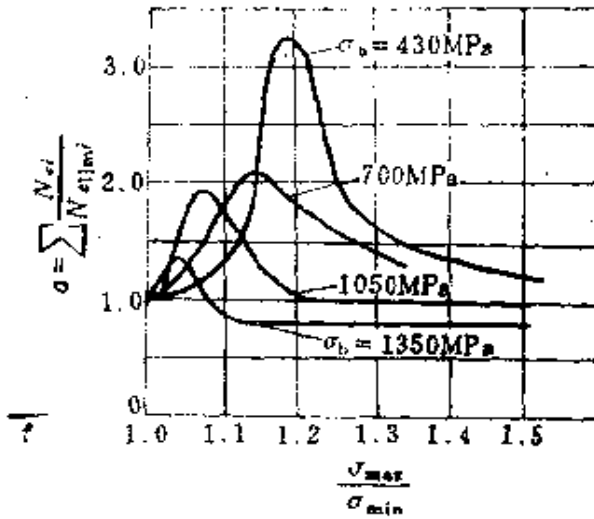
图5-19 $t - \sigma_i/\sigma_{max}$ 图

图5-20 几种材料的 \$\alpha\$ 值

$$\sum_1^m (N_{oi}/N_{olimi}) = \alpha_i \quad (5-55)$$

上式称为修正的线性累积假设。式中 m 是应力幅超过零件疲劳极限 σ_{-1D} 的数目。需注意的是如果平均地取 $K=0.6$ ，则式 (5-55) 中 α_i 只是考虑了 $\sigma_{oi} > 0.6\sigma_{-1D}$ 的那些应力幅。

将计算结果与试验数据加以比较可以看出：未加修正的线性累积假设算出的寿命误差（10%的概率）与式 (5-53) 差 5~7 倍，个别情况下可达 20 倍；而修正的线性累积假设算出的结果（95%的概率）不超过 2.5 倍。

图 5-20 给出了应力按阶梯变化时几种材料的 α 值，其中 σ_{max} 、 σ_{min} 的作用时间相同，且 $\sigma_{min} = \sigma_{-1}$ 。

当 $\sigma_{min} > \sigma_{-1}$ 时，通常 α 值大于 1，而当 $\sigma_{max}/\sigma_{min} = 1.1 \sim 1.2$ 时， α 达到最大值。

如果没有现成的试验数据可以参考，可取 $\alpha = 1$ ，不会给计算带来大的误差。

例题 5-3 如果例题 5-1 中间轴的转矩在减速器总的工作期间内按图 5-21 所示规律变化，试校核 II-III 截面的安全系数。

解 按前述处理变载荷问题的方案 1，选取计算载荷 $Q_i = T_{max}$

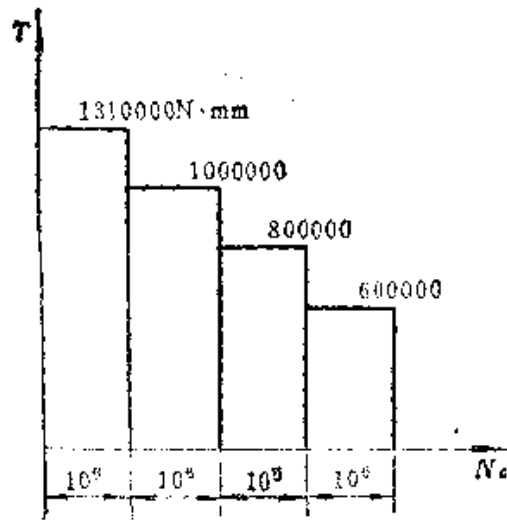


图5-21 例题5-3图

$=T_1=1310000\text{N}\cdot\text{mm}$, 决定等效载荷循环数 N_{eq} , 由式 (5-36) 知

$$N_{eq} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^4 ((T_i/T_{\max})^m N_{ci})$$

取 $a=1$, $m=9$, $N_0=10^7$ 得

$$\begin{aligned} N_{eq} &= \left[\left(\frac{T_1}{T_{\max}} \right)^m N_{c1} + \left(\frac{T_2}{T_{\max}} \right)^m N_{c2} + \left(\frac{T_3}{T_{\max}} \right)^m N_{c3} + \left(\frac{T_4}{T_{\max}} \right)^m N_{c4} \right] \\ &= 10^7 \left[1 + \left(\frac{10}{13.1} \right)^9 + \left(\frac{8}{13.1} \right)^9 + \left(\frac{6}{13.1} \right)^9 \right] \\ &= 1.1 \times 10^8 \end{aligned}$$

$$k_{\sigma} \approx k_{\tau} = \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_{eq}}} = \sqrt[9]{\frac{10^7}{1.1 \times 10^8}} = 1.278$$

(若计算出 $N_{eq} > N_0$, 则取 $N_{eq} = N_0$)

由于 $Q_1 = T_{\max} = T_1 = 1310000\text{N}\cdot\text{mm}$, 所以 II-III 截面的 $K_{\sigma D}$ 、 $k_{\sigma D}$ 、 σ_s 、 $\tau_s = \tau_m$ 和例题5-2中的数据相同, 即

$$\sigma_s = 22.53\text{MPa}, \quad \tau_s = \tau_m = 8.29\text{MPa}$$

$$k_{\sigma D} = 5.15, \quad k_{\tau D} = 5.67$$

则

$$n_o = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma D}}{k_{\sigma\sigma}} \sigma_e} = \frac{344}{\frac{5.15}{1.278} \times 22.53} = 3.79$$

$$n_r = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau D}}{k_{\tau\tau}} \tau_e + \psi_r \tau_m} = \frac{206}{\frac{5.67}{1.278} \times 8.29 + 0.2 \times 8.29} = 5.36$$

$$n = \frac{n_o n_r}{\sqrt{n_o^2 + n_r^2}} = \frac{3.79 \times 5.36}{\sqrt{3.79^2 + 5.36^2}} = 3.09 > [n] = 1.5 \sim 2.1$$

第五节 疲劳强度的断裂力学概念

一、断裂力学的基本概念

断裂力学最基本的观点就是提出了“有裂纹零件”的概念，认为材料内部总是存在有裂纹或类裂纹缺陷。这些裂纹和缺陷一部分是在零件加工过程中产生的，如铸造、锻压、焊接、热处理以及冷加工中产生的夹杂、疏松、气孔及淬火裂纹等等；另一部分是在使用过程中因变应力或腐蚀介质在材料中引起的裂纹。

普克 (Pook) 1973年指出“大多数疲劳失效都来源于先前存在的裂纹，因此零件的寿命完全取决于裂纹的生长”。疲劳裂纹的扩展实质上是由材料应变所控制的一个过程。

材料抵抗裂纹增长的能力称为断裂韧性。它是由应力强度因子确定的，即

$$K_I = \sigma \sqrt{M a} \quad (5-56)$$

式中 a —— 裂纹尺寸 (从裂纹始端至末端的最大宽度)；

σ —— 垂直于裂纹的抗拉应力；

$M = \pi F^2$ 是取决于零件几何形状及载荷等的裂纹参数。

试验发现当裂纹尺寸已定，工作应力 σ 由小向大缓慢增加时，裂纹也随之慢慢增长，此时应力强度因子 K_I 也因 σ 值的增大而随之增大。当应力强度因子达到某一数值时，裂纹会以极大的速度扩展，从而引起材料或零件的脆断，这种现象称为裂纹的

静力失稳扩展。所谓失稳是指应力保持不变，而裂纹会以极大的速度扩展；此时的应力强度因子值用 K_c 表示。显然零件发生断裂的判据应该是 $K_I = K_c$ ，由式(5-56)知，此时的应力（称为临界应力）是

$$\sigma_c = \frac{K_c}{\sqrt{Ma}} \quad (5-57)$$

临界裂纹长度是

$$a_c = \frac{1}{M} \left(\frac{K_c}{\sigma_c} \right)^2 \quad (5-58)$$

但作为设计应用则应保证

$$K_I < K_c \quad (5-59)$$

这种关系和强度计算中工作应力和材料极限应力的关系相似，显然为避免快速疲劳断裂应保证

$$\sigma < \frac{K_c}{\sqrt{Ma_c}} \quad (5-60)$$

应力强度因子的量纲是复合量纲，当应力的单位是MPa，长度单位是mm时，其单位为 $\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$ 。

二、疲劳裂纹扩展速度

1963年帕里斯(Paris)提出了一个估算疲劳裂纹扩展速度的经验关系式

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^n \quad (5-61)$$

式中 $\frac{da}{dN}$ —— 每一个应力循环的裂纹扩展速度；

n —— 是用试验方法确定的指数，其值在2~6之间，通常约为4；

$\Delta K = K_{I\max} - K_{I\min}$ ，为在 $\frac{da}{dN} = 10^{-6}$ 时的数值；

A —— 受到平均应力 σ_m ，应力循环次数 N 以及外界环境等因素影响的材料常数，主要为 K_I 的函数。

以上提到的各种材料常数 K_c 、 M 、 A 及 n 读者可参阅参考文献[6]、[7]。

对设计者来说最关心的问题是：如果零件的初始裂纹是 a_0 ，那么在发生迅速断裂之前零件能够承受多少个应力循环呢？即疲劳寿命 N 为多少？

为此将式(5-56)微分，得

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{M a}$$

将上式代入式(5-61)得：

$$\frac{da}{dN} = A [\Delta \sigma \sqrt{M a}]^n \quad (5-62)$$

或
$$\sigma^{n/2} da = A (\Delta \sigma)^n M^{n/2} dN$$

将上式在 $a = a_0$ 与 $a = a_c$ 之间积分得：

$$N = \frac{1/a_0^{(n/2-1)} - 1/a_c^{(n/2-1)}}{A(\Delta \sigma)^n M^{n/2}(n/2-1)} \quad (5-63)$$

由于 $a_0 \ll a_c$ ，上式分子中的后一项可略，故

$$N = 1 / [a_0^{(n/2-1)} A (\Delta \sigma)^n M^{n/2} (n/2 - 1)] \quad (5-64)$$

利用式(5-63)、式(5-64)可以估算零件的疲劳寿命，或称为剩余寿命。

例题5-4 一转轴工作一定时间后发现一横向裂纹如图5-22所示。转轴最大弯曲应力 $\sigma_{\max} = 78.5 \text{ MPa}$ ，直径 $D = 275 \text{ mm}$ ，材料40号钢， 860° 正火 $\sigma_b = 392.28 \text{ MPa}$ ， $K_c = 1961.4 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$ 。实测之 $A = 7.591 \times 10^{-14}$ ， $n = 3$ ，初始裂纹 $a_0 = 25 \text{ mm}$ ，试计算该转轴的疲劳寿命。

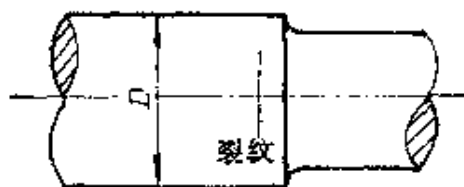


图5-22 例题5-4

解 考虑到压应力不会引起裂纹的扩展, 故取 $\sigma_{\min} = 0$ 。由此得 $\Delta\sigma = \sigma_{\max} = 78.5\text{MPa}$, 又 $M = \pi F^2$, 根据参考文献〔12〕知 $F = 1.12$, 按式 (5-64) 得:

$$\begin{aligned} N &= 1 / \{ (a_0^{(n/2-1)} A (\Delta\sigma)^n \pi^{n/2} F^n (n/2 - 1) \} \\ &= 1 / [25^{0.5} \times 7.591 \times 10^{-14} \times 78.5^8 \times \pi^{1.5} \times 1.12^8 \\ &\quad \times 0.5] \\ &\approx 1.39 \times 10^8 \text{次} \end{aligned}$$

若用式 (5-63) 进行计算, 因

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{F \sigma_{\max}} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1961.4}{1.12 \times 78.5} \right)^2 = 158\text{mm}$$

得 $N = 8.39 \times 10^8 \text{次}$ 。

第六章 强度计算的统计方法

第一节 实际载荷和承载能力的统计特性

一、实际载荷的统计特性

我们所设计的机械零件（包括轴）都要用在一个真实的机构或机器上。由于系统本身所固有的一些无法控制的因素，不可能精确估计零件在使用期间所能承受的外部载荷。例如，一部铣床的零件承受的真实载荷受到的影响因素有：被加工零件的材料性质、工人的操作水平和习惯等；作用在一个飞机零件上的载荷，会受到气象条件和飞行员驾驶水平的影响。因此，任何一个机械零件所承受的外载荷都具有随机的特性。但是对一个具体的机械零件来说，总可以给出其所受外载荷的平均值和公差带。

若用 λ 表示零件所承受的实际载荷（或工作应力）， $\bar{\lambda}$ 表示实际载荷的平均值， $\Delta\lambda$ 表示实际载荷对平均值的偏差，则

$$\lambda = \bar{\lambda} \pm \Delta\lambda \quad (6-1)$$

这样预计的实际载荷，具有一般的统计特性，可用一条具有平均值和分布值的曲线来表示。图 6-1 是机械零件所受实际载荷

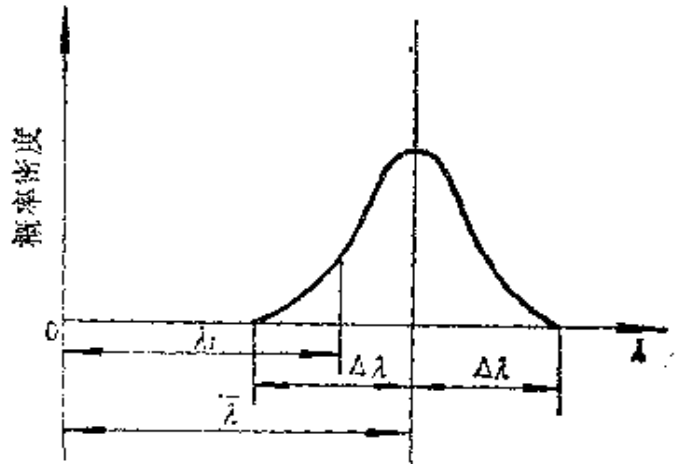


图 6-1 实际载荷的典型统计分布曲线

的典型统计分布曲线。纵坐标表示实际载荷发生的频数或概率密度，分布曲线不一定相对纵坐标是对称的， $\Delta\lambda$ 应视具体问题而定。

二、承载能力的统计特性

和实际载荷相对应的是零件的承载能力（或强度），承载能力是以零件是否失效为依据的，它受到零件几何形状、材料特性的影响，而这两者又受到难以控制的加工缺陷的影响。因而零件的承载能力将不可能与一个理想几何形状、理想材料的零件承载能力相同。承载能力的典型统计分布曲线如图 6-2 所示。 L 表示承载能力； \bar{L} 表示承载能力的平均值，通常被看作是理论设计承载能力； ΔL 表示相对于平均值的偏差，其值受到不可避免的加工误差的制约，由设计者根据具体问题的分析和设计经验（具有一定的可靠性）来决定。同样，承载能力可表示成以下关系：

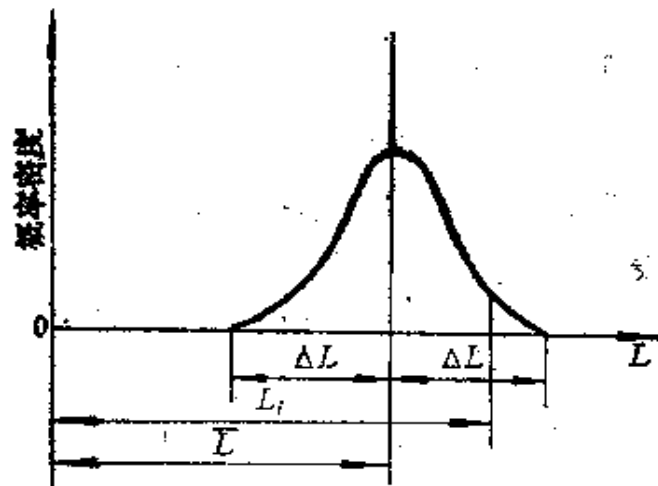


图6-2 承载能力的典型统计分布曲线

$$L = \bar{L} \pm \Delta L \quad (6-2)$$

也具有一般的统计特性。

第二节 零件承载能力与载荷的统计分布间的基本关系

实际载荷和承载能力的分布曲线间的关系在设计工作中是很重要的。一个满意的设计，载荷和承载能力之间应具有的具体关

系，取决于零件在机器中的重要程度以及零件失效后所带来的后果，如果零件失效后带来的是极大的经济损失和对人身的严重危害，此时实际载荷和承载能力的分布曲线间的关系应如图 6-3 所示。即实际载荷的平均值 $\bar{\lambda}$ 应小于相应的承载能力的平均值 \bar{L} ，而且两分布曲线不应有重叠部分。 $\bar{\lambda}$ 与 \bar{L} 间的分离的大小取决于两分布曲线的离散程度，即 $\Delta\lambda$ 和 ΔL 的大小。

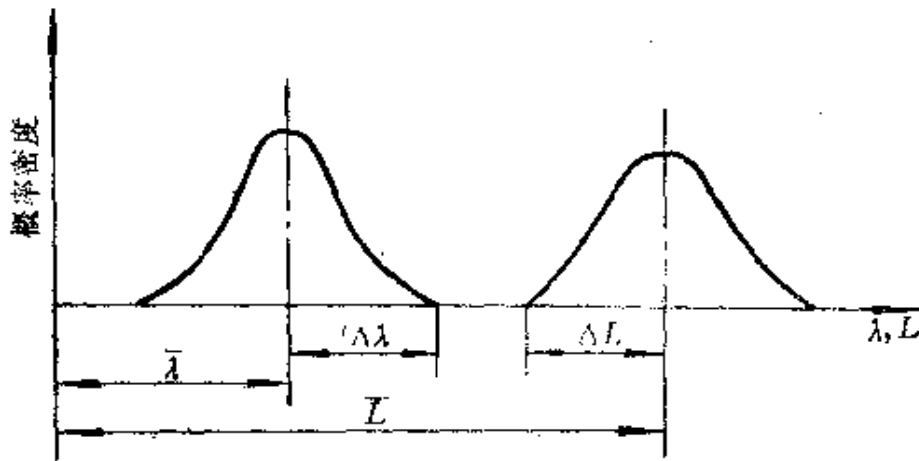


图6-3 实际载荷与承载能力分布曲线的关系

在很多实际设计中，设计时就考虑到允许零件有一定的失效概率，因为这种失效不会带来什么严重后果，一个零件在使用多时后，因接触表面的疲劳而磨损就属此种情况。如一个齿轮减速箱设计的寿命是 10^8 应力循环数，由于偶然因素而磨损，寿命降为 0.9×10^8 ，带来的后果当然是无关紧要的。此时，实际载荷和承载能力分布曲线间就可以有重叠部分，如图 6-4 所示。图中两曲线的重叠部分给出了零件失效的概率。

一个机械零件的安全系数可定义为平均承载能力与相应的平均实际载荷之比，即

$$n = \bar{L} / \bar{\lambda} \quad (6-3)$$

若一个机械零件的承载能力小于其相应的实际载荷，就会失效，当然在设计中应该尽量不使这种情况发生，不过我们更感兴趣的是零件失效的概率。承载能力和实际载荷之差的分布曲线可用来确定零件的失效概率， $(L - \lambda)$ 的分布曲线如图 6-5 所示。

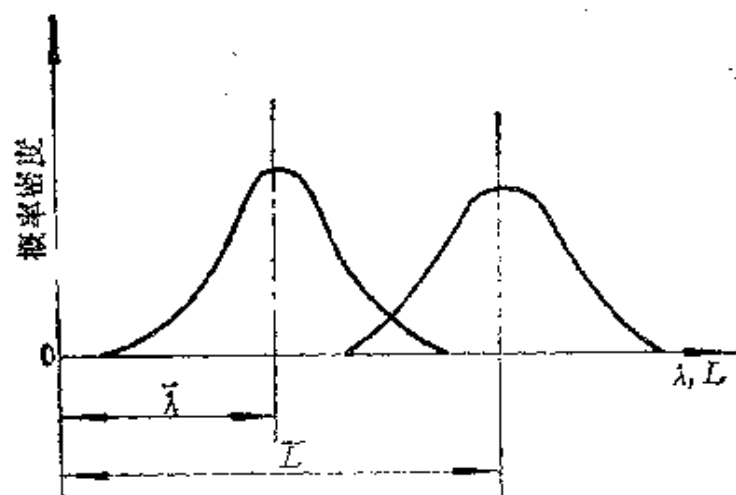


图6-4 实际载荷分布曲线与承载能力分布曲线的干涉关系

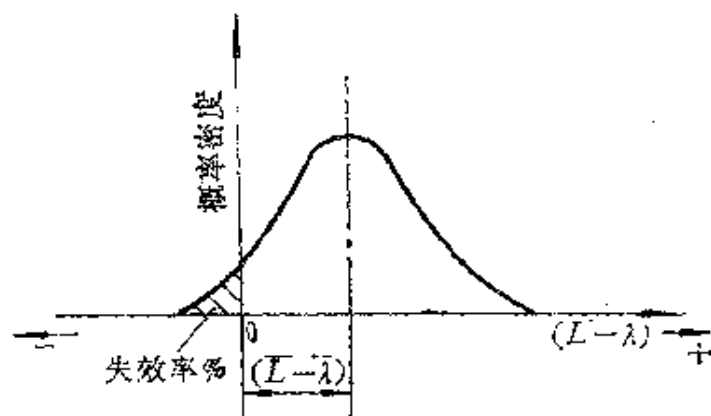


图6-5 $(L - \lambda)$ 的典型分布曲线

图中阴影部分（横坐标为负）表示零件的失效概率（失效发生的百分数），非阴影部分表示零件的可靠度。

如果失效发生后带来的是严重的后果，那么 $(L - \lambda)$ 分布曲线应配置得使所有实际的 $(L - \lambda)$ 值都是正的；若允许偶尔发生失效， $(L - \lambda)$ 值可以是负值，与此对应的分布曲线下的面积就表示失效发生的概率。

第三节 变量的正态分布

如果一个变量 x 是另外一些随机变量的线性函数，变量 x 将成正态分布。根据统计学的中心极限定理可知，变量 x 总是呈正

态分布规律，甚至当与 x 有关的其它随机变量本身不是正态分布时，也是如此。因此，对大多数实际情况来说，假定变量呈正态分布是适当的。

若变量 x 呈正态分布，其发生的频数（概率密度）可用下式表示

$$y = \frac{1}{D_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2D_x^2}} \quad (6-4)$$

式中 \bar{x} ——变量 x 的平均值；

D_x ——变量 x 的均方根偏差。

\bar{x} 和 D_x 确定后，正态分布变量 x 就完全确定。

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{n} \right) \quad (6-5)$$

式中 x_i ——变量 x 的任一离散点。

$$D_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (6-6)$$

它实际上是所考虑的无限和中所有离散点 $(x_i - \bar{x})$ 的均方根。

图 6-6 表示的是式 (6-4) 的正态分布曲线，曲线相对于 \bar{x}

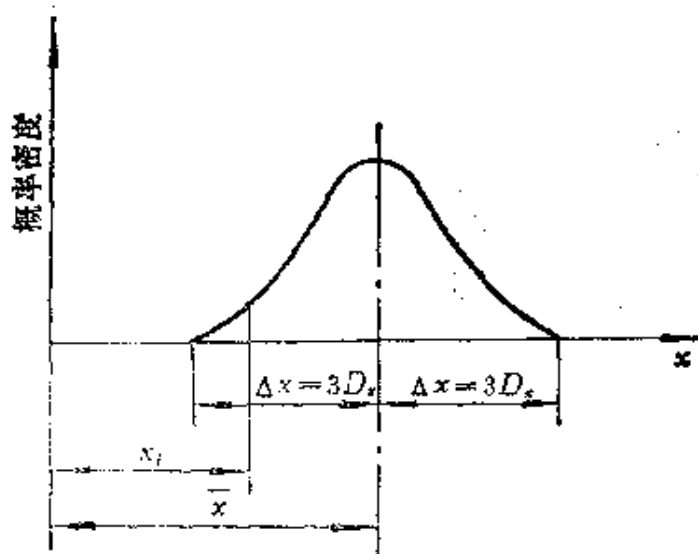


图6-6 变量 x 的典型正态分布曲线

是对称的。对于 $-\infty < x < \infty$ ，分布曲线下的面积，表示所有 x 值总和的100%；对于 $(\bar{x} - D_x) < x < (\bar{x} + D_x)$ ，分布曲线下的面积表示 x 值总和的68.3%；对于 $(\bar{x} - 3D_x) < x < (\bar{x} + 3D_x)$ ，曲线下的面积表示 x 值总和的99.73%。因此，在质量控制中，通常规定 $3D_x$ 的公差，即 $\Delta x = 3D_x$ ，或

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm 3D_x \quad (6-7)$$

实际上，如果变量 x 可以表示成一个平均值加减一个增量 Δx ，足以信赖变量 x 将会落在公差限之内，如取 $\Delta x = 3D_x$ ，那么变量落在公差限内的频数将是99.73%。

为了利用现成的统计数表（如正态分布积分表）可定义一个新的变量 t 来代替原来的变量 x 。 t 和 x 间的线性关系用下式表示

$$t = \frac{(x - \bar{x})}{D_x} \quad (6-8)$$

如果变量 x 是正态分布，新的变量 t 也将是正态分布。由式 (6-8) 可知，当 x 分别取值 $\bar{x} - 3D_x$ ， $\bar{x} - 2D_x$ ， $\bar{x} - D_x$ ， \bar{x} ， $\bar{x} + D_x$ ， $\bar{x} + 2D_x$ ， $\bar{x} + 3D_x$ 时，变量 t 分别取值 -3 ， -2 ， -1 ， 0 ， $+1$ ， $+2$ ， $+3$ 。据此可以作出变量 t 的概率密度分布曲线（图6-7）。

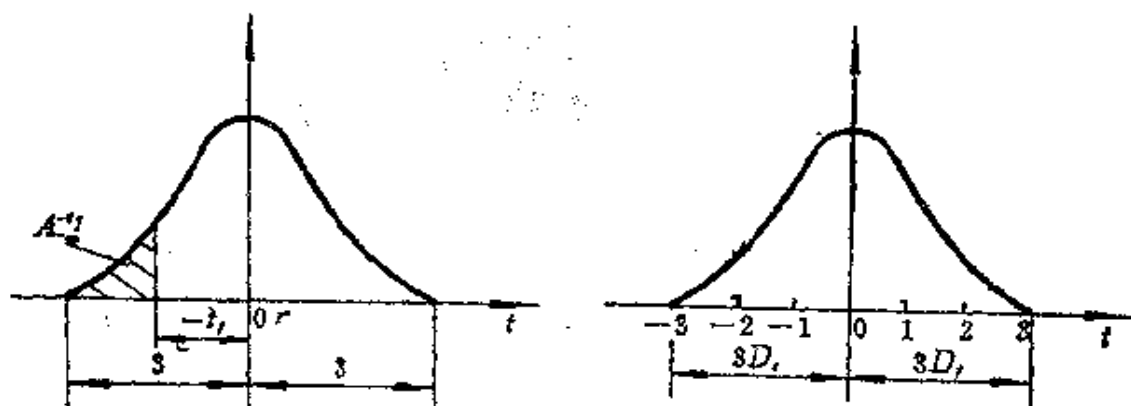


图6-7 变量 t 的正态分布曲线

比较图 6-6 和图 6-7，可知变量 t 其均方根偏差 $D_t = 1$ ，而 t 的平均值 $\bar{t} = 0$ ，因而变量 t 的分布曲线相对于 $t = 0$ 的点

是对称的。其概率密度函数可由式 (6-4) 导出:

$$y_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad (6-9)$$

对应于 $-\infty < t < +\infty$, 整个 t 分布曲线下的面积等于 1, 而统计数表给出的数据就是变量 t 分布曲线下的面积。而我们更感兴趣的是当 $-\infty < t < -t_f$ 时分布曲线下的面积, 此处 t_f 是一给定的正数, 该面积可用下式表示:

$$A_{-\infty}^{-t_f} = \int_{-\infty}^{-t_f} y_t dt = \int_{-\infty}^{-t_f} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad (6-10)$$

上式所示面积即图 6-7 中阴影部分的面积, 它表示在代数值上小于 $-t_f$ 的所有 t 的百分比 (概率)。用来决定 $A_{-\infty}^{-t_f}$ 的统计数表是现成的 (一般的数学手册都可查到)。注意 $A_{-\infty}^{-t_f}$ 是 t_f 的函数, 为了求得这个函数关系, 可利用统计数表上的数据, 采用曲线拟合的方法求得下述关系式:

$$t_f = \frac{1.29}{(A_{-\infty}^{-t_f})^{0.128}} \quad (6-11)$$

上式对我们感兴趣的范围, 即 $0.001 \leq A_{-\infty}^{-t_f} \leq 0.015$ 是可信的, 误差仅为 2%。

第四节 安全系数的统计分析

安全系数的统计分析涉及到统计学上正态分布的基本理论。基本理论又涉及到两个均为正态分布的独立变量的加或减, 即正态分布变量的和或差也是正态分布; 和或差的平均值等于分量平均值的和或差; 和或差的均方根偏差等于分量均方根偏差的平方和的平方根。

若实际载荷 λ 和承载能力 L 都认为是正态分布, 那么 $(L - \lambda)$ 、 $(L + \lambda)$ 也是正态分布, 且

$$\left. \begin{aligned} \overline{L \pm \lambda} &= \bar{L} \pm \bar{\lambda} \\ D_{(L \pm \lambda)} &= \sqrt{D_L^2 + D_\lambda^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

式中 $\overline{L \pm \lambda}$ —— L 、 λ 的和或差的平均值；

$D_{(L \pm \lambda)}$ —— L 、 λ 的和或差的均方根偏差。

前已述及：为避免零件失效，零件的承载能力 L 必须等于或大于零件所承受的实际载荷 λ 。即 $(L - \lambda)$ 必须为正或为零。因而 $(L - \lambda)$ 的正态分布曲线，在设计中就是至关重要的。

采用式 (6-8) 所定义的变量 t

$$t = \frac{x - \bar{x}}{D_x}$$

若取 $x = (L - \lambda)$ ， $\bar{x} = \overline{L} - \bar{\lambda}$ ， $D_x = D_{(L-\lambda)}$ ，则

$$t = \frac{(L - \lambda) - (\overline{L} - \bar{\lambda})}{D_{(L-\lambda)}}$$

注意零件失效均发生在图 6-5 $(L - \lambda)$ 为负的情况，因而对应于 $L - \lambda = 0$ 的坐标点 t ：

$$t = -t_f = \frac{0 - (\overline{L} - \bar{\lambda})}{D_{(L-\lambda)}}$$

应用式 (6-12) 得

$$t_f = \frac{(\overline{L} - \bar{\lambda})}{\sqrt{D_L^2 + D_\lambda^2}} \quad (6-13)$$

