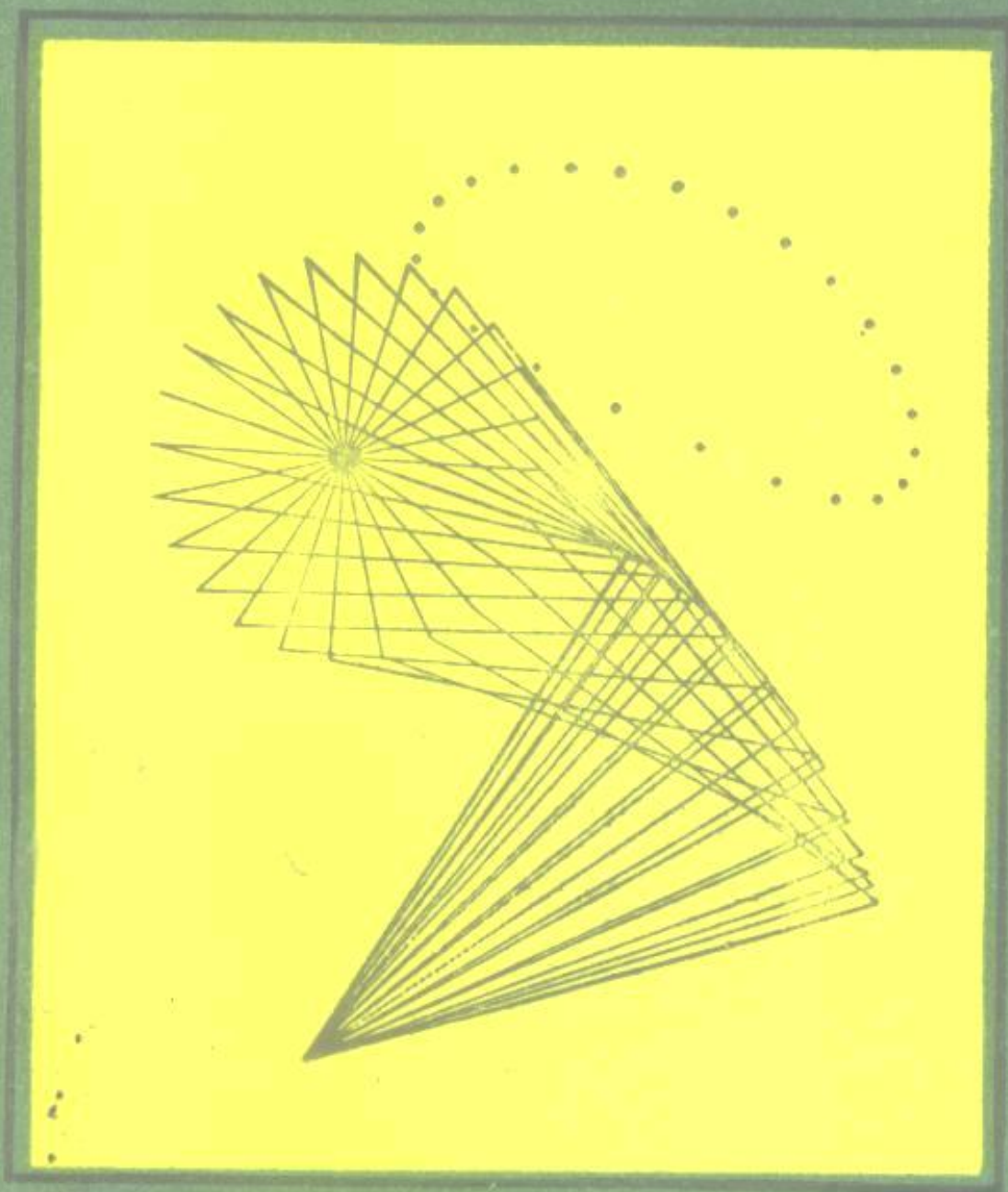


高等机构设计

—分析与综合

(第二卷)



[美] 乔治·N. 桑多尔 阿瑟·G. 厄尔德曼 著

庄细荣 杨上培译 张启先 校 高等教育出版社

TH/12

5060

2

372842

高等机构设计

——分析与综合

第二卷

[美]乔治·N·桑多尔 阿瑟·G·厄尔德曼 著

庄细荣 杨上培 译

张启先 校



高等教育出版社

(京)112号

内 容 简 介

本书共两卷,系1984年出版的美国大学本科(第一卷)和研究生(第二卷)机构学教材。本卷对平面机构运动综合、轨迹曲率理论和机构动力学的高深课题都作了系统、深入的探讨,对空间机构和机器人也作了一定深度的论述和介绍。全书介绍的各种方法均与电子计算机的应用相结合。计算公式、设计实例和每章末的实用习题较多。本书四章的内容是相对独立的,既可作为研究生的机构学教材,又可作为分专题的选修课教材,也可供从事机构分析、机构综合的研究及设计的工程技术人员参考。

D281/24

ADVANCED MECHANISM: ANALYSIS AND SYNTHESIS (VOL. 2)

George N. Sandor & Arthur Erdman

Original English Language edition published by Copyright © 1984 by Prentice Hall, Inc. All Right Reserved



[美]乔治·N·桑多尔 阿瑟·G·厄尔德曼 著
庄细荣 杨上培 译
张启先 校

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

开本 787×1092 1/16 印张 24.25 字数 550 000

1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷

印数 0001—1 105

ISBN7-04-003618-5/TH·288

定价 15.15 元

译 者 序

本书系美国大学的机构学教材。全书共两卷，本书为第二卷。本教材与机构学其它教材相比，具有显著的特点。首先，本书系统地论述了机构学中的几个高深课题。正如作者在序言中所说的：“这部著作体现了在运动学、动力学和动态弹性体动力学方面分析与综合的一般方法研究中所达到的最新成就。”在平面机构综合、轨迹曲率理论和动力学的高深课题中，作者在传统机构学的基础上，增加了许多新意和深度，体现了近年来美国机构学教学、科研的成果和经验。其次，全书以复数向量法为基本工具，突出了计算机在机构学中的应用，给传统的德国学派用运动几何学得到的机构学高深课题赋予相应的解析方法，把平面机构运动综合的布氏理论、轨迹曲率理论中的欧拉-萨伐里方程等的理论和计算公式以解析方法表达为可用计算机运算的新颖题材。第三，本书突出了应用与实践，即使是在论述高深课题中，作者仍以应用为基点，列举了大量来自生产和生活实践的生动例题和习题，启发读者对机构的亲切感和发明创新的意识。

译者有鉴于此，遂将本书译出，以供从事机构学教学、科研和机构设计的广大师生和工程技术人员参考。本书的序言、第一、二章分别与第一卷的序言、第一章、第八章相同。为节省篇幅，本中译本将第一、二章略去，仅将目录列出。后面各章中引用这两章的公式，请相应参阅第一卷第一章和第八章。本书第三、四章由庄细荣翻译，第五、六章由杨上培翻译，全书译稿由张启先校阅。由于译、校者的学识有限，译文中如有不当或谬误之处，望读者批评指正。

译 者

一九九〇年九月于北京

序 言

这部两卷本著作的完成历时 15 年。其内容包括：第一卷，机构设计——分析与综合；第二卷，高等机构设计——分析与综合。书中材料主要来源于作者的教学、科研与咨询实践，同时也来自作者的同事们的贡献和业已发表的论文。作者代表了在机构设计方面有 30 多年教学经验的一个集体，他们已共同为 35 个以上的公司在机械系统设计和分析方面提供了咨询服务。

这部著作体现了在运动学、动力学和动态弹性体动力学方面分析与综合的一般方法研究中所达到的最新成就。这些研究是从桑多尔博士(Dr. Sandor)在哥伦比亚大学弗洛伊登斯坦博士(Dr. Freudenstein)指导下的博士论文开始的，并且在以后接连发表的 100 多篇文章中继续下来。作者的目的是提供一部适时的教科书，该书要适合于使用计算机，易于教学，要有很多例题，且每一章末附有大量的习题。

这两卷教科书所包括题材的选取旨在：一方面，为学生理解当代的机构设计方法提供足够的理论基础；另一方面，使学生增强实际应用这些理论的技能。同时意在使这部书可供从事实际设计工作的人员参考，并为研究人员提供原始资料。因此，题材的处理以机构设计的计算机辅助方法(CAD)为特色。把有用的、能提供信息的、以图解为基础的方法与计算机辅助的方法，包括人机对话的计算机作图法的各种应用结合起来，这样，就为学生和设计师提供了有力的机构设计工具。作者力图以这样的方式使学生和忙碌的设计师能够容易地掌握所有现代的运动分析和综合方法，而不必查阅大量与之有关的论文和文章并消化其内容。

书里有很多工业上的设计实例和典型分析。这些实例说明连杆机构分析与综合的复数法和其它几种方法是有效的。此外，两卷书的各章末尾附有大量习题：每卷 250 多题，每题中大都还有几个小题。度量单位是国际单位制(SI)和英制混用的。

作者设想学生只具有数学、力学的基础知识。因此，第一卷全部可作为大学本科机构运动分析和综合课程全面的教科书。可以教一个学期，也可以教前后两个学期。例如，删掉了第六、第七章(凸轮和齿轮)就能构成一个学期用的、仍然自成体系的课程内容。第二卷包含了一个或两个学期研究生课程的内容。选择其中某些章节可用于一个季度^①或一个学期的专门课程。例如，第五章，机构动力学——几个高深专题，配合第二、第三章的部分内容，就是一门课的教材。这门课可涉及连杆机构的动态静力学、时间响应、振动、平衡、动态弹性体动力学，以及刚性回转件的平衡。

以上是如何使用本书的几个例子。不过，由于多数章节具有自成体系的特点，所以教师可以选取某几章或这些章的组合作为专门课题。书末开列的大量参考文献对于有兴趣的读者作进一步的学习、研究是很有帮助的。第二卷的第一、第二章与第一卷的第一、第八章的内容是相同

^① 对一学年分为四个学期的学校——译者注。

的,这样每一卷就自成整体,使用时不必互相参考。

每一卷的内容简述如下:第一卷,第一章,运动学与机构学绪论,是对机构设计中一些基本问题的概略介绍。第二章,机构设计的基本原理,涉及设计方法学,并指导读者选择本书个别有关章节去解决在机构设计或实际运转中出现的具体任务和具体问题。第三章,位移和速度分析,既讨论了图解法,也讨论了解析法来求绝对速度、相对速度、联接中的反力和机械效益;还包含有为了用复数法分析四杆机构而编制适用于各类计算机的程序所必需的全部资料。第四章,加速度分析,论述了确定加速度差、相对加速度和科氏加速度的图解法和解析法;解释了平面机构的速度等效问题,并用例子说明了这个概念。第五章介绍了用各种方法进行的动力分析和动态静力分析,并着重讲了机构各构件的分离体示力图。第六章阐述了简单的凸轮-从动件系统和用凸轮调节的连杆机构的设计方法。第七章介绍了渐开线齿轮及轮系,包括周转轮系的速比、力分析和功率流分析。第一卷的最后一章即第八章是平面机构尺度综合入门,既用图解法,也用解析法。解析法是以“标准型”复数法为基础的封闭型线性分析的方法,把单环和多环机构的综合作为具有一阶或高阶逼近的函数生成、轨迹生成和运动生成问题来处理。

第二卷以和第一卷相同的绪论即第一章开头。第二卷的第二章与第一卷的第八章一样。第三章将平面机构运动综合的解析法扩展到精确条件多于三个的问题,是用非线性封闭型解法,包括布尔梅斯特(Burmester)理论来实现的;为了减轻繁重的计算工作,叙述了一套名为“LINCAGES”的计算机软件包;摆线-曲柄机构和齿轮-连杆机构也在这一章。第四章提出了一个适用于计算机的、用复数来研究平面轨迹-曲率理论的新方法,它以新的显函数形式来表述欧拉-萨伐里公式(Euler-Savary Equation) (ESE),同时叙述了博比利尔作图法(Bobillier's Construction) (BC)的各种变化形式,论述了欧拉-萨伐里公式和博比利尔作图法这两种方法的等效性。第五章是对机构动力学的综合论述,涉及了矩阵法、拉格朗日法、自由振动、阻尼振动、隔振、刚性回转件的平衡、连杆机构震动力和震动力矩的平衡,每一部分都联系到计算机程序。这一章还讲到了初步的动态弹性体动力学(KED),这是用来研究高速机构的。这里,必须放弃通常关于刚性构件的假设,来考虑弹性构件由惯性力引起的应力和应变。为了帮助解决这个复杂问题,把刚体运动学和动力学与弹性体的有限元法结合起来。第二卷的最后一章,第六章,涉及了用矩阵法作三维空间机构、包括机器人操作手的位移、速度和加速度分析,欧拉角处理得易于教学且比较直观。这一章的也是这本书的结尾,是空间机构运动综合的一些方法及其应用的介绍,并用例子作了说明。

考虑到工程、技术教学条件鉴定委员会(ABET)规定的在机械工程的课程里加重设计方面的内容的要求,这两卷书为从设计角度来学习机构学提供了一个极好的工具。本书也符合工程方面的课程要着重计算机辅助设计和制造(CAD/CAM)以及计算机辅助工程(CAE)的要求。很多计算机程序或者以配有示范的输入-输出数据表的流程图形式附在课文中,或者可通过作者得到。

复数法被本书用作人机对话计算机程序的基础,这种程序利用图形输出和阴极射线管(CRT)显示终端。设计师不必研究这些程序所依据的理论就能在图示屏幕前同计算机对话,并可在

寻求设计问题的最优解中探索几千个可能的方案。这样，设计师只要在每个需要根据人的判断作出决策的环节上留在人机对话的“回路”里，而把繁重的计算任务交给计算机。

作者想对许多同事和学生表示感激。但是，在本书写作中以评论、建议、求解和校对例题以及提供某些章节的初稿等方式作出贡献的人太多，不胜一一列举。在提供初稿的人中有阿肖克·米德哈博士(Dr. Ashok Midha)(动态弹性体动力学一节)、黛安妮·里科(Dianne Rekow)(平衡一节)、罗伯特·威廉斯博士(Dr. Robert Williams)(空间机构)和讲授了本教科书的最初几稿并提出了很多改进建议的唐纳德·R·瑞利博士(Dr. Donald R. Riley)。其他做出了很大贡献的有约翰·古斯塔夫森(John Gustafson)、李·亨特(Lee Hunt)、汤姆·卡尔森(Tom Carlson)、雷·吉斯(Ray Giese)、比尔·达赫洛夫(Bill Dahlof)、汤姆·蔡斯(Tom Chase)、王森洪(Sern Hong Wang)、桑贾伊·G·丹德博士(Dr. Sanjay G. Dhade)、帕特里克·斯塔尔博士(Dr. Patrick Starr)、威廉·卡森博士(Dr. William Carson)、查里斯·F·莱因霍尔茨博士(Dr. Charles F. Reinholtz)、曼纽尔·赫尔南德茨博士(Dr. Manuel Hernandez)、马丁·狄吉罗拉莫(Martin Digirolo)、庄细荣和杨上培，等等。

还要感谢国家科学基金会土木与机械工程处机械系统项目审核组，由于他们的支持，给予佛罗里达大学MEA-8025812号研究项目拨款，曲率问题一章的部分内容才得以酝酿问世并在杂志上发表一些文章。例题和典型分析的出处均在课文中和图名里加以注明。其他支持者在作者的很多期刊论文里(列在本书的参考文献中)曾有过鸣谢。这些论文中的一些材料经过改写已编入本书。

作者及其合作者在继续研究新的课题，以便在可能时充实到将来的版本中。因此，对本书读者的意见和建议，作者将非常感激。

乔治·N·桑多尔(George N. Sandor)阿瑟·G·厄尔德曼(Arthur G. Erdman)

目 录

第一章 运动学与机构学绪论(略)1	
1.1 引言.....1	
1.2 运动.....1	
1.3 四杆机构.....1	
1.4 相对运动学.....1	
1.5 运动简图.....1	
1.6 六杆运动链.....1	
1.7 自由度.....1	
1.8 分析与综合.....1	
习题.....1	
第二章 运动综合概论——图解法与线性解析法(略)2	
2.1 引言.....2	
2.2 运动综合的任务.....2	
2.3 数综合:关联杆系概念.....2	
2.4 尺度综合的工具.....2	
2.5 图解法综合——运动生成:两个预定位置.....2	
2.6 图解法综合——运动生成:三个预定位置.....2	
2.7 按轨迹生成的图解法综合:三个预定位置.....2	
2.8 带有预定标时的轨迹生成:三个预定位置.....2	
2.9 按轨迹生成(无预定标)的图解法综合:四个位置.....2	
2.10 函数生成:三个精确点.....2	
2.11 复盖法.....2	
2.12 解析综合方法.....2	
2.13 运动综合中的复数模型.....2	
2.14 双矢组或标准型.....2	
2.15 预定位置和自由选择数的关系.....2	
2.16 按运动、轨迹和函数生成的三个预定位置的综 合.....2	
2.17 相应于四杆机构三个精确点的综 合程序.....2	
2.18 三个精确点综合:解析法与 图解法比较.....2	
2.19 三个精确点综合 向多环机构的推广.....2	
2.20 圆点和中心点圆.....2	
2.21 指定固定铰链的位置.....2	
2.22 按三点函数生成的弗罗伊登斯坦方程.....2	
2.23 环封闭方程法.....2	
2.24 阶综合:四杆函数生成.....3	
附录:实例研究——竖铰链窗机构的 型综合习题.....3	
第三章 连杆机构的运动综合:几个高深问题4	
3.1 引言.....4	
3.2 四个预定位置:运动生成.....4	
3.3 按四个预定位置求解的方法.....6	
3.4 四个预定精确点的计算机程序.....9	
3.5 四个有限分离预定位置的运动生成:两 个三精确点情况的叠加.....12	
3.6 四位置综合的特殊情况.....14	
3.7 运动生成:五个位置.....20	
3.8 按五个预定位置求解的方法.....22	
3.9 布尔梅斯特点理论的扩展:带预定标 的轨迹生成和函数生成.....24	
3.10 布尔梅斯特理论的进一步扩展.....30	
3.11 多环连杆机构的综合.....33	
3.12 双功能多环机构的应用.....35	
3.13 齿轮连杆机构的运动综合.....41	
3.14 复合分离位置综合的讨论.....48	
附录:A3.1 LINCAGES程 序包.....58	
附录:A3.2.....64	
习题.....65	
第四章 轨迹曲率理论92	
4.1 引言.....92	
4.2 定瞬心线和动瞬心线.....92	
4.3 速度.....94	
4.4 加速度.....100	
4.5 转折点和转折圆.....102	
4.6 欧拉-萨伐里公式.....105	

4.7	博比利尔作图法	110
4.8	共线轴	112
4.9	博比利尔定理	114
4.10	哈特曼作图法	114
4.11	布雷塞圆	117
4.12	加速度场	118
4.13	回归圆	119
4.14	尖点生成点	121
4.15	叉点生成点	121
4.16	ρ 曲线	122
4.17	运动平面四个无限接近位置的曲率驻点三次曲线, 即布尔梅斯特圆点和圆心点曲线	123
4.18	四个无限接近位置的圆点曲线和圆心点曲线	128
4.19	鲍尔点	130
	习题	131
	练习	135
第五章	机构动力学——高深内容	138
5.1	引言	138
5.2	应用矩阵法进行动态静力分析的复习	139
5.3	时间响应	144
5.4	机构时间响应的改善	152
5.5	虚功	154
5.6	拉格朗日运动方程	159
5.7	单自由度系统的自由振动	170
5.8	自由振动的衰减	173
5.9	单自由度系统的受迫振动	175
5.10	转子的平衡	182
5.11	机构的力和力矩平衡简介	187
5.12	力的平衡	188
5.13	震动力矩的平衡	195
5.14	力矩平衡对输入扭矩的作用	208
5.15	机构平衡的其它方法	213
5.16	力和力矩平衡的计算机程序	215
5.17	平衡——附录A: 物理摆	223
5.18	平衡——附录B: 配重形状对平衡的影响	225
5.19	高速弹性机构的分析	226
5.20	平面运动中的弹性梁单元	228
5.21	梁单元的位移场	230
5.22	单元的质量和刚度矩阵	232
5.23	系统的质量和刚度矩阵	234
5.24	弹性连杆机构模型	235
5.25	整个系统矩阵的建立	236
5.26	运动方程	239
5.27	机构中的阻尼	240
5.28	刚体加速度	242
5.29	应力计算	243
5.30	解法	244
	习题	258
第六章	空间机构——兼介绍机器人学	266
6.1	引言	266
6.2	描述平面有限位移的变换	272
6.3	平面有限变换	272
6.4	单位矩阵变换	273
6.5	有限旋转的平面矩阵算子	274
6.6	齐次坐标和有限的平面平移	275
6.7	几个有限位移的并置运算	276
6.8	绕不通过原点的轴的旋转	278
6.9	刚体的变换	279
6.10	空间变换	280
6.11	空间机构的分析	295
6.12	用基本矩阵来对构件和联接建模	301
6.13	工业机器人的运动分析	311
6.14	位置分析	323
6.15	速度分析	327
6.16	加速度分析	328
6.17	三维空间内点的运动学	330
6.18	例: 一个三维机构的运动分析	333
6.19	空间机构的综合	337
6.20	空间机构的向量综合	341
	习题	348
	练习	355
	参考文献	357

第一章 运动学与机构学绪论(略)^①

- 1.1 引言
 - 1.2 运动
 - 1.3 四杆机构
 - 1.4 相对运动学
 - 1.5 运动简图
 - 1.6 六杆运动链
 - 1.7 自由度
 - 1.8 分析与综合
- 习题

^① 本章与本书第一卷(《机构设计——分析与综合》)中第一章重复,为节省中译本篇幅,减轻读者负担,本卷不再编入。读者在阅读后续章节中凡遇本章内容,请参阅第一卷中译本中第一章的相应内容。

第二章 运动综合概论——图解法与线性解析法(略)^①

- 2.1 引言
- 2.2 运动综合的任务
- 2.3 数综合: 关联杆系概念
- 2.4 尺度综合的工具
- 2.5 图解法综合——运动生成: 两个预定位置
- 2.6 图解法综合——运动生成: 三个预定位置
- 2.7 按轨迹生成的图解法综合: 三个预定位置
- 2.8 带有预定时标的轨迹生成: 三个预定位置
- 2.9 按轨迹生成(无预定时标)的图解法综合: 四个位置
- 2.10 函数生成: 三个精确点
- 2.11 复盖法
- 2.12 解析综合方法
- 2.13 运动综合中的复数模型
- 2.14 双矢组或标准型
- 2.15 预定位置和自由选择数的关系
- 2.16 按运动、轨迹和函数生成的三个预定位置的综合
- 2.17 相应于四杆机构三个精确点的综合程序
- 2.18 三个精确点综合: 解析法与图解法比较
- 2.19 三个精确点综合向多环机构的推广
- 2.20 圆点和中心点圆
- 2.21 指定固定铰链的位置
- 2.22 按三点函数生成的弗罗伊登斯坦方程

^① 本章与本书第一卷(《机构设计——分析与综合》)中第八章重复,为节省中译本篇幅,减轻读者负担,本卷不再编入。读者在阅读后续章节中凡遇本章内容,请参阅第一卷中译本中第八章相应内容。例如,本卷中所述“表 2.1”系指第一卷中“表 8.1”;“图 2.14”系指第一卷中“图 8.14”,等等。

2.23 环封闭方程法

2.24 阶综合: 四杆函数生成

**附录: 实例研究——竖铰链窗机构的型综合
习题**

第三章 连杆机构的运动综合: 几个高深问题

3.1 引言

第二章介绍了连杆机构的各种综合方法。重点叙述了三个预定位置的运动生成、轨迹生成和函数生成,因为这个精确点数目是对应于以标准双矢组形式综合四杆机构时,可用线性方法求解的最多预定位置数的(见表 2.1)。本章扩展了第二章介绍的复数法和标准双矢组形式,用以研究四个和五个精确点的情况。由于大多数平面连杆机构都可用这个标准型算法设计,所以,这里将不继续研究运动综合的其它方法在这两种情况下的应用。我们将看到:在四个精确点的情况下,利用计算机作图程序,发挥计算机能以人机对话方式显示结果的能力,一眼就能观察出无限多个解(表 2.1)。

3.2 四个预定位置:运动生成

图 2.35 至 2.38 提供了按两个和三个预定位置的共平面运动生成来综合双杆组的几何说明。图 3.1a 和 b 表示处于两个或三个位置的运动平面 π 。本章所用符号与运动学文献相一致,即:定销轴用 m (代表德文“Mittelpunkt”这个词,意思是“圆心点”)标出;而绕定销轴回转的双副杆上的动销轴标为 k (代表“Kreispunkt”这个词,意思是“圆点”)。

回想一下,对于两个预定位置,有三阶无穷多个 k 和 m 点对,因为 k_1 (动销轴在其第一个位置)可以位于平面 π (处于第一个位置)上的任何地方,而 m 在 k_1, k_2 (k 的第一和第二位置)的垂直平分线上又可以是任意的。例如,在图 3.1a 中表示了两个这样的 k - m 点对,即 $k_1^1 m^1$ 和 $k_2^1 m^2$ 。对于三个位置(图 3.1b), k_1^1 的位置表示有两阶无穷多个选择,但 $k_1^1 k_2^1$ 和 $k_2^1 k_3^1$ 的两条垂直平分线的交点则仅给出一个圆心点,即 m^1 。

图 3.1c 表示一个平面的上述三个预定位置(π_1, π_2 和 π_3)加一个附加位置 π_4 。图中还表示了在前三个预定位置上对应于动销轴 k^1 和 k^2 的两个定销轴 m^1 和 m^2 。 k_2^1, k_4^1 和 k_2^2, k_4^2 的垂直平分线 $k_2^1 k_4^1$ 和 $k_2^2 k_4^2$ 也表示出来了。注意,这两条垂直平分线并不通过 m^1 和 m^2 。这就是说,无论是 k^1 还是 k^2 都不能作为这四个位置的动销轴。但表 2.1 却指出,一般有无穷多个解——这不是矛盾呢?不矛盾。问题的提法应该是:“物体 π 上有没有一些点 k , 当 π 有四个任意的预定位置时,它们相应的四个位置落在固定平面内的一个圆周上?”布尔梅斯特在 1876 年就提出了这样的问题并且作了肯定的回答。下面用复数建立的布尔梅斯特理论和他用几何方法发现的理论是一样的。

这里将再次推导一下标准型双矢组公式(见图 2.56 和图 2.57)。图 3.2 表示运动平面 π 的两

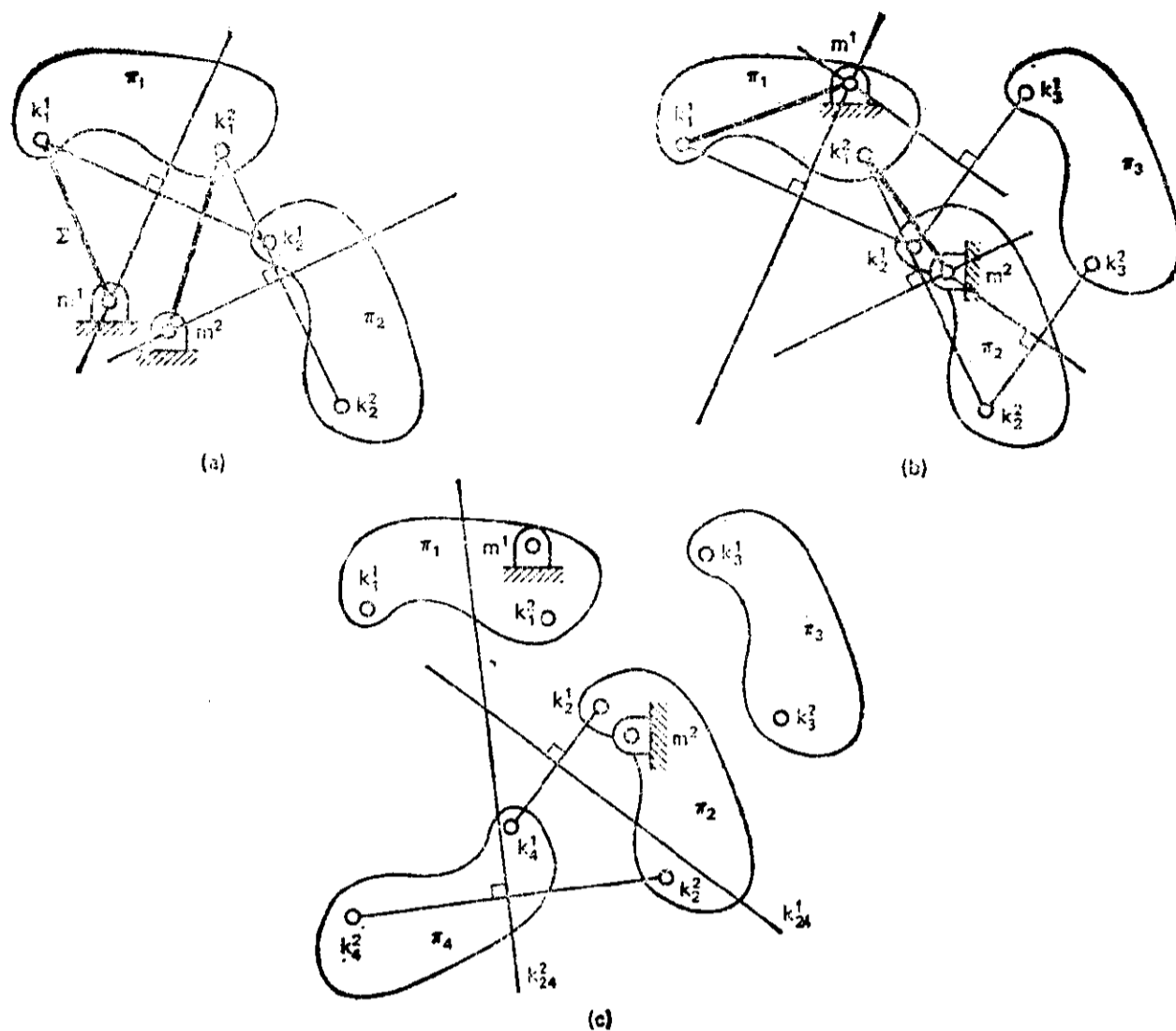


图 3.1 (a) 运动平面 π 的两个共平面预定位置; (b) 三个预定位置; (c) 四个预定位置: 对第二和第四两个位置所作的垂直平分线(k_{24}^1 和 k_{24}^2)并不通过由前三个位置得到的定销轴 m^1 和 m^2

个预定位置 π_1 和 π_j 。这个平面的位置可用设在它上面的轨迹点 P 和有向线段 Pa (也设在运动平面上) 的位置来规定。 P 的两个位置 P_1 和 P_j 可以相对于一个任意的固定坐标系分别用 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_j 来定位。轨迹位移向量 $\delta_j = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_1$ 决定了 P_j 相对于 P_1 的位置。该平面从位置 1 到 j 的转动与有向线段 Pa 的转动相等, 标作 α_j 。

令点 k_1 (设在运动平面上) 是可能为圆点的未知位置, m 是相应的未知圆心点 (设在固定平面上)。由于 k 和 P 都同属于运动平面, 所以在 π_1 内从 k_1 到 P_1 可以画一个未知向量 \mathbf{Z} 。还有, 我们可以用另一个未知向量 \mathbf{W} 来规定圆点 k_1 相对于圆心点 m 的位置。这样, 当平面 π 从 π_1 运动到 π_j 时, 向量 \mathbf{W} 就绕 m 回转一个未知角 β_j , 而 $P_1 a_1$ 则转过角 α_j 到达 $P_j a_j$ 。

注意, 上面定义的向量构成了一个包括第一和第 j 位置的闭环:

$$\mathbf{W}e^{i\beta_j} + \mathbf{Z}e^{i\alpha_j} - \delta_j - \mathbf{Z} - \mathbf{W} = 0 \quad (3.1)$$

归并同类项, 得到

$$\mathbf{W}(e^{i\beta_j} - 1) + \mathbf{Z}(e^{i\alpha_j} - 1) = \delta_j \quad (3.2)$$

注意, 这一方程就是“标准型”[见方程 (2.16)], 因为 δ_j 和 α_j 可从 π 的预定位置已知。对于四个位置, 式 (3.2) 那样的方程将有三个 ($j=2, 3, 4$):

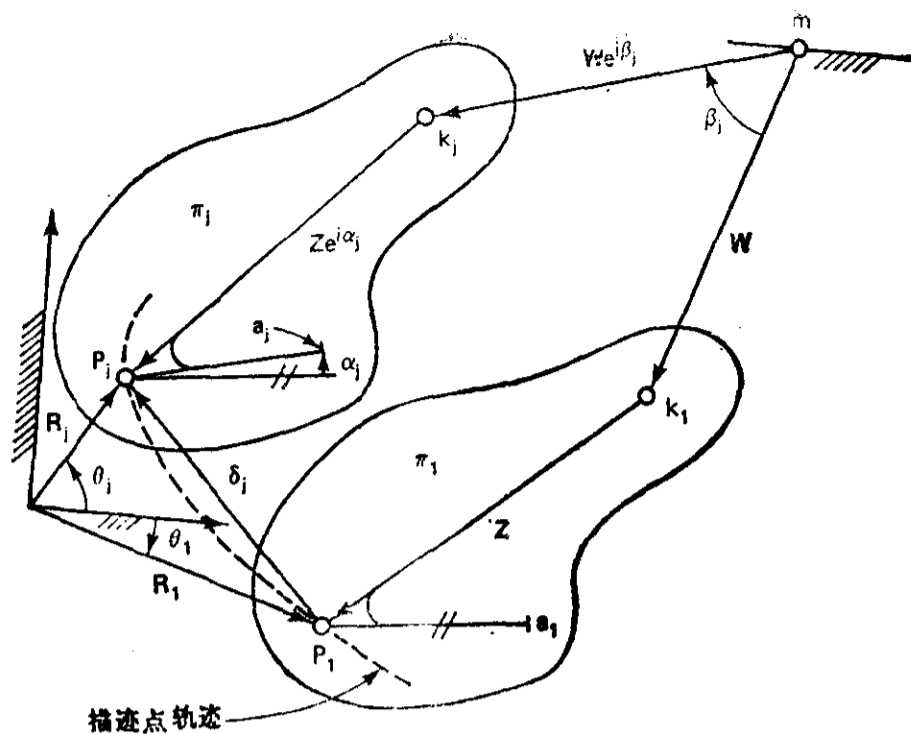


图 3.2 未知双矢组 W 、 Z ，它们可引导运动平面 π 从第一位置运动到第 j 位置。点 m 和 k_1 是一个未知的布尔梅斯特点对

$$\begin{aligned} W(e^{i\beta_2} - 1) + Z(e^{i\alpha_2} - 1) &= \delta_2 \\ W(e^{i\beta_3} - 1) + Z(e^{i\alpha_3} - 1) &= \delta_3 \\ W(e^{i\beta_4} - 1) + Z(e^{i\alpha_4} - 1) &= \delta_4 \end{aligned} \quad (3.3)$$

从表 2.1 回想到，对于四个预定位置，为了平衡方程数与未知量数，必须作一个自由选择。如果选定 W 的一个转角，比如说 β_2 ，则必须从该方程组解出六个未知实数，即： Z 、 W 和角度 β_3 、 β_4 。方程(3.3)是 β_3 和 β_4 的非线性(超越)方程。

3.3 按四个预定位置求解的方法

我们暂时把方程(3.3)看作一组含有两个复未知量 Z 和 W 的三个线性非齐次复数方程。为了使这一组三个方程有 Z 和 W 的联立解，其中一个复数方程必须与另外两个线性相关；也就是说，这些方程的系数必须满足某些“相容”关系。满足了这些关系，上述方程就有解。

方程(3.3)可用如下矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 \\ e^{i\beta_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

方程左边项的系数矩阵的第二列以及方程右边项所包含的均是给定的输入数据，而系数矩阵的第一列则包含未知转角 β_3 和 β_4 。只有当系数“增广矩阵”的秩^①为 2 时，这个方程组才有解。增广矩阵 M 是由方程组(3.4)左边项的系数矩阵加右边项的一列组成的。因此，该方程组的增广矩阵的行列式必须等于零，即：

① 一个矩阵，如果它至少有一个 $(r \times r)$ 阶的子行列式的值不是零，而所有 $[(r+1) \times (r+1)]$ 以及更高阶的子行列式都是零，则该矩阵的秩就是 r 。

$$\det M = \det \begin{bmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\beta_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

方程(3.5)是一个复数方程,包含两个独立的标量方程,因此可以解出两个未知标量 β_3 和 β_4 。鉴于未知量出现在矩阵 M 的第一列,所以把行列式按第一列展开:

$$\Delta_2 e^{i\beta_2} + \Delta_3 e^{i\beta_3} + \Delta_4 e^{i\beta_4} + \Delta_1 = 0 \quad (3.6)$$

式中

$$\Delta_1 = -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 \quad (3.7)$$

以及 $\Delta_j (j=2, 3, 4)$ 是第一列各元素的余子项:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= - \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix} \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

这些 Δ 是已知的,因为它们仅包含已知输入数据。方程(3.6)称作相容方程,因为满足这个方程的各组 β_2, β_3 和 β_4 的值将使方程组(3.3)成为“相容的”,就是说,这个方程组将给出 W 和 Z 的联立解。

在相容方程内,未知量在指数上。这一超越方程可以通过图解法加以简化,而求解步骤可如表 3.1 所示(同时参看图 3.3)编成计算机程序。

方程(3.6)可用符号进一步简化如下^①:

$$\Delta_3 e^{i\beta_3} + \Delta_4 e^{i\beta_4} = -\Delta, \quad \text{式中} \quad -\Delta = -\Delta_1 - \Delta_2 e^{i\beta_2} \quad (3.9)$$

于是,对于一个任意选定的 β_2 , $-\Delta$ 与 Δ_3, Δ_4 都已知,并可按比例作出,如图 3.3 所示。注意,在方程(3.9)中, Δ_3 被乘以转动算子 $e^{i\beta_3}$, Δ_4 也乘以 $e^{i\beta_4}$ 。由方程(3.9)可知,当 Δ_3 回转 β_3 、 Δ_4 回转 β_4 以后,这两个向量与 Δ 形成一个闭环。

方程(3.6)可以看作是一个四杆机构的“闭合方程”。这个四杆机构就是所谓的“相容连杆机构”,其“固定杆”为 Δ_1 ,“运动杆”为 $\Delta_j (j=2, 3, 4)$,从该相容连杆机构的初始位置开始度量的“杆转角”为 β_j 。这个相容连杆机构是由方程(3.7)作为它在起始位置的闭合方程定义出来的。这个概念如图 3.3 所示。图中,起始位置以实线表示。把 Δ_2 看作“驱动曲柄”,则任意假定的 β_2 就相当于加给 Δ_2 的一个转动位移,它的新位置以虚线表示。 Δ_3 和 Δ_4 位移后的相应位置也以虚线出现。然而, Δ_3 和 Δ_4 分别回转 β_3 和 β_4 以后所到达的点划线位置也满足方程(3.6)。所以,一般地说,对于 β_2 的每一个假定值,将有两组 $\beta_j (j=3, 4)$ 的值。

① 注意,这一方程与按三个精确点的“定销轴位置规定”法导出的方程[方程(2.57)]形式相同。

表3.1 根据几何作图按相容方程(3.6)求 β_j ($j=3, 4$)的解析解法

对 β_2 的一个给定值求 $\beta_3, \beta_4, \tilde{\beta}_3$ 和 $\tilde{\beta}_4$ 的算法(见图3.3)

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 e^{i\beta_2}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{\Delta_3^2 - \Delta_1^2 - \Delta^2}{2\Delta_3\Delta}, \text{ 式中 } \Delta_j = |\Delta_j| \text{ 和 } \Delta = |\Delta|$$

$$\sin\theta_3 = |(1 - \cos^2\theta_3)^{1/2}| \geq 0$$

令 $\cos\theta_3 = x, \sin\theta_3 = y > 0$ 据此,用(FORTRAN IV或WAT IV的)ATAN2函数求 $0 \leq \theta_3 \leq \pi$ 。

$$\beta_3 = \arg\Delta + \theta_3 - \arg\Delta_3$$

$$\tilde{\theta}_3 = 2\pi - \theta_3$$

$$\tilde{\beta}_3 = \arg\Delta + \tilde{\theta}_3 - \arg\Delta_3$$

$$\cos\theta_4 = \frac{\Delta_4^2 - \Delta_1^2 - \Delta^2}{2\Delta_4\Delta}$$

$$\sin\theta_4 = |(1 - \cos^2\theta_4)^{1/2}| \geq 0$$

令 $\cos\theta_4 = x, \sin\theta_4 = y > 0$ 用ATAN2函数求 $0 \leq \theta_4 \leq \pi; \tilde{\theta}_4 = -\theta_4$ 。

$$\beta_4 = \arg\Delta - \theta_4 - \arg\Delta_4$$

$$\tilde{\beta}_4 = \arg\Delta + \theta_4 - \arg\Delta_4 + \pi$$

β_2 可以假设的取值范围由相容连杆机构的可动性限度来决定,可按图3.3用图解法来求,也可用解析法(见第一卷节3.1和3.3)求之。对 β_2 的一个给定值计算 $\beta_3, \beta_4, \tilde{\beta}_3$ 和 $\tilde{\beta}_4$ 的解析式列在表3.1内。 $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ 和 $\beta_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4$ 这两组中的每一组内,任何两个 β 值都可代入三个标准型方程[式(3.3)]中的两个方程,然后,可用解线性方程组的克莱姆法则或任何别的方法解出 Z 和 W ,从而可求出圆点

$$k_1 = R_1 - Z \quad (3.10)$$

和圆心点

$$m = k_1 - W \quad (3.11)$$

当 β_2 一步步地从零变到 2π 时,它的每一个值(如果相容连杆机构闭合)将给出两组布尔梅斯特特点对,每一点对由一个圆点 k_1 和一个圆心点 m 组成。注意,圆点 k_1 是运动平面在第一个预定位置上的点。画出对应于 β_2 每一个值的圆心点,将描出两支圆心点曲线,一支相应于 β_3, β_4 ,另一支相应于 $\tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4$ 。如果图3.3中的“相容连杆机构”允许 Δ_2 整周转动,则两支曲线将会合。圆点也可同样地画出来,以得到圆点曲线。典型的圆心点曲线和圆点曲线的一部分表示在图3.4(见节3.5,这一节讲到生成布尔梅斯特曲线的另一种方法)。圆心点曲线上的每一点都代表一个可能的定销轴。这一定销轴可与它的共轭点,即这一具体布尔梅斯特点对中的圆点连结起来,同时与预定的第一个轨迹点相连。这将形成一个双杆组,具有定销轴 m 、曲柄 W 、铰销 k_1 、浮动

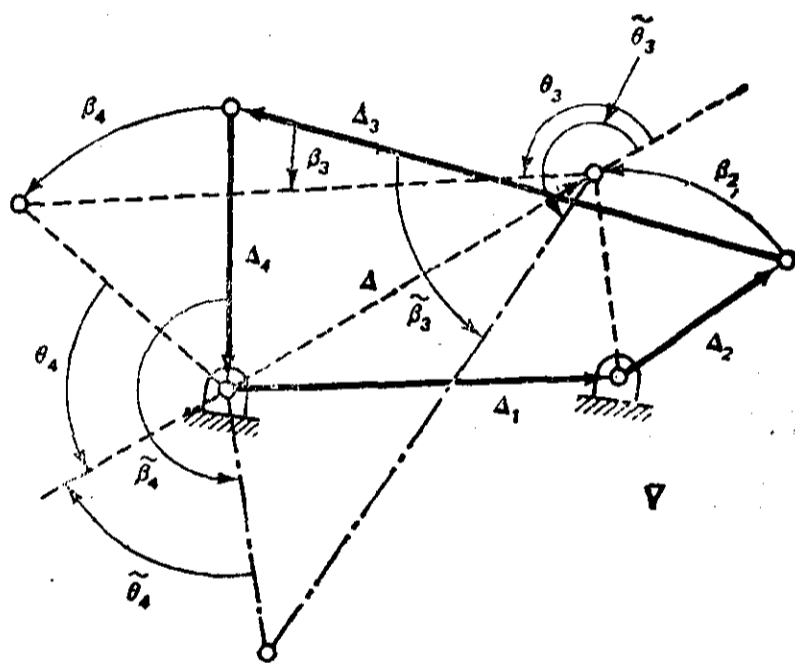


图3.3 按相容方程(3.6)求未知角 β_j ($j=3, 4$)的几何解法

杆 Z_1 和端点 P_1 (图 3.2)。这一双杆组可以作为四杆运动发生器的一半, 与任何一个用同样方法得到的双杆组组合来形成一个四杆机构。

在检查由两个双杆组形成的连杆机构解的运动中, 可能会看到: 当输入曲柄在它的运动范围内以一个方向回转时, 虽然运动物体能到达四个预定的位置, 但是, 如果在两条曲线上选取布尔梅斯特点对时不满足某些条件, 就会不是按预定的次序到达这些位置^[302, 303, 304, 116, 110]。得到的四杆机构还可能有别的不良特性(定销轴和动销轴的位置不好, 传动角小, 运动分支问题, 等等)。已经有了一些方法来控制传动角^[114, 115, 306]和避免分支^[301-303]。用这些方法, 配以下面叙述的计算机作图, 可以考察无数个解, 以求得“最佳”解。

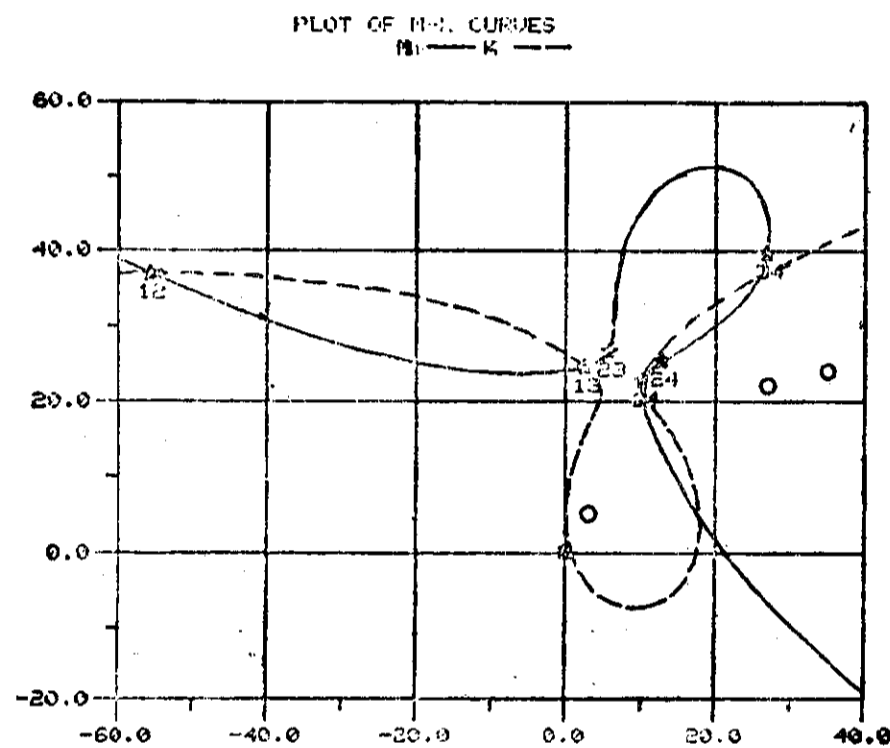


图 3.4 计算机作出的典型的布尔梅斯特曲线。精确点: P_1 为正方形; P_2, P_3, P_4 为小圆圈。极点: $P_{1,2}$ 到 $P_{3,4}$ 。实线为定销轴 m 的轨迹, 即圆心点曲线; 虚线是动销轴 k_1 的轨迹, 即圆点曲线

3.4 四个预定精确点的计算机程序

标准型方程按四个预定的有限分离位置求解方法在节 3.3 已作了充分论述, 读者就能够将其编成自动计算程序。不过, 它的程序已经编好了, 是 LINCAGES^① 程序包的一部分^[78, 83, 84, 218, 207](可从本书第二作者处得到)。它用转角 β_2 作为自变参数来生成综合方程(3.3)的解, 从而得到圆点曲线和圆心点曲线。

LINCAGES 程序包在四个精确点时的用法通过本章附录中的例题来介绍。有很多人机对话子程序可与作图输出结合使用, 以帮助连杆机构设计师从无数个可能的解中选出最优解。

下面的例子说明布尔梅斯特曲线对输入数据 ($\delta_2, \delta_3, \delta_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) 的细微变化会多么敏感。

① 明尼苏达大学 1979 年的版权。明尼苏达大学开发的这个计算机作图程序包包括 Teletype, LSI-11 (在 TERAK 微处理机上编的) 和 Tektronix 4010 Series 版本。现在, 有了在其它主机计算机和某些成套系统中使用的版本。任何一个可由双杆组组成的平面连杆机构都可按三、四或五个有限分离精确点的运动生成、轨迹生成、函数生成或其组合进行综合。

例 3.1 [318-88]

如果前装载机的伸臂绕固定轴回转,则当伸臂升起超过水平位置后,铲斗就要沿圆弧朝驾驶室方向后退。如果铲斗必须升得相当高,则前伸距离就要缩小,而且假如有任何物料撒泼出来的话,就会发生在操作者近旁。有个制造厂已经克服了这个问题,方法是以两根回转杆引导该伸臂,从而将该伸臂与四杆机构的连杆相圆接,将其设计成使铲斗不沿圆弧朝操作者后退的方式运动^①。

在图 3.5 中,伸臂 k_1P_1 、曲柄 mk_1 的长度和装载机车架的尺寸是从上面提到的市场上可买到的装载机的照片上得到的,大体上合比例。当伸臂 k_1P_1 顺时针回转举起铲斗时,杆 mk_1 逆时针回转,给出点 P 的四个位置,这四个位置大致地在一条从铅垂线向外(即远离装载机)倾斜的直线上。直线 kP 在四个设定位置上相对于水平轴 x 的角位置是根据图纸精确地确定的,它们是

$$\theta_1 = 191.26^\circ, \quad \theta_3 = 164.77^\circ$$

$$\theta_2 = 175.68^\circ, \quad \theta_4 = 152.04^\circ$$

$$\begin{array}{ll} \theta_1 = 191.26^\circ & \theta_3 = 164.77^\circ \\ \theta_2 = 175.68^\circ & \theta_4 = 152.04^\circ \text{ (已标出)} \end{array}$$

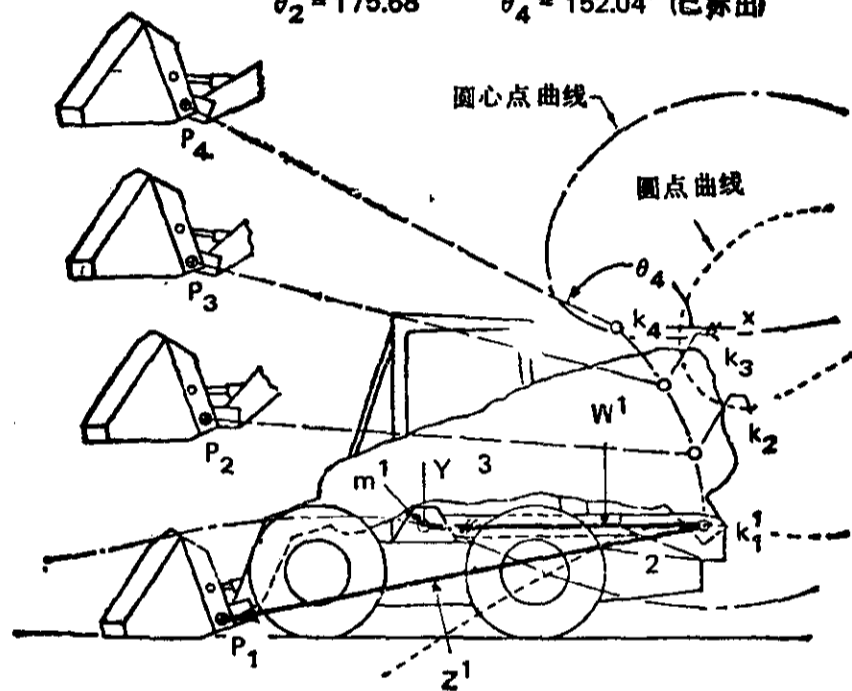


图 3.5 前装载机伸臂 kP 的四个设定位置及其相应的布尔梅斯特曲线的一部分。根据布尔梅斯特曲线已

选取了一个双杆组 W^1, Z^1 , 但是再也找不出其它合适的双杆组

图 3.5 表示了本例中与直线 kP 的四个位置 ($\delta_j = P_j - P_1, \alpha_j = \theta_j - \theta_1, j=2, 3, 4$) 相对应的圆心点与圆点曲线的一部分。也表示了一个 mk_1 的组合, 这个组合所决定的定销轴 m 的位置是理想的。从布尔梅斯特曲线可看到, 那唯一可行的设计将是其另一个双杆组的定销轴设在从驾驶室顶面后部再向后、向上延伸的一个支架上, 而相应的动销轴则设在几乎是位于 k_1 正上方的圆点曲线上。假如图中所示现有的驾驶室结构不能接长很多, 则这样的设计就不能令人满意。不过, 大家知道, 当规定运动平面四个位置的直线有一个微小的角度变化时, 布尔梅斯特曲线可能产生相当大的改变; 而直线 kP ^② 的微小角度变化不会明显地影响铲斗运动的一般方向。圆心点曲线的这种改变表示在图 3.6 中, 图中示出三条圆心点曲线, 它们所对应的直线 kP ^② 在第一、二、四位置上的角度相同, 预定的轨迹点对每条曲线也一样, 只是第三个位置角 θ_3 的值不同, 分别为 164.77° 、 164.52° 和 164.27° 。 θ_3 第三个值的圆心点曲线由一条变成两条。稍稍改变 θ_2 和 θ_4 的大小后, 又运行了几次程序。根据所运行的结果可见

$$\theta_1 = 191.26^\circ, \quad \theta_3 = 164.64^\circ$$

$$\theta_2 = 175.93^\circ, \quad \theta_4 = 152.04^\circ$$

① 铲斗角度由铰接于伸臂与铲斗之间的活塞来控制。

② 原文为 k_1P_1 , 似有误——译者注。

能允许将定销轴的位置选在靠近驾驶室的前顶部，前面提到的装载机上的定销轴就选在这个位置上，同时对动销轴也给了一个好位置。由这一组角度产生的连杆机构示于图 3.7，其实际的圆心点和圆点轨迹示于图 3.8 [318, 331]。

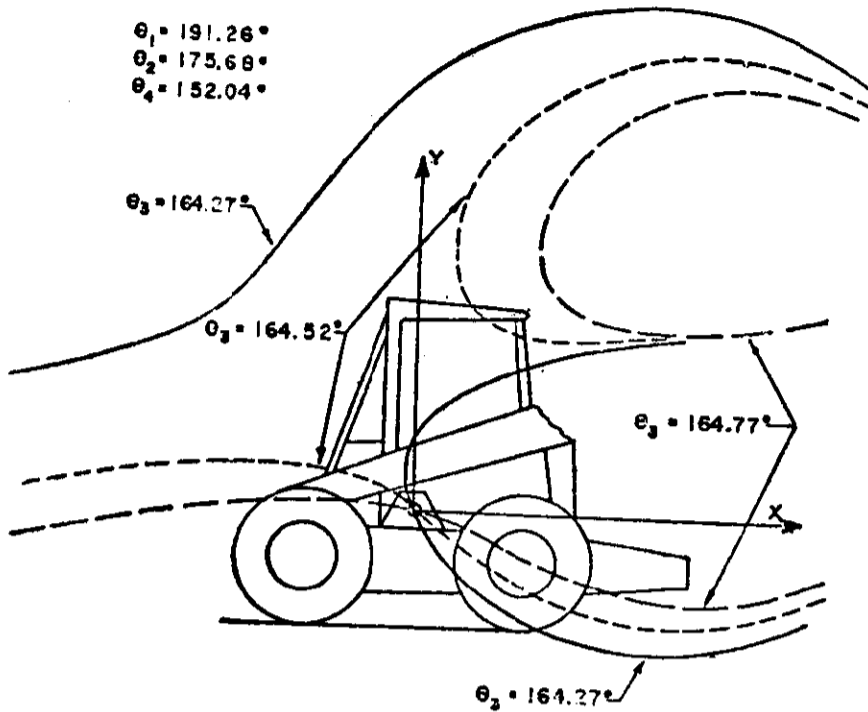


图 3.6 对应于平面 kP 在第三位置上的三个稍微不同的角位置 θ_3 的圆心点曲线

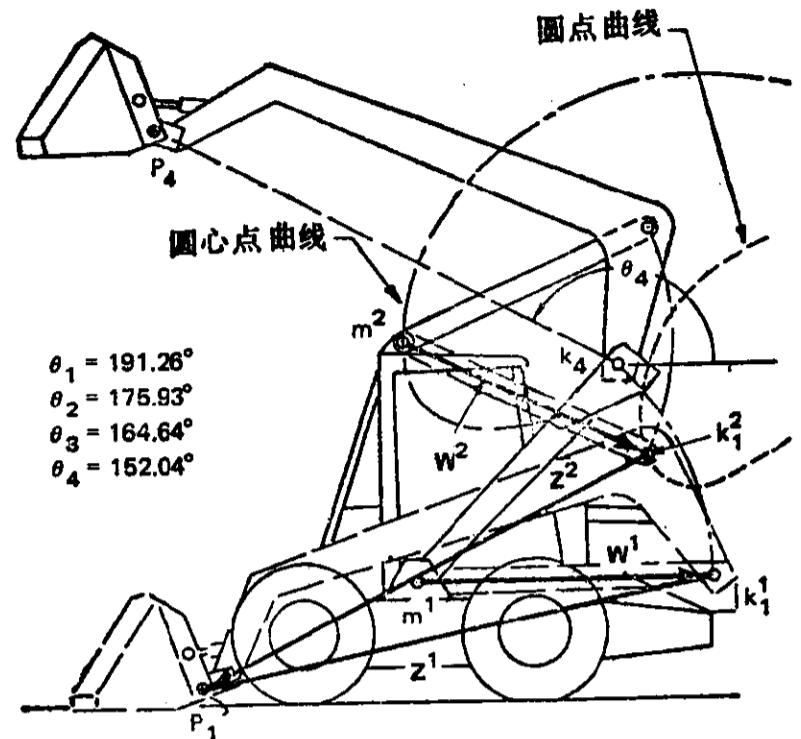


图 3.7 对应于平面 kP 的四个选定的设计位置的布尔梅斯特曲线。两个双杆组 Z^1, W^1 和 Z^2, W^2 构成最终的四杆机构解

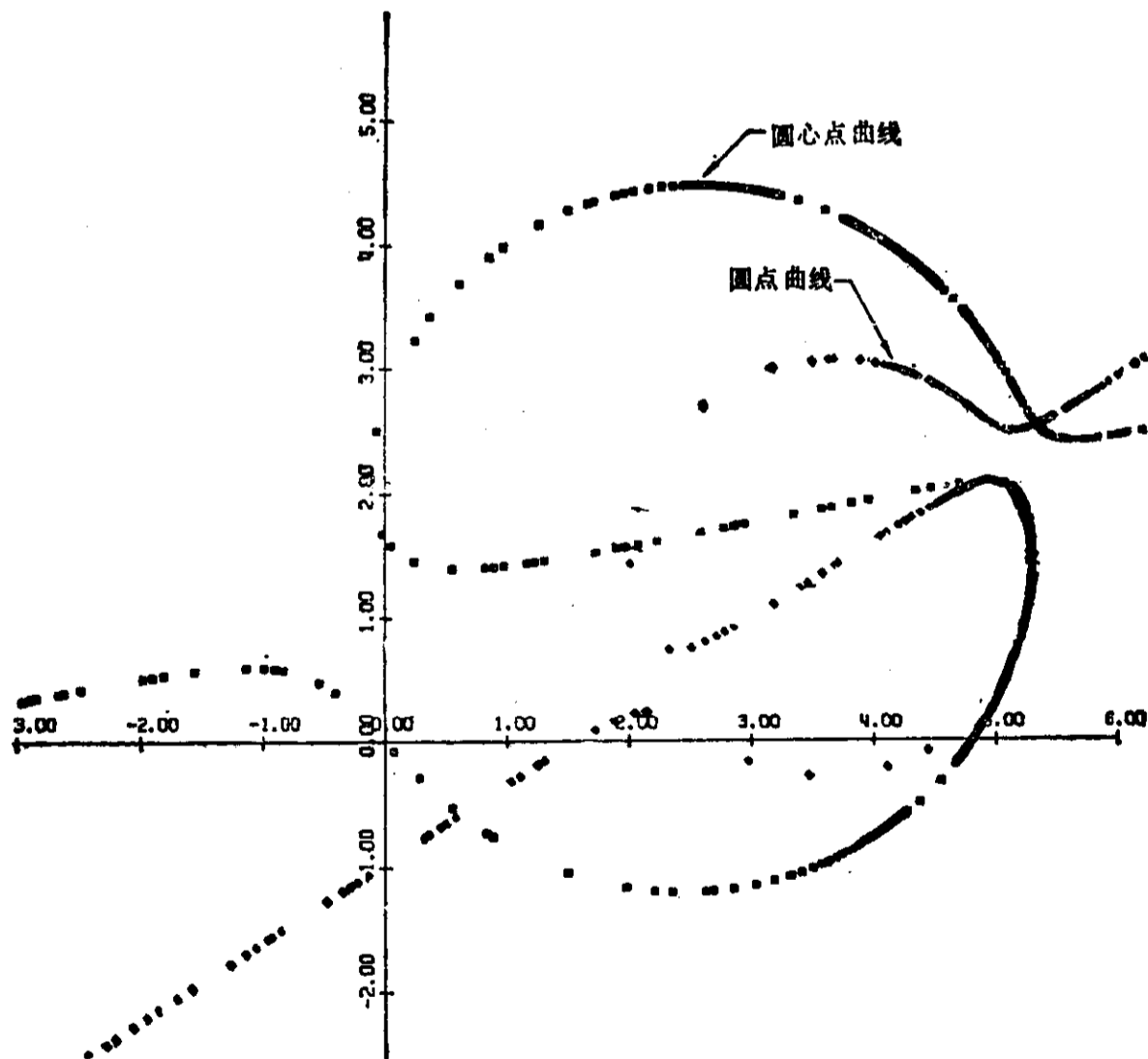


图 3.8 最终的布尔梅斯特曲线图的一部分，它们对应于例 3.1 中前装载机所选定的四个设计位置

注意,对 δ_j 或 α_j 的每一个变化,都考察了无数个解。定销轴和动销轴曲线上伸得太远的部分在作图屏幕上被选定的“窗口”切掉了。现在,设计师一次就能综合无数个机构;而不是像图解法,或用硬纸板加图钉,或即使用计算机但未辅以作图屏幕那样,一次只能综合一个机构。

3.5① 四个有限分离预定位置的运动生成:两个三精确点情况的叠加

按预定的 $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ 和 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 进行双矢组的四位置运动综合问题可以从不同的角度来解决^[170]。四个预定位置可以看成两个三位置运动综合子问题的叠加,一个子问题是预定 $(\delta_2, \delta_3, \alpha_2, \alpha_3)$; 而另一个则是预定 $(\delta_2, \delta_4, \alpha_2, \alpha_4)$ 。回顾一下,节 2.20 介绍了三位置情况的圆点圆。对于连架杆(W)(见图 3.2)转角 β_2 的某个选定值,在两个三精确点的子问题中都可画出一对 M 圆和 K 圆;这样的两个 M 圆、两个 K 圆的交点分别决定了 m 曲线和 k 曲线上的点,这些点同时满足那两个子问题。

例如,假定希望达到下列双矢组运动精确位置(图 3.2):

问题 1:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= 2 + 2i, & \alpha_2 &= 60^\circ \\ \delta_3 &= 5 + 2i, & \alpha_3 &= 120^\circ \end{aligned}$$

问题 2:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= 2 + 2i, & \alpha_2 &= 60^\circ \\ \delta_4 &= 4 + 3i, & \alpha_4 &= 180^\circ \end{aligned}$$

(其中, δ_2 和 α_2 在两个问题中是一样的)。如上所述,在两个三精确点问题(即对于每个 β_2)中的 M 圆的交点和 K 圆的交点决定了在“圆心点”曲线和“圆点”曲线上的点。

遵循节 2.20 中的图解作图步骤,我们从求极点 $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P'_{23}, P'_{24}$ 开始。将有两组 M 圆和 K 圆,分别标以上角标 1 和 2 (如 M^1 对应于问题 1)。 M^1, M^2, K^1, K^2 圆的圆心分别在 $\overline{P_{13}P_{23}}, \overline{P_{14}P_{24}}, \overline{P_{13}P'_{23}}$ 和 $\overline{P_{14}P'_{24}}$ 的垂直平分线上,这些垂直平分线在图 3.9 中分别标以“ M^1 轴”、“ K^1 轴”,等等。注意,下列长度等式是普遍成立的:

$$\begin{aligned} |\overline{P_{13}P_{23}}| &= |\overline{P_{13}P'_{23}}| \\ |\overline{P_{14}P_{24}}| &= |\overline{P_{14}P'_{24}}| \end{aligned}$$

和

对于图 3.9 中角度 ϵ 的每一个值,最多可以求出四个 m 曲线和 k 曲线点(包括其补点共八个,如图中为便于作图所画的那样), ϵ 是相关极点的距离在相应的圆心所对的正角。例如,按 ϵ 的某个选定的值,以 $\frac{1}{2}|\overline{P_{13}P_{23}}| \csc(\epsilon/2)$ 为半径, P_{13} 为圆心作圆弧与 M^{1+} 和 M^{1-} 轴^②相交,这就决定了具有这个半径的一个 M^{1+} 圆和一个 M^{1-} 圆的圆心。下一步,以这同一个 ϵ 值,用 $|\overline{P_{14}P_{24}}|$ 重复作圆,画出一个 M^{2+} 圆和一个 M^{2-} 圆。用 $|\overline{P_{13}P'_{23}}|$ 和 $|\overline{P_{14}P'_{24}}|$ 作 K^1 圆和 K^2 圆的方法与此相似。圆 $K^{1+}, K^{1-}, M^{1+}, M^{1-}$ 分别与 $K^{2+}, K^{2-}, M^{2+}, M^{2-}$ 的交点就是四位置问题中可能的动销轴 k 和定销轴 m , 因此,它们就是圆点曲线与圆心点曲线上的点。如 $\epsilon = 40^\circ$, 则相应于每一个交

① 这一节可以跳过,而不会影响连续性。

② 这些轴的上角标中,正、负号表示指向无穷远的一个方向和另一个方向。

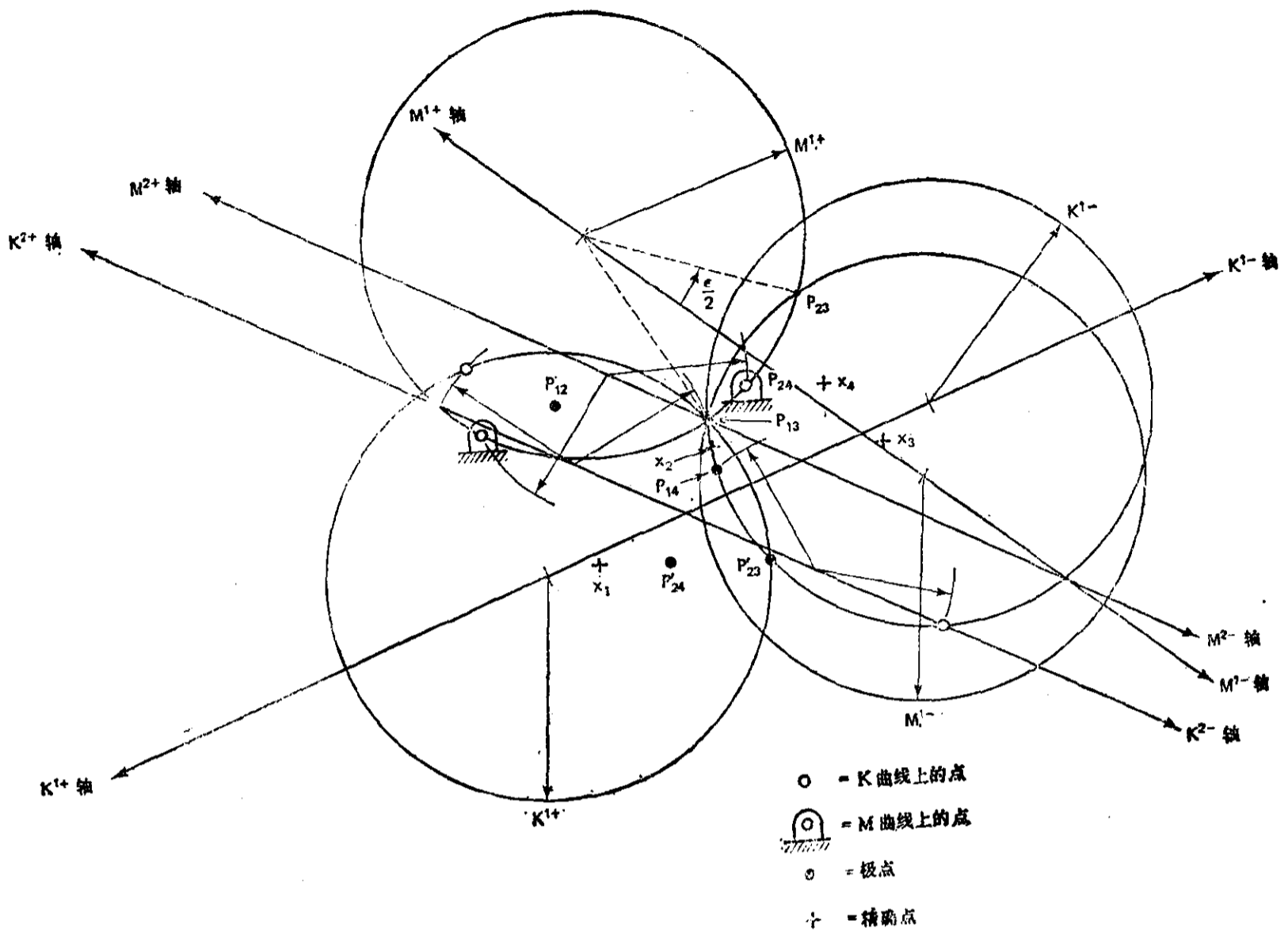


图 3.9 通过作两个独立的三位置问题(一个问题是位置 1, 2, 3, 另一个是位置 1, 2, 4)的 M 圆的交点和 K 圆的交点来求圆心点曲线和圆点曲线(即 m 曲线和 k 曲线)上的点(见节 3.5)

点对(两个圆可能交于两点)的角 β_2 就是:

$$\begin{aligned}
 M^+ : \quad \beta_2 &= -\epsilon = -40^\circ \\
 K^+ : \quad \beta_2 &= \alpha_2 - \epsilon = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ \\
 K^- : \quad \beta_2 &= \alpha_2 - (-\epsilon) = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ
 \end{aligned}$$

K^+ 圆的交点和 K^- 圆的交点分别要求 β_2 小于 α_2 或大于 α_2 。举例说, 如果要求 $\beta_2 = 40^\circ$ 的动销轴, 则它们应该是 $\epsilon = \alpha_2 - \beta_2 = 20^\circ > 0$ 的 K^+ 的交点。

这里从三位置 M 圆和 K 圆推导出来的方法与根据对极四边形 (opposite pole quadrilateral) 得到的传统的布尔梅斯特曲线几何作图法^[125]相同。我们把下标中四个数字都不同的两个极定义为对极 (opposite pole)。对于这个例子来说, 有三对对极, 即: (P_{31}, P_{24}) 、 (P_{23}, P_{14}) 和 (P_{12}, P_{34}) 。一个对极四边形的两条对角线连接两对对极。这里, 我们就是利用对极四边形 $(P_{13}, P_{23}, P_{24}, P_{14})$ 来作图求出 m 曲线上的点。

在传统方法中, m 曲线^①不是作为三位置问题的解的轨迹的交点给出, 而是作为对极四边形的边(代表 M 圆的弦)所张的角相等或互补的那些点的轨迹给出的。作图求出通过各对对极的圆的交点, 这些圆的圆周点与各自的弦所张的角相等或互补。这些点满足布尔梅斯特定理。该

① 原文为 M 圆, 似有误——译者注。

定理表述为: m 曲线上的点与对极四边形的两条对边所张的角相等或相补。 k 曲线上的点, 传统方法是用运动转换并重复这同样的作圆法生成的。

概括起来是: 四个有限分离位置的 m 曲线和 k 曲线(即圆心点曲线和圆点曲线) 上的点可以作为两个三精确点问题的 M 圆的交点和 K 圆的交点来生成。这三精确点问题的方法已在节 2.20 作了阐述。

3.6 四位置综合的特殊情况

滑块点(Slider Point)即有限鲍尔点(Finite Ball's Point)

在第四章, 我们将讨论鲍尔点, 即运动平面 π 上其轨迹与轨迹切线有三阶接触的点。或者说, 其轨迹与轨迹切线在研究位置的邻域内有四点接触。换句话说, 即鲍尔点能有通过直线上四个无限接近位置的运动, 或通过四个“无限小分离位置”。

在四个有限分离位置问题中, 鲍尔点的对应部分是滑块点, 也可以称为“有限鲍尔点”。它是运动平面上其四个相关点共线的那个点。这是一个特殊的圆点, 它的与之相配的圆心点在无穷远处, 因而位于圆心点曲线的渐近线方向上。

考夫曼(Kaufman)^[148]证明了如何能由令 $\beta_j=0$ ($j=2, 3, 4$) (见图 3.2) 得到相容方程(3.5) 的奇异解来求出滑块点。我们对考夫曼方法作出下述直观证明。如由方程(3.4) 所看出的, 连接未知的固定圆心点 m 与未知的运动圆点 k_1 的向量 W , 在 k_1 作了有限位移到达 k_2, k_3 和 k_4 的过程中, 它不转动($\beta_j=0$)。这只有当 W 为无限长才可能。因为 k_1 (到 k_2, k_3 和 k_4) 的每个位移都必须沿着轨迹, 而轨迹在各个瞬间总是垂直于 W , 所以, 那个轨迹一定是直线。因此, 这个 k_1 就是所要求的有限鲍尔点。为了标明这点, 我们加了一个上角标 s (代表“滑块点”), 于是就有 W^s 和 k_1^s 。

不过, $\beta_j=0$ 使得系数矩阵 M 成为奇异矩阵, 从而方程(3.5) 和(3.4) 无法以它们原来的形式求解以决定 k_1^s 的位置。为此, 考夫曼建议了一个方法, 示于图 3.10。图中, P_1 和 P_j ($j=2, 3, 4$) 是运动平面 π (表示在 π_1 和 π_j 两个位置) 上点 P 的两个任意预定的有限分离位置。 π 的转角 α_j 也属预定。 Z^s 是设在 π (定义在位置 π_1) 上的未知向量, 它连接未知的有限鲍尔点 k_1^s 和 P_1 。 k_1^s 沿着未知向量 S 的未知直线从位置 1 运动到位置 j , 而该向量 S 是从某个未知点 Q 度量的。这个未知距离(直线滑动) 以向量 S 的未知伸长率 ρ_j 表示。根据这些, 可写出多边形 $Qk_1^sP_jP_1k_1^sQ$ 的下列封闭方程:

$$S(\rho_j-1) + Z^s(e^{i\alpha_j}-1) = \delta_j \quad (j=2, 3, 4) \quad (3.12)$$

式中未知数的 ρ_j 是一些 $\rho_j \neq 1, \rho_j \neq \rho_k$ 的标量。这一方程组的相容方程为

$$\begin{vmatrix} \rho_2-1 & e^{i\alpha_2}-1 & \delta_2 \\ \rho_3-1 & e^{i\alpha_3}-1 & \delta_3 \\ \rho_4-1 & e^{i\alpha_4}-1 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

对 ρ_2 假定一个不等于 1 的任意值, 再按第一列展开, 可得到

$$\Delta_3\rho_3 + \Delta_4\rho_4 = -\Delta_1 - \Delta_2\rho_2 \quad (3.14)$$

式中的 Δ_j 由公式(3.7)和(3.8)定义。为解出 ρ_3 和 ρ_4 , 把实部和虚部分开, 形成实数方程组

$$\begin{bmatrix} \Delta_{3x} & \Delta_{4x} \\ \Delta_{3y} & \Delta_{4y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_3 \\ \rho_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_{1x} - \rho_2 \Delta_{2x} \\ -\Delta_{1y} - \rho_2 \Delta_{2y} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

式中 $\Delta_j = \Delta_{jx} + i\Delta_{jy}$, 从该方程得到

$$\rho_3 = \frac{\begin{vmatrix} -\Delta_{1x} - \rho_2 \Delta_{2x} & \Delta_{4x} \\ -\Delta_{1y} - \rho_2 \Delta_{2y} & \Delta_{4y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta_{3x} & \Delta_{4x} \\ \Delta_{3y} & \Delta_{4y} \end{vmatrix}} \quad (3.16)$$

$$\rho_4 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta_{3x} & -\Delta_{1x} - \rho_2 \Delta_{2x} \\ \Delta_{3y} & -\Delta_{1y} - \rho_2 \Delta_{2y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta_{3x} & \Delta_{4x} \\ \Delta_{3y} & \Delta_{4y} \end{vmatrix}} \quad (3.17)$$

将如此得到的这一组 ρ_j ($j=2, 3, 4$) 代回方程组(3.12), 并解联立方程组中的任意两个, 求出 S 和 Z^0 , 就得到一个滑块双杆组, 可引导平面 π 通过四个预定位置。把这一双杆组与一个铰接双杆组相结合, 就构成一个滑块曲柄机构, 它的连杆通过四个预定位置。一个合适的铰接双杆组可以通过为 β_2 假设一个不等于零也不等于 α_2 的值, 并如节 3.3 讨论的那样解出 Z 和 W 来得到。图 3.11 是这样一个滑块-曲柄机构简图: 滑块导路 Q 、滑块 S 、曲柄 $(m^1 k_1^1) = W^1$ 和带 Z^0 和 Z^1 两个边的连杆 $k_1^0 P_1 k_1^1$ 。

图 3.11 中的滑块-曲柄机构, 虽然它能到达这些图示位置, 但它在这些位置之间将卡住。为了避免这种情况, 我们需要寻找另一对 $m^1 k_1^1$ 。于是就产生了这样的问题: 对于任意一组四个预定的物体位置, 我们能求出多少个这样的滑块-曲柄机构? 可以证明: 不管我们为 ρ_2 取不等于 1 的任何值, Z^0 的解总是一样的; 还可证明: S, ρ_3, ρ_4 所形成的 k_1^0 是相同的。这样, 我们看到: 只有一个滑块双杆组, 这与一组四个无限小分离位置只有一个鲍尔点的事实相一致。因此, 一组四个有限分离位置也只有一个有限鲍尔点。然而, 铰接双杆组的数目是无限的。所以, 四位置运动发生器滑块-曲柄机构将有一阶无穷多个解。每一个解都有一个同源机构(见节 3.9), 那是图 3.12 所示的四位置带预定时标的轨迹发生器滑块-曲柄机构。

以滑块-曲柄机构作四点函数生成

参照图 3.13, 可写出标准型封闭方程如下:

$$W(e^{i\beta_j} - 1) + Z(e^{i\alpha_j} - 1) = \rho_j S \quad (3.18)$$

该方程组的相容方程为

$$\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 & \rho_2 S \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 & \rho_3 S \\ e^{i\beta_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 & \rho_4 S \end{vmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

这里的 α_j, ρ_j 是预定的, 它们以函数关系联系了曲柄的转角和滑块的位移。因为 S 只决定连杆机构的比例和位向, 所以它是任意的。展开式(3.19), 我们得到

$$\Delta_3 e^{i\beta_3} + \Delta_4 e^{i\beta_4} = -\Delta_1 - \Delta_2 e^{i\beta_2} \quad (3.20)$$

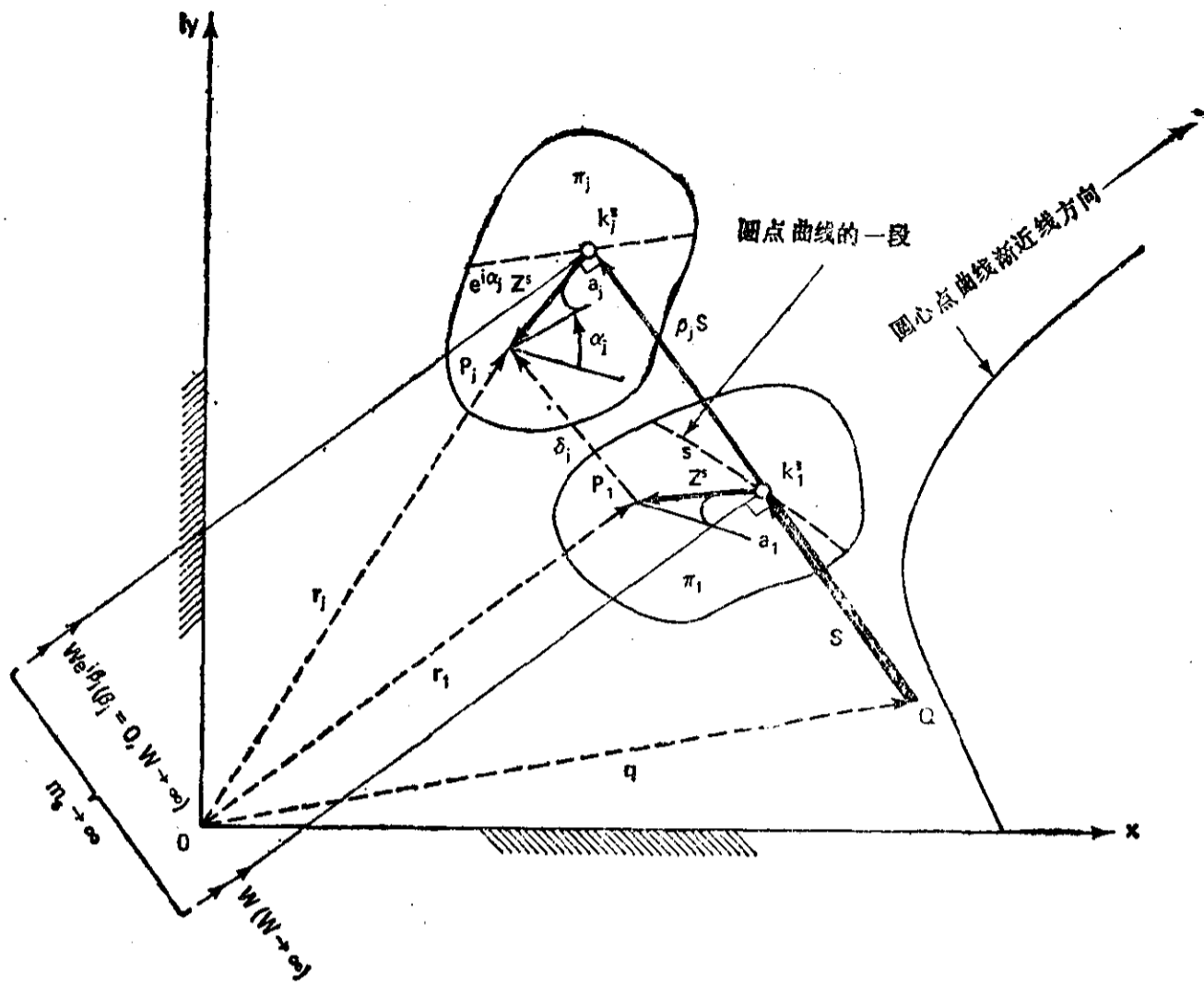


图 3.10 考夫曼求一个平面的四个有限分离位置的“有限鲍尔点” k_j^s 的示意图(见节 3.6)

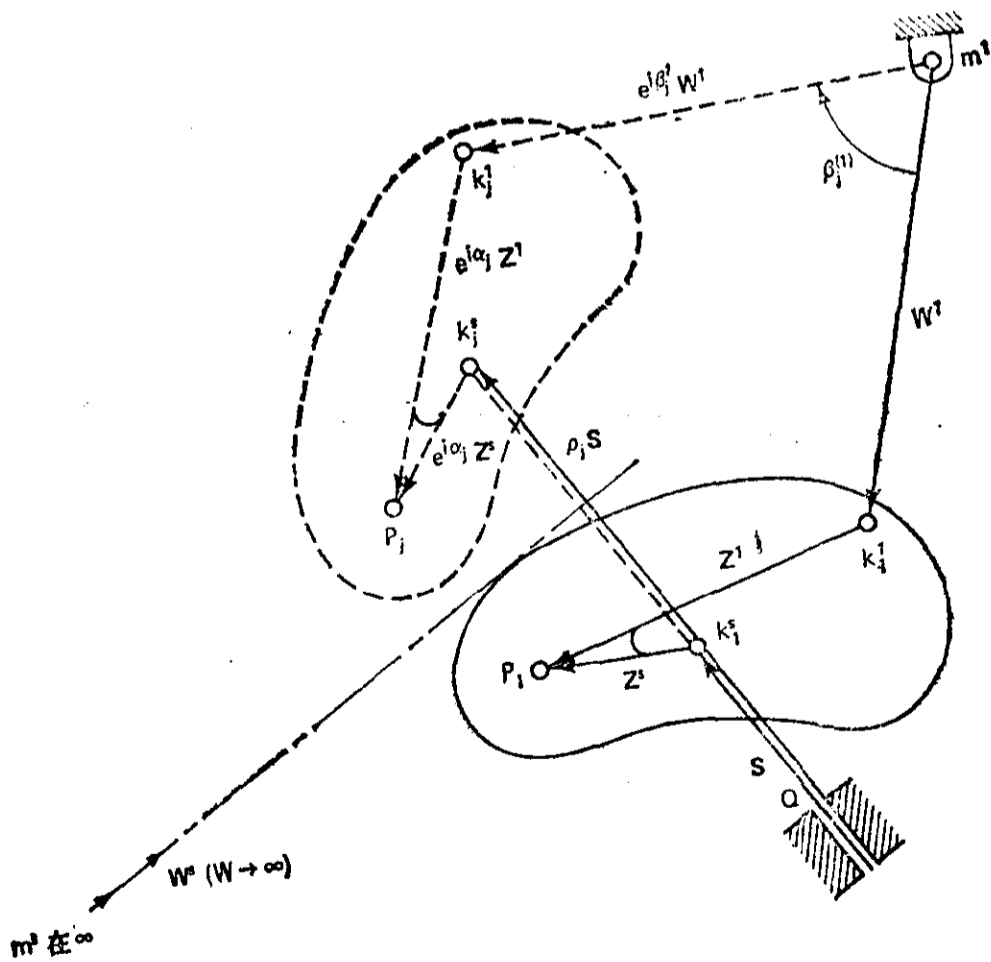


图 3.11 求一个布尔梅斯特点对 k_j^s, m^s , 以与考夫曼的有限分离鲍尔点 k_j^s 形成一个滑块-曲柄机构

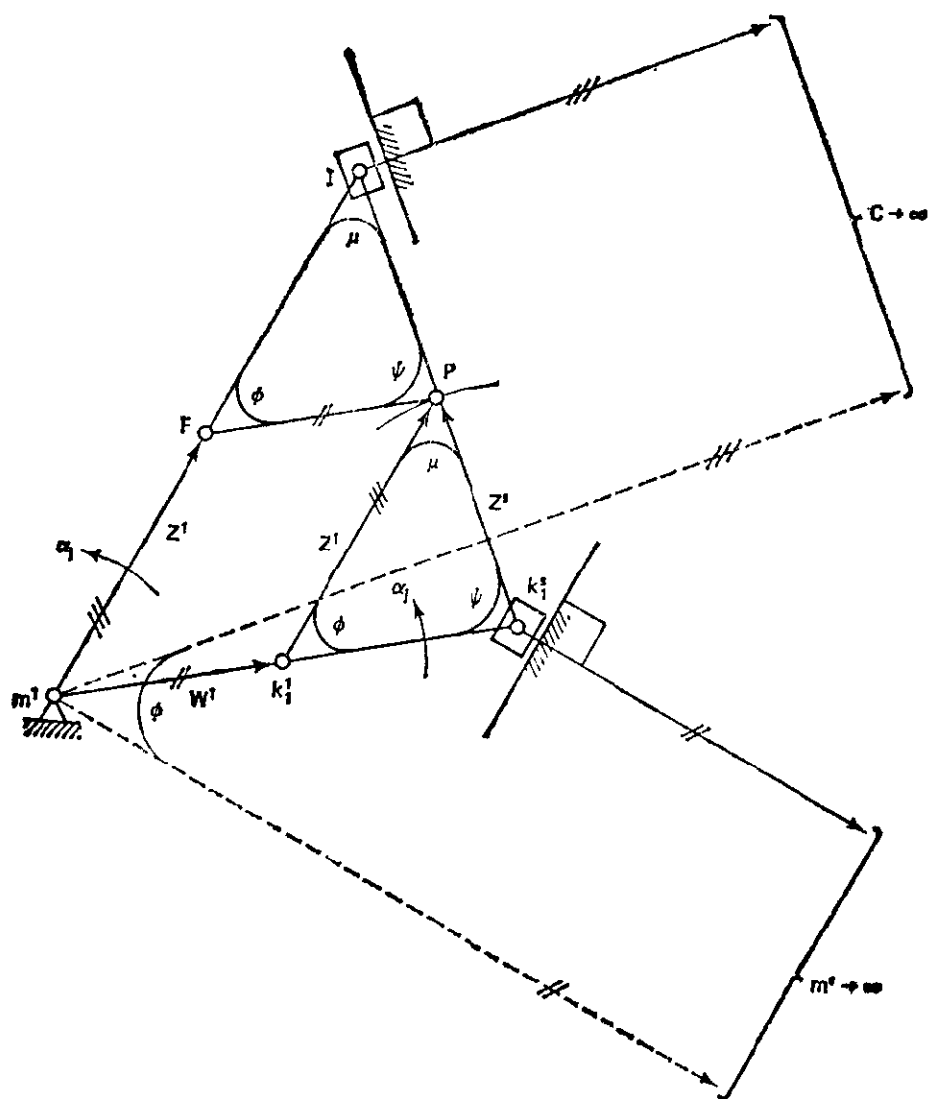


图 3.12 滑块-曲柄机构 $m'k_1'k_2'P$ 和它的同源机构 $m'FIP$ 。注意，第一个机构的连杆转角 α_j 就是同源机构的曲柄转角

式中

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} e^{i\alpha_3} - 1 & \rho_3 S \\ e^{i\alpha_4} - 1 & \rho_4 S \end{vmatrix}, & \Delta_3 &= - \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \rho_2 S \\ e^{i\alpha_1} - 1 & \rho_1 S \end{vmatrix} \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \rho_2 S \\ e^{i\alpha_3} - 1 & \rho_3 S \end{vmatrix}, & \Delta_1 &= -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 \end{aligned} \quad (3.21)$$

遵循表 3.1 中的方法，完成求解的其余步骤，得到几组相容的 β_j ，然后解方程(3.18)中的任何两个，求出 W 和 Z 。

**四位置运动发生器转动滑块机构：
汇交点**

如果 $\alpha_j = \beta_j (j=2, 3, 4)$ 则方程(3.5)可明显地得到满足。这意味着 Z 和 W 两者都与运动物体 π 一起转动。因为 W 绕未知固定圆心点 m 回转，而 Z 设在 π 内并随 π 运动；又因为 Z 和 W 汇交于未知圆点 k_1 ，所以，只要稍稍一想就能明白，两者必须是无限长，而且方向相反。因为 W 的矢

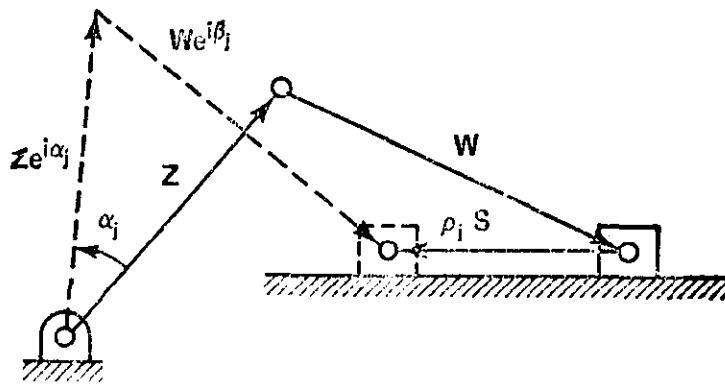


图 3.13 按四个有限分离位置的函数生成综合滑块-曲柄机构[见方程(3.18)至(3.21)]

端与 Z 的尾端在圆点 k_1 汇合, 所以 k_1 必定在圆点曲线渐近线方向上的无限远处。这表示在图 3.14 中, 图中 π_1, π_j, P_1, P_j 和 δ_j 的意义如前, 它们与物体的转角 α_j 一起, 都是预定的。未知向量 Z 和 W 始终保持平行, 都是无限长。未知圆点 k_1 位于 Z 和 W 第一个位置未知方向上的无限远处。 W 和 Z 无限长的影响是: 使未知圆心点 m 和运动物体 π 之间的联接变为转动-滑动。这迫使设在 π 中的未知向量 D 的作用线绕 m 转动并通过 m 滑动。因此 m 是有限汇交点。(关于无限接近汇交点见第四章, 轨迹曲率理论。) 所以, 我们用上角标 c 将它加以区别, 对 Z 和 W 也如此。最后, 用设在物体 π 上的未知向量 E 将固定在 π 上的未知向量 D 的矢端与 P 相连。注意, 虽然 D 和 E 两者的转角都是预定的 α_j , 但是 E 的长度不变, 而 D 的长度要变化一个未知伸长率 ρ_j 。根据这些, 标准型封闭方程变成

$$D(\rho_j e^{i\alpha_j} - 1) + E(e^{i\alpha_j} - 1) = \delta_j \quad (3.22)$$

式中 α_j 和 δ_j 是预定的。相容方程取如下形式

$$\begin{vmatrix} \rho_2 e^{i\alpha_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ \rho_3 e^{i\alpha_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \\ \rho_4 e^{i\alpha_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.23)$$

展开成

$$\rho_2 e^{i\alpha_2} \Delta_2 + \rho_3 e^{i\alpha_3} \Delta_3 + \rho_4 e^{i\alpha_4} \Delta_4 + \Delta_1 = 0 \quad (3.24)$$

式中 Δ_j 与式 (3.7) 和式 (3.8) 定义的相同。现在, 我们给 ρ_2 假定一个任意的实数值, 将方程 (3.24) 分离为实部和虚部, 解出 ρ_3 和 ρ_4 , 得到

$$\rho_3 = \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{R}(-\Delta_1 - \rho_2 e^{i\alpha_2} \Delta_2) & \mathcal{R}(e^{i\alpha_4} \Delta_4) \\ \mathcal{I}(-\Delta_1 - \rho_2 e^{i\alpha_2} \Delta_2) & \mathcal{I}(e^{i\alpha_4} \Delta_4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{R}(e^{i\alpha_3} \Delta_3) & \mathcal{R}(e^{i\alpha_4} \Delta_4) \\ \mathcal{I}(e^{i\alpha_3} \Delta_3) & \mathcal{I}(e^{i\alpha_4} \Delta_4) \end{vmatrix}} \quad (3.25)$$

和

$$\rho_4 = \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{R}(e^{i\alpha_3} \Delta_3) & \mathcal{R}(-\Delta_1 - \rho_2 e^{i\alpha_2} \Delta_2) \\ \mathcal{I}(e^{i\alpha_3} \Delta_3) & \mathcal{I}(-\Delta_1 - \rho_2 e^{i\alpha_2} \Delta_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{R}(e^{i\alpha_3} \Delta_3) & \mathcal{R}(e^{i\alpha_4} \Delta_4) \\ \mathcal{I}(e^{i\alpha_3} \Delta_3) & \mathcal{I}(e^{i\alpha_4} \Delta_4) \end{vmatrix}} \quad (3.26)$$

式中 $\mathcal{R}(\cdot)$ 表示它是 (\cdot) 的实部, $\mathcal{I}(\cdot)$ 为 (\cdot) 的虚部。现在, 可以把求出的这组相容的 ρ_j ($j=2, 3, 4$) 代回方程 (3.22) 中的任何两个, 并联立解出 D 和 E , 这样就确定了 m^c 的位置, 求解亦告完成。

要注意的是, 这样求出的汇交点 m^c 是唯一的, 即: 它是交换固定参考平面和运动平面 π 的作用而使运动互相转换之后的唯一的滑块点, 即有限鲍尔点。由此可见, 不管 ρ_2 任选何值, 其最终结果都是相同的: 只有一个转-滑双杆组能引导 π 通过四个预定的有限分离位置。为了完成一个单自由度的四杆机构, 我们求一个铰接双杆组 (这是可用于四个有限分离位置的无穷多个双杆组之一), 这样就得到图 3.15 所示的机构, 这是一阶无穷多个这样的四位置运动发生器转-滑四杆机构之一。此外, 如果设计条件要求将这种机构变成摆动滑块机构 (图 3.16), 则可用同样

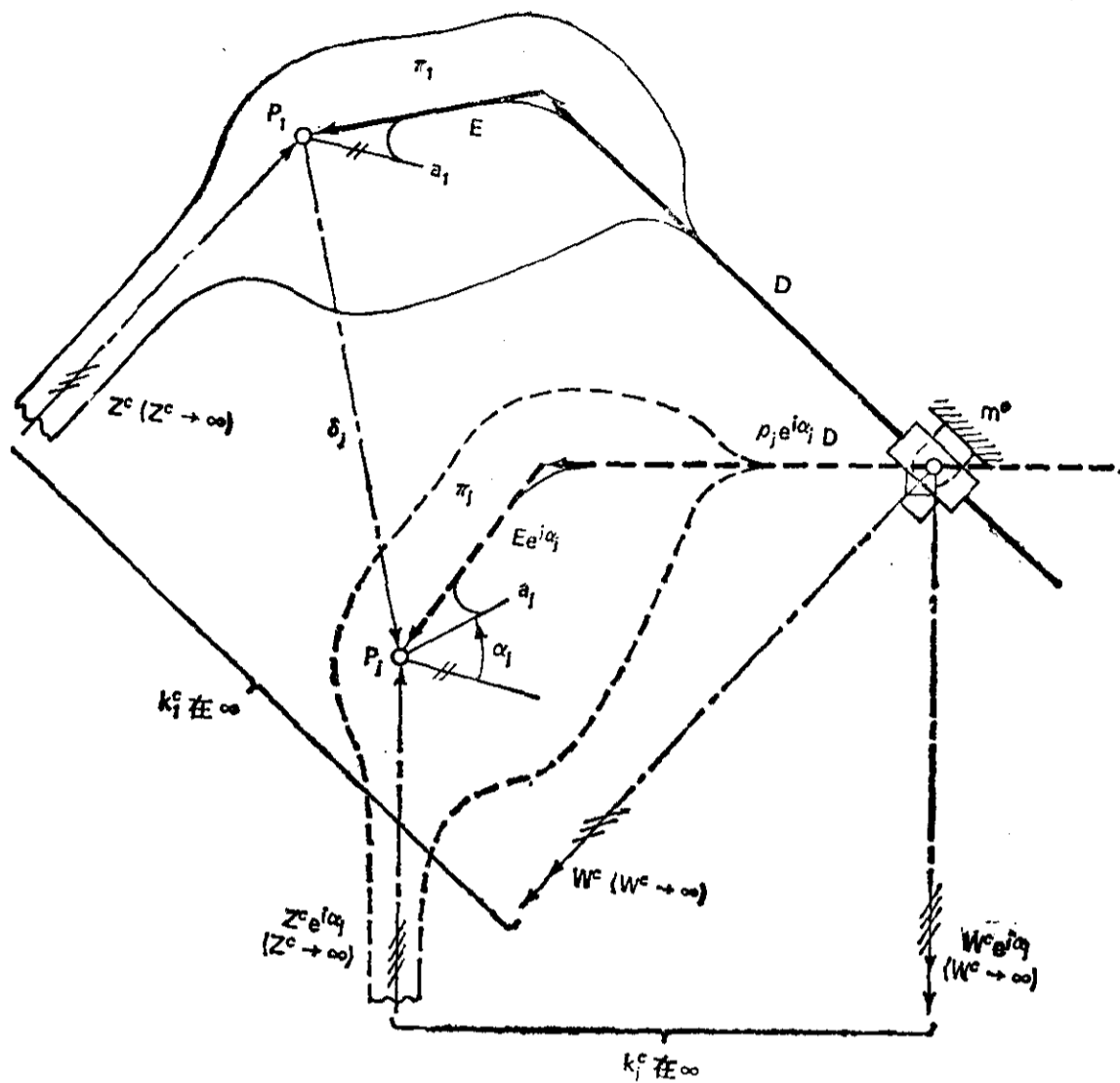


图 3.14 用按平面 π 的四个有限分离位置的唯一转-滑双杆组来形成四杆转-滑机构的一半。另一半是一阶无穷多个铰接双杆组中的一个(见图 3.15)

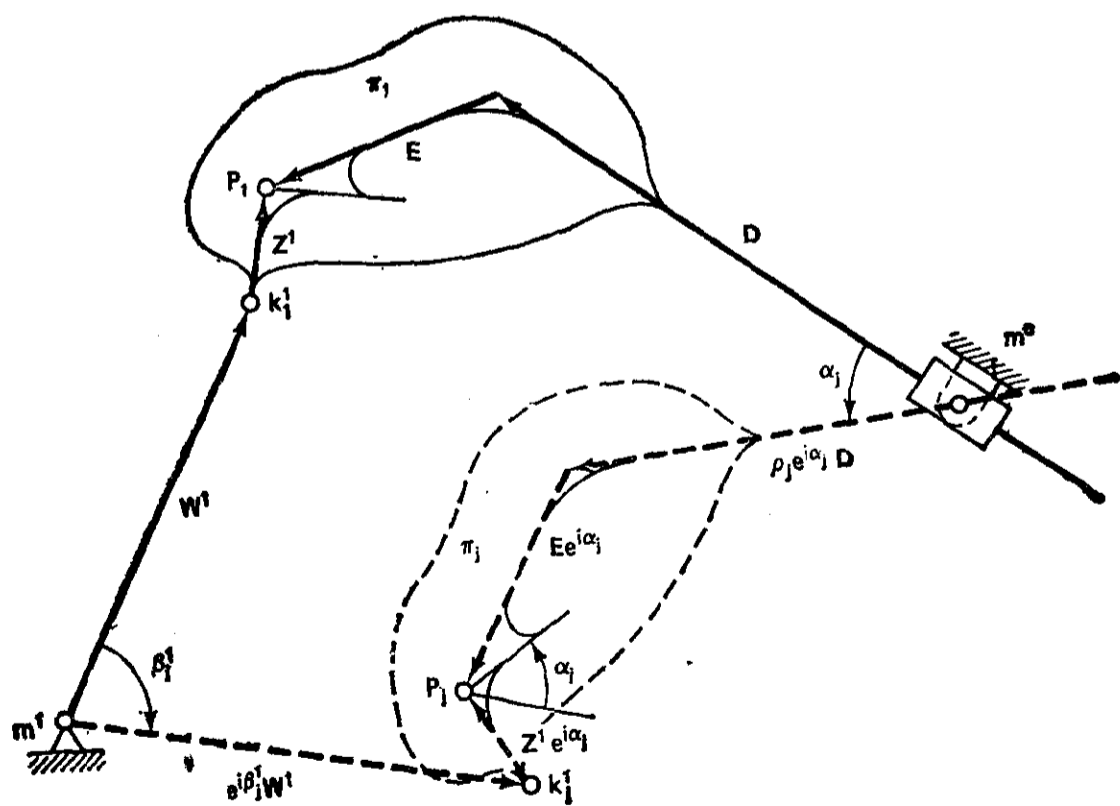


图 3.15 一个考夫曼奇解给出这一四杆转-滑机构中的转-滑双杆组[见方程(3.22)至(3.26)和图 3.14]

的向量表示法和同样的推导过程。

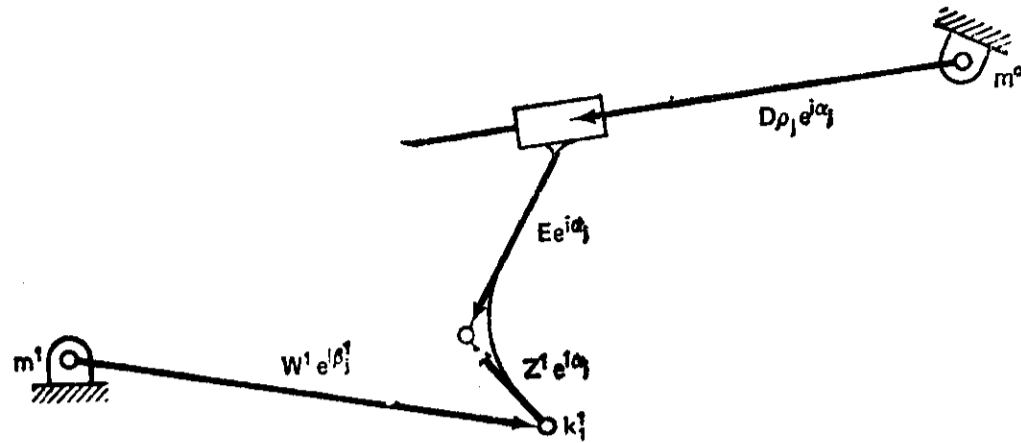


图 3.16 方程(3.22)至 (3.26) 还可用于求这一四个有限分离位置运动发生器四杆机构中的摆动滑块双杆组

求运动生成综合中的极点

任何极点 P_{jk} ($j, k=1, 2, 3, 4, j \neq k$) 均可求出如下(见图 3.16a):

$$(e^{i(\alpha_k - \alpha_j)} - 1) p_j = \delta_k - \delta_j \quad (3.27)$$

$$p_j = \frac{\delta_k - \delta_j}{e^{i(\alpha_k - \alpha_j)} - 1} \quad (3.28)$$

$$p_{jk} = r_j - p_j \quad (3.29)$$

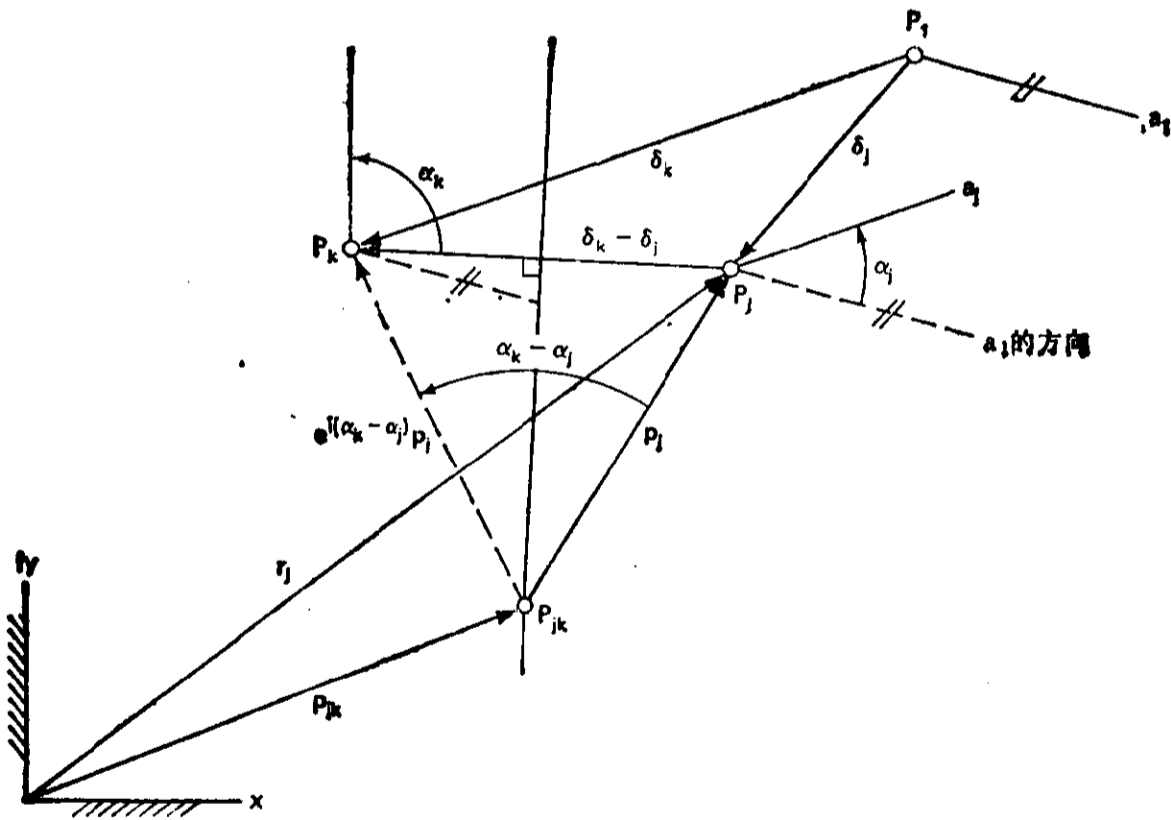


图 3.16a 平面运动生成综合中求极点式(3.27)至(3.29)的推导

3.7 运动生成: 五个位置

前几节我们看到: 一个四杆机构可按四个预定位置综合成一个运动发生器。由于布尔梅斯

特和继承他事业的那些人们的成就,使我们知道:对于任何一组四个任意规定的位置,理论上有一阶无穷多个铰接双杆组;又同时:任何两个这种双杆组都可以构成一个四杆机构,其连杆将实现这四个位置。但是,能否按五个任意位置综合出四杆运动发生器呢?

回答这一问题的第一个线索在列表(表 2.1)说明时就有了。虽然表上说明,对五个预定位置没有自由选定的参数,但是,实数方程的数目和实数未知量的数目相等,这表明这些方程可解。

第二个线索来自对四位置情况及其求出的圆心点曲线与圆点曲线的考察。假设,如图 3.4 那样,圆点曲线和圆心点曲线是按预定位置 1、2、3、4 画出的。再把按相同的前三个位置加第五位置画出一组新曲线叠加到第一组曲线上。如果这两组曲线相交,则公共解存在,并已求出了一个布尔梅斯特点对,或称布尔梅斯特双矢组,它将能引导一个平面通过所有五个预定位置。图 3.17 表示四个精确点运动生成情况的所有四种组合的叠加,它们的交点决定了组合起来的五位置问题的圆心点的解。图 3.18 表示图 3.17 中的五个精确点的四杆机构解,它处于第一个位置。

可以证明,圆点曲线和圆心点曲线是三次曲线^[107,108],因此,最多有九个交点。有两个虚交点在无穷远处,减去标出是极点 P_{12} 、 P_{13} 和 P_{23} 的交点,最多有四个可用的实交点。[P_{12} 、 P_{13} 或 P_{23} 也可用,但这等价于“点位缩减法”见节 2.9 及参考文献 169),经常伴有曲柄转动条件变坏的困难]。由于有用的实交点总是成对地出现,所以,对于任何一组五个任意预定的精确点,我们可期望或者没有解、或者两个解或四个解。下面来看看这一几何概念能否用数学方法加以验证。

再次参照图 3.2,可以写出相同的标准型方程(现在的情况有四个方程):

$$W(e^{i\beta_j} - 1) + Z(e^{i\alpha_j} - 1) = \delta_j, (j=2, 3, 4, 5) \quad (3.30)$$

其增广矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\beta_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \\ e^{i\beta_5} - 1 & e^{i\alpha_5} - 1 & \delta_5 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

为了使方程组(3.30)有双矢组向量 W 和 Z 的联立解,矩阵 M 的秩必须是 2。所以,对于五个预

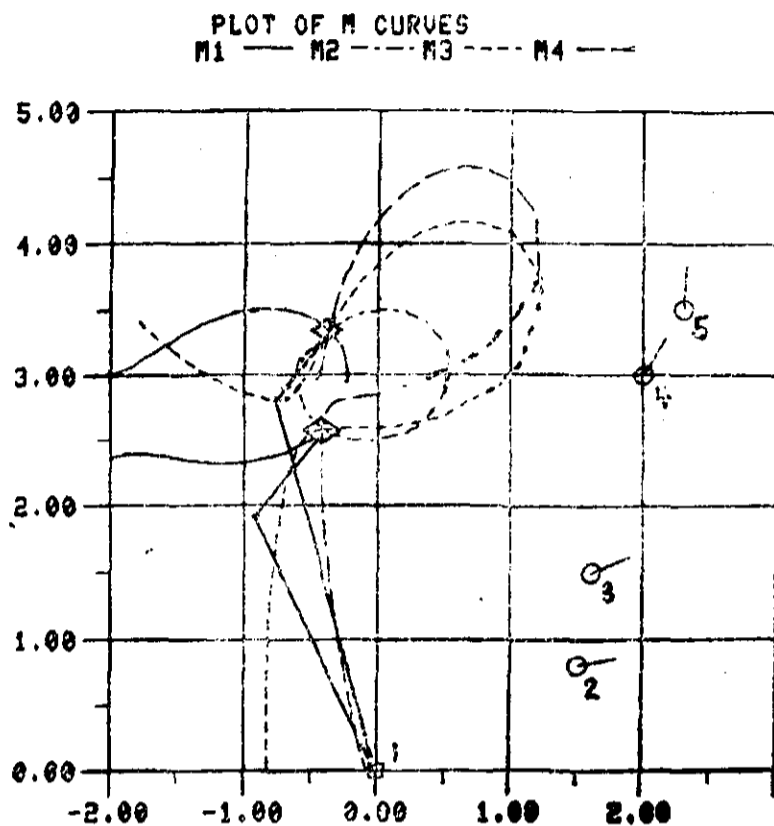


图 3.17 当 $\delta_2 = 1.5 + 0.8i$, $\delta_3 = 1.6 + 1.5i$, $\delta_4 = 2.0 + 3.0i$, $\delta_5 = 2.3 + 3.5i$ 和 $\alpha_2 = 10^\circ$, $\alpha_3 = 20^\circ$, $\alpha_4 = 60^\circ$, $\alpha_5 = 90^\circ$ 时圆心点曲线的四种组合。M1 表示精确点 1、2、3、4 的圆心点曲线; M2=1、2、3、5; M3=1、2、4、5; M4=1、3、4、5。这一例已由 M·里查森(M. Richardson)编程,加入 UNICAGES 程序包^[218]。画出了两个能存在的按五点的双矢组。图 3.18 表示求得的五点运动生成四杆机构解

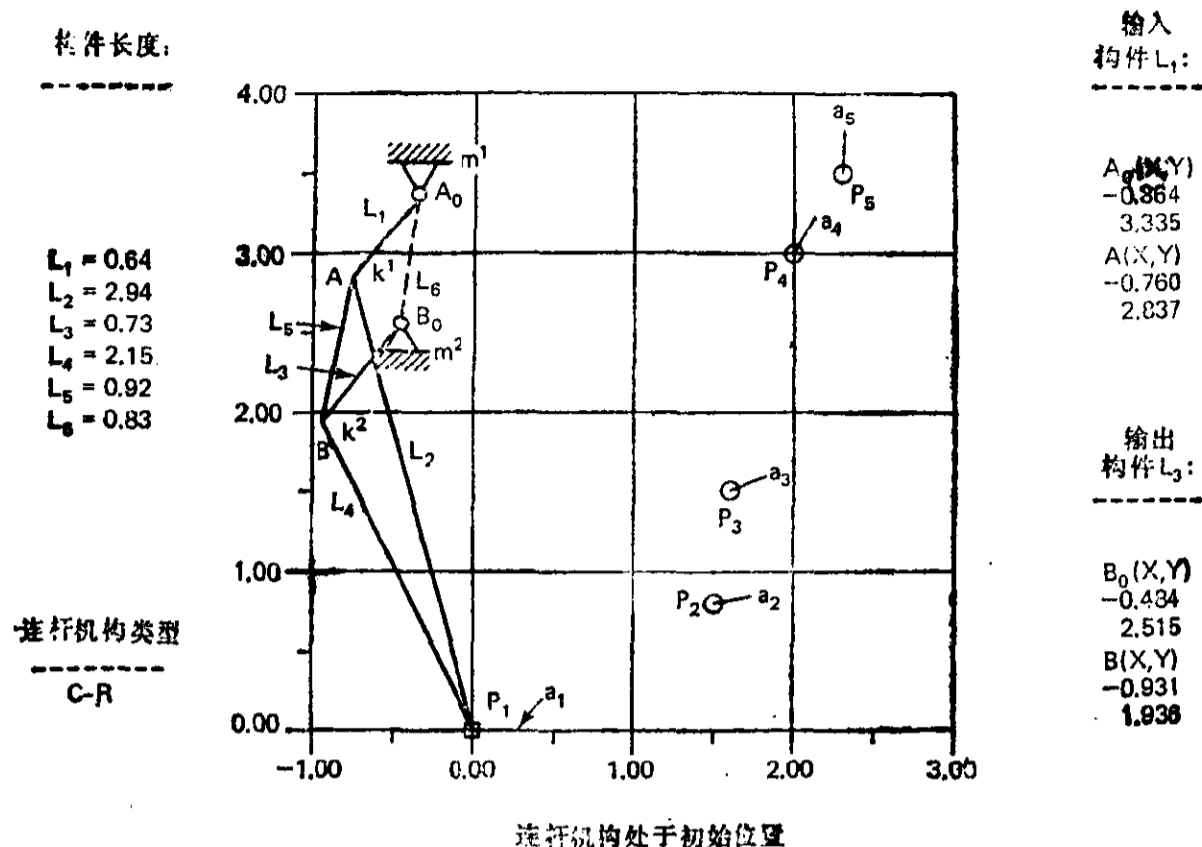


图 3.18 对于图 3.17 中给定的五个精确点, 存在两个布尔梅斯特点对, 已画入图中。求得的四杆机构表示在它的第一位置上。四杆机构的标记见图 2.59。其它精确点由 P_j 表示, 预定的角用直线 $P_j a_j$ 标征。

定位置, 要同时满足两个相容方程:

$$\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\beta_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\beta_5} - 1 & e^{i\alpha_5} - 1 & \delta_5 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

因为行列式(3.32)和(3.33)的第二、三列包含的是给定数据, 所以只有第一列的 $\beta_j (j=2, 3, 4, 5)$ 是未知(未给定的)实数。因而这儿没有可自由选择的参数来帮助解这两个复数(或四个实数)方程(表 2.1), 这些方程是关于 $\beta_j (j=2, 3, 4, 5)$ 的非线性、超越方程。如果 β_j 的解是实数, 则赋予 β_j 这些值, 方程(3.30)就是相容的。于是, 最多就有四个可用的布尔梅斯特曲线的实交点。这意味着最多将有四个双矢组可以用来构成实现五个规定位置的运动发生器。为此, 可用方程(3.30)中的任意两个方程求出 Z 和 W 。

3.8 按五个预定位置求解的方法

将行列式[方程(3.32)和(3.33)]按第一列(未知的 β_j 所在的列)中各元素展开:

$$\Delta_2 e^{i\beta_2} + \Delta_3 e^{i\beta_3} + \Delta_4 e^{i\beta_4} - \Delta_1 = 0 \quad (3.34)$$

$$\Delta'_2 e^{i\beta_2} + \Delta'_3 e^{i\beta_3} + \Delta_4 e^{i\beta_5} - \Delta'_1 = 0 \quad (3.35)$$

式中 $\Delta_j (j=1, 2, 3, 4)$ 与前面[式(3.8)]相同, 而 $\Delta'_j (j=1, 2, 3)$ 与 Δ_j 相同, 只是所有的下标 4 都

以下标 5 代替。

这些相容方程的复数共轭式^①也是成立的:

$$\overline{\Delta_2}e^{-i\beta_2} + \overline{\Delta_3}e^{-i\beta_3} + \overline{\Delta_4}e^{-i\beta_4} - \overline{\Delta_1} = 0 \quad (3.36)$$

$$\overline{\Delta'_2}e^{-i\beta_2} + \overline{\Delta'_3}e^{-i\beta_3} + \overline{\Delta_4}e^{-i\beta_5} - \overline{\Delta'_1} = 0 \quad (3.37)$$

可从方程(3.34)至(3.37)中消去 β_4 和 β_5 如下: 方程(3.34)乘以(3.36), 而方程(3.35)乘以(3.37)^②。方程(3.34)和(3.36)相乘得出

$$\begin{aligned} \Delta_4 \overline{\Delta_4} = & \Delta_1 \overline{\Delta_1} - \Delta_1 \overline{\Delta_2}e^{-i\beta_2} - \Delta_1 \overline{\Delta_3}e^{-i\beta_3} - \Delta_2 \overline{\Delta_1}e^{i\beta_2} \\ & + \Delta_2 \overline{\Delta_2} + \Delta_2 \overline{\Delta_3}e^{i\beta_2}e^{-i\beta_3} - \Delta_3 \overline{\Delta_1}e^{i\beta_3} + \Delta_3 \overline{\Delta_2}e^{i\beta_3}e^{-i\beta_2} \\ & + \Delta_3 \overline{\Delta_3} \end{aligned} \quad (3.38)$$

方程(3.38)的简洁形式为:

$$C_1 e^{i\beta_3} + d_1 + \overline{C_1} e^{-i\beta_3} = 0 \quad (3.39)$$

式中

$$\begin{aligned} C_1 &= \Delta_3(-\overline{\Delta_1} + \overline{\Delta_2}e^{-i\beta_2}) \\ d_1 &= -\overline{\Delta_1}\Delta_2e^{i\beta_2} - \Delta_1\overline{\Delta_2}e^{-i\beta_2} - \Delta_4\overline{\Delta_4} + \sum \Delta_j \overline{\Delta_j} \\ & \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned}$$

同样, 方程(3.35)和(3.37)相乘得出

$$C_2 e^{i\beta_3} + d_2 + \overline{C_2} e^{-i\beta_3} = 0 \quad (3.40)$$

式中, C_2, d_2 与 C_1, d_1 相同, 其区别在于 $\Delta_j (j=1, 2, 3)$ 带撇“'”。注意, 式(3.39)和(3.40)可看作 $e^{i\beta_2}$ 和 $e^{i\beta_3}$ 的齐次非线性方程, 含有它们的一次方、零次方和负一次方幂, 带有已知系数。消去含 β_3 的幂是通过西尔维斯特(Sylvester)^③结式消元法完成的。该方法开始是把方程(3.39)和(3.40)乘以 $e^{i\beta_3}$, 产生两个附加的有效方程:

$$C_1 e^{i2\beta_3} + d_1 e^{i\beta_3} + \overline{C_1} = 0 \quad (3.41)$$

$$C_2 e^{i2\beta_3} + d_2 e^{i\beta_3} + \overline{C_2} = 0 \quad (3.42)$$

如果把 $e^{i2\beta_3}, e^{i\beta_3}, e^{i0\beta_3}$ 和 $e^{i(-1)\beta_3}$ 看作独立的“未知量”, 则方程(3.39)至(3.42)可作为这四个未知量的齐次线性方程。因为这些方程的右边都是零, 所以, 为了使该方程组能解出这四个“未知量”的联立解, 其系数行列式必须为零。因此, 该“消元”行列式为

$$E = \begin{vmatrix} 0 & C_1 & d_1 & \overline{C_1} \\ 0 & C_2 & d_2 & \overline{C_2} \\ C_1 & d_1 & \overline{C_1} & 0 \\ C_2 & d_2 & \overline{C_2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

注意, 我们已经成功地从消元式中消去了 $e^{i\beta_3}$ 的各次幂。展开该行列式, 得到 $e^{i\beta_2}$ 的多项式:

$$\sum a_m e^{im\beta_2} = 0 \quad (3.44)$$

① 上面的横线代表复数共轭式。

② 将 Δ_4 项移到等号的另一边以后再乘。

③ 十九世纪英国数学家、运动学家。

式中, $m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, 而所有系数 a_m 为给定量 δ_j 和 $\alpha_j (j=2, 3, 4, 5)$ 的确定函数。同时注意, a_{-k} 和 $a_k (k=1, 2, 3)$ 互为复数共轭式, a_0 是实数。于是该展开式证明行列式 B 是实数, 它的虚部全消失了。所以, 只有消元式的实部是有用的, 其形式为:

$$\sum_m [p_m \cos(m\beta_2) + q_m \sin(m\beta_2)] = 0 (m=0, 1, 2, 3) \quad (3.45)$$

式中 p_m 和 q_m 为已知实数。利用三角恒等式, 方程(3.45)可变换为包含 β_2 的正弦和余弦的若干次方幂(最高至三次)的形式, 然后, 用另外的恒等式将它变为单变量 $\tau = \tan(\beta_2/2)$ 的六次多项式, 其形式为

$$\sum_{0,1,\dots}^6 A_n \tau^n = 0 \quad (3.46)$$

我们知道 $\beta_2=0$ 是一个平凡解, 它使 $\tau=0$ 成为一个平凡根。因此, 方程(3.46)可以降为五次多项式。再有, 从方程(3.32)和(3.33)的行列式形式可看出, $\beta_j = \alpha_j (j=2, 3, 4, 5)$ (这里为 $\beta_2 = \alpha_2$), 这一组 β 值是另一个平凡解。这样, 将该留下的五次多项式方程除去根因式 $[\tau - \tan(\alpha_2/2)]$, 剩下 τ 的四次方程:

$$\tau^4 + \lambda_3 \tau^3 + \lambda_2 \tau^2 + \lambda_1 \tau + \lambda_0 = 0 \quad (3.47)$$

方程(3.47)将有四个或两个实根, 或没有实根。每个实根给出一个 β_2 的值, 这个 β_2 的值可代回方程(3.41)或(3.42)求出 β_3 , 然后代入方程(3.34)和(3.35)得到 β_4 和 β_5 。于是, 式(3.30)中的任何两个方程都可解出 Z 和 W , 为这一运动生成情况最多可得出四个布尔梅斯特点对: $m^{(n)}, k_1^{(n)}, n=1, 2, 3, 4$ 。这些布尔梅斯特点对与预定轨迹的描述点 P 的起始位置 P_1 一起, 定义了四个双矢组 $W^{(n)}, Z^{(n)}$ 。 $Z^{(n)}$ 都有相同的一组给定转角 $\alpha_j (j=2, 3, 4, 5)$ 而四个不同的向量 $W^{(n)}$ 有四组不同的转角 $\beta_j^{(n)} (n=1, 2, 3, 4, j=2, 3, 4, 5)$ 。图 3.17 和 3.18 的例题中只有两个实根, 因此, 只有两个布尔梅斯特点对 ($n=1, 2$), 它们可用来构成一个四杆机构, 引导其连杆平面通过这五个预定的共平面位置。一般来说, 将四个布尔梅斯特点对中的每一个与其余的任何一个相组合, 我们最多可以得到六个不同的这种四杆运动发生器连杆机构。(计算程序见附录 A 3.2。)

3.9 布尔梅斯特点理论的扩展: 带预定时标的轨迹生成和函数生成

布尔梅斯特理论在上文是为得到适用于四杆运动发生器的双矢组而推导出来的。这对四杆机构带预定时标的轨迹生成和函数生成是怎样的呢? 还有, 这一理论能否扩展到其它类型的连杆机构呢? 第二章证明了双矢组标准型方程, 即方程(3.2)可用于很多场合。罗伯茨-契贝歇夫定理 (Roberts-Chebyshev theorem) 能帮助我们更好地理解该双矢组形式和布尔梅斯特理论的广泛应用范围。

罗伯茨-契贝歇夫定理

罗伯茨-契贝歇夫定理^[125]揭示了平面四杆机构的一个非常有用的性质。该定理表述为:

三个不同但相关联的平面四杆机构中的每一个机构上都有一点能描出完全相同的连杆曲线。这意味着与每个“母”四杆机构相关联的将有两个附加的四杆机构，它们与母机构描出相同的轨迹（虽然连杆转角将不相同）。这两个附加的连杆机构以它们的英国和俄国两个独立发现者的名字命名为“罗伯茨-契贝歇夫同源机构” (Roberts-Chebyshev Cognates)。借助于图 3.19 中实线所示的四杆机构，我们可用几何方法形成这两个同源机构如下：

1. 完成 Z^1, W^1 和 Z^2, W^2 的平行四边形。
2. 求出罗伯茨构形的第三个固定点 C ，方法是作三角形 $m^1 C m^2$ 相似于连杆三角形 $k_1^1 P k_1^2$ ，使 C 对应于 P , m^1 对应于 k_1^1 ，以此类推。
3. 作 $\triangle GPH$ 相似于 $\triangle m^2 m^1 C$ 或 $\triangle k_1^2 k_1^1 P$ ，求出一个同源连杆三角形。 HC 就是图 3.19 中虚线表示的“右同源机构”的从动杆。
4. 求另一同源机构，方法是作连杆三角形 FIP 相似于 $\triangle m^1 C m^2$ 或 $\triangle k_1^1 P k_1^2$ ，连结 IC 以形成图中以点划线表示的第二个同源机构的从动杆。注意， $ICHP$ 是平行四边形。由于点 P 作为这三个平行四边形的汇交点，从而图 3.20 表示：点 P 无论作为原来的四杆机构上的点，还是作为其任何一个同源机构上的点，它所描出的连杆曲线都是同一条曲线。

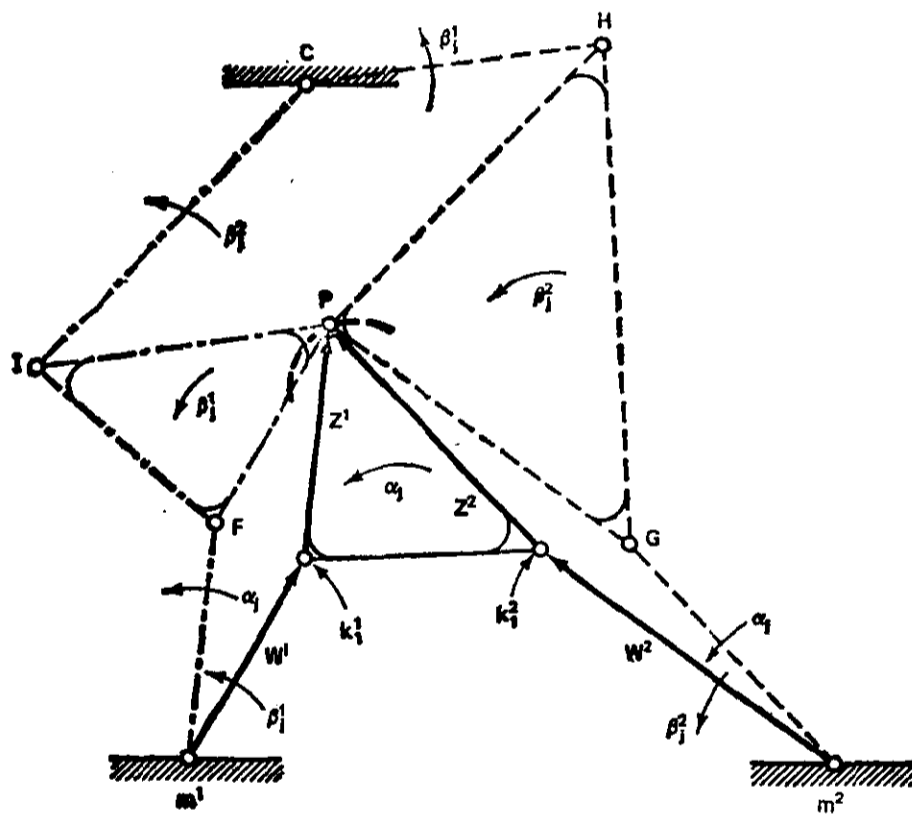
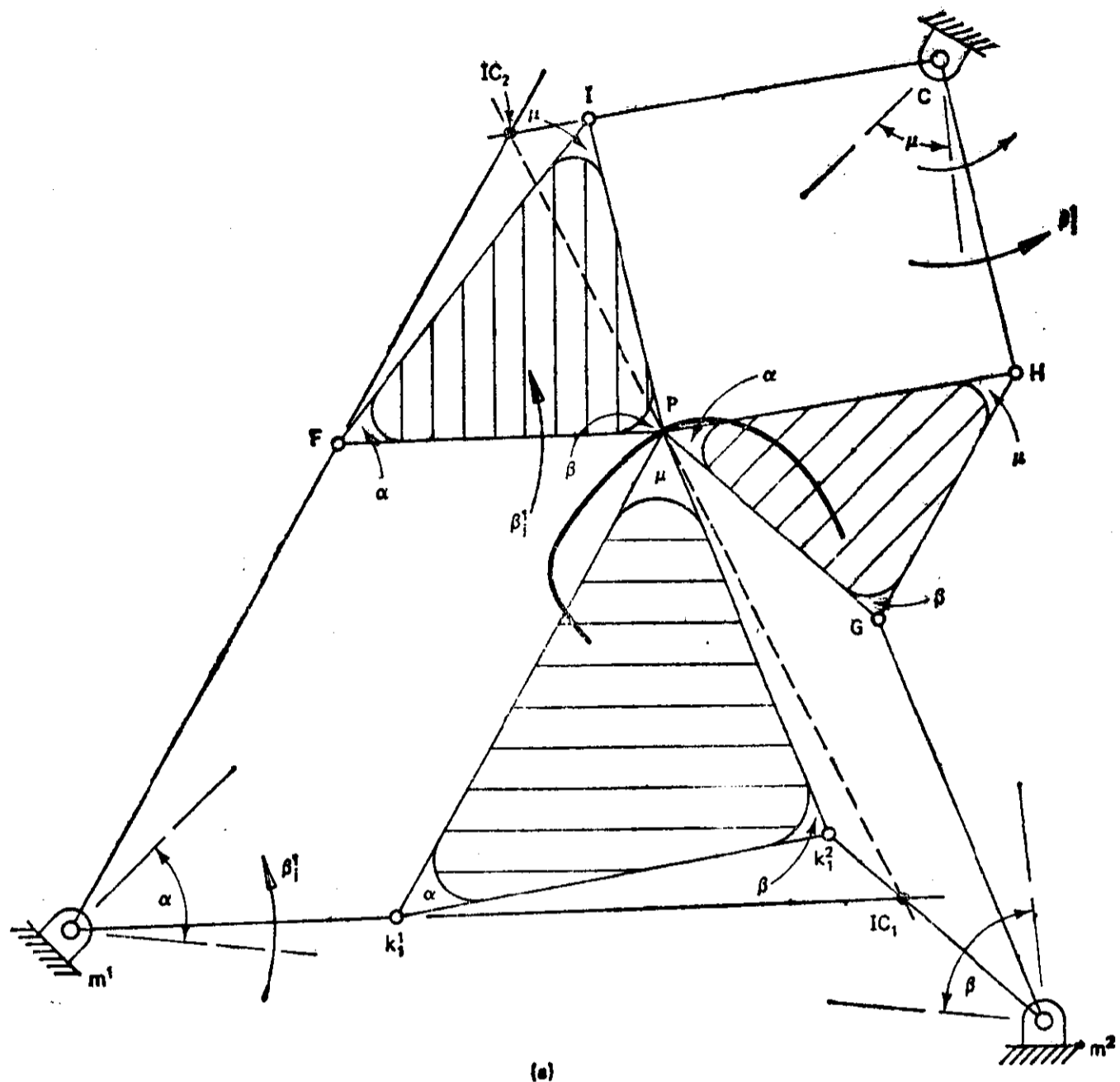
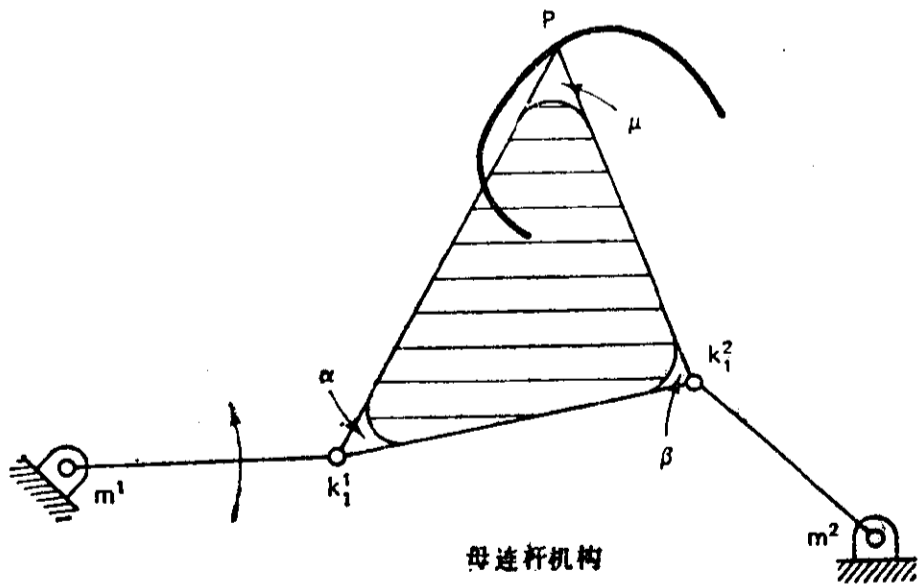


图 3.19 罗伯茨-契贝歇夫构形是由基本的运动发生器四杆机构组成，该四杆机构则由（最多可能四个中的）两个布尔梅斯特点对双矢组 $W^1 Z^1$ 和 $W^2 Z^2$ 构成。虚线和点划线表示的四杆机构是基本机构的同源机构。

每一个四杆机构都有两个同源机构与该母四杆机构描绘同一轨迹这一性质，对设计师来说是非常有用的。两个同源机构虽然互相共用一个固定销轴的位置，但它们是不同的连杆机构。设计师可能会发现，某个具体连杆机构虽然能描出所希望的轨迹，但它可能不满足空间要求，或者，传动角、机械效益、速度和加速度的某一个特性不好，或者某几个以至全部特性可能不好。然而这时仍然有两个同源机构可用，它们描出同一条轨迹，而一般地说，它们将显示出不同的运动特



(a)



母连杆机构

(b)

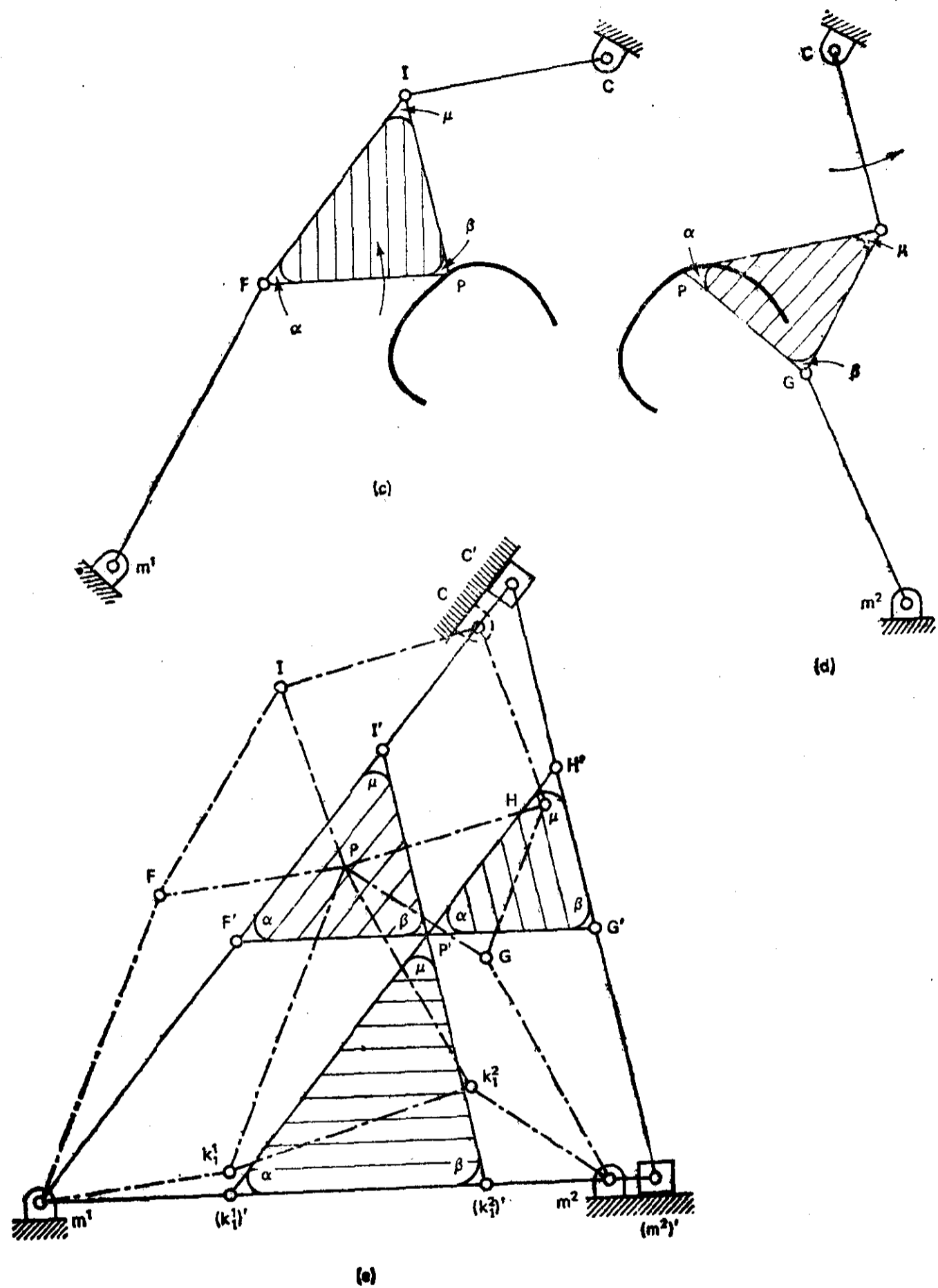


图 3.20 (a) 三个罗伯茨-契贝歇夫四杆机构; (b)、(c)和(d); 它们的公共点 P 在固定参考平面上描出相同的轨迹; (e) 罗伯茨-契贝歇夫构形包含七个相似三角形, 它们可由图 3.20(e) 中拉直的构形演示出。

性和动力特性。

这里要指出的是, 同源机构不是等效机构。等效机构通常是一个连杆机构 (比如说四杆机构), 它在某个瞬时与一个直接接触的(高副)机构(如凸轮或非圆齿轮)有相同的位置、速度或加速度。在这种高副母机构的各个不同位置上, 等效机构的尺寸是不同的; 而同源机构的杆长在母

连杆机构的任何位置上都保持相同。

同源机构的其它性质包括凯利 (Cayley) 推导出的一个性质^[86], 即: 公共的连杆轨迹点和汇交于一点的三个连杆(相对于机架)的三个瞬心在任何时候都共线, 而且包含这些点的直线在连杆机构系统的每个位置上垂直于连杆曲线(见图 3.20 a 中的点 IC_1 、 IC_2 和 IC_3)。另一个观察结果是: 这三个连杆机构中, 任何一个四杆机构的每个连架杆都与一个同源机构的一个连架杆及另一个同源机构的连杆有相同的转角 (并以同样的角速度回转), 如图 3.19 所示 (我们很快将利用这一性质)。还有一个值得注意的事实是: 如果将母机构和它的两个同源机构铰接起来, 形成一个可动的十杆机构, 那么格鲁布勒(Gruebler)公式(见节 1.6)预示该机构的自由度是 -1。这是一个仅仅由于特殊几何性质而具有可动性的过约束机构的例子。罗伯茨-契贝歇夫构形还具有的另一个性质是: 除了四个刚性的相似三角形 (三个连杆三角形和一个由三个定销轴形成的三角形) 以外, 还有三个大小变化的三角形, 它们在机构运动过程中都始终保持相似于连杆三角形。这三个三角形是: $\Delta m^1 k_1^1 I$ 、 $\Delta k_1^1 m^2 H$ 和 ΔFGC 。其证明可以如图 3.20 e 所示那样开始: 将 m^2 沿 m^1 、 m^2 的延长线向离开 m^1 的方向移动, 直至它们之间的三个杆伸成一条直线为止。接着, C 对 m^1 之间也这样作。在形成的伸展图形中, 所有构件都保持它们原来的长度, 很明显, 上述七个三角形都是相似的。证明的其余步骤留给读者作为练习。[提示: 把 C' 和 $(m^2)'$ 向 m^1 移动, 在移动过程中保持这三个点形成的三角形始终相似。然后, 用复数和适当的转动算子证明上述三个变化的三角形与另外四个三角形相似。]

有同源机构的不仅是四杆机构。滑块-曲柄机构 (四杆机构的特殊情况, 见图 3.12)、五杆、六杆机构, 事实上所有平面机构都有同源机构。用复数和适当的转动算子证明四杆同源机构存在的复数法可以图 3.20 e 为基础。这作为练习留给读者。上述同源机构性质的进一步展开和历史的说明, 可参考文献^[125]。

四杆轨迹发生器机构(四个和五个精确点)

同源机构的用途, 除了刚提到的以外, 还能导出一个重要的计算上的优点。用罗伯茨-契贝歇夫定理可以由四杆运动发生器得到带预定时标的轨迹发生器。我们再看一下图 3.19 中的几何同源机构。假设母四杆机构 ($m^1 k_1^1 P k_2^2 m^2$) 是一个按四个或五个精确点方法综合出来的运动发生器。连杆转角 α_j 和轨迹点 P 的位移已经给定。输入杆 $m^1 k_1^1$ 回转 β_j^1 (第一个解对, 即第一个双杆组中连架杆的转角); 而输出杆 $m^2 k_2^2$ (第二个双杆组的连架杆) 回转 β_j^2 。

根据罗伯茨-契贝歇夫的研究, 所有三个同源机构以它们的公共轨迹点描绘出完全相同的连杆曲线。其中两个同源机构的各个构件回转怎么样的角度呢? 注意 $m^1 F$ 总是平行于 $k_1^1 P$, FP 始终平行于 $m^1 k_1^1$, 那么很清楚, $m^1 F$ 回转 α_j , 而 FP 回转 β_j^1 。而且, $m^2 G$ 回转 α_j , PGH 和 IC 回转 β_j^2 , CH 回转 β_j^1 。因为原来给定的转角 α_j 已转移到同源机构的连架杆, 所以, 一个运动发生器的同源机构是带预定时标的轨迹发生器。对于每一个四杆运动发生器, 都有两个这样的四杆轨迹发生器。这一研究成果可用来简化四个和五个精确点的综合方法, 结果是综合方程只要解一次就可完成两个任务, 即: 运动生成和带预定时标的轨迹生成。在第二种情况, 其同源机构也可用计算机从母机构运动发生器导出。

在五精确点的情况,我们能期望得到多少个带预定时标的轨迹发生器呢?因为四次方程[方程(3.47)]有零、两个或四个实根,所以,对于每一组数据,将有零、两个或十二个定时轨迹发生器。

四杆函数发生器机构(四个和五个精确点)

在节 2.16 说明了四杆函数发生器可以将它看作轨迹按给定圆弧(见图 2.60) 的带预定时标的轨迹发生器,以“标准型”方程来综合。而且,沿圆弧的轨迹点是这样选定的:当圆弧中心到轨迹点的杆从一个精确点回转到下一个精确点时,该杆应转动给定的输出角 ψ_j 。这一方法与罗伯茨-契贝歇夫构形的关系通过对照图 3.20 a 和 3.21 两个图中的点 m^1, m^2, F 和 P 就可看出来。

从五个精确点的情况,我们能期望得到多少个函数发生器呢?因为我们把函数发生器看作带预定时标的轨迹发生器,所以有人一开始可能会猜想,如果四次方程(3.47)的所有根都是实根,则最多将有 12 个函数发生器。然而,事实不是这样。首先,形成一个函数发生器仅需要半个四杆轨迹发生器,即图 3.20 a 和 3.21 中的双杆组 m^1FP 。此外,因为构成那 12 个轨迹发生器的只有四个不同的双杆组,所以,只有四个不同的双杆组解可用。而且,因为以 m^2 为中心的圆弧是作为 P 的轨迹给定的,所以总会有一个平凡解。这个解的双杆组将包含长度为零的连架杆 Z 和与给定的输出杆 Z_4 (其转角为 ψ_j) 完全一样的连杆 W 。所以,最多只有三个不同的四杆机构解;但至少一个解是保证的,因为 $[\tau = \tan(\beta_2/2)]$ 的复根是以共轭复根成对出现的,而且总是应该有一个平凡解。表 3.2 归纳了在四次方程有零、两个或四个实根时能期望得到的解的数目。

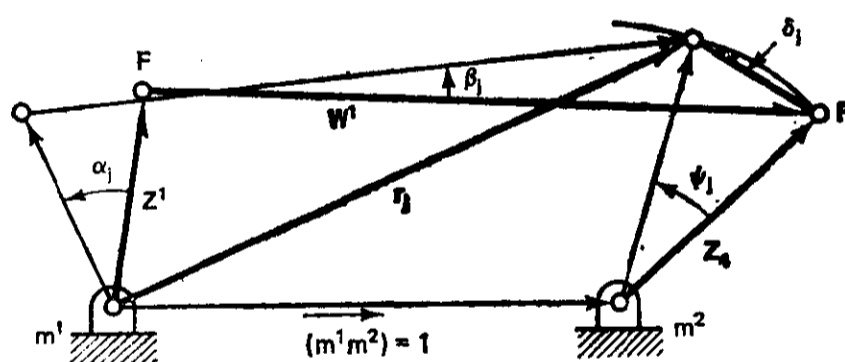


图 3.21 四杆函数发生器的综合。给定: $\alpha_j, r_1=1+Z_1, r_j=1+Z_1 e^{i\psi_j} (j=2,3,4,5)$ 其中, Z_1 是任意的, α_j 和 ψ_j 是待生成函数的自变量和因变量的模拟量。据此,双矢组综合方程的标准型变成: $Z(e^{i\alpha_j}-1)+W(e^{i\beta_j}-1)=\delta_j$, 式中 $\delta_j=r_j-r_1$

表 3.2 利用标准双矢型[方程(3.30)]按五个有限分离精确点来综合四杆机构可能得到的解的数目

四次方程的实根数	可望得到的不同四杆机构解的个数		
	运动生成	定时轨迹生成	函数生成(见图 3.21)
0	0	0	0
2	1	2	1
4	6	12	3

3.10 布尔梅斯特理论的进一步扩展

齿轮五杆和平行四边形六杆同源机构

前一节证明了布尔梅斯特双矢组可以组合在一起形成运动生成、函数生成和带预定时标的轨迹生成的四杆机构。某些其它有用的、多于四杆的连杆机构可以同样由这些双矢组用简单的作图法综合出来。假设我们希望直接得到一个带预定时标的轨迹发生器，而不必通过计算运动发生器的同源机构。（可能运动发生器的定销轴位置合适，但同源机构的定销轴位置却不理想。）于是，齿轮五杆或平行四边形六杆（带预定时标的）轨迹发生器就可能有用了。

参照图 3.22，作出图 3.22①中虚线所示四杆运动发生器中原双矢组 (W^1 和 Z^1 , W^2 和 Z^2) 的向量平行四边形。暂不管该母四杆机构，而将连架杆 Z^1 和 Z^2 以 1:1 的齿轮（用一惰轮保证 Z^1 、 Z^2 的转动完全相同）互相连接起来。这样，得到一个单自由度的齿轮五杆机构 m^1FPGm^2 ，它将描出 P 对应于规定输入曲柄转角 α_j 的预定轨迹。每一个运动发生器都有一个齿轮五杆机构，它的任何一个连架杆都可用作输入杆。设计这一机构的另一种方法示于图 3.23，图中用链条和两个相等的链轮或齿形皮带和两个相等的皮带轮代替了齿轮传动。

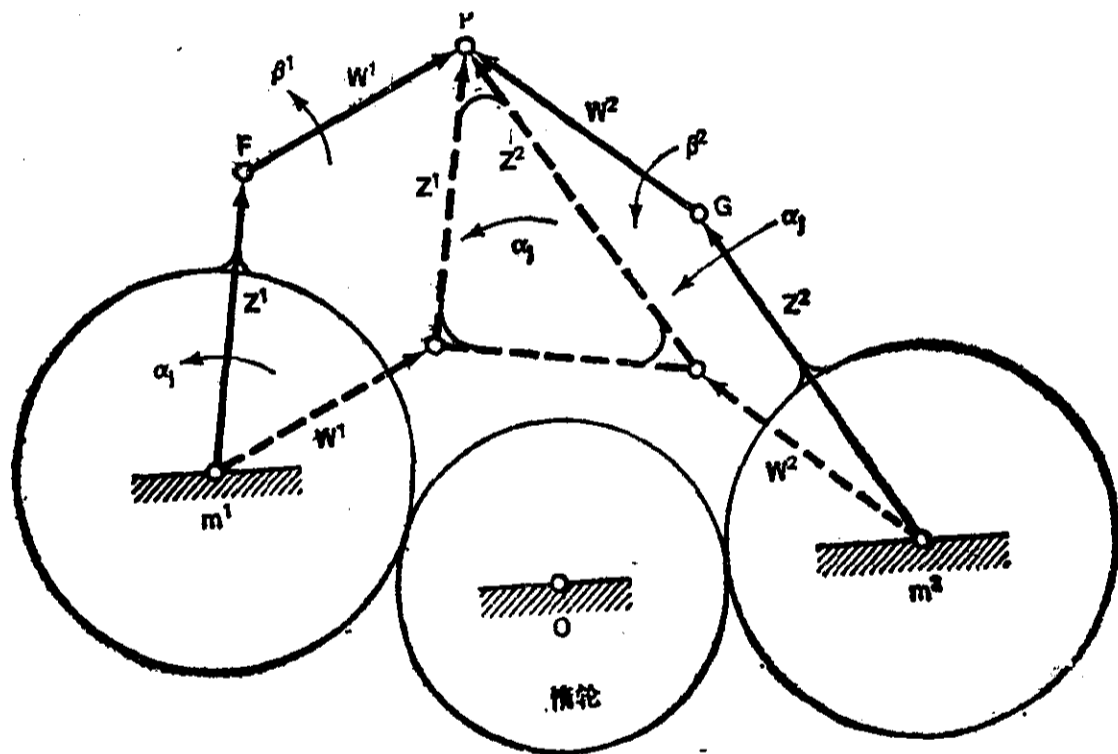


图 3.22 这一单自由度齿轮五杆机构中 Z^1 与 Z^2 之间的 1:1 齿轮传动比保证 W^1 与 W^2 的连结点 P 能描出与母机构（虚线所示的四杆运动发生器）相同的轨迹

将图 3.22 中两个自由度的五杆机构变为单自由度，除了用齿轮、链轮与链条或皮带轮与齿形皮带外，还有另外一种方法。如图 3.24 所示，在五杆机构上增加一个平行四边形机构也可达到同样的目的。注意，连结到 Z^1 、 Z^2 上的平行四边形并不是唯一的。事实上，可以把两个平行四边形连结在一起，以避免死点问题（图 3.25）。（这是由机构尺寸比例保证其可动性的另一个过约束机构。）

五杆机构 m^1FPGm^2 也可用传动比不是 1:1 的齿轮来连结，但这需要组合两个不同的双矢

① 原著为图 3.19，似有误——译者注。

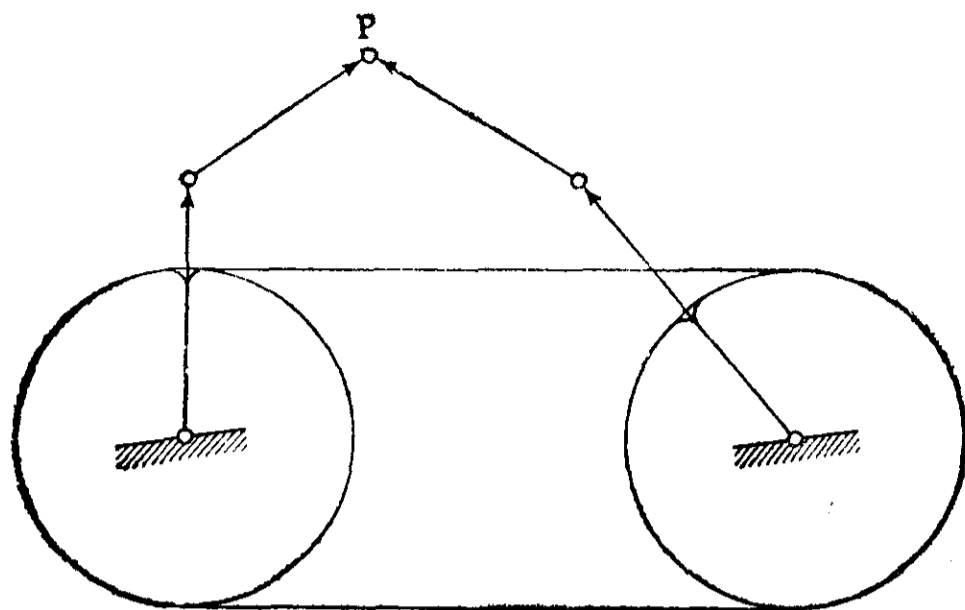


图 3.23 与图 3.22 中的齿轮五杆机构相同,只是齿轮已被链条、链轮所代替

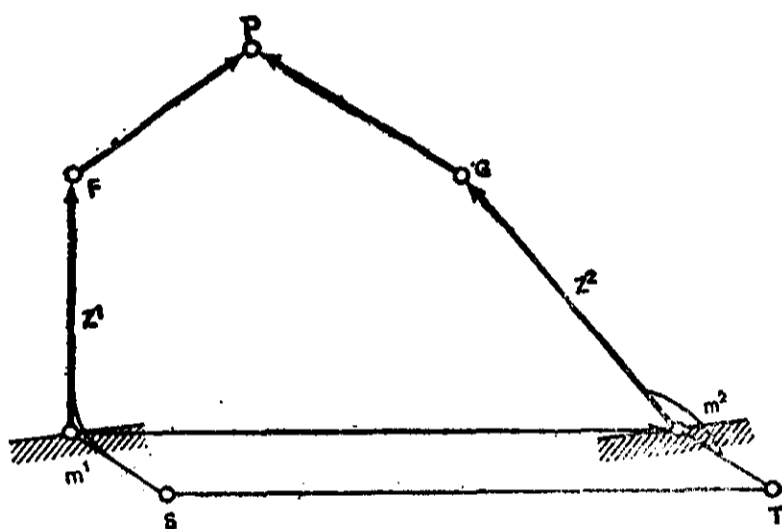


图 3.24 平行四边形机构 m^1m^2TS 保证五杆轨迹发生器中 Z^1 和 Z^2 杆之间的速比为 1:1。其母机构,即四杆运动发生器见图 3.22

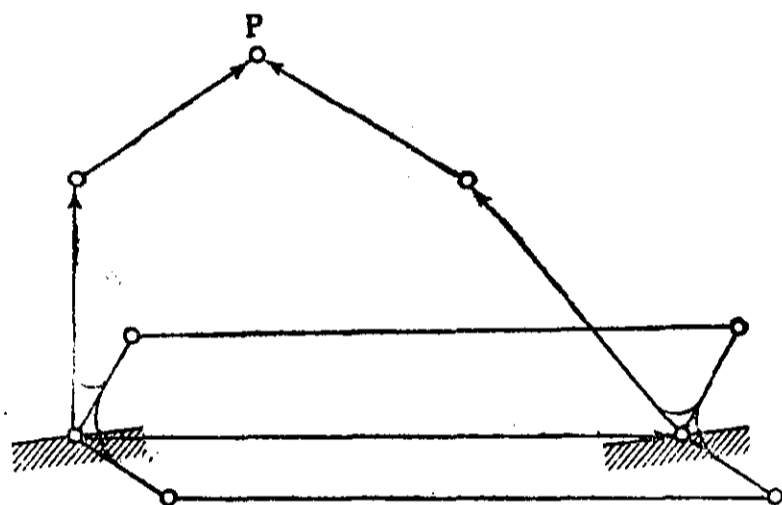


图 3.25 与图 3.24 相同的五杆轨迹发生器上再加一个平行四边形机构,以避免运动分支问题及滞留在原平行四边形的死点上

解——两个解的 δ_j 相同,而 α_j 不同,一个解的 α_j 与另一个的 α_j 成比例。

六杆平行运动发生器

一种非常有用的机构是能够沿一条连杆曲线运动,而其连杆本身并不转动——平行运动(曲线平移)发生器。很容易看出,这是一个四杆机构所不能胜任的任务,只有在连杆曲线是圆的平行四边形机构这种明显情况下才是例外。下面扩展的罗伯茨-契贝歌夫作图法给出一个六杆机构,它的一个构件作曲线平移运动。

开始,画出初始的运动发生器四杆机构 $m^1k_1^1Pk_1^2m^2$,它的点 P 描出预定的轨迹(图 3.19)。接着,画它的一个同源机构,比如说,右边虚线表示的同源机构 m^2GPHC 。然后,将它平移直到点 C 与 m^1 重合,将其画下来(图 3.26)。这就得出了四杆机构 $C'H'P'G'm^2$ 。根据以前的讨论,我们知道:杆 CH 和杆 $m^1k_1^1$ 一样回转角 β_j^1 。因为 $C'H'$ (与 CH 有同样的回转角)和 $m^1k_1^1$ 两者的转角完全一样,所以三角形 $m^1k_1^1H'$ 可以刚性地连接起来。注意 P 和 P' 两者描出相同的轨迹——所以 PP' 可以用刚性构件相连接。在 P 和 P' 两者描出预定轨迹的过程中,该构件将平行地移

动。因为我们可形成三角形 $m^1k_1^1H$ ，所以存在一个单自由度机构，而无需 $G'P'$ 、 $G'H'$ 和 $m^2'G'$ 三个杆（图 3.26 中虚线所示）。六杆平行运动发生器由起始的四杆机构 $m^1k_1^1Pk_1^2m^2$ 加 $m^1H'P'P$ 组成。

我们也可用左边的同源机构，而不用图 3.26 所示的右同源机构。遵循同样的作图法，将得出另一个六杆平行运动发生器。因此，对每一个运动发生器，有两个六杆平行运动发生器。

稍为仔细地研究这两个六杆机构可能会产生某种失望：似乎丧失了预定的转角 α_j ——连杆 PP' 和两个连架杆回转的角度都不是原先规定的角 α_j 。不过，只要在图 3.26 中的实线构件上增加虚线部分 $H'G'P'm^2'$ ，就可得到一个七杆带预定时标的平行运动发生器（一个过约束机构），其中杆 $m^2'G'$ 按预定的转角 α_j 回转。

关于图 3.26，还可做出三个有用的结论：

1. 由四杆运动发生器导出的平行运动连杆机构有一个特殊的性质：可给出一个组合的“运动函数发生器”和平行运动发生器。这一点，只要观察图 3.26 中构件 $Pk_1^1k_1^2$ 回转预定角度 α_j 时，杆 PP' 并不转动就可看到。因此， PP' 和 $k_1^1Pk_1^2$ 之间的相对转动就是规定的。这种性质的一种应用是飞剪，即要切断的物体由构件 PP' 支持沿预定的轨迹运动，同时，连结在 $k_1^1Pk_1^2$ 上的刀片切断那个“在飞行中”的物体。

2. 因为预定转角 α_j 不是该六杆机构生成平行运动性质中的一个因素，所以，我们可以借改变 α_j 的选定值求得更多的六杆机构。因此，有无穷多个六杆平行运动发生器能沿 P 的轨迹到达预定的精确点。

3. 注意，预定转角 α_j 是原来运动发生器的每一个同源机构中一个连架杆的转角。为了利用这些预定转角，应该对同源机构而不是对母运动发生器应用这一六杆平行运动作图法。这样，从每个同源机构将得出两个不同的六杆机构，每个运动发生器四杆机构总共可有四个六杆带预定时标的平行运动发生器。

表 3.3 指出了由以上所述的扩展罗伯茨-契贝歌夫作图法的全部结果可望得出的解的数目。

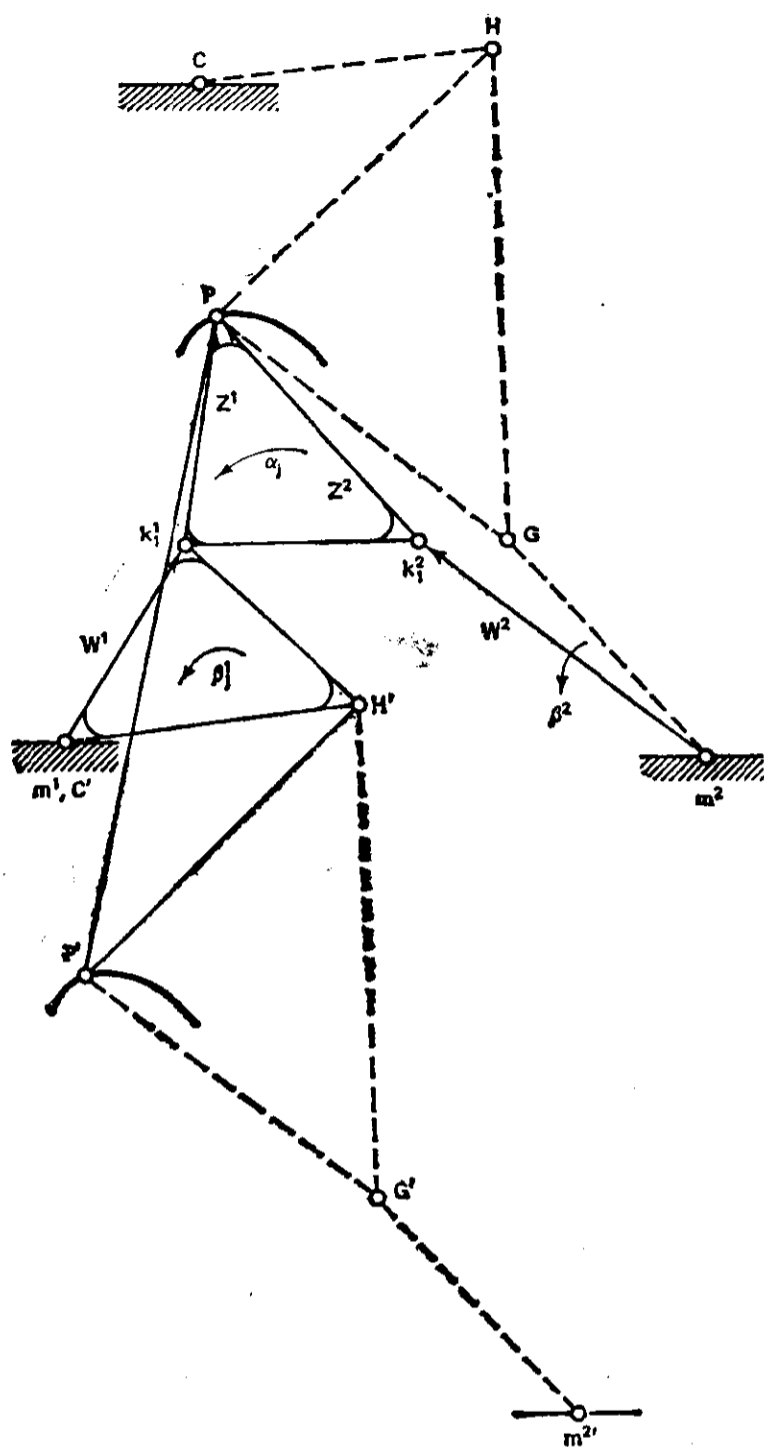


图 3.26 由母连杆机构(四杆运动发生器 $m^1k_1^1Pk_1^2m^2$)及其右同源机构 (m^2GPHC) 导出的六杆平行运动发生器 (实线)。P 和 P' 描绘完全相同的轨迹。如果增加杆 $m^2'G'$ ，则形成一个七杆(过约束)带预定时标的平行运动发生器，因为杆 $m^2'G'$ 实现预定的转角 α_j 。

由此可以看到,一个运动发生器四杆机构能孕育出很多有用的子机构。

表 3.3 利用由双矢标准型方程所得布尔梅斯特点对而综合出的机构以及
根据罗伯茨-契贝歌夫定理扩展所得结果而综合出的机构

四次方程 (3.47)的 实根数	四杆运动 发生器 (图3.19) (母机构)	四杆带预 定时标的 轨迹发生 器 (图3.19) (同源机构)	四杆函数 发生器 (图3.21)	齿轮五杆 带预定时 标的轨迹 发生器① (图3.22)	六杆平行 四边形带 预定时标 的轨迹发 生器② (图3.24)	齿轮五杆 轨迹与恒 速比组合 发生器③ (图 3.22 但 $n \neq 1$)	六杆带预 定时标的 平行运动 发生器	六杆平行运 动发生器④ (图 3.26)	七杆带预定 时标的平行 运动发生器 (图3.26)
0	0	0	—	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	1	1	4	4	2	2
4	6	12	3	6	6	16	24	12	12

① 几种可能的构形(见图 3.22 和 3.23)。

② 图 3.24 的基本五杆机构 m^1FPGm^2 保持相同,而可以增加任何平行四边形 m^1STm^2 来完成这种机构。(能避免死点问题的七杆机构见图 3.25。)

③ 需要运行两次程序,每次预定相同的轨迹位移向量 δ_j ,但 α_j 不同,如 $\alpha'_j = n(\alpha_j)$,其中 n 是任何有理数。(每一行内解的数目是假设那两个四次方程有相同数目的实根。)

④ 通过改变预定的 α_j ,可以生成一阶无穷多组(每组 2 或 12 个)新解。

3.11 多环连杆机构的综合

双矢综合法实际上可用来综合所有的平面机构。这在第二章就已提出,那里为斯蒂芬森(Stephenson) III 型六杆机构(见图 2.66)推导了标准型方程。

既然四杆机构用处那么大,为什么还要想法设计斯蒂芬森 III 型六杆机构这样的多环连杆机构呢?如果只需要三个位置,那么这个问题的回答是,在多数情况下我们并不需要多于四杆的运动链。在三位置情况,双矢组综合方程中的所有系数都是规定的或任意选取的,所以,即使是带预定时标的运动生成也是可能的。而且有两阶无穷多个解供考虑——因此,只要对运动的要求“适当”①,通常是有足够数量的解来找出一个“良好”的解的。

四位置情况下,由于以下几方面原因使多环连杆机构变得更有吸引力了:(1) 四杆机构不再可能实现带预定时标的运动生成了;(2) 对于四个预定位置,可期望的解即使有无穷多个,也可能产生不出一个合适的四杆机构,特别是对最终的机构有很多要求(例如定销轴的位置)时更是如此;(3) 多环机构比四杆机构能展示出更复杂的运动,因为连杆平面的运动不再受要有两个点沿圆弧或直线运动的限制了(瓦特 II 型六杆机构是个例外,因为它是由两个四杆运动链组成的)。在五个预定位置的情况下,多环机构提供了一个很有价值的选择,因为四杆机构充其量也只有有限个解。

五、六、七或更多杆组成的运动环路可以按五个以上的预定位置综合。回想图 2.66 的斯蒂芬森 III 型六杆机构中 Z_5 、 Z_4 和 Z_3 组成的环路,其环路封闭方程为 $Z_5(e^{i\psi_j} - 1) + Z_4(e^{i\beta_j} - 1) - Z_3(e^{i\gamma_j} - 1) = \delta_j$ [方程(2.31)]。表 2.2 分析了这一环路,指出这些向量最多可按七个位置综合。因为该机构的其余部分只能按五个位置设计,所以,没有多少理由仅从一个环路出发来要求

① 在方向、速度和加速度上没有突变。

七个位置。在绝大多数情况下,五个精确点就足够了。更重要的或许是为其它目的恰当利用在多环机构综合中所出现的这些额外的自由选择。

为了按五个精确点综合图 2.66 a 中斯蒂芬森 III 型机构的三矢组 Z_3, Z_4, Z_5 , 表 2.2 告诉我们必须自由选定两个未知实数。如果我们选定了向量 Z_3 , 则将实现标准型方程:

$$Z_5(e^{i\psi_j}-1) + Z_4(e^{i\theta_j}-1) = \delta'_j \quad (3.48)$$

式中

$$\delta'_j = \delta_j + Z_3(e^{i\gamma_j}-1)$$

别的环路由下列方程描述(见图 2.66b)

$$Z_1(e^{i\phi_j}-1) + Z_2(e^{i\gamma_j}-1) = \delta_j \quad (3.49)$$

$$Z_6(e^{i\theta_j}-1) + Z_7(e^{i\psi_j}-1) = \delta'_j \quad (3.50)$$

我们能要求这一机构完成什么任务呢? 仔细研究以上三个方程以后, 有两个主要任务是明显的(回想一下, 在标准型方程中, δ 和一组转角是预定的): (1) 轨迹生成和函数生成的组合(点 P 的轨迹和转角 ϕ_j 与 ψ_j 或 θ_j); (2) 带预定时标的运动生成(点 P 的轨迹和转角 γ_j 与 ψ_j 或 θ_j)。

除了这一机构对设计师有较大的用途以外, 这种设计方法的另一个“美好”的副产品是可以自由选定 Z_3 。在 Z_1, Z_2 一旦综合出来之后, 这一向量就构成连杆平面的其余部分, 它可从下列三方面很好地得到利用: (1) 连杆平面的形状可由机构设计师选定; (2) 设计师可以用在某个方向上选定 Z_3 的方法来改变机构其余部分, 即 Z_5, Z_4, Z_6 和 Z_7 的形状(例如改变定销轴的位置); (3) 设计师只要改变 Z_3 就可生成大量的解。关于最后一个方面, 从上述两个组合任务出发, 按五个预定位置可望得到多少个解呢? 方程 (3.49) 对于 $j=2, 3, 4, 5$, 最多给出四个解; Z_3 可以在 x 和 y 两个方向上的 $-\infty$ 与 $+\infty$ 之间变化; 余下的四杆机构(包含 Z_5, Z_6, Z_4 和 Z_7) 对于 Z_3 的每一个值最多有 12 个解。所以, 对于图 2.66 中斯蒂芬森 III 型六杆机构的五精确点综合有多阶无穷多个解。

例 3.2^[213]

图 2.66a 中的斯蒂芬森 III 型六杆机构将作为近似的轨迹与函数组合发生器按五个预定位置进行综合。其轨迹是一条近似直线, 而被逼近的函数为 $y=x^2, 1 \leq x \leq 3$, 输入转角的范围是 $\Delta\phi = 40^\circ$, 输出转角范围为 $\Delta\psi = 90^\circ$ 。预定的精确点是:

$\delta_2 = 0.7 - 0.5i$	$\delta_4 = 2.25 - 1.8i$
$\delta_3 = 1.5 - 1.1i$	$\delta_5 = 3.6 - 2.6i$
$\phi_2 = 10^\circ$	$\psi_2 = 14.06^\circ$
$\phi_3 = 20^\circ$	$\psi_3 = 33.75^\circ$
$\phi_4 = 30^\circ$	$\psi_4 = 59.06^\circ$
$\phi_5 = 40^\circ$	$\psi_5 = 90.00^\circ$

图 3.27 表示所得几个连杆机构中的一个, 处于第一与第五预定位置, 图 3.28 表示这同一机构的第二、三、四位置。

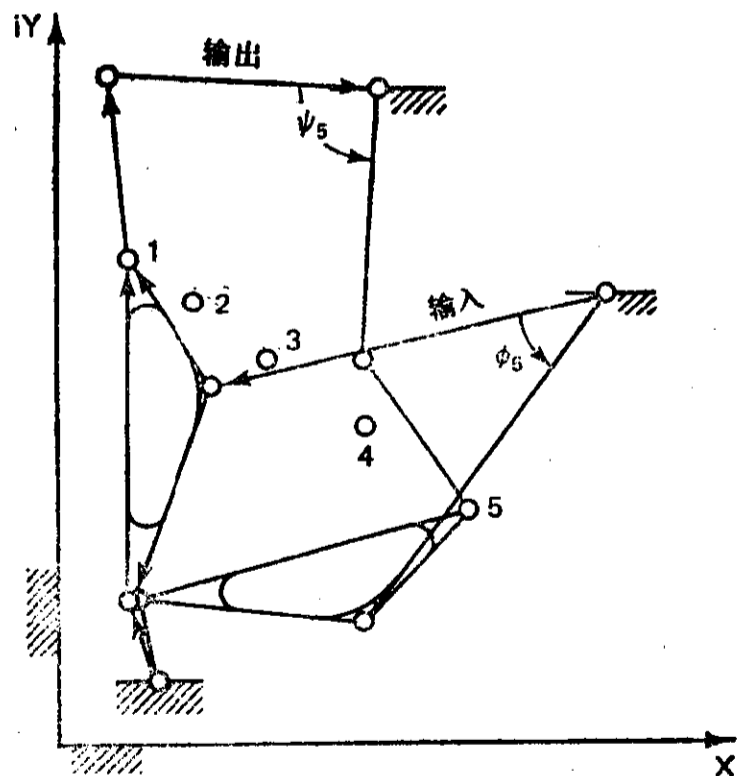


图 3.27 例 3.2 中所综合的六杆轨迹与函数组合发生器在其最初及最终预定位置

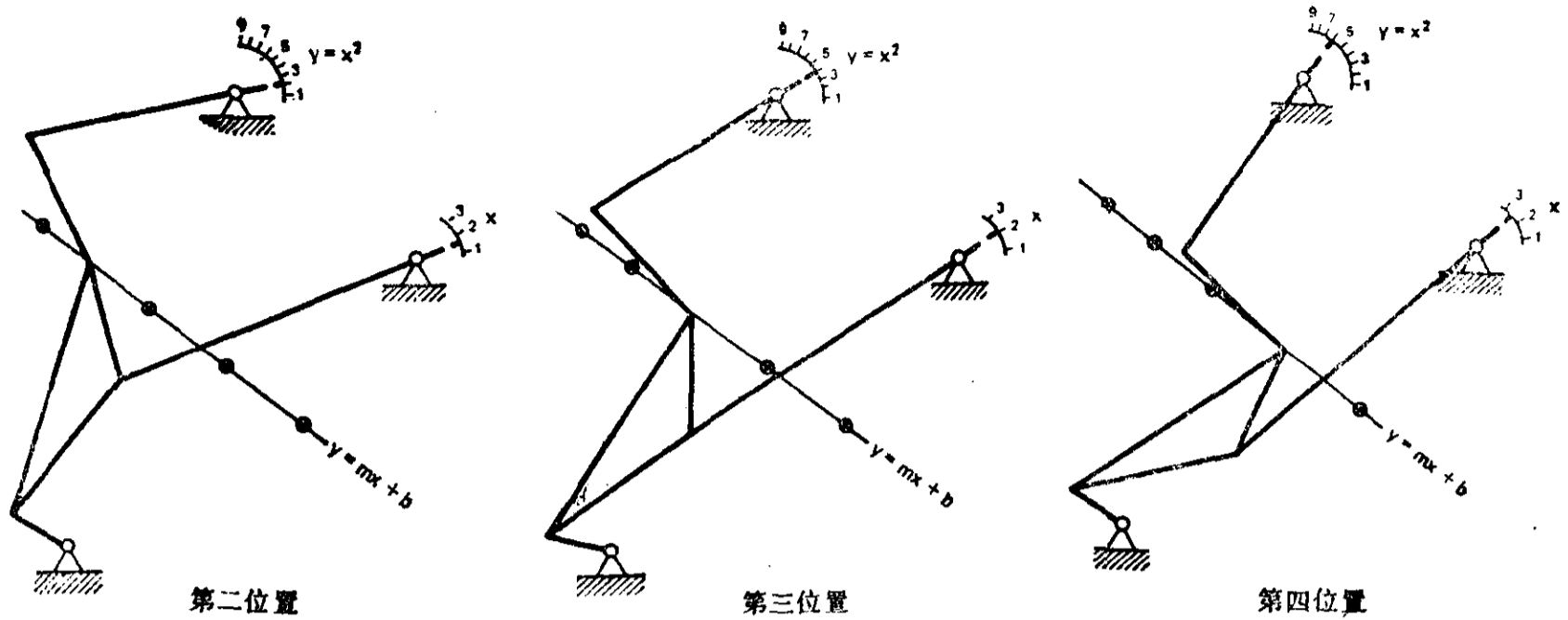


图 3.28 图 3.27 中机构的中间位置

3.12 双功能多环机构的应用

多环机构在装配线作业中有很多应用。例如,在肥皂块包装过程中,必须把一张薄硬纸片送到两个送料滚子中间开始包装作业,应用了图 3.29 所示的那种八杆机构。^① 这一机构系一个函数发生器与带预定时标的运动发生器组合而成。为了从重力给料器中取出一张硬纸片(装在连杆上的吸盘必须沿垂直方向趋近与离开硬纸片)并将其插到两个滚子之间(硬纸片沿水平方向送进),构件 Z_3 的运动是预定的。输入件的定时要求为吸盘在驻留期间取出硬纸片并在一定的位置和速度下放开该硬纸片,从而保证硬纸片以与送进滚的切线速度大致相同的速度送入送进滚。