$(L - \lambda)$ 关于坐标 t 的分布如图 6-8 所示。

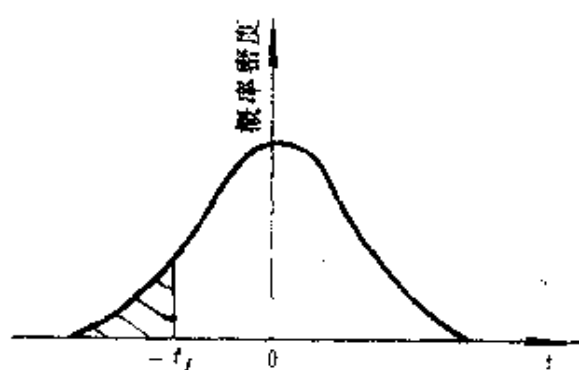


图6-8 $(L - \lambda)$ 关于变量 t 的分布曲线

对应于 $-\infty < t < -t_f$ ，曲线下的面积从理论上给出了零件的失效概率，用 $A(t)$ 表示，或简写为 A_f 。

将式 (6-11)、式 (6-13) 合并得：

$$t_f = \frac{1.29}{A_f^{0.128}} = \frac{(\bar{L} - \lambda)}{\sqrt{D_L^2 + D_\lambda^2}}$$

或

$$\frac{\bar{L}}{\lambda} = 1 + \frac{1.29\sqrt{D_L^2 + D_\lambda^2}}{A_f^{0.128}\lambda}$$

根据前面的定义 $\frac{\bar{L}}{\lambda}$ 即安全系数 n ，故

$$n = 1 + \frac{1.29\sqrt{D_L^2 + D_\lambda^2}}{A_f^{0.128}\lambda} \quad (6-14)$$

若假定变量的公差为 3 倍的均方根偏差，即 $\Delta L = 3 D_L$ ， $\Delta \lambda = 3 D_\lambda$ ，则 $D_L = \frac{\Delta L}{3}$ ， $D_\lambda = \frac{\Delta \lambda}{3}$ 。可见，当零件的实际载荷和承载能力的公差已知，则其均方根偏差即可求出。若平均值 $\bar{\lambda}$ 和允许的失效概率 A_f 已知，可利用式 (6-14) 求得零件的安全系数 n 。根据 $n = \frac{\bar{L}}{\lambda}$ 又可求得平均承载能力 \bar{L} 。

例题 6-1 一转轴受一变动的弯曲载荷 (见图 6-9) M ，若 M 不可能精确估计，因而有：

$$M_{\max} = \bar{M}_{\max} \pm \Delta M_{\max}$$

若 $\bar{M}_{\max} = 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}$ ，其保守的公差为 $\Delta M_{\max} = \pm 500 \text{ N} \cdot \text{mm}$ ，转轴的主要失效形式是疲劳断裂， $A_f = 0.001$ (可靠度为 99.9%)，设计者确定的保守的承载能力公差为 $\Delta L = \pm 800 \text{ N} \cdot \text{mm}$ ，试确定转轴的安全系数。

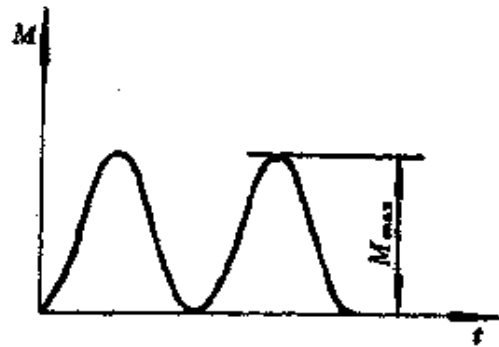


图 6-9 例题 6-1 图

解 由已知条件得：

$$D_L = \frac{\Delta L}{3} = \frac{800}{3} = 267 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$D_\lambda = \frac{\Delta \lambda}{3} = \frac{\Delta M_{\max}}{3} = \frac{500}{3} = 167 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\bar{\lambda} = \bar{M}_{\max} = 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } n &= 1 + \frac{1.29\sqrt{D_L^2 + D_\lambda^2}}{A_f^{0.128}\bar{\lambda}} = 1 + \frac{1.29\sqrt{(267)^2 + (167)^2}}{(0.001)^{0.128} \times 1000} \\ &= 1.984 \end{aligned}$$

因而转轴不发生疲劳损坏的安全系数 $n \approx 2$ 。

利用式 (6-14) 确定安全系数时, 需要确定平均承载能力 \bar{L} 的公差 ΔL , 可 \bar{L} 在事先是不可能精确估计的, 为避免确定 \bar{L} 的困难, 可进一步分析式 (6-14), 分析结果表明, 即使估计的 \bar{L} 有较大的误差, 也只会给 n 值的计算带来较小的误差。

若用 $\frac{\Delta L}{\bar{L}}$ 、 $\frac{\Delta \lambda}{\bar{\lambda}}$, 可导出另一个安全系数的计算公式:

$$n = 1 + \frac{0.43\sqrt{(\Delta L/\bar{L})n^2 + (\Delta \lambda/\bar{\lambda})^2}}{A_f^{0.128}}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } [5.4A_f^{0.256} - (\Delta L/\bar{L})^2]n^2 - [10.8A_f^{0.256}]n + [5.4A_f^{0.256} \\ - (\Delta \lambda/\bar{\lambda})^2] = 0 \end{aligned} \quad (6-15)$$

式中 $\Delta L/\bar{L}$ ——预估的零件承载能力的百分比公差带;

$\Delta \lambda/\bar{\lambda}$ ——对应的实际载荷的百分比公差带。

应用式 (6-14) 时, 须确定所设计零件的预估承载能力 \bar{L} ; 而用式 (6-15) 时, 只要知道比值 $\Delta L/\bar{L}$ 、 $\Delta \lambda/\bar{\lambda}$ 就可以较简单地求解关于安全系数 n 的二次方程, 比值 $\Delta L/\bar{L}$ 可由设计者根据以往的研究和经验大致地予以确定。

为使式 (6-15) 有比较高的精度, A_f 值应取在 0.001~0.015 之间。对于失效概率 $A_f > 0.015$ 的情况, A_f 的精度通常不是个重要条件, 因而式 (6-15) 可用来确定大多数实际问题的安全系数。

例题 6-2 用式 (6-15) 求解例题 6-1 的安全系数。

解 此时不需要确定 $\Delta L(\bar{L})$, 只需根据设计经验确定 $\Delta L/\bar{L}$ 的值就可以了, 依题意知

$$\frac{\Delta \lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\Delta M_{\max}}{M_{\max}} = \frac{500}{1000} = 0.5$$

$A_f = 0.001$ (可靠度为99.9%)

假定 $\Delta L/\bar{L} = 0.4$ (例题 6-1 确定 $\Delta L = \pm 800 \text{ N} \cdot \text{mm}$)

代入式 (6-15) 得:

$$\begin{aligned} & [5.4(0.001)^{0.256} - (0.4)^2]n^2 - [10.8(0.001)^{0.256}]n \\ & + [5.4(0.001)^{0.256} - (0.5)^2] = 0 \end{aligned}$$

解之, 得:

$$n = \frac{2.42 + \sqrt{(2.42)^2 - 4(0.883)}}{2} = 1.97$$

和例题 6-1 求得的 $n = 1.984$ 是非常接近的。

当失效会带来严重后果时, 必须保证 $L \geq \lambda$, 根据图 6-3 应有:

$$\bar{\lambda} + \Delta\lambda \leq \bar{L} - \Delta L$$

或

$$\bar{L} \geq \bar{\lambda} + \Delta\lambda + \Delta L$$

$$\text{安全系数 } n = \frac{L}{\lambda} \geq 1 + \frac{\Delta\lambda + \Delta L}{\lambda} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\Delta L}{L} n$$

$$\text{所以 } n \geq \frac{1 + \Delta\lambda/\bar{\lambda}}{1 - \Delta L/\bar{L}} \quad (6-16)$$

式中 $\Delta\lambda/\bar{\lambda}$ 、 $\Delta L/\bar{L}$ ——实际载荷和承载能力的百分比公差, 根据设计经验确定。

例题 6-3 用式 (6-16) 确定例题 6-1 的安全系数, 假定失效概率为零。

解 由设计经验及题意得

$$\Delta L/\bar{L} = 0.4, \quad \Delta\lambda/\bar{\lambda} = 0.5$$

$$\text{所以 } n \geq \frac{1 + 0.5}{1 - 0.4} = 2.5, \text{ 此值大于例题 6-1 中确定的 } n =$$

1.984 (失效概率为 0.1%)。

在可靠性计算中, 图 6-8 中的 $t_f = (\bar{L} - \bar{\lambda})/\sqrt{D_L^2 + D_\lambda^2}$ 称为分格数, $-t_f$ 以左正态分布曲线下的面积表示零件的失效概率, $-t_f$ 以右正态分布曲线下的面积表示零件工作的可靠度, 用 R 表示, 且

$$R = \int_{-t_1}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad (6-17)$$

其中 $t = [(L - \lambda) - (\bar{L} - \bar{\lambda})] / D_{(L-\lambda)}$, 或写成

$$R = 1 - \int_{-\infty}^{-t_1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = 1 - A_1 \quad (6-18)$$

例题6-4 例题6-1中若已知 $\lambda = 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}$, $\bar{L} = 2000 \text{ N} \cdot \text{mm}$, $D_L = 267 \text{ N} \cdot \text{mm}$, $D_l = 167 \text{ N} \cdot \text{mm}$, 试计算零件的可靠度 R ?

$$\text{解 } t_1 = (\bar{L} - \bar{\lambda}) / \sqrt{D_L^2 + D_l^2} = (2000 - 1000) / \sqrt{267^2 + 167^2} \approx 3.17$$

由正态概率积分表查得当 $-t_1 = -3.17$ 时 $A_1 = 0.037622$

所以可靠度 $R = 1 - A_1 = 1 - 0.037622 = 0.96237$ 。

由上述可知零件的可靠度（无失效工作概率）较之安全系数是个更为确切的概念。大多数机械传动都可当作是由单个零件 1、2、3... n 顺序连接起来的形式去研究，根据概率乘法理论，研究对象为一串联系统时其可靠度等于单个零件可靠度的连乘积，即

$$R = R_1 R_2 \cdots R_n = \prod_{i=1}^n R_i \quad (6-19)$$

可见，由若干零件连接起来的复杂对象的可靠度，总小于其中任何一个零件的可靠度，且随着单个零件数目的增加而下降。若零件数目 $n = 10$ ，每个零件的可靠度等于 0.97，则 $R = 0.97^{10} \approx 0.74$ 。若系统是由多个零件组成的并联系统，且只要求任一个零件能正常工作即可，则系统可靠度为：

$$R = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i) \quad (6-20)$$

通过上述安全系数的统计分析，读者可清楚地看出若安全系数表示为 $n = L_{\min} / \lambda_{\max}$ ，则只要 $n > 1$ ，失效率为零（可靠度为

100%)。若安全系数表示为 $n = \bar{L}/\bar{\lambda}$ ，当 $n > 1$ 时，有可能失效，也可能不失效，这取决于 L 、 λ 的离散程度。 D_L 、 D_λ 值越小，可靠度越高；反之可靠度越低。因此，在提到一个零件的安全系数时，必须给出它的可靠度。笼统地说一个零件的安全系数是多少，并不能说明这个零件工作时的可靠性怎样。这是传统安全系数设计法的不足之处。

例题6-5 试确定一转轴的可靠度。已知轴的工作应力及材料强度均呈正态分布，其均值分别为 $\bar{s} = 3000 \text{ N/mm}^2$ ， $\bar{\delta} = 4000 \text{ N/mm}^2$ ，均方根偏差为 $D_s = 300 \text{ N/mm}^2$ ， $D_\delta = 400 \text{ N/mm}^2$ 。

$$\text{解 } t_f = -\frac{\bar{\delta} - \bar{s}}{\sqrt{D_\delta^2 + D_s^2}} = -\frac{4000 - 3000}{\sqrt{(400)^2 + (300)^2}} = -2.0$$

由标准正态积分表查得 $A_f = 0.0228$

$$\therefore \text{可靠度 } R = 1 - A_f = 1 - 0.0228 = 0.9772 = 97.72\%$$

若假定因材料热处理的问题使材料强度的均方根偏差由 400 N/mm^2 增至 600 N/mm^2 ，则

$$t_f = -\frac{4000 - 3000}{\sqrt{(600)^2 + (300)^2}} = -1.49$$

此时 $A_f = 0.0681$ ，可靠度 $R = 1 - 0.0681 = 0.9319 = 93.19\%$

由于 $\bar{\delta}$ 、 \bar{s} 未变，所以传统安全系数为

$$n = \frac{\bar{\delta}}{\bar{s}} = \frac{4000}{3000} = 1.33$$

两者是相同的，但由于材料强度的离散度增大，使转轴的可靠性由 97.72% 降低为 93.19% 。

应当注意的是上例的转轴没有超过 97.72% (93.19%) 的可靠性，或说 97.72% (93.19%) 可靠度的安全系数值仅为 1。为此希格莱 (Shigley) 1972 年介绍了一种修正的“统计安全系数” n ，这种安全系数表示超出任一规定可靠度 R 的有效安全度。如果求的是统计安全系数则：

$$t_t = -\frac{\bar{L} - n\bar{\lambda}}{\sqrt{D_L^2 + D_\lambda^2}} \quad (6-21)$$

由上式得统计安全系数为：

$$n = -\frac{1}{\lambda} [\bar{L} - |t_t| (D_L^2 + D_\lambda^2)^{1/2}] \quad (6-21)$$

若写成工作应力与材料强度的关系则：

$$n = -\frac{1}{s} [\bar{\delta} - |t_t| (D_\delta^2 + D_s^2)^{1/2}] \quad (6-23)$$

值得注意的是在 t_t 的计算式中，统计安全系数是乘在工作载荷（工作应力）的前面，这样计算出来的 t_t 的绝对值减小，与其对应的可靠度 R 降低，而实际的可靠度却高于此值。

若给定一可靠度 R ，按式 (6-21)、式 (6-22) 计算出的统计安全系数 $n > 1$ ，则表示存在超过规定可靠度 R 的有效安全度。

例题6-6 已知一拉伸轴是一个直径为 $30 \pm 1.2\text{mm}$ 的锻钢件，材料强度分布为 $\delta = 212 \sim 380\text{N/mm}^2$ ，外载荷 $L = 136000 \pm 43600\text{N}$ ，试确定可靠度为 90% 的统计安全系数。

解 假定载荷 L 、强度 δ 、直径 d 均属正态分布，由正态分布特性可知：

$$(\bar{L}, D_L) = (136000, 14550)\text{N}$$

$$(\bar{\delta}, D_\delta) = (296, 28.18)\text{N/mm}^2$$

$$(\bar{d}, D_d) = (30, 0.4)\text{mm}$$

$$\text{面积均值 } \bar{A} = \frac{\pi}{4} (30)^2 = 706.5\text{mm}^2$$

$$D_A = \left[\bar{A} - \frac{\pi}{4} (30 - 0.4 \times 3)^2 \right] / 3 = 18.47\text{mm}^2$$

$$\text{应力均值 } \bar{s} = \frac{\bar{L}}{\bar{A}} = \frac{136000}{706.5} = 192.5\text{N/mm}^2$$

根据随机数代数知，当 $\bar{s} = \frac{\bar{L}}{\bar{A}}$ 时， D_s 可近似地按下式计

算：

$$D_s \approx \frac{1}{(\bar{A})^2} [(L)^2 \cdot D_L^2 + (\bar{A})^2 \cdot D_A^2]^{1/2}$$

∴ 应力的均方根偏差

$$D_s = \frac{1}{(706.5)^2} [(136000)^2 \times (18.47)^2 \\ + (706.5)^2 \times (14550)^2]^{1/2} = 21.225 \text{ N/mm}^2$$

今给定的可靠度为90%，与其对应的 $|t_f| = 1.28$ 代入统计安全系数的计算式得：

$$n = \frac{1}{\bar{\delta}} [\bar{\delta} - |t_f| (D_s^2 + D_L^2)^{1/2}] \\ = \frac{1}{192.5} [296 - 1.28(28.18^2 + 21.225^2)^{1/2}] \\ = 1.303$$

即超过90%可靠度的安全系数为1.303。

第七章 多支点轴的计算

第一节 多支点轴的特点

在机器制造业中，特别是在电机、内燃机以及压缩机等制造业中遇到的多是两个以上支承的轴，这种多支承的轴，属于静不定结构。

多支点轴的强度计算，关键在于决定轴的内力（切力、弯矩、偏转角等）。一旦内力确定了，轴的静强度和疲劳强度的计算和一般的双支点轴的计算没什么区别。但是内力的分布特性有一系列的特点，它取决于支承的结构特点和使用条件。

多支点轴（布置在机壳或电机机座上）在工作过程中会产生弹性位移，从而引起支承截面和跨间截面载荷的变化。制造与安装所造成的支承不同心，又会引起轴的初内力，这种情况有时是不可忽视的；由于运转中支承的不均匀磨损也会产生或增加支承的同轴度误差，而使轴的初内力增加。因此，即使计算时安全系数取得很大，若不考虑同轴度的影响，轴也可能会损坏。在涡轮发电机组中，轴系的同轴度不仅影响轴的强度，更重要的是影响轴系的振动特性；特别是在大型机组中，有时为了减少轴系的振动、改善轴承的工作状态，在安装找正的过程中，有意使某些支承略高或略低于基准轴线。因此，对多点轴来说，绝对的同心并不都是有利的。

第二节 多支点轴内力的计算

一、多支点同心直轴的计算

解静不定结构有多种方法：如支承弯矩法、多余支反力法等。前者取支承截面处的弯矩作为未知量求解，后者以支承处的

反力作为未知量求解。

对于同心直轴，可以根据支承左右两截面的弯矩、转角相等的条件，找出相邻两跨三个支点处弯矩之间的关系式，进而求得各支点处的弯矩值。以下简要叙述用支承弯矩法求内力的方法。

图 7-1 为具有 n 个简单支承轴的示意图，左端具有外伸端。该多支点轴左支承的弯矩可根据外伸端上的集中载荷很容易地求得，而右支承的弯矩为零。轴共有 $n - 2$ 个中间支承，若能求得这 $n - 2$ 个中间支承上的弯矩，根据静力平衡条件就可求得各支承反力和轴横截面上的内力。

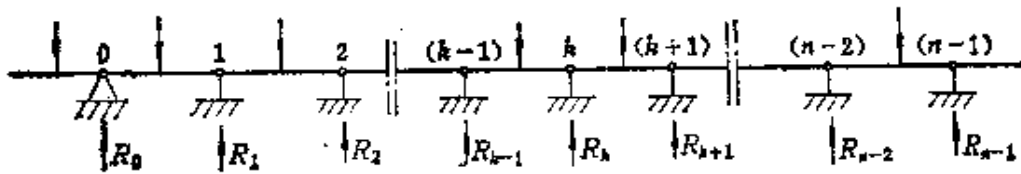


图 7-1 多个简单支承轴示意图

当采用中间支承处横截面上的弯矩作为多余未知量时，中间支承就是多余约束，约束着中间支承左右两截面作相对转动，因而轴受弯后支承左右两截面具有相同的偏转角。为除去这些多余的约束，可将轴在各中间支承处切开，再加入 $n - 2$ 个铰，并用未知弯矩代替除去的约束，就得到如图 7-2 所示的系统。

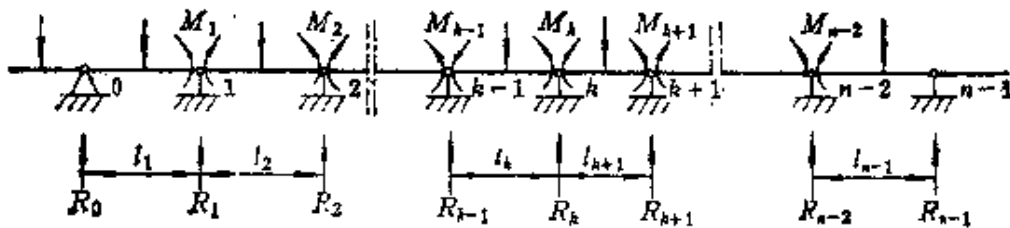


图 7-2 除去多余约束的多支承轴示意图

图 7-2 的系统可以作为 $n - 1$ 个简支梁来处理（见图 7-3）。

多余未知量 M_1, M_2, \dots, M_{n-2} 可利用弹性线在各中间支承两边具有同一偏转角这一变形条件来求得。

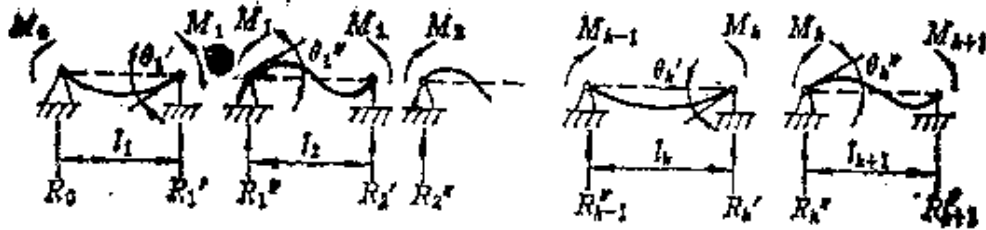


图7-3 化为多个简支梁的多支承轴

今以中间支承 k 为例，设 k 支承左边的 l_k 跨以及右边的 l_{k+1} 跨在 k 处的偏转角为 θ_k' 及 θ_k'' ，则应有

$$\theta_k' = \theta_k'' \quad (k = 1, 2, 3 \cdots n - 2) \quad (7-1)$$

这 $n - 2$ 个关系式就是求解多余未知量的补充方程式。求得 θ_k' 及 θ_k'' 后，将其代入式 (7-1)，就可得到只包含各支承弯矩及轴上外加载荷的关系式，联立求解这些关系式，就可求得各支承处的弯矩值，进而求得支承反力。

支承处的偏转角 θ 可采用虚梁法来确定，已知简支梁对应的虚梁仍为简支梁，因此只要画出实梁上的弯矩并以此作为虚梁上的载荷，就可求得虚梁上的支反力，将该支反力除以 EI 就得到偏转角 θ (E 为弹性模量， I 为惯性矩)。

仍以 k 支承左右两跨 l_k 、 l_{k+1} 的两简支梁为例来说明支承处偏转角 θ 的计算方法。

首先作出简支梁的弯矩图 (即虚梁的载荷图)，为清楚起见，将弯矩分成三部分：实梁上外载荷产生的弯矩，简支梁两端未知弯矩产生的弯矩，如图 7-4 所示。图中 (b) 为外载荷产生的弯矩图，(c)、(d) 分别为左右支承处未知弯矩产生的弯矩图，图 (e) 为虚梁上的载荷图 (即 b、c、d 三图的叠加)。图中 $(R_{k-1}')_e$ 、 $(R_k')_e$ 、 $(R_k'')_e$ 、 $(R_{k+1}'')_e$ 分别为虚梁上 $k-1$ 、 k 、 $k+1$ 支承处的支反力。对两虚梁的 $k-1$ 及 $k+1$ 支点分别取矩可求得虚梁上的支反力。

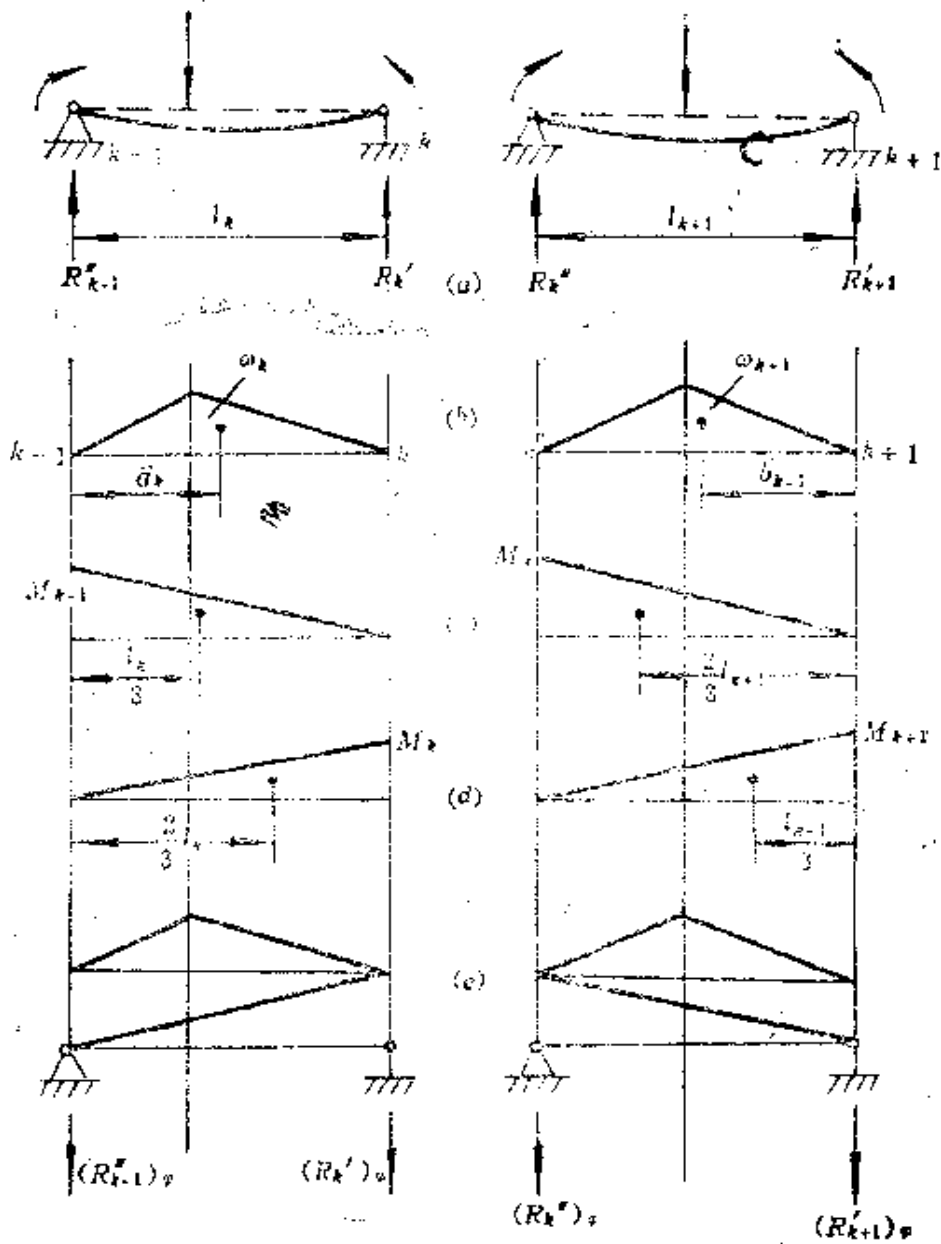


图7-4 虚梁上的载荷图

$$(R_k^{\prime})_0 = \frac{\omega_k \bar{a}_k}{l_k} + \frac{1}{6} M_{k-1} l_k + \frac{1}{3} M_k l_k \quad (7-2)$$

$$(R_k^{\prime\prime})_0 = \frac{\omega_{k+1} \bar{b}_{k+1}}{l_{k+1}} + \frac{1}{6} M_{k+1} l_{k+1} + \frac{1}{3} M_k l_{k+1}$$

式中 ω_k, ω_{k+1} —— 实梁上外载荷产生的弯矩图面积。

\bar{a}_k, \bar{b}_{k+1} 分别为 ω_k, ω_{k+1} 的形心位置坐标。

由于 $EI\theta'_k = (R'_k)_0$, $EI\theta''_k = (R''_k)_0$ 故得:

$$\theta'_k = \frac{(R'_k)_0}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{\omega_k \bar{a}_k}{l_k} + \frac{1}{6} M_{k-1} l_k + \frac{1}{3} M_k l_k \right] \quad (7-3)$$

$$\theta''_k = \frac{-(R''_k)_0}{EI} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{\omega_{k+1} \bar{b}_{k+1}}{l_{k+1}} + \frac{1}{6} M_{k+1} l_{k+1} + \frac{1}{3} M_k l_{k+1} \right] \quad (7-4)$$

式 (7-4) 中的负号是由于 k 支承左右两截面的切力具有相反的符号。将式 (7-3)、式 (7-4) 代入式 (7-1) 得:

$$\begin{aligned} & M_{k-1} l_k + 2 M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} \\ &= - \left[\frac{6 \omega_k \bar{a}_k}{l_k} + \frac{6 \omega_{k+1} \bar{b}_{k+1}}{l_{k+1}} \right] \end{aligned} \quad (7-5)$$

上式就是相邻三支承上的弯矩间的表达式, 若有 n 个支承, 可依次列出 $n-2$ 个这样的方程, 联立求解这些方程即可求得未知弯矩 M_1, M_2, \dots, M_{n-2} 。

式 (7-5) 的右端项 $\omega_k \bar{a}_k / l_k$, $\omega_{k+1} \bar{b}_{k+1} / l_{k+1}$ 分别为 k 跨及 $k+1$ 跨上的外载荷产生的弯矩图作为虚梁载荷时, 在虚梁 k 支承处产生的假想支反力。为使用方便计, 表 7-1 列出了用于式 (7-5) 的几种简单载荷的 $\frac{\omega \bar{a}}{l}$, $\frac{\omega \bar{b}}{l}$ 的表达式。

将式 (7-5) 应用于无外伸端的三支承轴 (铰支), 因此时式中的 M_{k-1} , M_{k+1} 均为零, 则得中间支承的弯矩为:

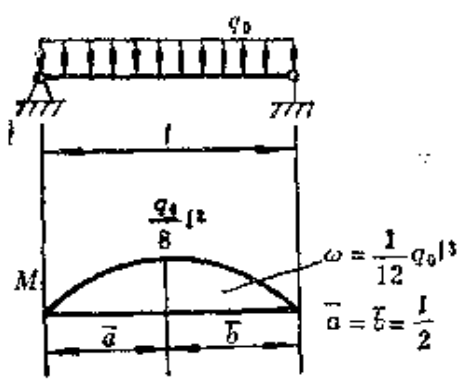
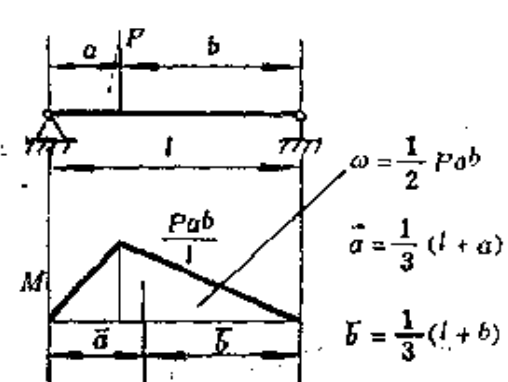
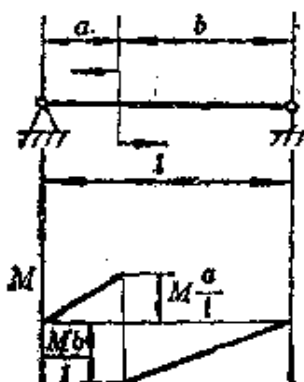
$$M_k = - \left[\frac{6 \omega_k \bar{a}_k}{l_k} + \frac{6 \omega_{k+1} \bar{b}_{k+1}}{l_{k+1}} \right] / 2 (l_k + l_{k+1}) \quad (7-6)$$

上式中 $k=1$ 。若右端具有外伸端且作用弯矩 M_0 , 则上式右端方括号内多一项 $M_0 l_{k+1}$ 。

若将式 (7-5) 应用于四支承轴, 则有

$$\left. \begin{aligned} M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= - \left[\frac{6 \omega_1 \bar{a}_1}{l_1} + \frac{6 \omega_2 \bar{b}_2}{l_2} \right] \\ M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 &= - \left[\frac{6 \omega_2 \bar{a}_2}{l_2} + \frac{6 \omega_3 \bar{b}_3}{l_3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

表7-1 几种简单载荷的 $\frac{\omega \bar{a}}{l}$ 和 $\frac{\omega \bar{b}}{l}$ 的表达式

载 荷 类 型	$\frac{6 \omega \bar{a}}{l}$	$\frac{6 \omega \bar{b}}{l}$
<p>1. 均布载荷</p>  <p>$\omega = \frac{1}{12} q_0 l^3$ $\bar{a} = \bar{b} = \frac{l}{2}$</p>	$\frac{q_0 l^3}{4}$	$\frac{q_0 l^3}{4}$
<p>2. 集中力</p>  <p>$\omega = \frac{1}{2} Pab$ $\bar{a} = \frac{1}{3} (l + a)$ $\bar{b} = \frac{1}{3} (l + b)$</p>	$\frac{Pa}{l} (l^2 - a^2)$	$\frac{Pb}{l} (l^2 - b^2)$ 当 $a = b = \frac{l}{2}$ 时 $\frac{3}{8} Pl^2$
<p>3. 集中力矩</p> 	$\frac{M}{l} (3a^2 - l^2)$	$\frac{M}{l} (l^2 - 3b^2)$

若该轴无外伸端，应有 $M_0 = M_3 = 0$ ，上式仅是关于 M_1 、 M_2 的联立方程组，求解是很方便的。

二、 ξ 支承高度不在同一轴线上的多支点轴

这种轴在安装后会在轴的横截面内引起不可忽视的初应力，为此必须在式 (7-5) 中将这一影响计入。

图 7-5 为一支承不在同一高度上的轴 (示意图)。 δ_i 为第 i 支承自某一任选基准线起算的高度，在计算 k 支承处的偏转角时，除去因外载荷和支承弯矩产生的偏转角外，还应计入因支承高度差引起的偏转角：

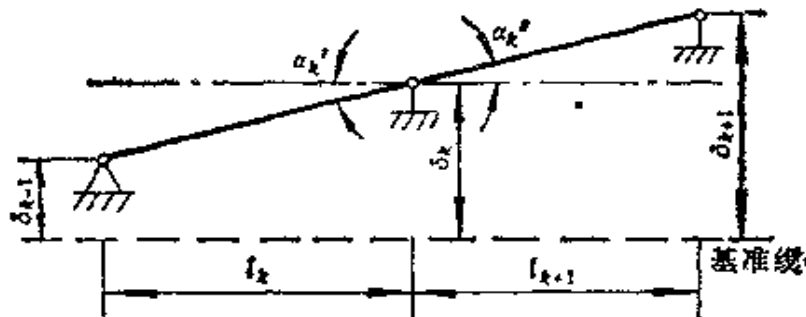


图7-5 支承高度不在同一轴线上的多支承轴

$$\alpha_k^s = \frac{\delta_k - \delta_{k-1}}{l_k}, \quad \alpha_k^r = \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{l_{k+1}}$$

即

$$\theta_k^s = -\frac{1}{EI_k} \left[-\frac{\omega_k \bar{a}_k}{l_k} + \frac{1}{6} M_{k-1} l_k + \frac{1}{3} M_k l_k \right] + \alpha_k^s$$

$$\theta_k^r = -\frac{1}{EI_{k+1}} \left[-\frac{\omega_{k+1} \bar{b}_{k+1}}{l_{k+1}} + \frac{1}{6} M_{k+1} l_{k+1} + \frac{1}{3} M_k l_{k+1} \right] + \alpha_k^r$$

这样式 (7-5) 变为：

$$\begin{aligned}
 & M_{k-1} \left(\frac{l_k}{EI_k} \right) + 2M_k \left(\frac{l_k}{EI_k} + \frac{l_{k+1}}{EI_{k+1}} \right) + M_{k+1} \left(\frac{l_{k+1}}{EI_{k+1}} \right) \\
 &= - \left(\frac{6 \omega_k \bar{a}_k}{l_k EI_k} + \frac{6 \omega_{k+1} \bar{b}_{k+1}}{l_{k+1} EI_{k+1}} \right) + 6 \left(\frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{l_{k+1}} - \frac{\delta_k - \delta_{k-1}}{l_k} \right)
 \end{aligned} \quad (7-8)$$

上述各式中 EI_k 、 EI_{k+1} 分别表示第 k 跨、 $k+1$ 跨轴的抗弯刚度。式 (7-8) 适用于等截面和非等截面轴。

应用式 (7-5) 及式 (7-8) 求得未知弯矩后，可按图 7-3 很容易地求得各支承反力。

例题7-1 图 7-6 为三支点转轴的計算簡圖，試求中間支點處的彎矩及反力。

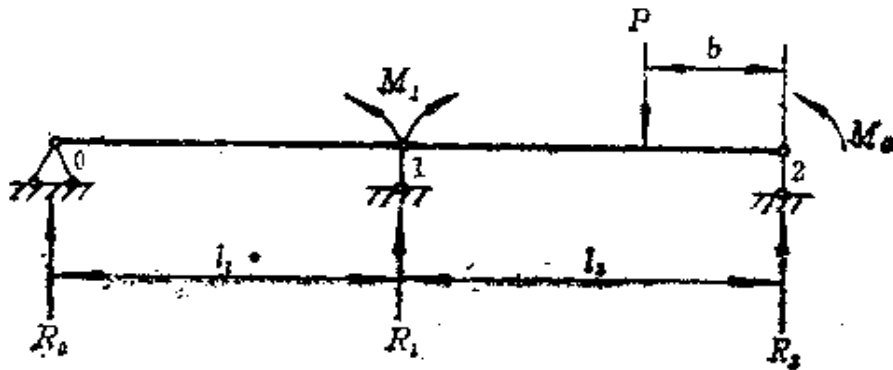


图7-6 三支点轴计算简图

解 根据式 (7-6) 并考虑到第一跨外载荷产生的弯矩图的面积为零，故得：

$$M_1 = - \left[\frac{6 \omega_2 \bar{b}_2}{l_2} + l_2 M_0 \right] / [2 (l_1 + l_2)]$$

上式中方括号内的 $l_2 M_0$ 项是由于轴的右外伸端作用一弯矩 M_0 所致。

由表 7-1 知 $\frac{6 \omega_2 \bar{b}_2}{l_2} = \frac{Pb(l_2^2 - b^2)}{l_2^2}$ ，代入上式得：

$$M_1 = - \frac{Pb(l_2^2 - b^2) + l_2^2 M_0}{2 l_2 (l_1 + l_2)}$$

图 7-6 的系统可分解为图 7-7 所示的两个简支梁。由第一简支梁得：

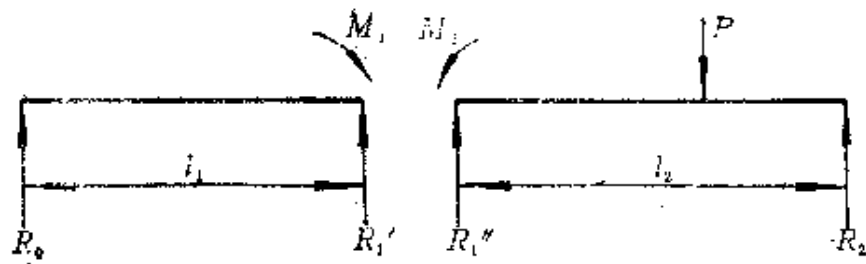


图7-7 三支点轴的分解简支梁

$$R_1' = \frac{M_1}{l_1}$$

由第二简支梁得：

$$R_1'' = \frac{M_1 + M_a + Pb}{l_2}$$

$$\begin{aligned} \therefore R_1 &= R_1' + R_1'' = \frac{M_1}{l_1} + \frac{M_1 + M_a + Pb}{l_2} \\ &= \frac{Pb(l_2^2 + 2l_1l_2 - b^2)}{2l_1l_2^2} + \frac{M_a[(l_1 + l_2)^2 - l_1^2]}{2l_1l_2^2} \end{aligned}$$

第八章 轴的刚度计算

轴的刚度分为弯曲刚度和扭转刚度两种。前者以挠度或偏转角来度量；后者以扭转角来度量。一般说，刚度计算的目的是计算轴受载时的变形量，看其是否小于允许值。轴的许用变形量根据各类机器使用的实践经验确定。一般机械制造业中，轴的许用挠度 $[y]$ 和许用偏转角 $[\theta]$ 见表8-1。

第一节 轴的弯曲变形计算

轴的横向变形通常是由弯矩与切力共同作用的结果。但切力引起的横向变形只对那些短的或空心轴才予以考虑。因此，下面仅讨论由弯矩引起的弯曲变形——挠度与偏转角。

轴的弯曲变形可用求解弹性曲线的微分方程来确定。

$$\text{即} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (8-1)$$

式中 M ——弯矩；

I ——轴截面的惯性矩；

E ——弹性模量；

y ——挠度；

x ——从轴的一端到所求挠度所在截面的距离。

式(8-1)可采用直接积分法求解。但此法当轴上作用较多载荷且轴具有截面变化时，是非常繁琐的，因为不同截面需列出不同的弯矩方程，积分后又出现两个积分常数。所以，目前常用其它方法来计算轴的挠度和偏转角。

求轴的弯曲变形常见的有：当量直径法、面积矩法、阶梯函数积分法、图解积分法、能量法以及数值积分法等。当轴径相差不大或只需作近似计算时，可用当量直径法，把轴当作直径为 d_e 。

的等直径轴

$$d_m = \frac{\sum d_i l_i}{\sum l_i} \quad (8-2)$$

式中 d_i ——阶梯轴第 i 段的直径，
 l_i ——阶梯轴第 i 段的长度。

但此法计算误差可达20%，当确需计算轴的变形时不宜采用。当需要求轴上多个部位的变形量或整根轴的挠度曲线时，采用图解积分法比较方便，但作图的误差是不可避免的。本节主要介绍面积矩法 (THE AREA MOMENT)、能量法以及用电子计算机求解的数值积分法。

一、面积矩法

用面积矩法确定因弯曲而引起的挠度是基于下述原理：弹性曲线上任意点 A 到弹性曲线上任意点 B 的切线的垂直距离等于 AB 间 M/EI 图上的面积相对于 A 点之矩 (见图8-1)。

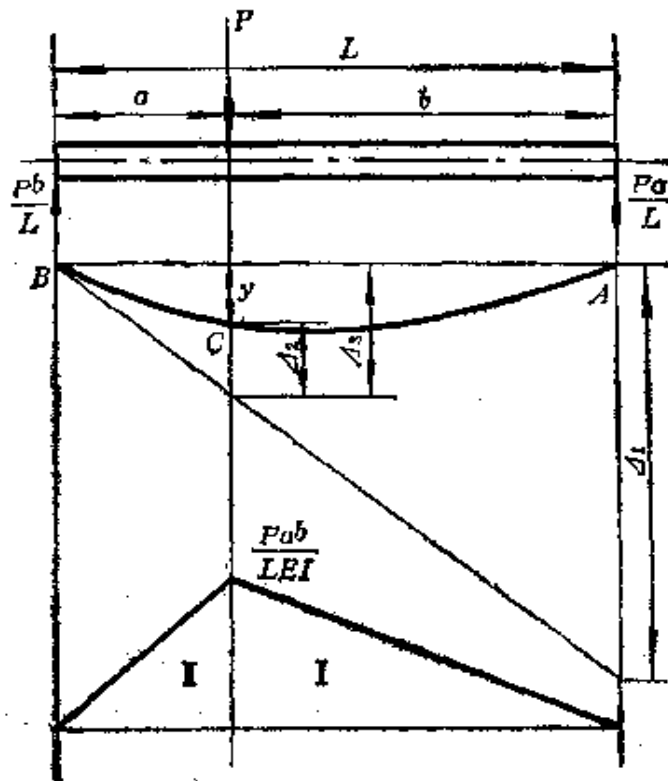


图8-1 简支梁挠度计算图

$$\Delta = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots \quad (8-3)$$

式中 F_1 —— M/EI 图上 I 的面积；

x_1 ——面积 I 的重心距 A 点的横坐标值；

F_2 —— M/EI 图上 II 的面积；

x_2 ——面积 II 的重心距 A 点的横坐标值。

若需求图 8-1 所示简支梁在集中力 P 处的挠度，计算顺序如下：

(1) 草拟一梁的弹性（挠度）曲线；

(2) 作左支点挠度曲线上 B 点的切线 BB' ；

(3) 作 M/EI 图；

(4) 确定挠度曲线上 A 点距切线 BB' 的垂直距离 Δ_1 ， Δ_1 应等于 M/EI 图上面积 I、II 对 A 点之矩之和，即

$$\Delta_1 = \left(\frac{Pb^2a}{2EI} \right) \frac{2b}{3} + \left(\frac{Pba^2}{2EI} \right) \left(b + \frac{a}{3} \right)$$

(5) 确定 Δ_2 ， Δ_2 应等于 M/EI 图上面积 II 对过 C 点的垂直轴之矩，即

$$\Delta_2 = F_2 \frac{a}{3} = \frac{Pba^2}{2EI} \frac{a}{3} = \frac{Pba^3}{6EI}$$

(6) 确定 Δ_3 ， Δ_3 可按相似三角形的比例关系求得

$$\Delta_3 = \frac{a\Delta_1}{l} = \frac{Pb^3a^2}{3l^2EI} + \frac{Pb^2a^3}{2l^2EI} + \frac{Pba^4}{6l^2EI}$$

(7) 确定集中力 P 处之挠度 y

$$\begin{aligned} y = \Delta_3 - \Delta_2 &= \frac{Pb^3a^2}{3l^2EI} + \frac{Pb^2a^3}{2l^2EI} + \frac{Pba^4}{6l^2EI} - \frac{Pba^3}{6EI} \\ &= \frac{Pba^2(2b^2 + 3ba + a^2)}{6l^2EI} - \frac{Pba^3}{6lEI} \end{aligned}$$

须注意的是图 8-1 中 M/EI 图的面积均为正，若 M/EI 图中任意面积为负，则这一部分面积在取矩时应为负。

例题 8-1 图 8-2 所示为一支承在滚动轴承上的转轴已知齿轮（直齿）作用在轴上的载荷为 800 N，皮带轮作用在轴上的载荷为 300 N，假定两载荷作用于同一平面内。若限定齿轮处的挠

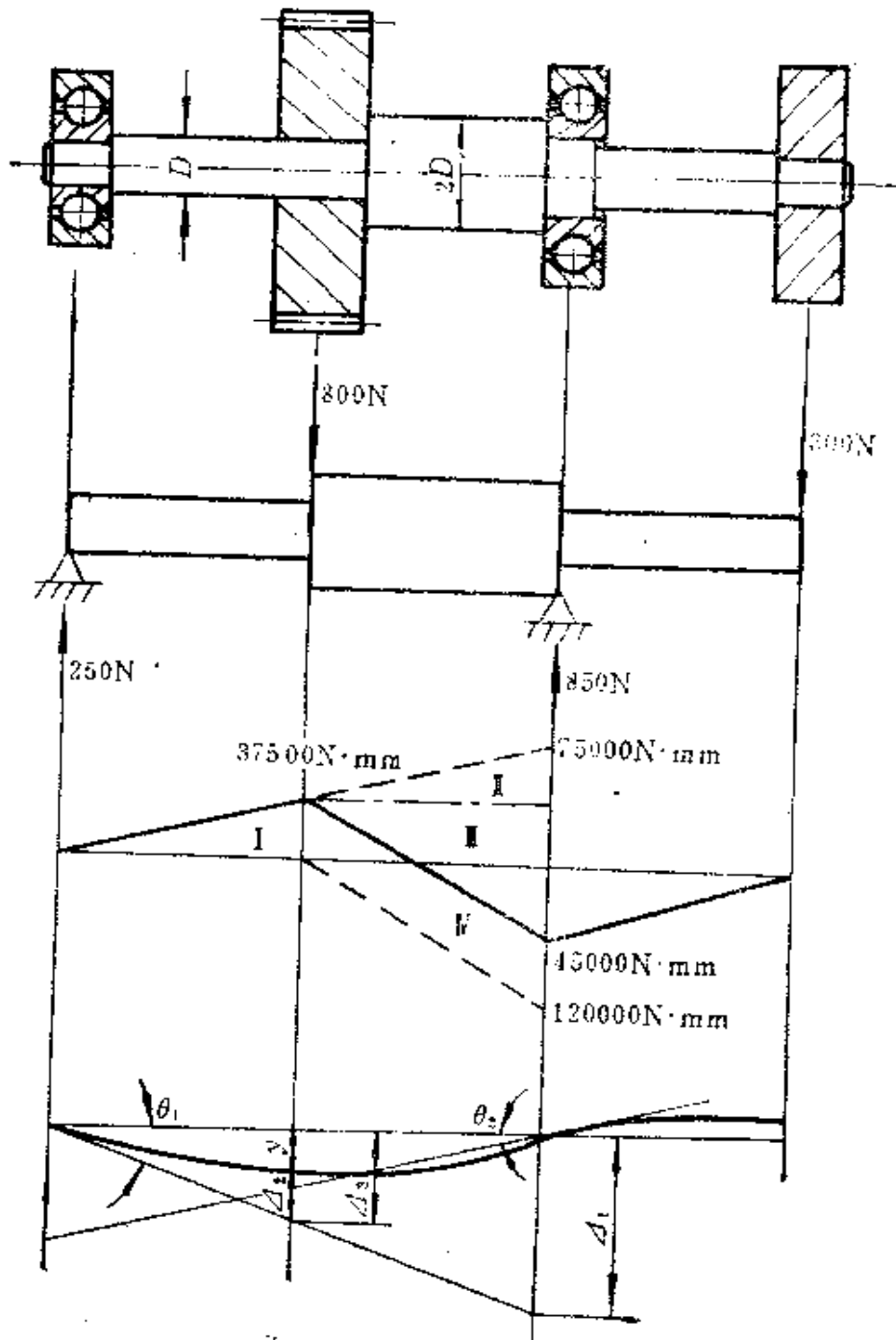


图8-2 转轴挠度计算图

度不超过 0.025mm，轴承处的偏转角不大于 1°，试求轴的直径 D 。

解 先求齿轮处的挠度 y 。为取矩方便计，将齿轮中点至右轴承间的弯矩图用虚线所示的来代替。

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{37500 \times 150}{2EI} \times (50 + 150) + \frac{37500 \times 150 \times 150}{2 \times 16EI \times 3^2} \\ &+ \frac{37500 \times 150 \times 75}{16EI} - \frac{120000 \times 150 \times 150}{2 \times 16EI \times 3} \\ &= \frac{5.6953 \times 10^8}{EI}\end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \frac{\Delta_1}{2} = \frac{2.8476 \times 10^8}{EI}$$

$$\Delta_2 = \frac{37500 \times 150}{2EI} \times \frac{150}{3} = \frac{1.406 \times 10^8}{EI}$$

$$y = \Delta_3 - \Delta_2 = \frac{1.4416 \times 10^8}{EI}$$

根据题目给定的限制条件

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\Delta_1}{300} = \frac{5.6953 \times 10^8}{300EI} = \operatorname{tg} 1^\circ = 0.017455 \quad (\text{a})$$

$$y = \frac{1.4416 \times 10^8}{EI} = 0.025 \quad (\text{b})$$

$$\begin{aligned}\text{由 (a) 式解出 } I &= \frac{\pi D^4}{64} = \frac{5.6953 \times 10^8}{2 \times 10^6 \times 0.017455 \times 300} \\ &= 543.8 \text{mm}^4\end{aligned}$$

$$\text{故 } D = \sqrt[4]{\frac{64 \times 543.8}{\pi}} = 10.259 \text{mm}$$

$$2D = 20.518 \text{mm}$$

$$\text{由 (b) 式解出 } I = \frac{1.4416 \times 10^8}{0.025 \times 2 \times 10^6} = 28832 \text{mm}^4$$

$$\text{故 } D = \sqrt[4]{\frac{64 \times 28832}{\pi}} = 27.68 \text{mm}$$

$$2D = 55.36 \text{mm}$$

右支承处轴的转角 θ_2 也可用同样方法解出, 并求得相应的直径 D 。因偏转角所需的轴颈较小, 故要满足 $\theta \leq 1^\circ$, 挠度 $y \leq 0.025\text{mm}$, 轴颈 D 应取为 27.68mm 。

若各载荷作用在不同的平面内, 可将其投影在两相互垂直的平面内, 分别求出两个平面内的挠度值, 然后矢量相加即得总的挠度值。

二、能量法

用能量法计算轴的弯曲变形时, 需先绘出轴的外形图和弯矩 M 图(见图8-3 a、b), 如需计算 A 处的挠度 y_A , 则在 A 处加一单位力 $F_i = 1$ (与变形方向相同), 并绘出其弯矩 M' 图(见图8-3 c)。如需计算 B 处的偏转角 θ_B , 则在 B 处加一单位力矩 $M_i = 1$ (与变形方向相同), 并绘出其弯矩(M')图(见图8-3 d)。然后按 M 、 M' 及截面的连续性把轴分为若干段(见图8-3 c、d), 则变形量(挠度 y 或偏转角 θ)可用下式算出

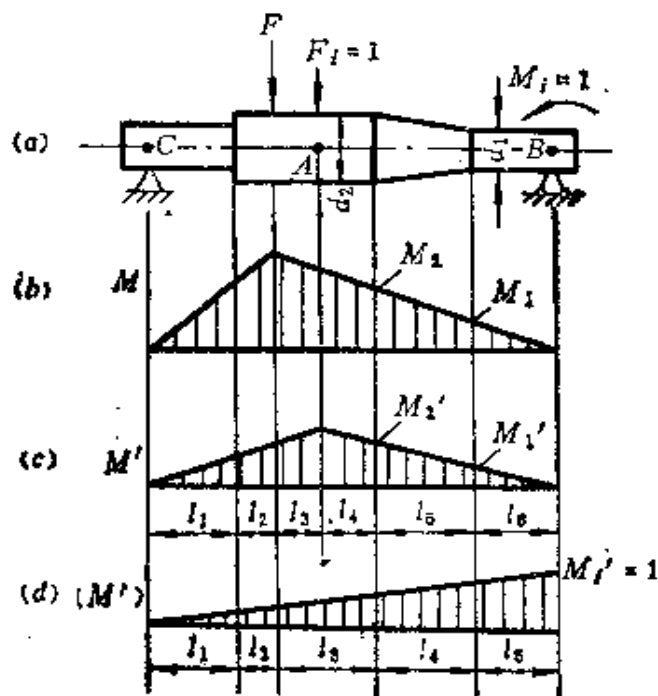


图8-3 能量法计算弯矩变形图

$$y \text{ (或 } \theta) = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{MM'}{EI} dl \quad (8-4)$$

式中 M ——轴所受的弯矩 ($N \cdot mm$);
 M_i ——单位力或单位力矩在轴上引起的弯矩 ($N \cdot mm$);
 E ——材料弹性模量, 对钢 $E = 2 \times 10^5 (N/mm^2)$;
 I ——截面惯性矩 (mm^4);
 l_i ——各轴段的长度 (mm)。

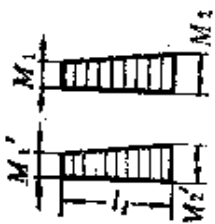
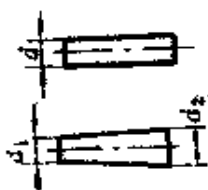
各种轴段的积分值 $\int_0^{l_i} \frac{MM'}{EI} dl$ 列于表8-2。

表8-1 轴的许用挠度 $[y]$ 和许用偏转角 $[\theta]$


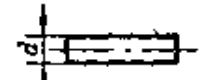
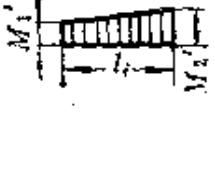
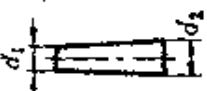
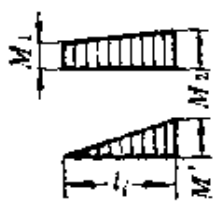


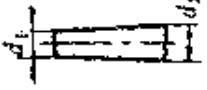

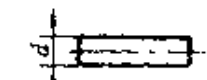

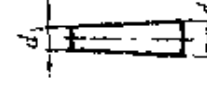
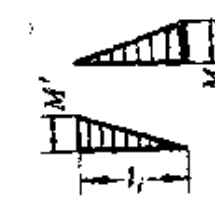
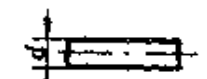
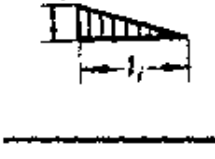
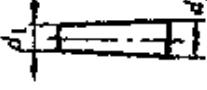
变 形	许用挠度 $[y]$	变 形	许用偏转角 $[\theta]$ rad	
挠 度 y	一般用途 的轴	偏 转 角 θ	滑动轴承处	≤ 0.001
	刚度要求 较高的轴		向心球轴承 处	≤ 0.005
	感应电动 机轴		向心球面轴 承处	≤ 0.05
	安装齿轮 的轴		圆柱滚子轴 承处	≤ 0.0025
	安装蜗轮 的轴		圆锥滚子轴 承处	≤ 0.0016
			安装齿轮处	$\leq 0.001 \sim 0.002$

表中 L — 支承间跨距 δ — 电动机定子与转子间的气隙 m_n — 齿轮法面模数
 m — 蜗轮端面模数

表8-2 积分值 $\int_0^{l_i} \frac{MM'}{EI} dl$

变矩图	轴的形状	$\int_0^{l_i} \frac{MM'}{EI} dl$
		$\frac{l_1}{0.294Ed^4} [M_1(2M_1' + M_1') + M_2(2M_2' + M_2')]$
		$\frac{l_2}{0.294Ed^2 d_2^2} [2d_2^3 M_1 M_1' + d_1 d_2 (M_1 M_2' + M_1' M_2) + 2d_2^3 M_2 M_2']$

(续)

变矩图	轴段形状	$\int_0^{l_i} \frac{MM'}{EI} dl$
		$\frac{l_i}{0.098Ed^4} (M_1^2 + M_2^2) M$
		$\frac{l_i}{0.294Ed_1^3d_2^3} M(2d_2^3M_1 + d_1d_2(M_1^2 + M_2^2) + 2d_1^3M_2)$
		$\frac{l_i}{0.294Ed^4} M'(M_1 + 2M_2)$
		$\frac{l_i}{0.294Ed_1^2d_2^3} (d_2M_1M' + 2d_1M_2M')$
		$\frac{l_i}{0.147Ed^4} MM'$
		$\frac{l_i}{0.147Ed_1d_2^3} MM'$
		$\frac{l_i}{0.294Ed^4} MM'$
		$\frac{l_i}{0.294Ed_1^3d_2^3} MM'$

注：1. 如 M 和 M' 的方向相反，则其中一个取“+”，另一个取“-”。

2. 如轴段为空心圆柱形，则表中的 d^4 要用 $(d^4 - d_0^4)$ 代替。

例题8-2 图8-4(a)为一转轴结构简图，图(b)为其受力简图(直齿轮与带轮加在轴上的载荷处于一个平面内)，轴的材料为45钢， $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ，求齿轮中央截面处的挠度。

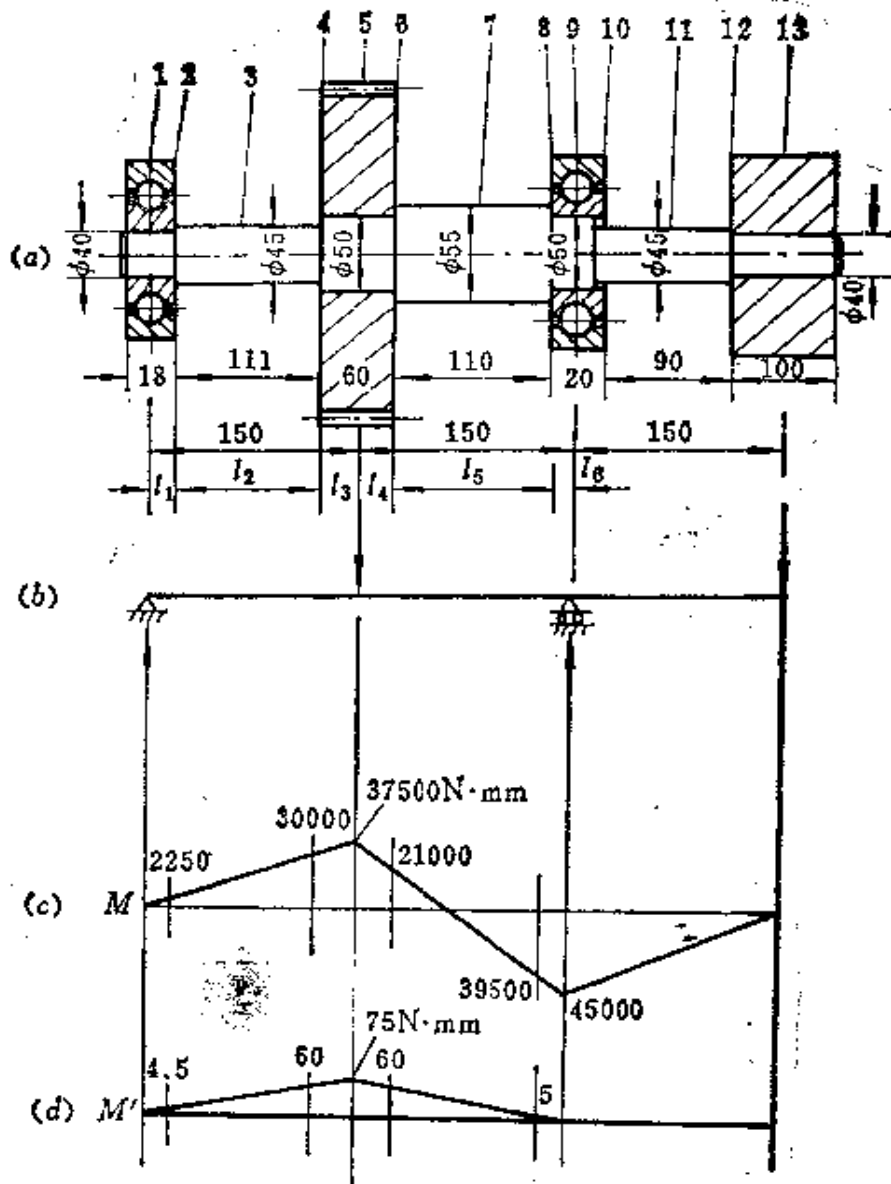


图8-4 转轴结构、受力及弯矩图

解 用能量法计算

- (1) 绘轴的弯矩 M (N·mm) 图,
- (2) 在齿轮中央截面加单位力 $F_i = 1N$, 绘弯矩 M' 图,
- (3) 计算齿轮中央截面轴的挠度 y