本例中,在构件 Z_1 和 Z_4 之间有 1:1 的函数关系,因为如图所示,它们由节圆半径相等的齿轮啮合在一起。构件 Z_3 的运动由 Z_2 和 Z_5 (或 Z_6) 矢端的指定轨迹来规定。因为 Z_3 是刚性构件,所以 Z_2 和 Z_5 矢端之间的距离必须保持恒定。事实上,我们可以自由选定 Z_3 的长度和初始方位。因此,环路封闭方程为:

$$Z_1(e^{i\psi_j} - 1) + Z_2(e^{i\psi_j} - 1) = \delta_j \quad (3.51)$$

$$Z_4(e^{i\psi_j} - 1) + Z_5(e^{i\beta_j} - 1) = \delta_j \quad (3.52)$$

$$Z_7(e^{i\psi_j} - 1) + Z_6(e^{i\beta_j} - 1) = \delta_j \quad (3.53)$$

这一机构可以按五个预定位置分两步来综合。第一步,用方程(3.51)综合右边的那个双杆组

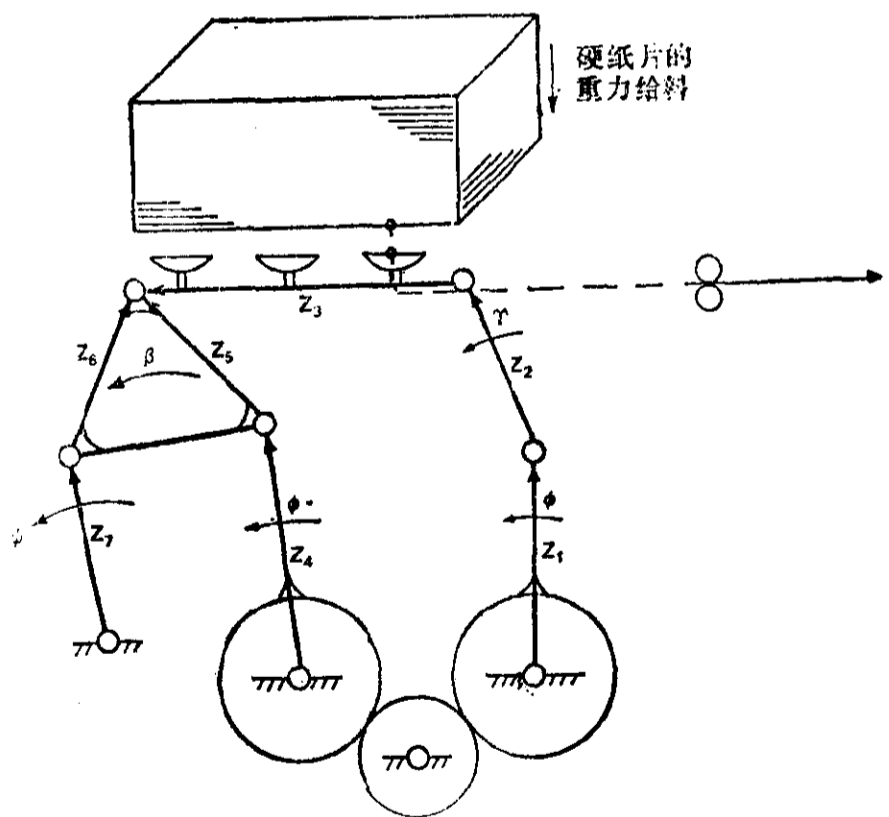


图 3.29 多环机构的实际应用:肥皂包装中包装纸片的送料器。构件 Z_3 上的吸盘吸住硬纸片并将其送入右方的送进滚之间

^① 佛罗里达大学的德尔伯特·特萨(Delbert Tesar)使作者注意到了这一应用。

(最多有四个可能的解)；第二步，用 LINCAGES 程序中的四杆发生器部分，按带预定标的时间生成来综合左边的四杆机构[用方程(3.52)和(3.53)](最多有12个可能的解)。因此，一般地说，我们可望最多得到48个解。

瓦特 II 型机构的实例

用来说明多环连杆机构有大量应用的一个途径是举出几个采用瓦特 II 型六杆机构的例子。只要辨认出瓦特 II 型机构只不过是两个四杆机构连在一起，就很容易导出这一机构的标准型方程。所以，不过是综合两个四杆函数发生器，确保第一个四杆机构的输出杆与第二个的输入杆回转相同的角(见例 2.5)。例如，海因(Hain)^[110]叙述了输出杆大角度摆动需要六杆机构。他说：“用一个四杆机构解决这种问题是非常困难的，因为要设计一个四杆机构有如此大的摇杆摆角而又不致陷入传动角运动特性差的问题之中是困难的。虽然使用与齿轮组合的连杆机构是可能的，但这将使机构价格较高，效率较低，或许还会噪声较大。”海因的这段叙述强有力地激发了研究无齿轮多杆机构运动综合的动机。图 3.30 表示用在某种洗衣机中的搅动机构。当然，这一机构的设计师是赞成海因的建议的。这一瓦特 II 型六杆机构的输出杆回转大约 150° 。

海因还引证了瓦特 II 型六杆机构能很好满足应用的另一实例。需要一个给料机构(见图 3.31)来把圆柱零件从料斗送到滑槽去进一步加工。一个轨迹和函数组合发生器将是这个问题理想的解。可为这一任务综合这种瓦特 II 型六杆机构。这种连杆机构的位形简图示于图 3.31。构件 6 备有回转托杯(它的转角是输入杆转角的预定函数)，将圆柱零件从料斗送到滑槽。在这一过程中，预定的连杆(点 P) 轨迹把圆柱零件定位在托杯上，然后将圆柱零件推入滑槽^①(见图 3.31 中点 P_1 和 P_2)。

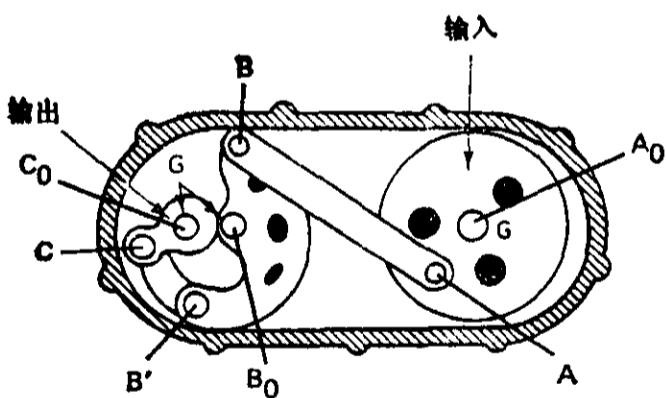


图 3.30 瓦特 II 型六杆洗衣机搅动机构，带有曲柄 A_0A ，1号连杆 AB ，曲拐 BB_0B' ，2号连杆 $B'C$ 和摇杆 C_0C ，摇杆摆动 150°

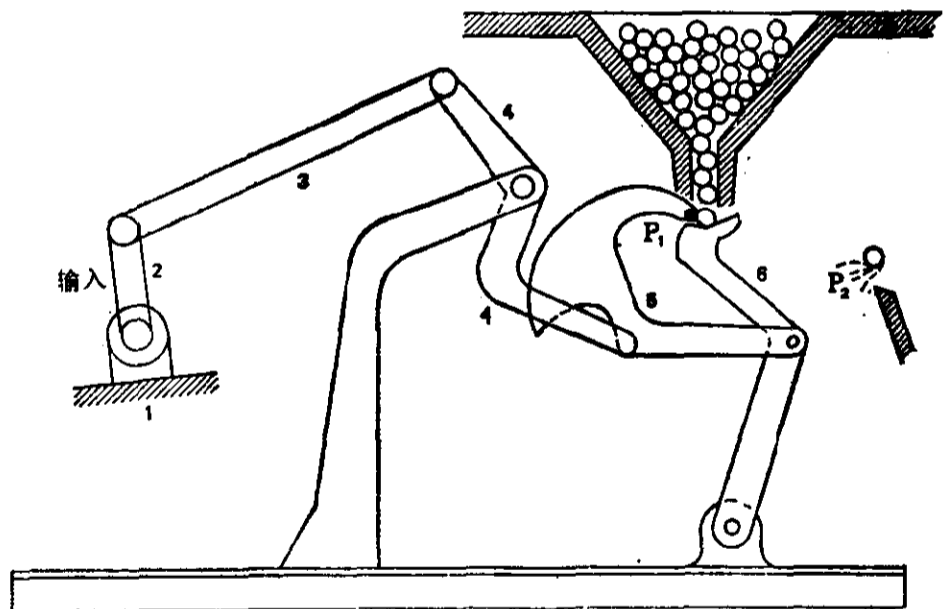


图 3.31 送料机构简图(瓦特 II 型六杆带预定标的时间轨迹和函数组合发生器)

克雷默(Kramer)和桑多尔(Sandor)描述了下列三个实例^[164]。他们提出了汽车节流阀连杆机构的设计，借以将下列角位置配合起来：

① 原文为料斗，似有误——译者注。

加油踏板的运动	节流阀开度
0°	关闭
5°	14°
10°	28°
15°	44°
20°(对地板)	60°(大开)

由于发动机在发动机室内所占空间的缘故,不采用四杆而用了六杆机构。这一瓦特 II 型机构的定销轴所要求的位置示于图 3.32。首先按预定的输入和输出角综合两个四杆函数发生器的子机构,然后加以伸缩和旋转,使它们的定销轴符合这些位置。因为中间曲拐的转角是次要的,所以可任意选取为遵循函数 $y=1.4x$ 。按这一选择所得的最终解示于图 3.32,它的分析证实了,当传动角在 56° 至 90° 范围内变化时,曲拐转角在精确点之间的最大误差为 1.001° 。如果要求更精确的解,则定销轴的位置和(或)曲拐的转角要另作选择。

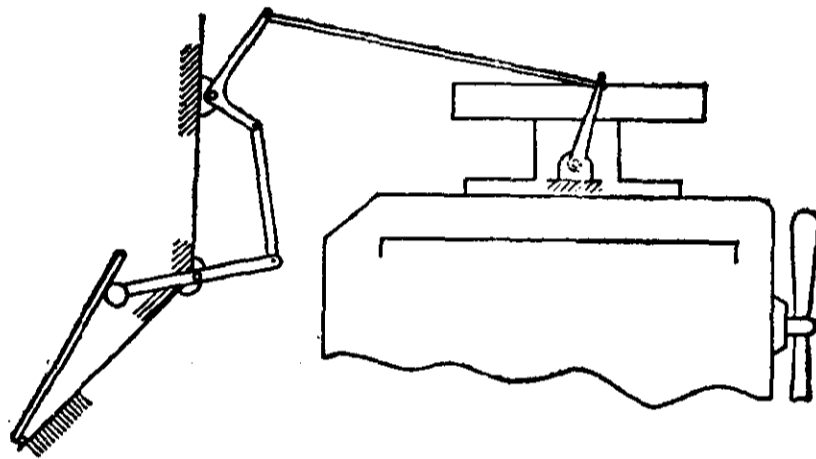


图 3.32 本例中,加速器踏板的转角要与化油器节流阀的转角相配合。中间曲拐的运动并不很重要。不过,它的选取可用来从比例和传动角方面随意改变设计

在设计 IBM Selectric 打字机的连杆机构中,打字头需要倾斜一个规定的量,并要求速度和加速度在每个精确点附近大致相同。“倾斜带系统”(图 3.33)将倾斜杆的直线拉动转变为倾斜曲拐的转动。接着,曲拐转动倾斜臂,倾斜臂通过倾斜带和倾斜滑轮与打字头相连接。倾斜杆把倾斜杠杆从起始位置向下拉动 2.5° 、 5.0° 、 7.5° 和 10.0° 。曲拐转角可以任意选取,使解能有容许的速度和加速度值以及合适的机构尺寸。倾斜滑轮与倾斜臂相连接,其连接方式是倾斜臂必须回转 3.5° 、 7.1° 、 10.0° 和 14.0° 。用计算机辅助设计和分析程序,经过几次失败之后,在第三轮运算中,为曲拐规定了函数 $y=x^3$ 。结果,传动角非常好,曲拐转角在精确点之间的最大误差为 0.005° 。用一个较大但相类似的机构来转动打字头,这两个机构配合使用,使打字模有八十多个位置。

利用瓦特 II 型六杆机构控制小轿车中的暖气风管示于图 3.34。由驾驶员控制的输入曲柄 Z_2 的转角必须大到足以打开顶部的阀 Z_2 ,同时关闭底部(右边)的阀瓣 Z_4 ,从而引导气流进入通向车厢的管道,而不是通过车后方的排出通道。为了把气流控制适当,必须把下列转角配合起来:

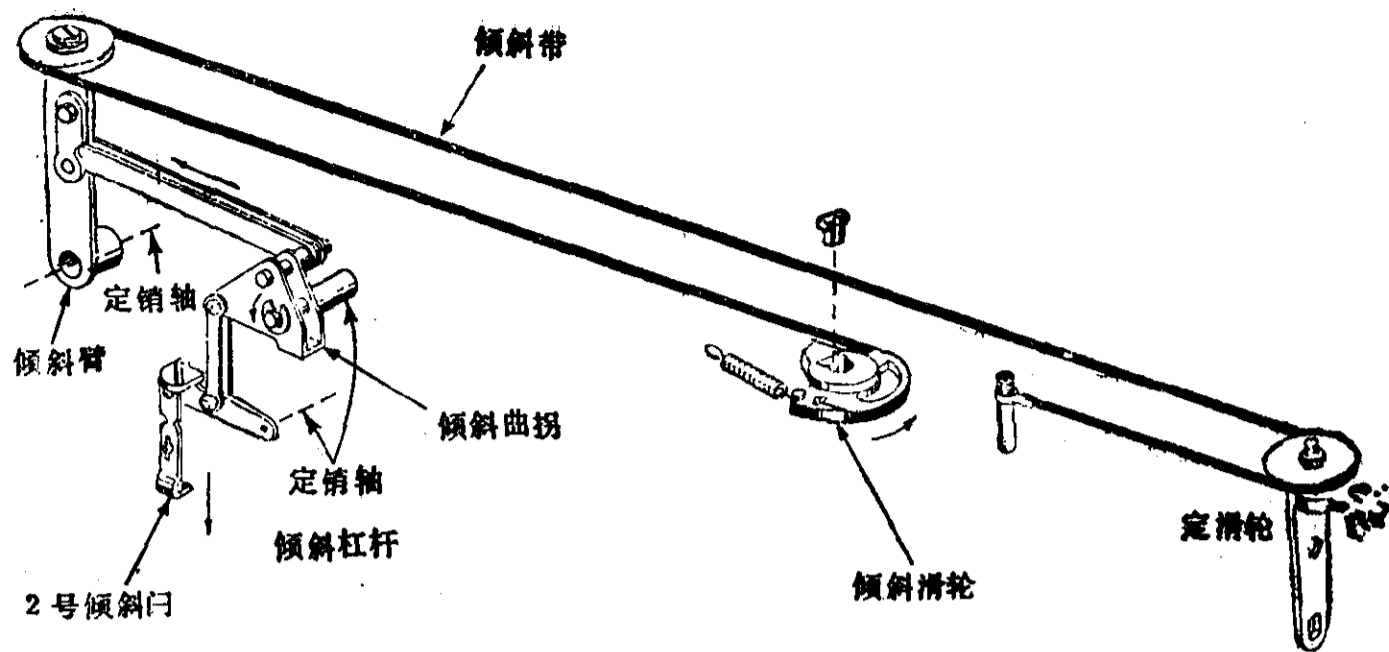


图 3.33 在 IBM Selectric 打字机打字球头用的瓦特 II 型六杆倾斜机构中, 拉动 2 号倾斜杆使倾斜曲拐逆时针转动, 迫使倾斜臂向左摆动, 从而转动倾斜滑轮 (选自参考文献^[104])

顶部阀门	驾驶员控制	后部阀瓣
(关闭)	(放松位置)	(开启)
11°	12°	10°
23°	24°	20° ^①
34°	36°	30°
45°(开启)	50°	40°(关闭)

两个四杆机构按函数生成综合以后, 将它们伸缩并旋转以适合固定杆 $Z_1 = 2.800 - 9.000i$ 和 $Z'_1 = 9.000 - 1.500i$ 。形成的瓦特 II 型连杆机构为,

第一个四杆机构:

$$Z_2 = 2.025 - 0.517i = \text{顶部阀杆}$$

$$Z_3 = 2.580 - 8.671i = \text{连杆}$$

$$Z_4 = -1.805 + 0.188i = \text{驾驶员控制杆 (曲拐的下分支)}$$

$$Z_1 = 2.800 - 9.000i = \text{固定杆}$$

第二个四杆机构:

$$Z'_2 = 0.368 + 1.420i = \text{输入杆 (曲拐的上分支)}$$

$$Z'_3 = 9.432 - 1.409i = \text{连杆}$$

$$Z'_4 = 0.800 - 1.511i = \text{输出杆}$$

$$Z'_1 = 9.000 - 1.500i = \text{固定杆}$$

上述设计实例说明了瓦特 II 型机构的很多应用中的几个例子。

实例研究: 五精确点综合在工业中的应用^[91]

在制造一台装配图 3.35 所示接线盒 (用于安装电话机) 的机器的过程中, 发生了一个机构综

① 原文为 10°, 似有误——译者注。

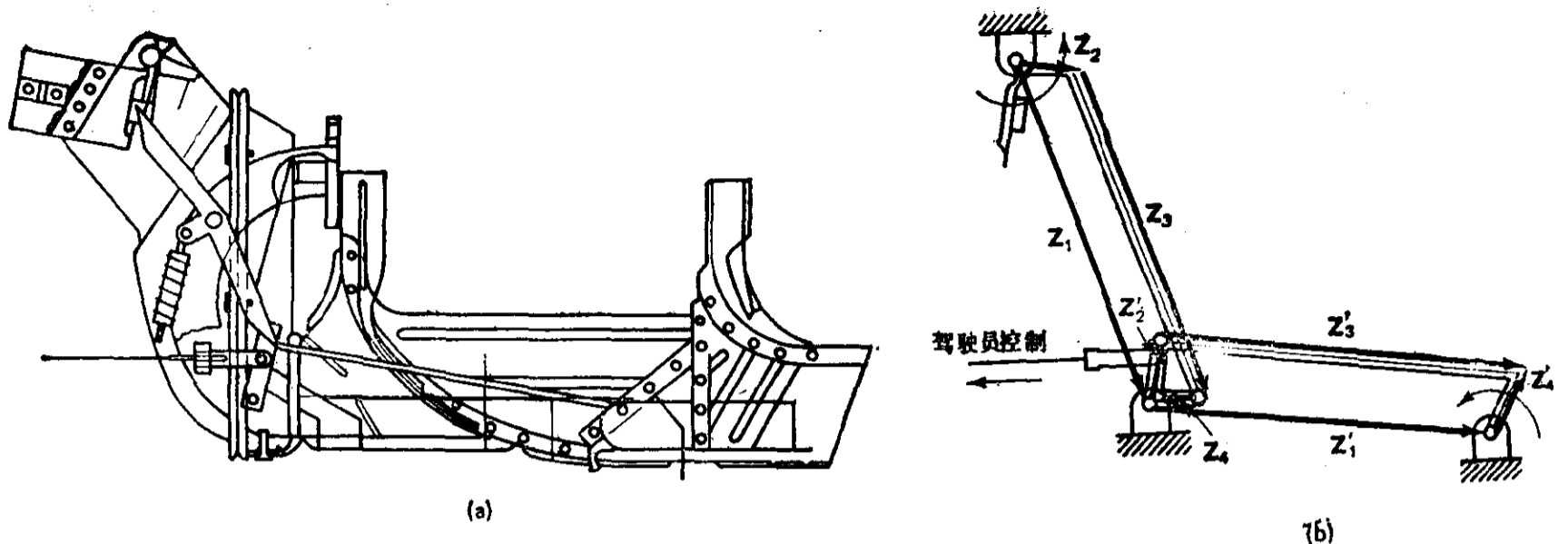


图 3.34 瓦特 II 型六杆机构控制一种进口小汽车内暖气系统的气流: (a) 原设计; (b) 推荐的瓦特 II 型设计。(选自参考文献^[184])

合问题。五个金属夹片要自动地插进接线盒塑料座的五个槽中。为这一项目建造生产机械过程中的第一个尝试是用五片插入头，它由五个与槽处于相同位置的单独送料斗（振动给料器，见节 5.6）给料。这五个头将五个夹片同时插入塑料座内，而塑料座固定在机架上。因为插片头性能不可靠，而且任何一个插片头工作不好，整个机器就必须停下来修理，结果是停机时间相当多。

若不把接线盒座固定在机架上，而是找出一种机构来把接线盒座在一个单片插入头之下放到五个要求位置中的每一个位置上。为了让一个插片头插入全部夹片，电话机接线盒必须转换角度通过五个位置。因为连杆机构比其它形式的运动生成机构简单，所以要找出一个连杆机构来移动接线盒。

设计这种运动生成连杆机构的第一步是确定解决这个问题所需要的构件数。四杆机构是进行综合首先考虑的连杆机构。在方程 (3.47) 的四个实根的基础上，得到所有六个连杆机构解。但是，在评价这些连杆机构时发现，其中没有一个是容易做成生产机械的曲柄摇杆或双摇杆机构型式。

因此，明显地需要一种更复杂的连杆机构来解决这个问题。因为要寻求多环机构，所以决定对该机构设两个附加条件：(1) 对应于运动发生构件几个精确位置的输入曲柄角度要均匀分布；(2) 曲柄应能回转 360° 。这些条件将使驱动这一机构所需要的分度机构得以简化。

选择图 3.36 所示的八杆机构来解决这一问题，不过，很多六杆或七杆机构也是应该考虑的。

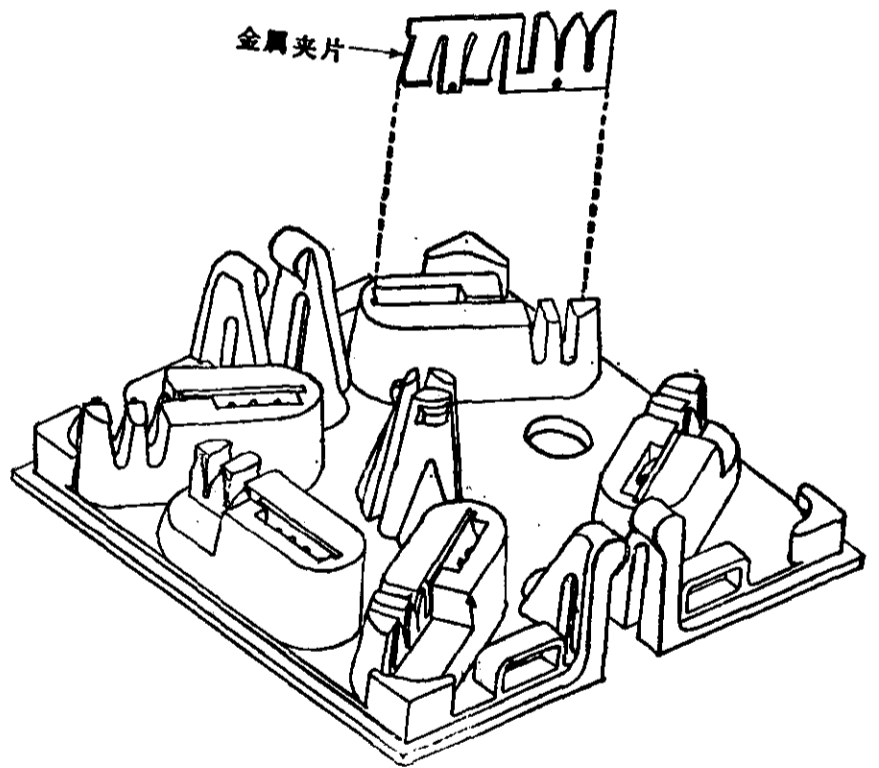


图 3.35 电话接线盒和金属夹片。五个金属片要插进塑料座的五个槽内(承蒙 3M 公司提供)

描述该机构处于第一位置的向量 Z_1 至 Z_{11} 示于图 3.37。在这些向量中, Z_3 、 Z_8 和 Z_{11} 由设计师任意选定。当曲柄由位置 1 回转到位置 j 时, 各构件回转的角度为 θ_{kj} ($k=1\sim7$)。该八杆机构的标准型方程为:

$$Z_1(e^{i\theta_{1j}}-1) + Z_2(e^{i\theta_{2j}}-1) = \delta_j - Z_3(e^{i\theta_{3j}}-1) = \Delta_j \quad (3.54)$$

$$Z_5(e^{i\theta_{4j}}-1) + Z_4(e^{i\theta_{2j}}-1) = \delta_j - Z_3(e^{i\theta_{3j}}-1) = \Delta_j \quad (3.55)$$

$$Z_9(e^{i\theta_{6j}}-1) + Z_{10}(e^{i\theta_{7j}}-1) = \delta_j - Z_{11}(e^{i\theta_{8j}}-1) = \Delta'_j \quad (3.56)$$

$$Z_6(e^{i\theta_{4j}}-1) + Z_7(e^{i\theta_{5j}}-1) = -Z_8(e^{i\theta_{6j}}-1) = \Delta''_j \quad (3.57)$$

式中, $j=2, 3, 4, 5$ 。方程组 (3.54) 至 (3.57) 构成一组综合方程, 为了得到所要求的连杆机构, 将要解这些方程。综合方程中的给定量(或从求解前面方程已知的)、未知量和设计师指定的量列于表 3.4。

表 3.4 方程组 (3.54) 至 (3.57) 依次求解的方法

方程组号	给定或由前面求解方程组已知的量	未知量	设计师指定的量
(3.54)	$\delta_j, \theta_{2j}, \theta_{1j}$	Z_1, Z_2, θ_{2j}	Z_3
(3.55)	$\delta_j, \theta_{2j}, \theta_{2j}$	Z_4, Z_5, θ_{4j}	Z_3
(3.56)	$\delta_j, \theta_{3j}, \theta_{6j}$ 或 θ_{7j}	Z_9, Z_{10}, θ_{7j} 或 θ_{6j}	Z_{11}
(3.57)	θ_{4j}, θ_{5j} $j=2, 3, 4, 5$	Z_6, Z_7, θ_{6j} $j=2, 3, 4, 5$	Z_8

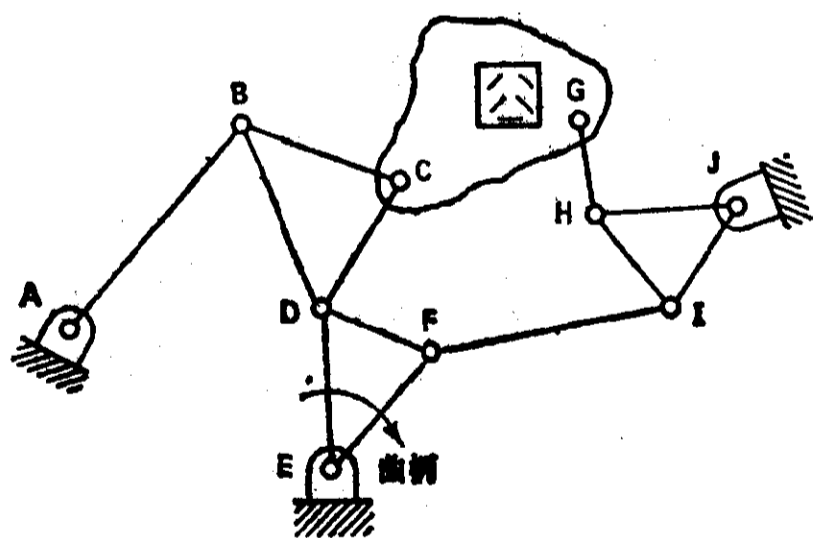


图 3.36 为把图 3.35 中的塑料座依次移动五个位置将五个槽逐次地放到单个金属夹片插入头下方而选用的八杆机构

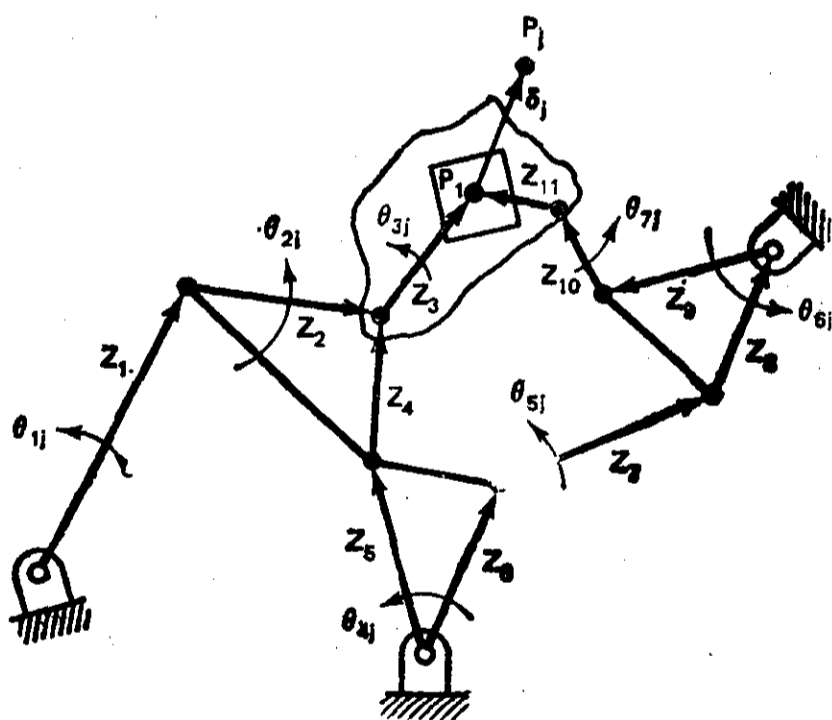


图 3.37 图 3.36 中的连杆机构处于位置 1 的向量表示, 图中标出了到位置 j 的转角。位移 δ_j 和转角 θ_{kj} 是预定的(见表 3.4)

不过, 这个方法有个小问题。在综合最后一个环路 (Z_6 和 Z_7) 时, 不能保证 Z_6 、 Z_7 、 Z_8 环路的定销轴和已由 Z_5 、 Z_9 支承点决定的定销轴相一致。幸运的是, 因为 Z_6 、 Z_7 、 Z_8 是一个函数生成环路, 它可以伸缩和(或)旋转而不影响转角 θ_{4j} 、 θ_{5j} 、 θ_{6j} 。所以, 只要把综合出来的 Z_6 、 Z_7 以及 Z_8 一致地伸缩和旋转来适应 Z_5 和 Z_9 支承点之间的距离。

用上述方法综合了八杆机构之后，必须进行分析以确定该机构在曲柄回转一整周过程中各传动角是否合适。这一设计完成以后，为了用解析方法使曲柄一步步地回转一个角度增量并打印出每一步上的传动角，编了一个分析程序。可惜的是没有人机对话的作图硬件可用，以致综合分析过程很费时。

如此设计出的连杆机构以简图形式示于图 3.38，一起还画有电话机接线盒。虽然这一机构尚未优化，但它肯定是可以工作的。它的最小传动角是 27° ，最大杆长比为 9.5。必要的编程工作完成之后，用了大约 150 小时作试算设计就得到这一机构。为了演示它的运动，制作了该机构的模型。最终的设计示于图 3.39。以适当的分析程序将综合成的机构进行人机对话计算机作图显示，就能够大大地减少试算设计各步的时间。这一问题的非解析解本来是很困难的。

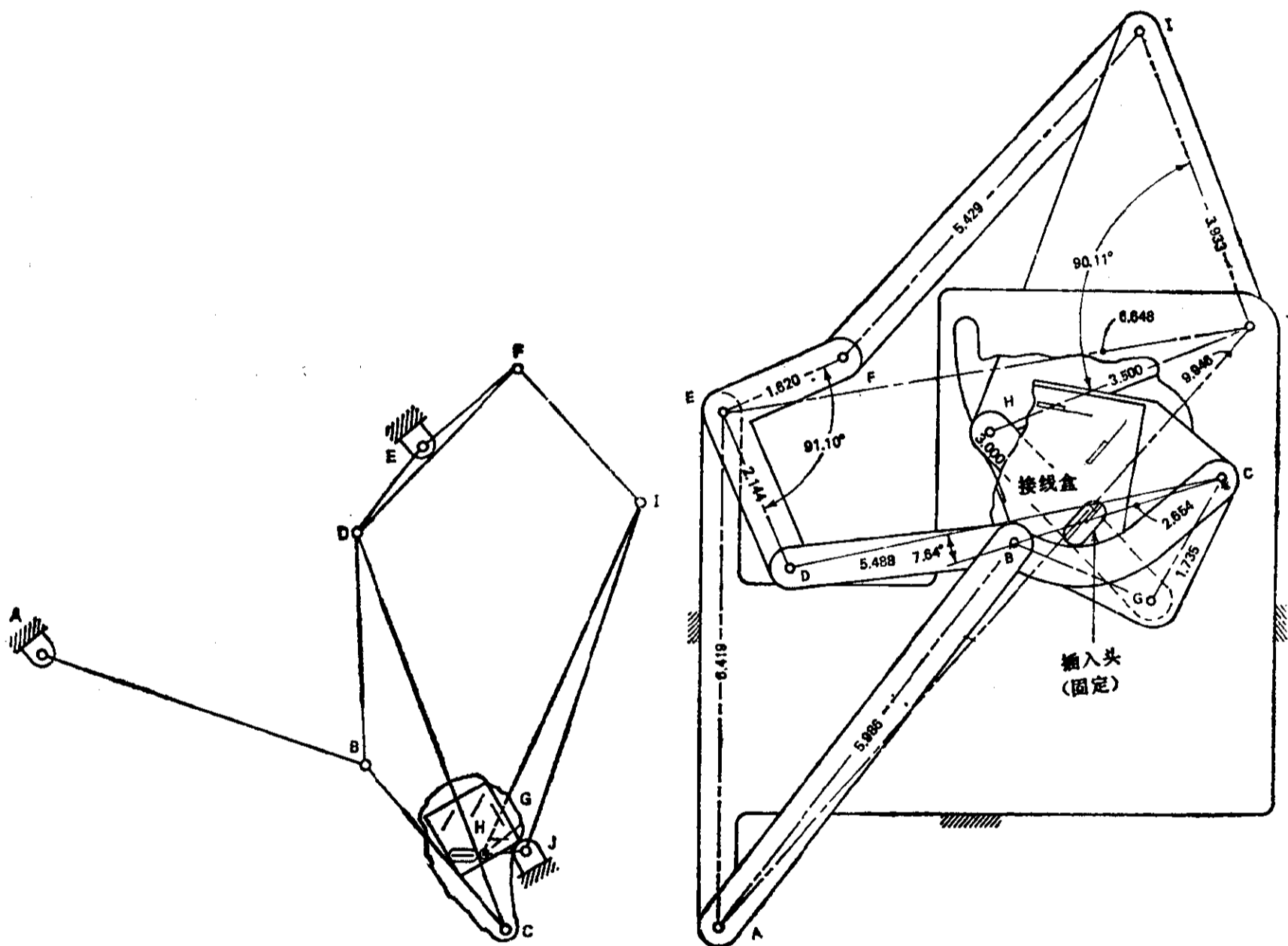


图 3.38 根据图 3.37、方程(3.54)至(3.57)和表3.4综合出的八杆机构简图。曲拐 EFD 是输入件

图 3.39 根据图 3.37、方程组(3.54)至(3.57)和表 3.4 综合所得连杆机构解的按比例图示

3.13 齿轮连杆机构的运动综合

平面齿轮连杆机构可毫无困难地适用于函数、轨迹和运动生成。函数生成包括输入、输出元件(杆件、齿条或齿轮)的转动或滑动之间必须相关联的任何问题。例如，工业上经常遇到的问题涉及间歇运动和变速运动的生成。像四杆双曲柄机构这样简单的连杆机构通常是完成这类任

务最不复杂而又最令人满意的装置。然而,如果要求的运动太复杂,用四杆机构或滑块曲柄机构不能胜任,则经常可设计齿轮连杆机构来经济地满足设计要求。

在包装机械中,常有必要将输入轴与输出轴相连接,以便在输入轴连续回转时,使输出轴以预定的停歇期和定时要求来摆动,如图 3.40 所示的简单齿轮五杆机构,可以很容易地设计出来以产生这样的停歇周期^{[45]①}。

在图示情况中,摆线曲柄 $A_0A'A$ 的齿轮传动比已选定,来产生四个尖点的内摆线(一条星形线)。行星轮节圆上点 A 的轨迹在尖点之间近似于一段圆弧,连杆 AB 的长度等于那段弧的半径。从动杆 B_0B 的位置已安排成在其右极限位置时它的动销轴 B 与该弧的圆心重合。如果需要的话,连杆可以与输出滑块而不是摇杆相连。通过利用三尖点或五尖点内摆线,还可以得到不同的运动特性。

自由度

平面齿轮连杆机构的可动性可用式(1.3)(见表 1.1)来研究:

$$F = 3(n-1) - 2f_1 - 1f_2$$

式中, F 为连杆机构的自由度数; n 为构件数; f_1 为限制两个自由度的联接(回转联接和滑块联接)数, f_2 为限制一个自由度的联接(此种情况下为齿轮啮合)数。如果 p 个构件上刚接了齿轮,那么,一般说, $f_2 = p/2$ 。例如,图 3.41 中的机构有五个杆和一个含有四个齿轮①的轮系。这些齿轮中有两个分别固定到机架和输出曲柄上。这样, $n=5$, $p=2$, $f_1=5$ 和 $f_2=1$, 所以机构有一个自由度。这里,我们可清楚地辨认出齿轮 B 和 C 是惰轮,所以,按上述对数量 f_2 所作的定义,它们不参与自由度的计算。不过,我们也可以把这些惰轮看作单独的构件,在这种情况下, $n=7$, $f_1=7$, 齿轮啮合数 $f_2=3$ 。由于每个 f_2 减掉一个自由度,所以其结果,这个机构还是一个自由度。

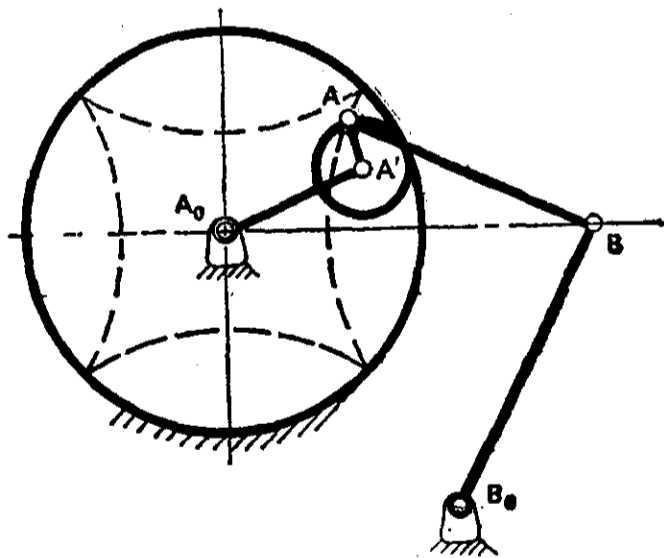


图 3.40 齿轮五杆间歇运动机构

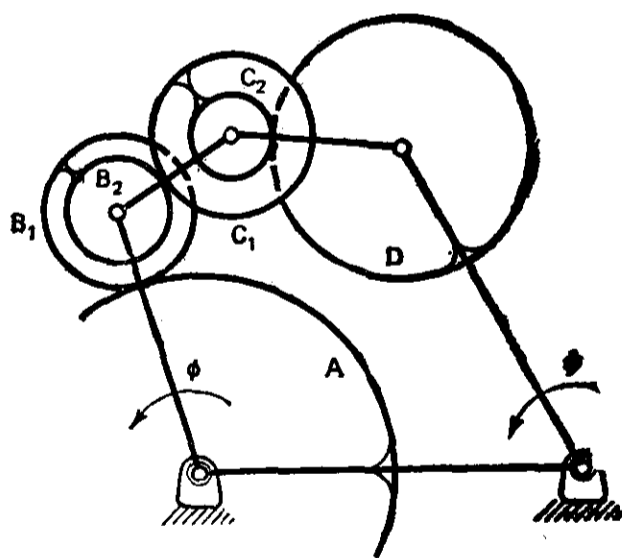


图 3.41 齿轮五杆函数发生器机构。齿轮 A 固定,组合齿轮 B 和 C 绕构件铰销回转,齿轮 D 刚接于输出杆。齿轮传动比: $T_A/T_{B_1} = r_2$, $T_{B_2}/T_{C_1} = r_3$, $T_{C_2}/T_D = r_4$, 式中 T_A 为齿轮 A 的齿数,余类推

① 还可见习题 3.49。

② 系指四个齿轮块,实际有六个齿轮——译者注。

复数形式的综合方程

复数法特别适合于齿轮连杆机构的综合，因为构件及两个构件之间的齿轮传动比很容易用数学方法来表达和运算。如果是有限数量的精确条件加到连杆机构上，则这种方法提供的综合方程中，其描述机构处于起始位形的未知杆向量是线性的。在以单环机构作函数生成中，精确条件少于环内杆数时可得到线性解。例如(如图 3.41 中所示的)齿轮五杆机构的情况，得到线性解的可以最多按四个一阶(有限分离的)精确点；或比如说，按两个一阶和一个两阶精确点(后者等价于两个无限接近精确点)(见节 2.24)。我们可以对这一机构规定四个以上的精确点条件，但求解比较困难，因为这时杆向量的系数中有些必须作为未知量来处理，从而必须解非线性相容方程。

在有限分离位置的综合中，以复数形式写出的向量环路方程和位移方程构成了综合方程组。在包含预定的导数、速度、加速度和高阶加速度的高阶综合中，环路方程要对参考变量或对时间取导数。在有限分离位置综合和无穷接近位置综合中，综合方程组都可以成为未知杆向量的线性方程。其系数将包含预定的性能参数和齿轮速比。这些量可由机构设计师任意指定方便的值。通过改变这些任选的值，设计师可以得到一个无限多个解的型谱，从中可选择一个合适的机构。所有这些解都能满足给定的精确条件。选择最有效的解可以根据这些优化准则，如：传动角最好，齿轮传动比最优或最长与最短杆长之比接近于一。这些准则可以单独使用，也可以加权组合使用。

齿轮五杆机构实例^[248]

假设想要综合一个如图 3.41 所示类型的齿轮连杆机构，以生成一个在某个给定范围内的函数 $y=f(x)$ 。取输入曲柄的转角(ϕ)来线性模拟 x ，而输出件的转角(ψ)线性模拟 y 。

可用封闭的向量五边形(图 3.42)代表这一机构。在机构的某个参考位置上，向量 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 和 Z_5 定义构件 1、2、3、4 和 5 的方向和长度。在对机构运动要求已定的一般位移位置上，比如说位置 j 上，机构可用这些向量乘以它们适当的转动算子来定义：

$$\begin{aligned} Z'_1 &= Z_1 \\ Z'_2 &= e^{i\phi_j} Z_2 \\ Z'_3 &= e^{i\psi_j} Z_3 \\ Z'_4 &= e^{i\mu_j} Z_4 \\ Z'_5 &= e^{i\psi_j} Z_5 \end{aligned} \quad (3.58)$$

必须建立一个数学关系式来表示各个杆的相对转动，并最终表示其绝对转动。换句话说，对于输入曲柄(杆 2)的某个给定转角，能不能找出以该输入转角和齿轮传动比表示的某个其它杆的转角表达式呢？很明显，因为机构只有一个自由度，所以必然存在某种这样的关系。

确定齿轮传动比对各杆转角的影响

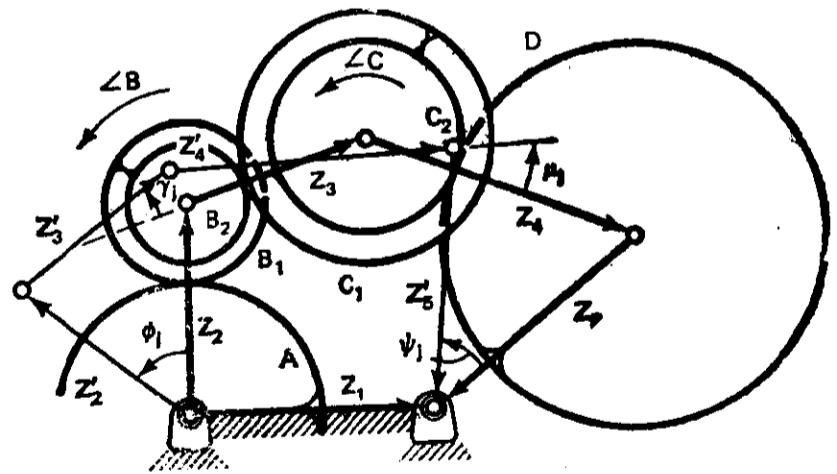


图 3.42 图 3.41 中齿轮五杆机构的向量简图。注意，齿轮 A 固定在代表机架的向量 Z_1 上，齿轮 D 固定在代表输出件的向量 Z_5 上。组合齿轮 B 和 C 可自由旋转

参照图 3.43, 下面的一般关系式 (见第一卷第六章) 将证明在解决这一类回转问题中很有用:

$$\phi_{j(k+1)} = \phi_{jk} + [\phi_{jk} - \phi_{j(k-1)}] \frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} \quad (3.59)$$

式中, 比如 ϕ_{jk} 为杆 k 从其第一位置到第 j 位置的有限转角; T_k 代表刚接于杆 k 上的齿轮齿数。对于图 3.42 中的连杆机构, 令 $\angle B$ 和 $\angle C$ 为齿轮 B 和 C 对应于某个给定输入转角 ϕ_j (从 Z_2 的起始位置开始度量) 的绝对转角; γ 和 μ 分别为 Z_3 和 Z_4 从它们起始位置算起的绝对转角。同样, ψ 是输出杆 Z_5 的转角。现在将每个齿轮副分别考虑, 根据图 3.44, 省略位置下标 j , 我们有

$$\angle B = \frac{T_A}{T_{B1}} \phi + \phi$$

或令 $T_A/T_{B1} = r_2$,

$$\angle B = (r_2 + 1) \phi \quad (3.60)$$

沿图 3.42 中的机构环路继续下去, 将一般关系式用于图 3.45, 得出

$$\angle C = \gamma + (\gamma - \angle B) r_3 \quad (3.61)$$

式中 $r_3 = T_{B2}/T_{C1}$ 。最后, 把一般关系式用于图 3.46, 得到

$$\psi = \mu + (\mu - \angle C) r_4 \quad (3.62)$$

式中, $r_4 = T_{C2}/T_D$ 。将式 (3.60) 代入式 (3.61), 得出

$$\begin{aligned} \angle C &= \gamma + [\gamma - (r_2 + 1) \phi] r_3 \\ \angle C &= \gamma + \gamma r_3 - r_2 r_3 \phi - r_3 \phi \end{aligned} \quad (3.63)$$

再将公式 (3.63) 代入式 (3.62) 给出

$$\begin{aligned} \psi &= \mu + [\mu - (\gamma + \gamma r_3 - r_2 r_3 \phi - r_3 \phi)] r_4 \\ &= \mu + \mu r_4 - \gamma r_4 - \gamma r_3 r_4 + \phi r_2 r_3 r_4 + \phi r_3 r_4 \end{aligned}$$

和
$$\psi = \mu(1 + r_4) - \gamma(r_4 + r_3 r_4) + \phi(r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4) \quad (3.64)$$

由此可见, ψ 、 ϕ 、 μ 、 γ 和齿轮传动比之间存在直接关系。不出所料, 惰轮的绝对转角 $\angle B$ 和 $\angle C$ 在该式并不出现, 而齿轮传动比是出现的。

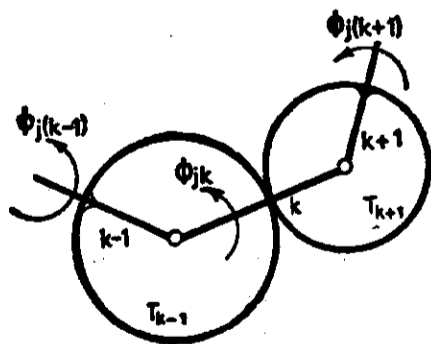


图 3.43 表示构件转角符号的一般齿轮副

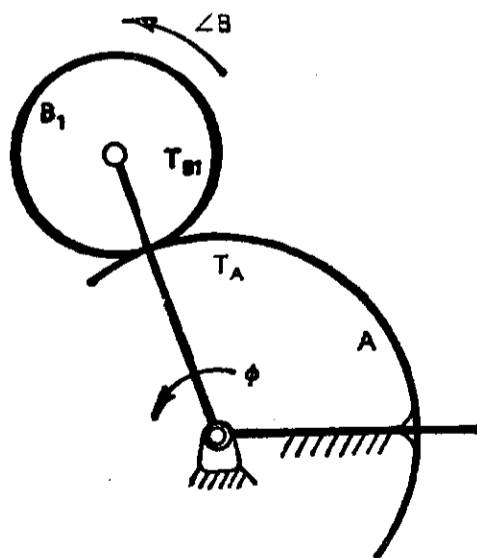


图 3.44 图 3.41 中齿轮五杆机构的输入侧

由于 ϕ 和 ψ 是根据所要生成的函数预定的, 所以, 如果 γ 的值已假定, 则对应的 μ 值就由式 (3.64) 规定。

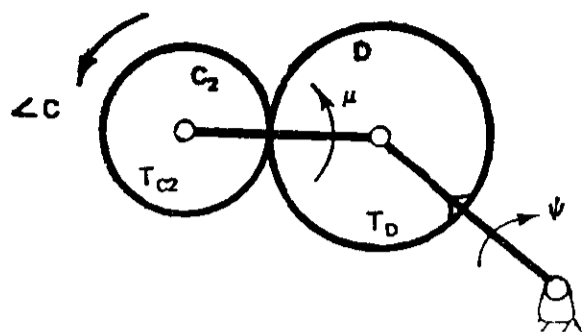
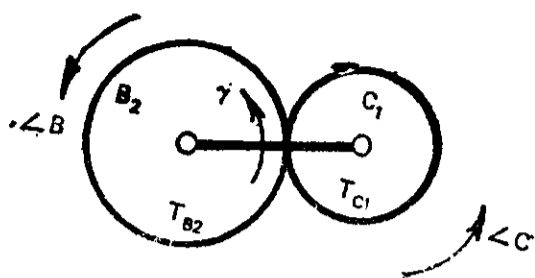


图 3.45 图 3.41 中齿轮五杆机构的中间齿轮和浮动杆 Z₃

图 3.46 图 3.41 中齿轮五杆机构的输出侧

为了方便, 令

$$Q = 1 + r_4, \quad R = r_4 + r_3 r_4, \quad S = r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4 \quad (3.65)$$

于是

$$\psi = \mu Q - \gamma R + \phi S \quad (3.66)$$

$$\mu = \frac{1}{Q} (\psi + \gamma R - \phi S) \quad (3.67)$$

确定图 3.42 中的机构能据以综合的精确位置数

对于图 3.42 中处于第 j 位置上的机构, 其环路封闭向量方程可写出如下:

$$Z_2 e^{i\phi_j} + Z_3 e^{i\gamma_j} + Z_4 e^{i\mu_j} + Z_5 e^{i\psi_j} = Z_1 = 1 \quad (3.68)$$

注意, 为了方便, 指定了 Z_1 的值为 1。因为只有角度关系是重要的, 所以这是允许的 (见节 2.3)。

记住, ϕ 和 ψ 是预定的, γ 中的某些值可任意选定, 这样, 可通过方程 (3.67) 求知 μ 。

现在表 3.5 可以建立起来了。

表 3.5 图 3.42 中的齿轮五杆机构在齿轮传动比指定以后, 按预定的输入、输出转角能据以进行综合的位置数

预定位数	独立的实数方程数目 [方程 (3.67) 除外]	独立的实数未知量数目 [由于方程 (3.67), 可将 μ 除外]	可任选的实数数目	解的数目
1	2	Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 (8)	6, 比如 $Z_{2,3,4}$	6 阶 ∞
2	4	$Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \gamma_2$ (9)	5, 比如 $Z_{2,3}, \gamma_2$	5 阶 ∞
3	6	$Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \gamma_2, \gamma_3$ (10)	4, 比如 $Z_2, \gamma_{2,3}$	4 阶 ∞
4	8	$Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ (11)	3, 比如 $\gamma_{2,3,4}$	3 阶 ∞
5	10	$Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ (12)	2, 比如 $\gamma_{2,3}$	2 阶 ∞
6	12	$Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \gamma_2$ 至 γ_6 (13)	1, 比如 γ_2	1 阶 ∞
7	14	$Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \gamma_2$ 至 γ_7 (14)	0	有限个

四个精确位置以下, 设计师可以任意选取全部 r 值。对于五个、六个或七个位置, 能选取的只有 γ 的某些值, 甚至没有一个值能选取, 而且为求剩下的未知 γ 值, 必须解非线性相容方程。由此可见, 精确位置的限制数目是四, 超过此数就需要求解非线性相容方程了。对于预先确定了齿轮传动比和比例因子的情况, 该机构最多可按七个位置综合。然而, 如果把齿轮传动比和比例因子也作为未知量, 则可以得到的精确点数目还可进一步增加。

① 原文误为 θ_j ——译者注。

对于四个有限分离一阶(即有限分离)精确点,该机构的综合方程写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\psi_2} & e^{i\psi_2} & e^{i\psi_2} & e^{i\psi_2} \\ e^{i\psi_3} & e^{i\psi_3} & e^{i\psi_3} & e^{i\psi_3} \\ e^{i\psi_4} & e^{i\psi_4} & e^{i\psi_4} & e^{i\psi_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

由于系数矩阵内所有的量都是给定的或是任意假定的,所以,可以容易地解这一线性复数方程组求出四个复数未知量 Z_2 、 Z_3 、 Z_4 和 Z_5 。改变任意选定的 ψ_2 、 ψ_3 、 ψ_4 的值和改变齿轮传动比和比例因子的选定值,可以得到解的无限个型谱。

例 3.3

假定要生成的函数是在 $0 \leq x \leq 45^\circ$ 范围内的 $y = \tan(x)$ 。对于以契贝歇夫间距决定的四个精确点, x 和 y 的值可求出为(见节 2.2):

$$x_1 = 1.71^\circ, \quad y_1 = 0.03$$

$$x_2 = 13.89^\circ, \quad y_2 = 0.25$$

$$x_3 = 31.11^\circ, \quad y_3 = 0.60$$

$$x_4 = 43.29^\circ, \quad y_4 = 0.94$$

令 $\Delta\phi =$ 输入曲柄的转角范围 $= 90^\circ$ 和 $\Delta\psi =$ 输出转角的范围 $= 90^\circ$ 。据此

$$\phi_2 = 24.36^\circ, \quad \psi_2 = 19.80^\circ$$

$$\phi_3 = 58.80^\circ, \quad \psi_3 = 51.30^\circ$$

$$\phi_4 = 83.16^\circ, \quad \psi_4 = 81.90^\circ$$

图 3.47、3.48、3.49 和表 3.6 表示了几个典型的用计算机综合出来以生成函数 $y = \tan(x)$ 的连杆机构。注意图中未表示出齿轮,但它们的影响是清楚可见的,即:齿轮直接传递旋转运动,所以齿轮杆之间的传动角就不必考究了。

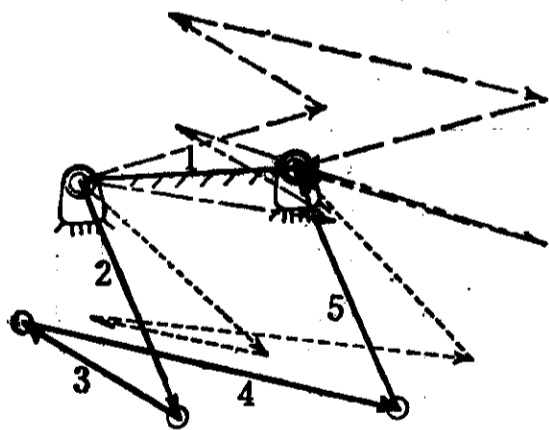


图 3.47 综合出来生成正切函数的齿轮五杆机构。图中表示了表 3.6 中的例 A 处在它的第一(实线)、第二(短虚线)、第三(点划线)及第四(长虚线)精确位置。图中,齿轮未示出

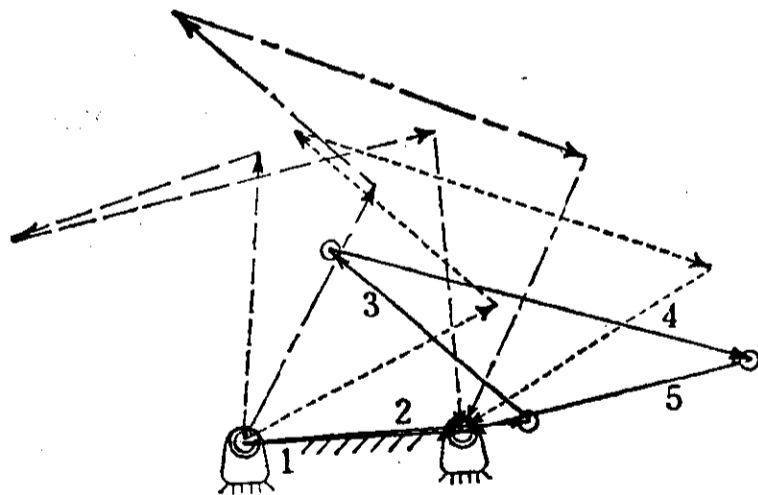


图 3.48 示出表 3.6 中的例 B 处于它的四个精确位置(符号同图 3.47)。图中未示出齿轮

齿轮连杆机构的相容方程

图 3.42 中的齿轮五杆机构按五个精确点的函数生成综合的方程组是在方程组 (3.69) 内增加另一个方程而得到的。这将有相容方程

表 3.6 按四个精确点函数发生器综合出来的三个不同的
的齿轮五杆机构设计(见图3.42和表3.5)

	例 A	例 B	例 C
图	3.47	3.48	3.49
函数	$y = \tan x$	$y = \tan x$	$y = \tan x$
范围	$0 \leq x \leq 45^\circ$	$0 \leq x \leq 45^\circ$	$0 \leq x \leq 45^\circ$
比例因子	$\Delta\phi = 90^\circ$ $\Delta\psi = 90^\circ$	$\Delta\phi = 90^\circ$ $\Delta\psi = 90^\circ$	$\Delta\phi = 90^\circ$ $\Delta\psi = 90^\circ$
齿轮传动比 r_2	3	3	3
r_3	0.5	0.5	0.5
r_4	0.5	0.5	0.5
杆向量 Z_1	1.000+0.000i	1.000+0.000i	1.000+0.000i
Z_2	0.402-1.115i	1.335+0.027i	0.333-1.126i
Z_3	-0.709+0.475i	-0.888+0.846i	-1.225-0.482i
Z_4	1.714-0.4688i	1.919-0.611i	2.029+0.254i
Z_5	-0.407+1.109i	-1.366-0.262i	-0.137+1.354i
Z_6	— —	— —	— —
任选的杆转角	$\gamma_2 = 20^\circ$ $\gamma_3 = 0^\circ$ $\gamma_4 = 0^\circ$	$\gamma_2 = 0^\circ$ $\gamma_3 = 0^\circ$ $\gamma_4 = 60^\circ$	$\gamma_2 = 0^\circ$ $\gamma_3 = 20^\circ$ $\gamma_4 = 40^\circ$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\phi_2} & e^{i\psi_2} & e^{i\mu_2} & e^{i\nu_2} & 1 \\ e^{i\phi_3} & e^{i\psi_3} & e^{i\mu_3} & e^{i\nu_3} & 1 \\ e^{i\phi_4} & e^{i\psi_4} & e^{i\mu_4} & e^{i\nu_4} & 1 \\ e^{i\phi_5} & e^{i\psi_5} & e^{i\mu_5} & e^{i\nu_5} & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.70)$$

γ_2 和 γ_5 任意假定后,这一方程展开为

$$\Delta_3 e^{i\gamma_3} + \Delta_4 e^{i\gamma_4} = \Delta \quad (3.71)$$

式中 Δ 是已知的。方程 (3.71) 可用几何法解出 γ_3 和 γ_4 , 如图 3.3 和表 3.1 所示求解 β_3 和 β_4 那样。

然后,用 $\gamma_j (j=2, 3, 4, 5)$ 的各组相容值,从五个方程中的任何四个,如方程组 (3.69),即可联立解出 $Z_k, (k=2, 3, 4, 5)$ 。

在按六点综合的情况下,五列增广矩阵将有六行,所以产生两个相容方程,比如说,一个由前四行和第六行组成,另一个由前三行加后两行组成。为 γ_6 假定了任意值以后,这两个方程将展开为

$$\Delta_2 e^{i\gamma_2} + \Delta_3 e^{i\gamma_3} + \Delta_4 e^{i\gamma_4} = \Delta \quad (3.72)$$

和

$$\Delta'_2 e^{i\gamma_2} + \Delta'_3 e^{i\gamma_3} + \Delta'_4 e^{i\gamma_4} = \Delta' \quad (3.73)$$

式中的 Δ 全都是已知的。这两个方程的形式与方程 (3.34) 和 (3.35) 相同,并可用同样方法解出 $\gamma_j (j=2, 3, 4, 5)$ 。这样,同假定的 γ_6 值一起,我们就有全部 $\gamma_j (j=2, 3, 4, 5, 6)$ 的各组相容值。

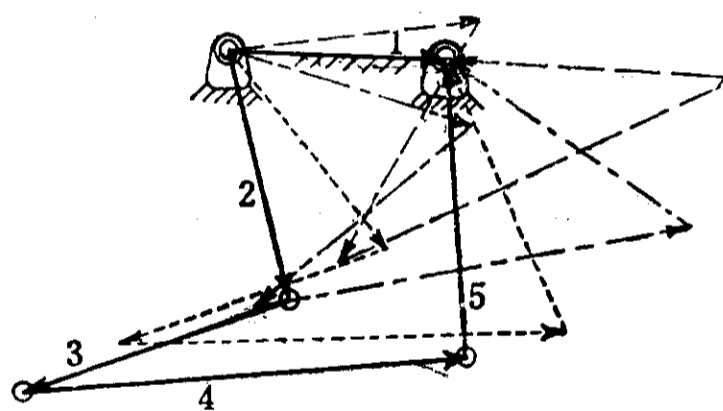


图 3.49 示出表 3.6 中的例 C 处于它的四个精确位置(符号同图 3.47)。图中未示出齿轮

任何这样的一组值都可代回具有方程(3.68)形式的综合方程组(式中 $j=1, 2, \dots, 6$, 注意, $j=1$ 时所有的角为零), 并将其中任何四个方程联立解出 $Z_k (k=2, 3, 4, 5)$, 这样, 就给出了六个精确点函数发生器齿轮五杆机构的解。

3.14 复合分离位置综合的讨论

节 2.24 介绍了生成的函数或轨迹在预定精确点处与理想曲线有高阶接触的概念。用对位移方程取导的方法可以得到两个、三个等等无限接近位置上的接触。若除了有限分离的一阶(单点重合)精确点以外, 还规定了这种无限接近位置(包含在高阶精确点内), 我们就有了“复合分离位置综合”。根据预定位置及导数的总数和综合方程中未知量的数目(见表 2.6), 求解步骤可能包含线性方法, 也可能包含非线性方法。下面是两个非线性方法的例子。

五阶轨迹发生器的综合

在工业实践中, 经常遇到的问题是要设计机构能在平面内生成预定的轨迹。如果运动的速度、加速度和高阶加速度至关重要, 如加速度大、加速度的变化率大或形成的冲击可能损坏机构或损坏机构所搬运的物品这种情况, 问题就更复杂。这一例子^[250]为综合能在单个精确点附近给出五阶轨迹近似的四杆机构提供了一个解析的闭式线性求解法。记住, 根据表 2.6, 这是能为四杆机构预定的最高阶数。在单个精确点上, 对轨迹点位置向量的导数最高规定到四阶。这些导数如果是对时间求导, 可以理解为连杆轨迹点的速度、加速度、冲击和三阶加速度。本节要推导的闭式线性求解法将为每组数据最多给出 12 个不同的连杆机构。

问题是要综合一个以图 3.50 中所示标记代表的四杆机构, 它将生成一个由函数 $y=f(x)$ 给定的带预定时标的(即与预定的输入曲柄运动相关的)轨迹。与以前一样, 首先综合图 3.51 所示四杆机构的输入侧(双杆组), 然后, 对输入侧的每一个可能的解求出相应的输出侧的解。

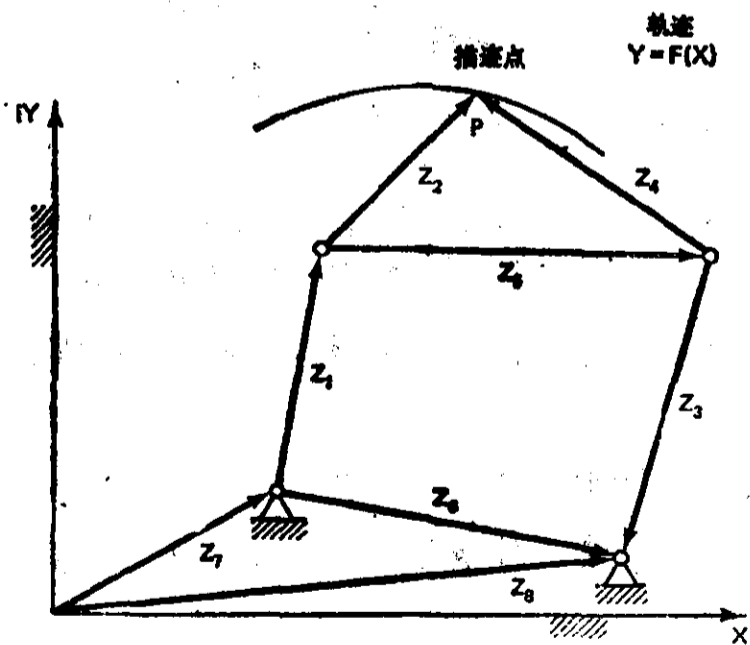


图 3.50 高阶轨迹生成的四杆轨迹发生器

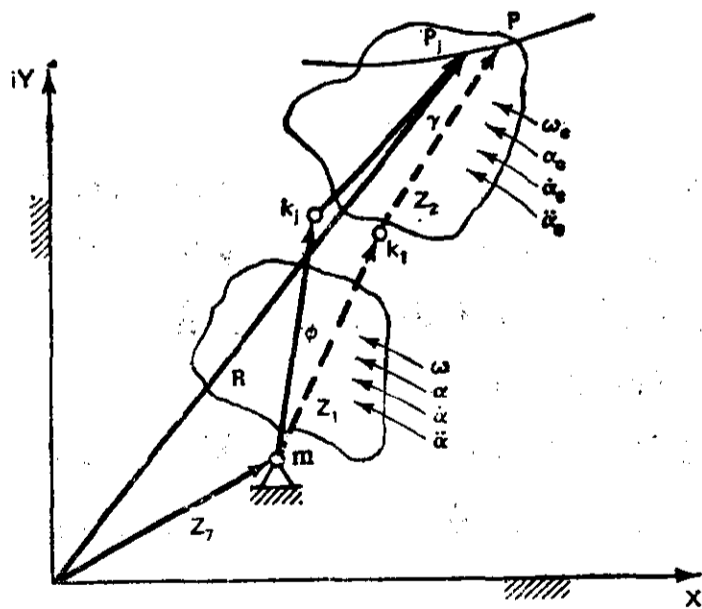


图 3.51 图 3.50 中四杆轨迹发生器的输入侧。注意, m, k 是“五阶布尔梅斯特点对”

在图 3.51 中, 向量 R 定出在预定理想轨迹上的精确点位置; 向量 Z_1 定出未知定销轴的位置; Z_2 代表未知的输入杆; 而向量 Z_3 代表未知浮动杆, 即连杆的一个边。现在可以写出输入侧

在精确点上的下列环路方程:

$$Z_7 + e^{i\phi} Z_1 + e^{i\gamma} Z_2 = R \quad (3.74)$$

式中 ϕ 和 γ 为从虚线所示的某个参考位置量得的转角。

为了实现五阶轨迹生成, 方程(3.74)必须对时间逐次微分到四阶导数。

$$i\omega e^{i\phi} Z_1 + i\omega_c e^{i\gamma} Z_2 = \overset{1}{R} \quad (3.75)$$

$$(i\alpha - \omega^2) Z_1 e^{i\phi} + (i\alpha_c - \omega_c^2) Z_2 e^{i\gamma} = \overset{2}{R} \quad (3.75a)$$

$$(i\dot{\alpha} - 3\alpha\omega - i\omega^3) Z_1 e^{i\phi} + (i\dot{\alpha}_c - 3\alpha_c\omega_c - i\omega_c^3) Z_2 e^{i\gamma} = \overset{3}{R} \quad (3.76)$$

$$[i(\ddot{\alpha} - 6\alpha\omega^2) + \omega^4 - 4\dot{\alpha}\omega - 3\alpha^2] Z_1 e^{i\phi} + [i(\ddot{\alpha}_c - 6\alpha_c\omega_c^2) + \omega_c^4 - 4\dot{\alpha}_c\omega_c - 3\alpha_c^2] Z_2 e^{i\gamma} = \overset{4}{R} \quad (3.77)$$

式中 $\overset{1}{R}$, $\overset{2}{R}$, $\overset{3}{R}$, $\overset{4}{R}$ 是 R 对 t 的逐阶导数, 且

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\omega_c = \frac{d\gamma}{dt}, \quad \dot{\alpha}_c = \frac{d\alpha_c}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad \ddot{\alpha} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt}$$

$$\alpha_c = \frac{d\omega_c}{dt}, \quad \ddot{\alpha}_c = \frac{d\dot{\alpha}_c}{dt}$$

由于现在只考虑单个精确点, 同时在图 3.51 中 P 与 P_j 重合, 所以方程(3.74)至(3.77)有可能简化。从而

$$\phi = \gamma = 0$$

$$e^{i\phi} = e^{i\gamma} = 1$$

且

据此, 方程(3.74)至(3.77)变成

$$R = Z_7 + Z_1 + Z_2 \quad (3.78)$$

$$\overset{1}{R} = i\omega Z_1 + i\omega_c Z_2 \quad (3.79)$$

$$\overset{2}{R} = (-\omega^2 + i\alpha) Z_1 + (-\omega_c^2 + i\alpha_c) Z_2 \quad (3.80)$$

$$\overset{3}{R} = [-3\alpha\omega + i(\dot{\alpha} - \omega^3)] Z_1 + [-3\alpha_c\omega_c + i(\dot{\alpha}_c - \omega_c^3)] Z_2 \quad (3.81)$$

$$\overset{4}{R} = [\omega^4 - 4\dot{\alpha}\omega - 3\alpha^2 + i(\ddot{\alpha} - 6\alpha\omega^2)] Z_1 + [\omega_c^4 - 4\dot{\alpha}_c\omega_c - 3\alpha_c^2 + i(\ddot{\alpha}_c - 6\alpha_c\omega_c^2)] Z_2 \quad (3.82)$$

方程(3.78)至(3.82)中给定的量是: 位置向量 R 及其时间导数 $\overset{1}{R}$, $\overset{2}{R}$, $\overset{3}{R}$ 和 $\overset{4}{R}$, 加 ω , α , $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, 它们是输入杆的角速度、角加速度、角冲击和三阶角加速度, 未知量为规定机构起始位置的输入侧复向量 Z_7 , Z_1 和 Z_2 , 以及未给定的量 ω_c , α_c , $\dot{\alpha}_c$ 和 $\ddot{\alpha}_c$, 它们是连杆的角速度、角加速度、角冲击和三阶角加速度。

轨迹函数 $y=f(x)$ 是由位置向量 R 及其各阶导数引入这些方程的。 R 的一阶导数定义为

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dS} \frac{dS}{dt} \quad (3.83)$$

式中 S 代表沿轨迹的标量弧长, 是从轨迹上某个参考点开始量得的。 dR/dS 项是在精确点上与轨迹相切的单位向量, 而 dS/dt 则是描述点沿轨迹的速率, 它是标量。 R 的二阶至四阶导数为

$$\ddot{R} = \frac{d^2R}{dS^2} \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 + \frac{dR}{dS} \frac{d^2S}{dt^2} \quad (3.84)$$

$$\overset{\circ}{R} = \frac{d^3R}{dS^3} \left(\frac{dS}{dt}\right)^3 + 3 \left(\frac{d^2R}{dS^2}\right) \frac{dS}{dt} \frac{d^2S}{dt^2} + \frac{dR}{dS} \frac{d^3S}{dt^3} \quad (3.85)$$

$$\overset{\circ}{\circ}{R} = \frac{d^4R}{dS^4} \left(\frac{dS}{dt}\right)^4 + 6 \left(\frac{d^3R}{dS^3}\right) \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \frac{d^2S}{dt^2} + 4 \left(\frac{d^2R}{dS^2}\right) \frac{dS}{dt} \frac{d^3S}{dt^3} + 3 \left(\frac{d^2R}{dS^2}\right) \left(\frac{d^2S}{dt^2}\right)^2 + \frac{dR}{dS} \frac{d^4S}{dt^4} \quad (3.86)$$

综合方程(3.78)至(3.82)的求解, 可以先解方程(3.79)至(3.82)求出未知杆向量 Z_1 和 Z_2 , 然后回到方程(3.78)解出未知向量 Z_7 。

求 Z_1 和 Z_2 需要联立解四个带复系数的两个复数未知量的线性方程。为使方程(3.79)至(3.82)的联立解存在, 系数增广矩阵的秩必须为 2。其增广矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} i\omega & i\omega_c & \overset{1}{R} \\ -\omega^2 + \alpha i & -\omega_c^2 + \alpha_c i & \overset{2}{R} \\ -3\alpha\omega + (\dot{\alpha} - \omega^3)i & -3\alpha_c\omega_c + (\dot{\alpha}_c - \omega_c^3)i & \overset{3}{R} \\ \omega^4 - 4\dot{\alpha}\omega - 3\alpha^2 + (\ddot{\alpha} - 6\alpha\omega^2)i & \omega_c^4 - 4\dot{\alpha}_c\omega_c - 3\alpha_c^2 + (\ddot{\alpha}_c - 6\alpha_c\omega_c^2)i & \overset{4}{R} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

这将由以下两个行列式为零来保证:

$$D_1 = \begin{vmatrix} i\omega & i\omega_c & \overset{1}{R} \\ -\omega^2 + \alpha i & -\omega_c^2 + \alpha_c i & \overset{2}{R} \\ -3\alpha\omega + (\dot{\alpha} - \omega^3)i & -3\alpha_c\omega_c + (\dot{\alpha}_c - \omega_c^3)i & \overset{3}{R} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.88)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} i\omega & i\omega_c & \overset{1}{R} \\ -\omega^2 + \alpha i & -\omega_c^2 + \alpha_c i & \overset{2}{R} \\ \omega^4 - 4\dot{\alpha}\omega - 3\alpha^2 + (\ddot{\alpha} - 6\alpha\omega^2)i & \omega_c^4 - 4\dot{\alpha}_c\omega_c - 3\alpha_c^2 + (\ddot{\alpha}_c - 6\alpha_c\omega_c^2)i & \overset{4}{R} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.89)$$

解这两个复数“相容方程”(3.88)和(3.89)可求出四个未知实数 ω_c 、 α_c 、 $\dot{\alpha}_c$ 和 $\ddot{\alpha}_c$ 。按第二列的元素及其余因子展开行列式 D_1 和 D_2 , 分离实部和虚部, 再用西尔维斯特结式消元法导出一个 ω_c 的六次多项式, 其系数为实数, 无常数项。该多项式可写出如下:

$$H\omega_c^6 + J\omega_c^5 + K\omega_c^4 + L\omega_c^3 + M\omega_c^2 + N\omega_c = 0 \quad (3.90)$$

式中, 系数 H 至 N 是方程(3.88)和(3.89)中行列式的第一、三列内给定量的确定函数。

提出公因子零根得到

$$H\omega_c^5 + J\omega_c^4 + K\omega_c^3 + L\omega_c^2 + M\omega_c + N = 0 \quad (3.91)$$

解方程(3.91)可得出 ω_c 的五个根。仔细观察方程(3.88)和(3.89)可看出 $\omega_c = \omega$ 也是一个平凡根。约掉 $\omega_c = \omega$ 这个根得到

$$A_4\omega_c^4 + A_3\omega_c^3 + A_2\omega_c^2 + A_1\omega_c + A_0 = 0 \quad (3.92)$$

式中, $A_j (j=0, 1, \dots, 4)$ 为已知实系数。这就留下四个可能的根仍作为方程的解。这四个保留的根是实根和(或)成对复根。只有实根才是 ω_c 可能的解。将 ω_c 的每个实值代回方程(3.88)和(3.89)的实部和虚部, 联立解所得四个实数方程中的任何三个, 求出与四个 ω_c 值中的每一个相关的 α_c 、 $\dot{\alpha}_c$ 和 $\ddot{\alpha}_c$ 的相应值^①。接着, 把这几组 ω_c 、 α_c 、 $\dot{\alpha}_c$ 和 $\ddot{\alpha}_c$ 值中的任何一组代入原始综合方程(3.79)至(3.82)中的任何两个, 从中确定 Z_1 和 Z_2 。然后, 解方程(3.78)可得到 Z_7 。由于多项式(3.92)可能的实根最多为四个, 所以存在四组可能的输入侧向量 Z_7 、 Z_1 和 Z_2 。输出侧双矢量组 Z_3 、 Z_4 和确定定销轴位置的向量 Z_8 可用上述相同的方法综合, 即以同一组 ω_c 、 α_c 、 $\dot{\alpha}_c$ 和 $\ddot{\alpha}_c$ 作为杆 Z_4 的规定转角, 解相容方程求出 Z_3 的转角, 比如说称作 ω_3 、 α_3 、 $\dot{\alpha}_3$ 和 $\ddot{\alpha}_3$, 然后代回去解出双矢向量和定销轴的位置向量。可以证明, 这一方法产生的这些向量的一组组值将与按输入侧双矢量组求出的相同。这样, 由于四个这样的双矢量组中的每一个都可与其余三个中的任一个结合以构成该轨迹发生器四杆机构, 所以将有 12 个这样的四杆机构, 即: 正如节 3.9 所叙述的五个有限分离精确点的情况那样, 这种带预定时标的高阶轨迹生成综合最多有 12 个可能的解。

例 3.4

在 IBM 360 数字计算机上用根据前述方程编成的程序完成了综合方程的求解和对综合出来的连杆机构的分析。表 3.7 和图 3.52 给出了一个解的例子。

**表 3.7 图 3.52 所示机构*是按五个无限接近位置
(带预定时标的五阶逼近)的轨迹生成综合的**

轨迹: $y = xe^x$	
精确点: $R = (0.000, 0.000)$	
$\omega = 1, \alpha = \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$ (匀速输入曲柄)	
$\frac{dS}{dt} = 1,$	$\frac{d^2S}{dt^2} = 1,$
$\frac{d^3S}{dt^3} = 1,$	$\frac{d^4S}{dt^4} = 0$
杆向量:	
$Z_1 = 0.81691$	$-1.33976i$
$Z_2 = -0.23055$	$1.32842i$
$Z_3 = -1.34553$	$1.15162i$
$Z_4 = 2.43881$	$-2.27172i$

* 在图 3.52 中, 生成的轨迹似乎在曲线两端的同一侧偏离理想曲线。但实际上, 生成的曲线是在不同侧偏离理想曲线的, 这才表示为奇数^②(无限接近)精确点数目。不过, 因为在正 x 与正 y 的象限里, 在正 y 一侧的偏离是如此之小, 以至只有计算机输出的数值中才能辨别出来, 所以图上表示出来的不是真实情况。

① 可先解方程(3.88)求出 α_c 和 $\dot{\alpha}_c$, 然后解方程(3.89)的两个实数方程中的任何一个求出 $\ddot{\alpha}_c$ 。——译者注。

② 原文误为“偶数”——译者注。

如果杆 Z_2 的运动 $\omega_c, \alpha_c, \dot{\alpha}_c, \ddot{\alpha}_c$ 和 $R^m (m=0, 1, 2, 3, 4)$ 一起预先规定, 则前面的综合应是具有五个无限接近预定位置的双矢组 Z_1, Z_2 的运动生成综合。图 3.51 表示与这样一个双矢组有关的 m, k_1 五阶布尔梅斯特点对 (最多可有四对) 中的一对。这种双矢组最多可有四个, 用第一个与其余三个中的一个一起就得到一个四杆高阶运动发生器。这种四杆机构最多可有六个, 并有 12 个同源机构, 这些同源机构是带预定时标的高阶轨迹发生器。前面讨论过的五个有限分离 (不连续的) 位置的齿轮五杆、平行四边形连接的五杆和皮带或链条连接的五杆轨迹发生器 以及平行运动发生器都可适于用本节的方法进行高阶综合, 正如前节介绍的很多多环连杆机构能适于用这种方法一样。

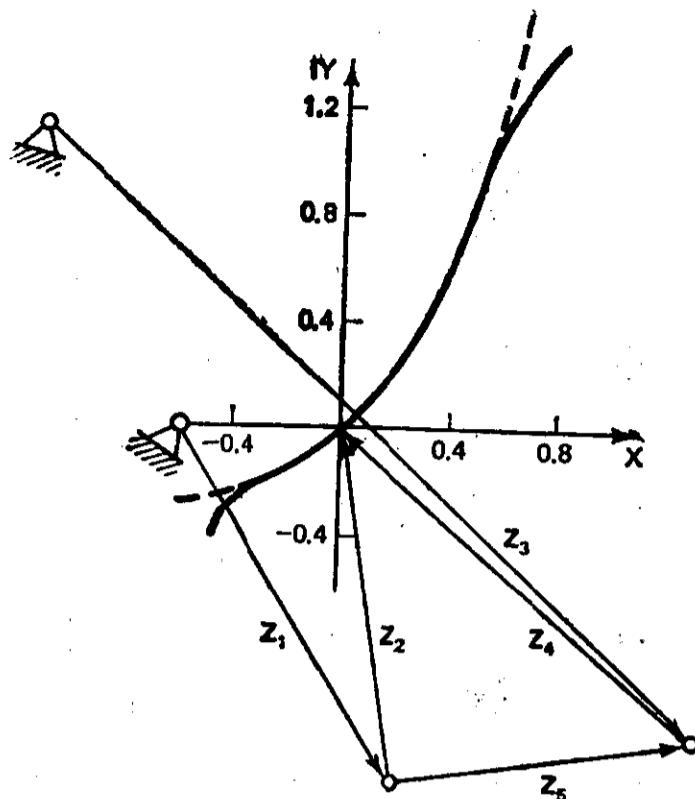


图 3.52 表 3.7 中的例子。按 $y = xe^x$ 轨迹综合的四杆高阶轨迹发生器。理想轨迹以虚线表示; 而生成的轨迹以实线表示

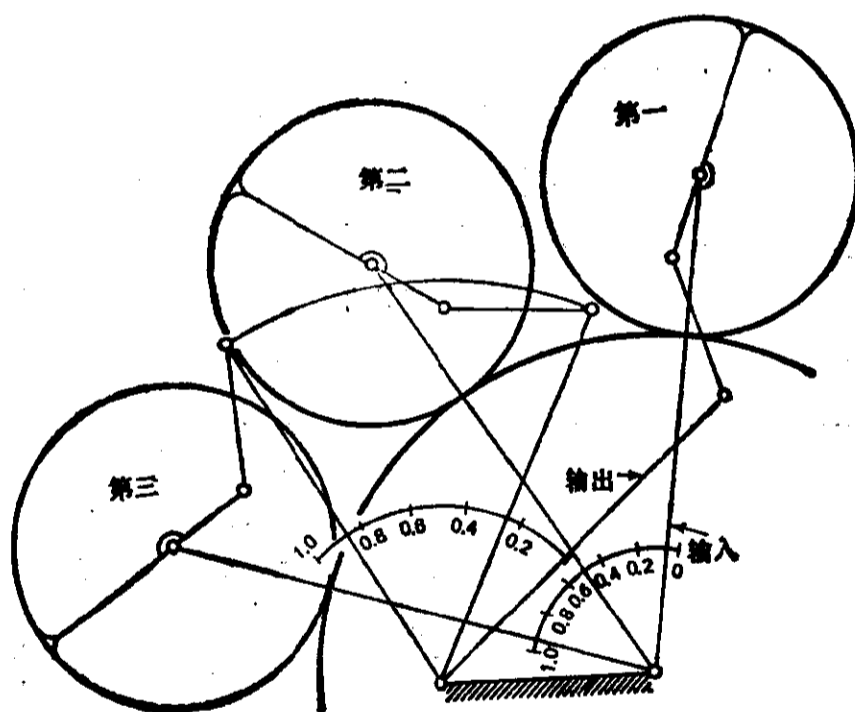
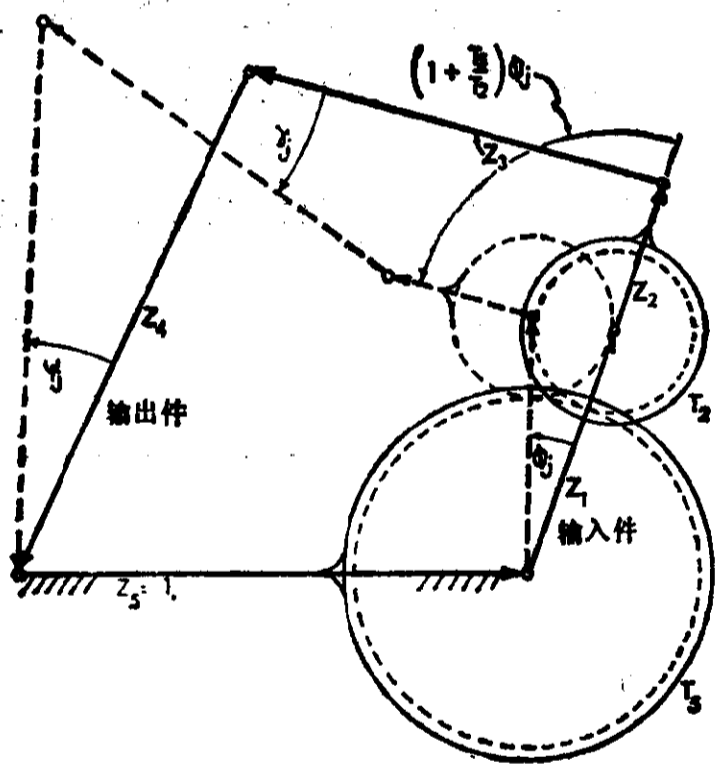


图 3.53 (a) 齿轮五杆函数发生器表示在第一精确位置 (实线)。第 j 位置 (虚线) 相应于输入杆 Z_1 回转了角 ϕ_j ; (b) 按比例画的表 3.8 中例 1 的图, 图中机构处于其三个契贝歇夫间距上的二阶精确位置

齿轮五杆机构的位置-速度综合

图 3.41 中的齿轮五杆机构是按四个有限分离位置函数生成综合的。根据表 3.5, 这一连杆机构总共可按七个位置进行设计, 但是五、六、七个位置的情况将包含解相容方程。

遵循节 2.24 建立的逻辑推理, 表 3.5 中第一栏的预定位置数目可以是有限分离位置数目, 也可以是无限接近的位置数目。但是要注意, 如果位置和在该位置上的速度 (两个无限接近位

置) 没有预定, 则牵涉该位置上三个无限接近位置的加速度就不可能得到规定。图 3.53a 表示 $F=1$ (因为在杆 1 和 2 之间有一个齿轮约束, 形成摆线曲柄) 的齿轮五杆机构的另一种形式。下面按函数生成的六个复合分离预定位置——输入杆和输出杆之间的三对相应的预定位置和预定速度——来写出方程并综合这一齿轮五杆机构^[85]。

我们将采用下列转动算子的符号:

$$\text{给定: } \begin{cases} \lambda_j = e^{i\phi_j} \\ \varepsilon_j = e^{i[1+(T_5/T_2)]\phi_j} \\ \mu_j = e^{i\psi_j} \end{cases}$$

$$\text{未知: } \nu_j = e^{i\gamma_j}$$

这一机构的封闭方程可写出如下:

$$\lambda_j Z_1 + \varepsilon_j Z_2 + \nu_j Z_3 + \mu_j Z_4 = -1 \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.93)$$

一阶导数环路方程为

$$\dot{\lambda}_j Z_1 + \dot{\varepsilon}_j Z_2 + \dot{\nu}_j Z_3 + \dot{\mu}_j Z_4 = 0 \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.94)$$

式中, 符号上方的点代表对输入曲柄转角的微分。在这里

$$\dot{\lambda}_j = i \left(\frac{d\phi}{d\phi} \right)_j \lambda_j = i \lambda_j$$

$$\dot{\varepsilon}_j = i \left(1 + \frac{T_5}{T_2} \right) \varepsilon_j$$

$$\dot{\mu}_j = i \left(\frac{d\psi}{d\phi} \right)_j \mu_j$$

这些量由对 $j=1, 2, 3$ 的预定数据中得知, 但

$$\dot{\nu}_j = i \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)_j \nu_j$$

是未知的。注意, 对于 $j=1, \phi_1 = \psi_1 = \gamma_1 = 0$, 所以 $\lambda_1 = \varepsilon_1 = \nu_1 = \mu_1 = 1$ 。方程组(3.93)和(3.94)的满列增广矩阵如下:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \lambda_2 & \varepsilon_2 & \nu_2 & \mu_2 & -1 \\ \lambda_3 & \varepsilon_3 & \nu_3 & \mu_3 & -1 \\ i & \dot{\varepsilon}_1 & i\dot{\gamma}_1 & \dot{\mu}_1 & 0 \\ i\lambda_2 & \dot{\varepsilon}_2 & i\dot{\gamma}_2\nu_2 & \dot{\mu}_2 & 0 \\ i\lambda_3 & \dot{\varepsilon}_3 & i\dot{\gamma}_3\nu_3 & \dot{\mu}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

为了保证方程组(3.93)~(3.94)有 Z_k 的联立解, 该矩阵的秩必须是 4。所以, 如果我们说

$$D_1 = \det(M)_{1,2,3,4,5} = 0 \quad (3.96)$$

$$D_2 = \det(M)_{1,2,3,4,6} = 0 \quad (3.97)$$

(式中下标标明行数), 则可以将方程组(3.96)、(3.97)作为相容方程组。这一方程组含有四个实数方程, 可以解出四个实数未知量。式(3.95)中第一、二、四列内的各个元素可由预定数据求知;

而第三列中包含五个未预定的实数。如果我们任意地假设一个 γ_1 的值, 则剩下四个未知实数 $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_2$ 和 γ_3 。将 D, D_2 按它们第三列的元素及其余因子展开, 可得到

$$D_1 = \Delta_1 + \Delta_2 \nu_2 + \Delta_3 \nu_3 + \Delta_4 i \gamma_1 + i \Delta_5 \gamma_2 \nu_2 = 0 \quad (3.98)$$

$$D_2 = \Delta'_1 + \Delta'_2 \nu_2 + \Delta'_3 \nu_3 + \Delta'_4 i \gamma_1 + i \Delta'_5 \gamma_3 \nu_3 = 0 \quad (3.99)$$

式中, 各个 Δ 是相应的余因子, 由预定数据已知。将方程(3.98)除以 $i \Delta_5 \nu_2$, 方程(3.99)除以 $i \Delta'_5 \nu_3$, 得到

$$\frac{\Delta_1}{i \Delta_5} \nu_2^{-1} + \frac{\Delta_2}{i \Delta_5} + \frac{\Delta_3}{i \Delta_5} \nu_2^{-1} \nu_3 + \frac{\Delta_4 i \gamma_1}{i \Delta_5} \nu_2^{-1} + \gamma_2 = 0 \quad (3.100)$$

$$\frac{\Delta'_1}{i \Delta'_5} \nu_3^{-1} + \frac{\Delta'_2}{i \Delta'_5} \nu_2 \nu_3^{-1} + \frac{\Delta'_3}{i \Delta'_5} + \frac{\Delta'_4 i \gamma_1}{i \Delta'_5} \nu_3^{-1} + \gamma_3 = 0 \quad (3.101)$$

简化已知量的符号, 把方程(3.100)重写为

$$a_1 + a_2 \nu_2^{-1} + a_3 \nu_2^{-1} \nu_3 + \gamma_2 = 0 \quad (3.102)$$

方程(3.102)的复数共轭式为

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 \nu_2 + \bar{a}_3 \nu_2 \nu_3^{-1} + \gamma_2 = 0 \quad (3.103)$$

从方程(3.103)减去(3.102)再除以 $2i$, 可得到①

$$a_{1y} + a_{2y} \cos \gamma_2 - a_{2x} \sin \gamma_2 + a_{3y} \cos(\gamma_3 - \gamma_2) - a_{3x} \sin(\gamma_3 - \gamma_2) = 0 \quad (3.104)$$

同样, 将方程(3.101)与它的复数共轭式相组合, 已知因子冠以符号一撇, 得出

$$a'_{1y} + a'_{2y} \cos \gamma_3 - a'_{2x} \sin \gamma_3 + a'_{3y} \cos(\gamma_3 - \gamma_2) + a'_{3x} \sin(\gamma_3 - \gamma_2) = 0 \quad (3.105)$$

在方程(3.104)和(3.105)中, 所有 a 和 a' 的值都是矩阵 M 中第一、二、四列内已知系数的实数确定函数。为了简化方程(3.104)和(3.105), 我们用下列恒等式:

$$\cos(\gamma_3 - \gamma_2) = \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 + \sin \gamma_2 \sin \gamma_3$$

$$\sin(\gamma_3 - \gamma_2) = \sin \gamma_3 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_3 \sin \gamma_2$$

$$\cos \gamma_j = \frac{1 - \tau_j^2}{1 + \tau_j^2}, \quad \sin \gamma_j = \frac{2\tau_j}{1 + \tau_j^2}$$

式中

$$\tau_j = \tan \frac{\gamma_j}{2}$$

据此, 可将方程(3.104)重写为:

$$a_{1y} + a_{2y} \frac{1 - \tau_2^2}{1 + \tau_2^2} - a_{2x} \frac{2\tau_2}{1 + \tau_2^2} + a_{3y} \left[\frac{1 - \tau_2^2}{1 + \tau_2^2} \frac{1 - \tau_3^2}{1 + \tau_3^2} + \frac{4\tau_2 \tau_3}{(1 + \tau_2^2)(1 + \tau_3^2)} \right] - a_{3x} \frac{2\tau_3(1 - \tau_2^2) - 2\tau_2(1 - \tau_3^2)}{(1 + \tau_2^2)(1 + \tau_3^2)} = 0 \quad (3.106)$$

乘以 $(1 + \tau_2^2)(1 + \tau_3^2)$ ②:

$$a_{1y}(1 + \tau_2^2)(1 + \tau_3^2) + a_{2y}(1 - \tau_2^2)(1 + \tau_3^2) - a_{2x} 2\tau_2(1 + \tau_3^2) + a_{3y}[(1 - \tau_2^2)(1 - \tau_3^2) + 4\tau_2 \tau_3] - 2a_{3x}[\tau_3(1 - \tau_2^2) - \tau_2(1 - \tau_3^2)] = 0 \quad (3.107)$$

① 或者, 我们可以说, 因为 γ_2 是实数, 所以方程(3.102)的虚部为零, 这也可导出方程(3.104)。

② 乘以 $(1 + \tau_2^2)(1 + \tau_3^2)$ 引进了 τ_2 和 τ_3 的增根 $\pm i$ 。

展开, 得到

$$a_{1y}(1+\tau_2^2+\tau_3^2+\tau_2^2\tau_3^2)+a_{2y}(1-\tau_2^2+\tau_3^2-\tau_2^2\tau_3^2)-2a_{2x}(\tau_2+\tau_2\tau_3^2) \\ +a_{3y}(1-\tau_2^2-\tau_3^2+\tau_2^2\tau_3^2+4\tau_2\tau_3)-2a_{3x}(\tau_2-\tau_2^2\tau_3-\tau_2+\tau_2\tau_3^2)=0 \quad (3.108)$$

按 τ_3 的降幂排列:

$$\tau_3^2[a_{1y}(1+\tau_2^2)+a_{2y}(1-\tau_2^2)-2a_{2x}\tau_2-a_{3y}(1-\tau_2^2)-2a_{3x}\tau_2] \\ +\tau_3[4a_{3y}\tau_2-2a_{3x}(1-\tau_2^2)]+\tau_3^0[a_{1y}(1+\tau_2^2)+a_{2y}(1-\tau_2^2) \\ -2a_{2x}\tau_2+a_{3y}(1-\tau_2^2)+2a_{3x}\tau_2]=0 \quad (3.109)$$

这具有下列形式:

$$\tau_3^2 P_2 + \tau_3 P_1 + P_0 = 0 \quad (3.110)$$

式中 $P_j (j=0, 1, 2)$ 代表带实系数的 τ_2 的二次多项式。

同样, 从方程(3.105)得到

$$\tau_3^2 \pi_2 + \tau_3 \pi_1 + \pi_0 = 0 \quad (3.111)$$

式中 $\pi_j (j=0, 1, 2)$ 也代表带实系数的 τ_2 的二次多项式。

用西尔维斯特结式消元法消去 τ_3 ①, 得到

$$S_1 = \begin{vmatrix} 0 & P_2 & P_1 & P_0 \\ 0 & \pi_2 & \pi_1 & \pi_0 \\ P_2 & P_1 & P_0 & 0 \\ \pi_2 & \pi_1 & \pi_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.112)$$

将其展开, 得到 τ_2 的八次多项式 (因为 S_1 的每个元素是 τ_2 的二次式), 有四个平凡根: $\pm i$ 和 $\tau_2 = \tan\left(\frac{\phi_2}{2}\right)$, $\tau_2 = \tan\left(\frac{\psi_2}{2}\right)$ ②。

同样, 从方程组(3.104)和(3.105)消去 τ_2 , 得到 τ_3 的八次多项式, 它的解也包含四个平凡根: $\pm i$ 和

$$\tau_3 = \tan\left(\frac{\phi_3}{2}\right) \quad \text{和} \quad \tau_3 = \tan\left(\frac{\psi_3}{2}\right)$$

每次用 τ_2 的一个值直接代入方程组(3.110)和(3.111), 可以判定 τ_2 和 τ_3 非平凡根中相应的联立解的值。由此, 从方程(3.110)产生 τ_3 的两个根, 从方程(3.111)也产生两个根, 其中必有一个公共的根满足方程(3.110)和(3.111), 并与 τ_3 的八次多项式的一个非平凡根相一致。实际上, 为求这些根, 并不一定要进行上述步骤, 而可将方程(3.112)的任何两个不同的非平凡实根用作 τ_2 和 τ_3 , τ_2, τ_3 的联立非平凡根数目最多为六对。

这样求出最多六对 γ_2 和 γ_3 的值以后, 每一对这样的值都可代回方程(3.98)和(3.99)③, 以

① 方程(3.110)和(3.111)乘以 τ_3 产生另两个方程, 它们是 τ_3 的三次多项式。形成的四个方程有 $\tau_3^{(s)}$ ($s=0, 1, 2, 3$) 的联立解的条件是: 其系数行列式为零, 从而导致方程(3.112)。(原文为“其系数增广矩阵的秩为4, 从而导致方程(3.112)”, 似有误——译者注。)

② 原文为“有两个平凡根($\pm i$)”, 似有误——译者注。

③ 原文为(3.108)和(3.109), 似有误——译者注。

表 3.8 图 3.53、例 3.5 的齿

机构号	函数 $y^{\text{②}}$	范 围 $x_0 \leq x \leq x_1$	比例因子 ^① $\Delta\phi, \Delta\psi$	齿轮传动比	角速度 ^① $\dot{\gamma}_1$	在齿轮五杆机构起始位置上的Z向量 ^③	齿轮五杆机构的精确点, 在 $x =$
1	x^2	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	2	1.	0.2759 + 2.291i -0.1451 - 0.3883i 0.2270 - 0.638i -1.358 - 1.264i	0.0666 ^④ , 0.2299 ^④ 0.5000 ^④ , 0.9333 ^④
2a	x^2	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	2	1.5	-3.340 + 2.131i -0.2015 + 0.1525i 2.638 - 1.671i -0.0968 - 0.6122i	0.0666 ^④ , 0.5000 ^④ 0.9333 ^④
2b	x^2	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	2	1.5	同 上	0.0169 ^④ , 0.1517 ^④ 0.3611 ^④ , 0.6409 ^④ 0.8403 ^④ , 0.9788 ^④
3	x^2	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	-2	1.0	0.2946 + 1.396i -0.0148 - 0.1921i -0.0918 - 0.7607i -1.188 - 0.4433i	0.0666 ^④ , 0.5000 ^④ 0.9333 ^④
4	$x^{1.5}$	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	-2	1.5	-3.803 + 4.852i 0.0071 - 0.0052i 2.424 - 2.659i 0.3712 - 2.187i	0.0666 ^④ , 0.5000 ^④ 0.2157 ^④ , 0.9333 ^④
5a	$x^{2.5}$	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	2	1.5	-3.511 + 1.435i -0.3032 + 0.2282i 2.951 - 1.405i -0.1368 - 0.2573i	0.0666 ^④ 0.5000 ^④ 0.9333 ^④
5b	$x^{2.5}$	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	2	1.5	同 上	0.0142 ^④ , 0.1540 ^④ 0.3763 ^④ , 0.6152 ^④ 0.8582 ^④ , 0.9829 ^④
6a	x^3	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	2	1.5	-3.615 + 1.251i -0.3235 + 0.2889i 3.059 - 1.411i -0.1193 - 0.1292i	0.0666 ^④ , 0.5000 ^④ 0.9333 ^④
6b	x^3	$0 \leq x \leq 1$	90, 90	2	1.5	同 上	0.6338 ^④ 0.8359 ^④










① 比例因子的单位是度每单位 x 。速度 $\dot{\gamma}_1$ 的单位是弧度每秒。Z向量栏从上至下为 Z_2, Z_3, Z_4 和 Z_5 , 而 $Z_1 = 1$ 。

② x^p 的函数发生器也适用于 $x^{1/p}$ 。

③ 精确点由契贝歇夫间距导出(二阶精确点)。

④ 存在一个额外的未曾预定的一阶精确点。

轮五杆函数发生器^①

齿轮五杆机构的最大误差	(弗鲁登斯坦的)四杆机构的最大误差	齿轮五杆机构的性能要点	齿轮五杆机构的误差曲线形状
0.0802°	0.0673°	额外精确点在 $x=0.2299$; 在 $0.03 \leq x \leq 0.6$ 范围内 误差 $< 0.0176^\circ$	
0.0708°	0.0673°	所有精确点都是二阶的	
0.0354°	0.0673°	移动例2a的精确点使最大误差减半。 $y_{ab} = y_{2a} + \frac{1}{2} \theta_{\max} _{(2a)}$	
0.3816°	0.0673°	在 $0.33 \leq x \leq 1.0$ 范围内, 误差 < 0.11 ; 在 $0.40 < x < 0.56$ 范围内, 误差 < 0.001	
0.0584°	0.146°	额外精确点在 $x=0.2157$; 在 $0.05 \leq x \leq 1.0$ 范围内误差 $< 0.0138^\circ$	
0.0951°	0.412°	所有精确点都是二阶的	
0.0476°	0.412°	移动(5a)的精确点使最大误差减半	
0.1281°	0.566°	所有精确点都是二阶的	
0.0641°	0.566°	移动(6a)的精确点使最大误差减半	

⑤ 这些是由该例^②的误差曲线向上移动半个最大误差而得到的精确点。

⑥ 这些点结果不费代价就成了三阶精确点。

⑦ 原文为“例2”，但实际上还有例5，因此改为“该例”——译者注。

于是,任何一组 $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_2$ 和 γ_3 这样的解都可代回原来的方程组(3.93)和(3.94),然后,可联立解其中任何四个,求出在起始位置上的机构尺寸,即 $Z_k (k=1, 2, 3, 4)$, 从而产生最多六个不同的设计。

例 3.5

表 3.8 列举了几个按三个二阶精确点综合的齿轮五杆函数发生器的结果。虽然尚未考虑为误差最小化而重新配置精确点,但是,几个例(2, 4, 5, 6)的最大误差已比弗鲁登斯坦(Freudenstein)按一组相同的参数(即函数、范围和比例因子)综合的最优四杆机构^[104]的误差小得多了。某些例子(1, 3)在该范围的某个区段内提供了与理想函数“近于符合”的输出。在例(1, 4)中,有一个额外的一阶精确点提高了函数发生器的精度。

规定一个二阶精确点而得到一个三阶精确点看来也不是不可能的。例 3 就有一个二阶精确点和两个三阶精确点。

因为二阶精确点实际上是两个精确点互相无限靠近,所以,实际曲线趋近又离开理想曲线,而不相交。在任何必须正确地再现函数的一阶导数(与曲线相切)的地方都要用二阶精确点。正如麦克拉南(McLarnan)所建议的那样^[181],如果所有精确点都是二阶的,则将理想曲线移动半个最大误差的距离即可使最大误差减半。例 2a, 5a 和 6a 都只有二阶精确点,这些精确点在 b 部分都被移动而使最大误差减为一半。例 3, 4 中齿轮的负传动比代表两个齿轮在它们公切线的同一侧(内摆线曲柄机构)(见图 3.40)。

图 3.53b 表示例 1 的机构处于其三个契贝歇夫间距上的二阶精确位置。其输出生成函数 x^2 , 对应于输入 x 在 $0 \leq x \leq 1$ 。输入与输出的转角范围都是 90° 。任意选定的齿轮传动比 2 与 $\gamma_1 = 1.5$ 给出一个额外的精确点,在 $x = 0.2299$ 处。该额外精确点使将近 60% 范围内的误差小于 0.0176° 。

例 4 是一种特殊情况,它的 Z_2 实际上是零。这样,就可得到一个四杆机构,因为在 $x = 0.0666$ 和 $x = 0.2157$ 两处出现未曾预定的精确点,所以,这个四杆机构有八个精确点(一个三阶、一个一阶和两个二阶精确点)。注意,在整个范围内的最大误差是 0.0584° , 而在 95% 范围内,其误差小于参考文献[104]中优化四杆机构最大误差的十分之一。

附录: A3.1 LINCAGES 程序包^①

这里的目的,不是来全面解释 LINCAGES 程序包中各个人机对话子程序的全部用途^[78, 82, 84, 218, 270]。不过,某些子程序将通过一个例子来说明。因为对应于 β_2 的每个选定值(图 3.2)有两个解,相容连杆机构按这些值封闭起来(图 3.3),所以每个综合出来的双杆组以 β_2 的值(0° 至 360°)和组号(1 或 2)标出,该组号表示对于具体的 β_2 来说,这是 β_3 和 β_4 的两组可以采用的解中的第一组还是第二组。

例 3.6

过滤器产品的装配是从把过滤材料做成滤网坯的成形开始的。下一步为由人工把滤网坯放到心轴上。该心轴是滤器装配机的部件。本题的目的是设计一个四杆机构将滤网坯从料斗内取出并送到心轴上。

图 3.54 表示了设计目的。重力自动供料料斗内存在着半圆柱形滤网坯,在初始位置,其直径平面表面与铅垂面成 27° 。必须把滤网坯转动到这一直径平面呈水平放到心轴上。料斗的位置可在图示虚形范围内,不过,该角度必须保持 27° 。

在“取放”循环开始时,要求在大致垂直于料斗平面的方向上拉出滤网坯。为了防止滤网坯在心轴上折叠,必须在心轴上方大约 2 cm 的位置上完成滤网坯的转动,接着,无转动地平移到心轴上。然后,连杆机构的运

^① 可从本书第二作者处得到。

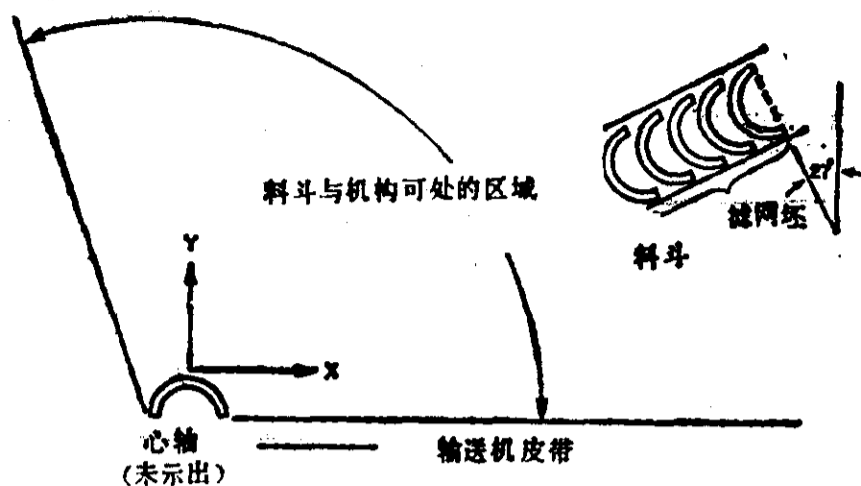


图 3.54 例 3.6 中运动生成的预定任务: 滤网坯要从料斗取出并放到心轴上

动应当返回, 从心轴上取走已完成的滤器, 并放到输送机皮带上。此后, 连杆机构应该回到料斗去取另一个滤网坯。因为要求在同一轨迹上前进与返回, 所以应用曲柄摇杆机构并不比双摇杆机构有什么实际优点。

合格的连杆机构解(这里要求为四杆机构)的定销轴和在规定范围内的运动必须不与料斗和滤器装配机相干涉。同时, 因为所得连杆机构可能由一个附加的双杆组来驱动(以提供一个可整周回转的输入), 所以, 这里综合的四杆机构中输入杆的总的角行程应该尽量小, 以便使(包括作用于该运动生成四杆机构输入杆的附加双杆组所形成的驱动曲柄和连杆在内的)整个机构得到合适的传动角。

这一例子是机构设计师在实践中经常遇到的典型的复杂问题。其中有些约束是硬性的, 而另外的约束可在某个指定范围内变动。这在数学上意味着有无穷多个解的可能性。计算机作图屏幕是帮助评价大量可能的解的一种理想工具。

解法

很清楚, 这个问题要作运动生成综合(或称刚体导引), 其中, 滤网坯在不同精确点上的位置和角度是指定的。选取了沿指定轨迹上的四个点和四个相应的角位置。

选定的第一组精确点列于表 3.9。心轴标为位置 1; 而第二位置选在心轴的上方, 保持没有转动(为防止滤网坯折叠); 第三个位置选在第二和第四位置之间大致一半处, 转角也大致是要求值的一半; 第四位置相应于料斗的角度和位置。

表 3.9 按四个精确点综合四杆运动发生器的首试值(例 3.6, 图 3.54)

位 置	x坐标(cm)	y坐标(cm)	转角(°)
1	0	0	0
2	1	7	0
3	17	18	60
4	38	21	117

$M-K$ 曲线(即圆心点曲线和圆点曲线)的一部分示于图 3.55。实线和短虚线分别代表从第一组和第二组 $\beta_j (j=2, 3, 4)$ 值得到的圆心点曲线, 而长虚线和点划线则是从这两组 β 值得出的圆点曲线。图 3.56 只表示第一组 β 值解的 $M-K$ 曲线, 图中 β_2 的值与其 $m-k_1$ 点在这两条曲线上的位置之间的关系用图左边表中的相应字母来表示。例如, 字母 B 代表 $\beta_2=30^\circ$ 的 m 点和 k_1 点。用(可由操作人员用在作图屏幕上定位的十字准线表示 M 曲线或 K 曲线上点的选择的)人机对话方式决定相应于 $\beta_2=330^\circ$ 和 30° 的定销轴和动销轴位置的结果也示于图 3.56。当设计师用十字准线决定定销轴位置时, 计算机就求出双杆组的动销轴并在屏幕上画出代表该双杆组的线。这两个双杆组形成了一个看起来合格的四杆机构, 供进一步分析。所选四杆机构的连杆曲线由另一个子程序生成。图 3.57 表明, 连杆曲线在点 1 和 2 之间改变方向朝左, 垂直地趋近精确点 4, 并在点 3 处有

一尖点。这些都是不应有的特性。既然这一机构不能用，那么也能满足这一组预定精确点的其它机构怎么样呢？

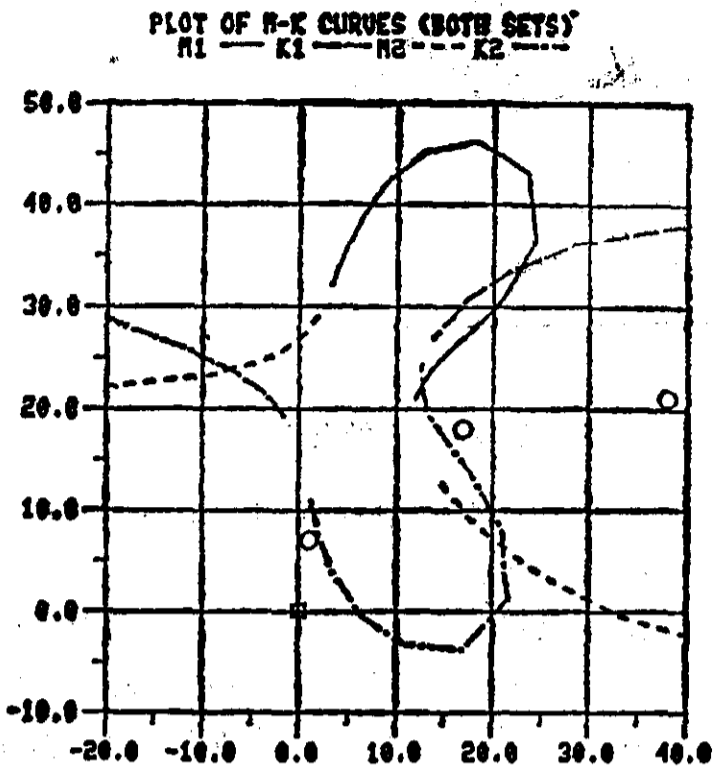


图 3.55 为例 3.6、图 3.54 按表 3.9 中四个预定精确点作出的 $M-K$ 曲线(两组)

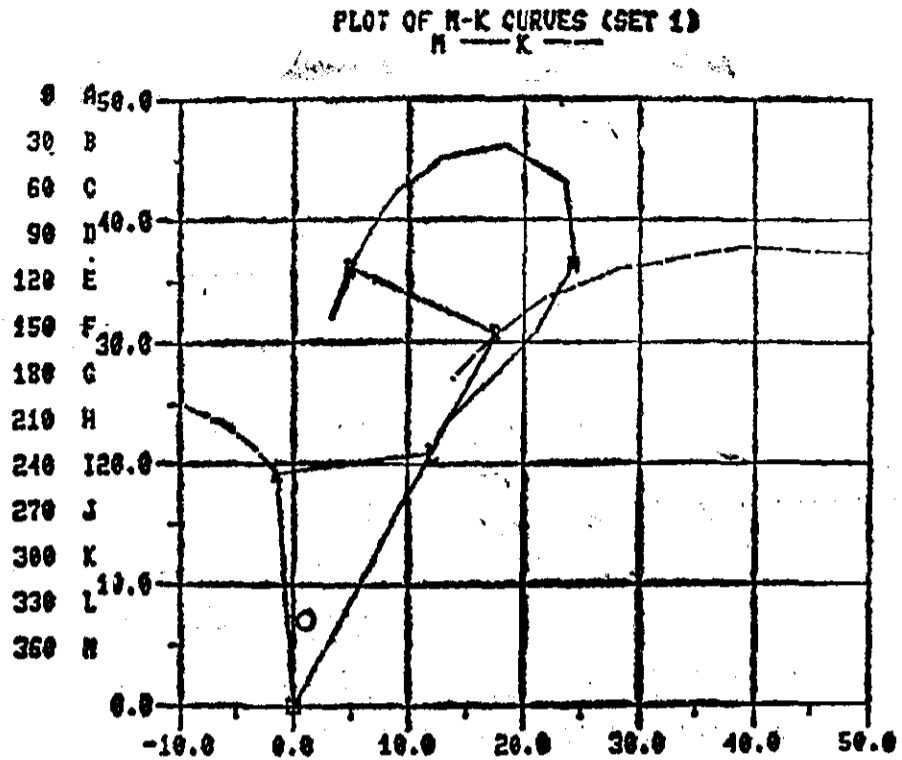


图 3.56 为例 3.6、图 3.54 按表 3.9 中所列精确点作出的 $M-K$ 曲线图(第一组)。由两个 $m-k$ 双杆组形成的无数个四杆机构之一是：固定杆为 LB (接近于直, 这条线未示出), BB 和 LL 为连架杆, LP_1B 为连杆三角形, 连杆 LB 未示出

图 3.58 表示 LINCAGES 程序包其它几种用法中的一种(称作“BETAS”), 这对勘查各种可能的双杆组是有用的。图中画的是连架杆(W)的转角 β_3 和 β_4 在第一、第二组内的值(BTA 31、BTA 32、BTA 41、BTA 24)对 β_2 的曲线。注意, 在 $30^\circ < \beta_2 < 330^\circ$ 范围内没有 β_3 和 β_4 的值, 这说明在 β_2 的这个范围内“相容连杆机构”不闭合。这一曲线图的另一个有用的设计特性是能够选出 W 杆以一个方向由精确点 1 回转到 4 的双杆组。例如, 对应于第一组内 $\beta_2 = 10^\circ$ 的解就能以 $\beta_3 = 110^\circ$ 和 $\beta_4 = 180^\circ$ 单方向回转(见图 3.58)。

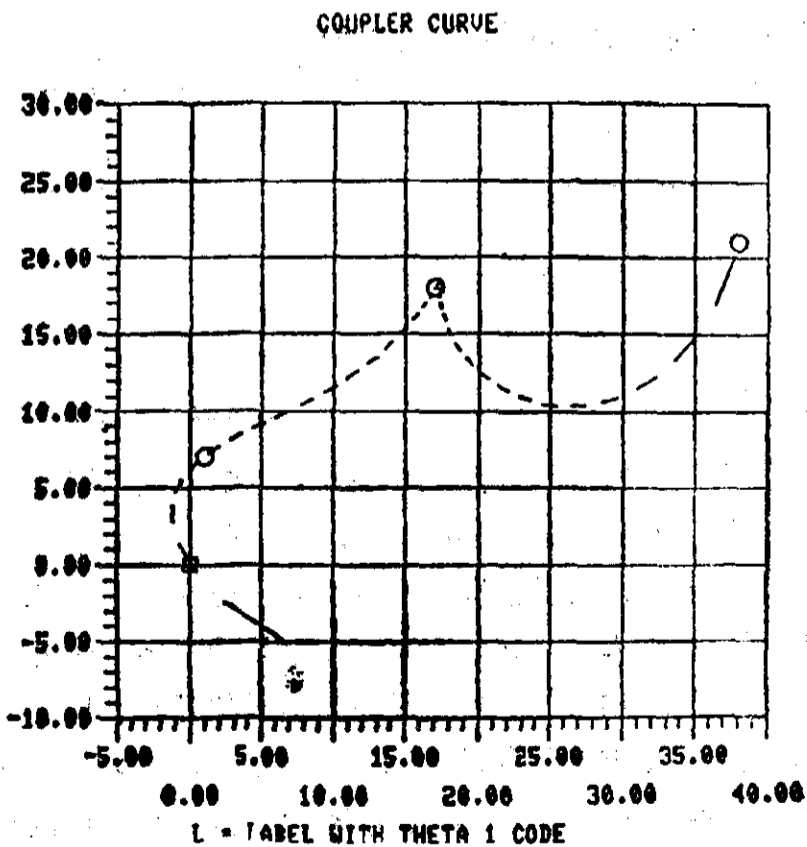


图 3.57 图 3.56(表 3.9)中四杆机构的连杆曲线

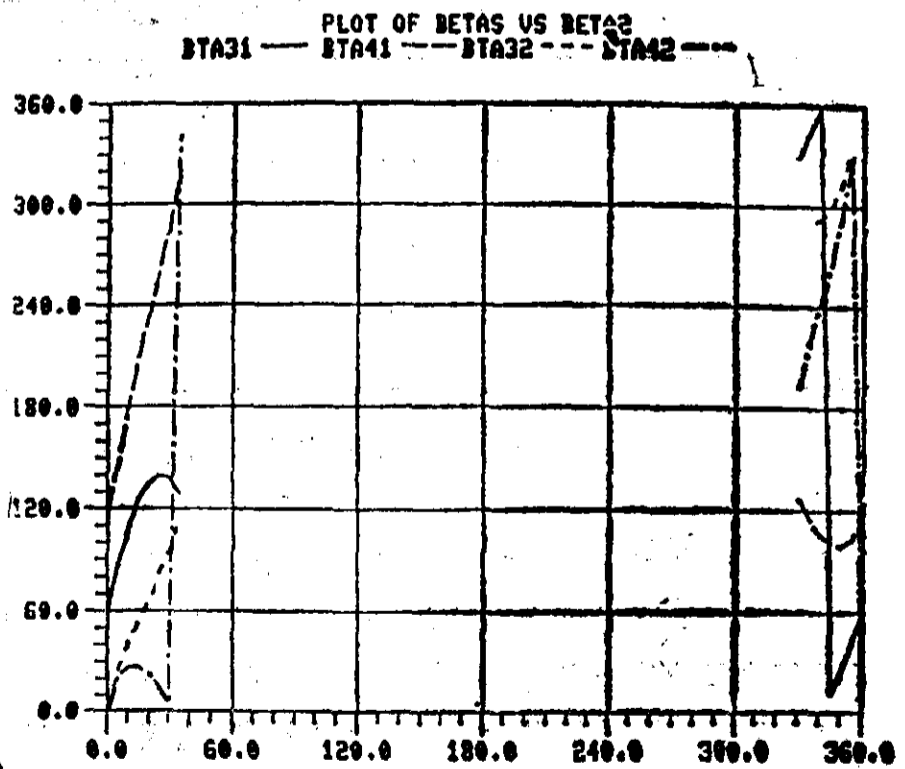


图 3.58 β_3, β_4 对 β_2 的曲线

在核查了其它几个四杆机构解的代表数据后，发现未能有效地改善连杆点轨迹特性，又选取了另一组精确点。一个尝试是把料斗放在心轴上方并靠近心轴(表 3.10)。

表 3.10 例3.6中四杆运动发生器的第二组精确点，这是在把料斗(图3.54)移到心轴上方并靠近心轴以后选取的

位置	x坐标(cm)	y坐标(cm)	转角(°)
1	0	0	0
2	1	7	0
3	9	17	60
4	17	22	117

关于机构在精确点之间是否有运动分支问题和形成的杆长比最大是多少的问题，“LINCAGES”程序包中的“TABLE”子程序(以有点象“猎枪”的方式)帮助勘察大量的四杆组合。图 3.59 中的表是按第二次选取的精确点作出的。TABLE 程序输出样件。对应于操作者指定的不同 β_2 的十二个双杆组(这些双杆组可从第一组解内选取，也可从第二组解内选取)形成表的垂直轴和水平轴(图 3.59 内的两组双杆组都是对应于 β_2 的第二组解的)。矩阵模式内 36 个方格中，每一个都列有由这些双杆组构成的四杆机构的可动性程度(见第一卷节 3.1)和杆长比。表 3.11 列有上表出现的可动性尺度的缩写。从保证要求的总输入转角(β_4)不是太大的角度来看，BETAS 的输出指示，有前景的区域是扩大了。例如，由 $\beta_2=50^\circ$ 和 $\beta_2=300^\circ$ 的解(这里两者都是由第二组解得来的)构成的四杆机构看起来似乎很有希望，它的最大杆长比为 1.9。如果从 $\beta_2=50^\circ$ 一侧驱动，则该机构将是一个摇杆-曲柄^①机构；而从 $\beta_2=300^\circ$ 一侧驱动，则它是一个曲柄-摇杆机构。可惜的是，从这一次搜索中没有找出一个合格的解。

TABLE OF LINKAGE PARAMETERS

MINIMUM TRANSMISSION ANGLE — N.NN
N.NN — MAXIMUM LINK LENGTH R₄

β_2

S E T 2	60.	T-RR 2.1	TOG 2.1	TOG 3.0	TOG 10.9	TOG 14.0	T-RR ***
	50.	R-C 1.9	T-RR 1.6	T-RR 3.0	TOG 11.0	TOG 14.1	T-RR ***
	40.	T-RR 1.8	T-RR 1.5	T-RR 3.1	T-RR 11.3	TOG 14.4	T-RR ***
	30.	TOG 1.9	T-RR 1.7	T-RR 3.3	T-RR 11.9	TOG 15.0	T-RR ***
	20.	TOG 2.9	T-RR 2.4	T-RR 4.1	T-RR 13.8	T-RR 16.4	T-RR ***
	10.	TOG 5.7	TOG 4.7	BRAN 7.1	T-RR 21.2	T-RR 21.8	T-RR ***
	β_2°	300.	312.	324.	336.	348.	360.

SET 2

图 3.59 由两个双杆组构成的四杆机构参数表。例如，顶上一行的第一格指的机构就是由 $\beta_2=60^\circ$ 和取 β_3, β_4 的第二组值得到的双杆组与 $\beta_2=300^\circ$ 和 β_3, β_4 的第二组值得到的双杆组构成的

又作了一次规定精确点的尝试。给精确点 2 以一个小小的角度(见表 3.12)，同时将该点向下靠近精确点 1 并向精确点 1 的右方移动。

① 原文为摇杆-摇杆机构，似有误——译者注。

表 3.11 图 3.59 中的缩写

R-C	摇杆-曲柄机构(输入侧为摇杆)
ROC	双摇杆,在精确点处同时有死点位置
BRAN	连杆机构有运动分支问题
T-RR	当驱动输入杆,则机构在精确点之间经过死点位置;但如果是驱动从动杆,则没有死点位置
RR-T	双摇杆,如驱动从动杆则将有死点位置
TOG	双摇杆,驱动任何一侧都有死点位置
****	杆长比大于99.9:1
----	双杆组无解
(空白)	无连杆机构——本质上完全相同的双杆组

表 3.12 例3.6中四杆运动发生器的第三组精确点

位置	x坐标(cm)	y坐标(cm)	转角(°)
1	0	0	0
2	3	5	5
3	27	22	90
4	35	24	117

根据这一组精确点,搜索了几个可能的解以后,找到了一个最终的解。这一连杆机构的两个双杆组示于图 3.60,其连杆曲线示于图 3.61。输入杆总的角行程仅 113°,这样小的角度,用另一个双杆组是足以驱动的了。整个机构的杆长比为 2.51(见表 3.13),在整个运动范围内,其传动角是满意的。表 3.13 中的“CHOOSE”子程序使用户可以把两个双杆组合成一个四杆机构。“SIDE1”和“SIDE2”(“第 1 边”和“第 2 边”)两栏给出四杆机构有关的具体数据,“MINIMUM TRANSMISSION ANGLE”(“最小传动角”)一行表示该机构无论从哪一侧驱动都将是摇杆-摇杆机构。“COUPLER ANGLE”(连杆角)指角 PAB 和 PBA(见图 3.60)。最后,该机构满足了所要求的具体约束(图 3.62 显示了该机构处于它的四个预定位置的情况)。

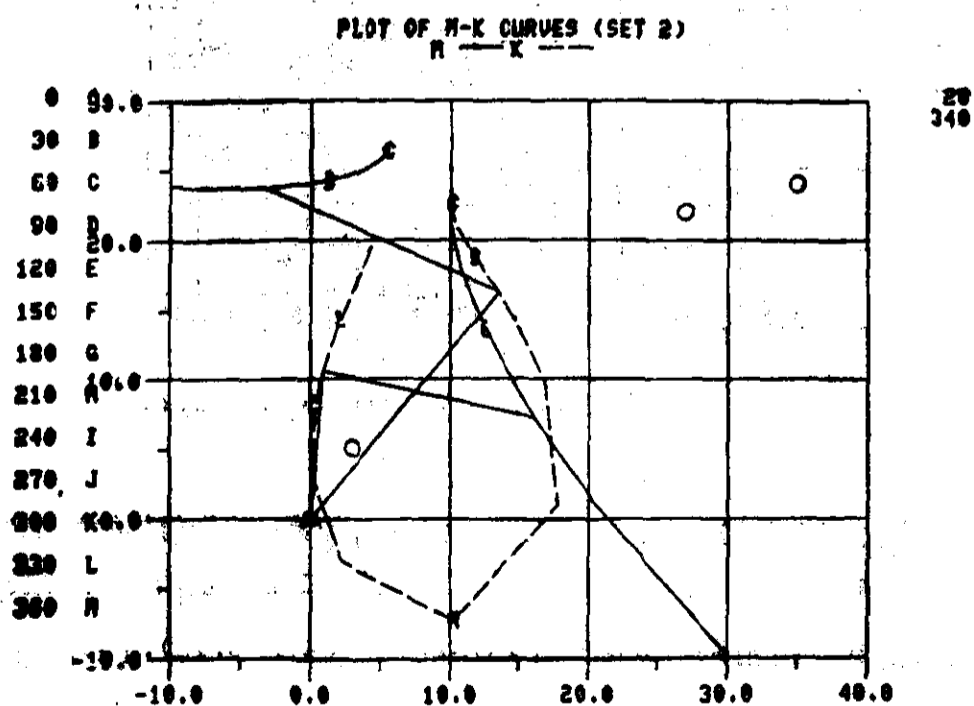


图 3.60 M-K 曲线(第二组)。例 3.6 中四杆运动发生器按表 3.12 所列精确点得出的最终解

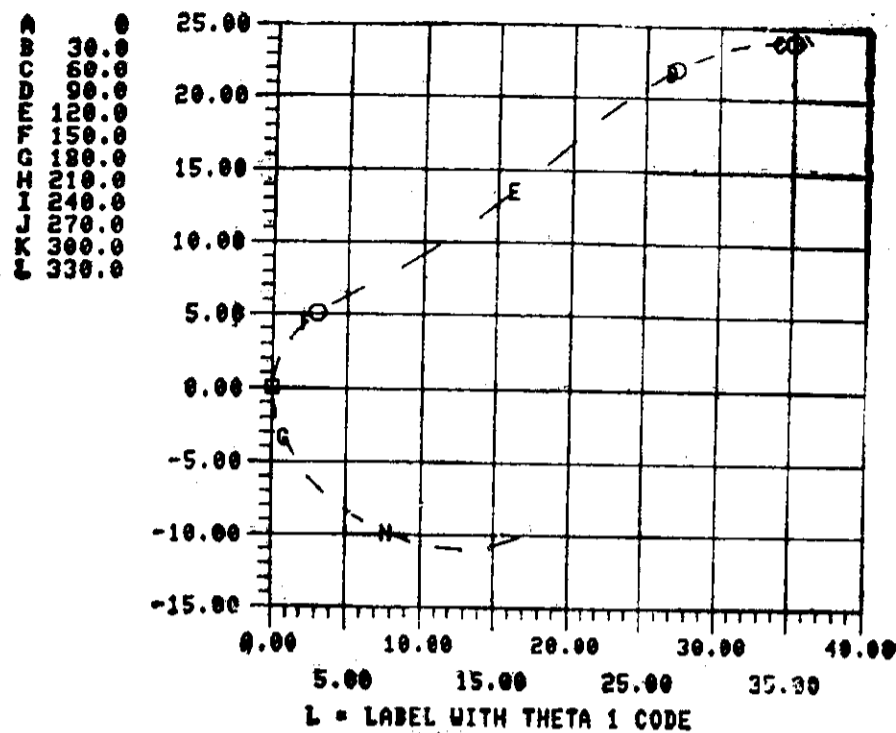


图 3.61 例 3.6 中四杆运动发生器的最终解的连杆曲线

表 3.13 “CHOOSE”子程序——用人机对话的“LINCAGES”程序包来综合的(例 3.6 的)四杆运动发生器

SOLUTION SET	SIDE 1	SIDE 2
	2	2
BETA 2	340.00	18.00
BETA 3	281.35	60.93
BETA 4	247.13	40.06
MX	16.16	-4.66
MY	7.17	23.63
KX	.85	13.98
KY	10.54	15.51
INPUT LENGTHS (LINKS 1 AND 3)	15.68	20.34
COUPLER SIDE LENGTHS (LINKS 2 AND 4)	10.58	20.88
***** TOGGLES IF SIDE TWO DRIVEN *****		
MINIMUM TRANSMISSION ANGLES	ROCKER	ROCKER
COUPLER ANGLES (PAB AND PBA)	115.31	27.95
COUPLER LENGTH (LINK 5)		14.04
GROUND LENGTH (LINK 6)		26.54
MAXIMUM LINK LENGTH RATIOS		
TOTAL (LINKS 1-6)		2.51
FOUR BAR (LINKS 1,3,6)		1.30
COUPLER (LINKS 2,4,5)		1.87

这个实例代表一种典型的设计情况,这就是有很多约束,以致很难建立部分数学模型。设计师“在环路中”还有可能考虑未规定的约束,特别是在解的总数可以控制和有一次可勘查很多解的图示方法时更是如此,如 LINCAGES 程序包就可那样应用。

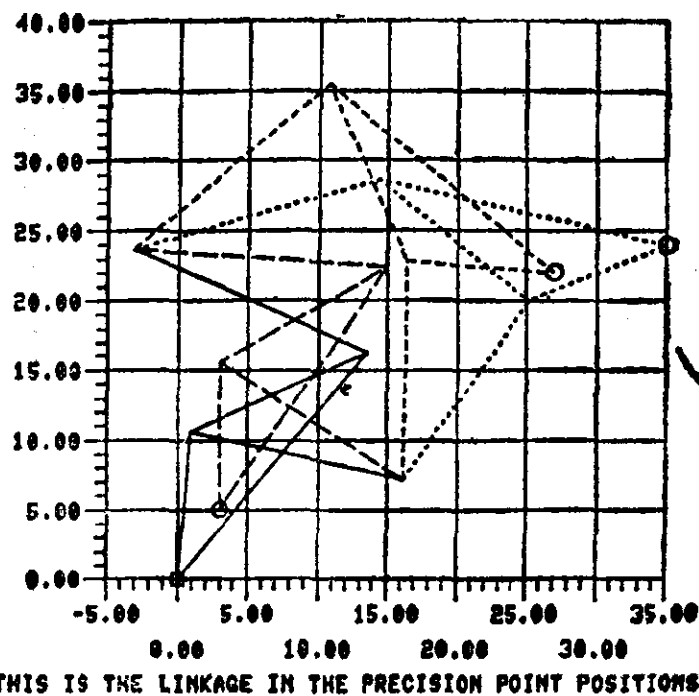


图 3.62 图 3.60 中的连杆机构处于其四个精确点位置

附录A3.2

运动发生器双杆组按运动平面的五个有限分离位置的标准型综合，即布尔梅斯特点对的计算程序^①。所用标记见图 3.2。

预定量： $R_j (j=1, 2, 3, 4, 5)$

$\alpha_j (j=2, 3, 4, 5)$

计算： $\delta_j = R_j - R_1 (j=2, 3, 4, 5)$

计算 $\Delta_k (k=2, 3, 4)$ ，按公式(3.8)进行

$$\Delta_1 = -\sum_{k=2}^4 \Delta_k$$

计算：

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (e^{i\alpha_3} - 1) & \delta_3 \\ (e^{i\alpha_1} - 1) & \delta_5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \delta_2 & (e^{i\alpha_2} - 1) \\ \delta_5 & (e^{i\alpha_1} - 1) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1' = -\Delta_2' - \Delta_3' - \Delta_4'$$

$$\Delta_k = |\Delta_k|, (k=1, 2, 3, 4); \quad \Delta_k' = |\Delta_k'|, (k=1, 2, 3)$$

用上面得到的(现为已知)量，按下列顺序计算未知量 $\tau = \tan \frac{\beta_2}{2}$ 的五次多项式的实系数(上方横线表示复数共轭式)：

$$a' = \overline{\Delta_1 \Delta_2}, \quad a'' = \overline{\Delta_2 \Delta_3}, \quad a''' = \overline{\Delta_3 \Delta_4}, \quad a'''' = a'' - a'''$$

$$a = a' a''''$$

$$b' = \overline{\Delta_1 \Delta_2}, \quad b'' = \overline{\Delta_1 \Delta_2'}, \quad b''' = \overline{\Delta_1 \Delta_3}, \quad b'''' = \overline{\Delta_1 \Delta_3'}$$

$$n = \sum_{k=1}^3 \Delta_k^2 - \Delta_4^2, \quad n' = -\Delta_4^2 + \sum_{k=1}^3 (\Delta_k')^2$$

$$b = b' a'' - b'' a''' + b''' n' - b'''' n$$

$$c' = \overline{\Delta_1 \Delta_3}, \quad c'' = \overline{\Delta_1 \Delta_3'}, \quad c''' = \overline{\Delta_2 \Delta_3}, \quad c'''' = \overline{\Delta_2 \Delta_3'}$$

① 使读者能编出五个精确位置的程序。

$$\begin{aligned}
c &= b'c' - b'c'' + c''n' - c''n \\
d' &= \overline{A_2A_2'}, \quad d'' = c' - c'', \quad d = d'd'' \\
u &= \overline{A_3A_3'}, \quad f' = \overline{A_1A_2'}, \quad f = f'u \\
h' &= \overline{A_1A_2}, \quad h = h'u, \quad k = f - \overline{h}, \quad k = |k| \\
g' &= \overline{A_1A_1'}, \quad g'' = \overline{A_2A_2'}, \quad g''' = g' + g'' \\
g_y &= u_x g_y''' + u_y g_x''', \quad v = i g_y (4k) \\
m &= -4g_y^2 - 2k^2, \quad p = a\overline{d} \\
q &= a\overline{c} + b\overline{d} + k^2, \quad s = a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{d} + v \\
t &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + m), \text{ 式中 } a = |a|, \text{ 等等}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= -6p_y - 4q_y - 2s_y \\
A_2 &= -15p_x - 5q_x + s_x + 3t \\
A_3 &= 20p_y - 4s_y, \quad A_4 = 15p_x - 5q_x - s_x + 3t \\
A_5 &= -6p_y + 4q_y - 2s_y, \quad A_6 = -p_x + q_x - s_x + t
\end{aligned}$$

验算: $A_0 = p_x + q_x + s_x + t = 0$

计算 $a_j = A_{j+1}/A_0, (j=0, 1, 2, 3, 4)$

用任何一种解多项式的程序解下列实系数五次方程, 求未知量 τ 的所有五个根, 包括实根和复根:

$$\tau^5 + a_4\tau^4 + a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0 = 0$$

验算: 应该有一个根是:

$$\tau_0 = \frac{1 - \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2}$$

这是一个平凡根。舍去这个平凡根和所有复根。保留剩下的实根:

$$\tau_1, \tau_2 \quad \text{或} \quad \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$$

(如果没有实根保留下来, 则解不存在。就返回去采用不同的给定量。)

用实根计算 β_2 如下:

$$\beta_2 = \arg(1 - \tau_u^2 + i2\tau_u) \text{ (最多四个不同的值)}$$

式中

$$u = 1 \text{ 或 } 2 \text{ (如果有两个实根 } \tau_1, \tau_2)$$

和 $u = 1, 2, 3 \text{ 或 } 4 \text{ (如果有四个实根 } \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$

取 β_2 的一个值, 按表 3.1 解出 β_3 和 β_4 。然后用方程组 (3.3) 中的任何两个方程算出 W 和 Z 。对所有 (最多四个) β_2 的值重复这一计算。

这就完成了 (最多四个) 布尔梅斯特点对的计算。

习 题

3.1 几个不同的四杆机构示于图 P3.1。

- 求指定四杆机构的两个同源机构。
- 比较两个同源机构与母四杆机构的连杆曲线。
- 作出 (具有相同轨迹的) 单自由度齿轮五杆轨迹发生器机构。

3.2 图 P3.2 表示四个滑块-曲柄机构。求下列图内滑块-曲柄机构的同源机构并比较其连杆曲线:

- 图 P3.2a;
- 图 P3.2b;

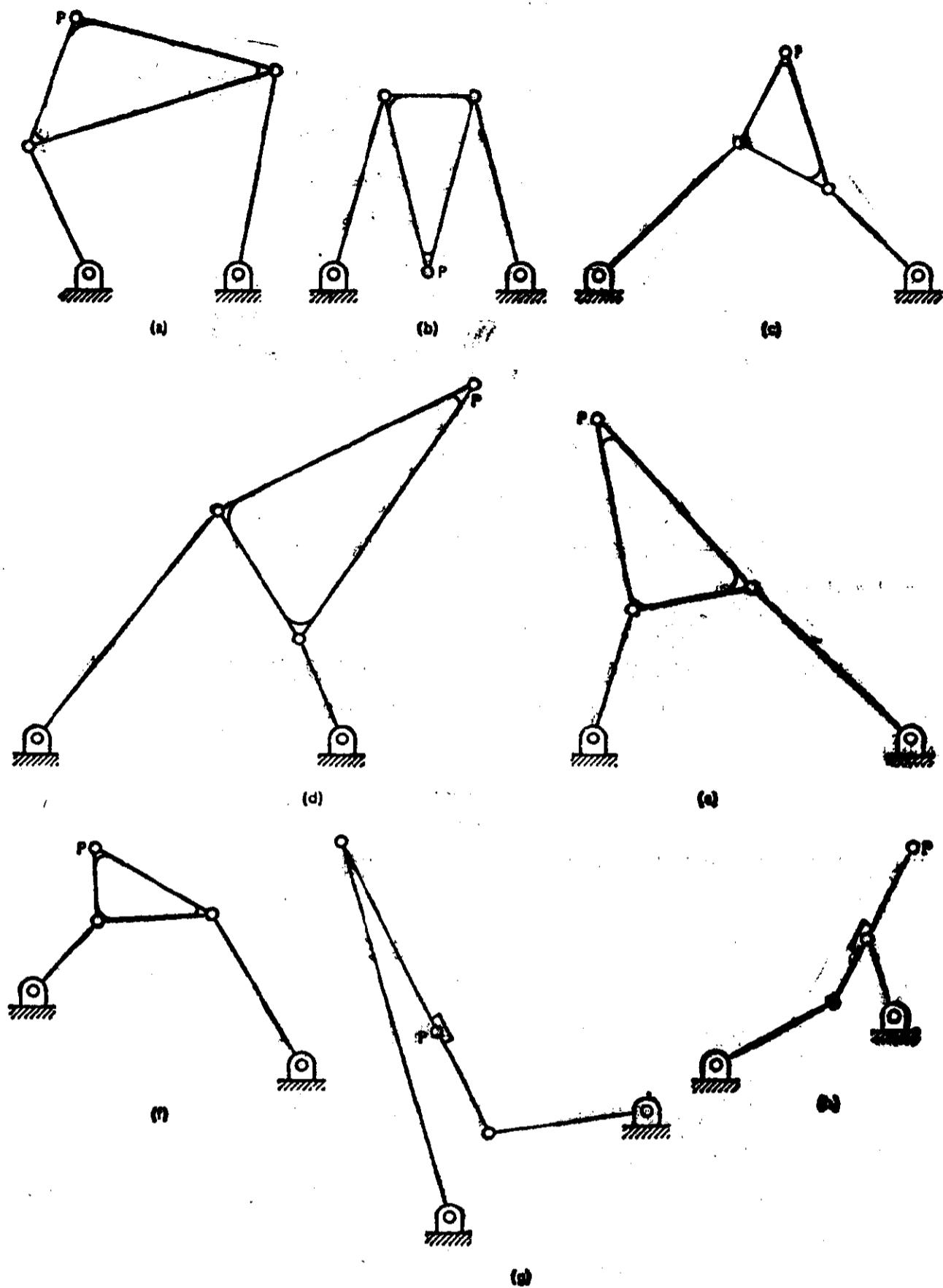


图 P3.1

(c) 图 P3.2c;

(d) 图 P3.2d.

3.3 图 P3.3 表示几个四杆机构,它们构成六杆机构的基本部分,该六杆机构的轨迹与四杆机构上点 P 的轨迹相同,但它的连杆不转动。试画出这些六杆机构,并比较四杆与六杆机构的轨迹。

3.4 希望综合一个六杆运动发生器来把立体音响装置在不用时从架子上移到能关闭的贮藏柜内。为了避免唱盘倾倒和整个音响设备从移动的托板上滑下来,连杆不容许转动。图 P3.4 表示一个四杆机构,它综合的条件是定销轴限制在 x 方向从 1.5 到 4.0, y 方向从 -5.0 到 -7.0 的区域内。规定的精确点见第 68 页上的表。以这一合格的四杆机构为基础设计一个六杆机构,其连杆要求不会使唱盘翻转。

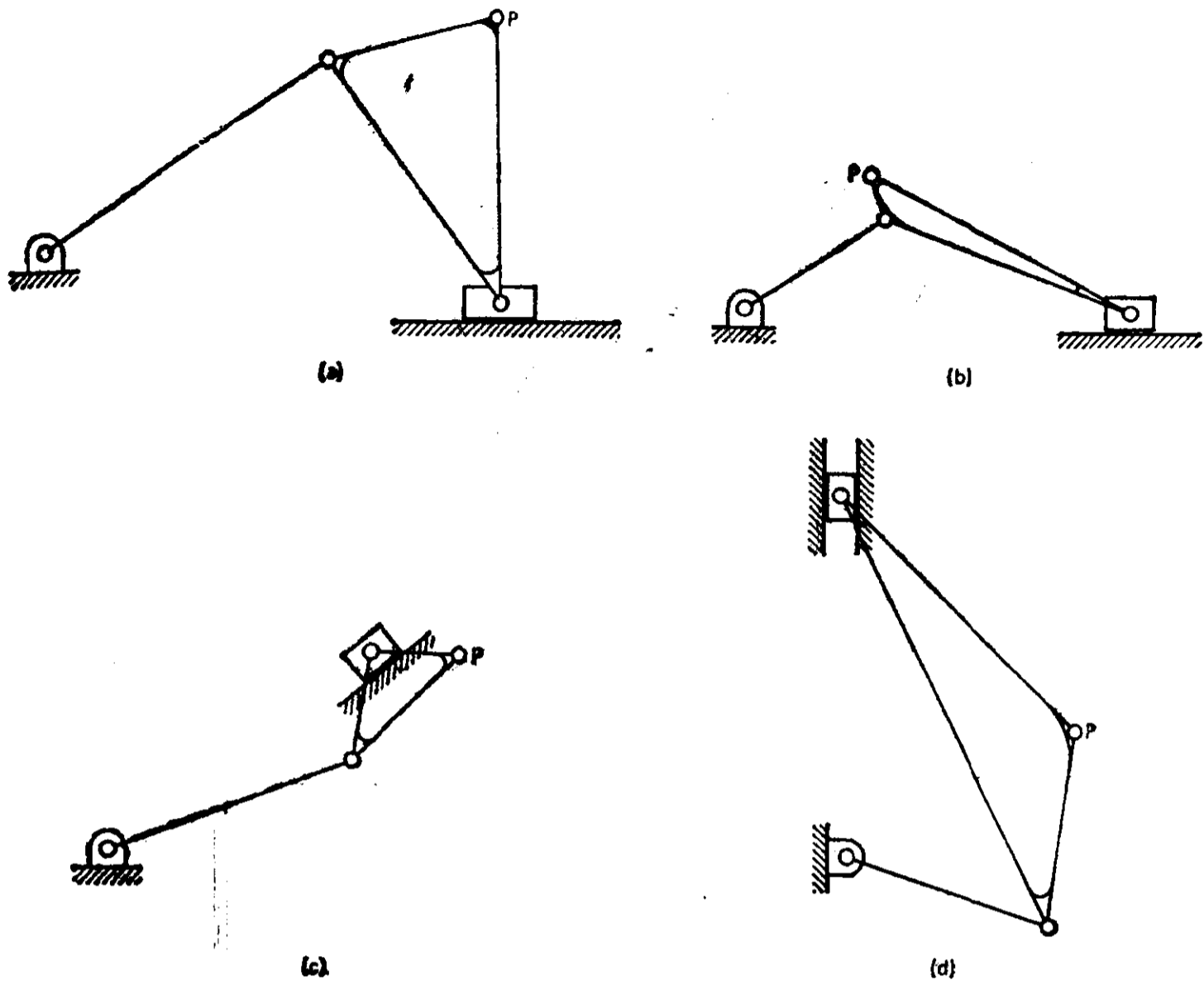
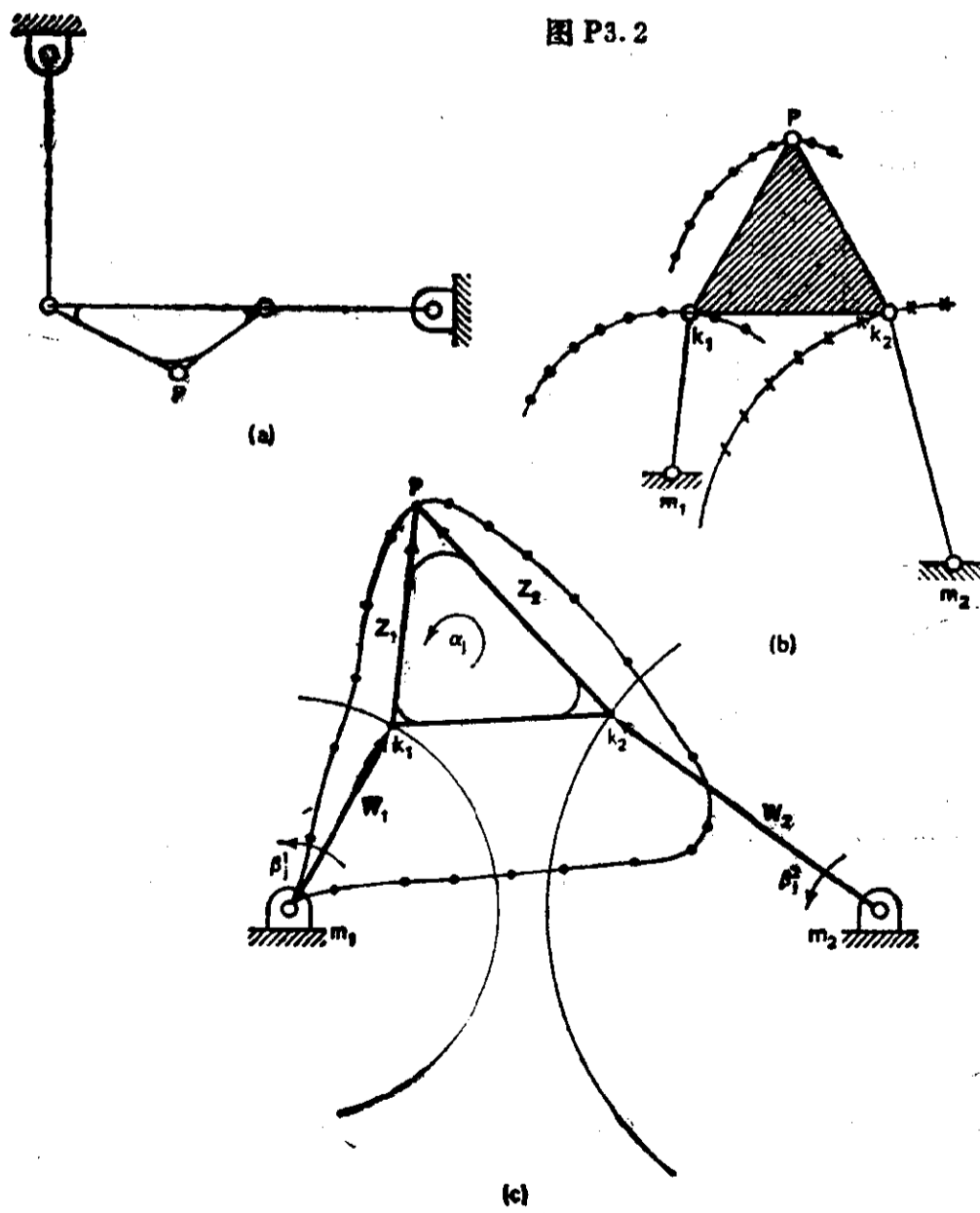


图 P3.2



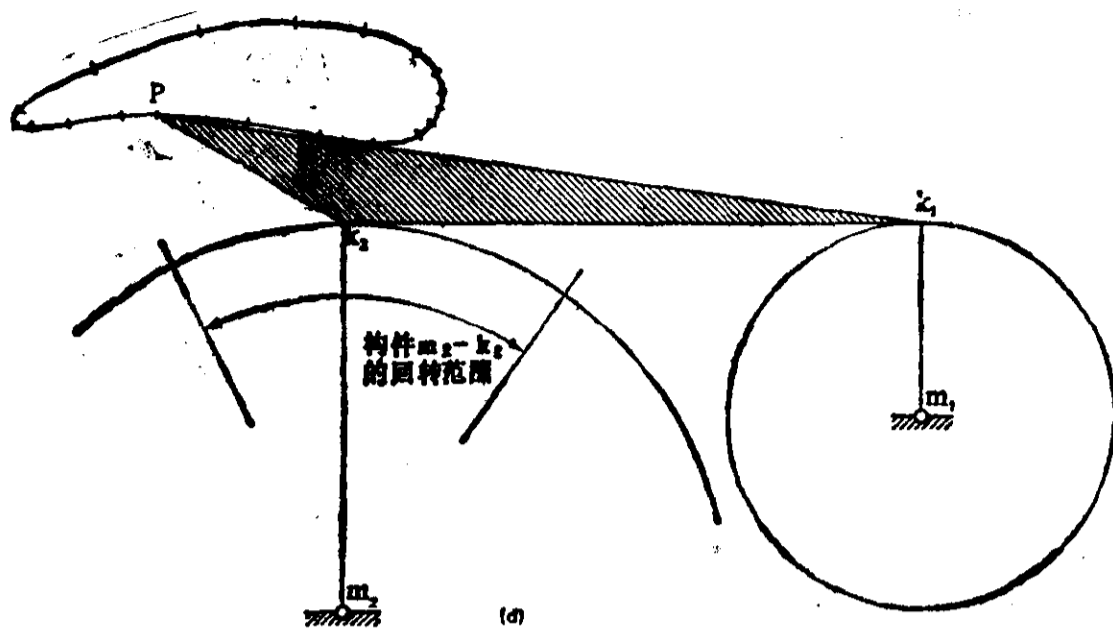


图 P3.3

序号	精确点		连杆角
	x	y	
1	16	-4	0°
2	12	0	20°
3	7	2	50°
4	0	4	95°

3.5 要设计一个六杆机构来把可移台式磨床从处于钳工桌上的初始位置举起，送到靠汽车房墙的终止位置。图 P3.5 表示一个综合成的四杆机构处于所要求轨迹的中间位置。根据本章建立的同源机构理论，设计一个六杆机构来沿轨迹无转动地搬动该磨床。

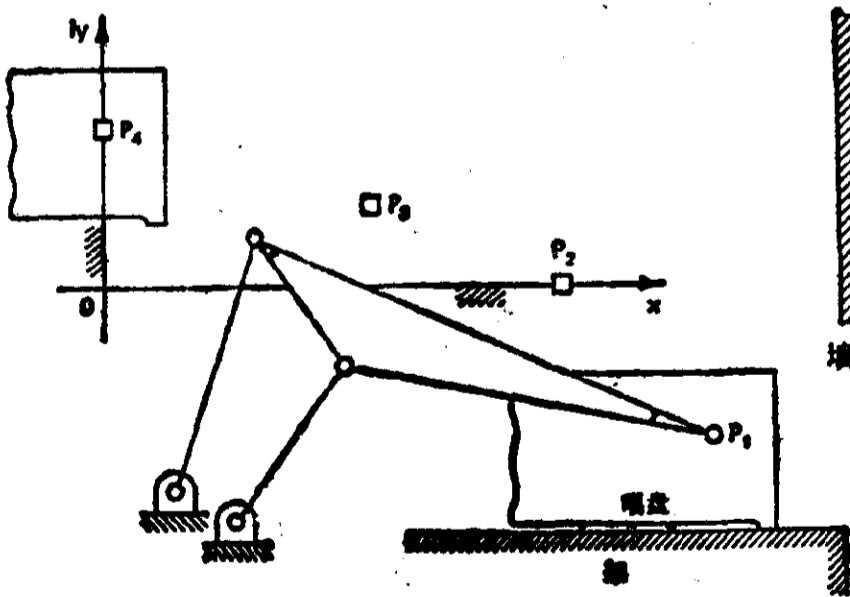


图 P3.4

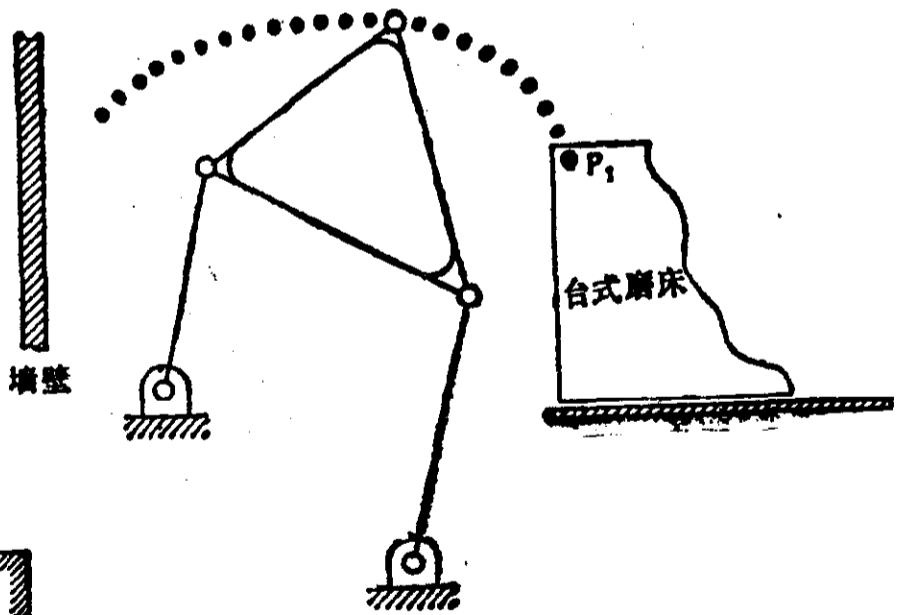


图 P3.5

3.6 设计一个六杆平行运动发生器将小船从小汽车顶上举起放到固定在汽车房椽子下的架上。图 P3.6 表示一个可以采用的四杆机构，那是按下列运动生成的预定位置综合的：

序号	精确点		连杆角
	x	y	
1	0	0	0°
2	1.8	2.9	36°
3	3.7	3.3	48°
4	6.0	3.0	60°

将这一四杆机构用到你的求解过程中去。

3.7 根据图 P3.7a 中已综合成的四杆机构,全部用回转副设计一个六杆近似双停歇机构(代替凸轮连杆机构)。注意,该四杆机构描绘了一个有两段圆弧的对称连杆曲线^[126]。输出杆的角度变化应该是 15° (见图 P3.7b),而输出杆上最小的传动角是 65° 。

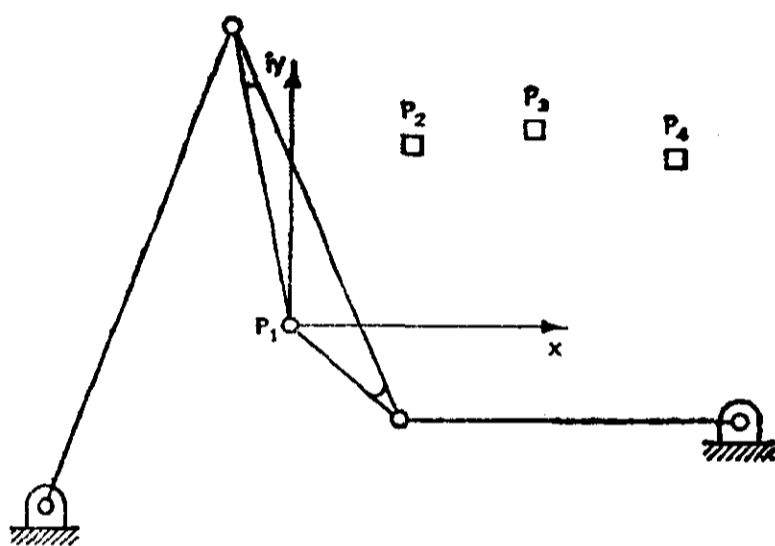


图 P3.6

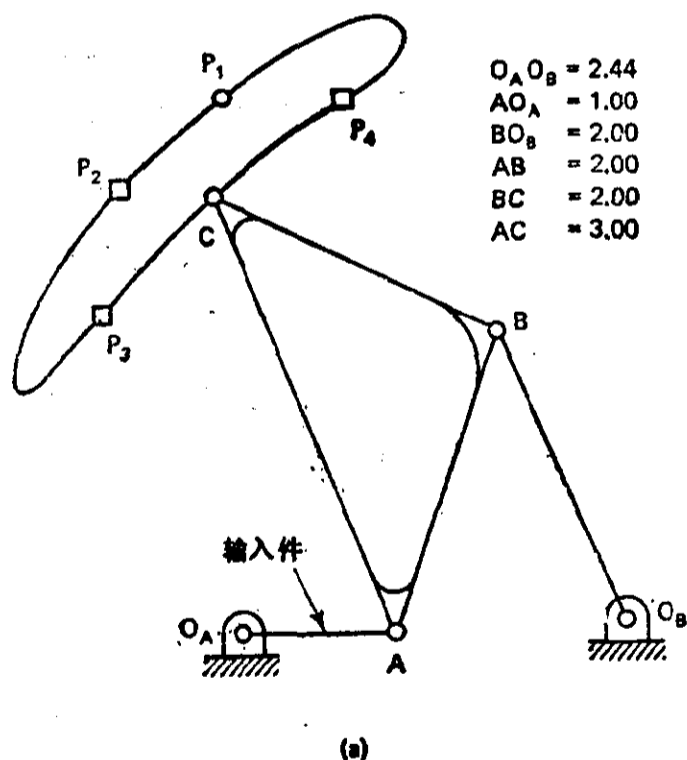


图 P3.7

3.8 设计一个带回转副的六杆机构,以代替凸轮双停歇机构。其输出杆应摆动 20° ,而两个近似的停歇期应为 100° 和 35° 输入杆转角。图 P3.8 表示基本四杆机构(带预定时标的轨迹生成)的预定轨迹和五个精确点及相应的输入定时:

序号	精确点		输入曲柄转角
	x	y	
1	0	0	0°
2	-26.4	-5.0	100°
3	-21.0	-7.2	220°
4	-7.0	-4.0	240°
5	0.0	-4.25	255°

(a) 按这些精确点综合一个四杆带预定时标的转速发生器。(如果你想仅按四个精确点来综合, 则删去第四个点。)

(b) 设计该停歇机构的其余部分, 使输出杆仅摆动 20° 。

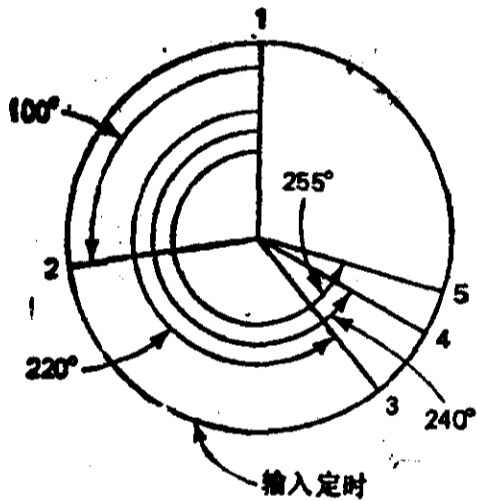
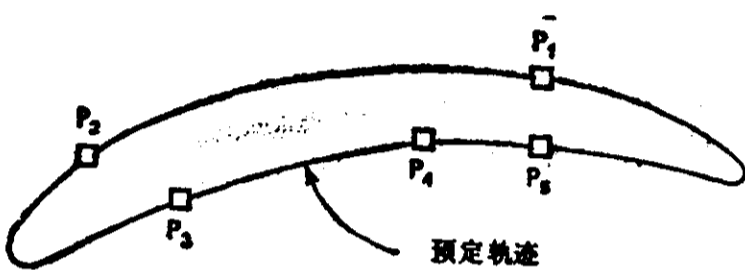


图 P3.8

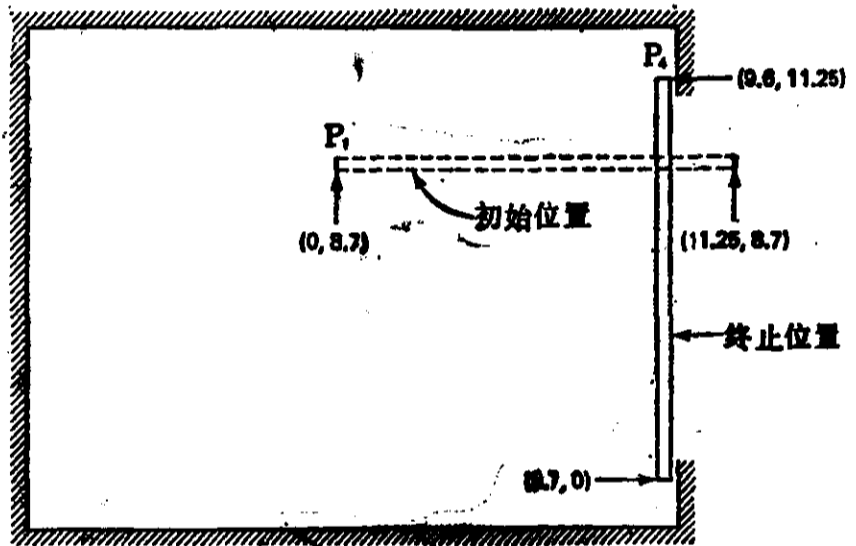


图 P3.9 蒸压器侧视图。门是 11.25 单位, 开口为 10.5 单位。忽略门的厚度

3.9 要用一个小型蒸压器来对医疗器械消毒。当蒸压器处于开启状态时, 它的门必须停在器内。又必须用一个机构从内部关闭这个门, 以便用垫圈形成一层密封, 允许内部的蒸汽压力达到 15psi, 迫使门停留在关闭状态。图 P3.9 表示门在运动中受到的空间限制及其起始与终止位置。试综合一个能打开与关闭该蒸压器门的四杆机构。推荐的精确点为:

序号	精确点		连杆角
	x	y	
1	0	8.7	0°
2	2.8	11.125	-40.62°
3	7.5	11.6	-79.24°
4	9.6	11.25	-90.00°

3.10 为题 3.9 中的连杆机构选取第五个精确点,并将按五个点综合的最好机构与按四个点综合的机构作一比较。推荐的附加精确点为: $x=0.8135, y=9.5640$, 连杆角 $=-16.8842^\circ$ 。

3.11 综合一个四杆机构,能将一片小门由汽车头灯前的垂直位置移到头灯上方的水平位置。图 P3.10 表示该门在其运动过程中的五个精确位置。你综合的连杆机构必须适应其有效空间 (在长方形内)。虽然这些精确点沿直线轨迹,但由于滑块机构在长期使用中会发生磨损,所以只要可能就要避免采用。试用以下精确点(如果仅要求四点,则可跳过第三或第四精确点):

序号	精确点		连杆角
	x	y	
1	2.0	8.0	0°
2	4.0	8.0	30°
3	6.0	8.0	50°
4	8.0	8.0	70°
5	10.0	8.0	90°

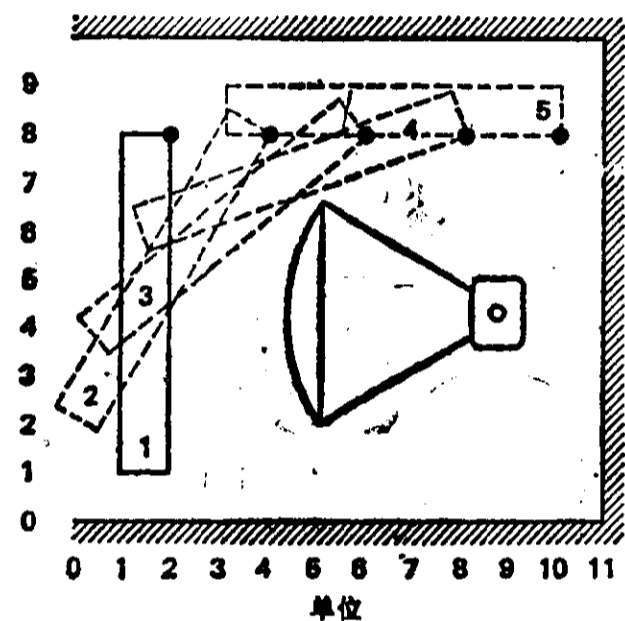


图 P3.10 连杆转角为 $0^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ, cw$

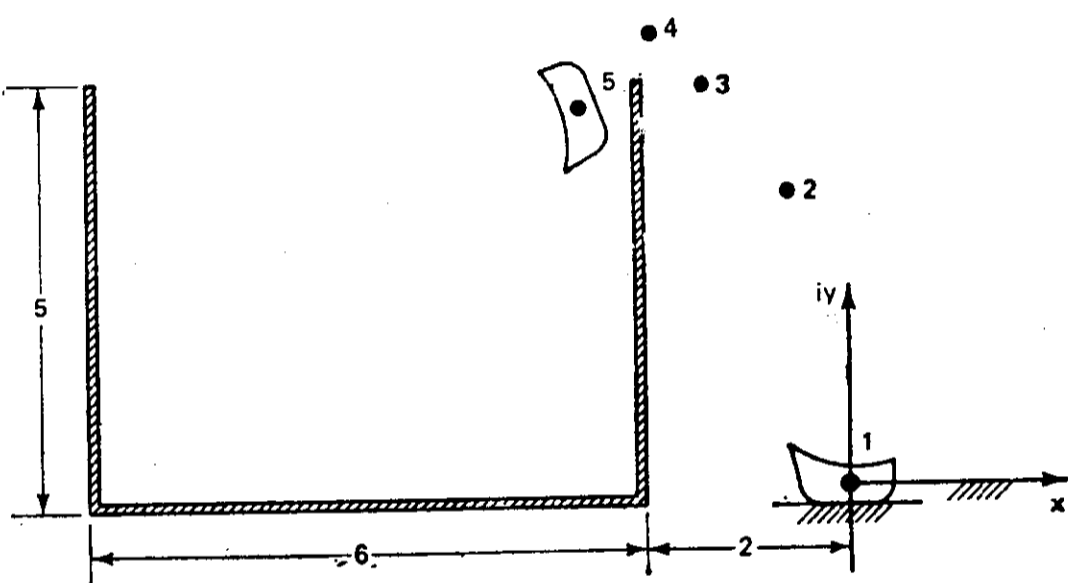


图 P3.11

3.12 图 P3.11 表示一个要把物料倒进大容器的小斗及其中心的要求轨迹。综合一个四杆机构来举起小斗并将斗内物料倒入容器。其定销轴固定在容器上。可按四个精确点(不包括精确点 3)或按全部五个精确点进行综合。

序号	精确点		连杆角
	x	y	
1	0	0	0°
2	-0.5	4	5°
3	-1.5	5	5°
4	-2.0	5.5	60°
5	-2.5	5	120°

3.13 综合一连杆机构从地面 $(2, 0)$ 处取起一物品, 并平稳地将它移动、转动, 最后在 $(0, 2)$ 处放下(见图 P3.12)。选 $(2, 1)$ 和 $(1, 2)$ 作为附加的精确点, 连杆的相应转角分别为 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 。定销轴限制在原点 $(0, 0)$, 起始点 $(2, 0)$ 和终点 $(0, 2)$ 所形成的三角形内。

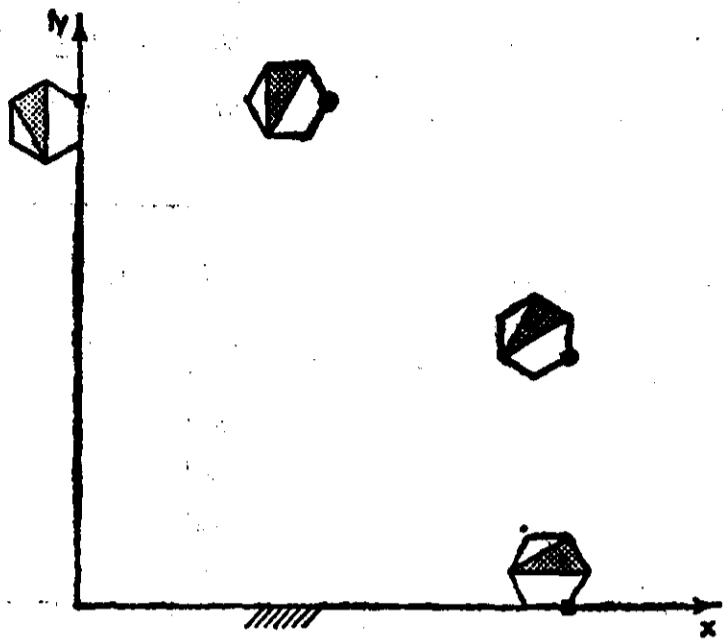


图 P3.12

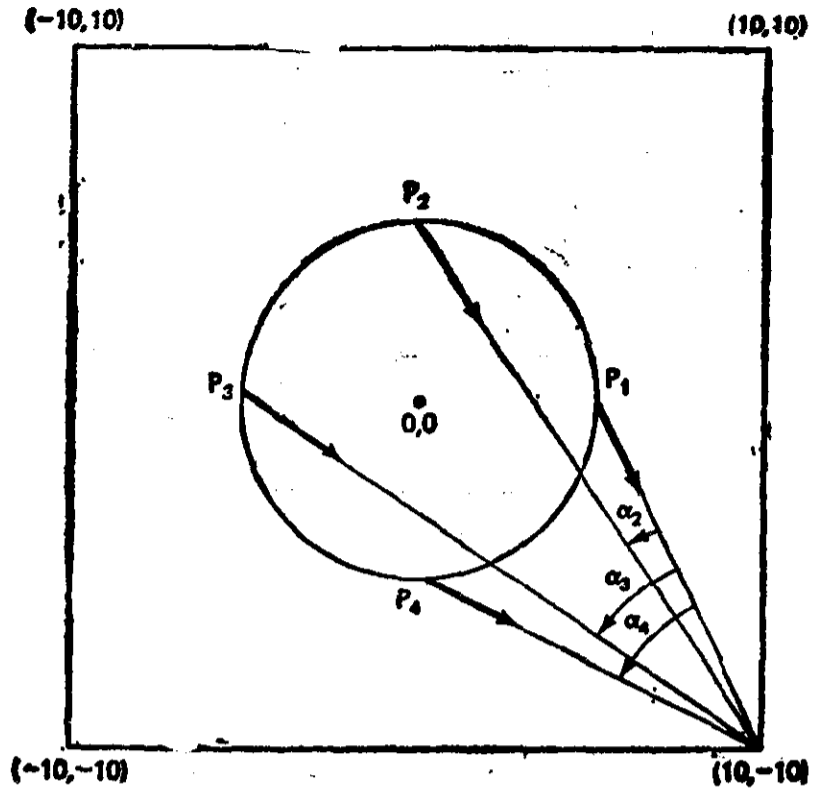


图 P3.13

3.14 图 P3.13 表示一个 20×20 单位的正方形, 原点在其中心。正方形内有一半径为 5 单位的圆, 其圆心在原点。设计一个四杆运动发生器, 在其连杆三角形内包含箭头, 并使箭头指向右下角。定销轴在正方形内。四个规定的精确点为:

序号	精确点		连杆角
	x	y	
1	5	0	0°
2	0	5	7.12°
3	-5	0	29.74°
4	0	-5	36.86°

3.15 为题 3.14 选取第五个精确点, 求能给出相似结果的连杆机构 [我们推荐第五精确点为 $(-2.38, 4.02)$, 连杆角为 13.44°]。

3.16 一个障碍物阻挡着物体的运动道路, 如图 P3.14 所示。用所给精确点综合一个四杆机构, 以使物体越过障碍物。

序号	精确点		连杆角
	x	y	
1	0	0	0°
2	1	2	45°
3	2	3	0°
4	3	2	315°

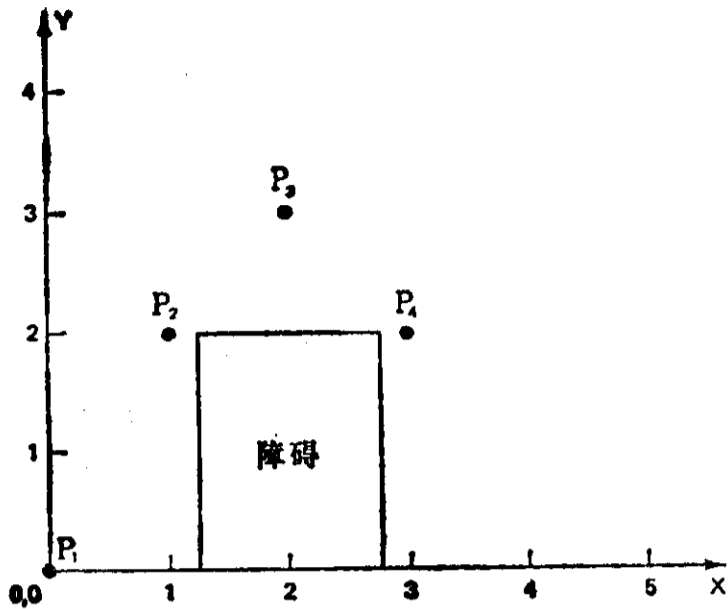


图 P3.14

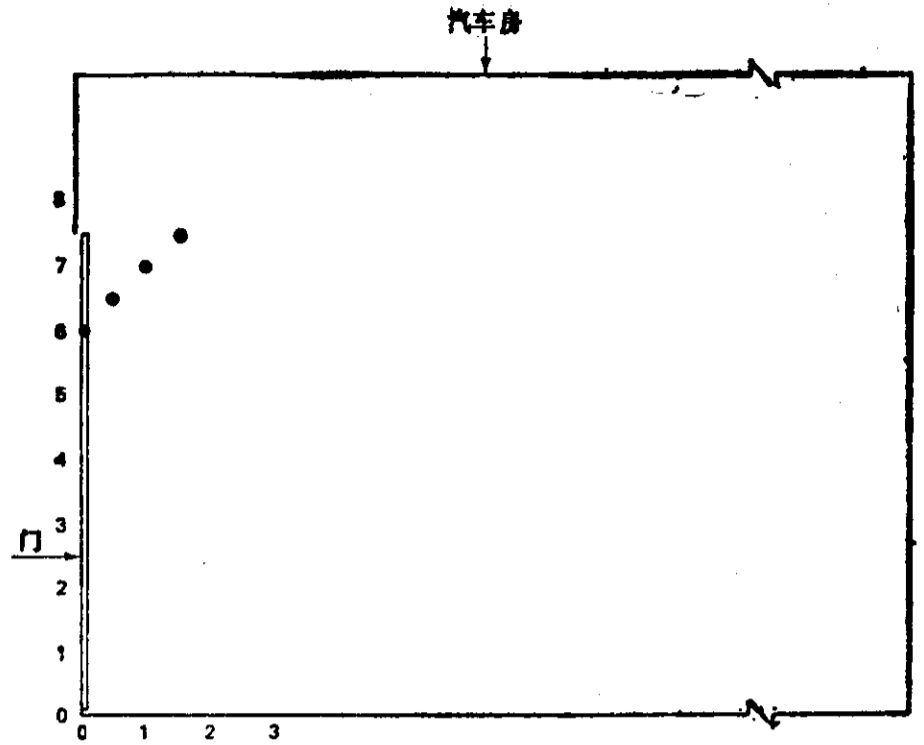


图 P3.15

3.17 给题 3.16 增加第五个精确点, 求四杆机构解。推荐的点为 (0.799, 1.42), 连杆角为 59° 。

3.18 综合一个能开启图 P3.15 中汽车库大门的四杆机构。给定下列精确点和门的角位置:

序号	精确点		门的角度
	x	y	
1	0	6	90°
2	0.5	6.5	60°
3	1	7	30°
4	1.5	7.5	0°

(注意这些点在一条直线上。)

3.19 图 P3.16 [(a) 正视图, (b) 侧视图] 取自美国专利 4,084,411 (A. B. 梅菲尔德) (A. B. Mayfield)。这一装置是径向偏心联轴器, 在轴间传递匀角速度。两根轴 (12 和 13) 在运转中可以偏移, 而连杆机构系统保持动力平衡。

- 确定这一装置的自由度。
- 简要描述这一机构的动作。
- 为什么设计成这种形式? 你能否作些改进?