各轴段的积分值 $\Delta_i = \int_0^{l_i} \frac{MM'}{EI} dl$ 计算如下,

$$\Delta_1 = \frac{9}{0.147 \times 2.15 \times 10^5 \times 40^4} \times 2250 \times 4.5$$

$$= 0.1126 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

$$\Delta_2 = \frac{111}{0.294 \times 2.15 \times 10^5 \times 45^4} [2250(2 \times 4.5 + 60)$$

$$+ 30000(2 \times 60 + 4.5)] = 166.6 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

$$\Delta_3 = \frac{30}{0.294 \times 2.15 \times 10^5 \times 50^4} [30000(2 \times 60 + 75)$$

$$+ 37500(2 \times 75 + 60)] = 104.2 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

$$\Delta_4 = \frac{30}{0.294 \times 2.15 \times 10^5 \times 50^4} [21000(2 \times 60 + 75)$$

$$+ 37500(2 \times 75 + 60)] = 90.9 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

$$\Delta_5 = \frac{110}{0.294 \times 2.15 \times 10^5 \times 55^4} [21000(2 \times 60 + 5)$$

$$+ (-39500) \times (2 \times 5 + 60)] = -2.66 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

$$\Delta_6 = \frac{10}{0.294 \times 2.15 \times 10^5 \times 50^4} \times 5 \times [-45000 + 2$$

$$\times (-39500)] = -1.57 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

$$y = \sum \Delta_i = 357 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

若轴上载荷作用在不同平面内，应分别计算两相互垂直平面内的变形，然后几何合成。

三、数值积分法

由于轴在载荷作用下的变形情况，可用下列基本方程来描述：

偏转角与挠度的关系为 $\frac{dy}{dx} = \theta$

弯矩与偏转角的关系为 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$

剪力与弯矩的关系为 $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{EI} \right) = \frac{Q}{EI}$

分布载荷与切力的关系为 $\frac{d^2 Q}{dx^2} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{EI} \right) = -\frac{q}{EI}$

式中 Q ——切力，

q ——分布载荷，

其余符号意义同前。

由上述四式可知，求解变形的过程为：先由已知外载荷 q 求出各截面的切力 Q ，再求各截面的弯矩 M ，最后求出各截面的偏转角 θ 及挠度 y 。

计算时，需在电子计算机上采用数值积分法求解。为此，先要将轴分为若干轴段，并将各轴段分界面编号，称为节点号，各段长短是任意的，一般在直径变化处及集中载荷作用处分界，其余轴段则少分或不分，如图 8-5 所示的轴共分 8 个轴段、9 个节点。计算时，自左至右逐段进行。计算各节点处的切力时，只要将上一节点的切力加上上一节点的集中力即可；计算弯矩时，则将本节点的切力乘以上一节点到本节点的距离 Δx ，自左至右累加，即得本节点的弯矩 $M = \sum Q \Delta x$ ；将各节点的弯矩 M 除以相应的 EI 值取相邻两节点的 M/EI 值的平均值作为该段的 M/EI 值，乘以该段距离 Δx ，并自左至右累加，得各节点的偏转角 θ ；取相邻两节点偏转角的平均值为该段的偏转角，乘以距离 Δx 即得挠度增量，为求得实际挠度则需根据轴承所在截面（图 8-5 中为 1、8 两节点）的挠度 y 为零的假定边界条件，求出积分常数，即

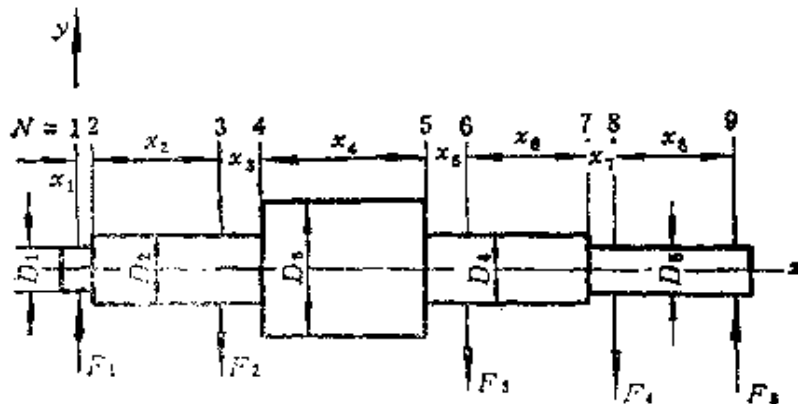


图 8-5 轴的轴段划分图

$$y_s = \sum_1^B \theta \Delta x + C' = 0$$

则

$$C' = - \sum_1^B \theta \Delta x$$

令

$$C = \left(- \frac{C'}{\sum_1^B \Delta x} \right) \Delta x$$

可得

$$y = \sum (\theta \Delta x + C)$$

式中 C ——各段积分常数；

$\theta \Delta x$ ——挠度增量。

将挠度增量与各段积分常数相加并各站累计，即得各截面的挠度值。

由于程序框图比较简单，此处从略。下面仅给出用FORTRAN语言编写成的计算源程序，读者可以比较容易地读懂它，如有条件可在微机上试算一下。

标识符说明

N 节点数

NO 到悬臂处的节点数

D(I) 各段轴的直径

E(I) 各段材料的拉压弹性模量

F(I) 各节点处的集中载荷

Q(I) 各节点处的切力

SLO(I) 各节点处的转角

U(I) 各节点间转角的平均值

DEFL(I) 各节点处的挠度

C(I) 各节点间的积分常数

DD(I) 各节点间的挠度增量

源程序

```
DIMENSION D(13),X(13),Q(20),DBM(20),
```

```
1  AI(20),Y(19),WK(19),WL(19),Z(19),DSL(20),
2  SLO(20),U(19),DO(19),C(19),DEFL(20),DEFX(20),
3  SLX(20),UX(20),F(13),BM(20)
   READ(*,*)N,NO,E
   READ(*,*)D,X,F,/
   WRITE(*,20)N,NO,E
20  FORMAT(10X,2I5,5X,E15,8)
   MO=NO-1
   M=N-1
   DO 30 I=1,N
30  WRITE(*,40)D(I),X(I),F(I)
40  FORMAT(10X,3E19.8)
   Q(1)=0.
   DO 1 J=2,N
   K=J-1
1   Q(J)=Q(K)+F(K)
   DBM(1)=0.
   DO 2 J=2,N
   K=J-1
2   DBM(J)=Q(J)*X(K)
   BM(1)=0.
   DO 3 J=2,N
   K=J-1
3   BM(J)=BM(K)+DBM(J)
   DO 4 J=1,M
4   AI(J)=3.1415926*D(J)**4/64.
   DO 5 J=1,M
5   Y(J)=E*AI(J)
   DO 6 J=1,M
6   WK(J)=BM(J)/Y(J)
```

```
DO 7 J=1,M
K=J+1
7 WL(J)=BM(K)/Y(J)
DO 8 J=1,M
8 Z(J)=0.5*(WK(J)+WL(J))
DO 9 J=1,M
9 DSL(J)=X(J)*Z(J)
SLO(1)=0.
DO 10 J=2,N
K=J-1
10 SLO(J)=SLO(K)+DSL(K)
DO 11 J=1,M
K=J+1
11 U(J)=0.5*(SLO(J)+SLO(K))
DO 12 J=1,M
12 DD(J)=U(J)*X(J)
DDS=0.
DO 13 J=1,MO
13 DDS=DDS+DD(J)
XS=0.
DO 14 J=1,MO
14 XS=XS+X(J)
CF=-DDS/XS
DO 15 J=1,M
15 C(J)=X(J)*CF
DEFL(1)=0.
DO 16 J=2,N
K=J-1
16 DEFL(J)=DEFL(K)+DD(K)+C(K)
DO 17 J=1,N
```



```

17  WRITE(*,50) F(J),Q(J),SLO(J),DEFL(J)
50  FORMAT(1X,4E19.8)
    STOP
    END

```

该程序适用于各种载荷、各种形状以及支承情况下的刚度计算。如载荷作用在不同平面内，可将其分解在两互相垂直的平面内，应用本程序分别计算变形量，而后几何合成。本程序未考虑这一点，目的在于简化程序。

应用本程序计算例题 8-2 的输入数据及计算结果如下：

输入数据

```

13,9,2.15E5
40.,45.,45.,50.,50.,55.,55.,50.,50.,45.,45.,40.,0.
9.,55.5,55.5,30.,30.,55.,55.,10.,10.,45.,45.,50.,0.
-250.,0.,0.,0.,800.,0.,0.,0.,-850.,0.,0.,0.,300.

```

计算结果（各节点的挠度值）

```

.00000000E+00
.40158750E-03
.25406840E-02
.35320830E-02
.33940840E-02
.28262860E-02
.13274710E-02
.11839650E-03
.52386890E-09
- .53395050E-04
.67940720E-03
.27457660E-02
.59541120E-02

```

用能量法手工计算出齿轮中央截面的挠度 $y = 0.357 \times 10^{-3}$ mm, 在计算机上用数值积分计算出的挠度 $y = 0.3394 \times 10^{-3}$ mm,

二者计算出的结果是非常接近的。

第二节 轴的扭转变形计算

轴的扭转变形通常用每米轴长的扭转角 φ 来表示，其许用值没有足够的根据而加以严格规定，因为对大多数轴来说，扭转刚度并无什么重要意义，规定许用值也不会给设计者带来什么约束。所以，在有必要计算轴的扭转变形时，下列数据可供参考：对于精密传动， $[\varphi] = 0.25 \sim 0.5 (^{\circ})/m$ ，对于精度要求不高的传动， $[\varphi]$ 可大于 $1 (^{\circ})/m$ 。在许多场合，实际的扭转角往往超出上述数值好几倍，小直径轴尤其如此，因为应力与直径立方成正比，而扭转角则与直径的四次方成反比。

圆形截面轴受到转矩 T ($N \cdot mm$) 作用时，扭转角的计算公式如表 8-3 所示。

表 8-3 圆轴扭转角 φ 的计算式

	实心轴	空心轴
光轴	$\varphi = 584 \frac{Tl}{Gd^4}$	$\varphi = 584 \frac{Tl}{G(d^4 - d_0^4)}$
阶梯轴	$\varphi = \frac{584}{G} \sum_{i=1}^n \frac{T_i l_i}{d_i^4}$	$\varphi = \frac{584}{G} \sum_{i=1}^n \frac{T_i l_i}{(d_i^4 - d_{0i}^4)}$

注：式中 l ——轴受转矩作用的长度 (mm)；

d ——轴的外直径 (mm)；

d_0 ——空心轴的内直径 (mm)；

T_i 、 l_i 、 d_i 、 d_{0i} ——分别代表阶梯轴第 i 段所受的转矩、长度、直径和内径 (mm)；

G ——材料的剪切模量，对钢 $G = 8.1 \times 10^4$ (N/mm^2) (MPa)。

对于被键槽削弱了的轴段，表 8-3 中各公式的右端需引入一刚度降低系数

$$k = \frac{1}{1 - \frac{dnh}{d}}$$

式中 h —— 键槽深度；

n —— 系数，一个键槽时 $n = 0.5$ ，两个键槽相隔 90° 时，
 $n = 1$ ，相隔 180° 时， $n = 1.2$ ；两个切向键相隔
 120° 时， $n = 0.4$ 。

带有矩形花键轴段的扭转角，根据试验数据，可当作具有当量直径为 $d_{\min} + 0.3(d_{\max} - d_{\min})$ 的圆形截面轴段来考虑，其中 d_{\max} 和 d_{\min} 为花键的外径和内径。

第九章 轴的振动计算

第一节 轴的临界转速

所有的轴（或转子），即使是在无载荷作用的情况下，旋转时也会产生弯曲变形。挠度（变形）的大小取决于轴的刚度、支承特性、轴及其上零件的质量、相对于旋转轴线的不平衡量及整个系统的阻尼特性。轴的临界转速是指某些特定的转速，当轴在这些转速或靠近这些转速运转时，轴的挠度很大，轴将产生剧烈的振动，甚至会造成轴承或转子的破坏；而在这些特定转速一定的范围之外工作时，轴将趋于平稳运转。对任何轴来说，都有无穷多的临界转速，如果按其数值由小到大排列为： $\omega_{c1}(n_{c1})$ 、 $\omega_{c2}(n_{c2})$ 、 $\dots\dots\omega_{ck}(n_{ck})$ ，分别称为一阶、二阶 $\dots K$ 阶临界转速。工程上具有实际意义的是头几阶临界转速，主要的是一阶和二阶。

轴在第一阶临界转速下将具有最简单的振型（弯曲成最简单的型式，第一振型），而在二阶临界转速下，将弯曲成第二种简单的型式（第二振型）。两端简支的具有两个集中质量的轴，其第一、第二振型如图9-1(a)、(b)所示。

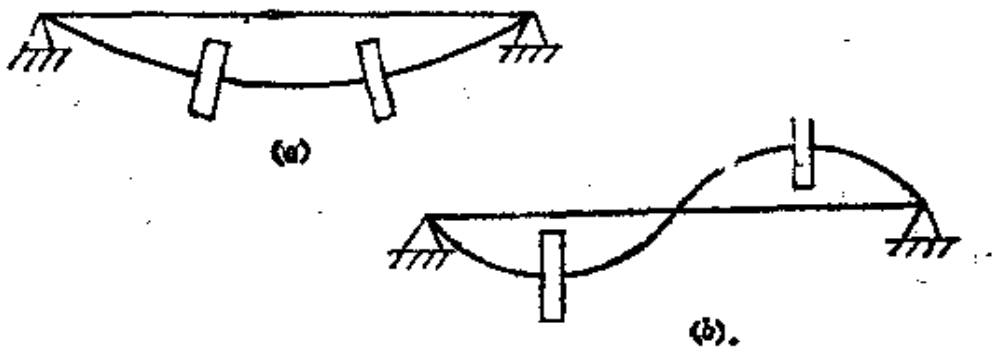


图9-1 两集中质量轴的振型

(a) 第一振型，(b) 第二振型。

轴在弯曲时，其自振频率非常接近临界转速，通常把两者看成是相等的。两者之间的差别很小，这种差别主要是由于集中质量的陀螺效应造成的。

设计轴时，为确保安全，工作转速应避开临界转速，而且应该在各阶临界转速一定的范围之外。当工作转速低于一阶临界转速的轴，工作转速 $n < 0.75n_{c1}$ ，工程上称这种轴为刚性轴；当工作转速高于一阶临界转速的轴，工作转速应选在 $1.4n_{c1} < n < 0.7n_{c2}$ 之间，通常称这种轴为挠性轴。

一、单质量轴的临界转速

图 9-2 所示为一单质量轴，设集中质量为 m ，轴的局部弹簧常数（使轴上集中质量处产生单位挠度所需的力）为 k ，略去质量 m 的少许倾斜，不计摩擦的影响，并假定质量 m 的重心相对于轴心有一偏心 e 。当轴旋转时，由弹性力与惯性力的平衡得：

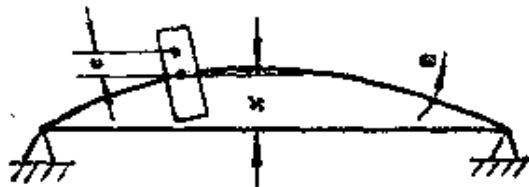


图9-2 计算单质量轴临界转速用图

$$kx = m(x + e)\omega^2$$

式中 $(x + e)\omega^2$ ——质量中心的加速度；

ω ——轴的旋转角速度。

或

$$x(k - m\omega^2) = me\omega^2$$

$$x = me\omega^2 / (k - m\omega^2) \quad (9-1)$$

由上式可知：当 $k = m\omega^2$ 时， x 变得无穷大，故得轴的临界角速度：

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9-2)$$

而 $k/m = kg/w = g/y$ (g 为重力加速度)

由此得：
$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{y}} \quad \text{rad/s} \quad (9-3)$$

上式中 y 是由 $\omega = mg$ 在集中质量处引起的轴的静挠度。

对于等截面轴，若其上无集中质量，仅存在轴本身的均布质量，临界角速度近似地等于

$$\omega_c = \sqrt{\frac{5}{4} \frac{g}{y_{\max}}} \quad (9-4)$$

式中 y_{\max} ——由轴本身的均布载荷引起的最大静挠度。

二、具有多个集中质量轴的临界转速

(一) 雷利 (Rayleigh)-里兹 (Ritz) 公式

如图 9-3 所示的轴以频率 ω 按 $x = x \sin \omega t$ 作自由的横向振动（第一振型）。根据能量守恒定律，轴弯曲时最大弹性势能应等于质量最大的动能。

$$\begin{aligned} \text{最大动能} &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n V_n^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (x_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_2 (x_2 \omega)^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n (x_n \omega)^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i \end{aligned} \quad (9-5)$$

弹性势能就是将轴弯曲成由 x_1, x_2, \dots, x_n 所决定的振型所作的功，而 m_1, m_2, \dots, m_n 产生 x_1, x_2, \dots, x_n 的挠度所作的功可用力——变形图中的三角形面积来表示（见图 9-4）。

三角形面积：

$$\Delta_i = \frac{1}{2} F_i x_i = \frac{1}{2} x_i \operatorname{tg} \alpha_i x_i = \frac{1}{2} k_i x_i^2$$

式中 k_i ——弹簧常数。

由此得：

$$\text{最大弹性势能} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \dots + \frac{1}{2} k_n x_n^2 \quad (9-6)$$

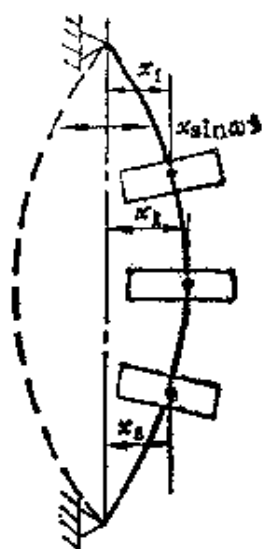


图9-3 计算多集中质量轴临界转速用图

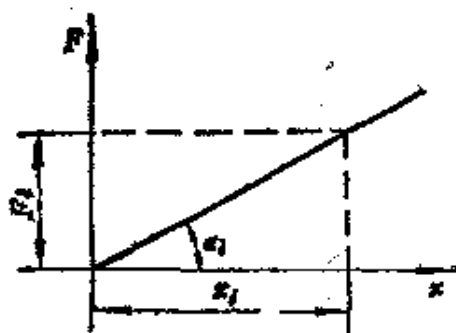


图9-4 力—变形图

令式 (9-5) 等于式 (9-6), 整理后得,

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2} \quad (9-7)$$

假定轴的振型与轴的静挠度曲线是相同的, 即设

$$x_1 = c y_1, \quad x_2 = c y_2, \quad \dots, \quad x_n = c y_n$$

并注意 $m_i = W_i / g$, $k_i y_i = W_i$ 则

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2} = \frac{g \sum_{i=1}^n W_i y_i}{\sum_{i=1}^n W_i y_i^2}$$

或

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum_{i=1}^n W_i y_i}{\sum_{i=1}^n W_i y_i^2}} \quad (9-8)$$

应该指出的是上述假设是近似的，但由此而给出的临界转速是令人满意的。

式(9-8)称为雷利-里兹公式。可用来确定图9-5所示的均布质量轴的一阶临界转速。

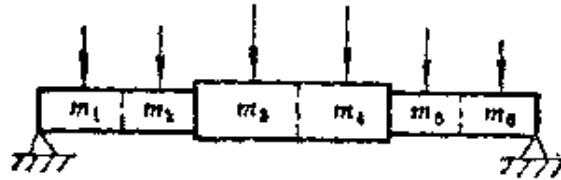


图9-5 均布质量轴

(二) 邓克萊 (Dunkerley) 公式

1. 频率方程

图9-6所示为一具有两个集中质量 m_1 、 m_2 的轴。当轴旋转时，两质量重心上分别作用着 $m_1 y_1 \omega^2$ 和 $m_2 y_2 \omega^2$ 的离心力，它们使轴在 m_1 、 m_2 处产生的挠度为 y_1 、 y_2 ，且

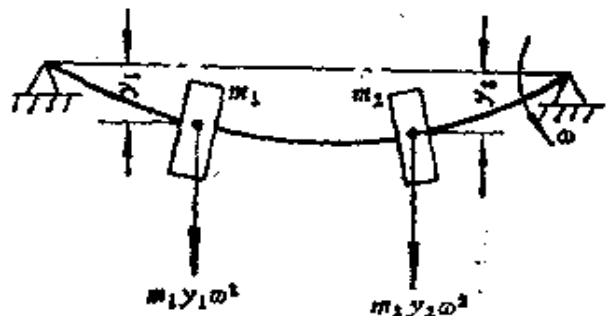


图9-6 推导频率方程用图

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} m_1 y_1 \omega^2 + a_{12} m_2 y_2 \omega^2 \\ y_2 &= a_{22} m_2 y_2 \omega^2 + a_{21} m_1 y_1 \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (9-9)$$

上式中 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{22} 、 a_{21} 为影响系数，它们的定义是

a_{11} —— m_2 处的单位力在 m_1 处引起的挠度；

a_{12} —— m_2 处的单位力在 m_1 处引起的挠度；

a_{22} —— m_2 处的单位力在 m_2 处引起的挠度；

a_{21} —— m_1 处的单位力在 m_2 处引起的挠度。

根据麦克斯韦 (Maxwell) 理论 $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ 。式 (9-9) 可写成

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{11}m_1 - 1/\omega^2)y_1 + (\alpha_{12}m_2)y_2 &= 0 \\ (\alpha_{21}m_1)y_1 + (\alpha_{22}m_2 - 1/\omega^2)y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-10)$$

就上式的两个方程解出

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha_{12}m_2}{1/\omega^2 - \alpha_{11}m_1}, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1/\omega^2 - \alpha_{22}m_2}{\alpha_{21}m_1}$$

可得到

$$\frac{\alpha_{12}m_2}{1/\omega^2 - \alpha_{11}m_1} = \frac{1/\omega^2 - \alpha_{22}m_2}{\alpha_{21}m_1}$$

或

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega^4} - (\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2) \frac{1}{\omega^2} + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})m_1m_2 \\ = 0 \dots \end{aligned} \quad (9-11)$$

上式是具有两个正根 $\frac{1}{\omega_1}$, $\frac{1}{\omega_2}$ 的双二次代数方程, 称为频率方程。用它导出邓克莱公式。

2. 邓克莱公式的推导

式 (9-11) 实际上是一个形为 $x^2 + bx + c = 0$ 的代数方程, 其两根之和等于 $-b$, 即 $x_1 + x_2 = -b$ 。将其应用于两个质量的系统, 并设其一阶、二阶临界角速度分别为 ω_{c1} 及 ω_{c2} , 则

$$(1/\omega_{c1}^2 + 1/\omega_{c2}^2) = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2$$

因为 ω_{c2} 通常总是大于 ω_{c1} , 可认为 $1/\omega_{c1}^2 \gg 1/\omega_{c2}^2$, 故得:

$$1/\omega_{c1}^2 = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2$$

又 $\alpha_{11}m_1 = \alpha_{11} \frac{W_1}{g} = y_{11}/g$ (y_{11} 是 W_1 单独作用时在 1 处引起的静挠度), 故

$$\alpha_{11}m_1 = y_{11}/g = 1/\omega_1^2 \quad (\omega_1 \text{ 为仅有 } m_1 \text{ 作用时的临界角速度})。$$

同理 $\alpha_{22}m_2 = y_{22}/g = 1/\omega_2^2$, 由此得:

$$1/\omega_{c1}^2 = 1/\omega_1^2 + 1/\omega_2^2 \quad (9-12)$$

上式即为用于两个集中质量轴的邓克莱公式。因为实际上

$$1/\omega_{c1}^2 = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 = 1/\omega_1^2 + 1/\omega_2^2$$

故应用式 (9-12) 计算出一阶临界角速度要比实际的为低。

对于多个集中质量轴的邓克莱公式为:

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \dots \quad (9-13)$$

例题9-1 试按雷利-里兹公式求图 9-7 所示齿轮轴的一阶临界转速。已知轴的直径为 50mm, 齿轮 1 重力 500N, 齿轮 2 重力 1000N。轴本身的质量不计。

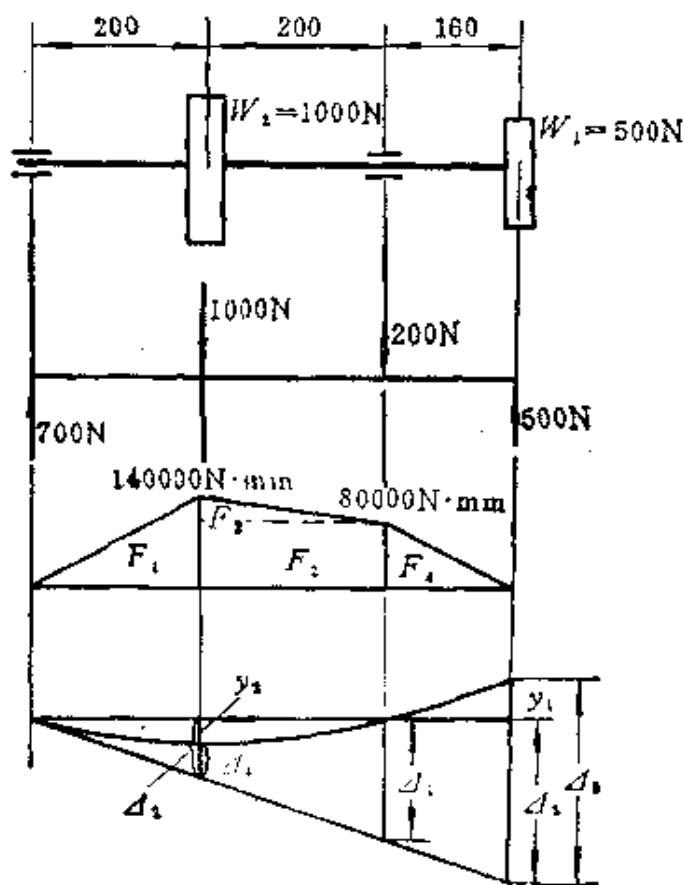


图9-7 例题9-1用图

解 雷利-里兹公式为:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum_1^n W_i y_i}{\sum_1^n W_i y_i^2}}$$

按上式计算的主要工作量是求轴的静挠度 y_i ，为此先作出轴的受力图、弯矩图及挠度曲线（草拟一弹性曲线），而后确定静挠度 y_1 、 y_2 。

采用面积矩法得：

$$\begin{aligned}\Delta_1 EI &= \frac{140000 \times 200}{2} \times \left(200 + \frac{200}{3}\right) + \frac{60000 \times 200}{2} \\ &\quad \times \frac{2 \times 200}{3} + 80000 \times 200 \times 100 \\ &= 6.133 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^3\end{aligned}$$

$$\Delta_2 EI = \Delta_1 EI \times \frac{200}{400} = 3.0665 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_3 EI = \Delta_1 EI \times \frac{560}{400} = 8.5862 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_4 EI = \frac{140000 \times 200}{2} \times \frac{200}{3} = 9.3333 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\begin{aligned}\Delta_5 EI &= \frac{140000 \times 200}{2} \times \left(360 + \frac{200}{3}\right) + 80000 \times 200 \\ &\quad \times (160 + 100) + \frac{60000 \times 200}{2} \\ &\quad \times \left(160 + \frac{2 \times 200}{3}\right) + \frac{80000 \times 160}{2} \\ &\quad \times \frac{2 \times 160}{3} = 12.57597 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 EI &= \Delta_2 EI - \Delta_4 EI = 3.0665 \times 10^9 - 9.3333 \times 10^9 \\ &= -2.13317 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 EI &= \Delta_5 EI - \Delta_3 EI = 12.5759 \times 10^9 - 8.5862 \times 10^9 \\ &= 3.98977 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^3\end{aligned}$$

$$\text{令 } I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times (50)^4}{64} = 3.068 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{所以 } y_1 = \frac{3.98977 \times 10^9}{3.068 \times 10^5 \times 2 \times 10^5} = 0.065 \text{ mm}$$

$$y_2 = \frac{2.13317 \times 10^6}{3.068 \times 10^8 \times 2 \times 10^5} = 0.03476 \text{ mm}$$

$$W_1 y_1 = 500 \times 0.065 = 32.5 \quad W_1 y_1^2 = 2.1125$$

$$W_2 y_2 = 1000 \times 0.03476 = 34.76 \quad W_2 y_2^2 = 1.20825$$

$$\sum_1^2 W_i y_i = 67.26 \quad \sum_1^2 W_i y_i^2 = 3.3207$$

所示

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum_1^2 W_i y_i}{\sum_1^2 W_i y_i^2}} = \sqrt{\frac{9800 \times 67.26}{3.3207}} = 445.5 \text{ rad/s}$$

$$\text{临界转速 } n_c = \frac{30}{\pi} \omega_c = \frac{30}{\pi} \times 445.5 = 4254.2 \text{ r/min}$$

例题9-2 试用频率方程求例题9-1所示轴的一阶及二阶临界转速。

解 用频率方程求解需先求 a_{11} 、 a_{22} 、 a_{12} 及 a_{21} ，为此需在齿轮1、齿轮2处分别作用单位载荷，并分别作出轴的受力图、弯矩图及草拟的挠度曲线（见图9-8a、b），采用面积矩法由图9-8(a)得：

$$\Delta_1 EI = \frac{160 \times 400}{2} \times \frac{400}{3} = 4.2667 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_2 EI = \Delta_1 EI \times \frac{1}{2} = 2.133 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_3 EI = \Delta_1 EI \times \frac{560}{400} = 5.97338 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_4 EI = \frac{80 \times 200}{2} \times \frac{200}{3} = 5.3333 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\begin{aligned} \Delta_5 EI &= \frac{160 \times 400}{2} \times \left(160 + \frac{400}{3}\right) + \frac{160 \times 160}{2} \\ &\quad \times \frac{2 \times 160}{3} = 10.75197 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3 \end{aligned}$$

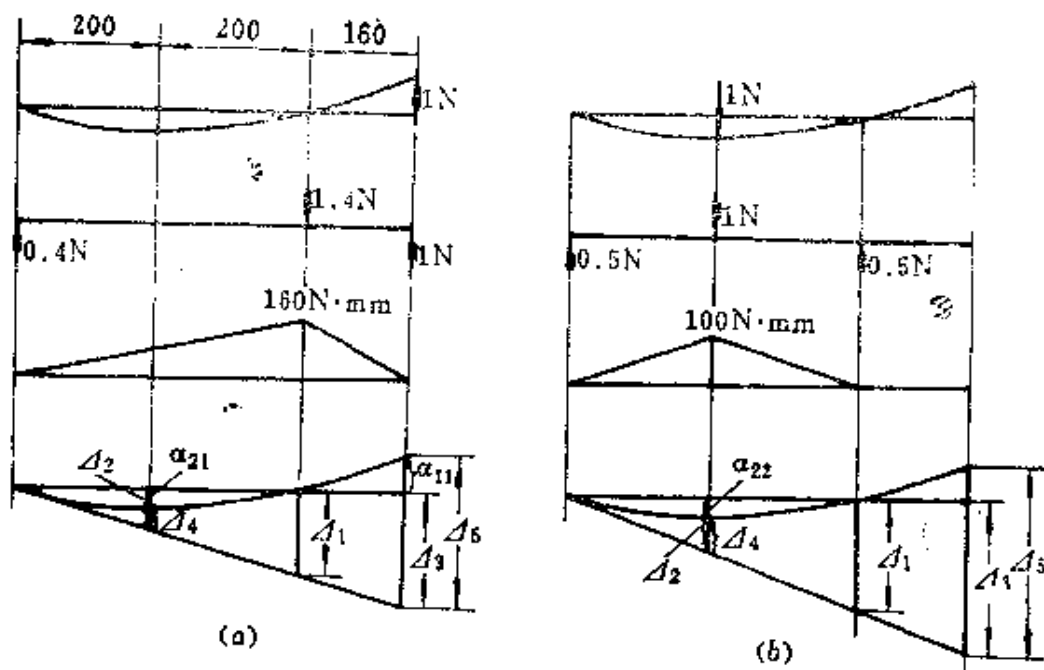


图9-8 例题9-2用图

(a) 齿轮1轴面积矩法图, (b) 齿轮2轴面积矩法图。

$$\begin{aligned} \alpha_{11}EI &= \Delta_5EI - \Delta_3EI = (10.75197 - 5.97338) \times 10^6 \\ &= 4.77859 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3 \end{aligned}$$

$$\alpha_{11} = \frac{4.77859 \times 10^6}{3.068 \times 10^5 \times 2 \times 10^5} = 7.808 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{21}EI &= \Delta_2EI - \Delta_4EI = 2.133 \times 10^6 - 5.3333 \times 10^6 \\ &= 1.5997 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3 \end{aligned}$$

$$\alpha_{21} = \frac{1.5997 \times 10^6}{3.068 \times 10^5 \times 2 \times 10^5} = 2.6144 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

由图9-8(b)得:

$$\Delta_1EI = \frac{100 \times 400}{2} \times 200 = 4 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_2EI = \Delta_1EI \times \frac{1}{2} = 2 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_3EI = \Delta_1EI \times \frac{280}{200} = 5.6 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_4EI = \frac{200 \times 100}{2} \times \frac{200}{3} = 6.6667 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\Delta_6 EI = \frac{100 \times 400}{2} \times 360 = 7.2 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12} EI &= \Delta_6 EI - \Delta_3 EI = (7.2 - 5.6) \times 10^6 \\ &= 1.6 \times 10^6 = \alpha_{21} EI = 1.5997 \times 10^6 \end{aligned}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 2.6144 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{22} EI &= \Delta_2 EI - \Delta_4 EI = 2 \times 10^6 - 6.6667 \times 10^6 \\ &= -1.3333 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^3 \end{aligned}$$

$$\alpha_{22} = \frac{1.3333 \times 10^6}{3.068 \times 10^5 \times 2 \times 10^7} = 2.1729 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

将 m_1 、 m_2 、 α_{11} 、 α_{22} 、 α_{12} 、 α_{21} 代入频率方程整理后得：

$$1/\omega^4 - 6.2 \times 10^{-5} 1/\omega^2 + 5.27436 \times 10^{-12} = 0$$

解之得 $\omega_{c1} = 439.2 \text{ rad/s}$ $n_{c1} = \frac{30}{\pi} \times 439.2 = 4194 \text{ r/min}$

$$\omega_{c2} = 991 \text{ rad/s} \quad n_{c2} = \frac{30}{\pi} \times 991 = 9463 \text{ r/min}$$

例题9-3 同前例，按邓克萊法求解

解 已知 $\alpha_{11} = 7.808 \times 10^{-5} \text{ mm}$ ， $\alpha_{22} = 2.1729 \times 10^{-5} \text{ mm}$

$$W_1 = 500 \text{ N}, W_2 = 1000 \text{ N}, g = 9800 \text{ mm/s}^2$$

则
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{W_1 \alpha_{11}}} = \sqrt{\frac{9800}{500 \times 7.808 \times 10^{-5}}} = 501 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{W_2 \alpha_{22}}} = \sqrt{\frac{9800}{1000 \times 2.1729 \times 10^{-5}}} = 671.57 \text{ rad/s}$$

所以
$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{(501)^2} + \frac{1}{(671.57)^2}$$

解之得 $\omega_c = 402 \text{ rad/s}$ $n_c = \frac{30}{\pi} \times 402 = 3834 \text{ r/min}$

由前三例可见：

按雷利-里兹法得 $\omega_c = 445.5 \text{ rad/s}$ 偏高

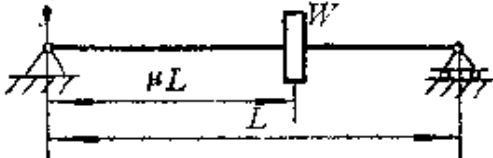
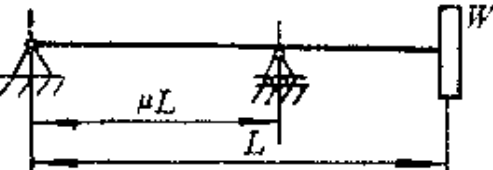
按邓克萊法得 $\omega_c = 402 \text{ rad/s}$ 偏低

按频率方程得 $\omega_c = 439.2 \text{ rad/s}$ 介于两者之间。

对于阶梯轴，由于各轴段的惯性矩 I 不同，计算挠度值 y 有些麻烦，此时可按式 (8-2) 计算出阶梯轴的当量直径 d_m ，然后用式 (9-8)、式 (9-11) 及式 (9-13) 进行计算。

对于两铰支单圆盘轴的临界转速亦可按表 9-1 计算（不计轴的自重）。

表 9-1 双铰支单圆盘轴的临界转速

支 座 形 式	$n_{cl} = 299 \sqrt{\frac{K}{W}} \text{ r/min}$
	$K = \frac{3EI_m}{\mu^2(1-\mu)^2L^3}$
	$K = \frac{3EI_m}{(1-\mu)^2L^3}$

注： W ——圆盘重 N ； I_m ——当量直径的惯性矩。

本节仅介绍了临界转速的一般概念及一些简单支承的简单计算方法，读者若进一步了解可参阅机械工程手册第 21 篇。

三、弹性支承转轴的临界转速

如果转轴是支承在弹性支承上（如油膜轴承），如图 9-9 所示。假定支承的弹簧常数为 k ，弹性支承对转轴的临界转速将起怎样的影响？

已知当支承完全刚性时，

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{y_s}}$$

式中 y_s —— W 处的静挠度。当支承是弹性时，由于支承的弹性位移使 W 处的挠度增加，由原来的 y_s 增加为 $y_s + y_r$ ，
 y_r ——由于支座弹性位移在 W 处引起的挠度增量。

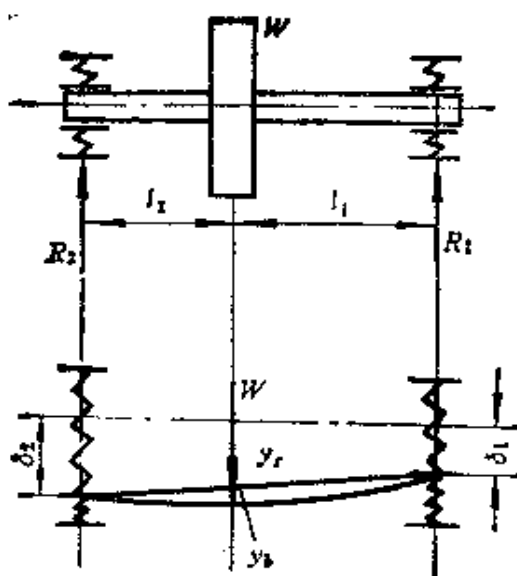


图9-9 弹性支承的转轴

支座的弹性位移 $\delta_1 = R_1/k$, $\delta_2 = R_2/k$ (R_1, R_2 为支座反力), 根据比例关系可知挠度增量 $y_r = \delta_1 + (\delta_2 - \delta_1) \frac{l_1}{l_1 + l_2}$, 故弹性支承转轴的临界转速应为:

$$\left. \begin{aligned} \omega_c &= \sqrt{g/(y_s + y_r)} \\ n_c &= \frac{30}{\pi} \omega_c \end{aligned} \right\} \quad (9-14)$$

由上式可见, 弹性支座将使转轴的临界转速下降。若设图9-9中的 $W = 1360\text{N}$, $l_1 = 508\text{mm}$, $l_2 = 254\text{mm}$, $k = 44650\text{N/mm}$, 可求得 $R_1 = 450\text{N}$, $R_2 = 910\text{N}$, $\delta_1 = 0.01\text{mm}$, $\delta_2 = 0.02\text{mm}$, $y_s = 0.04572\text{mm}$, $y_r = 0.017\text{mm}$ 。

$$\text{对于刚性支承} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{g}{y_s}} = \sqrt{\frac{9800}{0.04572}} = 463 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} \text{对于弹性支承} \quad \omega_c &= \sqrt{\frac{g}{y_s + y_r}} = \sqrt{\frac{9800}{0.04572 + 0.017}} \\ &= 395 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\text{相对误差} = \left(\frac{463 - 395}{463} \right) 100\% = 15\%$$

这说明弹性支座对转轴临界转速有不可忽视的影响。

第二节 轴的扭转振动

一、单圆盘轴的扭转振动

图9-10所示的单圆盘轴，其扭转振动的微分方程式是

$$I\ddot{\varphi} = -k\varphi \quad (9-15)$$

式中 I —— 圆盘的转动惯量；

φ —— 扭转角；

k —— 轴的扭转弹簧常数，且 $k =$

$$\frac{\pi d^4 G}{32 l} \quad (l \text{ 为轴长, } d \text{ 为轴的直径})。$$

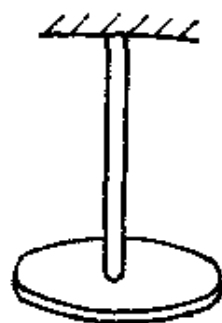


图9-10 单圆盘轴

解式 (9-15) 得扭振的自振频率为，

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad (9-16)$$

若为阶梯轴，可算出一个等直径的当量轴。今有一根由直径 d_1 、 d_2 及轴段长 l_1 、 l_2 组成的阶梯轴。在转矩 T 作用下产生的扭转角为：

$$\varphi = \frac{32 T l_1}{\pi d_1^4 G} + \frac{32 T l_2}{\pi d_2^4 G} = \frac{32 T}{\pi d_1^4 G} \left(l_1 + l_2 \frac{d_1^4}{d_2^4} \right)$$

或
$$\varphi = \frac{32 T}{\pi d_1^4 G} L$$

式中
$$L = \left(l_1 + l_2 \frac{d_1^4}{d_2^4} \right)。$$

可见该阶梯轴其扭转角和一根长为 L 、直径为 d_1 的等直径轴相同，后者称为当量轴，其弹簧常数也和原阶梯轴相同。

对于多阶梯轴，其中任一长为 l_i ，直径为 d_i 的轴段均可用直径为 d 的轴段来代替，该轴段长为：

$$l = l_i \frac{d^4}{d_i^4} \quad (9-17)$$

二、双圆盘轴的扭转振动

图9-11所示的双圆盘轴在扭振时，若以节截面（扭振时不动的那个截面，图中以虚线表示）为准，可分别列出圆盘1、2的运动微分方程式为：

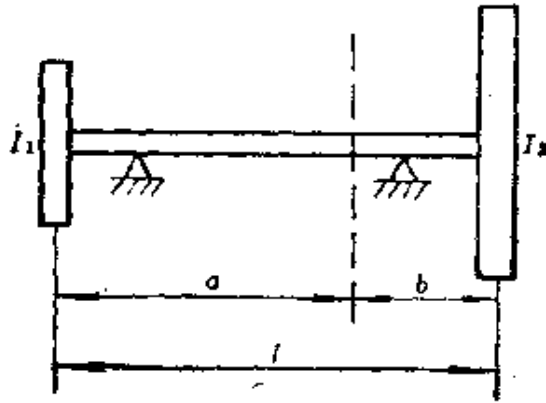


图9-11 双圆盘轴

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - k_2(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-18)$$

式中 I_1 、 I_2 、 φ_1 、 φ_2 ——分别为圆盘1及2的转动惯量及扭转角；

k_1 、 k_2 ——节截面左右两边轴的弹簧常数。

对左右两段轴分别应用式(9-16)得：

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{I_1}{I_2} \quad (9-19)$$

由于弹簧常数与轴长 l 成反比，由上式得：

$$\frac{a}{b} = \frac{I_2}{I_1}$$

由此得
$$a = \frac{lI_2}{I_1 + I_2}, \quad b = \frac{lI_1}{I_1 + I_2} \quad (9-20)$$

因左右两圆盘的自振频率相等，且 $k_1 = k_2 = k$ ，故得：

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}} \quad (9-21)$$

上式即为双圆盘轴扭振时自振频率的计算式。

三、多圆盘当量系统的自振频率

一般的多圆盘当量系统如图9-12(a)所示, 图中 $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ 为各圆盘的转动惯量, $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ 为各轴段的扭转弹簧常数, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ 为各圆盘的扭转角。根据图9-12(b)所示的受力情况, 可列出各圆盘的运动微分方程式:

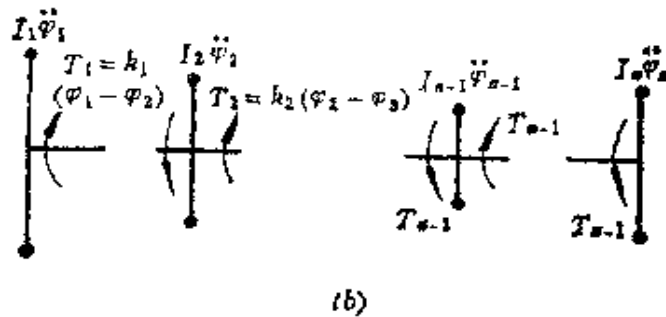
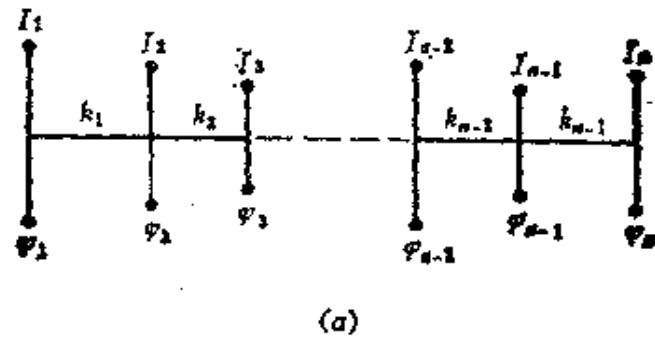


图9-12 多圆盘轴当量系统

(a) 多圆盘当量系统, (b) 多圆盘当量系统受力图。

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ I_n \ddot{\varphi}_n - k_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-22)$$

设方程组 (9-22) 的解为

$$\varphi_i = \theta_i \sin \omega t \quad i = 1, 2, \dots, n$$

代入原方程式, 并假设第一个圆盘的振幅 $\theta_1 = 1$, 经整理后, 得到计算各圆盘相对振幅和各轴段弹性力矩的递推公式

$$\begin{aligned}
 \theta_1 = 1 &\rightarrow T_1 = I_1 \omega^2 \theta_1 \\
 &\quad \swarrow \\
 \theta_2 = \theta_1 - \frac{T_1}{k_1} &\rightarrow T_2 = I_2 \omega^2 \theta_2 + T_1 \\
 &\quad \swarrow \\
 \theta_n = \theta_{n-1} - \frac{T_{n-1}}{k_{n-1}} &\rightarrow T_n = I_n \omega^2 \theta_n + T_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{9-23}$$

$$\sum_{i=1}^n I_i \omega^2 \theta_i = 0$$

上式可用试算法求轴系的自振频率及相应的振型。计算时先假定一个试算频率 ω ，然后按式(9-23)箭头所示方向和次序计算出 T_n 。当 $T_n = 0$ 时， ω 即为轴系的一个自振频率，若 $T_n \neq 0$ ，表示假设值 ω 不正确而得到一个剩余力矩，需假设一个新的 ω 值重新计算，直到 $T_n = 0$ 为止。

从式(9-23)可以看出，计算的实质就是依次计算 $I_1 \omega^2 \theta_1$ 、 $I_2 \omega^2 \theta_2 \dots I_n \omega^2 \theta_n$ ，最后计算 $\sum_{i=1}^n T_i \omega^2 \theta_i$ 看该合式是否等于零。

当轴上圆盘数目较少时，可用列表法进行计算，否则应编制程序在电子计算机上计算。

计算时要使 $T_n = 0$ 往往是不可能或者是不经济的，因此只要 $|T_n/T_{n-1}| < 0.05$ 即认为假定的 ω 为轴系的自振频率。

第十章 计算弯曲振动临界 转速的普罗尔法

第一节 普罗尔法的基本原理

前已述及，求转轴的临界转速可认为就是求转轴弯曲振动的自振频率。由材料力学知轴作弯曲振动时（相当于弯曲变形）任一截面都有四个参数：挠度 y 、偏转角 θ 、切力 Q 及弯矩 M 。轴弯曲振动时的挠度曲线相当于弯曲自由振动（按某阶自振频率）时的振型曲线，而振型曲线必须满足轴的边界条件。图9-1为双圆盘转轴的一阶及二阶振型曲线，但不论那一阶振型，在轴的两端（铰支）其边界条件均为： $y=0$ ， $M=0$ ， $\theta \neq 0$ ， $Q \neq 0$ 。故轴的弯曲自振频率也与轴的两端边界条件有关。

如果给定图9-1左支点（铰支）的一组参数： y_0 、 θ_0 、 Q_0 、 M_0 ，由于支点是铰支的，显然 $y_0=0$ ， $M_0=0$ （满足左端边界条件）。若假定一转速 n ，则 $\omega = \frac{\pi n}{30}$ ，轴转动时在集中质量 m 处要产生一离心载荷 $m\omega^2 y$ ，根据力与力矩的平衡关系可逐一求出左支点以右各截面上的一组参数： y_i 、 θ_i 、 Q_i 、 M_i ，依次递推便可求得右支点上的一组参数： y_j 、 θ_j 、 Q_j 、 M_j ，因右支点也是铰支的，亦应有 $y_j=0$ ， $M_j=0$ 。若递推的结果使 $y_j \neq 0$ ， $M_j \neq 0$ ，说明假定的转速 n 不是临界转速，应重新假定一个转速 n' 依次递推计算，直到满足右支点的边界条件为止；此时的转速 n' 即临界转速。这就是普罗尔（Porhl）法计算临界转速的基本原理。

一、递推公式的建立

普罗尔法计算临界转速的关键是建立一个普遍适用的递推公式。为此需将实际转轴加以简化，以便得到对各种转轴都适用的一个标准计算轴。

先将质量连续分布的转轴进行分段，简化成一系列集中质量的计算轴，如图 10-1 所示。各集中质量间用没有质量但有弹性

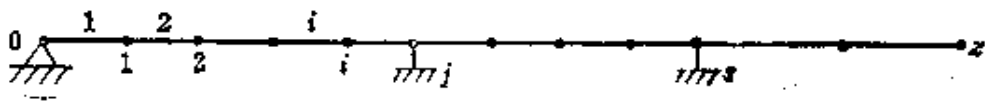


图10-1 转轴的简化模型

的轴连接起来，为保证每一段轴都是等直径的，凡截面变化的地方都取为分段点。若轴上有齿轮、带轮、叶轮等集中质量，则将其重心位置取为分段点。每一轴段的分布质量则一分为二，分别集中在该轴段两端的截面上。这样任意两集中质量就看作是由一个没有质量的、等截面的弹性轴连接起来，而该轴段的弹簧常数（刚度）与实际轴的相同。各轴段的分段点上集中着相邻两轴段质量之和的一半（包括分段点上配置的集中质量如齿轮等）。这样作会给计算带来一定的误差，只要段数取得足够多，是能够保证一定的计算精度。图 10-1 为一简化后的转轴，若用 0 表示起始点，用 1、2、3…表示各分段点，0、1 分段点间为第一轴段，1、2 分段点间为第二轴段，其余依次类推。

今取第 i 轴段来分析其上的力和力矩关系，并约定第 i 轴段包括第 $i-1$ 分段点上的质量，但不包括 i 分段点上的质量，即 i 轴段是切在 i 分段点之左与 $i-1$ 分段点之左的两个截面之间的一段轴。这样在 $i-1$ 分段点上有集中质量 m_{i-1} 产生的离心载荷 $m_{i-1}\omega^2 y_{i-1}$ ，其中 ω 为计算转速，故切力在该截面上有突跳 $\Delta Q_{i-1} = m_{i-1}\omega^2 y_{i-1}$ 。若用 Q_{i-1} 、 M_{i-1} 、 θ_{i-1} 、 y_{i-1} 表示 i 轴段左截面之切力、弯矩、偏转角和挠度，用 Q_i 、 M_i 、 θ_i 、 y_i 表示 i 轴

段右截面的四个参数，根据力和力矩的平衡关系（见图 10-2）可得：

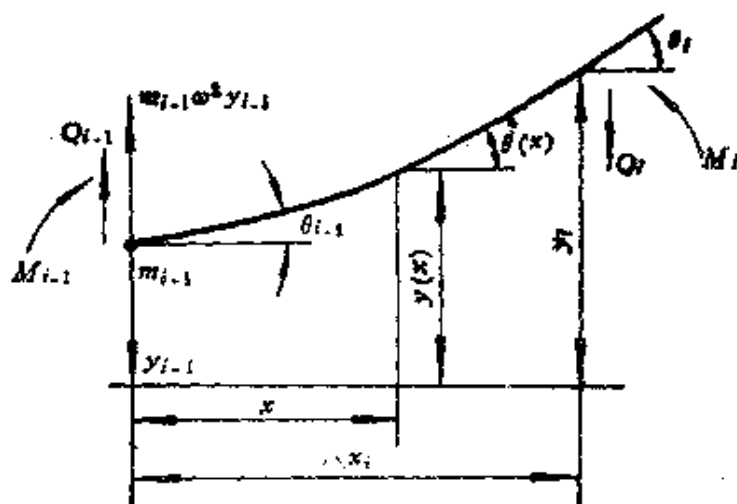


图10-2 i 轴段的受力图

$$\theta_i = Q_{i-1} + m_{i-1} \omega^2 y_{i-1} \quad (10-1)$$

$$M_i = M_{i-1} + Q_i \cdot \Delta x_i \quad (10-2)$$

式中 Δx_i ——该轴段的长度。

由于轴段是无质量的弹性轴，故该轴段上的切力为常量，都等于 $Q_{i-1} + M_{i-1} \omega^2 y_{i-1}$ 。可知该轴段的弯矩成线性分布，如图 10-3 所示。离 $i-1$ 分段点为 x 的截面上的弯矩为：

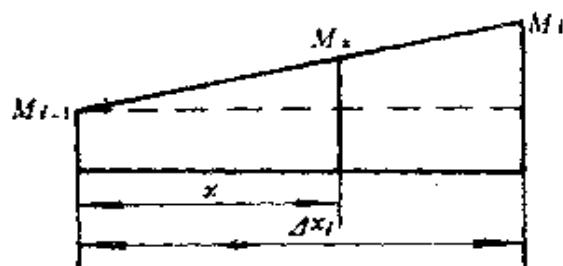


图10-3 i 轴段的弯矩分布

$$M(x) = M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{\Delta x_i} x$$

将上式代入弯曲变形公式

$$d^2 y / dx^2 = M / EI$$

得：

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{EI} \left(M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{\Delta x_i} x \right)$$

将上式分别积分两次并代入边界条件，可得 i 截面上之偏转角及挠度的表达式：

$$\theta_i = \frac{1}{EI} M_{i-1} \Delta x_i + \frac{1}{EI} \left(\frac{M_i - M_{i-1}}{2} \right) \Delta x_i + \theta_{i-1} \quad (10-3)$$

$$y_i = \frac{1}{EI} M_{i-1} \frac{\Delta x_i^2}{2} + \frac{M_i - M_{i-1}}{6} \frac{\Delta x_i^3}{EI} + \theta_{i-1} \Delta x_i + y_{i-1} \quad (10-4)$$

令 $\beta_i = \frac{\Delta x_i}{EI}$ 称轴段的柔度系数，并将式(10-1)~式(10-4)归并在一起即为由 $i-1$ 截面到 i 截面四个参数的递推公式：

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= Q_{i-1} + M_{i-1} \omega^2 y_{i-1} \\ M_i &= M_{i-1} + Q_i \Delta x_i \\ \theta_i &= \theta_{i-1} + \beta_i \left(\frac{M_i + M_{i-1}}{2} \right) \\ y_i &= y_{i-1} + \theta_{i-1} \Delta x_i + \beta_i \Delta x_i^2 \left(\frac{M_i}{6} + \frac{M_{i-1}}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10-5)$$

二、利用递推公式确定临界转速

若已知 Q_{i-1} 、 M_{i-1} 、 θ_{i-1} 、 y_{i-1} 及 ω ，则由式(10-5)可递推求得 Q_i 、 M_i 、 θ_i 及 y_i 。

图 10-4 所示为一单跨二支点转子。若已知 0 分段点上的 4 个参数 Q_0 、 M_0 、 θ_0 、 y_0 ，选定一个试算转速 ω ，就可求得 1 截面上的 4 个参数（注意： $y_0 = 0$ ， $M_0 = 0$ ）

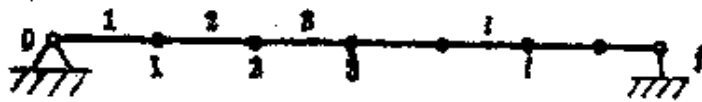


图10-4 单跨两支点转子的简化模型

$$\left. \begin{aligned}
 Q_1 &= Q_0 = A_1 \theta_0 + B_1 Q_0 \\
 M_1 &= Q_1 \Delta x_1 = Q_0 \Delta x_1 = C_1 \theta_0 + D_1 Q_0 \\
 \theta_1 &= \theta_0 + \frac{\beta_1}{2} M_1 = \theta_0 + \frac{\beta_1 \Delta x_1}{2} Q_0 = E_1 \theta_0 + F_1 Q_0 \\
 y_1 &= \theta_0 \Delta x_1 + \frac{\beta_1 \Delta x_1}{6} M_1 = \theta_0 \Delta x_1 + \frac{\beta_1 \Delta x_1^2}{6} Q_0 \\
 &= G_1 \theta_0 + H_1 Q_0
 \end{aligned} \right\} (10-6)$$

上式中 $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, $D_1 = \Delta x_1$, $E_1 = 1$, $F_1 = \frac{\beta_1 \Delta x_1}{2}$, $G_1 = \Delta x_1$, $H_1 = \frac{\beta_1 \Delta x_1^2}{6}$ 。由式 (10-6) 可见 1 截面上的 4 个参数可表示成 Q_0 、 θ_0 的线性函数。

同理, 对 j 截面有

$$\left. \begin{aligned}
 Q_j &= A_j \theta_0 + B_j Q_0 \\
 M_j &= C_j \theta_0 + D_j Q_0 \\
 \theta_j &= E_j \theta_0 + F_j Q_0 \\
 y_j &= G_j \theta_0 + H_j Q_0
 \end{aligned} \right\} (10-7)$$

由于集中质量要产生离心载荷而使切力 Q 产生突变, 故系数 A_j 、 B_j 、 C_j ... 都是试算转速 ω 的函数。

对于 j 截面其边界条件为: $M_j = 0$, $y_j = 0$, 由式 (10-7) 得,

$$\left. \begin{aligned}
 C_j \theta_0 + D_j Q_0 &= 0 \\
 G_j \theta_0 + H_j Q_0 &= 0
 \end{aligned} \right\} (10-8)$$

由于 θ_0 、 Q_0 不等于零, 所以要满足式 (10-8) 所示的线性齐次方程组, 其系数行列式应等于零, 即

$$\begin{vmatrix} C_j & D_j \\ G_j & H_j \end{vmatrix} = 0 \quad (10-9)$$

$$\text{或} \quad C_j H_j - D_j G_j = 0 \quad (10-10)$$

上式是 ω 的函数, 故若 ω 是临界转速, 应满足

$$\varphi_j(\omega) = C_j H_j - D_j G_j = 0$$

否则, $\varphi_j(\omega) = C_j H_j - D_j G_j \neq 0$ 称 $\varphi_j(\omega)$ 为残差, 此时可调整 ω 的值重复上述计算, 直到 $\varphi_j(\omega) < \epsilon$ 为止。

从式 (10-8) 可见, 只要其系数行列式等于零, 不一定要知道 θ_0 、 Q_0 就可求得临界转速。即便如此, 计算工作量也是很可观的, 必须采用电子计算机。但为编制程序简单, 考虑到线性方程的叠加原理 (如 $y_1 = a_1 x_1$, $y_2 = a_2 x_2$, 则 $y = y_1 + y_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2$), 采用取二次边界条件的办法, 可较方便地求得任一截面的 8 个系数 A_i 、 B_i 、 C_i 、 \dots 。

如第一次取 $\theta_0 = 1$, $Q_0 = 0$ (注意左端边界条件 $y_0 = 0$, $M_0 = 0$), 按式 (10-5) 进行递推运算可求得

$$A_i = Q_i^{(1)}, \quad C_i = M_i^{(1)}, \quad E_i = \theta_i^{(1)}, \quad G_i = y_i^{(1)}$$

第二次取 $\theta_0 = 0$, $Q_0 = 1$ 依法递推可得

$$B_i = Q_i^{(2)}, \quad D_i = M_i^{(2)}, \quad F_i = \theta_i^{(2)}, \quad H_i = y_i^{(2)}$$

上标 (1)、(2) 分别表示按第一次和第二次边界条件计算的结果。

要满足方程式 (10-10) 需按一定步长改变计算转速 ω , 计算式 (10-7) 中的各个系数, 求出 $\varphi(\omega) = C_i H_i - D_i G_i$ 之值。如果计算时, 改变 ω 值后使 $\varphi(\omega)$ 值改变符号, 说明临界转速在前后两个 ω 值之间。 $\varphi(\omega)$ 曲线与横坐标 ω 的交点即为临界转速 (见图 10-5)

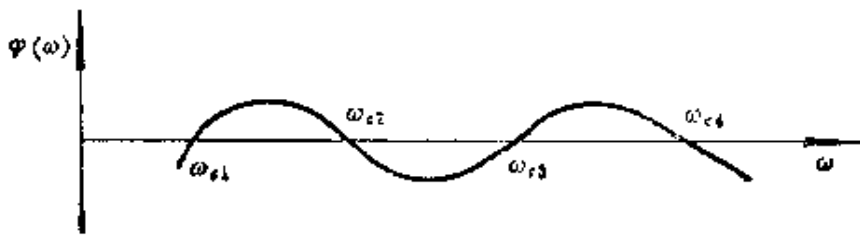


图10-5 $\varphi(\omega)$ 变化曲线

临界转速求得后, 可利用式 (10-8) 求得 $Q_0 = -\frac{G_i}{H_i} \theta_0$, 再根据递推关系可求 i 截面的相对挠度值

$$y_i = G_i - H_i \frac{G_i}{H_i} \quad (10-11)$$

同时即可求得转子的振型曲线。

三、多支点多跨转子的计算

对于多支多跨情况递推过程和前述情况相似，但由于递推到中间支点时支反力不知，计算过程略有不同。

图 10-6 为一多支多跨转子简化模型。对于 j 支座以左各截面的 4 个参数计算过程与单跨情况完全一样，但 j 支座反力 R_j 未知，尽管 j 支座左截面的切力 Q'_j 已知， j 支座右截面的切力 Q_j 仍然未知，因为：

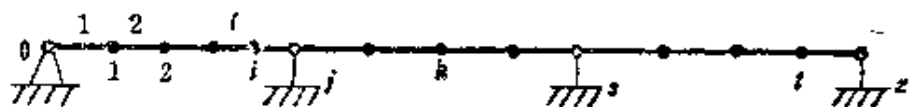


图10-6 多支多跨转子简化模型

$$Q_j = Q'_j + R_j$$

但弯矩、偏转角、挠度通过 j 支座时仍然是连续的，仍可按式 (10-7) 写出

$$\left. \begin{aligned} M_j &= M'_j = C_j \theta_0 + D_j Q_0 \\ \theta_j &= \theta'_j = E_j \theta_0 + F_j Q_0 \\ y_j &= y'_j = G_j \theta_0 + H_j Q_0 \end{aligned} \right\} \quad (10-12)$$