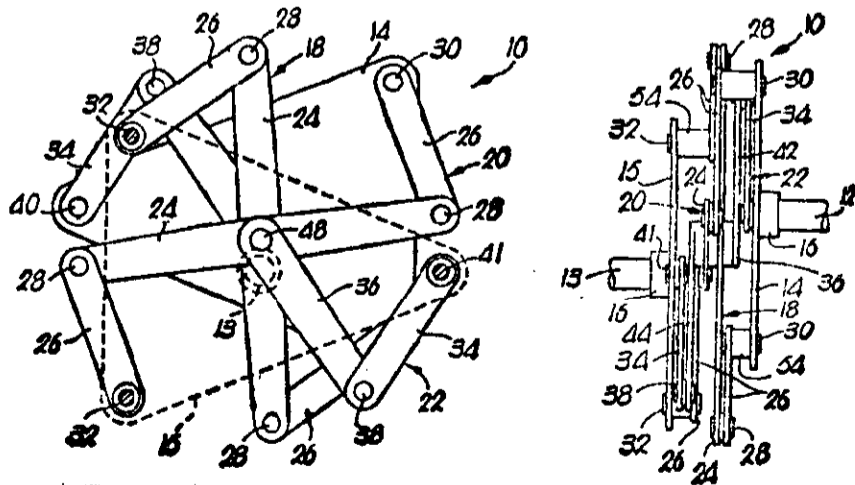


图 P3.16

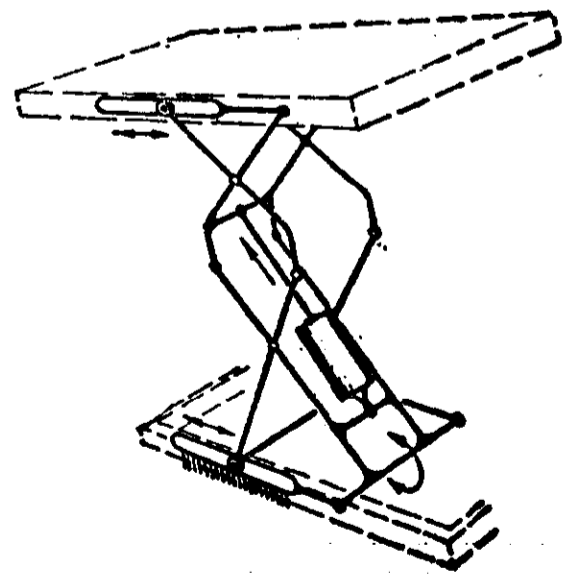


图 P3.17

3.20 图 P3.17 表示一个液压驱动工业升降台机构。该机构举起一台面 (4ft×8ft)，台上最多可放 2500 lbf 的重物，升到 4ft 高。机构和台面可折叠进 4ft×8ft×1ft 箱形空间内。

- (a) 确定这一机构的自由度。
- (b) 简要叙述这一机构如何工作及为什么能工作。

3.21 图 P3.18 表示平移托架连杆机构的一种型式。

- (a) 确定这一机构的自由度。
- (b) 简要叙述这一机构如何工作及为什么能工作。
- (c) 你能为此任务设计一种不同的机构吗？

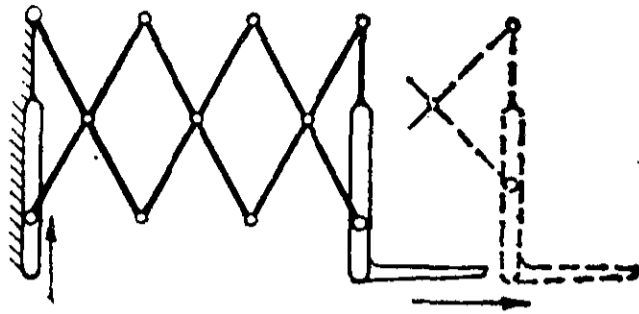


图 P3.18

3.22 要设计一种铰链，能在箱盖关闭时完全进入箱内。图 P3.19 表示一种推荐的平行四边形的六杆机构设计^①。

- (a) 这是哪一类六杆机构？
- (b) 写出使箱盖相对于箱体运动的运动发生器标准型综合方程。
- (c) 按你所选取的一组四个精确点，设计一个六杆机构通过你的那组特定的精确点。

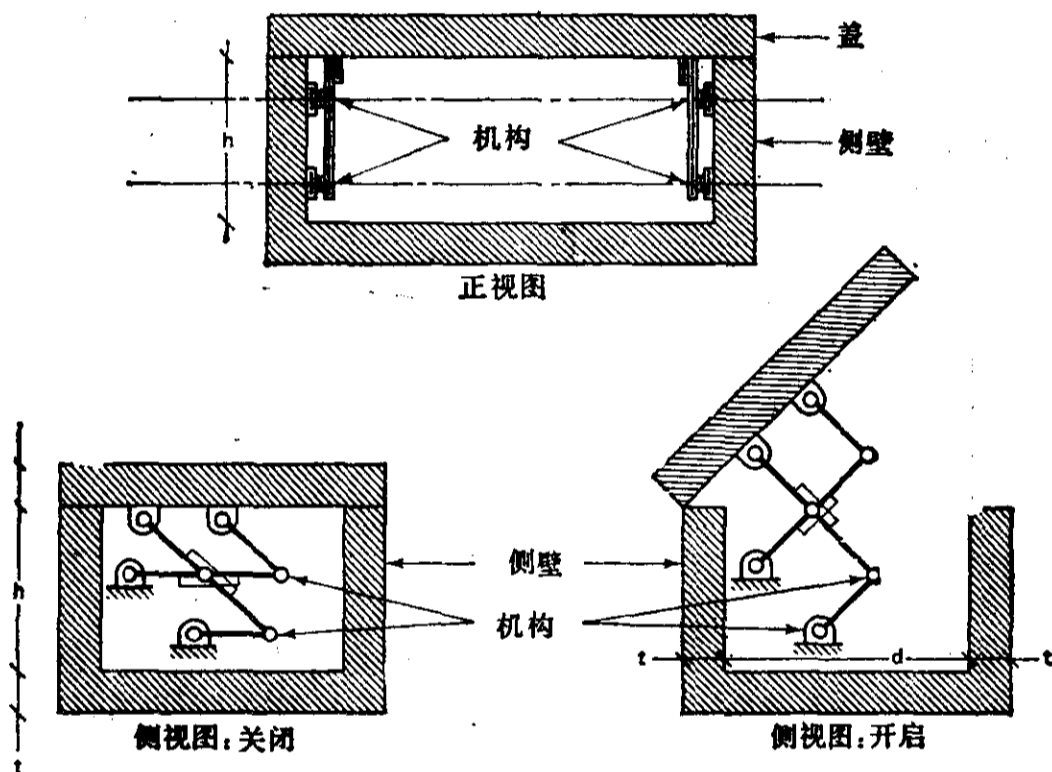


图 P3.19

3.23 每个高尔夫球手都知道击球(即发球)必须要好，也知道前后一致在打好一场球中起的重要作用。考虑到这些需要，就设计了一个在发球区用的向球座自动放球的机构^②。这一机构能自动地将高尔夫球放到球座

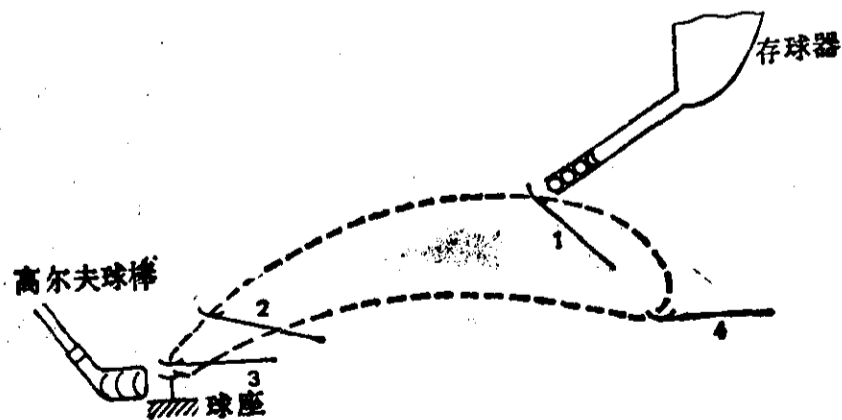


图 P3.20

① 由 T. 卡尔森(T. Carlson)推荐。

② 本题始出于 J. 彼得(J. Peter)、S. 雅辛(S. Yassin)和 J. 阿纳尔德(J. Arnold)。

上以帮助练习击球。因为有了它，高尔夫球手就不必改变姿势，所以有助于前后一致。机构的任务是从球库取一个球，将其轻轻地放到球座上，然后让开退回而不把球碰出球座(见图 P3. 20)。曲柄-摇杆运动发生器四杆机构是理想的。从图上量出精确点并为此任务综合一个四杆机构。因为假设该机构为永久设置，所以允许定销轴低于地面。在其停留位置(位置 4)上，整个机构应该充分地让开高尔夫球手晃动球棒的范围。

3.24 家具木工采用了一种有趣的机构——Soss 隐蔽铰链^[264](见图 P3.21)。整个机构很紧凑，嵌在柜子的木壁和门内。图 P3.21b 说明它能开启 180°。

- (a) Soss 铰链是哪一类连杆机构(见第一章)?
- (b) 写出该机构的标准型综合方程。
- (c) 这一设计与图 P3.19 中所示的类型相比情况如何?

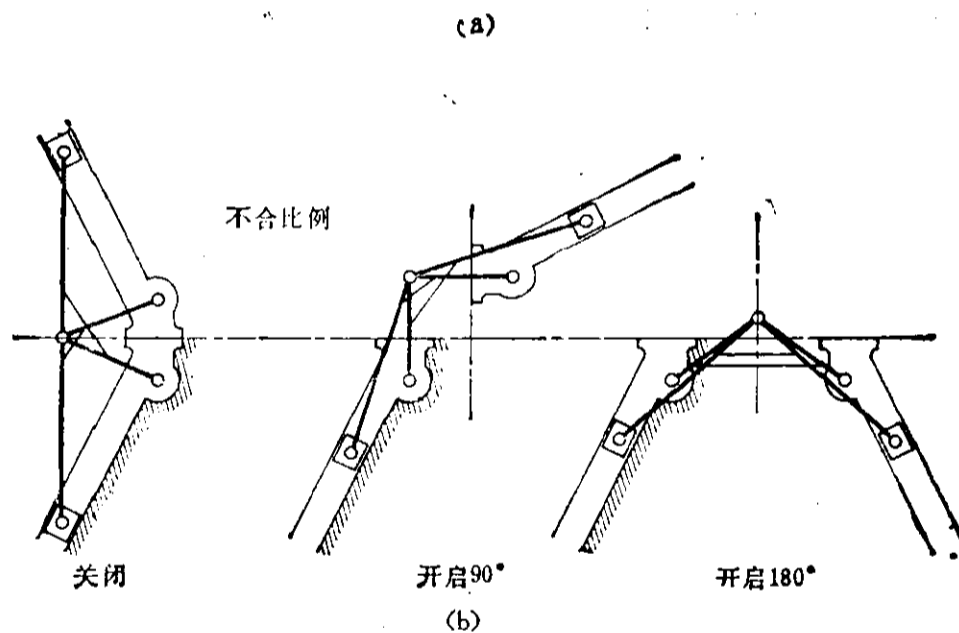


图 P3.21

3.25 图 P3.22 表示用作车窗导引的一种机构^[275]。为了使车窗玻璃恰当地进入门腔，在 P 沿规定的轨迹运动时，窗玻璃的转动应最小。

- (a) 证明该机构为单自由度。
- (b) 这是哪一类连杆机构?
- (c) 写出该机构的标准型综合方程。
- (d) 综合出一个能满足你所选定的轨迹及空间约束的这类机构。

3.26 一种窗扇的上锁机构必须设计成用钥匙转动滑块-曲柄机构的输入曲柄，而滑块(窗扇)移动 0.5 in。(见图 P3.23)。该机构的空间限制为：在 $\phi = \phi_{max}$ 时的最大距离 $H = 0.65$ in，在 $\phi = 0^\circ$ 时的最大距离 $L = 1.75$ in。机构在第一位置上的机械效益必须最大，而在 $\phi = \phi_{max}$ 时偏离角 δ 最小。为这一目的设计该滑块-曲柄机构(l_1 , l_2 和 L)。

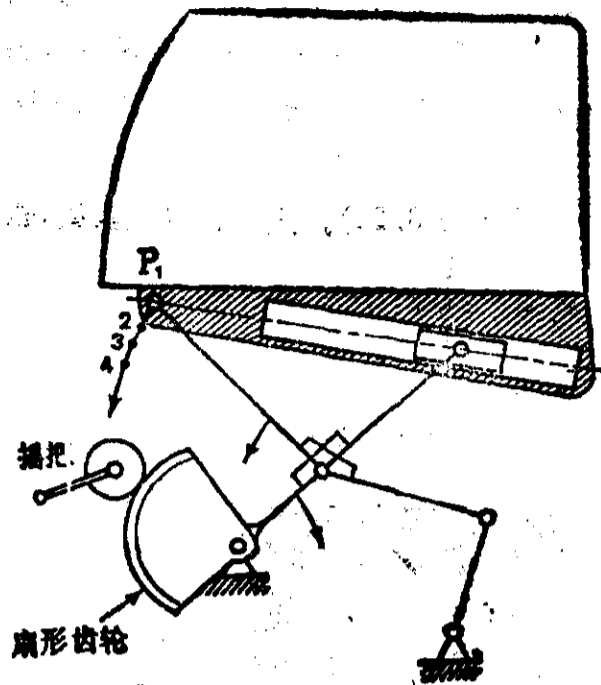


图 P3.22

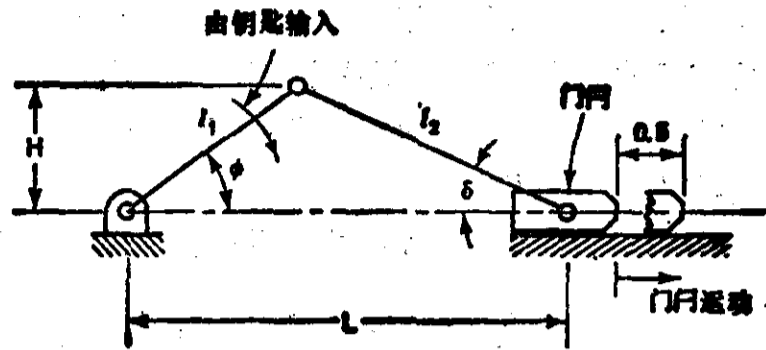


图 P3.23

3.27 建议设计一种图 P3.24 所示类型的 Fowler 襟翼机构^①。其目的是避免现有设计中所采用的滑动接触。规定的运动为沿平均翼弦线性平移机翼宽度的 15%，接着向下转动 40°。附加的约束是机构在所有位置上都在机翼顶面与底面所夹的 10° 角范围内，并且在精确点之间能近似实现以上规定的运动。

- 确定图中连杆机构的自由度数。
- 用图解法校核所示机构是否达到设计目的。
- 写出这一连杆机构四个预定位置的标准型综合方程。
- 说明如何进行综合。对于这一目的有多少个可能的解？
- 设计出图中所示类型的机构。

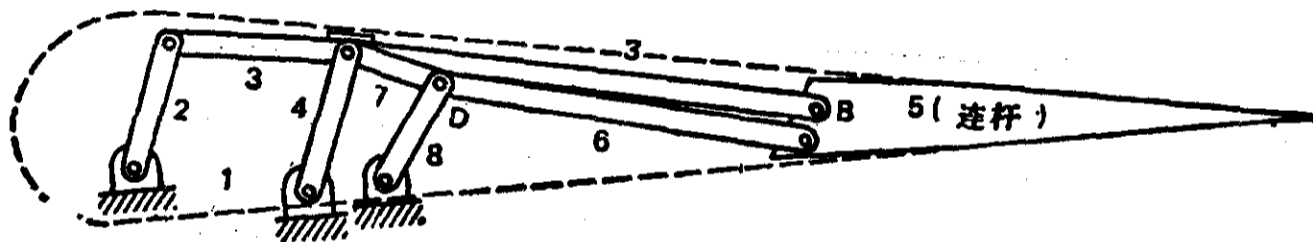


图 P3.24

3.28 需要一个连杆机构来再现人类手指从指根到指尖的运动(图 P3.25)^②。仔细研究之后，选取瓦特 I 型六杆机构(见图 1.9)作为最有希望符合四个预定位置和细窄得足以与手指大小相配的机构。点 P 的位置和杆 6 的转角为：

第一位置：手指完全伸直，与手背平行：

$$\delta_1 = 0 + 0i; \theta_1 = 0^\circ$$

第二位置：手指微弯，似握住一个中等大小的玻璃杯：

$$\delta_2 = 1.475 - 5.650i; \theta_2 = 68^\circ$$

第三位置：手指与姆指接触，似捏一张纸：

$$\delta_3 = 5.350 - 8.100i; \theta_3 = 124^\circ$$

① 本题由 J·布姆加登(J. Boomgaarden)建议^[22]。

② 本题由克维因·J·奥尔森(Kevin J. Olson)建议。

第四位置:手指几乎握成拳,如把住方向盘那样:

$$\delta_4 = 10.350 - 6.650i; \theta_4 = 196^\circ$$

标有 1 的四杆机构(图 P3.25d)必须首先综合。但为此必须把向量 δ_j 和 δ'_j 联系起来。这可通过选取向量 Z 和解以下向量方程来完成:

$$\delta'_j = \delta_j - Z(e^{i\theta_j} - 1), (j=1, 2, 3, 4)$$

选取 $Z = -1.90 + 1.00i$ 。

算出的点 P' 位置与连杆 4 的转角为:

	x	y	α°
δ'_1	0	0	0
δ'_2	1.214	-3.263	44.5
δ'_3	3.217	-4.966	80
δ'_4	6.348	-5.212	133

试为这一任务综合一个瓦特 I 型六杆机构。综合这一机构最困难的方面是将该机构设计得符合人类手指的约束。该机构应该大约 10 cm 长,从指尖到第一个关节为 2.5 cm,第一、二两个关节之间距离为 2.5 cm,第二关节与指根之间为 5.0 cm。第一个关节的高度应不超过 1.25 cm,第二个关节不大于 1.5 cm,指根应不大于 2.0 cm。

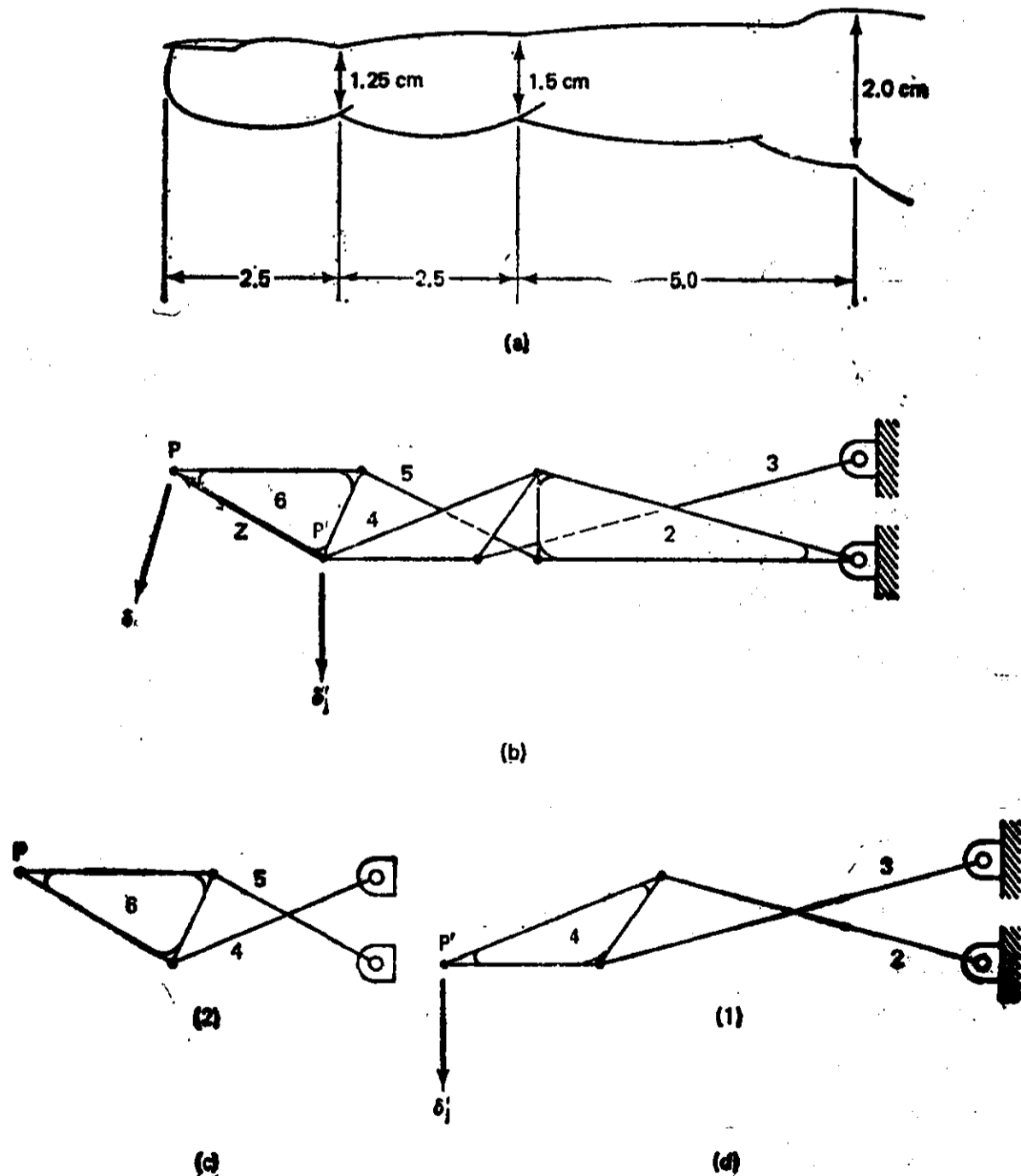


图 P3.25

3.29 图 P3.26 表示在现场看到的四种不同的铲斗装载机简图:

(a) 对每一种铲斗装载机:

(1) 画出不按比例的运动示意图。

(2) 是哪一类机构? 完成什么任务?

(3) 确定该机构的自由度。

(4) 你将如何以标准型方程综合该机构?

(b) 根据观察及从部分(a)得到的了解, 比较每种设计的性能。

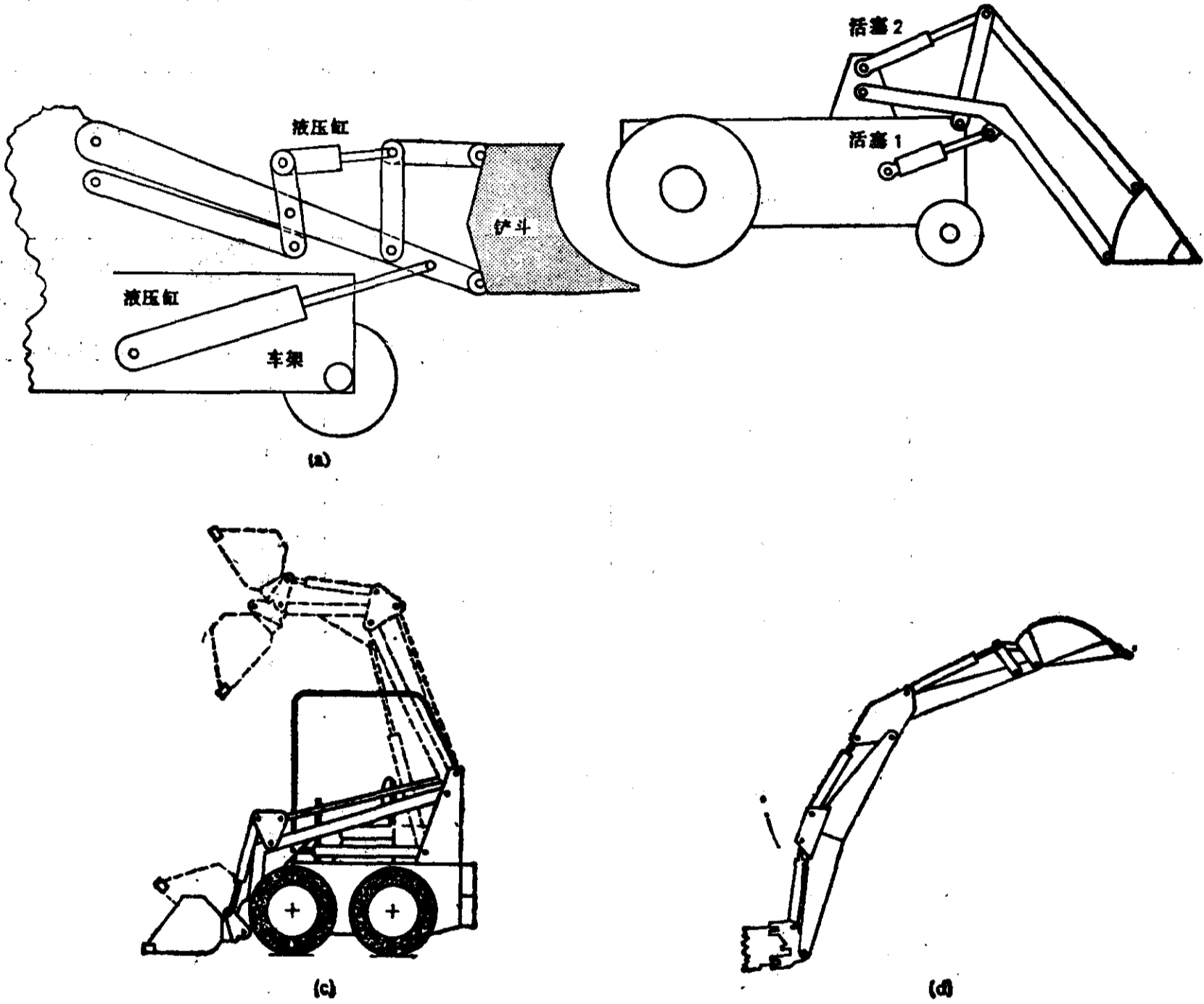


图 P3.26

3.30 图 P3.27 表示台灯机构的两种可供选择的设计。

(a) 对每一种台灯机构:

(1) 画出不按比例的运动示意图。

(2) 是哪一类机构? 完成什么任务?

(3) 确定该机构的自由度。

(4) 你将如何以标准型方程综合该机构?

(b) 根据观察及从部分(a)得到的了解, 比较每种设计的性能,

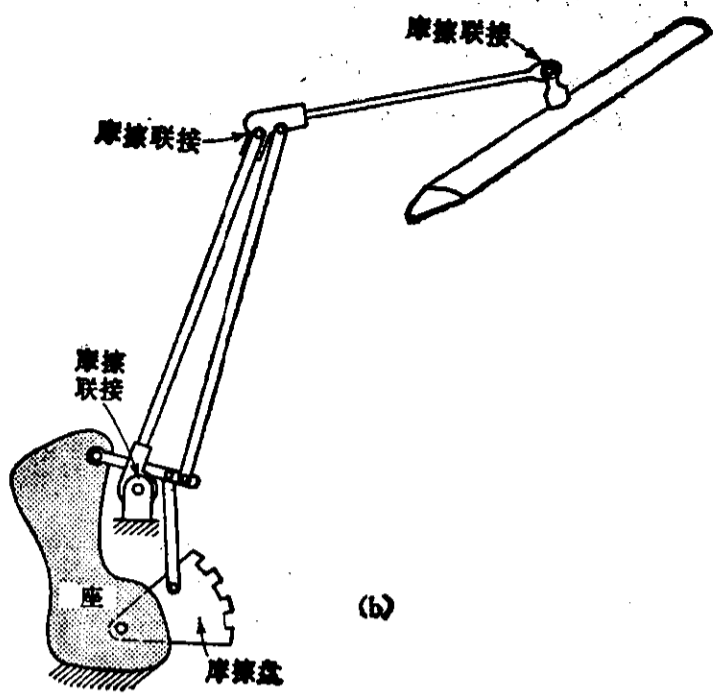
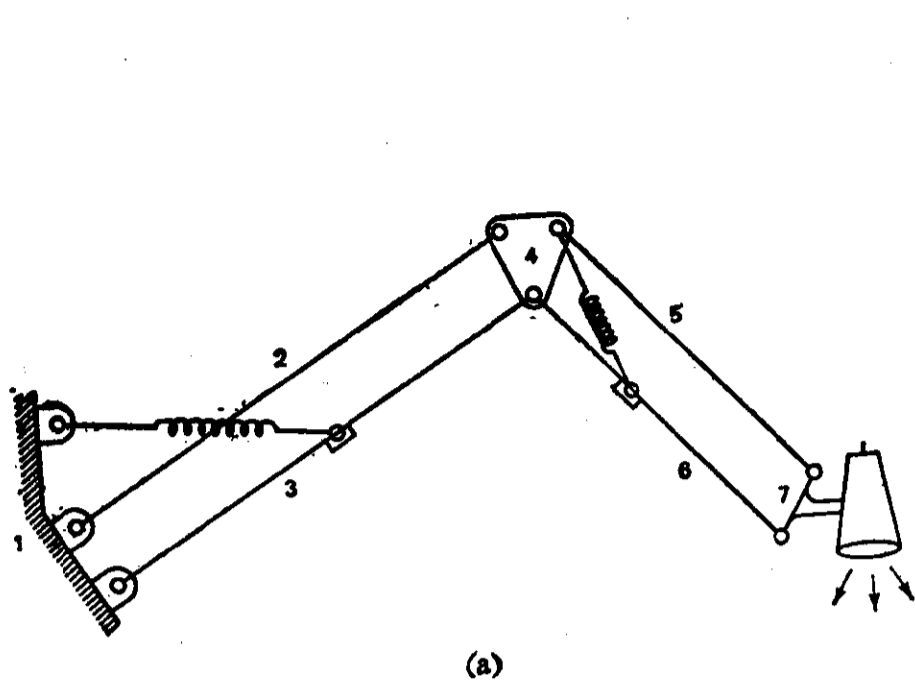


图 P3.27

3.31 图 P3.28 表示厕所水箱注水阀机构的简图。

- (a) 画出该装置不按比例的运动示意图。
- (b) 是哪一类机构? 完成什么任务?
- (c) 确定该机构的自由度。
- (d) 你将如何以标准型方程综合该机构?

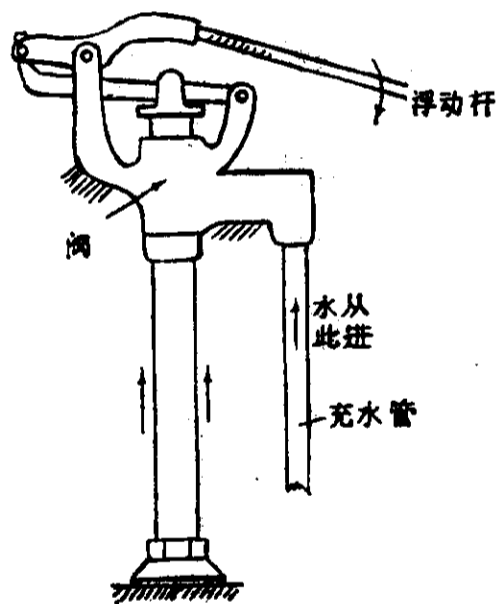


图 P3.28

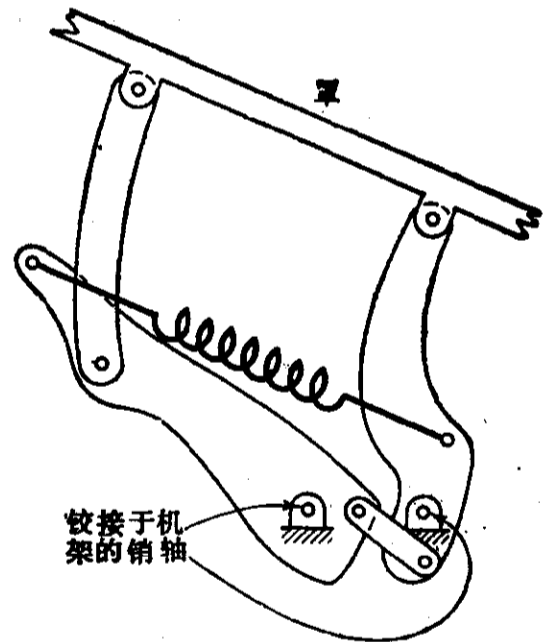


图 P3.29

3.32 图 P3.29 表示汽车引擎罩机构[不同于第一章的两种(图 1.2c 和图 P1.24)]。

- (a) 画出该装置不按比例的运动示意图。
- (b) 是哪一类机构? 完成什么任务?
- (c) 确定该机构的自由度。
- (d) 你将如何以标准型方程综合该机构?
- (e) 根据观察及从部分(a)至(d)得到的了解, 将这一机构的性能与另两个引擎罩机构作一比较。

3.33 为取出成形物品(如铸件)而设计的工业机器人操作臂示于图P3.30[由C·A·布尔顿(C. A. Burton)设计, 美国专利 3,765,474, 蒙俄亥俄州哥伦布斯市利姆洛克公司(Rimrock Corporation, Columbus, Ohio)提供], 这一机器设计成其机构能运动到压铸过程的范围之外, 并有一个最大行程为 70 in 的近似直线运动。闭

合取出器的机构在图中未示出。

- (a) 确定这一机构的自由度。
- (b) 确定这一机构的类型。
- (c) 写出这一装置的标准型综合方程。
- (d) 确定直线轨迹的长度及精度。
- (e) 试设计一个具有更好直线性的机构。

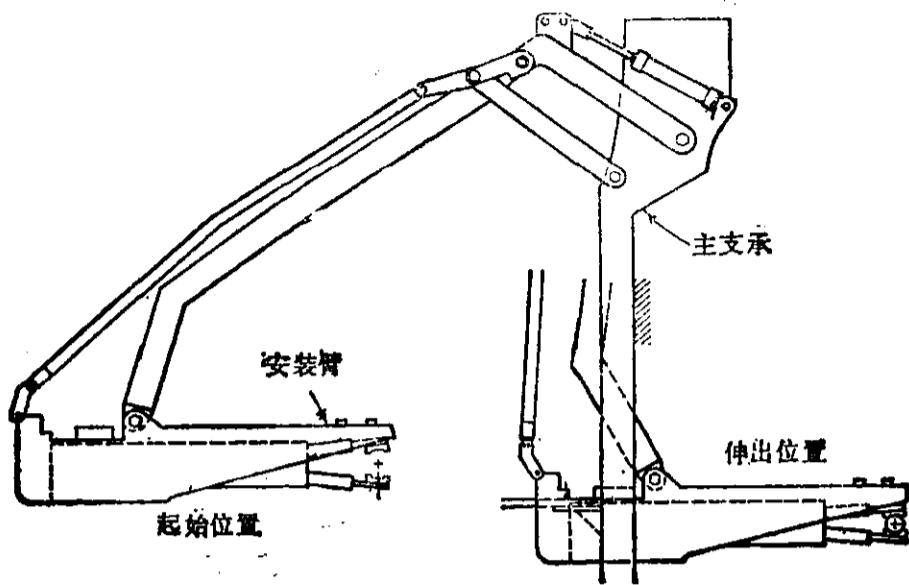


图 P3.30

3.34 图 P3.31 表示打字机的一种早期设计。多环连杆机构将打字员手指的运动传递为打字杆的放大的运动。

- (a) 确定这一机构的自由度。
- (b) 这是哪一类机构?
- (c) 写出这一机构的标准型方程。
- (d) 按你自己的一组四个或五个精确点设计打字机机构。

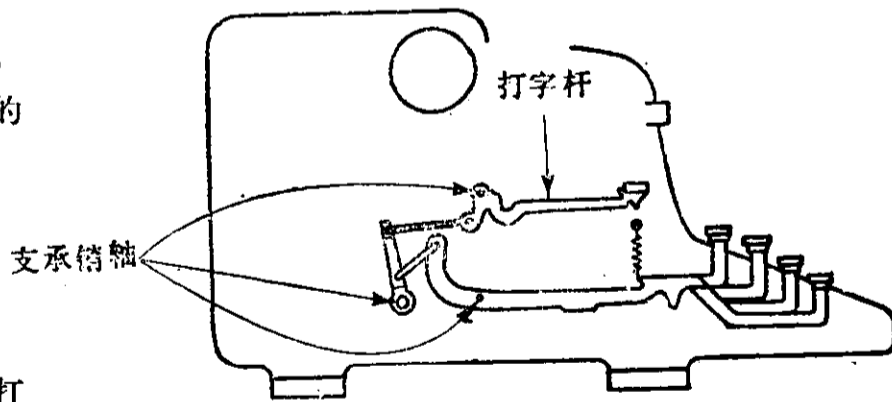


图 P3.31

3.35 图 P3.32 表示在放音中“消除失真”的 Garrard Zero100 型“零跟踪”误差机构^①。铰接臂设计成不断地减小拾音头或拾音臂的角度,使拾音头与唱纹相切。

- (a) 这一四杆机构满足什么任务?
- (b) 为这一任务写出标准型综合方程。
- (c) 用你选取的四个或五个精确点设计你自己的拾音臂机构。

① <Popular Science>杂志,1971 年 11 月期,第 94—96 页。

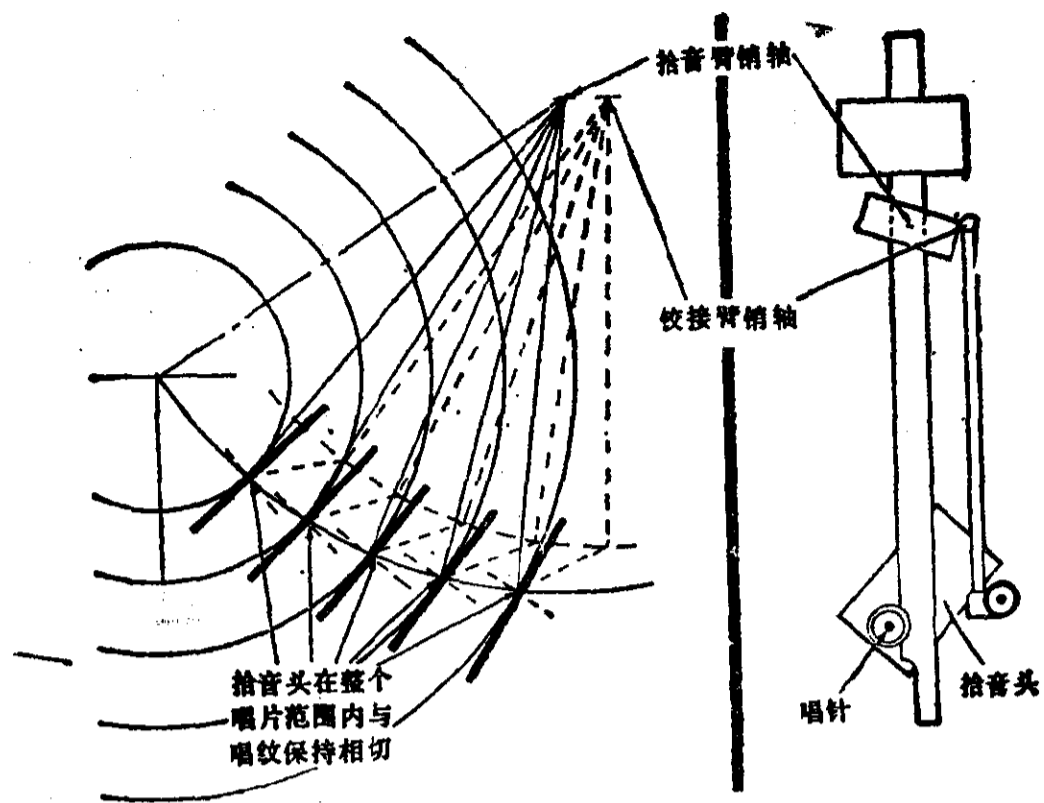
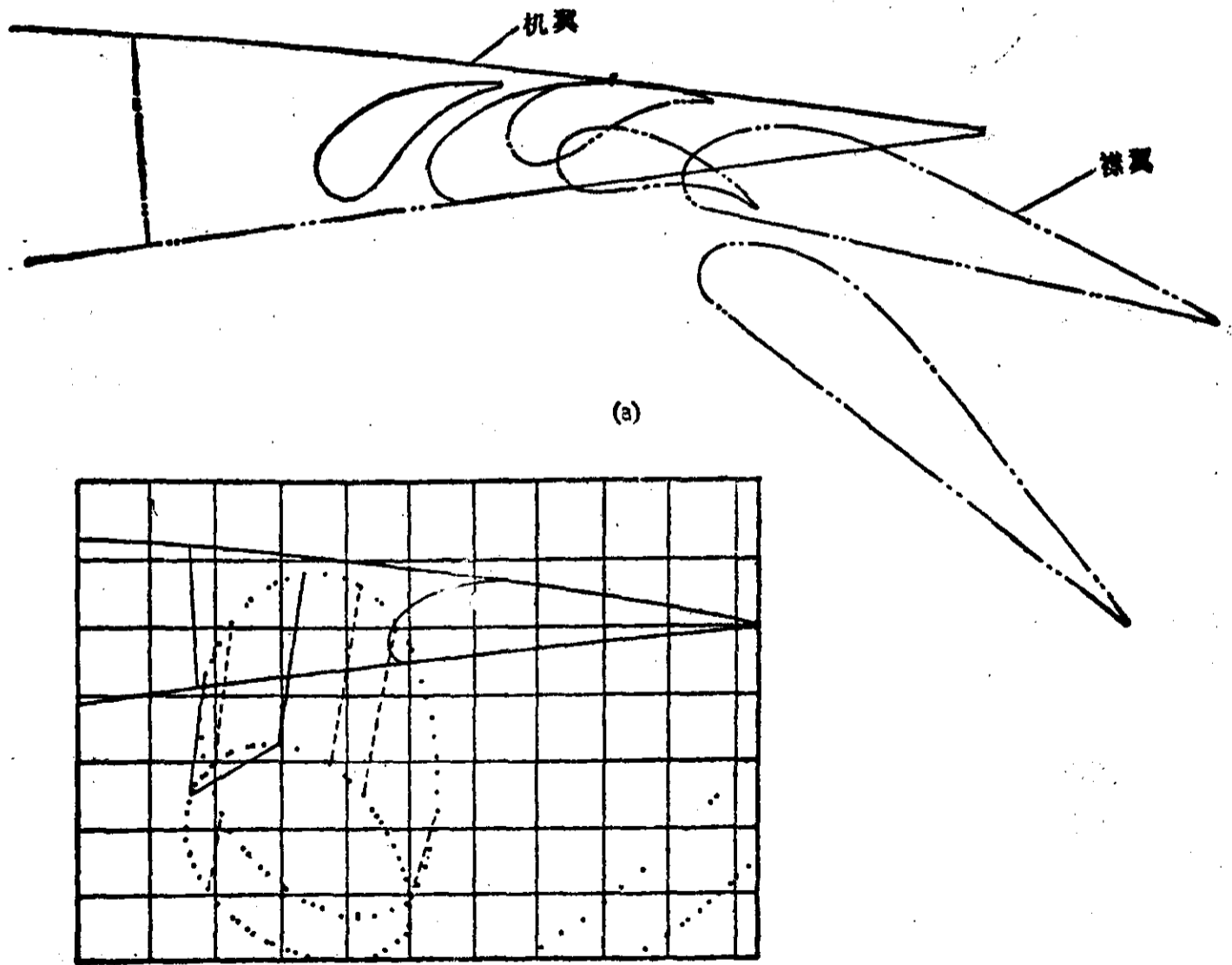
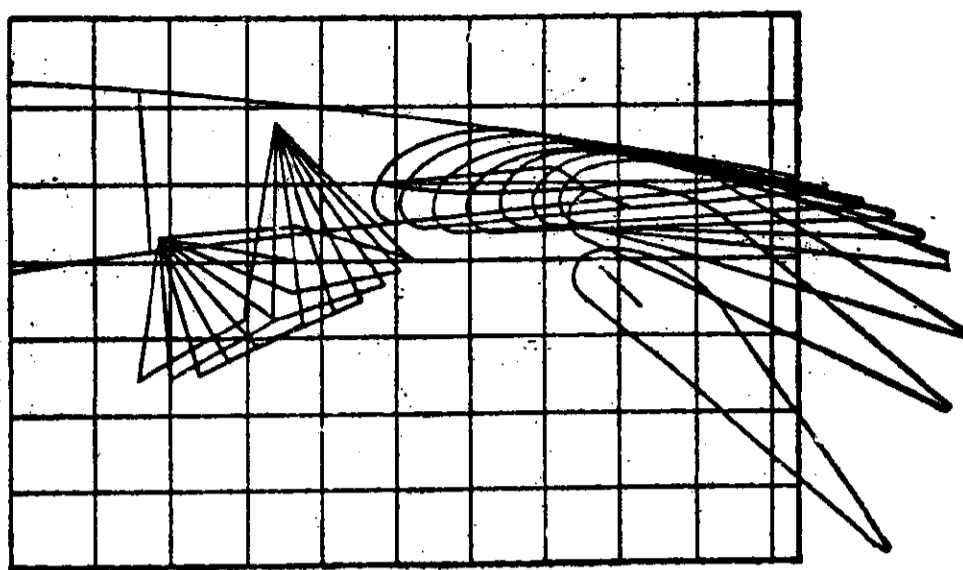


图 P3.32

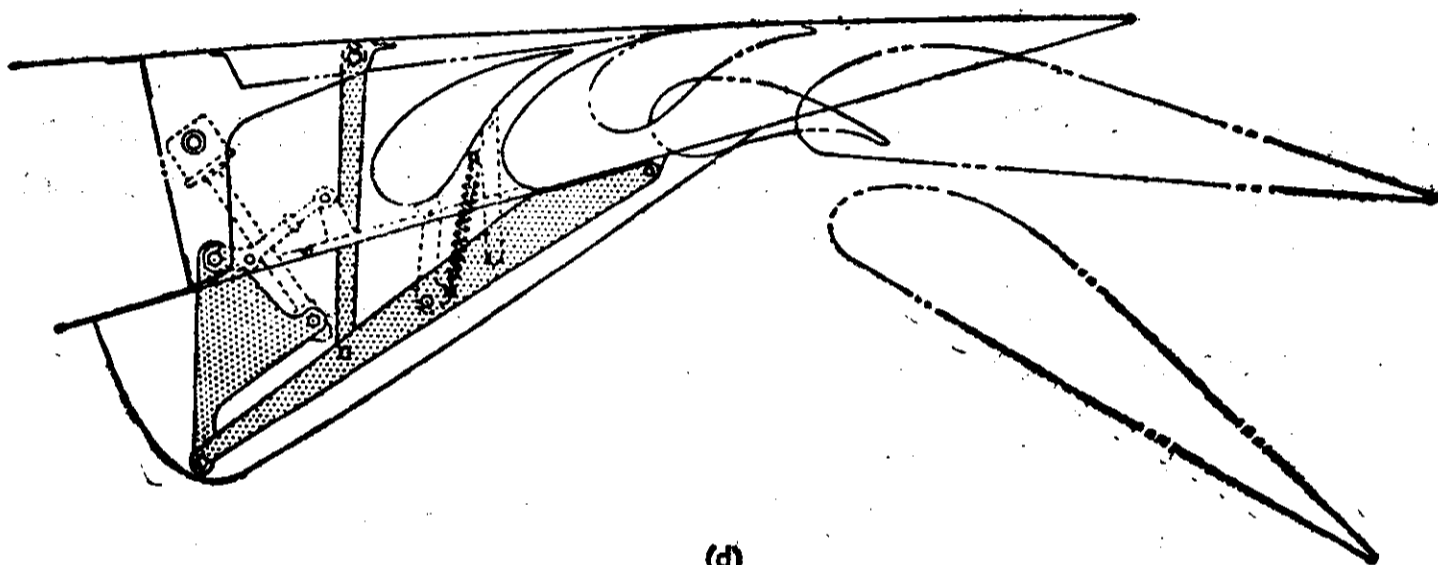
3.36 人机对话的计算机作图用于设计襟翼机构^[201](见图 P3.33)。某些要求的位置经数字化并显示在计算机屏幕上(图 P3.33a)。四个这样的位置产生出了图 P3.33b 所示的 $m-k$ 曲线。由人机对话最终选取的连杆机构如图 P3.33c 和 d 所示。

- (a) 为这一任务取四个或五个你自己的设计位置并综合你自己的连杆机构。
- (b) 在这一综合中试包括示于图 P3.33d 中的后缘襟翼。





(c)



(d)

图 P3.33

3.37 图 P3.34 表示飞机扰流片辅助装置的推荐设计^[201]。(扰流片是一种“破坏”机翼周围气流以减小升力的装置。扰流片用于着陆和控制摇晃。)“ q 箱”用作扰流片的平衡装置。借助于 q 箱,除了驾驶员施加的力以外,不需要任何动力来操作扰流片。需要一个连杆机构,在扰流片整个 60° 转角内平衡 q 箱和扰流片。在模拟了整个动力系统以后,导出了控制方程。利用契贝歌夫间距定了 90° 范围内的四个输入位置,得到下列 θ 值:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 138.4254^\circ, & \theta_3 &= 197.2215^\circ \\ \theta_2 &= 162.7794^\circ, & \theta_4 &= 221.5746^\circ \end{aligned}$$

对于大致为 60° 的扰流片转角,得到下列 ϕ 值:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 10.7342^\circ, & \phi_3 &= 51.5953^\circ \\ \phi_2 &= 33.0073^\circ, & \phi_4 &= 60.3387^\circ \end{aligned}$$

在人机对话作图计算机的键盘上规定了每个曲柄的四个坐标位置和定销轴位置,然后,计算机显示出图 P3.34b 所示的 $M-K$ 曲线。从该曲线上挑选了几个连杆机构后,选定了图 P3.34c 和 d 所示的机构,因为它能最好地满足空间要求。

(a) 看你能否用上述精确点为这一任务找到相同的或更好的机构。

(b) 最终选择的机构对输入数据小量变动的敏感性如何(即,如果把角度的小数舍去,结果会怎样?)

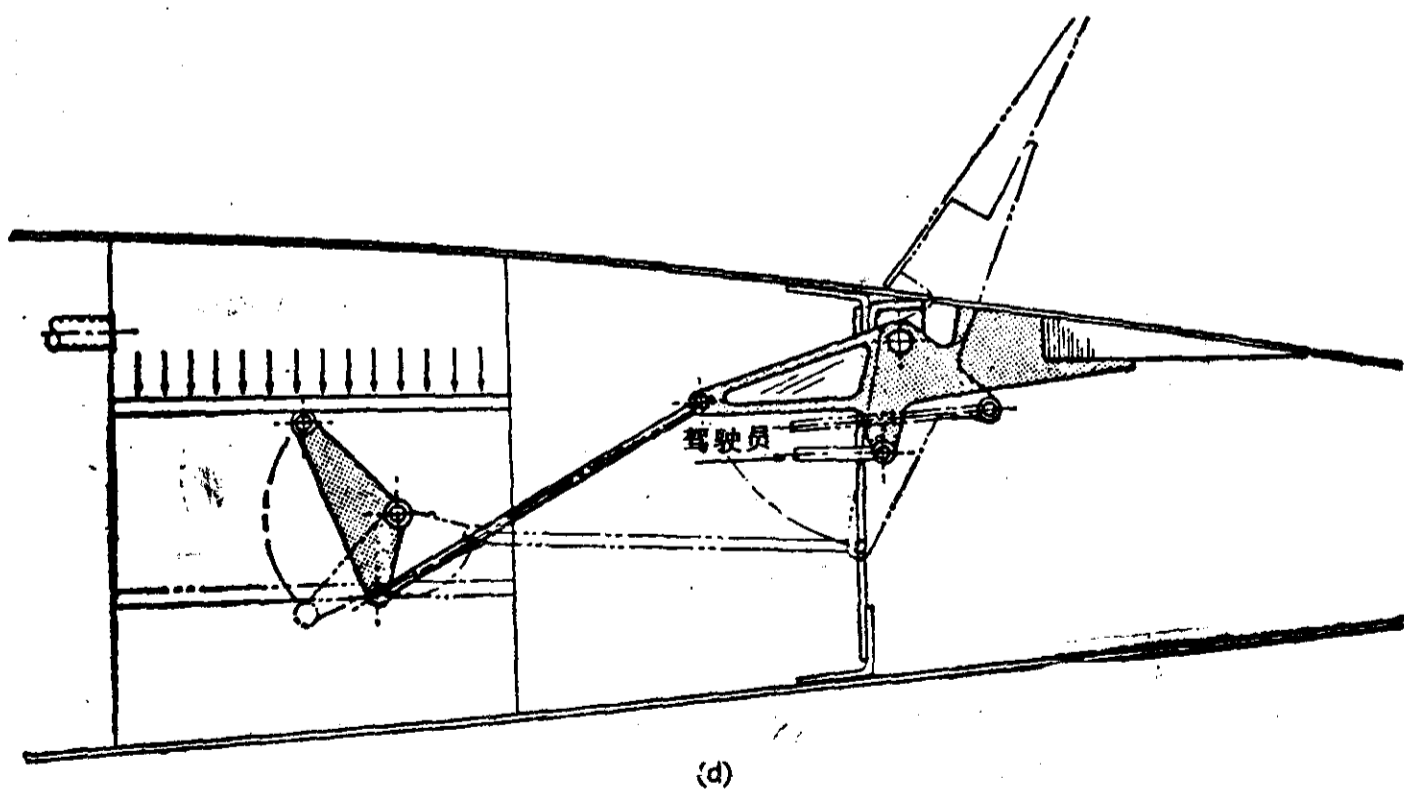
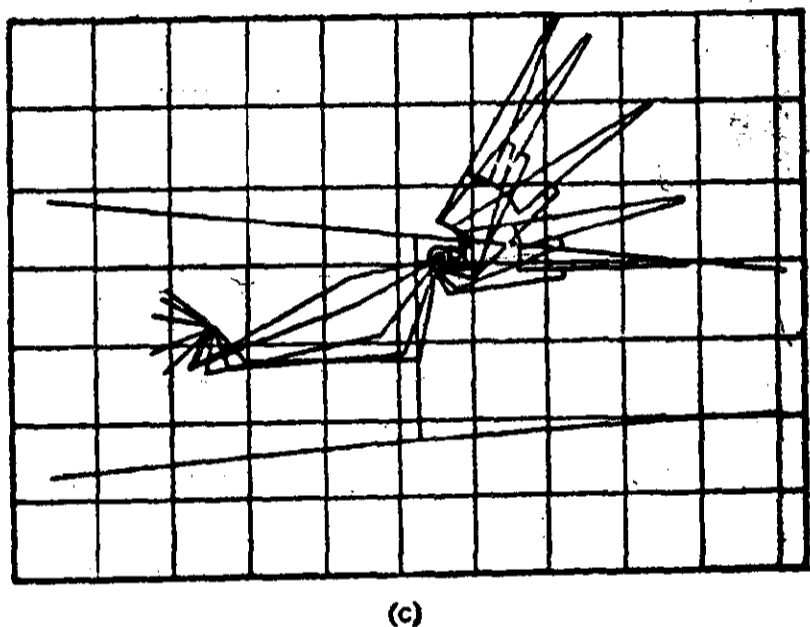
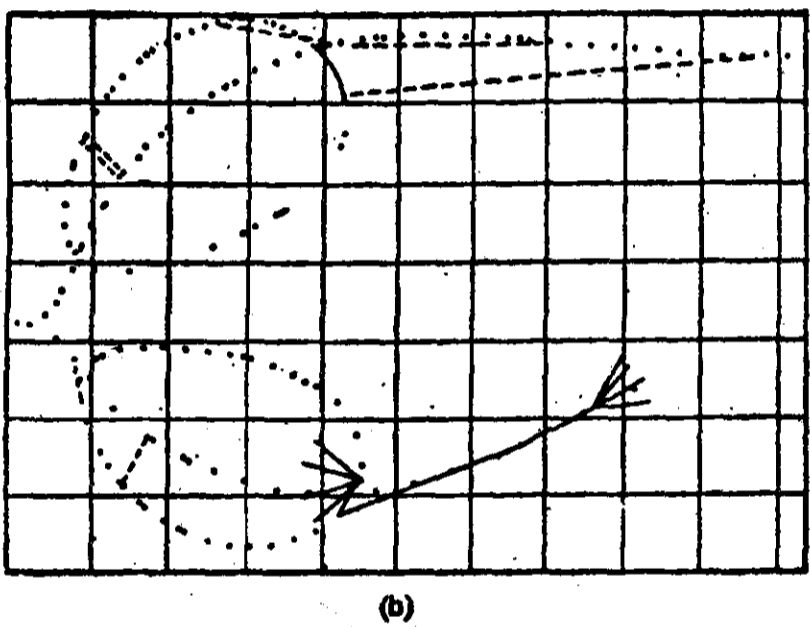
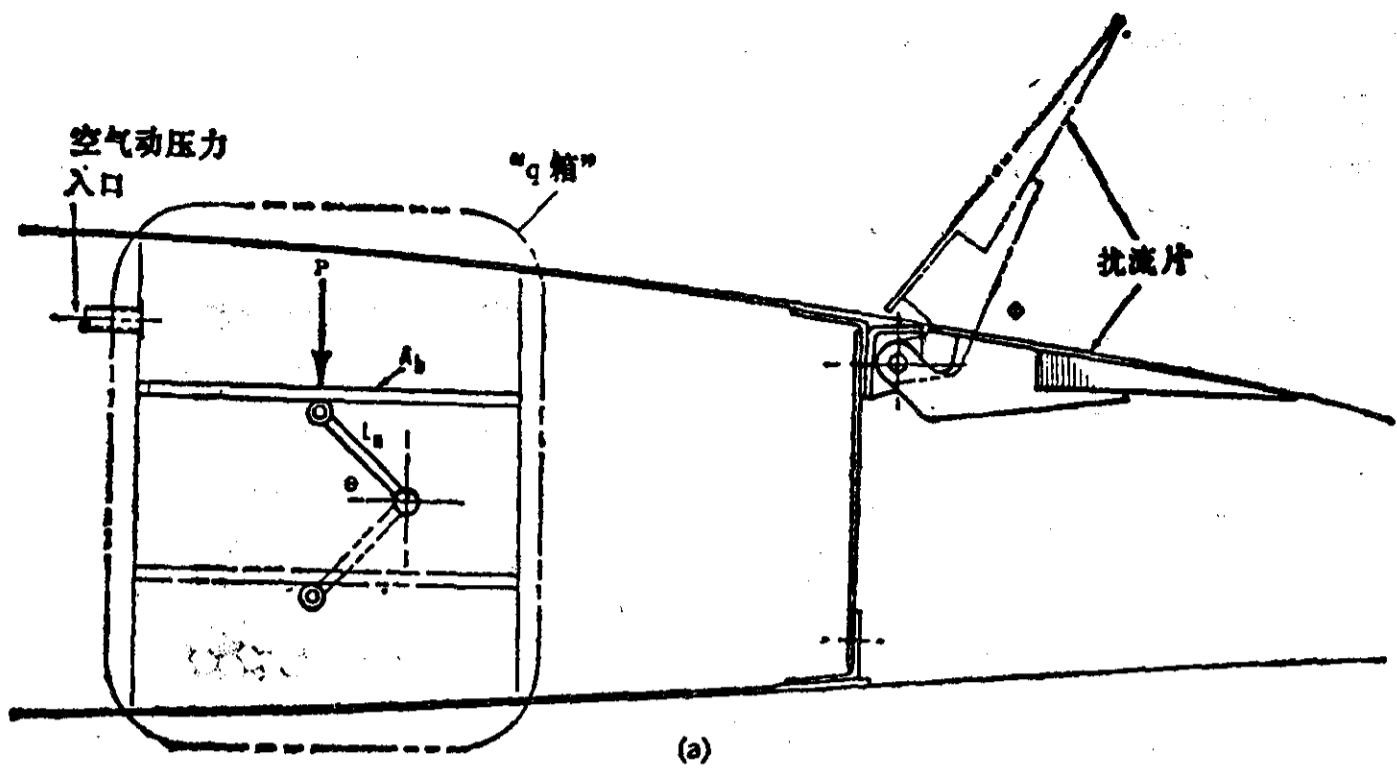


图 P3.34 (d)最终设计; 驾驶员仅需使连杆机构通过死点位置, 此后, q 箱将帮助运动

3.38 为了给大型回转天线腾出空间,直升飞机的起落撬需要收回来(图 P3.35)。为这一任务设计了一个机构如图 P3.35 所示^[201]。

- (a) 确定这一机构的自由度。
- (b) 写出这一机构的标准型综合方程。

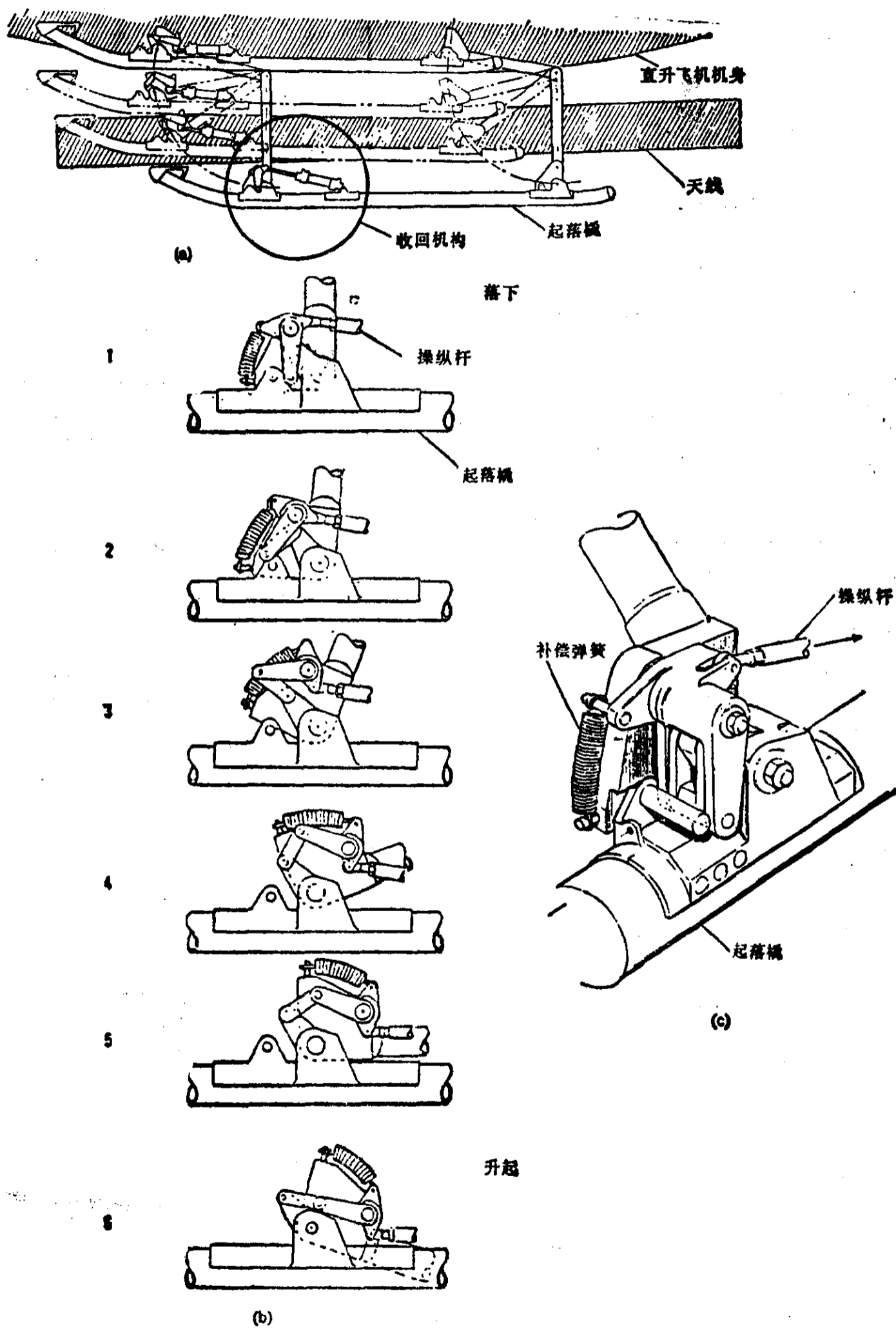
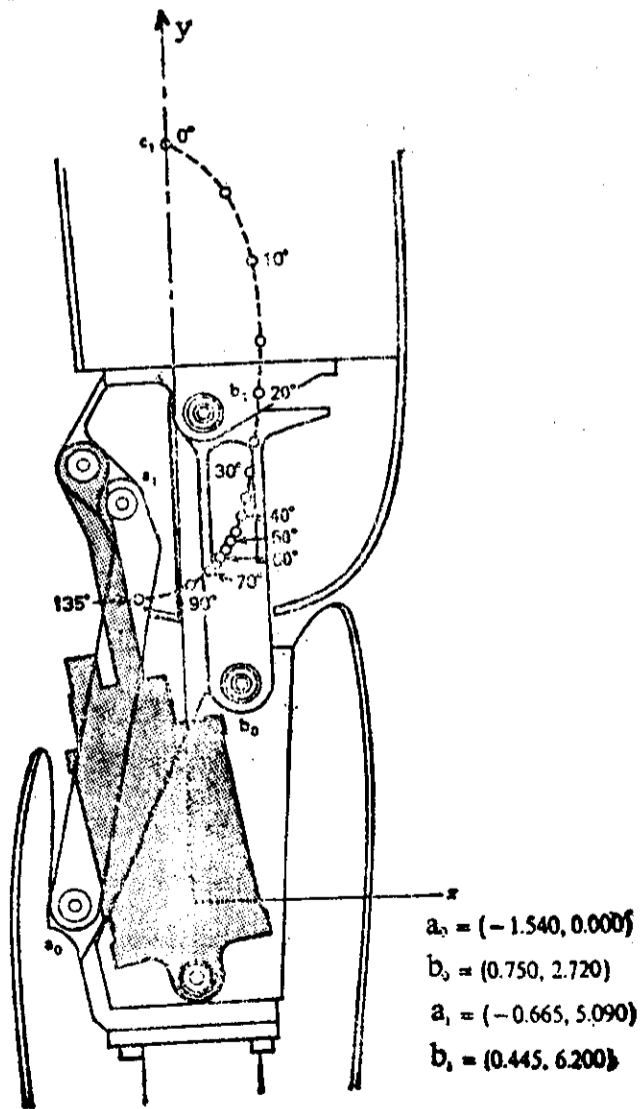
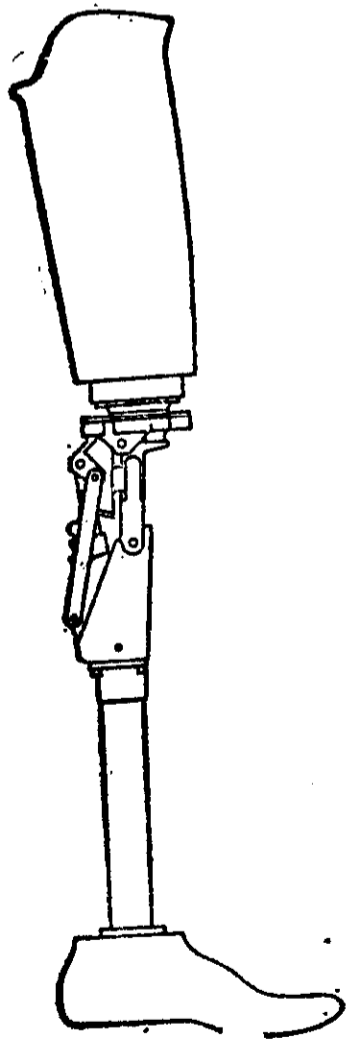
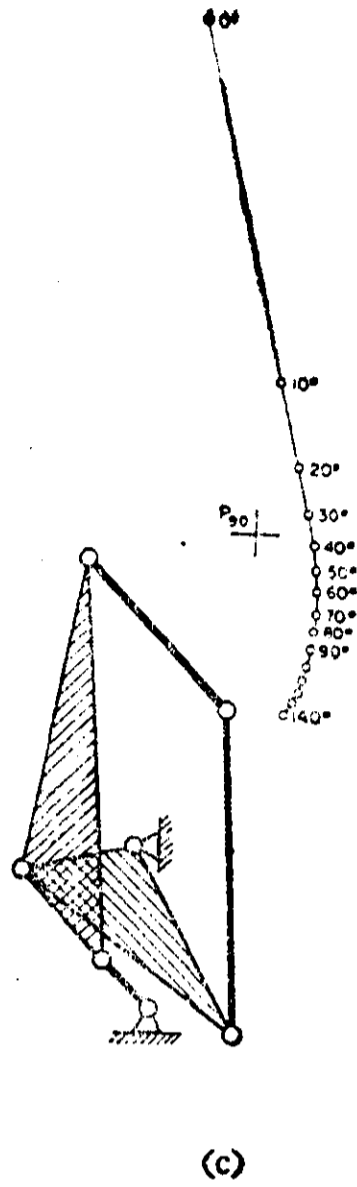
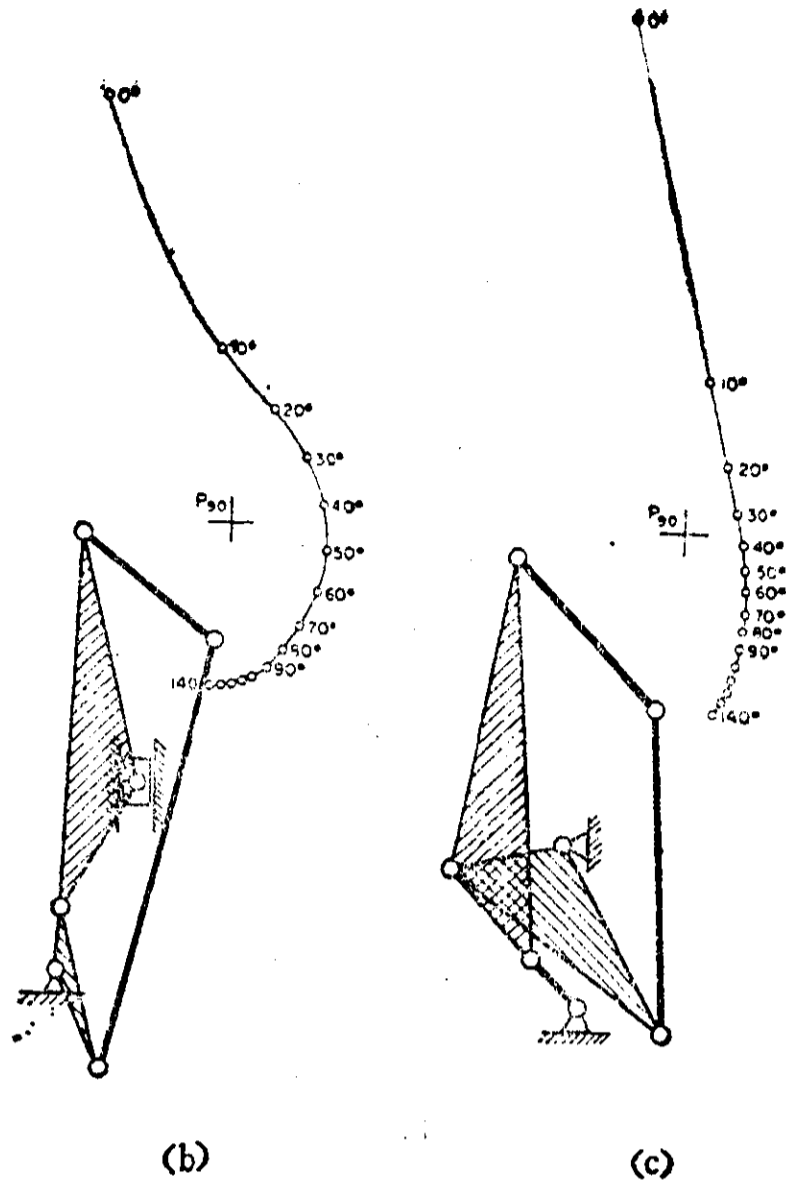
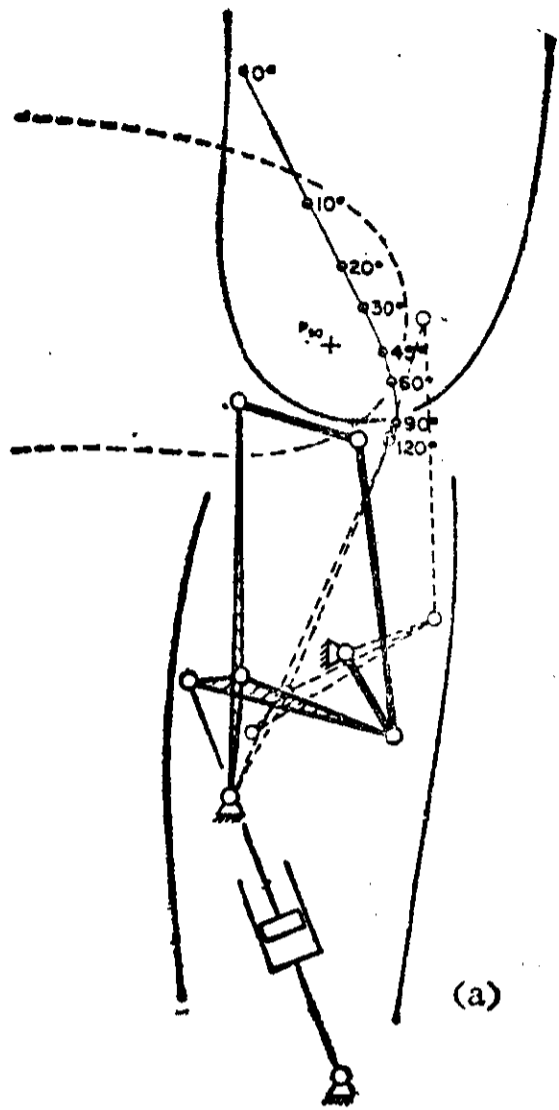


图 P3.35 直升飞机起落撬收回机构



- $a_0 = (-1.540, 0.000)$
- $b_0 = (0.750, 2.720)$
- $a_1 = (-0.665, 5.090)$
- $b_1 = (0.445, 6.200)$

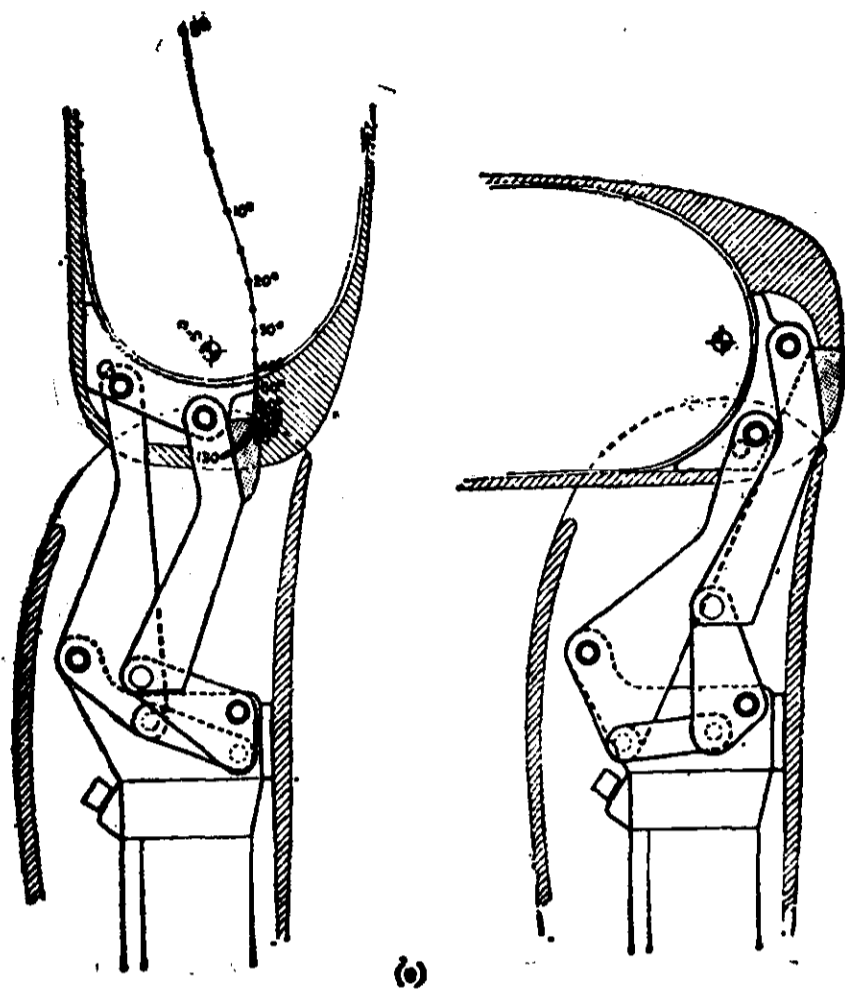


图 P3.36

(c) 从图中取四或五个位置,并设计你自己的收回机构。

3.39 图 P3.36 表示几种推荐的机构,它们已经设计出来^[208,209]代替又笨重又难看的钢质滑动关节,这些滑动关节的连杆机构完全位于过膝截肢残肢的下方。而这些新设计的机构,为了稳定性的缘故,其瞬时中心和定瞬心线迹(第四章)通过股骨下端(膝关节的上部分)。这些机构都与图 1.16 中的不同。为这些设计中的一个或几个:

- (a) 画出机构的运动简图,并校核其自由度。
- (b) 这是哪一类连杆机构?
- (c) 为这一任务,你将如何综合这种机构?
- (d) 取四或五个规定位置,并设计你自己的过膝假肢。

3.40 图 1.13 的六杆机构已设计出来用以生成构件 5 上连杆点的五个预定的轨迹精确点位置:

$$P_1(x_1, y_1) = (5.0, 6.0)$$

$$P_2(x_2, y_2) = (3.9, 5.71)$$

$$P_3(x_3, y_3) = (3.06, 5.202)$$

$$P_4(x_4, y_4) = (2.716, 4.429)$$

$$P_5(x_5, y_5) = (3.386, 4.936)$$

图 P3.37 表示设计出来的机构。 C_0 和 C_1 坐标的计算值为

$$C_0 = (x, y) = (2.347846, 2.916081)$$

$$C_1 = (x, y) = (0.045052, 6.231479)$$

看看你是否能重现这些结果。

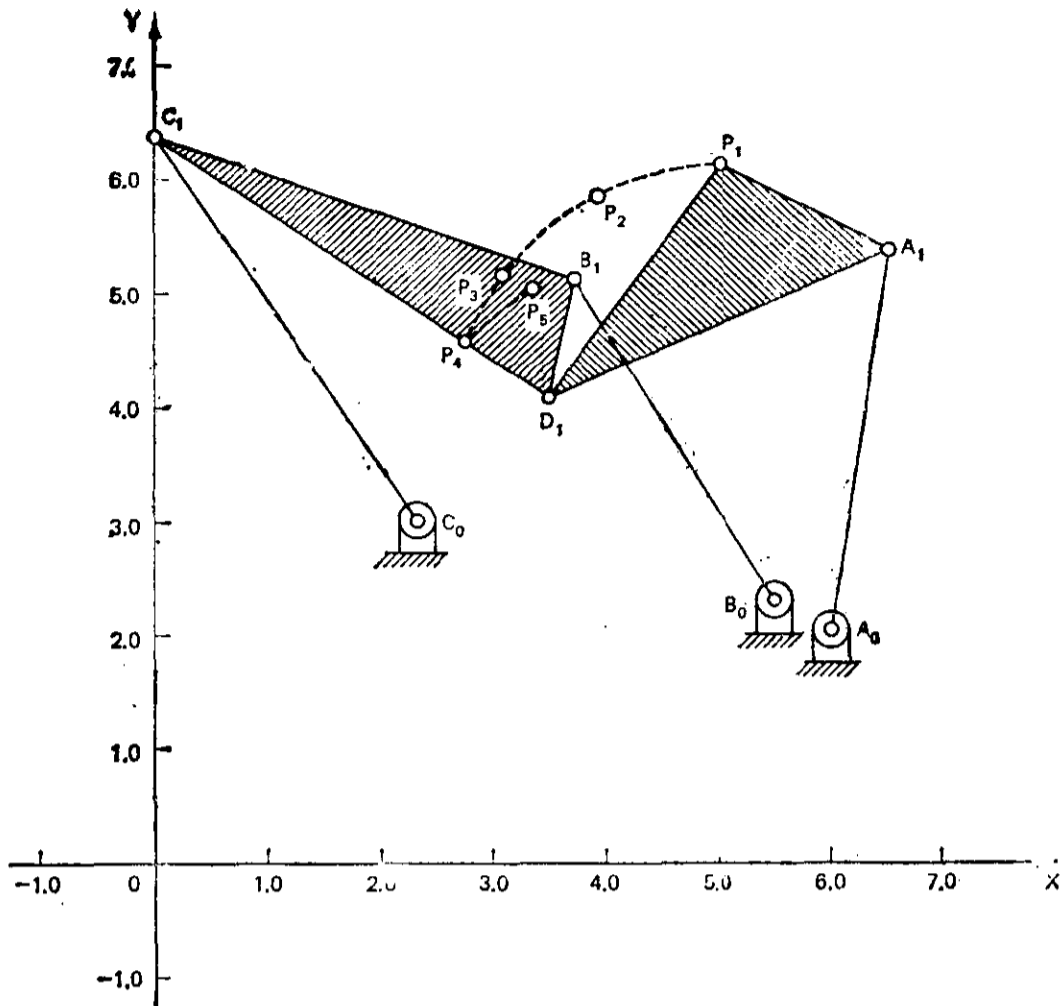


图 P3.37

3.41 证明方程(3.38)仅包含实数项。

3.42 设计一个四杆带预定时标的轨迹发生器,其轨迹为通过下列精确点的近似直线:

序号	精确点		输入角 θ°
	x	y	
1	0.0	-0.25	0.0
2	1.0	-0.25	-16.093
3	1.4	-0.25	-21.423
4	1.79	-0.25	-26.404
5	2.16	-0.25	-31.006

3.43 题 3.42 中的近似直线四杆机构能否用来形成运动停歇机构?如何形成?

3.44 要设计一个斯蒂芬森 III 型六杆机构(图 1.13 和 2.66a),其两个连杆体以相反方向回转,以使用作“飞剪”或翻边工具^①。下列精确点将用于初始双杆组(杆 5 和 6):

序号	精确点		连杆转角 α°
	x	y	
1	0.0	0.0	0
2	-0.625	-0.22	10
3	-1.0	-0.625	20
4	-1.25	-1.25	37
5	-1.0625	-1.50	58

① 本题是由 A·S·亚当斯(A. S. Adams)提供的。

合格的双杆组选定以后,设计连杆机构的其余部分(建议指定 $Z_3 = -1.007 - 1.092i$)。

序 号	精 确 点		连 杆 转 角 α°
	x	y	
1	0.0	0.0	0
2	-0.4172	-0.3809	-10
3	-0.5658	-0.9036	-20
4	-0.3900	-1.636	-32
5	-0.3369	-1.8407	-45

3.45 制作陶瓦的各种干粉成分存放在料斗内。在压制周期的适当时刻,将门打开,把“粉尘”分配进传输滑道,从而在下一个行程将其运到型腔^①。料斗和门是现有的,需要用一个2 in. 行程的气缸来开门和关门。还要求门的开启程度可调,以计量粉尘量。门的开启程度要从 10° 至 18° 之间每 2° 一档进行改变,用一个不变的2in. 气缸行程来实现。为这一任务设计一个机构。

3.46 要综合一个带预定时标的轨迹发生器来生成一条香肠形曲线,用以产生一个双停歇机构^[210]。五个精确点为:

序 号	精确点(极坐标形式)		输 入 角 β°
	R	θ°	
1	1.0	0.0	0.0
2	1.740	-29.50	117.0
3	1.740	-10.70	150.0
4	1.740	10.30	191.0
5	1.740	25.90	228.0

(a) 为这一任务设计一个满意的四杆机构。

(b) 完成具有良好传动角特性的双停歇机构的设计。

3.47 按五个预定位置设计一个四杆运动发生器^[210]:

序 号	精确点(极坐标形式)		连 杆 角 α°
	R	θ°	
1	1.5	0.0	0.0
2	1.275	33.7	12.0
3	1.0	90.0	24.0
4	1.275	146.3	36.0
5	1.5	180.0	48.0

3.48 表中列有四杆函数发生器的三个例子^[210]。第一例与弗鲁登斯坦根据契贝歇夫间距综合的最优四杆函数发生器完全相同^[104]。

① 由 M·纳尔逊(M. Nelson)推荐的。

试设计一个或几个这些五点函数发生器。

	(A)	(B)	(C)
函数	x^2	$-\frac{x}{8}(x+2)$	$x + \sin x$
x 的区间	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 6$	$0 \leq x \leq 1$
ϕ 的范围($^\circ$)	90.0	100.0	85.0
ψ 的范围($^\circ$)	90.0	60.0	60.0
精确点:			
x_1	0.033689272	0.1468304511	0.02447174185
x_2	0.24917564	1.1236644243	0.2061073739
x_3	0.54280174	3.00000000	0.50000000
x_4	0.81636273	4.763355757	0.7938926261
x_5	0.9786319	5.8316954	0.9755282581

3.49^① 在机器设计中,经常需要用机构将均匀的输入回转运动转变为不均匀的输出转动或往复运动。为这种用途设计的机构几乎总是以四杆机构为基础。这种连杆机构产生正弦曲线形的输出,而这种输出可加以修正产生许多运动。

四杆机构不能产生出具有实用价值的持续时间的停歇。它的另一个限制是只有几种类型具有有效的力传递能力。虽然如此,当需要停歇时,设计师也可能不选用凸轮,认为凸轮有固有的速度限制与振动。所以,又回

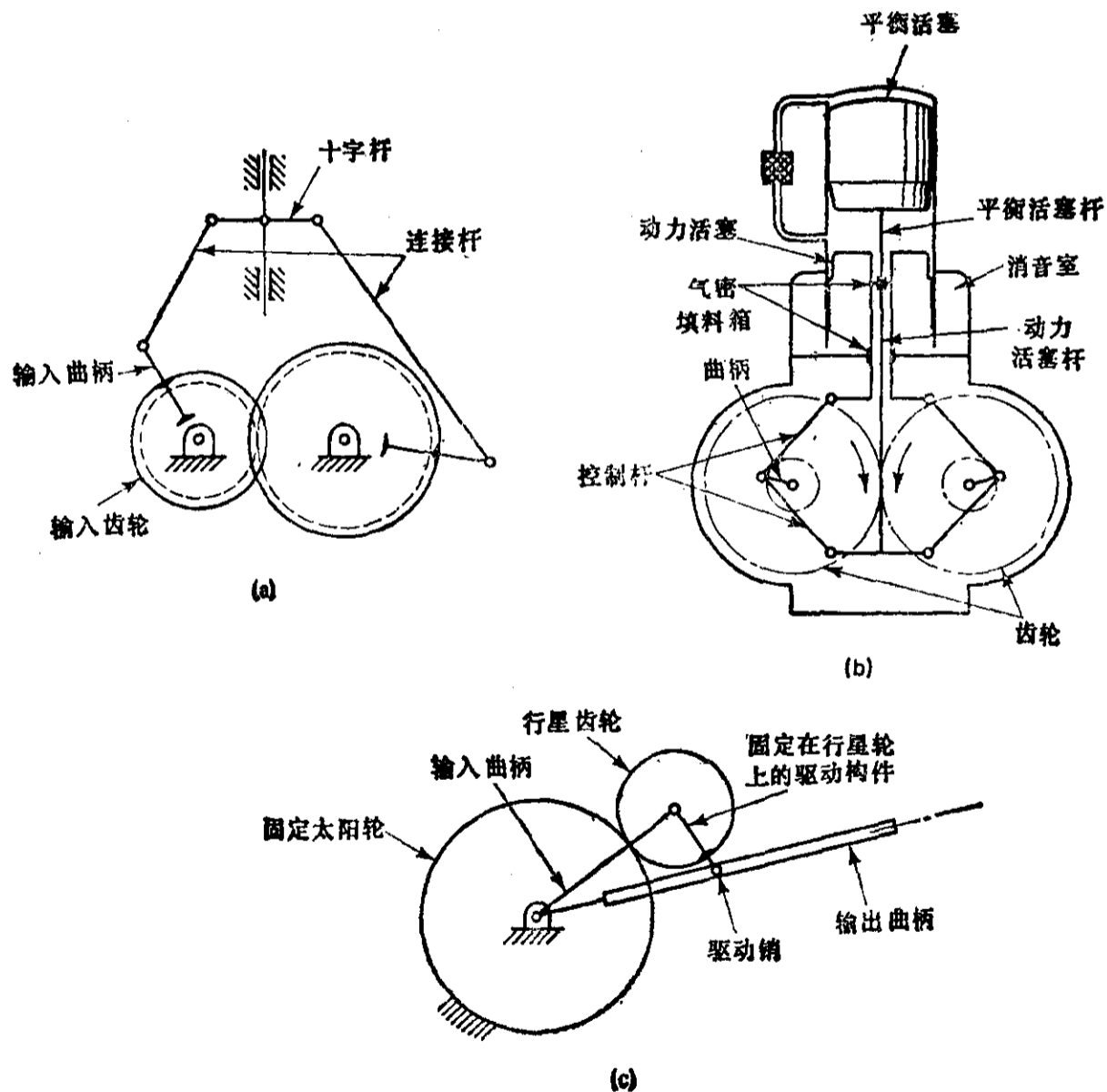


图 P3.38 (a) 装有曲柄的外齿轮系统; (b) 斯特灵发动机系统; (c) 外行星齿轮系统

① 本题选自参考文献 28。

到连杆机构。

使四杆机构增加输出运动的种类，得到较长的停歇和较好的力传递性能的一个方法是增加一个杆和一组齿轮。

图 P3. 38a 表示一个实际的齿轮五杆机构，其中包含一对可转动地铰接于机架的外齿轮。连杆（十字杆）则与滑块铰接。该系统用在将回转运动转变成高冲量直线运动的高速机器中是成功的。一种相似的系统（图 P 3. 38b）用于斯特灵(Stirling)发动机。

(a) 验证图 P3. 38a 和 b 中齿轮连杆机构的自由度。

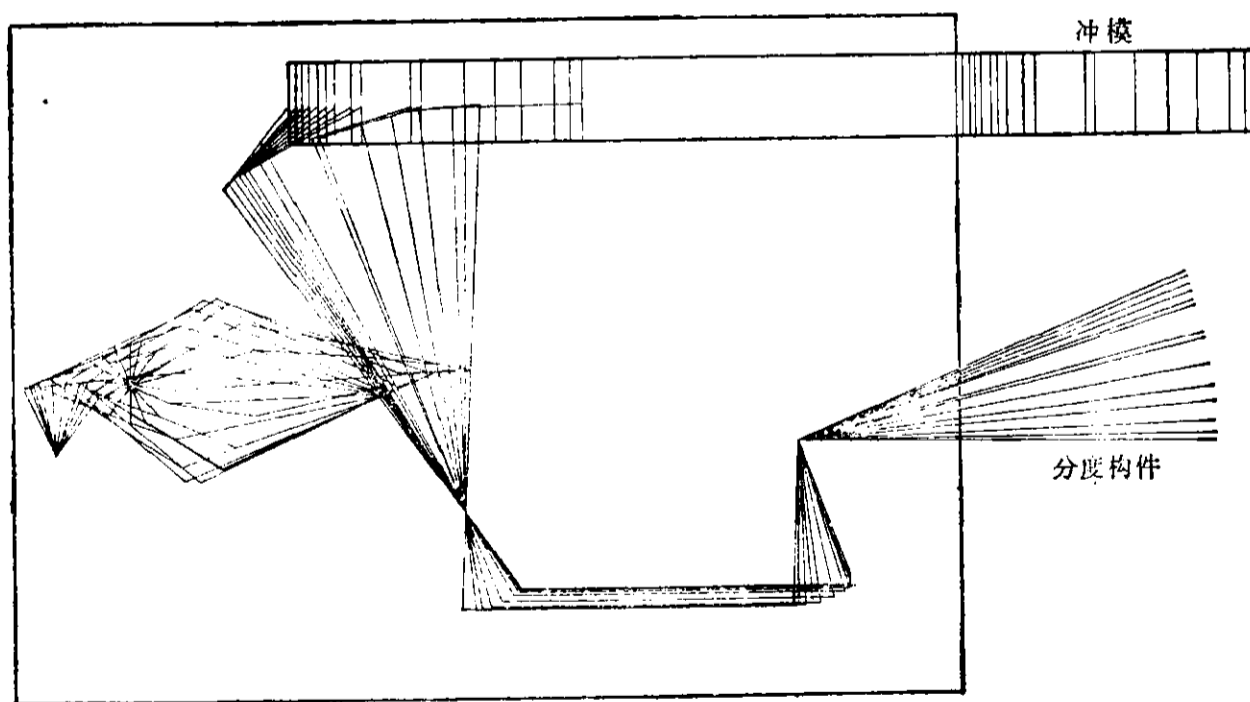
(b) 画出图 P3. 38a 中齿轮五杆机构的所有运动变换机构。

(c) 图 P3. 38c 表示一种不同型式的齿轮停歇机构，它用了带槽的输出曲柄。试验证这一机构的自由度。

3. 50 已设计了一种多环停歇连杆机构作为冲孔与分度联合装置^①。所用的原理以综合一条有近似于圆周部分的四杆机构连杆曲线为基础。当四杆机构描出曲线这一部分时，一端铰接于轨迹点、另一端铰接于机架的双杆组(中间点位于轨迹的曲率中心)的连架杆将出现近似的停歇。图 P3. 39a 和 b 是该装置在两个位置上的照

(a)

(b)



(c)

图 P3. 39

^① 由宾夕法尼亚州立大学的 W·法列尔(W. Farrell)、D·约翰逊(D. Johnson)和 M·波普乔以(M. Popjoy)在 A·米德哈(A. Midha)指导下于 1980 年 9 月设计,描述在参考文献[185]中。

片。由计算机生成的该停歇机构在其输入曲柄每回转 20° 所作的运动展示于图 P3.39c。这个机构的一部分是用复数法设计的。

- (a) 确定这一机构的自由度。
- (b) 描述该停歇机构各个环路的功能。
- (c) 叙述如何能用标准型方法综合这一机构。

第四章 轨迹曲率理论

4.1 引言

在连杆机构的综合与分析中，经常关心的是在动平面内找出那些具有某种轨迹特性的点，比如描出一条特定半径曲线的点，或描出一条直线的点。这里介绍的方法，无论在分析给定机构上某些点的轨迹曲率特性中，还是在出于轨迹曲率的考虑而综合新方案时，都是有用的。下面根据无限小位移建立起来的方法很好地补充了本教科书在前面介绍的有限位移的运动综合方法。

4.2 定瞬心线和动瞬心线

在研究运动构件上各描述点的轨迹曲率之前，必须先介绍一个重要概念，即定瞬心线和动瞬心线的概念。在连杆机构运动时，典型的浮动构件(没有定销轴的杆)将以移动和转动相结合的方式相对机架作平面运动。如果只涉及两个有限分离位置，则一个与运动构件相刚接而与机架相铰接的构件将引导该运动构件通过这两个位置。这种情况下，一个纯转动就能把运动构件带到两个预定位置。这样的一个定销轴称为极点。

浮动构件的两个位置和求极点 P_{12} 的方法一起示于图 4.1。求极点位置的方法是，以直线连接点 A_1 和 A_2 、 B_1 和 B_2 。作线段 A_1-A_2 和 B_1-B_2 的中垂线(即垂直平分线)如图 4.1，它们的交点就是极点 P_{12} 。

极点与瞬心不同。“瞬心”是浮动构件的瞬时转动中心。围绕这一中心的转动可以使构件上每一点的瞬时速度与该构件实际运动的速度相一致。而极点涉及运动平面的两个有限分离位置。

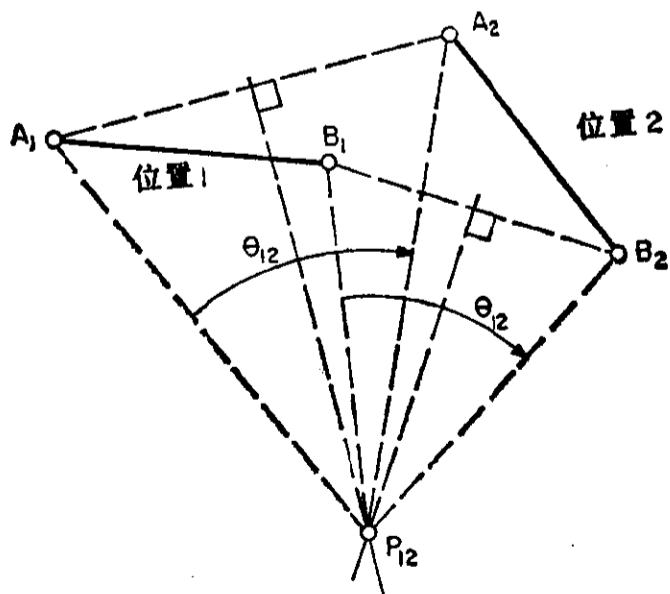


图 4.1 运动平面 AB 的两个任意共平面位置 1 和 2 可以由绕极点 P_{12} 的纯转动彼此到达

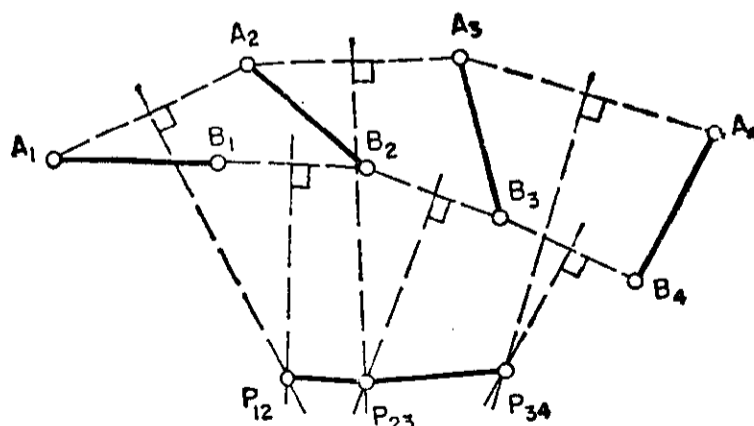


图 4.2 定瞬心线是极多边形在中间位置数增多、相邻的顺序极点无限靠近(见图 4.3)的极限情况

瞬心可以看作极点在图 4.1 中的角 θ_{12} 趋于零时的极限情况。

当考虑运动平面的位置多于两个时,极点概念的一个重要用途就能看到。在图 4.2 里,重画了图 4.1 中浮动构件的两个位置,同时又画了第三与第四位置。

P_{12} 是构件位置 1 与 2 的极点, P_{23} 是位置 2 和 3 的极点,以此类推。因此,对于构件的四个位置,就有三个顺序极点。概括地说,如果要考虑浮动构件的依次 n 个位置,则将有 $n-1$ 个顺序极点,每一个极点与两个相继位置之间的那一段运动有关^①。在图 4.2 中,两个相邻的顺序极点用直线相连接。如果考虑大量的连杆位置,而且每个连杆^② 位置与其相邻位置无限接近,则一般地,那些极点将形成一条光滑曲线,而不再是一个多边形。这一光滑曲线就是定瞬心线。

运动构件的定瞬心线简图和四个位置,连同极点 P_{12} 、 P_{23} 与 P_{34} 示于图 4.3。因为运动构件相对于机架的瞬心是极点在连杆位移趋近于零时的极限情况,所以,显然这样的瞬心总是在定瞬心线上。实际上,定瞬心线就是浮动构件相对于机架运动的全部瞬心的轨迹。

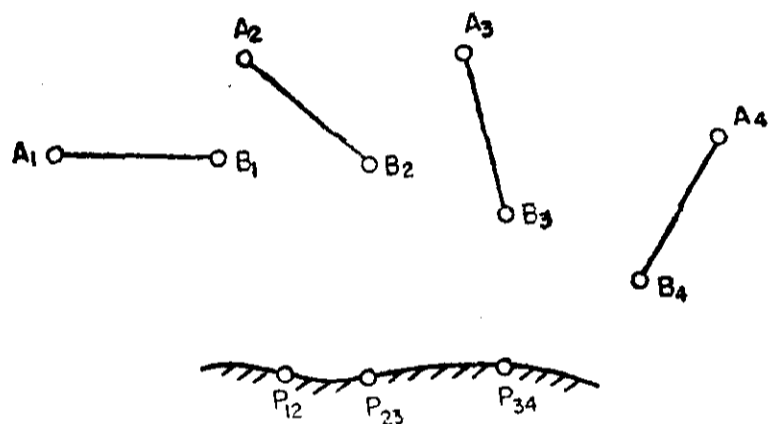


图 4.3 定瞬心线是构件 AB 运动的全部瞬心的轨迹

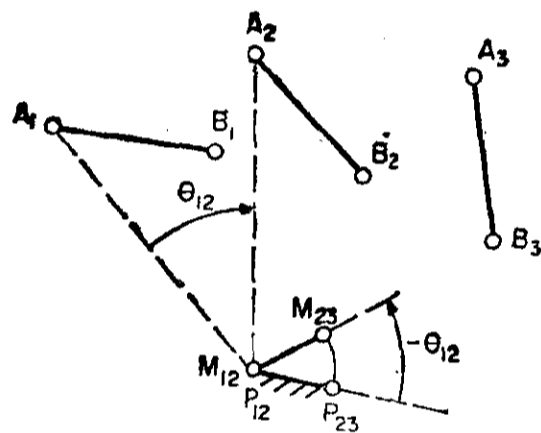


图 4.4 M_{23} 是运动平面在第一位置 A_1B_1 时它上面的一个点; 在第二位置 A_2B_2 时,该点成为 P_{23}

现在考虑图 4.4 所示的一个构件的三个相应位置。其运动将作如下转换。极点 P_{12} 和 P_{23} 以一直线连接,再将此直线旋转一个角 $-\theta_{12}$ 得到点 M_{23} 。作一直线连接 P_{12} 和 M_{23} 。 M_{23} 是运动平面处于位置 1 时它上面的一个点,这个点在位置 2 时与 P_{23} 重合。我们还可在此连杆平面上定义点 M_{12} ,它在位置 1 时与 P_{12} 重合。其它的 M 点可作图求出如下:为了求 M_{34} ,先量出 $\phi = \angle P_{12}P_{23}P_{34}$,再将 $M_{12}-M_{23}$ 的延长线绕 M_{23} 在 $\phi = \angle P_{12}P_{23}P_{34}$ 的相同方向上旋转角 ϕ ,如图 4.5 所示。然后将这条新线绕 M_{23} 旋转一个角 $-\theta_{23}$ 。在这条直线上从 M_{23} 开始用与 P_{23} 至 P_{34} 相同的距离定出 M_{34} 的位置。可为连杆依次的每个位置重复同样的步骤。

为了强调 A_1 、 B_1 、 M_{12} 、 M_{23} 和 M_{34} 都是属于运动构件上的点,我们在图 4.5 中把各个 M 点与 A_1B_1 相刚接。于是,随着这五个点组成的系统绕 P_{12} 旋转,直到 M_{23} 到达 P_{23} 时, A_1B_1 应该运动至与 A_2B_2 重合。接着,当这五点系统绕 P_{23} 旋转,至 M_{34} 到达 P_{34} ^③ 时, A_1B_1 应移至与 A_3B_3 重合。换句话说,当“动极多边形”在“定极多边形”上滚动时,构件 AB 将依次通过相应的位置

① 这些并非全部极点。任何两个位置 j 与 k , 无论它们接续与否,都有一个与之有关的极点 P_{jk} 。并注意 $P_{jk} = P_{kj}$ 。
 ② 在这里,连杆与浮动构件是通用的。因为这两个词都可用于四杆机构的连接构件。
 ③ 原文 P_{23} 系 P_{34} 之误——译者注。

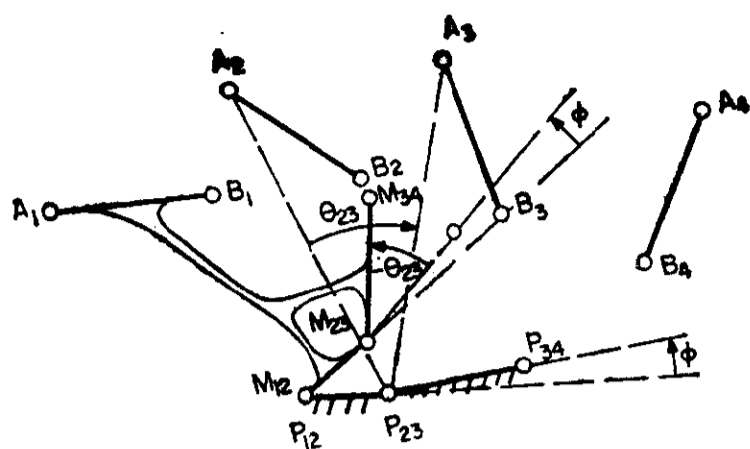


图 4.5 当动极多边形 $M_{12}M_{23}M_{34}$ 在定极多边形 $P_{12}P_{23}P_{34}$ 上滚动时, 平面 AB 通过位置 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$.

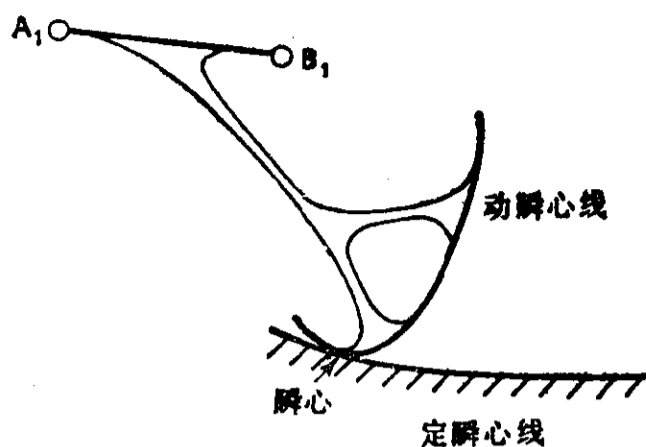


图 4.6 随着中间顺序位置数的不断增加, 动极点之间和定极点之间越来越靠近。极限情况下, 它们的多边形成为动瞬心线和定瞬心线。互相滚动着的这两个瞬心线的切点就是瞬时中心, 该点为运动平面 AB 上的一个瞬时固定的点, 即它的速度为零

$A_jB_j, j=1, 2, 3, 4, \dots$

如果顺序极点在定瞬心线上互相无限靠近, 则顺序的 M 点也将互相无限靠近而形成一条光滑曲线。这就是示于图 4.6 中的动瞬心线。注意, 定瞬心线是固接在机架上的, 而动瞬心线则是刚接在连杆上的, 在图 4.6 中表示的是动瞬心线处于位置 1 的情况。

定瞬心线和动瞬心线(有些作者也称作“极点轨迹”)的重要性, 在于浮动构件相对于固定构件的实际运动可以通过动瞬心线在定瞬心线上无滑动地简单滚动再现出来。定瞬心线与机架相连接, 它总是不动的; 而动瞬心线则可看作是刚接于运动构件上的。可以作出任何两个构件相对运动的所谓“相对瞬心线”, 它可以不仅是象四杆机构的连杆这样的浮动构件相对于机架的运动, 而且还可以是, 比如说, 从动构件相对于输入构件的运动。

如图 4.6 所示, 当动瞬心线在定瞬心线上滚动时, 它们之间通常有一个接触点; 这个点就是运动构件相对于机架的瞬心。对于相对瞬心线来说也是这样, 它们的接触点就是相对瞬心。

4.3 速 度

考虑图 4.7 所示的某个任意平面相对于固定参考平面作平面运动的定瞬心线 p 和动瞬心线 π 。虽然有些作者称之为“极点轨迹”, 但是, 极点是有限转动的中心, 而瞬心线则是瞬时中心的轨迹, 所以我们用“瞬心线”这个术语。

现在我们来给“密切圆”(osculating circle) 这个术语下个定义。考虑一条一般的曲线 C (图 4.8) 及该曲线上的点 A_0 。为了求曲线 C 在点 A_0 的曲率半径, 我们在 A_0 的两边各取一点 A_{-1} 和 A_1 。割线 $A_{-1}A_0$ 和 A_0A_1 的垂直平分线相交于点 O 。以 O 为圆心、 OA_0 为半径 ($OA_{-1}=OA_0=OA_1$), 总可以画一个圆通过这三个点 A_{-1} 、 A_0 和 A_1 。如今, 令 A_{-1} 和 A_1 趋近点 A_0 (即弧长 $\Delta s \rightarrow 0$, 见图 4.8)。在极限情况下, 当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时, 通过这三个点的圆称作“密切圆”。密切圆的半径 ρ 就是曲线 C 在点 A_0 的曲率半径; 密切圆的圆心 O 就是曲率中心。所以, 密切圆在无限接近的三个点上与曲线 C 相接触。向量 $\overrightarrow{OA_0}$ 称作“点 A_0 的曲率半径向量”, 以 ρ_{A_0} 标示。

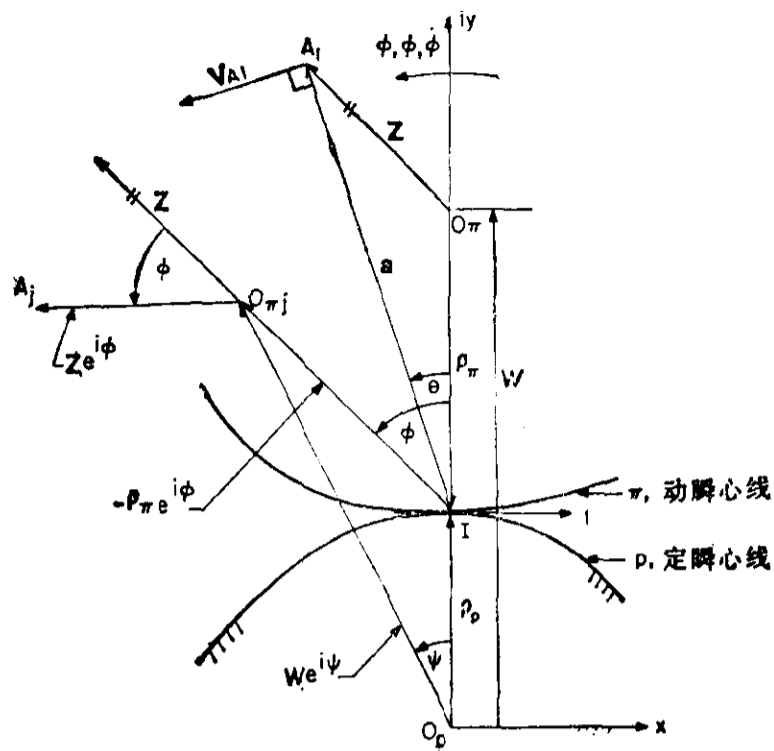


图 4.7 动瞬心线 π 属于运动平面, 而定瞬心线 p 则属于固定平面。 π 和 p 的密切圆(半径为 ρ_π 和 ρ_p) (见图 4.8) 通过瞬心 I 处无限接近的三个点相互滚动

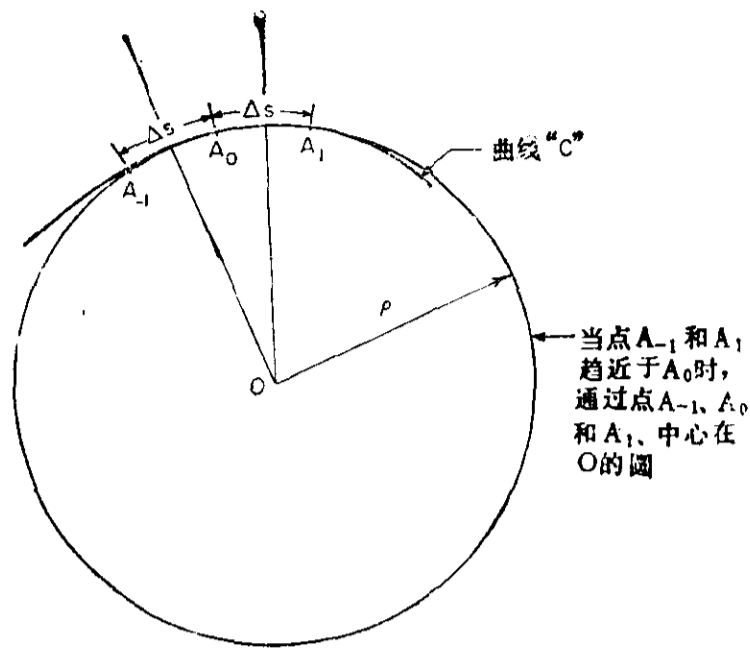


图 4.8 密切圆与任意曲线 c 在三个无限接近的点 A_{-1} 、 A_0 和 A_1 上接触

图 4.7 中标出了密切圆半径 ρ_p 和 ρ_π , 它们分别为定瞬心线和动瞬心线的曲率半径向量。这两个圆分别与各自的瞬心线在切点处有三个点相接触, 该切点就是固定平面和运动平面的瞬心 I 。在运动的进程中, π 在 p 上无滑动地滚动。所以半径为 ρ_π 的密切圆在半径为 ρ_p 的密切圆上通过三个无限接近的点无滑动地滚动。

我们规定设在固定平面内的定坐标系 O_p, x, iy 。同时设 A 为 π 平面上的一个点。 A 的第一个(即现在的)位置是 A_1 , 由下列向量确定其位置, 如图 4.7 所示:

$$\overrightarrow{O_p A_1} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{z} \quad (4.1)$$

式中

$$\boldsymbol{\omega} = \rho_p - \rho_\pi \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{z} = \rho_\pi + \boldsymbol{a} \quad (4.3)$$

\boldsymbol{a} 是向量 $\overrightarrow{I A_1}$, 它在由 I 发出、而与 iy 轴(两个瞬心线在 I 处的公法线)成角 θ 的“射线”上。

点 A_1 到点 A_j 的无限小位移发生之后, 其位置向量变为

$$\overrightarrow{O_p A_j} = \boldsymbol{\omega} e^{i\psi} + \boldsymbol{z} e^{i\phi}$$

式中 ψ 和 ϕ 分别为向量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 \boldsymbol{z} 的无限小转角。

因为密切圆与瞬心线在运动平面的三个无限接近位置上相接触, 所以, 对于多至且包括位移的二阶导数(即, 为了进行速度和加速度分析)的情况, 瞬心线均可以由它们的密切圆代表。因此, 在三个无限接近的位置上, 或者说两个依次的无限接近位移(其中第一个位移是从位置 i 到 j)中, 向量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 \boldsymbol{z} 可以认为是常量。

现在我们集中讨论动瞬心线的密切圆中心 O_{π_0} 。经过无限小位移到 O_{π_j} 之后, 它的位置变为

$$\overrightarrow{O_p O_{\pi j}} = (\rho_p - \rho_\pi) e^{i\psi} \quad \text{或} \quad \overrightarrow{I O_{\pi j}} = -\rho_\pi e^{i\psi}$$

所以, 我们可用两种方法表示 O_π 的速度:

$$V_{O_\pi} = \dot{\overrightarrow{O_p O_{\pi j}}} = \dot{\overrightarrow{I O_{\pi j}}}$$

或
$$V_{O_\pi} = (\rho_p - \rho_\pi) i \dot{\psi} e^{i\psi} = -\rho_\pi i \dot{\phi} e^{i\psi} \quad (4.4)$$

和
$$(\rho_p - \rho_\pi) \dot{\psi} e^{i\psi} = -\rho_\pi \dot{\phi} e^{i\psi}$$

从而
$$\dot{\psi} = \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \frac{e^{i\psi}}{e^{i\psi}} \dot{\phi} \quad (4.5)$$

在起始位置, $\phi = \psi = 0$, 且

$$\dot{\psi} = \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \dot{\phi} \quad (4.6)$$

或者由定义

$$\rho = \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \quad (4.7)$$

得到

$$\dot{\psi} = \rho \dot{\phi} \quad (4.8)$$

我们来考察向量 ρ 的性质。当这两个密切圆位于它们公切线的两侧, 如图 4.7 所示时,

$$\rho = \frac{-\rho_\pi e^{-i\pi/2}}{\rho_p e^{i\pi/2} - \rho_\pi e^{-i\pi/2}} = \frac{\rho_\pi e^{i\pi/2}}{\rho_p e^{i\pi/2} + \rho_\pi e^{i\pi/2}} = \frac{\rho_\pi}{\rho_p + \rho_\pi} \left. \begin{array}{l} > 0 \\ < 1 \end{array} \right\} \quad (4.7a)$$

所以, 对于这种情况, ρ 是正实数。然而, 如果两个密切圆在公切线的同一侧, 而且 $\rho_p > \rho_\pi$ (图 4.9a), 则

$$\rho = \frac{-\rho_\pi e^{i\pi/2}}{\rho_p e^{i\pi/2} - \rho_\pi e^{i\pi/2}} = \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} < 0 \quad (4.7b)$$

所以, 这时 ρ 是负实数。但是, 如果如图 4.9b 所示 $\rho_p < \rho_\pi$, 则

$$\rho = \frac{-\rho_\pi e^{i\pi/2}}{\rho_p e^{i\pi/2} - \rho_\pi e^{i\pi/2}} = \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} = \frac{\rho_\pi}{\rho_\pi - \rho_p} > 1 \quad (4.7c)$$



图 4.9 向量 ρ 的值: $\rho = \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi}$, 在图(a), ρ 是负实数; 在图(b), ρ 是正实数, 而且恒大于 1 [见式(4.7b)和(4.7c)]

① 原文如此, 下同——译者注。

这里 ρ 是大于 1 的正实数。

把 ψ 和 ϕ 当作图 4.7 和 4.9a 中的 π 圆在 p 圆上的一个微小滚动位移, ρ 的这些值可以如图 4.10 所示来进行验证。

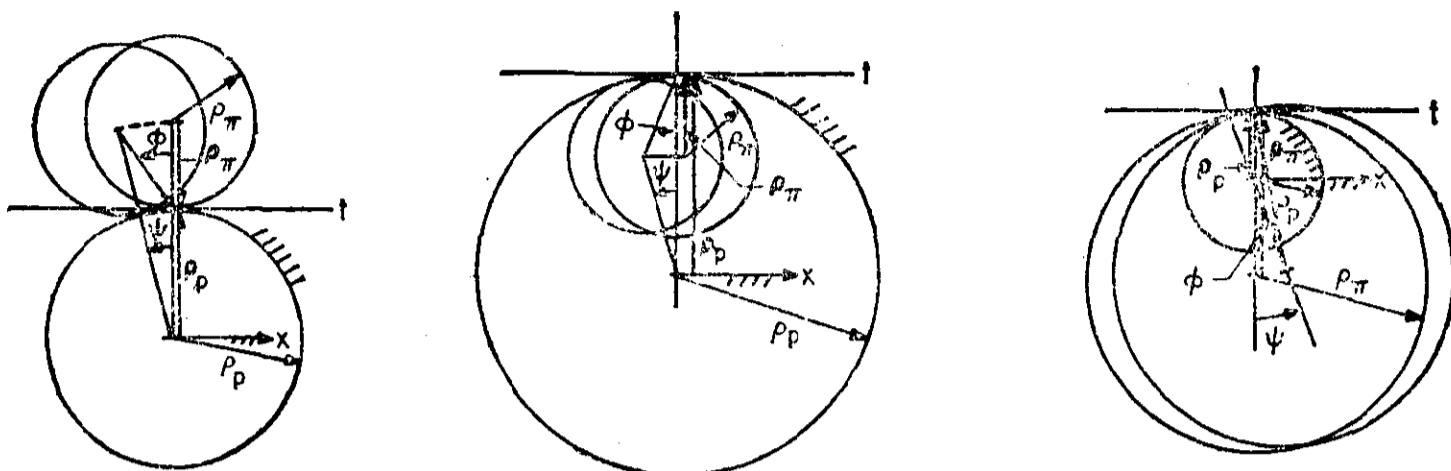


图 4.10 用使式(4.8) $\psi = \rho\phi$ 形象化的方法来在几何上验证式(4.7)中向量 ρ 的值。对于本图中的三个位形: (a) ρ 是小于 1 的正实数; (b) ρ 为负实数, (c) ρ 是大于 1 的正实数

在图 4.10a 中, 两个密切圆位于它们公切线 t 的两侧, 显然, 对于一个微小的正(逆时针)位移, $\psi < \phi$, 并且两者的方向相同。所以 $\psi < \phi$, 且其方向相同。这就验证了在这种情况下, 式(4.8)中, $0 < \rho < 1$, 为实数, 与上述解析所示结果相同。

在图 4.10b 中, 两个密切圆在公切线 t 的同一侧, 并且 $\rho_p > \rho_\pi$ 。这里, ψ 和 ϕ 方向相反, 且 $|\psi| \geq |\phi|$, 这就验证了在这种情况下, $\rho < 0$, 是实数, 与上述推导结果相同。

最后, 在图 4.10c 中, 两个密切圆在公切线 t 的同一侧, 但现在 $\rho_p < \rho_\pi$, 并且, 当 ψ 和 ϕ 的方向相同时, ψ 总是大于 ϕ 。所以, 对于这一情况, 作为上述解析法推导的结果, $\rho > 1$, 且为实数这个事实, 现在用几何方法得到了验证。

我们也可不用式(4.7)的向量符号, 而用式(4.7a)、(4.7b)和(4.7c)右端所示的标量符号, 即仅用 ρ_p 和 ρ_π 的大小来定义 ρ 。但是, 这时必须为这些值建立一个“正、负号规则”, 这样一来, 就破坏了式(4.7)向量形式的一般性, 而式(4.7)在所有情况下都是相同的。因为复数向量形式很容易用 FORTRAN 语言编程, 所以, 本书将用复数向量形式, 而没有必要再用传统的正、负号规则。在轨迹曲率理论的这一处理方法中多次明显地表现出利用复数的一般性这种实际的优点, 它使推导出的公式适用于所有的几何位形, 而不必再用传统的、难以编程的正负号规则。密切圆的几何位置与 ρ 值的关系如图 4.11 所示。

还有一点值得注意的是, 虽然在推导过程中为了方便起见, 我们所用的坐标系的实轴、虚轴分别与滚动曲线(瞬心线) p 和 π 的公切线、公法线相一致, 但是式(4.7a)、(4.7b)和(4.7c)的结果和坐标系的选择是无关系的。这是正确的, 因为, ρ_p 和 ρ_π 永远是共线的, 所以在公式中, 它们的单位向量就约掉了, 只剩下它们带有适当代数符号的模 ρ_p 和 ρ_π 。例如, 取式(4.7a), 在指数中不用 $\pi/2$, 而用任一任意角 ϕ , 显然, 结果是与上述相同的实数。这一与坐标系的选择无关的性质对于用复数作的所有推导都是适用的。因此, 在所有推导以及所有解题中, 我们可以随意选取任何一个方便的坐标系。

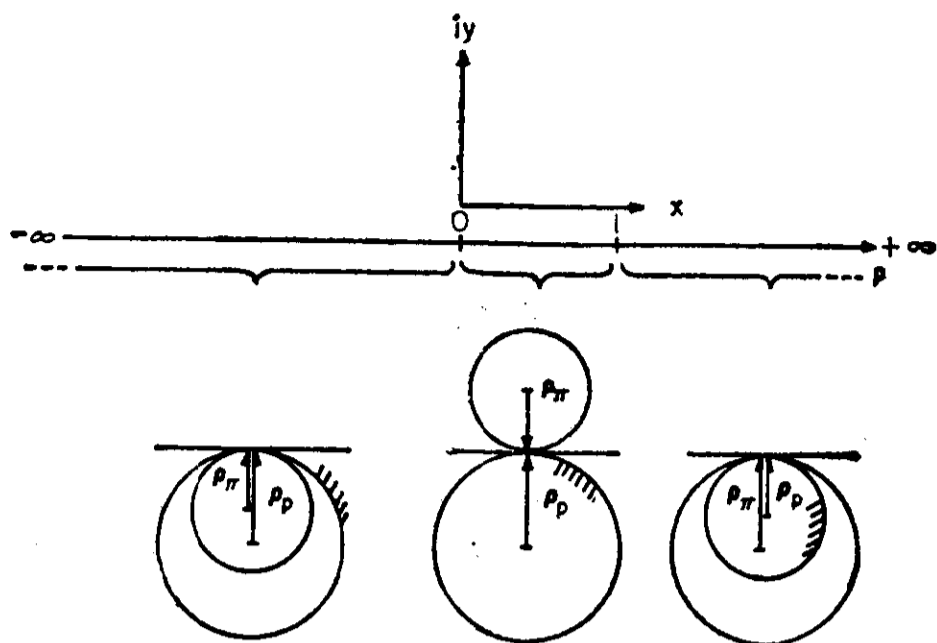


图 4.11 向量 ρ 的值与滚动曲线密切圆的各种几何位置的关系

为了求点 A 的速度, 我们从取 A_j 的位置向量(见图 4.7)的导数开始:

$$\mathbf{V}_{A_j} = \dot{\mathbf{O}_p A_j} = \omega i \psi e^{i\psi} + z i \phi e^{i\psi} \quad (4.9)$$

当应用于位置 1 时, $\psi = \phi = 0$, 式(4.9)成为

$$\mathbf{V}_{A_1} = i \dot{\psi} \omega + i \dot{\phi} z \quad (4.10)$$

将式(4.2)、(4.3)、(4.8)代入式(4.10)后得到

$$\mathbf{V}_{A_1} = i \rho \dot{\phi} \omega + i \dot{\phi} (a + \rho_\pi) \quad (4.11)$$

或

$$\mathbf{V}_{A_1} = i \dot{\phi} (a + \rho \omega + \rho_\pi) \quad (4.12)$$

但

$$\rho \omega + \rho_\pi = \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} (\rho_p - \rho_\pi) + \rho_\pi = 0 \quad (4.13)$$

所以

$$\mathbf{V}_{A_1} = i \dot{\phi} a \quad (4.14)$$

这一公式符合众所周知的事实, 即运动平面上一个点的绝对速度等于那一点与该平面相对于固定平面的瞬心之间的速度差(见第一卷第三章)。例 4.1 将证明这一点。

例 4.1

给定图 4.12 中四杆机构 $O_A A B O_B$ 及其连杆的角速度, 求连杆上点 C 的绝对速度。

解 用公式(4.14):

$$\mathbf{V}_C = i \dot{\phi} a \quad (4.15)$$

首先, 注意在式(4.15)中, $\dot{\phi} = \omega_3 = -1 \text{ rad/s}$ 。为了求 a , 作出瞬心 $I_{1,3}$, 画出向量 $\overrightarrow{I_{1,3} C}$ 。于是 $\mathbf{V}_C = i \dot{\phi} a = i(-1) a e^{i\alpha}$, 式中 a 量得为 9.3 cm , α 为 a 的幅角, 也从图中量出。所以, $\mathbf{V}_C = -(9.3) i e^i \text{ cm/s}$, 图中以与 a 不同的比例画出。

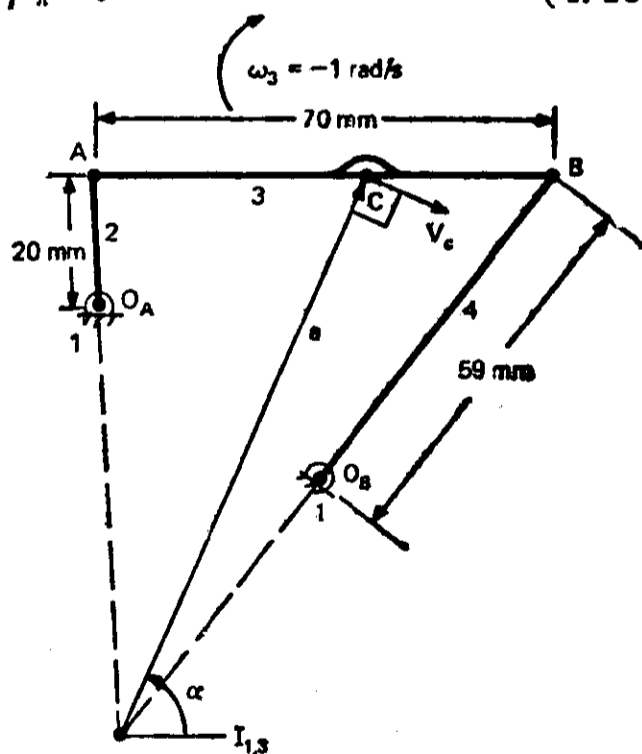


图 4.12 用瞬心 $I_{1,3}$ 计算四杆机构 $O_A A B O_B$ 上连杆点 C 的速度(见例 4.1)

在例 4.1 中,我们一直用的是图解-解析法,使人回想起第一卷第三章所讨论的速度分析的瞬心法。将这一方法应用于图 4.13 中的四杆机构,可量出 $|c| = |\vec{IC}| = 105 \text{ mm}$, 从而得 $V_C = -105 (\text{mm/s}) e^{i \arg(c)}$ 。现在,我们将说明如何用自动计算得到这一解。为此,我们将给定四杆机构的每个运动构件标作一个向量(见图 4.13)。这些向量是 z_2, z_3 和 z_4 。我们参考任何一个方便的坐标系来规定这些向量,比如说,可以令 O_A 作这一坐标系的原点,而把 iy 轴取在 z_2 的方向上。从这一例题中将明显地看到,至今我们所推导的全部结果都与坐标系的选择无关。推导中所选用的坐标系是最便于达到目的的一个,但是,它并没有损害所得结果的一般性。

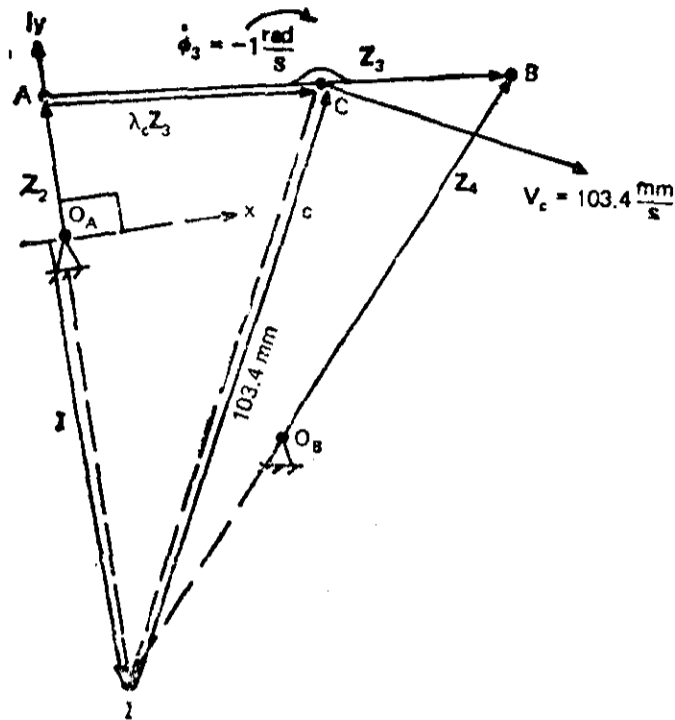


图 4.13 例 4.1: 连杆上某点速度的复数计算法

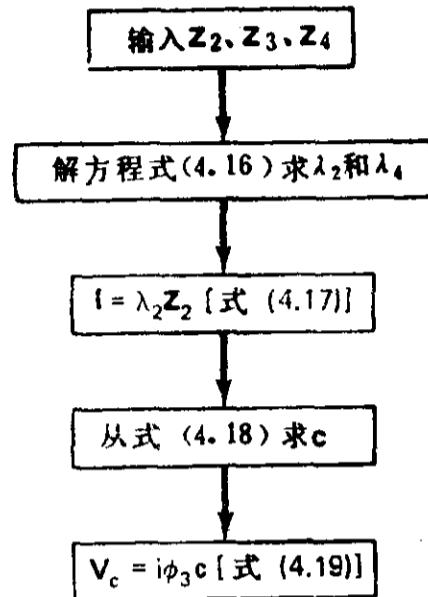


图 4.14 用复数法计算四杆机构连杆上某点速度的流程

在所选坐标系内, $z_2 = 0 + i23$, $z_3 = 78 - i8$, $z_4 = 47.5 + i54$, 式中长度单位都是 mm, $\lambda_C = 0.6$ 和 $\phi_3 = -1 \text{ rad/s}$ 。计算流程示于图 4.14。首要任务是求瞬心 I :

$$\vec{I} = \vec{O_A I} = \lambda_2 z_2 = z_2 + z_3 - z_4 (1 + \lambda_4)$$

或

$$z_2 (1 - \lambda_2) + z_3 - z_4 (1 + \lambda_4) = 0 \quad (4.16)$$

$$I = \lambda_2 z_2 \quad (4.17)$$

$$\vec{IC} = c = -I + z_2 + \lambda_C z_3 \quad (4.18)$$

$$V_C = i \phi_3 c \quad (4.19)$$

将数值代入式(4.16)得到

$$(0 + i23)(1 - \lambda_2) + 78 - i8 - (47.5 + i54)(1 + \lambda_4) = 0$$

$$i23 - i(23)\lambda_2 + 78 - i8 - 47.5 - (47.5)\lambda_4 - i54 - i(54)\lambda_4 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (0)\lambda_2 - (47.5)\lambda_4 &= -30.5 \\ -(23)\lambda_2 - (54)\lambda_4 &= 39 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_4 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -30.5 \\ -23 & 39 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -47.5 \\ -23 & -54 \end{vmatrix}} = \frac{-30.5}{-47.5} = 0.642$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} -23 & -54 \\ -30.5 & -47.5 \end{vmatrix}}{-47.5(23)} = -3.2$$

$$I = (0 + i23)(-3.2) = 0 - i74$$

$$= (0 + i74) + (0 + i23) + 0.6(78 - i8) = 0.6(78) + i[74 + 23 - 0.6(8)] = 46.8 + i(92.2)$$

$$= 103.4 \text{ mm} e^{i83.09^\circ}$$

$$V_C = i \phi_3 c = i(-1)[46.8 + i(92.2)] = 92.2 - i(46.8) = 103.4 (\text{mm/s}) e^{i(-26.91^\circ)}$$

这与图解-解析组合法的结果一致,其偏差在图解作图精度范围以内。

4.4 加 速 度

为了求图 4.15 中点 A 在位置 A_1 的加速度,我们再次从 A_j 的速度[式(4.9)]开始,并取它对时间的导数:

$$A_{A_j} = \dot{V}_{A_j} = \omega \dot{\psi} e^{i\psi} - \omega \psi^2 e^{i\psi} + z \dot{\phi} e^{i\phi} - z \phi^2 e^{i\phi} \quad (4.20)$$

或
$$A_{A_j} = (i\dot{\psi} - \psi^2) \omega e^{i\psi} + (i\dot{\phi} - \phi^2) z e^{i\phi} \quad (4.21)$$

在位置 A_1 , $\psi = \phi = 0$, 该式简化为

$$A_{A_1} = (i\dot{\psi} - \psi^2) \omega + (i\dot{\phi} - \phi^2) z \quad (4.22)$$

取方程(4.8)对时间的导数得

$$\dot{\psi} = \rho \dot{\phi}$$

利用上式和式(4.2)、(4.3)和(4.7),式(4.22)变成

$$A_{A_1} = \left[i \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \dot{\phi} - \left(\frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \phi \right)^2 \right] (\rho_p - \rho_\pi) + (i\dot{\phi} - \phi^2) (a + \rho_\pi)$$

或
$$A_{A_1} = -i\rho_\pi \dot{\phi} - \frac{\rho_\pi^2}{\rho_p - \rho_\pi} \phi^2 + i\dot{\phi} a + i\dot{\phi} \rho_\pi - \phi^2 a - \phi^2 \rho_\pi$$

归并同类项,得到

$$A_{A_1} = i\dot{\phi} (-\rho_\pi + a + \rho_\pi) - \phi^2 \left(\frac{\rho_\pi^2}{\rho_p - \rho_\pi} + a + \rho_\pi \right)$$

再简化为

$$A_{A_1} = i\dot{\phi} a - \phi^2 a - \phi^2 \rho_\pi (1 - \rho) \quad (4.23)$$

上式第一项是轨迹切向加速度分量,第二项为向心分量,第三项是纯虚数,因为 ρ_π 是沿虚轴(图 4.15)定义的,而 ρ 是正或负实数。为了考察这一项,我们把 ρ 用“瞬心迁移速度”(“instant center transfer velocity”)这个运动量 u 来表示。 u 定义为当 π 在 ρ 上滚动时,瞬心 I 的位置沿 p 对时间的变化率。

参考图 4.15, I_j 的位置向量为

$$\overrightarrow{O_p I_j} = \rho_p e^{i\psi}$$

在 I_j 处瞬心迁移速度是 $u_j = \rho_p \dot{\psi} e^{i\psi}$ 。对于 I , $\psi = 0$, 该式简化为

$$u = i\dot{\phi} \rho_p = i\dot{\phi} \rho_p \rho = i\dot{\phi} \frac{-\rho_p \rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \quad (4.24)$$

式(4.24)说明 u 在运动变换下是不变量: $\dot{\psi}$ 和 $-\rho_p \rho_\pi / (\rho_p - \rho_\pi)$ 都改变符号,但它们的大小保持不变。

现在,我们来定义向量 δ 如下:

$$\delta \equiv -i \frac{u}{\dot{\phi}} = \frac{-\rho_p \rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} = \rho_p \rho; \text{ 于是 } u = i\dot{\phi} \delta \quad (4.24a)$$

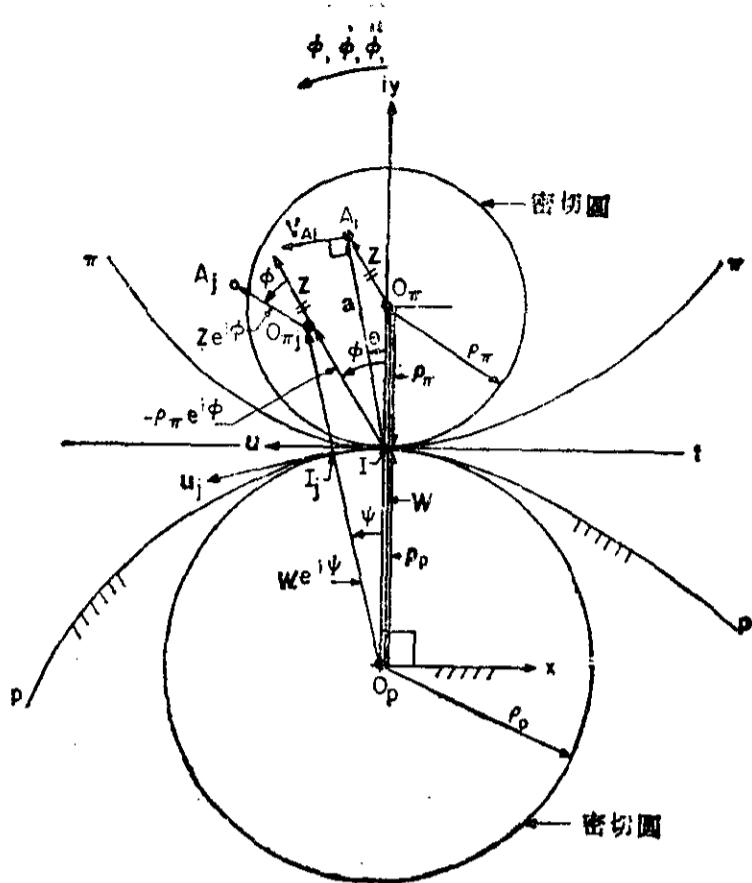


图 4.15 定义和推导 u 的复数向量符号, u 为“瞬心迁移速度”, 即对滚曲线 π 和 p 的切点位置沿曲线 p 的向量变化率

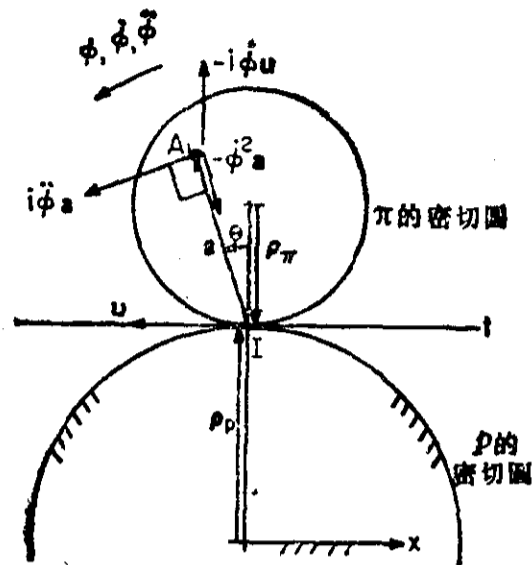


图 4.16 点 A 加速度的切向分量、向心分量和“不变”分量。对于 π 上所有的点, 包括瞬时地与瞬心 I 重合的点 (即 I_π), 加速度的不变分量都是相同的。所以 $A_{I_\pi} \parallel -i\phi u$

由此

$$\frac{\delta}{\rho_\pi} = \frac{-\rho_p}{\rho_p - \rho_\pi} = \frac{-\rho_p}{\rho_p - \rho_\pi} + \frac{\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} + \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} = -1 + \rho$$

且

$$\rho = 1 + \frac{\delta}{\rho_\pi} \quad (4.25)$$

注意, 对于图 4.10a 中的情况来说, $0 < 1 + \delta/\rho_\pi < 1$, 正如前面 (见练习 4.1) 所证明的 $0 < \rho < 1$ 。对于图 4.10b 和 c 的情况, 再参阅读练习 4.2 和 4.3, 这就验证了只要式 (4.25) 写成复数向量的形式, 它就完全具有一般性。

利用式 (4.25) 和 (4.24a), 式 (4.23) 的最后一项变成

$$-\phi^2 \rho_\pi \left(1 - 1 - \frac{\delta}{\rho_\pi}\right) = \phi^2 \delta = \phi^2 \left(-i \frac{u}{\phi}\right) = -i\phi u \quad (4.26)$$

将上式代入式 (4.23) 得到

$$A_{A1} = i\phi\dot{a} - \phi^2 a - i\phi u \quad (4.27)$$

显然, A_{A1} 的最后一项是纯虚数。对于图 4.10 a 的情况, A_{A1} 的所有三个项示于图 4.16。不过, 式 (4.27) 是复数向量形式, 可以非常普遍地应用, 并且, 一旦 $\rho_p, \rho_\pi, a, \phi$ 和 $\phi\dot{a}$ 已知, A_{A1} 正确的符号和大小就能容易地从该式画出或算出。第三项的本质是通过观测到这一项对于 π 平面上所有的点都不变而揭示出来的。例如, 如果我们把 a 缩短到零, 从而使点 A_1 趋于 I , 则得到 π 平面上瞬时地与瞬心重合的点 I_π 的加速度:

$$A_{I_\pi} = i\phi u \quad (4.28)$$

有些作者称 $A_{I\pi}$ 为“极加速度”。这种叫法把很多学生弄糊涂了,因为“极点”,或更正确地说,瞬心是沿着定瞬心线 p 迁移的。所以,我们建议把这一项称作“加速度的不变分量”(invariant acceleration component),因为它对于 π 平面上所有的点都是相同的。

4.5 转折点和转折圆

将式(4.27)中的第三项投影到轨迹切线 ia 和轨迹法线 a 上。而把它分解为切向与法向分量。为此,下面来定义“投影算子”(projection operator)。

投影算子将一个向量回转到与另一向量作用线相平行的方向上,并将其大小乘以该两个向量夹角的余弦(图 4.17)。图中, $e_1 = e^{i\beta_1}$ 和 $e_2 = e^{i\beta_2}$ 分别为该两个向量的单位向量。将 z_1 投影到 z_2 上的投影算子定义为

$$p_{12} \equiv \cos(\beta_2 - \beta_1) e^{i(\beta_2 - \beta_1)} \quad (4.29)$$

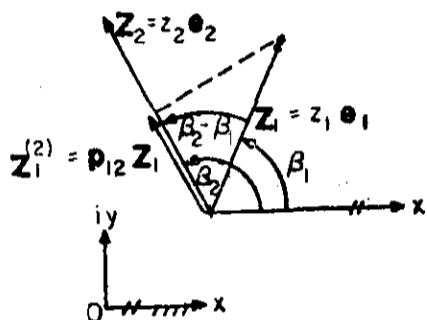


图 4.17 将式(4.29)中的“投影算子” p_{12} 用于 z_1 而得出 z_1 在 z_2 方向上的分量

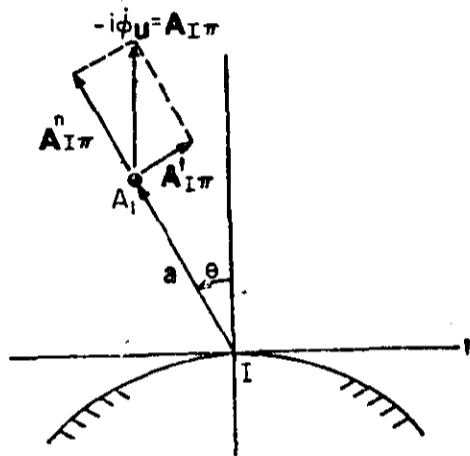


图 4.18 加速度不变分量 $-i\phi u$ 分解为切向分量与法向分量

用这个定义, z_1 在 z_2 上的投影为

$$z_1^{(2)} = p_{12} z_1 = \cos(\beta_2 - \beta_1) e^{i(\beta_2 - \beta_1)} z_1 e^{i\beta_1} = \cos(\beta_2 - \beta_1) z_1 e^{i\beta_2} \quad (4.30)$$

将这一定义应用于加速度不变分量,所用的由 $-iu$ 方向到 ia 方向(图 4.18)的投影算子 p_t 为

$$p_t = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) e^{i[\theta + (\pi/2)]} = -(\sin\theta) e^{i[\theta + (\pi/2)]}$$

据此,式(4.27)中第三项的切向分量成为

$$p_t A_{I\pi} = -(\sin\theta) e^{i[\theta + (\pi/2)]} (-i\phi u) = A_{I\pi}^t$$

由 $-iu$ 到 a 的投影算子为

$$p_n = (\cos\theta) e^{i\theta}$$

据此

$$p_n A_{I\pi} = (\cos\theta) e^{i\theta} (-i\phi u) = A_{I\pi}^n$$

和

$$A_{I\pi} = -i\phi u = -(\sin\theta) e^{i[\theta + (\pi/2)]} (-i\phi u) + (\cos\theta) e^{i\theta} (-i\phi u) \quad (4.31)$$

图 4.18 表示这两个分量。将式(4.31)代入式(4.27),并将切向与法向分量分开得

$$\left. \begin{aligned} A_{A_1}^t &= i\dot{\phi}a - (\sin\theta)e^{i[\theta+(\pi/2)]}(-i\phi u) \\ A_{A_1}^n &= -\phi^2 a + (\cos\theta)e^{i\theta}(-i\phi u) \end{aligned} \right\} A_{A_1} = A_{A_1}^t + A_{A_1}^n \quad (4.32)$$

现在,我们将转折点定义为平面 π 上的点,它在该瞬间正通过其相对于固定平面 p 的轨迹上的转折点。这样的一些点在其轨迹的法线方向上应该没有加速度(即 $A_{A_1}^n = 0$)。因此,从下列方程解出 a 就能在 θ 方向的射线(IA_1 的延线)上求出这样的点:

$$-\phi^2 a + (\cos\theta)e^{i\theta}(-i\phi u) = 0 \quad (4.33)$$

从而
$$a = (\cos\theta)e^{i\theta} \left[-i \frac{u}{\phi} \right] = (\cos\theta)e^{i\theta} \delta \quad (4.34)$$

式中,我们用了式(4.24a)对 δ 的定义。式(4.24a)也表示, δ 是两条互相滚动的瞬心线的纯几何特性,它与瞬心线的公法线共线。注意,在式(4.34)的右边, $(\cos\theta)e^{i\theta}$ 是将 δ 向 θ 射线投影的投影算子。这描绘在图 4.19 中,说明当允许 θ 变化时, a 描出运动平面 π 上所有转折点的轨迹,这是直径为 δ 、在 I 与公切线 t 相切的圆。向量 δ 的矢端,标作 J 的点,称作转折点(inflexion pole),相应于所有 θ 值的 J 轨迹称作转折圆。向量 a 的矢端在转折圆上,这些点标以 J_θ ,称作转折点。

转折圆属于运动平面 π 。然而,它的存在仅是瞬时的,因为瞬心 I 、公切线 t 、公法线和直径向量 δ 全都随两个瞬心线滚动的进行而变化。所以,转折圆必须以平面 π 的每个位置分别作出。这以简图的形式示于图 4.20。

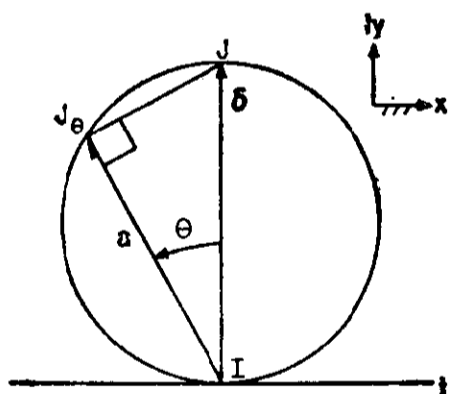


图 4.19 “转折圆”是“转折极” J 在 θ 射线上投影的轨迹

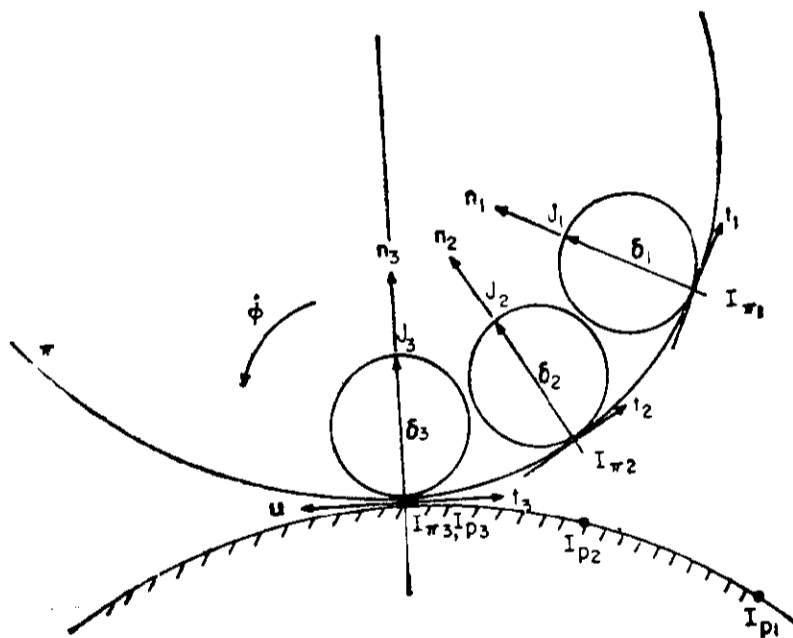


图 4.20 转折圆仅存在于一瞬间,一般说,它是随 π 在 p 上滚动而变化的

每一个转折点作为运动平面 π 上的点,其轨迹与该轨迹的“曲率圆”,即“轨迹的密切圆”是二阶接触(即有三个无限接近的接触点),而这里,“曲率圆”的曲率为零(即半径无限大),亦即成为一条直线。设计师经常利用这一特性来设计能描出具有三个无限接近精确点的近似直线轨迹发生器。虽然得出的连杆机构经常能在可感觉出的距离内描出满意的近似直线,但不能保证在某个具体情况都能有这种结果。

为了描绘出一条准确的直线,轨迹点必须在运动平面的每个位置上与转折点重合,即轨迹点

必须永远在转折圆上。实现这一目的的一个方法已由卡当(Cardano)在卡当机构中得到了证明。卡当机构是一个行星齿轮系，其中行星齿轮在尺寸为行星轮两倍的内齿太阳轮内滚动。该机构示于图 4.21,并在例 4.2 中以解析法作了研究。

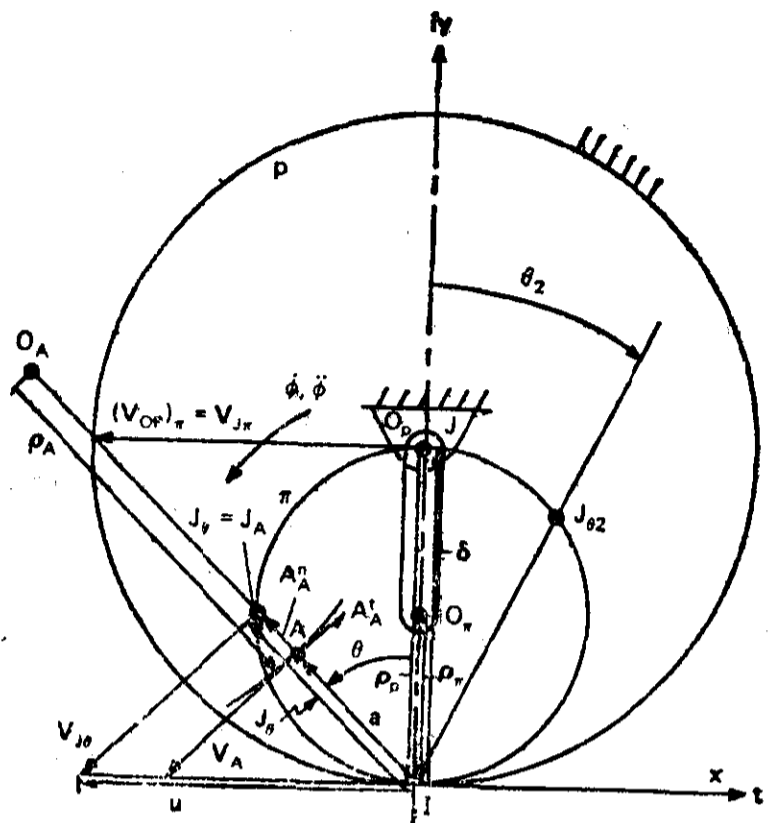


图 4.21 卡当机构: 齿轮 π 在大小为它的两倍的太阳轮 p 内滚动(见例 4.2)

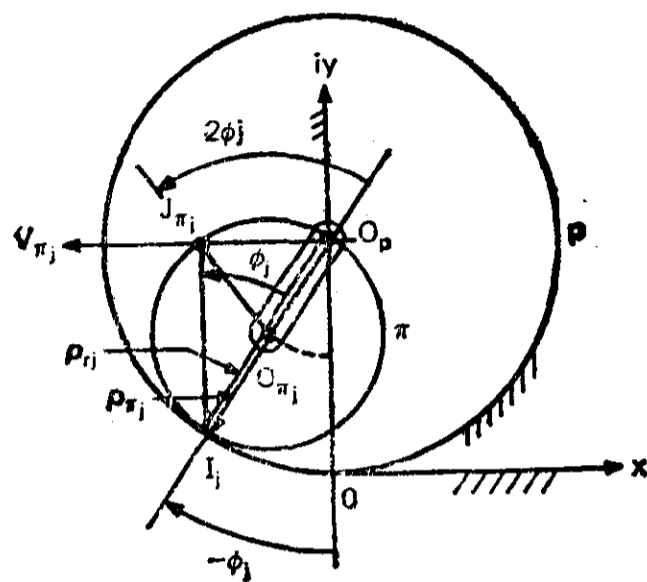


图 4.22 卡当行星轮周边上一个点描出卡当太阳轮的一条直径的运动学证明

例 4.2

令

$$\rho_p = 0 - i2$$

$$\rho_\pi = 0 - i1$$

于是从式(4.7)得到

$$\rho = \frac{-\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} = \frac{i1}{-i2 + i1} = \frac{1}{-1} = -1$$

由式(4.24a)得到

$$\delta = \frac{-\rho_p \rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} = \rho_p \rho = -i2(-1) = i2$$

所以, $J \equiv O_p$.