由于 j 支座为刚性支座，有 $y_j = 0$ ，即 $Q_0 = -\frac{G_j}{H_j} \theta_0$ ，代入式 (10-12) 可得：

$$\left. \begin{aligned} M_j &= \left(C_j - D_j \frac{G_j}{H_j} \right) \theta_0 \\ \theta_j &= \left(E_j - F_j \frac{G_j}{H_j} \right) \theta_0 \\ y_j &= 0 \\ Q_j & \text{(新引进的参数)} \end{aligned} \right\} \quad (10-13)$$

上式就是第二跨的 4 个初始参数，对于 j 支座后的各截面的 4 个参数，均可表达为 θ_0 与 Q_j 的线性组合。若以 k 表示 j 、 s 支座间的任一截面，则其上的 4 个参数可表示为：

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= A_k \theta_0 + B_k Q_l \\ M_k &= C_k \theta_0 + D_k Q_l \\ \theta_k &= E_k \theta_0 + F_k Q_l \\ y_k &= G_k \theta_0 + H_k Q_l \end{aligned} \right\} \quad (10-14)$$

上式中的 8 个系数求法同前, 它们同样是 ω 的函数。但需按式 (10-13) 取二次边界条件求得递推初值, 再按试算转速 ω 由递推公式 (10-5) 求出 k 截面上的 4 个参数, 代到式 (10-14) 求出 $A_k = Q_k^{(1)}$, $C_k = M_k^{(1)}$, $E_k = \theta_k^{(1)}$, $G_k = y_k^{(1)}$,

$$B_k = Q_k^{(2)}, \quad D_k = M_k^{(2)}, \quad F_k = \theta_k^{(2)}, \quad H_k = y_k^{(2)}$$

对于 s 支座后各截面上的 4 个参数依上述方法可表达为 θ_0 , Q_l 的线性组合。

当递推过程进行到 z 支座时, 若试算转速 ω 是临界转速, 则应满足 z 支座的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} M_z &= 0 \text{ 即 } C_z \theta_0 + D_z Q_l = 0 \\ y_z &= 0 \text{ 即 } G_z \theta_0 + H_z Q_l = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-15)$$

因 θ_0 , Q_l 不为零, 则应有

$$C_z H_z - D_z G_z = 0 \quad (10-16)$$

令 $\varphi_z(\omega) = C_z H_z - D_z G_z$, 取不同的 ω 试算, 直到 $\varphi_z(\omega) < \epsilon$ 为止, 此时的 ω 即为临界转速。

同理可得各支点挠度的相对值

$$\left. \begin{aligned} y_i &= G_i - H_i \frac{G_z}{H_z} \\ y_k &= G_k - H_k \frac{G_z}{H_z} \\ y_l &= G_l - H_l \frac{G_z}{H_z} \end{aligned} \right\} \quad (10-17)$$

如果不存在 z 支座, 则 s 支座以右为外伸部分。外伸部分较短时, 对一阶临界转速影响不大, 可不予考虑, 但对二阶以上临界转速却有不可忽视的影响。

因为根据前面的约定, Q_z 中未包含第 z 个集中质量的惯性力, 所以在递推计算时, 必须递推到 Q_{z+1} , 把第 z 个集中质量惯性力引起的切力突变计算在内, 即 $Q_{z+1} = Q_z + m_z \omega^2 y_z$ 。对终端点 z 右截面上的 4 个参数应为:

$$\left. \begin{aligned} Q_{z+1} &= A_{z+1} \theta_0 + B_{z+1} Q_z \\ M_z &= C_z \theta_0 + D_z Q_z \\ \theta_z &= E_z \theta_0 + F_z Q_z \\ y_z &= G_z \theta_0 + H_z Q_z \end{aligned} \right\} \quad (10-18)$$

具有外伸部分的右端边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} Q_{z+1} = 0 \text{ 即 } A_{z+1} \theta_0 + B_{z+1} Q_z &= 0 \\ M_z = 0 \text{ 即 } C_z \theta_0 + D_z Q_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-19)$$

由此得

$$\begin{vmatrix} A_{z+1} & B_{z+1} \\ C_z & D_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\varphi_z(\omega) = A_{z+1} D_z - B_{z+1} C_z \quad (10-20)$$

$$\left. \begin{aligned} y_z &= G_z - H_z \frac{A_{z+1}}{B_{z+1}} \\ y_{z-1} &= G_{z-1} - H_{z-1} \frac{G_z}{H_z} \\ y_i &= G_i - H_i \frac{G_1}{H_1} \end{aligned} \right\} \quad (10-21)$$

第二节 普罗尔法的计算机程序

本节给出的计算程序是用 FORTRAN IV 编写的。为使读者便于阅读, 在编制过程中, 不求程序的技巧性, 而力求符合本章第一节叙述的计算过程。由于不是通用程序, 仅作为一个例子提供给读者, 所以程序中未考虑陀螺力矩的影响, 且仅适用于具有两个外伸端的双支单跨转子 (见图 10-7)。

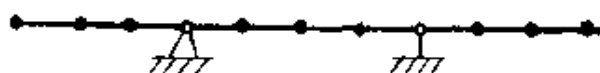


图10-7 具有外伸端的双支单跨转子

各临界转速是采用搜索法求得的，若试算转速是临界转速，则应有 $\varphi(\omega) = 0$ ，但实际上不可能恰好使 $\varphi(\omega) = 0$ ，若前后两个转速使 $\varphi(\omega_1)$ 和 $\varphi(\omega_2)$ 由正变负或由负变正，则说明临界转速处在 ω_1 与 ω_2 之间，只要逐步缩小搜索范围便可求得各阶临界转速。

程序标识符说明：

AM——轴段质量、节点质量	BE—— $\Delta x_i/EI$
DX——轴段长度	D——轴段直径
AI——轴段惯性矩 I	CM——圆盘质量
YY——振型（相对挠度）	G、H——挠度中间存储
N_1 ——左支点节点号	N_2 ——右支点节点号
N_3 ——右端点节点号	RD——转速步长
RO——转速初值、临界转速	RE——转速终值
Y——挠度	CITA——偏转角
Q——切力	BM——弯矩初值
BM_2 ——弯矩	
D_5, D_6, D_7, D_8 ——Q, BM, CITA, Y 的中间存储	
FEI—— $\varphi(\omega)$ 新值	FEI1—— $\varphi(\omega)$ 旧值
V——二次计算的转换因子	IQ——GOTO 语句判别量
IS—— $\varphi(\omega)$ 变号时的判别量	KK——支点判别量
S—— ω^2	L——节点号变量
L1——L 的中间转换量	NN——中间变量

源程序：

```

DIMENSION AM(20), BE(20), DX(20),
1 G(20), H(20), YY(20), D(20), AI(20), CM(20)
WRITE(6, 6)

```

```

6  FORMAT(15X, 15H-----)
   READ(5, *) N1, N2, N3, R0, RD, RE
   WRITE(1, 2) N1, N2, N3, R0, RD, RE
   WRITE(6, 2) N1, N2, N3, R0, RD, RE
2  FORMAT(1X, 3HN1=, I2, 2X, 3HN2=, I2, 2X, 3HN3=, I2, 2X,
1  3HR0=, F8, 3, 2X, 3HRD=, F8, 3, 2X, 3HRE=, F8, 2)
   READ(5, *) DX, D, CM
   WRITE(1, 1) DX, D, CM
   WRITE(6, 1) DX, D, CM
1  FORMAT(1X, 3HDX=, 10F7, 3/4X, 10F7, 3/
1  2X, 2HD=, 10F7, 3/4X, 10F7, 3/
2  1X, 3HCM=, 10F7, 3/4X, 10F7, 3)
   DO 3 I=2, N3
   AI(I)=0.049087*D(I)**4
   BE(I)=DX(I)/AI(I)/200000.0
3  AM(I)=(D(I)/2.0)**2*DX(I)*2.5E-8
   AM(1)=0.0
   N4=N3+1
   AM(N4)=0.0
   DO 4 I=1, N3
   AM(I)=(AM(I)+AM(I+1))/2.0
4  AM(I)=AM(I)+CM(I)
   IQ=0
   IS=-1
5  KK=0
   V=-1.0
   Y=0.0
   S=(0.104719755*R0)**2
   CITA=1.0
   Q=0.0

```

```
BM=0.0
L=2
NN=N1
10 Q=Q+AM(L-1)*Y*S
IF(V.LT.0.0.AND.L.EQ.N4) A=Q
IF(V.GT.0.0.AND.L.EQ.N4) B=Q
IF(V.GT.0.0.AND.L.EQ.N4) GOTO 50
IF(V.LT.0.0.AND.L.EQ.N4) GOTO 30
BM2=BM+DX(L)*Q
CITA=CITA+BE(L)*(BM2+BM)/2.0
Y=Y+(BE(L)*(BM/3.0+BM2/6.0)+CITA)*DX(L)
BM=BM2
IF(V.LT.0.0) G(L)=Y
IF(V.GT.0.0) H(L)=Y
L=L+1
IF(KK.EQ.2.AND.L.LE.N4) GOTO 10
IF(L.LE.NN) GOTO 10
IF(KK.GT.0) GOTO 30
IF(V.GT.0.0) GOTO 20
D5=Q
D6=BM
D7=CITA
D8=Y
CITA=0.0
BM=0.0
Y=1.0
Q=0.0
V=-V
L=2
GOTO 10
```



```
20  CITA=CITA-D7*Y/D8
    BM=BM-D6*Y/D8
    Q=0.0
    Y=0.0
    V=-V
    KK=KK+1
    IF(KK.EQ.1) NN=N2
    IF(KK.EQ.2) NN=N3
    L1=L
    GOTO 10
30  IF(V.GT.0.0) GOTO 20
    D5=Q
    D6=BM
    D7=CITA
    D8=Y
    V=-V
    Q=1.0
    BM=0.0
    CITA=0.0
    Y=0.0
    L=L1
    GOTO 10
50  FEI=BM*0.5 D6*Q
    IF(IQ=1) 51 52 52
51  FEI1=FEI
    IF(RO.GE.RD) GOTO 105
    RO=RO+RD
    IQ=IQ+1
    WRITE(1,60) FEI,RO
    WRITE(6,60) FEI,RO
```

```
60  FORMAT(10X, 4HFEI=, F12.5, 3X, 3HRO=, F8.1)
    GOTO 5
52  IF(FEI*FEI1-0.0) 53, 55, 55
53  IS=-IS
    RD=RD/2.0
54  FEI1=FEI
    WRITE(1, 60) FEI, RO
    WRITE(6, 60) FEI, RO
    RO=RO-RD*IS
    IF(RD.LE.1.0) GOTO 70
    COTO 5
55  IF(IS.GT.0) GOTO 54
    GOTO 51
70  WRITE(1, 80) RO
    WRITE(6, 80) RO
80  FORMAT(5X, 3HRO=, F8.1)
    DO 100 I=2, N1
100  YY(I)=G(I)-H(I)*G(N1)/H(N1)
    N5=N1+1
    DO 101 I=N5, N2
101  YY(I)=G(I)-H(I)*G(N2)/H(N2)
    N6=N2+1
    DO 102 I=N6, N3
102  YY(I)=G(I)-H(I)*A/B
    YY(1)=-G(N1)/H(N1)
    WRITE(6, 103) YY
103  FORMAT(5X, 3HYY=, 5F11.6/8X, 5F11.6/8X, 5F11.6/8X, 5F11.6)
    RD=80.0
    RO=RO+RD
```

```

IF(R0.GE.RE) GOTO 105
I0=0
IS=-1
GOTO 5
105 STOP
END

```

采用上述程序计算例题 9-1 的输入数据及结果如下:

$$n_{e1} = 4210.6 \text{ r/min} \quad n_{e2} = 9250 \text{ r/min}$$

N1= 3 N2=11 N3=15 R0=2000.000 RD= 80.000

RE=12000.00

DX= 0.000 5.000 5.000 50.000 50.000 50.000 50.000
50.000 50.000 50.000 50.000 40.000 40.000 40.000
40.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

D= 0.000 50.000 50.000 50.000 50.000 50.000 50.000
50.000 50.000 50.000 50.000 50.000 50.000 50.000
50.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

CM= 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.102
0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
0.051 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

FEI= -271.05597 R0= 2080.0

FEI= -261.79913 R0= 2160.0

FEI= -252.36261 R0= 2240.0

FEI= -242.76337 R0= 2320.0

FEI= -233.01862 R0= 2400.0

FEI= -223.14548 R0= 2480.0

FEI= -213.16104 R0= 2560.0

FEI= -203.08240 R0= 2640.0

FEI= -192.92596 R0= 2720.0

FEI= -182.70856 R0= 2800.0

FEI= -172.44629 R0= 2880.0

FEI=	-162.15570	RO=	2900.0
FEI=	-151.85233	RO=	3040.0
FEI=	-141.55182	RO=	3120.0
FEI=	-131.26941	RO=	3200.0
FEI=	-121.01970	RO=	3280.0
FEI=	-110.81764	RO=	3360.0
FEI=	-100.67688	RO=	3440.0
FEI=	-90.61130	RO=	3520.0
FEI=	-80.63434	RO=	3600.0
FEI=	-70.75874	RO=	3680.0
FEI=	-60.99700	RO=	3760.0
FEI=	-51.36106	RO=	3840.0
FEI=	-41.86243	RO=	3920.0
FEI=	-32.51266	RO=	4000.0
FEI=	-23.32165	RO=	4080.0
FEI=	-14.30051	RO=	4160.0
FEI=	-5.45837	RO=	4240.0
FEI=	3.19506	RO=	4240.0
FEI=	-1.10747	RO=	4200.0
FEI=	1.04990	RO=	4220.0
FEI=	-0.02721	RO=	4210.0
FEI=	0.51173	RO=	4215.0
FEI=	0.24241	RO=	4212.5
FEI=	-0.02721	RO=	4210.0
FEI=	0.10757	RO=	4211.3

RO= 4210.6

YY=	-10.000000	-5.000000	0.000000	-4.717939
	-8.590685	-11.198872	-12.126741	-11.289289
	-8.932045	-5.140026	0.000000	0.000023
	0.000047	0.000073	0.000099	

0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
 0.000000

FEI=	99.63876	RO=	8210.6
FEI=	94.32790	RO=	8290.6
FEI=	88.73137	RO=	8370.6
FEI=	82.85301	RO=	8450.6
FEI=	76.69307	RO=	8530.6
FEI=	70.25287	RO=	8610.6
FEI=	63.53417	RO=	8690.6
FEI=	56.54002	RO=	8770.6
FEI=	49.27084	RO=	8850.6
FEI=	41.72845	RO=	8930.6
FEI=	33.91550	RO=	9010.6
FEI=	25.83313	RO=	9090.6
FEI=	17.48211	RO=	9170.6
FEI=	8.86651	RO=	9250.6
FEI=	-0.01440	RO=	9250.6
FEI=	4.45877	RO=	9210.6
FEI=	2.23078	RO=	9250.6
FEI=	-0.01440	RO=	9250.6
FEI=	1.11008	RO=	9240.6
FEI=	0.54830	RO=	9250.6
FEI=	-0.01440	RO=	9250.6
FEI=	0.26705	RO=	9248.1
FEI=	0.12622	RO=	9250.6
FEI=	-0.01440	RO=	9250.6

RO= 9250.0

YY=	-9.999998	-4.999998	0.000000	-4.585431
	-7.931799			
	-9.434332	-8.503267	-5.668599	-2.575610

-0.320614

0.000000 -0.000003 -0.000008 -0.000014

-0.000020

0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

0.000000

用频率方程求解的结果（见例题 9-2）为：

$$n_{c_1} = 4194 \text{ r/min}, \quad n_{c_2} = 9463 \text{ r/min}$$

第十一章 软 轴

第一节 概 述

软轴（见图 11-1）通常由钢丝软轴、软管、软轴接头和软管接头等几部分组成。

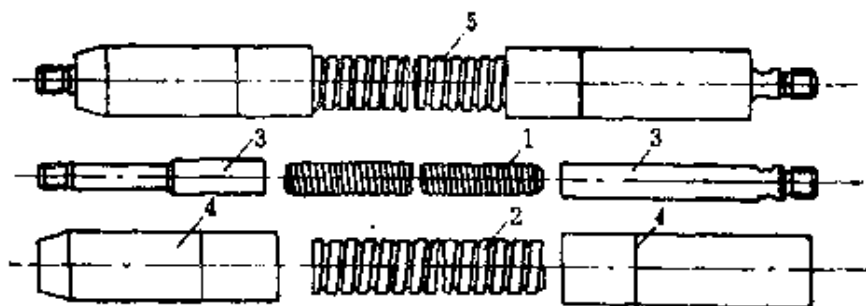


图11-1 软轴的组成

1—钢丝软轴；2—软管；3—软轴接头；4—软管接头；5—软轴组件。

软轴和普通的转轴一样，主要用来传递转矩和运动（有时也作为扭力减振器使用）。由于软轴的弯曲刚度远小于其扭转刚度，故可弯曲地绕越各种障碍机件，实现原动机与工作机之间的远距离传动。常用于各种手持的动力机具（混凝土振动器、锅炉洗管器、砂轮机、医疗器械等）、机床的某些传动装置、里程表及遥控装置等的传动。

软轴根据其用途的不同大致分为两类：

- (1) 动力型软轴 主要用来传递转矩；
- (2) 控制型软轴 主要用来传递运动，它所传递的转矩只是用来克服钢丝软轴与软管间所产生的摩擦力矩。

软轴传动的主要优点：

- (1) 软轴能实现轴线有相对移动的两轴间的传动；

- (2) 不需要其它中间传动装置而能实现远距离的传动；
- (3) 传动机构简单、成本低；
- (4) 能缓和冲击和振动；
- (5) 安装、使用和维护简单方便。

软轴的主要缺点：

- (1) 长距离传动时，在小的弯曲半径情况下，效率较低；
- (2) 在低转速，大转矩的情况下，从动端的转速不均匀；
- (3) 在严重的冲击载荷下工作时，软轴容易扭曲；
- (4) 使用寿命较低；
- (5) 同尺寸、同型号的软轴、扭转刚度有较大的差别；
- (6) 传递大的载荷时，重量较大；
- (7) 传动时噪声大，软管发热、磨损严重。

考虑到软轴传动的特点，故软轴通常在高转速、低转矩的情况下使用，传递的功率一般不超过5.5kW，转速可达20000r/min。

第二节 钢丝软轴

钢丝软轴是由多层钢丝绕制而成，截面呈圆形。每层都由多股钢丝同时绕制，从结构上看像是一个多头弹簧。最内层钢丝是绕在一个芯棒上，相邻两层钢丝的绕向是相反的，如图11-2所示。钢丝直径从内层到外层逐渐增大，依结构的不同可在0.3~3mm之间变化。每层钢丝的头数可达16，层数最多可达8。

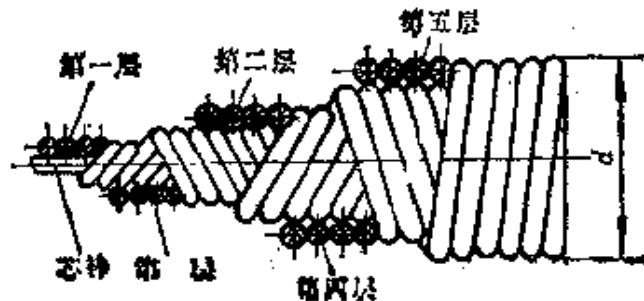


图11-2 钢丝软轴

大部分钢丝软轴是由合金弹簧钢丝绕制的，汽车和航空工业上采用的大部分软轴是由45、55号中碳钢丝绕制的。

特别重要的小直径软轴有时采用强度极限 $\sigma_B = 1500 \sim 2650$ MPa 的合金钢丝，但此种材料重复弯曲和扭转的次数比一般弹簧钢丝要少。特殊工作条件下的小直径软轴也有用青铜丝绕制的。

绕制软轴的钢丝除圆形截面外，对工作时轴线接近直线的大直径软轴，也有用方形或矩形截面的。软轴最外层的矩形截面的钢丝绕制可大大提高耐磨性。

根据绕制层数的多少，钢丝软轴可分单层和多层。单层钢丝软轴相当于一个扭转弹簧，主要用在软轴工作时弯曲不大的场合，多用来缓和冲击，是一种减振防振装置。

对动力型软轴的基本要求是足够的强度和小的弯曲刚度，对控制型软轴来说，除小的弯曲刚度外，具有决定意义的是要有足够的扭转刚度。因此，控制型软轴与动力型软轴相比其结构上的特点是：绕制的层数多，钢丝直径小。表 11-1 给出了两种钢丝软轴的规格尺寸，供选择软轴时参考。

表 11-1 钢丝软轴的规格尺寸

型别	控制型 (K型)						功率型 (G型)				
公称直径 d (mm)	3.3	4	5	6	6.5	8	10	13	15	19	22
允许偏差	± 0.08	± 0.08	± 0.1	± 0.1	± 0.1	± 0.1	± 0.1	± 0.15	± 0.15	± 0.2	± 0.3
每米参考质量 (kg/m)	0.06	0.09	0.14	0.22	0.25	0.32	0.58	0.93	1.31	1.65	2.1

注：1. 外层钢丝一般制成左旋，如特殊需要可制成右旋（3.3mm 的钢丝软轴外层钢丝为右旋）。

2. 钢丝软轴的长度可根据需要与生产厂洽商购置（一般为 4m、12m、15m）。

3. 生产厂：广东省建软轴厂、上海公利制动器厂、沈阳市东风电镀厂等。

软轴的横向刚度越小，工作时的最小弯曲半径越小，重复弯曲的次数越多，寿命也越长，但制造成本也高。

软轴在传递转矩时，应使最外层钢丝扭紧并紧贴内层钢丝，

以充分发挥承载能力。据此，钢丝软轴可分为右向旋转软轴和左向旋转软轴两种。右向旋转软轴，最外层钢丝向左卷绕；左向旋转软轴，最外层钢丝向右卷绕，如图 11-3 所示。

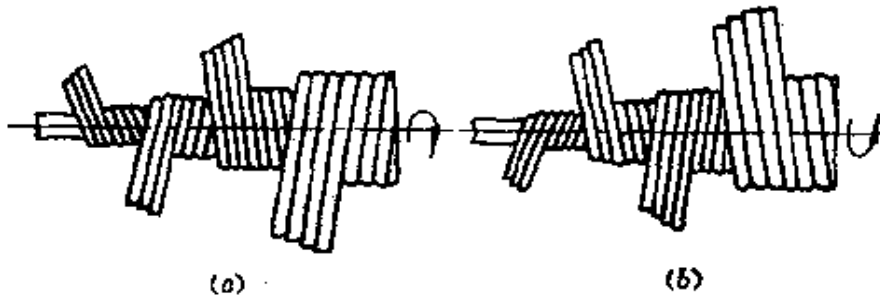


图11-3 钢丝软轴

(a) 右向旋转软轴，(b) 左向旋转软轴。

对于动力型软轴，如果工作转向与最外层钢丝的卷绕方向相同，其承载能力通常要降低 30%~50%，一般情况下是不允许的。如果动力型软轴工作时，电动机有可能反向转动时，应加防逆转装置，或采用超越离合器。图 11-4 所示为广东软轴钢窗厂生产的 S3SRD-150 多速软轴砂轮机所采用的防逆转装置。电机主轴通过键、传动盘、传动销和齿轮驱动软轴转动，从 A-A 视图来看电机应为逆时针方向旋转。若由于某种原因电机顺时针方向旋转，此时传动销将沿齿轮端面上斜槽滑出，无法带动齿轮转动，防止了软轴逆转。

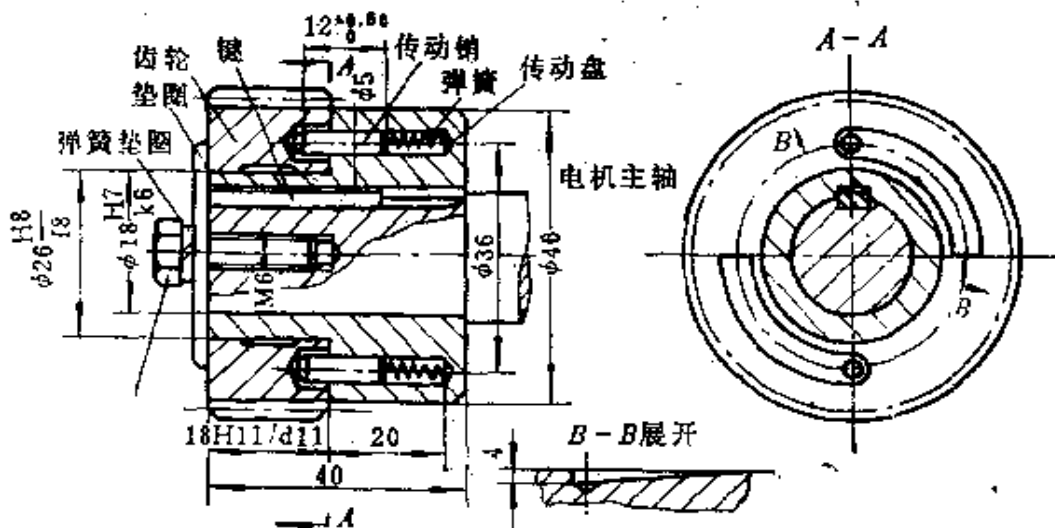


图11-4 防逆转装置示例

第三节 软管的结构形式

软轴通常在其外套有一软管（只有在个别情况下，如软轴较短时才无软管），软管实际上是一个特殊的挠性轴承，用来承受传到软轴上的力。此外，软管还具有下述作用：①储存润滑剂以润滑软轴表面；②防止软轴的污染；③防止工人被软轴夹住；④保护软轴不被碰伤；此外，软管还可防止软轴过载时发生扭曲。

软管应具有足够的强度、耐磨性、密封性和柔韧性。柔韧性的要求应根据不同的使用场合而有所差异。一般说来，软管的刚性越大，钢丝软轴的工作条件越好。对于控制型软轴，软管的弯曲刚度应接近软轴的弯曲刚度；对于动力型软轴，一般情况下软管的弯曲刚度应大于软轴的弯曲刚度。

常见的软管有：金属软管、橡胶金属软管、衬簧橡胶软管和纤维编织软管等多种。

金属软管由成型钢带绕制而成，并用石棉密封。其优点是柔性好、重量轻，应用广泛；缺点是密封性、耐磨性较差，过载时抗扭曲能力低。

橡胶金属软管是在金属软管的外面包上一层橡胶保护层。此类软管通常制成强化型，即在软管内再加绕一层衬簧，以增强软管的耐磨性和过载稳定性。为了在软轴工作时，向摩擦表面提供润滑剂，以改善润滑条件，衬簧的截面形状常采用图 11-5 所示的形式。

衬簧橡胶软管是在橡胶管内装一衬簧。此种结构简单，应用较广，如混凝土振动器常采用此类软管。

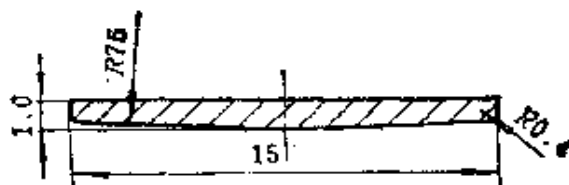



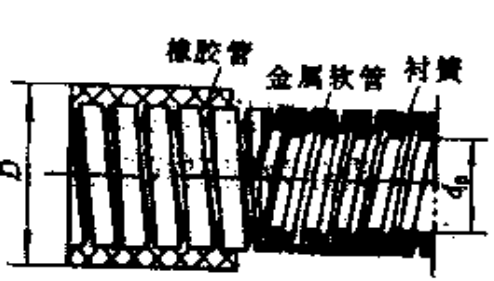

图11-5 衬簧的截面形状

纤维编织软管由弹簧钢带卷成，外面依次包上耐油胶布层、棉纱编织层、钢丝编织层和耐磨橡胶层。这类软管强度、柔性、耐磨性和密封性都较好。常用在柔性大，不长（1.5~2m）的轻型软轴上。

软管同电机或工作机构连接的地方，所具有的强度、刚度通常都不大，会在自身重量和载荷的作用下，严重地产生弯曲，从而导致软轴的过度磨损，甚至折断。为此，常在软管的端部包以强力弹簧，或外套一段大直径的软管。采用铰支电机可以卸去软管端部过大的横向力。

表 11-2 为软管常用的结构形式和规格尺寸。

表11-2 软管的结构型式与规格尺寸

类型	结构简图	软管主要尺寸 (mm)			
		钢丝软轴直径 d	软管内径 d_0	软管外径 D	最小弯曲半径 R_{min}
金属软管		13	20 ± 0.5	25 ± 0.5	270
		16	25 ± 0.5	32 ± 0.5	300
		19	32 ± 0.5	38 ± 0.5	375
橡胶金属软管			19 ± 0.5	36^{+1}	300
		13	21 ± 0.5	40^{+1}	325
衬簧橡胶软管		8	$14^{+0.8}$	22^{+1}	225
		10	$16^{+0.8}$	30^{+1}	320
		13	$20^{+0.8}$	36^{+1}	360
		16	$24^{+0.8}$	40^{+1}	400

(续)

类型	结构简图	软管主要尺寸 (mm)			
		钢丝 软管 直径 d	软管内径 d_0	软管外径 D	最小 弯曲 半径 R_{\min}
衬 筒 编 织 软 管		13	$20^{+0.5}$	36^{+1}	360
小 金 属 软 管		3.3	5.5 ± 0.1	8 ± 0.1	150
		5	8 ± 0.2	10.5 ± 0.2	175

注：表中所列软管规格为广东省建软轴钢窗厂、上海公利振动物器厂、沈阳市东风电镀厂、上海金属软管厂的部分产品。由于目前尚未制订软管的统一标准，各家生产的规格尺寸不尽相同，设计选用时应以各厂的产品样本为准。

第四节 软轴接头

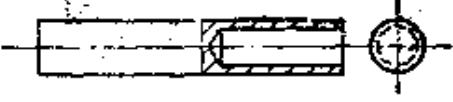
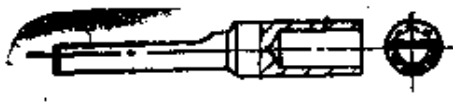
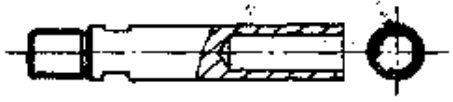

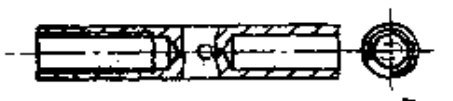
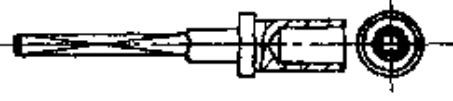


软轴接头用来将钢丝软轴与电机或工作机构连接起来。接头型式繁多，依连接特性可将软轴接头分为固定式和滑动式两类。表 11-3 给出了一些常用的型式。

固定式接头连接可靠，但装拆不便，当软轴和软管变形较大时，会导致元件的过早磨损。

滑动式接头能使软轴和软管自由地纵向变形，特别适应于重载和曲折路线上的传动。缺点是在软轴和软管变形较大时，有可能与电机或工作机构脱离；此外制造精度要求也较高。

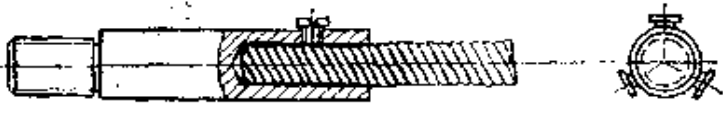
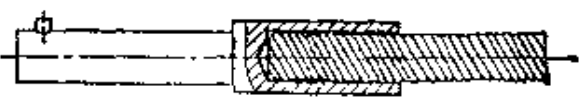
工作中若经常发生过载，接头应加过载保护元件（见表 11-3 滑动式接头）。