设 $\dot{\phi} = 1 \text{ rad/s}$ 。于是 $\mathbf{u} = i\dot{\phi}\delta = i(1)i2 = -2$ 。设 $\theta = (\pi/4) \text{ rad}$, $a = 1$; 则 $\mathbf{a} = 1e^{i(3\pi/4)}$, 由式(4.14)得到

$$\mathbf{V}_A = i\dot{\phi}\mathbf{a} = i(1)1e^{i(3\pi/4)}$$

$$\mathbf{V}_A = 1e^{i(5\pi/4)}$$

(4.14)

从式(4.34)有

$$\mathbf{J}_\theta = \overline{I}J_\theta = (\cos\theta)e^{i\theta\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\pi/4)}i2 = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4)}$$

设 $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ 。于是, 由式(4.32)得到

$$\mathbf{A}'_A = i\ddot{\phi}\mathbf{a} - (\sin\theta)e^{i[\theta + (\pi/2)]}(-i\dot{\phi}\mathbf{u}) = i1[1e^{i(3\pi/4)}] - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(3\pi/4)}[-i(1)(-2)]$$

$$\mathbf{A}'_A = e^{i(5\pi/4)} - \sqrt{2}e^{i(5\pi/4)} = (1 - \sqrt{2})e^{i(5\pi/4)} = (\sqrt{2} - 1)e^{i(\pi/4)}$$

$$A_i^* = -\phi^2 a + (\cos\theta) e^{i\theta} (-i\phi u) = -(1)^2 1 e^{i(3\pi/4)} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\pi/4)} [-i(1)(-2)]$$

$$A_i^* = -e^{i(3\pi/4)} + i\sqrt{2} e^{i(\pi/4)} = (\sqrt{2}-1) e^{i(3\pi/4)}$$

$$V_{J_0} = i\phi J_0 = i(1)\sqrt{2} e^{i(3\pi/4)} = \sqrt{2} e^{i(5\pi/4)}$$

$$A_{j_0}^* = i\ddot{\phi} J_0 - (\sin\theta) e^{i[\theta+(\pi/2)]} (-i\phi u) = i(1)\sqrt{2} e^{i(3\pi/4)} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(3\pi/4)} (i2) = 0$$

$$A_{j_0}^* = -\phi^2 J_0 + (\cos\theta) e^{i\theta} (-i\phi u) = -(1)^2 \sqrt{2} e^{i(3\pi/4)} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\pi/4)} (i2) = 0$$

$J \equiv O_p$ 作为运动平面(行星轮) π 上一个点的速度为:

$$(V_{J_p})_x = (V_{O_p})_x = i\phi\delta = i1(i2) = -2$$

$$(A_{O_p})_x^* = i\ddot{\phi}\delta - (\sin\theta) e^{i[\theta+(\pi/2)]} (-i\phi u) = i1(i2) - 0 = -2$$

然后,令 $\phi=0$, 计算 A_A 和 A_{J_0} .

$$A_A^* = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(3\pi/4)} (i2) = \sqrt{2} e^{i(\pi/4)}$$

$$A_A^* = -(1)^2 1 e^{i(3\pi/4)} + \sqrt{2} e^{i(\pi/4)} = (\sqrt{2}-1) e^{i(3\pi/4)}$$

$$A_{j_0}^* = 0 - \sqrt{2} e^{i(\pi/4)}$$

$$A_{j_0}^* = -(1)^2 \sqrt{2} e^{i(3\pi/4)} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\pi/4)} (i2) = 0$$

现在我们来求在行星轮 π 滚动任意角 ϕ_j 的过程中, J 作为 π 上一个点 (J_x) 远离点 O_p 的速度。 J_x 的位置示于图 4.22。

现在,在图 4.22,利用 O_x 作为 π 上的一个点,同时又是行星轮支承转臂上的一个点的速度,就容易证明转臂的角速度是 $-\phi$ 。所以,在图 4.22 中,角 $OO_p I_j$ 为 $-\phi_j$ 。由于 p 的周长是 π 周长的两倍,所以,角 $\angle O_p O_x J_x$ 为 $2\phi_j$ 。因此,在图 4.22 中射线 $I_j J_x$ 是垂直的。这一射线与 $I_j O_p$ 的夹角必定是 ϕ_j 。 J_x 的速度垂直于 $I_j J_x$,这就使该速度在图 4.22 中是水平的。这样,因为 ϕ_j 是任意的,所以 J_x 的速度方向决不会改变,从而它的轨迹是一条直线,就是 p 的直径。由于卡当行星轮的几何特性,使圆 π 上的每一点都在某个时刻成为转折极 J ,从而描绘出 p 的一条直径。到此,我们对著名的卡当齿轮对的特性进行了纯运动学的证明。

4.6 欧拉-萨伐里公式^[245]

在图 4.23 中,考虑 θ 射线上的下列四个点:

1. 瞬心 I
2. 一个任意点 A
3. θ 射线(通过 A 的射线)上的转折点 $J_A = J_\theta$
4. 点 A 在平面 p 上描绘的轨迹曲率中心 O_A

并定义下列四个向量,它们都与 θ 射线共线:

1. $a = \overrightarrow{IA}$
2. $J_A = \overrightarrow{IJ_A}$
3. $O_A = \overrightarrow{IO_A}$
4. $\rho_A = \overrightarrow{O_A A}$, 这是轨迹曲率半径向量

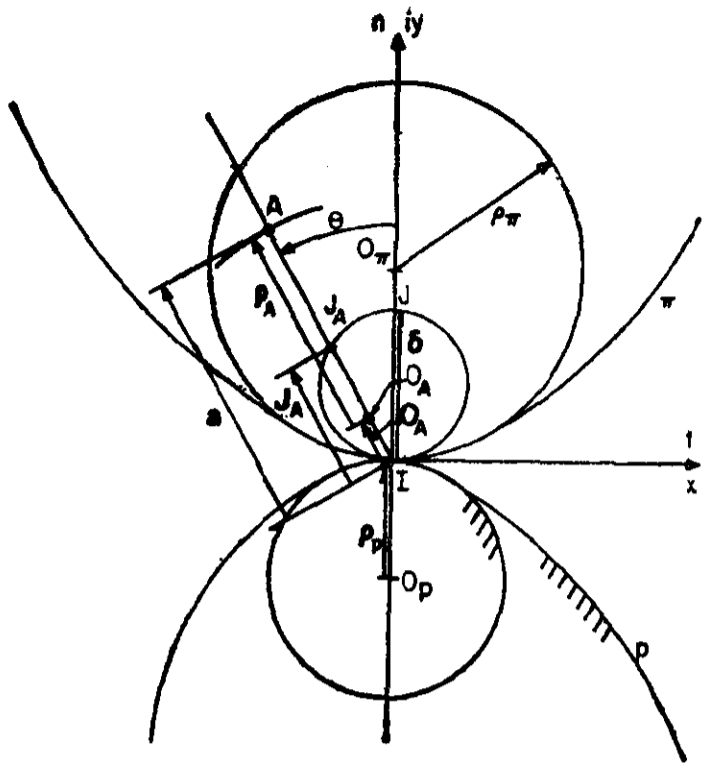


图 4.23 欧拉-萨伐里公式[式(4.40)、(4.41)、(4.43)和(4.45)]的复数形式是向量 α, ρ, J_A 和 O_A 中每一个向量以其它向量表示的显函数,并适合于数字计算机编程

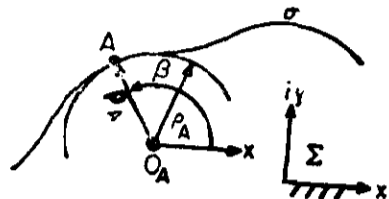


图 4.24 点 A 的轨迹曲率半径 ρ_A 的定义

欧拉-萨伐里公式(以下简称欧-萨公式)把这些向量联系起来,从而为在 I, A, J_A 和 O_A 四个点中任意三点已知的情况下求另一点提供了一个方法。虽然欧-萨公式是一个纯几何概念,但作者相信,对这一公式的各种形式,用复数在运动学方面作易于形象化的推导是很有指导意义的。而且能推导出极适合于数字计算的显式复向量公式。

作为推导的准备,考虑在固定参考平面 Σ 上描绘出任意轨迹 σ 的某一点 A(图 4.24)。从初等质点运动学熟知下列公式

$$A_A^n = -(\beta)^2 \rho_A \quad (4.35)$$

式中 ρ_A 是轨迹 σ 在点 A 的曲率半径向量。注意,轨迹曲率中心 O_A 是固定在平面 Σ 上的。所以,在图 4.23 中考虑固定在平面 p 上的点 O_A ,并观察到绕 O_A 回转的曲率半径向量 ρ_A 的角速度(比如称作 γ)为

$$\dot{\gamma} = \phi \frac{a}{\rho_A} \quad (4.36)$$

注意, a/ρ_A 是一个实数,其正、负根据 a 和 ρ_A 的方向相同或相反来定。所以,将式(4.35)和(4.36)应用到图 4.23,得到

$$A_A^n = -(\gamma)^2 \rho_A = -(\phi)^2 \frac{a^2}{\rho_A^2} \rho_A \quad (4.37)$$

注意,利用式(4.24a),有

$$-i\phi u = -i\phi i\phi\delta = (\phi)^2\delta \quad (4.38)$$

将式(4.37)与(4.32)相结合,得到

$$-(\phi)^2 \frac{a^2}{\rho_A^2} \rho_A = -\phi^2 a + (\cos\theta) e^{i\theta} \phi^2 \delta$$

消去 ϕ^2 , 再利用 $(\cos\theta)e^{i\theta}\delta = J_A$ 这个事实, 则有

$$-\frac{a^2}{\rho_A^2}\rho_A = J_A - a \quad (4.39)$$

或

$$\frac{-\rho_A}{\rho_A^2} = \frac{J_A - a}{a^2} \quad (4.39a)$$

对式(4.39a)的左边:

$$\frac{-\rho_A}{\rho_A^2} = -\frac{1}{\rho_A} e^{i\arg\rho_A} = \frac{1}{\rho_A} (-e^{i\arg\rho_A})$$

式(4.39a)的右边:

$$J_A - a = |J_A - a| e^{i\arg(J_A - a)} = |J_A - a| (-e^{i\arg(a - J_A)})$$

根据这些, 取其倒数, 然后再取式(4.39a)的绝对值, 得到

$$\rho_A = \frac{a^2}{|a - J_A|}$$

使式(4.39a)两边的幅角相等:

$$\arg\rho_A = \arg(a - J_A)$$

或

$$\rho_A = \frac{a^2}{|a - J_A|} e^{i\arg(a - J_A)} \quad (\text{欧-萨公式-1}) \quad (4.40)$$

我们可以把式(4.40)认为是欧-萨公式的第一种形式, 用于点 I, A 和 J_A 已知, 求点 O_A 的情况。

下面来把欧-萨公式-1 用于例 4.2(图 4.21):

$$\begin{aligned} \rho_A &= \frac{a^2}{|a - J_A|} e^{i\arg(a - J_A)} = \frac{(1)^2}{|1e^{i(3\pi/4)} - |\sqrt{2}|e^{i(3\pi/4)}|} [-e^{i(3\pi/4)}] \\ &= \frac{1}{|1 - |\sqrt{2}||} [-e^{i(3\pi/4)}] = \frac{1}{|-(|\sqrt{2}| - 1)|} [-e^{i(3\pi/4)}] = \frac{1}{|\sqrt{2}| - 1} [-e^{i(3\pi/4)}] \\ &= (1 + |\sqrt{2}|) [-e^{i(3\pi/4)}] \end{aligned}$$

这表示在图 4.21 中。为了说明如何避免某些典型的错误, 我们在计算中给出了每一个代数步骤。当然, 在利用复数算法编了数字计算程序后, 就不必有这些步骤了。

式(4.40)用具有“符号校验”功能的复数表示, 这是欧拉-萨伐里公式的第一种形式。用这一公式, 当 a 和 J_A , 即点 I, A 和 J_A 已知, 就可计算出点 A 轨迹的曲率半径向量, 而没有符号疑难, 从而曲率中心 O_A 也可求出。欧-萨公式-1 的幅角部分又说明 A 的轨迹总是凹向 J_A , 而且这一点是传统的欧-萨公式的标量形式所不能指出的。换句话说, 公式的这一部分揭示了 O_A 永远和 J_A 在 A 的同一侧, 而这一点在通常的标量欧-萨公式的计算中必须记住并分别应用。所以, 可以看出, 欧-萨公式-1 这个形式能很好地适应自动计算。

在欧-萨公式-1 的绝对值部分中, 如果 $a \rightarrow J_A$ (即, 如 A 在它的那条射线上趋近转折点), 则正如在转折点处应该的那样, $\rho_A \rightarrow \infty$ 。观察一下当 A 趋近 I 时会出现什么现象也是有意义的。为此, 令欧-萨公式-1 中第一部分里的 $a = \epsilon$, 其 ϵ 是一个小量, 再令 $\epsilon \rightarrow 0$ 则:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_A = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{|a - J_A|} = 0 \textcircled{1}$$

所以我们看到,当 A 趋近 I , 则 $\rho_A \rightarrow 0$, 轨迹出现尖点。至于在尖点附近轨迹切线的方向,我们来观察当 $a \rightarrow 0$ 的过程中变得非常微小时,欧-萨公式-1的第二部分出现什么情况:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \arg \rho_A = \arg(-J_A)$$

上式说明尖点附近轨迹的切线和通过点 A 的射线共线。然而,在尖点上, $a=0$ 。上式就不再成立,因为零向量没有幅角,也不存在切线。

欧-萨公式的第二种形式很容易通过由方程(4.39)解 J_A 得到:

$$J_A = a - \frac{a^2}{\rho_A^2} \rho_A \text{ (欧-萨公式-2)} \quad (4.41)$$

这可用于 I, A 和 O_A 已知,求 J_A 的情况。

现在我们来解欧-萨公式求 a 。为此进行如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_A} &= \frac{1}{a - (a^2/\rho_A^2)\rho_A} = \frac{1}{a - (a^2/\rho_A^2)\rho_A e^{i \arg \rho_A}} \\ &= \frac{1}{a - (a^2 e^{i2 \arg a} / \rho_A^2 e^{i2 \arg a}) \rho_A e^{i \arg \rho_A}} \end{aligned}$$

考虑 $e^{i \arg \rho_A} / e^{i2 \arg a}$, 则

$$e^{i \arg \rho_A} = \begin{cases} +e^{i \arg a} & \text{或} \\ -e^{i \arg a} \end{cases}$$

先取“+”号。于是

$$\frac{e^{i \arg \rho_A}}{e^{i2 \arg a}} = \frac{e^{i \arg \rho_A} / e^{i \arg a}}{e^{i \arg a}} = \frac{1}{e^{i \arg \rho_A}}$$

再取“-”号:

$$\frac{e^{i \arg \rho_A}}{e^{i2 \arg a}} = \frac{-1}{-e^{i \arg \rho_A}} = \frac{1}{e^{i \arg \rho_A}}$$

所以,可以写出

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_A} &= \frac{1}{a - (a^2/\rho_A e^{i \arg \rho_A})} = \frac{1}{a - a^2/\rho_A} = \frac{\rho_A}{\rho_A a - a^2} = \frac{\rho_A}{a(\rho_A - a)} \\ \frac{-\rho_A}{a(a - \rho_A)} &= \frac{a - a - \rho_A}{a(a - \rho_A)} = \frac{a - \rho_A}{a(a - \rho_A)} = \frac{a}{a(a - \rho_A)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a - \rho_A} \end{aligned}$$

但是,参照图 4.23, 我们看到 $a - \rho_A = O_A$ 。据此

$$\frac{1}{J_A} = \frac{1}{a} - \frac{1}{O_A} \quad (4.42)$$

这与欧-萨公式传统的标量形式相似,所不同的是,式(4.42)是向量形式,因此包含了向量方向的信息,而不需要传统的符号规则,这在自动计算中是一个重要的优点。解出 a 来,得到

① 原文中还有一步 “ $= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{J_A}$ ” 及 “这里我们用了极限过程中的洛必达法则(L'Hospital's rule)”, 似有误——译者注。

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{J_A} + \frac{1}{O_A} \quad \text{或} \quad \frac{1}{a} = \frac{O_A + J_A}{J_A O_A}$$

和

$$a = \frac{J_A O_A}{O_A + J_A} \quad (\text{欧-萨公式-3}) \quad (4.43)$$

有了欧-萨公式-3,当点 I 、 O_A 和 J_A 在某个射线上的位置已知时,我们就有了能求出轨迹点 A 位置的欧拉-萨伐里公式的一种形式。要再次说明的是,我们有了以显函数从向量 O_A 和 J_A 解出半径向量 a 的一个新的复数形式,它不需要用传统的符号规则,所以极适合于自动计算。

假设在图 4.21(例 4.2)的卡当机构中,我们想在齿轮 π 上找到一个点,能把一个双杆组连接到这个点上以构件 5 为输出(图 4.25),在图示位置的一个小范围内形成一个近似的停歇机构。注意,在这一情况下,销轴 M 和输出杆的方向在这停歇位置上可以任意假定,然后通过和构件 5 的停歇位置成直角三角形 $M O_A I$ 的方法求出 O_A 。取例 4.2 中 O_A 和 J_A 的已知值作为这一任务的数字算例。这里

$$O_A = (2 + \sqrt{2}) e^{i(3\pi/4)} \quad \text{和} \quad J_A = \sqrt{2} e^{i(3\pi/4)}$$

以这些数值,用式(4.43)得

$$a = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) e^{i(3\pi/2)}}{(2 + 2\sqrt{2}) e^{i(3\pi/4)}} = 1 e^{i(3\pi/4)}$$

这就完成了停歇机构的设计。

我们来清理一下到此为止所得到的结果。欧-萨公式-1使我们能在射线上点 I 、 A 和 J_A 的位置已知的情况下确定点 O_A 的位置;欧-萨公式-2 帮助我们在点 I 、 A 和 O_A 已知时求 J_A ,欧-萨公式-3 在点 I 、 J_A 和 O_A 已知时确定点 A 的位置。剩下还有一个情况,即:能否找到欧-萨公式的一种形式。能在点 A 、 O_A 和 J_A 给定时确定 I 的位置呢?点 A 和 O_A 确定了向量 ρ_A ,但所有其它三个向量 O_A 、 J_A 和 a 是未知的。求出这三个向量中的任何一个,就能确定点 I 的位置。我们从欧-萨公式-2 开始:

$$J_A = a - \frac{a^2}{\rho_A^2} \rho_A \quad \text{欧-萨公式-2}$$

$J_A - a = \overrightarrow{AJ_A}$ 已知,所以

$$\overrightarrow{AJ_A} = -\frac{a^2}{\rho_A^2} \rho_A \quad \text{或} \quad \overrightarrow{J_A A} = \frac{a^2}{\rho_A^2} \rho_A$$

从这些公式得到

$$a^2 = \left(\overrightarrow{J_A A} \right) \frac{\rho_A^2}{\rho_A} \quad \text{欧-萨公式-4} \quad (4.44)$$

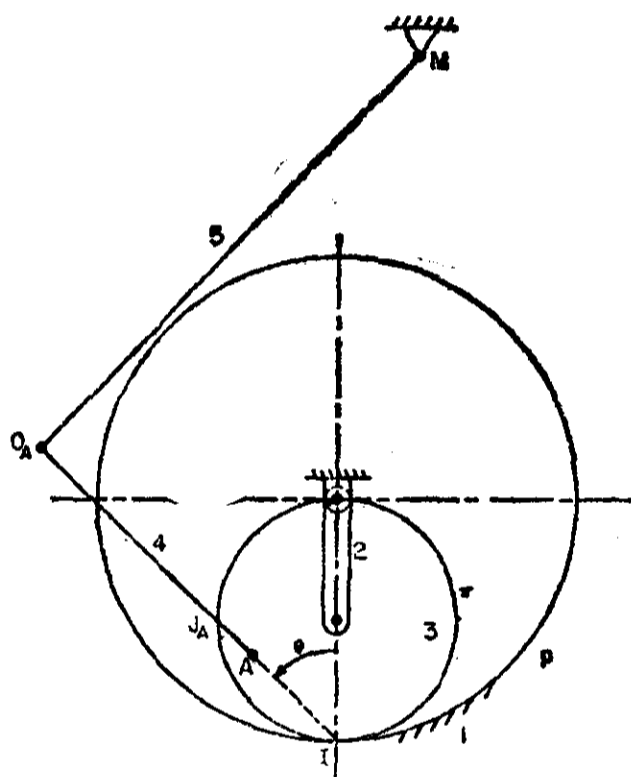


图 4.25 以卡当行星齿轮(内摆线曲柄)机构和行星轮上点 A 的轨迹曲率为基础的停歇机构。点 A 瞬时地描绘一条中心在 O_A 的近似圆弧。所以构件 5 作瞬时“停歇”(见例 4.2)

这是欧拉-萨伐里公式的第四种形式。既然欧-萨公式-1已经指出点 J_A 和 O_A 总是沿着射线在 A 的同一侧, 所以 $\overrightarrow{J_AA}$ 和 $\overrightarrow{O_AA} = \rho_A$ 的幅角是相同的。其结果是, 式(4.44)的右边始终是正的, 并且它的平方根是实数:

$$a = \pm \sqrt{\frac{\overrightarrow{J_AA} \rho_A^2}{(\overrightarrow{J_AA}) \rho_A}} = \pm \rho_A \sqrt{\frac{\overrightarrow{J_AA}}{\rho_A}} = \pm \rho_A \sqrt{\frac{|\overrightarrow{J_AA}|}{\rho_A}} = \pm \sqrt{|\overrightarrow{J_AA}| \rho_A} \quad (4.44a)$$

注意, 式(4.44)也可以更直接地从欧-萨公式-1推导出(见练习4.6)。这一平方根的正、负号如何选择呢? 由于 a 是绝对值, 则它一定是正的。但它的幅角怎样呢? 换句话说, $\arg a$ 是多大? a 的指向是不是与其它已知向量 $\overrightarrow{J_AA}$ 、 ρ_A 或 $\overrightarrow{O_AA}$ 中的某一个相一致呢? 答案是向量 a 的两个指向中的任何一个都是能够成立的解。换一种说法是, 可以把 a 的指向假设为沿射线两个方向中的任何一个。但是, 这样, 对式(4.44a)中的平方根必须既用正值又用负值, 从而对于给定的 A 、 O_A 和 J_A 位置得到 I 的两个可能的位置。所以, 欧-萨公式-4可以写成下列显函数的向量形式:

$$a = (|\overrightarrow{J_AA}| \rho_A)^{1/2} (\pm e^{i \arg \rho_A}) \quad (\text{欧-萨公式-4}) \quad (4.45)$$

上式很容易编成计算程序。单位向量 ($e^{i \arg \rho_A}$) 的正、负号的选择可以编成程序, 根据具体问题中的其它信息或要求做出决定。

这一事实也被著名的博比利尔作图法 (Bobillier's construction) 所证实。这可由下列考察得到证明: 由于 $\arg \rho_A$ 和 $\arg(\overrightarrow{J_AA})$ 相等, 所以式(4.44)也可写成标量形式:

$$a^2 = |\overrightarrow{J_AA}| \rho_A \quad \text{或} \quad \frac{\rho_A}{a} = \frac{a}{|\overrightarrow{J_AA}|} \quad (4.46)$$

上式就是博比利尔作图法的基础, 它用于确定 I 、 A 、 O_A 和 J_A 四个点中一个点的位置, 条件是其它三个点已经给定。当 I 是三个给定点之一时, 这一作图法得出那未知的第四点的唯一解。然而, 如果 I 为未知, 则 I 有两个可能的位置, 因它的位置仅仅决定于 a , 而 a 在式(4.44)里是以 a^2 出现的, 从而产生 a 的正根和负根。因而, 我们要来叙述一下博比利尔作图法的几种情况。

4.7 博比利尔作图法

情况 1

在一射线上给定 I 、 A 和 O_A , 用博比利尔作图法求 J_A (图 4.26)。

求解步骤:

过 O_A 作任意直线 1;

过 I 作任意直线 2;

过 A 及直线 1 与 2 的交点 (点 12) 作直线 3;

过 I 作直线 4 平行于直线 1。

过交点 34 作直线 5 平行于直线 2。直线 5 交射线 IO_AA 于 J_A 。

以上作图法与 J_A 的唯一性的证明, 见练习 4.7。

情况 2

在一射线上给定 I 、 A 和 J_A , 用博比利尔作图法求 O_A (图 4.27)。

求解步骤 (图 4.27):

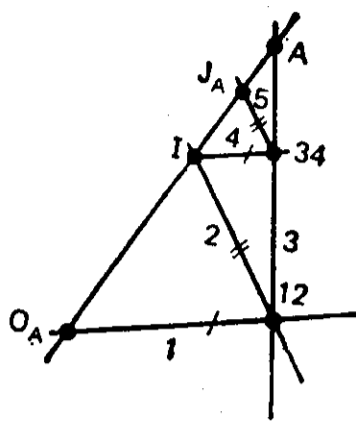


图 4.26 I, A 和 O_A 在射线 IA 上的位置已知, 求转折点 J_A 的博比利尔作图法。一位数字表示作图中画这些直线的程序。两位数字表示这些交点是由哪两条线相交得出的。注意, 直线 1 与 4, 2 与 5 的平行性

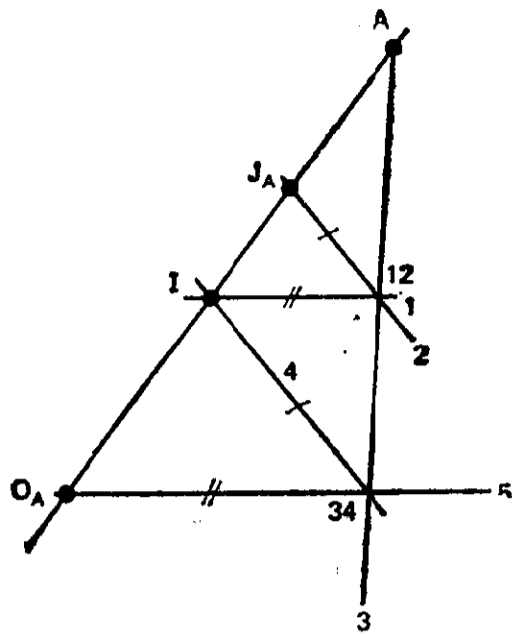


图 4.27 I, A 和 J_A 已知, 求 O_A 的博比利尔作图法 (并见图 4.26 的说明)

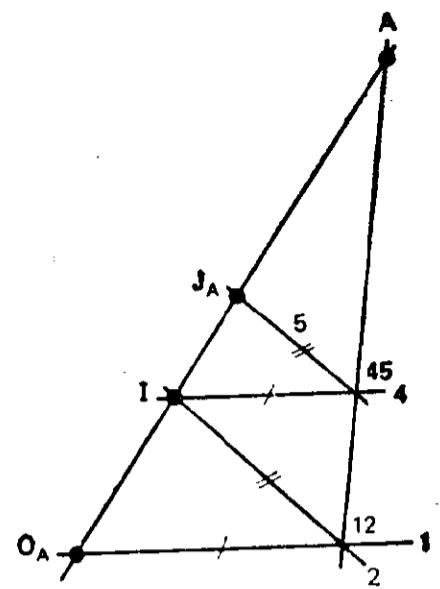


图 4.28 给定 I, J_A 和 O_A , 求 A 的博比利尔作图法 (并见图 4.26 的说明)

- 过 I 作任意直线 1;
 - 过 J_A 作任意直线 2, 形成交点 12;
 - 以直线 3 连接 A 与 12;
 - 过 I 作直线 4 平行于直线 2, 交直线 3 于 34;
 - 过 34 作直线 5 平行于直线 1, 交射线 AJ_AI , 其交点就是 O_A 。
- 以上作图法及其解的唯一性的证明, 见练习 4.8。

情况 3

在一射线上给定 I, O_A 和 J_A , 用博比利尔作图法求 A 。

求解步骤 (图 4.28):

- 过 O_A 作任意直线 1;
 - 过 I 作任意直线 2, 与直线 1 相交, 称该交点为 12;
 - 过 I 作直线 4 与直线 1 平行;
 - 过 J_A 作直线 5 与直线 2 平行, 直至交直线 4 于 45;
 - 过交点 12 与 45 作直线, 并将其延长至与该射线相交。这就确定了 A 的位置。
- 用适当的相似三角形容易验证情况 2, 3 的作图结果与式 (4.46) 是一致的 (见练习 4.8 和 4.9)。

情况 4

在剩下的一个情况中, 令 O_A, A 和 J_A 在射线上给定, 求 I 。求解过程如下 (见图 4.29)。

求解步骤 (图 4.29, 第一解法):

- 过 A 作任意直线 1;
 - 过 J_A 作任意的试探直线 2', 标出它与直线 1 的交点 12';
 - 过 O_A 作任意的试探直线 3', 标出它与直线 1 的交点 13';
 - 过 12' 作直线 4', 与 3' 相平行;
 - 过 13' 作直线 5', 与 2' 相平行。
- 如直线 4' 与 5' 的交点在射线上, 则其交点就是瞬心的第一个解 ($I^{(1)}$)。

如直线 4' 与 5' 的交点不在射线上, 则从第二步开始重复作, 直至其交点在射线上。

在这第一个解法中, 分别通过 J_A 和 O_A 的直线 2' 和 3' 与直线 1 的交点在 A 的同一侧。如果直线 2' 和 3' 作成与直线 1 在 A 的两侧相交, 则得到第二个解。这在下面第二个解法中以过 O_A 的直线 3'' 表示在图 4.29 中。

求解步骤 (图 4.29, 第二解法):

过 A 作任意直线 1;

过 J_A 作任意直线 2', 标出它与直线 1 的交点 12';

过 O_A 作任意直线 3'', 交直线 1 于 13'', 与 12' 比较, 在 A 的另一侧;

过 12' 作直线 4', 与 3'' 相平行;

过 13'' 作直线 5'', 与 2' 相平行;

如直线 4' 与 5'' 的交点在射线上, 则该交点就是 $I^{(2)}$, 即瞬心的第二个解。

如果交点不在射线上, 则从第二步开始重复作, 直至其交点在射线上。

用相似三角形易于证明 $I^{(1)}$ 和 $I^{(2)}$ 满足欧-萨公式-4 [式(4.46)], 且距离 $I^{(1)}A$ 和 $I^{(2)}A$ 的大小相等 (见练习 4.10)。这样, 在上述博比利尔作图中, 我们对下列事实有了几何证实, 即当点 O_A 、A 和 J_A [即向量 ρ_A 和 $(\overrightarrow{J_A A})$] 在射线上给定时, 正如式(4.45)表示的那样, $a = IA$ 有两个解, 它们大小相等, 但符号相反。所以, $(\pm |a| e^{i \arg \rho_A})$ 是向量 a 的两个解。

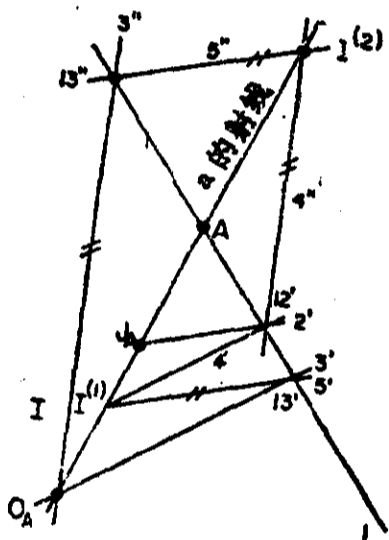


图 4.29 在点 A、 J_A 和 O_A 给定的情况下求 I 的博比利尔作图法给出 I 位置的两个解, 它们在射线 AJ_AO_A 上点 A 的两侧, 距离相等。这与欧-萨公式-4, 即式(4.45)和(4.46)相一致

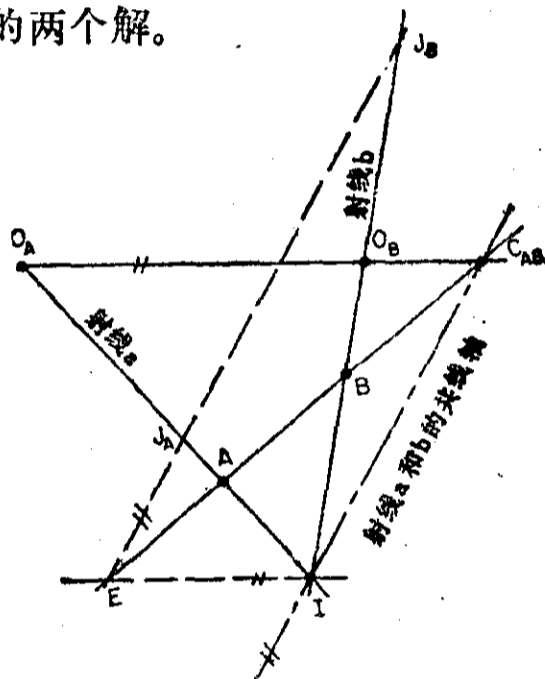


图 4.30 在 A、 O_A 和 B、 O_B 已知时求共线轴的博比利尔作图法

4.8 共线轴

假设我们知道 I 、A、 O_A 、B 和 O_B 的位置, 如图 4.30 所示, 而别的什么也不知道。如果画一条直线通过 A 和 B, 与通过 O_A 和 O_B 的直线相交, 那么就可得到射线 A 和 B 的“共线轴”上的点 C_{AB} , 共线轴通过瞬心 I。博比利尔已证明如何能用共线轴来求转折点 J_A 和 J_B , 即:

过 I 作直线, 与 $O_A O_B$ 平行, 交 AB 于 E;

过 E 作直线, 与共线轴平行, 交 A 和 B 的射线于 J_A 和 J_B 。

用我们的向量符号可证明这一作图法的正确性如下: 从相似三角形

$$\triangle A O_A C_{AB} \approx \triangle A I E$$

则有

$$\frac{a}{\rho_A} = \frac{\overrightarrow{IE}}{\overrightarrow{O_A C_{AB}}} \quad (4.47)$$

从相似三角形

$$\triangle IJ_A E \approx \triangle O_A I C_{AB}$$

有

$$\frac{\overrightarrow{IE}}{\overrightarrow{O_A C_{AB}}} = \frac{J_A}{-O_A} \quad (4.48)$$

将方程(4.47)与(4.48)组合,得到

$$\frac{1}{a} = \frac{-O_A}{\rho_A J_A} = \frac{\rho_A - a}{\rho_A J_A} = \frac{1}{J_A} - \frac{a}{\rho_A J_A} \quad (4.49)$$

但

$$\frac{1}{a} = \frac{-O_A}{\rho_A J_A} \text{ 可写成 } \frac{a}{\rho_A J_A} = -\frac{1}{O_A}$$

和

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{J_A} + \frac{1}{O_A} \text{ 或 } a = \frac{J_A O_A}{O_A + J_A}$$

这就是欧-萨公式-3,即式(4.43). 证毕。

同样,我们可证明 I, B, O_B 和 J_B 满足欧-萨公式(见练习4.11)。事实上,在任何通过 I 的射线上,如有与 A, B 共线的轨迹点,比如说 F ,则有 O_F 与 O_A, O_B 共线, J_F 与 J_A, J_B 共线(见练习4.12)。所以, IC_{AB} 的名称是“共线轴”。现在,任何两条射线,如 A, B 或 A, F , 都可用来确定一个转折圆,方法是利用三个点 I, J_A, J_B 或 I, J_A, J_F , 等等。从而可建立与每一对射线有关的“极点切线”(pole tangent)和“极点法线”(pole normal)。容易证明: 如果 $O_F = J_F$, 则 $f = J_F/2$ (见练习4.13)

引理 任何两条带有给定的 J_A 和 J_B , 通过 I 的射线 a 和 b (图4.31)唯一地确定了它们的通过 I 而与 $J_A J_B$ 相平行的共线轴。这一引理的证明见练习4.14。

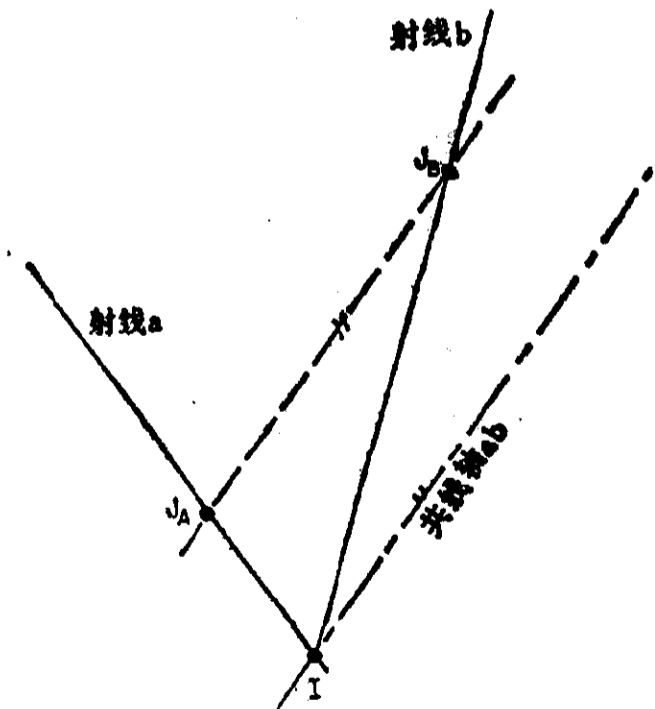


图4.31 射线 a 和 b 的共线轴与连接这两条射线上的转折点的直线相平行

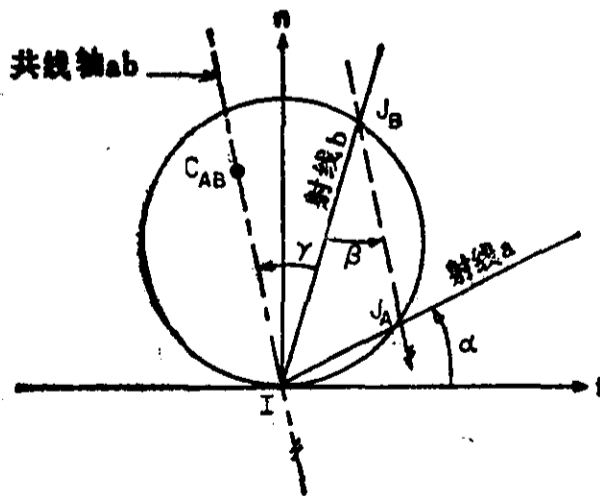


图4.32 博比利尔定理的图示(见节4.9): 两条射线 a 和 b 夹角的平分线也平分它们的共线轴与瞬心线公切线之间的夹角

4.9 博比利尔定理

“运动物体上两个点的轨迹法线（极点射线）分别与它们的共线轴和极点切线所夹的角相等。”^① 两条射线之间夹角的等分线也等分它们的共线轴与瞬心线的公切线之间的夹角。我们利用图 4.32 证明这一点。图中 C_{AB} 是共线轴 ab 上的任何一点， J_A 和 J_B 是转折点。图中， α 是转折圆的割线 J_A 与该割线一端切线之间的夹角。所以，根据初等几何中熟知的事实， α 等于该割线所对的任何圆周角，如 β 。此外， β 和 γ 有一个公共的边，而它们的另一条边是相互平行的。因此 $\beta = \gamma$ ，从而 $\alpha = \gamma$ 。这就完成了对博比利尔定理的证明。这一定理在运动综合和分析中有很多应用（见本章末的练习）。

从图 4.32 能容易地导出下列公式

$$\arg J_A + \arg J_B = \arg C_{AB} \quad (4.50)$$

式中 $+x$ 轴与 t 重合，根据这一方程得到

$$\theta_a + \theta_b + \frac{\pi}{2} = \theta_{cab} \quad (4.51)$$

式中 θ 是从瞬心线公法线 n 度量的，逆时针方向为正。式(4.50)和(4.51)是博比利尔定理的可编程序的表述。

4.10 哈特曼作图法^[126]

原来的哈特曼(Hartmann)法是由已知瞬心线的公切线和公法线、运动平面上点 A 的速度 V_A 和瞬心 I 的迁移速度 u 开始的。然后，用作图-解析结合的方法求 A 点轨迹的曲率中心，即 O_A 如下。

根据图 4.33 中按比例画出的 V_A 和 u ，作出 u 的平行于 V_A 的分量，即 u_{at} （下标 at 代表射线 a 上各点的切线方向）；再通过向量 V_A 和 u_{at} 的矢端画一直线与射线 a 相交，这交点就是 O_A 。

我们可对这一作图法验证如下。设想一个假想的刚性杆，将点 A 连接于固定销轴 O_A 。当该杆随着以速度 V_A 运动的点 A 摆动时，杆上与 I 瞬时重合的点将具有速度 u_{at} ，这是因为 I 本身的迁移速度为沿公切线的 u 。因此，显然我们的假想杆瞬时地导引点 A 沿其实际轨迹运动，所以 O_A 必定是轨迹的曲率中心。

刚才叙述的哈特曼原来的作图法要求 u 已知。对某些特殊情况，如一个圆在一直线上滚动，一旦滚动角速度由给定的动点 A 的速度确定以后， u 是容易求出的。实际上，这也是文献中叙述时常用的例子。不过，将哈特曼法一般化，使之适用于瞬心线曲率的任意组合，同时又适合于用复数自动计算，也是可能的。下面是如何进行这一般化。

象哈特曼那样，我们也从已知的 t, n, A 和 V_A 开始，不过，一般地说， u 将不是已知的。如果瞬心线曲率已知，则可求出 u 如下（见图 4.34）。从式(4.14)有

^① 引自鲁道夫·A·拜耳(Rudolph A. Beyer)^[126]。

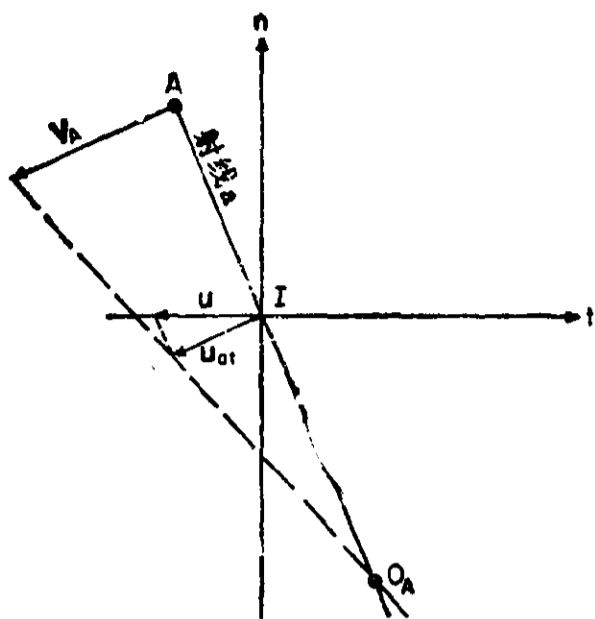


图 4.33 已知 t, n, A, V_A 和 a , 求 O_A 的哈特曼作图法, 该法可以用铰接于未知点 O_A , 并引导点 A 在其轨迹上运动的一假想杆作一个微小转动来形象地表示

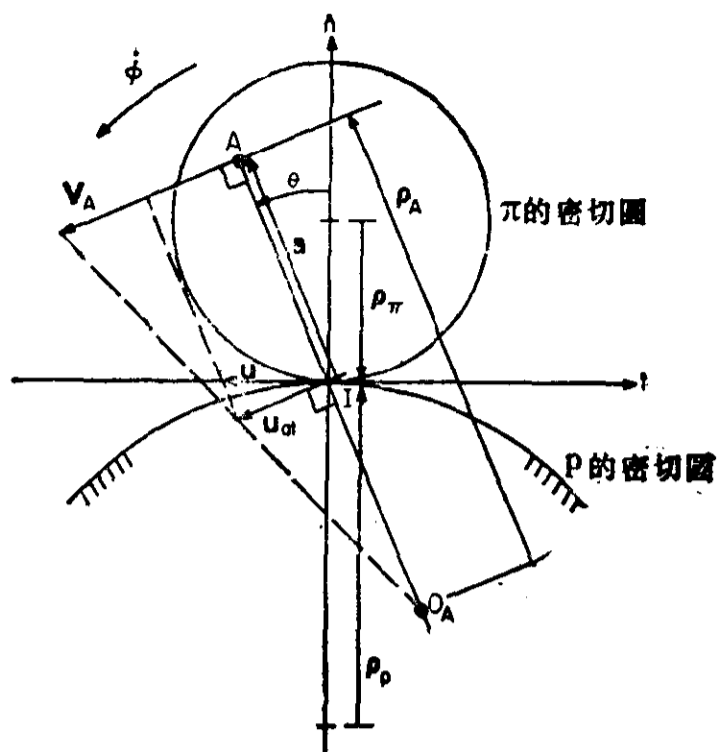


图 4.34 在 p 和 π 的密切圆, π 在 p 上滚动的角速度 $\dot{\phi}$ 和点 A 给定时, 求 O_A 的哈特曼作图法的复数形式的标记[见式 (4.24)、(4.52)、(4.53)和(4.54)]

$$\dot{\phi} = \frac{V_A}{ia}$$

从式(4.24)又有

$$u = i\dot{\phi}\rho_P\rho$$

式中

$$\rho = \frac{-\rho_\pi}{\rho_P - \rho_\pi}$$

如式(4.7)所定义的。有了这样求得的 u, u_{at} 就可用投影算子 $(\cos\theta)e^{i\theta}$ 得到:

$$u_{at} = (\cos\theta)e^{i\theta}u \quad (4.52)$$

然后, 从相似三角形得到

$$\frac{\rho_A}{a} = \frac{V_A}{V_A - u_{at}} \quad \text{和} \quad \rho_A = \frac{aV_A}{V_A - u_{at}} \quad (4.53)$$

现在我们可以着手用哈特曼法求转折圆的直径向量 δ 。从式(4.24a)有

$$\delta = -i\frac{u}{\dot{\phi}} = -i\frac{u_{at}(1/\cos\theta)e^{-i\theta}}{-i(V_A/a)} = \frac{u_{at}ae^{-i\theta}}{V_A\cos\theta} = \frac{-O_A a}{\rho_A} \frac{e^{-i\theta}}{\cos\theta} \quad (4.54)$$

这里, 我们用了式(4.14)、(4.52)和图 4.34 中的相似三角形。

注意, 式(4.54)中得到的 δ 的表达式是纯几何的, 与 V_A 或 $\dot{\phi}$ 无关。从另一方面观察该公式, 它等于假定 $\dot{\phi} = 1 \text{ rad/s}$, 从而使 $V_A = a$ 。这就导致了一个简单的、纯几何的作图法, 可在 A, O_A, I 和公法线 n 已知的情况下求 δ 。其步骤是如此进行的(图 4.35):

1. 在点 A 作 a 的垂线, 长度为 a ;
2. 从这一垂线的端点向 O_A 画一条直线;
3. 在点 I 作 a 的另一条垂线, 画到与刚画的直线相交, 再将其长度转到 a 上;

4. 在 a 上刚找到的点处再作一条 a 的垂线,与 n 相交即得向量 δ 的矢端。
 对于这一作图法的验证,见练习 4.15.

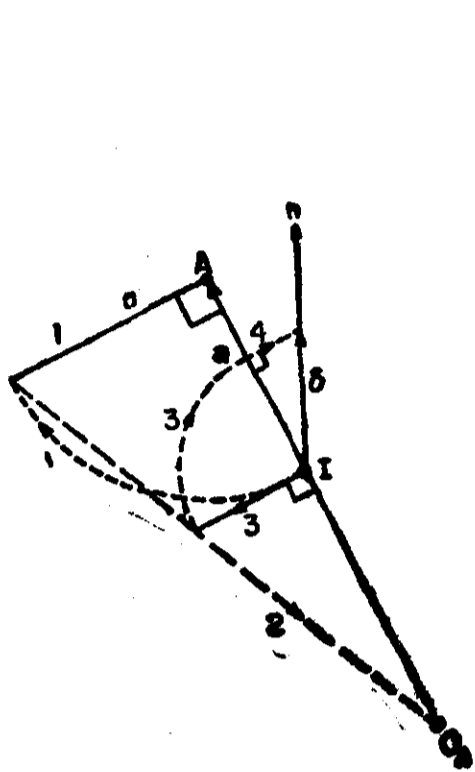


图 4.35 在 A, O_A, I 和公法线 n 已知的情况下求折圆直径向量 δ 的哈特曼作图法

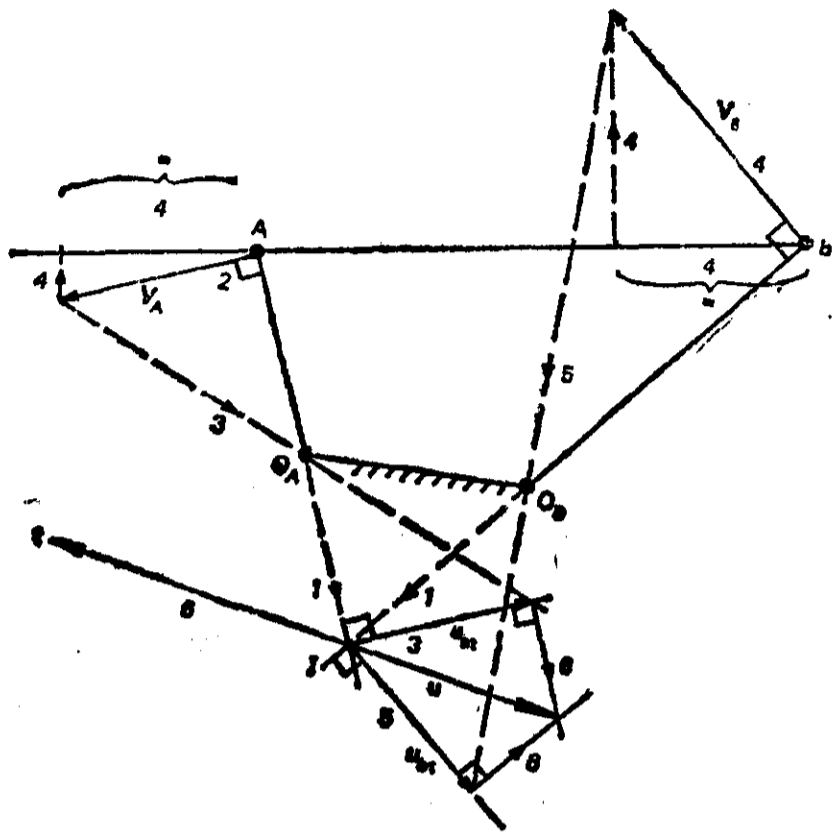


图 4.36 在四杆机构一个动铰链的速度已知时求公切线 t 和瞬心迁移速度 u 的哈特曼作图法。数字表示画这些作图线的次序

注意,哈特曼作图法的这一形式需要知道 n 的方向。为了知道四杆机构中连杆运动的 n 方向,我们用哈特曼作图法的另一形式,求连杆运动的瞬心迁移速度 u ,从而给出瞬心线公切线 t 的方向,因此也就给出了公法线 n 的方向。表示在图 4.36 中的作图步骤如下:

1. 求图 4.36 中四杆机构的连杆 AB 对固定杆 $O_A O_B$ 的瞬心 I (见为步骤 1 而标有数字 1 的作图线,下面各步的也如此);
2. 假定 V_A ;
3. 从 V_A 的矢端作一直线通过 O_A ,与在点 I 所作的 AO_A 的垂线相交,这给出了 u_{at} ;
4. 利用 V_A 和 V_B 在杆 AB 上的投影相等这一事实,作出 V_B ;
5. 在点 B 重复第 3 步,求 u_{bt} ;
6. 从 u_{at} 和 u_{bt} 矢端所作的垂线相交于 u 的矢端。这就确定了公切线 t 的方向,它与 u 共线,但指向相反。

对于这一作图法的验证,见练习 4.16.

为了将这一过程编成程序作数字计算,我们进行如下:

1. 选择一个方便的坐标系,比如说, $x \equiv \overrightarrow{O_A O_B}, 0 \equiv O_A$,这样, iy 将在图 4.36 中从 O_A 指向上(图中未示出);

2. 令 $\overrightarrow{O_A A} = \rho_A, \overrightarrow{O_B B} = \rho_B$ 和 $\overrightarrow{BA} = \rho_A - \overrightarrow{O_A O_B} - \rho_B$;

3. 假定 V_A 的大小, 于是 $V_A = V_A e^{i \arg \rho_A}$;
4. $V_B = \{ \cos(\arg V_A - \arg \overrightarrow{BA}) e^{-i(\arg V_A - \arg \overrightarrow{BA})} \sec[\arg \rho_B + (\pi/2) - \arg \overrightarrow{BA}] e^{i(\arg \rho_B + (\pi/2) - \arg \overrightarrow{BA})} \} V_A$;
5. 由 $\lambda_a \rho_A = \overrightarrow{O_A O_B} + \lambda_b \rho_B$ 解出 λ_a 和 λ_b ;
6. $I = \lambda_a \rho_A$;
7. $u_{at} = (I/\rho_A) V_A = \lambda_a V_A, u_{bt} = \lambda_b V_B$;
8. 由 $\lambda_{bt} \rho_B + u_{bt} = \lambda_{at} \rho_A + u_{at}$ 解出 λ_{at} 和 λ_{bt} ;
9. $u = u_{at} + \lambda_{at} \rho_A$. 验算: $u = u_{bt} + \lambda_{bt} \rho_B$.

4.11 布雷塞圆

现在我们来求图示位置滚动平面 π 上所有切向加速度为零的点的轨迹。为此, 参照式(4.32)并使 A_{A1} 等于零:

$$A_{A1} = i\dot{\phi} a - (\sin \theta) e^{i[\theta + (\pi/2)]} (-i\phi u) = 0$$

或

$$i\dot{\phi} a = (\sin \theta) e^{i[\theta + (\pi/2)]} (-i\phi u)$$

回想 $-i\phi u \dot{\phi} = {}^2\delta$ [式(4.26)], 则有

$$a = (\sin \theta) \frac{e^{i[\theta + (\pi/2)]}}{i} \frac{\phi^2}{\dot{\phi}} \delta = (\sin \theta) e^{i\theta} \frac{\phi^2}{\dot{\phi}} \delta \quad (4.55)$$

乘和除以 i :

$$a = (\sin \theta) e^{i[\theta - (\pi/2)]} \left(i \frac{\phi^2}{\dot{\phi}} \delta \right) \quad (4.56)$$

图 4.37 是式(4.56)的几何说明, 表示这是布雷塞圆(Bresse circle)的方程, 即 π 平面上所有切向加速度为零的点的轨迹方程。它与转折圆的交点是加速度极 A_p , 它是 π 平面处于图示位置上总加速度为零的点。

决定 A_p 位置的向量 $\overrightarrow{IA_p}$ 由使转折圆和布雷塞圆的方程(4.34)和(4.55)的右边相等求出

$$(\cos \theta) e^{i\theta} \delta = (\sin \theta) e^{i\theta} \frac{\phi^2}{\dot{\phi}} \delta \implies \tan \theta_{A_p} = \frac{\dot{\phi}}{\phi^2} \quad (4.57)$$

为了解决由于反正切函数的双值性引起的不确定性, 我们从图 4.37 观察到

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_{A_p} < \frac{\pi}{2} \quad (4.58)$$

还可证明[见式(4.65)]

$$\theta_{A_p} = \arg(\phi^2 + i\dot{\phi}) \quad (4.59)$$

$$a_{A_p} = (\cos \theta_{A_p}) e^{i\theta_{A_p}} \delta \quad (4.60)$$

如果 $\dot{\phi} = 0$ 会怎样呢? 可以证明(见练习 4.5): (1) 布雷塞圆退化为一条直线, 即为定瞬心线 p 和动瞬心线 π 在 I 的法线 n ; (2) $A_p = J$.

图 4.37 表示 $\dot{\phi} > 0$ 时的布雷塞圆和加速度极。如果 $\dot{\phi} < 0$ 会如何呢? 式(4.56)表示, 在这种

情况下布雷塞圆的直径 $[i(\phi^2/\dot{\phi})\delta]$ 改变符号, 布雷塞圆在图 4.37 中将出现在瞬心线的法线 n 的右边。从式(4.57)也很清楚, 如果 $\dot{\phi}$ 很小, 则布雷塞圆变得很大。这与当 $\dot{\phi}$ 从正或负方向趋于零时布雷塞圆退化为法线 n 这一事实是一致的(见练习 4.17)。

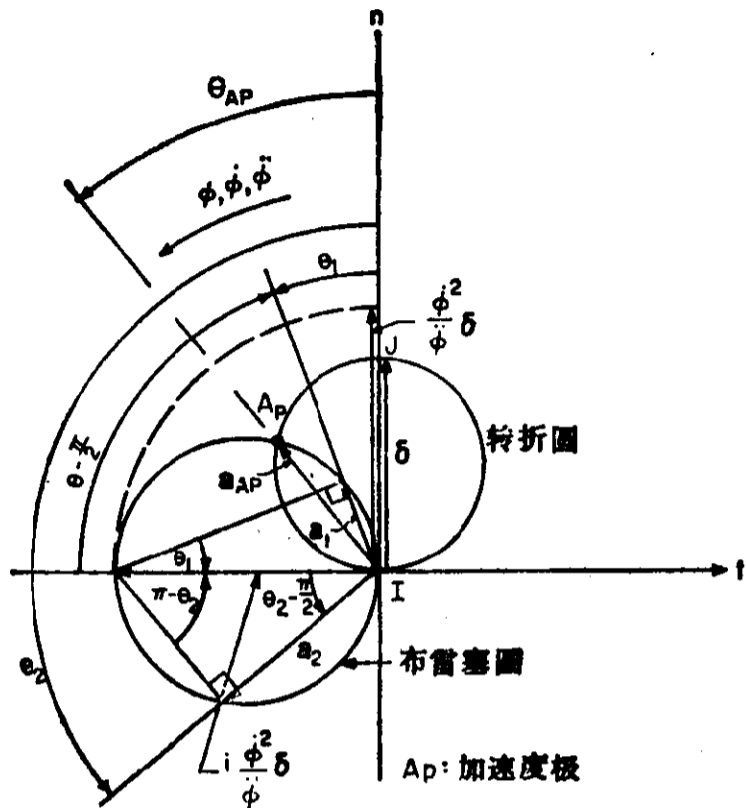


图 4.37 布雷塞圆是运动平面 π 上所有轨迹方向(即切向)加速度在该瞬间为零的点的轨迹。它与转折圆(π 上所有轨迹法线加速度在该瞬间为零的点的轨迹)的交点是加速度极 A_p ; 即 π 上加速度在该瞬间为零的点

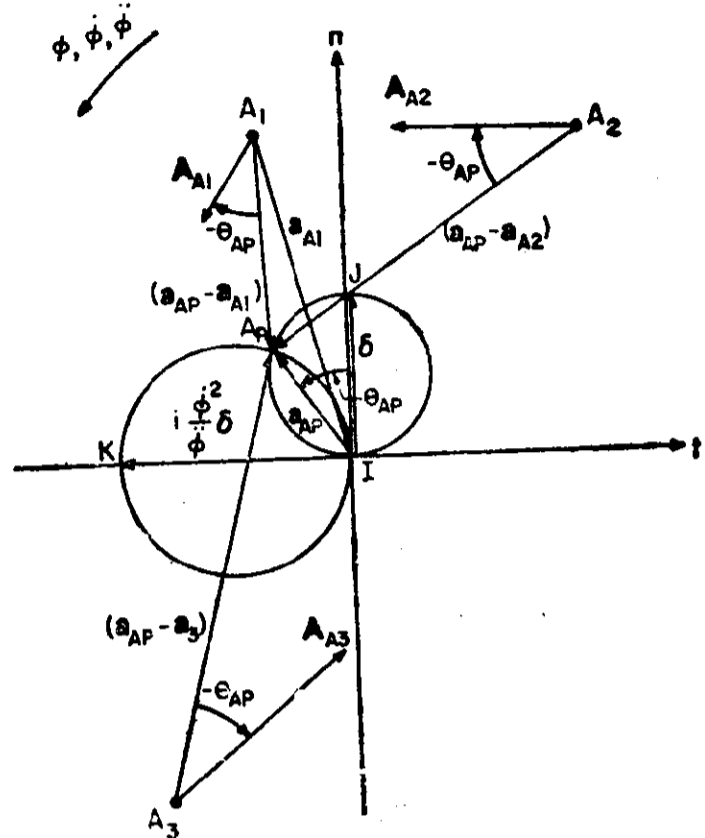


图 4.38 加速度场方程(4.69)的复数向量图解, 适合于运动平面 π 上所有的点

4.12 加速度场

可以证明运动平面 π 上任何点的加速度可表示为

$$A_A = c_a e^{i(-\theta_{AP})} (a_{A_p} - a_A) \quad (4.61)$$

如图 4.38 所示, 式中 c_a 为标量常数。以文字表述为: π 平面上任何点 A 的加速度可由取向量 $\overrightarrow{AA_p}$ 和以算子 $[c_a e^{i(-\theta_{AP})}]$ 将其伸长并旋转得到。这一算子对于运动平面上所有的点都是一样的。为了证明这一点并求 c_a 的值, 我们进行如下。

可以看出, 因为 $A_{A_p} = 0$, 所以任何点 A 的总加速度等于 A_p 和 A 两点间的加速度差, 即

$$A_A = A_{A_p} + A_{A, A_p} = (-\phi^2 + i\dot{\phi})(a_A - a_{A_p}) \quad (4.62)$$

将方程(4.61)和(4.62)联立, 得到伸长-旋转算子为

$$\frac{A_A}{a_{A_p} - a_A} = \frac{A_A}{-(a_A - a_{A_p})} = \phi^2 - i\dot{\phi} = c_a e^{i[-\theta_{AP}]} \quad (4.63)$$

这对所有的点 A 都是不变量, 并可表示成极坐标形式如下:

$$\phi^2 - i\dot{\phi} = (\phi^4 + \dot{\phi}^2)^{1/2} e^{i \arg(\phi^2 - i\dot{\phi})} \quad (4.64)$$

据此

$$\arg(\phi^2 - i\dot{\phi}) = -\theta_{AP} \quad (4.65)$$

这就证明了式(4.59)和

$$c_a = (\phi^4 + \check{\phi}^2)^{1/2} \quad (4.66)$$

这对于 π 平面上任何点确实都是常量。

现在，我们来对所得结果作个检验，将它应用于总加速度为加速度不变分量 $-i\phi u$ 的点，即点 I_π ，该点为运动平面 π 上与瞬心重合的点。所以我们必须证明

$$-i\phi u = (\phi^4 + \check{\phi}^2)^{1/2} e^{i(-\theta_{AP})} (-a_{AP}) \quad (4.67)$$

为此，我们把 u 和 a_{AP} 以转折圆的直径向量 δ 表示。回忆式(4.26)有 $-i\phi u = \phi^2 \delta$ ，回忆式(4.60)有 $a_{AP} = (\cos \theta_{AP}) e^{i\theta_{AP}} \delta$ 。将它们代入式(4.67)得到

$$\phi^2 \delta = (\phi^4 + \check{\phi}^2)^{1/2} e^{i(-\theta_{AP})} (-\cos \theta_{AP}) e^{i\theta_{AP}} \delta$$

约掉 δ ，并注意到 $e^{i(-\theta_{AP})} e^{i\theta_{AP}} = 1$ ，则有

$$\phi^2 = (-\cos \theta_{AP}) (\phi^4 + \check{\phi}^2)^{1/2}$$

或

$$(\cos \theta_{AP}) (\phi^4 + \check{\phi}^2)^{1/2} = -\phi^2 \quad (4.68)$$

但

$$(\cos \theta_{AP}) (\phi^4 + \check{\phi}^2)^{1/2} = \mathcal{R}(-\phi^2 + i\check{\phi}) = -\phi^2$$

因此，我们得到了一个恒等式，从而加速度场的不变伸长-旋转算子得到了验证。可以证明式(4.23)和(4.62)给出相同的 A_A 值(见练习 4.18)。

我们来归纳一下现已得到验证的结果。为了得到运动平面 π 上所有点的加速度场。进行如下。

1. 求出作为转折圆与布雷塞圆(除了 I 以外的)交点的加速度极 A_p :

$$a_{AP} = \delta (\cos \theta_{AP}) e^{i\theta_{AP}}$$

式中

$$\theta_{AP} = \arg(\phi^2 + i\check{\phi}) \quad (4.59)$$

2. 为求出 π 上任何点 A 的加速度，先求得向量 $\overrightarrow{AA_p} = a_{AP} - a_A$ ，再乘以加速度场的不变伸长-旋转算子:

$$A_A = (a_{AP} - a_A) (\phi^4 + \check{\phi}^2)^{1/2} e^{i(-\theta_{AP})} \quad (4.69)$$

这一方法表示在图 4.38。

注意，在全部加速度场计算中，用 $\theta_{AP} = \arg(-\phi^2 + i\check{\phi})$ 比用 $\theta_{AP} = \arctan(\check{\phi}/\phi^2)$ 要好，因为“arg”函数消除了“arctan”函数的差 180° 的不确定性。所以，在计算器上，用直角坐标到极坐标 ($R \rightarrow P$) 的转换键，在 FORTRAN IV 或 WAT IV 中用“ATAN2”语句。这样， $\check{\phi}$ 指向的意义就不会因“arctan”函数的不确定性而丧失。为了形象地验证 θ_{AP} 的方向和象限，将 $(-\phi^2 + i\check{\phi})$ 画成复数向量也是有益的。

4.13 回 归 圆

由德文词“Rückkehrskreis”的直译得名的回归圆 (return circle)，是固定平面 p 上一些点的轨迹，设在运动平面 π 上的直线瞬时地通过这些点滑动并回转。与这样的点 Q 瞬时等效的实物体是图 4.39 中的摆块，图中表示了直线 l 及线上点 A 的三个顺序位置。让这三个位置无限接近，就图示出了上述的运动。

“回归圆”这个名称[有些作者称作“尖点圆”(cuspidal circle)],来自下列事实,即 π 平面上瞬时地通过这个圆上的点滑动并绕该点回转的直线在 p 平面上的包络线,在接近与离开固定平面上这一“回归点”时形成一个尖点。但是,要注意运动平面 π 上瞬时地与“回归点”重合的点在越过回归点时描出的是一条无间断的连续轨迹,而不是一个尖点(见图4.39中点 A 的顺序位置: A_1, A_2, \dots)。

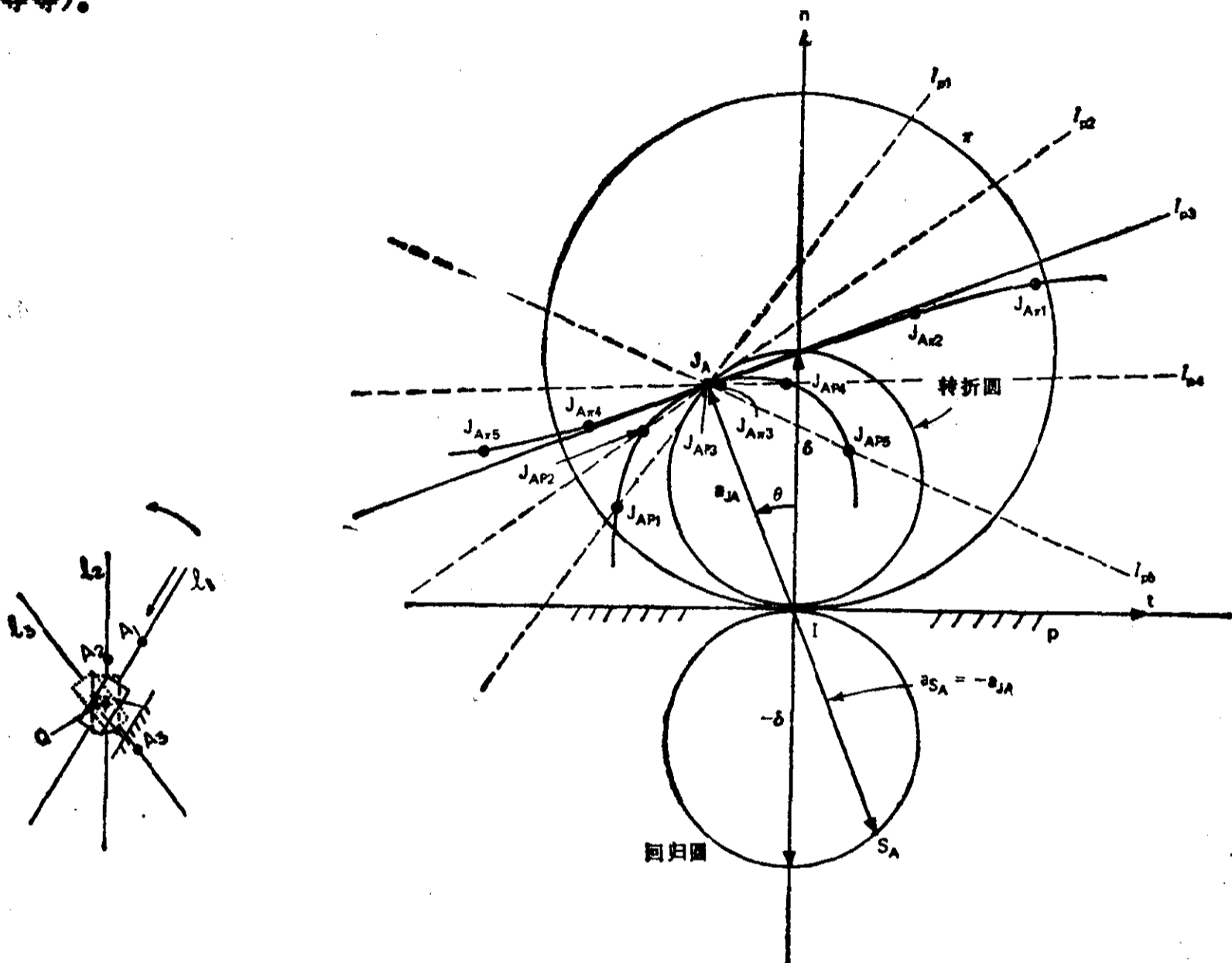


图 4.39 如果运动平面 π 上的直线 l 通过固定平面 p 上的点 Q 滑动并回转,则 Q 就是回归圆上的点,而回归圆是所有这种属于 p 上的点的轨迹

图 4.40 当 π 在 p 上滚动时, π 上的点 $J_{A\pi}$ 在 p 上描出一条在转折圆上的 J_A 处带有拐曲的轨迹。在 J_A 处的轨迹切线是 l_p , 这是一条设在 p 上的直线。在运动转换后,当 π 固定,则直线 l_p 通过现在作为固定点的 $J_{A\pi}$ 滑动并回转。所以,在运动转换后,原来的转折圆就成了回归圆

如何能在固定平面 p 上求出这样的点呢?可通过运动转换把它们求出来。把转折点 J_A 看作运动平面 π 上的点, $J_{A\pi}$ 。观察它在图4.40所示位置的邻域中的轨迹。循着它经过位置 $J_{A\pi 1}$ 至 $J_{A\pi 5}$ 的轨迹,我们看到,在 $J_A = J_{A\pi 3}$ 的邻域内, $J_{A\pi}$ 瞬时地沿着属于固定平面 p 上的轨迹切线 l_p 运动。这条切线在转折点 J_A 处与轨迹相切。

现在考虑运动转换,即 π 固定, p 在 π 上滚动。于是带有点 $J_{A\pi}$ 的直线 l_p 将通过现在固定的点 $J_{A\pi 3}$ 滑动并回转。这样,可以看到,经过上述运动转换, π 平面上的转折圆变成 p 平面上的回归圆。认识到这点,我们在转折圆方程中将 ρ_π 和 ρ_p 互换就得到回归圆的方程如下:

$$a_{JA} = (\cos\theta)e^{i\theta}\delta \quad (\text{来自转折圆方程}) \quad (4.34)$$

回忆

$$\delta = \frac{-\rho_p \rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \quad (4.24a)$$

将 ρ_p 和 ρ_π 互换得到回归圆直径向量 σ 的公式:

$$\sigma = \frac{-\rho_\pi \rho_p}{\rho_\pi - \rho_p} = -\delta \quad (4.70)$$

把回归圆上的一般点标为 S_A , 由式(4.34) 和(4.70), 可将回归圆方程写成:

$$a_{SA} = (\cos\theta)e^{i\theta}(-\delta) = -(\cos\theta)e^{i\theta}\delta = -a_{JA} \quad (4.71)$$

这表示回归圆与转折圆是相对于瞬心 I 对称的。

4.14 尖点生成点

运动平面 π 上的尖点生成点(cusp points)在其固定平面 p 内的轨迹上于所考虑的位置描出一个尖点。什么是尖点呢?尖点是轨迹上曲率半径为零的一个点。而且,轨迹点在尖点的紧接邻域内沿一条相同的切线接近和离开尖点。作为一个例子,我们考虑 π 平面上与瞬心 I 瞬时重合的点 I_π 。因而它的速度为零,总加速度是加速度的不变分量:

$$A_{I_\pi} = -i\phi u \quad (4.31)$$

但 $u = i\phi\delta \quad (4.24a)$

所以 $A_{I_\pi} = -i\phi i\phi\delta = \phi^2\delta \quad (4.72)$

这表示与 I 重合的点 I_π 的总加速度是沿着瞬心线的公法线方向的,取 δ 的指向。这就是说, I_π 在公切线的垂线方向上趋近与离开 I 。这表示在图 4.41 中,图上,动瞬心线表示在 π_1 位置,正在向 π_3 位置滚动。在 π_3 位置上,点 I_π 与 I 重合。由此可见,在 π 平面上所有尖点生成点的轨迹就是动瞬心线,因为它的每一点都最终要与瞬心瞬时重合。而且,尖点邻域内的轨迹切线垂直于定瞬心线。

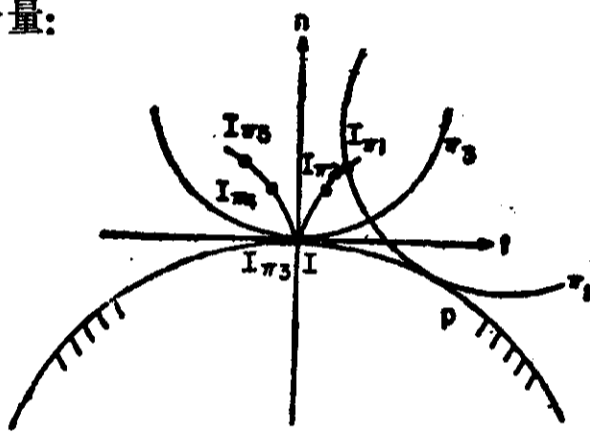


图 4.41 滚动曲线 π 是 π 平面内所有尖点生成点的轨迹

4.15 叉点生成点

叉点(crunode)是轨迹的一个双重点,轨迹在该点越过自身而形成自交环。为了求出叉点生成点,将角 θ 的射线由动瞬心线 π 向与转折圆相对的一侧延伸(图4.42)。在这条射线的延长线上选一点 C_π 。现在,把这一射线凝结在运动平面 π 上,并跟随 π 运动,经过所研究的中心位置前后的几个位置。图中,动瞬心线的前后几个顺序位置标以 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6$,而 C_π 的几个顺序位置标以 $C_{\pi_1}, C_{\pi_2}, \dots$ 。注意, C_{π_2} 和 C_{π_5} 在轨迹的叉点上重合。在叉点上,轨迹有两条切线: $t_{C_{\pi_2}}$ 和 $t_{C_{\pi_5}}$,每一切线分别垂直于从相应瞬心 I_2 和 I_5 引出的射线。因此,可见有“两阶无穷多”个叉点生成点,其位置以动极点轨迹为界,全部在定极点轨迹所在的一侧。

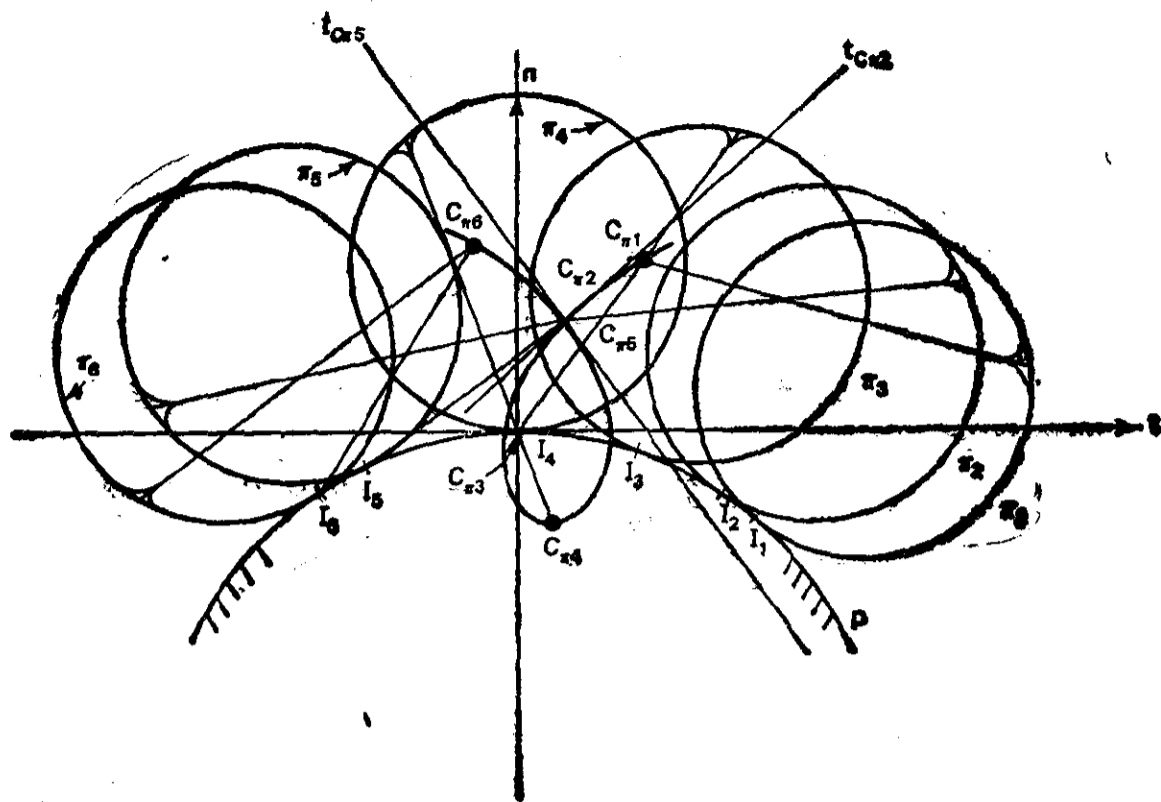


图 4.42 π 平面上的叉点生成点在固定平面上描出有自交环的轨迹。环的这个交叉点即双重点就是叉点 (见节 4.15)

4.16 ρ 曲线^[5.6]

ρ 曲线是运动平面 π 上一些点的轨迹, 它们的轨迹曲率半径向量大小相等, 比如说都是 ρ_A . 为了求出这一轨迹, 我们将欧-萨公式-1 推导过程中的式(4.39)改写为

$$-\frac{\rho_A}{\rho_A^2}a^2 + a - J_A = 0 \quad (4.40a)$$

或用式(4.34)得

$$-\frac{\rho_A}{\rho_A^2}a^2 + a - \delta e^{i\theta} \cos\theta = 0 \quad (4.73)$$

令 $e^{i \arg a} = u_a, e^{i \arg \delta} = u_\delta$ 和 $e^{i \arg \rho} = u_\rho$. 利用这些关系, 并除以 u_a , 得到

$$\frac{-\rho_A u_\rho}{\rho_A^2 u_a} a^2 + a - (\cos\theta) \delta \frac{u_\delta e^{i\theta}}{u_a} = 0 \quad (4.74)$$

注意, $u_\delta e^{i\theta} = u_a$ 和 $u_\rho / u_a = \pm 1$, 其正负号按 ρ_A 与 a 在射线 a 上的指向是相同还是相反来定。则有

$$a^2 - \rho_A \frac{u_a}{u_\rho} a + \frac{u_a}{u_\rho} \rho_A \delta \cos\theta = 0$$

这就导致两个 a 的二次方程:

$$a^2 - \rho_A a + \rho_A \delta \cos\theta = 0 \implies a_1, a_2 \quad (4.75)$$

$$a^2 + \rho_A a - \rho_A \delta \cos\theta = 0 \implies a_3, a_4 \quad (4.76)$$

式中 $j=1, 2, 3, 4$. 虽然只有 a_j 的实数值才是有意义的, 但是无论正实数还是负实数都是可用的; 因为 a_j 的符号变化仅仅改变它沿射线 a 的方向。

在 ρ_A 为常值, 比如说为 ρ_g 的情况下, 方程(4.75)和(4.76)将 a 和 θ 的值联系起来。所以它们代表一组以 θ 作为参数的 a 的参数方程。换句话说, 它们是一组 ρ 曲线方程。

现在我们把所得结果用于例4.2、图4.21来检验其正确性。从以前的计算中知道, 当 $\theta = \pi/4$ 和 $a = 1$ 时, $\rho_A = (1 + \sqrt{2})e^{-i\theta}$ 。所以, 令 $\rho_A = \rho_g = 1 + \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$, 注意到 $\delta = 2$, 计算所有四个根 a_1, a_2, a_3, a_4 , 看看其中之一是否真的等于1。解方程(4.75), 有

$$a_{1,2} = \frac{\rho_A \pm \sqrt{\rho_A^2 - 4\rho_A\delta\cos\theta}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 4(1 + \sqrt{2})2(1/\sqrt{2})}}{2}$$

$$= 1.21 \pm i1.40$$

这两个根是复数, 因而对标量 a 没有实际意义。解方程(4.76)得出

$$a_{3,4} = \frac{-\rho_A \pm \sqrt{\rho_A^2 + 4\rho_A\delta\cos\theta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 4(1 + \sqrt{2})2\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2}$$

$$= -3.41, 1$$

这样, $a_4 = 1$, 是其中一个根, 于是我们的这组方程就得到了验证。

ρ 曲线很容易用计算机画成图形, 方法是以 θ 作为参数, 解方程(4.75)和(4.76), 求出 a 的所有实数值, 再令 $a = ae^{i[\theta + (\pi/2)]}$ (这是在使 $\delta = |\delta|e^{i(\pi/2)}$ 的坐标系内完成的)。

ρ 曲线方程在这个坐标系内的直角坐标形式(见练习4.22)是以

$$a = x + iy \quad (4.77)$$

得到

$$(x^2 + y^2)^3 - \rho_A^2(x^2 + y^2 - \delta y)^2 = 0 \quad (4.78)$$

在方程(4.78)的基础上以数字计算机画出的曲线, 见练习4.23。

运动平面 π 内 ρ 曲线上的点在固定平面 p 上的轨迹曲率中心的轨迹, 即“ ρ_m 曲线”的数字作图, 见练习4.24。

4.17 运动平面四个无限接近位置的曲率驻点三次曲线,

即布尔梅斯特圆点和圆心点曲线^[244]

到现在为止, 当 π 曲线在固定平面的 p 曲线上滚动时, 我们考虑的仅仅是 π 平面的三个无限接近位置。这足以推导出包括速度、加速度、轨迹切线和轨迹曲率等全部关系。现在我们希望把研究扩展到包括所考虑位置的紧接邻域内曲率的变化率。这要求四个无限接近位置。

定瞬心线和动瞬心线分别与它们各自的密切圆在三个无限接近的位置上相接触。这些密切圆规定了曲率半径。这是清楚的, 因为三个点决定一个圆。我们把这些位置编号为 1、2、3。现在增加第四个无限接近位置。位置 2、3、4 规定了另外一个圆, 它与第一个圆有无限小的差别。把四个位置考虑为有限分离, 然后令它们个个都彼此无限接近, 从而趋向一个极限, 这就容易理解了。两个无限接近的密切圆规定了瞬心线曲率半径长度的变化率:

$$\frac{d\rho_p}{ds_p} = \rho'_p \quad \text{和} \quad \frac{d\rho_\pi}{ds_\pi} = \rho'_\pi \quad (4.79)$$

式中 ρ'_p 是定瞬心线的 ρ_p 对于弧长 s_p 的变化率, ρ'_π 是 ρ_π 对于 s_π 的变化率。曲率驻点三次曲线 (cubic of stationary curvature) 是运动平面 π 上其轨迹曲率半径在四个无限接近位置上保持相同的所有点的轨迹。这就是说, 轨迹曲率值的变化率瞬时地为零:

$$\frac{d\rho_A}{ds_A} = \rho'_A = 0 \quad (4.80)$$

式中 s_A 是沿点 A 轨迹的弧长。

我们从下列形式的欧-萨公式-1 [式(4.40)] 开始对曲率驻点三次曲线进行推导:

$$\rho_A = \left[\frac{a^2}{a - J_A} e^{i[\theta + (\pi/2)]} \right] e^{i[\theta + (\pi/2)]} \quad \text{欧-萨公式-1} \quad (4.81)$$

式中右边第一个(即方括号内的)量是 $\pm \rho_A$, 正、负号是根据 $a - J_A$ 和 $e^{i[\theta + (\pi/2)]}$ 的方向是相同还是相反来定的(见练习 4.25)。

下面来考虑 ρ_A 对于沿点 A 轨迹的弧长 s_A 的变化率:

$$\frac{d\rho_A}{ds_A} = \frac{d\rho_A}{ds_\pi} \frac{ds_\pi}{ds_A} \quad (4.82)$$

注意, 一般地说, $ds_\pi/ds_A \neq 0$, 所以, 在曲率驻点三次曲线上,

$$\frac{d[\rho_A]}{ds_\pi} = 0$$

式中 $[\rho_A]$ 是式(4.81)右边的第一个量。所以, 曲率驻点三次曲线的方程是

$$\frac{d[\rho_A]}{ds_\pi} = d \left[\frac{a^2}{a - J_A} e^{i[\theta + (\pi/2)]} \right] / ds_\pi = 0 \quad (4.83)$$

式(4.83)右端方括号内的式子需要展开, 以便为式中所示取导数作准备。为此, 首先列出公式右端每个量的展开式:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad \text{或者简写为} \quad a^2 = x^2 + y^2 \quad (4.83a)$$

式中 x 和 y 是运动平面 π 上直角坐标系内点 A 的坐标, 在该坐标系内, 瞬心线的公切线在这个瞬间与其实轴重合, 而公法线与虚轴一致。称该坐标系为 $x_\pi I_\pi y_\pi$, 其中 I_π 是其原点。而且, 在这个坐标系内, $J_A = e^{i\theta} \delta \cos \theta$ 和 $\delta = \delta e^{i(\pi/2)}$ 。代入得到

$$\begin{aligned} \left[\frac{a^2}{a - J_A} e^{i[\theta + (\pi/2)]} \right] &= \frac{a^2}{[a] e^{i[\theta + (\pi/2)]} - \cos \theta e^{i\theta} [\delta] e^{i(\pi/2)}} e^{i[\theta + (\pi/2)]} \\ &= \frac{a^2}{[a] - \cos \theta [\delta]} \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\text{式中} \quad [\delta] = \frac{-\rho_p \rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} e^{-i(\pi/2)} = \pm |\delta| \quad [\text{根据式(4.24a)}]$$

$$\text{和} \quad [a] = a e^{-i[\theta + (\pi/2)]} = \pm |a| \quad (4.84a)$$

代入式(4.83)得到

$$\frac{d[\rho_A]}{ds_\pi} = \frac{2[a] \frac{d[a]}{ds_\pi} ([a] - [\delta] \cos \theta) - a^2 \left(\frac{d[a]}{ds_\pi} + [\delta] (\sin \theta) \frac{d\theta}{ds_\pi} - \frac{d[\delta]}{ds_\pi} \cos \theta \right)}{([a] - \cos \theta [\delta])^2} \quad (4.85)$$

从此以后,在这一推导中,我们省去 $[a]$ 和 $[\delta]$ 的方括号,但要记住,它们是由式(4.24a)和(4.84a)决定的正实数或负实数。为了定 da/ds_π 和 $d\theta/ds_\pi$ 的值,我们进行如下。令 x_π 负方向上的单位向量为

$$\tau = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (4.86)$$

式中 \mathbf{u} 是“瞬心迁移速度”[式(4.24)]。于是

$$\mathbf{a} = a\tau e^{-i[(\pi/2) - \theta]} = a\tau e^{i[\theta - (\pi/2)]} \quad (4.87)$$

回忆一下,对于 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 坐标系, $I = \overrightarrow{I_\pi I}$ 和 $\mathbf{a} = \overrightarrow{I_\pi A}$ 。所以,

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{I_\pi A} - \overrightarrow{I_\pi I} = a\tau e^{i[\theta - (\pi/2)]} \quad (4.88)$$

取式(4.88)对于 s_π 的导数给出

$$\frac{d(\overrightarrow{I_\pi A})}{ds_\pi} - \frac{d(\overrightarrow{I_\pi I})}{ds_\pi} = \frac{da}{ds_\pi} \tau e^{i[\theta - (\pi/2)]} + a \frac{d\tau}{ds_\pi} e^{i[\theta - (\pi/2)]} + ia\tau \frac{d\theta}{ds_\pi} e^{i[\theta - (\pi/2)]} \quad (4.89)$$

因为 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 随平面 π 运动,点 A 也是如此,所以

$$\frac{d(\overrightarrow{I_\pi A})}{ds_\pi} = 0 \quad (4.90)$$

再注意, $\overrightarrow{I_\pi I}$ 对时间的变化率等于极点迁移速度 \mathbf{u} :

$$\frac{d(\overrightarrow{I_\pi I})}{dt} = \mathbf{u} \quad \text{和} \quad \frac{d(\overrightarrow{I_\pi I})}{ds_\pi} = \frac{d(\overrightarrow{I_\pi I})}{dt} \frac{dt}{ds_\pi} \quad (4.91)$$

但
$$\frac{dt}{ds_\pi} = \frac{1}{ds_\pi/dt} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \quad (4.92)$$

所以
$$\frac{d(\overrightarrow{I_\pi I})}{ds_\pi} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \tau \quad (4.93)$$

此外, $d\tau/ds_\pi$ 还可用它本身及动瞬心线曲率半径向量来表示(图4.43)。参考该图,可观察到 $d\tau = i\tau d\gamma$, $ds_\pi = [\rho_\pi / e^{i(\pi/2)}] d\gamma$ (式中 $d\gamma$ 是 ρ_π 在它的矢端随接触点 I 通过一个无限微小滚动的过程中在 p 平面内^①所扫过的角度),而且 ds_π 是正的,我们看到

$$\frac{d\tau}{ds_\pi} = \frac{i\tau d\gamma}{[\rho_\pi / e^{i(\pi/2)}] d\gamma} = i\tau \frac{1}{\rho_\pi} e^{i(\pi/2)} \quad (4.94)$$

式中 ρ_π 表示在 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 坐标系内。将式(4.90)至(4.94)代入式(4.89),得到

$$0 - \tau = \left(\frac{da}{ds_\pi} + \frac{ia}{\rho_\pi} e^{i(\pi/2)} + ia \frac{d\theta}{ds_\pi} \right) \tau e^{i[\theta - (\pi/2)]} \quad (4.95)$$

除以 $\tau e^{i[\theta - (\pi/2)]}$ 得出

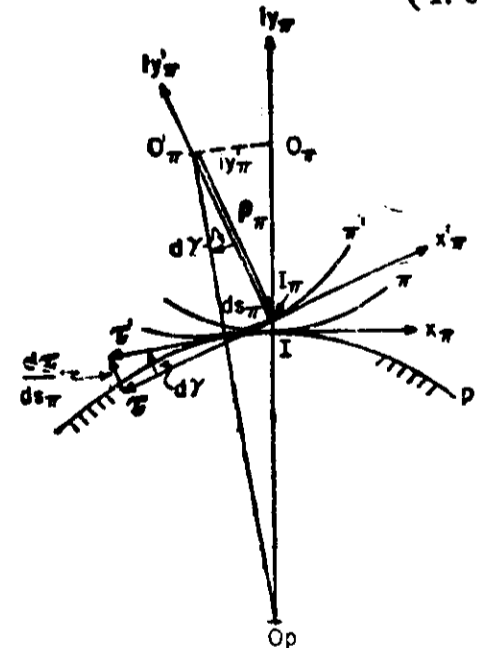


图 4.43 利用作为向量的复数和微分几何推导运动平面四个无限接近位置的曲率驻点三次曲线(即布尔梅斯特圆点曲线)的标记

① 原文为“在 π 平面内”,似有误——译者注。

$$-e^{-i[\theta - (\pi/2)]} = \frac{da}{ds_\pi} + ia \left[\left(\frac{e^{i(\pi/2)}}{\rho_\pi} \right) + \frac{d\theta}{ds_\pi} \right]$$

或

$$-\sin\theta - i\cos\theta = \frac{da}{ds_\pi} + ia \left[\left(\frac{e^{i(\pi/2)}}{\rho_\pi} \right) + \frac{d\theta}{ds_\pi} \right] \quad (4.96)$$

式中

$$\frac{e^{i(\pi/2)}}{\rho_\pi} = \pm \frac{1}{|\rho_\pi|} \quad (4.97)$$

这是一个正实数或负实数，其正、负号取决于动瞬心线是凸向还是凹向公切线两侧中决定公法线(即 $+iy_\pi$ 轴)位置的那一侧。令式(4.96)两边的实部和虚部分别相等，得到

$$\frac{da}{ds_\pi} = -\sin\theta, \quad \frac{d\theta}{ds_\pi} = -\frac{\cos\theta}{a} - \frac{e^{i(\pi/2)}}{\rho_\pi} \quad (4.98)$$

将式(4.98)代入式(4.85)得出(见练习 4.26)

$$\frac{d[\rho_A]}{ds_\pi} = \frac{3a^2\delta\sin\theta\cos\theta}{(a-\delta\cos\theta)^2} \left[\frac{1}{\cos\theta} \frac{1}{3} \left(\frac{e^{i(\pi/2)}}{\rho_\pi} - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{3} \left(\frac{d\delta}{ds_\pi} \frac{1}{\delta} \right) + \frac{1}{a} \right] = 0 \quad (4.99)$$

如果右端方括号内的式子为零，则这一曲率驻点三次曲线的方程得到满足。如果 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$ 为零，则右端的值成为不定，从而必须用洛必达 (L'Hospital) 法则通过极限过程来确定。因为 $3\delta/(a-\delta\cos\theta)^2$ 不可能是零，所以可把它提出来不管。习惯上把通常是给定值的其它组以下列符号表示

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{3} \left(\frac{e^{i(\pi/2)}}{\rho_\pi} - \frac{1}{\delta} \right) \quad \text{和} \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{3} \left(\frac{d\delta}{ds_\pi} \frac{1}{\delta} \right) \quad (4.100)$$

据此，极坐标形式的曲率驻点三次曲线方程变为

$$a^2\sin\theta\cos\theta \left(\frac{1}{N\cos\theta} + \frac{1}{N\sin\theta} + \frac{1}{a} \right) = 0 \quad (4.101)$$

在曲率驻点三次曲线上的点，其半径向量 $\alpha = ae^{i[\theta + (\pi/2)]}$ ，其中 a 和 θ 为满足方程(4.101)的各对值。这样，一旦 M 和 N 已知，则用 θ 作为参数，解出 a ，就容易作出曲率驻点三次曲线。注意， $a \geq 0$ 两个值都是可用的。如果 $a < 0$ ，则 a 的方向在 θ 角射线上将与 $e^{i(\theta + \pi/2)}$ 相反。

如果定瞬心线和动瞬心线的曲率半径向量及其变化率已知，则 M 的值可求出如下：

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{1}{3} \left(\frac{e^{i(\pi/2)}}{\rho_\pi} - \frac{\rho_p - \rho_\pi}{-\rho_p\rho_\pi} e^{i(\pi/2)} \right) = \frac{e^{i(\pi/2)}}{3} \left(\frac{1}{\rho_\pi} + \frac{\rho_p - \rho_\pi}{\rho_p\rho_\pi} \right) \\ &= \frac{e^{i(\pi/2)}}{3} \left(\frac{2}{\rho_\pi} - \frac{1}{\rho_p} \right) \end{aligned} \quad (4.102)$$

上式中，我们对 δ 已应用了式(4.24a)。由于我们将所有向量用坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 表示，所以因子 $e^{i(\pi/2)}$ 使式(4.102)右端成为实数并赋予适当的符号。

同样，

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{3} \frac{d\delta}{ds_\pi} \frac{1}{\delta} = \frac{1}{3} \frac{d}{ds_\pi} \left(\frac{-\rho_p\rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \right) \frac{\rho_p - \rho_\pi}{-\rho_p\rho_\pi} \quad (4.103)$$

因为 δ 在坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 中是纯虚数，所以令 $d\delta/ds_\pi = \delta'$ ，则 δ'/δ 是实数，并能有正确的符号。我们以 ρ_p, ρ_π 及其导数推导 δ' 如下：

$$\begin{aligned} \delta' &= \frac{d}{ds_\pi} \left(\frac{-\rho_p \rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} \right) = \frac{-(\rho_p' \rho_\pi + \rho_p \rho_\pi') (\rho_p - \rho_\pi) - (-\rho_p \rho_\pi) (\rho_p' - \rho_\pi')}{(\rho_p - \rho_\pi) (\rho_p - \rho_\pi)} \\ &= \frac{\rho_p \rho_\pi \rho_p' - \rho_p \rho_\pi \rho_\pi' - \rho_p' \rho_\pi \rho_p + \rho_p' \rho_\pi^2 - \rho_p^2 \rho_\pi' + \rho_p \rho_\pi' \rho_\pi}{\rho_p^2 - 2\rho_p \rho_\pi + \rho_\pi^2} \\ &= \frac{\rho_p' \rho_\pi^2 - \rho_p^2 \rho_\pi'}{\rho_p^2 - 2\rho_p \rho_\pi + \rho_\pi^2} \end{aligned} \quad (4.104)$$

式中 $\rho_p' = \frac{d\rho_p}{ds_\pi} = \frac{d\rho_p}{ds_p}$ 和 $\rho_\pi' = \frac{d\rho_\pi}{ds_\pi}$ (4.105)

将式(4.104)代入式(4.103)得到

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{3} \frac{(\rho_p' \rho_\pi^2 - \rho_p^2 \rho_\pi') (\rho_p - \rho_\pi)}{(\rho_p - \rho_\pi)^2 (-\rho_p \rho_\pi)}$$

或 $\frac{1}{N} = \frac{1}{3} \frac{1}{\rho_p - \rho_\pi} \left(\frac{\rho_p' \rho_p}{\rho_\pi} - \frac{\rho_p' \rho_\pi}{\rho_p} \right)$ (4.106)

现在,我们来将式(4.101)转换成坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 中的直角坐标。作以下代换

$$\begin{aligned} a &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \sin\theta = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ \cos\theta &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.107)$$

利用这些关系,式(4.101)成为

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) \frac{-xy}{(x^2 + y^2)} \left[\frac{1}{M} \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{y} - \frac{1}{N} \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right] &= 0 \\ \frac{1}{M} \frac{(x^2 + y^2)(-xy)}{y} - \frac{1}{N} \frac{(x^2 + y^2)(-xy)}{x} + (-xy) &= 0 \\ (x^2 + y^2) \left(\frac{y}{N} - \frac{x}{M} \right) - xy &= 0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

式(4.108)中的因子 $(x^2 + y^2)$ 表示曲率驻点三次曲线是一种圆周代数曲线,与相邻的因子一起表示,它又是一个三次曲线。所以,它是“圆周三次曲线”。

例 4.3

半径为 2in. 的行星齿轮在半径为 3 in. 的固定太阳轮上滚动,求该行星齿轮的曲率驻点三次曲线的方程,并作出该曲线(图 4.44)。

解

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{e^{i(\pi/2)}}{3} \left(\frac{2}{\rho_\pi} - \frac{1}{\rho_p} \right) \\ &= \frac{i}{3} \left(\frac{2}{-2i} - \frac{1}{3i} \right) \end{aligned} \quad (4.102)$$

所以, $M = -2.25$ 。由于瞬心线是圆,所以式(4.106)给出 $1/N = 0$ 。曲率驻点三次曲线的方程成为[见式(4.101)]

$$a^2 \sin\theta \cos\theta \left(\frac{1}{-2.25 \cos\theta} + \frac{1}{a} \right) = 0$$

或 $\frac{\sin\theta}{-2.25} a^2 + \sin\theta \cos\theta a = 0$

于是有: $\sin\theta = 0$, 亦即 $\theta = 0$ 的直线,这是轨迹法线;和

$$a^2 - (2.25) \cos\theta a = 0$$

或: $a = 0$, 这是曲率驻点三次曲线上的一个点;以及 $a = 2.25 \cos\theta$, 这是坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 中直径为 2.25 in. 圆心在

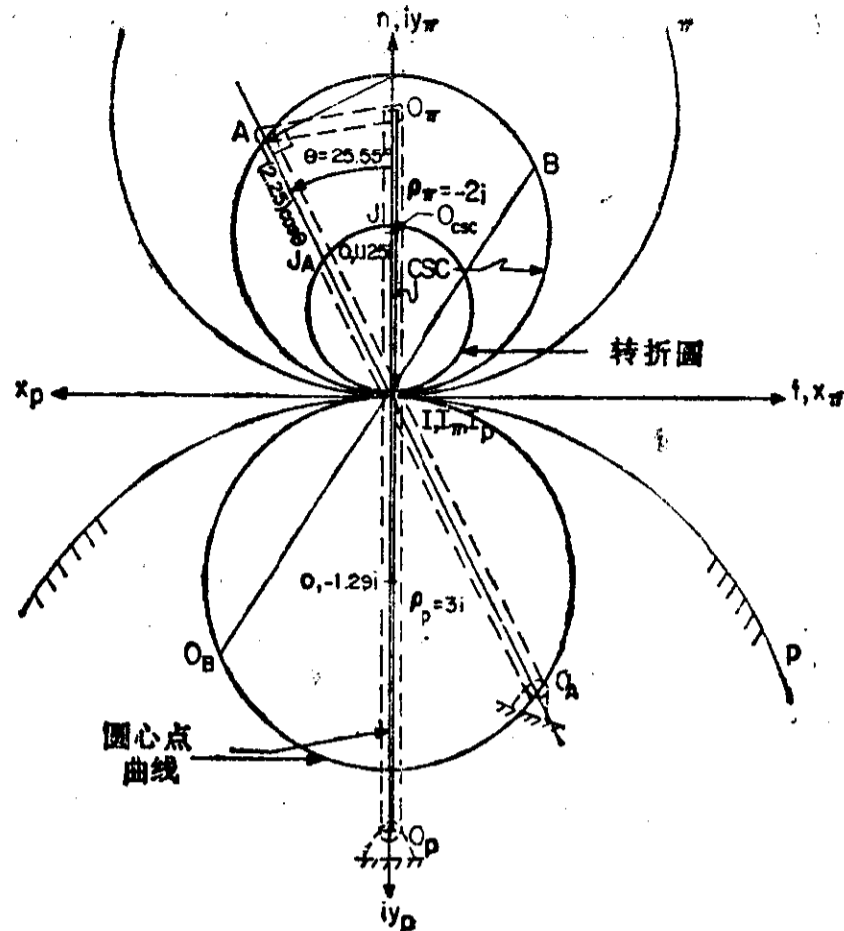


图 4.44 半径 \odot 为 2 in. 的行星齿轮在半径 \odot 为 3 in. 的固定太阳轮上滚动,其曲率驻点三次曲线(布尔梅斯特圆点曲线)退化为一个圆和一条直线,即公法线。通过运动转换得到的该曲线的共轭曲线是圆心点曲线。在这两条曲线上的共轭点可用刚性杆相连接形成与滚动曲线机构等效的连杆机构(见节 4.18)

($0, 1.125i$) (见图 4.44 中的点 O_{sc}) 的圆。因此,在这种情况下,曲率驻点三次曲线退化成了一个圆(二次的)和一条直线。仍保持三次性。

4.18 四个无限接近位置的圆点曲线和圆心点曲线

有些作者称曲率驻点三次曲线为“圆点曲线”,那是德文词“Kreispunktkurve”的直译。然而,因为它是运动平面上所有瞬时地描绘出通过四个“无限接近位置”的圆弧的那些点的轨迹,所以我们也称它为“四个无限接近位置的布尔梅斯特圆点曲线”。

什么是与这一圆点曲线相关的“圆心点曲线”?我们如何找出一对一对的共轭圆心点-圆点呢?

其实,圆心点曲线是固定平面上所有可作为圆点瞬时圆形轨迹的圆心的点的轨迹。容易看到,在运动转换中,这两种曲线的作用也交换了。这给了我们一个如何求圆心点曲线方程的线索:它就是运动转换机构的曲率驻点三次曲线。在这个运动转换机构中,原来的运动平面变成了固定平面,而原来的固定平面运动了起来。所以,圆心点曲线的方程将表示在设在固定平面的坐标系内,其原点在 I_p , 正实轴与原来的负实轴一致,正虚轴与原来的负虚轴重合(图 4.45 中的 $x_p I_p y_p$)。将这一方程变换到坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 中应该是容易的。

如何求出一对一对的共轭圆心点-圆点呢?很简单!在曲率驻点三次曲线上取一个圆点 A , 然后,用欧-萨公式求出它的轨迹曲率中心。或者,如果已经画出了曲率驻点三次曲线及其共轭

① 原文为“直径”,似有误——译者注。

曲线, 则通过瞬心的任何射线将交这两条曲线于一对一对的共轭圆心点-圆点。

下面, 我们来推导所有这些关系。开始是写出下标 p 和 π 互换了的曲率驻点三次曲线的方程, 以求出表示在坐标系 $x_p I_p y_p$ 内的圆心点曲线方程。

参考式(4.101)和图 4.45, 我们看到 θ 保持不变, 不过, 现在是从公法线 n 的负方向开始度量, 仍然是逆时针方向。但是, 为了在 θ 射线上确定一个点的位置, 正 a 现在意味着与以前方向相反。为求这个情况下的 M , 我们通过交换下标 p 和 π , 对式(4.102)作运动转换:

$$\frac{1}{M_p} = \frac{e^{i(\pi/2)}}{3} \left(\frac{1}{\rho_p} + \frac{\rho_\pi - \rho_p}{\rho_\pi \rho_p} \right) = \frac{i}{3} \left(\frac{2}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_\pi} \right) \quad (4.109)$$

(这里, 所有的向量要表示在坐标系 $x_p I_p y_p$ 内。) 同样, 对于 N [从式(4.106)]:

$$\frac{1}{N_p} = \frac{1}{3(\rho_\pi - \rho_p)} \left(\frac{\rho'_p \rho_\pi}{\rho_p} - \frac{\rho'_\pi \rho_p}{\rho_\pi} \right) = \frac{1}{N} \quad (4.110)$$

因此, 我们看到 $M_p \neq M$, 但 $N_p = N$ 。

现在, 我们用这些公式来求例 4.3 中的圆心点曲线, 这里, 在坐标系 $x_p I_p y_p$ 内, $\rho_\pi = 2i$, $\rho_p = -3i$ 。

$$\frac{1}{N_p} = 0, \quad \frac{1}{M_p} = \frac{i}{3} \left(\frac{2}{-3i} - \frac{1}{2i} \right) = \frac{-7}{18}$$

$$M_p = \frac{-18}{7} = -2.257$$

(4.111)

所以, 在坐标系 $x_p I_p y_p$ 内, 圆心点曲线的方程是

$$a^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{-2.57 \cos \theta} + \frac{1}{a} \right) = 0$$

或

$$\sin \theta \left(\frac{a^2}{-2.57} + a \cos \theta \right) = 0$$

第一个因子, $\sin \theta = 0$, 是公法线; 第二个因子, 在消去 a 以后, 成为 $a = 2.57 \cos \theta$, 这是一个直径为 2.57in. 的圆, 其圆心在坐标系 $x_p I_p y_p$ 内是 $(0, 1.29i)$ (图 4.44)①, 或在坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 内是 $(0, -1.29i)$ 。

例如, 对于 $\theta = 25.55^\circ$, $a_A = 2.03\text{in.}$, $a_{OA} = 2.32\text{in.}$, 如图 4.44 所示,

$$\begin{aligned} \rho_A &= \overrightarrow{O_A A} = (2.03 + 2.32) e^{i[(25.55\pi/180) + (\pi/2)]} \\ &= 4.35 e^{i(2.02)} \end{aligned}$$

我们用坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 内的欧-萨公式来校核这一结果。为了开始校核, 必须求出转折圆上的 J_A 。转折圆直径向量 δ 是

$$\delta = \frac{-\rho_p \rho_\pi}{\rho_p - \rho_\pi} = \frac{-3i(-2i)}{3i - (-2i)} = \frac{-6}{5i} = 1.2i$$

$$J_A = \delta \cos \theta e^{i\theta} = i(1.2) \cos \theta e^{i\theta} = 1.08 e^{i[\theta + (\pi/2)]}$$

$$\begin{aligned} \rho_A &= \left[\frac{a^2}{a - J_A} e^{i[\theta + (\pi/2)]} \right] e^{i[\theta + (\pi/2)]} = \left[\frac{(2.03)^2 e^{i[\theta + (\pi/2)]}}{(2.03 - 1.08) e^{i[\theta + (\pi/2)]}} \right] e^{i[\theta + (\pi/2)]} \\ &= 4.35 e^{i[\theta + (\pi/2)]} \end{aligned}$$

① 原文为图 4.45, 似应为图 4.44 ——译者注。

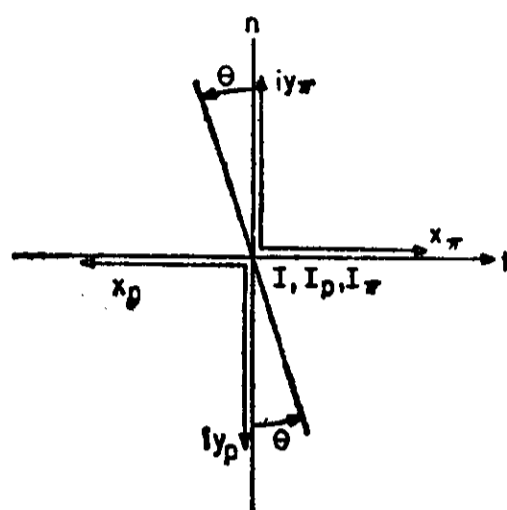


图 4.45 设在运动平面 π 和固定平面 p 内的两个坐标系

这就校核了前面的结果。

有趣的是,注意在图 4.44 所示位置的邻域内,行星轮 π 相对于太阳轮 p 的运动可以用一个四杆机构的连杆 $O_\pi A$ 很近似地再现出来,这一四杆机构的固定杆为 $O_p O_A$,输入杆为 $O_p O_\pi$,从动杆是 $O_A A$ 。在图 4.44 中,以虚线表示了这一连杆机构。换句话说,杆 $O_A A$ 和太阳轮、行星轮可以分别在 O_A 、 A 铰接,而两个齿轮仍然可以在所示位置两边的有限范围内自由滚动。事实上,在曲率驻点三次曲线和圆心点曲线上的任何一对共轭点,比如说由通过 I 画出的另一条射线确定的 BO_B ,都可用作同一目的。甚至,如果 AO_A 和 BO_B 同时用作连接这两个齿轮的多余杆,这个机构在图示位置周围的有限范围内也将仍然不会锁住。

4.19 鲍尔点

运动平面内转折圆上所有点的轨迹都与其轨迹切线瞬时地在三个无限接近位置上相接触。另一方面,运动平面内曲率驻点三次曲线上所有点的轨迹都与它们的密切圆瞬时地在四个无限接近位置上相接触。

问题是,运动平面上有没有一个点,它的轨迹与其切线在四个无限接近位置上相接触?稍为思索一下就能明白,如果有这样的点的话,那它一定是曲率驻点三次曲线和转折圆的交点。事实上,这样的点一般是有的,并称之为鲍尔(Ball)点。

在例 4.3(图 4.44)中,鲍尔点恰巧是转折极 J ,在该点,转折圆与曲率驻点三次曲线的直线分支相交,该直线分支与瞬心线的公法线重合。

一般地说,鲍尔点同时满足曲率驻点三次曲线方程和转折圆方程。如果我们令鲍尔点在坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 内的位置为 $a_B e^{i[\theta_B + (\pi/2)]}$,则

$$a_B^2 \cos \theta_B \sin \theta_B \left(\frac{1}{M \cos \theta_B} + \frac{1}{N \sin \theta_B} + \frac{1}{a_B} \right) = 0 \quad (4.112)$$

$$a_B = \delta \cos \theta_B \quad \text{或} \quad \cos \theta_B = \frac{a_B}{\delta} \quad (4.113)$$

和(见图 4.19)

$$\sin \theta_B = \frac{(\delta^2 - a_B^2)^{1/2}}{\delta} \quad (4.114)$$

将式(4.114)和(4.113)代入式(4.112)得到

$$a_B^2 \frac{a_B}{\delta} \frac{(\delta^2 - a_B^2)^{1/2}}{\delta} \left(\frac{\delta}{M a_B} + \frac{\delta}{N (\delta^2 - a_B^2)^{1/2}} + \frac{1}{a_B} \right) = 0 \quad (4.115)$$

解方程(4.115)求出 a_B ,然后解方程(4.113)和(4.114)求出 $\cos \theta_B$ 和 $\sin \theta_B$ 就得出了鲍尔点的极坐标。计算机作出了曲率驻点三次曲线和转折圆,确定了它们的交点就得到了很好的初次近似解,然后可用数字方法加以精化。同样地,我们可用直角坐标进行:

$$(x_B^2 + y_B^2) \left(\frac{y_B}{N} - \frac{x_B}{M} \right) - x_B y_B = 0 \quad (4.116)$$

和

$$(x_B^2 + y_B^2)^{1/2} = \delta \cos \theta_B = \delta \frac{y_B}{(x_B^2 + y_B^2)^{1/2}} \quad (4.117)$$

或

$$x_B^2 + y_B^2 = \delta y_B \quad (4.118)$$

$$x_B^2 = \delta y_B - y_B^2 \quad (4.119)$$

将式(4.118)和(4.119)代入式(4.116),我们有

$$\delta y_B \left(\frac{y_B}{N} - \frac{(\delta y_B - y_B^2)^{1/2}}{M} \right) - y_B (\delta y_B - y_B^2)^{1/2} = 0 \quad (4.120)$$

同样,解方程(4.120)求出 y_B , 然后解方程(4.119)求出 x_B , 得到答案。也可以由计算机作出方程(4.116)的曲线和转折圆, 它们的交点给出了很好的初次近似解, 再由式(4.120) 精化 y_B , 然后解方程(4.119)求出 x_B 。

“鲍尔点曲线”是 π 曲线在 p 曲线上滚动的过程中, 运动平面上相继成为鲍尔点的那些点的轨迹。这一曲线可以由计算机作图如下, 将 π 曲线绕 p 曲线滚动一个微小的增量, 规定一个新的坐标系 $x_\pi I_\pi y_\pi$, 此坐标系如以前一样, 与瞬心线的新的公切线、公法线重合。求出这一新位置的鲍尔点。然后确定从现在的 $x_\pi I_\pi y_\pi$ 坐标系向原来位置坐标系的变换, 并将决定鲍尔点位置的半径向量变换到原坐标系, 并在原坐标系内画出。例如, 在例 4.3 图 4.44 中, 鲍尔点曲线是圆心在 O_π 、半径为 $\overline{O_\pi J}$ 的圆(图中未示出)。

习 题①

4.1 对下面指定的连杆机构, 作出连杆 3 的定瞬心线和动瞬心线。包括瞬心线的公切线和公法线。当动瞬心线在定瞬心线上滚动时, 发生什么类型的运动? C 点的轨迹是什么?

(a) 图 P 4.1

(b) 图 P 4.2

用图解法求, 再用解析法校核。

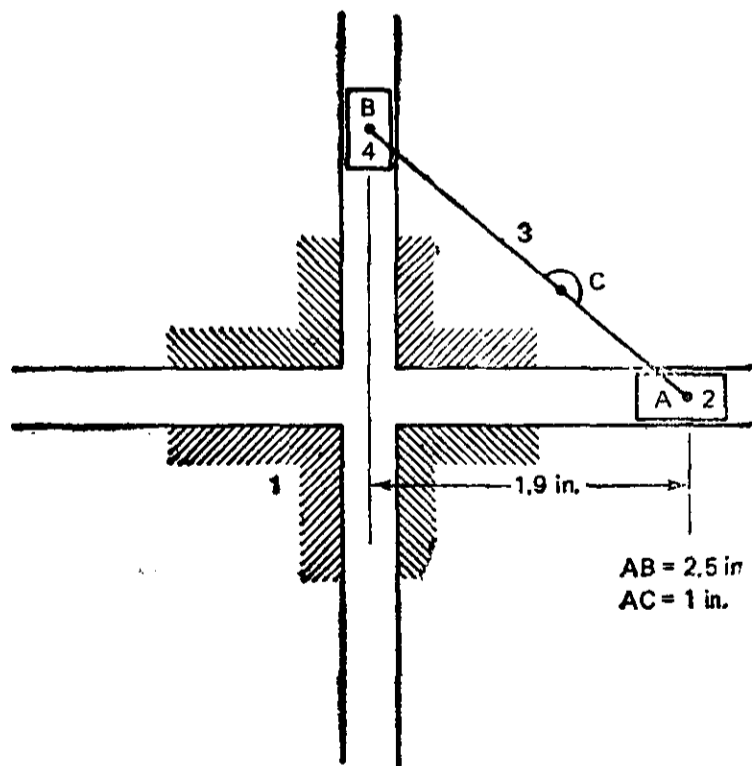


图 P 4.1

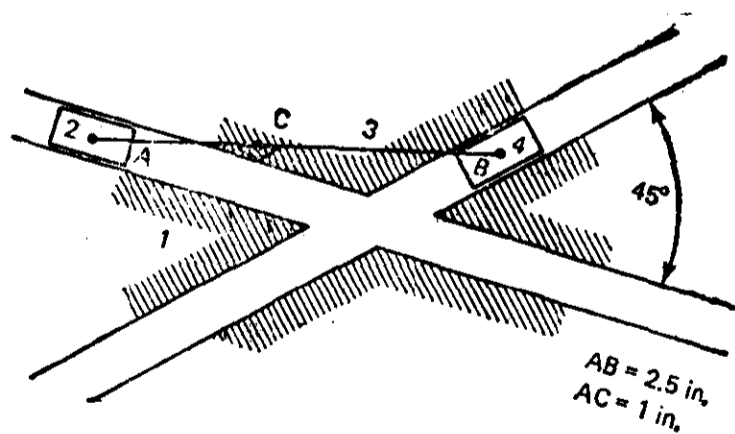


图 P 4.2

① 感谢李·亨特(Lee Hunt)对拟定这些习题作出的贡献。

4.2 在下列题中, 对所指定的连杆机构作出并标明连杆3的定瞬心线和动瞬心线。包括瞬心线的公切线和公法线。用图解法求, 再用解析法抽查所得结果。编出数字计算程序, 并画出这两条瞬心线。

- (a) 图 P 4.3
- (b) 图 P 4.4
- (c) 图 P 4.5
- (d) 图 P 4.6

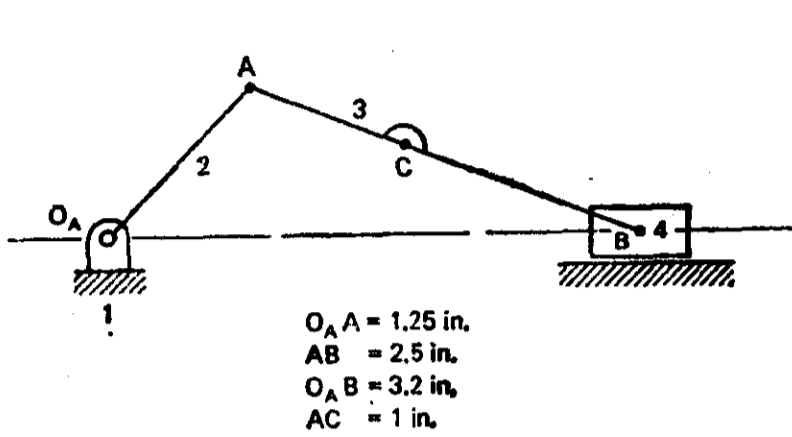


图 P 4.3

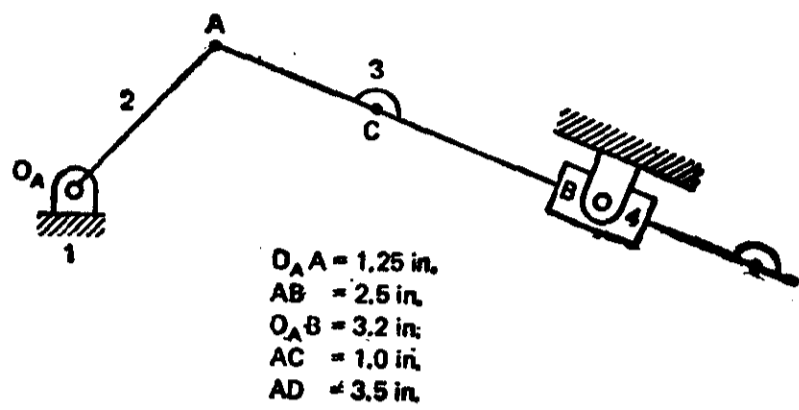


图 P 4.4

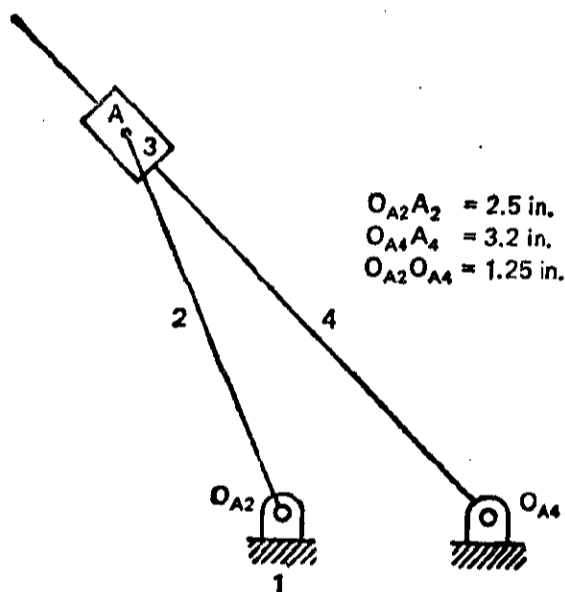


图 P 4.5

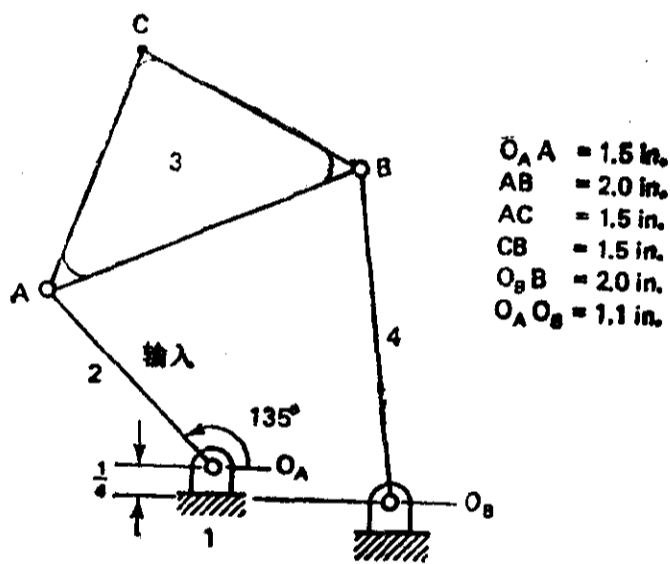


图 P 4.6

4.3 对于图 P 4.1 中的连杆机构, 用图解法和复数法求出点 C 的速度(方向和大小)。滑块, 即构件 2 的速度为 3 cm/s, 向右^①。

4.4 用图解法和复数法求图 P 4.2 中连杆机构连杆点 C 的速度(方向和大小)。构件 2, 即滑块的速度是 1.5 cm/s, 向右^①。

4.5 对于图 P 4.3 中的滑块-曲柄机构, 求连杆点 C 的速度(方向和大小)。用图解和复数两种方法。输入角速度(ω_2)是 1 rad/s, ccw。^{①②}

4.6 求图 P 4.4 所示转换滑块-曲柄机构中连杆点 C 的速度(方向和大小)。用图解和复数两种方法。输入角速度(ω_2)是 1.5 rad/s, cw。^{①②}

4.7 对于图 P 4.6 中的四杆机构, 用图解法和复数法求连杆点 C 的速度(方向和大小)。输入角速度(ω_2)是

① 用题 1 和 2 的结果。

② ccw 表示逆时针方向; cw 表示顺时针方向, 下同——译者注。

1 rad/s, cw. ①

4.8 对于图 P 4.7 中的六杆机构, 求点 C 和 D 的速度(方向和大小)。用图解和解析两种方法。假定输入角速度(ω_2)为 1.5rad/s, cw。用本章的几种方法。

4.9 对图 P 4.1 中的连杆机构, 作出所给定位置上的转折圆, 然后求连杆点 C 的轨迹曲率中心。用图解和解析两种方法。

4.10 对图 P 4.2 中的连杆机构, 作出所给定位置上的转折圆, 然后用欧拉-萨伐里公式求连杆点 C 的轨迹曲率中心。用哈特曼作图法校核其结果。

4.11 对图 P 4.3 中的连杆机构, 作出其转折圆和布雷塞圆。标出转折极和加速度极。求连杆点 C 的轨迹曲率中心。杆 3 的角速度(ω_3)为 2 rad/s, ccw, 其角加速度(α_3)为 1 rad/s², ccw。用图解和解析两种方法。

4.12 对图 P 4.4 中的连杆机构, 作出其转折圆和布雷塞圆。标出转折极和加速度极。然后求连杆点 C 和 D 的轨迹曲率中心。杆 3 的角速度(ω_3)为 1 rad/s, cw, 其角加速度(α_3)为 1.7 rad/s², cw。用图解和解析两种方法。

4.13 用博比利尔作图法作出图 P 4.3 中滑块-曲柄机构的转折圆。用解析法作校核。

4.14 用博比利尔作图法作出图 P 4.6 中四杆机构的转折圆。然后用同样的方法求连杆点 C 的轨迹曲率中心。以解析法作校核。

4.15 作图 P 4.7 中六杆机构连杆 3 和 5 的转折圆和布瑞齐圆。输入角速度(ω_2)为 2rad/s, cw。然后求连杆点 C 和 D 的轨迹曲率中心。

4.16 用博比利尔作图法验证题 4.15 的结果。

4.17 对图 P 4.8 中的齿轮五杆机构作构件 4 相对构件 1 运动的转折圆, 然后用欧拉-萨伐里公式求连杆点 D 的轨迹曲率中心。

4.18 图 P 4.3 中滑块-曲柄机构杆 2 的匀角速度(ω_2)为 1 rad/s, ccw。用本章的方法求连杆点 C 的加速度(方向和大小)。用瞬心法求 ω_3 和利用加速度差和加速度场两种方法求 α_3 。

4.19 对图 P 4.4 所示的滑块-曲柄机构, 用题 4.18 的方法求连杆点 C 和 D 加速度的方向和大小。输入角速度(ω_2)为 1 rad/s, cw。

4.20 用本章方法求图 P 4.6 中四杆机构上点 C 的加速度。输入杆 2 的匀角速度为 1.5rad/s, cw。

4.21 对图 P 4.7 中的六杆机构, 用本章的方法求点 C 和 D 的加速度(方向和大小)。输入杆的匀角速度(ω_2)为 1.5rad/s, cw。

4.22 对于图 P 4.9 中的四杆机构:

- (a) 作连杆相对于机架的转折圆;
- (b) 作出曲率驻点三次曲线;
- (c) 校核在曲率驻点三次曲线上六个轨迹点的实际轨迹曲率。

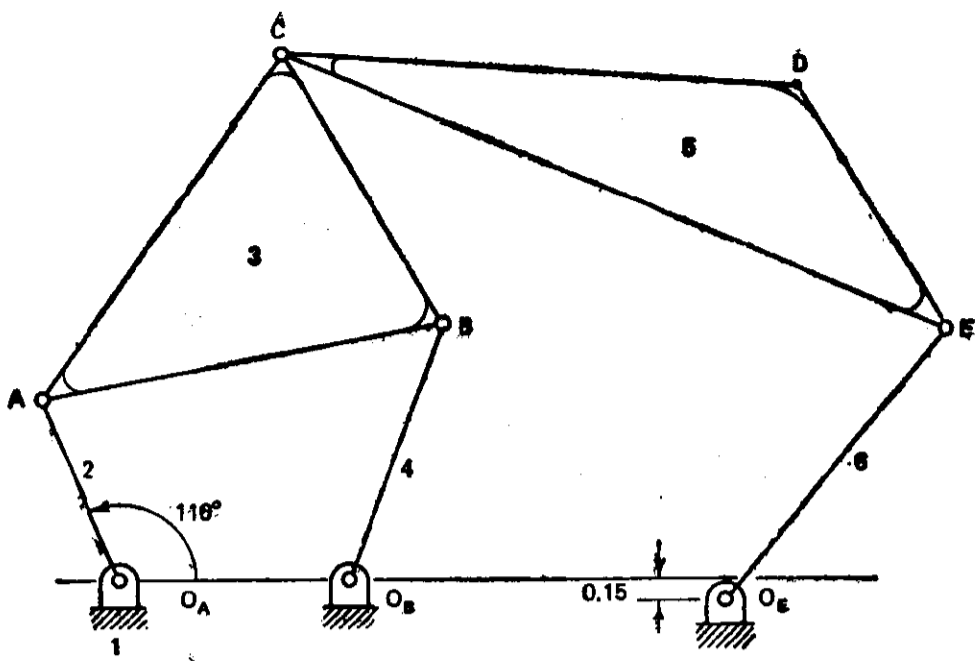
4.23 对于图 P 4.10 中的四杆机构:

- (a) 作连杆相对于机架的转折圆;
- (b) 作出曲率驻点三次曲线;
- (c) 校核在曲率驻点三次曲线上六个轨迹点的实际轨迹曲率。

4.24 对于图 P 4.11 中的四杆机构:

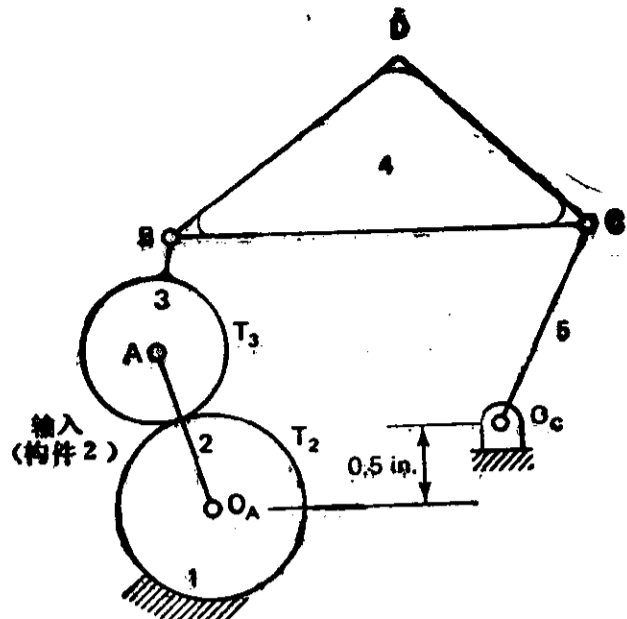
- (a) 作出连杆相对机架的转折圆;
- (b) 作出曲率驻点三次曲线;
- (c) 校核在曲率驻点三次曲线上六个轨迹点的实际轨迹曲率。

① 用题 1 和 2 的结果。



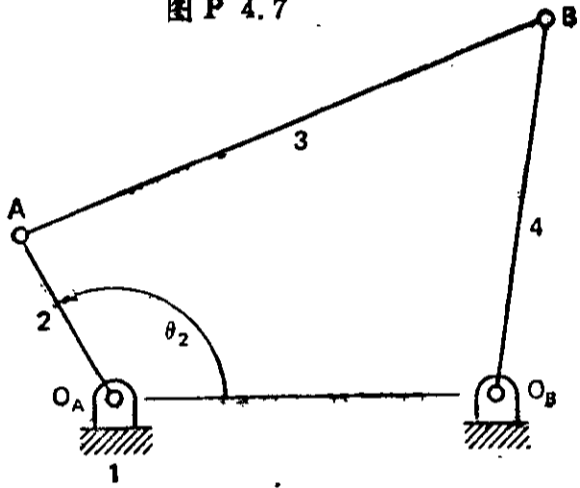
$O_A A = 1.3 \text{ in.}$ $CD = 3.4 \text{ in.}$
 $AB = 2.7 \text{ in.}$ $CE = 4.8 \text{ in.}$
 $AC = 2.8 \text{ in.}$ $DE = 1.9 \text{ in.}$
 $CB = 2.1 \text{ in.}$ $O_E E = 2.3 \text{ in.}$
 $O_B B = 1.8 \text{ in.}$ $O_B O_E = 2.5 \text{ in.}$
 $O_A O_B = 1.5 \text{ in.}$

图 P 4.7



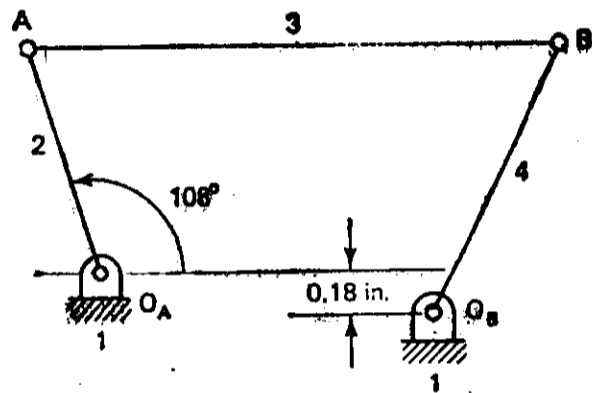
$O_A A = 1 \text{ in.}$ $T_2 = 40 \text{ 齿}$
 $AB = 0.75 \text{ in.}$ $T_3 = 20 \text{ 齿}$
 $BD = 1.75 \text{ in.}$
 $DC = 1.5 \text{ in.}$
 $BC = 2.5 \text{ in.}$
 $O_C C = 1.3 \text{ in.}$
 $O_A O_C = 1.8 \text{ in.}$

图 P 4.8



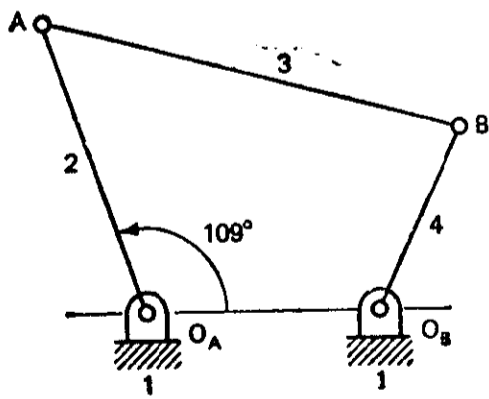
$O_A A = 0.8 \text{ in.}$
 $AB = 2.4 \text{ in.}$
 $O_B B = 1.6 \text{ in.}$
 $O_A O_B = 1.6 \text{ in.}$
 $\theta_2 = 120^\circ$

图 P 4.9



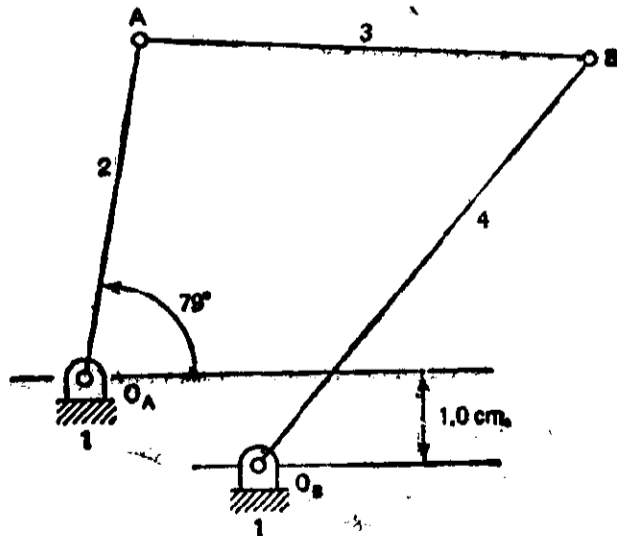
$O_A A = 1.9 \text{ in.}$
 $O_B B = 1.25 \text{ in.}$
 $AB = 2.25 \text{ in.}$
 $O_A O_B = 1.375 \text{ in.}$

图 P 4.10



$O_A A = 1.25 \text{ in.}$
 $O_B B = 0.84 \text{ in.}$
 $O_A O_B = 1.00 \text{ in.}$
 $AB = 1.8 \text{ in.}$

图 P 4.11



$O_A A = 4 \text{ cm.}$
 $O_B B = 6.1 \text{ cm.}$
 $AB = 5.3 \text{ cm.}$
 $O_A O_B = 2.3 \text{ cm.}$

图 P 4.12

4.25 对于图 P 4.12 中的四杆机构:

- (a) 作出连杆相对于机架的转折圆;
- (b) 作出曲率驻点三次曲线;
- (c) 校核在曲率驻点三次曲线上六个轨迹点的实际轨迹曲率。

练 习

4.1 用式(4.24a)和(4.25)证明:在图 4.10a 的情况下, $0 < 1 + (\delta/\rho_x) < 1$, 验证 $0 < \rho < 1$ 和 ρ 是实数。

4.2 用练习 4.1 中的方法验证:在图 4.10b 的情况下, ρ 是实数, 并且是负的。

4.3 与练习 4.1 和 4.2 相似, 验证:在图 4.10c 的情况下, ρ 是实数, 并大于 1。

4.4 用解析法和图解法证明:

(a) 当 $\rho_x \rightarrow \infty$ (即, 当 π 是直线或 I 是其转折点) 时, $\rho \rightarrow 1$ 。

(b) 当 $\rho_p \rightarrow \infty$ (即, 当 p 是直线或 I 是其转折点) 时, $\rho \rightarrow 0$ 。

(c) 当 $\rho_p > \rho_x$ 和 $\rho_x \rightarrow \rho_p$ 时, $\rho \rightarrow -\infty$ 。

(d) 当 $\rho_p < \rho_x$ 和 $\rho_p \rightarrow \rho_x$ 时, $\rho \rightarrow \infty$ 。

4.5 将例 4.2 中适当的值代入欧-萨公式-1 和欧-萨公式-2 的右端, 从而通过实际计算来验证这些公式。

4.6 用类似于推导欧-萨公式-3[式(4.43)]的幅角运算方法, 从欧-萨公式-1[式(4.40)]开始, 不经过欧-萨公式-2, 直接地推导出式(4.44)。

4.7 用图 4.26 中的相似三角形证明博比利尔作图法满足式(4.45)。然后, 从画另一条任意直线 l 开始, 再作一遍, 这一次是向射线的另一边延伸, 并证明会导致同一点 A 。

4.8 与练习 4.7 相同, 但以图 4.27 为基础。

4.9 与练习 4.7 相同, 但以图 4.28 为基础。

4.10 用图 4.29 中适当的相似三角形, 证明 $I^{(1)}$ 和 $I^{(2)}$ 两者都满足式(4.45), 从而证明博比利尔作图法是欧-萨公式-4 的几何证明。

4.11 证明在图 4.30 中, 如果 J_B 利用共线轴作出, 则 I, B, O_B 和 J_B 满足欧-萨公式-3, 即式(4.43)。(提示: 用课文中示范的相似三角形法。)

4.12 在图 4.30 中, 过 I 作一条任意射线, 在其上标出 F 与 A, B 共线, O_F 与 O_A, O_B 共线, J_F 与 J_A, J_B 共线。然后为 I, F, O_F 和 J_F 重复练习 4.11 的证明。

4.13 在图 4.30 中, 过 I 向 $O_A O_B$ 与 $J_A J_B$ 的交点作一射线, 将这三条直线的交点标为 O_G , 同时标作 J_G , 再将该射线与 AB 的交点标作 F 。然后用几何法和解析法证明 $f = J_G/2 = O_G/2$ 。(提示: 用平行四边形 $IEJ_G C_{AB}$, 和欧-萨公式-3[式(4.43)]。)

4.14 证明与图 4.31 相关的引理。[提示: (1) 在共线轴上任选一点, 并称作 C_{AB} 。(2) 过 C_{AB} 作一任意直线 l , 并称它与射线 a 的交点为 A ; 与射线 b 的交点为 B ; 与 $J_A J_B$ 的交点为 E 。(3) 过 C_{AB} 作一直线与 IE 平行, 称它与射线 a 的交点为 O_A , 与射线 b 的交点为 O_B 。(4) 用相似三角形(如在练习 4.11 中那样)证明 I, A, O_A 与 J_A 以及 I, B, O_B 与 J_B 满足欧-萨公式-3 [式(4.43)]。(5) 利用你在选取 C_{AB} 与直线 l 的任意性, 结合与图 4.30 一起叙述的共线轴作图法, 确立与图 4.31 有关的引理。]

4.15 验证在 A, I, O_A 和 n 已知的情况下确定 δ 的哈特曼作图法的纯几何叙述(见图 4.35)。(提示: 假定 $\dot{\phi} = 1 \text{ rad/s}$, 再用式(4.54)的最后形式。)

4.16 验证图 4.36 中求 u 的哈特曼作图法。[提示: 与图 4.34 中求 O_A 的作图法相比较。]

4.17 证明紧接式(4.60)的说明(1)和(2)的正确性。[提示: 令式(4.57)里的 $\dot{\phi} \rightarrow 0$ 。]

4.18 以 δ 表示 a_{AD} 和以 ρ_x 和 ρ_p 表示 δ , 证明将式(4.23)和(4.62)的右端相等之后能导致一个恒等式, 从而证明这两个公式能为 π 平面上点 A 的总加速度给出相同的值。

4.19 将式(4.69)应用于转折极 J , 证明点 J 作为运动平面 π 上的点, 其总加速度 A_J 始终与定瞬心线与动瞬心线的公切线 t 相平行, 从而验证 J 没有法向加速度这一事实。

4.20 将式(4.69)应用于布雷塞圆上的点 K (图 4.38), 证明 K 作为运动平面 π 上的点 K_s , 其总加速度 A_K 与定瞬心线、动瞬心线的公切线 t 共线, 从而验证 K_s 的切向加速度为零。

4.21 证明 π 平面上沿通过 A_p 的射线及其延长线上任何点 A 的总加速度可表示为 $b\delta$, 其中 b 为标量。推导以 $\phi, \dot{\phi}$ 和 $\overrightarrow{AA_p}$ 表示 b 的公式。

4.22 推导式(4.78), 即 ρ 曲线的直角坐标形式。[提示: 参照 $x=t, O=I$ 和 $iy=n$ 的坐标系用式(4.77); 将 $\cos\theta$ 和 δ, α, ρ 的幅角表示在这一坐标系内。然后, 将这些代入式(4.73)并简化。最后, 将所得公式平方, 从而将式(4.75)和(4.76)两个公式包括在一个六次方程内。]

4.23 为了 ρ 曲线的数字作图, 将式(4.78)编成程序。[提示: 将式(4.78)展开并重新排列, 形成 x 的六次方程式, 其系数为 ρ_A, δ 和 y 的确定函数; 通过变量变换 $z=x^2$, 将这一六次方程降为三次; 用 y 作为参数, 从 0 沿 $+iy$ 轴变化, 然后沿 $-iy$ 轴变化, 直至 z 的所有三个解都变成复数、虚数或负实数。对 z 的每个正实数, 求出 ρ 曲线上的 $\pm x$, 再作出图形。]

4.24 通过数字计算作出 ρ_m 曲线。[提示: 对于由解方程(4.75)和(4.76)求出的 ρ 曲线上 α 的每一个值, 用式(4.34)求出 J_A , 然后用式(4.40)求出 ρ_A 。]

4.25 证明式(4.81)能给出与欧-萨公式-1[式(4.40)或(4.40a)]相同的结果。[后一公式在式(4.73)的前面。]

4.26 从式(4.85)开始, 用式(4.98)通过适当的代数运算, 导出式(4.99)。

4.27 对于在图 X4.1 所示位置上的四杆机构中连杆相对固定杆的运动, 用复数分析法进行如下, 并用博比利尔和哈特曼作图法校核你的结果:

(a) 求瞬心 I (图 X 4.2);

(b) 求转折点 J_A 和 J_B ;

(c) 求转折圆的圆心和直径向量(作图和计算方法见图 X 4.3);

(d) 求轨迹切线和法线, 建立坐标系 x, I, y , 并将所有向量转换并表示在该坐标系内。

(e) 利用点 A 和 B 描出圆形轨迹从而是曲率驻点三次曲线上的点这一事实, 一次为 A , 一次为 B 分别写出曲率驻点三次曲线的方程。然后, 联立解所得到的 $1/M$ 和 $1/N$ 的两个线性实数方程, 求出 M 和 N ;

(f) 用 M 和 δ 的值求 ρ_s , 然后求 ρ_p ;

(g) 用 $1/N$ 和 δ 的值求 δ' ;

(h) 求布雷塞圆;

(i) 求加速度极;

(j) 写出加速度场方程;

(k) 在连杆平面上选一个一般点, 用两种方法确定其加速度: (1)用加速度场方程, (2)用加速度差原理。两个结果是否一致?(它们应该是一致的!)

(l) 求回归圆;

(m) 写出曲率驻点三次曲线的方程;

(n) 作出曲率驻点三次曲线上与转折圆交点邻域内的几个点, 以求出鲍尔点的近似位置;

(o) 在现有位置任一边的邻域内作出鲍尔点轨迹上的几个点, 误差在 10% 以内的近似直线轨迹有多长? [% = 100(垂直于轨迹切线方向的误差)/区间。]

(p) 用写运动转换机构的曲率驻点三次曲线方程的方法写出圆心点曲线的方程, 并将其变换到原坐标系 $x, I, y = xIy$ 内;

(q) 用曲率驻点三次曲线和圆心点曲线上的一些共轭点, 作出另一个四杆机构, 使它在四个无限接近位置

上与原机构的连杆运动一致；

(r) 对于这个新四杆机构的连杆运动, 求出瞬心 I 、转折圆、加速度极和加速度场以及曲率驻点三次曲线。这些与原四杆机构的那些项目的一致程度如何? (它们应该是一致的!)

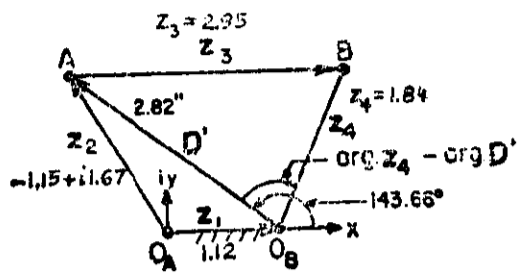


图 X 4.1

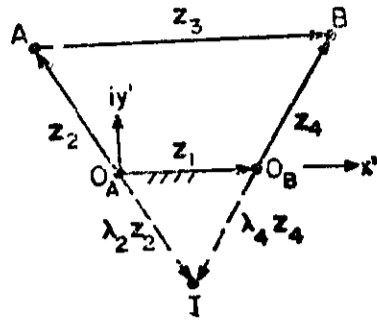


图 X 4.2

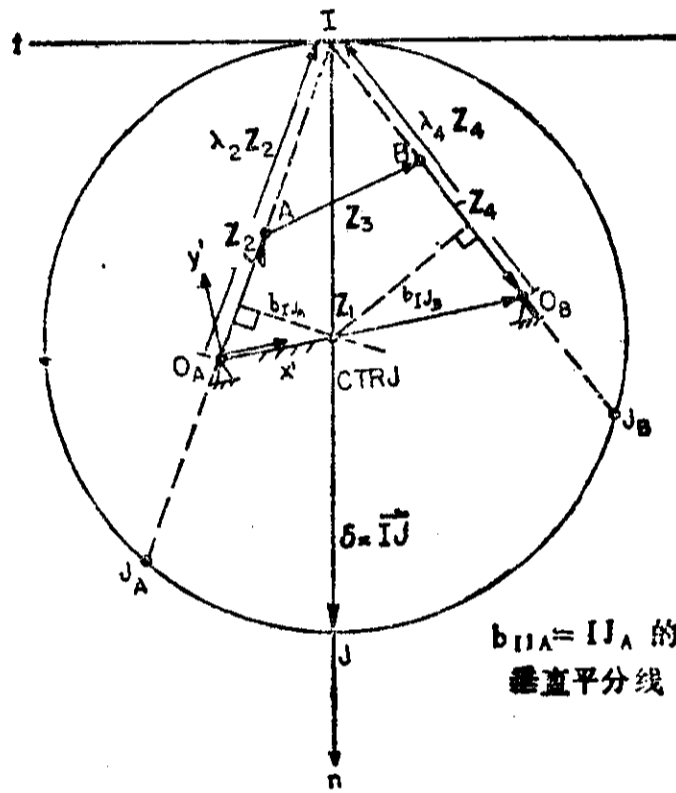


图 X 4.3

第五章 机构动力学——高深内容

5.1 引言

第一卷第五章介绍了与机构动力学有关的基本原理。动力学的内容可以分为如表 5.1 所定义的一些子范畴。动力学分析的难易程度取决于某个具体问题中什么是已知的,什么是未知的,以及对未知量可做些什么样的假定等因素。

机构的静力分析和动态静力分析方法已在第一卷中作过叙述。在这些方法中,独立变量是机构中一构件的角度或位置。因此,这类“动力学”方程是代数的,因而也容易求解。

在这一章中,我们来研究更复杂的问题——从时间响应的问题开始,到高速机构的分析结束。后者包含有非刚性的机构构件(对于各类分析问题采用什么样假定的概括,可参看第一卷表 2.1)。

在第一卷第五章中介绍过的两种动态静力学方法中,机构的运动是预定了的,即输入构件的位置、速度和加速度都已给定。在动态静力学中,我们要求的是在这些预定的运动条件下联接中所出现的力和驱动机构所需要的输入扭矩。然而不足的是,可能根本没有办法来实现由逐个位置动态静力分析的结果所导出的扭矩对输入转角的关系。

表 5.1 机构静力和动力分析方法的分类*

		方 法		
		静力学(包括机械效益)	动态静力学	动力学(包括时间响应)
输入信息 和一些假定(已知)	质量	不考虑**	确定的	确定的
	载荷	确定的,或参数化了的, 如“输入/输出”之比	每一位置都确定	用位置、速度和(或)时间的关系来确定
	运动	位置已定	位置、速度和加速度都确定	未知
输出信息 (要求的)		平衡载荷所需的输入力 每一位置的机械效益 联接中的反力	维持假定运动所需的输入力 联接中的反力	每个构件的位置、速度和加速度(时间的函数),即真实运动
所需要的分析工具		静力学,线性代数	达朗伯原理,静力学,线性代数	列出运动的微分方程,用计算机求解

* 从左到右依复杂程度递增的次序排列。

** 构件的重量在分析中可能起一定作用,但惯性不起作用。

来源: 参考文献[88]

5.2 应用矩阵法进行动态静力分析的复习

矩阵法在进行机构动态静力分析的一种标准方法。这一节将复习在第一卷节 5.6 中介绍过的这种方法。矩阵法的优点是运动方程的推导很快,其缺点是需要进行矩阵运算以便求解方程。我们把这种方法用于图 5.1a 中的四杆机构。 A_{gi} 、 F_{oi} 、 F_{ji} 、 F_{oix} 、 g_i 、 T_s 、 ω_i 和 α_i 分别为构件 i 质心的加速度、作用在构件 i 质心上的惯性力、构件 j 作用在构件 i 上的力、构件 i 惯性力的 x 分量、构件 i 的质心、作用在机构上的驱动扭矩、构件 i 的角速度和构件 i 的角加速度。惯性力的 x 和 y 分量按交于每一运动构件的质心来考虑,所以有一个惯性力矩加到每个隔离体图上(为了计及角加速度)。参照图 5.1b、c 和 d 中的三个隔离体图,对于每一构件都可以写出三个静力平衡方程式: $\Sigma F_x=0$ 、 $\Sigma F_y=0$ 和 $\Sigma T_g=0$, 其中最后一个方程式是绕重心 g_i 的力矩之和。

对于构件 2(图 5.1 b):

$$F_{12x} + F_{32x} + F_{02x} = 0 \quad (5.1)$$

$$F_{12y} + F_{32y} + F_{02y} = 0 \quad (5.2)$$

为了把力矩平衡方程写成统一的、便于计算机编程的形式,而不用人为地确定每一力矩的符号,我们将使用下列公式来表示力 F 绕支点的力矩:

$$M_F = r_x F_y - r_y F_x \quad (5.3)$$

此式来自向量叉积 $M_F = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 的行列式形式。这里 \mathbf{r} 是从支点到力作用点的向量(图 5.1 e), 因此,例如对于图 5.1 b, F_{12} 绕 g_2 的力矩为:

$$\begin{aligned} M_{F_{12}/g} &= (-\mathbf{r}_{g2}) \times \mathbf{F}_{12} = (-r_{g2x})F_{12y} - (-r_{g2y})F_{12x} \\ &= F_{12x}r_{g2} \sin \theta_2 - F_{12y}r_{g2} \cos \theta_2 \end{aligned}$$

从而,构件 2 的力矩方程式变为:

$$T_{O2} + T_s + F_{12x}r_{g2} \sin \theta_2 - F_{12y}r_{g2} \cos \theta_2 - F_{32x}(r_2 - r_{g2}) \sin \theta_2 + F_{32y}(r_2 - r_{g2}) \cos \theta_2 = 0 \quad (5.4)$$

对于构件 3(图 5.1 c):

$$F_{23x} + F_{43x} + F_{03x} = 0 \quad (5.5)$$

$$F_{23y} + F_{43y} + F_{03y} = 0 \quad (5.6)$$

$$T_{O3} + F_{23x}r_{g3} \sin \theta_3 - F_{23y}r_{g3} \cos \theta_3 - F_{43x}(r_3 - r_{g3}) \sin \theta_3 + F_{43y}(r_3 - r_{g3}) \cos \theta_3 = 0 \quad (5.7)$$

式中我们用了作用在构件 3 上的“外力” F_{23} 和 F_{34} 。

对于构件 4(图 5.1 d):

$$F_{34x} + F_{14x} + F_{04x} = 0 \quad (5.8)$$

$$F_{34y} + F_{14y} + F_{04y} = 0 \quad (5.9)$$

$$T_{O4} - F_{34x}(r_4 - r_{g4}) \sin \theta_4 + F_{34y}(r_4 - r_{g4}) \cos \theta_4 + T_L + F_{14x}r_{g4} \sin \theta_4 - F_{14y}r_{g4} \cos \theta_4 = 0 \quad (5.10)$$

这里 T_L 表示由于外载荷而产生的作用在构件 4 上的扭矩。方程(5.1)到(5.10) (除 5.3 外)表示一组含九个未知数的九个线性方程,这九个方程正好表示图 5.1a 所示的四杆机构每一运动构件瞬时的力和力矩的动力平衡。假定载荷扭矩 T_L 和运动特性参数 ω_i 和 α_i 给定,那么这九个未

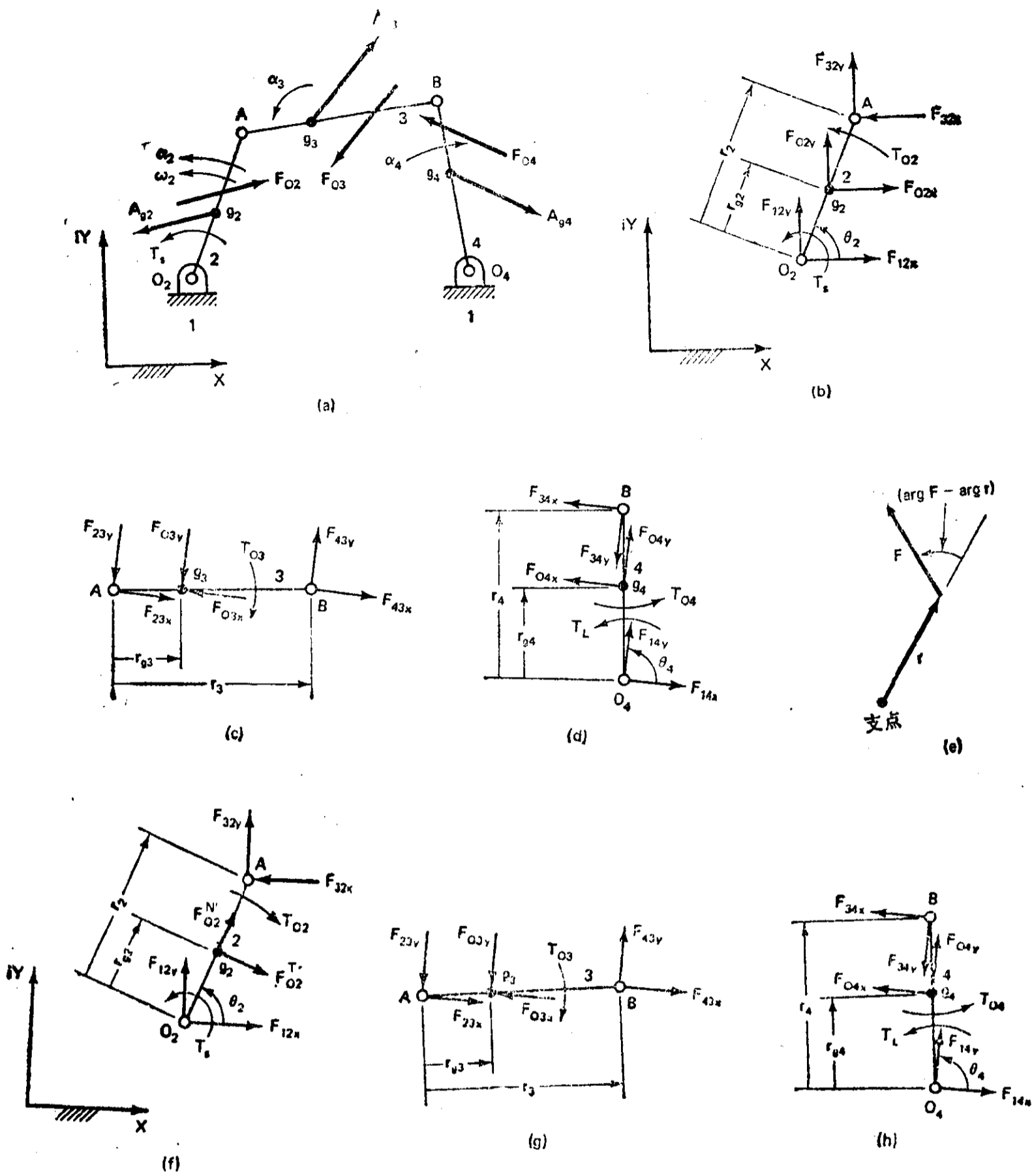


图 5.1 (a) 四杆机构动态静力分析用的标记; (b) 构件 2 的隔离体图; (c) 构件 3 的隔离体图; (d) 构件 4 的隔离体图; (e) 力 F 绕支点的力矩向量方程式 $M = r \times F$, 此方程式可以导出二维空间中的、与复数表达法相一致的标量方程式(式 5.3); (f) 用于时间响应方程式[5.18(1), 5.18(2) 和 5.18(3)]的构件 2 的隔离体图; (g) 用于时间响应方程式[5.18(4), 5.18(5) 和 5.18(6)]的构件 3 的隔离体图; (h) 用于时间响应方程式[5.18(7), 5.18(8) 和 5.18(9)]的构件 4 的隔离体图。

知量就是 $F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{34x}, F_{34y}, F_{14x}, F_{14y}$ 和 T_{s0} 。注意: $F_{j k x} = -F_{j k x}$, 余类推。同时, 惯性力 F_{O_i} 和惯性力矩 T_{O_i} 的实部和虚部分量由下式求得:

$$F_{O_i} = -m_i A_{g_i} = (m_i A_{g_i}) e^{i(\theta_i + \pi)}$$

和

$$T_{O_i} = -\alpha_i I_i \tag{5.11}$$

这里 m_i 是质量, A_{gi} 是加速度, β_i 是 A_{gi} 的幅角, α_i 是角加速度, I_i 是绕构件 i 质心 g 的转动惯量。现在我们将这九个方程改写, 把未知项移到方程的右边:

$$\begin{aligned}
 F_{O2x} &= -F_{12x} + F_{23x} \\
 F_{O2y} &= -F_{12y} + F_{23y} \\
 T_{O2} &= -F_{12x}(r_{g2}\sin\theta_2) + F_{12y}(r_{g2}\cos\theta_2) \\
 &\quad -T_s - F_{23x}(r_2 - r_{g2})\sin\theta_2 + F_{23y}(r_2 - r_{g2})\cos\theta_2 \\
 F_{O3x} &= -F_{23x} + F_{34x} \\
 F_{O3y} &= -F_{23y} + F_{34y} \\
 T_{O3} &= -F_{23x}r_{g3}\sin\theta_3 + F_{23y}r_{g3}\cos\theta_3 - F_{34x}(r_3 - r_{g3})\sin\theta_3 + F_{34y}(r_3 - r_{g3})\cos\theta_3 \\
 &\quad -T_L \\
 F_{O4x} &= -F_{34x} - F_{14x} \\
 F_{O4y} &= -F_{34y} - F_{14y} \\
 T_{O4} &= F_{34x}(r_4 - r_{g4})\sin\theta_4 - F_{34y}(r_4 - r_{g4})\cos\theta_4 - F_{14x}r_{g4}\sin\theta_4 + F_{14y}r_{g4}\cos\theta_4 - T_L
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

由于在机构每一位置的动态静力分析中, 方程组内的正弦值和余弦值都为已知, 所以, 这组方程对于未知量(铰链中的反力及 T_s)是线性的。如果我们定义

$$\begin{aligned}
 R_2 &\equiv r_2 - r_{g2} \\
 R_3 &\equiv r_3 - r_{g3} \\
 R_4 &\equiv r_4 - r_{g4}
 \end{aligned}$$

那么, 方程组(5.12)就可以表示为式(5.13)那样的矩阵形式, 或表示成符号形式

$$\begin{bmatrix} F_{O2x} \\ F_{O2y} \\ T_{O2} \\ F_{O3x} \\ F_{O3y} \\ T_{O3} \\ F_{O4x} \\ F_{O4y} \\ T_{O4} + T_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{g2}\sin\theta_2 & r_{g2}\cos\theta_2 & -1 & -R_2\sin\theta_2 & R_2\cos\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{g3}\sin\theta_3 & r_{g3}\cos\theta_3 & -R_3\sin\theta_3 & R_3\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_4\sin\theta_4 & -R_4\cos\theta_4 & -r_{g4}\sin\theta_4 & r_{g4}\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ T_s \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

$$[F_I] = [L][F_B] \tag{5.14}$$

式中 $[F_I]$ 为已知惯性力、惯性力矩及载荷扭矩的列矩阵;

$[L]$ 为已知的机构参数和位置参数的方阵;

$[F_B]$ 为未知的联接中的反力和输入扭矩的列矩阵。

这个方程组可以用如下的矩阵算法来求解未知量。在方程(5.14)的左右两边都左乘 $[L]^{-1}$ ($[L]$ 的逆矩阵)

$$[L]^{-1}[F_I] = [L]^{-1}[L][F_B] \tag{5.15}$$

因为 $[L]^{-1}[L] = [I]$ 是一个单位矩阵

$$\text{所以 } [F_B] = [L]^{-1}[F_I] \quad (5.16)$$

要解方程(5.16), 需要计算机构参数矩阵的逆阵和进行式(5.16) 右边两个矩阵的乘积运算。通常说来, 这些矩阵运算都可以用计算机系统内的标准程序来进行。

应该注意, 在式(5.15) 中进行求逆阵的运算很费计算机时间。如果节省计算机时间是很重要的话, 那么用高斯-约旦消元法把式(5.13) 中的系数矩阵变成上三角形矩阵, 然后用直接回代法求解, 可以大量减少计算次数^[118]。这种方法通常只需做 $[(3m)^3/3 + (3m)^2/2]$ 次的乘法运算(这里 $m=3$ 。 m 是运动构件的数目), 要比用逆阵法少三分之二的计算量。通常要把系数矩阵的部分行(或列) 交换位置, 以避免用一个很小的系数来除, 从而保证精度^{[51]①}。

设计实例: 卡片冲孔机的动态静力分析^[30]

矩形卡片冲孔机和读卡机是数字计算机系统常用的外围设备。这种把卡片从输入卡仓送入机器的送卡机构, 要能够以高速供给卡片——通常为每分钟 300~1000 张, 送卡方法要简单便宜而且可靠耐用。

图 5.2 是一种由四杆机构组成的送卡机的推荐设计方案。有一适当的驱动机构带动曲柄, 使取卡刀片组件产生来回摆动。当机构从静止起动时, 取卡刀片挂住一张 0.007 in~0.009 in 厚的卡片。当取卡刀片达到最高速度时, 卡片就被靠其它动力带动的进给辊轮卷进去。然后, 这张卡片就沿它的轨迹通过机器。最后, 机构被带回, 停留在开始位置, 准备供给下一张卡片。

在循环的初始阶段, 取卡刀片刚刚挂住卡片时, 机构要克服卡片对卡片及卡片对取卡刀片之

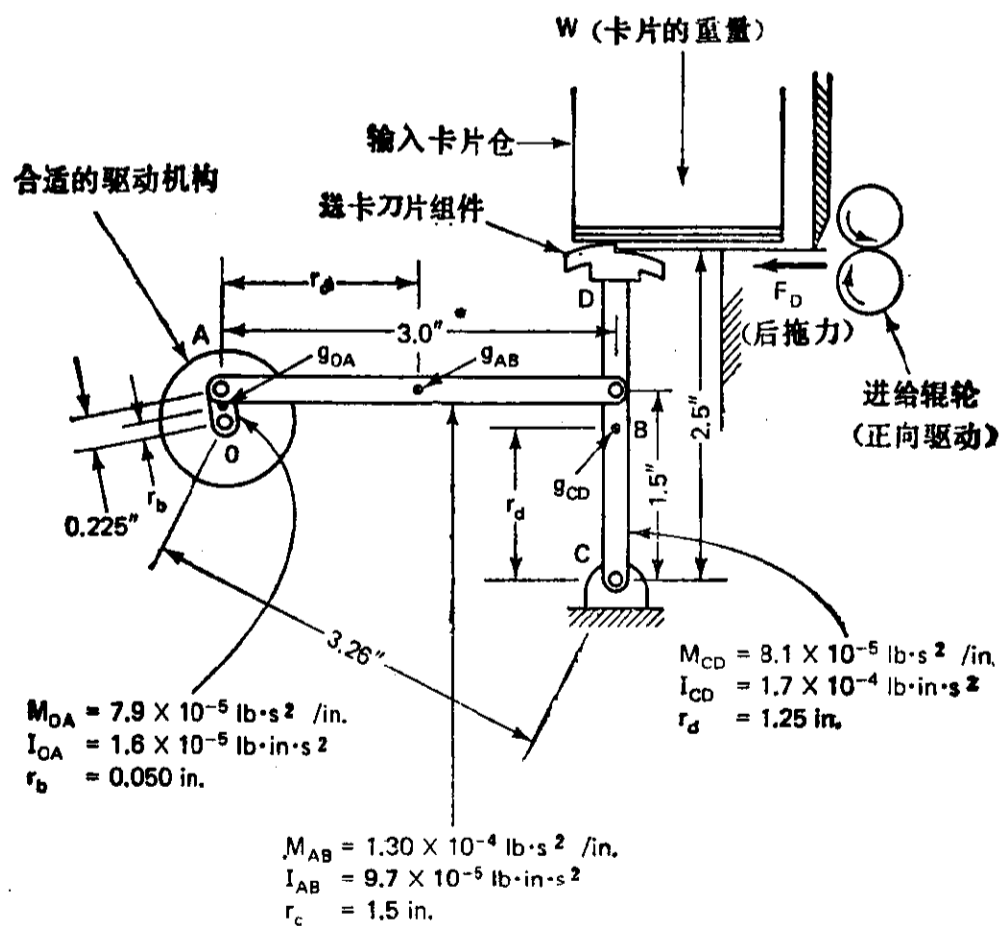


图 5.2 由四杆机构 OABC 组成的送卡机构示意图

① 原文为[50]——译者注。

间的阻力,同时还承受一叠卡片的部分重量。在所送卡片被进给辊轮卷入以后,只剩下卡片对取卡刀片之间的阻力还作用着。这阻力与卡片对卡片之间的阻力相比要小。

图 5.3 到图 5.5 表示出该机构假设的运动特性和载荷。由图 5.3 中角位置、速度和加速度相对于时间的关系可从驱动马达的特性推导如下:

当 $t \leq 0.01234$ s 时,

$$\theta_2 = -\frac{21610.2}{2}t^2 + 3.6183(\text{rad})$$

$$\dot{\theta}_2 = -21610.2t(\text{rad/s})$$

$$\ddot{\theta}_2 = -21610.2(\text{rad/s}^2)$$

当 $t \geq 0.01234$ s 时,

$$\theta_2 = -266.67(t - 0.01234) + \frac{7667.2}{2}(t - 0.01234)^2 + 1.9729(\text{rad})$$

$$\dot{\theta}_2 = -266.67 + 7667.2(t - 0.01234)(\text{rad/s})$$

$$\ddot{\theta}_2 = 7667.2(\text{rad/s}^2)$$

图 5.3 中角速度曲线所包围的面积表示输入曲柄旋转了一周或 2π 弧度。

图 5.4 和图 5.5 表示了在这个例子中的载荷 W_c ——卡片仓中那叠卡片的重量,和 F_D ——卡片上的阻力。假定 W_c 是沿杆 4 作用,而 F_D 与杆 4 垂直,在整个运动循环中,这样的假定大致

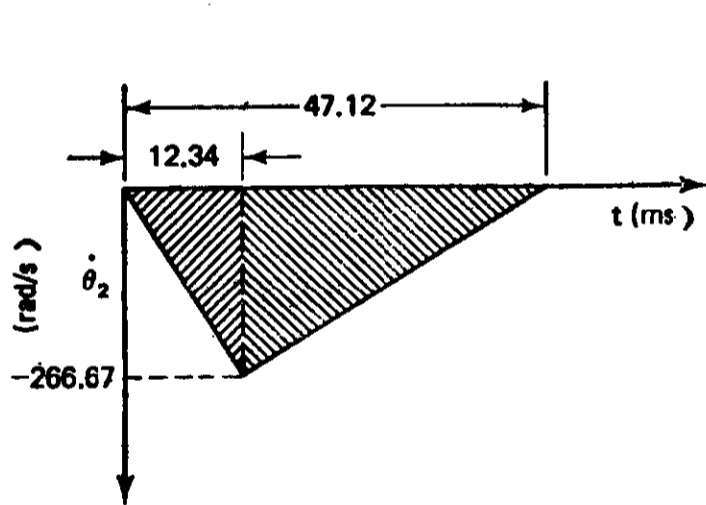


图 5.3 输入给四杆机构驱动曲柄的角速度

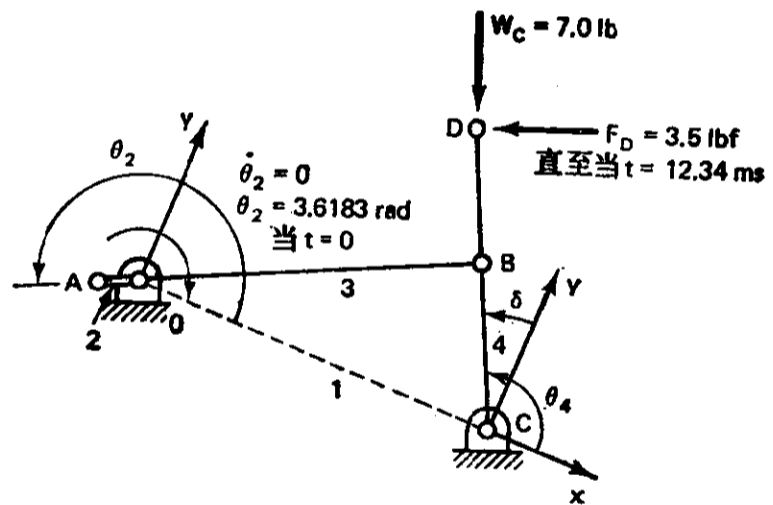


图 5.4 时间为 0 时的载荷和角度

上是正确的。

$$F_{Lx} = W_c \sin \delta - F_D \cos \delta$$

$$F_{Ly} = -W_c \cos \delta - F_D \sin \delta$$

$$T_L = -F_{Lx} \overline{CD} \sin \theta_4 + F_{Ly} \overline{CD} \cos \theta_4$$

式中 δ 是 y 轴与构件 4 (DC) 之间的夹角, F_L 是在点 D 处作用于机构的载荷力, T_L 是由 F_L 作用在构件 4 上的载荷力矩。

图 5.6 中的实线表示根据方程(5.12)到(5.16)算出的曲柄(构件 2) 旋转一周所需要的输入扭矩。因为 F_{Lx} 、 F_{Ly} 和 T_L 都不是 $\dot{\theta}_2$ 、 θ_2 或 t 的函数,所以我们可以设 $\dot{\theta}_2$ 和 $\ddot{\theta}_2$ 为零,来考察惯性对输入扭矩的作用。这样求出的扭矩就应该是维持平衡所需的静扭矩。图 5.6 中的虚线表示了所

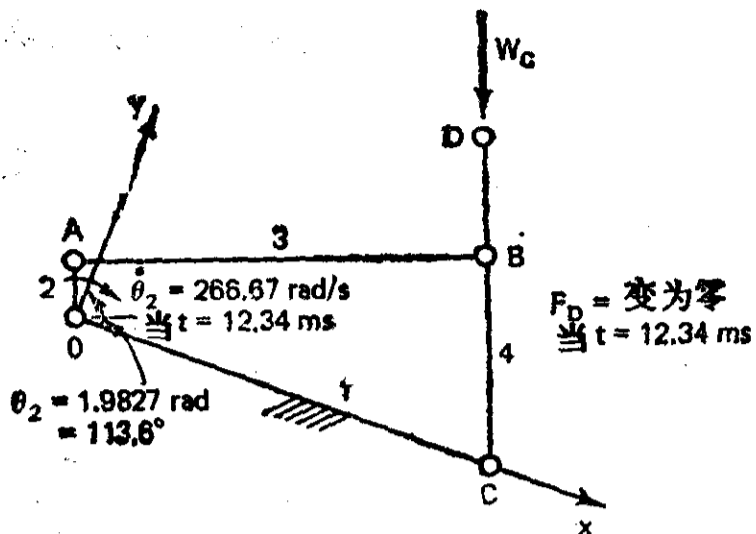


图 5.5 当时间 $t = 12.34 \text{ ms}$ 时的载荷和角度

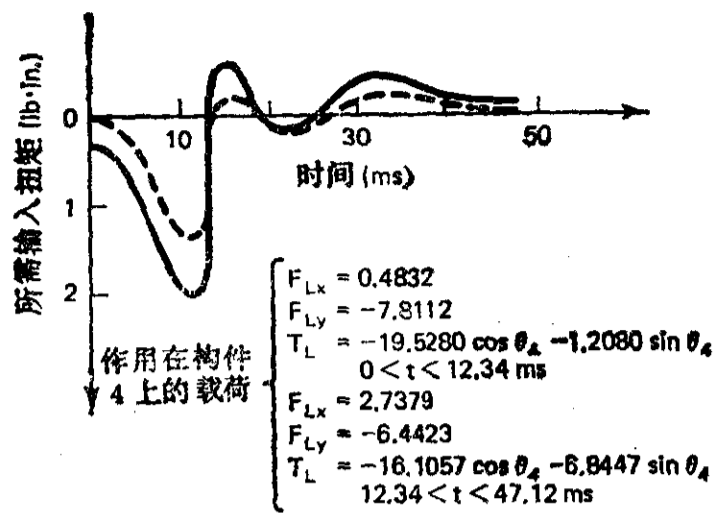


图 5.6 给定作用在杆 4 上的载荷及运动输入参数 (图 5.3) 后, 维持平衡所需的扭矩

需的静扭矩; 实线和虚线之间的差可以认为正比于四杆机构相对于构件 2 的等效惯量。如果一个与等效惯量相等的、变化的惯性载荷加到(没有了机构其余部分)输入构件上, 那么这个同样的、变化的输入扭矩将会是所需要的。应注意, 等效惯量在循环过程中不是固定不变的。

尽管图 5.3 所示的运动特性可能非常理想, 但是实际上却很难实现。为了要使马达真正得到图 5.3 所示的角速度曲线, 必须把预先假设好的, 变化的机构惯量加到马达上, 同时很仔细地测量马达的扭矩-速度曲线。因此现在的问题仍然是, 在我们不知道驱动机构准确的输入扭矩特性的情况下, 能不能达到严格的送卡运动要求。如果要求的精度更高, 那么动态静力分析就不适应了, 而必须用下一节所讲的时间响应方法来解决。

5.3 时间响应

上节的设计实例告诉我们一个情况, 就是动态静力分析法由于运动输入不确定而不够适用。因此, 我们要改变分析的目标, 以便找到一个更加精确的方法。在时间响应的分析中(参看表 5.1), 给定了一个已知几何尺寸、质量和惯性的机构, 该机构受已知外载和已知驱动力或驱动扭矩(如扭矩-速度的关系)的作用。由时间响应分析可以得出作为时间函数的机构位置、速度和加速度等运动参数。如果需要, 也可以得出是时间函数的联接作用力。

现在, 由于自变量是时间而不是位置参数, 又因为我们要寻求机构的未知运动, 所以必须求解运动的微分方程。这些方程的系数, 诸如输入杆上的等效惯量和阻尼, 都是位置的函数, 因而我们要用到数值积分方法。

龙格-库塔(Runge-Kutta)法简介

在许多可采用的数值积分方法中, 应用最为广泛的方法之一是龙格-库塔四阶数值分析程序^[33, 50, 259]。我们将用两个例子来说明这个方法: 一个例子是解一阶微分方程; 另一个是解二阶微分方程。

龙格-库塔数值积分提供了一种算法, 即它可以在自变量的某些特定值上来确定函数的积分值。对于即将出现的问题, 我们可以把这种算法说成是: 速度的计算可以由在某些特定时间值上

的加速度来求得。龙格-库塔方法是将函数在某一点展开成泰勒级数而推导出来的,这里我们只列公式而不进行推导。因变量 $y(x)$ 在第 $n+1$ 点上的值是由函数在 n 点上的因变量 y 以及在时间 n 上的导数来决定的:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4) \quad (5.17)$$

式中:

*是乘法符号

$$k_1 = h*f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h*f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h*f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h*f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$f(x_n, y_n) = y'_n$ ——因变量 y 相对于自变量 x 的导数值,它是用来确定 $y(x)$ 的被积函数在 x_n, y_n 处的值。

h ——自变量 x 所取的步长;

n ——步数(即 $n=0, 1, 2, 3, \dots$);

x_n ——自变量在第 n 步时的值。

例 5.1

为了说明这种方法,我们假设要求解一个一阶微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} = y' = t^2$$

步长为 $\Delta t = h = 1$, 初始条件: $t=1$ 时 $y = \frac{1}{3}$ 。注意,现在 y 是因变量, t 是自变量,我们已知对时间的导数 $y'(t)$, 要求 $y(t)$ 。

解: 这个问题可以用先分离变量再两边积分的解析方法求解如下:

$$\frac{dy}{dt} = t^2$$

$$dy = t^2 dt$$

$$\int dy = \int t^2 dt$$

由此得出

$$y = \frac{1}{3}t^3 + C$$

利用初始条件 $\left[y_{t=1} = \frac{1}{3} \right]$ 求常数的值, 可得 $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + C$ 或 $C = 0$ 因此, $y(t) = \frac{1}{3}t^3$

下面我们来求因变量 y 在需要其结果的 t 的间隔上的数值。这将为我们的提供一个比较的基础,从而显示龙格-库塔方法是非常有效的。因为我们已知 $t=1$ 时的 y 值(初始条件),从 $t=2$ 开始应用龙格-库塔法。在运算前应注意,龙格-库塔法的一般形式是把因变量的导数看作是自变量和积分(或因变量)两者的函数[即 $y' = f(x, y)$]。但是,对于这个例子,因变量的导数只是自变量的函数,

首先,算出各个 k 的值:

$$k_1 = h*t^2 = 1.00$$

$$k_2 = 1 * \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

$$k_3 = 1 * \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

$$k_4 = 1 * (1 + 1)^2 = 4.00$$

代入方程(5.17), 而且 $y_1 = \frac{1}{3}$, 得到:

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(1 + 4.50 + 4.50 + 4.00) = 2.667$$

对下一个间隔重复这个步骤。

再算出四个 k 的值:

$$k_1 = 1 * 2^2 = 4.000$$

$$k_2 = 1 * \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 6.250$$

$$k_3 = 1 * \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 6.250$$

$$k_4 = 1 * (2 + 1)^2 = 9.000$$

代入方程(5.17), 得到:

$$\begin{aligned} y_3 &= 2.667 + \frac{1}{6}(4.000 + 12.500 + 12.500 + 9.000) \\ &= 9.000 \end{aligned}$$

我们看到, 解析式在同样间隔内给出完全相同的解。然而, 通常说来, 龙格-库塔法的误差取决于步长及计算机的舍入误差等因素。但是, 如果控制好步长, 那么计算精确到小数点以下若干位是相当有希望的。

至此, 我们看到龙格-库塔法很圆满地求解了一个一阶微分方程, 但是在运动学问题中, 我们要从已知的加速度来求位移, 必须求解二阶微分方程。

把龙格-库塔法用来解高阶系统, 要将高阶方程变换成一组一阶方程, 然后解这些方程, 每次解一个, 而且总是把前一个积分的结果作为下一个积分的输入。因此, 当有一个包含已知加速度(位移的二阶导数)的方程而要求位置时, 首先求解速度, 然后以求得的速度为第二个龙格-库塔过程的输入, 而从速度积分求出位移, 从而确定位置。下面的例子将说明这一算法。

例 5.2

要求解一个二阶微分方程: $y'' = 2t$ 。初始条件为 $t = 1$ 时, $y = \frac{1}{3}$, $y' = 1$ 。与前面一样, 我们希望用步长 $\Delta t = h = 1$ 来解。

解: 可以看出, 这个二阶微分方程是对上面第一个例中的方程微分后得到的, 而且初始条件的选取使得两个积分常数为零。此方程的解析解为:

$$y' = t^2 \quad \text{和} \quad y = \frac{1}{3}t^3。$$

龙格-库塔分析开始与前面差不多, 只有一点例外, 那就是: 一阶微分要每半个步长计算一次 (这样做的原因不久就可以清楚)。

首先, 求半步 ($h = \frac{1}{2}$) 的 k 值:

$$k_1 = \frac{1}{2} * 2 * 1 = 1.0000$$

$$k_2 = \frac{1}{2} * 2 * 1.25 = 1.2500$$

$$k_3 = \frac{1}{2} * 2 * 1.25 = 1.2500$$

$$k_4 = \frac{1}{2} * 2 * 1.5 = 1.5000$$

代入方程(5.17), 得到:

$$y'_{1.5} = 1 + \frac{1}{6} (1 + 2.5 + 2.5 + 1.5) = 2.2500$$

现在求 $h=1$ 时的 k 值:

$$k_1 = 1 * 2 * 1 = 2.0000$$

$$k_2 = 1 * 2 * 1.5 = 3.0000$$

$$k_3 = 1 * 2 * 1.5 = 3.0000$$

$$k_4 = 1 * 2 * 2 = 4.0000$$

代入方程(5.17), 得到:

$$y'_2 = 1 + \frac{1}{6} (2 + 6 + 6 + 4) = 4.0000$$

这是二阶微分方程中第一个方程的解。

下面, 我们来计算第二个方程(速度方程)的 k 值,

$$k_1 = 1 * y'_1 = 1.0000$$

$$k_2 = 1 * y'_{1.5} = 2.2500$$

$$k_3 = 1 * y'_{1.5} = 2.2500$$

$$k_4 = 1 * y'_2 = 4.0000$$

代入方程(5.17)得到:

$$y_2 = 0.3333 + \frac{1}{6} (1 + 4.5 + 4.5 + 4) \\ = 2.6667$$

对于下一个间隔, 重复上述的计算步骤: 先计算半步的 k 值:

$$k_1 = \frac{1}{2} * 2 * 2 = 2.0000$$

$$k_2 = \frac{1}{2} * 2 * 2.25 = 2.2500$$

$$k_3 = \frac{1}{2} * 2 * 2.25 = 2.2500$$

$$k_4 = \frac{1}{2} * 2 * 2.5 = 2.5000$$

代入方程(5.17), 得到:

$$y'_{2.5} = 1 + \frac{1}{6} (2 + 4.5 + 4.5 + 2.5) = 6.2500$$

计算整个步长的 k 值得出:

$$k_1 = 1 * 2 * 2 = 4.0000$$

$$k_2 = 1 * 2 * 2.5 = 5.0000$$

$$k_3 = 1 * 2 * 2.5 = 5.0000$$

$$k_4 = 1 * 2 * 3 = 6.0000$$

代入方程(5.17),有:

$$y'_3 = 4 + \frac{1}{6}(4 + 10 + 10 + 6) = 9.0000$$

下面计算第二个方程的 k 值:

$$k_1 = 1 * y'_2 = 4.0000$$

$$k_2 = 1 * y'_{2.5} = 6.2500$$

$$k_3 = 1 * y'_{2.5} = 6.2500$$

$$k_4 = 1 * y'_3 = 9.0000$$

代入方程(5.17),得到:

$$\begin{aligned} y_3 &= 2.6667 + \frac{1}{6}(4 + 12.5 + 12.5 + 9) \\ &= 9.0000 \end{aligned}$$

对微分方程的形式,最后有一点要说明,即在上面举的两个例子中,微分方程的右端都是数学表达式,而龙格-库塔解法并不要求这一点,只要求能够确定一些特定点上的导数值,而这些导数值可以是像我们例子中那样由简单表达式中求得,也可以像下一节机构问题中那样用有限差分法由数值计算而得到。

运动方程式: 四杆机构的时间响应

前面我们用来对图 5.1 中的四杆机构进行动态静力分析的运动方程,同样也适用于时间响应分析。可是,矩阵的形式[方程(5.13)]必须加以修正。在进行动态静力分析时,输入件的运动是完全已知的或确定的(即 $\theta_2, \dot{\theta}_2$ 和 $\ddot{\theta}_2$ 是给定的)。在时间响应问题中,输入扭矩 T_s 是已知的,在问题中时间的起点,比如说在 t_1 时的初始位置和速度也是已知的,而 $\ddot{\theta}_2$ 成为未知量,要通过方程(5.13)的修正形式确定其在 t_1 时的数值。在方程(5.13)的修正形式中,输入力矩 T_s 和输入①角加速度 $\ddot{\theta}_2$ 两项必须交换位置,使得 T_s 出现在已知量的列向量中,而 $\ddot{\theta}_2$ 出现在未知量的列向量中。同时,连杆和输出件的加速度项中有关 $\ddot{\theta}_2$ 的函数的部分,也要加以修正,以便使机构参数的矩阵里只包含已知量。因此,隔离体的平衡方程式重新排列如下。

对于杆 2(参看图 5.1f),

$$\Sigma F = 0, \quad F_{12} + F_{32} + F_{O_2}^N + F_{O_2}^T = 0$$

$$F_{O_2}^N = M_2 r_{g_2} \ddot{\theta}_2^2 = M_2 (r_{g_2x} + i r_{g_2y}) \ddot{\theta}_2^2$$

$$F_{O_2}^T = -M_2 r_{g_2} i \ddot{\theta}_2 = -M_2 (i r_{g_2x} - r_{g_2y}) \ddot{\theta}_2$$

$$\Sigma F_x = 0, \quad M_2 \ddot{\theta}_2^2 r_{g_2} \cos \theta_2 = -F_{12x} + F_{23x} - M_2 \ddot{\theta}_2 r_{g_2} \sin \theta_2 \quad [5.18(1)]$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad M_2 \ddot{\theta}_2^2 r_{g_2} \sin \theta_2 = -F_{12y} + F_{23y} + M_2 \ddot{\theta}_2 r_{g_2} \cos \theta_2 \quad [5.18(2)]$$

$$\begin{aligned} \Sigma M = 0, \quad T_s &= -F_{12x} r_{g_2} \sin \theta_2 + F_{12y} r_{g_2} \cos \theta_2 - F_{23x} (r_2 - r_{g_2}) \sin \theta_2 \\ &\quad + F_{23y} (r_2 - r_{g_2}) \cos \theta_2 + I_{g_2} \ddot{\theta}_2 \quad [5.18(3)] \end{aligned}$$

对于杆 3(参看图 5.1g):

① 原文为“输出”,似有误——译者注。

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{1}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \{ [-\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) + \dot{\theta}_4^2 r_4] - [\ddot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)] \}$$

$$A_{g3} = A_A + r_{g3} i \ddot{\theta}_3 - r_{g3} \dot{\theta}_3^2 = r_2 i \ddot{\theta}_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 + r_{g3} i \ddot{\theta}_3 - r_{g3} \dot{\theta}_3^2$$

$$\Sigma F = 0, \quad F_{23} + F_{43} + F_{O3} = 0$$

$$F_{23} + F_{43} - M_3 (r_2 i \ddot{\theta}_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 + r_{g3} i \ddot{\theta}_3 - r_{g3} \dot{\theta}_3^2) = 0$$

$$\Sigma F_x = 0, \quad -F_{23x} - F_{34x} + M_3 \dot{\theta}_2^2 r_2 \cos \theta_2 + M_3 \dot{\theta}_3^2 r_{g3} \cos \theta_3 + M_3 \ddot{\theta}_2 r_2 \sin \theta_2$$

$$+ M_3 r_{g3} \sin \theta_3 \frac{1}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \{ [-\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) + \dot{\theta}_4^2 r_4] - \ddot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) \} = 0$$

$$\Rightarrow M_3 \{ \dot{\theta}_2^2 r_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 r_{g3} \cos \theta_3 - \frac{r_{g3} \sin \theta_3}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} [\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) - \dot{\theta}_4^2 r_4] \}$$

$$= F_{23x} + F_{34x} - M_3 \ddot{\theta}_2 r_2 \left[\sin \theta_2 - \frac{r_{g3} \sin \theta_3}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \sin(\theta_2 - \theta_4) \right] \quad [5.18(4)]$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad M_3 \{ \dot{\theta}_2^2 r_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 r_{g3} \sin \theta_3 + \frac{r_{g3} \cos \theta_3}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} [\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) - \dot{\theta}_4^2 r_4] \}$$

$$= F_{23y} + F_{34y} + M_3 \ddot{\theta}_2 r_2 \left[\cos \theta_2 - \frac{r_{g3} \cos \theta_3}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \sin(\theta_2 - \theta_4) \right] \quad [5.18(5)]$$

$$\Sigma M = 0, \quad T_{O3} = -F_{23x} r_{g3} \sin \theta_3 + F_{23y} r_{g3} \cos \theta_3$$

$$+ F_{34x} (r_3 - r_{g3}) \sin \theta_3 - F_{34y} (r_3 - r_{g3}) \cos \theta_3 \quad [5.18(6)]$$

对于杆 4 (参看图 5.1 h):

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{1}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \{ [-\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) - \dot{\theta}_3^2 r_3 + \dot{\theta}_4^2 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)] + \ddot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \}$$

$$\Sigma F = 0, \quad F_{14} + F_{34} + F_{O4}^N + F_{O4}^T = 0$$

$$F_{O4}^N = M_4 r_{g4} \dot{\theta}_4^2 = M_4 (r_{g4x} + i r_{g4y}) \dot{\theta}_4^2$$

$$F_{O4}^T = -M_4 r_{g4} i \ddot{\theta}_4 = -M_4 (i r_{g4x} - r_{g4y}) \ddot{\theta}_4$$

$$\Sigma F_x = 0, \quad F_{14x} - F_{34x} + M_4 \dot{\theta}_4^2 r_{g4} \cos \theta_4 + M_4 r_{g4} \sin \theta_4 \frac{1}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \{ [-\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) - \dot{\theta}_3^2 r_3 + \dot{\theta}_4^2 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)] + \ddot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \} = 0$$

$$\Rightarrow M_4 r_{g4} \{ \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 - \frac{\sin \theta_4}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} [\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + \dot{\theta}_3^2 r_3 - \dot{\theta}_4^2 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)] \}$$

$$= F_{34x} - F_{14x} - M_4 \ddot{\theta}_2 \frac{r_{g4} \sin \theta_4}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \quad [5.18(7)]$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad F_{14y} - F_{34y} + M_4 \dot{\theta}_4^2 r_{g4} \sin \theta_4 - M_4 r_{g4} \cos \theta_4 \frac{1}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$\begin{aligned} & \{[-\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) - \dot{\theta}_3^2 r_3 + \dot{\theta}_4^2 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)] + \ddot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)\} = 0 \\ \Rightarrow & M_4 r_{g4} \left\{ \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 + \frac{\cos \theta_4}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right. \\ & \left. [\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + \dot{\theta}_3^2 r_3 - \dot{\theta}_4^2 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)] \right\} \\ & = F_{34y} - F_{14y} + M_4 \ddot{\theta}_2 r_{g4} \cos \theta_4 \frac{r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \end{aligned} \quad [5.18(8)]$$

$$\begin{aligned} \Sigma M = 0, \quad T_{04} - T_L = & F_{14x} r_{g4} \sin \theta_4 - F_{14y} r_{g4} \cos \theta_4 \\ & + F_{34x} (r_4 - r_{g4}) \sin \theta_4 - F_{34y} (r_4 - r_{g4}) \cos \theta_4 \end{aligned} \quad [5.18(9)]$$

程[5.18(1)]到[5.18(9)]可以写成矩阵形式(5.18)

$$\begin{bmatrix} M_2 \dot{\theta}_2^2 r_{g2} \cos \theta_2 \\ M_2 \dot{\theta}_2^2 r_{g2} \sin \theta_2 \\ T_0 \\ F_{k03x}^* \\ F_{k03y}^* \\ T_{03} \\ F_{k04x}^* \\ F_{k04y}^* \\ T_{04} - T_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -M_2 r_{g2} \sin \theta_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & M_2 r_{g2} \cos \theta_2 & 0 & 1 \\ -r_{g2} \sin \theta_2 & r_{g2} \cos \theta_2 & I_{g2} & -(r_2 - r_{g2}) \sin \theta_2 & (r_2 - r_{g2}) \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & F_{c03x}^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_{c03y}^* & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{g3} \sin \theta_3 & r_{g3} \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & F_{c04x}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{c04y}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ \ddots \\ \theta_2 \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

标有 * 号的量的完整表达式如下:

方程(5.18)左端列向量中惯性力的已知部分有:

$$\begin{aligned} F_{k03x} &= M_3 \left\{ \dot{\theta}_2^2 r_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos \theta_3 - \frac{r_{g3} \sin \theta_3}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right. \\ & \quad \left. \cdot [\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) - \dot{\theta}_4^2 r_4] \right\} \\ F_{k03y} &= M_3 \left\{ \dot{\theta}_2^2 r_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 r_3 \sin \theta_3 + \frac{r_{g3} \cos \theta_3}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right. \\ & \quad \left. \cdot [\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \dot{\theta}_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) - \dot{\theta}_4^2 r_4] \right\} \\ F_{k04x} &= M_4 r_{g4} \left\{ \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 - \frac{\sin \theta_4}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right. \\ & \quad \left. \cdot [\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + \dot{\theta}_3^2 r_3 - \dot{\theta}_4^2 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)] \right\} \\ F_{k04y} &= M_4 r_{g4} \left\{ \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 + \frac{\cos \theta_4}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right. \\ & \quad \left. \cdot [\dot{\theta}_2^2 r_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + \dot{\theta}_3^2 r_3 - \dot{\theta}_4^2 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)] \right\} \end{aligned}$$

矩阵中惯性力未知部分的系数为:

$$\begin{aligned} F_{c03x} &= -M_3 r_2 \left[\sin \theta_2 - r_{g3} \sin \theta_3 \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right] \\ F_{c03y} &= M_3 r_2 \left[\cos \theta_2 - r_{g3} \cos \theta_3 \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right] \end{aligned}$$

$$F_{c04x} = -M_4 r_2 r_{g4} \sin \theta_4 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$F_{c04y} = M_4 r_2 r_{g4} \cos \theta_4 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

用紧凑的形式表示, 矩阵方程(5.18)可以写为:

$$[C] = [A] \begin{bmatrix} F_{12x} \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

这里, 我们看到 $\ddot{\theta}_2$ 已移到矩阵方程右端列阵的最后一个元素。方程中, $[C]$ 和 $[A]$ 也做了相应的变动。这样, 可以求出 $\ddot{\theta}_2$:

$$\ddot{\theta}_2 = \text{列阵中的最后一个元素} = [A^{-1}][C]_{01} \text{①} \quad (5.20)$$

式中, 我们在 $[C]$ 的右下角加了下标, 表示 $[C]_{01}$ 是一个 9×1 的矩阵(或“向量”)。

因为 $t = t_i$ 时的 θ_2 和 $\dot{\theta}_2$ 是给定的, 所以在用上一节介绍的龙格-库塔法[式(5.17)]来计算 $t = t_i + \Delta t$ 时的 θ_2 和 $\dot{\theta}_2$ 之前, 就可以用矩阵方程(5.20)求得当 $t = t_i$ 时 $\ddot{\theta}_2$ 的值。

设计实例 参考前面图 5.2 中的卡片穿孔机, 现对其中的伺服马达进行评估, 看其能否带动四杆机构从 $\theta_2 = 3.6183 \text{ rad}$ 时的静止位置开始, 到 $\theta_2 = 1.9827 \text{ rad}$ 时升到 $\dot{\theta}_2 = 266.67 \text{ rad/s}$ 的角速度, 且在各种载荷下不发生过热。该伺服马达具有如下特性:

$$I_m = \frac{EV}{R} + \frac{K_v}{R} \dot{\theta}_2 \quad (5.21)$$

且

$$T_i(t) = K_T I_m - 0.1 \quad (5.22)$$

式中 EV ——加在马达上的电压的阶跃变化, 其值为 24 V (直流);

R ——马达电路内的总电阻(欧姆);

I_m ——马达电路内的电流(安培);

K_v —— $0.043 \text{ V} \cdot \text{s/rad}$;

K_T —— $0.3625 \text{ lbf} \cdot \text{in. /A}$;

0.1 ——阻扭矩($\text{lbf} \cdot \text{in.}$)。

此外, 该马达具有 $3.125 \times 10^{-6} \text{ lbf} \cdot \text{in. /s}^2$ 的内部惯量, 这个惯量必须加到输入曲柄对中心 O 的转动惯量 I_{AO} 上。马达线圈的内阻为 1Ω 。加上一个附加的外电阻与内电阻串联, 以实现提供阶跃变化电压的电源电耗最小。

在这一具体例子中, 阻力 F_D 正比于卡片仓内那叠卡片的重量 W_c 。对于给定的 W_c , 可以增大电阻 R 直到得到所希望的输出为止。

图 5.7 表示了 $W_c = 16.5 \text{ lbf}$ 时, θ_2 和 $\dot{\theta}_2$ 对时间[单位为毫秒(ms)]的关系。可以看出, 当总电阻为 $1.52 \Omega (= 1 \Omega \text{ 内阻} + 0.52 \Omega \text{ 外阻})$ 时, 可得到了所希望的输出。

① 严格说来, $\ddot{\theta}_2 = [A^{-1}][C]_{01}$ 所得的列阵最后一个元素, 即 $[A^{-1}][C]_{01}$ 前不应该是等号“=”——译者注。

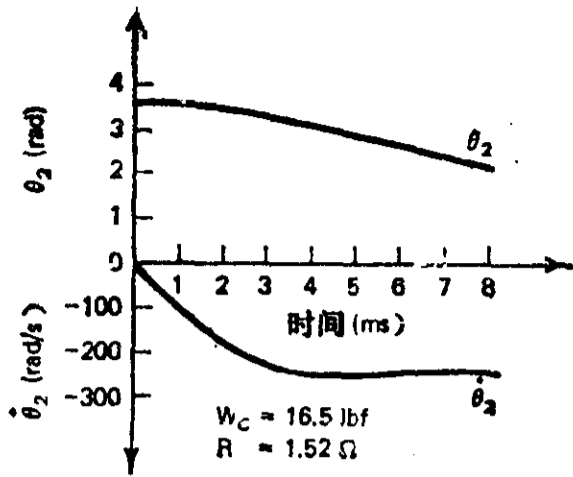


图 5.7 使用直流马达来实现设计要求时的角位移和角速度

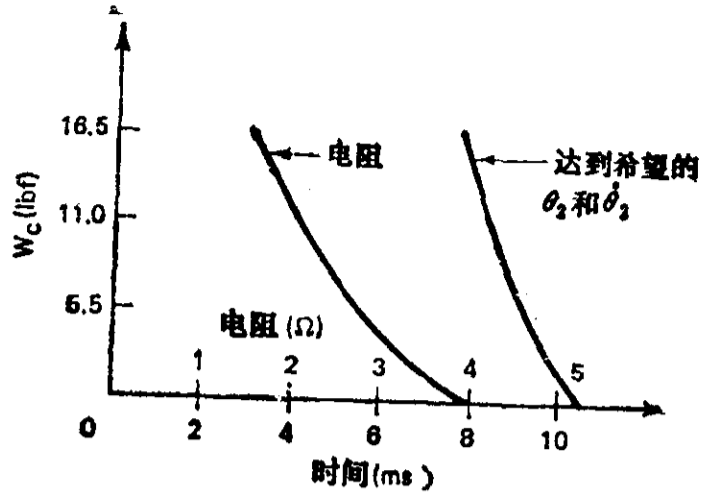


图 5.8 使用直流马达时, 载荷对所需电阻及时间的关系

图 5.8 表示了对于不同的载荷, 为了达到所希望的输出而需要的时间(单位: ms)和电阻。

5.4 机构时间响应的改善

如果一个机构已经运动综合出来, 但它不能很好地满足时间响应的要求, 那么经常可以对该机构进行一些“非运动”的改变, 以达到最佳的时间响应。首先, 我们会想到的方法是改变机构的质量和惯性特性。在节 5.11 到 5.18 中, 我们将利用质量支配来平衡连杆机构。

有时, 在连杆机构内重新配置运动质量还不足以产生最佳的时间响应, 其原因或是要改变的质量太大; 或是机构不适合进行质量调整。这时, 增加像弹簧和(或)阻尼器之类的“动力元件”可能是一种可行的方法。使机器的输入扭矩最小经常是总体设计的一个要求。适用于解决这类问题

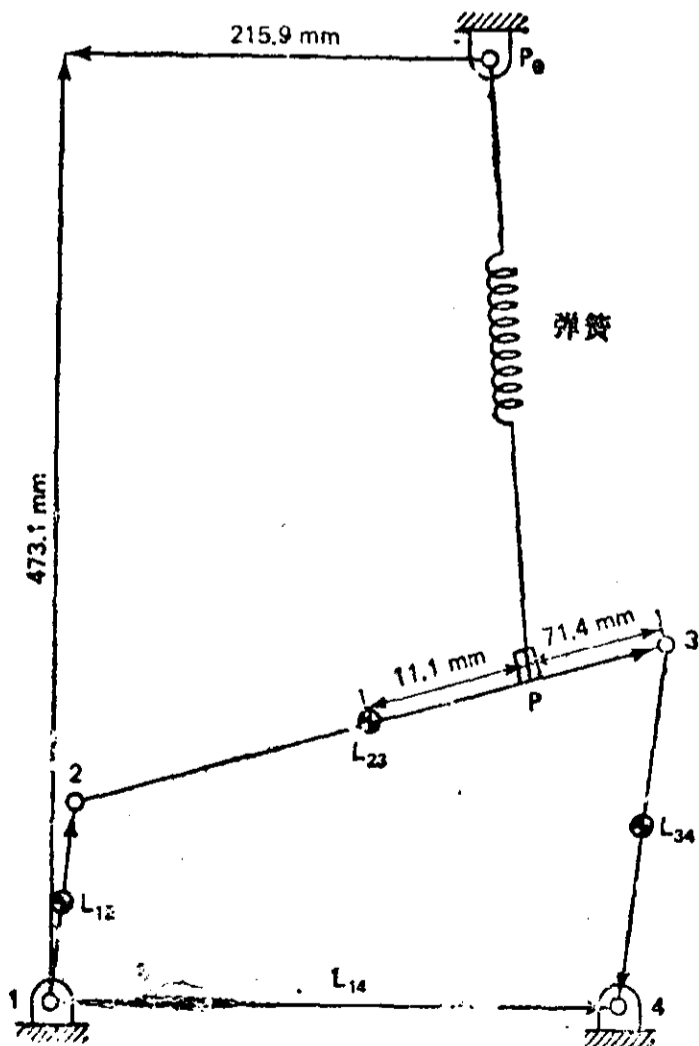


图 5.9 构件的尺寸, 见表 5.2

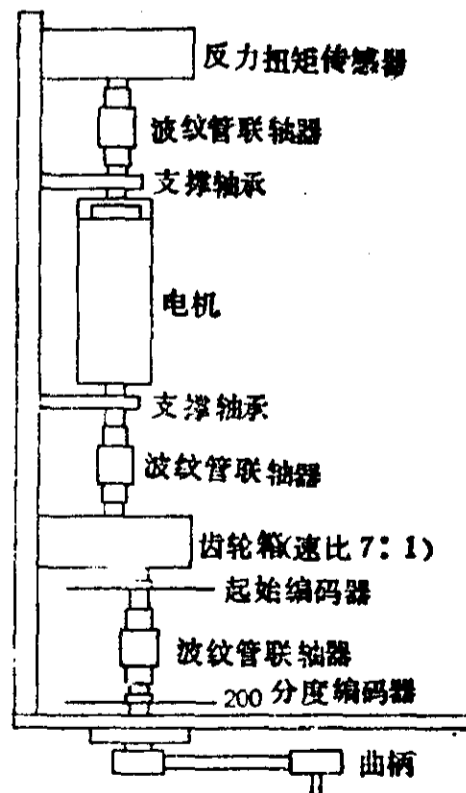


图 5.10

的解析方法的例子可以在文献[15, 121, 178, 179]中找到。卡森(Carson)^[35, 121]已应用他的“时间系统综合”方法,把解析和试验结果联系起来。

塔克尼(Tacheny)^[277]设计了一个主要为铝结构的四杆机构模型,以此来研究和改善机构的时间响应(参看图 5.9、图 5.10 和表 5.2)。其中机架构件是一块两英尺见方、四分之一英寸厚的铝板。曲柄和从动件都安装在由双列球轴承支撑的钢轴上。连杆通过双列球轴承铰链与曲柄和从动件相连。这个装置设计成既可以将弹簧连接在构件与构件之间,也可以连接在一构件与机架之间。图 5.9 中示出了一个弹簧连接。

图 5.10 中所示的驱动链由马达、齿轮箱和联轴器组成。其中马达是带有速度反馈控制的永磁式直流马达。

表 5.2* 图 5.9 中四杆机构的各杆尺寸

	构件长度 (mm)	从数号小的联接点到重心的距离 (mm)	质量 (kg)	转动惯量 (kg·m ²)
L_{12}	87.6	48.7	0.0680	0.5883
L_{23}	308.0	154	0.1134	1.533×10^{-3}
L_{34}	182.9	84.5	0.1021	6.41×10^{-4}
L_{14}	280.4	—	—	—

* 该机构简图见图 5.9。

通过齿轮箱而测到的马达最大扭矩为 $1.15 \text{ N}\cdot\text{m}$ ($162.79 \text{ oz}\cdot\text{in.}$)。与驱动链有关的总的动摩擦为 $0.19 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。当所需的扭矩在 -0.19 至 $0.96 \text{ N}\cdot\text{m}$ 之间时,曲柄的转速可以保持恒定。驱动链中所有的轴都用球轴承来支撑,以使摩擦减至最小且保证同轴。由于曲柄的运转速度较低(约 5 Hz),所以用了一个 $7:1$ 的齿轮箱来将从马达来的转速降低。

扭矩的测量是通过一个反力扭矩传感器来进行的。马达的两端都用球轴承支撑,而且只通过扭矩传感器与机架相连。

由于输出信号比较微弱,所以在将信号送入示波器进行图象显示之前,有必要采用屏蔽电缆

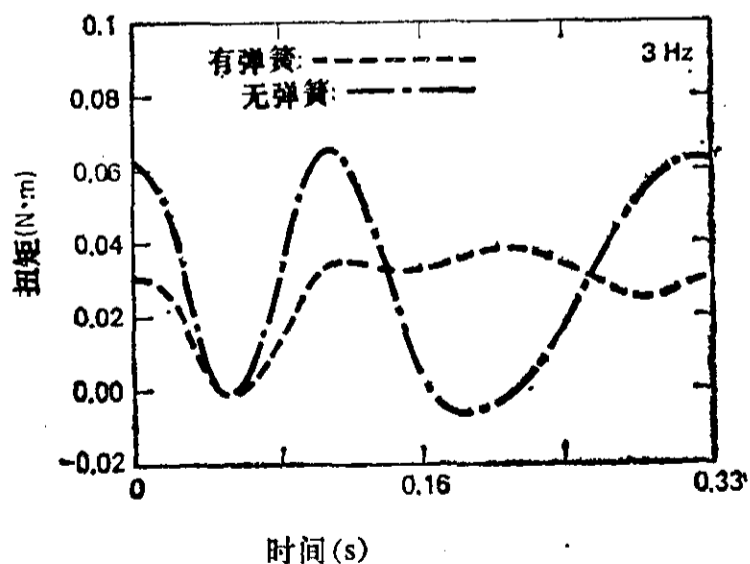


图 5.11 对图 5.9 所示的四杆机构用试验观察得到的时间响应:在马达机座(图 5.10)和机架之间测得的反作用扭矩的变化

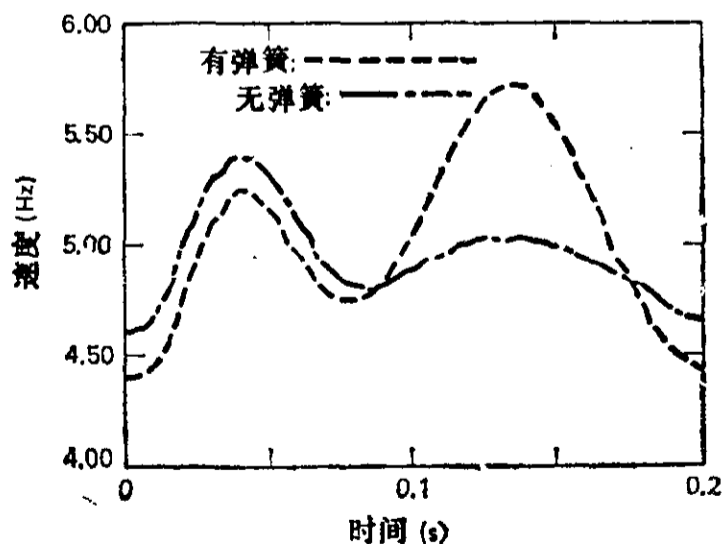


图 5.12 图 5.9 所示四杆机构在名义频率为 5 Hz (5 r/s)时,输入角速度的变化

和屏蔽放大器。为了从信号中消除变换器中由于机械共振所产生的噪音，还有必要使信号通过一个两级低通滤波器。

加接弹簧和未接弹簧的时间响应曲线都通过试验测得。弹簧的“最佳”位置仅是通过移动弹簧的机架端(图 5.9 中的点 P_0)的位置来确定的,方法是将点 P_0 保持在机构平面内移动,直至观察到机构运行比较平稳为止。当然这个方法并不完善,而且很可能弹簧的参数^①(弹簧常数和自由长度)和位置也不是最佳的选择(因为点 P 在连杆上的位置并未改变),但是,用这种方法可很快看到改善了的时间响应。图 5.11 示出了名义驱动速度为 3 Hz 时的样机输入扭矩在运动一周内的实验结果。可以看出,加了弹簧以后,所需的马达扭矩变得平稳了。图 5.12 表示了名义速度为 5 Hz 时角速度的比较。

5.5 虚 功

虚功原理是用来解静力的和准静力的^②力分析问题的另一个很有用的方法。回想一下在工程力学中,实功(U)定义为力向量(或力矩向量)和路径单元向量(或旋转单元向量)标量积的积分:

对于力向量 F ,

$$U = \int_a^b F \cdot ds = \int_a^b F \cos \theta ds \quad (5.23)$$

式中,在平面内: $\theta = \arg F - \arg ds$

或对于力矩(力偶)向量 M ,

$$U = \int_\alpha^\beta M \cdot d\phi = \int_\alpha^\beta M \cos \gamma d\phi \quad (5.24)$$

在平面运动中, M 和 $d\phi$ 共线,上式成为 $U = M d\phi$, 式中 M 和 $d\phi$ 是可正可负的标量。在上两个表达式中,

ds ——路径单元向量;

θ ——向量 F 和 ds 间的夹角, $\theta = \arg F - \arg ds$;

a, b ——路径的起点和终点;

$d\phi$ ——旋转单元向量,或 $d\phi$, 在平面运动中为标量;

γ ——向量 M 和 $d\phi$ 间的夹角,

α, β ——旋转角的起点和终点。

然而,虚功是一种假想功——实际上并没有位移出现——所以是作为一种假想的量引入的。虚位移是一个无穷小的移动。虚功(δU)也是一个标量。

对于力向量:

$$\delta U = F \cdot \delta s = F \cos \theta \delta s \quad (5.25)$$

^① 在扭矩平衡中,确定弹簧参数的解析方法已由马修(Matthew)和特萨(Tesar)提出^[170,171]。但是用解析方法来解决塔克尼用试验来处理的这一类时间响应问题的综合方法尚待进一步研究。

^② 准静力和动态静力是同义词。

对于力矩:

$$\delta U = M \cdot \delta \phi = M \cos \gamma \delta \phi \quad (5.26)$$

在平面运动中, $\delta U = M d\phi$ 。以上表达式中,

δs ——虚线位移;

$\delta \phi$ ——虚角位移, 在平面运动中表示为 $\delta \phi$ 。

如果对于每一个符合运动约束的虚位移, 所有实际的力和力矩所做的虚功之和为零, 那么由刚体元件组成的机构就处于静平衡状态。如果弹性元件是这种机械系统的一部分, 那么这些弹性元件所做的总虚功, 等于所有(作用在非弹性元件上的)实际力和力矩对于符合约束条件的虚位移而做的总虚功。因此, 对于这样的一个系统

$$\begin{aligned} & \sum_P (\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i) + \sum_P (\mathbf{M}_i \cdot \delta \phi_i) + \sum_Q (\mathbf{R}_j \cdot \delta \mathbf{s}_j) + \sum_Q (\mathbf{T}_j \cdot \delta \phi_j) \\ &= \sum_S (\mathbf{E}_k \cdot \delta \mathbf{s}_k) + \sum_S (\mathbf{K}_k \cdot \delta \phi_k) \end{aligned} \quad (5.27)$$

式中 \mathbf{F}_i ——在 i 上的作用力向量,

\mathbf{M}_i ——在 i 上的作用力矩向量,

$i = 1, 2, \dots, P$, 为作用点。

\mathbf{R}_j ——在 j 上的反作用力向量,

\mathbf{T}_j ——在 j 上的反作用力矩向量,

$j = 1, 2, \dots, Q$, 为反作用点。

\mathbf{E}_k ——弹性联接元件 k 中产生的弹性力,

\mathbf{K}_k ——弹性联接元件 k 中产生的弹性力矩,

$k = 1, 2, \dots, S$ 为联接点。

$\delta \mathbf{s}_k, \delta \phi_k$ ——弹性联接元件的虚变形。

摩擦力和惯性力可以很容易地作为力或力矩在式(5.27)中加以考虑。

下面的例子将说明虚功原理的应用。

例 5.3

给定在图 5.13a 所示的滑块-曲柄机构中输入件和连杆的重量分别为 $W = 100 \text{ N}$, 外力 $P = 50 \text{ N}$, $b = 40 \text{ m}$, 摩擦阻力在本例中略去不计, 试求该机构的平衡位置(角度 α)。

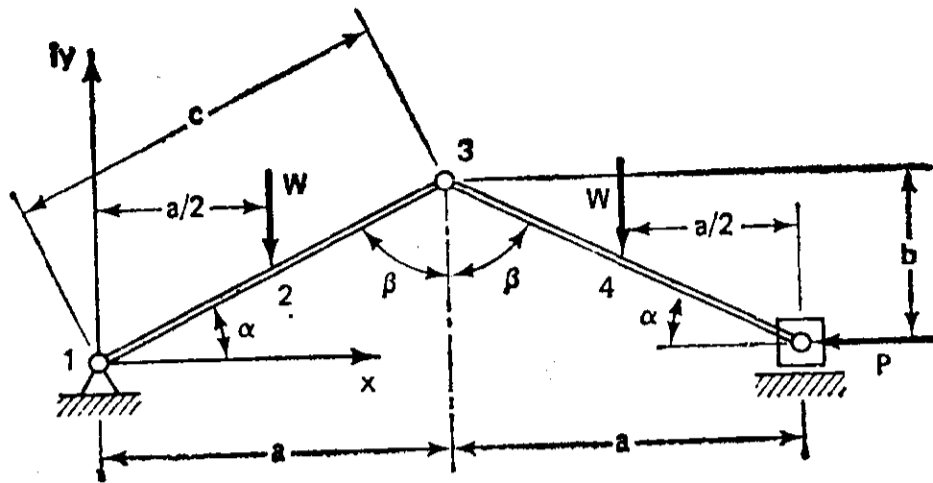
解 为了应用式(5.27), 需要引入与机构的运动约束相符的虚位移。在简单情况下, 可以用半图解法来完成, 如图 5.13b 和 c 所示, 图中, 由虚角度 $\delta \alpha$ 所引出的虚位移 $\delta \mathbf{s}_{12}, \delta \mathbf{s}_{13}, \delta \mathbf{s}_{14}, \delta \mathbf{s}_{15}$ 都必须满足铰链联接和滑块所要求的条件。

然而, 通常说来, 更方便的是用解析的方法, 这个方法涉及(作虚位移运动的)作用力的位置坐标的微分。由于图 5.13a 中的滑块-曲柄机构只有一个自由度, 所以角度 α 或 β 或长度 $2a$ 都可以用来作为自变量。作用力的作用点的位置坐标, 用 α 表示为:

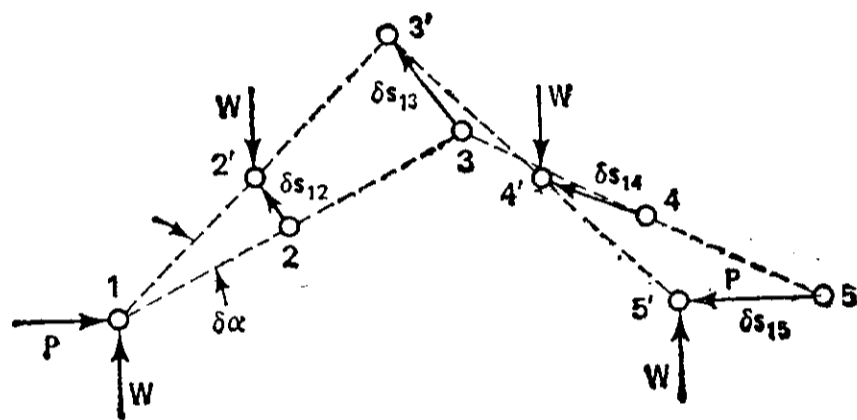
$$x_{12} = \frac{c}{2} \cos \alpha, \quad y_{12} = \frac{c}{2} \sin \alpha$$

$$x_{14} = \frac{3c}{2} \cos \alpha, \quad y_{14} = \frac{c}{2} \sin \alpha$$

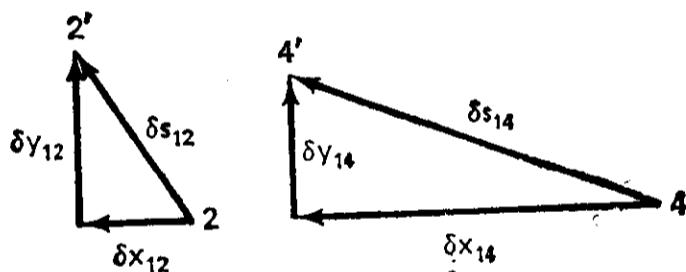
$$x_{15} = 2c \cos \alpha, \quad y_{15} = 0$$



(a)



(b)



(c)

图 5.13 用虚功法来确定静力平衡:

- (a) 加在滑块-曲柄机构上的载荷;
 (b) 虚位移; (c) 虚位移的分量。

与这些坐标相联系的虚位移为:

$$\delta x_{12} = -\frac{c}{2} \sin \alpha \delta \alpha, \quad \delta y_{12} = \frac{c}{2} \cos \alpha \delta \alpha,$$

$$\delta s_{12} = \delta x_{12} + i \delta y_{12}$$

$$\delta x_{14} = -\frac{3c}{2} \sin \alpha \delta \alpha, \quad \delta y_{14} = \frac{c}{2} \cos \alpha \delta \alpha,$$

$$\delta s_{14} = \delta x_{14} + i \delta y_{14}$$

$$\delta x_{15} = -2c \sin \alpha \delta \alpha, \quad \delta y_{15} = 0$$

$$\delta s_{15} = \delta x_{15} + i \delta y_{15}$$

由式(5.27)可得到:

$$\underbrace{(0)\delta x_{12} + (-W)\delta y_{12}}_{W \cdot \delta s_{12}} + \underbrace{(0)\delta x_{14} + (-W)\delta y_{14}}_{W \cdot \delta s_{14}} + \underbrace{(-P)\delta x_{15} + (0)\delta y_{15}}_{P \cdot \delta s_{15}} = 0$$

式中 W 和 P 都取绝对值。

将上列虚位移代入上式, 得到:

$$(-W)\frac{c}{2}\cos\alpha\delta\alpha + (-W)\frac{c}{2}\cos\alpha\delta\alpha + (-P)(-2c)\sin\alpha\delta\alpha = 0$$

或

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W}{2P}$$

若已知 $W = 100 \text{ N}$, $P = 50 \text{ N}$, 那么

$$\operatorname{tg}\alpha = 1.00, \alpha = 45^\circ, \text{ 且 } a = 40 \text{ m}.$$

作为学生的练习, 现增加一个作用在滑块与机架之间的 10 N 的摩擦力, 试确定机构新的平衡位置。

例 5.4 已设计出一个摇杆-摇杆类型的四杆机构将一传送带上的箱子取走, 旋转 90° , 然后放到另一传送带上去(参看图 5.14)。为了帮助机构举起箱子, 用一个扭簧连在输出件 4 上。在图 5.14 所示的中间位置上, 如果假定铰链没有摩擦, 输入件和输出件没有质量(即与连杆相比可以忽略), 试确定所需的输入扭矩 T_2 。所要求的输入角速度为 $\omega_2 = 1 \text{ rad/s}$, 角加速度 $\alpha_2 = 0 \text{ rad/s}^2$ 。与该机构有关的长度和角度按比例画在图 5.14 和图 5.15 上。其它已知的数据为:

连杆质量: $m_3 = 20 \text{ kg}$

箱子质量: $m_b = 100 \text{ kg}$

弹簧刚度: $k = 0.2 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{度}$

重力加速度: $\mathbf{g} = (9.81 \text{ m/s}^2)(-i)$, 表示在机构所在的铅垂平面内的复数向量。

解: 应用虚功法[式(5.23)]可知, 平衡表达式就是: 作用在机构上的所有力和力矩的总虚功为零:

$$\sum_n F_n \cdot \delta s_n + \sum_p T_p \cdot \delta \theta_p = 0$$

取微分, 并除以 dt , 得到

$$\sum_n F_n \cdot \frac{ds_n}{dt} + \sum_p T_p \cdot \frac{d\theta_p}{dt} = 0$$

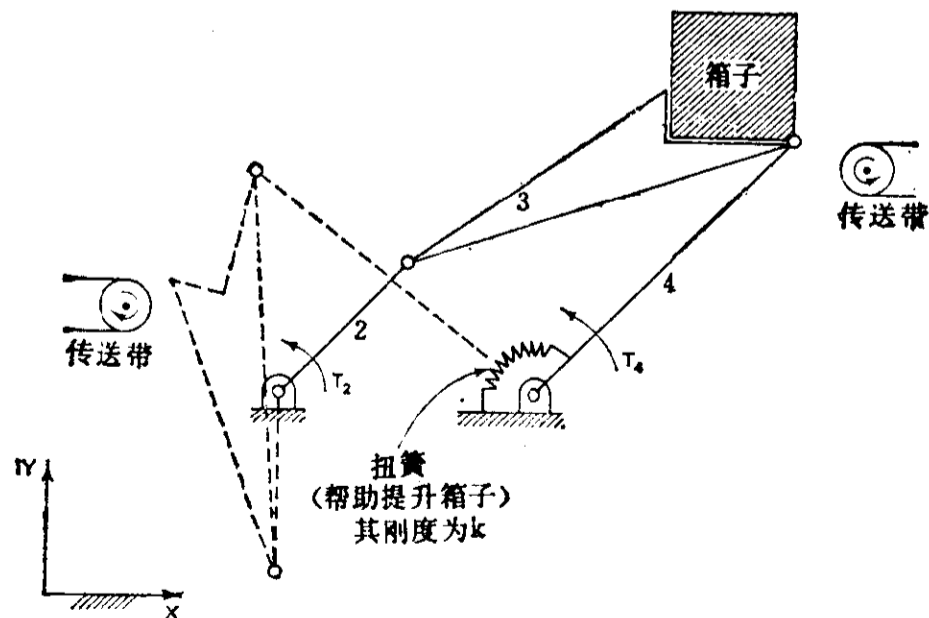


图 5.14 虚功法在动力平衡中的应用(参看例 5.4)

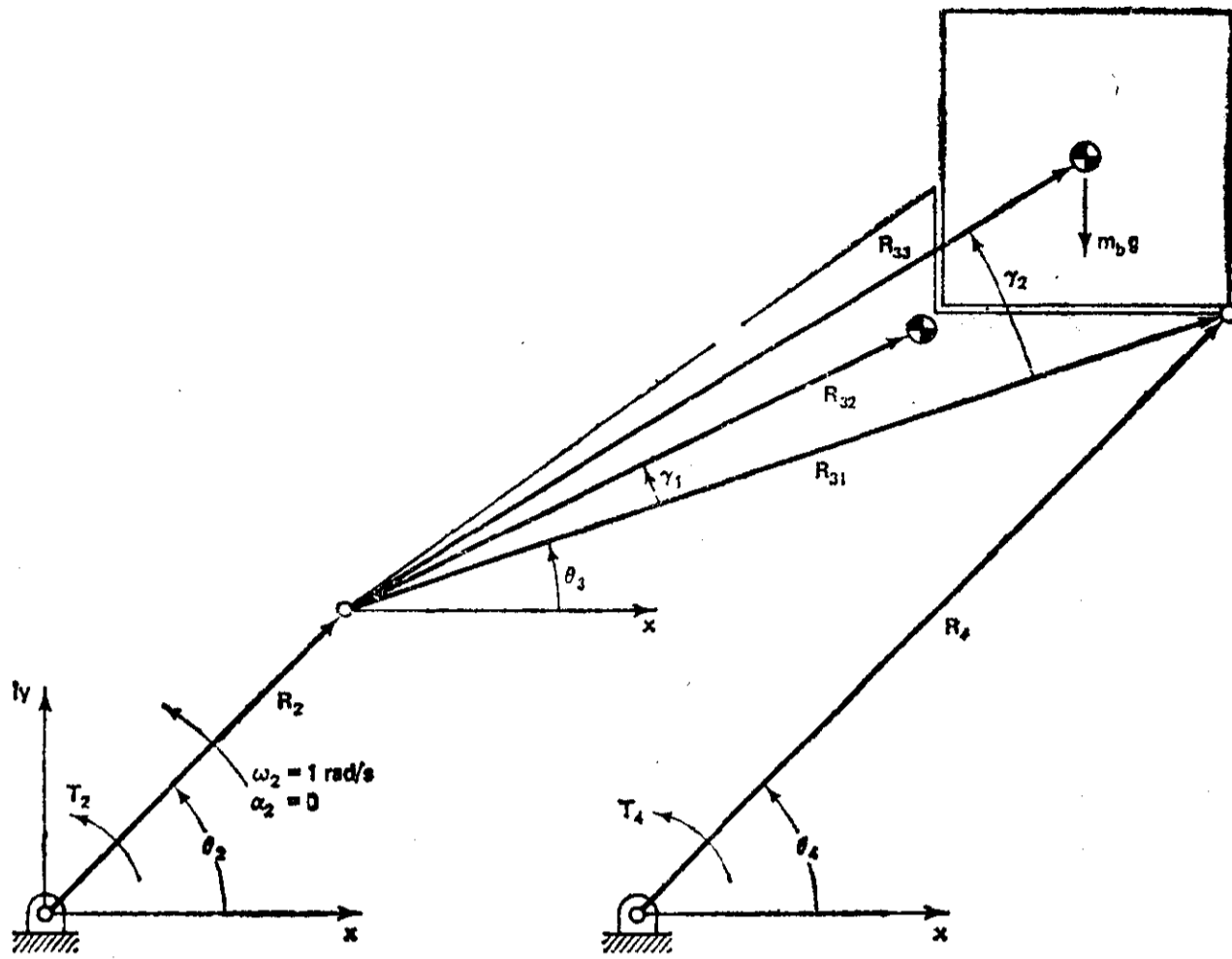


图 5.15 按比例画出的图 5.14 中所示的机构(参看例 5.4)

$$\sum_n F_n \cdot V_n + \sum_p T_p \cdot \omega_p = 0$$

[也可参考瞬时功率, 式(5.234)]

相应地:

$$T_2 \omega_2 + T_{O_3} \omega_3 + T_b \omega_3 + m_3 g \cdot V_{G_3} + m_b g \cdot V_{G_b} + F_{O_3} \cdot V_{G_3} + F_{O_b} \cdot V_{G_b} + T_4 \omega_4 = 0 \quad (5.28)$$

因此, 所需的扭矩为

$$T_2 = -\frac{1}{\omega_2} [-I_{G_3} a_3 \omega_3 - I_{G_b} a_3 \omega_3 + T_4 \omega_4 - m_3 A_{G_3} \cdot V_{G_3} - m_b A_{G_b} \cdot V_{G_b} + m_3 g \cdot V_{G_3} + m_b g \cdot V_{G_b}] \quad (5.29)$$

为了确定式(5.29)中瞬时输入扭矩 T_2 , 必须先求其中的速度和加速度项。根据第一卷第三章中导出的式(3.84)和(3.85), 有:

$$\omega_3 = -\frac{r_2}{r_{31}} \omega_2 \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.30)$$

和

$$\omega_4 = \frac{r_2}{r_4} \omega_2 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (5.31)$$

式中 $r_2 = |R_2|$, $r_{31} = |R_{31}|$, 以及 $r_4 = |R_4|$, 角度 θ_2 , θ_3 和 θ_4 表示在图 5.15 上。当 $\alpha_2 = 0$ 时, 从第一卷中式(4.21)可得,

$$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2 r_2 \cos(\theta_4 - \theta_2) + \omega_3^2 r_{31} \cos(\theta_4 - \theta_3) - \omega_4^2 r_4}{r_{31} \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.32)$$

应用复数法, 连杆质心的位置向量可以表示为:

$$Z_{G_3} = R_2 + R_{32} = r_2 e^{i\theta_2} + r_{32} e^{i(\theta_2 + \gamma_1)} \quad (5.33)$$

连杆质心的速度为:

$$\mathbf{V}_{g_3} = \dot{\mathbf{Z}}_{g_3} = \omega_2 r_2 i e^{i\theta_2} + \omega_3 r_{32} i e^{i(\theta_3 + r_1)} \quad (5.34)$$

而加速度为

$$\mathbf{A}_{g_3} = \dot{\mathbf{V}}_{g_3} = \alpha_3 r_{32} i e^{i(\theta_3 + r_1)} - \omega_2^2 r_2 e^{i\theta_2} - \omega_3^2 r_{32} e^{i(\theta_3 + r_1)} \quad (5.35)$$

同样, 对于箱子的质心,

$$\mathbf{V}_{g_b} = \omega_2 r_2 i e^{i\theta_2} + \omega_3 r_{33} i e^{i(\theta_3 + r_2)} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{A}_{g_b} = \alpha_3 r_{33} i e^{i(\theta_3 + r_2)} - \omega_2^2 r_2 e^{i\theta_2} - \omega_3^2 r_{33} e^{i(\theta_3 + r_2)} \quad (5.37)$$

由图 5.15 测得下列尺寸:

$$r_1 = 2.0 \text{ m}, \theta_1 = 0^\circ, r_{32} = 2.16 \text{ m},$$

$$r_2 = 1.4 \text{ m}, \theta_2 = 45^\circ, r_{33} = 2.92 \text{ m},$$

$$r_{31} = 3.2 \text{ m}, \theta_3 = 18.4^\circ, r_4 = 7.1^\circ,$$

$$r_4 = 2.8 \text{ m}, \theta_4 = 45^\circ, r_2 = 12.6^\circ;$$

同时给定:

$$I_{g_3} = 5.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_{g_b} = 16.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

以及扭簧的松态平衡(扭矩为零的)位置在 $\theta_4 = 135^\circ$ 处。

现在可求出式(5.30)到(5.37)的值如下:

$$\omega_3 = 0$$

$$\omega_4 = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_3 = 0.49 \text{ rad/s}^2$$

$$\mathbf{V}_{g_3} = \mathbf{V}_{g_b} = -0.99 + 0.99 i \text{ m/s}$$

$$\mathbf{A}_{g_3} = -1.51 + 0.10 i \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{A}_{g_b} = -1.83 + 0.42 i \text{ m/s}^2$$

以及

$$T_4 = 18 \text{ N} \cdot \text{m}$$

从式(5.29)得所需输入扭矩为

$$\begin{aligned} T_2 &= -\{0 + 0 + 18 \times 0.5 - 20[-1.51 \times (-0.99) \\ &\quad + 0.10 \times 0.99]\} - 100[-1.83 \times (-0.99) + \\ &\quad 0.42 \times 0.99] + 20[0 + (-9.8) \times 0.99] + \\ &\quad 100[0 + (-9.8) \times 0.99] \\ &= 1410 \text{ N} \cdot \text{m, ccw} \end{aligned}$$

5.6 拉格朗日运动方程

到目前为止, 我们一直用牛顿定律来列机构的运动方程式。拉格朗日法也是一种非常有用的方法。特别是当我们对内力和反作用力不感兴趣时更是如此。在这里, 我们不加推导, 把拉格朗日方程的简洁表达式表示如下^[111, 207, 86]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = F_{qr} \quad (5.38)$$

式中

$$L = T - V \quad (5.39)$$

T ——机构的总动能;

V ——机构的总势能;

q_r ——广义位置坐标;

\dot{q}_r ——广义速度;

F_{qr} ——对应于坐标 q_r 的广义力;

r ——表示广义坐标数号的下标, 每一个 r 值对应机构的一个自由度。

因此, 一个系统有多少个自由度, 就可以列出那么多个拉格朗日运动方程。不论运动约束和广义坐标之间的关系如何复杂, 拉格朗日方程的统一标准形式总是成立的。事实上, 由于不论选取什么样的广义坐标, 方程的形式都保持不变, 因此我们可以巧妙地选取一套坐标来简化代数运算。

下面用双摆的例子来说明拉格朗日方程的应用。

例 5.5

图 5.16 示出了一个位于初始位置的双摆。在这个位置上, 第一根杆与铅垂位置偏离 θ_1 ; 第二根杆与铅垂位置偏离 θ_2 。假定长度分别为 l_1 和 l_2 的杆的质量忽略不计, 联接中的摩擦也不计, 摆的点质量分别为 m_1 和 m_2 。在这位移后的初始位置上, 质量 1 具有初速度 V_1 , 第二个摆的质量 2 具有初速度 V_2 。试推导这个两自由度系统的运动方程。

这个系统的动能为:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (5.40)$$

其势能为:

$$V = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)] \quad (5.41)$$

注意到

$$V_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + i l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (5.42)$$

以及 $V_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)$

$$+ i (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \quad (5.43)$$

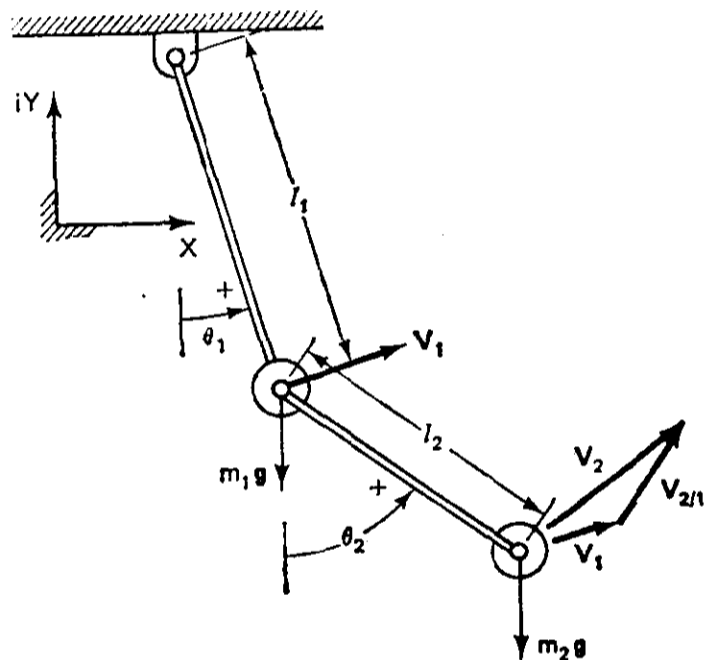


图 5.16 双摆(参看例 5.5)

将式(5.42)和(5.43)代入式(5.40)^①, 再将式(5.40)和(5.41)代入式(5.39), 得出

$$L = T - V = \left\{ \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [(l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2] \right\} - \{ m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)] \} \quad (5.44)$$

在这个例子中, θ_1 和 θ_2 是独立变量, 因此, 将有两个拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = F_{\text{ext}1} = 0 \quad (5.45)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = F_{\text{ext}2} = 0 \quad (5.46)$$

上式中 $F_{\text{ext}1}$ 和 $F_{\text{ext}2}$ 分别是与 θ_1 和 θ_2 有关的外力, 在本例中, 两者都是零。取微分并加以整理之后, 这两个方程简化为

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_2)^2 + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0 \quad (5.47)$$

^① 原文为“将式(5.41)和(5.42)代入式(5.40)”——译者注。

$$\text{和} \quad m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_1)^2 + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad (5.48)$$

这两个运动方程可用下列小角度假设进行简化:

- (1) $\sin \theta \approx \theta$ (当 $\theta = 20^\circ$ 时, 误差为 2%),
- (2) 当 $\theta_2 \approx \theta_1$ 时, $\sin(\theta_2 - \theta_1) \approx 0$,
- (3) $\cos(\theta_2 - \theta_1) \approx 1$.

根据这些假设, 方程 (5.47) 和 (5.48) 简化为

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g \theta_1 = 0 \quad (5.49)$$

$$m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g \theta_2 = C \quad (5.50)$$

图 5.17 和表 5.3 给出为本例编写的计算机程序流程图和程序本身^①。可应用节 5.3 的龙格-库塔法来求解双摆的时间响应。因此, 需要列出一阶微分方程。为了先后解出 θ_1 和 θ_2 , 首先将式 (5.49) 减去式 (5.50) 以消去 $\ddot{\theta}_2$ 。因此

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 g \theta_2 - (m_1 + m_2) g \theta_1}{m_1 l_1} \quad (5.51)$$

然后, 从式 (5.50) 得到:

$$\ddot{\theta}_2 = - \left[\frac{m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 g \theta_2}{m_2 l_2} \right] \quad (5.52)$$

按下列形式将式 (5.51) 和 (5.52) 编程:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{m_2 g \theta_2 - (m_1 + m_2) g \theta_1}{m_1 l_1} \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_2 = \phi_2$$

$$\dot{\phi}_2 = - \frac{m_2 l_1 \phi_1 + m_2 g \theta_2}{m_2 l_2} \quad \textcircled{3}$$

程序 RKPEND 用以计算图 5.16 所示双摆的运动变量(角度、角速度)。这个程序调用龙格-库塔(RK)子程序。程序使用者必须了解这个解微分方程的子程序对确定它的输入、输出的各种要求。图 5.17 是程序的流程图。列在表 5.3 中的程序是用 Minnesota FORTRAN 语言写成的, 用在 CDC Cyber 74 型计算机上。程序中的前 11 行是使用说明。

表 5.4 和表 5.5 给出两个例子。表 5.4 给出了输入、输出数据, 但表 5.5 仅给出输出数据。两个例子的输入数据都列在表 5.6 上。

实例研究: 振动给料斗的分析^[93]

振动给料斗(或振动进料器)将零件输送给组装工位。这种装置是根据过去经验所确定的参数设计的。这

① 由 Wm·达赫洛夫(Wm·Dahlof)提供。

② 原文为 $\dot{\theta} = \phi_1$ ——译者注。

③ 原文为 $\dot{\phi}_2 = - \frac{m_2 l_1 \phi_1 + m_2 g \theta_2}{m_2 l_2}$ ——译者注。

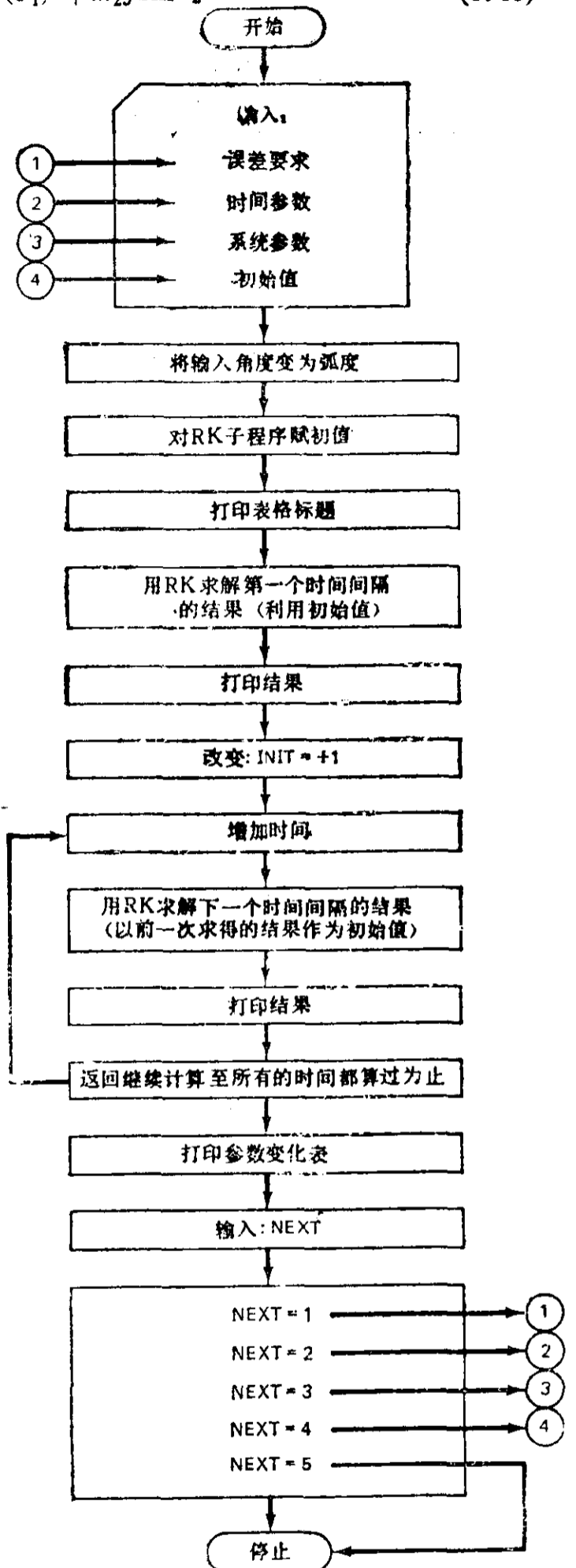


图 5.17 程序“RKPEND”的流程图: 用龙格-库塔法来分析图 5.16 所示的双摆(程序列于表 5.3, 输出见表 5.4)

表 5.3 列出对图 5.16 所示双摆的运动微分方程进行积分的程序。该程序从程序库调用标准的龙格-库塔法(参看节5.3)子程序“RK”。

```

PROGRAM RKPEND (INPUT,OUTPUT,TAPE5=OUTPUT)
C
C*****
C
C RKPEND用来计算本书中图 5.16 所示双摆系统的运动变量(角度、速度和加速度)。应用程序库中龙格-库塔子程序
C (RK)来解两个运动微分方程。用户必须确定: (1) 对子程序RK中误差大小(ERR1和ERR2)的要求; (2)时间
C 间隔和间隔数量(最初时 $T=0$ ); (3)物理参数(质量和长度), (4)初始值( $\theta_1, \theta_1, \theta_2, \theta_2$ ) 然后, 程序将打印出从 $T=0$ 
C 到 $T=$ 时间间隔 $\times$ 间隔数量这段时间内的结果, 而且还将可以让用户按自己的希望, 改变任何参数, 对机构进行循环计
C 算。
C
C Wm. Dahlof, 1979
C
C EXTERNAL PEND, TABLE
C COMMON RM(2), RL(2)
C DIMENSION TH(4), ERR1(4), RTH(4), THPRIME(4), W(16)
C
C INPUT INFORMATION
10 PRINT, 'INPUT ERROR LEVELS: ERR2&ERR1(1)'
   READ, ERR2, ERR1(1)
   ERR1(2)=ERR1(3)=ERR1(4)=ERR1(1)
20 PRINT, 'INPUT TIME INTERVAL & NUMBE OF INTERVALS'
   READ, TINCRE, NINCRE
30 PRINT, 'INPUT M1, M2, L1, L2'
   READ, RM(1), RM(2), RL(1), RL(2)
40 PRINT, 'INPUT INITIAL VALUES: TH1, DTH1, TH2, DTH2'
   + '(DEG & DEG/SEC)'
   READ, TH
C
C INITIALIZE VARIABLES
C DO501=1,4
   RTH(1)=TH(1)/57.29578
50 CONTINUE
   N=4
   T=0.0
   TFINAL=TINCRE
   INIT=+1
C
C PRINT TABLE HEADING & INITIAL VALUES
   WRITE(5,52)
52 FORMAT(3/,
+ 35H TIME THETA1 OMEGA1 ALPHA1
+ 30H THETA2 OMEGA2 ALPHA2)
   WRITE(5,54)
54 FORMAT(
+ 35H(SEC) (DEG)(RAD/SEC)(RAD/SEC2)
+ 30H (DEG)(RAD/SEC)(RAD/SEC2),/)
   WRITE(5,56)T, TH(1), TH(2), T, TH(3), TH(4), T
56 FORMAT(F5.2, F10.1, 2(F10.5), F10.1), 2(F10.5)
C
C SOLVE EQUATIONS & PRINT RESULTS FOR T=(0+TINCRE)

```

```

      CALL RK(T,TFINAL,RTH,THPRIME,PEND,N,ERR2,ERR1,INIT,W,STEP)
      CALL TABLE(T,RTH,THPRIME)
C
C
C SOLVE & PRINT RESULTS FOR REMAINING TIME VALUES
      INIT=-1
      DO60 1=2,NINCRE
          TFINAL=T+TINCRE
          CALL RK(T,TFINAL,RTH,THPRIME,PEND,N,ERR2,ERR1,INIT,W,STEP)
          CALL TABLE(T,RTH,THPRIME)
60    CONTINUE

```

C
C

C PARAMETER CHANGE COMMANDS

```

      WRITE(5,70)
70    FORMAT(3/)
      PRINT,'WHAT NEXT?',                TYPE'
      PRINT,'CHANGE ERROR LEVELS        1'
      PRINT,'CHANGE TIME PARAMETERS     2'
      PRINT,'CHANGE SYSTEM PARAMETERS   3'
      PRINT,'CHANGE INITIAL VALUES     4'
      PRINT,'END                         5'
      READ,NEXT
      GO TO(10,20,30,40,80)NEXT

```

C
C

```

80    STOP
      END

```

C
C

C SUBROUTINE FOR PENDULUM EQUATIONS

C
C

```

      SUBROUTINE PEND(T,RTH,THPRIME)
      COMMON RM(2),RL(2)
      DIMENSION RTH(4),THPRIME(4)

```

C
C

```

      THPRIME(1)=RTH(2)
      THPRIME(2)=9.8*(RM(2)*(RTH(3)-(RM(1)+(RM(2))*RTH(1))/
+          (RM(1)*RL(1))
      THPRIME(3)=RTH(4)
      THPRIME(4)=- (RM(2)*RL(1)*THPRIME(2)+RM(2)*9.8*RTH(3))
+          /(RM(2)*RL(2))

```

C
C

```

      RETURN
      END

```

C
C

C SUBROUTINE TO PRINT TABLE

C
C

SUBROUTINE TABLE(T,RTH,THPRIME)
 DIMENSION RTH(4),THPRIME(4),DTH(4),DTHPRIM(4)

C
 C
 CHANGE ANGLES TO DEGREES
 DTH(1)=RTH(1)*57.296
 DTH(3)=RTH(3)*57.296
 C
 WRITE(5,210)T,DTH(1),RTH(2),THPRIME(2),DTH(3),RTH(4),
 + THPRIME(4)
 210 FORMAT(F5.2,F10.1,2(F10.5),F10.1,2(F10.5))
 RETURN
 END

表 5.4

MNF PROGRAM RKPEND
 INPUT ERROR LEVELS: ERR2 & ERR1(1,
 ? 1.0E-5, 1.0E-7
 INPUT TIME INTERVAL & TIME SPAN
 ? 0.1, 20
 INPUT M1, M2, L1, L2
 ? 2, 0.01, 1, 0.01
 INPUT INITIAL VALUES: TH1, DTH1, TH2, DTH2
 ? 10, 0, 10, 0

t TIME (SEC)	θ_1 THETA1 (DEG)	$\dot{\theta}_1$ OMEGA1 (RAD/SEC)	$\ddot{\theta}_1$ ALPHA1 (RAD/SEC2)	θ_2 THETA2 (DEG)	$\dot{\theta}_2$ OMEGA2 (RAD/SEC)
0	10.0	0	0	10.0	0
.10	9.5	-.16925	-1.62713	9.7	-.16977
.20	8.1	-.32015	-1.52602	8.1	-.32373
.30	5.9	-.44094	-1.00985	6.1	-.44484
.40	3.1	-.51886	-.53588	3.1	-.52478
.50	.1	-.54635	-.00947	.2	-.55095
.60	-3.0	-.52074	.51752	-3.2	-.52704
.70	-5.8	-.44451	.99454	-5.8	-.44774
.80	-8.0	-.32508	1.37456	-8.2	-.32977
.90	-9.5	-.17405	1.62131	-9.5	-.17420
1.00	-10.0	-.00611	1.71014	-10.2	-.00794
1.10	-9.5	.16243	1.63309	-9.5	.16602
1.20	-8.2	.31519	1.39696	-8.4	.31622
1.30	-6.0	.43730	1.02539	-6.0	.44400
1.40	-3.2	.51691	.55382	-3.4	.51962
1.50	-.2	.54628	.02876	-.1	.55444
1.60	2.9	.52256	-.49944	2.8	.52497
1.70	5.7	.44804	-.97875	5.9	.45556
1.80	8.0	.32997	-1.36327	8.0	.33009
1.90	9.4	.17983	-1.61495	9.6	.18501
2.00	10.0	.01221	-1.71000	10.0	.00878

表 5.5

t	θ_1	$\dot{\theta}_1$	$\ddot{\theta}_1$	θ_2	$\dot{\theta}_2$	$\ddot{\theta}_2$
TIME (SEC)	THETA1 (DEG)	OMEGA1 (RAD/SEC)	ALPHA1 (RAD/SEC ²)	THETA2 (DEG)	OMEGA2 (RAD/SEC)	ALPHA2 (RAD/SEC ²)
0	10.0	0	0	10.0	0	0
.10	9.5	-.16554	-1.54688	10.0	-.00548	-.16219
.20	8.2	-.29993	-1.10287	9.9	-.04131	-.58676
.30	6.2	-.38089	-.50379	9.4	-.12612	-1.10803
.40	3.9	-.40095	.08672	8.3	-.25906	-1.51315
.50	1.7	-.36891	.51715	6.4	-.41850	-1.61243
.60	-.3	-.30600	.69575	3.6	-.56788	-1.30526
.70	-1.8	-.23842	.61741	-.0	-.66668	-.61630
.80	-3.0	-.18847	.36255	-3.9	-.68321	.30758
.90	-4.0	-.16726	.06769	-7.7	-.60482	1.24113
1.00	-5.0	-.17143	-.12258	-10.7	-.44248	1.95042
1.10	-6.0	-.18477	-.10446	-12.6	-.22803	2.26350
1.20	-7.1	-.18440	.14841	-13.3	-.00502	2.12368
1.30	-8.1	-.14924	.57430	-12.7	.18398	1.60585
1.40	-8.7	-.06809	1.04245	-11.3	.30948	.89010
1.50	-8.8	.05543	1.39597	-9.3	.36289	.20140
1.60	-8.0	.20277	1.50142	-7.3	.35740	-.26079
1.70	-6.4	.34522	1.29499	-5.3	.32203	-.38832
1.80	-4.1	.45218	.80420	-3.6	.29054	-.19614
1.90	-1.4	.50022	.14078	-1.9	.28925	.18636
2.00	1.5	.48002	-.53175	-.2	.32752	.55976
2.10	4.0	.39908	-1.04951	1.9	.39420	.72525
2.20	6.0	.27920	-1.29776	4.4	.46118	.55297
2.30	7.2	.14966	-1.24538	7.1	.49292	.02879
2.40	7.7	.03824	-.95209	9.9	.45877	-.73711
2.50	7.7	-.03699	-.54661	12.2	.34413	-1.54261
2.60	7.4	-.07250	-.18289	13.7	.15667	-2.15677
2.70	6.9	-.07929	.01127	13.9	-.07451	-2.39314
2.80	6.5	-.07799	-.02368	12.8	-.30648	-2.16968
2.90	6.0	-.09083	-.25986	10.5	-.49463	-1.53576
3.00	5.4	-.13321	-.59198	7.3	-.60541	-.65742
3.10	4.4	-.20753	-.87308	3.7	-.62566	.23412
3.20	3.0	-.30149	-.96526	.3	-.56563	.91572
3.30	1.0	-.39143	-.78583	-2.6	-.45460	1.23885
3.40	-1.5	-.44963	-.33863	-4.9	-.33087	1.17600
3.50	-4.1	-.45321	.28486	-6.5	-.22914	.82402
3.60	-6.5	-.39184	.93182	-7.6	-.16955	.36872
3.70	-8.5	-.27162	1.43587	-8.5	-.15185	.01923
3.80	-9.6	-.11385	1.66694	-9.4	-.15663	-.06135
3.90	-9.7	.05084	1.57338	-10.3	-.15305	.18597
4.00	-9.0	.19129	1.19656	-11.1	-.11055	.69615
4.10	-7.6	.28468	.65691	-11.4	-.01063	1.30014
4.20	-5.9	.32261	.11493	-11.1	.14532	1.78008
4.30	-4.0	.31262	-.28022	-9.7	.33467	1.94137
4.40	-2.3	.27458	-.43767	-7.3	.51930	1.67827
4.50	-.9	.23328	-.35226	-3.9	.65670	1.01111
4.60	.4	.20964	-.10359	.1	.71275	.08381
4.70	1.6	.21350	.17284	4.1	.67225	-.87917
4.80	2.9	.24028	.33272	7.6	.54368	-1.64102
4.90	4.3	.27267	.27351	10.2	.35670	-2.02621
5.00	5.9	.28674	-.03024	11.7	.15322	-1.97191

表 5.6

	表5.4	表5.5
时间间隔(s)	0.1	0.1
时间范围(s)	20	50
m_1, m_2 (kg)	2, 0.01	2, 2
l_1, l_2 (m)	1, 0.01	1, 1
$\theta_1, \dot{\theta}_1$ (°)	10, 0	10, 0
$\theta_2, \dot{\theta}_2$ (°)	10, 0	10, 0

些参数包括诸如料斗的直径、底座的重量、滑道的角度、弹簧的角度、弹簧刚度以及驱动频率等。用试验方法(有时也用解析方法)为某一种给定的零件设计出给料斗通常要花费很多时间。

这个设计实例给出了给料斗的悬挂系统——一个空间机构——的数学模型(建立在拉格朗日方程基础之上)。这个模型可以计算某一给定的给料斗的自然频率。一旦我们在过去经验的基础上为某一给定零件设计出给料斗,那么,在选定参数值以便优化给料斗性能方面,这个数学模型是会有帮助的。例如,我们可能需要使给料斗底座的运动最小或使斗内零件的位置高度最小。为某一给定零件设计给料斗的具体内容,这里不作介绍。

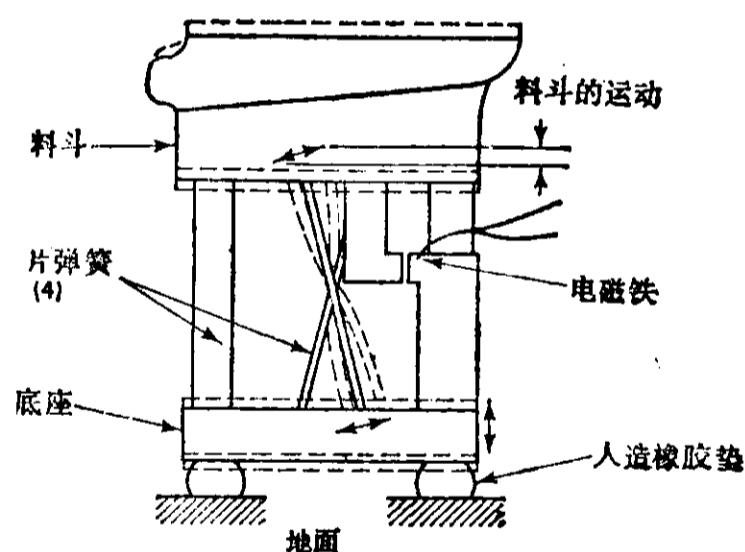


图 5.19 夸张了的给料斗运动

振动给料斗有一个焊在料斗内壁的螺旋形滑道(见图 5.18、5.19 和 5.20),料斗由联接在一个很重底座上的倾斜式片簧支撑(见图 5.19)。一块水平放置并与底座相联的电磁铁周期性地吸引与给料斗相连的一块平板,形成一个周期的“螺旋上升和螺旋下降”的螺旋形振动。与斗的直径和片簧的长度相比,滑道的运动是很小的。随着给料斗的运动,料斗内的零件被振动并沿滑道向上通过选择器。“螺旋上升”的运动把几乎是不变的速度传给零件使之与料斗一起向上运动,而“螺旋下降”运动则相当快,使得零件由于滑动(或零件腾空起来)而留在上面的位置。选择器只允许定向正确的零件被送出给料斗。而定向不正确的零件会被推出滑道,掉进斗底。

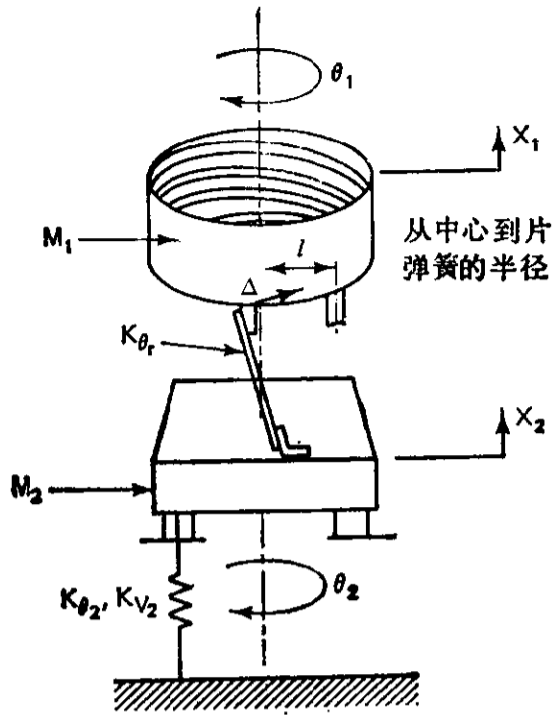


图 5.20 给料斗的模型

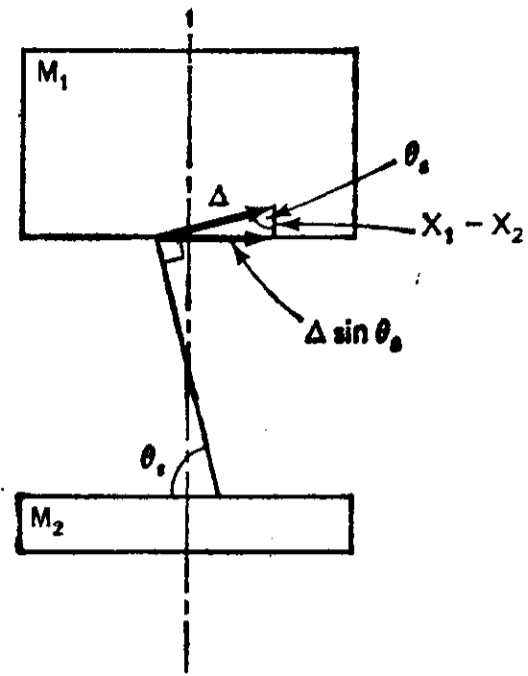


图 5.21 几何约束图

现用拉格朗日方法来推导给料斗的运动方程。图 5.20 和 5.21 表示标有(线度的和角度的)位移 X_1 、 X_2 、 $\theta_r = (\theta_1 - \theta_2)$ 、 θ_2 和 Δ 的给料斗模型。应用能量法,下列方程是正确的。

$$\text{动能: } T = \frac{1}{2} M_2 \dot{X}_2^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_1 [\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_r]^2 \quad (5.53)$$

$$\text{势能: } V = \frac{1}{2} K_{\theta_2} \theta_2^2 + \frac{1}{2} K_{V_2} X_2^2 + \frac{1}{2} K_{\theta_r} \Delta^2 \quad (5.54)$$

应用从图 5.20 和 5.21 导出的下列运动关系,可以消去 X_1 和 Δ 剩下 X_2 、 θ_r 和 θ_2 作为系统的基本自由度(其数值可参看表 5.7)。

$$X_1 - X_2 = \Delta \cos \theta_s$$

$$\theta_r l = \Delta \sin \theta_s$$

$$\Delta = \frac{\theta_r l}{\sin \theta_s} = \frac{\theta_r (3.35'')}{\sin 76^\circ}$$

式中, l 是从料斗中心到片簧的半径。所以,

$$X_1 = X_2 + \Delta \cos \theta_s$$

$$X_1 = X_2 + 0.835 \theta_r \quad [\text{因为 } X_1 - X_2 = \theta_r (3.35) \text{ctg} 76^\circ]$$

$$\dot{X}_1 = \dot{X}_2 + 0.835 \dot{\theta}_r$$

假定料斗的运动接近于绕其中心的纯螺旋运动。同时假设片簧的扭曲忽略不计,而且其运动很小。将 $(3.35/\sin 76^\circ)\theta_r = 3.45\theta_r$ 及 $X_2 + 0.835\theta_r$ 分别代替式(5.53)和(5.54)中的 Δ 和 X_1 ,得到下列公式:

$$T = \frac{1}{2} M_2 \dot{X}_2^2 + \frac{1}{2} M_1 (0.835 \dot{\theta}_r + \dot{X}_2)^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_1 [\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_2]^2 \quad (5.55)$$

$$V = \frac{1}{2} K_{\theta_2} \theta_2^2 + \frac{1}{2} K_{V_2} X_2^2 + \frac{1}{2} K_{\theta_r} (3.45 \theta_r)^2$$

假定为一个守恒系统, $L = T - V$, 那么

$$L = \left[\frac{1}{2} M_2 \dot{X}_2^2 + \frac{1}{2} M_1 (0.698 \dot{\theta}_r^2 + 1.67 \dot{X}_2 \dot{\theta}_r + \dot{X}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r^2) \right] - \left[\frac{1}{2} K_{\theta_2} \theta_2^2 + \frac{1}{2} K_{V_2} X_2^2 + \frac{1}{2} K_{\theta_r} (3.45 \theta_r)^2 \right] = 0 \quad (5.56)$$

上式的偏微分为:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_2} = M_2 \dot{X}_2 + 0.835 M_1 \dot{\theta}_r + M_1 \dot{X}_2 \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = I_1 \dot{\theta}_2 + I_1 \dot{\theta}_r \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_r} = 0.698 M_1 \dot{\theta}_r + 0.835 M_1 \dot{X}_2 + I_1 \dot{\theta}_2 + (I_1 + I_2) \dot{\theta}_r \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = -K_{V_2} X_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -K_{\theta_2} \theta_2 \textcircled{1} \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_r} = -11.9 K_{\theta_r} \theta_r \quad (5.61)$$

表 5.7 图 5.18、5.19、5.20 和 5.21 中给料斗的物理参数

料斗的质量 $M_1 = 31.15 \text{lb}$
底座的质量 $M_2 = 95.65 \text{lb}$
料斗的转动惯量 $I_1 = 1001.22 \text{lb} \cdot \text{in}^2$
底座的转动惯量 $I_2 = 2159.04 \text{lb} \cdot \text{in}^2$
人造橡胶垫的垂直弹簧常数 $K_{V_2} = 105000 \text{lb}/\text{in}$
人造橡胶垫的切向弹簧常数 $K_{\theta_2} = 366000 \text{lb}/\text{in}$
片簧的切向弹簧常数 $K_{\theta_r} = 627000 \text{lb}/\text{in}$
片簧角度 $\theta_s = 76^\circ$
中心到片簧的半径 $l = 3.35 \text{in}$

合并同类项,对时间取导数得到

$$\frac{d}{dt} [(M_1 + M_2) \dot{X}_2 + 0.835 M_1 \dot{\theta}_r] + K_{V_2} X_2 = 0 \quad (5.62)$$

$$\frac{d}{dt} [(I_1) \dot{\theta}_2 + I_1 \dot{\theta}_r] + K_{\theta_2} \theta_2 = 0 \quad (5.63)$$

$$\frac{d}{dt} [(0.698 M_1 + I_1 + I_2) \dot{\theta}_r + 0.835 M_1 \dot{X}_2 + I_1 \dot{\theta}_2] + 11.9 K_{\theta_r} \theta_r = 0 \quad (5.64)$$

方程(5.62)到(5.64)可以写成如下形式:

$$\begin{vmatrix} M_1 + M_2 & 0 & 0.835 M_1 \\ 0 & I_1 & I_1 \\ 0.835 M_1 & I_1 & 0.697 M_1 + I_1 + I_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{X}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{V_2} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 11.9 K_{\theta_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_2 \\ \theta_2 \\ \theta_r \end{vmatrix} = 0 \quad (5.65)$$

方程(5.65)即为表 5.7 中给料斗的数学模型。

① 原文为 $\frac{\delta L}{\delta \theta_2} = -K_{\theta_2} \theta_2$ ——译者注。

给料斗的位移坐标是选取得使弹性矩阵没有耦合,从而简化对弹性矩阵的求逆过程。为了求出这个系统的特征值,将文献[123]中所介绍的方法应用如下①。

设质量矩阵 = M , 刚度矩阵 = K , 并且设阻尼矩阵 $B = K^{-1}M$ 。则有 $Bv = \mu v$, 式中 v 代表 B 的特征向量, μ 代表 B 的三个特征值。而且 $\mu = 1/\omega^2$, 这里 ω 是自然频率。

计算机程序是用 FORTRAN 写成的, 该程序读入 M 和 K 矩阵, 并对 K 取逆, 再用 K^{-1} 左乘 M 来求 B 。然后调用求 B 的三个特征值的子程序, 并用 $\omega = \sqrt{1/\mu}$ 来计算自然频率。

结果 用来证实这个数学模型的给料斗是一个直径为 12 in. 的“莫费德(Moorefeed)”给料斗。它是为传送每件重几克的 $\frac{1}{4}$ in² 电触头而设计的。驱动单元是一个电磁铁, 以电源频率供电, 并通过一个名为 Variac (连续可调自耦变压器) 的装置来控制斗的振幅。这个给料斗每分钟可以供料约 150 个。表 5.7 列出了它的物理参数。

弹簧常数是用下法求出的, 即把一个线性电压位移变换器(LVDT)连在弹簧上, 再将已知的重量慢慢地加载到弹簧上。

求转动惯量值所用的方法是, 将底座或料斗放在一个扭摆上, 将所测得的摆的周期与应用第一卷节 5.1 所述的方法得知的圆柱体的周期进行比较。

为了确定哪一个频率可激振给料斗, 并使零件顺滑道向上运动, 使用了一个频率发生器来驱动给料斗。为了精确地驱动监测频率, 还使用了一个电子数字频率计。表 5.8 列出了给料斗供料的各种频率。该表还给出了从频谱分析仪所得出的结果。不断地用锤子轻轻敲击来激振一个加速度计, 并将其在阴极射线管显示出的响应曲线拍成照片(见图 5.22)。

① 下面简单回顾一下将特征值和特征向量。设

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

B 的特征值定义如下:

$$|B - \mu I| = 0 \quad \text{或}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 \\ 0 & -\mu & 1 \\ -8 & -14 & -7-\mu \end{vmatrix} = \mu^3 + 7\mu^2 + 14\mu + 8 = 0$$

特征值是方程的根 $\mu_1 = -1, \mu_2 = -2, \mu_3 = -4$ 。特征向量 $v_i, (i=1, 2, 3)$ 由 $Bv_i = \mu_i v_i$ 来定义。对于 $\mu_i = \mu_1 = -1$ 时:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{11} \\ -v_{12} \\ -v_{13} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{12} = -v_{11} \\ v_{13} = -v_{12} \\ -8v_{11} - 14v_{12} - 7v_{13} = -v_{13} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_{11} + v_{12} &= 0 \\ \Rightarrow v_{12} + v_{13} &= 0 \\ -8v_{11} - 14v_{12} - 6v_{13} &= 0 \end{aligned}$$

这是一个 $v_{1j} (j=1, 2, 3)$ 的线性齐次方程组。因此, 我们可以随意假设一个 v_{1j} 。设 $v_{11} = 1$, 则 $v_{12} = -1, v_{13} = 1$ 。将这些值代入第三个方程来检查之。则有, $v_1 = \{1, -1, 1\}$ 。同样地, 我们可以求得 $v_2 = \{1, -2, 4\}$ 和 $v_3 = \{1, -4, 16\}$ 。(本例选自文献 57)。

正如表 5.8 所示, 计算机模型和给料斗的实验结果极为接近。注意, 数学模型没有预示出 40 Hz 左右的自然频率。这第四个自由度起因于振动试验过程中放置给料斗的桌子。^①由于解析的结果与实验结果相当吻合, 所以这个数学模型对于以改善给料斗传送效率, 及变更其元件质量和(或)能量消耗两方面来进行优化研究, 都很有应用潜力。

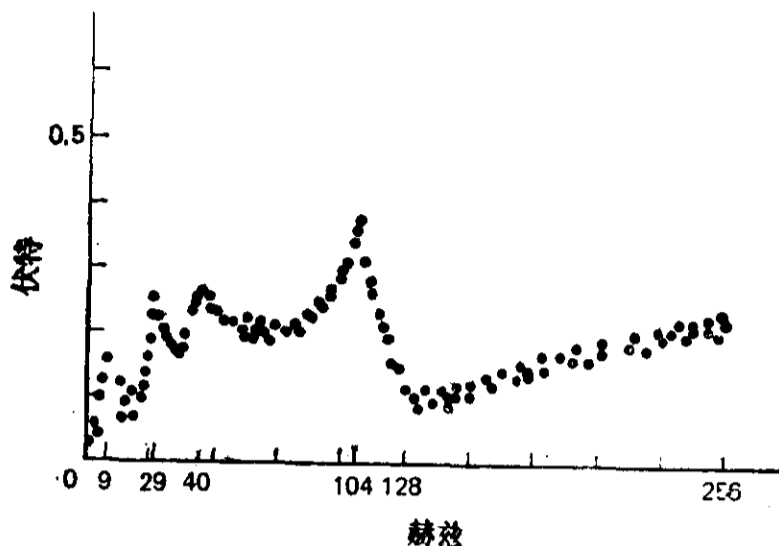


图 5.22 显示表 5.8 中所列实测自然频率的阴极射线管频谱分析仪所拍照片的描绘图

表 5.8 图 5.18、5.19、5.20 和 5.21 中的给料斗自然频率的实际值、测量值和计算值的比较

供料频率(Hz)	频谱分析仪	计算机模型
8~11	9	10
26	29	28
37	40	—
102.6~104.4	104	103

例如, 我们可以加一个比较重的底座(M_2)来减少能量由人造橡胶垫块传递到安装给料斗的机器上。为了更好地更换给料斗的元件而保持主要传送频率(自然频率)的值不变, 可运用一个搜索子程序^[216]。这个程序可为改进和设计给料斗提供一个简捷方法, 从而可以减少为达到设计性能而花费在原型机上的费用。

5.7 单自由度系统的自由振动^②

在进入讨论机构平衡和高速弹性机构这样一些复杂问题之前, 我们先来复习一下振动和转子平衡的基础知识。对这一内容已经熟悉的读者可以转到节 5.11。

最简单的振动系统只有一个自由度。熟知的例子是一个质量 M 用刚度为 K 的弹簧与墙相连(如图 5.23 所示)。弹簧所产生的作用力 F 与位移假设呈线性关系, 即 $F = -Kx$, 式中 K 是“弹簧常数”, x 是离开平衡位置的位移, 向右为正。注意, F 是“返回力”, 因为它和位移的符号相反。

^① 由于 $B = K^{-1}M$ 是一个 3×3 方阵。它只有三个特征值, 因而只能计算出三个自然频率, 即 10Hz、28Hz 和 103 Hz。第四个自然频率, 大约 40Hz, 是由于给料斗所放置的桌子引起的, 因此不能从数学模型计算得到。——译者注

^② 这四节是在 Exxon 公司的汤姆·卡尔森(Tom Carlson)帮助下写成的。

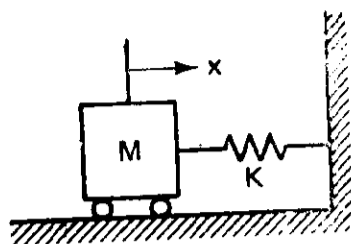


图 5.23 单自由度无阻尼振动系统。箭头的方向是 x 及其对时间各阶导数的正方向

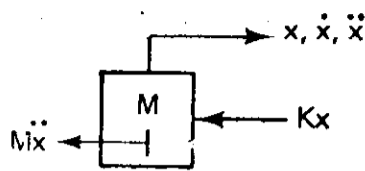


图 5.24 图 5.23 所示系统中质量的隔离体图

作用在质量上的唯一外力是弹簧力。根据隔离体图应用牛顿第二定律导出运动方程:

$$M\ddot{x} = -Kx \text{ 或 } M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (5.66)$$

如果假定 x 随时间周期性变化, 那么这个微分方程就可以很快解出。设 $x(t)$ 由下式给出:

$$x = A \sin \omega t \quad (5.67)$$

式中 A 是振幅常量, ω 是振动频率, 又称“圆频率”, 其单位为每单位时间转过的弧度。将式(5.67)代入式(5.66), 我们得到

$$-MA\omega^2 \sin \omega t + KA \sin \omega t = K - M\omega^2 = 0 \quad (5.68)$$

或
$$\omega^2 = \frac{K}{M} \quad (5.69)$$

因此, 振动的“圆频率”(每秒弧度)(也通常简称为频率)就唯一地由系统的物理常量所确定。我们称它为系统的“自然频率” ω_n , 它由下式确定:

$$\omega_n = \left| \sqrt{\frac{K}{M}} \right| \quad (5.70)$$

上式中的绝对值符号意味着只有正根才有物理意义。象式(5.67)所表示的这种周期性摆动称为“简谐运动”; 而象图 5.23 那样的自由振动系统称为“简谐振荡器”。

不用三角函数而用复指数形式也可求解这个系统的运动。方程(5.67)可以写成 $x = R(z)$, $z = Ae^{i\omega t}$ 的形式(参看图 5.25)。将此式代入公式(5.66)给出相同结果的 ω_n 。

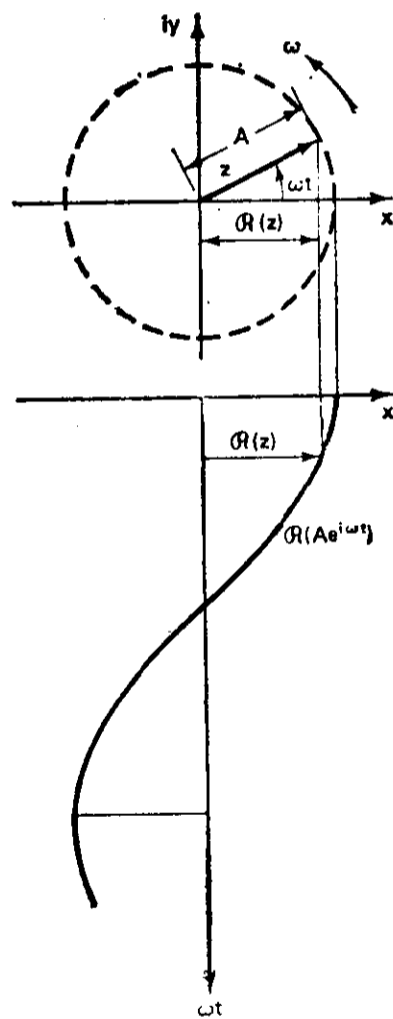


图 5.25 用转动“相位复向量” $z = Ae^{i\omega t}$ 的实部来模拟正弦振动

例 5.6

如果图 5.23 中的滑块重 20 lbf, 弹簧在 20 lbf 载荷下变形 1/10 in., 该弹簧-质量系统的自然频率是多少?

解: 应用式(5.70), 我们得到:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2400 \text{ lbf/ft}}{0.621 \text{ slug}^{\text{①}}}} = 62.2 \text{ rad/s} = 9.89 \text{ Hz}$$

① slug 是一英制的 ft-lb、s 制质量单位。1 slug = 32.2 lb。——译者注

许多其它的系统都可以式(5.70)形式的方程为特征。下面给出几个例子。在每一例子中,质量上总是受返回力的作用,这个返回力正比于从平衡位置开始的变形。例如,在图 5.26 中的平衡位置是弹簧力刚好平衡掉 M 的重量的位置。

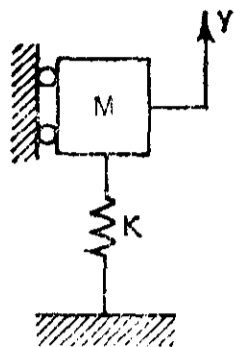


图 5.26 在平衡位置,弹簧力正好与 M 的重量相平衡

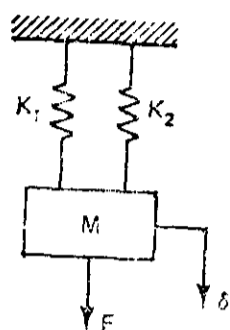


图 5.27 并联弹簧的组合弹簧刚度等于它们的弹簧刚度之和

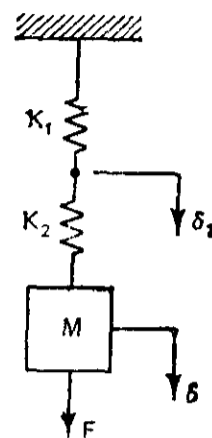


图 5.28 串联弹簧的组合柔度等于它们各自的柔度之和

例 5.7

试确定两个并联弹簧(图 5.27)和两个串联弹簧(图 5.28)的自然频率的表达式。

解: 对于并联弹簧,图 5.29 的隔离体图表明,给一个力 F [由于物块的重量和(或)其它外力] 就引起变形 δ ,

$$F - K_1\delta - K_2\delta = 0$$

因此,并联弹簧的等效弹簧常数为

$$K_{\text{等效}} = \frac{F}{\delta} = K_1 + K_2$$

而自然频率为:

$$\omega_n = \left| \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{M}} \right|$$

对于串联弹簧,由力 F 引起的总变形 δ 为(图 5.28):

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}$$

因而串联弹簧的等效刚度为

$$K_{\text{等效}} = \frac{F}{\delta} = \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)^{-1} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

以及

$$\omega_n = \left| \sqrt{\frac{K_1 K_2}{M(K_1 + K_2)}} \right|$$

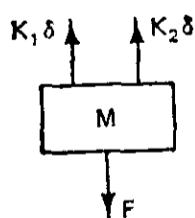


图 5.29 图 5.27 中 M 的隔离体图

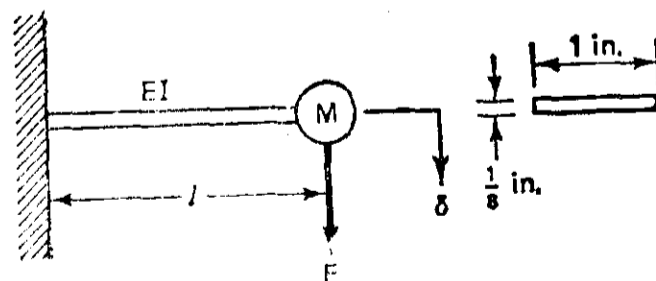


图 5.30 受有集中质量的悬臂梁弹簧的自由振动

例 5.8

在一悬臂梁上距墙 l 处,放置一重 9.22 lbf 的质量(图 5.30)。梁的质量忽略,试求该梁的自然频率的表达式。

解: 由梁的理论我们知道, 力 F 与变形 δ 之间的关系为 $\delta = \frac{Fl^3}{3EI}$, 因此, $K = \frac{F}{\delta} = \frac{3EI}{l^3}$ 和 $\omega_n = \left| \sqrt{\frac{3EI}{Ml^3}} \right|$ 。

如果钢梁的断面宽 1 in., 厚 1/8 in., 梁长 12 in, 那么

$$K = \frac{3 \times (3 \times 10^7 \text{ lbf/in.}^2) \times (0.125)^3 \text{ in.}^4}{1728 \text{ in.}^3 \times 12} \\ = 8.477 \text{ lbf/in.} = 101.7 \text{ lbf/ft}$$

所以,

$$\omega_n = \left| \sqrt{\frac{101.7}{0.310}} \right| = 18.1 \text{ rad/s} = 2.88 \text{ 周/s} = 173 \text{ 周/min}$$

5.8 自由振动的衰减

对实际物理系统的精确分析, 要求把摩擦的影响考虑进去。没有任何物理系统显示有振幅不衰减的自由简谐运动。在解析上涉及的最简单的摩擦力是与速度成正比的。在机械系统中, 这就称为“粘性阻尼”, 因为流体的摩擦力服从这个关系。于是, 摩擦阻力 F 由 $F = C\dot{x}$ 来表示, 式中 C 为“阻尼系数”, 其量纲为力/单位速度, 或力 \times 时间/长度。对于许多机械系统, 阻尼正比于速度的假设已被试验证明是一个很好的近似。在机械系统中, 阻尼经常示意地表示成减振器 (dashpot) —— 一种类似于汽车上充油式振动缓冲器的装置。

考虑图 5.31 a 中的单自由度系统, 用来研究带阻尼的自由振动的衰减。可以从其质量的隔离体图 (图 5.31 b) 来导出系统的运动方程

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (5.71)$$

因为我们从实际情况中知道, 物体的运动最终总是要停止的, 所以必须对衰减假设一个合适的数学表达式。 $x = Ae^{rt}$ 这样一个实指数形式可以作为式 (5.71) 的解。代入后, 我们得到:

$$Mr^2 + Cr + K = 0 \quad (5.72)$$

这个二次方程称为“系统的特征方程”, 对于 r , 它的解为

$$r = \frac{-C}{2M} \pm \left| \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}} \right| = r_1, r_2 \quad (5.73)$$

定义“临界阻尼系数” C_c 可使式 (5.73) 中根式化为零, 即

$$\frac{C_c}{2M} = \sqrt{\frac{K}{M}}, \text{ 故 } C_c = 2\sqrt{KM} \quad (5.74)$$

利用由下式定义的无量纲阻尼比 ξ

$$\xi \equiv \frac{C}{C_c} \equiv \frac{C}{2\sqrt{KM}} \quad (5.75)$$

式 (5.73) 变为

$$r_{1,2} = \omega_n (-\xi \pm |\sqrt{\xi^2 - 1}|) \quad (5.76)$$

下面, 我们来讨论“亚临界阻尼”系统, 这种系统的 $\xi < 1$, 因此

$$\frac{r_{1,2}}{\omega_n} = -\xi \pm i |\sqrt{1 - \xi^2}| \quad (5.77)$$

x 的最常用的通解是分别有关 r_1 和 r_2 解的迭加;

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (5.78)$$

其中常数 A 和 B 必须由初始条件确定。将式(5.77)代入式(5.78), 我们得到:

$$x = e^{-i\zeta\omega_n t} (Ae^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + Be^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}) \quad (5.79)$$

应用恒等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 这个式子可以重新写成

$$x = De^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} |t + \phi) \quad (5.80)$$

这里 D 和 ϕ 是要由初始条件来确定的常数。式(5.80)表示的是振幅成指数衰减的正弦波。将阻尼自然频率 ω_d 定义为如下形式常很方便, 即:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (5.81)$$

显然, $\omega_d < \omega_n$, 但是当 ζ 很小时, $\omega_d \approx \omega_n$ 。式(5.80)画于图 5.32 上, 这里 T 是以秒为单位的振动周期, 由 $T = 2\pi/\omega_d$ 给出。注意, 图中 ϕ 取为 0。

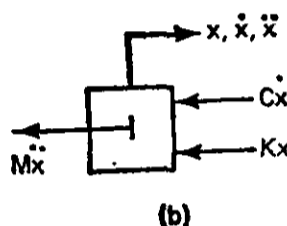
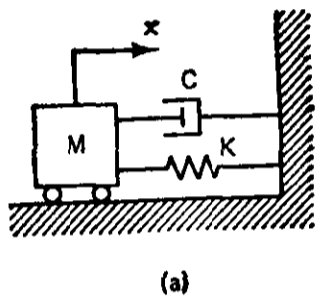


图 5.31 (a)有粘性阻尼的单自由度系统;
(b)阻尼系统中质量的隔离体图

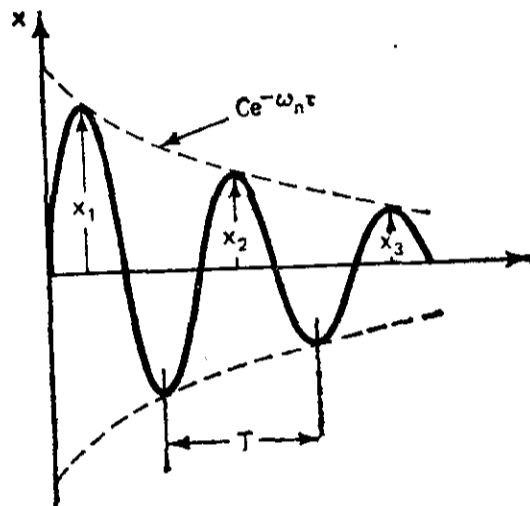


图 5.32 阻尼呈正弦振动的曲线, 注意其
“阻尼包络线”为 $Ce^{-\omega_n t}$

我们可以用比较振幅峰值在一段时间内的变化的实验方法来确定小阻尼比 ζ 的近似值。考虑被 N 个振动循环隔开的两个峰值振幅 x_1 和 x_2 。假设 $x_2 < x_1$, 即

$$x_2 = x(t_2) < x_1 = x(t_1) \quad (5.82)$$

且

$$t_2 = t_1 + NT \quad (5.83)$$

从式(5.80), 有

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_2}}{e^{-\zeta\omega_n t_1}} = e^{-\zeta\omega_n NT} = e^{-2\pi f_n (t_2 - t_1)} \quad (5.84)$$

式中 f_n 是以每秒转(或周)为单位的自然频率。

对于小的 ζ , $\omega_n \approx \omega_d$, 因此 T 就将非常接近实验测得的数值。对式(5.84)两边取对数, 得到:

$$\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = -2\pi f_n (t_2 - t_1) \zeta$$

因此,

$$\zeta = \ln(x_1/x_2) / [2\pi f_n (t_2 - t_1)] \quad (5.85)$$

对这些衰减的振动, 或称“短暂的”振动, 这里将不作进一步的讨论。但是, 我们将会发现, 在讨论受迫振动时, 阻尼比 ζ 是一个很方便的参数。

在铅垂标定系统(图 5.33 a)中, 不变的力 $W = Mg$ 必须引入隔离体图(图 5.33 b)。如果向

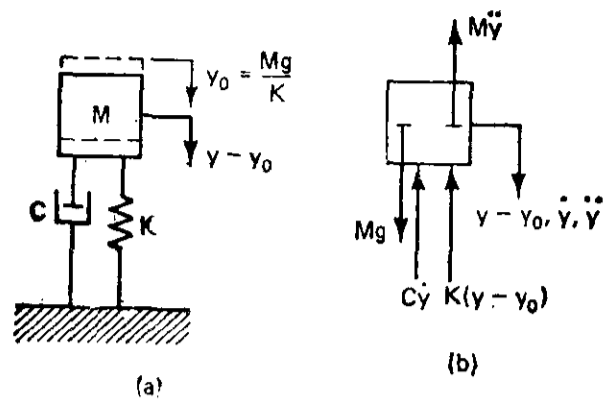


图 5.33 (a)在一个铅垂系统中,对偏离静力平衡位置 y_0 的位移,列出运动方程; (b)单自由度铅垂运动系统的隔离体图

下的位移是从静力平衡位置 y_0 开始计算的话,即

$$Mg = Ky_0 \quad \text{或} \quad y_0 = \frac{Mg}{K} \quad (5.86)$$

那么在对从 y_0 测量的 y 列出运动方程时, Mg 可消去,且

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = 0 \quad (5.87)$$

这正是与方程(5.71)相同的表达式。

5.9 单自由度系统的受迫振动

在人们感兴趣的许多工程系统中,了解振动系统对周期性外力的响应是很重要的。对这种外力(通常称为“驱动力”或“扰力函数”)的响应振幅不仅仅是时间的函数,而且也是振动频率本身的函数。

无阻尼受迫振动

首先我们来考虑由周期性的力 $F(t)$ 作用在质量上所驱动简单弹簧-质量系统。这个力由下式给出

$$F = F_0 \sin \omega t = \mathcal{I}(F_0 e^{i\omega t}) \quad (\text{图 5.34}) \quad (5.88)$$

式中 $F_0 > 0$ 是变化力的峰值振幅。该系统示于图 5.35。

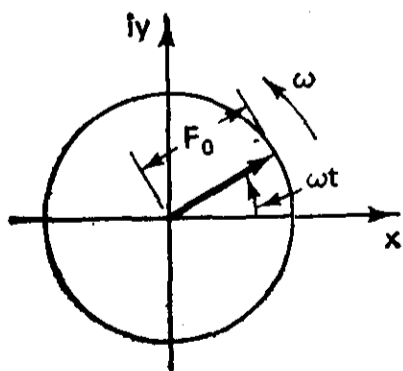


图 5.34 正弦振动的转动向量

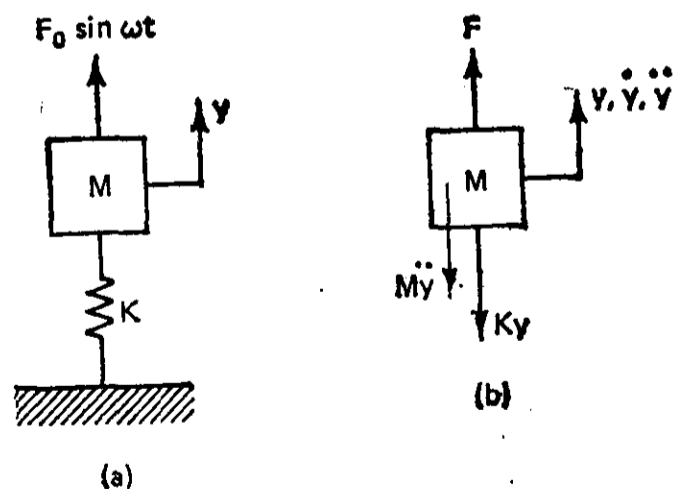


图 5.35 (a)受迫振动系统; (b)受迫振动系统中质量的隔离体图。 y 是从静力平衡位置测量的

从隔离体图 5.35 可得出运动的稳态方程;

$$M\ddot{y} + Ky = F_0 \sin \omega t \quad (5.89)$$

正如简谐振子一样,我们假设解的形式为

$$y = A \sin \omega t \quad (5.90)$$

但是,现在我们关心的是振幅 A 作为激振频率 ω 的函数的变化情况。将式(5.90)代入式(5.89),可以证明

$$A = \frac{F_0}{K - M\omega^2} \quad (5.91)$$

方便的是定义频率比 β 为

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \omega \sqrt{\frac{M}{K}} \quad (5.92)$$

将式(5.91)除以 $A_0 = \frac{F_0}{K}$ ——在力 F_0 作用下弹簧的静变形,我们得到“振幅比” A/A_0 :

$$\frac{A}{A_0} = \frac{F_0}{K A_0 - M A_0 \omega^2}$$

设 $F_0/K = A_0$,

$$\frac{A}{A_0} = \frac{F_0}{(KF_0/K) - M(F_0/K)\omega^2} = \frac{1}{1 - (M/K)\omega^2}$$

或者

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (5.93)$$

式(5.93)的曲线画在图 5.36 上。响应的最重要的特性是当激振频率趋近自然频率时,振幅 A 以趋向渐近线的方式趋于无穷大。

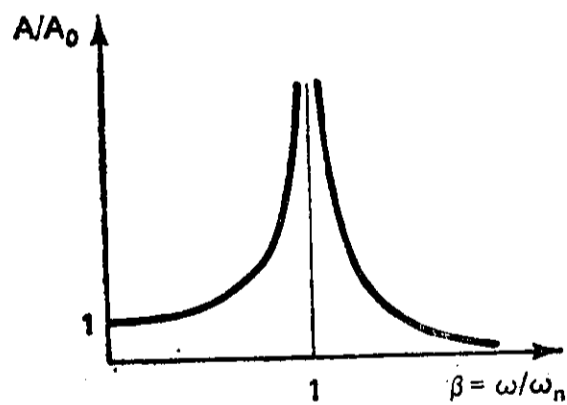


图 5.36 随着振频率 ω 接近自然频率 ω_n ,无阻尼系统中振幅比 A/A_0 趋于无穷大

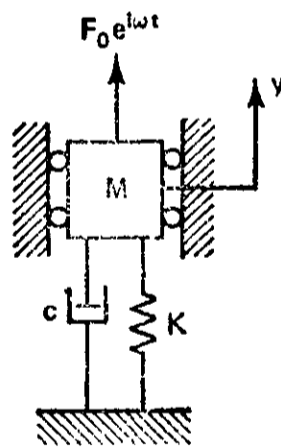


图 5.37 阻尼受迫振动系统

阻尼受迫振动

当考虑到阻尼效应时,我们将发现最大的响应振幅是有限的,这与实际的物理系统所期望的情况是一样的。对实际系统的观察还表明,共振频率不再与自然频率严格相等,同时,还有必要考虑力和位移之间的相位关系。

对于图 5.37 中的阻尼系统,从静力平衡位置测量 y ,其运动方程如下:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F_0 e^{i\omega t} \quad (5.94)$$

这里 $F_0 e^{i\omega t}$ 是一个旋转的力向量(图 5.34)。可是,从图 5.37 中的无摩擦垂直导轨可见,显然只有力向量的垂直分量对这个系统起作用。为了数学表达上的简便,我们选用复指数表达法。假设的 y 的表达式中必须包含相位角 ϕ :

$$y = A e^{i(\omega t - \phi)} \quad (5.95)$$

式中的 ϕ 正比于发生最大的力和最大的 y 值之间的时间间隔。将式(5.95)代入式(5.94),有

$$A(Mi^2\omega^2 + Ci\omega + K)e^{i(\omega t - \phi)} = A(K - M\omega^2 + iC\omega)\frac{e^{i\omega t}}{e^{i\phi}} = F_0 e^{i\omega t} \quad (5.96)$$

当然,从现在起,对上式我们感兴趣的只是方程的虚部。将上式两边都除以 $A(e^{i\omega t}/e^{i\phi})$, 并使方程等号两边的实部和虚部分别相等,我们得到:

$$K - M\omega^2 = \frac{F_0}{A} \cos \phi \quad (5.97)$$

和

$$C\omega = \frac{F_0}{A} \sin \phi \quad (5.98)$$

现在我们可以看到为什么相位角在数学表达式上是必须的:运动的复数方程变成两个独立的实数方程;因此,必须有两个未知量:在这个例子中是 A 和 ϕ 。利用基本的三角恒等式,方程(5.97)和(5.98)可以容易地求解得出

$$A = \frac{F_0}{|\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + (C\omega)^2}|} \quad (5.99)$$

和

$$\phi = \arg(K - M\omega^2 + iC\omega) \quad (5.100)$$

同样,将式(5.96)两边除以 $e^{i\omega t}/e^{i\phi}$, 得到

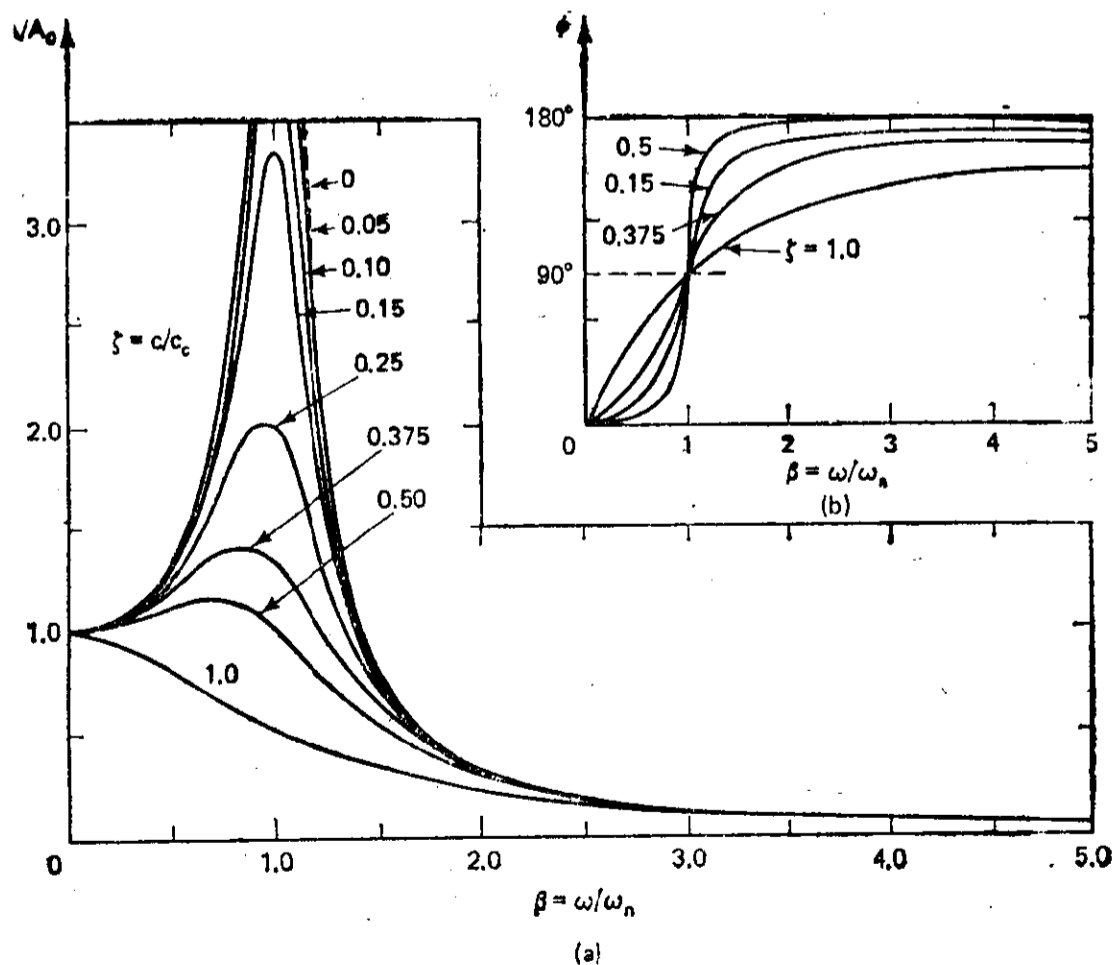


图 5.38 (a) 振幅比; (b) 对于不同的阻尼比值, 相位角是频率比的函数 [2.88]

$$A(K - M\omega^2 + iC\omega) = F_0 e^{i\phi}$$

由此可以直接推出式(5.99)和(5.100)。将无量纲的参数——频率比 β 和阻尼比 ξ 化入,可将以上的解写成无量纲形式

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{|\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}|} \quad (5.101)$$

和
$$\phi = \arg(1 - \beta^2 + i2\xi\beta) \quad (5.102)$$

这两个方程的曲线按不同的 ξ 值画在图 5.38 中。对于某一给定的阻尼比,出现最大振幅 A 的频率定义为共振频率。对于小的阻尼比(即 $\xi^2 \ll 1$),共振频率十分接近自然频率,即 $\beta=1$ 给出的频率。

转动激振函数

一个转动着的不平衡量提供了外部激振力的常见例子。让我们来看一个离转动中心为半径 r 处的一个偏心质量 m ,如图 5.39 所示。离心力在运动方向上的分量为

$$F = mr\omega^2 \sin \omega t \quad (5.103)$$

式中 $mr\omega^2 = F_0$,将这一表达式代入式(5.99)中的 F_0 得出

$$A = \frac{mr\omega^2}{|\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + (C\omega)^2}|} \quad (5.104)$$

这一式子也可以写成无量纲形式:

$$\frac{MA}{mr} = \frac{\beta^2}{|\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}|} \quad (5.105)$$

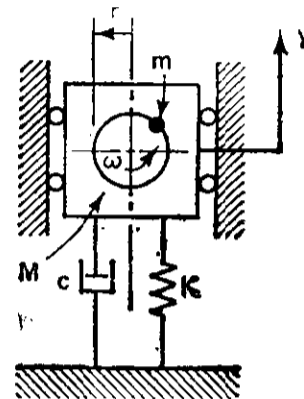


图 5.39 旋转着的不平衡量作为激振函数

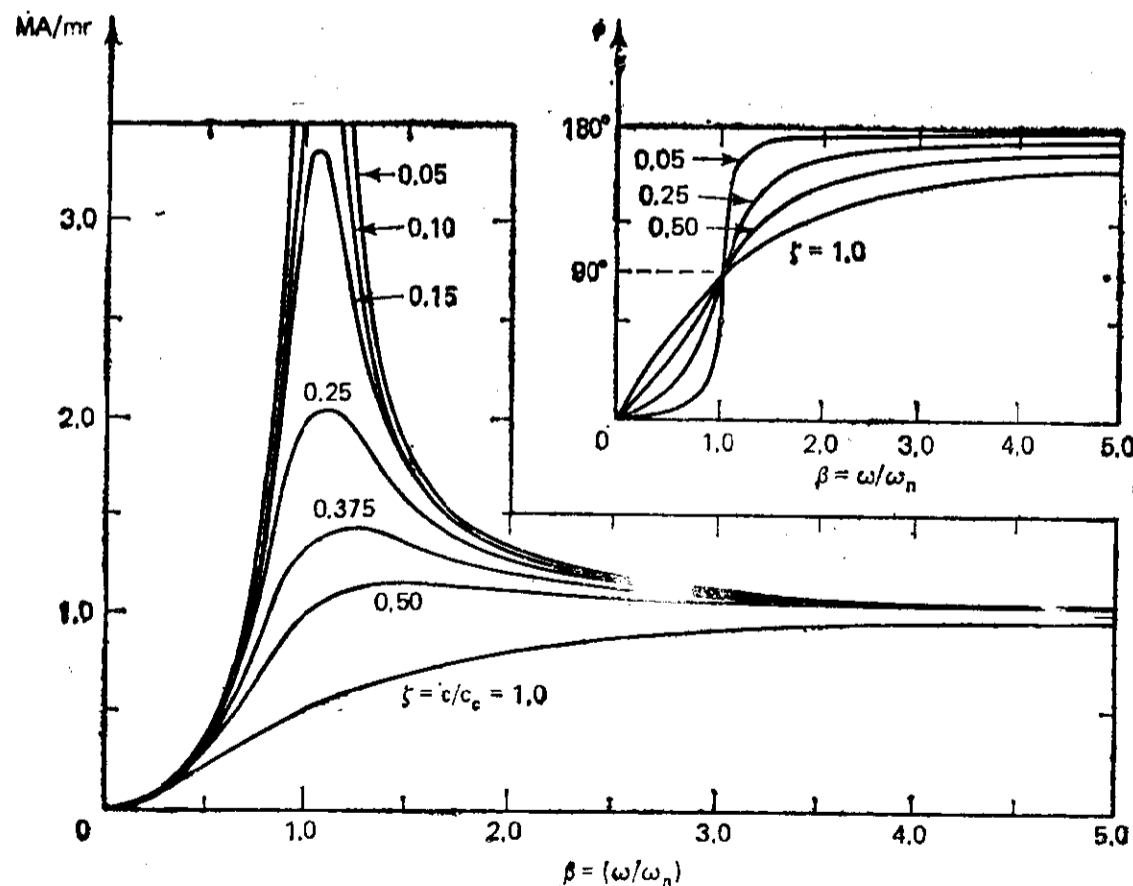


图 5.40 有旋转不平衡量的单自由度阻尼系统的频率响应^[289]

这个响应曲线画在图 5.40 上,其中 $\phi = \arg(1 - \beta^2 + i2\zeta\beta)$ 。将图 5.40 与图 5.38 相比较,可以注意到,由于离心力的大小取决于 ω^2 ,所以对于 $\beta=0$ 和 $\beta \rightarrow \infty$ 的两种极限情况,响应曲线是不同的。

基础激振

如图 5.41 a 所示,激振力也可以来自于在弹簧和阻尼器下方的基础的简谐运动。这个系统的运动方程是根据图 5.41 b 中的隔离体图列出的。注意: y_1 和 y_2 是从静力平衡位置开始测量的。在这个位置上,弹簧 K 的作用力正好平衡 M 的重量。 Mg 项可从方程中消去,这样,我们得到:

$$M\ddot{y}_2 + C(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + K(y_2 - y_1) = 0 \quad (5.106)$$

应用位移的复指数表达法,即

$$y_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad y_2 = A_2 e^{i(\omega t - \phi)} \quad (5.107)$$

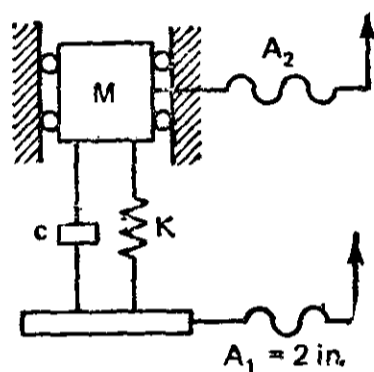
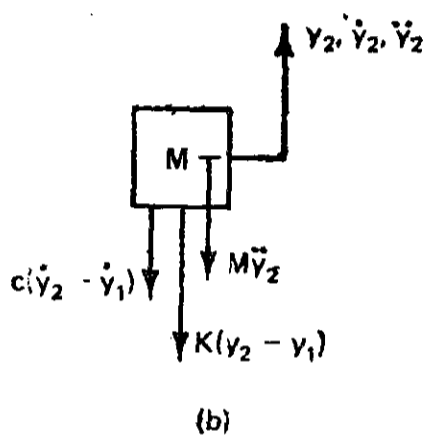
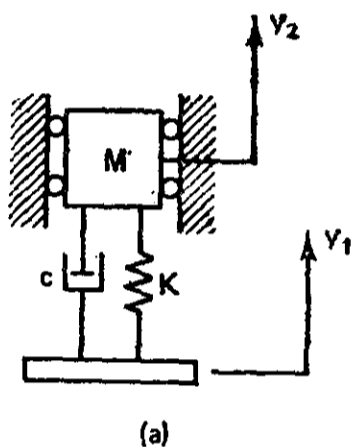


图 5.41 (a)受机架激振的单自由度系统;(b)质量的隔离体图

图 5.42 受机架激振的单自由度系统(见例 5.9)

并注意只有垂直分量是有用的(图 5.42),于是有

$$M A_2 i^2 \omega^2 \frac{e^{i\omega t}}{e^{i\phi}} + C \left(A_2 i \omega \frac{e^{i\omega t}}{e^{i\phi}} - A_1 i \omega e^{i\omega t} \right) + K \left(A_2 \frac{e^{i\omega t}}{e^{i\phi}} - A_1 e^{i\omega t} \right) = 0$$

或

$$A_2 (K - M\omega^2 + iC\omega) = A_1 (iC\omega + K) e^{i\phi} \quad (5.108)$$

我们对传到质量 M 上的振幅 A_2 和激振振幅 A_1 的比—— A_2/A_1 感兴趣。这个比值定义为传递率 (Transmissibility), 并由下式确定:

$$T = \frac{A_2}{A_1} = \left| \sqrt{\frac{K^2 + (C\omega)^2}{(K - M\omega^2)^2 + (C\omega)^2}} \right| \quad (5.109)$$

将 β 和 ζ 代入, 上式又可写为

$$T = \left| \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2 \beta^2}} \right|, \quad \phi = \arg(1 - \beta^2 + i2\zeta\beta) \quad (5.110)$$

这一响应曲线表示在图 5.43 上。有意思的是,注意对于所有的 ζ 值,

$$T|_{\beta=0} = T|_{\beta=\sqrt{2}} = 1$$

对于小的阻尼比,当 $\beta \approx 1$ 时,共振现象发生。因此,我们可以写出

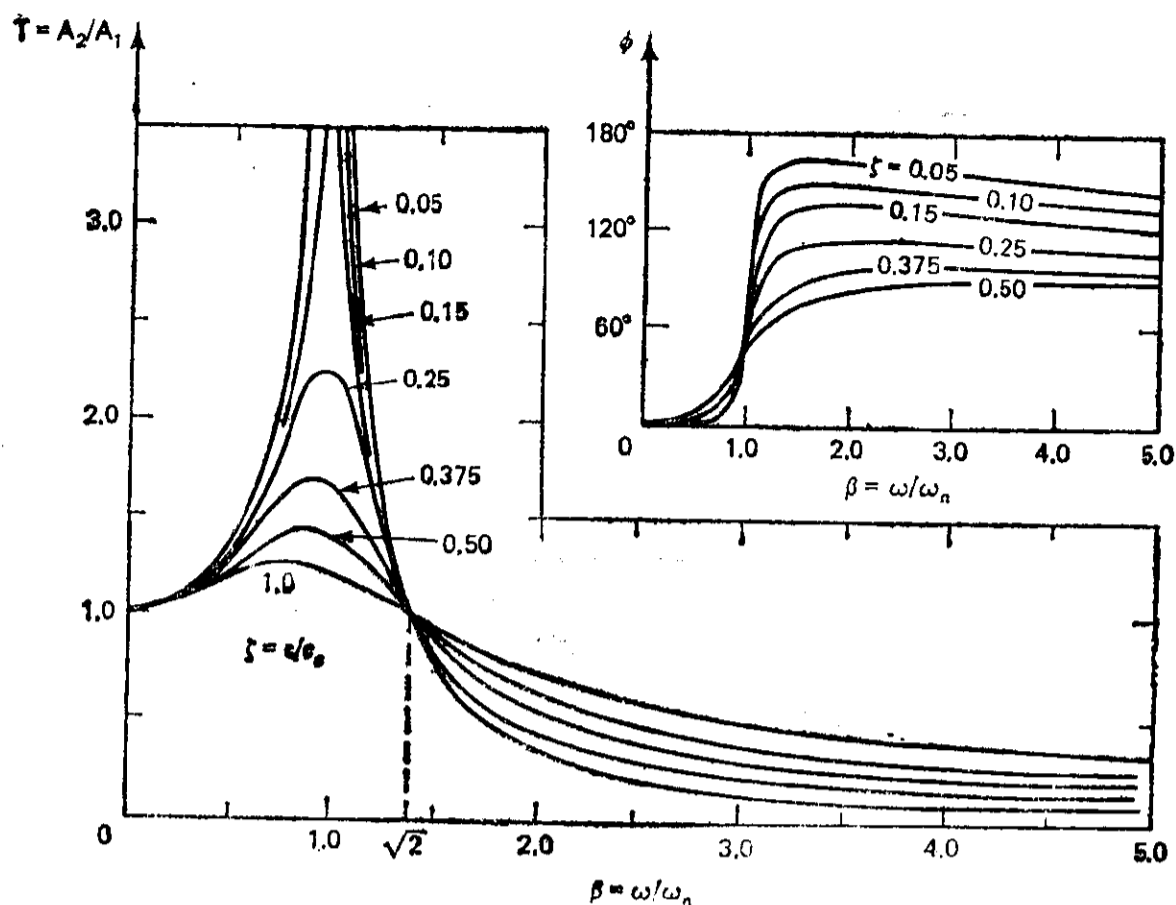


图 5.43 图 5.41 和图 5.42 所示机架激振系统中, 传递率和相位角的频率响应^[288]

$$T_{\max} \approx \frac{1}{2\xi}$$

力传递

在许多情况下, 我们对传递到坚实基础上的力 F_T 感兴趣。考虑图 5.41 a 所示的系统, 很容易证明力传递的比率由下式给出

$$\frac{F_T}{F_0} = \left| \sqrt{\frac{1 + 4\xi^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}} \right| = T \quad (5.111)$$

式中 F_0 是作用在 M 上的呈正弦周期变化的力的振幅。因此, 力传递的比率正好等于上一节基础激振中求出的传递率 T 。

应用

上面介绍的有关简单振动系统的原理具有许多工程应用的价值, 特别是对于机器设计更是如此。许多机器都会发生振动, 从而产生诸如噪音、磨损、疲劳破坏、刀具颤震、灵敏仪器损坏等不良影响。我们可以通过消除振动源(即改变激振函数)的方法来控制它。当这种方法不可能或不可行时, 则常可通过适当地选择系统的质量、弹簧及阻尼元件, 使振动减小到可以接受的范围内。

振动的隔离

在讨论阻尼受迫振动时, 我们定义了传递率, 它是弹簧常数 K 和阻尼系数 C 的函数, 或换句话说, 是无量纲比率 β 和 ξ 的函数。在有些场合, 存在振动又不可能完全消除, 就可这样选取合适的传递率的值来使振动减到最小。

例 5.9

图 5.42 中的系统受到振幅为 $A_1 = 2 \text{ in.}$ 的基础激振, (a) 如果基础激振频率 $\omega = 8 \text{ Hz}$, 求 A_2 ; (b) 求使得 A_2

=1 in. 的频率 ω ; (c) 假定重量从 9.92 lbf. 增加到 12lbf., 求使 $A_2=0.5$ in. 的频率 ω 。

解: (a) 如果从式(5.75)得到了 $\zeta=0.25$ 和从式(5.70)得到了 $\omega_n=9.89\text{Hz}$, 那么 $\beta=8/9.89=0.81$ 。代入式(5.110), 得到

$$T=2.03$$

因此, $A_2=TA_1=2.03 \times 2=4.06$ in.

(b) 我们要求使 $T=0.50$ 的 ω 值。该问题的精确解要求解方程(5.110) 求给定 $T=0.50, \zeta=0.25$ 时的 β 值。可以从图 5.43 按 $T=0.50$ 和 $\zeta=0.25$ 首先估计一个 β 值, 然后用试算法来求得满意的解。

可先估计 $\beta \approx 1.8$ 。代入方程(5.110), 得到:

$$T|_{\beta=1.8}=0.557$$

将 β 增大到 1.9, 得

$$T|_{\beta=1.9}=0.497$$

如果这个结果的精度已经满意, 则可给出 $\omega=1.9\omega_n=18.8$ Hz。

(c) 当 W 增加时, ω_n 和 ζ 都变化。计算方法与(b)相似。求解过程留给读者完成。

动力吸振器

到目前为止, 我们所讨论的系统都是单自由度系统。现在来研究图 5.44 的系统, 其中对质量 M_1 要求防止受到基础振动 y_0 的影响。通过附加一个由刚度为 K_2 的弹簧支承的合适质量 M_2 , 可构成一个“动力吸振器”。

这个系统有两个运动方程, 各由每一质量的隔离体图导出(参看图 5.45 和 5.46)。

$$M_1 \ddot{y}_1 + y_1(K_1 + K_2) - y_0 K_1 - y_2 K_2 = 0 \quad (5.112)$$

$$M_2 \ddot{y}_2 - k_2(y_1 - y_2) = 0 \quad (5.113)$$

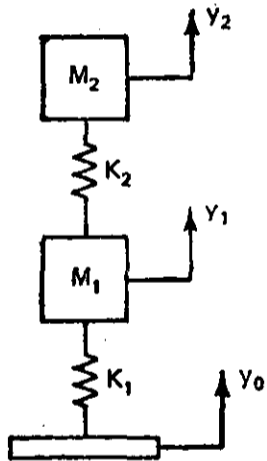


图 5.44 如果 $\frac{K_1}{M_1} = \frac{K_2}{M_2}$, 那么 M_2 , K_2 是一个动力吸振器

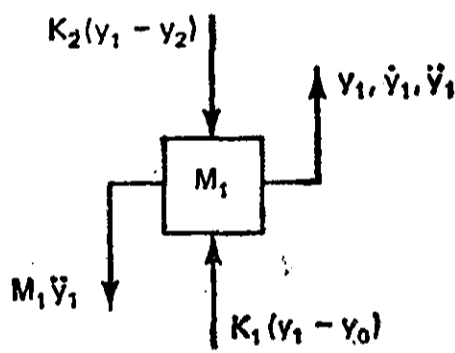


图 5.45 图 5.44 中主质量的隔离体图

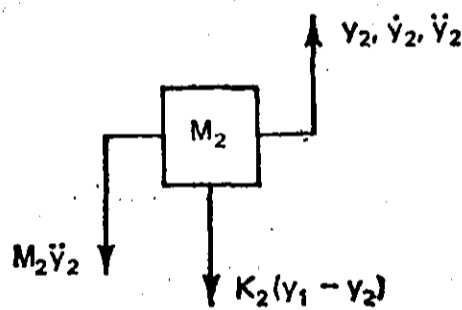


图 5.46 图 5.44 中动力吸振器的隔离体图

假设位移具有 $y_j = A_j \sin \omega t$ ($j=0, 1, 2$) 的形式, 方程(5.112)和(5.113)变为

$$A_1(K_1 + K_2 - M_1 \omega^2) - A_0 K_1 - A_2 K_2 = 0 \quad (5.114)$$

$$A_2(K_2 - M_2 \omega^2) - A_1 K_2 = 0 \quad (5.115)$$

如果我们希望质量 M_1 的振动被消除掉, 则可令 $A_1=0$ 。由公式(5.115), 这意味着:

$$\frac{K_2}{M_2} = \omega^2$$

就是说系统 (K_2, M_2) 的自然频率等于基础的微振频率。由于最大的振动问题可能是发生在系统

(K_1, M_1)的自然频率上,所以通常可选取

$$\frac{K_2}{M_2} = \frac{K_1}{M_1} \quad (5.116)$$

这一简单结果确实很有用。它意味着如果附加的质量和弹簧系统的自然频率等于原有系统的自然频率,则原有的质量-弹簧系统 M_1, K_1 的共振可以被消除。除此之外,如果弹簧 K_2 很软,只要满足方程(5.116),所加的质量可以非常小。但是,从式(5.114)看出,质量 M_2 的振幅却可能相当大:

$$A_2 = -A_0 \frac{K_1}{K_2} = -A_0 \frac{M_1}{M_2} \quad (5.117)$$

5.10 转子的平衡

刚性转子的平衡^①在许多类型的机器的运转中都是十分重要的。对于诸如轮胎、飞轮、风扇、马达、透平机等,都需要或都希望进行平衡。

尽管实现动平衡中也获得静平衡,但是“静平衡”和“动平衡”术语还是常用来描述两种类型的平衡问题。

静平衡

在一旋转系统中,“静不平衡”是一偏心(或不平衡)质量的效应,这种不平衡质量可用准静力学的方法来检测,即利用不平衡质量的重量来显示出不平衡质量的位置。一个对称均匀圆盘上的静不平衡,可以表示为一个向量 S ,它在偏心质量的方向上,从轴线向外指,而大小则等于偏心质量和它的半径向量长度的乘积,如图 5.47 所示。当一个系统有若干个这样的偏心质量时,则很简单,总的静不平衡 S_N 就是这些向量的和:

$$S_N = \sum_i S_i = \sum_i m_i r_i \quad (5.118)$$

式中质量 m_i 位于离轴线为 r_i 的位置上。当上式 S_N 等于零时,物体达到静平衡。这一点,只要在合适的位置 r 处加一个“校正质量”就可做到。很明显,一个系统实现静平衡就等效于把这一系统的重心移至它的旋转轴线上。这时,这个系统就由两部分组成:不平衡的圆盘和校正质量。

校正已知的静不平衡可以用图解法和数值计算法来完成。采用图解法是将各个不平衡向量 S_i 合成,以得到 S_N 。而采用数值计算法则是对各向量 S_i 的分量取和,产生两个标量方程:

$$S_x = \sum_i m_i x_i \quad (5.119)$$

$$S_y = \sum_i m_i y_i \quad (5.120)$$

式中 $x_i = r_i \cos \theta_i, y_i = r_i \sin \theta_i$ 。因此,

$$S_N = S_x + iS_y, |S_N| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \quad (5.121) \quad \textcircled{2}$$

^① 柔性转子的平衡尽管在现代机械中也很重要,但已超出本书的范围。

^② 原文为 $|S_N| = S_x^2 + S_y^2$ 。——译者注

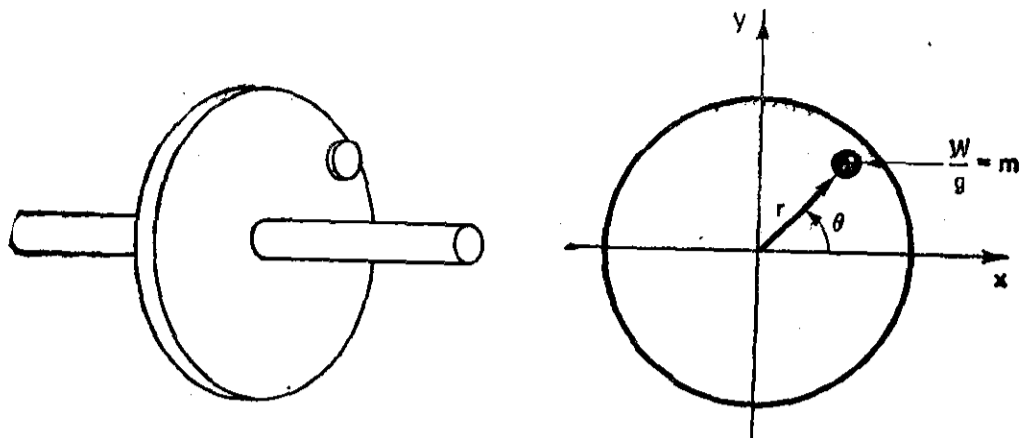


图 5.47 不平衡的定义: $S = mr$

而且

$$\theta_n = \arg S_N \quad (5.122)$$

我们将用例 5.10 来说明这个原理。

例 5.10

一直径为 10 in. 的圆盘有三处不平衡, 如图 5.48 所示。(a) 分别应用数值计算法和图解法来求静不平衡; (b) 用一个 3 oz 的重量来校正该不平衡; (c) 在 $r = 10$ in. 处加一重物来校正不平衡。

解: (a) 为了能随时观察所有变量的情况, 我们列了下面这个表, 将所有的分量都分开列出。

不平衡	W_i (oz)	r_i (in.)	θ_i (度)	x_i (in.)	$W_i x_i$ (in.·oz)	y_i (in.)	$W_i y_i$ (in.·oz)
1	3	4	0	4.00	12	0	0
2	1	7	135	-4.95	-4.95	4.95	4.95
3	4	2	-60	1.00	4.00	-1.73	-6.93
合计					11.05		-1.98

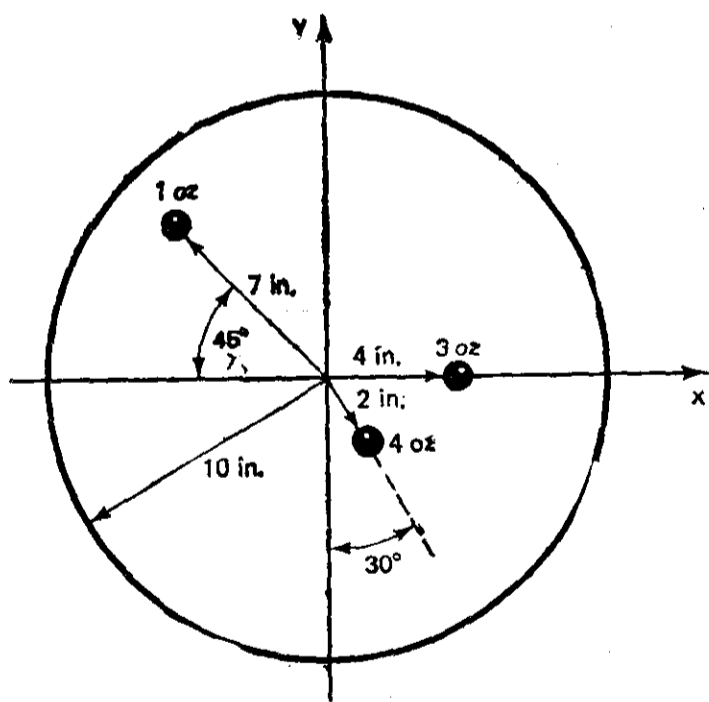


图 5.48

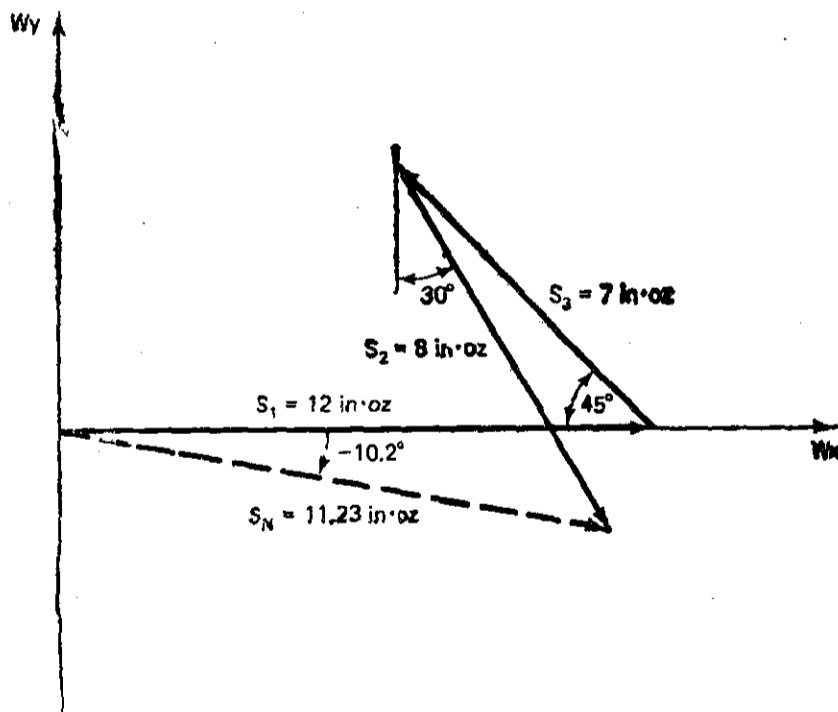


图 5.49 图解法求例 5.10 中总不平衡量 S_N 的图示

我们得到

$$|S_N| = |\sqrt{(11.05)^2 + (1.98)^2}| = 11.23 \text{ in}\cdot\text{oz}$$

$$\theta_N = \arg S_N = -10.2^\circ$$

$$S_N = (11.05 - i 1.98) \text{ in}\cdot\text{oz}$$

图 5.49 表示求总的静不平衡量的图解法。

$$\left. \begin{aligned} \text{(b)} \quad r &= \frac{T_N}{W} = \frac{11.23 \text{ in}\cdot\text{oz}}{3.0 \text{ oz}} = 3.74 \text{ in.} \\ \text{(c)} \quad W &= \frac{T_N}{r} = \frac{11.23 \text{ in}\cdot\text{oz}}{10 \text{ in.}} = 1.12 \text{ oz} \end{aligned} \right\} \theta_N = \arg(-S_N) = \arg(-11.05 + i 1.98) = 169.8^\circ$$

(b)和(c)部分的结果表示在图 5.50 和图 5.51 中。

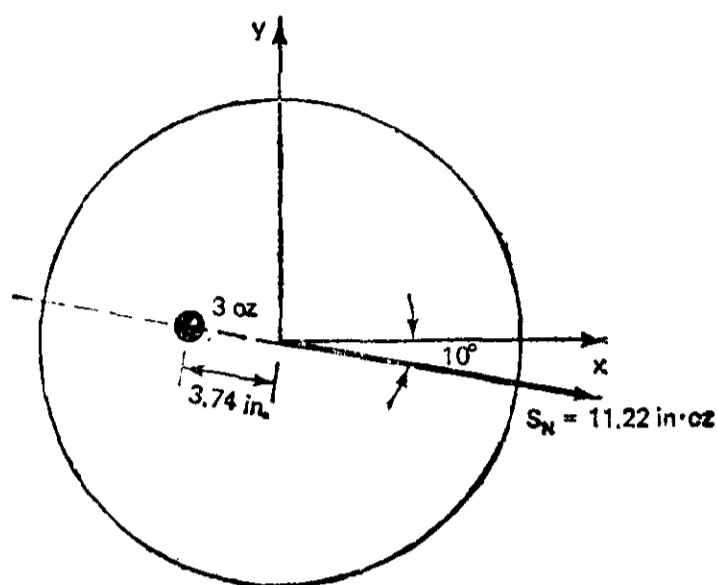


图 5.50 例 5.10(b)的解:表示配重为 3 oz 的平衡块 $-S_N$

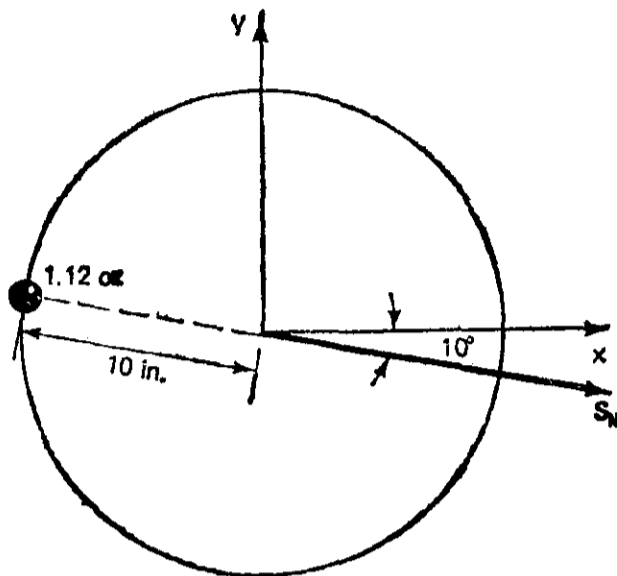


图 5.51 例 5.10(c)的解:表示在半径为 10 in. 处的平衡块 $-S_N$

动不平衡

一个转子即使是经过了静平衡的,当它绕其轴线转动时,也有可能出现不希望有的振动。转动物体的“动不平衡”是一个力矩,其轴线垂直于系统的旋转轴。它是由旋转中产生的惯性力引起的。图 5.22 表示一个最简单的动不平衡的例子。所示圆盘是经静平衡了的,但当它以角速度

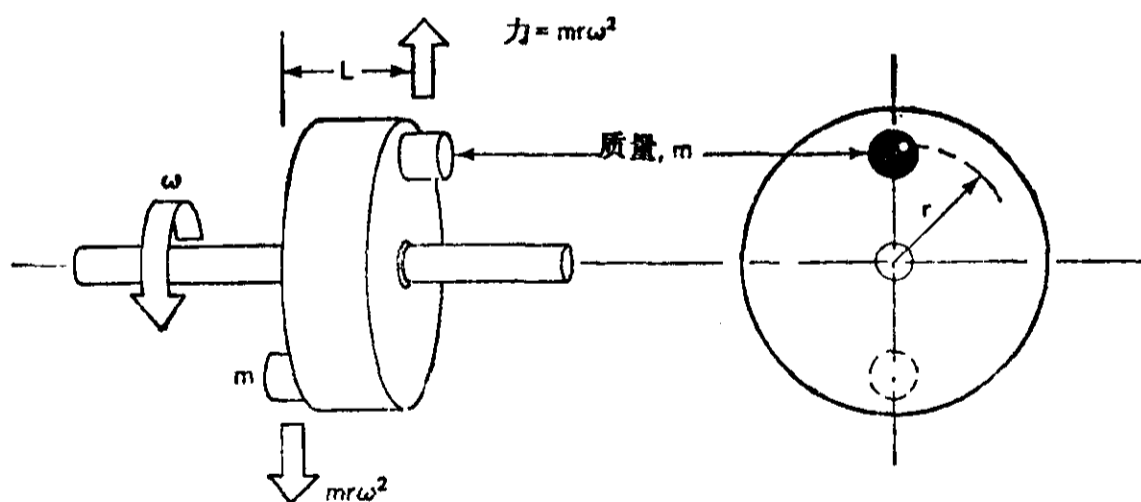


图 5.22 在静平衡转子中的动不平衡

ω 转动时,会受到一个横向力矩 $mr\omega^2 L$ 。当这个力矩为零时,转子就达到了动平衡。经过动平衡的转子也是静平衡的,但是,反过来说一般就不成立。实际上,当转子的长度与直径相比足够大时,就应该进行动平衡,而对于薄圆盘来说,静平衡就足够了。至于所要求的平衡精度则取决于实际应用的性质,如速度、公差、材料强度等等。

一个给定的刚性转子中所有偏心质量的动不平衡效应可以分解成在任意一对垂直于转动轴线的平面上的简单的静不平衡。因为“校正重量”是加在转子的这两个平面内的适当位置上以消

除动不平衡,所以这两个平面叫作“校正平面”。

考虑图 5.53 中的圆柱体,其两个端面 A 和 B 已选作校正平面。转子内垂直于转动轴的任意平面 i 上可能包含有静不平衡 S_i 。当圆柱体旋转时,这个不平衡会引起离心力 F_i :

$$F_i = S_i \omega^2$$

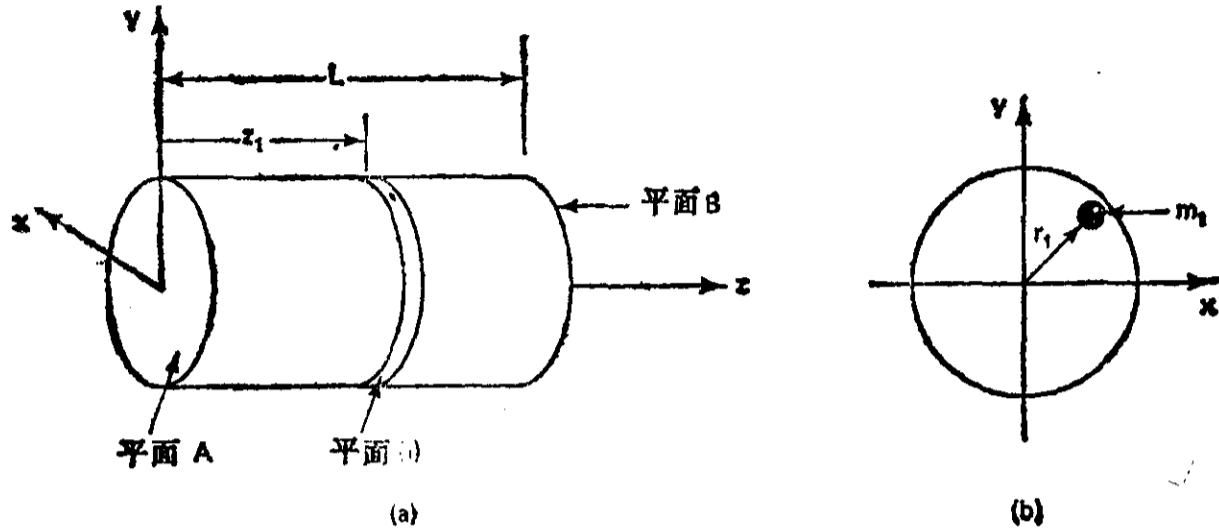


图 5.53 动不平衡 (a) 转子; (b) 平面(i)中的不平衡。可以通过在平面 A 和 B 中加配重来达到动平衡

式中 ω 是圆柱体的角速度。现在我们可以用由各个力 F_i 所引起的相对于平面 A 的中心的合成力矩,来定义平面 B 上的动不平衡转动惯量向量 I_B 。因此,从图 5.53 可得到

$$I_B \omega^2 = \sum_i S_i \omega^2 z_i$$

因为这里讨论的仅是刚性转子,不存在振幅随频率比 ω/ω_n 而变化的挠性变形(ω_n 是转子的挠曲自然频率),因此,可以约去式中的角速度 ω 。同样,在用力 F_i 对于平面 B 的中心的合成力矩来定义 I_A 后,就有

$$I_B = \sum_i S_i z_i$$

$$I_A = \sum_i S_i (L - z_i)$$

不难看出,分别在平面 A 和 B 上加一个静力校正量,使其动力转动惯量向量分别与 I_B 和 I_A 大小相等、方向相反。以这样的配置方式,刚体转子就可达到动平衡。

例 5.11

一个 10 in. 长的转子在平面(1)和(2)中有已知不平衡,如图 5.54 所示。校正平面为 A 和 B。(a)分别用数值计算法和图解法求校正平面内的动不平衡; (b)分别在离转动轴线 6 in. 处放置质量来对不平衡进行校正。

解: (a) 为了方便,列表如下:

	平面	$m_i(\text{oz})$	$r_i(\text{in.})$	$z_i(\text{in.})$	$m_i r_i z_i (\text{in}^2 \cdot \text{oz})$	$\theta_i(\text{度})$	$m_i x_i z_i (\text{in}^2 \cdot \text{oz})$	$m_i y_i z_i (\text{in}^2 \cdot \text{oz})$
I_B	1	5	4	5	100	30	86.6	50
	2	2	6	8	96	135	-67.9	67.9
	合计						18.7	117.9
I_A	1	5	4	5	100	30	86.6	50
	2	2	6	2	24	135	-17.0	17.0
	合计						69.6	67.0

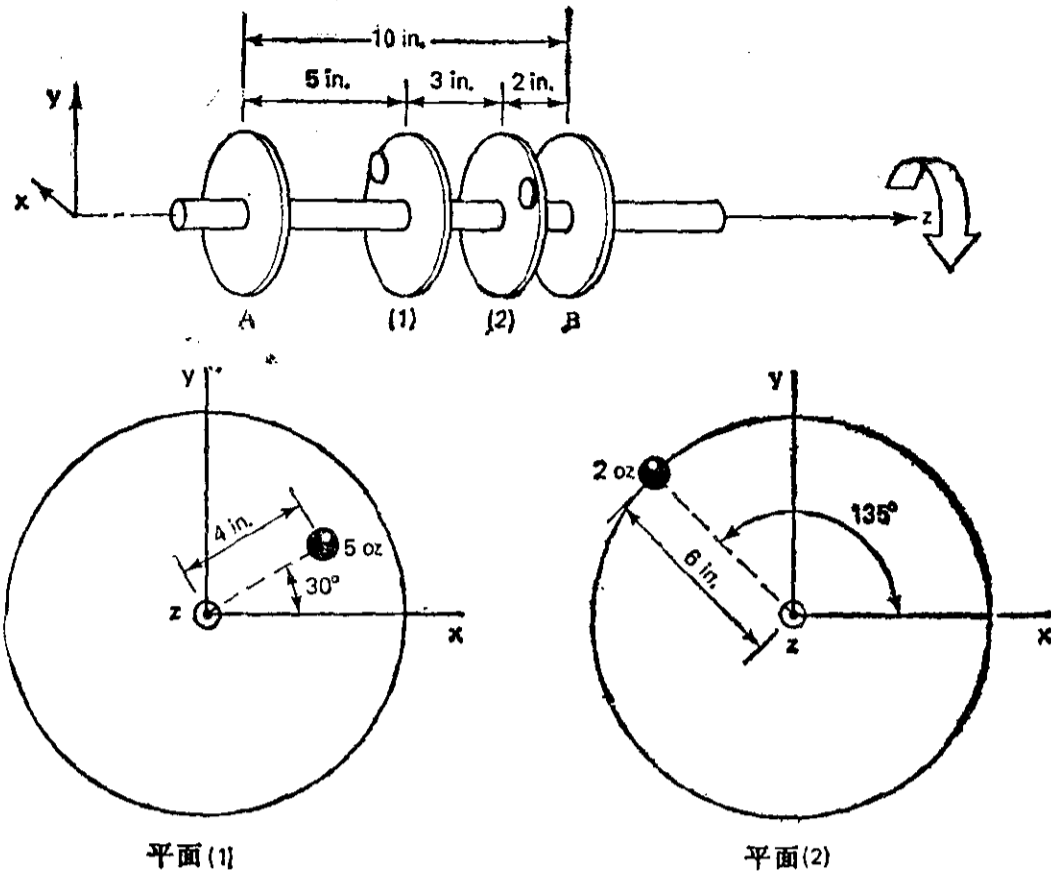


图 5.54 例 5.11 中有已知动不平衡的刚性转子。校正配重要放在 A 和 B 平面上

从表的最后两列, 我们得到:

$$I_B = \sqrt{(18.7)^2 + (117.9)^2} = 119.4 \text{ in}^2 \cdot \text{oz}$$

$$\theta_B = \arg(18.7 + i 117.9) = 81.0^\circ$$

和

$$I_A = \sqrt{(69.6)^2 + (67.0)^2} = 96.6 \text{ in}^2 \cdot \text{oz}$$

$$\theta_A = \arg(69.6 + i 67) = 43.9^\circ$$

得出同样结果的图解法画在图 5.55 中。

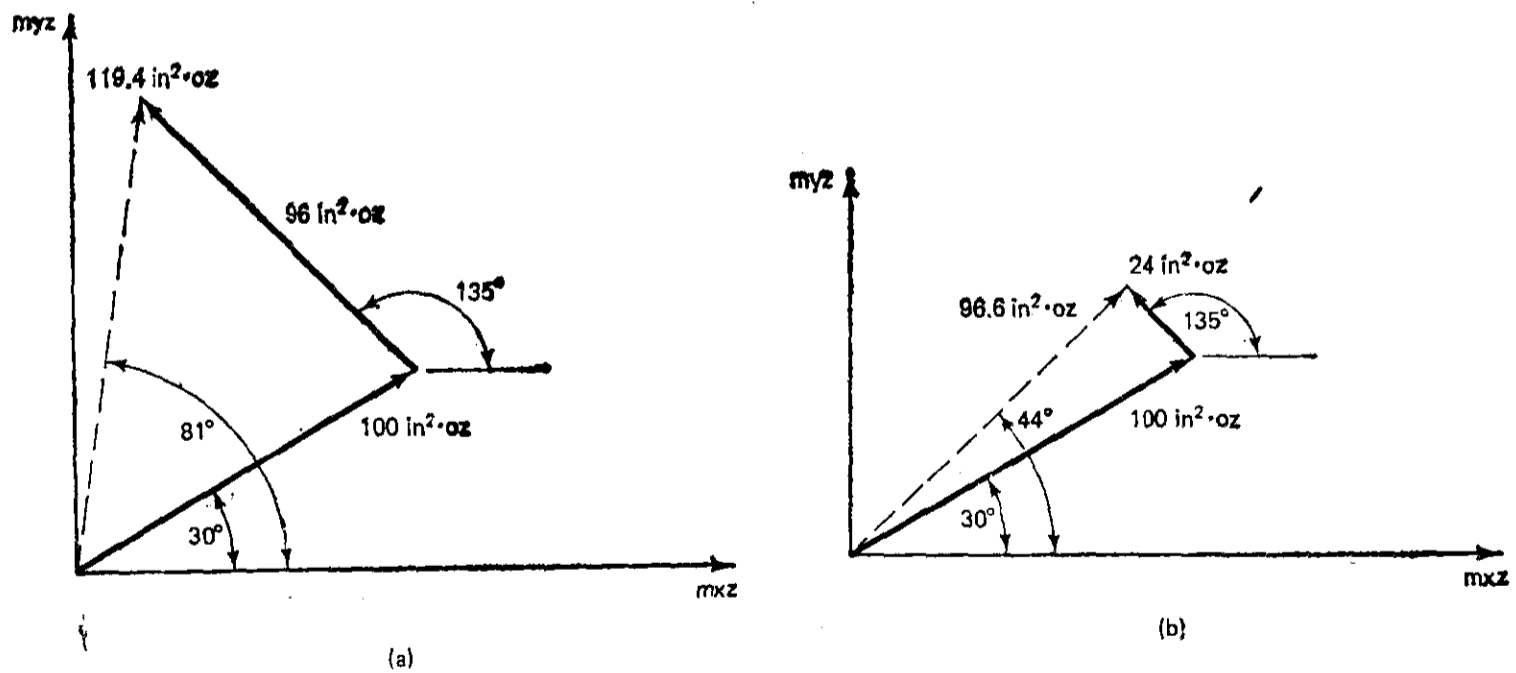


图 5.55 例 5.11 的图解法: (a) 平面 A 中的等效不平衡; (b) 平面 B 中的等效不平衡。

(b) 校正质量

$$m_B = \frac{I_B}{lr} = \frac{119.4}{10 \times 6} = 1.99 \text{ (oz)}, \theta_{MB} = \theta_B + 180^\circ = 261^\circ;$$

$$m_A = \frac{I_A}{I_r} = \frac{96.6}{10 \times 6} = 1.61 \text{ (oz)}, \theta_{MA} = \theta_A + 180^\circ = 223.9^\circ$$

这些质量在平面 A 和 B 中放在等效不平衡的相反位置(见图 5.56)。

读者应该验证, m_A 也可以用静平衡 $m_1 r_1$ 、 $m_2 r_2$ 和 $m_B r_B$ 的方法来求, 其中 $r_B = 6 \text{ in.}$, $\theta_{MB} = 261^\circ$, 如上面求出的那样。

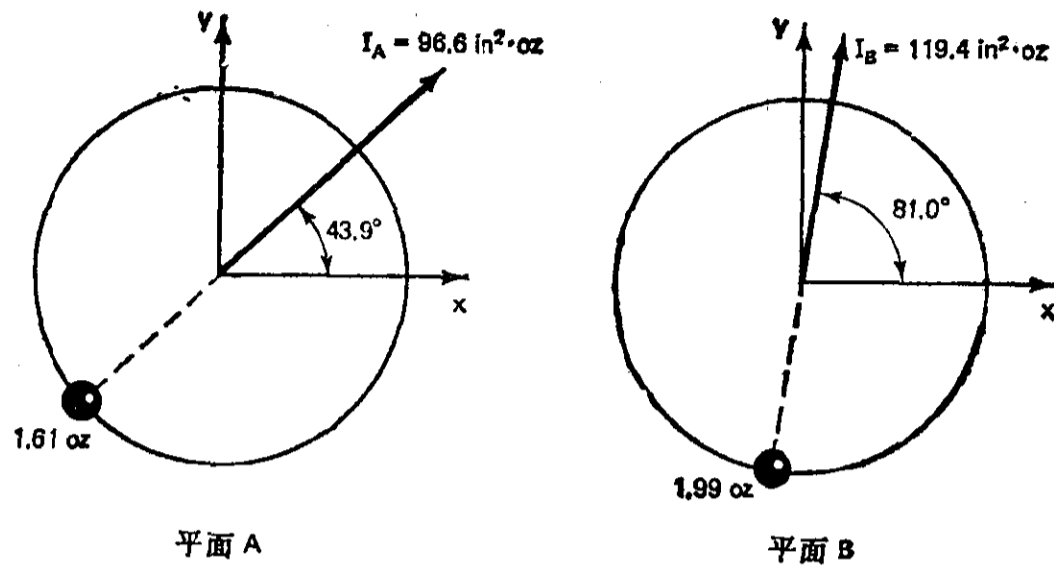


图 5.56 例 5.11 的解

5.11 机构的力和力矩平衡简介^①

如果不注意机构与它的安装底架之间的相互作用, 机构设计就不能是完全的。伯克夫(Berkof)和洛温(Lowen)[16-21, 172-175]对这个问题有过很深的研究。现已发展出相互补充的两种方法, 可用来消除传到机架上的震动力和震动力矩。

力的平衡是通过建立一套线性无关的、随时间变化的向量的方法来实现的。这些向量这样地规定质量分布以及质心位置, 以使整个系统的质心保持不变。因此, 从经过力平衡的机构传递到机架上各力的向量和为零。

但是, 力的平衡并不意味着传递到机架上的震动力矩被消除了。要达到完全平衡, 还必须对系统列出动量矩方程式。当动量矩的向量和为零时, 震动力矩就被消除。这可以靠添加惯性配重和约束构件形状的方法来实现(当这些变化对于给定某一具体应用的空间条件来说是可能的时候)。

节 5.11 到 5.18 的目的是:

- 总结伯克夫和洛温(及其他人)对四杆和六杆机构所作的研究;
- 讨论由为达到平衡目的所需的增加质量和(或)质量重新分布所引起的对扭矩的影响;
- 简要总结当设计条件不可能使平衡完全满足时, 实现最优化的技术;
- 介绍其它适用于进行力和质量平衡的方法;
- 讨论配重形状对扭矩要求的影响;
- 提供用来计算任何四杆机构力和力矩平衡参数的计算机程序框图。

^① 论述机构平衡的以下各节(5.11 至 5.18)是根据黛安娜·雷考(Dianne Rekow)的草稿写成的。

5.12 力的平衡

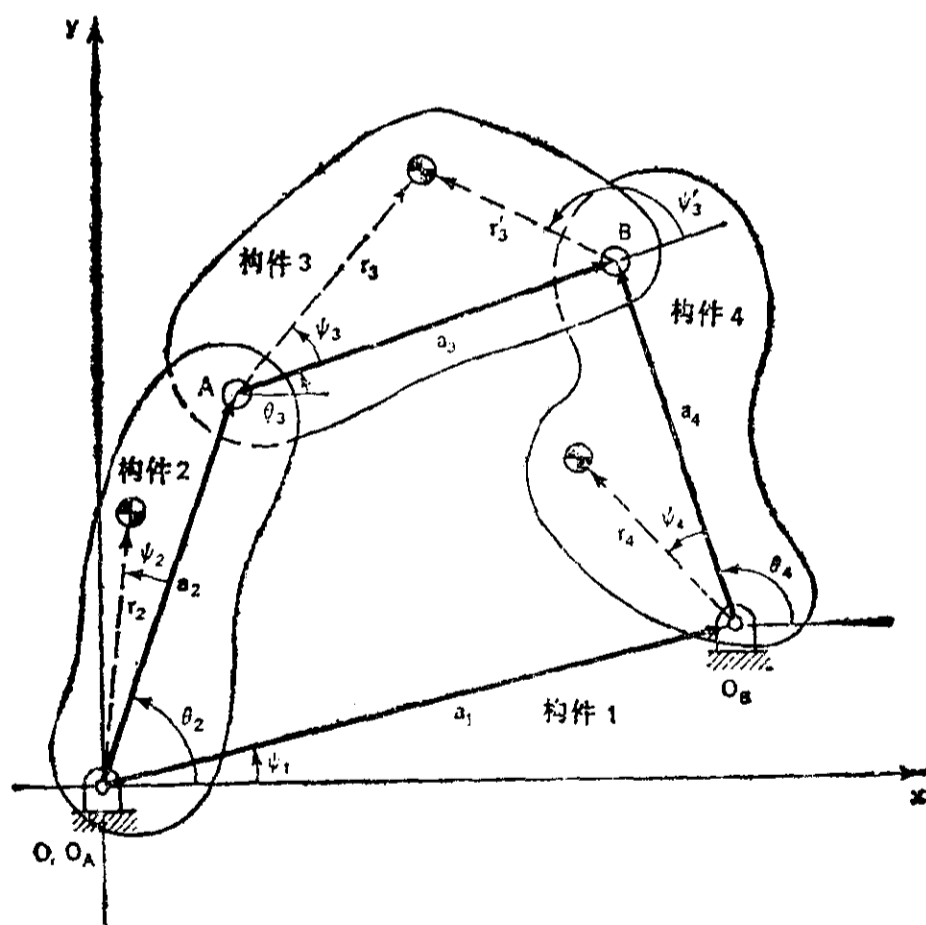
当一个机构运行时, 它会把力向其周围传递。这个机构如果没有经过平衡, 则这些力会引起振动、噪音、磨损, 造成疲劳问题。当机构实现完全力平衡时, 作用在机座上的力的向量和为零。这是靠使整个机构的质心保持不变来实现的。可以获得这种结果的一个方法是由伯克夫和洛温提出的线性无关向量法。这种方法将构件质量重新分布从而使质心运动方程中依时间而变的项为零。如果我们能够得出一个位置方程使依时间而变化的向量是线性无关的, 那么实现这一点就成为可能的了。

四杆机构的力平衡^[20]

图 5.57 是一个由质量任意分布的三个运动构件组成的四杆机构 $O_A A B O_B$ 。考虑一个与机构系统相联系的坐标系 xOy , 其原点 O 在 O_A 。设 S 是运动构件组成的系统的质心, r_s 定义了 S 相对于原点 O 的位置。如果系统总的运动质量由下式决定:

$$M = \sum_{i=2}^4 m_i \quad (5.123)$$

式中 m_i 是第 i 个构件的质量, 则



r_i —— 从构件向量 a_i 的尾端至第 i 个构件质心的向量;

ψ_i —— $\text{arg} r_i - \text{arg} a_i$, 常量;

ψ_1 —— $\text{arg} a_1$, 常量;

θ_i —— 变量, $\text{arg} a_i$;

a_i —— 构件 i 的向量;

图 5.57 构件质量任意分布的四杆机构

$$Mr_S = \sum_{i=2}^4 m_i r_i \quad (5.124)$$

r_i 是从第 i 个构件向量 a_i 的尾端指向该构件质心的向量。从图 5.57 可知,

$$r_2 = r_2 e^{i(\theta_2 + \psi_2)} \quad (5.125)$$

$$r_3 = r_3 e^{i(\theta_3 + \psi_3)} + a_2 e^{i\theta_2} \quad (5.126)$$

$$r_4 = r_4 e^{i(\theta_4 + \psi_4)} + a_1 e^{i\psi_1} \quad (5.127)$$

将式(5.125)至(5.127)代入式(5.124),并加整理后得到

$$Mr_S = m_2 r_2 e^{i(\theta_2 + \psi_2)} + m_3 (r_3 e^{i(\theta_3 + \psi_3)} + a_2 e^{i\theta_2}) + m_4 (r_4 e^{i(\theta_4 + \psi_4)} + a_1 e^{i\psi_1}) \quad (5.128)$$

从环路封闭方程又可知

$$a_2 e^{i\theta_2} + a_3 e^{i\theta_3} - a_4 e^{i\theta_4} - a_1 e^{i\psi_1} = 0 \quad (5.129)$$

式(5.129)意味着式(5.128)中随时间变化的项不是线性无关的。然而,如果从方程(5.129)中解出一个随时间变化的单位向量,然后代入式(5.128),那么就可以得到一组线性无关的、随时间变化的项。倘若从方程(5.129)中解出 $e^{i\theta_3}$, 得到

$$e^{i\theta_3} = \frac{1}{a_3} (a_4 e^{i\theta_4} + a_1 e^{i\psi_1} - a_2 e^{i\theta_2}) \quad (5.130)$$

将式(5.130)代入式(5.128),得到

$$Mr_S = \left[m_2 r_2 e^{i\psi_2} + m_3 a_2 - m_3 r_3 \frac{a_2}{a_3} e^{i\psi_3} \right] e^{i\theta_2} + \left[m_4 r_4 e^{i\psi_4} + \frac{a_4}{a_3} m_3 r_3 e^{i\psi_3} \right] e^{i\theta_4} + \left[m_4 a_1 + m_3 r_3 \frac{a_1}{a_3} e^{i\psi_3} \right] e^{i\psi_1} \quad (5.131)$$

上式可以写成如下形式

$$Mr_S = A e^{i\theta_2} + B e^{i\theta_4} + C \quad (5.132)$$

如果随时间变化的项等于零,即 $A = B = 0$, 那么, Mr_S 就是一个常量,这就符合了力完全平衡的要求条件。当 $A = 0$ 时,即

$$m_2 r_2 e^{i\psi_2} + m_3 a_2 - m_3 r_3 \frac{a_2}{a_3} e^{i\psi_3} = 0 \quad (5.133)$$

从图 5.57 我们看到

$$r_3 e^{i\psi_3} = a_3 + r'_3 e^{i\psi'_3} \quad (5.134)$$

联立式(5.133)和(5.134),得到

$$m_2 r_2 e^{i\psi_2} = m_3 r'_3 \frac{a_2}{a_3} e^{i\psi'_3} \quad (5.135)$$

若要这个式子成立,只有当下面的两个等式成立:

$$m_2 r_2 = m_3 r'_3 \frac{a_2}{a_3} \quad \text{和} \quad \psi_2 = \psi'_3 \quad (5.136)$$

当 $B=0$ 时, 我们得到

$$m_4 r_4 = m_3 r_3 \frac{a_4}{a_3} \quad \text{和} \quad \psi_4 = \psi_3 + \pi \quad (5.137)$$

当这些条件[即式(5.136)和(5.137)]都满足时, 确定运动构件重心位置的向量可由下式表达[参看式(5.132)]:

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{M} \left(m_4 a_1 + m_3 r_3 \frac{a_1}{a_3} e^{i\psi_3} \right) e^{i\psi_1} = \frac{1}{M} \mathbf{C} \quad (5.138)$$

这是一个常量。

由于整个机构的质心保持不动, 因此, 不论输入速度如何变化, 系统都满足力的完全平衡。从应用的角度看, 式(5.136)和(5.137)意味着只要机构的一个构件(在这次推导过程中为构件3)的质量和质心位置一经指定, 就可以将其余构件的质量分布安排得使之达到力的完全平衡^[19]。而且, 由于随时间变化的项的系数为零, 因此, 应用这种方法可以不受机构可动性和其它运动约束的限制。

在构件都不能改变的情况下, 可以通过在任意两个运动构件上添加两个配重的方法来得到相同的结果。通常说来, 配重选择在输入、输出构件上比较方便。对于选择配重的位置和质量, 有两个约束条件:

约束条件 1:

$$m_i r_i e^{i\psi_i} = m_i^{\circ} r_i^{\circ} e^{i\psi_i^{\circ}} + m_i^* r_i^* e^{i\psi_i^*} \quad (5.139)$$

式中: m_i, r_i, ψ_i —— 从式(5.136)和(5.137)得到的参数;

$m_i^{\circ}, r_i^{\circ}, \psi_i^{\circ}$ —— 不平衡机构的参数;

m_i^*, r_i^*, ψ_i^* —— 配重的参数。

约束条件 2:

$$m_i = m_i^{\circ} + m_i^* \quad (5.140)$$

这个约束条件只是当两个连架杆(2和4)都被选来安装配重时才需要加以考虑。从方程(5.139)中解出 $m_i^* r_i^*$, 得到

$$m_i^* r_i^* = [(m_i r_i)^2 + (m_i^{\circ} r_i^{\circ})^2 - 2m_i r_i m_i^{\circ} r_i^{\circ} \cos(\psi_i - \psi_i^{\circ})]^{1/2} \quad (5.141)$$

而且 $\psi_i^* = \arg\{(m_i r_i \cos \psi_i - m_i^{\circ} r_i^{\circ} \cos \psi_i^{\circ}) + i(m_i r_i \sin \psi_i - m_i^{\circ} r_i^{\circ} \sin \psi_i^{\circ})\} \quad (5.142)$

例 5.12

考虑一个四杆机构的例子(图 5.58)。构件的尺寸和质量在表 5.9 中给出。这里假设构件可以改变, 而且选择构件 2 和 4 来改变。同时假设只准备改变质量, 而使质心的距离不变。从式(5.136)和(5.137)可知 $\psi_2 = \psi_3', \psi_4 = \psi_3 + \pi$ 。由于我们假设 r_2° 将保持不变, 所以为了求出所需要的平衡质量, 式(5.136)变为:

$$(m_2^{\circ} + x_2) r_2^{\circ} = m_3^{\circ} r_3^{\circ} \left(\frac{a_2}{a_3} \right)$$

而且

$$\psi_2 = \psi_3^{\circ} = 163.3^{\circ}$$

上式给出 $x_2 = 0.178 \text{ lbm}$ 。这样为了平衡, 构件 2 的质心必须移到 $\psi_2 = 163.3^{\circ}$, 而且增加到 0.280 lbm。这是通过改变构件而不是添加配重来实现的。

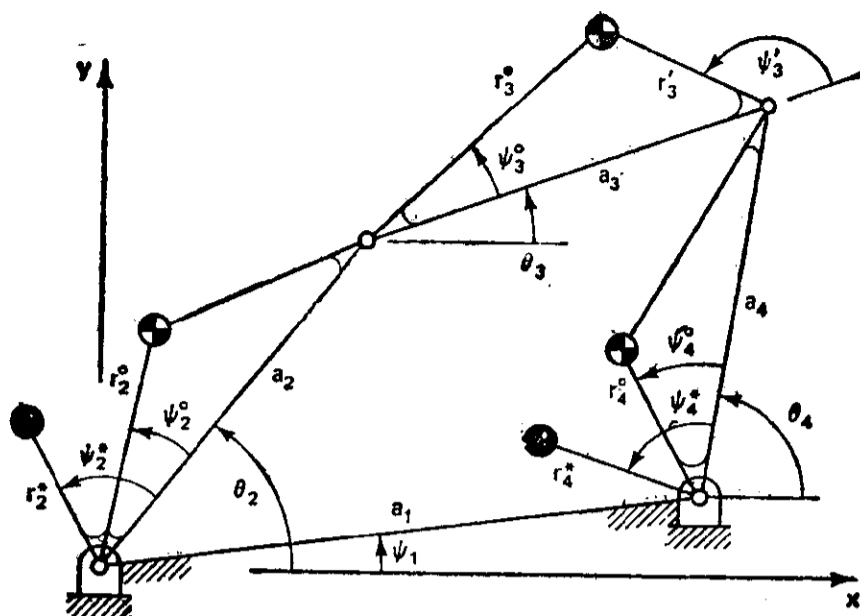


图 5.58 未经平衡的四杆机构位形(未按比例画),图中还标出平衡配重的位置 r_i^* (例 5.12)

表 5.9 未平衡的四杆机构的参数

参 数	构件 1	构件 2	构件 3	构件 4
a (in.)	5.500	2.000	6.000	3.000
r° (in.)	—	1.000	3.190	1.500
ψ° (度)	0	0	16.0	0
r'° (in.)	—	—	3.063	—
ψ'° (度)	—	—	163.3	—
m° (lbm)	—	0.102	0.274	0.120

式(5.137)则变为:

$$(m_4^\circ + x_4) r_4^\circ = m_3^\circ r_3^\circ \left(\frac{a_4}{a_3} \right) \quad \text{和} \quad \psi_4 = \psi_3 + \pi = 196.0^\circ$$

上式给出 $x_4 = 0.171 \text{ lbm}$ 。因此我们需要改变构件 4, 使其质心移到 196° , 而且使其质量增加到 0.291 lbm (而不是加上配重)。

例 5.13

考虑和上例完全相同的四杆机构, 但是现在假设没有一构件可以改变。利用式(5.139)到(5.142)可以确定用来平衡的配重参数。假设我们选择在构件 2 和构件 4 上添加配重, 则与上例相同, 为了达到平衡, 必须 $\psi_2 = \psi_3'$ 而且 $\psi_4 = \psi_3 + \pi$ 。然后, 从式(5.141)有:

$$m_2^* r_2^* = [(m_1 r_1)^2 + (m_3^\circ r_3^\circ)^2 - 2m_1 r_1 m_3^\circ r_3^\circ \cos(\psi_1 - \psi_3^\circ)]^{1/2}$$

但是从式(5.136)我们知道

$$m_2 r_2 = m_3^\circ r_3^\circ \left(\frac{a_2}{a_3} \right) \quad \text{而且} \quad \psi_2 = \psi_3^\circ = 163.3^\circ$$

则式(5.141)变为

$$m_2^* r_2^* = \left[\left(m_3^\circ r_3^\circ \frac{a_2}{a_3} \right)^2 + (m_1^\circ r_1^\circ)^2 - 2 \left(m_3^\circ r_3^\circ \frac{a_2}{a_3} \right) (m_1^\circ r_1^\circ) \cos(\psi_3^\circ - \psi_1^\circ) \right]^{1/2} = 0.379$$

从式(5.142)得到

$$\psi_2^* = \arg \left\{ \left(m_3^\circ r_3^\circ \frac{a_2}{a_3} \cos \psi_3^\circ - m_1^\circ r_1^\circ \cos \psi_1^\circ \right) \right\}$$

$$+i \left(m_3^* r_3^* \frac{a_2}{a_3} \sin \psi_3^* - m_2^* r_2^* \sin \psi_2^* \right)$$

上式得出 $\psi_2^* = 154.2^\circ$

只要 m_2^* 和 r_2^* 的积等于 $0.379 \text{ lbm} \cdot \text{in.}$, 且该质量的质心落在 $\psi_2^* = 154.2^\circ$ 上, 则任何一组平衡配重的质量 (m_2^*) 和其质心的距离 (r_2^*) 都是可用的。我们可以用式 (5.137) 对构件 4 做同样的计算以确定 m_4 、 r_4 和 ψ_4 。如果 $\psi_4 = \psi_3 + \pi$, 则 $\psi_4^* = 168.3^\circ$, 且 $m_4^* r_4^* = 0.595$ 。

因为构件 2 和构件 4 的平衡配重质量只是在质量-距离的乘积中出现, 而从不单独出现, 所以第二个约束条件 ($m_4 = m_2^* + m_4^*$) 并不必要。因此, 设计师可用的解有非常广的范围^①。图 5.59 示意地表示了本例的一个解。(未按比例)。

当要把配重加在连杆和另一其它构件上时, 必须首先用式 (5.137) 来求 $m_3 r_3$ 和 ψ_3 。为了求 r_3 和 ψ_3 , m_3 和 r_3 中必须有一个任意选定其数值。假设构件 3 和构件 4 要被改变。于是, 一旦 m_3 或 r_3 的数值选定后, 就可以从式 (5.136) 计算 m_2 、 r_2 和 ψ_2 。而 $m_3^* r_3^*$ 和 ψ_3^* 可以象前面所讲的那样来求得。对于这种情况, 因为 m_3 或 r_3 是选定的, 所以只有构件 3 要满足质量约束条件。

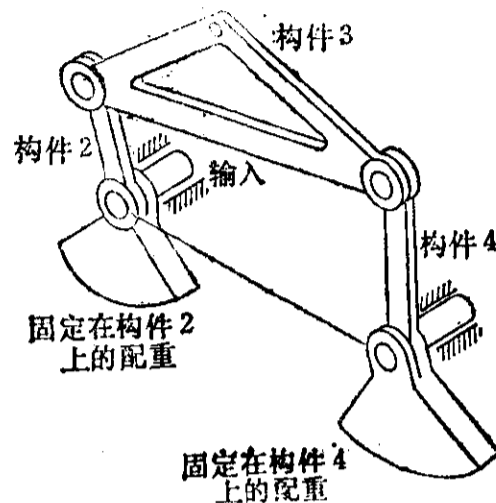


图 5.59 四杆机构的配重平衡

虽然这种平衡法确能保证作用在机座上的各个动态力的向量和始终为零, 但是, 作用在支承上的各个反作用力并不为零, 它们随时间而变化。因此, 每个支承都受到一个周期性的震动力作用。实际上, 在这样平衡后的机构中, 由于给机构加上了配重, 这些力的大小可能比未平衡时更大些。通常说来, 这些反作用力把非零的、随时间变化的力矩传给了机座。这就是为什么我们后面要讨论力矩平衡的原因。

六杆机构的力平衡^[10,18]

图 5.60 所示是一个构件质量任意分布的广义六杆平面机构。从图中, 我们看到

$$\begin{aligned} r_{s2} &= r_2 e^{i(\theta_2 + \psi_2)} \\ r_{s3} &= r_3 e^{i(\theta_3 + \psi_3)} + a_2 e^{i\theta_2} \\ r_{s4} &= r_4 e^{i(\theta_4 + \psi_4)} + a_1 \\ r_{s5} &= b_2 e^{i(\theta_2 + \alpha_2)} + r_5 e^{i(\theta_5 + \psi_5)} \\ r_{s6} &= a_1 + b_4 e^{i\theta_4} + r_6 e^{i(\theta_6 + \psi_6)} \end{aligned} \quad (5.143)$$

式中 α_i 是三副构件 i 两边的夹角。同时, 我们还看到

$$\begin{aligned} r_3 e^{i\psi_3} &= a_3 + r_3' e^{i\psi_3} \\ r_5 e^{i\psi_5} &= a_5 + r_5' e^{i\psi_5} \\ r_6 e^{i\psi_6} &= a_6 + r_6' e^{i\psi_6} \text{ ②} \\ b_4 e^{i\theta_4} &= a_4 e^{i(\theta_4 + \alpha_4)} + b_4' e^{i\alpha_4} \end{aligned} \quad (5.144)$$

① Eastman Kodak 公司的 L. 迪尔斯泰耐 (L. Dearstyne) 指出, 对于六杆机构的例子, 除了三个选来安装配重的连架杆外, 质量约束条件方程式适用于一切情况。因此, 仅有两个连架杆的六杆机构在选择和布置配重方面的灵活性要少一些。

② 原文中缺该式——译者注。

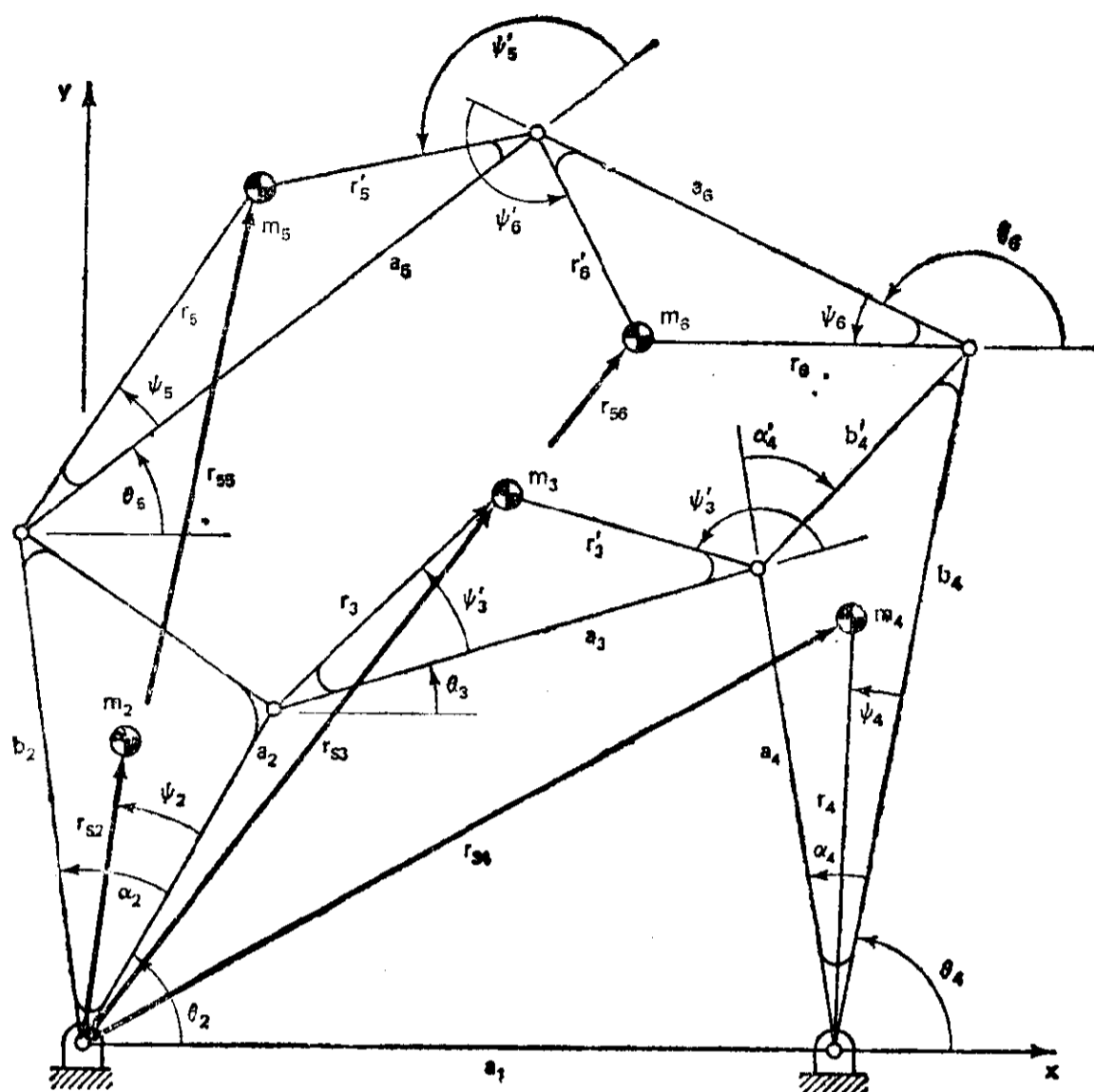


图 5.60 构件质量任意分布的六杆机构

对于图 5.60, 环路封闭方程为

$$a_2 e^{i\theta_2} + a_3 e^{i\theta_3} - a_4 e^{i(\theta_4 + \alpha_4)} - a_1 = 0 \quad (5.145)$$

$$b_2 e^{i(\theta_2 + \alpha_2)} + a_5 e^{i\theta_5} - a_6 e^{i\theta_6} - b_4 e^{i\theta_4} - a_1 = 0 \quad (5.146)$$

因为机构中有五个运动杆, 所以在推导中可以消去 θ_4 项中的两个 (θ_3 和 θ_5)。根据与为四杆机构推导中用的完全一样的论据, 我们知道只有使系统的质心保持不动, 才能达到力的平衡, 即

$$M r_s = \sum_{i=2}^6 m_i r_{si} \quad (5.147)$$

将式(5.143)和(5.144)代入环路封闭方程(5.145)和(5.146)中, 并从式(5.145)解出 $e^{i\theta_3}$, 从式(5.146)解出 $e^{i\theta_5}$, 合并同类项, 得到:

$$\begin{aligned} M r_s = & \left[m_2 r_2 e^{i\psi_2} - m_3 r'_3 \frac{a_2}{a_3} e^{i\psi_3} - m_5 r'_5 \frac{b_2}{a_5} e^{i(\psi'_5 + \alpha_2)} \right] e^{i\theta_2} \\ & + \left[m_3 r_3 \frac{a_4}{a_3} e^{i(\psi_3 + \alpha_4)} + m_4 r_4 e^{i\psi_4} + m_5 r_5 \frac{b_4}{a_5} e^{i\psi_5} + m_6 b_4 \right] e^{i\theta_4} \\ & + \left[m_5 r_5 \frac{a_6}{a_5} e^{i\psi_5} + m_6 r_6 e^{i\psi_6} \right] e^{i\theta_6} + \left[m_3 r_3 \frac{a_1}{a_3} e^{i\psi_3} + m_5 r_5 \frac{a_1}{a_5} e^{i\psi_5} + m_4 a_1 + m_6 a_1 \right] \end{aligned} \quad (5.148)$$

要使 Mr_s 为常量,就必须使带 $e^{i\alpha_j}$ ($j=2,4,6$) 的随时间变化的项为零。上式中与 $e^{i\theta_j}$ 相乘的三个方括弧内的表达式是彼此独立的。因此,可使它们分别为零:

$$m_2 r_2 e^{i\psi_2} - m_3 r'_3 \frac{a_2}{a_3} e^{i\psi_3} - m_5 r'_5 \frac{b_2}{a_5} e^{i(\psi_3 + \alpha_2)} = 0 \quad (5.149)$$

$$m_3 r_3 \frac{a_4}{a_3} e^{i(\psi_3 + \alpha_4)} + m_4 r_4 e^{i\psi_4} + m_5 r_5 \frac{b_4}{a_5} e^{i\psi_5} + m_6 b_4 = 0 \quad (5.150)$$

$$m_5 r_5 \frac{a_6}{a_5} e^{i\psi_5} + m_6 r_6 e^{i\psi_6} = 0 \quad (5.151)$$

整理后,我们得到六杆平面机构的平衡条件:

$$m_2 \frac{r_2}{a_2} e^{i\psi_2} = m_3 \frac{r'_3}{a_3} e^{i\psi_3} + m_5 \frac{r'_5}{a_5} \frac{b_2}{a_2} e^{i(\alpha_2 + \psi_3)} \quad (5.152)$$

$$m_4 \frac{r_4}{a_4} e^{i\psi_4} = -m_5 \frac{r_5}{a_5} \frac{b_4}{a_4} e^{i\psi_5} - m_3 \frac{r_3}{a_3} e^{i(\psi_3 + \alpha_4)} - m_6 \frac{b_4}{a_4} \quad (5.153)$$

$$m_5 \frac{r_5}{a_5} e^{i\psi_5} = -m_6 \frac{r_6}{a_6} e^{i\psi_6} \quad (5.154)$$

同样,正如四杆机构中的情况一样,有时不可能通过改变构件的形状来使机构平衡。这时,只好改用添加配重的方法。这一情况可用下面的例子来讨论。

例 5.14 六杆机构的平衡^[18]

图 5.61 和图 5.62 分别给出了平衡六杆平面机构的示意图和部件分解图。未平衡机构的已知参数列于表 5.10。对于绝大多数情况说来,用改变构件形状的方法来平衡机构是比较简单明了的。这里,我们仅讨论添加配重的方法。

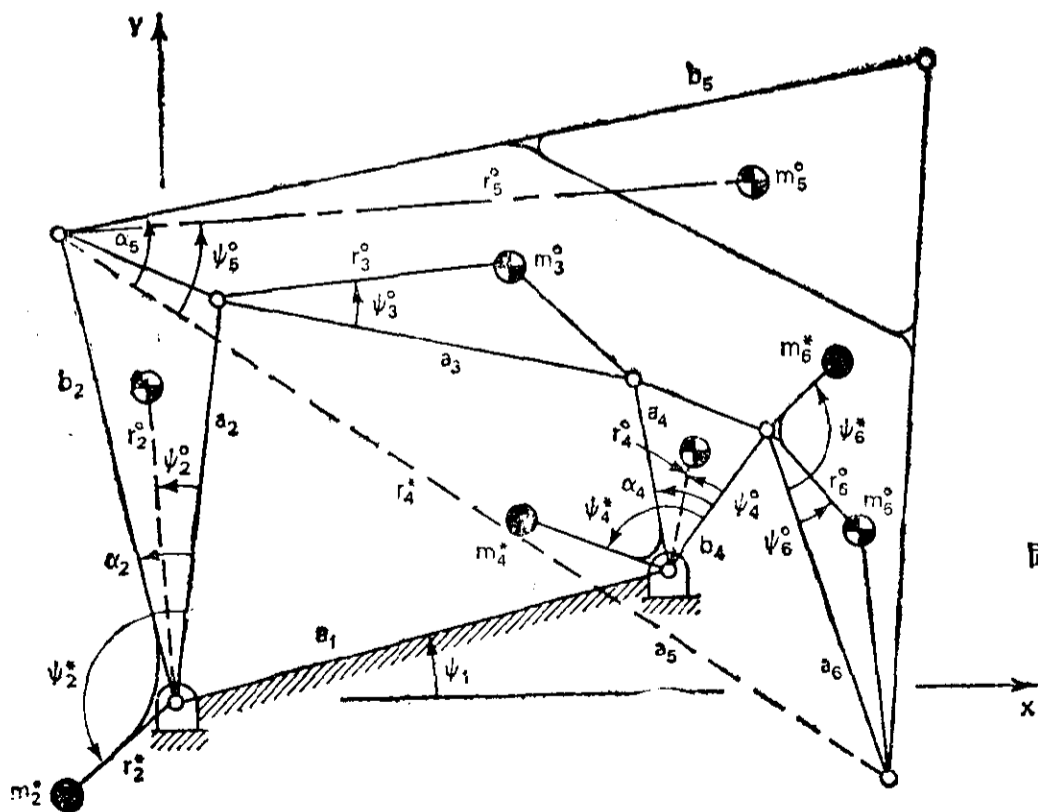


图 5.61 六杆机构用在构件 2、4 和 6 上添加配重的方法进行平衡(例 5.14)