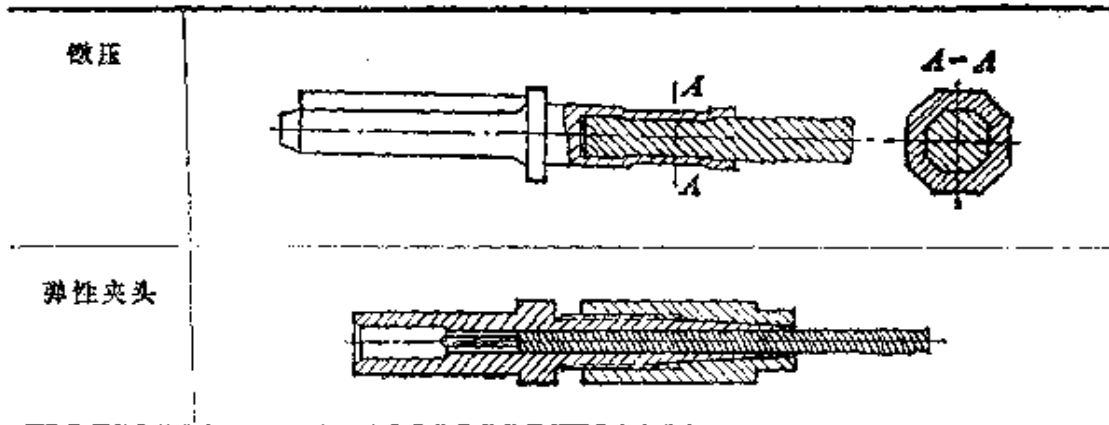
表11-3 常用软轴接头的结构型式

固 定 式	滑 动 式
 <p data-bbox="438 548 646 582">具有光滑圆柱端</p>	 <p data-bbox="1013 548 1189 582">端部制成平面</p>
 <p data-bbox="406 750 678 784">端部采用外螺纹连接</p>	 <p data-bbox="949 750 1189 784">端部采用滑键连接</p>
 <p data-bbox="438 963 646 996">采用内螺纹连接</p>	 <p data-bbox="1013 963 1125 996">方形端部</p>
 <p data-bbox="343 1198 710 1232">端部开有键槽和止动螺钉孔</p>	 <p data-bbox="893 1198 1340 1232">端部制成平面并带有过载保护螺杆</p>

软轴接头与软轴的连接方式有止动螺钉、焊接、铆压、弹性夹头等（见表 11-4）。

表11-4 软轴接头与钢丝软轴的连接方式

止动螺钉	
焊接	



止动螺钉连接只用于小转矩情况下。焊接工艺简单可靠，但由于焊接会产生烧结以及酸性锈蚀，往往造成连接的失效。广为采用的方法是铆压，但当软轴直径超过 8mm 时，会给工艺上带来一些困难。弹性夹头能快速更换钢丝软轴，但接头结构比较复杂，价格较贵，重量及外廓尺寸也较大，当软轴产生弹性变形后，连接的可靠性下降。

第五节 软管接头

软管接头用来将软管与电动机或工作机构的不动部分相连接，同时也是软轴接头的支承（轴承）。常见的软管接头有两种，带滑动支承的接头（见图 11-6）和带滚动支承的接头（见图 11-7）。

图 11-6 中，止动螺钉 4 用来将青铜轴承 2 定位，其下的周向槽用来储存润滑脂。止动螺钉 7 用来连接壳体 3 与接头 6。在将软轴接头与工作机连接（螺纹连接）时，为防止接头转动，可将螺钉 5 旋紧，同时将一个销子通过壳体上的孔插入软轴接头的横孔内。

比较完善的是图 11-7 所示的带滚动支承的软管接头。近来有以滚动支承取代滑动支承的趋势，但滚动支承径向尺寸较大。滑动支承制造和运转精度较高，常用于小直径（2~3mm）高转速（ $n = 20000 \sim 30000 \text{ r/min}$ ）的软轴。

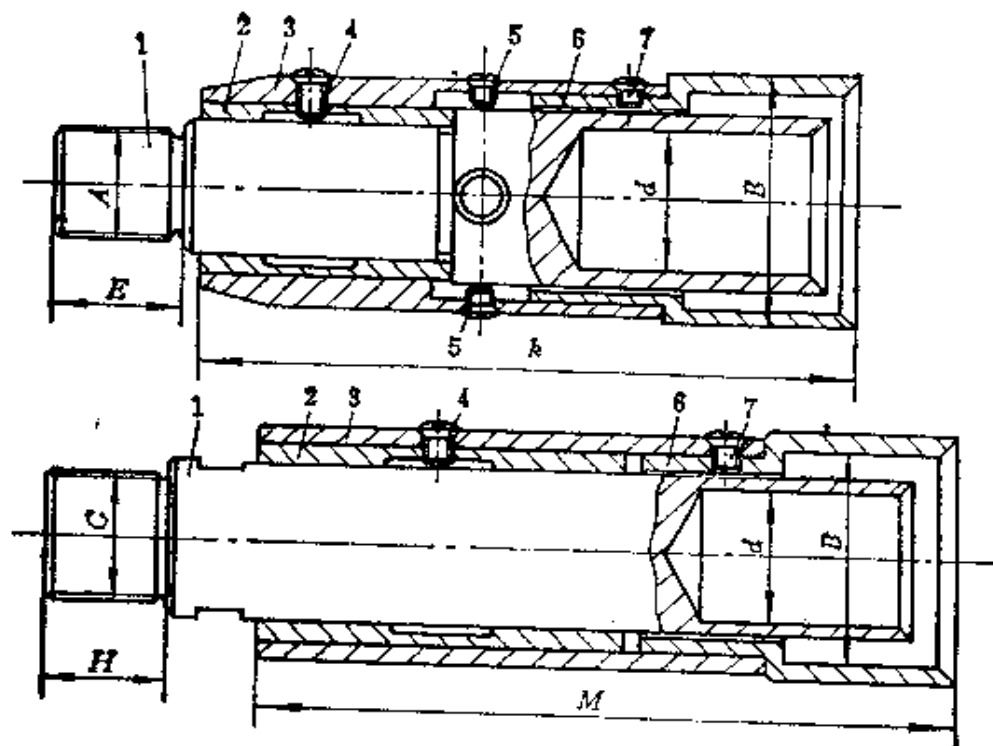


图11-6 带滑动支承的软管接头

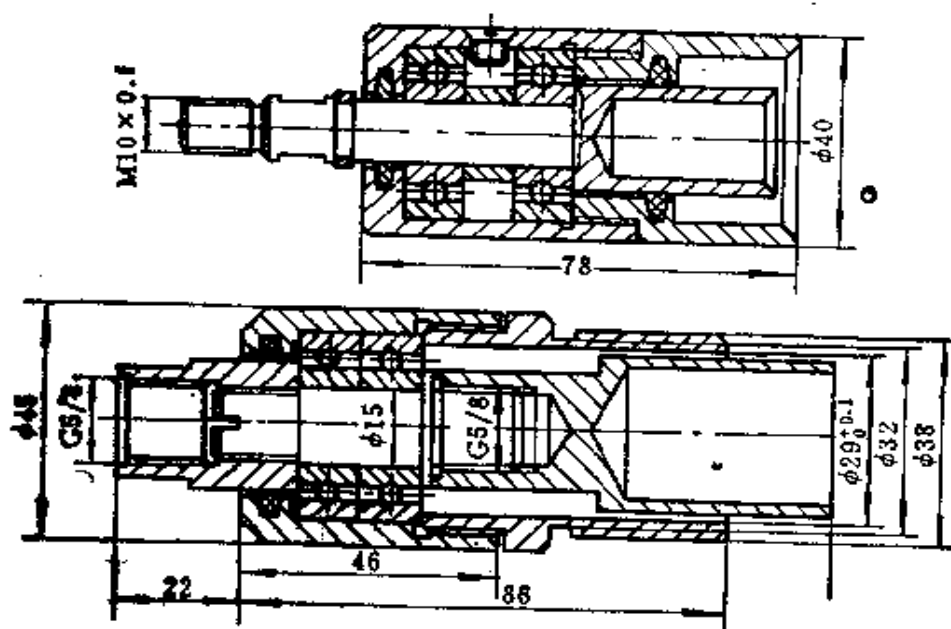
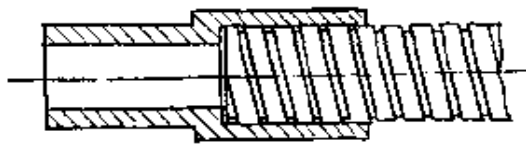
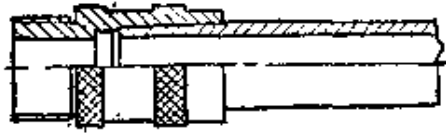
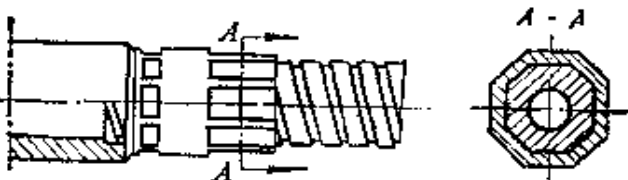
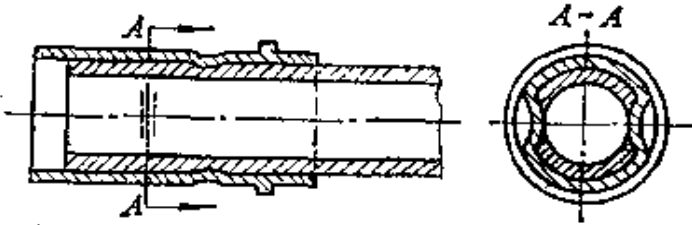
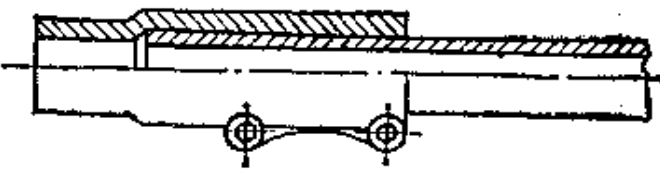


图11-7 带滑动支承的软管接头

图 11-7 所示的轴承结构是不可调的，如将单列向心球轴承换成向心推力球轴承，并借助圆螺母来调节轴承间隙，则更为理想。有时为了获得小的径向尺寸，也可采用无外圈或无内圈的轴承。

软管接头与软管的连接方式如表 11-5 所示。其中螺纹连接简单可靠，装拆时不会损坏所连接的零件，主要用于橡胶编制的软管。焊接生产率较低。冲压和锻压生产率、可靠性都较高，但拆卸时要损坏一个或两个零件。专用夹头比较完善，装拆方便，可靠性好，但较其它连接方式外廓尺寸、重量大。

表11-5 软管接头与软管的连接方式

焊接	
螺纹联结	
锻压	
冲压	
专用夹头	

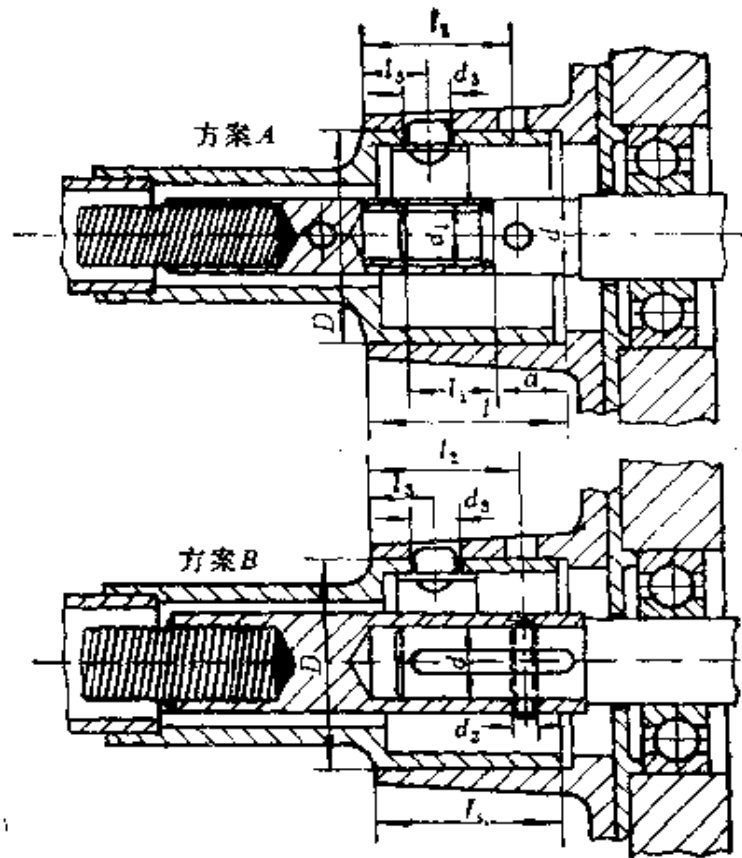


图11-8 动力型软轴与驱动装置的连接

表11-6 动力型软轴的连接尺寸 (见图11-8)

软轴 直径 (mm)	d	方案 A			方案 B			l	d_3	l_3
		d_1	l_1	a	d_2	l_2	D			
6 或 7	8	M 6	10	8	M 3	15	20	20	6	8
8 或 9	10	M 8	12	8	M 4	18	25	25	8	10
10	12	M10	14	10	M 4	22	30	30	8	10
10	14	M10	14	10	M 4	22	30	30	8	10
12	14	M10	14	10	M 4	22	30	30	8	10
15	15	M14	18	12	M 5	28	40	40	8	12
15	18	M14	18	12	M 5	28	40	40	8	13
20	18	M14	18	12	M 5	28	40	40	8	13
20	20	M14	18	12	M 5	28	40	50	8	13
20	22	M14	18	12	M 5	28	40	50	8	13
25	25	M20	22	12	M 6	28	50	60	8	13
25	28	M20	22	12	M 6	28	50	60	8	13

软管接头与电机或工作机构的不动部分的连接方法有：螺纹联结（见图 11-10）、法兰联结（见图 11-11）、支架联结（见图 11-9）等。螺纹联结可靠，但旋紧接头比较费时。

图 11-8 所示软管接头、软轴接头与驱动装置连接的两种方案（DIN2995/A）。这两种结构的制造和安装均方便，可靠性好，适用于各种动力型软轴。

表 11-6 给出了这种结构的连接尺寸，供设计、选用软轴时参考。

第六节 软轴组件的结构示例

图 11-9 所示的是一种简单、价廉的动力型软轴组件结构。其中软管接头带有滑动支承（青铜轴套），软轴接头端部为螺纹（固定式接头）。软轴通过接头 8 与联轴器 9 相连，软管接头 5 借助卡箍 6、托架 7 与机架相连。

这种软轴组件适用于软轴直径 8~30mm、转速 $n = 1000 \sim 3000 \text{ r/min}$ 、载荷平稳的场合。若在过载或冲击载荷下使用，软轴与软管磨损严重，且从动端转速不均匀。

图 11-10 所示是一种具有滚动支承的动力型软轴组件结构。软轴接头端部与驱动装置采用螺纹联结。滚动支承采用的是单列向心推力球轴承，轴承间隙可以调节。这种结构主要用于载荷较大的场合。

图 11-11 是一种强化的动力型软轴组件结构。软轴端部采用柱销与电机和工作机构连接，软管接头 8 用法兰盘 10 与电机外壳相连。软轴两端绕有强力弹簧 5，以增强软管在该处的强度和刚度。

图 11-12 是广泛应用于汽车行业的控制型软轴组件的一种。软管线包厚度为 1~2mm 的橡胶层，质地柔软。组件属可拆卸型，钢丝软轴和软轴接头可从软管和软管接头中抽出，检查、维修方便。

图 11-13 所示是用于解放牌汽车里程表上的控制型软轴组件。软管接头为锻压式，软轴接头为滑动连接。

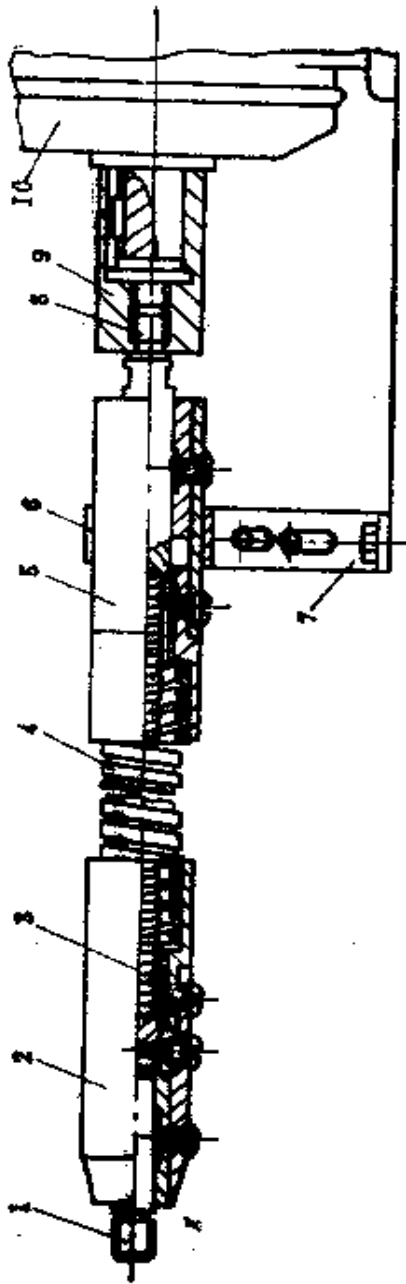


图11-9 具有滑动支承的动力型软轴组件

1—软管接头；2、5—软管接头；3—软轴；4—卡箍；6—卡箍；7—托架；8—联轴器；9—联轴器；10—电动机。

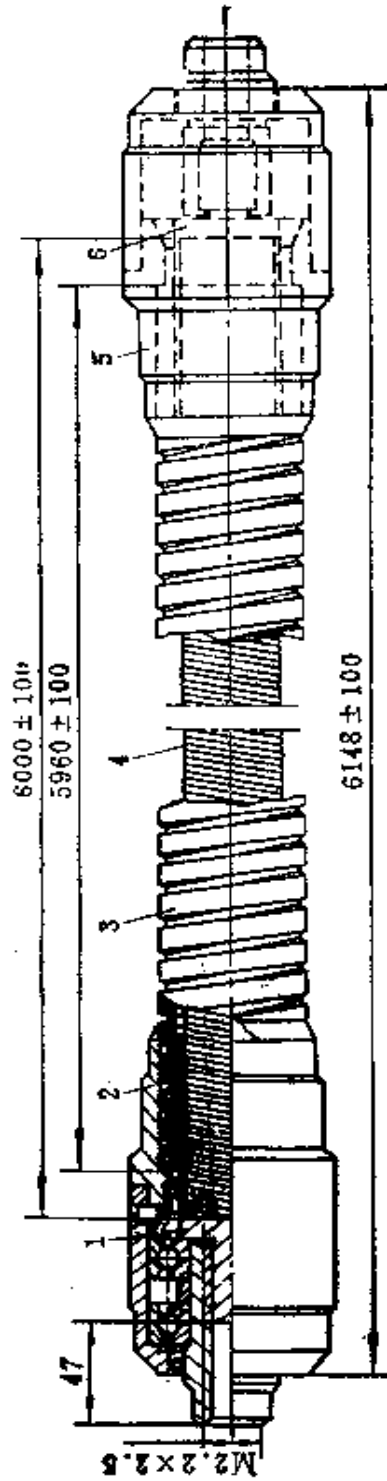


图11-10 具有滚动支承的动力型软轴组件

1、6—软管接头；2、5—软管接头；3—软轴；4—钢管；4—钢管软轴。

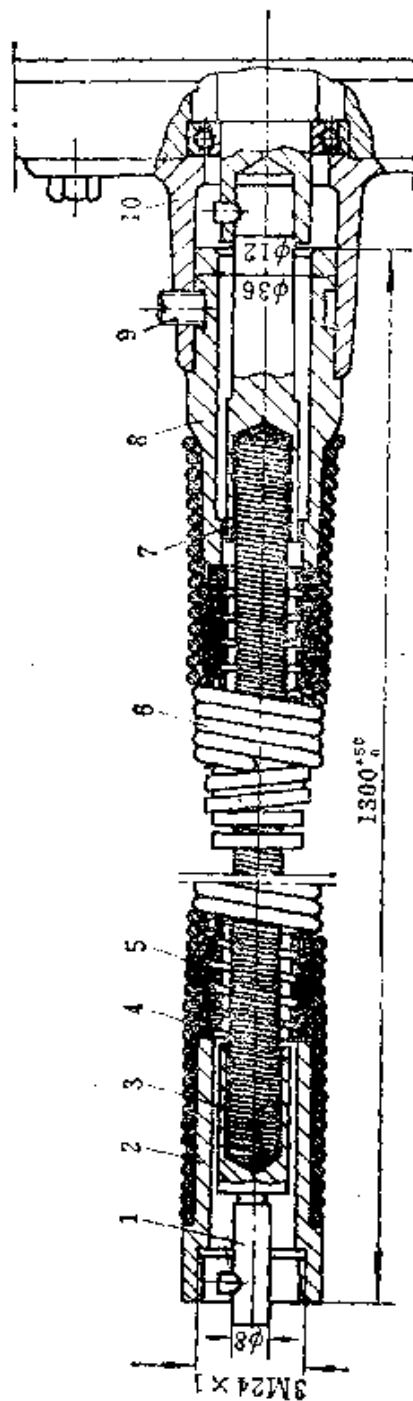


图11-11 外绕强力弹簧的动力型软管组件

1, 7—软管接头; 2, 8—软管接头; 3—钢丝软管; 4—钢丝软管; 5, 6—强力弹簧; 9—止动螺钉; 10—电机法兰。

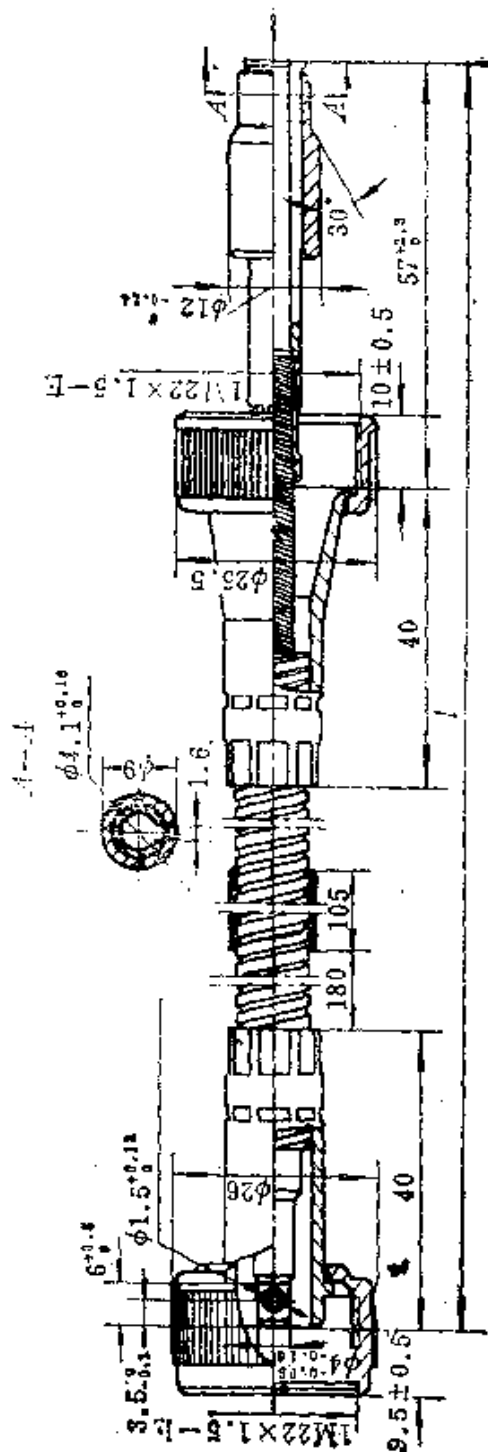


图11-12 汽车上用的控制型软管组件

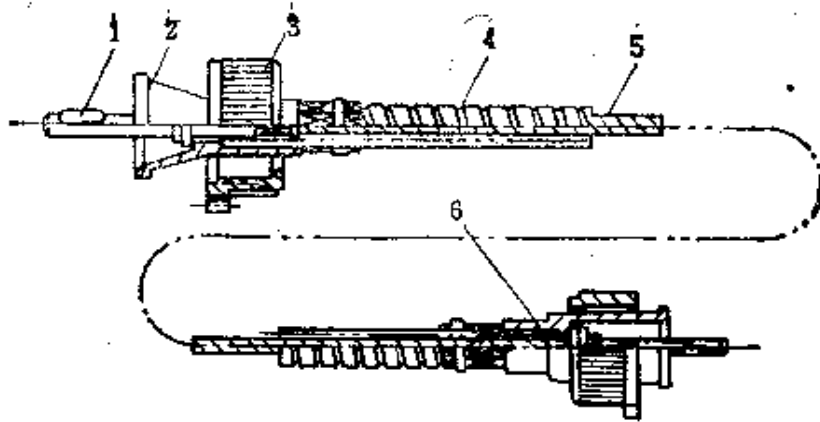


图11-13 汽车里程表用控制型软轴组件

1—软轴接头； 2、6—软管接头； 3—连接螺母； 4—软管； 5—钢丝软轴。

第七节 软轴的失效形式

软轴工作时，常见的失效形式是钢丝软轴本身的磨损和断裂。其它零件的损坏则是偶然的现像，在正常运转条件下，它们的使用寿命要大于钢丝软轴的使用寿命。软轴的磨损情况有如下两种。

(1) 钢丝软轴的内层磨损 软轴一旦发生内层磨损，各层钢丝间便会出现间隙，破坏了各层钢丝的相互作用，使软轴的扭转刚度严重下降。理论计算指出，对于仪器用软轴，当层间出现0.001mm的间隙时，软轴每米长的扭转角约为 10° 。但间隙的出现也可能是钢丝的残余变形。

磨损的原因则是由于钢丝相对于接触点发生角度位移所致，这在载荷变化、过载或冲击以及软轴弯曲情况下工作时尤为严重。

内部磨损造成的软轴扭转刚度下降，会使仪表传动的工作条件恶化，甚至使仪表指针发生振动。此外，软轴扭转刚度的下降，会导致软轴扭转振动的自振频率的下降，从而增加了发生共振的可能性。因此，对于控制型软轴，必须重视内层磨损。

(2) 钢丝软轴的外层磨损 软轴工作时，外层钢丝和软管间存在摩擦，这是外层钢丝磨损的主要原因。外层钢丝磨损后，软轴直径减小，最终发生断裂而失效。

磨损取决于很多因素，如结构型式、材料、钢丝截面形状、润滑条件等等。目前，还不可能完全控制磨损的发生，但若将外层钢丝由圆形截面改为矩形截面，并注意润滑，就会减缓软轴的磨损。

软轴的磨损沿长度方向和周向是均匀的，但在长期工作后，磨损的产生会使软轴丧失稳定性，使周向磨损不均匀。大多数情况下，软轴端部靠近接头处，由于弯曲刚度在该处变化较大，故磨损往往最为严重。

第八节 钢丝软轴的选择

钢丝软轴的选择主要是根据传递的功率、转速、工作时软轴可能弯曲的半径以及传动距离等条件，按表 11-7 来确定软轴的直径。

按表 11-7 示出的转矩、转速选择的软轴，其寿命约为 6×10^7 转，当圆周速度（指软轴与软管的滑动速度） $v = 15 \text{ m/s}$ 连续工作时，软管的温升（相对于环境温度）应不超过 $30 \sim 35^\circ\text{C}$ 。计算转矩按下式确定

表 11-7 软轴性能表

钢丝软轴直径 (mm)	在额定转速 n_0 时软轴能传递的最大转矩 T_0 (N·m)										额定转速 n_0	最高转速 n_{\max}
	软轴工作时的弯曲半径 (mm)											
	∞	1000	750	600	450	350	250	200	150	120		
6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.0	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	3200	19000
8	2.4	2.2	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	0.9	0.8		2500	10000
10	4.0	3.6	3.3	3.0	2.6	2.3	1.9	1.5			2100	8000
13	7.0	6.0	5.2	4.6	4.0	3.4	2.8				1750	6000
16	13.0	12.0	10.0	8.0	6.0	4.5					1350	4000
19	20.0	17.0	14.0	11.0	8.0	5.5					1150	3000

$$T_j = T \cdot \frac{k_1 k_2 k_3}{\eta} \quad (11-1)$$

式中 T_j ——计算转矩；

- T ——软轴从动端的转矩；
- k_1 ——工作情况系数，与起动转矩有关。当起动转矩 $T_s = (1 \sim 3)T$ 时，取 $k_1 = 1.0 \sim 2.0$ ；
- k_2 ——考虑转向不同的影响系数。当软轴转向与外层钢丝旋向相反时，取 $k_2 = 1$ ；当软轴转向与外层钢丝旋向相同时，取 $k_2 = 1.3 \sim 1.7$ ，平均取 $k_2 = 1.5$ ；当软轴需换向传动时， $k_2 = 1.4 \sim 1.8$ ，平均取 1.6；
- k_3 ——考虑软管支点跨距大小而设的系数。当软管支点跨距与软轴直径之比小于 50 时，取 $k_3 = 1$ ；当大于 150 时，取 $k_3 = 1.6$ ，软管不固定 $k_3 = 1.2 \sim 1.4$ ；
- η ——软轴的效率，一般 $\eta = 0.7 \sim 0.98$ 。当软轴无弯曲工作时， η 取高限；软轴工作时，弯曲半径越小，弯曲段数越多，取值应接近下限；润滑条件越差、环境温度越低（小于 20°C ）、转速大于 3000 r/min 时， η 还应降低 $2 \sim 5\%$ 。

根据软轴的最小弯曲半径及计算转矩，通过简单的计算，按表 11-7 选取一最小的软轴直径，使该直径对应的表中转矩 T_s 满足下述关系

$$T_s > T \cdot \frac{n}{n_s} \quad (11-2)$$

式中 n ——软轴的实际转速 (r/min)；

n_s ——该直径软轴的额定转速 (表中给出的) (r/min)。

例题 11-1 试按下述工况选择砂轮机软轴直径。已知：传动长度 $L = 2.5 \text{ m}$ ，软轴弯曲半径 $\rho = 450 \text{ mm}$ ，弯曲轴段数为 2，砂轮机转速 $n = 2840 \text{ r/min}$ ，所需功率 $N = 0.4 \text{ kW}$ ，软管不固定，软轴转向与外层钢丝旋向相反。

解 计算转矩

$$T_s = T \cdot \frac{k_1 k_2 k_3}{\eta} = 9550 \frac{N}{n} \cdot \frac{k_1 k_2 k_3}{\eta}$$

选取 $\eta = 0.85$

$k_1 = 1.1$ (起动转矩不大于工作转矩的 125%)

$k_2 = 1.0$ (软轴转向与外层钢丝旋向相反)

$k_3 = 1.2$ (软管不固定)

$$\text{由此得 } T_j = 9550 \frac{0.4}{2840} \cdot \frac{1.1 \times 1.0 \times 1.2}{0.85} = 2.08 \text{ N} \cdot \text{m}$$

根据表 11-7, 当 $\rho = 450 \text{ mm}$, 软轴直径 $D = 10 \text{ mm}$ 时,
 $T_0 = 2.6 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

$$\text{又 } T_j \frac{n}{n_0} = 2.08 \cdot \frac{2840}{2100} = 2.8 \text{ N} \cdot \text{m} > T_0 = 2.6 \text{ N} \cdot \text{m}。$$

若选取 $D = 13 \text{ mm}$ 软轴, 则 $T_0 = 4.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

$$\text{而 } T_j \frac{n}{n_0} = 2.08 \cdot \frac{2840}{1750} = 3.37 \text{ N} \cdot \text{m} < T_0 = 4.0 \text{ N} \cdot \text{m}。$$

根据上述计算, 虽 $D = 10 \text{ mm}$ 软轴的 T_0 略小于 $T_j \frac{n}{n_0}$, 但可以选用, 只是使用寿命略有降低; 若选用 $D = 13 \text{ mm}$ 软轴, 则未充分发挥软轴之传动能力, 不甚经济, 故以选用 $D = 10 \text{ mm}$ 软轴为好。

例题 11-2 试选择内圆磨具所用软轴的直径。已知: 传动长度 $L = 0.6 \text{ m}$, 工作时的弯曲半径 $\rho = 250 \text{ mm}$, 弯曲轴段数为 2, 所需功率 0.2 kW , 磨削转速 15000 r/min 。

解 若采用额定转速 $n \approx 2850 \text{ r/min}$ 的异步电机, 则必须采用传动比 $i \approx 5.3$ 的中间增速装置, 所用电机功率为:

$$N = \frac{0.2}{\eta_1 \eta_2} = \frac{0.2}{0.92 \times 0.97} = 0.22 \text{ kW}$$

其中软轴效率 $\eta_1 = 0.92$, 具有滚动支承的齿轮传动效率 $\eta_2 = 0.97$ 。

若选取的电机 $N = 0.3 \text{ kW}$, $n = 2790 \text{ r/min}$, 则电机轴上的转矩

$$T_d = 9550 \frac{0.3}{2790} = 1.03 \text{ N} \cdot \text{m}$$

计算转矩的计算取决于中间传动装置是在软轴之后还是之前。若在软轴之后, 则计算转矩

$$T_f = 9550 \frac{0.22}{2790} k_1 k_2 k_3 = 9550 \frac{0.22}{2790} \times 0.9 \times 1.0 \times 1.1$$

$$= 0.75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

其中 $k_1 = 0.9$, $k_2 = 1.0$, $k_3 = 1.1$

由于 $T_d = 1.03 \text{ N} \cdot \text{m} > T_f = 0.75 \text{ N} \cdot \text{m}$, 故取 T_d 作为计算转矩。

选取软轴直径 $D = 6 \text{ mm}$, 由表 11-7 可知当 $\rho = 250 \text{ mm}$ 时,

$$T_0 = 0.6 \text{ N} \cdot \text{m}, \text{ 今 } T_f \frac{n}{n_0} = 1.03 \frac{2790}{3200} = 0.89 \text{ N} \cdot \text{m} > T_0 = 0.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{m, 故选用 } D = 8 \text{ mm} \text{ 软轴, } T_f \frac{n}{n_0} = 1.03 \frac{2790}{2500} = 1.15 < T_0 =$$

$$1.2 \text{ N} \cdot \text{m}, \text{ 满足要求。}$$

若中间传动装置在软轴之前, 则计算转矩为,

$$T_f = \frac{1.03}{5.3} = 0.194 \text{ N} \cdot \text{m}$$

选用 $D = 6 \text{ mm}$ 软轴, 由表 11-7 知 $T_0 = 0.6 \text{ N} \cdot \text{m}$, 今 $T_f \frac{n}{n_0} =$
 $0.194 \frac{15000}{3200} = 0.9 \text{ N} \cdot \text{m} > T_0 = 0.6 \text{ N} \cdot \text{m}$, 故仍选用 $D = 8 \text{ mm}$ 软轴。

第九节 软管、软轴接头和软管接头的选择

软管应根据载荷的大小、转速、希望的寿命、轴向拉力的大小、环境及软管的重量等因素来选择。软管内径应等于 $(1.2 \sim 1.3) D$, D 为软轴直径。小直径软轴应选大值, 大直径软轴应选小值。载荷和起动转矩越大, 软管的刚性也应该越大。为防止软管扭曲, 可沿整个长度在几个点上将软管加以固定。当软轴在液体或气体介质中工作时, 应选择密封性好的软管。

软轴接头可根据使用要求按表 11-3 选择。为避免软轴和软轴接头与软管弯曲部分的过大摩擦, 软轴接头伸入软管接头的部分应不超过软管接头的长度。

软管接头的选用原则与软管相同, 根据使用要求可选用带有滑动支承或滚动支承的接头, 也可选用无支承的接头。当选用带螺纹端的接头时, 应考虑到安装拆卸是否方便。

第十节 软轴的使用与维护

正确地使用与维护软轴，对发挥软轴的传动能力，延长使用寿命具有重要的意义。因此，在使用软轴时应注意以下问题：

(1) 软轴在工作时应保持尽可能大的弯曲半径，不要使弯曲半径小于该型号软轴所允许的最小弯曲半径；

(2) 软轴在靠近驱动装置或工作机构的部分，不允许严重弯曲。若使用前估计有这种可能性，应在这些部分加强软管的刚度；

(3) 应尽可能将电机加以铰支或悬挂，以改善软管和软轴在接头附近的工作条件；

(4) 不要在加载情况下启动；

(5) 若工作时有可能出现过载，应加安全装置或采用过载保护接头（见表 11-3）；

(6) 当软轴有可能逆转时，应加防逆转装置；

(7) 新的软轴和软管在使用前，应加载跑合 4~8h，跑合后应将软轴加以清洗，涂以润滑脂，以备使用；在使用的过程中也应定期地进行清洗和换油。

第十二章 轴的优化设计初步

第一节 优化的概念

一、无约束函数的极小值

假定要求下列多项式函数的最小值

$$F(X) = 10x_1^2 - 20x_1x_2 + 10x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 + 5 \quad (12-1)$$

$F(X)$ 称为目标函数，我们的目的是要找到 x_1, x_2 的组合使目标函数 $F(X)$ 最小。向量 X 包含 x_1, x_2 ，称为设计变量，由于没有给 x_1, x_2 加任何限制， $F(X)$ 就是无约束函数，我们的问题就是求无约束函数的极小值。

求式 (12-1) 的目标函数的最优解可以采用图解法或解析法。图 12-1 给出的是对应于设计变量 x_1, x_2 的二维设计空间，其中的曲线是 $F(X)$ 等于常数的曲线族。

通常设计空间是 n 维的，其中 n 是设计变量的数目。

从图 12-1 可以确定 $F(X)$ 的最小值发生在 $x_1^* = 1, x_2^* = 1$ 。

该问题的解析法就是对目标函数 $F(X)$ 求偏导数并令其等于零，即

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F(X) = 40x_1^2 - 40x_1x_2 + 2x_1 - 2 = 0 \quad (12-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} F(X) = -20x_1^2 + 20x_2 = 0 \quad (12-3)$$

求解以上两式同样可求得函数的极小值发生在 $x_1^* = 1, x_2^* = 1$ 。但是一阶偏导数为零是函数 $F(X)$ 取最小值的必要条件并不是充分条件，和求一元函数的最小值类同，除一阶导数为

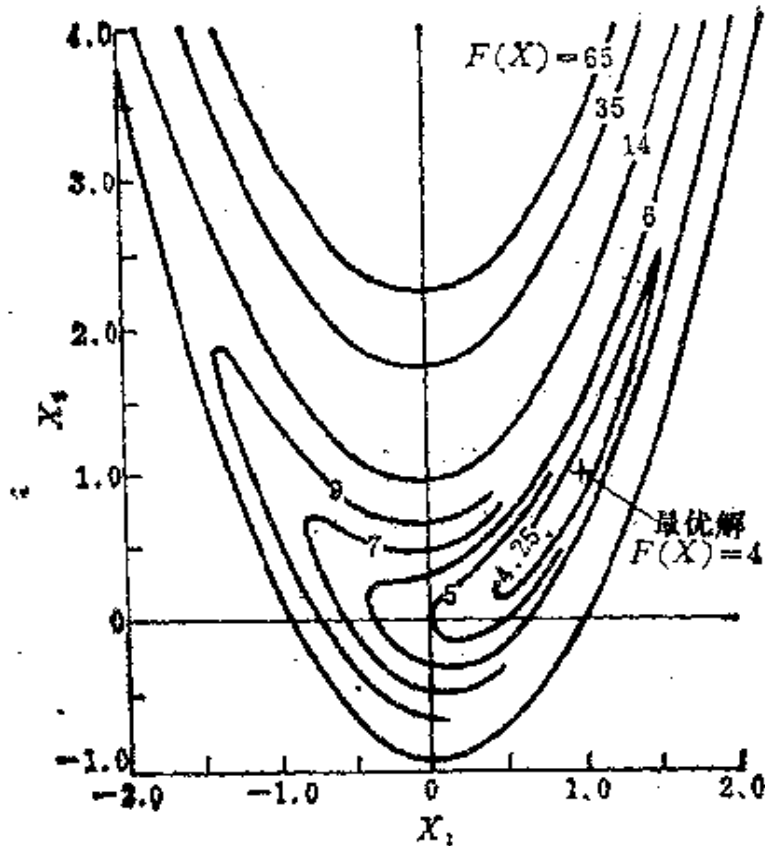


图12-1 两变量设计空间

零的条件外，还应判别二阶导数是否大于零，即还应判别 $F(X)$ 的二阶导数矩阵的行列式的值是否大于零。

上例虽可用图解法和解析法求得最优解，但在工程上没有多大意义。

二、有约束函数的极小值

现考虑一个基于最小重量的扭转轴的优化设计问题。假定轴所受的转矩为 T ，由于工作空间等的限制，要求设计出的轴其直径 $d \leq d_{\max}$ ，轴长 $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$ ，扭转刚度 $k = \frac{T}{\varphi} = \frac{\pi d^4 G}{32 L} \leq [k]$ (φ 为轴的扭转角， G 为材料的扭转弹性模量)，已知单位体积材料重量为 w 。该问题可归结为，

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{目标函数(轴的重量)} W = w \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) L \\
 & \text{受约束于:} \quad \left. \begin{aligned}
 & k \leq [k] \\
 & \tau = \frac{16T}{\pi d^3} \leq [\tau] \\
 & d \leq d_{\max} \\
 & L \leq L_{\max} \\
 & L \geq L_{\min}
 \end{aligned} \right\} \quad (12-4)
 \end{aligned} \right.$$

上述约束条件可写为下述形式:

$$G_1(d, L) = \frac{k}{[k]} - 1 \leq 0$$

$$G_2(d) = \frac{\tau}{[\tau]} - 1 \leq 0$$

$$G_3(d) = \frac{d}{d_{\max}} - 1 \leq 0$$

$$G_4(L) = \frac{L}{L_{\max}} - 1 \leq 0$$

$$G_5(L) = 1 - \frac{L}{L_{\min}} \leq 0$$

该问题有两个设计变量 (d 、 L)，因此可用二维设计空间的图解法求得最优解 (见图 12-2)。

有约束函数极小值的另一个例子如图 12-3 所示，一个承受集中载荷 P 的空心圆柱，希望找到一平均直径 D 和壁厚 t 使圆柱的质量最小。圆柱体的质量为：

$$W = \rho Ah = \rho \pi D t h \quad (12-5)$$

式中 A 为圆柱体的截面积， ρ 为材料的单位质量

为简单计略去任何偏心和横向载荷，仅考虑轴向载荷。圆柱所受压应力为：

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi D t} \quad (12-6)$$

圆柱不发生整体的纵向失稳 (见图 12-3 b) 的临界应力为

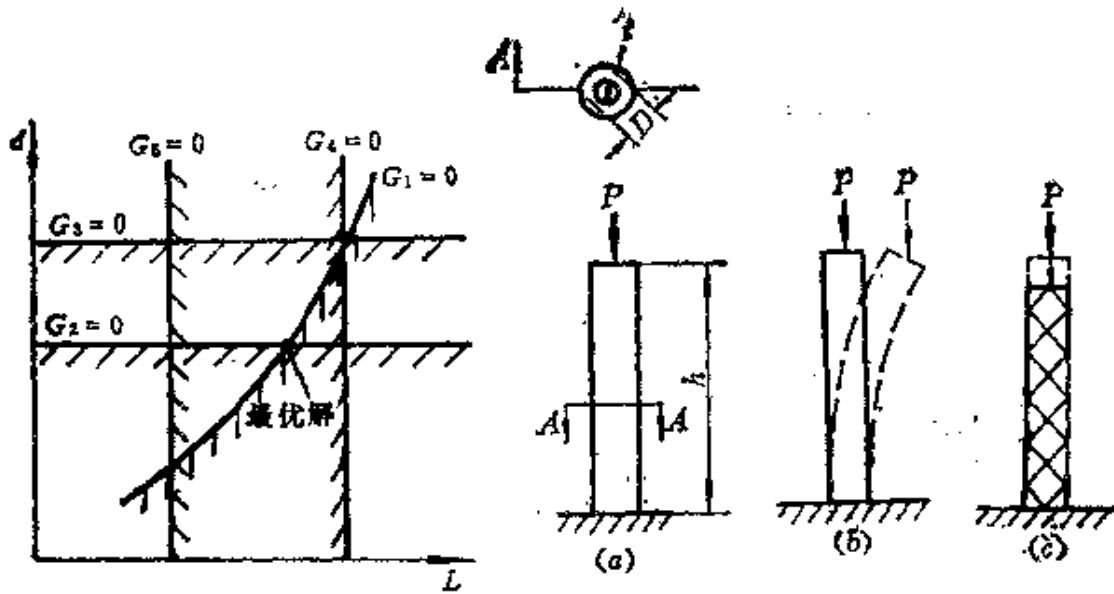


图12-2 扭转轴的变量函数空间

图12-3 最小重量的空心圆柱设计

$$\sigma_c = \frac{4\pi^2 EI}{Ah^2} = \frac{\pi^2 E(D^2 + t^2)}{2h^2} \quad (12-7)$$

式中 E 为弹性模量， I 为截面的惯性矩。

圆柱体不发生图 12-3(c) 所示的局部失稳的临界应力为：

$$\sigma_l = \frac{2Et}{D\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (12-8)$$

上式中 ν 为泊松比。

显然受载圆柱的工作应力 σ 必须满足下列条件：

$$\left. \begin{aligned} \sigma &\leq [\sigma] \\ \sigma &\leq \sigma_c \\ \sigma &\leq \sigma_l \end{aligned} \right\} \quad (12-9)$$

除上述应力限制外，设计还必须满足一定的几何条件，即平均直径 D 应大于壁厚 t ，且两者必须为正，故有：

$$\left. \begin{aligned} D &\geq t \\ D &\geq 10^{-6} \\ t &\geq 10^{-8} \end{aligned} \right\} \quad (12-10)$$

上述问题可以归结为下述有约束函数最小值问题

$$\min W(D, t) = \rho \pi D t h$$

$$\text{约束条件: } g_1(D, t) = \frac{\sigma}{[\sigma]} - 1 \leq 0$$

$$g_2(D, t) = \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \leq 0$$

$$g_3(D, t) = \frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \leq 0$$

$$g_4(D, t) = t - D \leq 0$$

$$D \geq 10^{-6}$$

$$t \geq 10^{-6}$$

(12-11)

上式中的 g_1 、 g_2 、 g_3 通常称为式 (12-9) 的标准形式。

图 12-4 为式 (12-11) 的图解形式, 其中 D_0 、 t_0 为任意选定的 D 、 t 的初值, $W_0 = \rho \pi D_0 t_0 h$, 为作图方便计, 图中横坐标采用 t/t_0 , 纵坐标采用 D/D_0 。从图中可以看出最优解不是唯一

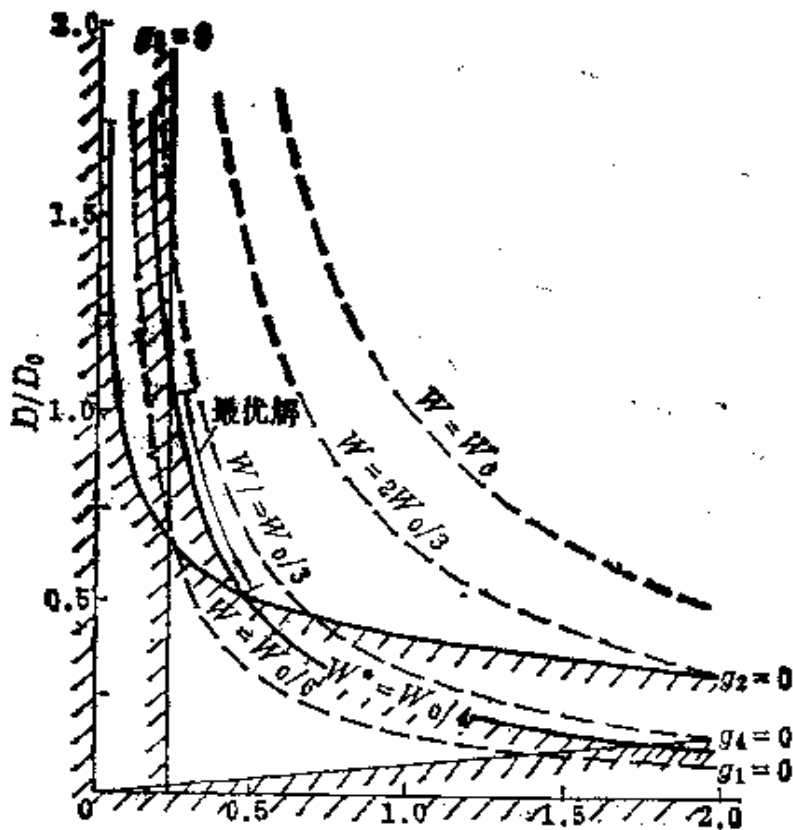


图12-4 空心圆柱的两变量函数空间

的（图中虚线为目标函数等于常数的曲线，带阴影线的曲线为约束边界 $g_i(D, t) = 0$ ）。

在图 12-4 中，由阴影线所定义的约束边界以内的设计空间称为可行设计空间，在这个区域内的所有设计都是可以接受的，任何违背约束边界的设计都是不能接受的，称为不可行设计空间（或称不可行域）。图 12-4 表示的是一般的非线性约束最优问题的最简单例子。

三、一般问题的叙述

非线性约束优化问题的数学表达如下：

$$\left. \begin{array}{l} \min F(X) \quad \text{目标函数} \\ \text{约束条件:} \\ g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, m \quad \text{不等式约束} \\ h_k(X) = 0 \quad k = 1, l \quad \text{等式约束} \\ X'_i \leq x_i \leq x''_i \quad i = 1, n \quad \text{边界约束} \end{array} \right\} \quad (12-12)$$

式中

$$X = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\} \quad \text{设计变量}$$

向量 X 称为设计变量向量，在上述空心圆柱的设计中，向量包含两个变量 D 和 t 。目标函数 $F(X)$ 可以是设计变量的线性或非线性函数。约束条件对不同的问题可能有所差别，如在空心圆柱的设计中只考虑了不等式约束，而无等式约束。但若希望壁厚等于平均直径的十分之一，即 $t = 0.1D$ 这就等于加了一个等式约束。

第二节 轴的优化设计实例

由第六章知当轴的强度与应力均为正态分布时，其可靠度可表示为

$$R = \int_{-t_f}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad (12-13)$$

式中 $t_f = (\bar{\delta} - \bar{s}) / (D_\delta^2 + D_s^2)^{1/2}$,

$\bar{\delta}$ ——强度均值,

\bar{s} ——应力均值;

D_δ, D_s ——强度、应力的均方根偏差。

假定强度和应力的分布是相互独立的, 由式 (12-13) 可知, 要使轴的可靠度最大, 积分下限应尽可能的小。

如果轴是大量大批生产的, 那么在给定的可靠度下, 要使其成本最低, 就是求解下述优化问题

$$\left. \begin{aligned} \min TC &= C_1(\bar{\delta}) + C_2(D_\delta) + C_3(\bar{s}) + C_4(D_s) \\ \text{约束条件 } &(\bar{\delta} - \bar{s}) / (D_\delta^2 + D_s^2)^{1/2} \geq |t_f| \end{aligned} \right\} \quad (12-14)$$

式中 TC ——总的成本;

$c_1(\bar{\delta})$ ——强度均值的成本函数 (单调增);

$c_2(D_\delta)$ ——强度均方根偏差的成本函数 (单调减);

$c_3(\bar{s})$ ——应力均值的成本函数 (单调减);

$c_4(D_s)$ ——应力均方根偏差的成本函数 (单调减);

t_f ——与给定的可靠度相对应的 t_f 值。

$c_1(\bar{\delta})$ 是单调增函数是指强度均值越大成本越高, $c_2(D_\delta)$ 是单调减函数是指强度均方根偏差越大成本越低, 其余类同。

求解式 (12-14) 常用拉格朗日 (Lagrange) 修正函数法。该法的实质是因为函数 $y = f(X)$ 在约束条件 $g_i(X) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 下的条件极值必然是拉格朗日修正函数

$$\varphi = y + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X)$$

的驻点。求解拉格朗日修正函数的驻点, 需解方程组

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$g_i(X) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

由此可知与式 (12-14) 所对应的拉格朗日修正函数为,

$$L(\bar{\delta}, D_\delta, \bar{s}, D_s, \lambda) = c_1(\bar{\delta}) + c_2(D_\delta) + c_3(\bar{s}) + c_4(D_s) \\ + \lambda [\bar{\delta} - \bar{s} - |t_f| (D_\delta^2 + D_s^2)^{1/2}] \quad (12-15)$$

为求得局部最优解将上式分别对 $\bar{\delta}$, D_δ , \bar{s} , D_s , λ 求偏导并令其等于零, 得:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\delta}} = \frac{\partial c_1(\bar{\delta})}{\partial \bar{\delta}} + \lambda = 0 \quad (12-16 a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial D_\delta} = \frac{\partial c_2(D_\delta)}{\partial D_\delta} - \lambda |t_f| D_\delta (D_\delta^2 + D_s^2)^{-1/2} = 0 \quad (12-16 b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial c_3(\bar{s})}{\partial \bar{s}} - \lambda = 0 \quad (12-16 c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial D_s} = \frac{\partial c_4(D_s)}{\partial D_s} - \lambda |t_f| D_s (D_\delta^2 + D_s^2)^{-1/2} = 0 \quad (12-16 d)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{\delta} - \bar{s} - |t_f| (D_\delta^2 + D_s^2)^{1/2} = 0 \quad (12-16 e)$$

上述联立方程组含有 5 个未知数、5 个方程, 故可求得所有局部最优解, 然后用这些局部最优解计算目标函数 TC , 即可找到整体最优解。但在有些设计问题中, 成本函数具有严格的单调特性, 对于最优解来说式 (12-14) 的不等式应满足等式条件, 因为不等式左端的值越大, 成本越高, 因而优化过程将转化成求最小的 $|t_f|$ 值。这样约束函数成为:

$$g(D_\delta, D_s, \bar{\delta}, \bar{s}) = |t_f| (D_\delta^2 + D_s^2)^{1/2} - \bar{\delta} + \bar{s}$$

该函数的海色 (Hessian) 矩阵 (即函数 g 的二阶导数矩阵) 是:

$$\begin{bmatrix} |t_f| D_\delta^2 (D_\delta^2 + D_s^2)^{-3/2} & -|t_f| D_\delta D_s (D_\delta^2 + D_s^2)^{-3/2} & 0 & 0 \\ -|t_f| D_\delta D_s (D_\delta^2 + D_s^2)^{-3/2} & |t_f| D_s^2 (D_\delta^2 + D_s^2)^{-3/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以证明上述矩阵为一半正定矩阵，因而约束函数是一凸函数，这样式 (12-16) 就变为一个凸规划问题，这意味着任一局部最优解就是整体最优解。解方程 (12-16 a) ~ (12-16 e) 可找到最优解，这实质上是个一维搜索问题。

若固定 $\bar{\delta}$ 应用公式 (12-16 a)、(12-16 c) 求解

$$\lambda = -\frac{\partial c_1(\bar{\delta})}{\partial \bar{\delta}} = \frac{\partial c_3(\bar{s})}{\partial \bar{s}} \quad (12-17)$$

可唯一地确定 \bar{s} ，由式 (12-16 e) 可确定 $D_8^2 + D_7^2$ (因为 $\bar{\delta}$ 、 \bar{s} 均已知)， D_8 、 D_7 可由式 (12-16 b) 及式 (12-16 d) 确定。

因为若各个成本函数均为凸函数的话，那么总的成本函数也是凸函数，应用一维搜索方法就不难求得整体最优解。

例题 12-1 假定已知数据如下：

$\bar{\delta}$	5	10	15	20	25	30	35	40	MPa
$c_1(\bar{\delta})$	2.23	6.32	11.62	17.89	25.00	32.86	41.41	50.60	元
D_8	1	2	3	4	5	6	7	8	MPa
$C_2(D_8)$	100	43.53	26.76	18.95	14.50	11.65	9.68	8.25	元
\bar{s}	5	10	15	20	25	30	35	40	MPa
$c_3(\bar{s})$	38.07	25.12	19.69	16.57	14.50	12.99	11.85	10.93	元
D_7	1	2	3	4	5	6	7	8	MPa
$c_4(D_7)$	50	30.78	23.17	18.95	16.21	14.26	12.81	11.66	元

根据上述数据用曲线拟合的办法可求得各成本函数的表达式如下：

$$c_1(\bar{\delta}) = 0.2(\bar{\delta})^{1.5}$$

$$c_2(D_s) = 100(D_s)^{-1.2}$$

$$c_3(\bar{s}) = 100(\bar{s})^{-0.6}$$

$$c_4(D_r) = 50(D_r)^{-0.7}$$

上述 4 个函数其二阶导数均为正所以是凸函数。

若规定系统的可靠度为 0.990, 由正态积分表查得 $t_r = -2.33$, 则优化问题归结为:

$$\left. \begin{aligned} \min TC &= 0.2(\bar{\delta})^{1.5} + 100(D_s)^{-1.2} + 100(\bar{s})^{-0.6} + 50(D_r)^{-0.7} \\ \text{约束条件} \quad &\bar{\delta} - \bar{s} - 2.33(D_s^2 + D_r^2)^{1/2} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (12-18)$$

对应于式 (12-16) 的方程组为:

$$0.3(\bar{\delta})^{0.5} + \lambda = 0 \quad (12-19 a)$$

$$-120(D_s)^{-2.2} - 2.33 \lambda (D_s^2 + D_r^2)^{-1/2} D_s = 0 \quad (12-19 b)$$

$$-60(\bar{s})^{-1.6} - \lambda = 0 \quad (12-19 c)$$

$$-35(D_r)^{-1.7} - 2.33 \lambda (D_s^2 + D_r^2)^{-1/2} D_r = 0 \quad (12-19 d)$$

$$\bar{\delta} - \bar{s} - 2.33(D_s^2 + D_r^2)^{1/2} = 0 \quad (12-19 e)$$

由式 (12-19 a)、式 (12-19 c) 得:

$$\bar{s} = 27.424(\bar{\delta})^{-0.3125} \quad (12-20)$$

由式 (12-19 b)、式 (12-19 d) 得

$$D_r = 0.6336 D_s^{1.185} \quad (12-21)$$

由式 (12-20)、式 (12-19 e) 得

$$D_s^2 + 0.4014 D_s^{2.370} = \left(\frac{\bar{\delta} - \bar{s}}{2.33} \right)^2 \quad (12-22)$$

式 (12-22) 是一个单调函数, 由它可唯一地确定 D_s 。

通常将式 (12-22) 写成便于迭代的形式

$$D_0 = \left[\left(\frac{\bar{\delta} - \bar{s}}{2.33} \right)^2 - 0.4014 D_0^{2.870} \right]^{1/3} \quad (12-23)$$

如果给定一个 $\bar{\delta}$, 由式 (12-20) 计算 \bar{s} , 由式 (12-19 e) 计算 $D_0^2 + D_1^2$, 由式 (12-23) 采用简单的迭代法可求得 D_0 , 进而求得 D_1 , 该计算过程列表如下:

从上表中可以看出 $\bar{\delta}$ 的最优解界于 26~28MPa 之间, 应用斐波那契 (Fibonacci) 法进行一维搜索可找到 $\bar{\delta}$ 的最优解为 27.125MPa, 即

$$\bar{\delta}^* = 27.125 \text{MPa}, \quad \bar{s}^* = 9.772 \text{MPa}$$

$$D_0^* = 5.6124 \text{MPa}, \quad D_1^* = 4.8929 \text{MPa}$$

$$TC = 8278.83 \text{元}$$

$\bar{\delta}$	\bar{s}	$\bar{\delta} - \bar{s}$	$D_0^2 + D_1^2$	D_0	D_1
15	11.7656	3.2344	1.9270	1.1625	0.7574
20	10.7540	9.2460	15.7469	3.1252	2.4454
25	10.0297	14.9703	41.2809	4.895	4.1621
26	9.9075	16.0925	47.7018	5.2345	4.5064
27	9.7913	17.2087	54.5484	5.5695	4.8502
28	9.6807	18.3193	61.8167	5.9019	5.1951
30	9.4742	20.5258	77.6047	6.5549	5.8831

$\bar{\delta}$	$c_1(\bar{\delta})$	$c_3(\bar{s})$	$c_2(D_0)$	$c_4(D_1)$	$TC(\times 10^{-3})$
15	11.6190	22.7841	83.4696	60.7355	178.6082
20	17.8885	24.0463	25.4769	26.7378	94.1500
25	25.0000	25.0742	14.8695	18.4269	83.3706
26	26.5149	25.2593	13.7199	17.4297	82.9237
27	28.0592	25.4388	12.7356	16.5553	82.7889
28	29.6324	25.6127	11.8798	15.7781	82.9031
30	32.8634	25.9462	10.4742	14.4626	83.7464

与式 (12-18) 相似的优化问题是

$$\left. \begin{aligned} \max t_r &= (\bar{\delta} - \bar{s})(D_s^2 + D_r^2)^{-1/2} \\ \text{约束条件: } &c_1(\bar{\delta}) + c_2(D_s) + c_3(\bar{s}) + c_4(D_r) \leq r \end{aligned} \right\} (12-24)$$

上式中的 r 为希望的最高成本。

与上式相对应的拉格朗日修正函数为

$$\begin{aligned} L(\bar{\delta}, \bar{s}, D_s, D_r, \lambda) &= (\bar{\delta} - \bar{s})(D_s^2 + D_r^2)^{-1/2} \\ &+ \lambda [c_1(\bar{\delta}) + c_2(D_s) + c_3(\bar{s}) + c_4(D_r) - r] \end{aligned}$$

若取 $r = 75$ 元, 采用例题 12-1 的成本函数和其它数据, 读者可参考上例采用任何一种一维搜索方法可求得式 (12-24) 的最优解为:

$$\bar{\delta}^* = 24.938 \text{MPa}, \quad \bar{s}^* = 10.0375 \text{MPa}$$

$$D_s^* = 6.52508 \text{MPa}, \quad D_r^* = 5.8513 \text{MPa}$$

$$\eta = 1.7001, \quad \text{与此对应的可靠度 } R = 0.9554.$$