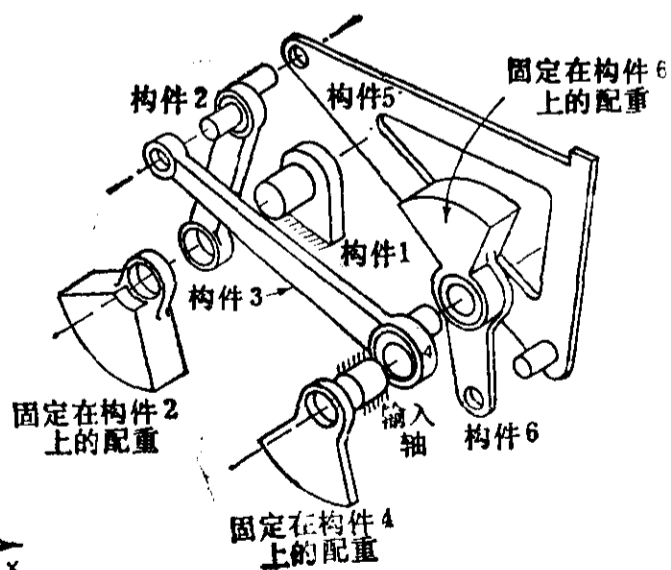


图 5.62 六杆机构的配重平衡(例 5.14)(部件分解图)

假设最可行的办法是在构件 2、4 和 6 上添加配重。由式(5.154) (以标量形式), 我们得到:

$$m_6 r_6 = m_5^0 r_5^0 \frac{a_6}{a_5} \quad \text{及} \quad \psi_6 = \psi_5^0 + \pi \quad (5.155)$$

表 5.10 未平衡的六杆机构的参数(例 5.14, 图 5.61^① 和图 5.62)

构 件	2	3	4	5	6	1
a_i (in.)	2.200	4.750	0.125	5.500	1.750	4.875
b_i (in.)	2.300	—	0.120	6.000	—	—
α_i (度)	6.0	—	16.0	40.4	—	—
r_i^0 (in.)	1.125	2.480	0.122	3.290	0.776	—
ψ_i^0 (度)	3.0	0.0	5.0	19.0	0.0	11.0
r_i^* (in.)	—	2.270	—	2.618	—	—
ψ_i^* (度)	—	180.0	—	155.9	—	—
m_i^0 (lbf) ^②	0.134	0.182	0.167	0.382	0.087	—

从表 5.10 中的数值, 我们可以算出平衡时的 $m_6 r_6$ 和 ψ_6 的总值。为了把计算继续下去, 必须任意选定 m_6 或 r_6 的数值。假定选取 $r_6 = 0.809$ in., 则从式(5.155)可以解出 m_6 。再由几何关系[式(5.144)], 算出 r_6' 和 ψ_6' 。

从式(5.141)和(5.142)可以确定 $m_6^* r_6^*$ 和 ψ_6^* 。

现在从式(5.152)和(5.153), 可以求得 $m_2 r_2$ 、 ψ_2 、 $m_4 r_4$ 和 ψ_4 的平衡后的值。同样, 用式(5.141)和(5.142), 可以确定构件 2 和构件 4 的质量(m_i^*), 到质心的距离(r_i^*), 和配重的角度 ψ_i^* 。表 5.11 列出了已经实现完全力平衡时的机构参数。

表 5.11 平衡后的六杆机构的计算参数(例 5.14, 图 5.61 和 5.62)

构 件	2	4	6
$m_i r_i$ (lbf·in.) ^③	0.630	0.097	0.400 ^a
ψ_i (度)	167.5	187.2	199.0
$m_i^* r_i^*$ (lbf·in.) ^③	0.749	0.118	0.465
ψ_i^* (度)	170.6	186.8	196.3
m_i^* (lbf) ^③	0.607	0.117	0.415
R_i (in.)	2.000	1.675	1.750

注 如果选 $r_6 = 0.809$, 则 $m_6 = 0.494$ lbf^③, $r_6' = 2.529$ in., $\psi_6' = 186.0^\circ$ 。

应该注意, 前面的讨论只适用于在同一平面内的平衡。尽管平面机构的构件确实在平行平面内运动, 但所有构件不是在同一平面内运动, 这将导致平面外的不平衡, 如果构成机构的所有构件都有同一对称平面的话, 那么这种不平衡就可以避免(例如, 参看图 5.75 中的连杆和滑块)。这样的条件是通过比如说四杆摇杆-摇杆机构的双连杆结构来实现的。同时, 所加配重的质心也应该在同一对称平面内。

5.13 震动力矩的平衡

力平衡仅仅使作用在机座上的惯性力的向量和为零, 但是并没有使作用在各个支承上的力

① 原文为图 5.51, 似有误——译者注。

② 原文如此, 似应为 lbm——译者注。

③ 原文如此, 似应为 lbf——译者注。

为零。这些力的合力,通常来说,形成一个随时间而变化的纯力偶:震动力矩。如果震动力矩也能够减小到零,那么机构就达到完全平衡的状态,从而可以避免诸如振动、噪音、磨损和疲劳等不希望出现的问题。当由于力平衡和力矩平衡的要求相矛盾而不可能达到完全平衡时,我们可以用优化技术来使震动力矩减为最小。

平面机构震动力矩的定义^[20]

对于这一研究,有必要复习一下角动量的概念。由普通物理,我们知道动量(M)和动量矩(H)(又称为角动量)的概念。参看图 5.63, 设点质量 m 以速度 v 相对于三维坐标系 $Oxyz$ 运动。那么 m 的动量就定义为:

$$M = mv = m\dot{r} \quad (5.156)$$

由此可见,动量是一个与速度共线的向量。它对原点 O 的矩也是一个向量,定义为

$$H_{/O} = r \times M = r \times m\dot{r} \quad (5.157)$$

上式表明, m 对于点 O 的动量矩是一个既垂直于 r , 又垂直于 \dot{r} 的向量。根据向量积(或向量的叉积)的法则,这三个向量必须按 $r, \dot{r}, H_{/O}$ 的顺序服从右手法则(图 5.63)。注意, \dot{r} 不一定要垂直于 r , 又因为这里我们只讨论点质量, 所以它的角速度 $\dot{\theta} = 0$ 。

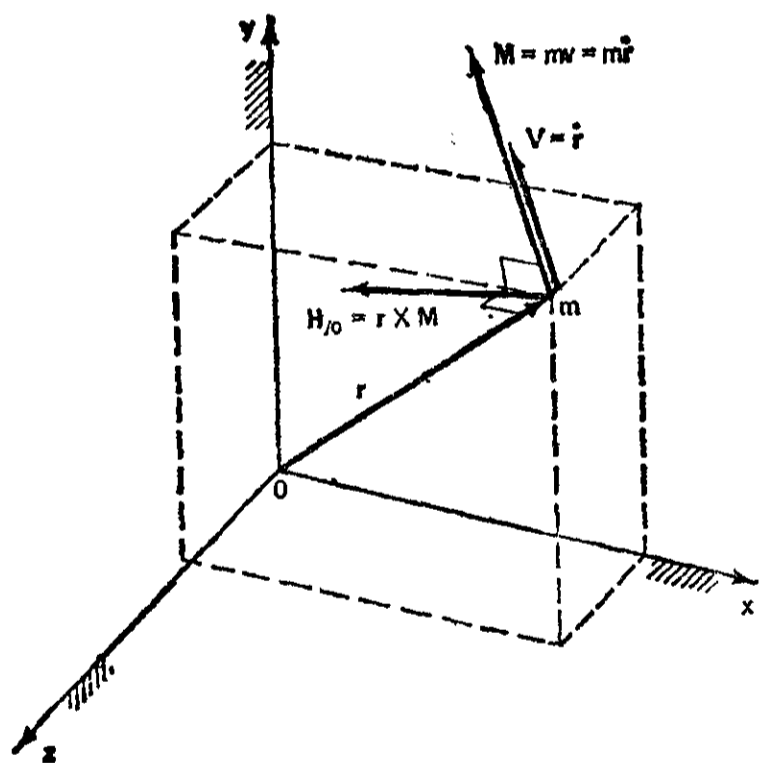


图 5.63 位于向量 r , 且相对于三维坐标系 $Oxyz$ 以速度 $V = \dot{r}$ 运动的点质量 m 的动量 M 和动量矩(或角动量) $H_{/O}$ 的定义

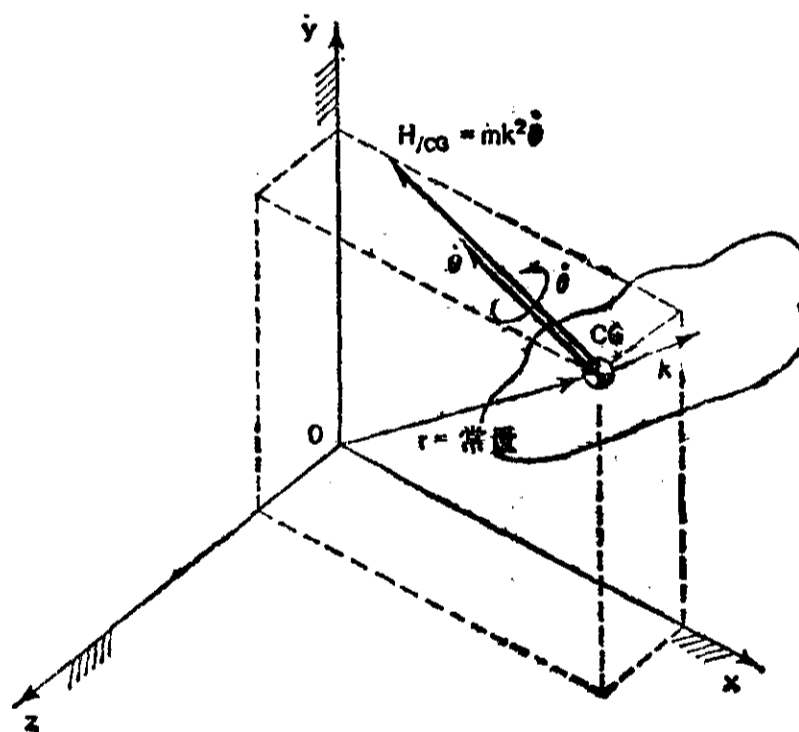


图 5.64 三维空间中的任意物体对其质心(CG)的角动量 $H_{/CG} = mk^2 \dot{\theta}$

现在,我们来研究一个具有质量 m 和回转半径 k 的任意形状的有限物体,以角速度 $\dot{\theta}$ 绕它的质心作纯转动(图 5.64)。注意,这里 r 是常量。该物体对质心(CG)的角动量为:

$$H_{/CG} = mk^2 \dot{\theta} \quad (5.158)$$

式中 k 在垂直于 $\dot{\theta}$ 的回转平面内。

这可用下法证明: 想象质量 m 集中在一个细圆环上, 该圆环在垂直于向量 $\dot{\theta}$ 的平面内, 中心在质心, 半径为 k 。这样, 圆环上的每一点都以圆周速度 $k\dot{\theta}$ 运动, 因而整个圆环的圆周线动量的大小为 $mk\dot{\theta}$ 。它对质心的动量矩(或角动量)的大小就是 $mk^2\dot{\theta}$ 。

现在, 如果这一任意物体既相对于点 O 移动, 又绕其质心转动, 换句话说, 如果 r 不是常量, $\dot{\theta}$ 也不为零, 那么对点 O 的总动量矩为:

$$H_{/O} = r \times m\dot{r} + H_{/CG} = r \times m\dot{r} + mk^2\dot{\theta} \quad (5.159)$$

对于平面机构, 我们知道, “任意物体”, 即构件 i , 都在平面 Oxy 中运动。因此, 所有的角速度向量和角动量向量都平行于 z 轴, 如图 5.65 所示。

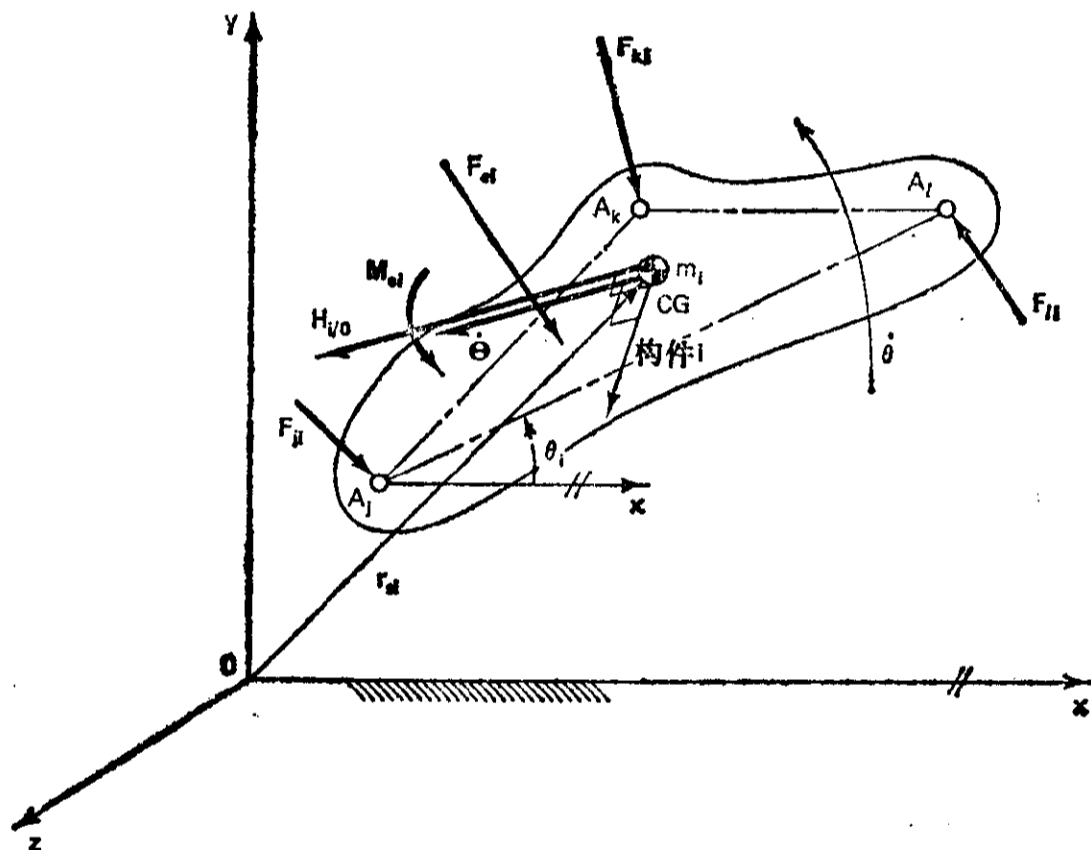


图 5.65 绕 z 轴旋转的任意构件 i 。 $Oxyz$: 右手空间直角坐标系

角动量原理认为, 角动量随时间的变化率等于外作用力矩的总和。回想牛顿第二定律就容易证明这一点。对于一个点质量, 以牛顿第二定律的初始形式给出

$$F\Delta t = \Delta(mv) \quad (5.160)$$

式中 F ——作用在点质量 m 上的外力,

Δt ——力 F 作用的时间,

$\Delta(mv)$ ——产生的质量 m 的动量变化。

现在, 如果 F 是一个作用在质量 m 上的圆周力, 质量 m 在相对于 O 、半径向量为 r 的轨道上, 具有圆周速度 v , 那么力 F 的力矩和动量矩的变化 $\Delta(mv)$ ^① 可以表示如下:

① 原文如此, 似应为 $\Delta H_{/O}$ ——译者注。

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \Delta t = \Delta \mathbf{H}_{/O} \quad \text{或} \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{H}_{/O}}{\Delta t} \quad (5.161)$$

取极限以后为

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_{/O}) \quad (5.162)$$

而任何的外加力矩均由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i/O} = & \mathbf{M}_{ei} + \mathbf{r}_{ei} \times \mathbf{F}_{ei} + \mathbf{M}_{ki} + \mathbf{r}_{ki} \times \mathbf{F}_{ki} \\ & + \mathbf{r}_{gi} \times \mathbf{F}_{gi} + \mathbf{M}_{gi} \end{aligned} \quad (5.163)$$

式中下标 ei 表示外部作用的意思;

gi 表示来自机架的意思;

ki 表示来自另一构件的意思;

其中 \mathbf{r}_{ji} , $j=e, g, k$, 是从原点到力 \mathbf{F}_{ji} 的作用线上的一点的向量。

对于不与机架相连的构件:

$$\mathbf{F}_{gi} = \mathbf{M}_{gi} = 0$$

对于输入和输出构件:

$$\mathbf{M}_{gi} \neq 0$$

这样, 根据角动量原理, 作用在第 i 构件上的力矩 ($\mathbf{M}_{i/O}$) 由下式给出:

$$\mathbf{M}_{i/O} = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_{i/O} \quad (5.164)$$

因此, 对于整个机构,

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{H}_{i/O} = \sum \mathbf{M}_{i/O} \quad (5.165)$$

将式(5.159)、(5.164)和(5.165)代入式(5.163), 并将整个机构取和, 我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^n \{ [\mathbf{M}_{ei} + \mathbf{r}_{ei} \times \mathbf{F}_{ei} + \sum (\mathbf{M}_{ki} + \mathbf{r}_{ki} \times \mathbf{F}_{ki})] \\ & \quad + \mathbf{M}_{gi} \} + \sum_{j=a}^p (\mathbf{r}_{gj} \times \mathbf{F}_{gj}) \\ & = \frac{d}{dt} \sum_{i=2}^n (\mathbf{r}_{si} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_{si} + m_i k_i^2 \dot{\theta}_i) = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O \end{aligned} \quad (5.166)$$

式中从 a 到 p 是指所有的连架杆, 而 $i=2, \dots, n$ 表示所有运动构件的标码。

由于所有相邻构件的轴承反力大小相等而符号相反, 即 $\mathbf{r}_{ki} = -\mathbf{r}_{ik}$, $\mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}$, 以及 $\mathbf{M}_{ki} = -\mathbf{M}_{ik}$, 这些项都可以消掉, 因而式(5.166)化简为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^n [(\mathbf{M}_{ei} + \mathbf{r}_{ei} \times \mathbf{F}_{ei}) + \mathbf{M}_{gi}] + \sum_{j=a}^p \mathbf{r}_{gj} \times \mathbf{F}_{gj} \\ & = \frac{d}{dt} \sum_{i=2}^n (\mathbf{r}_{si} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_{si} + m_i k_i^2 \dot{\theta}_i) \end{aligned} \quad (5.167)$$

对机构来说,有一个传递到机架上的总力矩 $M_{M/G/O}$, 它是对某个原点 O 取的。对于只有一个输入构件而且在输出构件上没有扭矩载荷的情况, 这个力矩由因输入扭矩引起的机座反力矩和由机座轴承力所产生的力矩所组成:

$$\begin{aligned} M_{M/G/O} &= M_{in0} + \sum_{j=a}^p (r_{j0} \times F_{j0}) \\ &= -[M_{0in} + \sum_{j=a}^p (r_{0j} \times F_{0j})] \end{aligned} \quad (5.168)$$

将式(5.167)与(5.168)合并, 得到

$$\sum_{i=2}^n (M_{ei} + r_{ei} \times F_{ei}) - M_{M/G/O} = \frac{d}{dt} H_O \quad (5.169)$$

如果我们考虑的仅仅是惯性力, 则 $\sum (M_{ei} + r_{ei} \times F_{ei}) = 0$ 。对于一些机构交互作用(linkage interactions)的特殊情况, 这一结论也是成立的。于是

$$M_{M/G/O} = -\frac{d}{dt} H_O \quad (5.170)$$

任意四杆机构的角动量^[21]

对于四杆机构, 我们有

$$H_O = \sum_{i=2}^4 (r_{ei} \times m_i \dot{r}_{ei} + m_i k_i^2 \dot{\theta}_i) \quad (5.171)$$

上式的标量形式是:

$$H_O = \sum_{i=2}^4 H_i = \sum_{i=2}^4 m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i + k_i^2 \dot{\theta}_i) \quad (5.172)$$

式中 x_i 和 y_i 是第 i 构件的质心对固定参考系的坐标。

如果 x 轴与固定构件共线, 即 $\psi_1 = 0$, 那么对于构件 2 (见图 5.57)

$$x_2 = r_2 \cos(\theta_2 + \psi_2) + x_0 \quad (5.173)$$

$$y_2 = r_2 \sin(\theta_2 + \psi_2) + y_0 \quad (5.174)$$

式中 x_0 和 y_0 是铰链 1 (即构件 2 的固定铰链) 的坐标。对于连杆 (构件 3):

$$x_3 = a_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos(\theta_3 + \psi_3) + x_0 \quad (5.175)$$

$$y_3 = a_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin(\theta_3 + \psi_3) + y_0 \quad (5.176)$$

对于构件 4:

$$x_4 = r_4 \cos(\theta_4 + \psi_4) + a_1 + x_0 \quad (5.177)$$

$$y_4 = r_4 \sin(\theta_4 + \psi_4) + y_0 \quad (5.178)$$

将这些数值[式(5.173)到(5.178)]代入式(5.172), 重新合并同类项, 给出

$$H_O = H_{A0} + x_0 \sum_{i=2}^4 m_i \dot{y}_i - y_0 \sum_{i=2}^4 m_i \dot{x}_i \quad (5.179)$$

$$\text{式中 } H_{A0} = m_2(k_2^2 + r_2^2)\dot{\theta}_2 + m_3[a_2^2\dot{\theta}_2 + (k_3^2 + r_3^2)\dot{\theta}_3 + a_2r_3\cos(\theta_2 - \theta_3 - \psi_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \\ + m_4[(k_4^2 + r_4^2) + r_4a_1\cos(\theta_4 + \psi_4)]\dot{\theta}_4 \quad (5.180)$$

式(5.180)可以用 $\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ 和 $\dot{\theta}_4$ 来表示如下:

$$H_{A0} = [m_2(k_2^2 + r_2^2) + m_3a_2^2 + m_3a_2r_3\cos(\theta_2 - \theta_3 - \psi_3)]\dot{\theta}_2 \\ + m_3[(k_3^2 + r_3^2) + a_2r_3\cos(\theta_2 - \theta_3 - \psi_3)]\dot{\theta}_3 \\ + m_4[(k_4^2 + r_4^2) + r_4a_1\cos(\theta_4 + \psi_4)]\dot{\theta}_4 \quad (5.181)$$

这个公式具有下列形式

$$H_{A0} = \sum_{i=2}^4 m_i(k_i^2 + r_i^2)\dot{\theta}_i + A\dot{\theta}_2 + B\dot{\theta}_3 + C\dot{\theta}_4 \quad (5.182)$$

其中 A, B 和 C 的表达式显然由式(5.182)与(5.181)相比较得知。

已实现力平衡的四杆机构的震动力矩平衡^[20 21]

由于对已实现力平衡的四杆机构, $\sum_2^4 m_i x_i$ 和 $\sum_2^4 m_i y_i$ 是常量, $\sum_2^4 m_i \dot{x}_i$ 和 $\sum_2^4 m_i \dot{y}_i$ 为零, 所以式(5.179)化简为 $H_0 = H_{A0}$ [式(5.182)]。当这个角动量为常量时, 就没有震动力矩从机构传到机座上去。震动力矩的平衡就是基于这个前提的。其步骤如下所述。

如果为了简化符号, 我们设

$$\lambda = \frac{a_2}{a_3}, \quad \mu = \frac{a_4}{a_3}, \quad \nu = \frac{a_1}{a_3} \quad (5.183) \\ \tau_2 = \sin(\theta_2 - \theta_3) \quad \text{以及} \quad \tau_3 - \lambda = \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

而且如果我们从图 5.57 注意到 ψ_3 和 ψ'_3 的关系为

$$a_3 - r_3 \cos \psi_3 = -r'_3 \cos \psi'_3, \quad (5.184)$$

那么, 式(5.181)可以重写为

$$H_{A0} = \sum_{i=2}^4 m_i(k_i^2 + r_i^2)\dot{\theta}_i + m_3a_2[a_2 + r_3(\tau_3 - \lambda)\cos\psi_3 + r_3\tau_2\sin\psi_3]\dot{\theta}_2 \\ + m_3a_2r_3[(\tau_3 - \lambda)\cos\psi_3 + \tau_2\sin\psi_3]\dot{\theta}_3 \\ + m_4a_1r_4[\cos\theta_4\cos\psi_4 - \sin\theta_4\sin\psi_4]\dot{\theta}_4 \quad (5.185)$$

或者

$$H_{A0} = \sum_{i=2}^4 m_i(k_i^2 + r_i^2)\dot{\theta}_i + m_3a_2[a_2 + (\tau_3 - \lambda)(r'_3\cos\psi'_3 + a_3) \\ + r_3\tau_2\sin\psi_3]\dot{\theta}_2 + m_3a_2r_3[(\tau_3 - \lambda)\cos\psi_3 + \tau_2\sin\psi_3]\dot{\theta}_3 \\ + m_4r_4a_1(\cos\theta_4\cos\psi_4 - \sin\theta_4\sin\psi_4)\dot{\theta}_4 \quad (5.186)$$

这可简写为

$$H_{A0} = \sum_{i=2}^4 m_i(k_i^2 + r_i^2)\dot{\theta}_i - m_3a_2\lambda r'_3\cos\psi'_3\dot{\theta}_2 - m_3r_3a_3\cos\psi_3\dot{\theta}_3 \\ - m_4r_4a_4\cos\psi_4\dot{\theta}_4 + V + W \quad (5.187)$$

式中

$$V = \left[m_3a_2r_3\tau_2\dot{\theta}_2 + m_3a_2r_3\left(\tau_3 - \lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\dot{\theta}_3 \right]$$

$$+ m_4 r_4 (a_4 + a_1 \cos \theta_4) \frac{\cos \psi_4 \dot{\theta}_4}{\cos \psi_3} \Big] \cos \psi_3 \quad (5.188)$$

$$W = \left[m_3 a_2 r_3 \tau_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - m_4 r_4 a_1 \sin \theta_4 \frac{\sin \psi_4 \dot{\theta}_4}{\sin \psi_3} \right] \sin \psi_3 \quad (5.189)$$

已实现力平衡的在线^①(In-line)四杆机构的角动量

对于一个已经力平衡的机构:

$$\sum m_i x_i = \text{常量} \quad (5.190)$$

和 $\sum m_i y_i = \text{常数} \quad (5.191)$

那么 $\sum m_i \dot{x}_i = \sum m_i \dot{y}_i = 0 \quad (5.192)$

而且,从式(5.136)和(5.137),我们有

$$m_2 r_2 = m_3 r_3 \frac{a_2}{a_3} \quad \text{和} \quad \psi_2 = \psi_3'$$

$$m_4 r_4 = m_3 r_3 \frac{a_4}{a_3} \quad \text{和} \quad \psi_4 = \psi_3 + \pi$$

于是,如果假设 $\psi_2 \simeq \psi_4$, 对于一个已经实现力平衡的四杆机构,从式(5.188)可得到:

$$V = m_3 r_3 \cos \psi_3 \left[\tau_3 a_2 \dot{\theta}_2 + \frac{\tau_3 \lambda - \lambda^2 - 1}{\lambda} a_2 \dot{\theta}_3 - \mu (a_4 + a_1 \cos \theta_4) \dot{\theta}_4 \right] \quad (5.193)$$

由于

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\lambda}{\tau_4} \sin(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_1 \quad (5.194)$$

而且

$$\dot{\theta}_4 = \frac{\lambda \tau_2}{\mu \tau_4} \dot{\theta}_2 \quad (5.195)$$

式中

$$\tau_4 = \lambda \sin(\theta_2 - \theta_4) + \nu \sin \theta_4 \quad (5.196)$$

但是,弗鲁登斯坦方程(Freudenstein's equation)^[102]给出

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 1 = 2\mu\lambda \cos(\theta_2 - \theta_4) + 2\nu(\lambda \cos \theta_2 - \mu \cos \theta_3) \quad (5.197)$$

解这个方程,得到 $V=0$ 。

将 $m_4 r_4 = m_3 r_3 (a_4/a_3)$ 代入式(5.189),得到

$$W = m_3 a_2 r_3 \sin \psi_3 (\lambda \tau_3 \dot{\theta}_2 + \lambda \tau_2 \dot{\theta}_3 + \mu \nu \sin \theta_3 \dot{\theta}_4) \quad (5.198)$$

将式(5.194)和(5.195)中的 $\dot{\theta}_3$ 和 $\dot{\theta}_4$ 代入上式,得到

$$W = 2m_3 a_2 r_3 \sin \theta_3 \lambda \tau_2 \dot{\theta}_2 \quad (5.199)$$

因此,对一个已经力平衡的四杆机构,式(5.187)可简化为

$$H_{A0} = \sum_{i=2}^4 m_i (k_i^2 + r_i^2 - a_i r_i \cos \psi_i) \dot{\theta}_i + 2m_3 a_2 r_3 \sin \psi_3 \lambda \tau_2 \dot{\theta}_2 \quad (5.200)$$

从上式我们看到,对于一个已经力平衡的四杆机构,角动量仅仅包含随时间而变的项,这意味着角动量与参考点和初始位置无关。

^① 见 p202 的注^②和 p204 的注^①——译者注。

已经力平衡的四杆机构的震动力矩

从式(5.70)我们看到, $M_{M/G/O} = -\frac{d}{dt}H_0$ 。但是, 对于已经力平衡的机构说来, 由于 H_0 与参考点无关[式(5.200)], 所以

$$M_{M/G/O} = M_{M/G} = -\frac{d}{dt}H_0 = -\frac{d}{dt}H \quad (5.201)$$

于是, 从式(5.200)可得

$$M_{M/G} = -\sum_{i=2}^4 m_i (k_i^2 + r_i^2 - a_i r_i \cos \psi_i) \ddot{\theta}_i - 2m_3 a_2 r_3 \sin \psi_3 (\tau_2 \ddot{\theta}_2 + \tau_2 \dot{\theta}_2) \quad (5.202)$$

除了特殊情况外, 通常说来, 不可能使一个已经力平衡了的机构的震动力矩为零。然而, 式(5.202)中的个别项却有可能为零。尽管个别项为零不一定能减小震动力矩的大小, 但是在下面的一些情况下, 震动力矩确能减小:

1. 输入角速度($\dot{\theta}_2$)为常量, 使 $\ddot{\theta}_2 = 0$;
2. 连杆的质心位于铰链 2 和铰链 3 的连线上, (即有 $\psi_3 = 0$);
3. 任何构件的质量分布都是一个物理摆(其讨论请见节 5.17)。其回转半径(k)^①由下式确定:

$$k_i^2 = r_i (a_i \cos \psi_i - r_i); \quad (5.203)$$

4. 机构为平行四边形($a_2 = a_4, a_3 = a_1$)或菱形($a_1 = a_2 = a_3 = a_4$), 使得 $\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_4$, 以及 $\ddot{\theta}_3 = 0$ 。
5. 机构成箏形(deltoid)(即 $a_2 = a_1, a_3 = a_4$), 使得 $\ddot{\theta}_3 = -\ddot{\theta}_4$, 条件是这两项的系数能调整得合适。

因此, 在下列两种特殊情况下就能出现震动力矩的完全平衡:

1. 已经达到力平衡的平行四边形(或菱形)机构, 其在线连杆^②(即 $\psi_3 = 0$)以匀速运转;
2. 已经达到力平衡的箏形机构, 其在线连杆以匀速运转, 而且 $\ddot{\theta}_3$ 和 $\ddot{\theta}_4$ 的系数相等。

我们也可以利用配重的惯性来使已经力平衡了的四杆机构达到完全的震动力矩平衡, 正如下一节要讨论的那样。

在线四杆机构的力和力矩的完全平衡

应用惯性配重和物理摆的概念, 我们可以不依赖输入角速度来完全平衡所有的质量效应(包括移动的和转动的), 但不包括外界载荷。

惯性配重的概念

惯性配重可用来平衡任何与角加速度成比例的不平衡的平面力矩。因为加了这种惯性配重并未引进任何净惯性力, 所以并不影响震动力的平衡[式(5.192)]。然而, 遗憾的是驱动扭矩却必须大大增加, 以驱动加有配重的力平衡和力矩平衡系统。

设机构将未平衡的震动力矩 $I\ddot{\theta}$ 传到机座。对于平衡配重来说, 相位角和支承的相对偏斜度

① 参看第一卷式(5.33)。

② 指连杆质心在铰链的连心线上——译者注。

是无关紧要的。所以需要的条件是：

1. 一对传动比为 n 的直齿圆柱齿轮，使得

$$I_{\text{cwt}} = nI \quad (5.204)$$

式中 I_{cwt} ——配重的转动惯量；

I ——待平衡机构对配重轴的转动惯量。

2. 一些附加质量，不论是什么形式，只要相对于它的转动轴是静平衡的就可以。（有一点必须要认识到，即反撞和轮齿载荷可能会很大，因而造成严重的设计问题）。许多个配重方案都是可行的，有两个表示在图 5.66 中。

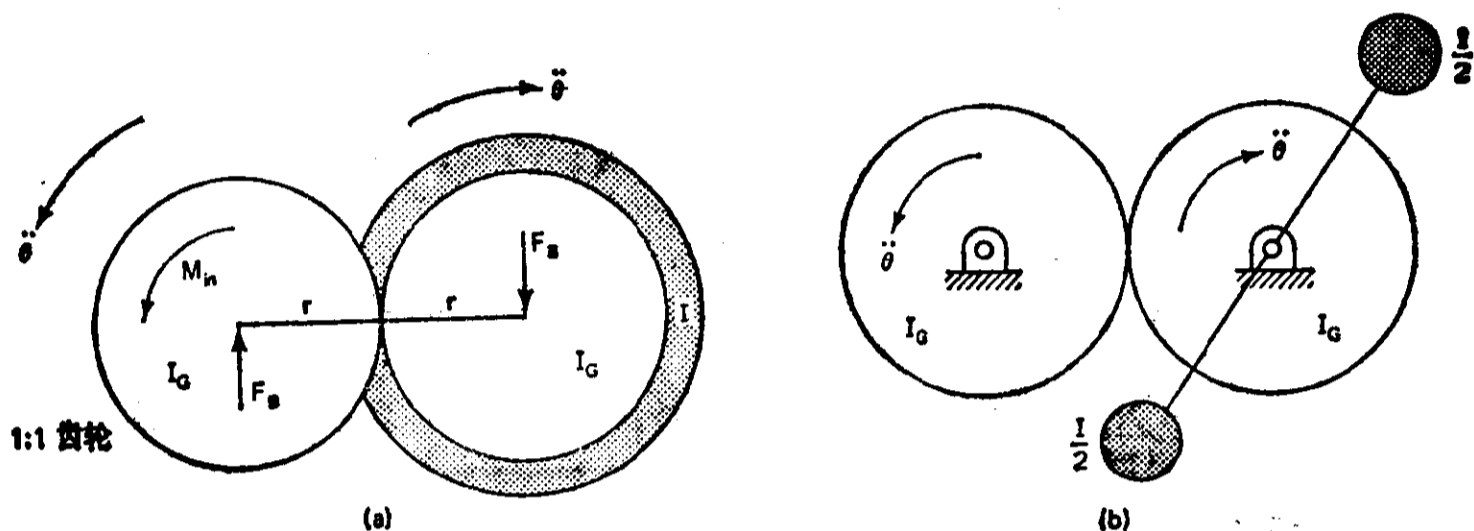


图 5.66 齿轮啮合的惯性配重

在图 5.66 中，半径为 r 的两个齿轮，各有转动惯量 I_G 。驱动扭矩为 M_λ 。齿轮轴承的反作用力是平衡的，其大小为 F_B 。与连心线垂直的轮齿切向力分量也等于 F_B ：

$$F_B = \frac{I_G + I}{r} \ddot{\theta} \quad (5.205)$$

式中 I 是配重对图 5.66 中右边的轴的转动惯量，等于机构对该轴的转动惯量。

机座轴承力的力矩由下式给出：

$$M_G = -2rF_B = -2(I_G + I)\ddot{\theta} \quad (5.206)$$

最初，仅对于在左边新加的齿轮所需的输入扭矩为：

$$M_\lambda = I_G \ddot{\theta} \quad (5.207)$$

而加上右边的齿轮和配重后，所需的输入扭矩为：

$$M_{\lambda\text{cwt}} = I_G \ddot{\theta} + (I_G + I)\ddot{\theta} = (2I_G + I)\ddot{\theta} \quad (5.208)$$

上式可以通过图 5.66a 中的隔离体图来证实。这样总的平衡力矩由输入扭矩和机座轴承力的力矩之和给出：

$$M_{M/G} = -(M_{\lambda\text{cwt}} + M_G) = -[(2I_G + I)\ddot{\theta} - 2(I_G + I)\ddot{\theta}] = I\ddot{\theta} \quad (5.209)$$

因此，这个总的平衡力矩^① $I\ddot{\theta}$ 正好平衡掉机构产生的力矩 $-I\ddot{\theta}$ 。

物理摆的概念

正如铁木辛科(Timoshenko)和杨(young)^[287,288]定义的那样，物理摆基本上是一个在线杆，

① 原书为震动力矩，似有误。——译者注

它的回转半径(k)和质心位置满足下列关系(图 5.67):

$$k^2 = r r' \quad (5.210)$$

节 5.17 将介绍可以使某些杆成为物理摆的两种构件结构。

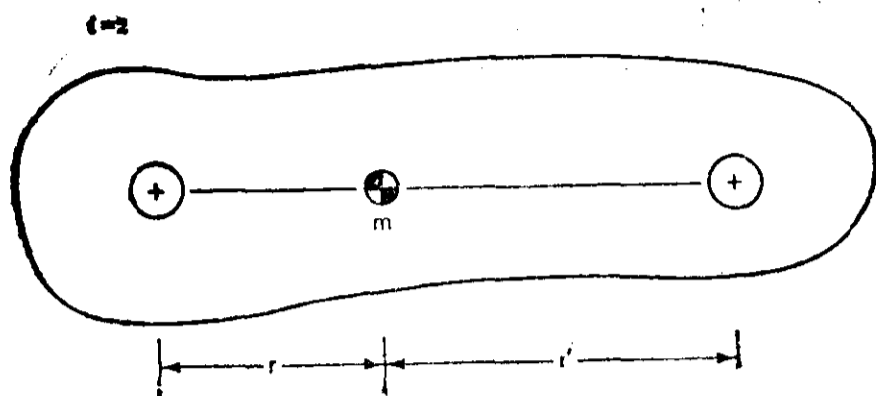


图 5.67 在线构件的几何示意

惯性配置和物理摆在四杆机构中的应用

从式(5.202)我们看到,对于一个已经力平衡的、在线①四杆机构

$$M_{M/G} = - \sum_{i=2}^4 m_i (k_i^2 + r_i^2 - a_i r_i \cos \psi_i) \ddot{\theta}_i - 2m_3 a_2 r_3 \sin \psi_3 (\tau_2 \ddot{\theta}_2 + \tau_2 \dot{\theta}_2)$$

上式也可以简写为:

$$M_{M/G} = \sum_{i=2}^4 k_i \ddot{\theta}_2 + K_5 (\tau_2 \ddot{\theta}_2 + \tau_2 \dot{\theta}_2) \quad (5.211)$$

式中

$$K_i = -m_i (k_i^2 + r_i^2 - a_i r_i \cos \psi_i)$$

$$K_5 = -2m_3 a_2 r_3 \sin \psi_3$$

对于也是一个物理摆的在线连杆, $\psi_3 = 0, \psi_3' = \pi$, 所以 $K_5 = 0$ 。

加上与输入和输出构件啮合的配重 I_2^{**} 和 I_4^{**} 后, 得出总的震动力矩为:

$$M_{M/G}^{**} = \sum_{i=2}^4 K_i \ddot{\theta}_i + I_2^{**} \ddot{\theta}_2 + I_4^{**} \ddot{\theta}_4 \quad (5.212)$$

但如果:

$$K_2 = -I_2^{**}$$

$$K_4 = -I_4^{**} \quad (5.213)$$

$$K_3 = 0 = -m_3 (k_3^2 + r_3^2 - a_3 r_3)$$

(当连杆是物理摆, 以及 $a_3 = 2r_3$ 时, $K_3 = 0$), 那么, $M_{M/G}^{**} = 0$ (震动力矩消失)

总而言之, 对于连杆是物理摆和加上惯性配重的在线四杆机构, 如果满足了下列五个条件, 那么力矩和力的完全平衡就可实现:

构件 2 的力平衡和物理摆条件:

$$m_2 r_2 = m_3 r_3' \frac{a_2}{a_3} \quad \text{和} \quad \psi_2 = \psi_3' = \pi \quad (5.214)$$

① 每一运动的(两副)构件的质心必须位于它的两个铰链点的连心线上。但是, 这里构件并不一定要求是对称的。(这里我们不讨论三副构件。)

构件 4 的力平衡和物理摆条件:

$$m_4 r_4 = m_3 r_3 \frac{a_4}{a_3} \quad \text{和} \quad \psi_4 = \psi_3 + \pi = \pi \quad (5.215)$$

构件 3 的物理摆条件

$$k_3^2 = r_3 r_3' \quad (5.216)$$

构件 2 上配重的力矩平衡条件;

$$I_2^{**} = -K_2 = m_2 (k_2^2 + r_2^2 + a_2 r_2) \quad (5.217)$$

构件 4 上配重的力矩平衡条件:

$$I_4^{**} = -K_4 = m_4 (k_4^2 + r_4^2 + a_4 r_4) \quad (5.218)$$

从理论上说,我们并不要求任何一个运动构件一开始就是在线的。然而,为了达到完全的平衡,这些构件的质量分布一定要有可能重新调整,以使得所有的运动构件都具有在线构件特性,并使连杆能满足物理摆的条件。有一点需特别重视,即如果输入角速度是常量($\ddot{\theta} = 0$),那么就没有必要在输入构件上加配重了。

例 5.15

假设我们希望要对图 5.68 所示的未平衡机构进行完全平衡,该机构的参数列在表 5.12。所有构件的材料均为钢,密度 $\gamma = 0.283 \text{ lbf/in}^3$ 。由于重力加速度(常数)可在所有方程中约去,为方便起见,我们在计算中不用质量而用重量。

解: 第一步: 将连杆转换成物理摆。节 5.17 将简述物理摆的特有条件。由于连杆是一个两端加大的杆^①(augmented link),而且根据表 5.12, $a_3/d_3 = 8$,从表 5.16 可查出 $e_3/d_3 = 1.887$,因此, $e_3 = 0.943$ 。

添加的质量由下式确定(参看图 5.74):

$$m^* = \frac{2\gamma}{g} e_3 d_3 h_3 \quad (5.219)$$

因此,所要添加的重量为 $m^* g = w^* = 2\gamma e_3 d_3 h_3 = 0.0534 \text{ lbf}$,从而连杆的总重量为 $0.174 + 0.0534 = 0.227 \text{ lbf}$ 。

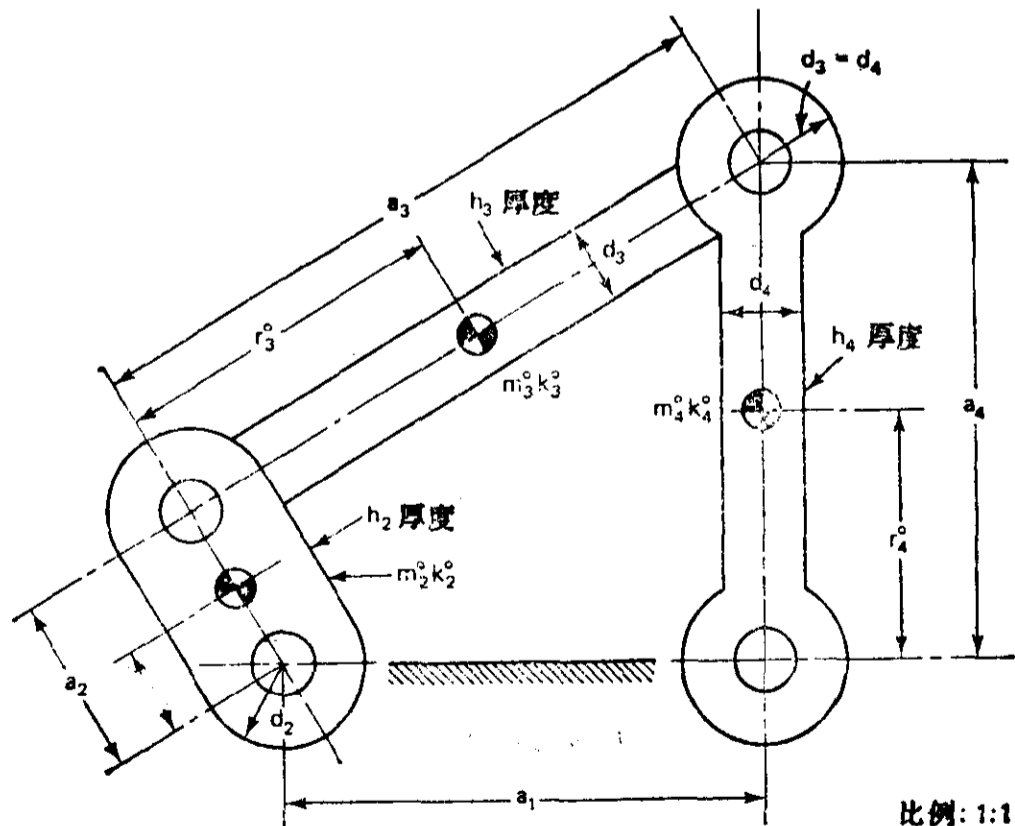


图 5.68 要进行力和力矩完全平衡的不平衡四杆机构

① 建议读者先熟悉一下节 5.17 的内容。

表 5.12 要进行力和力矩完全平衡的不平衡四杆机构的参数 (图 5.68)

参 数	构 件 2	3	4	1
a_i (in.)	1.00	4.00	3.00	3.00
d_i (in.)	0.50	0.50	0.50	—
h_i (in.)	0.20	0.20	0.20	—
w_i^0 (lbf)	0.101	0.174	0.146	—
r_i^0 (in.)	0.50	2.00	1.50	—
ψ_i^0 (°)	0	0	0	—
k_i^0 (in.)	0.593	1.577	1.261	—

回转半径由式(5.216)给出,

$$k^2 = r r' = r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4.00 \text{in}^2$$

所以

$$k = 2.0 \text{in}$$

如果我们保持 $\psi_3 = 0$ 和 $\psi_3' = \pi$ 的条件, 那么, 就满足连杆是物理摆的条件, 它对震动力矩不产生影响[式(5.216)]。

第二步: 实现力平衡: 假设各构件的条件都不可改变而必须用加配重来实现力平衡。从式(5.141)和(5.142)可以解出构件2和构件4的 $m_i^* r_i^*$ 和 ψ_i^* : 对于构件2, $(m_i^* r_i^*) g = w_i^* r_i = 0.164 \text{lbf} \cdot \text{in}.$; 对于构件4, $w_i^* r_i^* = 0.556 \text{lbf} \cdot \text{in}.$, 以及 $\psi_2^* = \psi_4^* = \pi$ 。

假设我们选择圆配重, 其直径为 $2r_i^*$ 。根据文献[18], 半径 r_i^* 可由下式求得:

$$r_i^* = \left(\frac{w_i^* r_i^*}{\gamma \pi h_i^*}\right)^{1/3} \quad (5.220)$$

进一步我们假定对于两个配重都选择 $h_i^* = 0.50 \text{in}$, 那么 $r_2^* = 0.717 \text{in}$, $r_4^* = 1.077 \text{in}$ 。这时, 所要添加的重量为 $w_i^* = (w_i^* r_i^*) / r_i^*$, 构件的总重量 w_i 为

$$w_i = w_i^0 + w_i^* \quad (5.221)$$

至于质心的新位置可由向量加法来确定:

$$w_i r_i = w_i^0 r_i^0 + w_i^* r_i^* \textcircled{1}$$

或

$$r_i = \frac{w_i^0 r_i^0 + w_i^* r_i^*}{w_i} \quad (5.222)$$

$$r_i e^{i\psi_i} = \frac{w_i^0}{w_i} r_i^0 e^{i\psi_i^0} + \frac{w_i^*}{w_i} r_i^* e^{i\psi_i^*}$$

表 5.13 力平衡的四杆机构的参数 (图 5.69)

参 数	构 件 2	3	4
$w_i^* r_i^*$ (lbf·in.)	0.164	—	0.556
w_i^* (lb)	0.229	0.0534	0.516
r_i^* (in.)	0.717	—	1.077
ψ_i^* (°)	180.0	—	180.0
w_i (lbf)	0.330	0.227	0.662
r_i (in.)	0.650	2.000	1.171
ψ_i (°)	180.0	0	180.0

① 原文为 $w_i r_i + w_i^0 r_i^0 + w_i^* r_i^*$, 有误。——译者注

现在,机构就实现了完全平衡[条件(5.214)和(5.215)都满足了]。表 5.13 总括了各参数值,图 5.69 示出了已实现力平衡机构的构形。

图 5.69 力和力矩完全平衡的在线四杆机构。阴影部分表示为实现——(a)力平衡和 (b)力矩平衡——而添加的配重材料

第三步:添加惯性配重来实现力矩平衡:因为我们已经改变了构件 2 和构件 4 的质心,所以,必须计算这些构件的新的回转半径。又因为我们选择的是圆形配重,所以配重部分的作用系数为

$$k_i^* = \frac{r_i^*}{\sqrt{2}} \quad (5.223)$$

为了确定加有配重构件的回转半径(图 5.69),我们列出下列式子:

$$wk^2 = w^0[k^{02} + |r^0 - r|^2] + w^*[k^{*2} + |r^* - r|^2]$$

对于加有配重的在线构件(图 5.69),上式又可化简为:

$$wk^2 = w^0[k^{02} + (r^0 + r)^2] + w^*[k^{*2} + (r^* - r)^2]$$

该式导出式(5.224)

$$k_i^2 = \frac{w_i^0}{w_i}[k_i^{02} + (r_i^0 + r_i)^2] + \frac{w_i^*}{w_i}[k_i^{*2} + (r_i^* - r_i)^2] \quad (5.224)$$

式(5.224)给出 $k_2 = 0.960\text{in.}$ 及 $k_4 = 1.199\text{in.}$ 。

图 5.66 中采用了 1:1 齿轮啮合的惯性配重,按条件 4 和 5,它们的重量转动惯量由下式决定 [参看式(5.217)]

$$I_i^{**} = w_i(k_i^2 + r_i^2 + a_i r_i) \quad (5.217a)$$

表 5.14 实现了震动力矩平衡的四杆机构-回转变重的参数(图 5.69)

参 数	构 件 2	3	4
k_i^* (in.)	0.507	—	0.762
k_i (in.)	0.833	2.000	1.508
I_i^{**} (lbf·in ²)	0.583	—	4.739
ρ_i (in.)	1.070	—	1.807
w_i^{**} (lbf)	1.090	—	5.245

如果配重是一个圆盘,那么

$$I_{2}^{**} = \frac{\pi}{2} (\gamma \rho_2^4 h_2^{**}) \quad (5.225)$$

式中 ρ_2 是半径, h_2^{**} 是圆盘的厚度。假定我们选 $h_2^{**} = h_1^{**} = 1.0 \text{ in.}$, 那么 $\rho_2 = 1.070$, $\rho_4 = 1.807 \text{ in.}$ 。表 5.14 总结了力矩完全平衡的机构的 k 、 k^* 和 I^{**} 值。图 5.69 示出了最终机构的构形, 其比例与图 5.68 所示未平衡机构的大致相同。

震动力矩的最优化

遗憾的是我们可能难以满足完全消除震动力矩所需的全部约束条件。因此, 必须采用最优化技术。伯克夫(Berkof)和其他人选用了最小二乘法。因为这种分析如果以一般形式出现很快就复杂起来, 而且又要求很多与机构参数的各种组合相匹配的曲线, 所以希望读者去参阅参考文献[17、21、172、175、282、283]。

然而, 关于震动力矩的相对大小以及它们的最小值, 通过对机构各种位形呈现的情况所进行的分析, 使我们有如下结论^[19]:

曲柄的销轴到连杆质心的距离减小, 则力矩可望减小;

增加连架杆的长度, 有助于力矩的减小。但是不同的构形, 效果会有很大差异;

连杆长度减小, 有助于减小力矩;

输出构件的长度的影响不明显;

震动力矩与下列因素成比例:

输入构件长度 a_2 的五次方;

输入构件 2 的密度;

输入角速度的平方。

5.14 力矩平衡对输入扭矩的作用

正如我们在力矩平衡的例子中看到的, 靠加配重和旋转惯性质量的方法来实现完全的平衡会使机构运动部分的总重量明显地增加。运动重量的这种增加肯定是不可忽视的。

有四种不同的方法来对任意机构建立输入扭矩公式: 动能法, 经典的力分析法, 虚功法和拉格朗日方程法。下面将要讨论拉格朗日法。

动能法

对于总动能 T 的一个微小的变化, 就由输入扭矩 M_λ 通过转动角度 θ 做出相应数量的功, 从而给出

$$dT = M_\lambda d\theta \quad (5.226)$$

对于连续函数, 这是与下式等同的

$$M_\lambda = \frac{dT}{d\theta} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{d\theta} \quad (5.227)$$

对于已经力平衡^①的单自由度机构, 构件 2 为输入曲柄时, 有

① 力平衡使各构件势能的变化互相抵消, 这是因为所有运动构件的总质心静止不动。

$$M_\lambda = \frac{1}{\dot{\theta}_2} \frac{dT}{dt} \quad (5.228)$$

如果仅仅是达朗贝尔力 F_D 和力矩 M_D 作用在其余构件上, 那么 F_D 将通过任意构件的质心 S (图 5.70)。对于任意一个给定的构件, 其总动能 T_i 是平移和旋转动能之和:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_{S_i}^2 + \frac{1}{2} m_i k_i^2 \dot{\theta}_i^2 \quad (5.229)$$

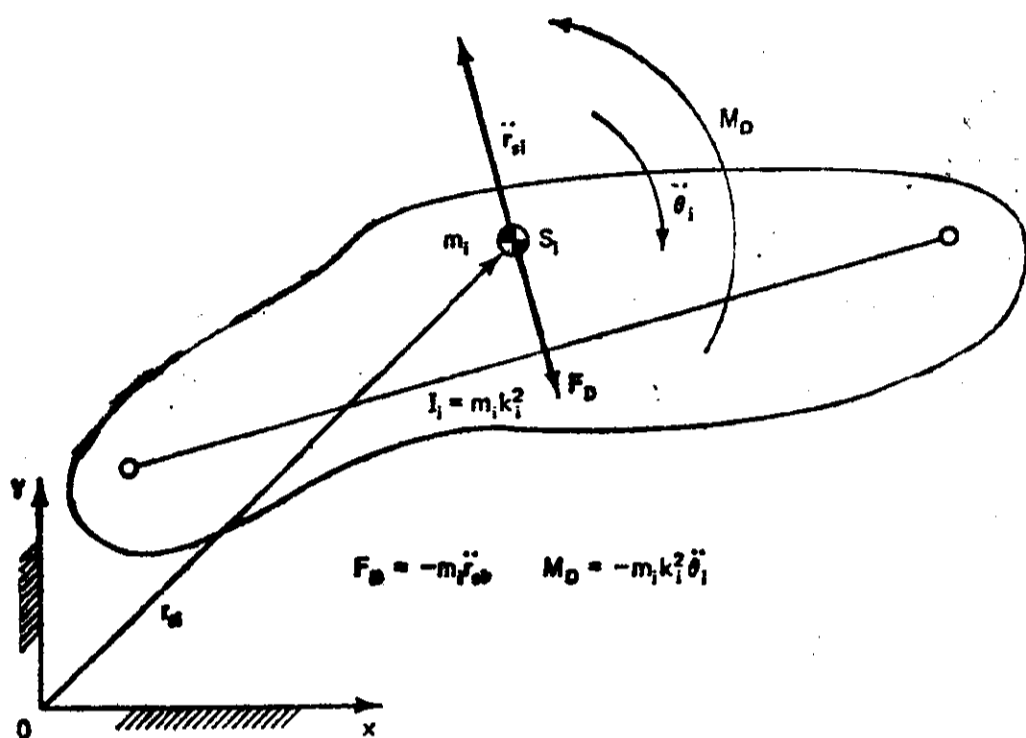


图 5.70 第 i 构件的达朗贝尔力和力矩

式中 m_i —— 质量;
 \dot{r}_{S_i} —— 质心 S_i 的速度;
 k_i —— 回转半径;
 $\dot{\theta}_i$ —— 第 i 个构件的角速度。

对任何机构, 其总动能为

$$T = \sum_{i=2}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{r}_{S_i}^2 + k_i^2 \dot{\theta}_i^2) \quad (5.230)$$

式中 $i=2, 3, \dots, n$ 代表所有的运动构件。

从式(5.228)有

$$M_\lambda = \frac{1}{\dot{\theta}_2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{r}_{S_i} \dot{r}_{S_i} + k_i^2 \dot{\theta}_i \ddot{\theta}_i) \quad (5.231)$$

式中 \ddot{r}_{S_i} —— 质心的加速度;
 $\ddot{\theta}_i$ —— 第 i 个构件的角加速度。

用直角坐标表示时,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + k_i^2 \dot{\theta}_i^2) \quad (5.232)$$

和
$$M_{\lambda} = \frac{1}{\dot{\theta}_2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{x}_i \dot{x}_i + \dot{y}_i \dot{y}_i + k_i^2 \dot{\theta}_i \ddot{\theta}_i), \quad (5.233)$$

式中 (x_i, y_i) 是第 i 个构件的质心在固定参照系中的坐标。

瞬时功率法

驱动一个机构的瞬时功率原理的一般形式由下式给出

$$\sum_{i=2}^n F_i \cdot v_i + \sum_{i=2}^n M_i \cdot \omega_i = 0 \quad (5.234)$$

式中 F_i —— 外力,
 M_i —— 外力矩,
 v_i —— F 作用点的速度,
 ω_i —— 力矩 M_i 所作用的构件的角速度。

如果不考虑摩擦和外功的要求, 那么作用在第 i 个构件上的达朗贝尔力和力矩可由下式确定:

$$F_{D_i} = -m_i \ddot{r}_{S_i} = -m_i (\ddot{x}_i \mathbf{i} + \ddot{y}_i \mathbf{j}) \quad (5.235)$$

式中 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 是正交的单位向量。或者按平面运动的复数表达形式为

$$F_{D_i} = -m_i (\ddot{x}_i + \mathbf{i} \ddot{y}_i)$$

此外, 对达朗贝尔力矩用空间向量表示为

$$M_{D_i} = -m_i k_i^2 \ddot{\theta}_i = -m_i k_i^2 \ddot{\theta}_i \mathbf{k} \quad (5.236)$$

或表示在平面内为

$$M_{D_i} = -m_i k_i^2 \ddot{\theta}_i$$

输入扭矩用空间向量表示为

$$M_{\lambda} = M_{\lambda} \mathbf{k} \quad (5.237)$$

或表示在平面内为 M_{λ} (实数)。由于反作用力和轴承力都不做功, 所以式 (5.234) 变为:

$$M_{\lambda} \cdot \dot{\theta}_2 + \sum_{i=2}^n (F_{D_i} \cdot \dot{r}_{S_i} \textcircled{1} + M_{D_i} \cdot \dot{\theta}_i) = 0 \quad (5.238)$$

式中 $F_{D_i} \cdot \dot{r}_{S_i} = -m_i (\dot{x}_i \dot{x}_i + \dot{y}_i \dot{y}_i)$

或者以平面运动的标量形式表示为:

$$M_{\lambda} = \frac{1}{\dot{\theta}_2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{x}_i \dot{x}_i + \dot{y}_i \dot{y}_i + k_i^2 \dot{\theta}_i \ddot{\theta}_i) \quad (5.239)$$

这与式 (5.233) 的形式完全一样。

拉格朗日方程法

对于单自由度的已经达到力平衡的平面刚体机构, 拉格朗日方程有下列形式:

$$M_{\lambda} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \quad (5.240)$$

① 原文为 $F_{D_i} \cdot r_{S_i}$ —— 译者注。

式中 M_λ ——作用在系统上的广义力；

θ_2 ——选定的广义坐标；

T ——总动能。

因为在单自由度转动输入的平面刚体机构中， θ_2 是唯一的独立坐标，所以第 i 个构件的质心速度和角速度仅是 θ_2 和 $\dot{\theta}_2$ 的函数：

$$\dot{r}_{Si} = f_{1i}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \quad (5.241)$$

$$\dot{\theta}_i = f_{2i}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \quad (5.242)$$

因而，总动能由下式给出

$$T = f(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \quad (5.243)$$

式中 f 是一个可以用单变量 θ_2 表示的函数。因此，式(5.240)中的项可以分别写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = \frac{d}{dt}(2f\dot{\theta}_2) = 2f\ddot{\theta}_2 + 2\frac{df}{dt} \dot{\theta}_2 \quad (5.244)$$

和

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = \dot{\theta}_2^2 \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \quad (5.245)$$

同时，由于 $f = f(\theta_2)$ 以及 $\partial f / \partial \dot{\theta}_2 = 0$ ，所以

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{d\theta_2}{dt} \textcircled{1} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} \frac{d\dot{\theta}_2}{dt} = \dot{\theta}_2 \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \quad (5.246)$$

将式(5.244)、(5.245)和(5.246)代入式(5.240)，得到

$$M_\lambda = 2f\ddot{\theta}_2 + \frac{df}{dt}\dot{\theta}_2 \quad (5.247)$$

但是，从式(5.243)有， $f = T/\dot{\theta}_2^2$ ，所以

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\dot{\theta}_2^2} \frac{dT}{dt} - 2\frac{\ddot{\theta}_2 T}{\dot{\theta}_2^3} \quad (5.248)$$

将上式代入式(5.247)，得到

$$M_\lambda = \frac{1}{\dot{\theta}_2} \frac{dT}{dt} \quad (5.249)$$

将 $f(\theta_2)$ 写成完全形式，得到总能量和输入扭矩的方程为

$$\begin{aligned} T_\lambda &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{r}_{Si}^2 + k_i^2 \dot{\theta}_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + k_i^2 \dot{\theta}_i^2) \end{aligned}$$

以及

$$M_\lambda = \frac{1}{\dot{\theta}_2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{x}_i \dot{x}_i + \dot{y}_i \dot{y}_i + k_i^2 \dot{\theta}_i \dot{\theta}_i)$$

① 原文为 $\frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{d\theta_2}{dt}$ ——译者注。

式中 (x_i, y_i) 是第 i 个运动构件的质心的直角坐标。

已经力平衡的在线四杆机构的输入力矩分量

对于一个在线的四杆机构($\psi_i = 0^\circ, 180^\circ$),

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 &= r_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 &= r_3^2 \dot{\theta}_3^2 + a_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2a_2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ \dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2 &= r_4^2 \dot{\theta}_4^2 \end{aligned} \quad (5.250)$$

式中 $r_i, i=2, 3, 4$, 对构件2和构件4是从定销轴到质心的距离, 对构件3是从与曲柄端连接的铰链到构件质心的距离。

将上式代入式(5.230)得到

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{ m_2 (k_2^2 + r_2^2) \dot{\theta}_2^2 + m_4 (k_4^2 + r_4^2) \dot{\theta}_4^2 \\ &\quad + m_3 [(k_3^2 + r_3^2) \dot{\theta}_3^2 + a_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2a_2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3] \} \end{aligned} \quad (5.251)$$

上式可以写为

$$T = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^4 K_i \dot{\theta}_i^2 + Z \quad (5.252)$$

式中

$$K_i = -m_i (k_i^2 + r_i^2 + a_i r_i) \quad (5.253)$$

以及

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} [-m_2 r_2 a_2 \dot{\theta}_2^2 - m_4 r_4 a_4 \dot{\theta}_4^2 - m_3 r_3 a_3 \dot{\theta}_3^2 \\ &\quad + m_3 (a_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2a_2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2)] \end{aligned} \quad (5.254)$$

但是, 由力平衡的条件[式(5.136)和(5.137)], 我们有

$$m_2 r_2 = m_3 (a_3 - r_3) \frac{a_2}{a_3} \quad (5.255)$$

$$m_4 r_4 = m_3 r_3 \frac{a_4}{a_3}$$

将式(5.255)代入式(5.254), 得到

$$Z = \frac{m_3 r_3}{2a_3} [a_2^2 \dot{\theta}_2^2 - a_3^2 \dot{\theta}_3^2 - a_4^2 \dot{\theta}_4^2 + 2a_2 a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3] \quad (5.256)$$

由四杆机构的环路封闭方程, 有

$$\begin{aligned} a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3 &= a_4 \cos \theta_4 + a_1 \\ a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 &= a_4 \sin \theta_4 \end{aligned} \quad (5.257)$$

将这两个式子逐项对时间取导数, 然后两边平方, 再相加, 得到:

$$a_2^2 \dot{\theta}_2^2 + a_3^2 \dot{\theta}_3^2 - a_4^2 \dot{\theta}_4^2 + 2a_2 a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 = 0 \quad (5.258)$$

将式(5.258)和(5.256)联立, 我们得到:

$$Z = -m_3 r_3 a_3 \dot{\theta}_3^2$$

将其代入式(5.252), 可得已经力平衡的四杆机构的总能量公式为:

$$T = -\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=2}^4 K_i \dot{\theta}_i^2 - m_3 r_3 a_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (5.259)$$

$$\text{式中} \quad K_i = -m_i(k_i^2 + r_i^2 + a_i r_i) \quad (5.260)$$

已经力和力矩平衡的在线四杆机构的输入扭矩分量

在力矩平衡中,除力的平衡条件之外,还必须将配重的影响加进方程中去。因此,总能量由下式给出

$$T = -\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=2}^4 K_i \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} [I_2^{**} \dot{\theta}_2^2 + I_4^{**} \dot{\theta}_4^2] \quad (5.261)$$

式中 I_i^{**} 是力矩平衡用的旋转质量的转动惯量,同时在式中我们假定了输入和输出边两组的齿轮传动比是 1:1。

因为对力和力矩都平衡的情况,式(5.214)到(5.218)的条件都满足,所以如果我们又假设 $r_3 = a_3/2$, 则代入式(5.259)①就得到:

$$K_3 = -m_3 \left(\frac{a_3}{4} + \frac{a_3}{4} - \frac{a_3}{2} \right) a_3 = 0$$

由于根据式(5.217)和(5.218),还有

$$\begin{aligned} I_2^{**} &= -K_2 \\ I_4^{**} &= -K_4 \end{aligned} \quad (5.262)$$

式(5.261)就变成

$$T = -\sum_{i=2}^4 K_i \dot{\theta}_i^2 \quad (5.263)$$

比较式(5.263)和(5.259),我们看到,随着从仅仅作力平衡进展到力平衡加力矩平衡,所需的总能量(因而所需的输入扭矩)变成了两倍。当输入构件匀速转动时,就出现一个特殊情况。这时 $K_2 = K_3 = 0$, [从式(5.228)得到] 仅剩

$$M_A = -\frac{2}{\dot{\theta}_2} (K_4 \dot{\theta}_4)$$

我们应注意到,在力和力矩完全平衡时,在机构上剩下的唯一的外载荷是来自机座力的力矩。由于总力矩为零,所以,这些力矩与输入扭矩肯定大小相等、符号相反。

总而言之,虽然完全的平衡真正消除了被传递到机座上的震动力,但是做到这一点是付出了代价的——即所需输入扭矩要增加很多,轴承力也要随之增加,从而缩短了轴承的寿命。

5.15 机构平衡的其它方法

平衡问题是值得许多文献来分析研究的。在研究方法中,有的寻求完全平衡,有的只求力矩平衡,有的则求部分力平衡和(或)部分力矩平衡。

完全平衡

完全力平衡的目的就是要使作用在机构机座上的净震动力为零。为此,必须使整个机构的

① 应为式(5.260)——译者注

质心保持不动。已经用了五种方法来达到这个目的:

线性独立向量法,如本章叙述的那样;

静平衡法;

主向量法及其推广;

凸轮和重复机构法;

非线性规划技术。

静平衡法^[173] 静平衡方法是用静力等效质量系统来代替构件的集中质量。在构件上添加配重后,各构件的质心被逐步移到几个静止的点为止。然后,求这些静止质量的总质心,即得整个系统的质心。这种方法通常限于质量对称分布的机构。另一种方法是,各构件的质心可依次被移动到靠近某一固定销轴。这种方法就不限于构件是对称的了。

主向量法及其推广^[173] 这种方法是先用解析方法描述质心的运动,然后确定影响机构最终轨迹的那些参数。主向量法用一系列向量(每个向量沿着一个构件)来描述整个机构质心的位置。应用这些主向量的大小,我们可以把一系列二副构件以平行四边形的方式加到原来的机构上。这样形成的增广机构包含有一个与原机构总质心重合的点。添加一个有配重的缩放装置后,该增广机构的复合质量中心就被移动到一个静止点,因而平衡掉震动力。

另一方法是双周线变换法,它也能使一个附加在比例辅助机构上的点来跟踪给定机构的质心。对联系辅助机构和原机构的方程中各个参数进行调节,使总质心位于该比例机构的一个点上,而这个点描出的是一个圆。因此,我们要重新分布构件质量,以使质心在一个圆内运动。再靠添加几个配重,就可以使总质心趋于一个希望的静止点上。

凸轮和重复机构法^[173] 我们有可能设计出凸轮驱动装置和重复机构,使得总质心保持静止。由于每个装置必须是按其应用场合所特有的,所以希望读者去参阅该文献。

非线性规划技术^[231] 非线性规划技术可以通过对各个设计目标之间的通盘考虑来决定哪一些设计目标更重要一些。用这种方法可以同时满足部分力平衡和部分力矩平衡。在确定所加配重的位置和重量时,要在所允许的最大震动力和所允许的最大震动力矩之间进行通盘的考察,此外还要考虑到限制最大的轴承力对这一通盘考虑的影响。

在应用非线性规划技术时,要建立设计参数的目标函数,并且要在设计条件或设计者所假定的范围内,通过调整目标函数的独立变量,使目标函数的值为最小。这种方法适用范围广泛,可以适合于配重、弹簧和其它类似的平衡装置。对不平衡机构中的质量分布不需要作任何假定,对输入扭矩不一定要求恒定,对机构的类型也不限于平面机构。

震动力矩的平衡^[173] 文献中涉及到力矩平衡的内容现在还很少。除了伯可夫(Berkof)和洛温(Lowen)提出的方法外,另一种方法是用一个由凸轮驱动的摆动配重来平衡四杆机构中由于达朗贝尔力所引起的震动力矩。再一种方法是将摆动配重与四杆机构的曲柄和从动件之间以齿轮相啮合。在原来机构中加上与之成镜象对称的重复机构可以抵消由于达朗贝尔力和达朗贝尔力矩所引起的震动力矩。

部分平衡技术^[173] 关于部分平衡的方法我们已经讨论得很多了。然而几乎所有的方

局限于平面机构。许多方法是靠对力和力矩波动的某些谐波加以平衡来减小惯性影响的。另外的方法是添加弹簧。虽然后者并不一定减小震动力的向量和,但是这种方法却改变了这些力传递到机座的作用方式。

谐波平衡或阶次平衡(order balance)通常是靠增加一些辅助质量来达到。一旦选定了配重的构形,可以用把不希望的谐波消除掉的方法来优化这些添加质量的位置。为此,有两种方法:最佳平均(best average)法或最佳一致(best uniform)法,前者应用傅立叶级数和高斯最小二乘法,后者用契贝歇夫方法。

为了得到震动力各分量的谐波形式,我们首先要确定整个机构总质心的位移各分量的谐波。逐次微分后,可得到速度、加速度,由此得到达朗贝尔力和力矩的变化。把单个配重加到输入曲柄上,可以部分平衡掉震动力的一次谐波。其余的不平衡量可以用一个称作“拉切斯特平衡器”(Lanchester balancer)——一种由两个大小一样、按相反方向转动且对称分布的质量所组成的装置——来减至最小。当这两个反向转动的质量不同和分布不对称时,就形成了一个“广义的拉切斯特平衡器”(generalized lanchester balancer),它可以平衡震动力的任何谐波的 x 分量和 y 分量。

另一种称为行星机构平衡器的方法是利用这样一个事实,即任何一个二维谐波的合成都描绘出一个椭圆轨迹^[283]。此外,还有一种方法,是在现有机构的各构件上添加辅助质量,同时又在输入曲柄上添加配重,来完全平衡一阶傅立叶谐波。对于空间机构,已经表明,可以用把三个平衡质量安装在三个互相垂直的锥形齿轮上的方法来完全平衡任何一个三维震动力的谐波。

我们可以用两个大小相等的质量,使它们绕两个单独的销轴同步旋转而相位差 180° 来平衡任何震动力矩的谐波。对于有些已经实现力平衡的机构来说,可以用移动力平衡配重的轴线,来消除由于达朗贝尔力所引起的震动力矩的一阶谐波。调整“广义拉切斯特平衡器”中作了某些修正的旋转质量的中心距,也有可能为某个给定阶数的谐波提供所需要的平衡力矩。还有一种平衡装置是利用由输入轴驱动的三个旋转质量。此外,另一种方法是用最小二乘法进行分析,最后在输入轴上添加一个配重。

有一位作者 V·A·卡门斯基(V. A. Kamenskii)^[146]给出了一些可以判定平衡好坏的标准。

考夫曼(Kaufman)和桑多尔(Sandor)用线性独立空间向量法处理了空间机构震动力的完全平衡问题^[150]。

5.16 力和力矩平衡的计算机程序

名为“BALANCE①”可以对任何四杆机构进行力平衡或力和力矩平衡的计算。输入量为不平衡机构的参数(诸如构件长、质心位置、质量等等)以及用作配重材料的密度和配重半径的选择。在此程序中,假定配重为圆形并在周边上销接,还假定震动力矩的平衡,只有在连杆(构件3)是物理摆且只在构件2和构件4上添加配重的情况才能实现。这个程序的流程图示于图5.71。下面是这个程序的输出式样。

① 要了解更多的情况,请与 University of Minnesota 的 Dianne Rekow 联系。

程 序 原 文	译 文
<p>ENTER THE MASS OF LINKS 2, 3, AND 4 (LBM) ? .102, .274, .120</p>	<p>输入构件2, 3, 4的质量(磅) ? .102, .274, .120</p>
<p>ENTER THE LENGTHS OF LINKS 2, 3, AND 4 (PIN-TO-PIN LENGTHS) (INCHES) ? 2, 6, 3</p>	<p>输入构件2, 3, 4的长度(铰链间长度)(吋) ? 2, 6, 3</p>
<p>ENTER THE DISTANCE FROM THE PIN TO THE CENTER OF MASS FOR LINKS 2, 3, AND 4 (FROM PIN 2 TO CENTER OF MASS FOR LINK 3) (INCHES) ? 1, 3., 19, 1.5</p>	<p>输入构件 2, 3, 4 从铰链到其质心的距离(对构件 3 是从 铰链 2 到构件 3 的质心)(吋) ? 1, 3., 19, 1.5</p>
<p>ENTER THE DISTANCE FROM PIN 3 TO THE CENTER OF MASS FOR LINK 3 (INCHES) ? 3.063</p>	<p>输入从铰链 3 到构件 3 质心的距离(吋) ? 3.063</p>
<p>ENTER THE ANGLE BETWEEN THE PIN-TO-PIN LENGTH AND THE PIN-TO-CENTER OF MASS LENGTH FOR LINKS 2, 3, AND 4 (DEGREES) ? 0, 16, 0</p>	<p>输入构件2, 3, 4的铰链-铰链之间的连线和铰链与质心连 线之间的夹角(度) ? 0, 16, 0</p>
<p>ENTER THE ANGLE BETWEEN THE LINE CONNECTIONS PINS 2 AND 3 AND THE CENTER OF MASS (MEASURING FROM PIN 3) (DEGREES) ? 163.3</p>	<p>输入铰链 2 与 3 之间的连线和铰链 3 与质心连线之间的 角度(度) ? 163.3</p>
<p>DO YOU WISH TO FORCE BALANCE ONLY OR DO YOU WISH TO COMPLETELY BALANCE THE LINKAGE? (FORCE ONLY=1 BOTH=2) ? 1</p>	<p>你希望仅进行力的平衡还是力和力矩两者都平衡?(力平 衡=1, 两者=2) ? 1</p>
<p>WHICH TWO LINKS DO YOU WISH TO CHANGE? ? 2, 4</p>	<p>你想改动哪两个构件? ? 2, 4</p>
<p>CAN YOU ALTER THE EXISTING LINK CONFIGURATION? (YES=1, NO=0) ? 1</p>	<p>你能改变现存构件的形状吗? (能=1, 不能=0) ? 1</p>
<p>DO YOU WISH TO ALTER MASS OR DISTANCE TO THE CENTER OF MASS? (MASS=1, DISTANCE=2) ? 1</p>	<p>你希望改变质量, 还是改变质心的距离?(改变质量=1, 改变距离=2) ? 1</p>
<p>LINKS TO BE BALANCED VIA ALTERING CURRENT DESIGN: 2 4 PRODUCT OF MASS \times DISTANCE FOR LINK 2 WHEN BALANCED IS .279754 LBM·INCH NEW ANGLE TO CENTER OF MASS OF LINK 2=163.300 DEGREES PRODUCT OF MASS \times DISTANCE FOR LINK 4 WHEN BALANCED IS .437030 LBM·INCH</p>	<p>通过改变现设计来平衡的构件为: 2 4 平衡后, 构件 2 的质量与距离的积为: .279754(磅·吋) 构件 2 质心的新角=163.300(度) 平衡后构件 4 的质量与距离的积为: .437030(磅·吋)</p>

(续)

程 序 原 文	译 文
NEW ANGLE TO CENTER OF MASS OF LINK 4=196.000 DEGREES DO YOU WISH TO INVESTIGATE THE SAME CASE BUT WITHOUT ALTERING THE EXISTING LINKS? (YES=1, NO=2) ? 1	构件 4 质心的新角度=196.000(度) 你是否想不改动现有的构件而进行同样的计算?(是=1, 否=2) ? 1
FORCE BALANCE VIA ADDING COUNTERWEI- GHTS LINKS CHANGED 2 4 MASS×DISTANCE TO CENTER OF MASS FOR LINK 2 COUNTERWEIGHTS= .378588 LBM. INCH PS12= 167.741 DEGREES MASS×DISTANCE TO CENTER OF MASS FOR LINK 4 COUNTERWEIGHTS= .612071 LBM. INCH PS14= 191.351 DEGREES DO YOU WISH TO INVESTIGATE ANOTHER CASE? (YES=1, NO=0) ? 1	通过添加配重来实现力平衡 附加配重的构件 对构件 2 配重, 质量与质心距离之积=.378588(磅·吋) PS12=167.741(度) 对构件 4 配重, 质量与质心距离之积=.612071(磅·吋) PS12=191.351(度) 你想再计算另一种情况吗?(是=1, 否=0) ? 1
*****	*****
ENTER THE MASS OF LINKS 2, 3, AND 4(SLUGS) ? .0031, .0054, .0045	输入构件 2, 3, 4 的质量(斯拉格)? .0031, .0054, .0045
ENTER THE LENGTHS OF LINKS 2, 3, AND 4(PIN-TO-PIN LENGTHS) (INCH) ? 1, 4, 3	输入构件 2, 3, 4 的长度(铰链-铰链)(吋) ? 1, 4, 3
ENTER THE DISTANCE FROM THE PIN TO THE CENTER OF MASS FOR LINKS 2, 3, AND 4 (FROM PIN 2 TO CENTER OF MASS FOR LINK 3) (INCH) ? 5, 2, 1.5	输入构件 2, 3, 4 上铰链到质心的距离(吋)(对构件 3 为从 铰链 2 到其质心的距离) ? 5, 2, 1.5
ENTER THE DISTANCE FROM PIN 3 TO THE CENTER OF MASS FOR LINK 3 (INCH) ? 2	输入构件 3 上铰链 3 到其质心的距离(吋) ? 2
ENTER THE ANGLE BETWEEN THE PIN-TO-PIN LENGTH AND THE PIN-TO-CENTER OF MASS LENGTH FOR LINKS 2, 3, AND 4(DEGREES) ? 0, 0, 0	输入构件 2, 3, 4 的铰链-铰链之间的连线和铰链与质心连 线之间的夹角(度) ? 0, 0, 0
ENTER THE ANGLE BETWEEN THE LINE CON- NECTIONS PINS 2 AND 3 AND THE CENTER	输入铰链 2-3 之间的连线和铰链 3 与质心连线间的角度 (度)? 180

(续)

程 序 原 文	译 文
OF MASS (MEASURING FROM PIN3) (DEGREES) ‡ 180	
DO YOU WISH TO FORCE BALANCE ONLY OR DO YOU WISH TO COMPLETELY BALANCE THE LINKAGE? (FORCE ONLY=1 BOTH=2) ‡ 2	你希望仅进行力的平衡还是力和力矩两者都平衡 (仅力 平衡=1, 两者都平衡=2) ‡ 2
WHAT IS THE DENSITY OF THE MATERIAL OF THE COUPLER? (LBF/CU IN) ‡ 283	连杆的材料密度是多少? (磅/吋 ³) ‡ .283
IS THE COUPLER AN IN-LINE RECTANGULAR BAR WHICH CAN BE RECONFIGURED OR IS THE PIN-TO-PIN LENGTH SET SO MASS CAN ONLY BE ADDED TO THE ENDS? (RECONFIGURATION POSSIBLE=1, NOT PO- SSIBLE=2) ‡ 2	连杆是可以改变形状的矩形杆吗? 或, 是否铰链-铰链的 长度固定而使质量只能加在构件的端部? (可改变尺寸= 1, 不能改变尺寸=2) ‡ 2
WHAT IS THE WIDTH OF THE LINK (INCHES)? ‡ .5	构件宽度为多少(吋)? .5
WHAT IS THE THICKNESS OF THE LINK? (INCHES) ‡ .2	构件厚度为多少(吋) .2
ASSUME COUNTERWEIGHTS TO ACHIEVE FOR- CE BALANCE ARE CIRCULAR, ARE OF EQUAL THICKNESS, AND ARE PIVOTED ON THEIR PERIPHERY. DO YOU WISH TO USE THE SAME MATERIAL AS USED FOR THE OTHER LINKS? (YES=1, NO=0) ‡ 1	假设用来实现力平衡的配重是圆形的、等厚度, 而且在 其周边销接。你是否希望用与其它构件同样的材料? (是=1, 否=0) ‡ 1
WHAT THICKNESS OF THE COUNTERWEIGHTS? (INCHES) ‡ .5	配重的厚度为多少(吋) .5
ASSUME CIRCULAR DISCS PROVIDE THE INE- RIA COUNTERWEIGHTS REQUIRED, GEARED 1:1 TO THE INPUT AND OUTPUT LINKS 2 AND 4.	假定圆盘提供所需要的惯性配重, 而且以 1:1 的速度与 输入件 2 和输出件 4 啮合。
IS THE DENSITY OF THESE COUNTERWEI- GHTS TO BE THE SAME AS FOR THE COUPLER, SAME AS THE FORCE COUNTERWEIGHTS, OR DIFFERENT FROM EITHER OF THESE? ‡ 1	这些配重的密度与连杆的一样吗? 与力平衡用的配重一 样吗? 还是与以上两者都不同? (与连杆一样=1, 与力平 衡用的配重一样=2 否则=3) ‡ 1

(续)

程 序 原 文	译 文			
(SAME AS COUPLER=1, AS FORCE COUNTER WEIGHTS=2, DIFFERENT=3)				
? 1				
WHAT IS THE DESIRED THICKNESS OF THE COUNTER-WEIGHTS(ASSUME THEY ARE EQUAL THICKNESS)? (INCHES)	希望两个配重的厚度为多少?(设它们都一样厚)(吋)			
? 1	? 1			
WHAT IS THE RADIUS OF GYRATION OF THE UNBALANCED MECHANISM(FOR LINKS 2 AND 4)? (INCHES)	不平衡机构(构件 2 和 4)的旋转半径为多少?(吋)			
? .593, 1.261	? .593, 1.261			
PARAMETERS FOR COMPLETELY BALANCED LINKAGE	.593 完全平衡机构的参数			
LINK(构件)	2 3 4			
WRSTAR LBF·INCH	W*R*(磅·吋)	.137		.478
WSTAR LB	W*(磅)	.202	.053	.467
RSTAR INCH	R*(吋)	.678		1.024
KSTAR INCH	K*(吋)	.479	2.000	.724
BALANCED WT LBF	平衡后的重量(磅)	.302	.227	.612
BALANCED R IN	平衡后的 R(吋)	.377	2.000	.557
BALANCED K IN	平衡后的 K(吋)	.765	2.000	1.395
CTWT I LBF·IN**2	配重的转动惯量(磅·吋 ²)	.010		.075
RADIUS OF I CWT IN	配重的半径(吋)	.391		.640
ANGLE TO C OF MASS DEGREES	到质心的角度(度)	180.000	0	180.001
DO YOU WISH TO INVESTIGATE ANOTHER CASE?(YES=1, NO=0)	你想再算另一种情况吗? (是=1, 否=0)			
? 0	? 0			

程序 BALANCE 的输出:

计算机输出是为与课文中例 5.12 和 5.15 所用的相同的数值作的。

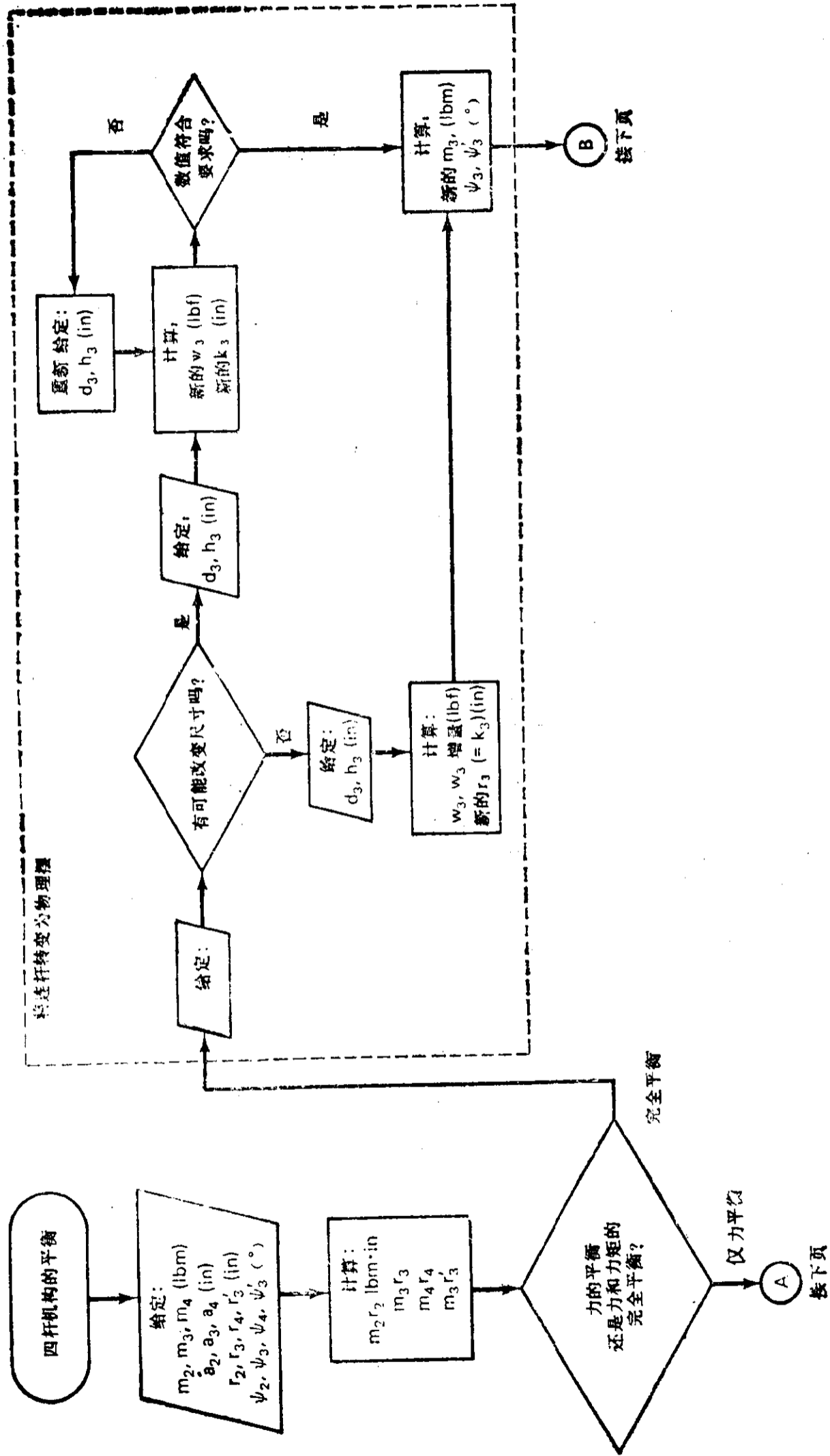


图 5.71 用于四杆机构平衡的交互式计算机程序流程图

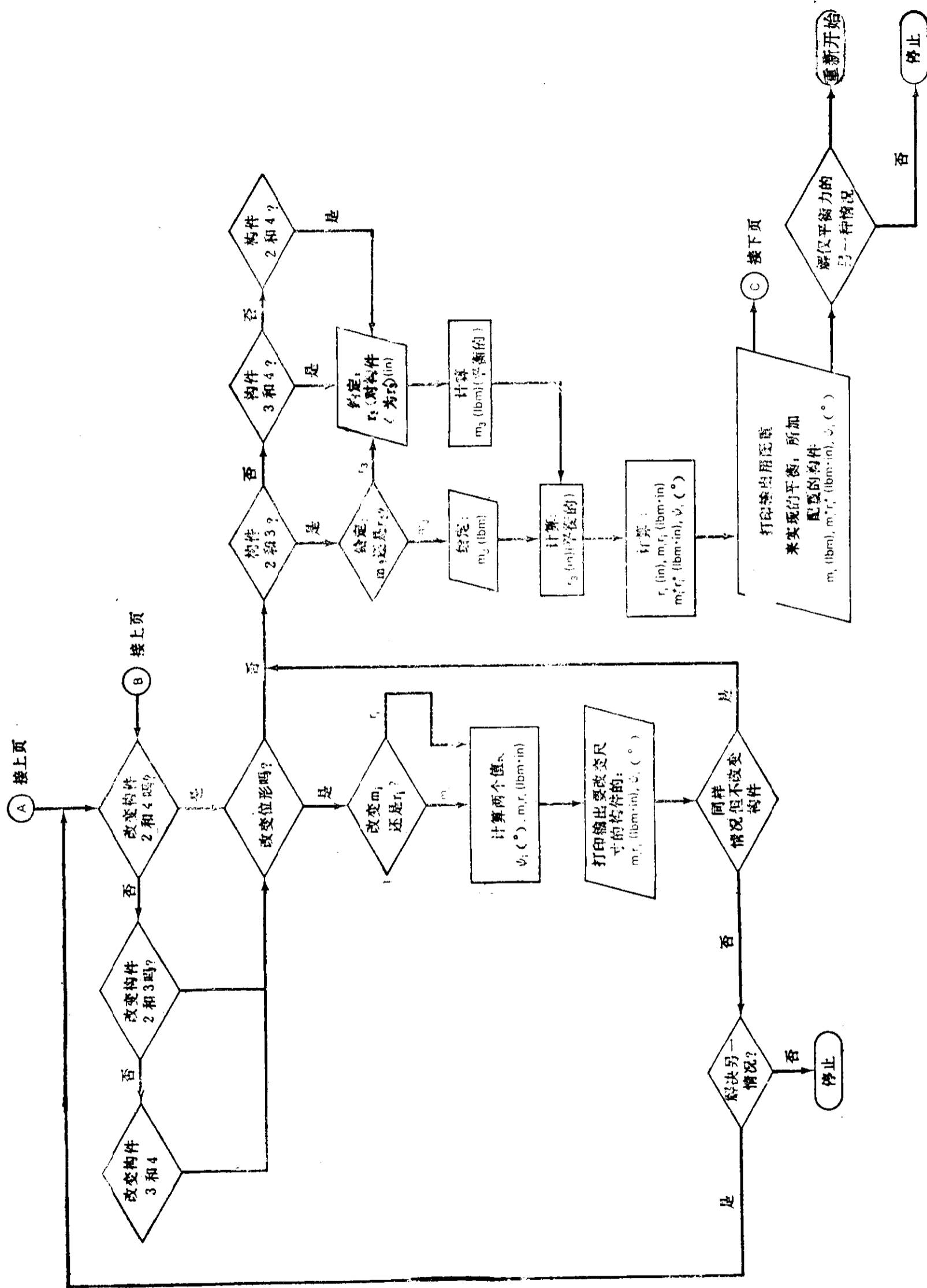


图 5.71(续 1)

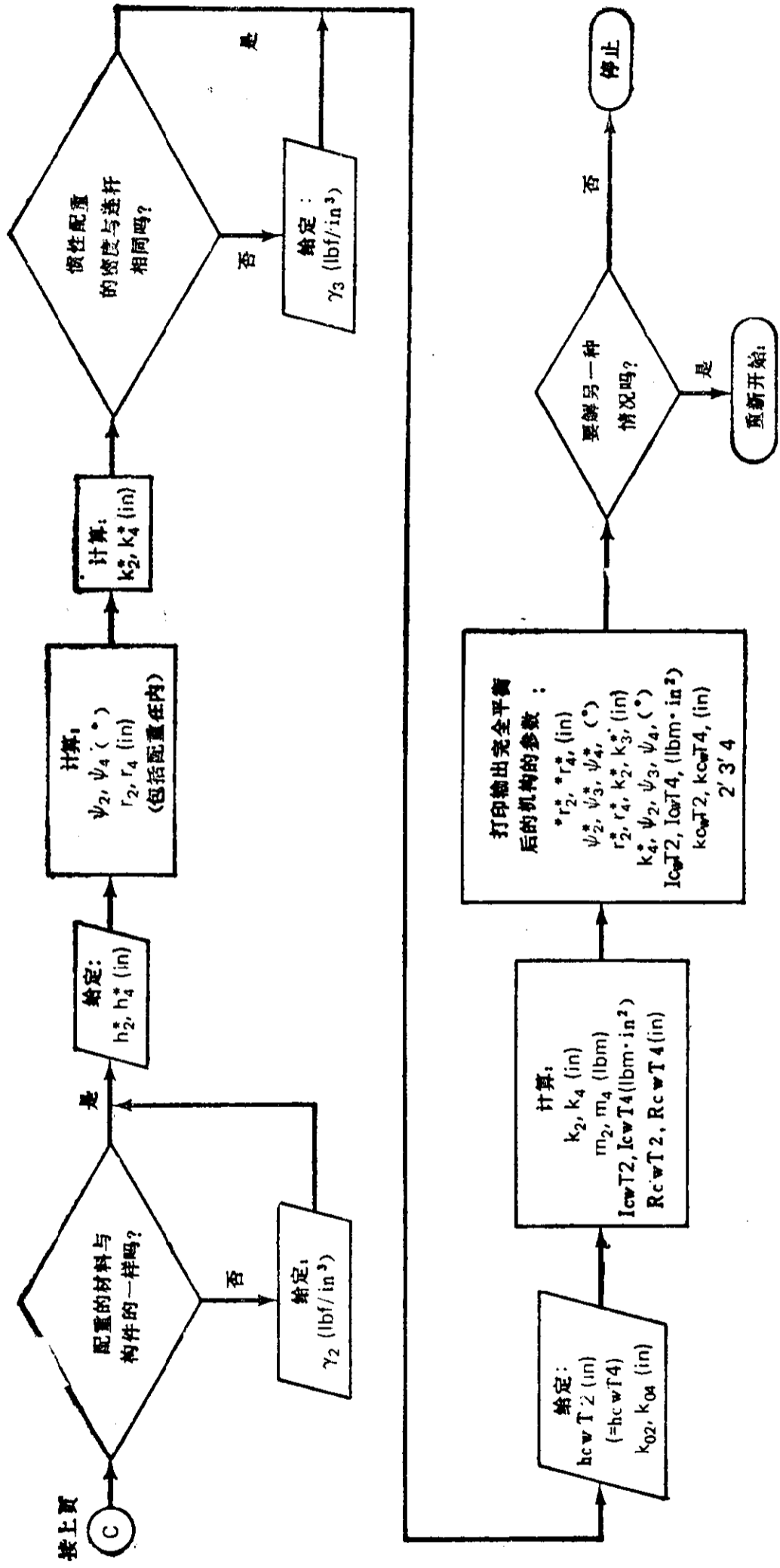


图 5.71 (续 2)

代号说明

m_i ——构件 i 的质量 (lbm)

a_i ——构件 i 的长度 (in.)

r_i ——对构件 i , 从铰链到质心的距离 (in.) (参看图 5.58)

$r_{32}^{\text{①}}$ ——从铰链 2 到构件 3 质心的距离 (in.) (参看图 5.58)

ψ_i ——对构件 i , 铰链到铰链的连线和铰链到质心连线之间的夹角 (度)

ψ_3 ——铰链 2 到 3 连线和铰链 3 到构件 3 质心连线之间的夹角 (度)

γ_3 ——连杆的密度 (lbf^②/in³)

d_3 ——连杆的宽度 (in.)

h_3 ——连杆的厚度 (in.)

k_i ——构件 i 的回转半径 (in.)

$m_i^* r_i^*$ ——用于力平衡的配重的质量与半径之积 (lbm·in) (测量 r_i^* 的起点与测量构件 i 的质心起点一样)

γ_2 ——用于力矩平衡的配重的密度 (lbf^②/in³)

h_i^* ——用于力平衡的配重厚度 (in.)

k_i^* ——用于力平衡的配重的回转半径 (in.)

γ_3 ——惯性配重的密度 (lbf^②/in³)

hcwT2——构件 2 的惯性配重的厚度 (in.)

hcwT4——构件 4 的惯性配重的厚度 (in.)

k_i^0 ——未平衡构件的回转半径 (in.)

I_{cwT2} } —— 惯性配重的转动惯量 (lbm·in²)
 I_{cwT4} }

K_{cwT2} } —— 构件 2、构件 4 的配重的回转半径 $\rho/\sqrt{2} =$ (in.)
 K_{cwT4} }

$\rho_{2,4}$ ——构件 2、构件 4 上圆盘形配重的半径, = 构件 2、构件 4 的固定铰链到配重质心的距离 (in.)

5.17 平衡——附录 A: 物理摆^[287, 288]

在这本书中, 一个两副构件如果无摩擦地悬挂在两个销轴中的任何一个上, 都有相同的摆动周期, 该两副构件有如一个质量集中在重心的理想摆, 该理想摆吊在一个长度为两副构件的回转半径 k 的无质量杆上。因此, 一个物理摆两副构件, 不论悬挂在哪一端, 都有相同的回转半径。也就是说, 此构件相对于其中点是对称的, 其质心位于中心线上。如果这些条件满足, 回转半径 k 由下式稳定^[18, 20],

$$k^2 = rr' \quad (5.264)$$

式中 r 和 r' 是从铰销到重心的距离。

有两种可能的构形满足这些一般条件: 矩形杆和两端增大的杆件 (augmented link)。为了简单起见, 我们只考虑对称的杆件 (即质心位于两销轴连线的中点)。

矩形杆

矩形杆的形状尺寸表示在图 5.72 中。如果该杆要成为物理摆, 那么它必须满足:

① 原文为 r_i ——译者注

② 原文如此, 但似应为 lbm ——译者注

$$\frac{e}{d} = \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{a}{d} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} - \frac{a}{2d} \quad (5.265)$$

和
$$\frac{l}{d} = \frac{a}{d} + 2 \left(\frac{e}{d} \right) \quad (5.266)$$

这时回转半径由下式确定

$$k^2 = rr' = r^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 \textcircled{1} \quad (5.267)$$

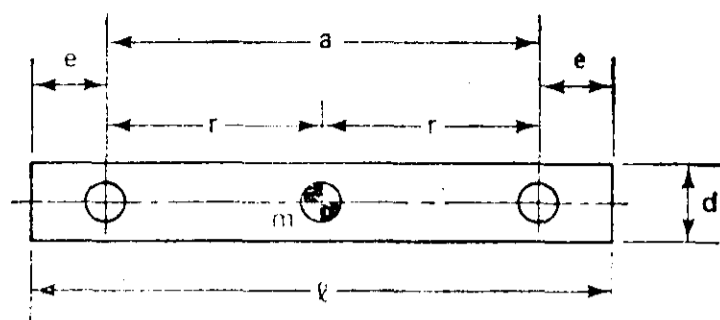


图 5.72 同一厚度的矩形杆。表 5.15 给出满足物理摆条件的比率数值

表 5.15 列出了这些比率的一些数值。

表 5.15 物理摆-矩形杆的参数(参看图 5.72)

a/d	e/d	l/d
2	0.658	3.317
3	1.050	5.099
4	1.428	6.856
5	1.801	8.602
6	2.072	10.344
7	2.542	12.083
8	2.910	13.820
9	3.278	15.556
10	3.646	17.292

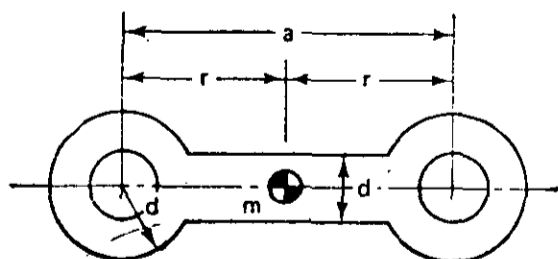
两端增大杆件

图 5.73 示出了两端增大杆件的尺寸结构。为了满足作为物理摆的条件,要在此杆两端各加一个增大质量 m^* 。图 5.74 给出了添加质量 m^* 的一种结构。当然,还有许多其它结构也是可行的。构件转变为物理摆的参数条件是, d 和 e 的值必须选取为下式的解而且是一组实际的值:

$$A \left(\frac{e}{d} \right)^3 + B \left(\frac{e}{d} \right)^2 + C \left(\frac{e}{d} \right) + D = 0 \quad (5.268)$$

式中 $A=8$

$$B = 12 \left(\frac{a}{d} \right) + 24$$



均匀厚度 h 和密度 ρ

图 5.73 同一厚度的两端增大杆件的结构

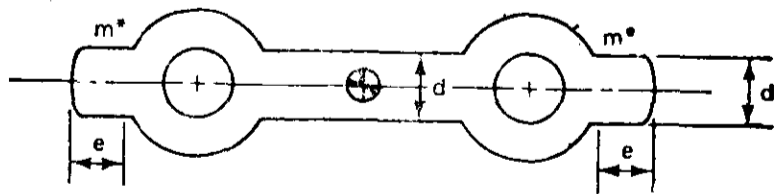


图 5.74 在图 5.73 所示的两端增大杆件的两端添加质量 m^* , 使之变为一个物理摆。其尺寸比例参看表 5.16

① 原文为 $k=rr'=r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ——译者注

$$C = 24 \left(\frac{a}{d} \right) + 26$$

$$D = -2 \left(\frac{a}{d} \right)^3 + 13 \left(\frac{a}{d} \right) + 12\pi - 10$$

表 5.16 给出了同一密度、同一厚度的杆件的这些比率的选取值。注意,当密度增加时,或宽度 d 增加时, e 将变小。

表 5.16 物理摆—两端增大杆件的参数(图 5.74)

a/d	e/d
4	0.330
5	0.740
6	1.130
7	1.511
8	1.887
9	2.260
10	2.631

5.18 平衡——附录 B: 配重形状对平衡的影响

正如我们看到的那样,在添加了用来实现力和力矩平衡的配重以后,对输入扭矩产生很大的影响。F·R·赫特里希(F·R·Hertrich)^①[128]指出了尽量减小这些附加配重所产生的惯性作用的途径。他的结论如下:

配重材料的密度应尽可能大些;

配重应为圆柱形的,且其轴线要平行于旋转中心;

只要设计条件许可,圆柱体要尽可能加长;

从理论上讲,圆柱体要与旋转中心相切,即使在旋转中心有转动轴也要如此。

如果在旋转中心没有转动轴阻挡,那么配重的半径应由下式确定:

$$R = \left(\frac{A}{\pi \gamma L} \right)^{1/3} \quad (5.269)$$

式中 R ——半径(in.)

A ——重量与从配重质心到其转轴之间距离之积(lbf·in)

γ ——比重(lbf/in³)

L ——圆柱体的长度(in.)

如果在中心有转轴或轴毂,那么圆柱体的半径可由下式确定:

$$R = \frac{r_0}{2 \cos \alpha} \quad (5.270)$$

式中 R ——配重的外径(in.)

① 文献[265]扩展了赫特里希的最小惯性配重的想法。

r_0 ——在旋转中心的转轴或轴毂的半径(in.)

α ——由下列关系求出

$$\frac{A}{Lvr_0^3} = \frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{16\cos^3\alpha} \quad (5.271)$$

式中 α 的单位为弧度。

5.19 高速弹性机构的分析^①

背景:

到现在为止,机构力分析中的所有考虑,不论是静力的还是动力的,都假定构件是刚体。对含有弹性构件的机构进行数学分析的复杂程度一直阻碍着我们放弃对构件是刚体的假设。因而,设计师时常忽略机构构件中的振动,机器零件经常被设计得过分安全,同时准静态力的刚体分析由于比较简单而乐于被采用。由于忽视了在动力条件下构件的变形,可能会造成机器在高速下不能正常工作。在考虑构件的弹性和质量分布条件下,对机构运动进行研究的领域称作机构的运动弹性动力学(Kineto-elasto-dynamics),缩写为(KED)。^[74,86]

在高速情况下,机构的质量分布和弹性的影响变得很大。对于不同的机构,“高速”可指不同的速度。这个术语的一种可解释为在这种速度下,惯性力变得很大而不可忽略不计。进一步看,在某几个速度下,这些惯性力(除外加的力,如图 5.75 所示的滑块-曲柄冲床在冲活时钢板的阻力以外),可能激励起机构的一个或多个振动模式。在机构的某些紧要部位所造成的变形可能使得机构的性能不合格。高应力伴随着大量的应力交变可能会导致机构由疲劳而过早损坏。高速运转所引起的其它问题是难于实现平衡和保证平稳,难以避免由于相连构件之间轴承的间隙而造成的“冲击”。

洛温和詹德朗西希 (Lowen and Jandrasits) ^[175] 以及厄尔德曼和桑多尔 (Erdman and Sandor) ^[87] 对含有弹性构件的机构动力特性的有关研究进行过综述。文献 [7, 8, 138-140, 154, 183, 194, 285, 289, 300, 327] (这里远没有将所有的文献都列出) 对机构分析中弹性效应的研究通常都是涉及滑块-曲柄机构,有的则涉及四杆曲柄-摇杆机构。这一组的研究者把弹性构件当作连续系统来处理,连杆或从动件被考虑为机构中仅有的弹性元件。对这些机构在某些简化假设下,导出了运动方程^[8],并用模拟或数字计算的方法来得到其动力响应。

另一组研究者(例如[1, 65, 74, 145, 153, 157, 189, 226, 276, 292, 314])把弹性构件处理为离散系统。即把连续体分为有限多个质量和弹簧,对所得有限个耦合的常微分方程进行求解。他们使用的方法有两种,即有限单元法和有限差分法。使用了有限差分法的集重参数法 (Lumped parameter) ^[228,158]。已成为一种很有用的方法。结构分析的有限元理论(如[48, 52, 53, 130, 133, 177, 182, 206, 297, 325])也已经通过“力法”^[74,90]和“位移法”^[134,169,292,314]应用于建立弹性构件机构的模型。在采用各种分析方法的同时,研究者们已经通过对高速弹性构件机构进行实

^① 本章的余下部分是由普渡大学(Purdue Univ.)的阿索克·米德哈 (Ashok Midha) 对高速机构的研究基础上整理的。

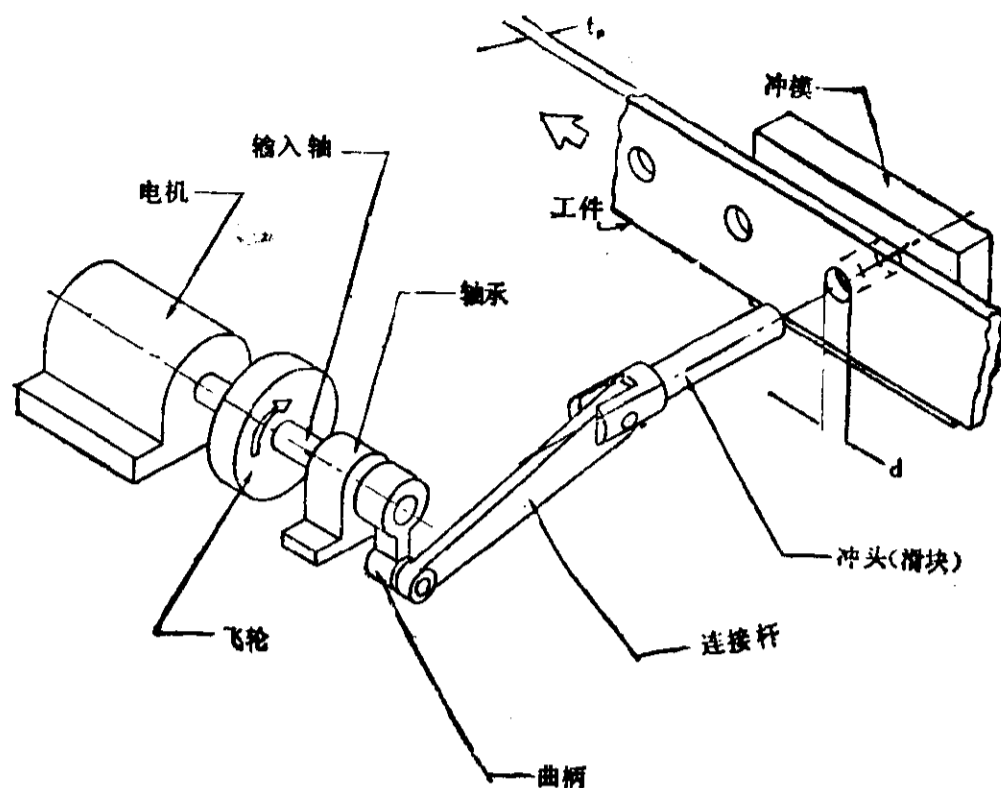


图 5.75 马达驱动的滑块-曲柄冲床的示意图

验研究^[1,68,112,138,276,292]来对他们各自的方法寻求验证。有限元法现已在工程中很完善地建立起来,它可以用来模拟二维和三维的系统。现在在文献中可以找到很多关于有限元的完备资料。

对平面机构的刚体分析可用图解法,也可用代数法或两者结合来完成。弹性变形将通过(在刚体自由度的基础上)给机构增加一定数量的弹性自由度来考虑。因而,一个弹性机构就有很多自由度,并有相应数量的耦合运动微分方程。通常说来,不借助于数字计算机,要分析弹性机构的问题是不可能的。这一节的目的是要给读者提供一套把各单元相互连接成一个系统从而解决弹性机构问题的方法。为此,我们在这里提供了一些有关有限元法的初步说明。读者还应该参阅上面提到的有限元法的教科书,特别是在模拟复杂的机构系统和应用更加精细的单元形式时,更是如此。文献^[200,203,326]也是有关有限元法的。

引言

这一章的余下部分要介绍一种建立高速机械中平面机构运动方程的通用方法。以节点的弹性位移作为未知量的位移有限单元法,可用来建立弹性机构的质量和刚度特性。为了说明分析中的各个步骤,这里利用了一个四杆机构作为例子。然而,这种方法可以容易地推广到其它平面多环机构中。我们首先研究一个典型的弹性平面梁单元,导出其节点的位移和加速度表达式(该表达式包括弹性运动和刚体运动的耦合项)。然后,将机构模拟成由许多这样的梁单元组成,并用矩阵的形式表示它的运动方程。这一部分还介绍了将所有单元进行系统组合,从而得到整个系统的无阻尼运动方程的方法。为了将阻尼考虑进运动方程,节 5.27 复习了确定结构阻尼的传统形式。同时,我们还要介绍一些假定,这是专门为简化分析过程以及方便数值计算而作的。节 5.30 中讨论了一些计算振动响应的数值方法。

在力有限单元法中,内力被假定为未知,我们是应用平衡条件来导出方程,从而求出内力。还要根据相容条件建立另外一些方程。

对于大量结构和机构问题，位移有限单元法通常认为简单得多。因此，本章中就用这种方法。在单元之中和单元之间的相容条件一开始就是满足的。我们是利用每一节点的平衡条件以节点位移的形式来表示运动方程的。

图 5.76 所示的平面四杆弹性机构是用连接一系列梁单元来模拟的。它们被连接成使模型可以说明各种不同几何尺寸的机构。为了简单起见，把典型构件当作是全长都具有同一横截面的基本结构(梁)单元。这一单元的分析模型将使标准的结构动力学方法便于采用。正如图 5.76 所示，偏离机构刚体运动形状(虚线)的小弹性位移(实线)将得到模拟。

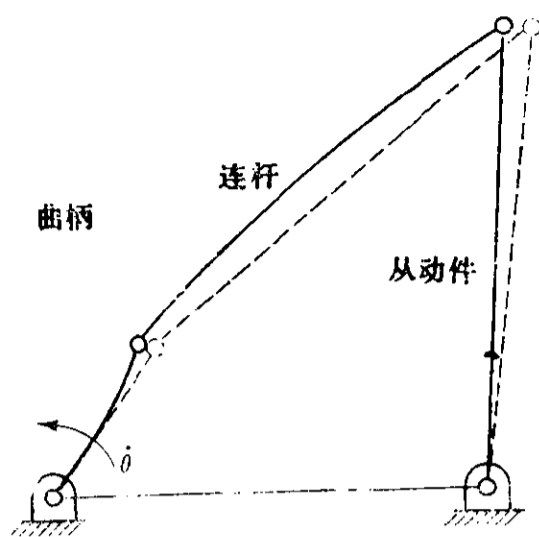


图 5.76 带有弹性构件的四杆曲柄-摇杆机构
(偏离刚体位置)

我们用一个梁单元来模拟每个构件。根据将要在后一节介绍的假定位移形状函数，沿着梁单元最多只许有一个拐点。因此，可以正确计算的振型数是每个构件上单元数目的函数。同时，正象文献[206]和[292]介绍的那样，构件用一个单元来理想化会产生有误差的(即偏高的)振型频率。我们之所以选择一个单元理想化只是为了说明问题简单起见。应用假定的位移函数所导出的质量矩阵称为相容质量矩阵(consistent mass matrix)。

5.20 平面运动中的弹性梁单元

图 5.77 示出了一个代表机构中一个构件的一般梁单元(未示出其它构件)。有两个参考坐标系——固定的 OXY 坐标系和转动的 Oxy 坐标系，它们具有相同的原点。转动坐标系的 x 轴在运动过程中始终平行于梁单元轴线的刚性位置。图中表示了梁单元在它的刚体位置(虚线)以及它弹性变形后的位形(实线)。可以用六个广义节点位移坐标 u_1 到 u_6 来完全描述梁单元的弹

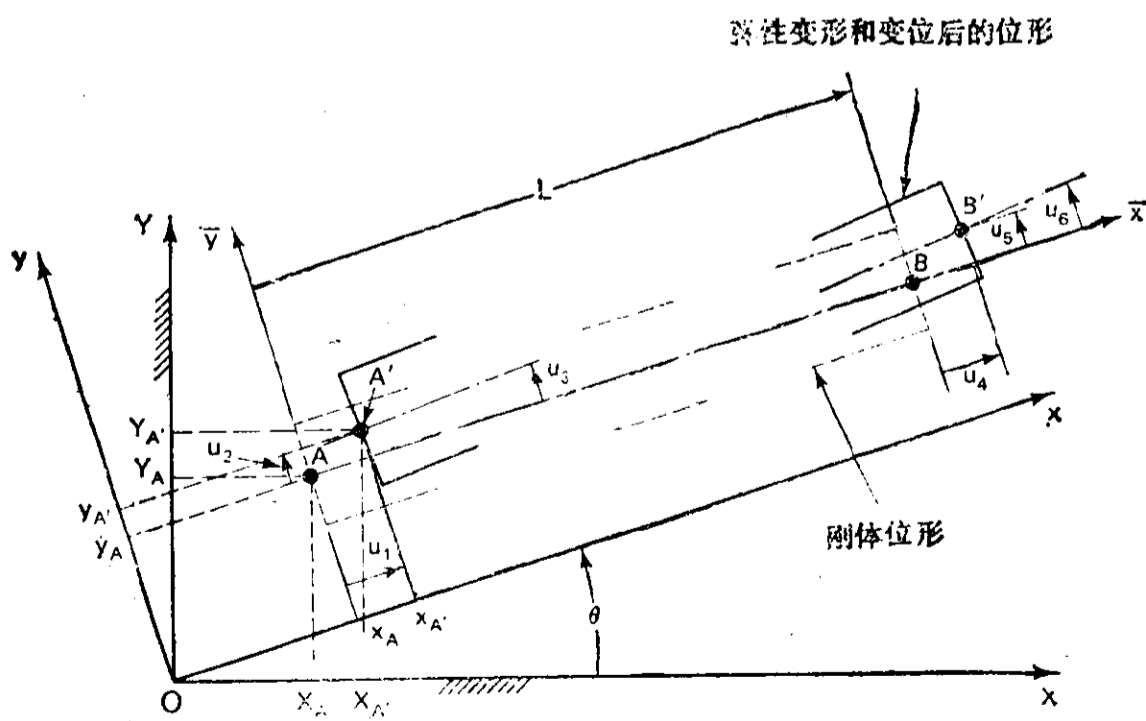


图 5.77 梁单元的刚体位形和经弹性变形或位移后的位形，表示为对固定坐标系和转动坐标系的广义位移 u_1, u_2, \dots, u_6

性变形,如图 5.77 所示。这些表示在相对于梁单元的刚体位置正方向上的位移确定着节点 A 和 B 变形后的位置 A' 和 B' 。从图 5.77, 我们可以在固定的 OXY 坐标系中得到如下的关系式:

$$\begin{aligned} X_{A'} &= X_A + u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta \\ Y_{A'} &= Y_A + u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \\ \theta_{A'} &= \theta + u_3 \end{aligned} \quad (5.272)$$

将式(5.272)对时间逐次取导数,可以得到表示在固定坐标系中的节点 A 的速度和加速度的表达式:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{A'} &= \dot{X}_A + \dot{u}_1 \cos \theta - u_1 \dot{\theta} \sin \theta - \dot{u}_2 \sin \theta - u_2 \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{Y}_{A'} &= \dot{Y}_A + \dot{u}_1 \sin \theta + u_1 \dot{\theta} \cos \theta + \dot{u}_2 \cos \theta - u_2 \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\theta}_{A'} &= \dot{\theta} + \dot{u}_3 \end{aligned} \quad (5.273)$$

以及

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{A'} &= \ddot{X}_A + \ddot{u}_1 \cos \theta - 2\dot{u}_1 \dot{\theta} \sin \theta - u_1 \dot{\theta}^2 \cos \theta - u_1 \ddot{\theta} \sin \theta - \ddot{u}_2 \sin \theta \\ &\quad - 2\dot{u}_2 \dot{\theta} \cos \theta + u_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - u_2 \ddot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{Y}_{A'} &= \ddot{Y}_A + \ddot{u}_1 \sin \theta + 2\dot{u}_1 \dot{\theta} \cos \theta - u_1 \dot{\theta}^2 \sin \theta + u_1 \ddot{\theta} \cos \theta + \ddot{u}_2 \cos \theta \\ &\quad - 2\dot{u}_2 \dot{\theta} \sin \theta - u_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta - u_2 \ddot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{\theta}_{A'} &= \ddot{\theta} + \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad (5.274)$$

式(5.274)中相对于固定坐标系(OXY)的绝对加速度可以借助下列变换表示在旋转坐标系(Oxy)中:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{A'} &= \ddot{X}_{A'} \cos \theta + \ddot{Y}_{A'} \sin \theta \\ \ddot{y}_{A'} &= -\ddot{X}_{A'} \sin \theta + \ddot{Y}_{A'} \cos \theta \\ \ddot{\theta}_{A'} &= \ddot{\theta} + \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad (5.275)$$

式中我们认为 $\ddot{X}_{A'} = (\ddot{r}_{A'})_X$ 和 $\ddot{Y}_{A'} = (\ddot{r}_{A'})_Y$ 。

同样,如果认为 $\ddot{x}_{A'} = (\ddot{r}_{A'})_x$ 和 $\ddot{y}_{A'} = (\ddot{r}_{A'})_y$, 那么可将式(5.274)和(5.275)联立,并加以简化,得到:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{A'} &= \ddot{x}_A + \ddot{u}_1 - u_1 \dot{\theta}^2 - 2\dot{u}_2 \dot{\theta} - u_2 \ddot{\theta} \\ \ddot{y}_{A'} &= \ddot{y}_A + \ddot{u}_2 - u_2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{u}_1 \dot{\theta} + u_1 \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_{A'} &= \ddot{\theta} + \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad (5.276)$$

式(5.276)表示了梁单元的节点 A 在 Oxy 坐标系中的绝对加速度。

同样,对于节点 B , 我们有:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{B'} &= \ddot{x}_B + \ddot{u}_4 - u_4 \dot{\theta}^2 - 2\dot{u}_5 \dot{\theta} - u_5 \ddot{\theta} \\ \ddot{y}_{B'} &= \ddot{y}_B + \ddot{u}_5 - u_5 \dot{\theta}^2 + 2\dot{u}_4 \dot{\theta} + u_4 \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_{B'} &= \ddot{\theta} + \ddot{u}_6 \end{aligned} \quad (5.277)$$

式中,运动量 $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B, \ddot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 表示单元的刚体运动,若以固定坐标系中的量来表示,则为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A &= \ddot{X}_A \cos \theta + \ddot{Y}_A \sin \theta \\ \ddot{y}_A &= -\ddot{X}_A \sin \theta + \ddot{Y}_A \cos \theta \end{aligned}$$

下面,我们来定义如下的列向量:

$$\{u_{ai}\} = \begin{Bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \\ \theta_{A'} \\ x_{B'} \\ y_{B'} \\ \theta_{B'} \end{Bmatrix} \text{和} \{u_{ri}\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ \theta \\ x_B \\ y_B \\ \theta \end{Bmatrix}, (i=1, 2, \dots, 6) \quad (5.278)$$

联立式(5.276)到(5.278)得到

$$\begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \\ u_{a3} \\ u_{a4} \\ u_{a5} \\ u_{a6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{r1} + u_1 - u_1 \dot{\theta}^2 - 2\dot{u}_2 \dot{\theta} - u_2 \ddot{\theta} \\ u_{r2} + u_2 - u_2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{u}_1 \dot{\theta} + u_1 \ddot{\theta} \\ u_{r3} + u_3 + 0 + 0 + 0 \\ u_{r4} + u_4 - u_4 \dot{\theta}^2 - 2\dot{u}_5 \dot{\theta} - u_5 \ddot{\theta} \\ u_{r5} + u_5 - u_5 \dot{\theta}^2 + 2u_4 \dot{\theta} + u_4 \ddot{\theta} \\ u_{r6} + u_6 + 0 + 0 + 0 \end{Bmatrix} \quad (5.279)$$

可将式(5.279)重新写为

$$\{u_a\} = \{u_r\} + \{u\} + \{a_n\} + \{a_c\} + \{a_t\} \quad (5.280)$$

上式从左到右的各个向量分别代表绝对加速度、刚体加速度、广义的相对(于梁单元的刚体位置的)加速度、法向加速度、哥氏加速度和切向加速度。对于表示在固定坐标系(OXY)中的式(5.274)的类似的加速度项,也可以加以辨认。式(5.280)中的后三个向量是刚体运动和弹性运动相耦合的项。

如果假定广义位移都很小,并且如果刚体的角速度和角加速度分别与机构振型变形的最低圆频率和频率平方相比很小的话,那么在式(5.280)中,向量 $\{a_n\}$ 、 $\{a_c\}$ 和 $\{a_t\}$ 中的各个乘积项与 $\{u_r\} + \{u\}$ 中相应的项相比就显得很小。因而,这些法向、哥氏和切向加速度项常可略去不计。如果这三项没有包括进去的话,那么设计师应该检查一下最后所得到的位移、速度和加速度的大小以便确信这一假设的确是合理的。当那些项被略去后,式(5.280)就变成

$$\{u_a\} = \{u_r\} + \{u\} \quad (5.281)$$

同样可以证明

$$\{\dot{u}_a\} = \{\dot{u}_r\} + \{\dot{u}\} \quad (5.282)$$

5.21 梁单元的位移场

图5.77中六个广义位移坐标 $\{u_j\}$ 中的每一个,都可以扩展为一个位移场,或形状函数, $\phi_j(\bar{x})$ ($j=1, 2, \dots, 6$)。 $\phi_j(\bar{x})$ 只是沿梁上不同位置的函数,而它们的大小 u_j 是时间的函数。第 j 个形状函数 $\phi_j(\bar{x})$ 定义为:当所有的坐标都限制为零,只把一个单位位移加于第 j 个坐标上时,这个元素所偏移后的平衡位形。

形状函数的选择^[297]必须满足下列的要求:(1)在单元内和当该单元与其它单元相连时在

越过边界处具有连续性；(2) 包含代表相关的应力或应变的不变值(包括零在内)的项；(3) 在与其它单元相邻的边界上满足位移的相容条件。

对于梁单元的轴向变形, 形状函数的合乎逻辑的选择形式是一个有关 \bar{x} 的线性多项式。对于弯曲的情况, 位移场可以用一个 \bar{x} 的三次多项式来表示。文献[133]确定了下列形式:

$$\begin{aligned}\phi_1(\bar{x}) &= 1 - \frac{\bar{x}}{L} \\ \phi_2(\bar{x}) &= 3\left(\frac{L-\bar{x}}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{L-\bar{x}}{L}\right)^3 \\ \phi_3(\bar{x}) &= \bar{x}\left(\frac{L-\bar{x}}{L}\right)^2 \\ \phi_4(\bar{x}) &= \frac{\bar{x}}{L} \\ \phi_5(\bar{x}) &= 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3 \\ \phi_6(\bar{x}) &= -(L-\bar{x})\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2\end{aligned}\tag{5.283}$$

这些形状函数的图形, 见图 5.78。

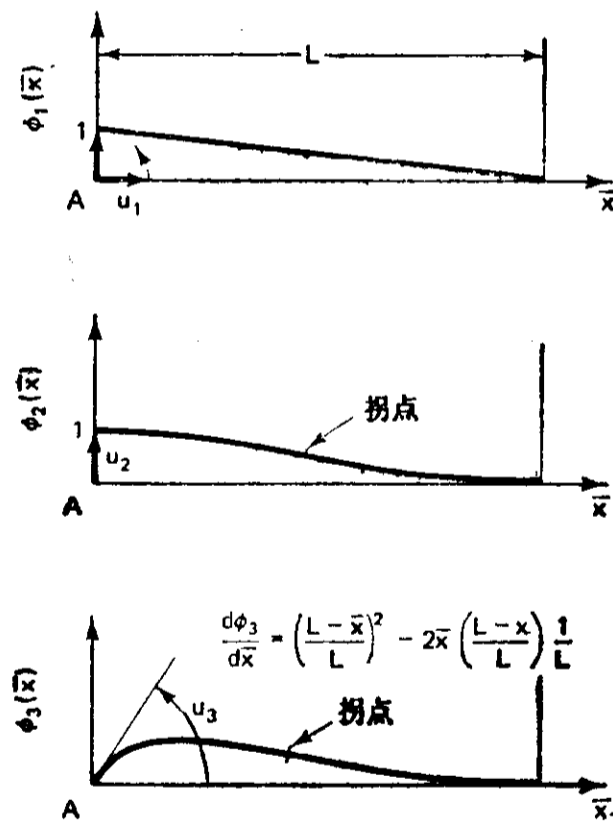


图 5.78 梁单元的形状函数 $\phi_1(\bar{x})$ 、 $\phi_2(\bar{x})$ 和 $\phi_3(\bar{x})$ 。 $\phi_4(\bar{x})$ 、 $\phi_5(\bar{x})$ 和 $\phi_6(\bar{x})$ 也可类似地表示为 \bar{x} 的函数

对于可以应用弹性线性理论的小位移情况, 线性迭加原理允许将相应于各个形状函数的位移求代数和。因此, 横向位移 $w(\bar{x}, t)$ (沿图 5.77 中的 $A\bar{x}y$ 坐标系中的 y 轴测得) 可以写成

$$w(\bar{x}, t) = \phi_2(\bar{x})u_2(t) + \phi_3(\bar{x})u_3(t) + \phi_5(\bar{x})u_5(t) + \phi_6(\bar{x})u_6(t)\tag{5.284}$$

同样地, 轴向位移

$$v(\bar{x}, t) = \phi_1(\bar{x})u_1(t) + \phi_4(\bar{x})u_4(t)\tag{5.285}$$

必须注意, 不论是从物理观点还是从数学观点来看, 选择位移场是很重要的一步。已经发现, 根据假设的位移场所建立的单元, 与根据假设的应力场或位移场与应力场的结合所建立的单元相比, 是很成功的, 具有很强的适应性。下一节, 我们就可以看出假设位移场的重要性。

5.22 单元的质量和刚度矩阵^①

如果选好了 $u_i (i=1, \dots, 6)$ 作为问题的广义坐标, 那么图 5.77 中的弹性梁单元的运动方程可以由拉格朗日方程(参看节 5.6)来表示:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial u_i} = \bar{Q}_i \quad (i=1, 2, \dots, 6) \quad (5.286)$$

式中 \bar{Q}_i 是作用在广义坐标方向上的广义力, 而且没有势能; T 和 U 分别代表动能和应变(势)能, 而且在这里认为 U 是独立于 \dot{u}_i 的。

动能必须是相对于惯性(固定参照)系而言的; 对于梁单元, 动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(\bar{x}) \dot{w}_s(\bar{x}, t)^2 d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^L m(\bar{x}) \dot{v}_s(\bar{x}, t)^2 d\bar{x} \quad (5.287)$$

式中, 单元质量 $m(\bar{x})d\bar{x}$ 的绝对横向和轴向速度为

$$\begin{aligned} w_s(\bar{x}, t) &= \phi_2(\bar{x})\dot{u}_{s2}(t) + \phi_3(\bar{x})\dot{u}_{s3}(t) + \phi_5(\bar{x})\dot{u}_{s5}(t) + \phi_6(\bar{x})\dot{u}_{s6}(t) \\ v_s(\bar{x}, t) &= \phi_1(\bar{x})\dot{u}_{s1}(t) + \phi_4(\bar{x})\dot{u}_{s4}(t) \end{aligned}$$

式中 $\{\dot{u}_{si}\}$ 由式(5.282)定义; $m(\bar{x})$ 是单位长度上的质量。

$$w_s(\bar{x}, t)^2 = \sum_i \sum_j \phi_i(\bar{x})\phi_j(\bar{x})\dot{u}_{si}(t)\dot{u}_{sj}(t), \quad (i, j=2, 3, 5 \text{ 和 } 6) \quad (5.288)$$

$$\begin{aligned} v_s(\bar{x}, t)^2 &= \sum_k \sum_l \phi_k(\bar{x})\phi_l(\bar{x})\dot{u}_{sk}(t)\dot{u}_{sl}(t), \\ &\quad (k, l=1 \text{ 和 } 4) \end{aligned}$$

式(5.287)中的动能由下面的和表示:

$$T = T_w + T_v$$

$$\text{式中 } T_w = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_i \sum_j m(\bar{x})\phi_i(\bar{x})\phi_j(\bar{x})\dot{u}_{si}(t)\dot{u}_{sj}(t)d\bar{x} \quad (5.289)$$

$$\text{和 } T_v = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_k \sum_l m(\bar{x})\phi_k(\bar{x})\phi_l(\bar{x})\dot{u}_{sk}(t)\dot{u}_{sl}(t)d\bar{x}$$

将积分号和求和号互换位置, 然后定义广义质量矩阵 $[m]$ 的元素 m_{ij} 为

$$m_{ij} = \int_0^L m(\bar{x})\phi_i(\bar{x})\phi_j(\bar{x})d\bar{x} \quad (5.290)$$

同样

$$\bar{m}_{kl} = \int_0^L m(\bar{x})\phi_k(\bar{x})\phi_l(\bar{x})d\bar{x}$$

^① 文献[57]中节 6.4“矩阵”是对矩阵代数很好的总结。

用矩阵的形式表示为

$$T_w = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_{an} \}^T [\bar{m}_{ij}] \{ \dot{u}_{ai} \} \quad (5.291)$$

和

$$T_v = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_{ak} \}^T [\bar{m}_{kl}] \{ \dot{u}_{ak} \}$$

将 T_w 和 T_v 相加, 总动能为

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_a \}^T [\bar{m}] \{ \dot{u}_a \}$$

从式(5.282)我们得到

$$T = \frac{1}{2} [\{ \dot{u}_r \} + \{ \dot{u} \}]^T [\bar{m}] [\{ \dot{u}_r \} + \{ \dot{u} \}] \quad (5.292)$$

计及与位移函数有关的应变, 但忽略由温度变化引起的应变和原来就存在的任何应变, 弹性梁单元的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\bar{x}) w(\bar{x}, t)^2 d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^L EA(\bar{x}) v(\bar{x}, t)^2 d\bar{x} \quad (5.293)$$

将式(5.284)和(5.285)中的 $w(\bar{x}, t)$ 和 $v(\bar{x}, t)$ 对 \bar{x} 取导数, 并定义广义刚度矩阵 $[k]$ 的元素为:

$$k_{ij} = \int_0^L EI(\bar{x}) \phi_i(\bar{x}) \phi_j(\bar{x}) d\bar{x} \quad (i, j=2, 3, 5, 6) \quad (5.294)$$

和

$$k_{kl} = \int_0^L EA(\bar{x}) \phi_k(\bar{x}) \phi_l(\bar{x}) d\bar{x} \quad (k, l=1 \text{ 和 } 4)$$

则应变能用矩阵形式表示为

$$U = \frac{1}{2} \{ u \}^T [k] \{ u \} \quad (5.295)$$

此外, 可以证明^[206] $[\bar{m}]$ 和 $[k]$ 为

$$[\bar{m}] = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & \\ 0 & \frac{13}{35} & & & & \\ 0 & \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & & & \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & \\ 0 & \frac{-13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & 0 & \frac{-11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad \text{对 称} \quad (5.296)$$

式中 $m(\bar{x}) = m = \rho A$, 为单位长度上的均布质量(不包括转动的惯性)。

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & & & & & & \\ & 0 & \frac{12EI}{L^3} & & & & & & \\ & & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & & & & \\ -\frac{EA}{L} & & & & 0 & & \frac{EA}{L} & & \\ & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & & \frac{12EI}{L^3} & & \\ & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \end{bmatrix} \quad \text{对 称} \quad (5.297)$$

上面各元素是根据工程上的梁理论,不计剪切变形而得到的。当然,将转动的惯性和剪切应变的影响考虑到上面的矩阵中去也是可能的。可以参考文献[206]以得到对这些方面更进一步的说明。借助式(5.286),可很容易导出梁单元的运动方程如下:

$$[m]\{u_s(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{Q\} \quad (5.298)$$

5.23 系统的质量和刚度矩阵

对于各个单元,在它们的局部坐标系内建立起质量和刚度矩阵是很方便的,同样,对于由一些任意取向单元所装配起来的系统,只要将这些单元矩阵定义到整体坐标系中,也能很方便地构造出整个系统的矩阵。因此,对于一个给定的问题,尽管我们可以有好几个局部坐标系,但只能定义一个整体坐标系。

考虑图 5.79 中的有两个节点(1 和 2)的一般单元。图中还表示了两个坐标系——局部(单元)坐标系和整体(系统)坐标系。当定义后者时,让它的原点位于一给定节点上,并使它平行于图 5.77 中的固定坐标系(OXY)。在图 5.79 中,这两个坐标系 $1\bar{x}\bar{y}$ 和 $1XY$ 表示在节点 1 上;对于节点 2,同样可以这样做。广义坐标在两个坐标系中均已标出。

易于证明,在节点 1

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \cos \theta + U_2 \sin \theta \\ u_2 &= -U_1 \sin \theta + U_2 \cos \theta \\ u_3 &= U_3 \end{aligned} \quad (5.299)$$

在节点 2

$$\begin{aligned} u_4 &= U_4 \cos \theta + U_5 \sin \theta \\ u_5 &= -U_4 \sin \theta + U_5 \cos \theta \\ u_6 &= U_6 \end{aligned} \quad (5.300)$$

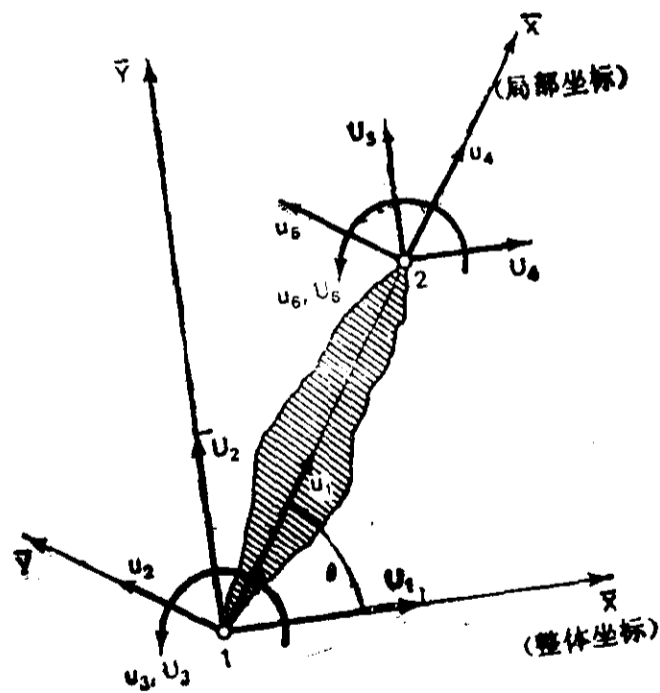


图 5.79 单元(局部)坐标系和系统(整体)坐标系中梁单元的广义位移

式(5.299)和(5.300)可以表示为矩阵形式。为了简化记号,我们定义: $\lambda \triangleq \cos \theta, \mu \triangleq \sin \theta$, 那么

$$[R] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (5.301)$$

矩阵 $[R]$ 称为变换矩阵。由此, 下列向量变换可表示为:

$$\begin{aligned} \{u\} &= [R]\{U\} \\ \{i\} &= [R]\{\dot{U}\} \\ \{u\} &= [R]\{\dot{U}\} \end{aligned} \quad (5.302a)$$

同时

$$\begin{aligned} \{i_a\} &= [R]\{\dot{U}_a\} \\ \{u_a\} &= [R]\{\ddot{U}_a\} \end{aligned}$$

式中 $\{\dot{U}_a\}$ 和 $\{\ddot{U}_a\}$ 可参看图 5.77, 并由下式给出:

$$\{\dot{U}_{ai}\} = \begin{bmatrix} \dot{X}_{A'} \\ \dot{Y}_{A'} \\ \dot{\theta}_{A'} \\ \dot{X}_{B'} \\ \dot{Y}_{B'} \\ \dot{\theta}_{B'} \end{bmatrix}, \quad \{\ddot{U}_{ai}\} = \begin{bmatrix} \ddot{X}_{A'} \\ \ddot{Y}_{A'} \\ \ddot{\theta}_{A'} \\ \ddot{X}_{B'} \\ \ddot{Y}_{B'} \\ \ddot{\theta}_{B'} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, 6) \quad (5.302b)$$

借助式(5.302b), 式(5.292)所表示的动能又可以写为:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{U}_a\}^T [m] \{\dot{U}_a\}$$

式中的 $[m]$, 现在指的是整体坐标, 为

$$[m] = [R]^T [\bar{m}] [R] \quad (5.303)$$

同样地, 借助式(5.302a), 式(5.295)中的应变能又可以表示为:

$$U = \frac{1}{2} \{U\}^T [k] \{U\}$$

式中 $[k]$ 也是定义在整体坐标系内, 它可以由下式表示:

$$[k] = [R]^T [\bar{k}] [R] \quad (5.295a)$$

之所以有必要进行这样的坐标变换, 而使机构所有运动构件的运动都表示在一个整体坐标系内, 在以后的几节中就会更加清楚了。

5.24 弹性连杆机构模型

在对连杆机构进行有限元法分析时, 要用到下列步骤:

1. 有必要将连杆机构结构理想化。这就需要选择有限元的形状和大小来形成系统网格。
2. 对于每一个单元, 求出其表示在整体坐标系内的质量和刚度矩阵。
3. 这些单元的质量和刚度矩阵要进行有规则地迭加以求出机构整个结构系统的质量和刚度矩阵。
4. 通过解带有耦合的常微分运动方程组, 可求出机构中未知的节点位移。这些方程是利用节点上的平衡条件得到的。
5. 计算出与本问题有关的所有要求的结果, 如应力和应变等。

作为例子, 考虑图 5.80 中的四杆机构, 其中每一构件都用一个有限梁单元来模拟。假定输入轴与一个惯性很大的飞轮相连, 保证输入角速度不发生任何过大的波动。然后, 将输入曲柄化为一个转动的悬臂梁, 以便可以把运动的机构当作在每一个位置上的“瞬时结构”来处理。然而应该指出, 这一假定只是为了使繁杂的计算在这里的描述得到简化。

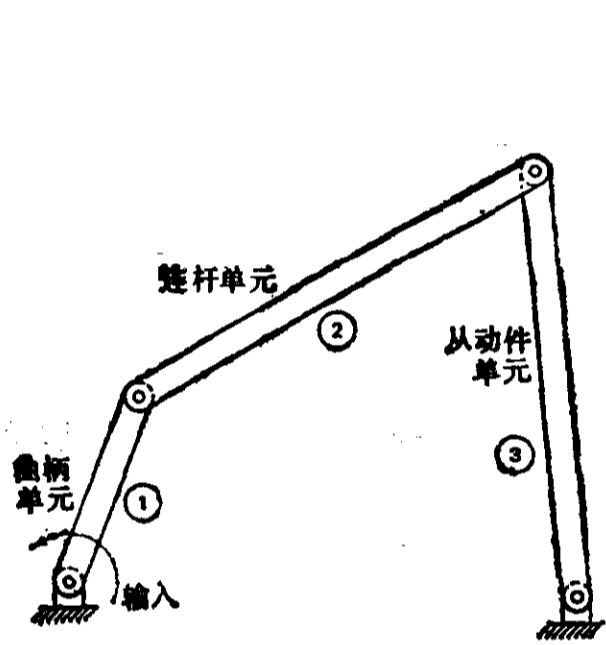


图 5.80 用三个有限梁单元将四杆机构理想化

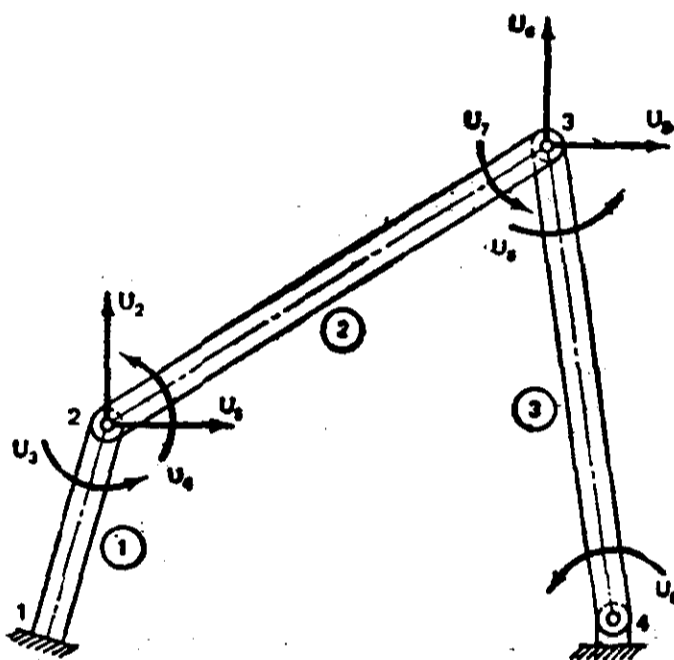


图 5.81 用有节点相容性的系统坐标来表示的广义位移

在图 5.81 中, 标出了在系统坐标中的广义位移, 以表示机构的结构变形, 并保持在节点上各单元之间的相容性。例如对节点 2, U_1 和 U_2 是用来描述节点从刚体位置产生的弹性位移。在节点 2 上, 还需要两个独立的位移, U_3 和 U_4 , 来描述两个单元 1 和 2 中的每一个相对于它们各自刚体位置的转角变形。上述位移包含两个转角位移, 两个相邻构件各有一个, 因此, 可以用来模拟铰链连接。而两个单元之间的刚性连接, 只要用一个转角位移就可以模拟了。

5.25 整个系统矩阵的建立

可以证明 $[R]^{-1} = [R]^T$ 。从而由式 (5.302a) 可以导出下列关系式:

$$\{\dot{U}\} = [R]^T \{u\} \quad (5.304)$$

以及

$$\{\dot{U}_s\} = [R]^T \{u_s\}$$

借助式 (5.281) 得到

$$\{\dot{U}_s\} = [R]^T \{u_r\} + [R]^T \{u\}$$

此式又可改写为:

$$\{\ddot{U}_a\} = \{\ddot{U}_r\} + \{\ddot{U}\} \quad (5.305)$$

对式(5.274)和(5.302b)加以细心观察和简化,也可以直接导出上式。

将 $[R]^T$ 左乘式(5.302a),梁单元的运动方程(5.298)可用系统坐标重新写出如下:

$$[m]\{\ddot{U}_a(t)\} + [k]\{U(t)\} = \{Q\} \quad (5.306)$$

式中 $[m] = [R]^T[\bar{m}][R]$

$$[k] = [R]^T[\bar{k}][R]$$

以及 $\{Q\} = [R]^T\{\bar{Q}\}$

在图 5.82 中,将图 5.81 中的有限元分开表示,每一单元都标有合适的位移而且仍保持着它们在节点的相容性。对第 i 个单元,表示在整体坐标系内的质量和刚度矩阵为

$$[m]_i = [R]^T[\bar{m}]_i[R]_i \quad (5.307)$$

和

$$[k]_i = [R]^T[\bar{k}]_i[R]_i \quad (i=1, 2, 3)$$

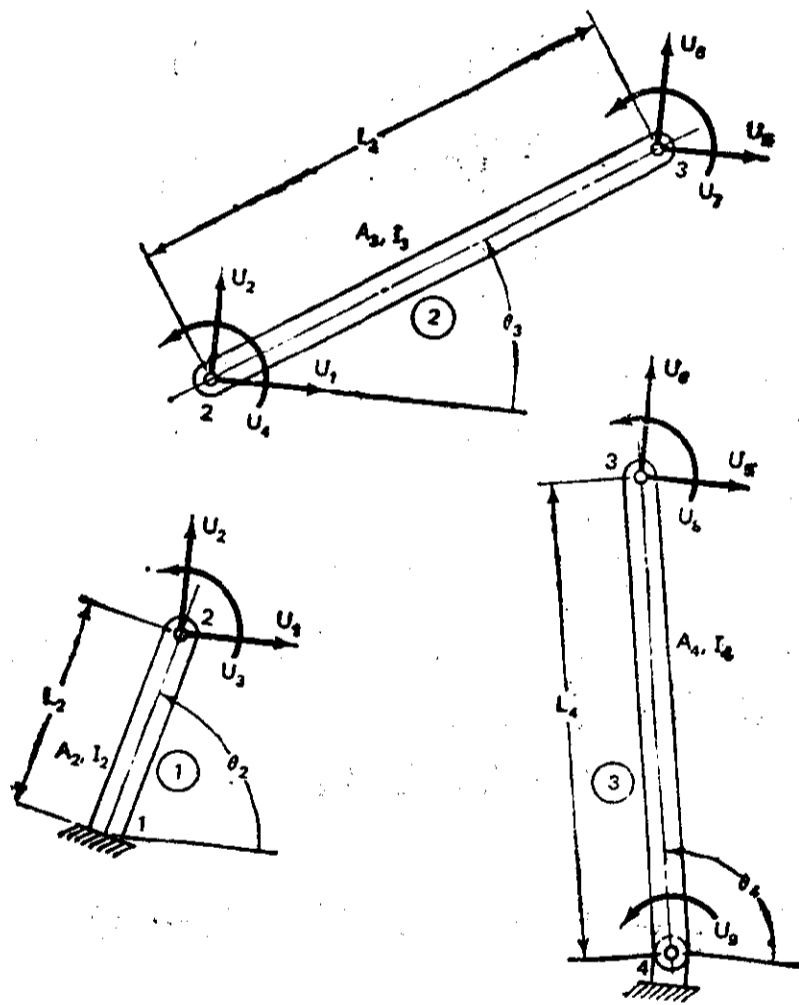


图 5.82 用有节点相容性的系统(整体)坐标来表示的广义单元位移

式(5.307)对于用六个广义坐标表示的单元是正确的。应用式(5.303),曲柄单元(图 5.82 中的 1 号单元)的动能可表示为

$$T_1 = \frac{1}{2} \{\dot{U}_a\}_1^T [m]_1 \{\dot{U}_a\}_1 \quad (5.308)$$

而且, $\{\dot{U}_a\}_1$ 可定义为:

$$\{\dot{U}_a\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{U}_{a1} \\ \dot{U}_{a2} \\ \dot{U}_{a3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_z \\ \dot{U}_{nz} \end{Bmatrix}_1 \quad (5.309)$$

下标 z 和 nz 分别表示速度向量的零分量和非零分量。注意，式(5.308)并不包括由于曲柄轴的转动惯量而引起的刚性曲柄转动的动能。对现在研究的问题，这一点对在下一节推导运动方程时关系不大。这是由于对曲柄的转动，我们没有给出广义坐标。这与我们前面对预定的输入轴速度没有波动的假定是一致的。

式(5.308)可以重写为

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{U}_z \\ \dot{U}_{nz} \end{Bmatrix}_1^T \begin{bmatrix} m_{zz} & m_{z-nz} \\ m_{nz-z} & m_{nz-nz} \end{bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} \dot{U}_z \\ \dot{U}_{nz} \end{Bmatrix}_1$$

由于 $\{\dot{U}_z\} = \bar{0}$ ，所以

$$T_1 = \frac{1}{2} \{\dot{U}_{nz}\}_1^T [m_{nz-nz}]_1 \{\dot{U}_{nz}\}_1$$

或者展开为

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{a1} \\ \dot{U}_{a2} \\ \dot{U}_{a3} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & m_{13}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 & m_{23}^1 \\ m_{31}^1 & m_{32}^1 & m_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{a1} \\ \dot{U}_{a2} \\ \dot{U}_{a3} \end{Bmatrix} \quad (5.310)$$

必须记住， $[m]_1$ 是一个六阶方阵。而矩阵 $[m_{nz-nz}]_1$ 是将此质量矩阵中对应于单元的广义坐标为零的行和列取消后剩下的矩阵。只有非零的广义坐标才标注在图 5.82 中。很明显，式(5.310)中的质量矩阵对应于单元 1 上节点 2 处的三个坐标；即这个矩阵的元素对应于系统质量矩阵 $[m]_1$ 的第四、五、六行和列。然而，这些元素的下标对应于非零坐标，严格说来只是为了方便起见。在式(5.310)中加了上标 1 以表示质量矩阵的元素属于标号为 1 的单元。单元 2 和 3 的动能 T_2 和 T_3 也可以用类似的方法求得，最后，

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

用矩阵的形式表示：

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{U}_{ai}\}^T [M] \{\dot{U}_{ai}\} \quad (i=1, 2, \dots, 9) \quad (5.311)$$

式(5.311)再以展开形式表示为

$$T = \begin{Bmatrix} \dot{U}_{a1} \\ \dot{U}_{a2} \\ \dot{U}_{a3} \\ \dot{U}_{a4} \\ \dot{U}_{a5} \\ \dot{U}_{a6} \\ \dot{U}_{a7} \\ U_{a8} \\ U_{a9} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11}^1 + m^1 & m_{12}^1 + m_{12}^2 & m_{13}^1 & m_{14}^1 & m_{15}^1 & m_{16}^1 & m_{17}^1 & 0 & 0 \\ m_{21}^1 + m_{21}^2 & m_{22}^1 + m_{22}^2 & m_{23}^1 & m_{24}^1 & m_{25}^1 & m_{26}^1 & m_{27}^1 & 0 & 0 \\ m_{31}^1 & m_{32}^1 & m_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41}^1 & m_{42}^1 & 0 & m_{44}^1 & m_{45}^1 & m_{45}^1 & m_{47}^1 & 0 & 0 \\ m_{51}^1 & m_{52}^1 & 0 & m_{54}^1 & m_{55}^1 + m_{55}^3 & m_{56}^1 + m_{56}^3 & m_{57}^1 & m_{58}^1 & m_{59}^1 \\ m_{61}^1 & m_{62}^1 & 0 & m_{64}^1 & m_{65}^1 + m_{65}^3 & m_{66}^1 + m_{66}^3 & m_{67}^1 & m_{68}^1 & m_{69}^1 \\ m_{71}^1 & m_{72}^1 & 0 & m_{74}^1 & m_{75}^1 & m_{76}^1 & m_{77}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{85}^1 & m_{86}^1 & 0 & m_{88}^1 & m_{89}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{95}^1 & m_{96}^1 & 0 & m_{98}^1 & m_{99}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{a1} \\ \dot{U}_{a2} \\ \dot{U}_{a3} \\ \dot{U}_{a4} \\ \dot{U}_{a5} \\ \dot{U}_{a6} \\ \dot{U}_{a7} \\ \dot{U}_{a8} \\ \dot{U}_{a9} \end{Bmatrix} \quad (5.312)$$

正如前面指出的,矩阵元素的上标表示与该质量元素有关的那个具体梁单元。

矩阵 $[M]$ 是整个系统的质量矩阵。与此相似,从应变能的观点出发,可以将各个单元的应变能相加来导出整个系统的刚度矩阵 $[K]$ 。

$$U = \frac{1}{2} \{U_i\}^T [K] \{U_i\} \quad (i=1, 2, \dots, 9) \quad (5.313)$$

这里,我们用到了工程梁理论中梁位移的微分方程,来确定单元的刚度特性。为了方便,略去了单元的转动惯量和剪切变形。在位移有限元法中,只要适当地修正一下系统矩阵,这些因素的作用是很容易包括进去的^[206]。

在大体上说明了如何形成整个系统的质量和刚度矩阵之后,我们必须找到一种有规则的计算编程办法。这个办法要能很方便地求出每个机构单元相对于系统坐标系的矩阵,要能够消去对应于为零的广义坐标的相应行和列,最后还要能将它们迭加,以形成系统矩阵。这种办法还必须充分考虑节点处的边界条件。

有一种可以利用的方法为一称作置换向量法的扩展,该置换向量法是由奥克伯格 (Oakberg)^[328]用在框架分析中,并由埃门(Imam)^[134]以及埃门、桑多尔和克雷默 (Kramer)^[137]扩展到对弹性连杆机构的分析中。由于篇幅的限制,这里不打算详细介绍这种方法。该法的主要优点是:

- (1) 不要求计算传统的力传递矩阵和连通矩阵(connectivity matrices);
- (2) 用这种方法求得的整个系统矩阵只对应于非零的广义坐标;
- (3) 这种方法很通用,既可用于解单环平面机构,又可用于解多环平面机构。

5.26 运动方程

如果建立在系统坐标系中的坐标 $\{U\}$ 被用来作为广义坐标,表示机构偏离其刚体位置的结构变形(图 5.81),那么其运动方程可以从拉格朗日方程中推导出来:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial U_i} + \frac{\partial U}{\partial U_i} = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, 9) \quad (5.314)$$

其中左边的第一项、第二项和第三项分别化为

$$\sum_{j=1}^9 M_{ij} \dot{U}_{aj}, \quad 0, \quad \text{和} \quad \sum_{j=1}^9 K_{ij} U_j$$

用矩阵的形式表示,这个运动方程为

$$[M] \{\dot{U}_a\} + [K] \{U\} = \{Q\} \quad (5.315)$$

如果节点上不存在任何摩擦力或驱动力(外载荷),那么 $Q_i (i=1, 2, \dots, 9)$ 可取作零。注意,尽管可以预料有一驱动输入扭矩作用在曲柄轴上,但是,由于去掉了对应的广义坐标,这个输入扭矩也就没有意义了。此外,在构件互相连接的节点上的反作用力也不出现在 $\{Q\}$ 中,因为这些反作用所产生的势能的净变化总保持为零。

如果机构的结构阻尼矩阵用 $[C]$ 表示,那么,把阻尼力考虑进来,并利用式(5.308),运动方程就变为

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -[M]\{\ddot{U}_r\} \quad (5.316)$$

其中系数矩阵 $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 是机构几何尺寸的函数,而且随输入角度(即曲柄转角)的变化而改变。这些数值随机构的运动循环而重复变化。这就是说,相对于曲柄转角,微分方程(5.316)的系数矩阵具有周期性。对于恒定的或周期性变化的输入速度,这些系数矩阵必将随时间周期性变化。刚体的加速度向量 $\{\ddot{U}_r\}$ 也是如此。

在从式(5.314)导出式(5.315)的过程中,我们已经默认了质量矩阵 $[M]$ 是不变的。这种默认与数值方法中通用的假定——时变系统的参数在每一分割后的时间间隔内是不变的——是一致的。

前面用来导出运动方程的方法是很通用的,它可以推广来模拟多环平面机构,以及构件具有复杂几何形状的机构。对于后者,我们可以使用有限元法中更为复杂的单元类型。建立系统的网格时要很小心,因为增加了节点的数目,将会大大增加计算时间和费用。

5.27 机构中的阻尼

如果结构材料的一些基本阻尼特性是已知的,那么我们可以将推导质量和刚度矩阵的方法推广来计算阻尼矩阵。然而通常说来,这些阻尼特性是不确定的。通常是用实验的办法,在与我们要研究的相似结构的几种振型中,来测定阻尼比。然后再假定,这些阻尼比可以用在新结构的振型分析中。

对于大多数的结构,由于能量损失的原因很复杂,阻尼矩阵的准确形式是未知的。同时,在多数情况下,阻尼对于结构的各个振型的形状也影响很小。因此,象这个矩阵形式的假设是合理的。对几种振型,经常可用适当的粘性阻尼比来近似阻尼。然而,当包含有非线性响应或振动型耦合的情况时,就不适合这种近似了。对大多数结构分析来说,我们假定阻尼力保持有正交性。这一假设使得我们便于将齐次运动方程解耦,这反过来又加快求解这些方程的速度。这一节里,我们要研究通常用在结构动力分析中的阻尼矩阵的形式。由于在运动过程中的机构可以被看作一个处于许多不同位置的结构,所以认为将传统的结构阻尼矩阵用到机构问题是可行的。在将式(5.316)去耦时,第一步是要确定结构“无阻尼自由振动”的振型频率和相应的振型形状。这就是要求解下列方程,以求出其特征值,也称作特征值问题:

$$[K]\{\Phi_n\} = \omega_n^2[M]\{\Phi_n\} \quad (5.317)$$

式中 ω_n 是第 n 个振型的频率(特征值), $\{\Phi_n\}$ 是第 n 个振型的形状(特征向量)^①。振型形状满足正交条件

$$\{\Phi_n\}^T[M]\{\Phi_m\} = 0$$

和

$$\{\Phi_n\}^T[K]\{\Phi_m\} = 0 \quad (m \neq n) \quad (5.318)$$

振型形状可以正则化为

$$\{\Phi_n\}^T[M]\{\Phi_n\} = 1, \quad (5.319)$$

^① 特征值和特征向量的简明温习,见式(5.65)后的注解。

于是, 下面两个表达式成立:

$$[\Phi]^T[M][\Phi]=[I] \quad (5.320)$$

和

$$[\Phi]^T[K][\Phi]=[\omega^2]$$

式中 $[\Phi]$ 为振型矩阵, 它的列是系统的自然振型(固有振型); $[I]$ 为单位矩阵; $[\omega^2]$ 是以自然频率平方值为元素的对角矩阵。

为了进行去耦, 要进行下列的坐标变换:

$$\{U\}=[\Phi]\{\eta\} \quad (5.321)$$

式中 $\{\eta\}$ 是振型的振幅向量, 也是正则坐标向量。此外还有

$$\{\dot{U}\}=[\Phi]\{\dot{\eta}\}$$

和

$$\{\ddot{U}\}=[\Phi]\{\ddot{\eta}\} \quad (5.322)$$

将式(5.321)和(5.322)代入式(5.316), 并将各项左乘以 $[\Phi]^T$, 得到下列方程:

$$\begin{aligned} & [\Phi]^T[M][\Phi]\{\eta\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{\eta}\} \\ & + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\eta\} = -[\Phi]^T[M]\{\ddot{U}_r\} \end{aligned} \quad (5.323)$$

为了保证阻尼力的正交性, 下列的表达式必须成立, 即:

$$\begin{aligned} & \{\Phi_n\}^T[C]\{\Phi_m\} = 0 \quad (m \neq n) \\ & \{\Phi_n\}^T[C]\{\Phi_m\} = \alpha_n \quad (m = n) \end{aligned} \quad (5.324)$$

式中 α_n 不必为零。现在式(5.323)可以写为

$$[M']\{\eta\} + [C']\{\dot{\eta}\} + [K']\{\eta\} = \{N\} \quad (5.325)$$

式中

$$\begin{aligned} [M'] &= [\Phi]^T[M][\Phi] \\ [C'] &= [\Phi]^T[C][\Phi] \\ [K'] &= [\Phi]^T[K][\Phi] \\ \{N\} &= -[\Phi]^T[M]\{\ddot{U}_r\} \end{aligned} \quad (5.326)$$

式(5.325)也可以表示为

$$M'_{ii}\eta_i + C'_{ii}\dot{\eta}_i + K'_{ii}\eta_i = N_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.327)$$

这里 n 代表方程的个数(对于四杆机构 $n=9$)。

至此, 我们在前面讨论的基础上可以举出几种阻尼形式:

1. 我们经常用的是一种简化了的阻尼形式。这是由定义式(5.324)中的 α_r 为如下形式而得到的

$$\alpha_r = 2\xi_r\omega_r = C'_{rr} \quad \text{和} \quad [\alpha] = [C'] \quad (5.328)$$

式中 ξ 是第 r 个振型的阻尼比, ω_r 为其频率。 $[C]$ 可由式(5.326)确定。

2. 对于每一种振型 r , 用威尔逊法(Wilson method)计算阻尼矩阵 $[C_r]$:

$$\begin{aligned} [C_r] &= 2\xi_r\omega_r\{\theta_r\}\{\theta_r\}^T \\ \{\theta_r\} &= [M]\{\Phi_r\} \end{aligned} \quad (5.329)$$

式中

要得到总的阻尼矩阵, 只要把所希望数量(n)的那些振型的作用迭加起来, 即

$$[C] = \sum_{r=1}^n [C_r] \quad (5.330)$$

没有包括在上式的振型, 仍是无阻尼的。

3. 威尔逊(Wilson)和彭津(Penzien)介绍了一种能满足式(5.324)的阻尼矩阵的形式[329]。这是定义为一个矩阵级数, 其中的每一个矩阵都与柯西(Caughey)级数的一个矩阵成比例, 同时满足正交条件, 因此

$$[C] = [M] \sum_{b=0}^{n-1} a_b [[M]^{-1}[K]]^b \quad (5.331)$$

式中, 系数 a_b 是选来提供所希望的阻尼比的, 其个数和振型的个数一样多。 a_b 的值由下面形式的一组几个联立方程来确定:

$$\xi_r = \frac{1}{2} \left[\frac{a_0}{\omega_r} + a_1 \omega_r + \dots + a_{n-1} \omega_r^{2n-3} \right] \quad (5.332)$$

式中 $r=1, 2, \dots, n$ 。

4. 如果在式(5.331)中仅保留级数的头两项, 那么所得到的阻尼就称为雷利阻尼(Rayleigh damping)。这时, 阻尼矩阵是质量矩阵和刚度矩阵的线性组合, 也可用下式表示:

$$[C] = \alpha_1 [K] + \alpha_2 [M] \quad (5.333)$$

式中 α_1 和 α_2 是加权系数。

5. 与刚度成比例的阻尼称为“结构”阻尼。这种阻尼力向量正比于位移向量, 但是, 在相位上, 与速度同相。由于比例常数包含着阻尼比, 所以, 对于所有的振型, 阻尼比都保持不变。

6. 另一种阻尼形式定义成与质量矩阵成比例, 我们可在文献[74]中见到。这样

$$[C] = [M][C'] \quad (5.334)$$

式中

$$C'_{ij} = 2\xi (\text{signum } K_{ij}) (|K_{ij}/M_{ij}|)^{1/2}$$

$$\text{signum } K_{ij} = K_{ij}/|K_{ij}|$$

非比例阻尼以及上列阻尼形式的其它改型在结构的动力分析中也已经被采用。文献[133]中可以找到关于阻尼形式的讨论。

5.28 刚体加速度

为了得到式(5.305)中的广义刚体加速度向量, 很需要一种可以用计算机编程的方法。计算四杆机构(图5.82)中各构件的运动参数——角速度和角加速度[见第一卷的式(3.84)、(3.85)、(4.21)和(4.22)]——的公式如下:

$$\omega_3 = -\frac{L_2 \omega_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{L_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$\omega_4 = -\frac{L_2 \omega_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)}{L_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.335)$$

$$\alpha_3 = \frac{[-L_2 \alpha_2 \sin(\theta_4 - \theta_2) + L_2 \omega_2^2 \cos(\theta_4 - \theta_2) + L_3 \omega_3^2 \cos(\theta_4 - \theta_3) - L_4 \omega_4^2]}{L_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$\alpha_4 = \frac{[-L_2 \alpha_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) + L_2 \omega_2^2 \cos(\theta_3 - \theta_2) - L_4 \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + L_3 \omega_3^2]}{L_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

式中 ω_i 和 α_i 分别代表第 i 个构件的角速度和角加速度; ω_2 和 α_2 是预定的输入值; $L_j, j=2, 3, 4$, 是各构件的长度。

应用上面所列的各个量, 我们可以计算广义刚体加速度向量 $\{\ddot{U}_r\}$ 。对应于广义坐标 U_1 (图 (5.82)), 可导出 \ddot{U}_{r1} 为

$$\ddot{U}_{r1} = -L_2\omega_2^2 \cos\theta_2 - L_2\alpha_2 \sin\theta_2$$

式中 L_2 是输入曲柄长度, θ_2 是从整体坐标系 X 轴测得的输入曲柄角度。同样, 可得到:

$$\ddot{U}_{r2} = -L_2\omega_2^2 \sin\theta_2 + L_2\alpha_2 \cos\theta_2$$

以及

$$\ddot{U}_{r3} = \alpha_3 \quad (5.336)$$

其它的表达式也可用类似的方法得到。

5.29 应力计算

从式(5.283)和(5.285)可知, 轴向位移(见图 5.79)为

$$v(\bar{x}, t) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right)u_1(t) + \frac{\bar{x}}{L}u_4(t)$$

中性轴上的轴向应变为

$$\epsilon_x = \frac{\partial v(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \textcircled{1} = -\frac{1}{L}u_1(t) + \frac{1}{L}u_4(t)$$

或以矩阵形式表示, 轴向应力为

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_4(t) \end{Bmatrix} \quad (5.337)$$

从梁的理论可知, 弯矩为:

$$M = -EI \frac{\partial^2 w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2}$$

式中 $w(\bar{x}, t)$ 已由式(5.284)定义过了。如果 \bar{y} 是一点到中性轴的距离, 那么该点的弯曲应力为

$$\sigma_x = -E\bar{y} \frac{\partial^2 w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2}$$

或用矩阵形式表示为

$$\sigma_x = -E\bar{y} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial^2 \phi_6}{\partial \bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \end{Bmatrix} \quad (5.338)$$

式中 ϕ_i 已在式(5.283)中定义了, 于是

① 原文为 $\epsilon_x = \frac{\partial v(\bar{x}, t)}{\partial x}$ ——译者注。

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{6}{L^3}(L-2\bar{x})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \bar{x}^2} = \frac{2}{L^2}(2L-3\bar{x})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial \bar{x}^2} = \frac{6}{L^3}(L-2\bar{x}) \quad (5.338a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_6}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{2}{L^2}(L-3\bar{x})$$

要求总正应力时, 必须将式(5.337)和(5.338)的结果迭加起来。

要注意, 尽管用式(5.284)可以足够精确地计算梁单元的横向位移, 然而所需的二阶导数, 如在式(5.293)^①和(5.338)中, 却可能表达得不那么精确。同时, 所假定的位移场不要求一定是多项式。在某些条件下, 应用正弦级数很方便。有关这一部分内容的进一步讨论可在文献[133]中找到。

5.30 解 法

对机构的一个连续运动循环, 最理想的是用无穷多个对应的刚体位置来模拟。由于在下一个运动循环中, 机构又重复过去的同样的刚体位置, 所以它是位置周期性的。对应于循环中的每一位置, 都有一组不同的质量、阻尼、刚度和惯性特性与之对应。所以这些参数是位置周期性的。如果机构的输入角速度不变, 那么这些参数也就是时间周期性的了。在数字方法中, 这一连续运动可用许多个离散的位置来代替。这种概念与有限元法十分相象。在有限元法中, 弹性体本身被离散来处理。在解运动方程时, 假定系统的参数(质量、阻尼和刚度)在每个时间单元间隔中是不变的, 虽然, 这样得到的只是近似解, 但是当时间单元间隔趋近于零时, 所得到的解就趋近精确解。

我们将连续的运动循环离散化有两个目的: 首先, 大大减少了在一个循环中昂贵的计算量; 其次, 将系数随时间变化的运动微分方程变为对每一个离散的时间单元间隔来说系数是不变的微分方程, 从而使求解容易。

下面简要地介绍一种数值方法^[186], 来计算与式(5.316)类似的方程所描述的振动系统的周期性解。现在我们用这一方法来处理单自由度的质量-阻尼器-弹簧系统, 这个系统的基本运动微分方程是系数随时间周期性变化的二阶线性方程。该系统由一个周期性的扰力函数所激励。由于结构的振型(响应)分析法利用把运动微分方程组(5.316)去耦的方法使之适用于这种情况, 因此, 这种方法是合适的。去耦后的方程形式如式(5.325)和(5.327)所示。振型分析法又称“振型迭加法”。

经典的单自由度振动模型(带有不变的参数)可用以下运动方程来描述:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (5.339)$$

^① 式(5.293)中并无二阶导数, 此处似有误——译者注。

式中 $F(t)$ 是一个周期函数(仅当要求周期性的解时), 它在整个时间周期内是可积的。当时间为 t 时, 它的完全响应由下式给出^[200]:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t + Be^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_d t + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] F(\tau) d\tau \quad (5.340)$$

其速度 $\dot{x}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A[-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t + \omega_d e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_d t] \\ & + B[-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_d t - \omega_d e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t] \\ & + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t [-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] \\ & + \omega_d e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \cos[\omega_d(t-\tau)] F(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.341)$$

式中自然频率 $\omega_n = (k/m)^{1/2}$; 阻尼自然频率 $\omega_d = \omega_n(1-\xi^2)^{1/2}$; 阻尼比 $\xi = c/(2m\omega_n)$ 。

假定阻尼很小(小于临界阻尼), 那么齐次方程的通解形式由式(5.340)的前两项表示, 而它的最后一项表示特解。后者用达哈麦尔积分(Duhamel integral)来求得。 A 和 B 是两个由初始条件决定的任意常数。现在, 我们来求下面的运动微分方程的周期性解:

$$m(t)\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k(t)x = F(t) \quad (5.342)$$

其系数是这样的:

$$m(t) = m(t+T_f)$$

$$c(t) = c(t+T_f)$$

$$k(t) = k(t+T_f)$$

$$\omega_n(t) = \left[\frac{k(t)}{m(t)} \right]^{1/2} = \omega_n(t+T_f)$$

$$F(t) = F(t+T_f)$$

式中 T_f 是机构运动的基本时间周期。

从数值方法上讲, 周期性解的问题可以用将系统参数的连续变化分成许多小段的方法来解决。为了方便, 将时间周期 T_f 分成 n 个“相等的”间隔, 即

$$\Delta t = \frac{T_f}{n}$$

图 5.83 和 5.84 表示了系统参数的分段过程和每一时间单元间隔的参数标注。假设了这些参数在每一时间单元间隔内保持不变, 则此问题的求解就变成了“常”系数线性二阶运动微分方程的

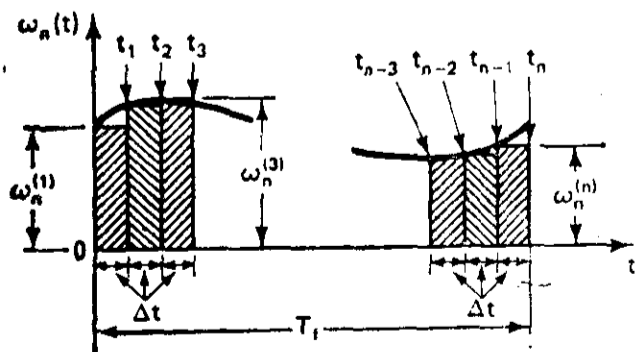


图 5.83 随时间变化的自然频率值的分段

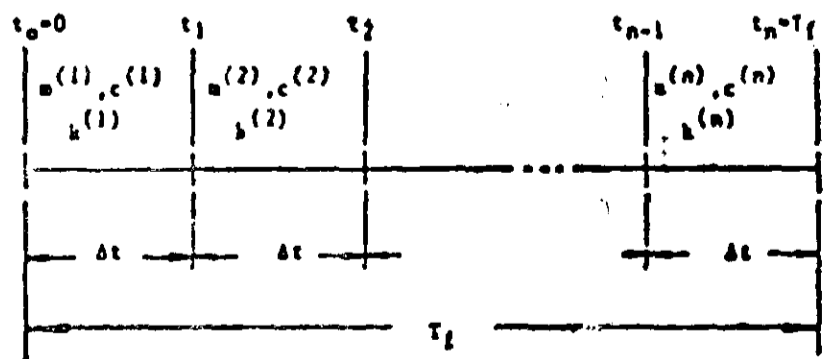


图 5.84 随时间变化的系统参数的分段

求解。

第 m 段时间间隔内位移和速度的一般形式, 用式(5. 340)和(5. 341)来表示如下:

对于 $t_{m-1} \leq t \leq t_m, m=1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} x(t) = & A^{(m)} e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-t_{m-1})} \sin[\omega_d^{(m)} (t-t_{m-1})] \\ & + B^{(m)} e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-t_{m-1})} \cos[\omega_d^{(m)} (t-t_{m-1})] \\ & + \frac{1}{m^{(m)} \omega_d^{(m)}} \int_{t_{m-1}}^t e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-\tau)} \sin[\omega_d^{(m)} (t-\tau)] F(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5. 343)$$

和

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A^{(m)} [-\xi \omega_n^{(m)} e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-t_{m-1})} \sin[\omega_d^{(m)} (t-t_{m-1})] \\ & + \omega_d^{(m)} e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-t_{m-1})} \cos[\omega_d^{(m)} (t-t_{m-1})]] \\ & + B^{(m)} [-\xi \omega_n^{(m)} e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-t_{m-1})} \cos[\omega_d^{(m)} (t-t_{m-1})] \\ & - \omega_d^{(m)} e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-t_{m-1})} \sin[\omega_d^{(m)} (t-t_{m-1})]] \\ & + \frac{1}{m^{(m)} \omega_d^{(m)}} \int_{t_{m-1}}^t [-\xi \omega_n^{(m)} e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-\tau)} \sin[\omega_d^{(m)} (t-\tau)] \\ & + \omega_d^{(m)} e^{-\xi \omega_n^{(m)} (t-\tau)} \cos[\omega_d^{(m)} (t-\tau)]] F(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5. 343a)$$

$A^{(m)}$ 和 $B^{(m)}$ 是 $2n$ 个系统未知数, 它们可根据 $t=t_{m-1}$ 时的初始条件来确定。

方程(5. 343)和(5. 343a)两者可用以求 n 个时间间隔中的每一个两端的位移和速度。为了保持解在整个基本时间周期 T_f 内的连续性, 在所有的中间时间点处, “相容条件”都必须满足。例如, 由于时间点 t_1 是时间间隔 1 和 2 的共同点, 所以在 t_1 处的位移和速度既可用 $m=1$ 时, 又可用 $m=2$ 时的式(5. 343)和(5. 343a)求得。求得两个速度和两个位移必须分别相等。在 t_1 处的这一相容条件给出包含有 $A^{(1)}$ 、 $B^{(1)}$ 、 $A^{(2)}$ 和 $B^{(2)}$ 这四个未知量的两个方程。当这一条件施加于所有的中间节点[即 $(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$]时, $2n$ 个未知数包括在 $2n-2$ 个方程中。而且, 根据解的“周期性”, 使节点 t_0 和 t_n 上的位移和速度分别相等, 就导出两个附加的方程。现在, $2n$ 个条件形成了包含有 $2n$ 个未知量的一组联立线性方程。读者可参看文献[186], 以了解这些方程的细节。用矩阵形式表示, 这些方程可以写成:

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & b_1^{(1)} & c_1^{(2)} & d_1^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2^{(1)} & b_2^{(1)} & c_2^{(2)} & d_2^{(2)} & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(2)} & b_1^{(2)} & c_1^{(3)} & d_1^{(3)} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^{(2)} & b_2^{(2)} & c_2^{(3)} & d_2^{(3)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} & c_1^{(n)} & d_1^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a_2^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} & c_2^{(n)} & d_2^{(n)} \\ c_1^{(1)} & d_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & a_1^{(n)} & b_1^{(n)} \\ c_2^{(1)} & d_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2^{(n)} & b_2^{(n)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \\ A^{(2)} \\ B^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n-1)} \\ B^{(n-1)} \\ A^{(n)} \\ B^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \\ e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \\ \vdots \\ e_1^{(n-1)} \\ e_2^{(n-1)} \\ e_1^{(n)} \\ e_2^{(n)} \end{pmatrix} \quad (5. 344)$$

式中

$$\begin{aligned}
 a_1^{(i)} &= -e^{-\xi \omega_n^{(i)} \Delta t} \sin \omega_d^{(i)} \Delta t \\
 b_1^{(i)} &= -e^{-\xi \omega_n^{(i)} \Delta t} \cos \omega_d^{(i)} \Delta t \\
 c_1^{(i)} &= \frac{1}{m^{(i)} \omega_d^{(i)}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\xi \omega_n^{(i)} (t_i - \tau)} \sin \omega_d^{(i)} (t_i - \tau) F(\tau) d\tau \\
 a_2^{(i)} &= -[-\xi \omega_n^{(i)} e^{-\xi \omega_n^{(i)} \Delta t} \sin \omega_d^{(i)} \Delta t + \omega_d^{(i)} e^{-\xi \omega_n^{(i)} \Delta t} \cos \omega_d^{(i)} \Delta t] \\
 b_2^{(i)} &= -[-\xi \omega_n^{(i)} e^{-\xi \omega_n^{(i)} \Delta t} \cos \omega_d^{(i)} \Delta t - \omega_d^{(i)} e^{-\xi \omega_n^{(i)} \Delta t} \sin \omega_d^{(i)} \Delta t] \\
 c_2^{(i)} &= \frac{1}{m^{(i)} \omega_d^{(i)}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [-\xi \omega_n^{(i)} e^{-\xi \omega_n^{(i)} (t_i - \tau)} \sin \omega_d^{(i)} (t_i - \tau) \\
 &\quad + \omega_d^{(i)} e^{-\xi \omega_n^{(i)} (t_i - \tau)} \cos \omega_d^{(i)} (t_i - \tau)] F(\tau) d\tau \\
 c_1^{(i)} &= 0 \\
 d_1^{(i)} &= 1 \\
 c_2^{(i)} &= \omega_d^{(i)} \\
 d_2^{(i)} &= -\xi \omega_n^{(i)} \quad i=1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

矩阵方程(5.344)可以用文献[33]所介绍的任何一种数字方法来解,单值地求出未知量 $A^{(m)}$ 和 $B^{(m)}$ 。然后可用式(5.343)和(5.343a)来求基本时间周期的 n 个间隔内任何时间上的周期性的解。

利用式(5.343)和(5.343a),通过方程(5.316)的去耦形式[方程(5.327)],求方程(5.316)的瞬态解也是可能的。这时, $A^{(m)}$ 和 $B^{(m)}$ 的值可由第 m 个时间间隔的初始条件(即 $t=t_{m-1}$ 时的位移和速度)来确定。更具体地说,

$$B^{(m)} = x(t_{m-1}) \quad (5.345)$$

和

$$A^{(m)} = \frac{\dot{x}(t_{m-1}) + \xi \omega_n^{(m)} x(t_{m-1})}{\omega_d^{(m)}}$$

假设这里用威尔逊法来计算每个振型 r 的阻尼矩阵 $[C_r]$:

$$[C_r] = 2\xi_r \omega_r \{\theta_r\} \{\theta_r\}^T \quad (5.329)$$

式中

$$\{\theta_r\} = [M] \{\Phi_r\}$$

因此

$$[C_r] = 2\xi_r \omega_r [M] \{\Phi_r\} \{\Phi_r\}^T [M]^T \quad (5.346)$$

方程(5.346)适当地乘以 $\{\Phi_r\}$:

$$\{\Phi_r\}^T [C_r] \{\Phi_r\} = 2\xi_r \omega_r \{\Phi_r\}^T [M] \{\Phi_r\} \{\Phi_r\}^T [M]^T \{\Phi_r\}$$

应用式(5.319),该方程可写为

$$C_{rr}^* = 2\xi_r \omega_r \quad (5.347)$$

而去耦运动方程为

$$M_{ii}^*(t) \eta_i(t) + C_{ii}^*(t) \dot{\eta}_i(t) + K_{ii}^*(t) \eta_i(t) = N_i(t) \quad (5.327)$$

$$(1 \leq i \leq n)$$

如果假定机构的输入角速度是恒定的或周期性变化的,则系统参数的周期性条件为:

$$M_{ii}^{\eta}(t) = M_{ii}^{\eta}(t + T_f)$$

$$C_{ii}^{\eta}(t) = C_{ii}^{\eta}(t + T_f)$$

$$K_{ii}^{\eta}(t) = K_{ii}^{\eta}(t + T_f)$$

$$N_i(t) = N_i(t + T_f)$$

式中 T_f 是机构运动循环的时间周期。

方程(5.327)代表 n 个单自由度的问题,每个问题所对应的微分方程都是系数随时间周期性变化的线性二阶方程。对于周期性的解,这些微分方程中的每一个都可以用方程(5.344)的方式来求解,从而得到表示在(去耦的) η 坐标系中的解 $\{\eta_i\}$ 。

方程(5.327)也可以用式(5.343)和(5.345)来求得瞬态解。通常说来,初始条件都用实际坐标来表示(即 $\{U(0)\}$ 和 $\{\dot{U}(0)\}$)。为了求解用正则坐标表示的方程(5.327),这些初始条件必须要变换到正则坐标中去,即

$$\begin{aligned} \eta_i(0) &= \frac{1}{M_{ii}^{\eta}} \{\Phi_i\}^T [M] \{U(0)\} \\ \dot{\eta}_i(0) &= \frac{1}{M_{ii}^{\eta}} \{\Phi_i\}^T [M] \{\dot{U}(0)\} \end{aligned} \quad (5.348)$$

一旦求出了 η_i ,用实际坐标表示的解 $\{U\}$ 可以用下面的坐标变换得到

$$\{U\} = [\Phi] \{\eta\} \quad (5.321)$$

在周期性解的情况下, $[\Phi]$ 和 $\{\eta\}$ 都是周期性变化的,所以 $\{U\}$ 也如此。

为了用式(5.343)和(5.344)来解方程(5.327),我们希望能把扰力项 $N_i(t)$ 表示成时间的解析函数。这一点很容易做到,只要对于在基本周期内的时间节点上计算出来的 n 个离散(周期性的)值 N_i ,用一个傅立叶级数来表示就可以了。不同振型的 N_i 值,是通过式(5.326)来确定的。式(5.344)中的积分项可以用梯形积分法来近似求得。这时,只要求知道离散值 N_i 。

如果假定 N_i 在每一个时间间隔内保持不变,而从一个时间间隔到另一个时间间隔的过渡时,它的值(以及系统参数值)有所修正,那么,方程(5.327)就可以比较容易地解出。在第 i 个节点上,对于输入为阶跃函数的响应可由文献[134, 314]给出如下:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \frac{N_i}{K_{ii}^{\eta}} \frac{e^{-\xi_i \omega_i t}}{(1 - \xi_i^2)^{1/2}} \left[\frac{N_i}{K_{ii}^{\eta}} \{ \xi_i \sin \omega_{di} t + (1 - \xi_i^2)^{1/2} \cos \omega_{di} t \} \right. \\ &\quad \left. + \eta_i(0) \{ \xi_i \sin \omega_{di} t - (1 - \xi_i^2)^{1/2} \cos \omega_{di} t \} - \dot{\eta}_i(0) \left\{ \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_{di} t \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.349)$$

式中

$$\omega_i = \left(\frac{K_{ii}^{\eta}}{M_{ii}^{\eta}} \right)^{1/2} \text{ 和 } \omega_{di} = \omega_i (1 - \xi_i^2)^{1/2}$$

整个系统响应分析中的所有其它步骤保持不变。式(5.349)实际含有这样的假定:扰力和系统参数在对应于时间 t 的间隔内是不变的。同时,前一时间间隔最后的解,用作后一时间间隔

的初始条件。

第二种解法是用数值方法,将时间分为一系列的时间步长 Δt ,对每一步长积分来求得方程(5.316)。当有限个数量的低频振型足以描述响应时,振型分析法(或振型迭加法)就比较合适。当机构结构受到的是短时间的载荷时(这种载荷会激起许多振型),或结构中包含有非线性因素时,数值积分法就更好一些。关于这些解法的优缺点的更详细的讨论可在参考文献[47]和[312]中找到。积分法也可以和振型分析法结合起来使用;这时,可以用来求如在式(5.340)和(5.341)中的达哈麦尔积分(Duhamel integral)^[57,186,299]和它的时间导数的值,从而求解去耦的微分方程(5.327)。这些去耦的方程同样可用数值积分法直接求解。

逐步积分法很容易造成积累误差以及引起数值计算上的不稳定。我们可以用小步长 Δt 来避免这些问题,然而,这又反过来引起计算时间的增长。时间步长 Δt 经常估计为结构振动的最小时间周期的若干分之一。与结构分析不同,数值分析时,要用到四阶龙格-库塔法。这种方法的计算公式可在文献[33]、[34]以及许多其它参考书中查到(见节5.31)。文献[12]、[113]和[197]列举并比较了几种不同的数值积分法。威尔逊和他的合作者们^[311,312]不论是对线性的还是非线性问题,均详尽地介绍了若干方法。威尔逊- θ 法^[12]比较复杂一些,但可证明是绝对稳定的。纽玛克法(Newmark method)^[196]由于假设了线性变化的加速度,所以很简单。为了举例说明逐步积分法,我们在下面简单地讨论一下纽玛克法的一种形式。

纽玛克法最简单的一种形式是假定在固定的时间间隔 Δt 内,加速度的变化是线性的。这个时间间隔的长度可由下式估算:

$$\Delta t \approx \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi\omega_{\max}} \quad (5.350)$$

式中 ω_{\max} 是系统的最高自然频率。算法是从 $t=0$ 时的初始条件开始的。首先定义如下的向量和质量矩阵

$$\{\alpha\} = \{\dot{U}(0)\} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{U}(0)\} \quad (5.351)$$

$$\{\beta\} = \{U(0)\} + \Delta t\{\dot{U}(0)\} + \frac{\Delta t^2}{3}\{\ddot{U}(0)\}$$

$$[M] = [M] + \frac{\Delta t}{2}[C] + \frac{\Delta t^2}{6}[K] \quad (5.352)$$

对于具有不变几何形态的结构, $[M]$ 是不变的,只要计算一次就可以了。其次,对于第一个时间步长,

$$\{\bar{F}\} = \{F\}_{t=\Delta t} - [C]\{\alpha\} - [K]\{\beta\} \quad (5.353)$$

式中 $\{F\}$ 是扰力向量;在式(5.316)中

$$\{F\} = -[M]\{\ddot{U}_r\}$$

当 $t = \Delta t$ 时,结构的运动由下式确定:

$$\{\ddot{U}\}_{t=\Delta t} = [M]^{-1}\{\bar{F}\}_{t=\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \{\dot{U}\}_{i=\Delta t} &= \{\alpha\} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{U}\}_{i=\Delta t} \\ \{U\}_{i=\Delta t} &= \{\beta\} + \frac{\Delta t^2}{6} \{\ddot{U}\}_{i=\Delta t} \end{aligned} \quad (5.354)$$

这样就完成了纽玛克算法中的一次迭代。然后再用新得到的 $\{U\}$ 、 $\{\dot{U}\}$ 和 $\{\ddot{U}\}$ 值,计算式(5.351),并且用式(5.353)中 $\{F\}_{i=2\Delta t}$ 来计算 $\{\bar{F}\}$ 。对于机构来说, $[M]$ 是随时间变化的,因而,对于每一个时间步长都要重新计算 $[M]$ 。

例 5.16

图 5.85 所示的是一个在线滑块曲柄机构。曲柄轴以恒定的角速度 ω_2 逆时针方向转动。曲柄考虑为刚性的,连杆为弹性的,其长度分别为 L_2 和 L_3 ,它们的参考角度分别为 θ_2 和 θ_3 。假定连杆具有均一的断面面积 A_3 ,和断面惯性矩 I_3 。质量为 M 的滑块沿其轨道无摩擦地运动。它的重心和点 C 重合。没有外力作用在滑块上。在点 B 和 C 处,轴承部件的质量分别假定为 m_B 和 m_C 。

将连杆离散成两个梁单元,并求出表示在整体坐标系中的整个系统的质量矩阵和刚度矩阵(用图 5.85 中的参考角表示)。如果略去机构的阻尼力,试写出运动方程,并且导出扰力向量中含有的各项。

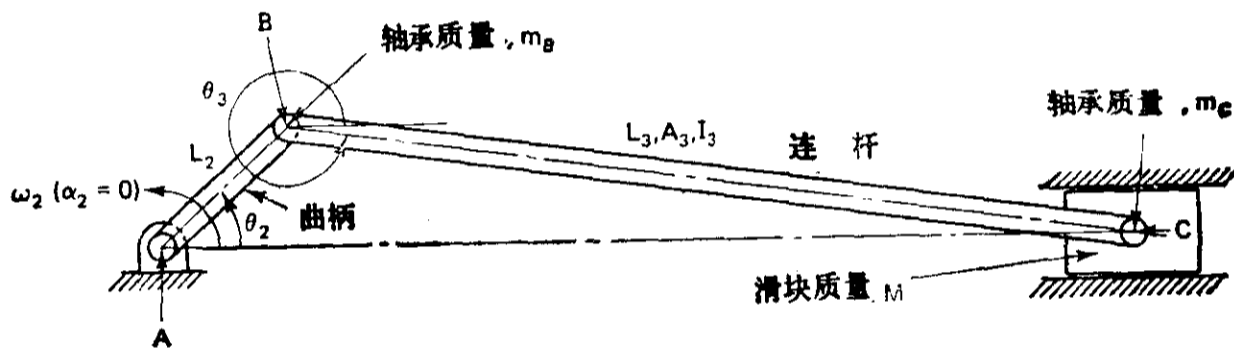


图 5.85 例 5.16 中分析的带有弹性连杆的滑块-曲柄机构

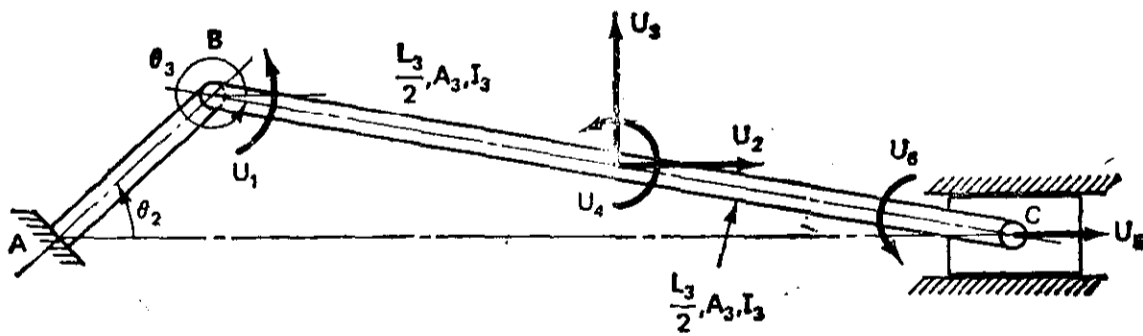


图 5.86 连杆的有限元离散和连杆的弹性位移定义(例 5.16)

解 在图 5.86 中,为了描述机构相对于其刚体位置的变形,需要广义的位移坐标 U_1 到 U_6 。注意,这已考虑了题目规定的边界条件。由于曲柄是刚性的,所以在曲柄端部的点 B 不需要设广义坐标。然而,在点 B 需要一个转动坐标 U_1 来描述连杆的角变形。

必须注意,对于连杆中的任一梁单元,变换矩阵 $[R]$ 是一样的。又由于两个梁单元完全相同,则它们用整体坐标表示的质量和刚度矩阵也是一样的。如果我们仿照式(5.312)中整个质量矩阵的推导步骤,并在对角线合适的元素上加上集重质量,则得到

$$[M] = \rho A_3 L \begin{bmatrix} \frac{L^2}{105} & & & & & & \\ -\frac{13L}{420}\mu & 1 + \frac{8}{105}\mu^2 & & & & & \\ \frac{13L}{420}\lambda & -\frac{8}{105}\lambda\mu & 1 + \frac{8}{105}\lambda^2 & & & & \\ -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 & \frac{2L^2}{105} & & & \\ 0 & 1 + \frac{4}{105}\lambda^2 & \frac{4}{105}\lambda\mu & -\frac{13L}{140}\mu & 1 + \frac{4}{105}\mu^2 + (M + m_0) & & \\ 0 & \frac{13L}{420}\mu & -\frac{13L}{420}\lambda & -\frac{L^2}{140} & \frac{11L}{210}\mu & \frac{L^2}{105} & \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对} \\ \text{称} \end{matrix} \quad (5.355)$$

式中, ρ 为密度, $\lambda = \cos\theta_3$, $\mu = \sin\theta_3$, $L = L_3/2$ 。用同样的方法, 可得到整个刚度矩阵

$$[K] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 4I_3 & & & & & & \\ \frac{6I_3}{L}\mu & 2A_3\lambda^2 + \frac{24I_3}{L^2}\mu^2 & & & & & \\ -\frac{6I_3}{L}\lambda & (2A_3 - \frac{24I_3}{L^2})\lambda\mu & 2A_3\mu^2 + \frac{24I_3}{L^2}\lambda^2 & & & & \\ 2I_3 & 0 & 0 & 8I_3 & & & \\ 0 & -A_3\lambda^2 - \frac{12I_3}{L^2}\mu^2 & (-A_3 + \frac{12I_3}{L^2})\lambda\mu & \frac{6I_3}{L}\mu & A_3\lambda^2 + \frac{12I_3}{L^2}\mu^2 & & \\ 0 & -\frac{6I_3}{L}\mu & \frac{6I_3}{L}\lambda & 2I_3 & \frac{6I_3}{L}\mu & 4I_3 & \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对} \\ \text{称} \end{matrix} \quad (5.356)$$

由于机构中不存在阻尼力, 滑块上无外力, 运动方程可用矩阵形式表示为

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = -[M]\{\ddot{U}_r\} \quad (5.357)$$

式中 $[M]$ 和 $[K]$ 分别如式 (5.355) 和 (5.356) 所示, $\{U\}$ 是如图 5.86 所示的广义坐标向量。刚体加速度向量 $\{\ddot{U}_r\}$ 为

$$\{\ddot{U}_r\} = \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{r1} \\ \ddot{U}_{r2} \\ \ddot{U}_{r3} \\ \ddot{U}_{r4} \\ \ddot{U}_{r5} \\ \ddot{U}_{r6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_3 \\ -L_2\omega_2^2 \cos\theta_2 - \frac{L_3}{2}(\omega_3^2 \cos\theta_3 + a_3 \sin\theta_3) \\ -L_2\omega_2^2 \sin\theta_2 + \frac{L_3}{2}(a_3 \cos\theta_3 - \omega_3^2 \sin\theta_3) \\ a_3 \\ -L_2\omega_2^2 \cos\theta_2 - L_3(a_3 \sin\theta_3 + \omega_3^2 \cos\theta_3) \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.358)$$

该式中各项留给读者自己验证。

例 5.17

在这个由特西克 (Turcic) 列举的例子中^[292], 图 5.81 所示的弹性四杆曲柄-摇杆机构中各构件的尺寸、断面以及材料特性都列于表 5.17 中。试求该机构的自然频率以及连杆和输出构件中点的应变。

解: 图 5.87 和图 5.88 分别表示了当曲柄以 340r/min (35.60rad/s) 的恒定角速度顺时针方向转动时, 连杆和从动件的刚体角速度和角加速度。

我们使用了一个比一个更复杂的三个弹性机构模型。图 5.89 中, 每一构件均理想化为一个梁单元, 结果是总共有九个弹性(非零)自由度。圆圈内的数字表示单元的号码。图 5.90 和 5.91 分别表示每一构件理想化为多个单元的例子, 分别代表共有 18 个和 27 个自由度。

表 5.17 例 5.17 和 5.18 中机构的参数

	曲柄 (2)	连杆 (3)	从动件 (4)
长度 (L_i)	4.25in (10.80cm)	11.00in (27.94cm)	10.65in (27.05cm)
面积 (A_i)	0.167in ² (1.077cm ²)	0.063in ² (0.406cm ²)	0.063in ² (0.406cm ²)
弯曲的断面 惯性矩 (I_i)	3.881×10^{-4} in ⁴ (1.616×10^{-2} cm ⁴)	2.084×10^{-5} in ⁴ (8.674×10^{-4} cm ⁴)	2.084×10^{-5} in ⁴ (8.674×10^{-4} cm ⁴)
两固定销轴 间的距离 (L_1)	10.00in (25.40cm)		
轴承组装的 集重 $W_2 = W_3$	0.0925lbf (0.42N)		
弹性模量 E (铝质)	10.3×10^6 psi (7.10×10^7 kPa)		
比重 (ρ)	0.098lbf/in ³ (2.66×10^{-2} N/cm ³)		

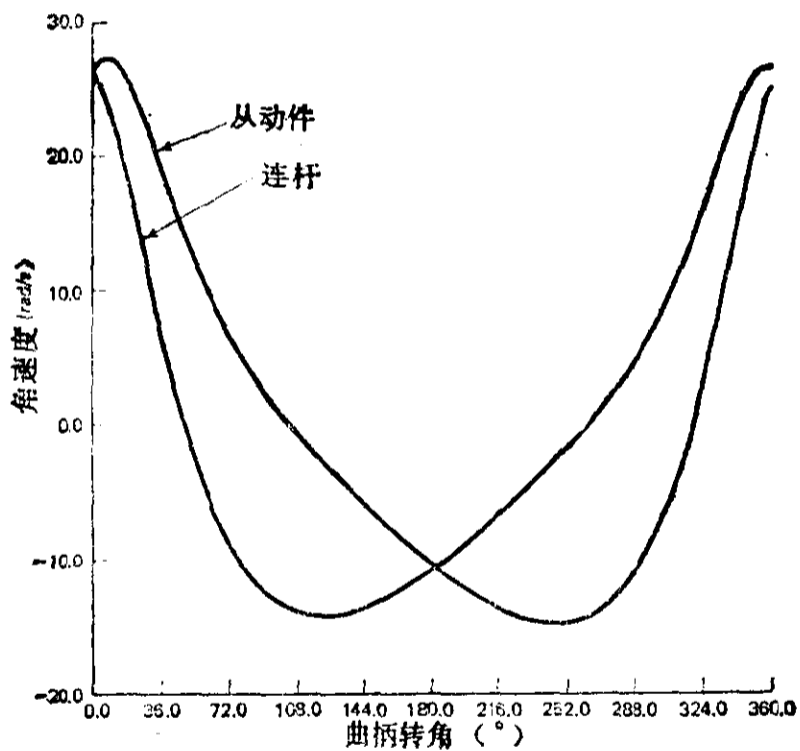


图 5.87 例 5.17 中连杆和从动件的刚体角速度对曲柄角的关系

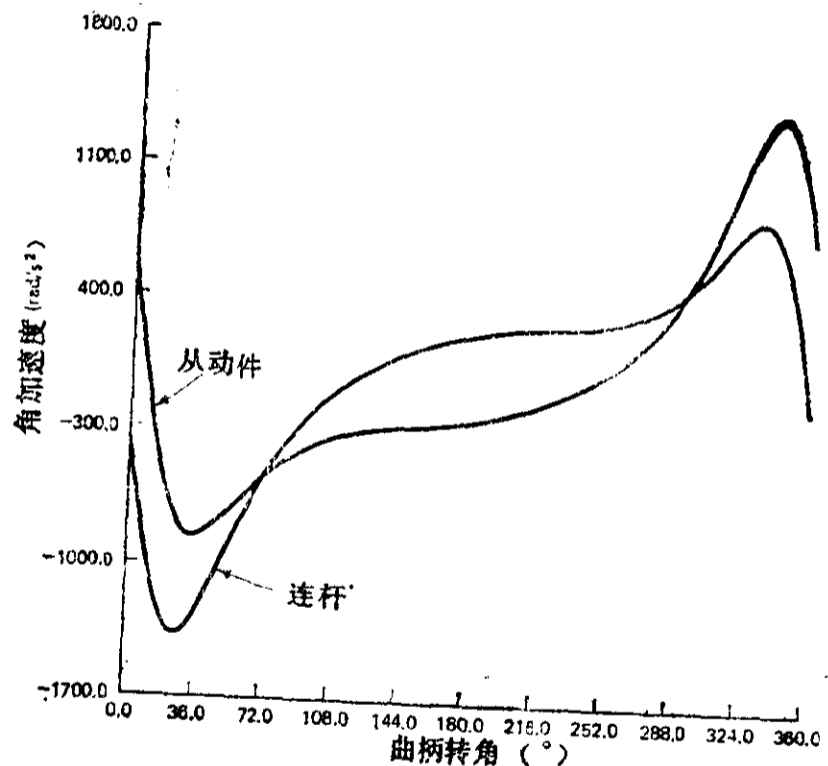


图 5.88 例 5.17 中连杆和从动件的刚体角加速度对曲柄角的关系

假定：轴承没有摩擦，没有间隙；机构仅做平面运动，认为偏离刚体平衡位置的弹性变形很小，以及重力加速度比刚体加速度和弹性加速度小很多。

在后面的结果里，只包括了头三个振型。为了得到足够精确的机构稳态响应(应变)，相信将基本的力时间周期 T_f 分成九十个相等时间的小间隔就够了。对每一振型，以小的当量振型阻尼比来估计系统的材料阻尼。这是计算阻尼矩阵的威尔逊法，如式(5.332)所介绍的那样。每个振型的阻尼比取为 0.03。

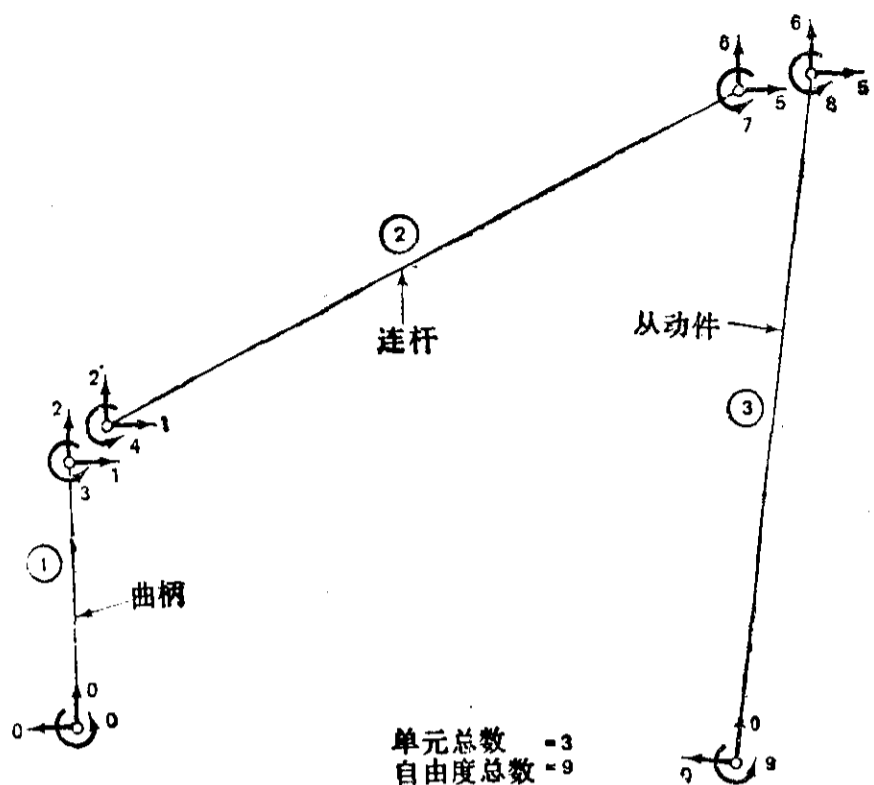


图 5.89 例 5.17 中的第一个弹性机构模型

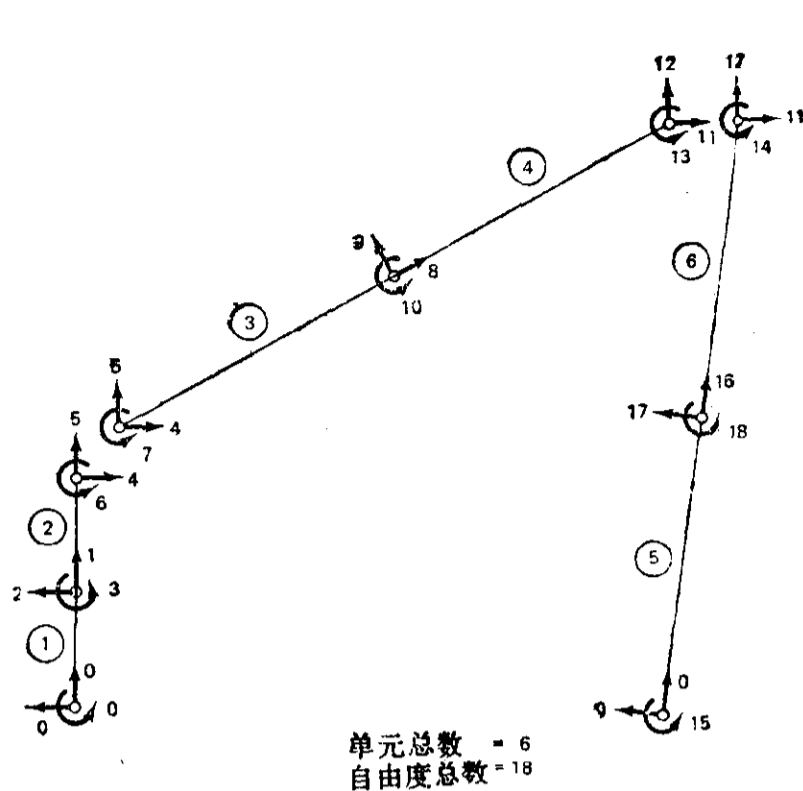


图 5.90 例 5.17 中的第二个弹性机构模型

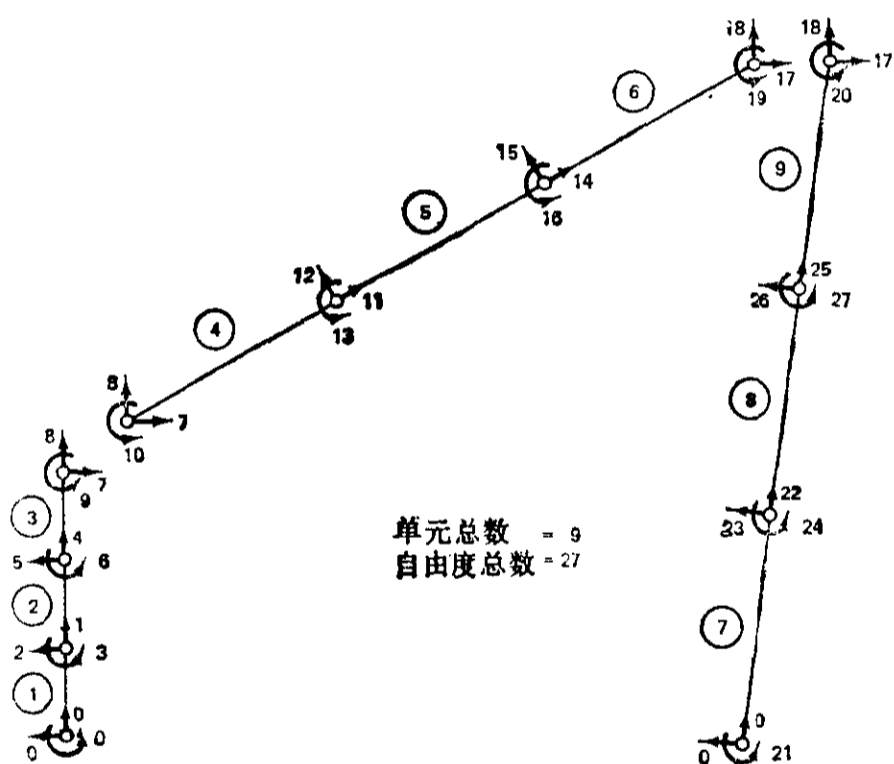


图 5.91 例 5.17 的第三个弹性机构模型

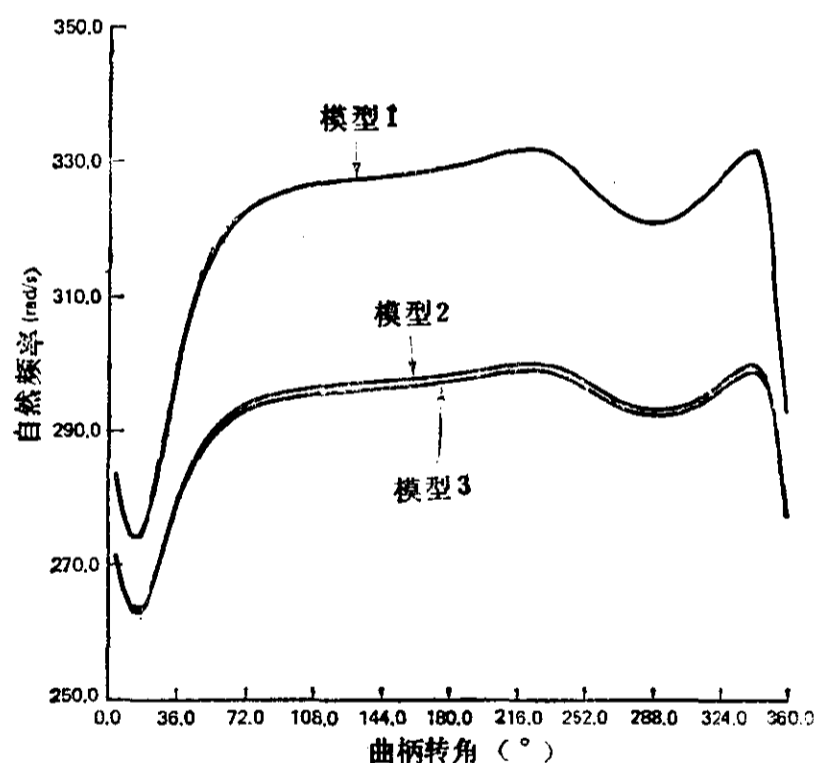


图 5.92 例 5.17 中第一振型自然频率对曲柄转角的变化

图 5.92、图 5.93 和图 5.94 描述了对于前面提到的三种模型的第一、二、三振型自然频率随时间的变化。从中我们可以看到，随着构件理想化的单元个数的增加，这种随时间变化的曲线逐步趋于一致。

根据前面推导的方法，可以算出振动机构的稳态响应。图 5.95 到图 5.98 比较了前面讨论的三种模型的连杆和从动件中点的应变。我们定义连杆中点向上变形时其应变为正，并定义从动件的中点向里变形时，其应变为正。

从图 5.95 和图 5.96 中可以清楚地看到，在用三个单元的机构理想化(模型 1)和用六个单元的机构理想化(模型 2)之间，在响应方面，连杆和从动件中点的(稳态)应变有很大的差别。然而，当单元数量增加时，计算得到的应变值互相趋近了。这一点可以从分别记录在图 5.97 和图 5.98 中用六个单元的机构理想化(模型 2)和用九个单元的机构理想化(模型 3)的连杆和从动件中点的应变值得到证明。

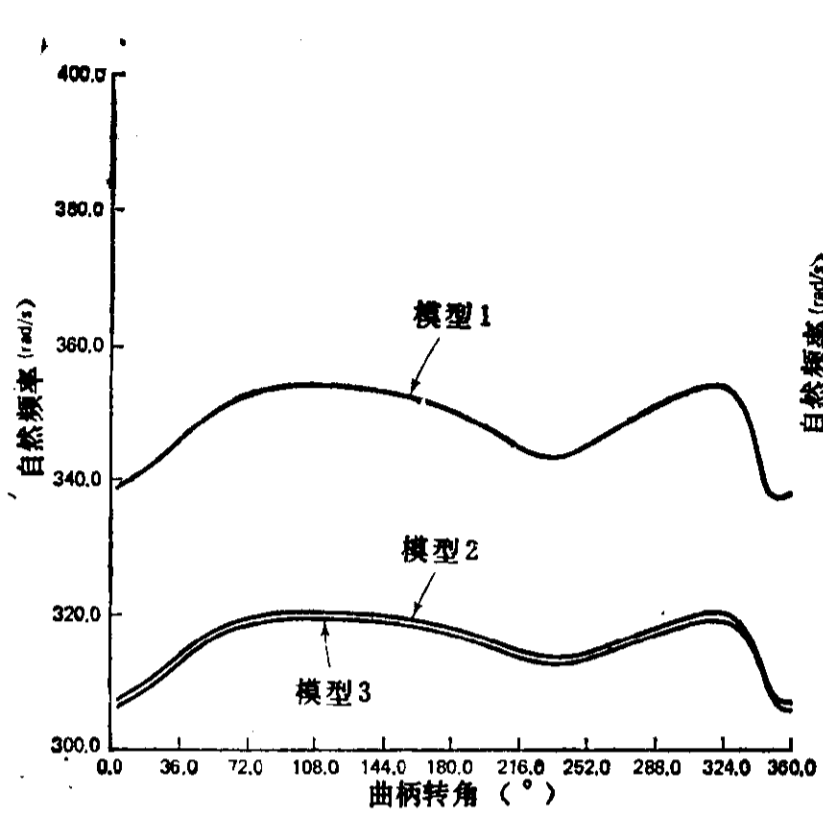


图 5.93 例 5.17 中第二振型自然频率对曲柄转角的变化

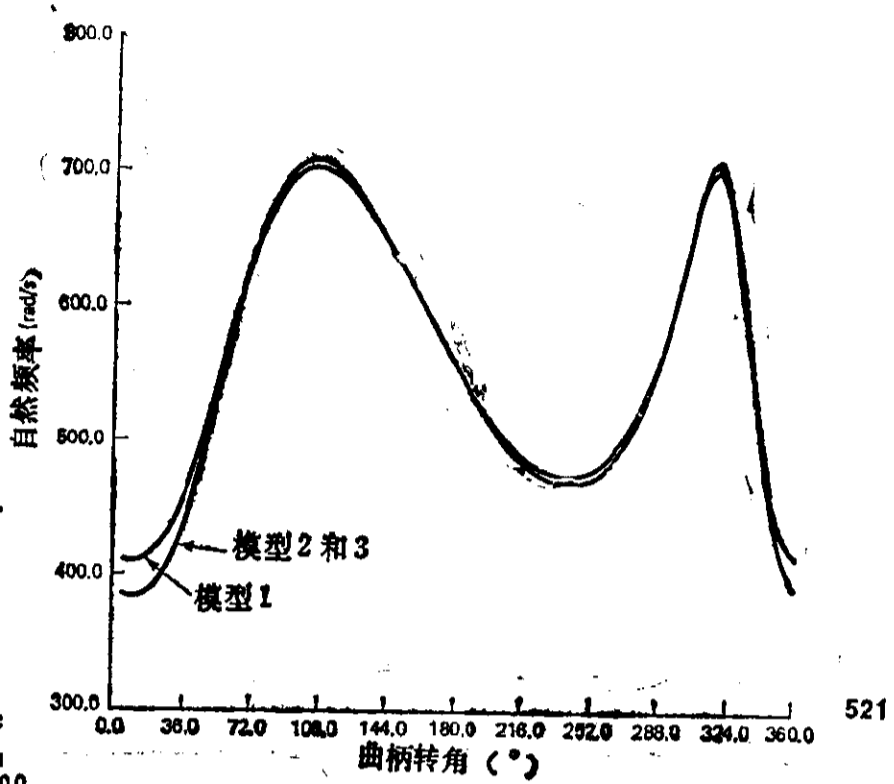


图 5.94 例 5.17 中第三振型自然频率对曲柄转角的变化

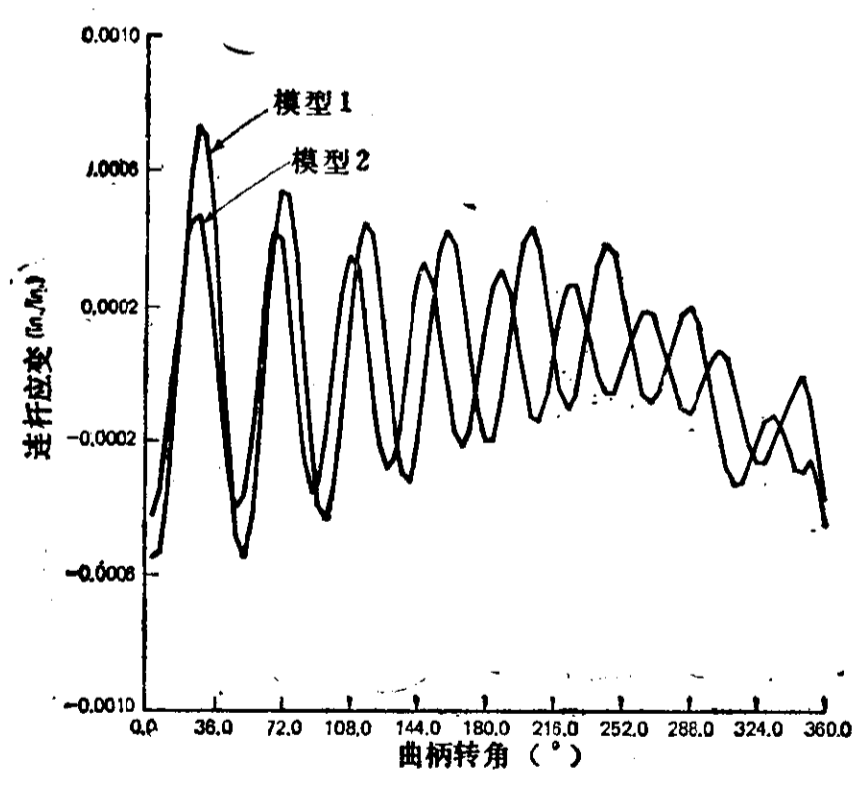


图 5.95 对于模型 1 和 2, 连杆中点应变的比较(例 5.17)

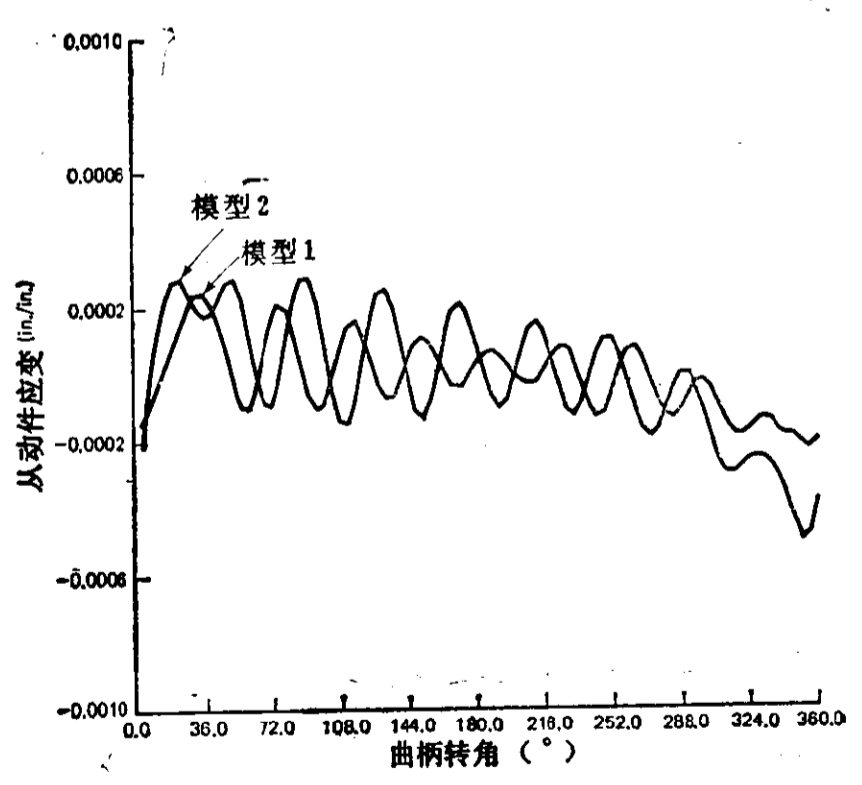


图 5.96 对于模型 1 和 2, 从动件 midpoint 应变的比较(例 5.17)

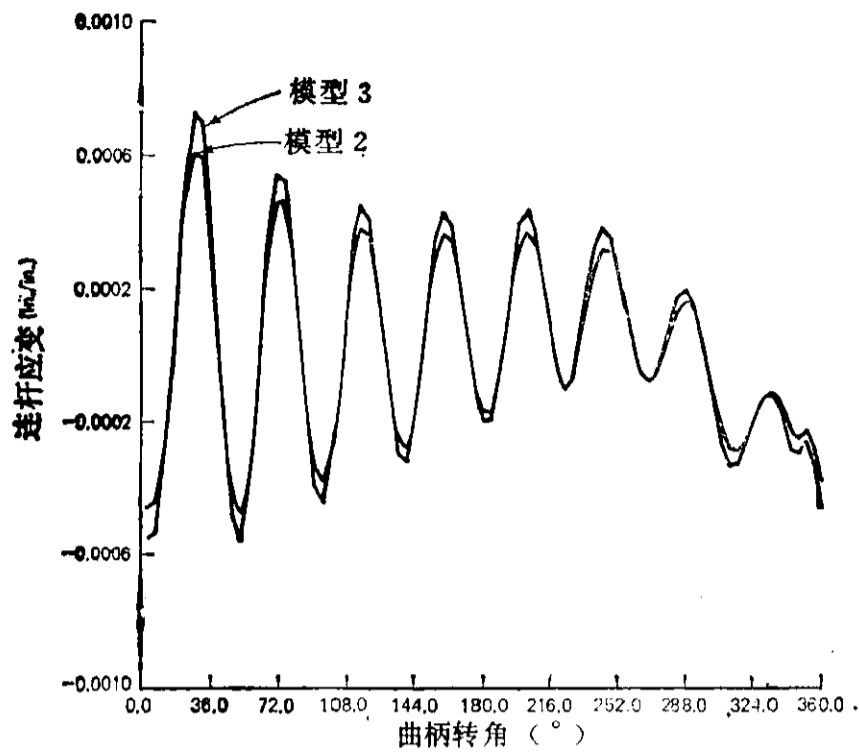


图 5.97 对于模型 2 和 3, 连杆中点应变的比较(例 5.17)

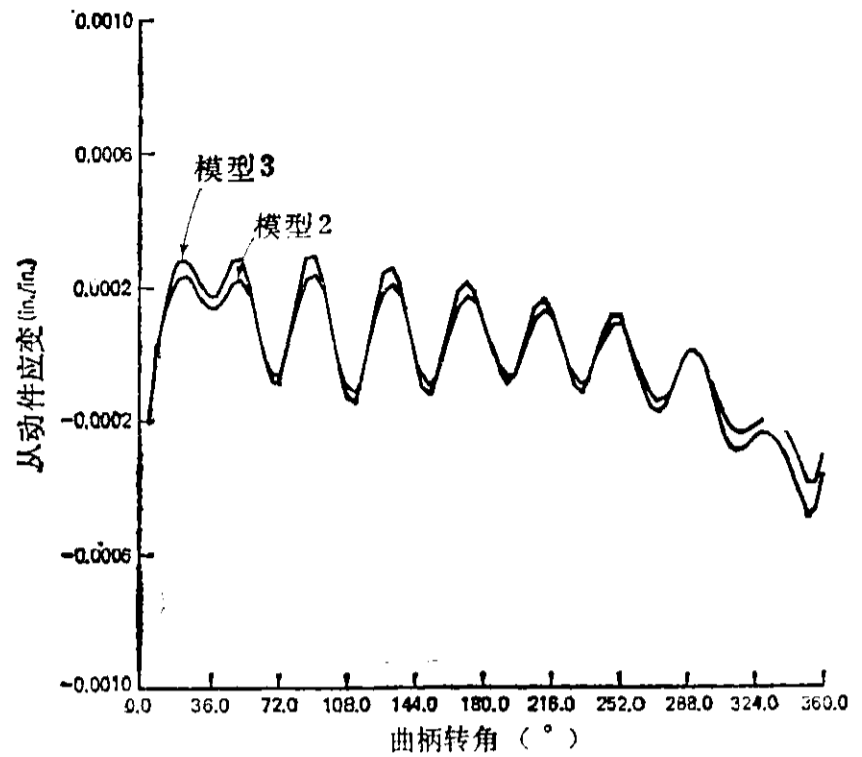


图 5.98 对于模型 2 和 3, 从动件中点应变的比较(例 5.17)

我们鼓励读者去参考文献[292]^①, 这篇文献对弹性四杆机构作了广泛的解析研究和试验研究。同时这篇文献也提供了建立复杂弹性机构系统运动方程的一般方法, 使得我们可以来模拟一般的二维或三维系统, 即在一般表达式中包含非线性刚体运动和弹性运动耦合的一些项, 并可在模型中使用任何类型的有限单元。

例 5.18

例 5.17 中四杆曲柄-摇杆机构的数据取自特西克^[292]所写的试验报告中一个试验机构。在这份报告中, 对试验结果和解析结果进行了比较。

图 5.99 所示的机构中, 输入曲柄是分为两片的, 连杆在中间通过。输入轴由滑动轴承支撑。整个机构安装在一块 3.5in 厚的橡木底座上。该底座再用螺钉固定在一块安放在地板上的钢筋混凝土的基础上。这就采取了所有预防措施来隔离外界振动对机构的影响, 排除了共振条件。

图 5.99 试验用的曲柄-摇杆机构的照片(由 Ashok Midha 提供)

① 应为文献[294]——译者注。

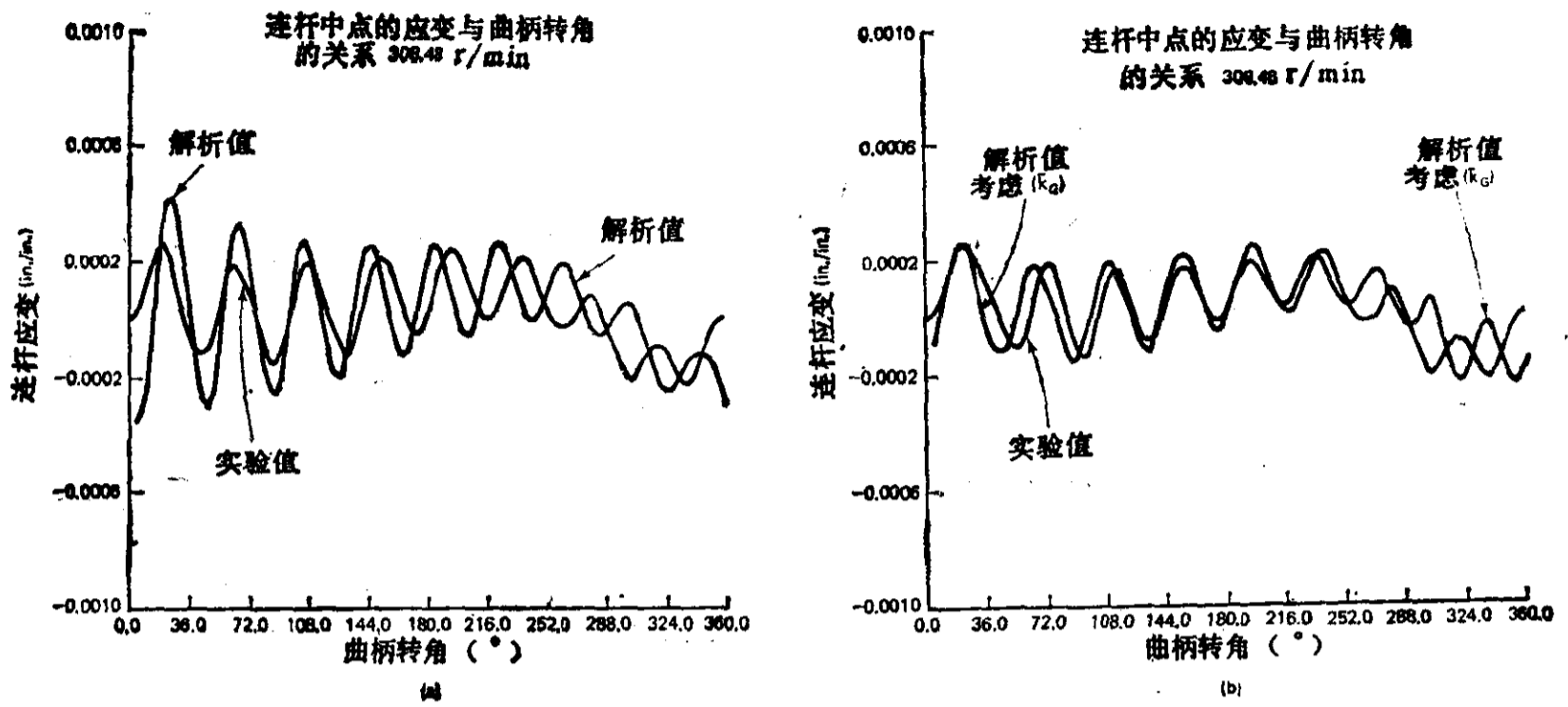


图 5.102 当输入速度为 308.48r/min 时, 连杆中点应变的实验值与解析值的比较

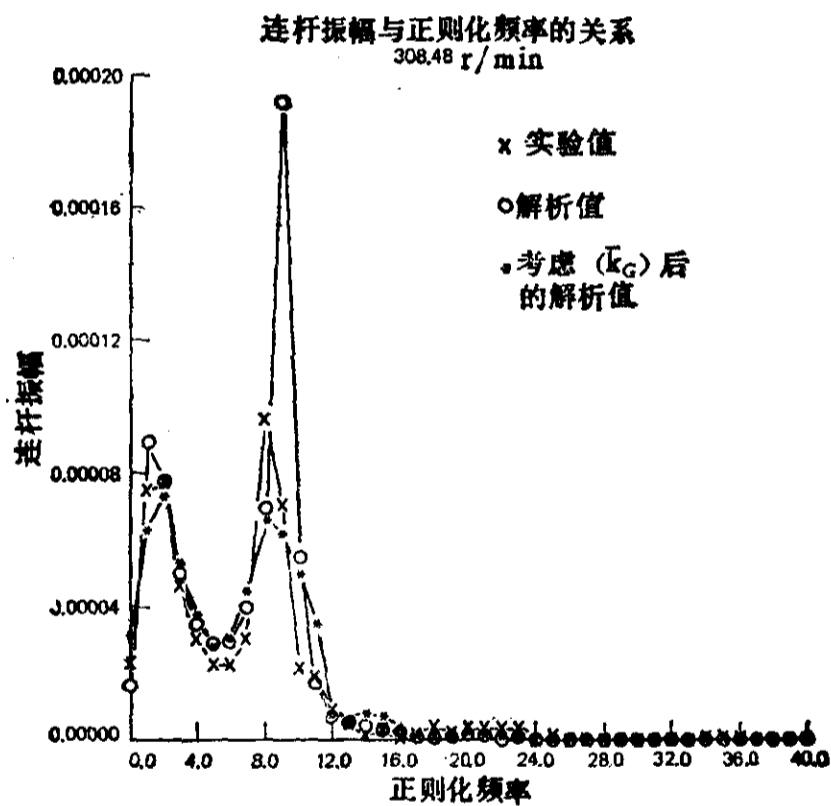


图 5.103 连杆振动振幅随正则化频率而变化

频率而变化的比较, 而不是象图 5.102 那样的时间响应的比较。正则化频率定义为信号频率值与基本频率(输入速度)的比值。图 5.104 给出了从动件中点的稳态应变值, 而图 5.105 则表示从动件振动振幅随正则化频率而变化的比较。对于在不同速度下的各种结果及其比较, 读者可参阅文献[292]。

从上面的比较可以看出, 在所有考虑的运转速度上, 试验结果和分析结果吻合得很好。很明显, 在分析时包括了 $[k_G]$ 有关各项, 就在相当大程度上改善了这些比较。

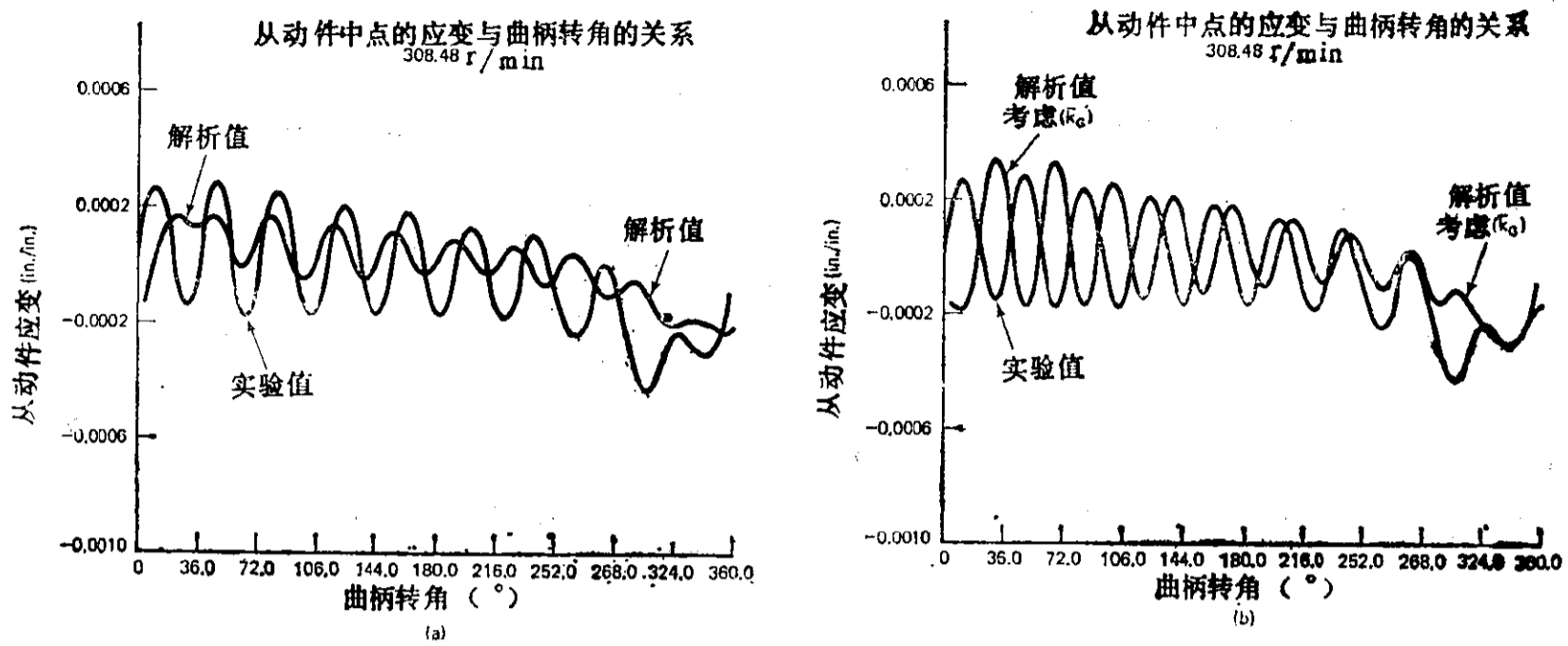


图 5.104 当输入速度为 308.48r/min 时从动件中心应变的实验值与分析值的比较

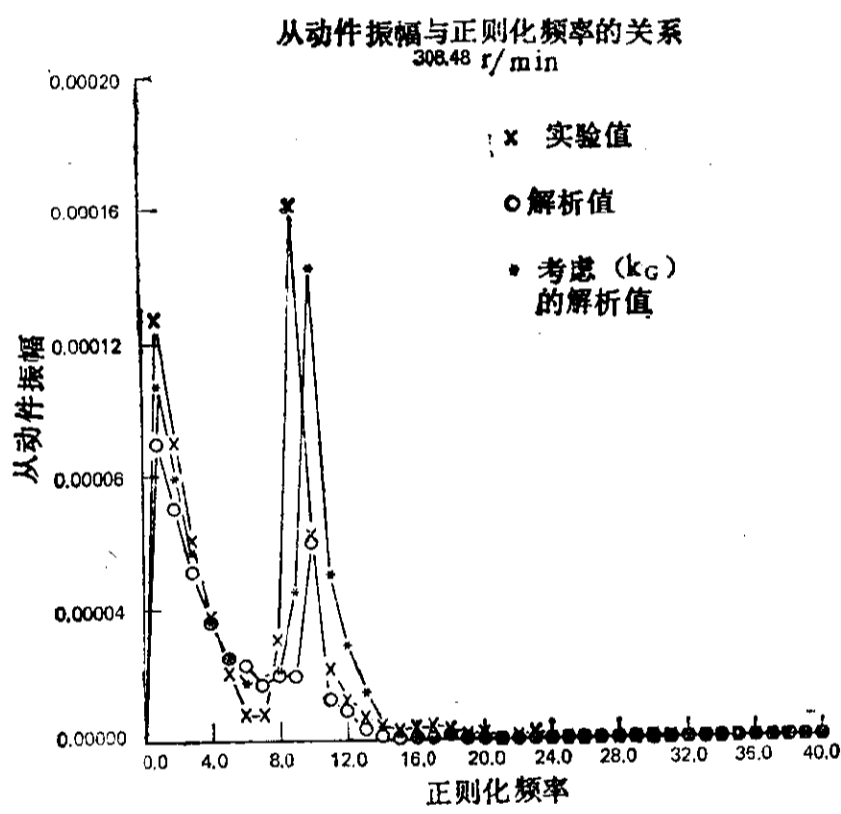


图 5.105 从动件振动振幅随正则化频率的变化

习 题

5.1 在图 P5.1 中，已知的外力 S 和惯性力 P 分别作用在构件 3 和 4 上。假设构件 2 和构件 3 的惯性与 P 和 S 相比小得很多。试求在构件 2 上要加多大的扭矩，才能使机构平衡？

- (a) 用隔离体图和图解法求解；
- (b) 用虚功法。

5.2 两个力作用在图 P5.2 所示的四杆机构上。一是作用在点 B 的惯性力 $P=100\text{ lbf}$ ，另一是作用在构件 4 上的外扭矩 $T_4=-600\text{ in}\cdot\text{lbf}$ 。试求所需的输入扭矩 T_2 和在铰链 O_2, A, C 和 O_4 ①中的力。

- (a) 用隔离体图和图解法；

① 原文为 O_1, A, B 和 O_4 ——译者注。

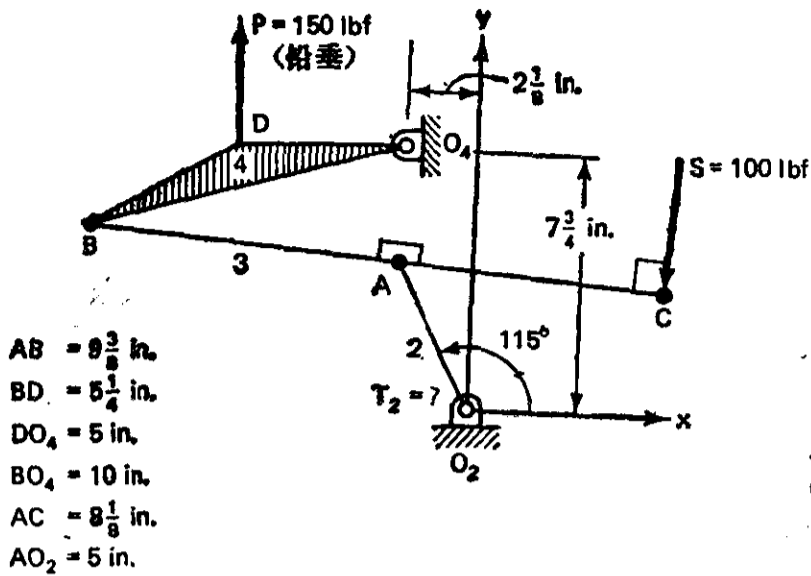


图 P5.1

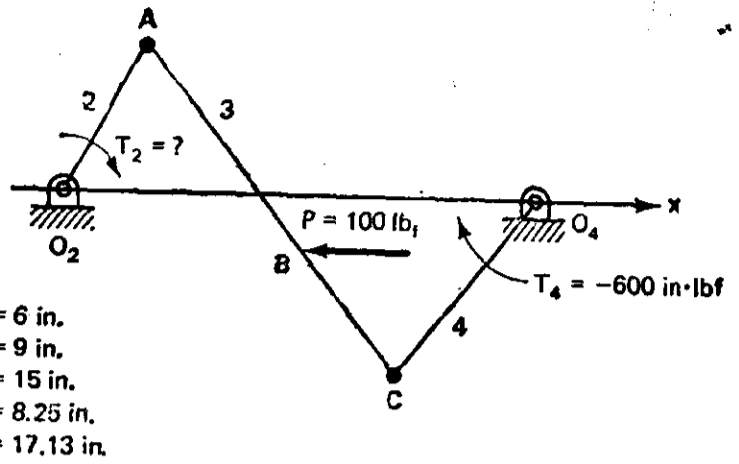


图 P5.2

(b) 用虚功法;

(c) 用复数法。

5.3 图 P5.3 表示一个双活塞机构, 假设在外力 P 和 S 以及输入扭矩 T_2 的作用下, 它处于平衡状态。试求输入扭矩 T_2 、铰链 A 、 C 和 O_2 中的力以及活塞和导轨之间的接触力。

(a) 用隔离体图和图解法;

(b) 用虚功法;

(c) 用复数法。

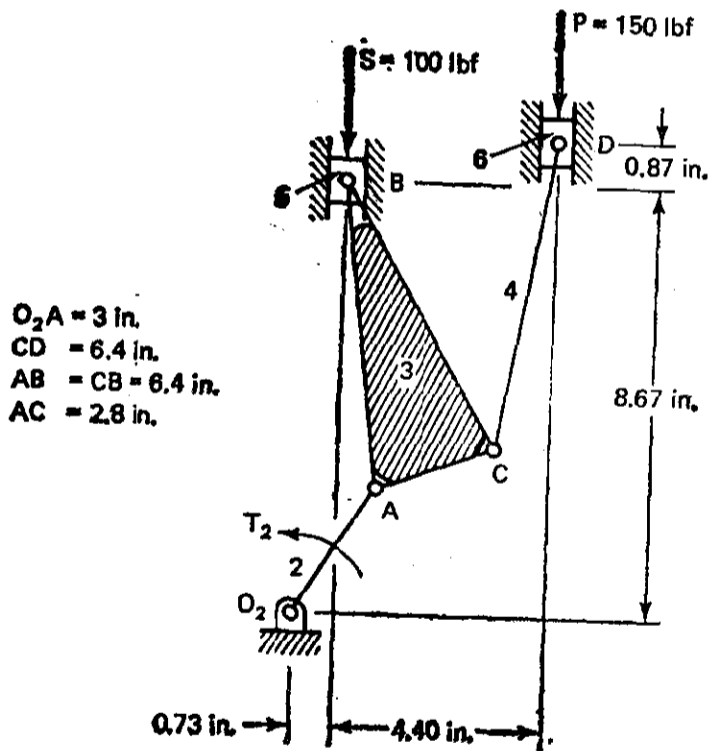


图 P5.3

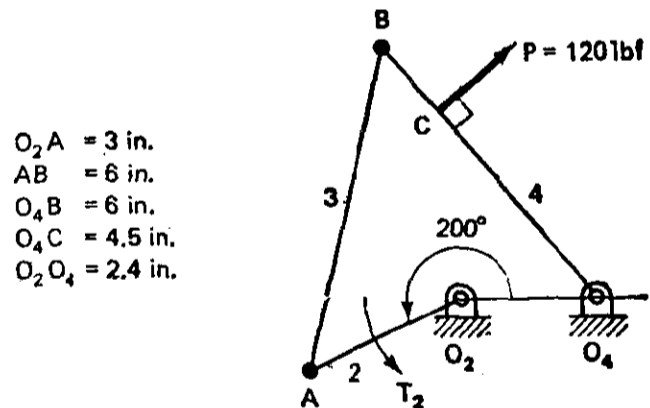


图 P5.4

5.4 有一外力 P 作用在图 P5.4 所示的机构上。试求要在杆 2 上加多大的输入扭矩 T_2 才能使机构保持平衡?

(a) 用隔离体图和图解法;

(b) 用虚功法;

(c) 用复数法。

5.5 一外力 $P=200 \text{ lbf}$ 和一惯性力 $S=150 \text{ lbf}$, 作用在图 P5.5 所示的四杆机构上。由于扭矩 T_2 作用在构件 2 上的结果, 系统处于动力平衡状态。试求 T_2 和各铰链中的力。

- (a) 用隔离体图和图解法;
- (b) 用虚功法;
- (c) 用复数法。

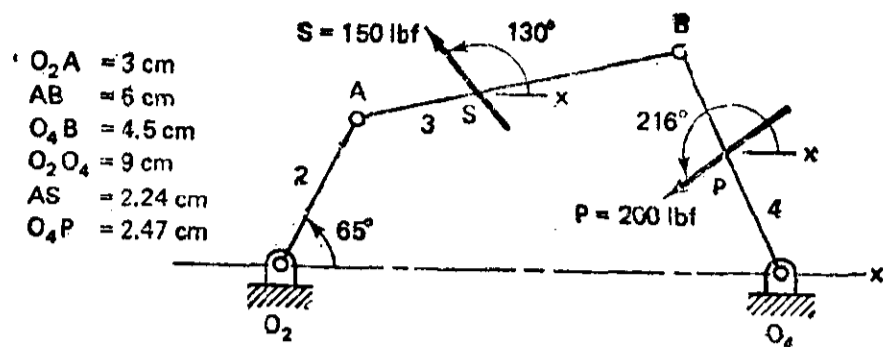
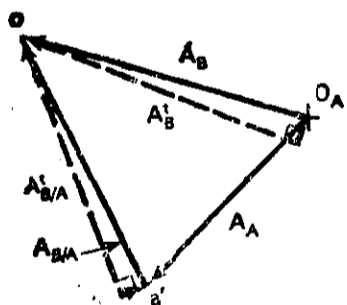
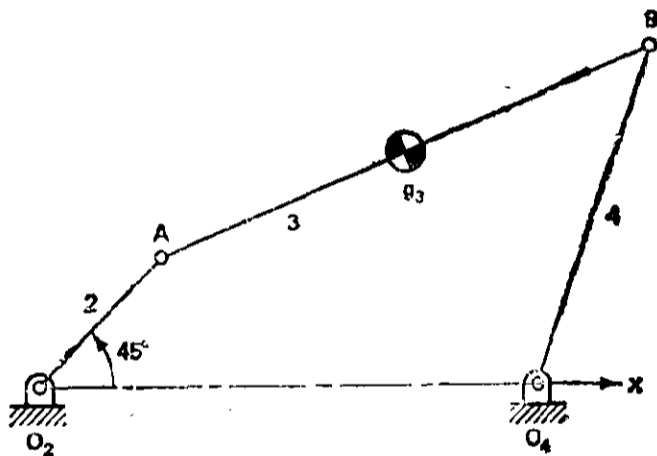


图 P5.5

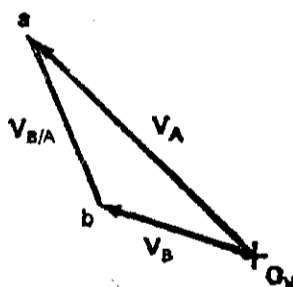
5.6 图 P5.6 所示四杆机构中输入曲柄以不变的速度 $\omega_2 = 300 \text{ r/min}$ 逆时针方向转动。只有连杆才考虑有明显的惯性。它们的速度和加速度图形如图所示。

- (a) 求构件 3 重心的线加速度和角加速度 α_3 ;
- (b) 求连杆的惯性力 F_{O_3} ;
- (c) 用虚功法求铰链 A 和 B 中的力的大小和方向;
- (d) 在这个位置和上述条件下, 求驱动该机构所需的输入扭矩;
- (e) 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

$O_2A = 5 \text{ in.}$
 $AB = 15 \text{ in.}$
 $AG_3 = 7.5 \text{ in.}$
 $O_4B = 10 \text{ in.}$
 $O_2O_4 = 14 \text{ in.}$
 $W_3 = 11.45 \text{ lbf}$
 $I_3 = 0.451 \text{ lbf} \cdot \text{in} \cdot \text{s}^2$



加速度图



速度图

图 P5.6

5.7 图 P5.7 所示四杆机构中输入曲柄以不变的速度 $\omega_2 = 500 \text{ rad/s}$ 顺时针方向转动。每个构件都有明显的惯性。图中提供了速度图和加速度图。

- (a) 求惯性力 F_{O_2} 、 F_{O_3} 和 F_{O_4} ;
- (b) 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- (c) 求在这个位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- (d) 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

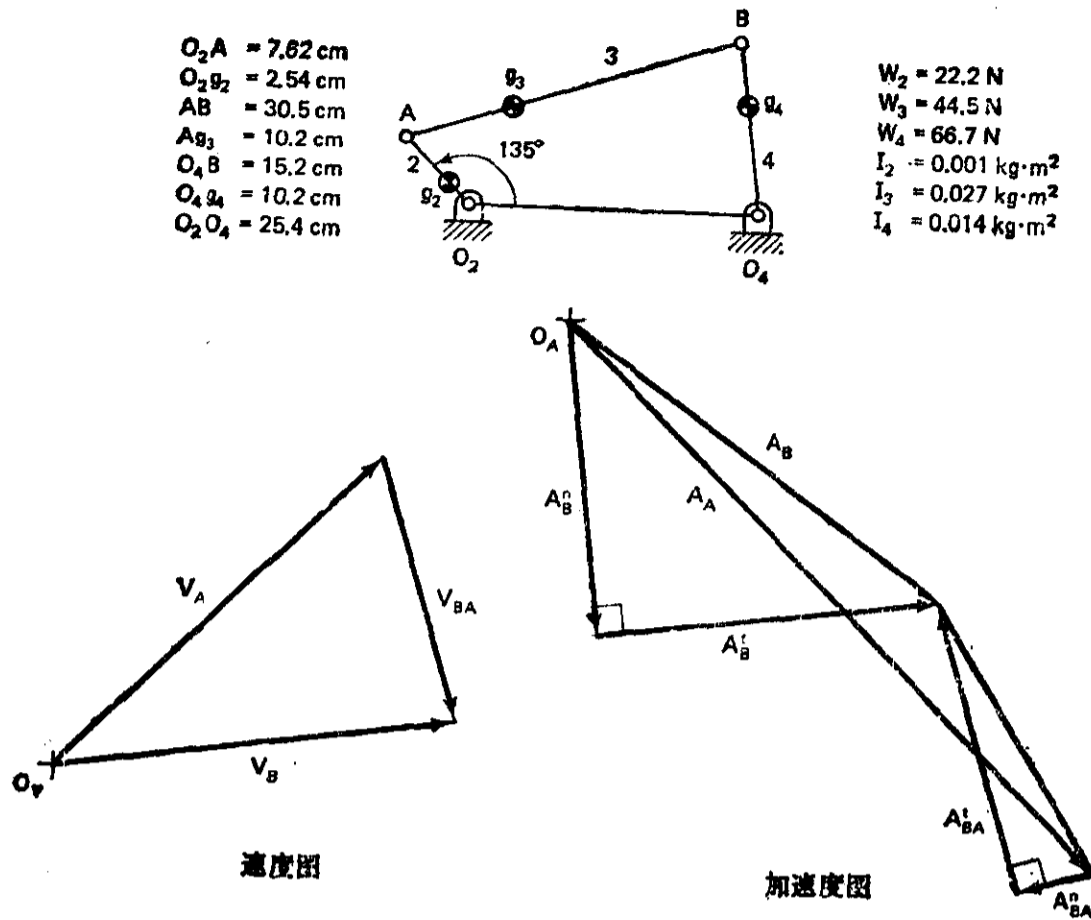


图 P5.7

5.8 要求分析 P5.8 所示滑块-曲柄机构以确定连杆(构件 3)的惯性作用。速度和加速度图如图所示, V_A 的大小是已知的。

- 求连杆的惯性力 F_{O_3} ;
- 求在铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- 用虚功法求在这个位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

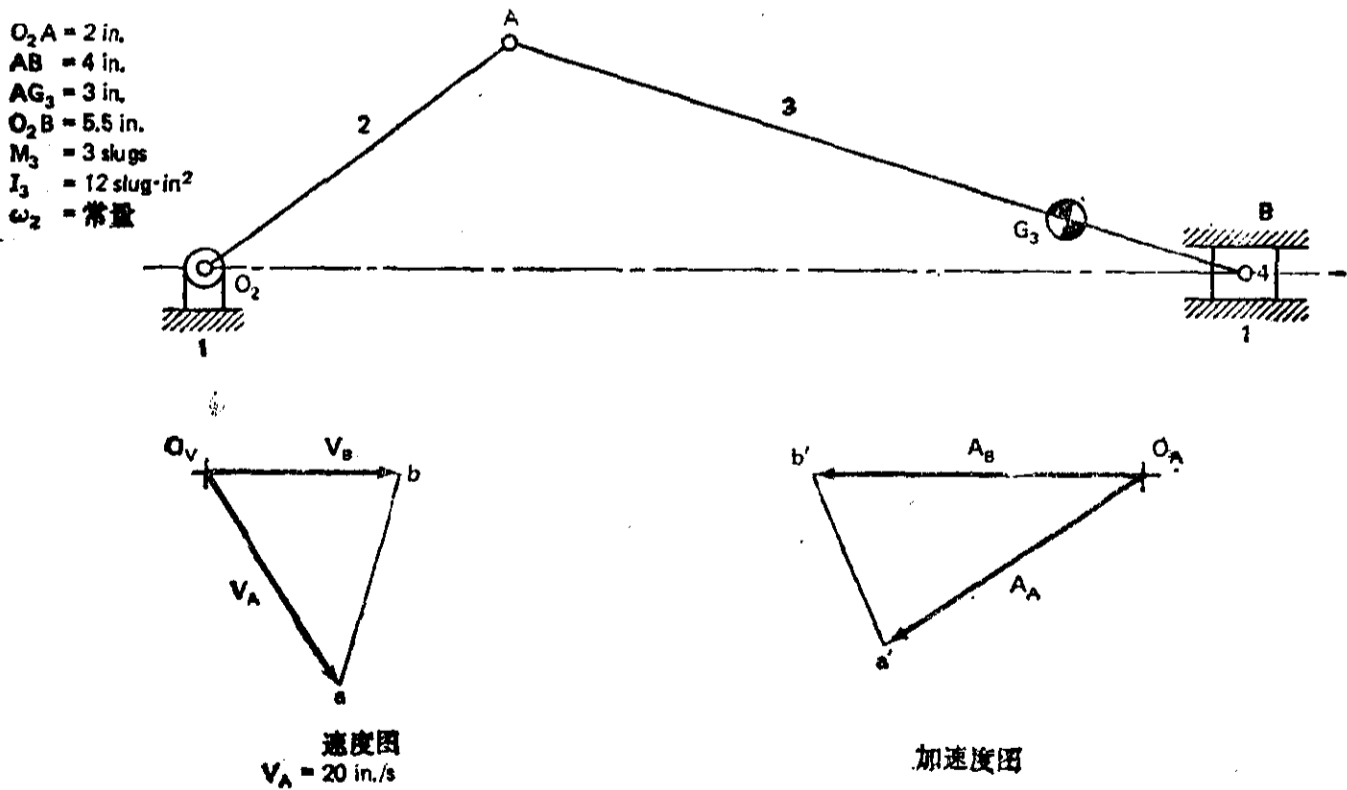


图 P5.8

5.9 确定图 P5.9 所示四杆机构中连杆的惯性作用。有关的数据和加速度图如图所示。

- (a) 求连杆的惯性力 F_{O_3} ;
- (b) 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- (c) 求在这个位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- (d) 求传到机座上的震动力和震动力矩的瞬时值。

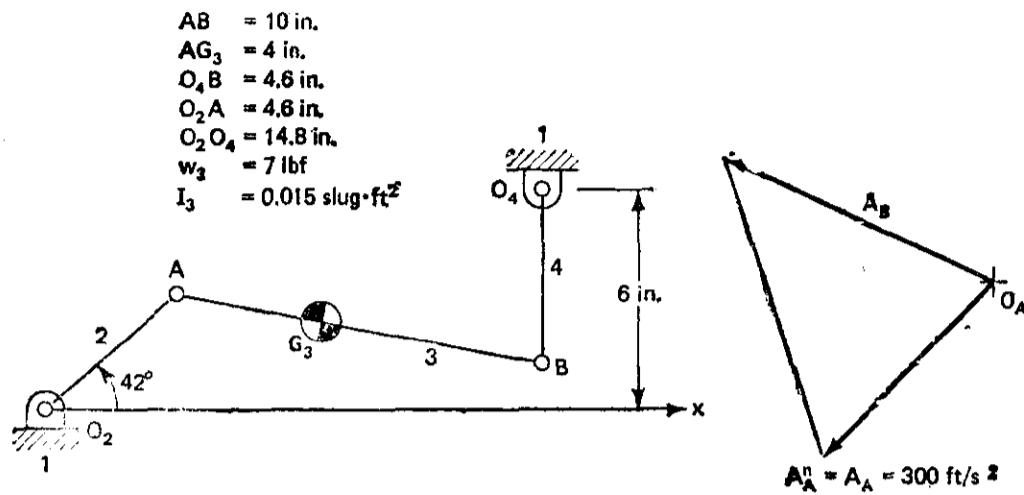


图 P5.9

5.10 确定题 5.9 中构件 2 和 4 的惯性的影响。再次参看图 P5.9, 并增加如下数据:

$$O_2G_2 = O_4G_4 = 2.5 \text{ in.}$$

$$W_2 = W_4 = 5 \text{ lbf}$$

$$I_2 = I_4 = 0.01 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

- (a) 求惯性力 F_{O_2} 和 F_{O_4} ;
- (b) 用虚功法求考虑了所有的惯性作用后所需的输入扭矩;
- (c) 考虑了所有的惯性作用后, 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

5.11 图 P5.10 所示的四杆机构中, 只考虑构件 3 的质量和惯性。对于已知的数据, 求 θ_3 和 θ_4 , 然后

- (a) 求连杆的惯性力 F_{O_3} ;
- (b) 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- (c) 求在这个位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- (d) 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

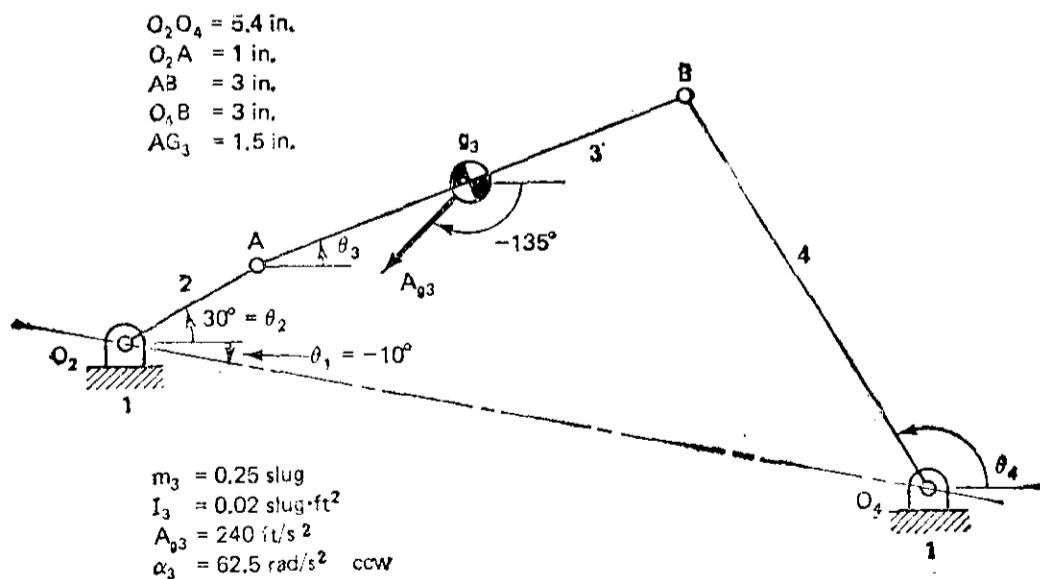


图 P5.10

5.12 分析图 P5.11 所示的四杆机构, 以求该瞬间三个运动构件的惯性作用。如果输入角速度和角加速度

分别为 $\omega_2 = 2\pi \text{ rad/s}$ (逆时针方向) 和 $\alpha_2 = 2\pi \text{ rad/s}^2$ (逆时针方向), 以及速度和加速度图已给出,

- 求惯性力 $F_{O_2}, F_{O_3}, F_{O_4}$;
- 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- 求在这个位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩。
- 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

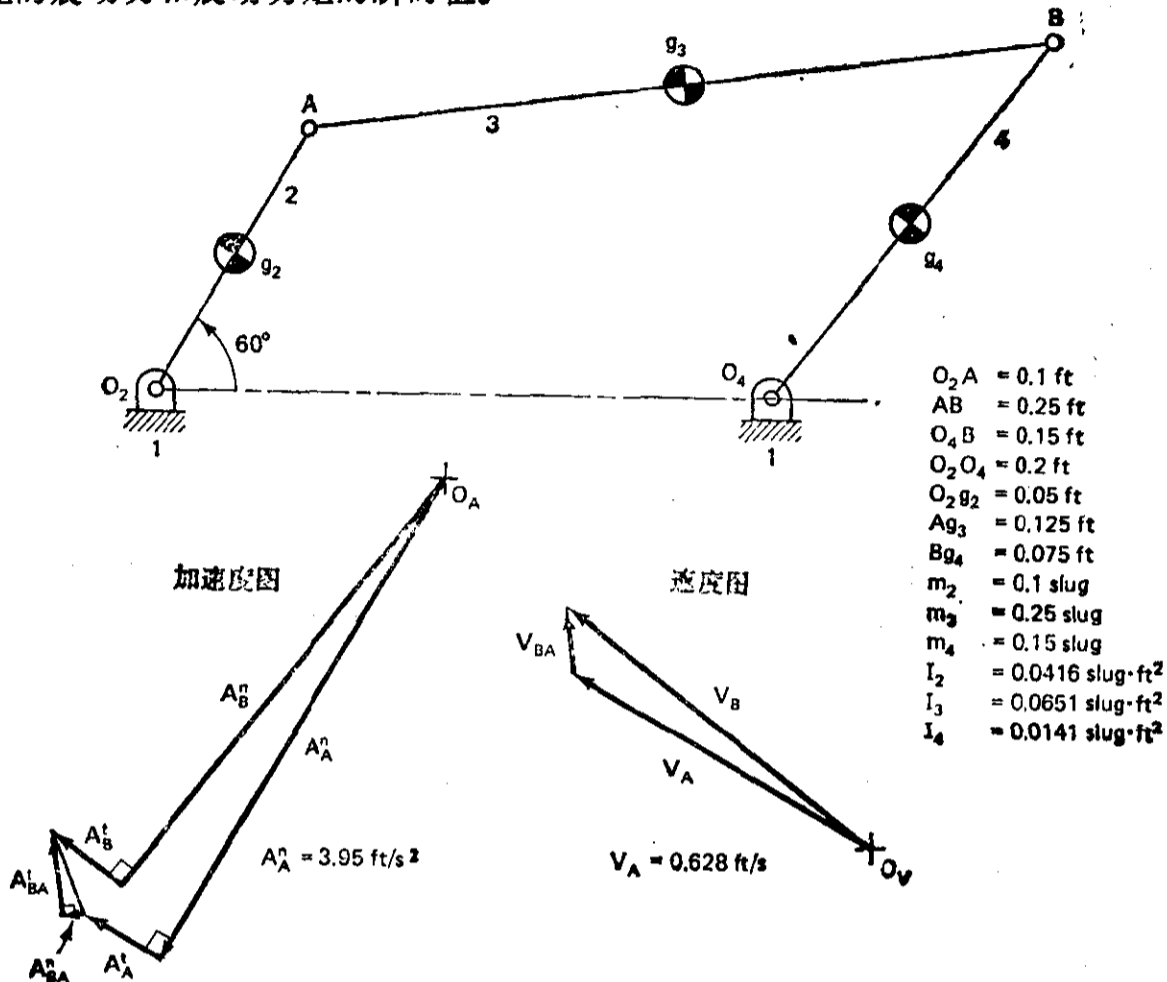


图 P5.11

5.13 在图 P5.12 所示的四杆机构的构件 2 上有一个配重, 以使该构件的质心落在 O_2 上。构件 3 绕 g_3 的回转半径为 4.5in, 而构件 4 绕 O_4 的回转半径为 3.9in。输入角速度 $\omega_2 = 40 \text{ rad/s}$ (逆时针) 是不变的。

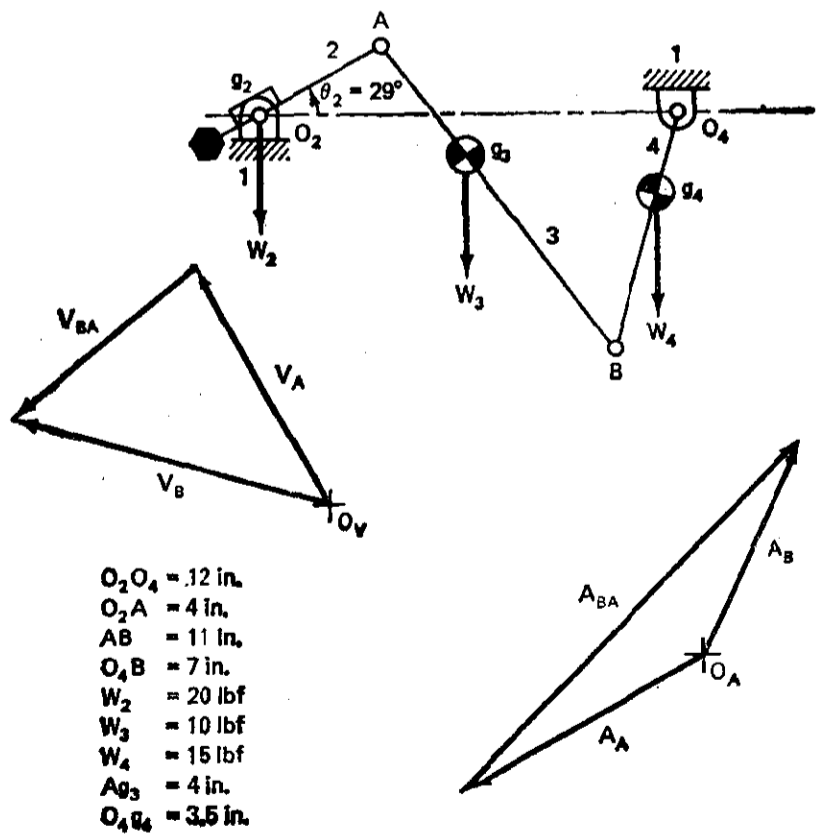


图 P5.12

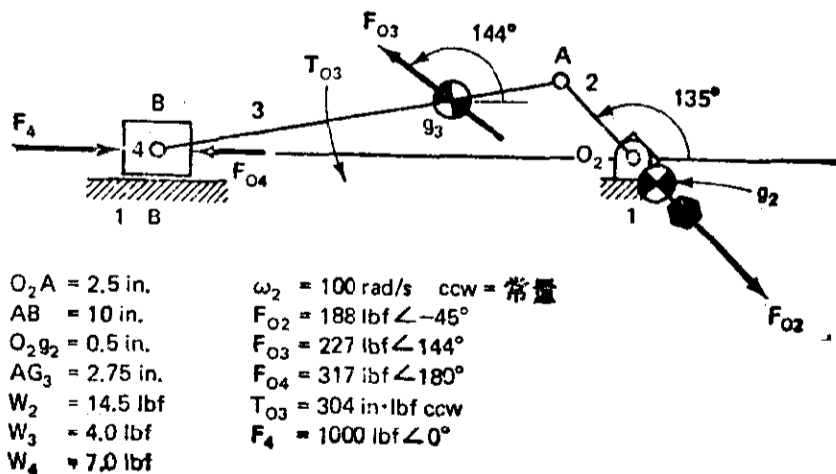


图 P5.13

- (a) 求惯性力 F_{O_2} , F_{O_3} 和 F_{O_4} ;
- (b) 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- (c) 求在这一位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- (d) 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值;

5.14 图 P5.13 所示滑块曲柄机构是压缩机的主要驱动部分。输入曲柄是以一个重物部分平衡过的, 所以 g_2 在平衡配重方向, 距 O_2 为 $0.5in$ 。构件 3 绕 g_3 的回转半径是 $4.1in$ 。仅有的外力是气体作用在活塞顶端的给定的力 F_4 。所有四个惯性力也是已知的。(由于该机构在水平面内无摩擦地运动, 所以各构件的重量不起作用)。

- (a) 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- (b) 求在这一位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- (c) 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

5.15 与题 5.14 中的问题相同, 但增加构件 1 和 4 之间摩擦系数 $\mu=0.1$ 的摩擦力。用瞬心法求 V_B 。注意 V_B 的幅角 $=180^\circ$ 。

(提示: 当摩擦存在时, 迭加原理有时不能得出正确的结果。记住只有在处理线性系统时, 迭加原理才适用。因此, 要用虚功法来求铰链力和 T_2 的增加量。)

5.16 图 P5.14 所示是一个铲斗机构。我们假定在力分析中构件 3 的惯性很小。构件 2 的质量为 $5kg$ 它对 g_2 的转动惯量为 $24kg \cdot cm^2$ 。已知输入力 F_A 的方向和它的作用点。

- (a) 求输出件的惯性力 F_{O_2} ;
- (b) 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- (c) 求在这个位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- (d) 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

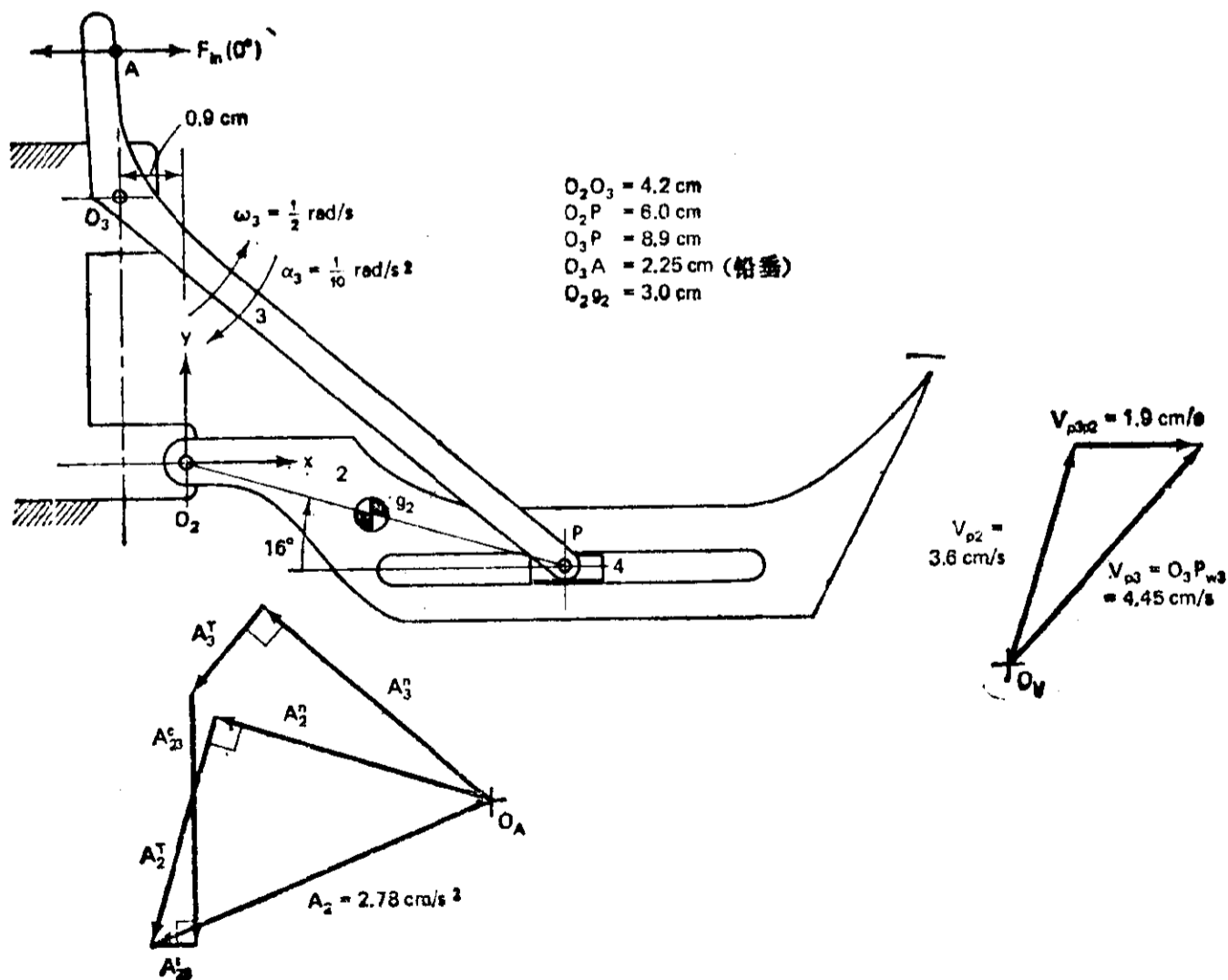


图 P5.14

5.17 与题 5.16 相同,但是这次,铲斗有了载荷,铲斗的质心在点 O_2 的水平线上,距点 O_2 右方 6cm 的地方。载荷的质量为 10kg, 载荷对其重心的转动惯量为 $20\text{kg}\cdot\text{cm}^2$ 。这次还要考虑构件 3 的质量和惯性: $O_3g_3 = 4\text{cm}$ (位于中心线 O_3P 上), $m_3 = 2\text{kg}$, $I_3 = 15\text{kg}\cdot\text{cm}^2$ 。与题 5.16 相比,这时各铰链中的力和所需的输入扭矩的结果如何?

5.18 图 P5.15 所示为一提升机构。对本题我们假设只有构件 3 具有明显的质量和惯性(不考虑构件 2 和 4 以及载荷 W 的质量和惯性)。

- 求惯性力 F_{O_3} ;
- 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- 求在这一位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- 求传到机座上的震动力和震动力矩的瞬时值。

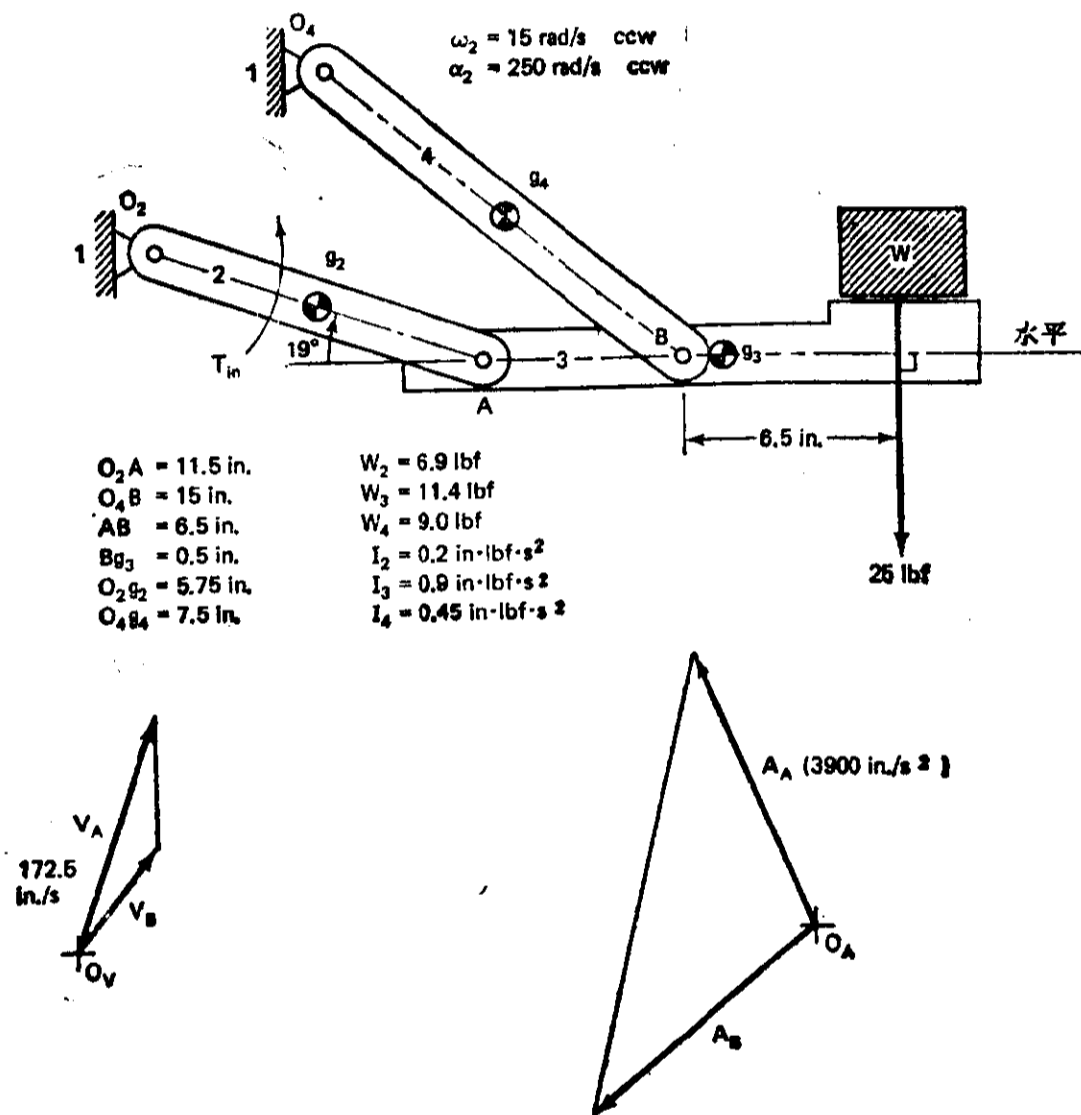


图 P5.15

5.19 参选题 5.18, 包括构件 2 和 4 以及载荷 W 的质量和惯性。

- 求惯性力 F_{O_2} 和 F_{O_4} ;
- 用虚功法求铰链 A 和 B 中力的大小和方向;
- 求在这个位置和上述条件下驱动该机构所需的输入扭矩;
- 求传到机座的震动力和震动力矩的瞬时值。

第六章 空间机构——兼介绍机器人学

6.1 引言

本书已用较多篇幅论述了在二维空间内运动的连杆机构和其它机构。尽管大多数机构的运动都是这样的平面运动,但是仍然有许多情况要求有三维(即空间)的运动。能在三维空间内运动的构件的可能联接形式可以从表 1.2 加以扩展得到(参看表 6.1 中常用的联接运动副)。由平面连杆机构可知,回转联接和棱柱(滑块)联接是相当常见的。这两者在它们所连接的构件之间都只允许一个运动自由度。但是要记住,在空间机构中,这些联接的轴线没有必要与其它联接的轴线相平行或垂直。因此,一般的空间运动都可以用这些联接来实现。

要介绍的另一种单自由度的联接为螺旋副。注意:在螺旋副的轴向平移和螺杆相对于螺母的转角之间存在着线性关系。在圆柱副中滑动和转动位移之间并没有相互联系,所以这种副允许两个相对运动的自由度。球面联接和平面联接则允许三个相对运动自由度——球面副有三个转动,而平面副则有两个平移和一个转动。

这些联接副和三维构件可以组合成无数的空间机构组合。图 6.1 到图 6.15 表示了空间机构的一些应用实例。图 6.1 到图 6.7 和图 6.13 到图 6.15 是三维空间机构作为不同用途的例子。把不共线的轴联接起来的三维空间机构的例子示于图 6.8 到图 6.12(参考文献 [132] 介绍了恒速联轴器的一般理论)。

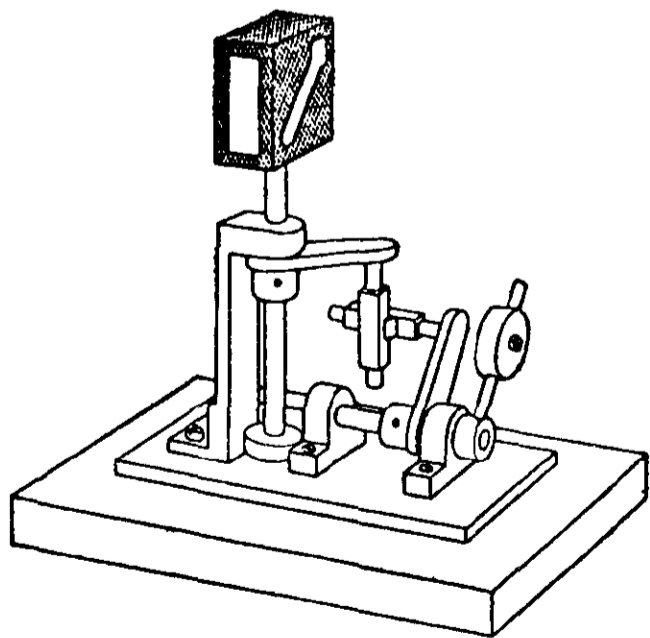


图 6.1 铁路信号机构(引自参考文献[62])

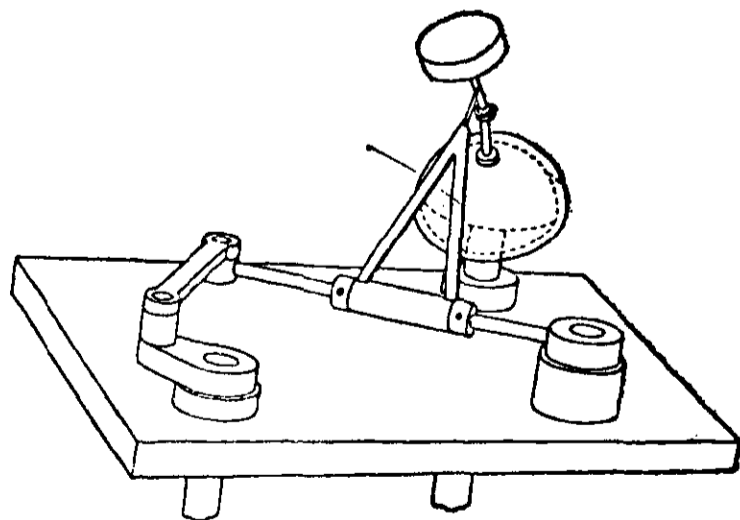
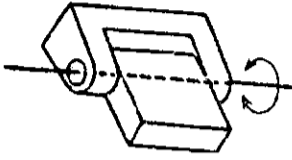
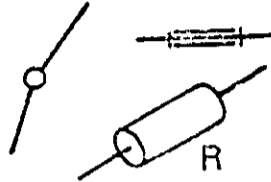
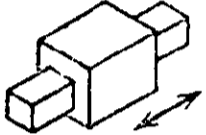
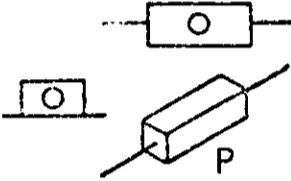
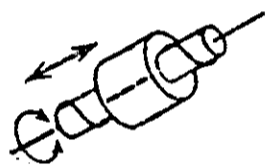
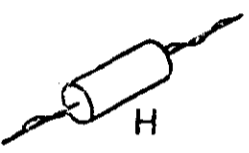
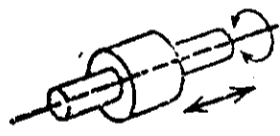
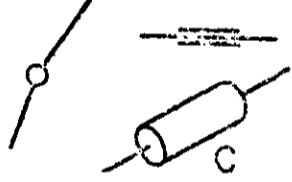
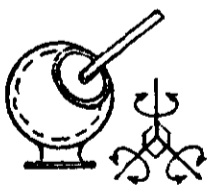
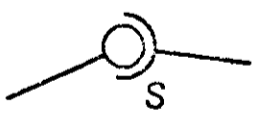
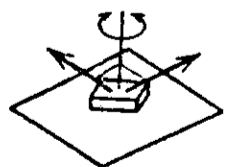
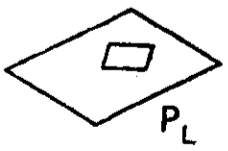


图 6.2 镜片研磨机(引自参考文献[62])

表 6.1

副名称	几何形式	示意图	运动副元素之间的相对自由度
回转副 (R)			1
棱柱副 (P) (移动)			1
螺旋副 (H) (螺旋)			1
圆柱副 (C)			2
球面副 (S)			3
平面副 (P _L)			3

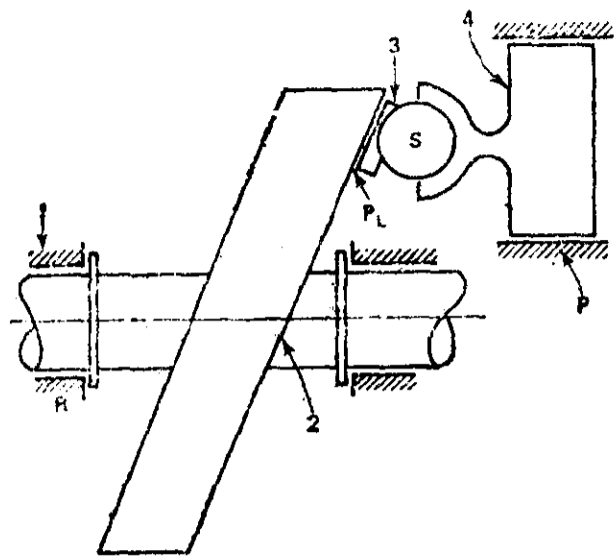


图 6.3 摆盘驱动(液压泵或液压电机的一部分)(引自参考文献[105])

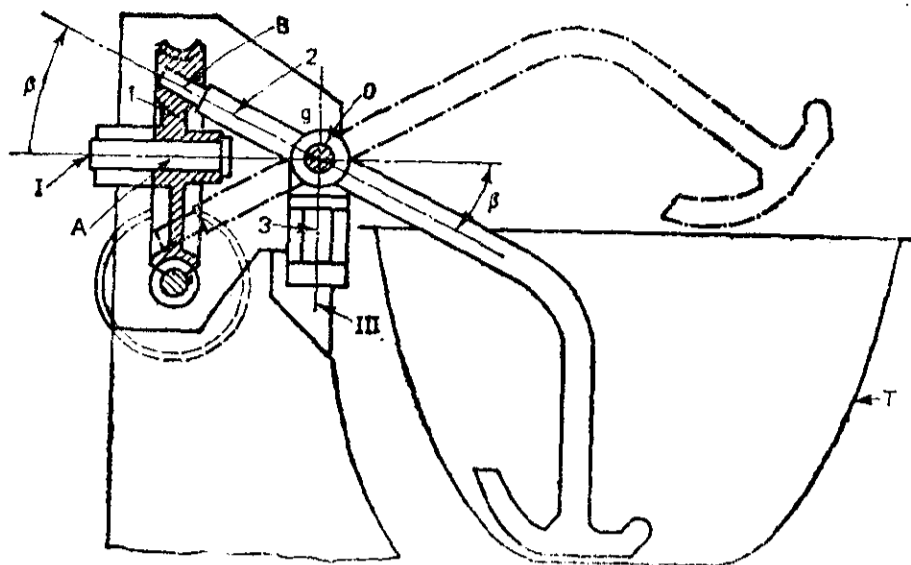


图 6.4 根据虎克接头(Hook's joint)而设计的揉面四杆机构。构件 2 的摆动使得面团在面缸中被揉匀。蜗杆驱动未考虑在四杆机构中。所指的四杆为: 1, 曲柄(蜗轮); 2, 揉面杆; 3, 从动构件; 4, 机座。(引自文献[46])

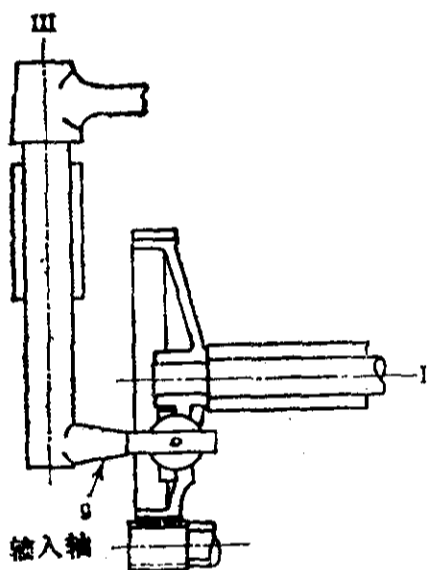


图 6.5 搅拌机构。这是一个三维的曲柄-滑块机构的应用实例。当输入齿轮 I 转动时, 构件 g 摇动(同时也提升)轴 III。因此, 构件 g 做两种运动: 摇动和沿其回转轴方向的正弦简谐移动。构件 g 的作用主要是实现不均匀的螺旋运动, 在每个循环中导程与转动的比在不断变化。(引自文献[46])

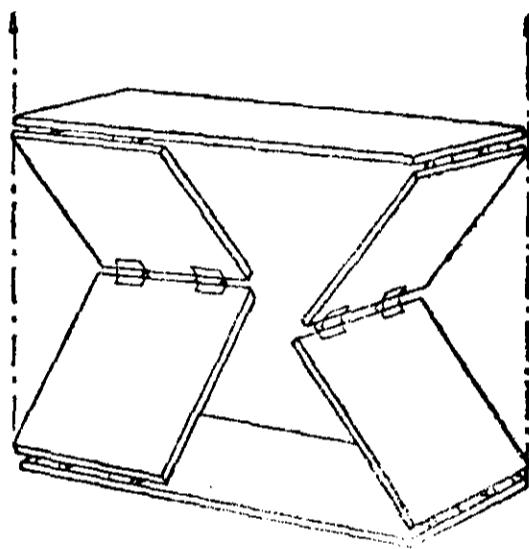


图 6.6 萨鲁特(Sarrut)空间平行导向机构(引自文献[62])

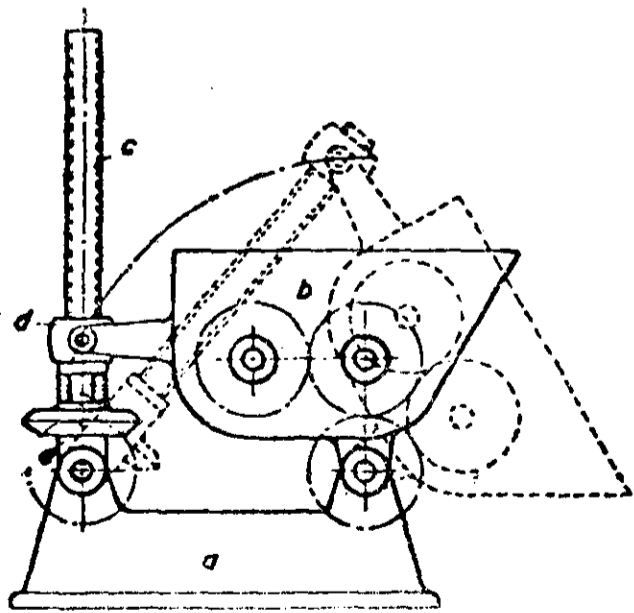


图 6.7 用于搅拌机卸料的螺旋机构(引自文献[62])

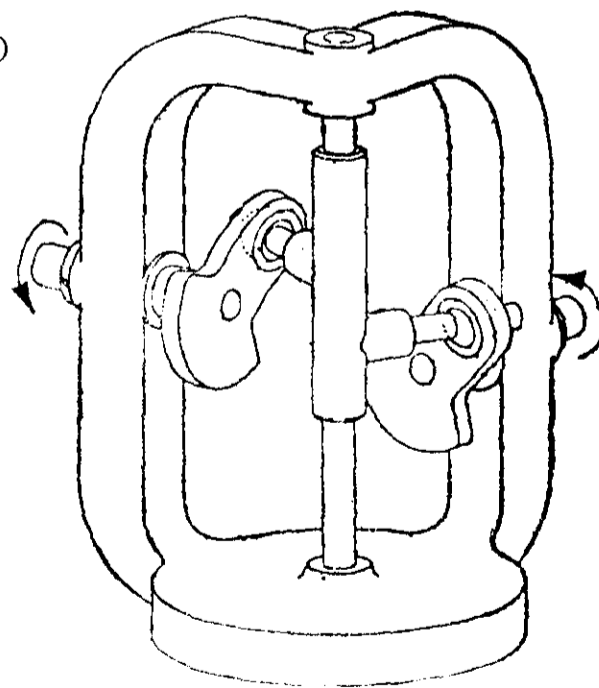


图 6.8 杏核联轴器(引自文献[62])

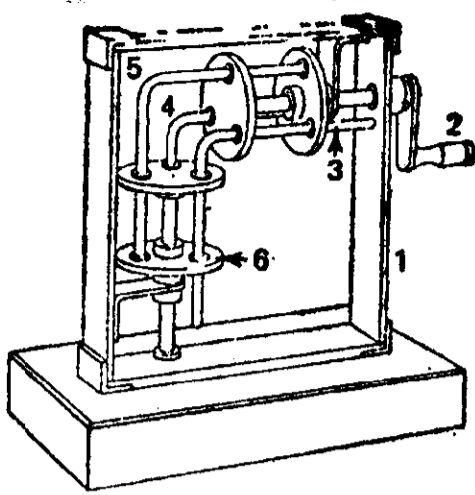


图 6.9 弯棒联轴器(引自文献[62])

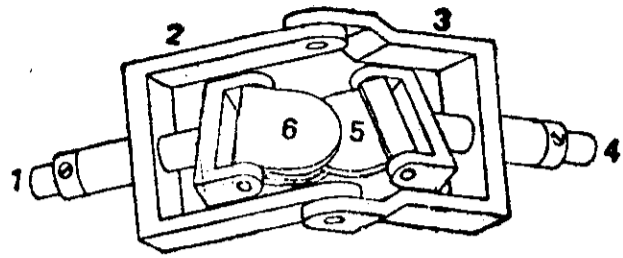


图 6.10 平板联轴器(引自文献[62])

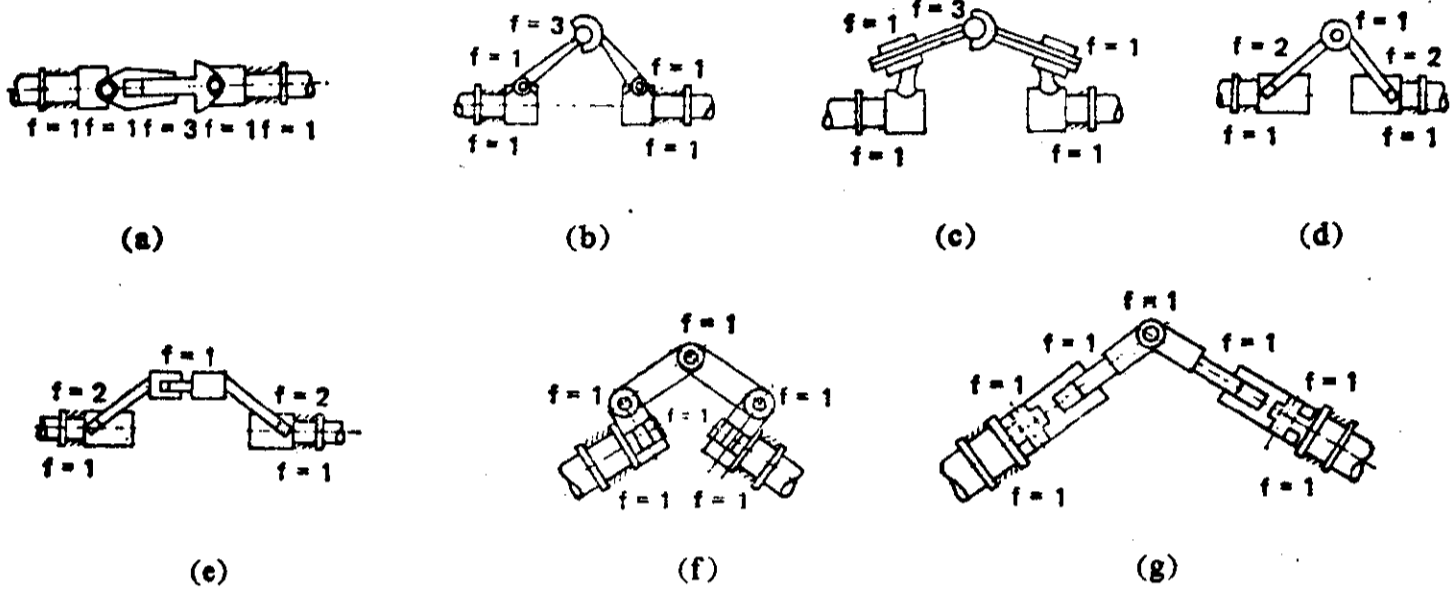


图 6.11 恒速联轴器(引自文献[105]),也称万向联轴节,因为它可以联接不共线的轴。

(a) RRP_LRR(Tracta)(同时请参考文献[307]);

(b) RRSRR(Clemens); (c) RPSPR(Altmann); (d) RCRCR(Myard);

(e) RCPCR; (f) RRRRRRR(Myard, Voss, Wachter & Rieger);

(g) RRPRRR(Derby, S. W. Industries).

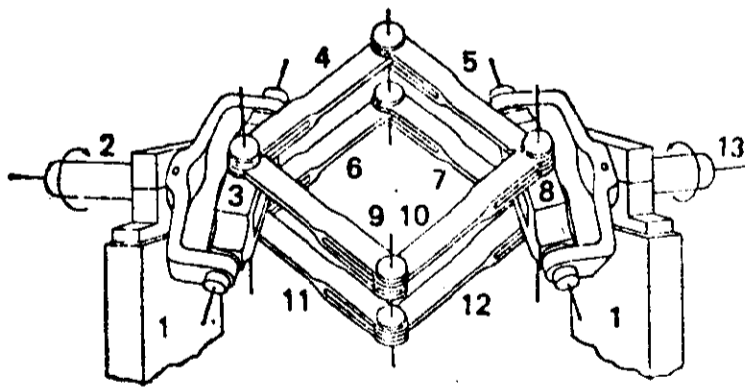


图 6.12 克鲁甫(Krupp)十字联轴器 (引自文献[62])

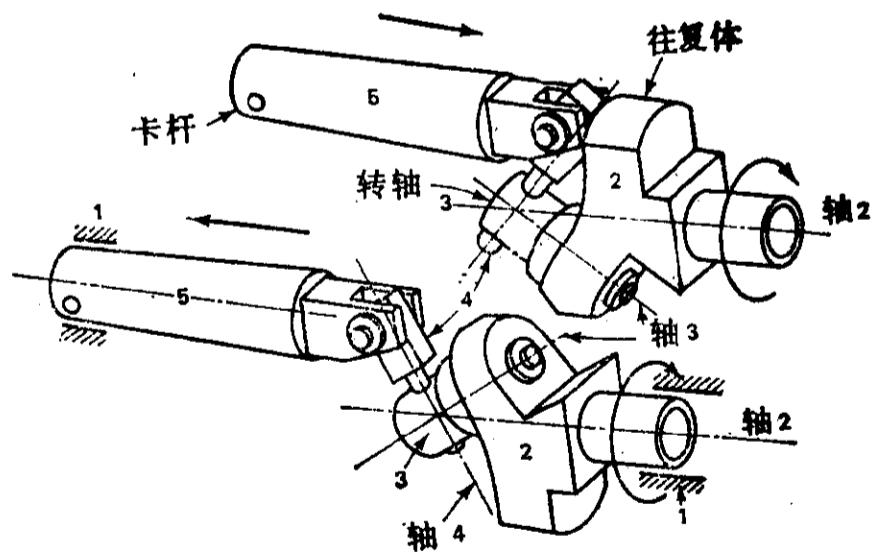


图 6.13 成角度的构件将转动变为往复运动。往复体 2 上装有一个转轴 3。转轴 3 的轴线与往复体 2 的轴线成一夹角,当往复体 2 旋转时,转轴 3 绕其自己的轴线旋转,而构件 5 始终保持在垂直平面内。这样,卡杆 5 就作往复运动。(该机构被用在纽约长岛托马斯·C·威尔逊(Thomas C. Wilson)公司生产的风锯上)(引自 Design and Development/Scanning the Field for Ideas, 1964 年 9 月 24 日, p158)

图 6.14 外科医生用来切断骨头的工具：一种球面四杆机构。所有的四个铰链的轴线汇交于一点

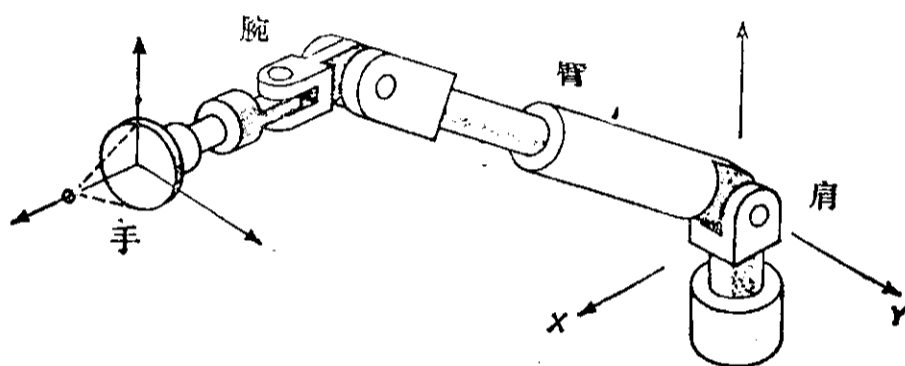


图 6.15 设计来拾和传送零件的具有六个自由度的工业机器人。这个设计是以简化了的人臂模型为基础的。(引自 Design Engineering, 1980 年 1 月, p63)

图 6.15 给出了用来作为机器人或操作手的许许多多“开环”空间机构中的一例。人们为了追求日益增长的更高的工业生产率需要以及满足在危险的环境中(高温、噪音、污染、放射性等等)移动产品和零部件的复杂要求,需要各种各样的机器人。但是,对于某些高度重复而又不复杂的任务,装有多个操作器的开环机器人显然是“大材小用”,因而不如用闭环的单输入机构来得经济。这一章我们要介绍有关开环、多自由度、多输入工业机器人以及闭环、单输入空间机构的一些机械设计方面的基本知识。

自由度

我们在第一章中介绍了计算平面机构自由度的格鲁布勒(Gruebler)公式。对于在三维空间中的运动(包括表 6.1 中介绍的运动副),要用另一个确定自由度的公式^①[105]。

设 F ——机构的自由度;

l ——机构中构件的数量(包括固定构件;所有构件都认为是具有两个以上联接的刚

① 同时参考第二章的附录。

体。如果几个机器零件组装成一个刚体,则这个组件就算是一个构件);

j ——机构中联接的个数;每个联接都假设为双杆联接(binary joint)(即仅连接两个构件);连接多于两个构件的联接将按在用格鲁布勒公式计算时用的原则来处理(即每两构件之间存在一个单独的联接),因此,一个连接三个构件的联接就应按两个联接来计算。

f_i ——第 i 个联接的自由度(示于表 6.1),这是两个相互连接的构件之间相对运动的自由度数。

λ ——机构作用空间的自由度;对于平面运动和在曲面上运动, $\lambda=3$;对于空间运动, $\lambda=6$ (文献[105]讨论了例外的情况)。

L_{IND} ——机构中独立回路或闭环的个数。

下面计算自由度的公式可以适用于一大类机构:

$$F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (6.1)$$

$$L_{\text{IND}} = j - l + 1 \quad (6.2)$$

联立式(6.1)和(6.2),我们得到:

$$\sum f_i = F + \lambda L_{\text{IND}} \quad (6.3)$$

例如,对于图 1.3 中所示的平面滑块一曲柄机构,

$$l = j = 4$$

$$\sum f_i = 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \lambda = 3$$

因此, $F = 3(4 - 4 - 1) + 4 = 1$

在应用这些公式时,必须牢记如下一些规则:

1. 连接 $n(n > 2)$ 个构件的联接称作多重联接,所以要按 $(n-1)$ 个双杆联接来计算。
2. 某些通常想象为只有一个自由度的机构,其 F 值可能大于 1。这种情况可能出现在一些空间连杆机构中,例如,机构的构件带有如下类型的两种联接:球面-球面(S-S),球面-圆柱(S-C),以及球面-平面(S- P_L)。这样的构件会有一个绕这两个联接的连结线转动的“多余”或“局部”自由度,这个自由度与整个机构的运动无关(参看例 6.1)。

3. 有些特别值得注意的机构并不服从上面给出的计算自由度的通用公式。这些机构依赖于一些特殊的尺寸和比例来实现它们的运动。这些例外的情况通常出现在平面和空间部分相混合的机构中(此时 λ 是变数)。在空间机构中,这些特例往往出现在联接的轴线相互平行、相交,或垂直的情形中。目前没有简单的规则可以预示一个机构是否服从方程(6.1)。这里,经验是很有用的,如果存在一个或多个上列的特点,就是一个值得注意的信号。

例 6.1

确定图 6.3 所示的摆盘驱动机构的自由度。

解:

$$l = j = 4$$

$$\sum f_i = 1 + 3 + 3 + 1$$

由于 $\lambda=6$, 从式(6.3)可知, $F=2$ 。但是我们可以预料这个机构只有一个自由度(譬如如果该机构是用来作为液压电机的话, 那么这个自由度就是构件2的转动)。而第二个自由度是构件3绕通过球心并垂直于摆盘面的轴线的转动。这个局部自由度并不影响我们所希望的驱动机构的输入-输出运动关系(尽管这肯定会对配合面间的润滑和磨损起作用)。

6.2 描述平面有限位移的变换^①

在建立空间位移的锥型之前, 要介绍各种不同的数学模型来代表有限的平面位移。这些模型称为“变换”, 因为它们把在平面运动中物体的初始位置坐标变换成最终位置坐标。一旦对这些变换理解清楚了, 那么把它们推广到三维空间的运动中去也就不成问题, 我们将在后面几节中介绍这些内容。

6.3 平面有限变换

我们从第二章中用于复数法综合中的平面有限旋转算子来开始对变换的讨论。考虑图6.16中的两个复数向量, 它们代表一个绕着原点旋转的刚性构件的两个有限分离位置(A_1 和 A_2)。我们来求向量 A_1 转动 θ_{12} 到新位置 A_2 的变换。从第二章我们知道了算子 $e^{i\theta_{12}}$ 可以完成这个变换, 现在让我们重新推导, 从而更加了解这个算子。

假设有一个未知的算子 R_{12} , 它和 A_1 的积是 A_2 :

$$A_2 = R_{12} A_1 \quad (6.4)$$

这可以用复数除法重新排列成

$$R_{12} = \frac{A_2}{A_1}$$

复向量 A_1 和 A_2 可以写成如下形式:

$$A_1 = |A_1| (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$A_2 = |A_2| (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

代入后可得:

$$R_{12} = \frac{|A_2| (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}{|A_1| (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)} \quad (6.5)$$

这种变换的形式用处不太大。通常说来, 构件的初始位置 A_1 是已知的, 并且我们希望把它旋转一个已知的角度 θ_{12} 。因此, 我们希望以方程(6.5)的形式是仅作为 θ_{12} 的函数。从图6.16可以看出, 只有转动发生, 向量的起点仍保持在坐标系原点 O 上, 而它们的矢端描出了一个以 O 为圆心的圆弧。因此, 这个刚性构件的长度必须保持不变, 即

$$|A_1| = |A_2|$$

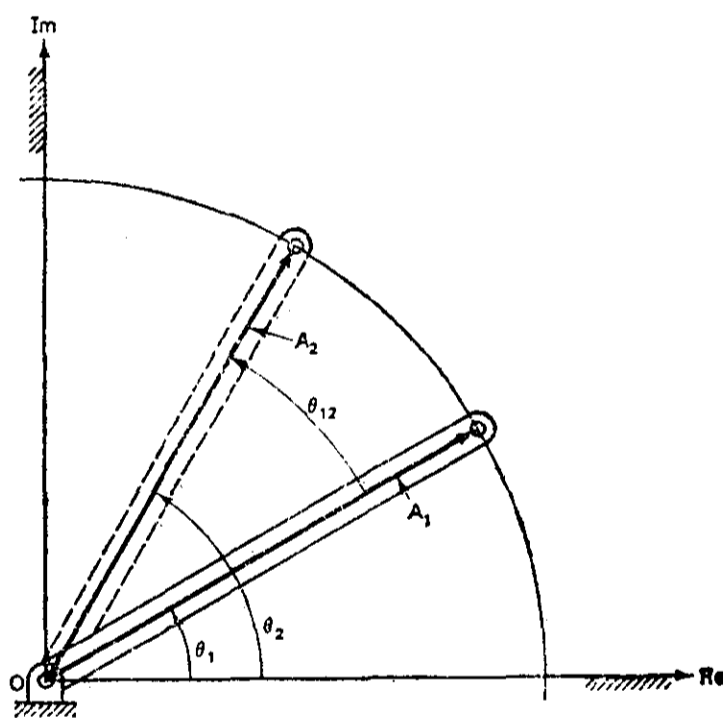


图 6.16 一个与地面铰接的构件的两个共平面位置

^① 作者感谢威廉·达赫洛夫(William Dahlof)对节 6.2—6.10 中部分的成稿所做的贡献。

因此这两项可以从式(6.5)中约去。接着,我们将分母、分子都乘以分母的共轭复数,将分母有理化:

$$R_{12} = \frac{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)}$$

用速记记号 $c\alpha = \cos\alpha$, $s\alpha = \sin\alpha$, 展开并重新分项得:

$$R_{12} = \frac{(c\theta_2 c\theta_1 + s\theta_2 s\theta_1) + i(c\theta_1 s\theta_2 - c\theta_2 s\theta_1)}{(c^2\theta_1 + s^2\theta_1) + i(c\theta_1 s\theta_1 - c\theta_1 s\theta_1)} \quad (6.6)$$

可以看出,分母已简化为1。为了进一步简化式(6.6),我们首先必须用 $\theta_2 = \theta_1 + \theta_{12}$ 消除 θ_2 而使它变得复杂,得到

$$R_{12} = [c(\theta_1 + \theta_{12})c\theta_1 + s(\theta_1 + \theta_{12})s\theta_1] \\ + [s(\theta_1 + \theta_{12})c\theta_1 - c(\theta_1 + \theta_{12})s\theta_1]i$$

上式只是 θ_1 和 θ_{12} 的函数。最后,用下面两个三角恒等式消去 θ_1 :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

和

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

设 $\alpha = (\theta_1 + \theta_{12})$, $\beta = \theta_1$

这样就导出了我们熟知的平面旋转算子的形式:

$$R_{12} = \cos\theta_{12} + i\sin\theta_{12} \quad (6.7)$$

用欧拉(Euler)公式有

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

式(6.7)变成

$$R_{12} = e^{i\theta_{12}} \quad (6.8)$$

这正是第二章中所用的有限旋转算子的形式。所以,根据以下事实,即:构件(由 A_1 和 A_2 表示)是一个绕原点旋转的刚性构件(即 $|A_1| = |A_2|$),和构件在第二位置的角度正好是其第一位置的角度加上旋转角($\theta_2 = \theta_1 + \theta_{12}$),我们已证明了旋转算子正是旋转角(θ_{12})的函数。这就是说,这一变换描述了一个位移,它与构件的实际位置无关。在理解机构的运动学时,有一点很重要——这就是我们是把这一变换和以后要介绍的其它变换作为描述运动的数学手段^①。这是这些算子的一个作用。我们将会看到它们的另一个作用是:它们可以将表示在一个坐标系中的一个点的位置向量转换成表示在另一个坐标系中的同一点的位置向量。当我们知道了描述点 P 在与该描述点所在的运动构件相连的坐标系中的位置向量,希望求出 P 在固定参照系中的位置向量时,这第二个作用就重要了。

6.4 单位矩阵变换

现在让我们转向矩阵表示法,并且看一看另外几个平面算子。考虑 2×2 单位矩阵。当用来作变换时,它的作用是让向量不变。

^① 这一原则适用于当所有的位置和向量都是参照于某一同样的坐标系的情况。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1x+0y \\ 0x+1y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

尽管这样做现在还看不出有多大的用处,但是粗略地分析一下还是值得的。注意,变换的第一行第二项代表 y 值对新 x 值所起的作用。与之相似,第二行第一项代表 x 值对新 y 值所起的作用。这样,用一个 2×2 的矩阵算子,两个终值都是每个初值的函数。以后当基本的变换被作为组成单元去形成更加复杂的变换时,单位矩阵变换的用处就会显示出来。

6.5 有限旋转的平面矩阵算子

这一章中用到的大部分数学都是以矩阵方法为基础的,所以我们现在来求平面矩阵旋转算子。在推导出复数旋转算子以后,我们发现,有限旋转算子既不依赖于向量的初始位置,也不依赖于向量的最终位置,而仅依赖于旋转的角度。但是,最终向量的两个坐标^①都是初始向量的实坐标和虚坐标的函数。当用矩阵表示时,逻辑上的结论是一定有相似的排列。我们从那个 2×2 单位矩阵的例子中看到, 2×2 变换的矩阵形式的确是满足以上条件的,因此,我们从假设一个 2×2 矩阵形式开始。

设 $R(\theta_{12})$ 是一个 2×2 矩阵,其与 A_1 的积是 A_2 :

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

式中, x_1 和 y_1 是 A_1 的坐标, x_2 和 y_2 是 A_2 的坐标,两者都表示在同一坐标系中。不用严密地推导这一变换,我们就可以直接与复数旋转算子相比从而确定 R 的四个分量。按矩阵乘法展开式(6.10),得到

$$\begin{aligned} x_2 &= r_{11}x_1 + r_{12}y_1 \\ y_2 &= r_{21}x_1 + r_{22}y_1 \end{aligned} \quad (6.11)$$

用复数的形式展开类似的向量,并且用式(6.7)算子,我们有

$$\begin{aligned} \text{实部}_2 + i \text{虚部}_2 &= \mathcal{R}_2 + i\mathcal{I}_2 \\ &= (\cos\theta_{12} + i\sin\theta_{12})(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{I}_1) \end{aligned}$$

展开后有:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \cos\theta_{12}\mathcal{R}_1 + i^2\sin\theta_{12}\mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 &= \sin\theta_{12}\mathcal{R}_1 + \cos\theta_{12}\mathcal{I}_1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

比较式(6.11)和(6.12),得到,

$$[R(\theta_{12})] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

我们可以通过例子来证实上式,并看一看 $R(\theta_{12})$ 中各项所起的作用。

^① 一个向量的坐标是它相对于坐标轴分量的标量值。例如,图 6.17 中 Z 的坐标为 $z_x = -2, z_y = 2.5$ 。

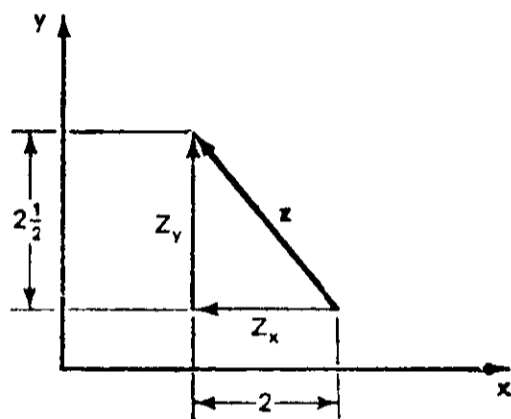


图 6.17 在 $x-y$ 平面上的向量 z

例 6.2

对于图 6.16 中的杆, 设 $\theta_1=30^\circ$, $\theta_2=60^\circ$, 推导出该杆作平面旋转的 2×2 矩阵的旋转算子。

解: 杆的初始位置用向量 $A_1=0.866+0.5i$ 表示, 最终位置 $A_2=0.5+0.866i$ 。由于旋转角 $\theta_{12}=30^\circ$, 所以 2×2 矩阵为:

$$[R(\theta_{12})] = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$$

读者可以用这个例子去验证式 (6.10)。

6.6 齐次坐标和有限的平面平移

如果所有的有限位移都是参照于同一个坐标系, 我们需要去区别一个刚体在运动学上可能通过的五种位移顺序。即, 有毫无意义的无运动情况; 有纯转动和纯平移; 有先旋转后平移; 最后, 还有先平移再旋转。我们已经求出描述前两种运动的数学算子 (2×2 的单位矩阵和有限旋转矩阵)。在这一节中我们来求描述纯平移的变换。这些变换 (也称算子) 将在下一节中组合起来以形成描述余下两种位移顺序的单个算子。

当一个质点做纯平移时, 在坐标系中代表其位置的向量坐标将发生变化。考虑图 6.18 中滑块上的销轴。它经过了一个从初始位置 A_1 到最终位置 A_2 的纯平移 (用 ΔA 表示)。与以前一样, 我们要求一个变换 T , 该变换与 A_1 的积为 A_2 :

$$A_2 = [T]A_1 \quad (6.14)$$

用向量加法, 下式应该是明显的

$$A_2 = A_1 + \Delta A$$

或者

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

和

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

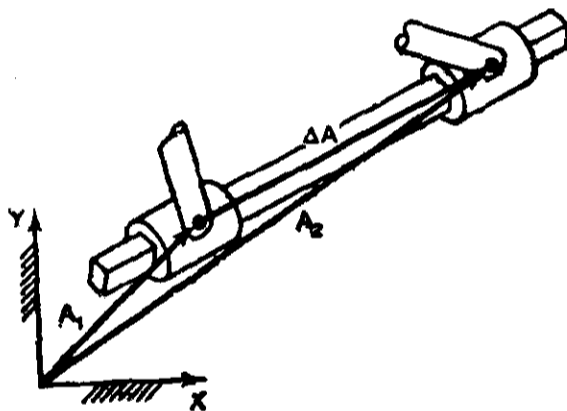


图 6.18 纯平移

表示这种平移的一种办法是在 2×2 矩阵上附加上一列 (表示 ΔA), 并把 A_1 从 2×1 的列向量转变成 3×1 的齐次列向量^①, 我们将以 $\{A_1\}$ 表示它:

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

或者

$$A_2 = [T]\{A_1\}$$

相乘以后, 得到

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + 0y_1 + \Delta x \\ 0x_1 + y_1 + \Delta y \end{Bmatrix}$$

^① 在这种情况下, 用 3×1 齐次列向量来代表 2×1 矩阵记号, 可以理解为是更方便地在变换内包括平移 (或向量加法) 的一种方法。通常说来, 一个 n 维空间是用 $n+1$ 组齐次坐标来表示的, 其它关于齐次坐标在计算机方面的应用, 诸如比例问题, 可以在参考文献 [195] 和 [220] 中找到。

这正是我们需要的。但是，可注意到用其坐标 x_2 和 y_2 表示的 A_2 仅是一个 2×1 的列矩阵而不是象 $\{A_1\}$ 那样是一个 3×1 的齐次列矩阵。要解决这个问题，我们可以将 2×3 平移算子扩展为一个 3×3 矩阵，保持其中各项都用齐次坐标来表示：

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

本章介绍的大部分方法都使用这种齐次坐标记号，它包含一个 1 作为平面向量的第三个坐标，或作为空间向量的第四个坐标。

6.7 几个有限位移的并置运算

假设一个铰链或质点绕坐标系的原点经过一段圆形轨迹的“转动”，然后沿一条直线平移（这两个位移都表示在同一坐标系内）。这样的运动可以用一个单算子来描述吗？考虑图 6.19 上的两个构件。在杆 1 上的滑块 2，其初始位置由 A_1 规定（相对于固定在杆 1 的旋转中心的固定坐标系），经旋转和平移到达其最终位置 A_2 。由于位置运动学仅仅考虑初始位置和最终位置，这个运动可以看作先旋转到 A_1' ，然后再平移 ΔA 到 A_2 。数学上，我们可以用下面两个步骤来表示这个运动：

$$\begin{aligned} \{A_1'\} &= [R]\{A_1\} \\ \{A_2\} &= [T]\{A_1'\} \end{aligned}$$

或将上两式结合起来，得到

$$\{A_2\} = [T][R]\{A_1\}$$

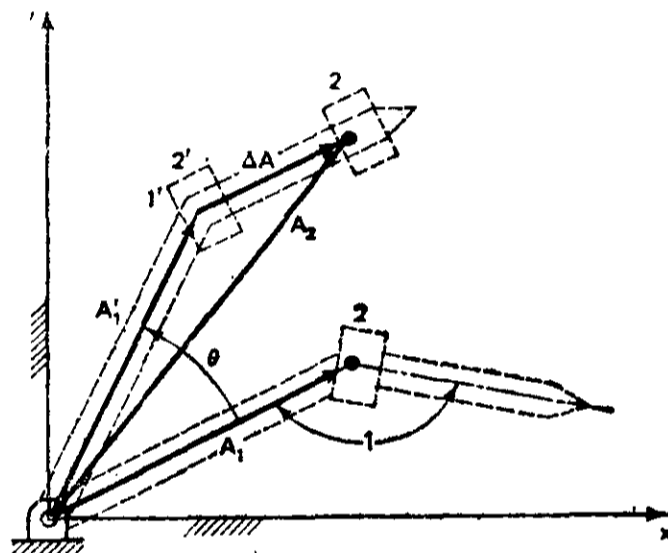


图 6.19 先旋转后平移

如果平移和旋转算子都表示为 3×3 矩阵，那么被称为并置的运算就可以实现了。并置运算基本上是指一种把两个或多个变换组合在一起的矩阵运算：将第一个算子左乘以第二个，其积再左乘以第三个，以此类推，最后将多个算子化简为一个算子。如果我们把式(6.13)的 2×2 旋转算子扩展为 3×3 矩阵——加上四个零和一个 1（加 1 的理由很快将清楚），那么一个一般的平面位移算子 $[D]$ 可以由矩阵的乘法得到：

$$\begin{aligned} [D] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \Delta x \\ \sin \theta & \cos \theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.16) \end{aligned}$$

这样一来，对于在同一坐标系内先旋转再平移的平面运动情况，当初始和最终位置都用齐次坐标表示时，表示一质点或一铰链的向量的最终位置就可用一个 3×3 的矩阵算子来求得。

在用一个例子证实这个算子之前, 有两点值得注意。首先, 如若 $\theta=0$ (没有旋转), 那么 $\cos\theta=1, \pm\sin\theta=0, [D]$ 就变成了平移算子。其次, 如若 $\Delta x=0, \Delta y=0$ (没有平移), $[D]$ 就变成旋转算子。如若既无旋转($\theta=0$)又无平移($\Delta x=0, \Delta y=0$), 那么 $[D]$ 就是一个单位矩阵。因此, $[D]$ 是一个可以表示一个点的四种可能的有限平面位移的算子: (1) 没有运动; (2) 绕原点纯旋转; (3) 纯平移; (4) 先绕原点旋转, 再平移。所有的这些运动都定义在同一坐标系中。

对于第 5 种情况, 当先发生平移, 跟着再旋转时, 其并置运算为(用 $c=\cos, s=\sin$)

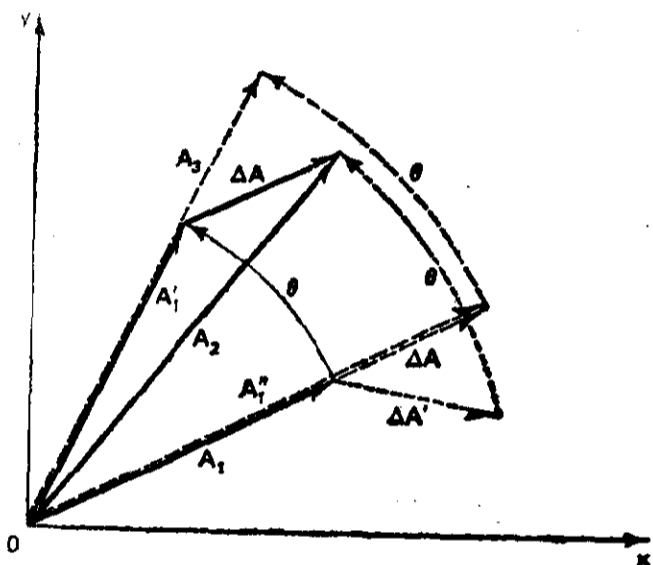
$$\begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & c\theta\Delta x - s\theta\Delta y \\ s\theta & c\theta & s\theta\Delta x + c\theta\Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这不同于第四种情况的 $[D]$, 即式(6.16)。下面我们举一个类似于图 6.19 所示位移的例子来说明。设 $A_1=2+i, \theta=36.87^\circ$, 以及 $\Delta A=1+0.5i$, 这样, 如果是先旋转后平移,

$$[D] = \begin{bmatrix} \cos 36.87^\circ & -\sin 36.87^\circ & 1 \\ \sin 36.87^\circ & \cos 36.87^\circ & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{A_2\} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 1 \\ 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6 - 0.6 + 1 \\ 1.2 + 0.8 + 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{A_2\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad A_2 = 2 + 2.5i$$



这个结果可以用按比例画的图 6.19 和图 6.20 来核对。

图 6.20 从 A_1 开始先旋转 θ , 再平移 ΔA , 达到最终位置 A_2 ; 当先平移 ΔA , 再旋转 θ , 最终结果是 A_3 。

另一方面, 如果先发生具有相同 $\Delta A=1+0.5i$ 的平移, 再旋转 $\theta=36.87^\circ$, 我们得到

$$\{A_3\} = \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0.8 - 0.3 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 + 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6 - 0.6 + 0.5 \\ 1.2 + 0.8 + 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

这时, $A_3=1.5+3i$ 。这个运算用虚线示于图 6.20。

如果我们想对有复合位移的第 5 种情况建立模型, 即对图 6.19 中所示运动构件 2 从初始位置先平移再旋转到最终位置的情况建立模型, 那么我们必须确定它沿构件 1 第一位置的平移 $\Delta A'$, 即

$$\Delta A' = e^{-i36.87^\circ} \Delta A = 1.1 - 0.2i$$

这样

$$\{A_4\} = \begin{Bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0.8(1.1) - 0.6(-0.2) \\ 0.6 & 0.8 & 0.6(1.1) + 0.8(-0.2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.6 - 0.6 + 0.88 + 0.12 \\ 1.2 + 0.8 + 0.66 - 0.16 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$A_4 = 2 + 2.5i = A_2$$

6.8 绕不通过原点的轴的旋转

到现在为止，已经讨论过的旋转算子仅仅适用于一向量绕着原点旋转的情形，也就是说适用于一个自由向量相对于原点位于该自由向量尾部的固定坐标系的转动。例如，在讨论机构综合的章节中，环路封闭方程曾用于代表连杆机构的那些向量。这里包含了几个头-尾相接的向量加法，每个向量都是具有自己的原点和自己的坐标系的自由向量(图 6.21)。这些坐标系(包括固定参照系)的对应坐标轴均互相平行，并且每个坐标系随着各自对应的向量尾部一起平移。

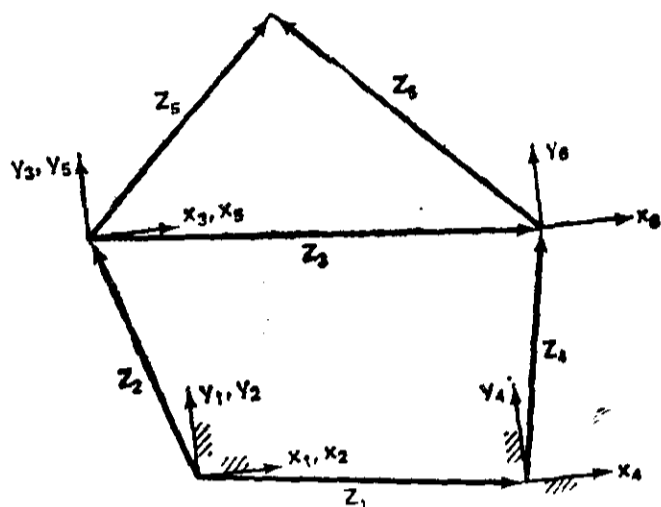


图 6.21 表示一个平面四杆机构的每个向量的坐标系统

设点 \$A_1\$ 在图 6.22 a 所示固定的 \$x, y\$ 坐标系中的位置由向量 \$A\$ 规定。现在让点 \$A_1\$ 绕向量 \$Q\$ 上的点 \$Q\$ 描出一圆弧 \$\theta\$。我们要求能够表达点 \$A\$ 绝对运动的单一算子。可以作一个从点 \$Q\$ 开始、指向点 \$A_1\$ 的自由向量 \$a_1\$。如果点 \$Q\$ (即向量 \$a_1\$ 的尾部) 平移回到原点，那么 \$a_1\$ 就变成一

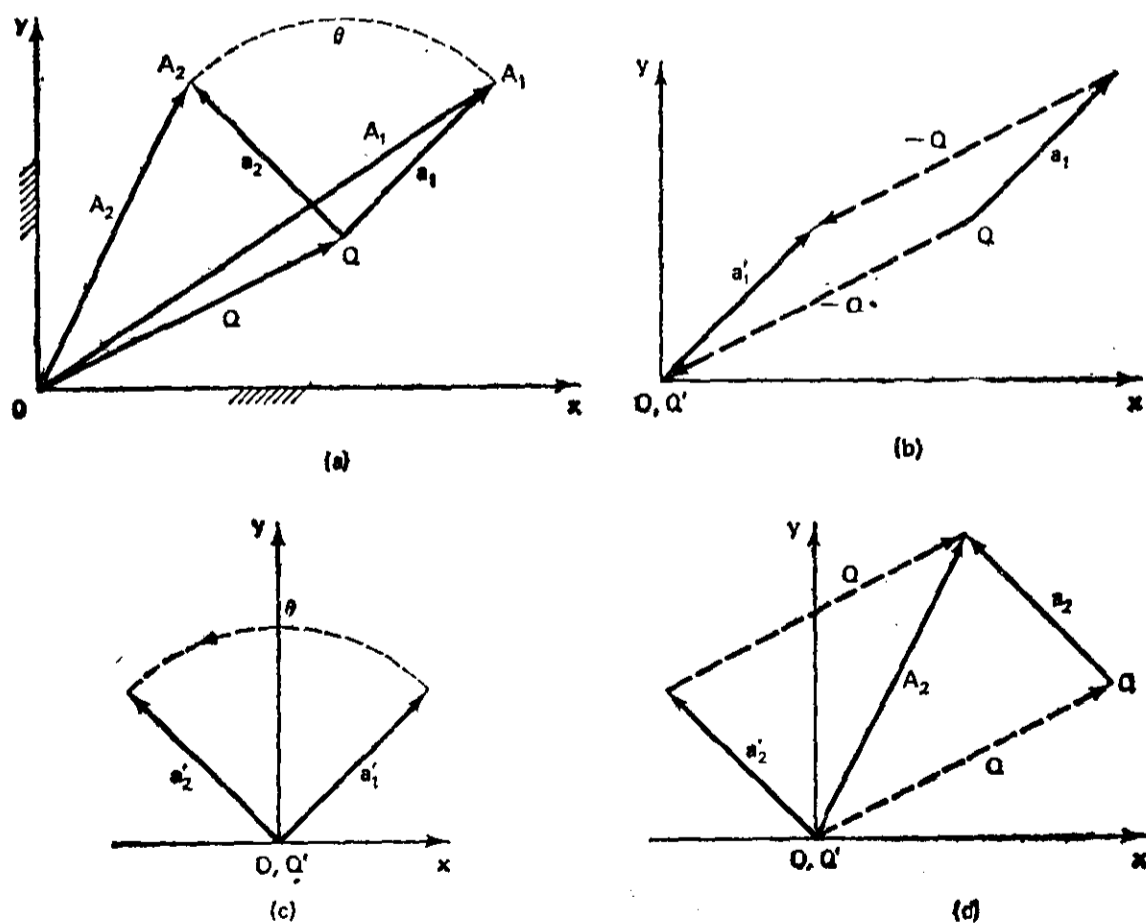


图 6.22 表示点 \$A\$ 从位置 1 运动到 2 的变换步骤的示意图

个可自由绕原点旋转的向量。这一步(示于图 6.22 b)在数学上由下式表示

$$\{a_1'\} = [T(-Q)]\{a_1\}$$

然后,旋转一个角度 θ 的过程可以用下式表示(图 6.22 c)

$$\{a_2'\} = [R(\theta)]\{a_1'\}$$

最后,点 Q' 再用平移算子平移回到它原来的位置(向量 a_2' 与其相连,图 6.22 d)

$$\{A_2\} = [T(+Q)]\{a_2'\}$$

这三步可以并置运算来形成 3×3 的单一矩阵算子

$$\{A_2\} = [D(\theta, Q_x, Q_y)]\{A_1\}$$

式中 $[D] = [T(+Q)][R(\theta)][T(-Q)]$

$$\begin{aligned} [D] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & Q_x \\ 0 & 1 & Q_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Q_x \\ 0 & 1 & -Q_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & Q_x \\ 0 & 1 & Q_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -Q_x \cos\theta + Q_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -Q_x \sin\theta - Q_y \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(6.17)

$$[D] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & Q_x - (Q_x \cos\theta - Q_y \sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & Q_y - (Q_x \sin\theta + Q_y \cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用具体数字对本例的验证作为一个练习留给学生自己去做(参看练习 6.1)

6.9 刚体的变换

到现在为止我们已经讨论了描述点的位移的各种变换。如何将已得出的算子应用于质点系(例如刚体)的位移呢?在前面我们是用一个 3×1 的齐次列阵来描述代表一个点的向量。应用平面 3×3 平移、旋转和一般位移的矩阵算子的优点在于它们可以很方便地在计算机中编成程序,去进行代表平面刚体 n 个质点的 n 个列向量的 $3 \times n$ 矩阵的运算。由于刚体上各个质量之间的距离不变,所以当刚体运动时,表示运动的合适坐标轴,转角和(或者)平移已经规定后,表示刚体上的每个点的位置向量都必须经过同样的变换。例如,一个平面刚体上三个点的一般平面运动——从其初始位置 (A, B, C) 到终止位置 (A', B', C') , 可以表示如下:

$$\begin{bmatrix} A'_x & B'_x & C'_x \\ A'_y & B'_y & C'_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

6.10 空间变换

旋转

作纯旋转刚体上的所有点都在垂直于固定直线——旋转轴线——的平面内画出圆弧。在平面的二维 x, y 坐标系中, 旋转轴总是垂直于 x, y 平面, 因而也就平行于 z 轴。因此, 可以用规定旋转轴与 x, y 平面的交点(如前节我们用的原点 O 或点 Q)以及使 x, y 和这个旋转轴分别平行于 xyz 右手坐标系的坐标轴的方法, 把旋转轴完全地确定下来。这样一来, 这根旋转轴总是指向观察者, 并且右手(正向)旋转是逆时针方向的。在一般的空间情况下, 运动并不限于在 xy 平面内, 旋转轴线也可能向着任何方向。因此旋转轴的位置和方向都必须反映到空间旋转算子里去。

确定空间的一根轴线的一种方法是给定该轴线上的一点和沿轴线正方向的一个单位向量。在推导空间旋转算子时, 如果我们规定旋转轴线通过原点并且如果单位向量的三个坐标也明晰地用到算子中去的话, 那么这根转轴就完全在算子中体现出来了。

而且, 用单位向量去定义轴线的方向, 使得我们可以去建立一套确定旋转符号的规则。在平面系统中, 如果右手的姆指指向正 z 轴(即指向观察者), 那么手指朝反时针方向卷曲。因此, 一个平面角通常定义逆时针转向为正。这里我们采用同样的右手法则, 即: 右手姆指指向转轴上单位向量的方向时, 手指卷曲的方向就是绕该轴旋转的正方向。

在介绍空间 3×3 矩阵旋转算子之前, 我们来进一步研究一下这个单位向量。它用符号 \hat{u} 表示。 u 字上的记号“ \wedge ”表明它是一个单位向量(即其模为 1)。图 6.23 中, 三个坐标是该直线的方向余弦:

$$\begin{aligned} u_x &= \cos \alpha \\ u_y &= \cos \beta \\ u_z &= \cos \gamma \end{aligned} \tag{6.19}$$

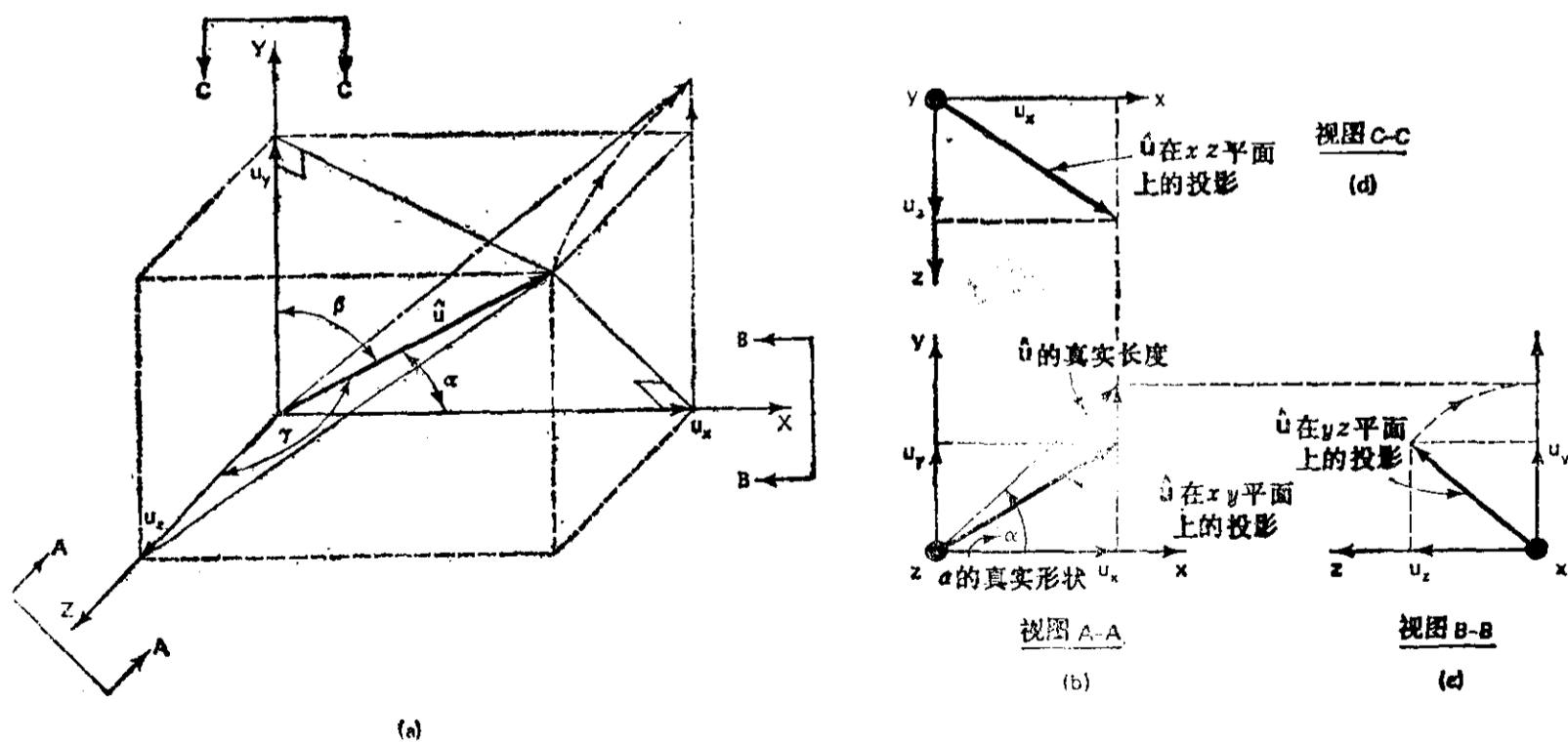


图 6.23 单位向量 \hat{u} 和它的方向余弦

式中 α, β 和 γ 分别是 x, y 和 z 轴正方向量得的向量角度。

图 6.23 a 是 \hat{u} 的轴侧图及其坐标。图 6.23 b, c 和 d 分别是面向坐标轴的箭头所取的正投影图。例如, 视图 A-A 表示 z 轴正方向对着我们, 图中用圆圈围着一个点来表示, 圆圈内的点代表箭头的顶点(如若正方向是离开我们的, 那么, 一个十字表示我们是从箭头的尾部看去。)视图 A-A 和 B-B 也显示了由 \hat{u} 和 u_x 组成的直角三角形的真实形状是通过将它们所在的平面旋转到 xy 图形平面来确定的。这就是我们熟知的画法几何的方法。这种方法可以表示出 \hat{u} 的真实长度和角度 α 的真实形状。

从位于空间的一根轴上一点 A 指向同轴上的另外任何一点 B 的单位向量 \hat{u} 可以用使向量 AB 单位化的方法来求得:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\overrightarrow{B-A}}{|AB|} \\ u_x &= \frac{B_x - A_x}{|AB|} \\ u_y &= \frac{B_y - A_y}{|AB|} \\ u_z &= \frac{B_z - A_z}{|AB|} \end{aligned} \quad (6.20)$$

式中 $|\overrightarrow{AB}| = [(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2]^{1/2}$ 。单位向量这一特点在以后节 6.19 的机构综合中将被用来作为一个约束:

$$|\hat{u}| = [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2]^{1/2} = 1 \quad (6.21)$$

现在我们来介绍空间 3×3 矩阵旋转算子。有兴趣的读者可以参考后面有关推导的内容。请记住, 象平面 2×2 旋转算子一样, 这个 3×3 算子也只适用于绕通过原点的轴旋转情况。而且, 这个算子并不改变向量的大小, 它是旋转角度和旋转轴线单位向量坐标的函数。它完全可以用符号表示为 $[R(\theta, \hat{u})]$, 其元素是

$$\begin{aligned} [R(\theta, \hat{u})] &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_x^2 v\theta + c\theta & u_x u_y v\theta - u_z s\theta & u_x u_z v\theta + u_y s\theta \\ u_x u_y v\theta + u_z s\theta & u_y^2 v\theta + c\theta & u_y u_z v\theta - u_x s\theta \\ u_x u_z v\theta - u_y s\theta & u_y u_z v\theta + u_x s\theta & u_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.22)$$

式中 θ 是绕 \hat{u} 旋转的角度(与 \hat{u} 成右手法则),

$c\theta = \cos\theta, s\theta = \sin\theta, v\theta = \text{versine}(\theta) = 1 - \cos\theta$, 以及 $\hat{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ 。

例 6.3

用式(6.22)来求表示绕 x, y 和 z 轴旋转的算子。

解: 绕 x 轴旋转 这时 $u_x=1, u_y=u_z=0$ 。当我们从正向 x 轴上一点对着原点看时, 正向转动的角度 θ 是逆时针方向。

$$[R(\theta, u_x)] = \begin{bmatrix} 1^2(1-c\theta) + c\theta & 1 \times 0 \times v\theta - 0 \times s\theta & 1 \times 0 \times v\theta + 0 \times s\theta \\ 1 \times 0 \times v\theta + 0 \times s\theta & 0^2 \times v\theta + c\theta & 0 \times 0 \times v\theta - 1 \times s\theta \\ 1 \times 0 \times v\theta - 0 \times s\theta & 0 \times 0 \times v\theta + 1 \times s\theta & 0^2 \times v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

我们知道, 绕 x 轴旋转时, 所有的点都在垂直于 x 轴的平面内运动。因此, 向量的 x 坐标不会改变。注意: 这个算子的第一行与 3×3 单位矩阵的第一行一样, 所以 x 坐标保持不变。读者可以自己选择一个例子, 用这个算子相乘, 就很容易证实这一点。图 6.24 用矩阵形式及三向正交投影两种方法表示了这样一个例子。我们鼓励读者自己给 a_x, a_y, a_z 和 θ 赋上合适的值, 用图解和解析两种方法完成这个运算, 然后比较其结果(参看练习 6.2)。同时, 注意 $R[(\theta, u_x)]$ ^① 中右下角的四个元素(即右下角的 2×2 余子式)与式(6.13)所示的 2×2 平面旋转算子是一样的。

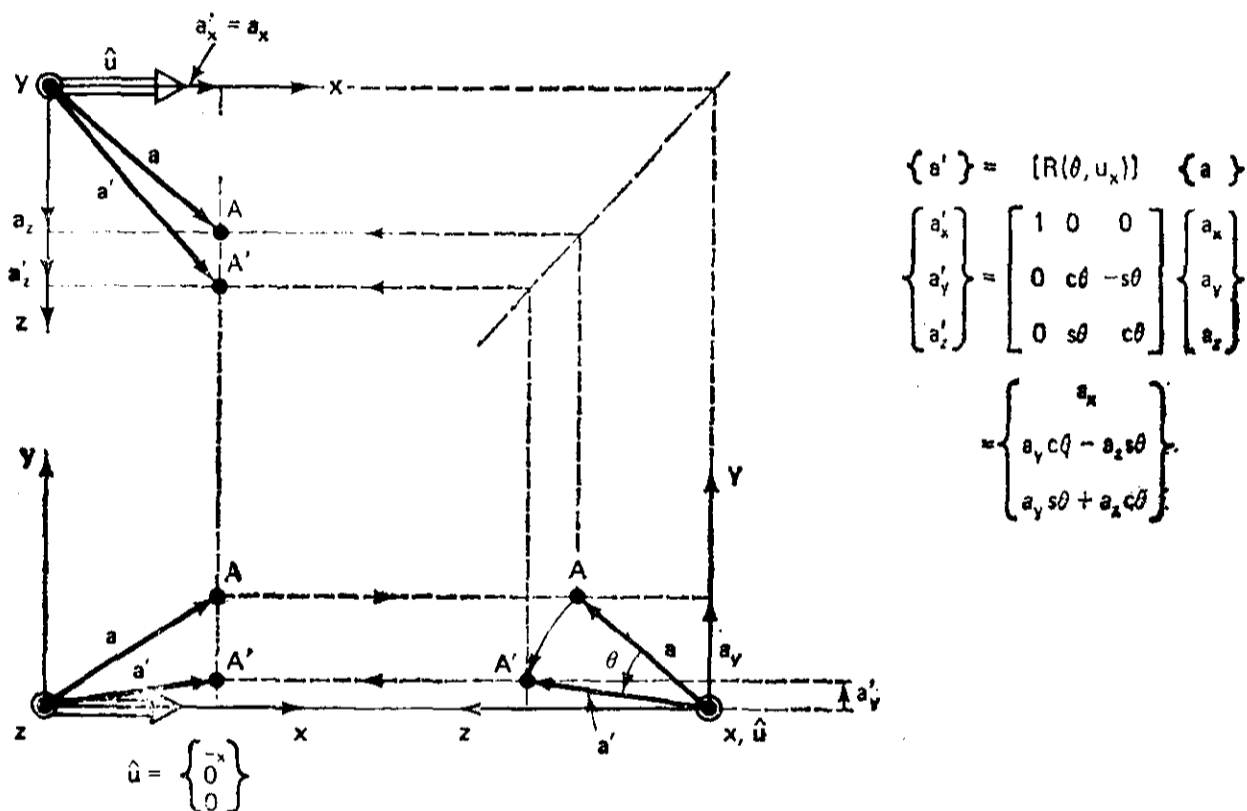


图 6.24 向量 a 绕 x 轴旋转到 a' 的三个正交投影图

绕 y 轴旋转 这时 $u_x=0, u_y=1, u_z=0$ 。从 E 向 y 轴上一点看原点, 反时针方向的转角 θ 为正。与以前一样代入公式得到

$$[R(\theta, u_y)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

注意上式除了 $\sin\theta$ 项相互交换位置外, 与平面算子相似。

绕 z 轴旋转 这时 $u_x=u_y=0, u_z=1$, 读者可以很容易地证实:

$$[R(\theta, u_z)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

① 应为 $[R(\theta, u_x)]$ ——译者注。

这最后一个算子可以看作是 xy 平面的情况扩展到三维空间, 而且上式与用齐次 3×3 矩阵形式表示的平面旋转算子是完全一样的。这就给平面向量的齐次 3×1 列阵的形式一个很有意思的解释。在三维空间中, 考虑一个平行于 xy 平面且与 z 轴相交于 $z=1$ 的平面, 代表其上任意一点 A 位置的三维半径向量 A 可以表示为

$$\{A\} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

这式子与平面向量 $A_x + iA_y$ ①(即空间向量 A 在 xy 平面上的投影)的齐次 3×1 列矩阵形式是一样的。因此, 如果我们对式(6.26)中 $\{A\}$ 和式(6.25)的旋转算子 $[R(\theta, u_z)]$ 实行运算, 其结果是将 A 在 xy 平面上的投影旋转角 θ 。这与以前我们介绍过的平面情况的齐次形式是完全一样的。

例 6.4

在一固定的 $Oxyz$ 坐标系中, 将一自由向量按下列顺序旋转: 绕 z 轴转 α , 绕 y 轴转 β , 绕 x 轴转 γ , 试求组合的旋转矩阵。

解:

$$R(\alpha, u_z) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\beta, u_y) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}$$

$$R(\gamma, u_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

按给定的顺序并置运算这三个矩阵, 得到

$$\begin{aligned} R(\theta, \hat{u}) &= [R(\gamma, u_x)][R(\beta, u_y)][R(\alpha, u_z)] \\ &= \begin{bmatrix} c\beta c\alpha & -c\beta s\alpha & s\beta \\ c\alpha s\beta s\gamma + c\gamma s\alpha & -s\alpha s\beta s\gamma + c\gamma c\alpha & -s\gamma c\beta \\ -c\alpha s\beta c\gamma + s\gamma s\alpha & s\alpha s\beta c\gamma + s\gamma c\alpha & c\gamma c\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 6.5

利用式(6.22)和上例的结果, 计算当 $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$ 这种特殊情况的 \hat{u} 和 θ 。

解: 将 $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$ 代入例 6.4 中得出的旋转矩阵后, 得到

$$R(\theta, \hat{u}) = \begin{bmatrix} 0.750 & -0.433 & 0.500 \\ 0.650 & 0.625 & -0.433 \\ -0.125 & 0.650 & 0.750 \end{bmatrix}$$

在下面的推导过程中, 我们把旋转矩阵的元素记为 r_{ij} 。

$$R(\theta, \hat{u}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

① 原文为 $A_x + iA_y$ ——译者注。

$$= \begin{bmatrix} u_x^2 v \theta + c \theta & u_x u_y v \theta - u_z s \theta & u_x u_y v \theta + u_y s \theta \\ u_x u_y v \theta + u_z s \theta & u_y^2 v \theta + c \theta & u_y u_z v \theta - u_x s \theta \\ u_x u_z v \theta - u_y s \theta & u_y u_z v \theta + u_x s \theta & u_z^2 v \theta + c \theta \end{bmatrix}$$

将上式两边的元素(1,1)、(2,2)和(3,3)相加,简化后得到一个用对角线上元素表示的 θ 式子:

$$\theta = \arccos \frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)$$

代入数值,得到

$$\theta = \arccos \frac{1}{2}(0.750 + 0.625 + 0.750 - 1) = 55.77^\circ$$

r_{32} 减去 r_{23} 得:

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= u_y u_z v \theta + u_x s \theta - (u_y u_z v \theta - u_x s \theta) \\ &= 2u_x \sin \theta \end{aligned}$$

$$u_x = \frac{r_{32} - r_{23}}{2 \sin \theta} = 0.655$$

同样,

$$u_y = \frac{r_{13} - r_{31}}{2 \sin \theta} = 0.378$$

$$u_z = \frac{r_{21} - r_{12}}{2 \sin \theta} = 0.655$$

注意, u_x 、 u_y 和 u_z 也可以从旋转矩阵的对角线项中解出。

例 6.6

在图 6.25 所示轴测图中刚体上的点 A 、 B 和 C , 绕经过原点指向点 D 的轴线旋转 30° 。如果点 D 的坐标为 $(2, 2, 2\sqrt{2})$, 试求它们旋转后的新坐标 (A' 、 B' 和 C')。用图解法核对结果(参看练习 6.3)

解:

$$\mathbf{A} = [2, 2, 1]^T, \quad \mathbf{B} = [2, 2, 0]^T,$$

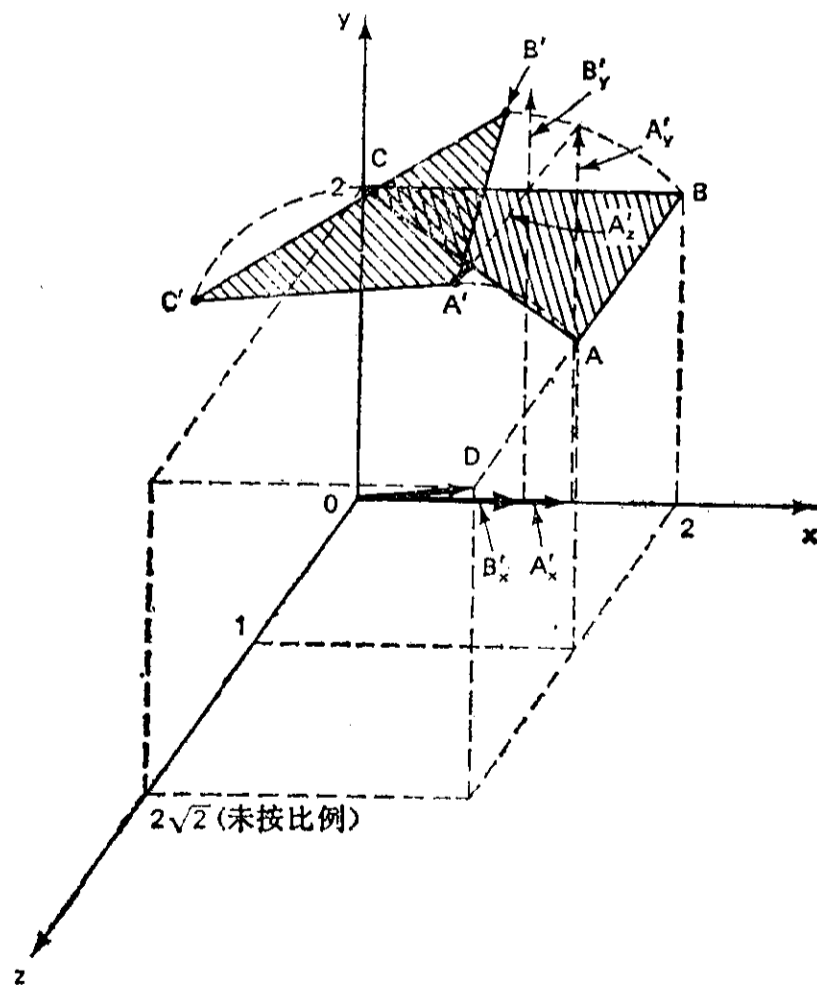


图 6.25 三角形 ABC 绕轴 OD 旋转到 $A'B'C'$ 位置的轴测图。注意轴 OD 通过原点

$$\begin{aligned}
C &= [0, 2, 0]^T \\
\hat{u} &= \frac{[2, 2, 2\sqrt{2}]^T}{[2^2 + 2^2 + 2^2 \times 2]^{1/2}} = \frac{[2, 2, 2\sqrt{2}]^T}{\sqrt{16}} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^T \\
[R(30^\circ \hat{u})] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \times 0.134 + 0.866 & \frac{1}{4} \times 0.134 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{4} \times 0.134 + \frac{1}{2} \times 0.5 \\ \frac{1}{4} \times 0.134 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0.5 & \frac{1}{4} \times 0.134 + 0.866 & \frac{\sqrt{2}}{4} \times 0.134 - \frac{1}{2} \times 0.5 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \times 0.134 - \frac{1}{2} \times 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{4} \times 0.134 + \frac{1}{2} \times 0.5 & \frac{1}{2} \times 0.134 + 0.866 \end{bmatrix} \\
[A', B', C'] &= [R(30^\circ, \hat{u})][A, B, C] \\
&= \begin{bmatrix} 0.900 & -0.320 & 0.297 \\ 0.387 & 0.900 & -0.203 \\ -0.203 & 0.297 & 0.933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.457 & 1.180 & -0.640 \\ 2.371 & 2.574 & 1.800 \\ 1.121 & 0.188 & 0.594 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

平移

平面内的一般运动包含有两个平移自由度。回忆在节 6.7 中我们希望有一个矩阵算子, 当它对一个向量作运算时, 要把这两个平移(Δx 和 Δy) 加到该向量的坐标上去。这是靠把 $\Delta x, \Delta y$ 与一个 3×3 的单位矩阵组合起来, 以及用齐次表示法代表该向量来实现的。空间平移算子也可以用同样的道理来形成, 即把由下式表示的三个平移自由度引进 4×4 的单位矩阵中去:

$$[D] = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

并用 4×1 齐次表示法来表示向量 D 。因此, 空间平移算子为

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

在三维空间中, 决定点 A 相对 $x y z$ 坐标系的位置向量的齐次表示式为

$$r_A = \{r_A\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

例 6.7 将表示在图 6.26 轴测图中的点 P 平移 $\Delta x = -1, \Delta y = -2$ 及 $\Delta z = +2$ 。利用公式 (6.29), 点 P 的初始位置可表示为

$$r_1 = \{r_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

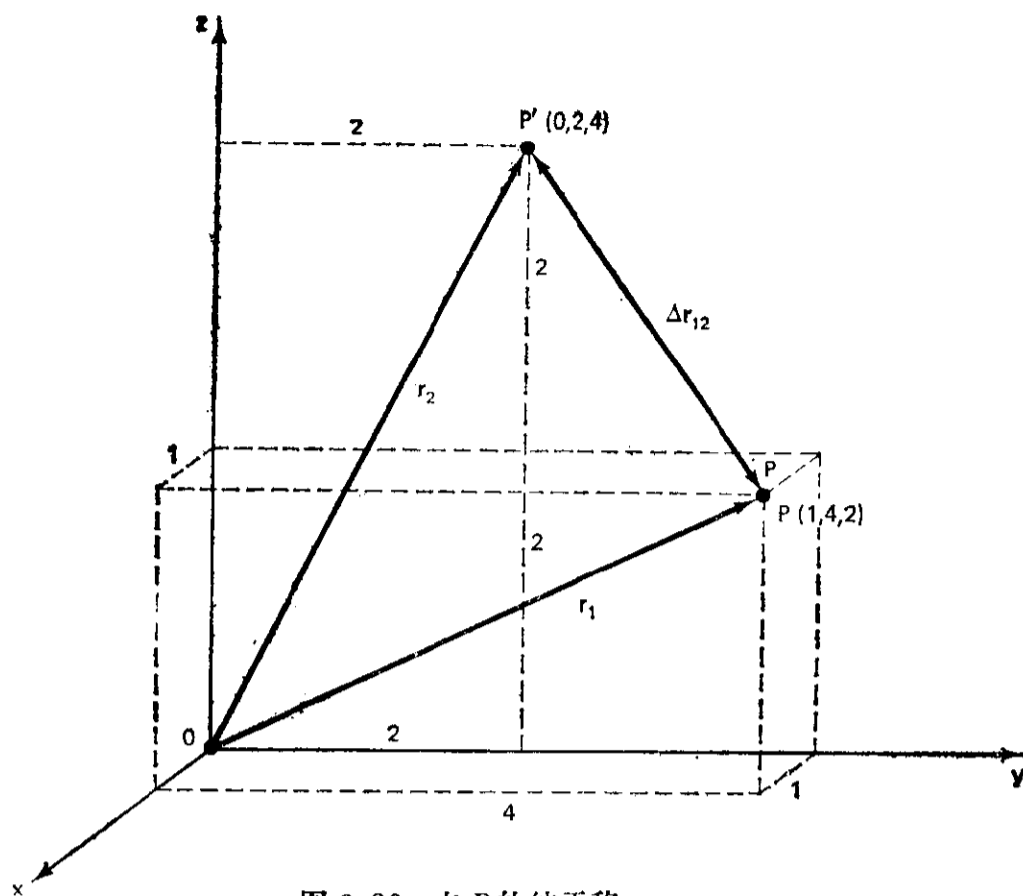


图 6.26 点 P 的纯平移

利用空间平移算子公式(6.28), 我们有

$$\mathbf{r}_2 = \{\mathbf{r}_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

那么

$$\mathbf{r}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

4 × 4 平移和对通过原点的轴线的旋转矩阵

下一个合乎逻辑的步骤是要将绕通过原点的轴线旋转的 3 × 3 旋转矩阵[式(6.22)]与沿该旋转轴平移的 4 × 4 平移矩阵[式(6.28)]结合起来。象我们以前处理平面情况那样[参看式(6.16)], 将 3 × 3 旋转矩阵[r_{ij}]扩展为 4 × 4 矩阵, 并对它左乘一个 4 × 4 平移矩阵, 这样描述通过原点的轴的先旋转、后轴向平移的螺旋算子就可以求出如下:

$$\begin{aligned}
 [S_{12}] = [T][R(\theta, \hat{u})] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \Delta x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \Delta y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.30}
 \end{aligned}$$

所得式(6.30)的螺旋矩阵,可以用将矩阵分块的方法表示成符号形式

$$[S_{12}] = \left[\begin{array}{c|c} R & D \\ \hline O & I \end{array} \right] \quad (6.31)$$

这里 $[R]$ 由式(6.22)定义; $[D]$ 由式(6.27)定义; $[I]=1$, 并且 $[D]=D\hat{u}$, 或 $\Delta x=|D|u_x, \Delta y=|D|u_y, \Delta z=|D|u_z$ 。

之所以把这个算子称为螺旋算子,是因为它作用起来象螺母和螺栓:在绕螺栓轴线旋转的同时,也沿该轴线平移。螺旋轴的方向是沿着 \hat{u} 的方向,从原点向外。记住 \hat{u} 是用公式(6.21)和图6.23a来定义的。

空间中物体从一个位置到另一位置的一般刚体运动可以唯一地用一个螺旋位移来描述,而这螺旋的轴线不一定要通过原点^[11,13,60,223,267]。

下面举出三个例子来说明我们前面所作过的讨论。

例 6.8

一个质点 P 在空间从初始位置 $(0, 1, 3)$ 绕通过原点且单位向量为 $\hat{u}=[0, \cos 45^\circ, \cos 45^\circ]^T$ 的轴线旋转 45° 如图6.27所示。该质点同时还平行于这一轴线平移了

$$[D] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \sqrt{2}\hat{u}.$$

试求旋转矩阵 R ,并用式(6.30)求该质点的最终位置。

解: 因为 $u_x=0, u_y=1/\sqrt{2}, u_z=1/\sqrt{2}$,

$$\cos\theta_{12}=1/\sqrt{2}, \quad \sin\theta_{12}=1/\sqrt{2}, \quad \text{vers}\theta_{12}=1-1/\sqrt{2}$$

旋转算子[式(6.22)]变成

$$[R_{12}] = \begin{bmatrix} 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 & 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 \\ 0 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

据此,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_i = \begin{Bmatrix} r'_{ix} \\ r'_{iy} \\ r'_{iz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.707 & -0.500 & 0.500 \\ 0.500 & 0.854 & 0.146 \\ -0.500 & 0.146 & 0.854 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 - 0.500 + 1.500 \\ 0 + 0.854 + 0.439 \\ 0 + 0.146 + 2.562 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.293 \\ 2.708 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

这就是图中点 P' 的位置。这可验证如下:因为只是旋转,所以

$$|\mathbf{r}_i| = |\mathbf{r}'_i|$$

每一边求解得到

$$|\mathbf{r}_i| = [0^2 + 1^2 + 3^2]^{1/2} = \sqrt{10}$$

$$|\mathbf{r}'_i| = [1.000^2 + 1.293^2 + 2.708^2]^{1/2} = \sqrt{10.005}$$

的确, 两者的模, 除了一点点的舍入误差之外, 是一样的。

利用式(6.30)可以求出点 P 的最终位置:

$$r_2 = \{r_2\} = [S_{12}] \{r_1\} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.500 & 0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.854 & 0.146 & 1 \\ -0.500 & 0.146 & 0.854 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 2.29 \\ 3.70 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

我们记得 $[S_{12}]$ 是从先绕通过原点的轴旋转, 再沿同轴平移推导出来的。如果先作轴向平移再绕同轴(轴线通过原点)旋转会不会导出不同的算子呢? (参看图 6.27)

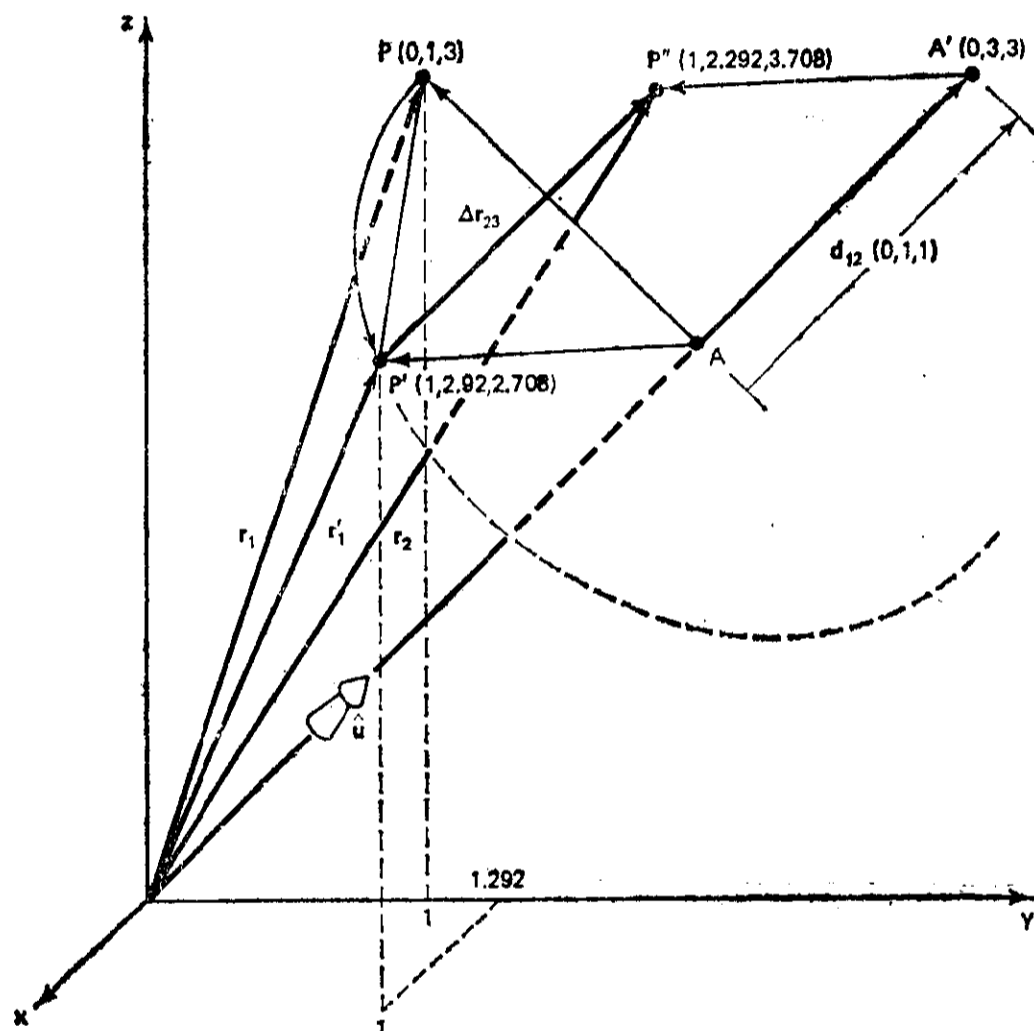


图 6.27 点 P 绕通过原点的轴线作螺旋位移

例 6.9^①

给定刚体上四个点的初始及最终位置坐标, 求唯一的螺旋位移矩阵。这四个点在其初始位置时的齐次坐标选为

$$[A_1 B_1 C_1 D_1] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \\ 7 & 10 & 10 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

其最终位置为

^① 本例和下例是由丹·奥尔森(Dan Olson)提供的。

$$[A_2 B_2 C_2 D_2] = \begin{bmatrix} 1.90 & 3.29 & 4.26 & 3.92 \\ 11.23 & 14.44 & 13.41 & 9.83 \\ 7.19 & 11.29 & 8.84 & 8.59 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解 我们要求螺旋矩阵 $[S_{12}]$, 使得 $[A_2 B_2 C_2 D_2] = [S_{12}][A_1 B_1 C_1 D_1]$. 在上式两边右乘 $[A_1 B_1 C_1 D_1]^{-1}$, 可得:

$$[S_{12}] = [A_2 B_2 C_2 D_2][A_1 B_1 C_1 D_1]^{-1}$$

如果 $[A_1 B_1 C_1 D_1]$ 是非奇异矩阵, 那么逆矩阵 $[A_1 B_1 C_1 D_1]^{-1}$ 可以用以下方法来求: 在原矩阵右面接上一个 4×4 的单位矩阵, 以形成一个 4×8 的矩阵, 然后利用行与行之间的初等运算将矩阵的行进行梯形化, 一直到左边的 4×4 矩阵成为单位矩阵为止:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & -5 & -14 & 0 & -7 & 3 & 0 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad \vdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/6 & 35/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/6 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/4 & 1/2 & -33/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & -1/6 & 5/12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这时上面 4×8 矩阵的右半边就是逆矩阵 $[A_1 B_1 C_1 D_1]^{-1}$ (参看练习 6.15)。螺旋矩阵为

$$\begin{aligned} [S_{12}] &= [A_2 B_2 C_2 D_2][A_1 B_1 C_1 D_1]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1.90 & 3.29 & 4.26 & 3.92 \\ 11.23 & 14.44 & 13.41 & 9.83 \\ 7.19 & 11.29 & 8.84 & 8.59 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/6 & 35/12 \\ 1/4 & 1/4 & -1/6 & 5/12 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 & -33/12 \\ -1/4 & 1/4 & -1/6 & 5/12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.748 & 0.263 & 0.612 & -3.17 \\ 0.608 & -0.093 & 0.788 & 5.99 \\ 0.263 & 0.963 & -0.092 & 4.94 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

要证实这个结果, 可参看练习 6.16。

(注: A_2, B_2, C_2 和 D_2 的坐标四舍五入到两位小数。)

例 6.10

对于例 6.9, 利用式 (6.22) 和几个平移算子, 求 \hat{u}, θ, D 以及螺旋轴线与 yz 平面的交点 (回想一下, 这唯一的螺旋轴线不一定要通过原点)。

解: 设 $P(x, y, z)$ 是螺旋轴线上的一点。点 Q_1 经过螺旋位移到 Q_2 (图 6.28)。因为螺旋矩阵的旋转部分 [式 (6.31)] 仅适用于转轴通过原点的情况, 所以我们先把 P 平移到原点, 并求出 Q_1' :

$$\{Q_1'\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{Q_1\}$$

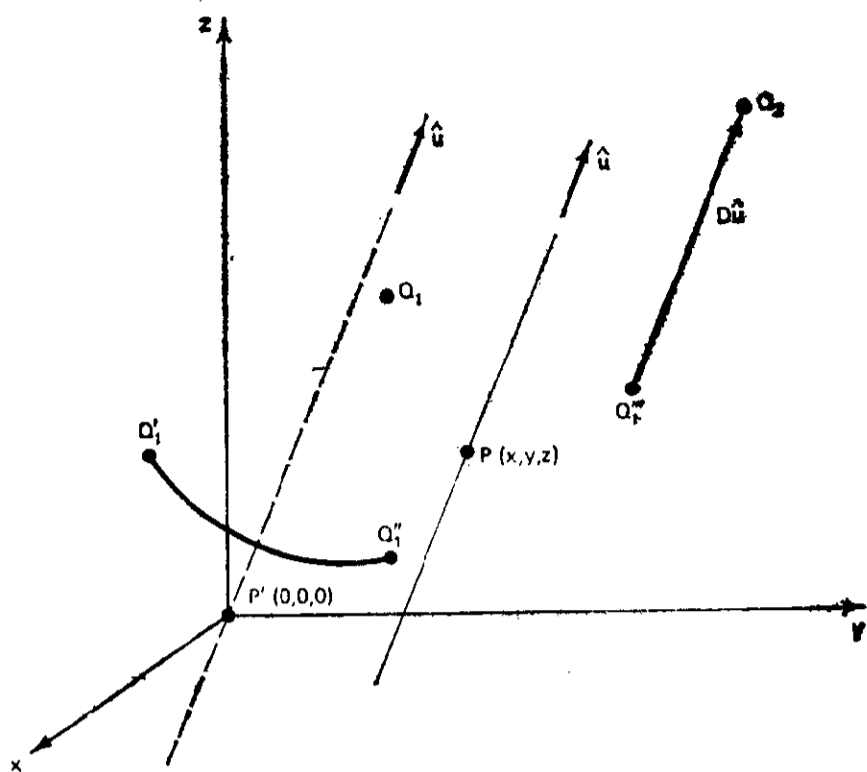


图 6.28 例 6.10

然后用旋转算子从 Q_1' 求得 Q_1''

$$\{Q_1''\} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{Q_1'\}$$

其次, 把 P 平移回到它原来的位置, 求得 Q_1''' :

$$\{Q_1'''\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{Q_1''\}$$

最后, 作平行于螺旋轴线的平移, 得到 Q_2 :

$$\{Q_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Du_x \\ 0 & 1 & 0 & Du_y \\ 0 & 0 & 1 & Du_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{Q_1'''\}$$

把这四个矩阵按正确次序并置运算, 就可以得到其轴通过点 (x, y, z) 的一般螺旋位移矩阵。

$$\begin{aligned} [S_{12}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Du_x \\ 0 & 1 & 0 & Du_y \\ 0 & 0 & 1 & Du_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & Du_x + x - (r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z) \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Du_y + y - (r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z) \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Du_z + z - (r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在这个具体的例子中, S_{12} 已由例 6.9 推导出:

$$[S_{12}] = \begin{bmatrix} -0.748 & 0.263 & 0.612 & -3.17 \\ 0.608 & -0.093 & 0.788 & 5.99 \\ 0.263 & 0.963 & -0.092 & 4.94 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ, u_x, u_y 和 u_z 可以根据例 6.5 中导出的公式来求得:

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \left[\frac{1}{2} (r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1) \right] \\ &= \arccos \left[\frac{1}{2} (-0.748 - 0.093 - 0.092 - 1) \right] \\ &= 165^\circ \end{aligned}$$

$$u_x = \frac{r_{32} - r_{23}}{2 \sin \theta} = 0.333$$

$$u_y = \frac{r_{13} - r_{31}}{2 \sin \theta} = 0.667$$

$$u_z = \frac{r_{21} - r_{12}}{2 \sin \theta} = 0.667$$

一旦确定了 u_x, u_y, u_z (图 6.29), 我们可以使螺旋矩阵的两个表达式中的元素 r_{14}, r_{24}, r_{34} 对应相等, 从而提供包含四个未知数 D, x, y 和 z 的三个方程。其中一个未知数, 例如 x , 可以任意假定。

要确定螺旋轴线与 yz 平面的交点, 我们令 $x=0$, 并联立解下列三个方程来求 D, y 和 z 。

$$D(0.333) - (0.263)y - (0.612)z = -3.17$$

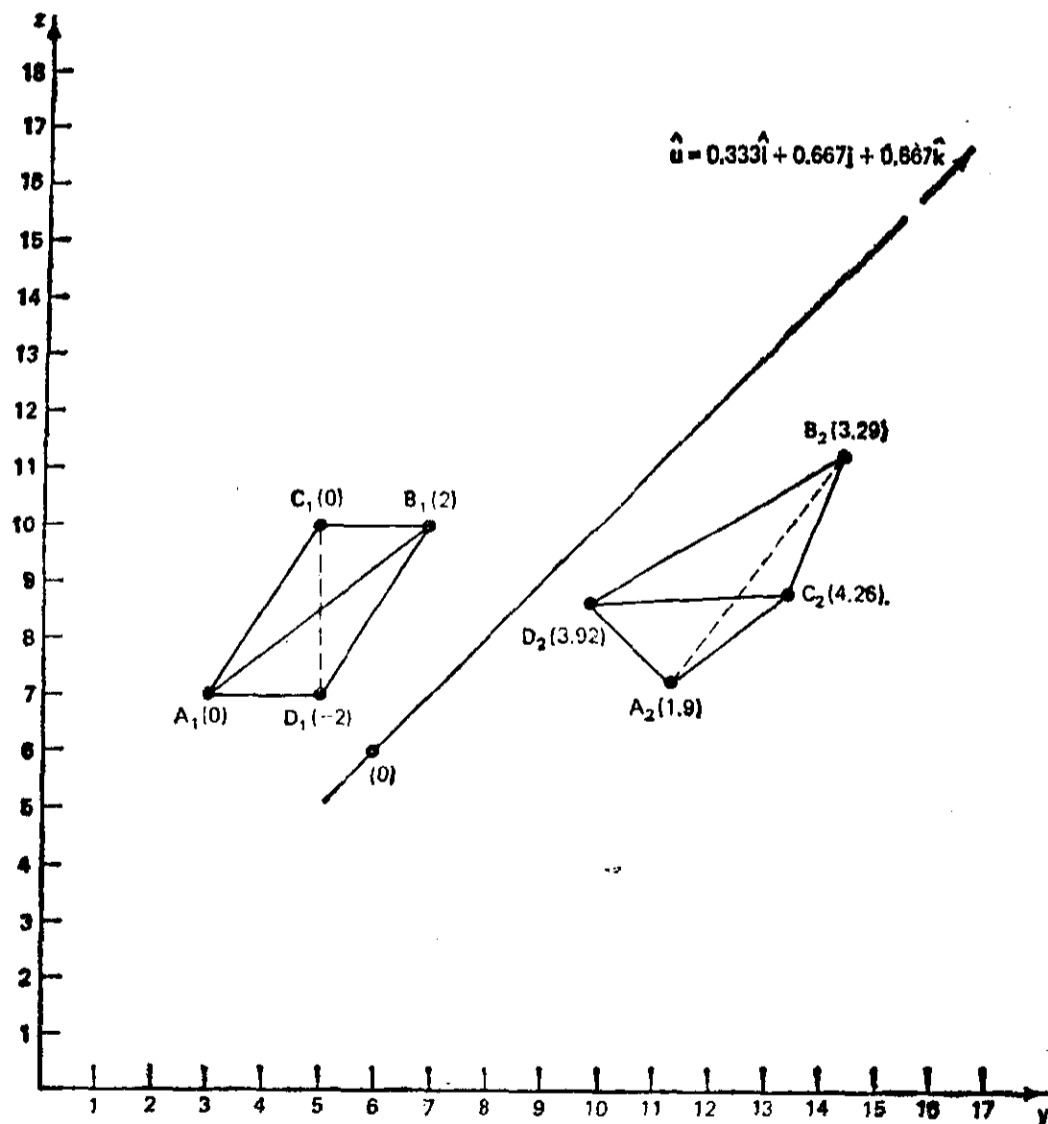


图 6.29 例 6.10: 在 YZ 平面上的投影 (x 坐标在括号内)

$$D(0.667) + (1.093)y - (0.788)z = 5.99$$

$$D(0.667) - (0.963)y + (1.092)z = 4.96$$

螺旋轴线与 yz 平面相交于 $(0, 6, 6)$

$$D=6.25$$

轴线通过原点的旋转矩阵的推导^①

为了导出其轴线通过原点的旋转矩阵[公式(6.22)], 我们来研究图 6.30 中质点 P 的运动。注意, 点 P 绕位于通过原点的一根轴上的点 A 旋转。该轴线用单位向量 \hat{u} 来表示, 这等同于描述这一直线在空间的斜率。 \hat{u} 的坐标就是这一轴线的方向余弦:

$$\begin{aligned} u_x &= \cos\alpha \\ u_y &= \cos\beta \\ u_z &= \cos\gamma \end{aligned} \tag{6.32}$$

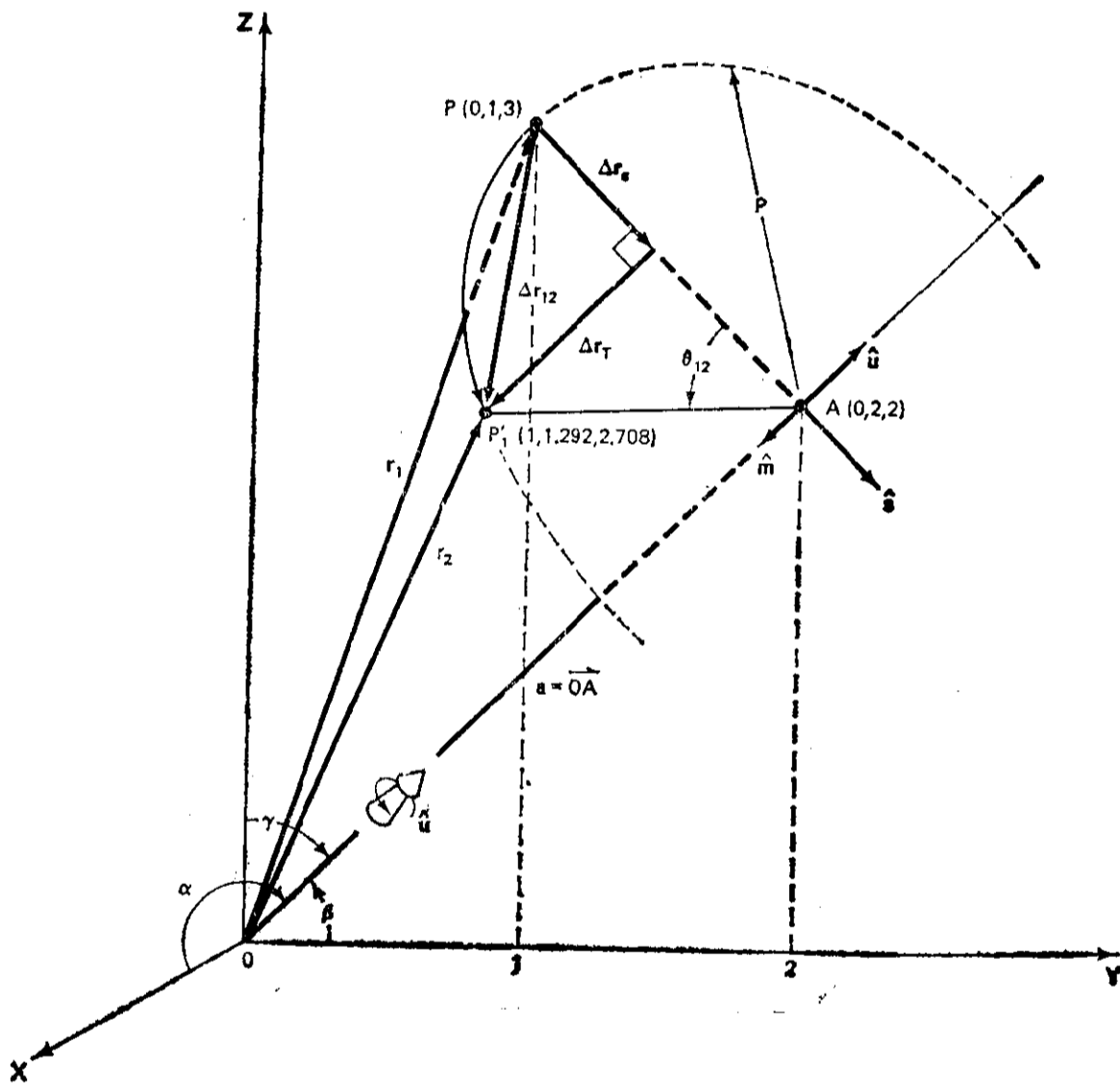


图 6.30 点 P 绕通过原点的轴 \hat{u} 旋转

式中 α, β 和 γ 分别是 x, y 和 z 轴的正方向开始量到从原点引出的向量 \hat{u} 。注意

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

或
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \tag{6.33}$$

下面, 让我们来推导用 P, \hat{u} 和转角 θ 来表示 P' 的一般表达式。这时

$$P = [0, 1, 3]^T \quad \text{和} \quad A = [0, 2, 2]^T$$

^① 这一部分可以跳过而不致影响课文的连续性。

所以转轴位于 yz 平面内,且可表示为

$$\hat{u} = [0, \cos 45^\circ, \cos 45^\circ]^T$$

点 P 绕该轴旋转的角度为 $\theta_{12} = 45^\circ$ (以姆指指向 \hat{u} 的方向用右手法则测出的正方向), 旋转的半径是:

$$P = |P - A| = \sqrt{2}$$

这些数值的选取只是为了图示方便, 但这个推导是一般性的。我们所要求的是一个空间旋转算子 R_{12} , 使得:

$$r_2 = R_{12} r_1$$

式中, r_1 在这个例子中是 P 。

开始推导之前, 我们需要定义几个向量。从原点到点 A 的向量定义为 a , 它是向量 r_1 在轴 \hat{u} 上的投影。要求 a , 想象一个直角三角形 POA , a 是其中的一条边。 a 的模长是 $|r_1| \cos(\angle POA)$, 即 r_1 和 \hat{u} 的点积。由于 a 与 \hat{u} 同向、同号, 而且 $|\hat{u}| = 1$, 所以求得 a 为

$$a = (r_1 \cdot \hat{u}) \hat{u} \quad (6.34)$$

还需要两个单位向量, 它们定义了 Δr_{12} 在旋转平面内的两个分量的方向。这两个分量是向心分量 Δr_c 和切向分量 Δr_t 。为此, 可在点 A 建立一个正交坐标系, 有三个互相垂直的单位向量 \hat{m} 、 \hat{s} 和 \hat{u} 。单位向量 \hat{s} 可以由向量 $\vec{PA} = a - r_1$ 经单位化后得到。要单位化这个向量, 只要除以它的模, 即半径 p 就可以了。因此, \hat{s} 定义为

$$\hat{s} = \frac{a - r_1}{p} \quad (6.35)$$

由于 \hat{m} 、 \hat{s} 和 \hat{u} 是正交的, \hat{m} 可按下列式计算

$$\hat{m} = \hat{s} \times \hat{u} = -\hat{u} \times \hat{s} \quad (6.36)$$

Δr_t 和 Δr_c 的模可以根据图 6.31 所示在旋转平面内的两个三角形来确定。从图中明显看出

$$|\Delta r_t| = p \sin \theta_{12} \quad (6.37)$$

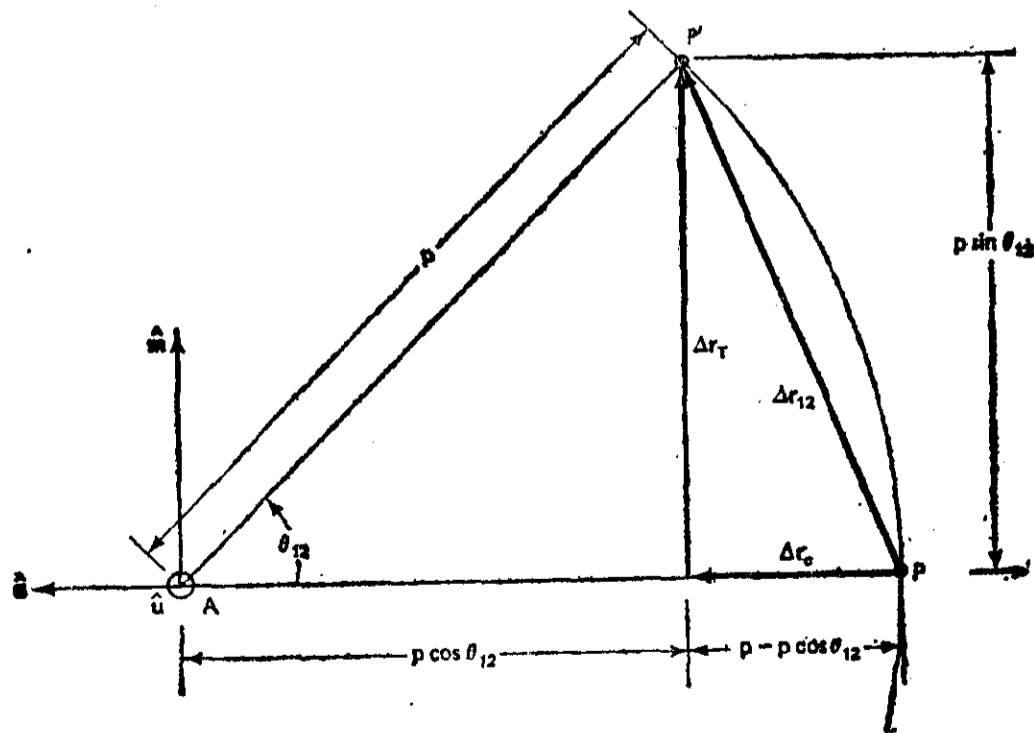


图 6.31 图 6.30 中 \hat{s} 、 \hat{m} 平面的视图

从图中还可以注意到:

$$|\Delta \mathbf{r}_c| = p - p \cos \theta_{12} = p(1 - \cos \theta_{12}) \quad (6.38)$$

由于 $\hat{\mathbf{m}}$ 和 $\hat{\mathbf{s}}$ 是单位向量, 所以 $\Delta \mathbf{r}_{12}$ 的两个分量可以求得如下:

$$\Delta \mathbf{r}_t = p \sin \theta_{12} \hat{\mathbf{m}} \quad \text{和} \quad \Delta \mathbf{r}_c = p \text{vers} \theta_{12} \hat{\mathbf{s}} \quad (6.39)$$

式中 $\text{vers} \theta_{12} = 1 - \cos \theta_{12}$

vers 是 versine(正矢)的缩写。将 $\hat{\mathbf{m}}$ 和 $\hat{\mathbf{s}}$ 代入,

$$\text{得到} \quad \Delta \mathbf{r}_t = p \sin \theta_{12} (\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{u}}) = p \sin \theta_{12} \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{r}_1) \times \hat{\mathbf{u}}}{p} \quad (6.40)$$

$$\text{以及} \quad \Delta \mathbf{r}_c = p \text{vers} \theta_{12} \frac{\mathbf{a} - \mathbf{r}_1}{p}$$

简化为:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_t &= \sin \theta_{12} [(\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{u}}) - (\mathbf{r}_1 \times \hat{\mathbf{u}})] \\ \Delta \mathbf{r}_c &= \text{vers} \theta_{12} (\mathbf{a} - \mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (6.41)$$

由于 \mathbf{a} 与 $\hat{\mathbf{u}}$ 方向相同, 则

$$\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (6.42)$$

又因为

$$-\mathbf{r}_1 \times \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_1 \quad (6.43)$$

$\Delta \mathbf{r}_t$ 可进一步简化为

$$\Delta \mathbf{r}_t = \sin \theta_{12} (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_1) \quad (6.44)$$

将 \mathbf{a} 从式(6.41)中替换掉, 得到

$$\Delta \mathbf{r}_c = \text{vers} \theta_{12} [(\mathbf{r}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{r}_1] \quad (6.45)$$

\mathbf{r}_1 转动到 \mathbf{r}_2 的旋转可以用位移向量 $\Delta \mathbf{r}_{12}$ 来表示, 这里

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_{12} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \text{或者} \quad \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_{12} \end{aligned} \quad (6.46)$$

这时, $\Delta \mathbf{r}_{12}$ 是包含有旋转角 θ_{12} 、旋转轴 $\hat{\mathbf{u}}$ 以及 \mathbf{r}_1 的已知量, 所以我们可以推导出旋转算子 R_{12} 作为 θ_{12} 、 $\hat{\mathbf{u}}$ 及 \mathbf{r}_1 的函数。式(6.46)现在可以写成矩阵的形式:

$$\begin{Bmatrix} r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \end{Bmatrix} + \sin \theta_{12} \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} \end{vmatrix} \quad (6.47)$$

$$+ \text{vers} \theta_{12} \begin{bmatrix} u_x(r_{1x}u_x + r_{1y}u_y + r_{1z}u_z) - r_{1x} \\ u_y(r_{1x}u_x + r_{1y}u_y + r_{1z}u_z) - r_{1y} \\ u_z(r_{1x}u_x + r_{1y}u_y + r_{1z}u_z) - r_{1z} \end{bmatrix}$$

在展开行列式和从第二、三项中提出公因子 r_1 之后, 式(6.47)变成

$$\begin{Bmatrix} r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \sin\theta_{12} \right.$$

(6.48)①

$$\left. + \begin{bmatrix} u_x^2 - 1 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_x u_y & u_y^2 - 1 & u_y u_z \\ u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 - 1 \end{bmatrix} \text{vers}\theta_{12} \right) \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \end{Bmatrix}$$

旋转算子在括号内。简化之后, $[R_{12}]$ 变成

$$[R_{12}] = \begin{bmatrix} u_x^2 \text{vers}\theta_{12} + \cos\theta_{12} & u_x u_y \text{vers}\theta_{12} - u_z \sin\theta_{12} & u_x u_z \text{vers}\theta_{12} + u_y \sin\theta_{12} \\ u_x u_y \text{vers}\theta_{12} + u_z \sin\theta_{12} & u_y^2 \text{vers}\theta_{12} + \cos\theta_{12} & u_y u_z \text{vers}\theta_{12} - u_x \sin\theta_{12} \\ u_x u_z \text{vers}\theta_{12} - u_y \sin\theta_{12} & u_y u_z \text{vers}\theta_{12} + u_x \sin\theta_{12} & u_z^2 \text{vers}\theta_{12} + \cos\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

6.11 空间机构的分析②

在这一节和以后的各节中, 前面介绍过的 4×4 变换矩阵将用来建立供分析用的空间机构的模型。下面讨论的建模程序是以给每一个构件建立一个局部的直角坐标系开始的。每个构件上局部坐标系的位置和方向可以是任意的; 但是, 它们通常都选定在联接的中心。建模的任务就变成要描述连接在一起的构件的坐标系统彼此如何相对运动。因此, 就必须定义一些变换矩阵来描述这些相对运动。我们将会看到它们与前面介绍过的 4×4 矩阵相似。本节里要介绍的方法, 当用来给数字计算机编程时特别有用。大部分都是矩阵和向量的运算。

例如, 位移分析的典型任务是在与机架相连的固定坐标系里确定运动构件上某一点的位置。为了说明这一点, 设点 P 位于构件 2 上(见图 6.32), 它在连接于运动构件 2 上的局部坐标系 $x_2 y_2 z_2$ 中的位置由向量 P^2 来确定。在构件 2 转动了角 θ_2 后, 要求出点 P 相对于整体坐标系 $x_1 y_1 z_1$ (连接在固定构件 1 上) 的位置, 即 P^1 , 我们必须考虑这样一个事实: 即坐标系 $x_2 y_2 z_2$ 是从 $x_1 y_1 z_1$

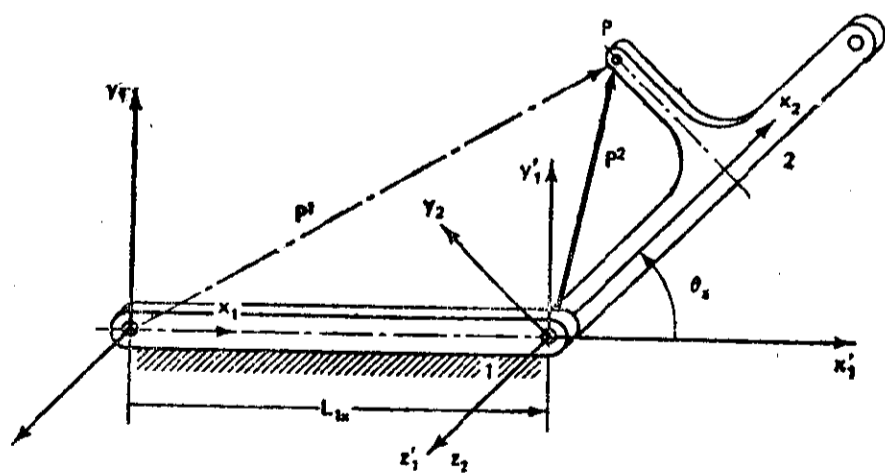


图 6.32 点 P 相对于局部坐标系和固定坐标系的位置向量

① 原文为(6.40), 有误——译者注。

② 作者感谢罗伯特·威廉姆斯(Robert Williams)(工作在 Control Data Corporation, Minneapolis, Minnesota)对节 6.11 到节 6.17 部分内容的成稿所做的工作。

经复合的旋转和平移后得到的。在以后几节中，我们要对于各种空间构件的形状和联接的运动推导出一些必要的变换矩阵来进行如下的变换：

$$P^1 = T_{12}P^2 \quad (6.49)$$

重要的是观察矩阵 T_{12} 该怎么组成，以便能够从 P^2 得到 P^1 注意 P^2 是定义在 $x_2y_2z_2$ 坐标系中的。同时注意 x_2y_2 是由 $x_1'y_1'$ 经绕 z_1' 轴旋转角 θ_z 后得到的。因此，表示在 $x_1'y_1'$ 坐标系中的 P^2 的幅角要从它在 x_2y_2 坐标系中的幅角增加 θ_z 。因此， $(P^2)' = [R(\theta_z)]P^2$ 。其次，注意 $x_1'y_1'$ 是从 x_1y_1 经平移 L_{1x} 后得到的。因此，表示在 $x'y'$ 坐标系中的任何向量，当它表示在 x_1y_1 坐标系中时，其 x 坐标要增大 L_{1x} 。其结果， $P' = [T(L_{1x})](P^2)' = [T(L_{1x})][R(\theta_z)]P^2$ 。因此，我们知道，算子 T_{12} 是按下面的顺序对一旋转矩阵和一平移矩阵进行并置运算而得到的：

$$T_{12} = [T(L_{1x})][R(\theta_z)] \quad (6.50)$$

基本的 4×4 变换矩阵

基本的 4×4 变换矩阵形式总共有七个。经过适当的组合，它们可以表示机构(无论空间的、还是平面的)中出现的大部分联接。它们也可用来描述在这些联接之间的复杂的构件形状。这七个矩阵用简图示于图 6.33。其中头三个是由旋转、平移组合而成的矩阵[见式(6.23、6.24、6.25和6.28)]。它们被用来将位于 $O_jx_jy_jz_j$ 坐标系中的点 P 的位置向量 P_j 变换成表示这同一点 P 但在 $O_ixiy_iz_i$ 坐标系内的向量 P^i 。

因为，一般说来，第 j 个坐标系是从第 i 个坐标系经过平移 (a, b, c) 到点 O_j ，然后绕 O_j 旋转到第 j 个坐标系的方位上，所以从 P^j 到 P^i 的变换可以与前面介绍过的平面例子一样，即按顺序将旋转矩阵和平移矩阵进行并置运算。例如，平移[从式(6.28)]表示为：

$$T(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

而绕 x 轴的旋转为

$$R(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

将这两个矩阵按先旋转、再平移的顺序进行并置运算后可得如图 6.33a 的矩阵：

$$\begin{aligned} T_{ij}(a, b, c, \theta_x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & b \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.53) \end{aligned}$$

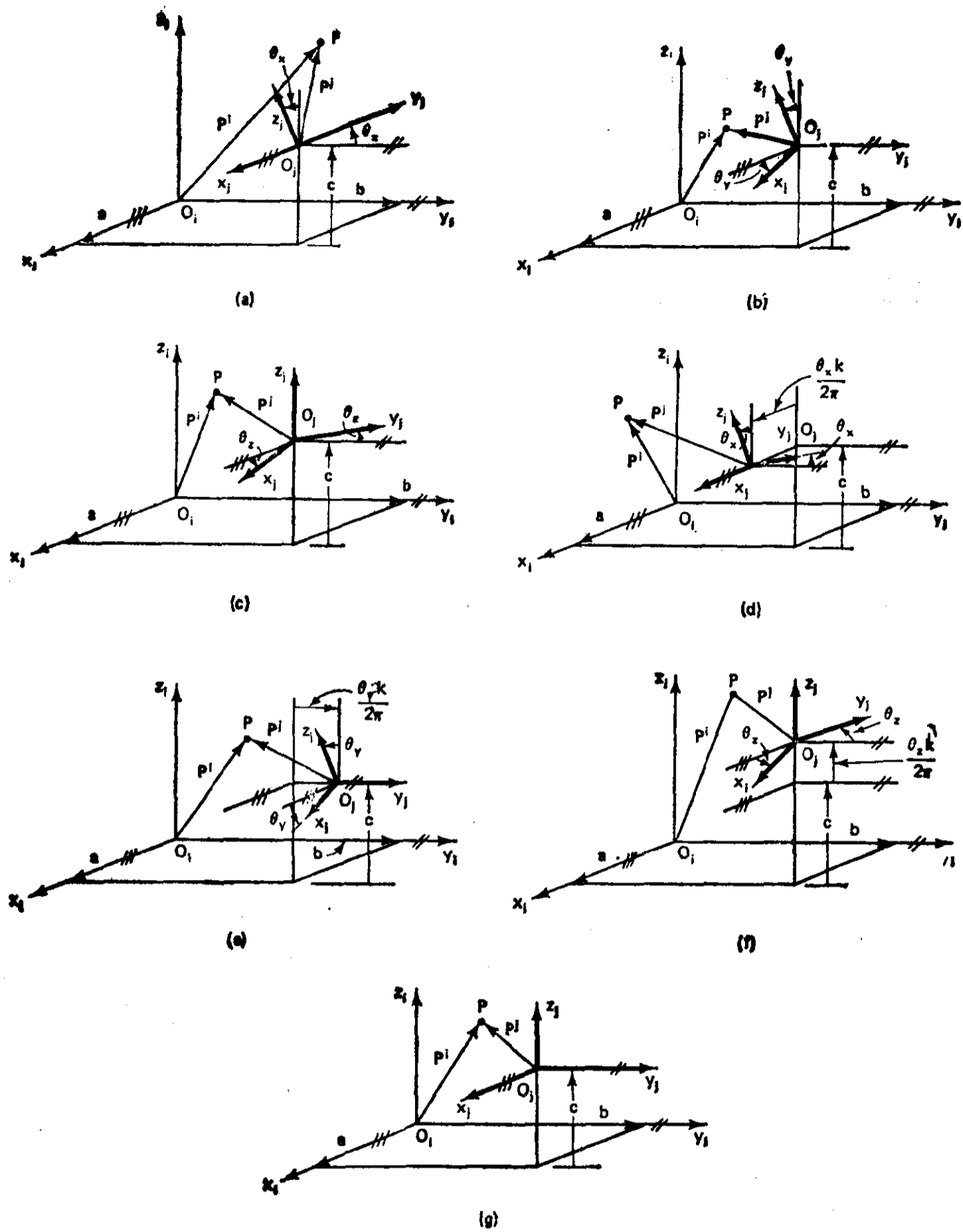


图 6.33 七个基本变换矩阵的三维表示图

对先作同样平移, 然后再分别绕 y 轴和 z 轴旋转的情况, 可以用类似的方法求得, 分别示于图 6.33b 和 c。接下来的三个矩阵分别表示先作同样的平移, 然后分别绕 x 、 y 和 z 轴作螺旋运动, 示于图 6.33d、e 和 f, [参看式(6.30)]。最后, 第七个矩阵是纯平移的情况, [示于图 6.33g, 参看式(6.28)]。

1. 第一种情况: 坐标系 x_j, y_j, z_j 是由 x_i, y_i, z_i 先经过平移 $D = [a, b, c]^T$, 然后经过绕通过其平移后的原点 (a, b, c) 的轴线 $\hat{u} = [u_x, 0, 0]^T$ 转动角 θ_x 后得到。因此, 对于这种情况, 从 P^j 得到 P^i 的变换为

$$P^i = T_{i,j}^1 P^j$$

式中 $T_{i,j}^1$ 已由式(6.53)表示如下

$$T_{i,j}^1(a, b, c, \theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & b \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 第二种情况: 类似于第一种情况, 但转角是 θ_y 。这里

$$P^i = T_{i,j}^2 P^j$$

式中

$$T_{i,j}^2(a, b, c, \theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 第三种情况: 除了是绕 z 轴旋转外, 与第一种情况相似。同样,

$$P^i = T_{i,j}^3 P^j$$

式中

$$T_{i,j}^3(a, b, c, \theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & a \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 第四种情况: 坐标系 x_j, y_j, z_j 是从 x_i, y_i, z_i 先平移 $D = [a, b, c]^T$, 然后在 x 方向上作螺旋运动得到的。现在

$$P^i = T_{i,j}^4 P^j$$

式中

$$T_{i,j}^4(a, b, c, \theta_x, k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a + \frac{\theta_x k}{2\pi} \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & b \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 k 是螺旋的导程。

5. 第五种情况, 除了坐标系的螺旋运动是在 y 方向上发生以外, 与第四种情况相似。这里

$$P^i = T_{i,j}^5 P^j$$

式中

$$T_{i,j}^5(a, b, c, \theta_y, k) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & a \\ 0 & 1 & 0 & b + \frac{\theta_y k}{2\pi} \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 第六种情况适用于坐标系先平移到点 (a, b, c) 后,再在 z 方向上做螺旋运动。因此

$$P^i = T_{i,j}^6 P^j$$

式中

$$T_{i,j}^6(a, b, c, \theta_z, k) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & a \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c + \frac{\theta_z k}{2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 第七种情况适用于坐标系 x_j, y_j, z_j 是从 x_i, y_i, z_i 仅仅平移 $D = [a, b, c]^T$ 后得到的变换。对这种情况

$$P^i = T_{i,j}^7 P^j$$

式中

$$T_{i,j}^7(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

很重要的是,注意:这些矩阵里的平移和转动都是描述一个坐标系统从与第 i 系重合的位置运动到与第 j 系重合的位置的相对运动。这与我们前面定义的绝对的平移和旋转的变换不同,因为那些变换都是“相对”于固定的参照坐标系 (x_0, y_0, z_0) 。尽管这里这些量的意义不同了,但矩阵的形式却没有改变,因而我们将直接应用而不加进一步的推导。

更进一步地来研究一下这些平移加旋转矩阵中的一个,以便更好地弄清它所描述的运动是有益的。考虑第三种旋转矩阵——先将坐标系平移再绕平移后的 z 轴旋转——对于 $c=0$ 的情况。这就将运动简化为本书以前用过的二维平面运动的形式(在 xy 平面)。图 6.34 表示这种平

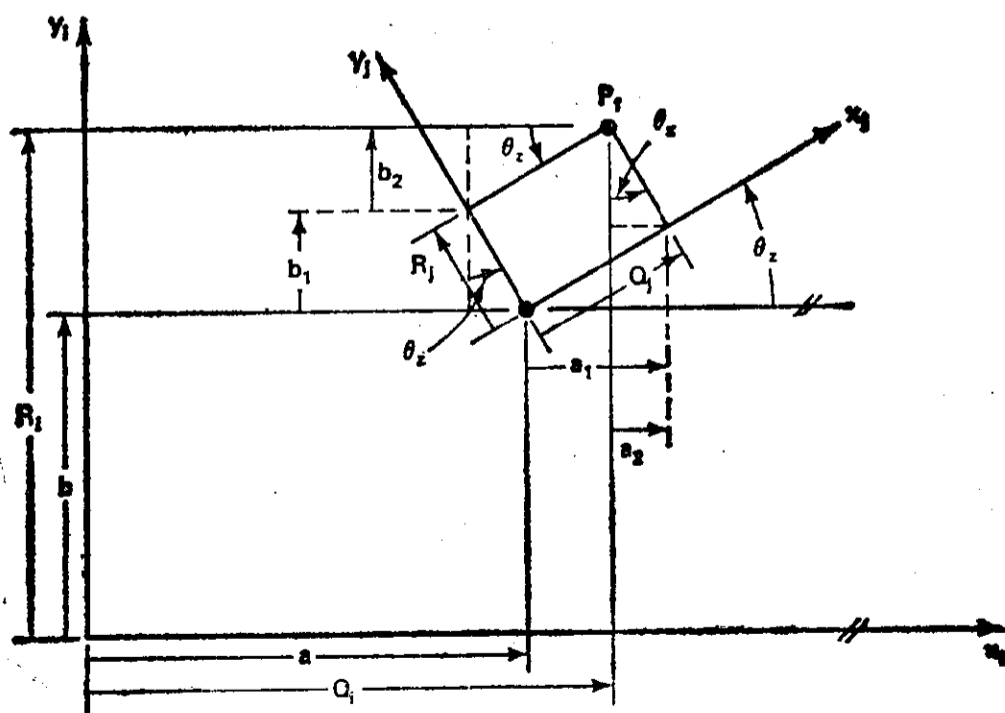


图 6.34 点 P_1 在两个坐标系中的各分量

面简化。作为一个例子,我们来求定义在第 j 个坐标系中的点 P_{1j} 在第 i 个坐标系中的位置。我们知道,第 j 个坐标系是由第 i 个坐标系经过平移 (a, b) 、旋转角 θ_z 后得到的。点 P_1 的位置,在第 j 个坐标系中由 P_{1j} 规定,而在第 i 个坐标系中则标为 P_{1i} 表示成矩阵的积为

$$\{P_{1i}\} = [S_{ij}] \{P_{1j}\} \quad (6.54)$$

式中

$$\{P_{1j}\} = \begin{bmatrix} Q_j \\ R_j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \{P_{1i}\} = \begin{bmatrix} Q_i \\ R_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

注意,象以前一样,用了四个齐次坐标。我们假设 S_{ij} 是图 6.33c 中的第三个基本矩阵。式 (6.54) 变成

$$\{P_{1i}\} = T_{ij}^3(a, b, \theta_z) \{P_{1j}\} \quad (6.56)$$

代入后得

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ R_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & a \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_j \\ R_j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

将这一矩阵乘积展开后, $\{P_{1i}\}$ 定义为

$$\{P_{1i}\} = \begin{bmatrix} Q_i \\ R_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_j c\theta_z - R_j s\theta_z + a \\ Q_j s\theta_z + R_j c\theta_z + b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

让我们更进一步地看一看图 6.34, 在该图中 P_1 的坐标分量表示在第 i 和第 j 两个坐标系中。从图 6.34 可知:

$$\begin{aligned} Q_i &= a + a_1 - a_2 \\ R_i &= b + b_1 + b_2 \end{aligned} \quad (6.59)$$

式中

$$\begin{aligned} a_1 &= Q_j c\theta_z \\ a_2 &= R_j s\theta_z \\ b_1 &= R_j c\theta_z \\ b_2 &= Q_j s\theta_z \end{aligned} \quad (6.60)$$

代入式(6.59)得到

$$\begin{aligned} Q_i &= a + Q_j c\theta_z - R_j s\theta_z \\ R_i &= b + R_j c\theta_z + Q_j s\theta_z \end{aligned} \quad (6.61)$$

这与式(6.58)是完全一样的。

下面我们继续进行对其它基本变换矩阵的讨论,图 6.33 中的矩阵 T_{ij}^4 、 T_{ij}^5 和 T_{ij}^6 描述坐标系沿某一平移后的坐标轴的螺旋运动。这些螺旋运动包含着坐标系沿一根已经平移了的坐标轴的第二次平移,和同时发生的绕这同一根坐标轴的成比例的旋转。这样的螺旋运动是用螺旋导

程 k ——表示为螺旋每转一圈所移动的长度单位——来表示的。而在这螺旋运动之前，坐标系已有了一个平移。读者可以像我们刚才对平移加旋转矩阵那样，去更详细地研究这些矩阵。

最后示于图 6.33g 中的矩阵 T_{ij} 是一个“仅仅是平移”的矩阵。它描述一个坐标系从第 i 个位置到第 j 个位置的纯平移。

6.12 用基本矩阵来对构件和联接建模

在这一节里，我们将举几个示范性的例子来说明如何用基本矩阵来对机构中的构件和联接建模。回转联接大概是最通常的联接。图 6.35 是一个连接两个编号分别为 i 和 j 的构件的例子。在模拟联接之前，我们必须在这两个构件上分别建立局部坐标系。在图中，它们分别记为 (x_i, y_i, z_i) 和 (x_m, y_m, z_m) 。一般说来，构件的标号(例如 i)不一定要与坐标系的标号(例如 l)相对应，因为有些联接和构件需要经过中间的坐标系来确定(参看下一个例子)。构件 i 和回转联接 ij (图 6.35)可以用第三种基本矩阵来表示，因为这里的回转是绕 z 轴进行的。在绕这个联接回转之前，有一个沿着 y_i 方向、长度为 L 的平移。因此，可以用下式来描述有联接 ij 的构件 i ：

$$S_{lm}(\phi_z) = T_{lm}^*(0, L, 0, \phi_z) = \begin{bmatrix} c\phi_z & -s\phi_z & 0 & 0 \\ s\phi_z & c\phi_z & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

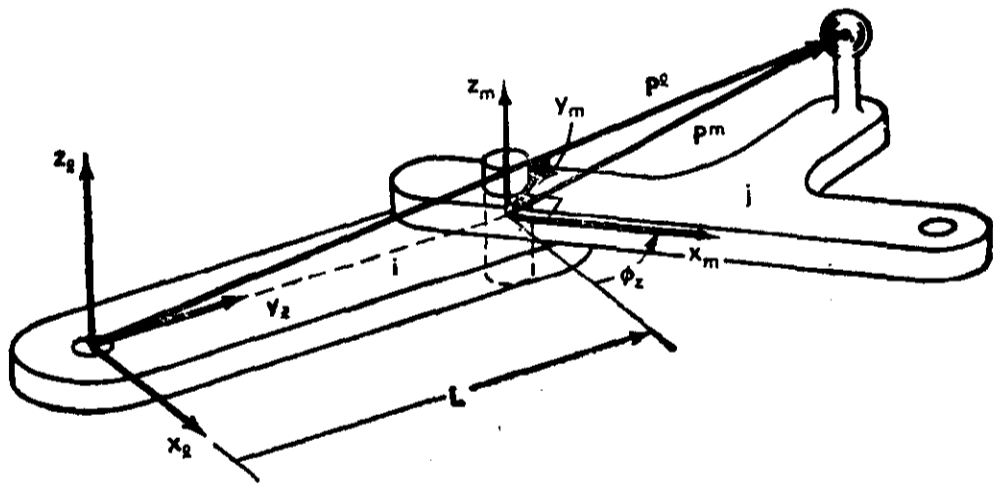


图 6.35 二副构件上的回转联接

这里记号 $S_{lm}(\phi_z)$ 用来表示一个通用的 4×4 变换矩阵。在这一章以后的全部课文中它用来表示通用矩阵。此外，记号 S 后括号内的一个量或几个量表示矩阵的相对运动变量。由于构件长 L 是一常数，所以尽管它出现在式(6.62)的矩阵中，但在算子符号 $S_{lm}(\phi_z)$ 中却省略了。

下面，我们来看看这个算子是怎么起作用的。假设我们已知构件 j 上的点 P 相对于连在构件 j 上的坐标系 x_m, y_m, z_m 的位置。设这个位置向量为 P^m 。如果我们要求 P 对于构件 i 的坐标系 x_i, y_i, z_i 的位置，也就是 P^i ，可以用下式求得：

$$P^i = S_{lm}(\phi_z) P^m \quad (6.63)$$

这种表示法说明，当 P^m 是一个常量(因为它是固定在刚性构件 j 上的)，那么 P^i 就是 ϕ_z 的函数，因此，当构件 j 相对于构件 i 回转时， P^i 发生改变。

构件 m 与 n 之间的圆柱联接示于图 6.36。要描述构件 m 及其联接，需要两个基本矩阵：其一描述沿构件 m 的平移以及沿联接轴线的平移；其二描述联接的旋转。因此，图 6.36 中构件 m 及构件 m 与 n 之间的圆柱联接就可以用下式来表达：

$$S_{j1}(B, \psi_y) = T_{jk}^1(A, B, 0) T_{k1}^2(0, 0, 0, \psi_y) \quad (6.64)$$

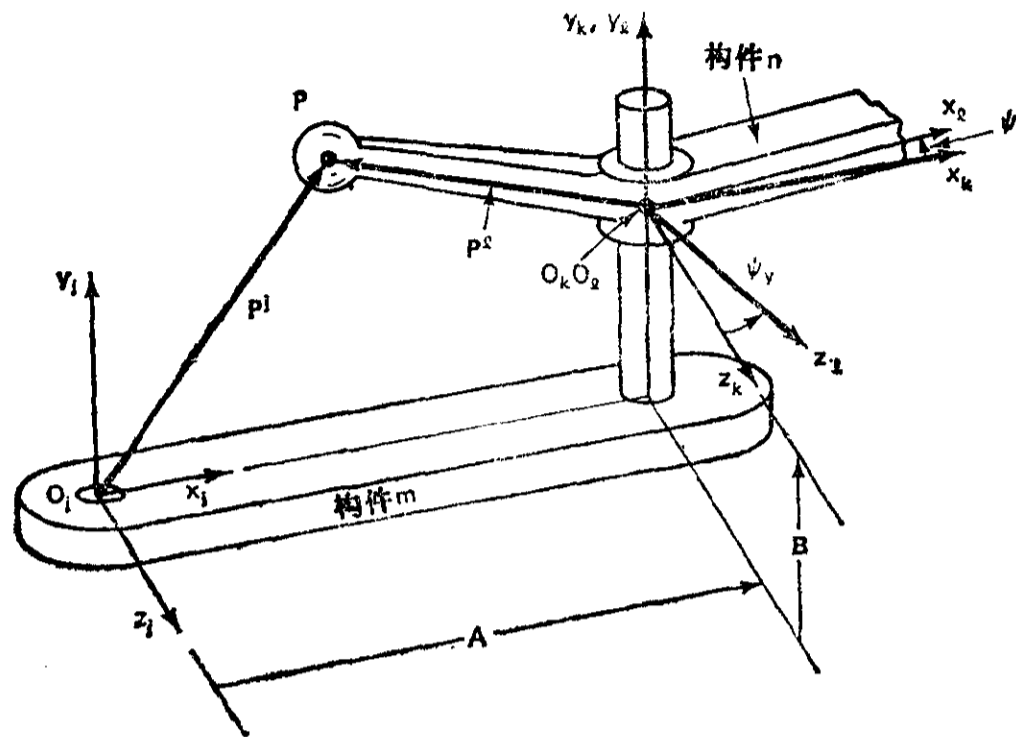


图 6.36 二副构件及其圆柱联接

或者相乘后得到矩阵：

$$S_{j1}(B, \psi_y) = \begin{bmatrix} c\psi_y & 0 & s\psi_y & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -s\psi_y & 0 & c\psi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

由此可得(图 6.36)

$$P^j = S_{j1}(B, \psi_y) P^1 \quad (6.66)$$

注意，在这种情况下， B 和 ψ_y 代表这个联接的相对自由度。

螺旋联接示于图 6.37。因为螺旋轴在 z_j 方向上，所以图 6.33 中第六种矩阵符合这一联接。这一矩阵可写成

$$S_{ij}(\theta_z) = T_{ij}^6(A, B, C, \theta_z, k) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & A \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & c + \frac{k\theta_z}{2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

在图 6.37 中，

$$P^i = S_{ij}(\theta_z) P^j \quad (6.68)$$

注意，对于这个联接，两个恒定的平移发生在 x_i 和 y_i 的负方向上，因此， A 和 B 具有负值。同时，螺旋联接旋转了将近 270° 。这就使得 x_j 轴差不多指向与 y_i 轴相反的方向，并且沿螺旋的方向

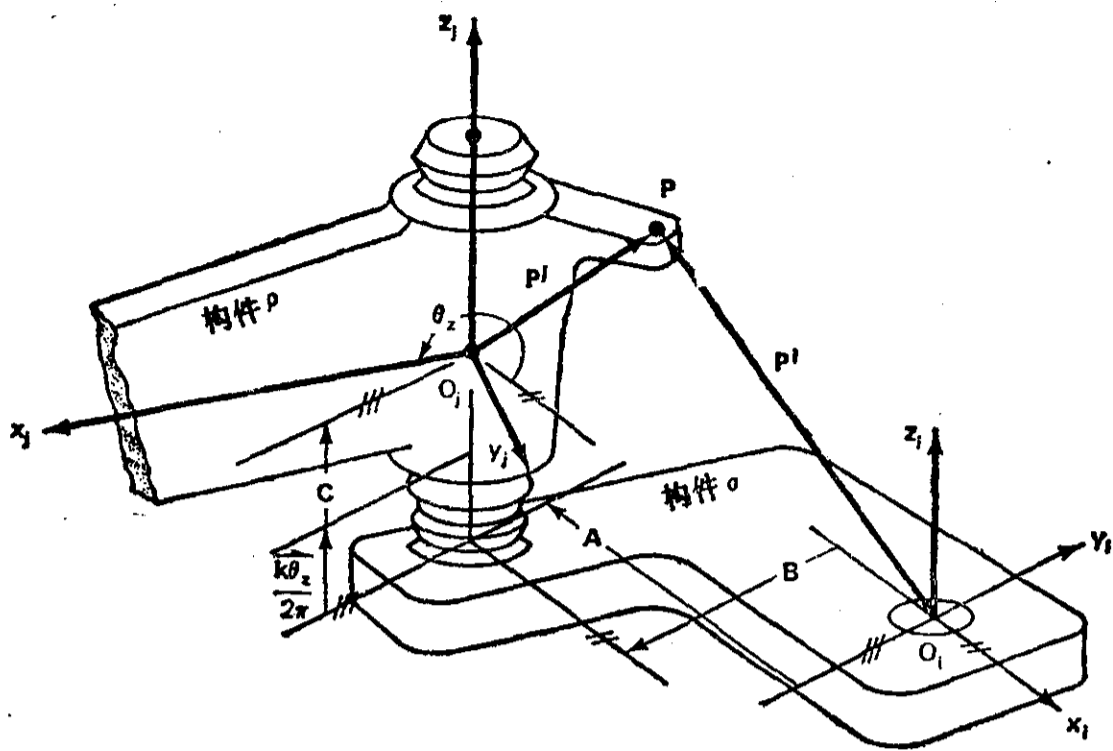


图 6.37 二副构件及其螺旋联接

引起平移 $k\theta_z/2\pi$ 。因此,如果这个联接从它现在的位置反转 θ_z , 则 x_2, y_2, z_2 坐标系就与 x_1, y_1, z_1 平行, 并且它的原点就处在 x_1, y_1 平面上方相距为 C 的地方。这个联接只有一个相对自由度 θ , 因为 k 是螺旋的导程, 是一个常数。对于右手螺旋, k 为正; 对于左手螺旋, k 就是负的了。

球面联接

球面联接是许多空间机构中一种常见的联接。图 6.38 表示了一个例子。这个联接容许一构件相对于另一构件绕所有三根轴线旋转。通常, 这些旋转是用欧拉角来描述的。图 6.33 中的

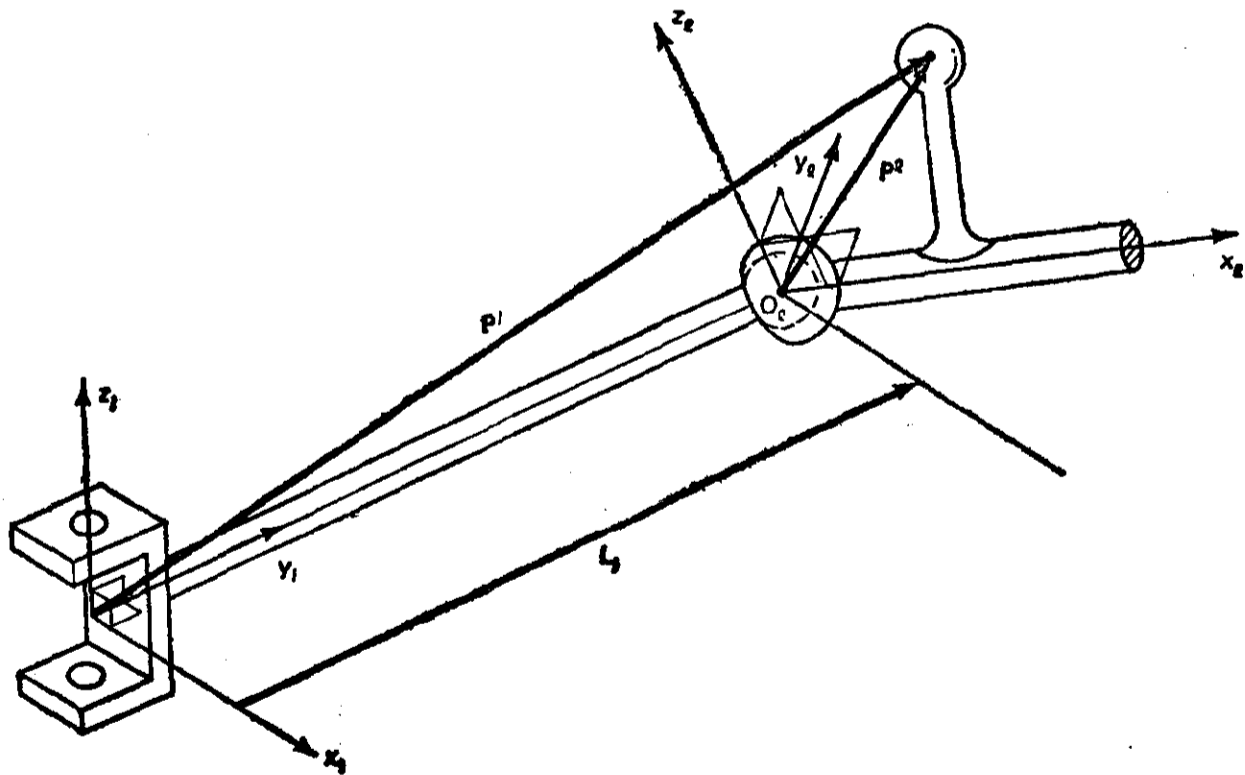


图 6.38 球面联接

基本旋转矩阵可用来描述球面联接, 其描述的方式与欧拉旋转所出现的情况相似。为了讨论方便, 球面联接可用运动学上与之等效的三根旋转轴线相交于球面联接中心的三个回转联接来代

表。图 6.39 给出了这个等效的表示方法,并附加两个用来辅助描述联接的坐标系。描述这个联接的变换矩阵为:

$$S_{i1} = T_{ij}^3(0, L_i, 0, \theta_{zj}) T_{jk}^1(0, 0, 0, \psi_{xj}) T_{kl}^3(0, 0, 0, \phi_{zk}) \quad (6.69)$$

图 6.39 等效于球面联接的三个回转联接

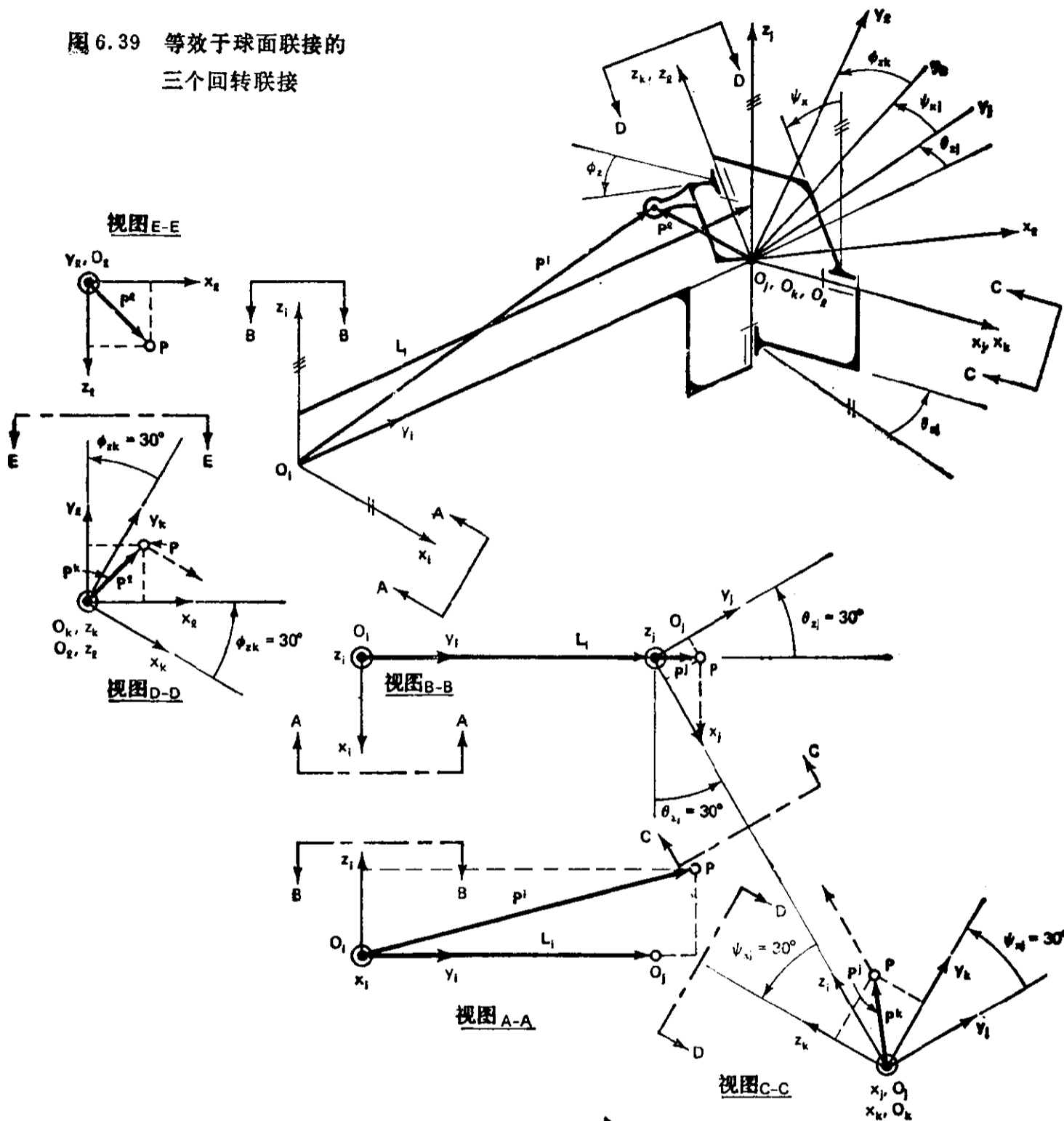


图 6.40 图 6.39 的正交视图

头一个矩阵表示坐标系沿 y_j 轴平移距离 L_i ,再绕平行于 z_j 轴的轴线旋转 θ_{zj} 从而定义了 x_j, y_j, z_j 坐标系。第二个矩阵表示第 j 个坐标系绕 x_j 轴旋转 ψ_{xj} ,从而确定了 x_k, y_k, z_k 坐标系的位置。最后一个矩阵表示第 k 个坐标系绕 z_k 轴旋转 ϕ_{zk} ,从而规定了最终 x_i, y_i, z_i 坐标系。将公式(6.69)中定义的矩阵展开,就可以得到下列的算子(参看练习 6.33①)

$$S_{i1}(0, L_i, 0, \theta_{zj}, \psi_{xj}, \phi_{zk}) =$$

① 应为练习 6.5——译者注

$$\begin{bmatrix} c\theta_{zj}c\phi_{zk} - s\theta_{zj}c\psi_{xj}s\phi_{zk} & -c\theta_{zj}s\phi_{zk} - s\theta_{zj}c\psi_{xj}c\phi_{zk} & s\theta_{zj}s\psi_{xj} & 0 \\ s\theta_{zj}c\phi_{zk} + c\theta_{zj}c\psi_{xj}s\phi_{zk} & -s\theta_{zj}s\phi_{zk} + c\theta_{zj}c\psi_{xj}c\phi_{zk} & -c\theta_{zj}s\psi_{xj} & L_i \\ s\psi_{xj}s\phi_{zk} & s\psi_{xj}c\phi_{zk} & c\psi_{xj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

由此,从图 6.38 和图 6.39 可以导出

$$P^i = S_{i1}(\theta_{zj}, \psi_{xj}, \phi_{zk})P^1 \quad (6.71)$$

式(6.70)中 3×3 旋转矩阵就是欧拉旋转变换。

以上描述球面联接的三个基本矩阵仅仅包含可用的许多组合中的一个。例如,如果将图 6.38 中坐标轴重新命名,但其相对方位保持不变,那么式(6.69)所表示的顺序转动将会是绕不同轴线的转动。这将引起算子 S_{i1} 显得不一样了;然而,这个算子定义的仍然是同一个总的相对平移和转动。

利用在轴测图(图 6.39)中所示的等效回转联接以及将原先连在构件 i 上的 xyz 坐标系依次平移和转动后的按比例画成的正交投影图,可以容易地想象出欧拉角。下面,我们详细地来看一看这些正交投影的构成。

首先看图 6.39 并注意第一个正交投影为视图 A-A,它是正对着 x_i 轴的正方向看去。这样在图 6.40 中,视图 A-A 将 x_i 轴表示为一个圈起来的小点, y_i 和 z_i 轴表示出实际长度,也表示构件 i 的实际长度为向量 L_i 。

现在回到图 6.39, 我们看到视图 B-B 是面对 z_i 轴的正方向看的。因此,在图 6.40 中,视图 B-B 将 z_i 轴表示为一个圈起来的小点,而 x_i 和 y_i 为实际长度。这个视图也表现了 xyz 坐标系的原点从 O_i 平移 $L_i = (0, 50.8, 0)$ mm 到 O_j 以及 $\theta_{zj} = 30^\circ$ 的转动(两者都是实际形状)。这两个运动使坐标系运动到 $O_j x_j y_j z_j$ 的位置上,其 z_j 在图中看上去是一个圈起来的小点,而 x_j 和 y_j 都以实际长度显示出来。

再回到轴测图 6.39, 我们看到视图 C-C 是从 x_j 轴正方向看去的。结果在图 6.40 的正交视图 C-C 上, x_j 看上去是一个圈起来的小点, y_j 和 z_j 都显示了实际长度,转角 $\psi_{xj} = 30^\circ$ 也是实际形状。这一步使坐标系运动到 $x_k y_k z_k$ (这里 $x_k \equiv x_j$), 而 O_k 仍在 O_j 上。

再一次回到轴测图^①, 我们看到视图 D-D 是对着 z_k 轴的正方向看的。因此,在正交视图 D-D 中, z_k 轴是一个圈起来的小点, x_k 和 y_k 是实际长度。第三个欧拉角 $\phi_{zk} = 30^\circ$ 也是实际形状。经这最后一次转动,坐标系到达位置 $O_i x_i y_i z_i$ 。

观察到现在为止已画出的正交视图, 我们看到, 所有三个欧拉角和所有的坐标轴——原先的、中间的, 和最终的——都是以实际形状显示出来的, 没有任何变形。但是, 要显示 z_i 的实际长度, 我们还需要再画一个正交视图, 这就是图 6.40 中的视图 E-E。

通过图 6.40 中五个正交视图, 我们发展了一种清楚可见的几何方法来处理欧拉角变换的问题。下面让我们用这种新的工具来证实式(6.70)和(6.71)所代表的分析方法。

① 原文为正交投影图,恐有误——译者注。

例 6.11

设图 6.38 中构件 i 和 l 组成的空间双杆组用一个球面联接相连。该联接的数学模型是 $S_{il}(\theta_{zj}, \psi_{xj}, \phi_{zk})$ ，其中 $L_i = 50.8\text{mm}$ ，所有三个欧拉角 θ_{zj} 、 ψ_{xj} 和 ϕ_{zk} 代表球面联接的三个转动自由度的变量。示于图 6.39 中的是运动等效的四杆开链(具有轴线汇交的三个回转联接)，它将三个欧拉旋转分开表示。此外，这些旋转在图 6.40 的正交投影图中是以真实形状出现的。

要证实式(6.71)，我们先把点 P 设在最终的 $X_i Y_i Z_i$ 坐标系内，位于 $P^i = (10, 10, 10)$ (所有直角坐标的单位均为毫米)如视图 D-D 和 E-E 所示。在第 k 个坐标系

$$\begin{aligned} P^k &= T_{ki}^3(0, 0, 0, \phi_{zk}) P^i \\ &= \begin{bmatrix} c\phi_{zk} & -s\phi_{zk} & 0 & 0 \\ s\phi_{zk} & c\phi_{zk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.660 \\ 13.660 \\ 10.000 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中

$$c\phi_{zk} = \cos 30^\circ = 0.866$$

$$s\phi_{zk} = \sin 30^\circ = 0.500$$

P^k 在第 k 个坐标系中的坐标可以根据从视图 D-D 和 C-C 中量出的尺寸来证实。注意， P^k 坐标是从视图 D-D 反投影到视图 C-C 上去的， P_z^k 坐标等于 $P_z^i = 10\text{mm}$ ，它在视图 C-C 中画得平行于 z_k 轴。

下面，我们计算

$$\begin{aligned} P^j &= T_{jk}^1(0, 0, 0, \psi_{xj}) P^k \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi_{xj} & -s\psi_{xj} & 0 \\ 0 & s\psi_{xj} & c\psi_{xj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.660 \\ 13.660 \\ 10.000 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.660 \\ 6.830 \\ 15.490 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中我们用了 $c\psi_{xj} = 0.866$ ， $s\psi_{xj} = 0.500$ 。 P^j 的坐标可以用测量视图 C-C 和 B-B 的办法来验证。 P_x^j 坐标是从视图 C-C 向上投影到视图 B-B 上去的，而在视图 B-B 上坐标 P_x^j 被测得，并等于 $P_x^k = 3.660\text{mm}$ 。

最后，我们将 P^j 变换到 P^i ：

$$\begin{aligned} P^i &= T_{ij}^3(0, L_i, 0, \theta_{zj}) P^j \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_{zj} & -s\theta_{zj} & 0 & 0 \\ s\theta_{zj} & c\theta_{zj} & 0 & L_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.660 \\ 6.830 \\ 15.490 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.245 \\ 56.715 \\ 15.490 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中 $L_i = 50.8$, $\theta_{z_i} = 30^\circ$ 。 P^i 的坐标在视图 A-A 和 B-B 中都显示出真实长度。 P_j^i 是从视图 B-B 向下投影到视图 A-A 上, P_j^i 在视图 A-A 上测得, 等于 $P_j^i \textcircled{1} = 15.490$ 。

现在, 为了证实式 (6.70) 中的整个变换算子 (在式 (6.70) 中我们将刚刚分析过的三个分开的变换进行了并置运算), 将其代入式 (6.71) 验证如下:

$$P^i = \begin{bmatrix} 0.866 \times 0.866 - 0.5 \times 0.866 \times 0.5 & -0.866 \times 0.5 - 0.5 \times 0.866 \times 0.866 & 0.5 \times 0.5 & 0 \\ 0.5 \times 0.866 + 0.5 \times 0.5 \times 0.866 & -0.5 \times 0.5 + 0.866^2 & -0.866 \times 0.5 & 50.8 \\ 0.5 \times 0.5 & 0.5 \times 0.866 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} P_x^i \\ P_y^i \\ P_z^i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.533 & -0.808 & 0.25 & 0 \\ 0.650 & 0.399 & -0.433 & 50.8 \\ 0.250 & 0.433 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.250 \\ 56.960 \\ 15.490 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这就验证了我们前面得出的结果 (两者之间的误差在取舍误差之内)。

在螺旋联接的例子 (图 6.37) 中, 显示了基本矩阵是如何来描述一个构件的形状的, 定义在坐标系 i 中的位移 A_i 和 B_i 表明 z_i 轴相对于 z_k 轴的位置。此外, 位移 C_i 表明了螺旋联接中有关“螺母”形状的某些特点。下一个例子会更清楚地表明基本矩阵在描述构件形状时的用处。

一个复杂形状的构件示于图 6.41。它用尽可能详细的工程制图方式表达了出来, 但是, 图上只表示了那些定义形状与运动有关的部分所需要的尺寸。该构件是一个标号为 m 的二副构件, 它与处在构件 m 和 n 之间的回转联接一起将在后面加以定义。需要三个矩阵来规定带有回转联接 mn 的构件 m :

$$S_{ii}(\gamma_{zk}) = T_{ij}^2(0, 0, 0, \alpha_{y_i}) T_{jk}^1(0, A_j, B_j, \beta_{x_k}) T_{ki}^3(0, 0, 0, \gamma_{zk}) \quad (6.72)$$

将这些矩阵连乘 (参看练习 6.6), 式 (6.72) 变成:

$$S_{ii}(\gamma_{zk}) = \begin{bmatrix} c\alpha_{y_i}c\gamma_{zk} + s\alpha_{y_i}s\beta_{x_k}s\gamma_{zk} & -c\alpha_{y_i}s\gamma_{zk} + s\alpha_{y_i}s\beta_{x_k}c\gamma_{zk} & s\alpha_{y_i}c\beta_{x_k} & +Bs\alpha_{y_i} \\ c\beta_{x_k}s\gamma_{zk} & c\beta_{x_k}c\gamma_{zk} & -s\beta_{x_k} & A \\ -s\alpha_{y_i}c\gamma_{zk} + c\alpha_{y_i}s\beta_{x_k}s\gamma_{zk} & s\alpha_{y_i}s\gamma_{zk} + c\alpha_{y_i}s\beta_{x_k}c\gamma_{zk} & c\alpha_{y_i}c\beta_{x_k} & +Bc\alpha_{y_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

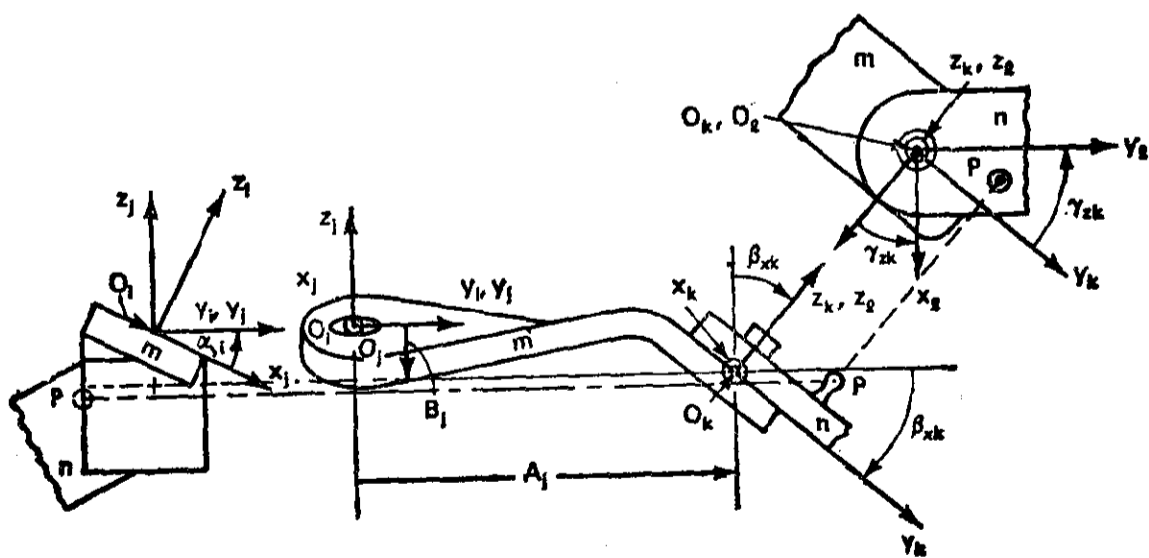


图 6.41 具有回转联接的复杂形状构件

① 原文为 P_j^i , 似有误——译者注。

前两个矩阵定义了构件 m 的扭曲、弯曲、长度和偏置尺寸；而第三个矩阵包含着回转联接的自由度 γ_{zk} 。式 (6.73) 所示矩阵的旋转部分的复杂性显示了利用基本矩阵的好处。用这些矩阵，固定在构件 n 上的点 P (在 P^i 处) 相对于构件 m 的位置可以用向量 $P^i = S_{ii}(\gamma_{zk})P^i$ 来确定 (见图 6.41 和练习 6.7)

建立空间机构的模型

在第二章和第三章中，我们应用了分析方法来建立平面机构的模型。这些方法的要点是对机构规定出封闭的向量环。这些封闭环路的复数向量方程表明围绕着环的向量之和为零。对于平面机构，这是足够的，因为所有转动都出现在平行平面内。然而要对空间机构建模时，需要附加的限制，因为旋转可能是绕不同方向的旋转轴进行或在不同方向的平面内进行。因此，在对空间机构建模时，我们需要一种能够反映绕任何一根轴旋转和沿三个互相垂直方向中的任何一个方向平移的方法。

4×4 变换矩阵很适合于用来规定这样的限制。象我们以前看到的那样 [式 (6.31)]， 4×4 矩阵可以想象成是四部分组成的。这里我们考虑其中的两部分。 3×3 的旋转矩阵 $[R]$ 规定着在一个构件的第二个联接处的第二个坐标系相对于在该构件的第一个联接处的坐标系的方位，而平移向量 $[D]$ 规定着这些坐标系原点的相对位置 (定义在第一个坐标系中)。如果一个描述某机构的运动环路是封闭的，那么该环路末尾处的坐标系一定要平行于环路起始处的坐标系，而且这两个坐标系要座落在同一点上。这就是说，围绕着环路的所有旋转矩阵的并置乘积必须等于一个 3×3 单位矩阵，而且围绕环路的平移向量之和必须为零。因此，组合起来的结果是 4×4 的单位矩阵。

在研究典型的空间机构之前，先对示于图 6.42 的平面机构进行建模以说明其中应用的方法。同时，也容易与以前得到的结果比较。

当用基本矩阵来对一个机构建模时，要先在每一构件上建立局部坐标系。在图 6.42 中，已经这样做了。 $x_0y_0z_0$ 是构件 1 (固定构件) 的坐标系。因此，这是一个参考坐标系。构件 2、3 和 4 分别有坐标系 $x_1y_1z_1$ 、 $x_2y_2z_2$ 和 $x_3y_3z_3$ 与其相连。为方便描述从一个联接到另一个联接的平移， x 轴都选在沿每个构件的长度方向。图 6.33c 中的第三种矩阵可以用来对这个机构的每一构件-联接的组合进行建模。因此，相对于 $x_0y_0z_0$ 坐标系， $x_1y_1z_1$ 坐标系可由下式规定：

$$S_{01}(\theta_1) = T_{01}^3(0, 0, 0, \theta_1) \quad (6.74)$$

式中 θ_1 定义在坐标系 $x_0y_0z_0$ 内。此外， $x_2y_2z_2$ 坐标系相对于 $x_1y_1z_1$ 坐标系，确定如下：

$$S_{12}(\theta_2) = T_{12}^3(L_2, 0, 0, \theta_2) \quad (6.75)$$

式中 L_2 和 θ_2 定义在 $x_1y_1z_1$ 坐标系内；同样，

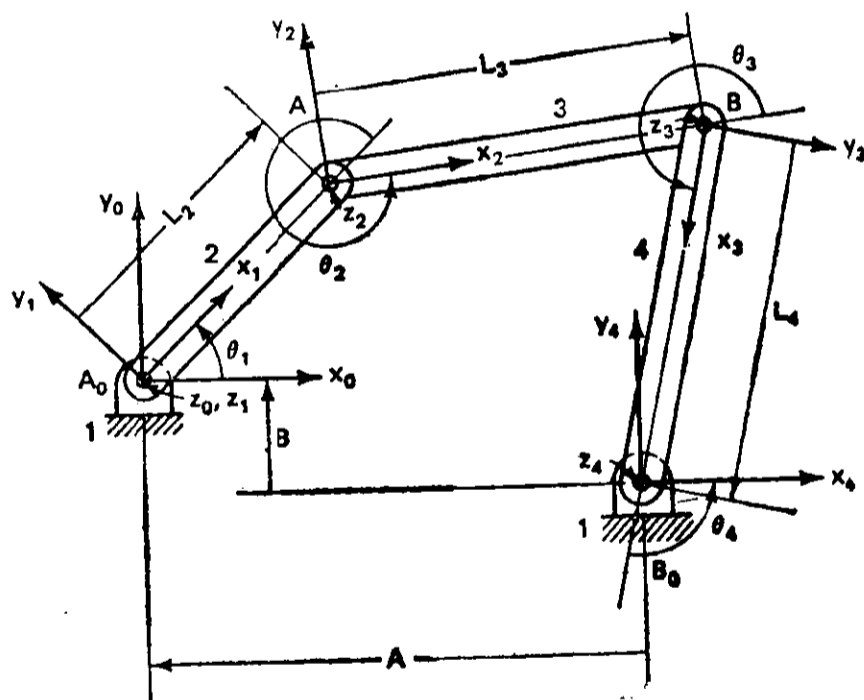


图 6.42 空间机构的一个特例——平面四杆机构

$$S_{23}(\theta_3) = T_{23}^3(L_3, 0, 0, \theta_3) \quad (6.76)$$

式中 L_3 和 θ_3 定义在 $x_2y_2z_2$ 坐标系内;

$$S_{34}(\theta_4) = T_{34}^3(L_4, 0, 0, \theta_4) \quad (6.77)$$

式中 L_4 和 θ_4 定义在 $x_3y_3z_3$ 坐标系内。

怎样把这些独立的构件-联接表达式组合在一起来规定一个机构呢? 首先, 看一看 $x_2y_2z_2$ 坐标系。它是如何与 $x_0y_0z_0$ 相关呢? 我们知道相对关系式 S_{01}, S_{12} , 将它们连乘在一起(参看练习 6.8), 得到:

$$S_{02} = S_{01}S_{12} = \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2) & -s(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_2c\theta_1 \\ s(\theta_1 + \theta_2) & c(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_2s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

注意, 该矩阵乘积中的平移向量可定出 $x_2y_2z_2$ 的联接中心, 而相对旋转角的和 $(\theta_1 + \theta_2)$ 则规定了 $x_2y_2z_2$ 坐标系的方位。如果把各个联接的变换矩阵继续相乘起来, 我们就可以得到 $x_4y_4z_4$ 的位置和方位。(参看练习 6.9)

$$S_{04} = S_{01}S_{12}S_{23}S_{34} = \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & -s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & 0 & [L_2c\theta_1 + L_3c(\theta_1 + \theta_2) + L_4c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \\ s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & 0 & [L_2s\theta_1 + L_3s(\theta_1 + \theta_2) + L_4s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

可是, 这并没有将该机构的环路封闭起来。为了从 $x_4y_4z_4$ 到达 $x_0y_0z_0$, 需要一个附加的变换矩阵。这是一个常量平移矩阵

$$S_{40} = T_{40}^4(A, B, 0) \quad (6.80)$$

式中 A, B 是定义在 $x_4y_4z_4$ 坐标系中, 如图 6.42 所示。这样, 我们就返回到 $x_0y_0z_0$ 坐标系。由于一步一步地绕环路一圈后规定的坐标系一定与开始时的坐标系在位置和方位上一样, 则变换矩阵的积一定是一个单位矩阵(参看练习 6.10):

$$S_{01}S_{12}S_{23}S_{34}S_{40} = I \quad (6.81)$$

或者

$$\begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & -s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & 0 & L_2c\theta_1 + L_3c(\theta_1 + \theta_2) \\ s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & 0 & L_2s\theta_1 + L_3s(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ +L_4c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - Ac(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - Bs(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ +L_4s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + Bc(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - As(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

从图 6.42 可以看到的第一个结果是, 相对旋转角的总和 $(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$ 是 0° 、 360° , 或 360° 的整数倍。因此, 该总和的正弦为 0, 余弦为 1。其次, 合成平移向量的分量 x_0 和 y_0 必须为 0。后者形成两个方程(参看练习 6.11):

$$\begin{aligned} L_2 c\theta_1 + L_3 c(\theta_1 + \theta_2) + L_4 c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - A &= 0 \\ L_2 s\theta_1 + L_3 s(\theta_1 + \theta_2) + L_4 s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + B &= 0 \end{aligned} \quad (6.83)$$

从矩阵的旋转部分还可以推出其它两个方程:

$$c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 1 \quad \text{和} \quad s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0$$

这四个方程与用复数方法导出的方程是一样的。请读者自己去证实这一点。(注意, 通常说来, 包含在复数旋转算子 $e^{i\theta}$ 中的角度 θ 是相对于固定轴而言的, 而式(6.83)中的角都是每角前后坐标系之间的相对角)。

图 6.43 空间机构——工业机器人(由 GCA/PaR Systems 提供)

下面,我们着重来研究图 6.43 所示的空间机构。

6.13 工业机器人的运动分析^①

图 6.43 展示了有六个自由度、外加一个夹持器的工业机器人。图 6.44 是一幅表明它用在工

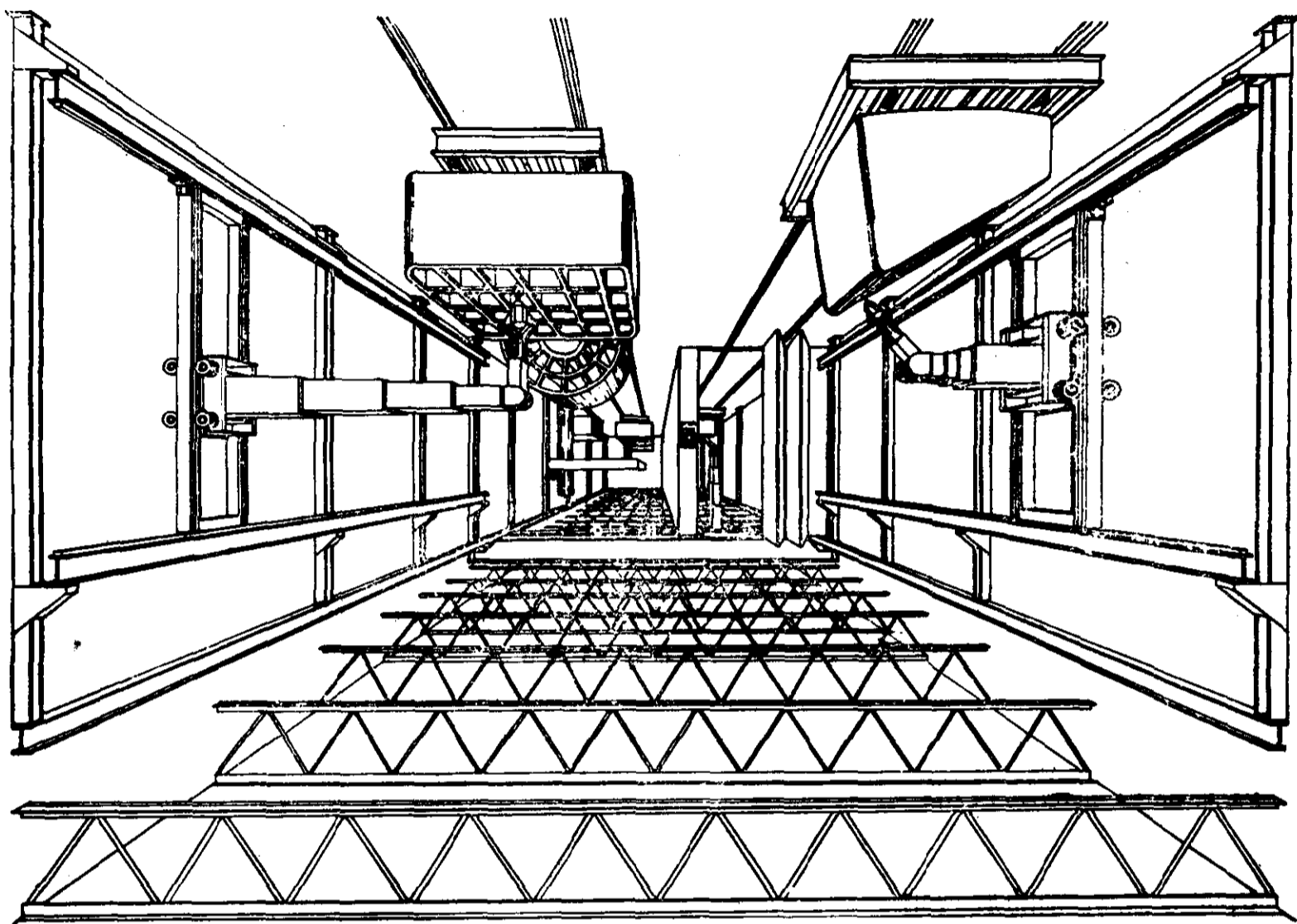


图 6.44 图 6.43 所示工业机器人用在工厂装配工作中的想象图(由 GCA/PaR Systems 提供)

厂装配时的想象图。前三个自由度是平移,接着是三个转动自由度(图 6.45)。在给定手部相对于“初始位置”(在此位置各个变量值为 0)确定的最终位置以后,我们希望能够确定这六个独立的关节运动($a, c, b, \theta_1, \theta_2, \theta_3$)。

在用基本矩阵来为这个机器人建模之前,在每个构件上建立了局部坐标系(如图 6.45)。注意:这个空间机构是开环的。最后一个,即第七个坐标系(表示手开启的坐标系)不必与第一个坐标系相重合。每个坐标系 x_i, y_i, z_i 都是相对于 $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$ 的坐标系由下列矩阵定义的:

$$\begin{aligned}
 S_{01} &= T_{01}^1(a, 0, 0) \\
 S_{12} &= T_{12}^1(0, 0, c) \\
 S_{23} &= T_{23}^1(0, L_1 + b, 0) \\
 S_{34}(\theta_1) &= T_{34}^2(0, 0, 0, \theta_1)
 \end{aligned}
 \tag{6.84}$$

式中 θ_1 是绕 y_3 轴的旋转角,

^① 这一节是在王森洪(译音)(Sern Hong Wang)的帮助下编写的。详细内容请看文献 271。

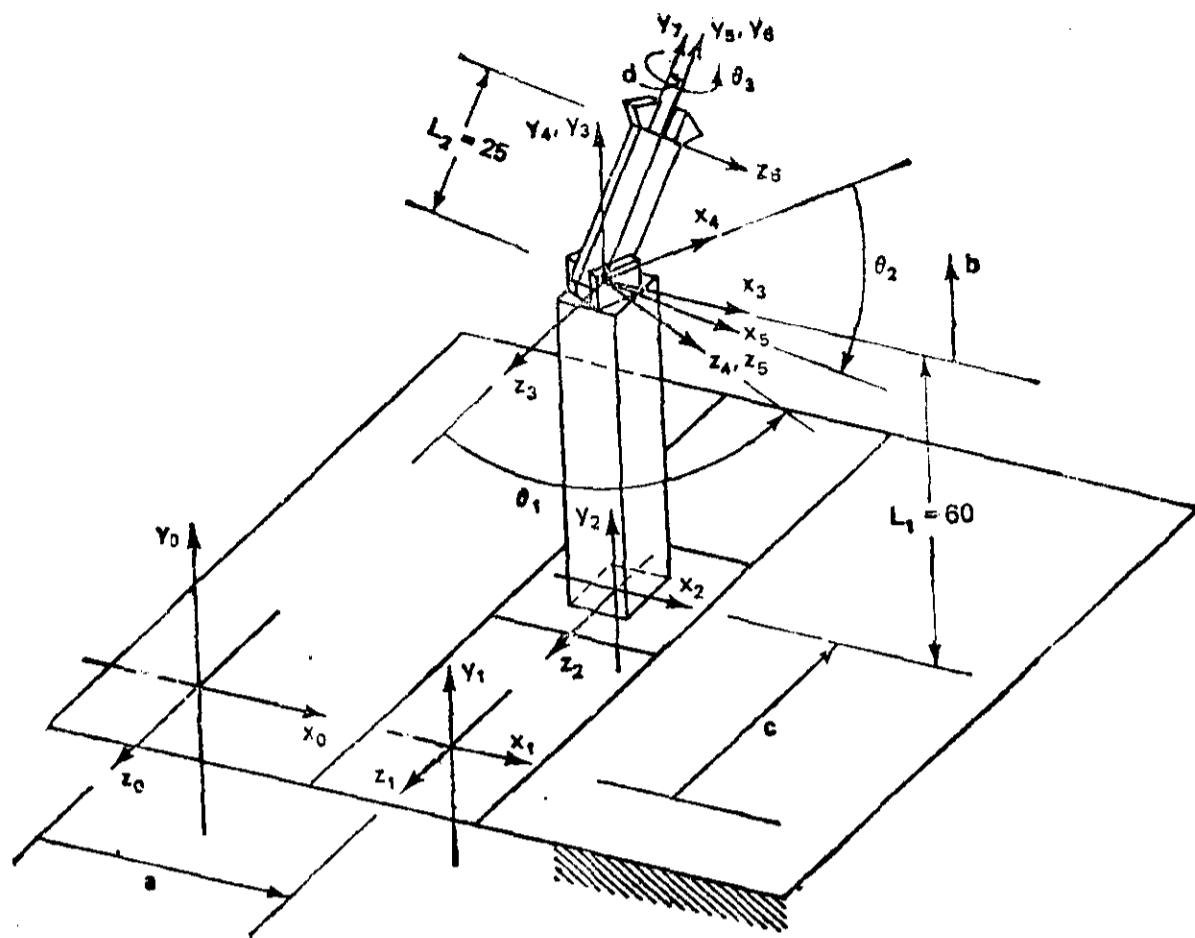


图 6.45 图 6.43 所示机器人中坐标系的定义。注意：相对于 z_1 轴定义的平移 c 是一负值。与此类似，绕 z_4 轴的转角 θ_2 也是一个负值

$$S_{45}(\theta_2) = T_{45}^3(0, 0, 0, \theta_2)$$

式中 θ_2 是绕 z_4 轴的旋转角，

$$S_{56}(\theta_3) = T_{56}^2(0, L_2, 0, \theta_3)$$

式中 θ_3 是手绕 y_5 轴的旋转角

$$S_{67} = T_{67}^1(0, 0, d)$$

式中 L_1 和 L_2 是常数， $a, c, b, d, \theta_1, \theta_2$ 和 θ_3 是变量（ d 代表夹持器的开度）。

要为这个机器人建模，需要将表示在第 i 个坐标系中的 P 点的位置向量 P^i 按下式表示在坐标系 $x_0y_0z_0$ 中：

$$P^0 = S_{0i} P^i \quad (6.85)$$

对于每一个构件 i 来说，并置矩阵 S_{0i} 为：

$$S_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.86)$$

$$S_{02} = S_{01} S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

$$\begin{aligned}
 S_{03} &= \{S_{01}S_{12}\}S_{23} = S_{02}S_{23} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.88}$$

$$\begin{aligned}
 S_{04} &= S_{03}S_{34} \\
 &= S_{03} \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b + L_1 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.89}$$

$$\begin{aligned}
 S_{05} &= S_{04}S_{45} \\
 &= S_{04} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & a \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & b + L_1 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.91} \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 S_{06} &= S_{05}S_{56} = S_{05} \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ -s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3 & -c\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3 & -L_2 c\theta_1 s\theta_2 + a \\ s\theta_2 c\theta_3 & c\theta_2 & s\theta_2 s\theta_3 & L_2 c\theta_2 + b + L_1 \\ -s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3 & s\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3 & L_2 s\theta_1 s\theta_2 + c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

$$S_{07} = S_{06}S_{67}$$

① 式(6.90)略去。

$$= S_{06} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3) & -c\theta_1 s\theta_2 & (c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3) & [-L_2 c\theta_1 s\theta_2 + a \\ & & & + d(c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3)] \\ s\theta_2 c\theta_3 & c\theta_2 & s\theta_2 s\theta_3 & (L_2 c\theta_2 + b + L_1 + d s\theta_2 s\theta_3) \\ (-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 & s\theta_1 s\theta_2 & (-s\theta_1 c\theta_2 & \{(L_2 s\theta_1 s\theta_2 + c) \\ -c\theta_1 s\theta_3) & & s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3) & + d(-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3)\} \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

当七个自由度都赋有具体的值 $a, c, b, d, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ 时，它们可以代入式(6.84)中的 $T_{01}^7, T_{12}^7, T_{23}^7, T_{34}^7, \dots$ 。然后 S_{0i} 的值就可以依次算出来。例如：

$$\begin{bmatrix} S_{05} = S_{01} S_{12} S_{23} S_{34} S_{45} \\ = T_{01}^7 T_{12}^7 T_{23}^7 T_{34}^7 T_{45}^7 \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

我们可以把表示在 $x_5 y_5 z_5$ 坐标系中的点的位置向量 P^5 表示在固定坐标系 $x_0 y_0 z_0$ 中。表示如下：

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = S_{05} \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

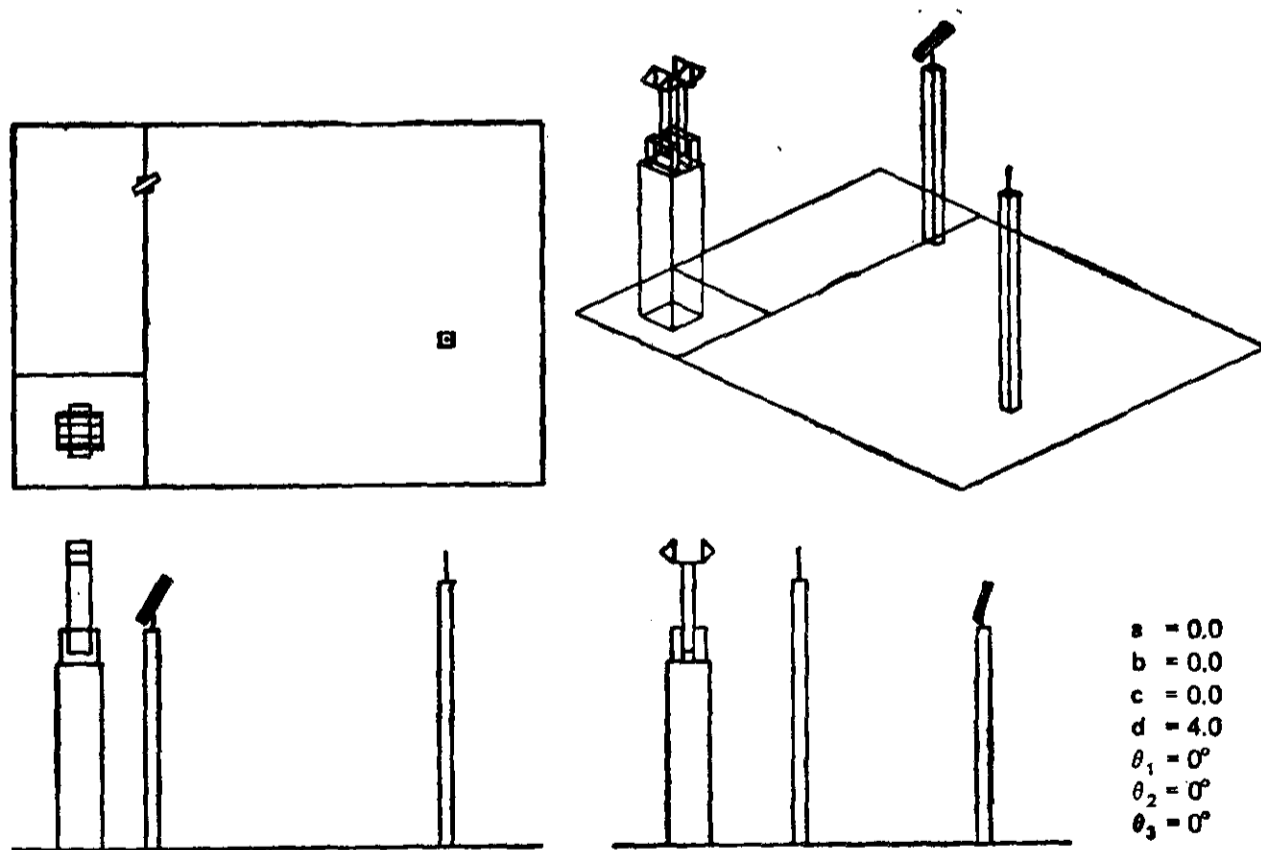


图 6.46 用微机绘出的图 6.43 所示机器人在其初始位置而且手张开四个单位的情况

① 此元素原文为 $\{(L_2 s\theta_1 s\theta_2 + c) + d(-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3)\}$ ，有误。——译者注。

图 6.46^①显示了机器人的初始位置和两个台柱。要把位于第一台柱上三维空间位置上的一个物体取起，再按预定的方位放到第二台柱上。图 6.47^①和图 6.48^①分别示出了机器人接近取起位置和它从所放物体最终位置返回时的情况。

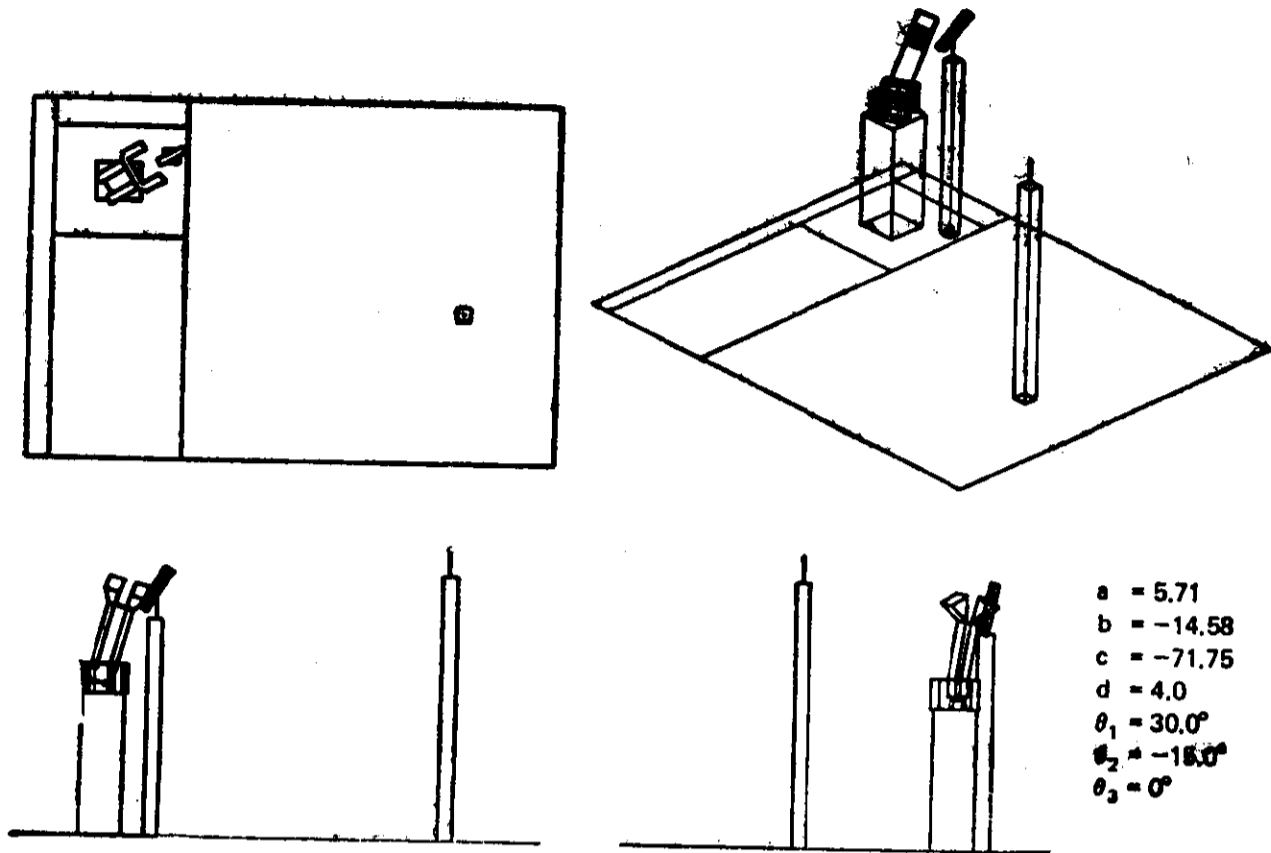


图 6.47 用微机绘出的机器人靠近第一个台柱时的情况

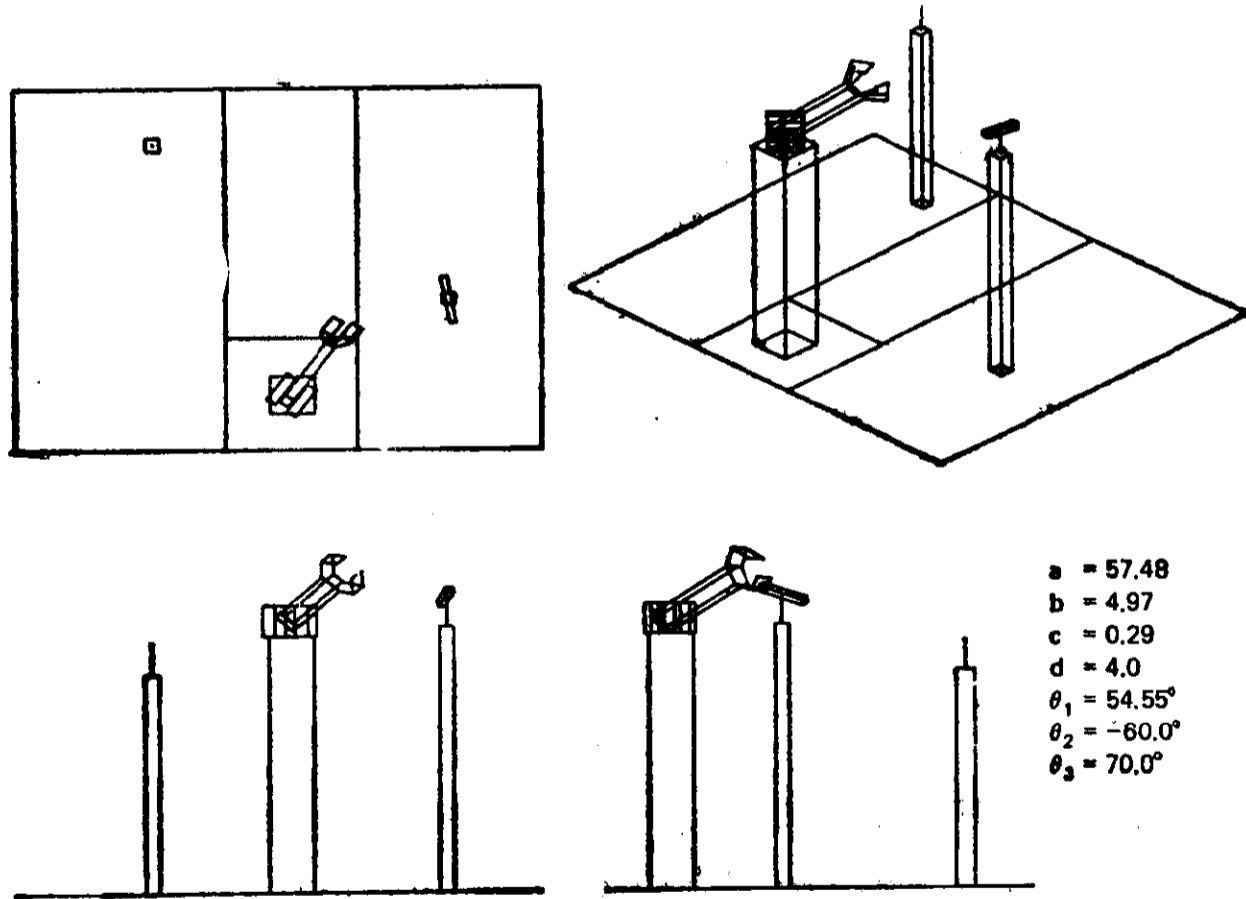


图 6.48 机器人从所放物体位置返回

倒置运动学问题(The Inverse Kinematics Problem)

前节主要论述如何用基本矩阵来分析工业机器人。注意，每一个自由度的相对平移和旋转

① 这些图最初都是由一台 Terak 微机绘制的。

$(a, c, b, d, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 都是相对于依次地平移和旋转过的坐标系而给出的, 并且通过矩阵并置运算, 可以求出相对于初始位置的平移和旋转。在许多情况下, 需要研究倒置的问题。当我们为机器人编程时, 给定机器人离开初始位置平移和旋转后夹持器(终端操作器)所要求的位置, 需要确定, 在各个自由度上的位移。这样的问题, 有时称为“倒置运动学问题。”在许多情况下, 这个任务是要去解很繁杂的方程式, 而且有多个解^[71, 199, 322]。可是对这个例子, 因为只有三个平移, 然后是三个旋转, 所以倒置运动学问题比较容易解决。

在图 6. 45 固定坐标系 $x_0y_0z_0$ 中预先拟定的夹持器位置是由 $x_g, y_g, z_g, \theta_{1g}, \theta_{2g}, \theta_{3g}$ 给出的。由于三个转动自由度与夹持器的转动是一回事, 故我们只要解出三个平移: a, b 和 c 。①

为了使夹持器能够取起物体, 构件 6 的原点需要有与该物体相同的坐标(在固定坐标系内)和相同的方位。坐标系 b 的原点坐标需要表示在固定坐标系中:

$$\begin{bmatrix} x_{06} \\ y_{06} \\ z_{06} \\ 1 \end{bmatrix} = S_{06} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

式中 S_{06} 由式(6.92)来确定。因此,

$$\begin{bmatrix} x_{06} \\ y_{06} \\ z_{06} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + a \\ L_2 \cos \theta_2 + b + L_1 \\ L_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

所以我们可以根据下式方便地求得 a, b 和 c 。

$$\begin{aligned} a &= x_{06} + L_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ b &= y_{06} - (L_2 \cos \theta_2 + L_1) \\ c &= z_{06} - (L_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (6.98)$$

式中 $x_{06}, y_{06}, z_{06}, \theta_1$ 和 θ_2 已知, 而且

$$x_{06} = x_g \quad (6.99)$$

$$y_{06} = y_g \quad (6.100)$$

$$z_{06} = z_g \quad (6.101)$$

$$\theta_1 = \theta_{1g} \quad (6.102)$$

$$\theta_2 = \theta_{2g} \quad (6.103)$$

对于取起物体的位置(图 6. 47 显示了机器人接近这个位置的情况),

$$\begin{aligned} x_g &= 20, y_g = 80, z_g = -80, \theta_{1g} = 30^\circ, \\ \theta_{2g} &= -30^\circ, \theta_{3g} = 40^\circ \end{aligned}$$

a, b, c 可以由下式计算得到

① 已经有人证明了(例如达菲(Duffy)[71]), 空间机构的旋转, 可以象一个等效球面机构的旋转那样来处理, 而与平移无关。其方法为: 把所有不相交的轴线平行于它们自身进行平移, 使它们相交于一点, 然后用球面三角的方法来分析所形成的球面机构的旋转。在这一节中, 平移的确定就是利用了平移与旋转的这种解耦。

$$a = 20 + 25 \times \cos 30^\circ \sin(-30^\circ) = 9.17$$

$$b = 80 - 25 \times \cos(-30^\circ) - 60 = -1.65$$

$$c = -80 - 25 \times \sin 30^\circ \sin(-30^\circ) = -73.75$$

对于物体放在第二个台柱上的位置

$$x_g = 100, \quad y_g = 95, \quad z_g = -30$$

$$\theta_{1g} = 100^\circ, \quad \theta_{2g} = -110^\circ, \quad \theta_{3g} = 70^\circ$$

$$a = 104.08$$

$$b = 43.55$$

$$c = -6.86$$

空间滑块-曲柄机构的例子

图 6.42 平面机构的例子给我们示范了用图 6.33 中的基本矩阵来对闭环机构建模的基本原理。下面考虑示于图 6.49 中的空间滑块-曲柄机构。这一机构由一个回转联接、一个滑动联接和两个球面联接组成。要描述这一机构，要有一系列描述相邻构件之间相对运动的矩阵。然后，将这些构件-联接的表达式都并置运算在一个闭环之中，使所设第一个和最后一个坐标系互相平行，并且它们的原点位于同一点上；换句话说，他们互相重合。

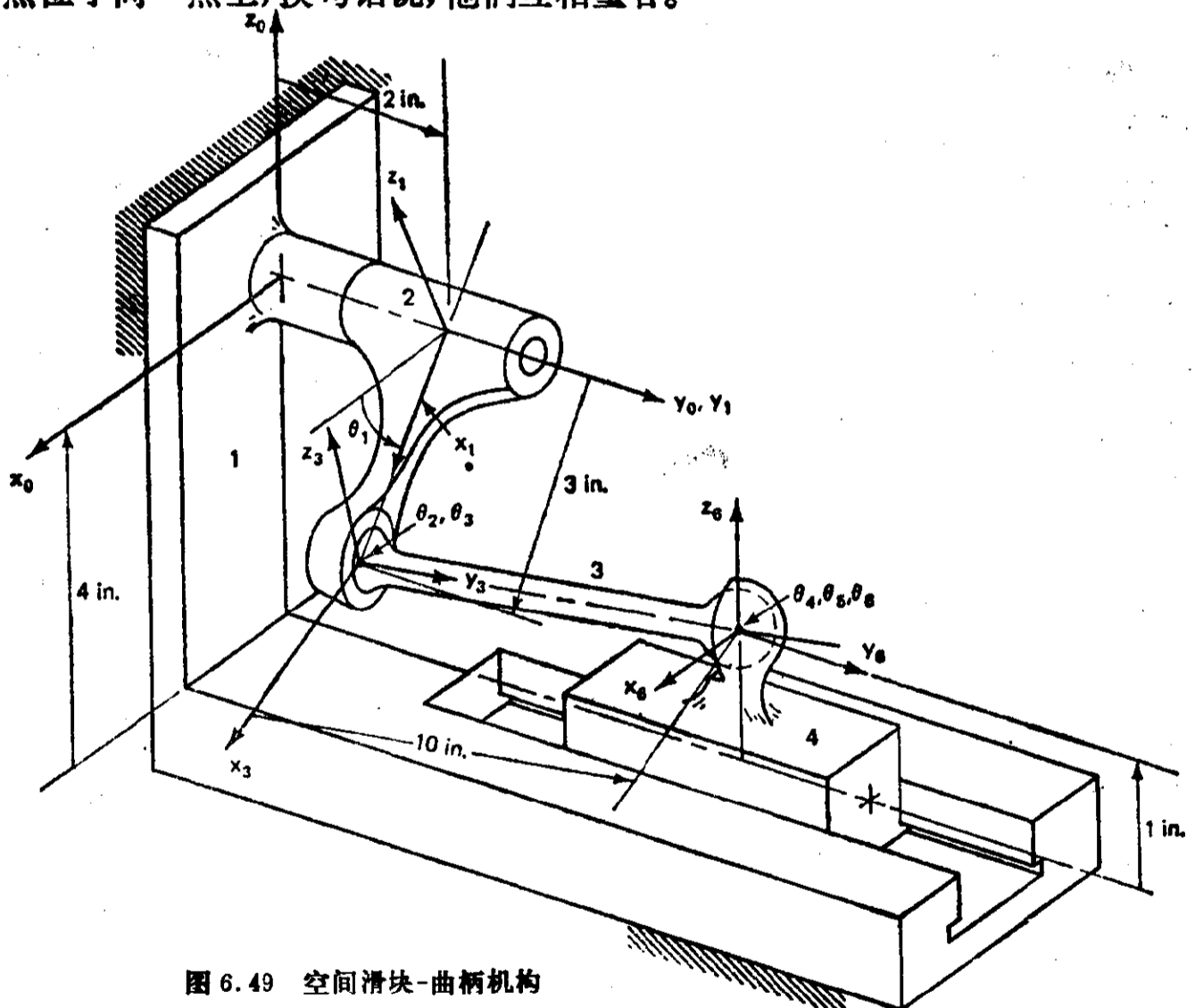


图 6.49 空间滑块-曲柄机构

首先，我们要为每一构件建立一个局部坐标系。使坐标系安排得与机构中联接的几何特性、物理约束相一致，会有很多好处，图 6.49 就是这样做的。为了简洁起见，用来表示球面联接运动的坐标系没有都画出来，只有那些固定在构件上的才展现在图中。

构件 1 和 2 之间的回转联接是相对于 $x_0y_0z_0$ 坐标系由下面的变换来定义的：

$$S_{01} = T_{01}^2(0, L_1, 0, \theta_1) \quad (6.104)$$

S_{01} 代表先在 y_0 方向上平移 L_1 , 再绕 y_0 轴转动的变换。所以需要第二种基本矩阵。

规定构件 2 和 3 之间球面联接的位置从 (定义在 $x_1y_1z_1$ 坐标系内的) 平移 $L_2 = (L_2, 0, 0)$ 开始。这一平移把坐标系 $x_1y_1z_1$ 平行地移动到联接 (2, 3) 的中心, 成为 $x'_1y'_1z'_1$ (图上没有画出)。再将这个坐标系绕它的 z'_1 轴旋转第一个欧拉角 θ_2 到 $x_2y_2z_2$ (没画出)。然后将 $x_2y_2z_2$ 绕其 x_2 轴旋转第二个欧拉角 θ_3 到 $x_3y_3z_3$ (也没画出); 最后绕 z_3 轴旋转第三个欧拉角 θ_4 成为 $x_4y_4z_4$, 如图所示。坐标系的这一系列位移可用下式模拟:

$$S_{14} = T_{12}^3(L_2, 0, 0, \theta_2) T_{23}^1(0, 0, 0, \theta_3) T_{34}^3(0, 0, 0, \theta_4) \quad (6.105)$$

类似地, 构件 3 和 4 之间的球面联接可由绕 z'_4 的欧拉角 θ_5 , 绕 x_5 的 θ_6 和绕 z_6 的 θ_7 来规定:

$$S_{47} = T_{45}^3(0, L_3, 0, \theta_5) T_{56}^1(0, 0, 0, \theta_6) T_{67}^3(0, 0, 0, \theta_7) \quad (6.106)$$

这里最初的平移 L_3 是在 y_4 的方向上。同时, 中间坐标系 $x'_4y'_4z'_4$, $x_5y_5z_5$ 和 $x_6y_6z_6$ 都没有画出, 但是定义它们的方法与在构件 2, 3 处联接的中间坐标系一样。

根据在这个机构中滑块的方位, 坐标系 $x_7y_7z_7$ 定义为平行于 $x_0y_0z_0$, 所以最后一个在构件 4 和 1 之间的联接是纯平移的形式:

$$S_{70} = T_{70}^7(0, L_5, [L_6 - L_4]) \quad (6.107) \textcircled{1}$$

在 $y_7(y_0)$ 方向上的位移, 就是滑块的位移。因此, 标作 L_5 的距离 (在 y_7 的负方向) 将随机构假定的不同位形而改变其数值。

这些构件-联接变换所定义的环路, 可用下式来表示其闭合关系:

$$S_{00} = S_{01} S_{12} S_{23} S_{34} S_{45} S_{56} S_{67} S_{70} = I \quad (6.108) \textcircled{2}$$

这个方程表明, 当环路被围绕, 以及每一构件的尺寸和每个联接的转动和平移被考虑到以后, 最后一个坐标系要与最初的坐标系重合。也就是说, 所有的矩阵之积为单位矩阵。这个方程称为环路封闭方程。这是一个非线性的矩阵方程, 在进行机构的位置分析时, 一定要求解这个方程。对于一般的机构说来, 确定机构位形的因变量都表示成机构结构参数和输入变量的非线性函数。因而, 对一般情况而言, 这个方程是难于求解的。

一般的位置分析方法将在本章的后面部分作概要介绍。它是建立在通常用来解非线性方程的牛顿-拉普逊 (Newton-Raphson) 迭代法的基础之上的。为此, 需要用到非线性方程的雅可比矩阵 (Jacobian matrix)。这是一种由环路封闭方程对机构因变量的一阶偏导数组成的矩阵。下一节, 我们要介绍这些偏导数是怎样表示成矩阵的乘积的。

在讨论如何对环路封闭方程取偏导数之前, 对式 (6.108) $\textcircled{3}$ 应进一步说明一下。它在这里是用来描述机构的, 我们将看到, 它可以被求解, 从而作出机构的位置分析。这个方程对于时间取一次导数就得到速度封闭方程。此方程可用来进行机构的速度分析。求对时间的导数时要用到链式法则, 同时还要取偏导数, 与位置分析时所取的偏导数相似。再进一步, 将速度封闭方程

① 原文为 (6.87), 有误。——译者注。

② 原文为 (6.88), 有误。——译者注。

③ 原文为 (6.88), 有误。——译者注。

对时间取导数,可得到加速度封闭方程。此方程是加速度分析的基础。同样,取偏导数要用到链式法则并得到类似的偏导数,如上面讨论的那样。因此,下一节,关于矩阵取导数的内容,就成为对一般空间机构进行整个运动分析的基础。

基本矩阵的偏导数

这一节中,我们要介绍对图 6.33 中的基本矩阵相对于所含的变量取偏导数。如果一个矩阵不是表示一个恒定的转角(象我们以前讨论过的复杂形状构件例子那样),那么在旋转矩阵和螺旋矩阵中的变量就是其中的转动角度。与此相似,在纯平移的矩阵中,沿任一轴的平移可为变量。把取偏导数的运算表示成矩阵的乘积,这将使数学表达上很方便。下面,让我们来看一看,这一步是如何实现的。

一般的基本矩阵 S_{ij} 的偏导数可定义如下:

$$\frac{\partial S_{ij}(q_m)}{\partial q_m} = S_{ij}(q_m) Q_1 \quad (6.109)$$

式中 q_m 代表矩阵中所含的变量,而矩阵 Q_1 是一个与基本矩阵 S_{ij} 的类型有关的导数算子。要推导这个导数算子,我们把矩阵中的每一元素都用它对我们感兴趣的变量的偏导数代替来形成该矩阵的偏导数。对于第一类矩阵[式(6.53)], θ 是我们感兴趣的变量,由这一方法得到

$$\frac{\partial T_{ij}^1(a, b, c, \theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta & -c\theta & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.110)$$

这是因为 a, b 和 c 是描述刚性构件尺寸的常数。然而,即使它们是变量,它们对 θ 的偏导数也为 0。标记第一种基本矩阵的未知导数算子为 (θ_1) ,那么式(6.110)变成

$$\frac{\partial T_{ij}^1}{\partial \theta} = T_{ij}^1 Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta & -c\theta & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

或者

$$\frac{\partial T_{ij}^1}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & c\theta & -s\theta & b \\ 0 & s\theta & c\theta & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta & -c\theta & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.112)$$

可以用好几种方法来求得 Q_1 ,最简便的大概是利用观察。我们看到,最后的矩阵中第一和四列是零向量。这可以由设定 Q_1 的第一和第四列为零来得到。但这不影响第二和三列。最后一个矩阵的第二列等于原基本矩阵的第三列。因此,如果 Q_1 的第二列中第三个元素是 1,而其它各元素为零,那么将正好得出所需结果。最后一个矩阵的第三列等于 -1 乘以原矩阵的第二列,这就得出, Q_1 的第三列中,除第二个元素是 -1 外,其它各元素均为零。将这些合在一起,有:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.113)$$

第二种和第三种基本矩阵的导数算子,可以用相同的办法得到如下(参看练习 6.12):

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.114)$$

基本螺旋矩阵(第四、五和六种形式)的导数算子矩阵将有些不同,因为矩阵的变量 θ 既出现在平移向量之中,又出现在矩阵的旋转部分之中。下面研究一下第四种矩阵,将它的每一元素对 θ 取导数得:

$$\frac{\partial T_4(a, b, c, \theta, k)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2\pi} \\ 0 & -s\theta & -c\theta & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

表示成矩阵的乘积,它变为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a + \frac{k\theta}{2\pi} \\ 0 & c\theta & -s\theta & b \\ 0 & s\theta & c\theta & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2\pi} \\ 0 & -s\theta & -c\theta & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.116)$$

Q_4 的前三列的求法与求 Q_1 的前三列一样。进一步观察以后,第四列可以得出如下:

$$O_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2\pi} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.117)$$

$k/2\pi$ 项放在第四列中与螺旋平移方向相对应的一行。第五种和第六种基本螺旋矩阵的导数算子矩阵可证明为(参看练习 6.13):

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2\pi} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.118)$$

纯平移矩阵需有三个导数算子,因为这一矩阵能用来描述沿任何一个方向的平移变动。如

果变化的平移发生在 x 方向, 对纯平移矩阵相对于 x 方向的平移取偏导数, 得到

$$\frac{\partial T_{ij}^{-1}(a, b, c)}{\partial a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

这一情况下的导数算子可从下列方程求得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.120)$$

通过观察,

$$Q_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.121)$$

如果变化的平移在 y 方向 (Q_8) 或在 z 方向 (Q_9), 则这两个导数算子矩阵为

$$Q_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.122)$$

既然对基本矩阵取偏导数已定义成矩阵的乘积, 那么我们就易于来对环路封闭方程取导数了。

环路封闭方程的求导

一个一般的环路封闭方程写作

$$S_{00} = S_{01} S_{12} \cdots S_{(k-1)k}(q_m) S_{k(k+1)} \cdots S_{(n-1)n} S_{n0} \quad (6.123)$$

在环路封闭方程所描述的机构中, 任何一个变量仅仅包含在组成上面乘积的一个矩阵之中。在示例中, 标记为 q_m 的变量仅包含在矩阵 $S_{(k-1)k}$ 中。将式(6.123)对 q_m 求导:

$$\frac{\partial S_{00}}{\partial q_m} = S_{01} S_{12} \cdots \frac{\partial S_{(k-1)k}(q_m)}{\partial q_m} S_{k(k+1)} \cdots S_{(n-1)n} S_{n0} \quad (6.124)$$

将等效的矩阵乘积代替导数式(6.124), 得到:

$$\frac{\partial S_{00}}{\partial q_m} = S_{01} S_{12} \cdots S_{(k-1)k}(q_m) Q_i S_{k(k+1)} \cdots S_{(n-1)n} S_{n0} \quad (6.125)$$

其中 Q_i 为对应于 $S_{(k-1)k}$ 矩阵的适当类型的导数算子矩阵。这样做, 就把对式(6.123)右边取导数的过程转变为很方便的矩阵乘积。然而, 我们可以对式(6.123)的左边进行运算, 得到相同的导数。下面就是说明。

让我们在式(6.125)中导数算子后面插入一个特别组成的单位矩阵。这一步相当于在几个

标量相乘时,插入一个 1 与它们相乘。这个将插入的单位矩阵可定义如下:

$$I = (S_{01}S_{12}\cdots S_{(k-1)k})^{-1}(S_{01}S_{12}\cdots S_{(k-1)k}) \quad (6.126)$$

这是单位矩阵的通常定义,即等于一个矩阵乘以它的逆阵。这样,式(6.125)变成:

$$\frac{\partial S_{00}}{\partial q_m} = S_{01}S_{12}\cdots S_{(k-1)k}(q_m)Q_i(S_{01}S_{12}\cdots S_{(k-1)k})^{-1} \\ (S_{01}S_{12}\cdots S_{(k-1)k})S_{k(k+1)}\cdots S_{(n-1)n}S_{n0} \quad (6.127)$$

注意到上式的末尾的矩阵乘积就是 S_{00} 它本身。因此,

$$\frac{\partial S_{00}}{\partial q_m} = D_m S_{00} \quad (6.128)$$

式中
$$D_m = (S_{01}S_{12}\cdots S_{(k-1)k})Q_i(S_{01}S_{12}\cdots S_{(k-1)k})^{-1} \quad (6.129)$$

D_m 定义为相对于环路中第 m 个变量的导数算子矩阵。但是,在我们认识到表示成式(6.128)的数学上的好处之前,需要完成式(6.129)中的复杂计算。用解析的办法来确定式(6.129)可以避免这一点。为此,我们首先要给所示的逆矩阵一个解析的定义。由 4×4 基本变换矩阵乘积[例如式(6.129)]组成的一个一般 4×4 矩阵,象式(6.30)标记的那样,可用下式表示:

$$S_{0k} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \Delta_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \Delta_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \Delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.130)$$

在这里用的一般 4×4 矩阵具有一种特殊形式,即其中 3×3 转动部分 $[R]$ 是一个正交矩阵。这意味着这一部分的逆矩阵等于它的转置矩阵 ($[R]^{-1} = [R]^T$)。这一点在线性系统的矩阵理论中是熟知的。例如,读者可以从文献[259]中查到。在该文献中证明式(6.130)的逆阵为(参看练习 6.14):

$$S_{0k}^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & [-(\Delta_x r_{11} + \Delta_y r_{21} + \Delta_z r_{31})] \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & [-(\Delta_x r_{12} + \Delta_y r_{22} + \Delta_z r_{32})] \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & [-(\Delta_x r_{13} + \Delta_y r_{23} + \Delta_z r_{33})] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.131)$$

在定义了这个矩阵的基础上,对应于每一种形式的微分算子的导数算子矩阵(D_m)可以表示成解析形式,方法是对以前定义的每一种 Q_i 表示成式(6.129)那样的乘积形式。当这一步完成以后,就可以得到下面的结果。下式各项中的上标对应于其中所用的导数算子的号数。我们可以看到,这些表达式可有效、方便地编成数字计算机的程序。

对应于旋转矩阵 T_{jk}^1 、 T_{jk}^2 和 T_{jk}^3 的导数算子是:

$$D_m^i = S_{0k}Q_iS_{0k}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{3i} & r_{2i} & \Delta_y r_{3i} - \Delta_z r_{2i} \\ r_{3i} & 0 & -r_{1i} & \Delta_z r_{1i} - \Delta_x r_{3i} \\ -r_{2i} & r_{1i} & 0 & \Delta_x r_{2i} - \Delta_y r_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{i=1,2,3} \quad (6.132)$$

对应于螺旋矩阵 T_{jk}^4 、 T_{jk}^5 和 T_{jk}^6 的导数算子是:

$$D_m^i = S_{0k} Q_i S_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{3(i-3)} & r_{2(i-3)} & \frac{k}{2\pi} r_{1(i-3)} + (\Delta_y r_{3(i-3)} - \Delta_z r_{2(i-3)}) \\ r_{3(i-3)} & 0 & -r_{1(i-3)} & \frac{k}{2\pi} r_{2(i-3)} + (\Delta_z r_{1(i-3)} - \Delta_x r_{3(i-3)}) \\ -r_{2(i-3)} & r_{1(i-3)} & 0 & \frac{k}{2\pi} r_{3(i-3)} + (\Delta_x r_{2(i-3)} - \Delta_y r_{1(i-3)}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.133)$$

式中 $i=4, 5, 6$ 。

对应于纯平移矩阵 $T_{j_b}^i$ ，要定义三个导数算子。每一个分别对应于在 x 方向 ($i=7$)、 y 方向 ($i=8$) 和 z 方向 ($i=9$) 上的平移变量。

$$D_m^i = S_{0b} Q_i S_{0b}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & r_{1(i-6)} \\ 0 & 0 & 0 & r_{2(i-6)} \\ 0 & 0 & 0 & r_{3(i-6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i=7, 8, 9) \quad (6.134)$$

总之，我们推导了一种方法来对环路封闭矩阵方程相对于其中的任何一个变量取导数。而且，这又是将该方程左乘上一个导数算子矩阵，如式(6.128)所示来完成的。要形成这个矩阵的乘积，需要按式(6.132)~(6.134)①来计算导数算子矩阵。为此，要求变量的位置必须是已知的，基本矩阵的形式也应是已知的，以便选用式(6.132)-(6.134)①中适当的表达式。到此为止，我们完成了对基本矩阵和对环路封闭方程取导数的讨论。下面，我们要来看一看，这个方法是如何用来对一般空间机构进行位置分析的。

6.14 位置分析

用来描述机构的联接中的相对运动变量(或“联接变量”)可分成两组。第一组由该机构的独立运动变量向量(q_I)组成，这些经常称为机构的自由度或称为机构的输入。第二组联接变量构成因变量向量(q_D)。因变量的数值是输入(独立)变量和机构的几何约束的函数。这些约束数学上是用矩阵环路封闭方程来描述的，这方程是含有联接变量的非线性矩阵方程。因此，求得这些因变量的值的方法，就是为求这些值而解环路封闭方程的方法。我们称这方法为机构的位置分析。这一节里，我们要研究一种用来分析机构的一般方法。环路封闭方程是用标准的数值分析方法来求解的。具体地讲，就是把牛顿-拉普逊(Newton-Raphson)迭代法用到一般空间机构的位置分析中。

前面讲过了，矩阵环路封闭方程可以表示为：

$$S_{00} = S_{01} S_{12} S_{23} \cdots S_{(n-1)n} S_{n0} = I \quad (6.135)$$

只有当因变量具有正确的数值时，这个方程才等于单位矩阵。用上面定义过的变量来表示，用来

① 原文为“式(6.132)”——译者注。

进行位置分析的非线性方程为:

$$S_{00}(\bar{q}_D, \bar{q}_I) - I = 0 \quad (6.136)$$

因此,我们的任务是求出这个矩阵方程的“根”或“零点”。牛顿——拉普逊迭代法^[33,50]可以很好地解决这一类问题。开始时,给因变量估计一个初始值(\hat{q}_D),然后可求出一个小的修正值(Δq_D),使得当它加到估计的初始值上时,得到一个更加接近正确结果的值。这种迭代法推导如下。首先,将式(6.136)在(\hat{q}_D)邻域内作一阶线性展开,这就给出

$$S_{00}(\hat{q}_D, \bar{q}_I) - I + \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{00}(\bar{q}_D, \bar{q}_I)}{\partial q_i} \Delta q_i = 0 \quad (6.137)$$

式中 m 是所有独立变量加上所有因变量的总数。注意,现在所有的变量 q_i 和 Δq_i 都被包括进去了,不论它们是独立变量还是因变量。在后面我们将这些变量分入各自的组内时,读者就会知道我们为什么要这样做。用前几节推导的数学工具,式(6.137)可以表示成更方便的形式。

使用对环路封闭方程求导的导数算子矩阵 D_i [式(6.132)],式(6.137)变成

$$S_{00} + \sum_{i=1}^m (D_i S_{00} \Delta q_i) - I = 0 \quad (6.138)$$

上式各项右乘 S_{00}^{-1} ,得到

$$I + \sum_{i=1}^m (D_i \Delta q_i) - S_{00}^{-1} = 0 \quad (6.139)$$

或者

$$\sum_{i=1}^m D_i \Delta q_i = S_{00}^{-1} - I \quad (6.140)$$

这是一个 4×4 的矩阵方程。根据这方程两边对应元素相等的原则,可以建立 16 个标量方程。但是,这 16 个方程不都是有意义的和独立的。从式(6.132),回想环路中第 l 变量的导数算子矩阵的一般形式为:

$$D_l = \begin{bmatrix} 0 & D(1,2)_l & D(1,3)_l & D(1,4)_l \\ D(2,1)_l & 0 & D(2,3)_l & D(2,4)_l \\ D(3,1)_l & D(3,2)_l & 0 & D(3,4)_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.141)$$

最底层一行和对角线各元素都为零,因此不能用。此外,矩阵的 3×3 旋转部分是反对称的:对角线上方的元素与对角线下方的元素相差一个负号[参看式(6.132)]。因此,旋转部分的六个非零元素中只有三个可以用来组成标量方程。三个平移元素也可以用。所以, D_l ^①中总共有六个元素可用来组成独立方程。它们是: $D(1,3)_l$ 、 $D(2,1)_l$ 、 $D(3,2)_l$ 、 $D(1,4)_l$ 、 $D(2,4)_l$ 和 $D(3,4)_l$ 。

下面,我们来看式(6.140)的右边的项。它可以表示成

① 原文为 D_l ,似有误——译者注。

$$S_{00}^{-1} - I = \begin{bmatrix} \underline{E(1,1)} - 1 & \underline{E(1,2)} & \underline{E(1,3)} & \underline{E(1,4)} \\ \underline{E(2,1)} & \underline{E(2,2)} - 1 & \underline{E(2,3)} & \underline{E(2,4)} \\ \underline{E(3,1)} & \underline{E(3,2)} & \underline{E(3,3)} - 1 & \underline{E(3,4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.142)$$

在符号下面画了线的元素是用来组成六个标量方程以便进行迭代过程的。收敛时，这些元素将等于零。这样，式(6.142)中有六项在求解过程中没有用到。因为 S_{00} (当然 S_{00}^{-1} 也一样) 的旋转矩阵是正交的，当元素 $E(2,1)$ 、 $E(1,3)$ 和 $E(3,2)$ 为零时，以下元素也等于零：

$$E(1,2)、E(3,1) \text{ 和 } E(2,3) \quad (6.143)$$

要得到以上结论，只要取 3×3 旋转矩阵中的两列叉乘之积并使之等于第三列。可是，对于对角线的项没有什么限制。事实上，下列各式是成立的：

$$\begin{aligned} E(1,1)E(2,2) &= E(3,3) \\ E(2,2)E(3,3) &= E(1,1) \\ E(3,3)E(1,1) &= E(2,2) \end{aligned} \quad (6.144)$$

及

$$\begin{aligned} E(1,1)^2 &= 1 \\ E(2,2)^2 &= 1 \\ E(3,3)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (6.145)$$

对于上面的关系式成立来说，任何两个对角线项的数值可以是 -1 ，而不是式(6.142)要求的 $+1$ 。因此，在迭代过程中，这些项都必须给予重视。用由尤克 (Uicker)^[294-296] 建议的形式就可以如式(6.146)所示那样做到这一点。

综上所述，用于迭代过程的标量方程可以用矩阵形式写成：

$$\begin{bmatrix} D(1,3)_1 & D(1,3)_2 & \cdots & D(1,3)_m \\ D(2,1)_1 & D(2,1)_2 & \cdots & D(2,1)_m \\ D(3,2)_1 & D(3,2)_2 & \cdots & D(3,2)_m \\ D(1,4)_1 & D(1,4)_2 & \cdots & D(1,4)_m \\ D(2,4)_1 & D(2,4)_2 & \cdots & D(2,4)_m \\ D(3,4)_1 & D(3,4)_2 & \cdots & D(3,4)_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(1,3) + E(1,1) + E(3,3) - 2 \\ E(2,1) + E(1,1) + E(2,2) - 2 \\ E(3,2) + E(2,2) + E(3,3) - 2 \\ E(1,4) \\ E(2,4) \\ E(3,4) \end{bmatrix} \quad (6.146)$$

或者

$$[S](\Delta q) = (R) \quad (6.147)$$

注意，式(6.142)中的对角线项已被包括在头三个方程之中，每个方程中包括有两项。矩阵 $[S]$ 称为系统几何矩阵。它包含了有关机构的很重要信息。我们在后面的讨论中将可以看到这一点。

到现在为止我们介绍的算法只是对于有一个环路封闭方程描述的机构。对于含有多环更复杂机构，每个闭环都可按上述办法建立一组六个标量方程。因此，这里讨论的方法也适用多环机构。

为了确定非独立变量中的变化，现在我们必须区分独立的和非独立的联接变量。还要说明的一个问题是有多少个联接变量可以是独立的。这等于是问一个机构有多少个自由度。例如，

一个平面四杆机构(一个自由度机构)要求有四个联接变量来描述它。如果一个独立的,那么其余三个就一定是非独立的。

正如在这一章的前面提到的,当机构的几何关系比较特殊时,格鲁布勒(Gruebler)方程可能不会得出正确的结果。式(6.147)中的矩阵 $[S]$ 是依赖于机构的几何性质的,并且包括着有关机构位形和尺寸所需的信息。 $[S]$ 是一个 $6 \times m$ 的矩阵,其中列数 m 是联接变量的数目。非独立变量的数目是由矩阵 $[S]$ 的秩 r 决定的。正是这个量决定了式(6.146)中独立方程的个数。注意,一个单环机构能取的最大 r 值为6。综上所述,一个机构有 $(m-r)$ 个独立的联接变量或 $(m-r)$ 个自由度。

当分析一个机构时,正好 $(m-r)$ 个联接变量必须规定为输入。如果规定的变量数多于 $(m-r)$,那么这个机构就不可能分析,因为约束条件太多了。如果规定的变量数少于 $(m-r)$,则可以对机构进行分析。然而,由于机构的约束条件不够,所得的解不是唯一的。因此,我们把联接变量分成三组。第一组包括 r 个非独立变量 (\bar{q}_D) 。第二组包括规定的独立变量 (\bar{q}_I) 。假设在第二组中的变量数是 s ,那么第三组包括 $(m-r-s)$ 个未规定的独立变量 (\bar{q}_U) 。这第三组中变量的数目,只有在矩阵 $[S]$ 的秩确定之后才可以知道。但是,在确定矩阵 $[S]$ 的秩时,我们肯定知道, $[S]$ 中对应于 (\bar{q}_I) 的列将不会被用上。因此,可以把 $6 \times m$ 的矩阵 $[S]$ 分成两部分,将所有的列重新排列如下:

$$[S_{D,U} | S_I] \begin{bmatrix} \bar{q}_{D,U} \\ \bar{q}_I \end{bmatrix} = (\bar{R}) \quad (6.148)$$

矩阵 $[S_{D,U}]$ 的秩将在后面确定。我们还可以进一步地将上式分块写为:

$$\begin{bmatrix} S_D & S_U & S_I \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ (6-r) \times r & (6 \times r) \times (m-r) & r \times s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{q}_D \\ \Delta \bar{q}_U \\ \Delta \bar{q}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} \quad (6.149)$$

重写 r 个独立方程,我们有

$$[S_D](\Delta \bar{q}_D) = (\bar{R}_1) - [S_U](\Delta \bar{q}_U) - [S_I](\Delta \bar{q}_I) \quad (6.150)$$

由于 $(\Delta \bar{q}_I)$ 为零(独立变量没有改变),并注意设 $(\Delta \bar{q}_U)$ 为零,从式(6.150)可以解出 $\Delta \bar{q}_D$

$$(\Delta \bar{q}_D) = [S_D]^{-1}(\bar{R}_1) \quad (6.151)$$

这些非独立变量的变化,要加到当前的估计值中

$$\hat{\bar{q}}_D \leftarrow \hat{\bar{q}}_D + \Delta \bar{q}_D \quad (6.152)$$

这样就得到新的估计值,它更接近于非独立变量的正确值。这个迭代过程一直要延续到改变值 $(\Delta \bar{q}_D)$ 很小而且 S_{00} 接近单位矩阵为止。

下面我们更进一步来看 \bar{q}_U 的意义。这本书的大部分都是讨论全约束机构的分析。对于这些情况,没有未规定的独立变量。但当有未规定的独立变量存在时,机构常常被当作第五章中讨论过的动力学时间响应问题来处理。这时,机构常常有作用在其上的力和力偶,以产生要用时间-积分方法来求解的未知运动。

6.15 速度分析

一旦我们完成了机构的位置分析，就可以进一步来进行速度分析，即联接变量对时间的变化率。这个分析的任务是，给定了已知独立的联接变量的速度(\dot{q}_I)而求解非独立联接变量的速度(\dot{q}_D)。如果在位置分析过程中有未规定的独立联接变量 q_U ，那么，它们的速度 \dot{q}_U 一定要加以规定，以进行速度分析。这里，将假设的就是这种情况。

对环路封闭方程对时间取导数，可以导出一个用在机构速度分析时的方程组。用导数链式法则，我们得到：

$$\frac{dS_{00}}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{00}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = 0 \quad (6.153)$$

用等效的矩阵乘积代替环路封闭方程的偏导数，并认识到在位置分析完成以后有 $S_{00}=I$ 这一关系式，式(6.153)就变成：

$$\sum_{i=1}^m D_i S_{00} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^m D_i \dot{q}_i = 0 \quad (6.154)$$

这又是一个 4×4 的矩阵方程，以此可以导出标量方程。用在位置分析时用过的 D_i 的相同元素，我们得到速度分析的六个方程：

$$\begin{bmatrix} D(1,3)_1 & D(1,3)_2 & \cdots & D(1,3)_m \\ D(2,1)_1 & D(2,1)_2 & \cdots & D(2,1)_m \\ D(3,2)_1 & D(3,2)_2 & \cdots & D(3,2)_m \\ D(1,4)_1 & D(1,4)_2 & \cdots & D(1,4)_m \\ D(2,4)_1 & D(2,4)_2 & \cdots & D(2,4)_m \\ D(3,4)_1 & D(3,4)_2 & \cdots & D(3,4)_m \end{bmatrix} (\dot{q}) = 0 \quad (6.155)$$

或者 $[S](\dot{q}) = 0 \quad (6.156)$

这个 $[S]$ 矩阵与我们前面求出的系统几何矩阵一样。关于这一矩阵的秩的讨论以及把它分开以形成一组线性的独立方程式的方法也适用于这里。其结果为下面的分块矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} S_D & S_U & S_I \\ A & B & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_D \\ \dot{q}_U \\ \dot{q}_I \end{bmatrix} = 0 \quad (5.157)$$

或者

$$[S_D] \dot{q}_D = -([S_U] \dot{q}_U + [S_I] \dot{q}_I) \quad (5.158)$$

求解非独立变量的速度得到

$$\dot{q}_D = -[S_D]^{-1}([S_U] \dot{q}_U + [S_I] \dot{q}_I) \quad (5.159)$$

注意, 相似的项出现在位置和速度分析之中, 因此这种方法很适合在数字计算机中编为程序。

6.16 加速度分析

一旦我们完成了速度分析, 就可以进行机构的加速度分析。这个分析是给出了已知的独立联接变量的加速度(\ddot{q}_I)和未规定的独立联接变量的加速度(\ddot{q}_U)来求非独立变量的加速度(\ddot{q}_D)。同时, 又假定未规定的联接变量的问题已经解决, 因而它们具有给定的已知加速度。这样, 就使得机构是完全约束的了。在动力学时间-响应问题中, 这些加速度(\ddot{q}_U)是从作用在机构上的力所引起的效应来确定的。

将速度环路封闭方程(6.153)对时间取导数, 得到包含有机构联接变量加速度的方程组, 它可以写成:

$$\frac{d^2 S_{00}}{dt^2} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{00}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 S_{00}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = 0 \quad (6.160)$$

上式第一个求和项与出现在式(6.153)中的项相似。用等效的矩阵乘积代替导数, 并且应用 $S_{00} = I$, 我们有:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{00}}{\partial q_i} \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^m D_i \ddot{q}_i \quad (6.161)$$

式(6.160)中 S_{00} 的第二个导数必须要进一步定义, 因为这种形式以前从未出现过。环路封闭方程可以展开, 对应于第 i 和 j 个联接变量的微分算子可以插入适当的位置。

$$\frac{\partial^2 S_{00}}{\partial q_i \partial q_j} = S_{01} S_{12} \cdots S_{(k-1)k}(q_i) Q_i S_{k(k+1)} \cdots S_{(l-1)l}(q_j) Q_j S_{l(l+1)} \cdots S_{(n-1)n} S_{n0} \quad (6.162)$$

将单位矩阵的两种形式插入上式, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_{00}}{\partial q_i \partial q_j} = & S_{01} S_{12} \cdots S_{(k-1)k}(q_i) Q_i \underbrace{(S_{01} \cdots S_{(k-1)k})^{-1} (S_{01} \cdots S_{(k-1)k})}_I \\ & S_{k(k+1)} \cdots S_{(l-1)l}(q_j) Q_j \underbrace{(S_{01} \cdots S_{(l-1)l})^{-1} (S_{01} \cdots S_{(l-1)l})}_I \\ & S_{l(l+1)} \cdots S_{(n-1)n} S_{n0} \end{aligned} \quad (6.163)$$

这个方程可以用导数矩阵算子的形式重新写出。如果 q_i 比 q_j 先在环路封闭方程中出现, 那么

$$\frac{\partial^2 S_{00}}{\partial q_i \partial q_j} = D_i D_j S_{00} \quad (i < j) \quad (6.164)$$

将式(6.164)写成更一般的形式, 得到

$$\frac{\partial^2 S_{00}}{\partial q_i \partial q_j} = \overline{D_i D_j} = \begin{cases} D_i D_j & (i \leq j) \\ D_j D_i & (j < i) \end{cases} \quad (6.165)$$

式中再次应用了 $S_{00} = I$ 。综合这些步骤, 矩阵 $[G_m]$ 可定义如下:

$$[G_m] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 S_{00}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \overline{D_i D_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (6.166)$$

注意,在速度分析完成以后这一项是已知的。它包含“法向”加速度和“哥氏”加速度项。当 m 值很大时,在计算机上计算式(6.166)中的两层求和会很昂贵。好在我们可以用下面的递推方法。

定义

$$W_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} D_i \dot{q}_i \quad (6.167)$$

则

$$W_k = \sum_{i=1}^k D_i \dot{q}_i = W_{k-1} + D_k \dot{q}_k$$

进一步定义

$$G_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \overline{D_i D_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

那么

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \overline{D_i D_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \\ &= D_1 D_1 \dot{q}_1^2 + 2D_1 D_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \cdots + 2D_1 D_{k-1} \dot{q}_1 \dot{q}_{k-1} + 2D_1 D_k \dot{q}_1 \dot{q}_k \\ &\quad + D_2 D_2 \dot{q}_2^2 + 2D_2 D_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \cdots + 2D_2 D_{k-1} \dot{q}_2 \dot{q}_{k-1} + 2D_2 D_k \dot{q}_2 \dot{q}_k \\ &\quad + \cdots + D_{k-1} D_{k-1} \dot{q}_{k-1}^2 + 2D_{k-1} D_k \dot{q}_{k-1} \dot{q}_k + D_k D_k \dot{q}_k^2 \textcircled{1} \\ &= G_{k-1} + 2W_{k-1} D_k \dot{q}_k + D_k D_k \dot{q}_k^2 \end{aligned} \quad (6.168)$$

或者
式中

$$\begin{aligned} G_k &= G_{k-1} + (2W_{k-1} + D_k \dot{q}_k) D_k \dot{q}_k \\ W_0 &= G_0 = 0 \end{aligned}$$

回到我们的加速度分析上来,并把式(6.160)、(6.161)和(6.166)结合,可得到:

$$\sum_{i=1}^m D_i \ddot{q}_i + [G_m] = 0 \quad (6.169)$$

这里,我们又得到一个 4×4 矩阵方程,由此最多可以组成六个独立的线性方程。用矩阵形式表示,这些方程为

$$\begin{bmatrix} D(1,3)_1 & D(1,3)_2 & \cdots & D(1,3)_m \\ D(2,1)_1 & D(2,1)_2 & \cdots & D(2,1)_m \\ D(3,2)_1 & D(3,2)_2 & \cdots & D(3,2)_m \\ D(1,4)_1 & D(1,4)_2 & \cdots & D(1,4)_m \\ D(2,4)_1 & D(2,4)_2 & \cdots & D(2,4)_m \\ D(3,4)_1 & D(3,4)_2 & \cdots & D(3,4)_m \end{bmatrix} (\ddot{q}) = - \begin{bmatrix} G_m(1,3) \\ G_m(2,1) \\ G_m(3,2) \\ G_m(1,4) \\ G_m(2,4) \\ G_m(3,4) \end{bmatrix} \quad (6.170)$$

① 原式中最后几项的表达式为: $\cdots + D_{k-1} D_{k-1} \dot{q}_{k-1}^2 + \cdots + 2D_{k-1} D_k \dot{q}_{k-1} \dot{q}_k + D_k D_k \dot{q}_k^2$, 似有误——译者注。

或者 $[S](\ddot{q}) = -(\bar{G})$ (6.171)

我们又一次用到系统几何矩阵 $[S]$ 。像以前一样,将它分块表示成:

$$\left[\begin{array}{c|cc} S_D & S_U & S_I \\ \hline A & B & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \ddot{q}_D \\ \ddot{q}_U \\ \ddot{q}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{G}_{m1} \\ -\bar{G}_{m2} \end{bmatrix} \quad (6.172)$$

式中 \bar{G}_{m1} 是与非独立变量相关的向量,而 \bar{G}_{m2} 与其余变量相关。这样,该独立方程可写成:

$$[S_D](\ddot{q}_D) = -(\bar{G}_{m1} + [S_U]\ddot{q}_U + [S_I]\ddot{q}_I) \quad (6.173)$$

因而,非独立联接变量的加速度可求出为

$$\ddot{q}_D = -[S_D]^{-1}(\bar{G}_{m1} + [S_U]\ddot{q}_U + [S_I]\ddot{q}_I) \quad (6.174)$$

既然所有联接变量的位置、速度和加速度都已确定下来,那么机构上特殊点的运动就可以求得了。再下一节我们将举一个空间机构分析的例子,来说明前面讲过的方法。

6.17 三维空间内点的运动学

至此,我们研究了整个机构的运动学。所阐述的分析方法提供了关于联接变量的信息,但是并没有涉及机构中构件上某一点的信息。在这一节里,我们来研究位于构件上点的运动学。这些点的位置、速度和加速度要用我们在整个机构的运动分析中得到的联接变量来确定。

一个点的位置可以有两种方式来表示:(1)用定义在构件局部坐标系中的一套 xyz 坐标来表示;(2)用整体坐标或相对于固定参照系测量出的坐标来表示。

一般说来,点的位置是已知的,并且是固定在构件局部坐标系中,而我们希望知道的是当构件通过机构的约束运动时,这一点在整体坐标系中的运动。相应地,一个点将用四个齐次坐标来定义,使之与 4×4 矩阵的标记相一致。因此,构件 i 上的点 P 的局部坐标为:

$$r_{iP} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.175)$$

构件 3 中点 P 的定义,见图6.50。在该图中,所示的坐标系 $1, 2, 3, \dots, n$ 都是构件的局部坐标系。描述各构件及构件之间联接的变换矩阵中所涉及的中间坐标系都没有画出。因此,需要用到定义局部坐标系的标记。描述一个与构件 i 相连的坐标系的位置和方位的变换矩阵定义为

$$A_i = S_{01}S_{12}\cdots S_{k-1,k} \quad (6.176)$$

上式是 k 个基本矩阵的积。由此,该点在固定参考系上的位置可由下式确定:

$$R_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = A_i r_{iP} \quad (6.177)$$

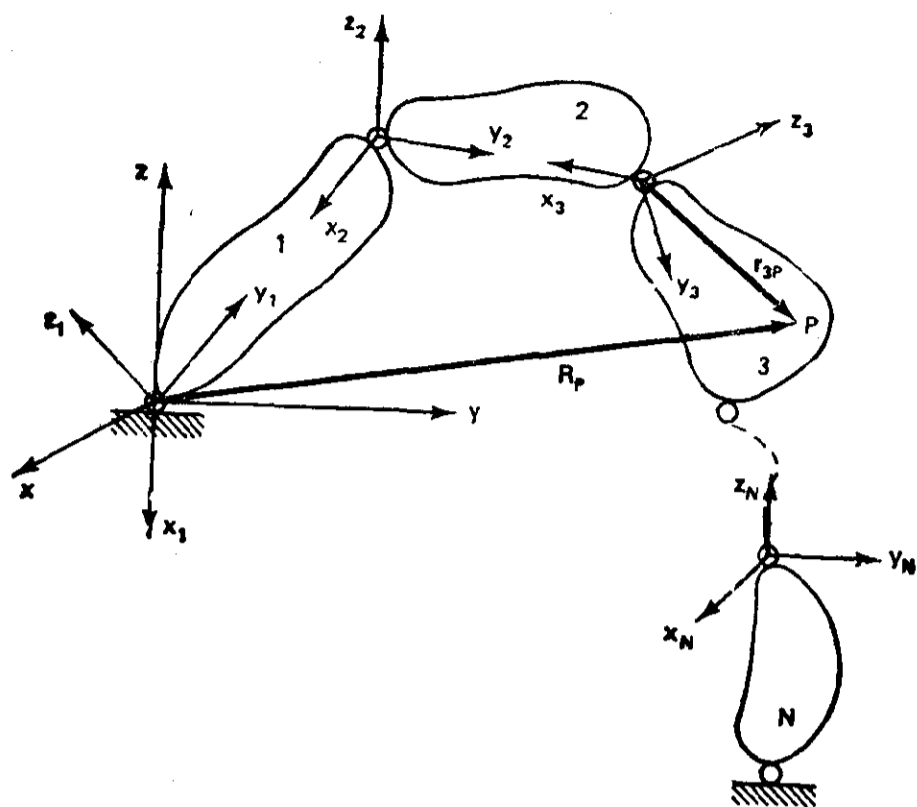


图 6.50 由局部向量 r_{3P} 和整体向量 R_P 规定的点 P

这一点的速度是由式(6.177)对时间取导数来求得。对上式右边用链式法则得到:

$$\dot{R}_P = \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{z}_P \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \dot{q}_i r_{iP} \quad (6.178)$$

式中我们知道在 A_i 中有 m 个变量矩阵, 而且定义在局部坐标系中的 r_{iP} 是一个常量(假设为刚性构件)。将 A_i 对时间取导数, 是利用导数算子矩阵以及将正确类型的 Q_n 插入适当位置而得到的:

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = S_{01} S_{12} \cdots S_{n-1,n} Q_n S_{n,n+1} \cdots S_{k-1,k} \quad (6.179)$$

使用表示在式(6.129)中的 D_i 的定义, 上式变为

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = D_i A_i \quad (6.180)$$

因此, 式(6.178)变为:

$$\dot{R}_P = \left(\sum_{i=1}^m D_i \dot{q}_i \right) A_i r_{iP} = \left(\sum_{i=1}^m D_i \dot{q}_i \right) R_R \quad (6.181)$$

式中我们承认 A_i 在求和式中为常量, 而且在上式中我们用了式(6.177)。然而, 右边的求和式在加速度分析时已计算过了; W_k 的定义参看式(6.167)和(6.168)。如果在进行加速度分析时, 这些中间矩阵的数值保存着的话, 那么在求点 P 的速度时, 除了作下面的矩阵-向量乘积的运算

① 原文为 $\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = S_{01} S_{12} \cdots S_{n-1,n} Q_n S_{n,n+1} \cdots S_{k-1,k}$ ——译者注。

外, 没有进一步计算的必要了。

$$\dot{\mathbf{R}}_P = W_m \mathbf{R}_P \quad (6.182)$$

一点的加速度是由对式(6.178)取一阶导数来确定的:

$$\ddot{\mathbf{R}}_P = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \ddot{q}_i \mathbf{r}_{iP} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 A_i}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \mathbf{r}_{iP} \quad (6.183)$$

考虑右边第一项, 并用式(6.180), 我们得到

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \ddot{q}_i \mathbf{r}_{iP} = \sum_{i=1}^m D_i \ddot{q}_i \mathbf{R}_P \quad (6.184)$$

我们现在定义 α_m 如下:

$$\alpha_m \triangleq \sum_{i=1}^m D_i \ddot{q}_i \quad (6.185)$$

下面, 再来考虑式(6.183)右边的第二项。再次比较这里的二阶导数和环路封闭矩阵方程的二阶导数[见式(6.162)到(6.166)]。应用同样的方法, 得到:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 A_i}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \mathbf{r}_{iP} = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \overline{D_j D_l} \dot{q}_i \dot{q}_j \mathbf{R}_P \quad (6.186)$$

这里, 双重求和式已在进行加速度分析时定义过了[见式(6.167)和(6.168)]:

$$G_m = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \overline{D_j D_l} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (6.187)$$

将式(6.185)和(6.187)代入式(6.183), 得到求点 P 加速度的下列公式:

$$\ddot{\mathbf{R}}_P = (\alpha_m + G_m) \mathbf{R}_P \quad (6.188)$$

上式要求计算 α_m 之值。可是, 对于机构的一个特殊位置来说, 对同一刚性构件上的任何点, α_m , 都是一样的。这与 W_m 和 G_m 的情况相同。所以, 对于同一构件上许多点的速度、加速度计算, 这些矩阵只要计算一次就够了。因此, 这些算法在为数字计算适当编程之后就是非常有效的。

① 原式为 $G_m = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \overline{D_j D_l} \dot{q}_i \dot{q}_i$ 。——译者注。

6.18 例: 一个三维机构的运动分析

示于图 6.49 的机构被用来作为阐明本章所介绍过的分析方法的例子。这个机构重新画在图 6.51 中,以表明计算中要用的尺寸。该图没按比例绘制。这个例子的结果是用我们前面介绍的方法编写的空间机构分析程序得出的。所有联接的定义,除两处例外,都与以前讨论的一样。两个球面联接已进行了重新定义以消除构件 3 绕其长轴的局部旋转自由度(见节 1.6)。构件 2 和 3 之间的球面联接被描述为一个具有两个旋转自由度的 U 型联接。这是由消除了前面例子中所讨论的第三个旋转,即绕 z 轴的旋转实现的。因为这个变化,构件 3 和 4 之间的球面联接也要变化,以便较容易地定义坐标系 $x_3y_3z_3$,使之平行于坐标系 $x_0y_0z_0$ 。第二个球面联接是用三个顺序旋转来定义的,先绕 y_3 轴旋转;再绕 z_4 轴旋转(未画出);最后绕 x_5 轴旋转(未画出)。

上面提到的计算机程序叫做 SAM(Spatial Analysis of Mechanisms)^①。程序中有一特殊的输入指令语言可方便地定义要解的问题。这里只讨论两个指令,以表示如何来定义例题机构。对机构的描述采用了一系列可定义机构运动拓扑学的 LINK 和 TRAN 指令。LINK 指令表示哪些构件是互相连接的; TRAN 指令则表示描述构件与联接的变换矩阵。对于这个空间滑块-曲柄机构,输入指令为:

指令	解释
LINK/L2,L1/ TRAN/T1,RY,V,0,2,0,90/	构件 2(L2)与构件 1(L1)相连 先平移 $(0,2,0)^T$,再绕 y 轴的变量旋转(RY)。 初始值: $\theta_1=90^\circ$
LINK/L3,L2/ TRAN/T2,RZ,V,3/ TRAN/T3,RX,V/	构件 3(L3)与构件 2 相连 先平移 $(3,0,0)^T$,再绕 z 轴的变量旋转 绕 x 轴的变量旋转
LINK/L4,L3/ TRAN/T4,RY,V,0,10,0,-90/	构件 4(L4)连接到构件 3 上 先平移 $(0,10,0)^T$,再绕 y 轴的变量旋转。初 始值: $\theta_4=-90^\circ$
TRAN/T5,RZ,V/ TRAN/T6,RX,V/ LINK/L1,L4/ TRAN/T7,TY,V,0,-12,3/	绕 z 轴的变量旋转 绕 x 轴的变量旋转 相对于构件 4 定义构件 1 使环路封闭 在 Y_7 方向上的变量平移(TY)和在 Z_7 方向 上的常量平移(3)。初始值: $Y_7=-12$ 。

通过这个程序的编制使我们认识到:只要当已经在指令中定义过的构件被用作 LINK 指令中第一个参数时,运动环路就封闭了。这个程序还自动地建立为确定环路矩阵方程和全部其它分析条件所需要的控制逻辑。尽管这里只举一个简单的单环机构,但这个程序可以用来分析多环空间机构,以及进行开环或闭环机构的动力学分析。这个程序中运动分析部分的流程图示于图

^① 要得到更多的信息,请通过本书第二作者与罗伯特·威廉斯(Robert Williams)联系。

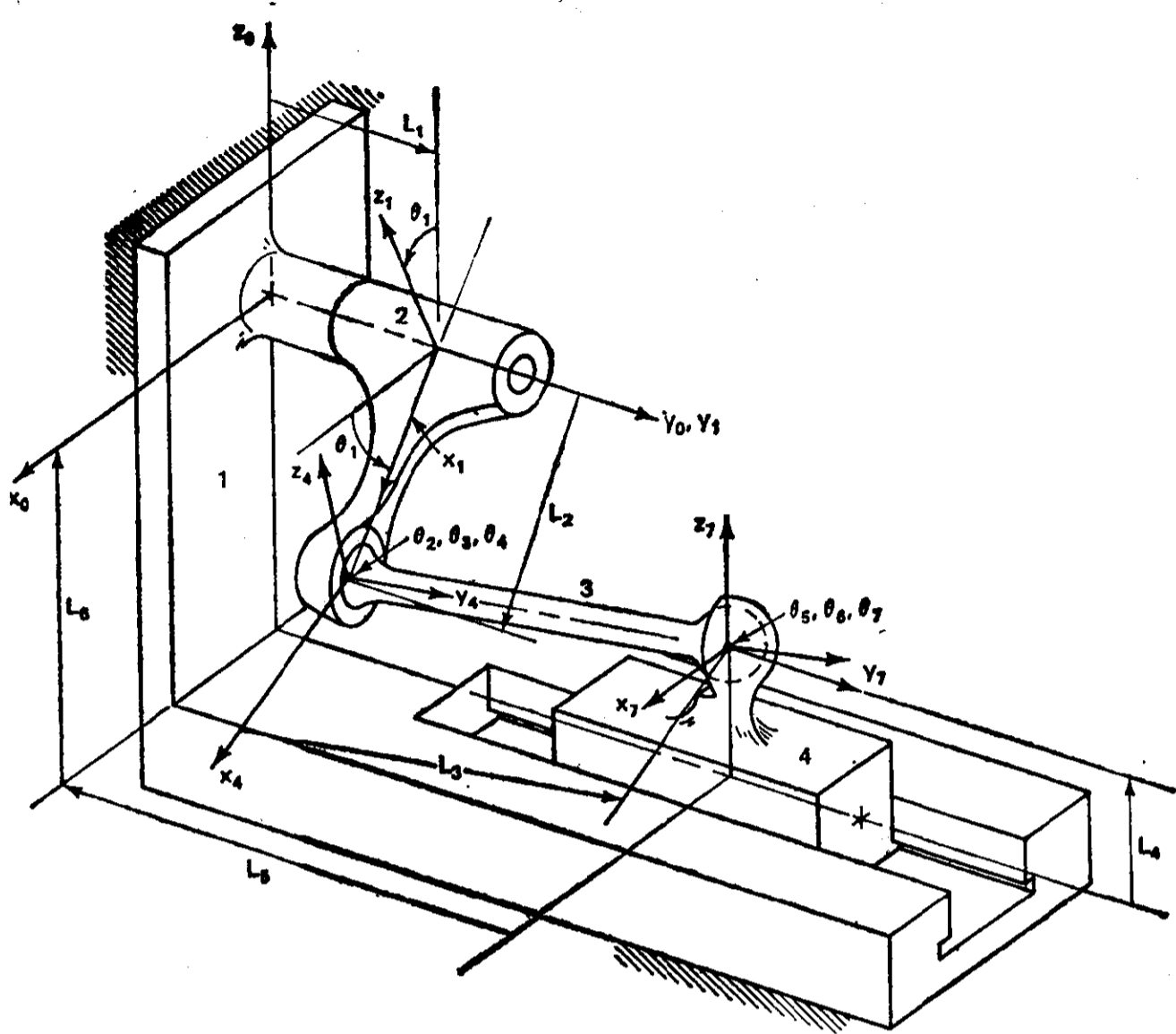


图 6.51 标注了关键尺寸的空间滑块-曲柄机构(未按比例画)

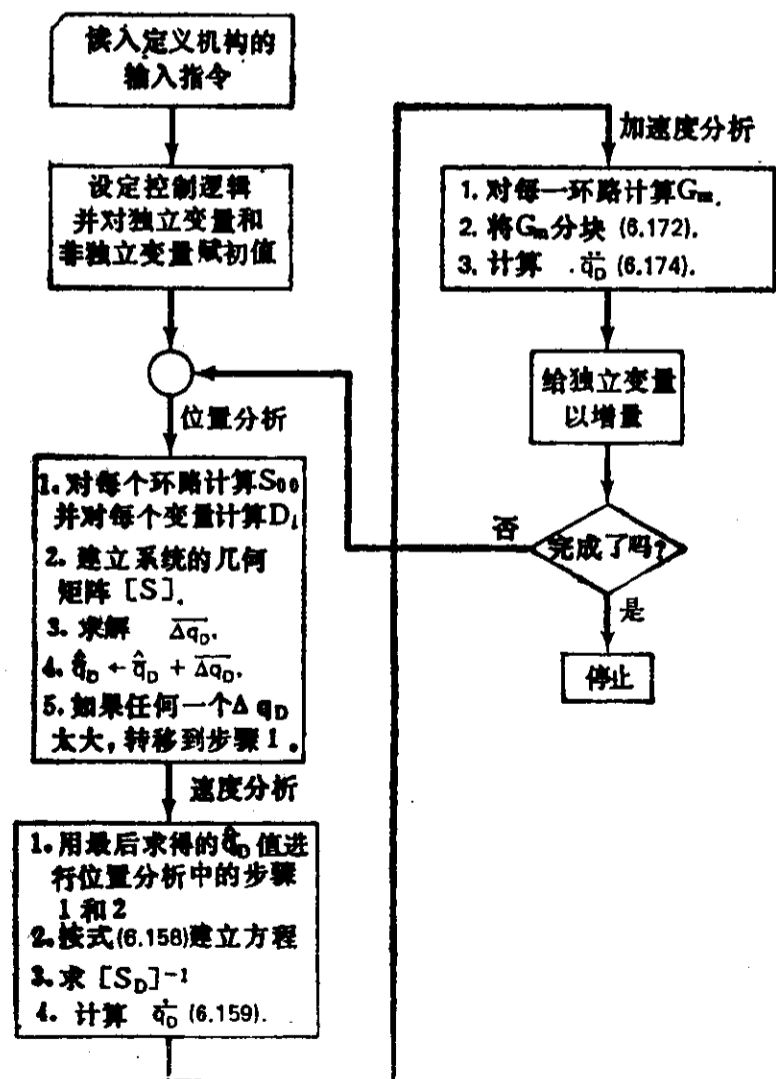


图 6.52 空间机构分析程序(SAM)的流程图(仅运动学部分)

6.52。

本例题分析的机构①中, 构件 2 以恒定的角速度 3 rad/sec 运动。该构件的初始角度为 90° , 旋转一周多一些 (430°)。滑块的位置、速度和加速度的变化曲线是相对于构件 2 的角度画的。这些曲线画在图 6.53 中。SAM 程序也具有画图功能: 它可以画出“单线条图”, 生成机构的每一构

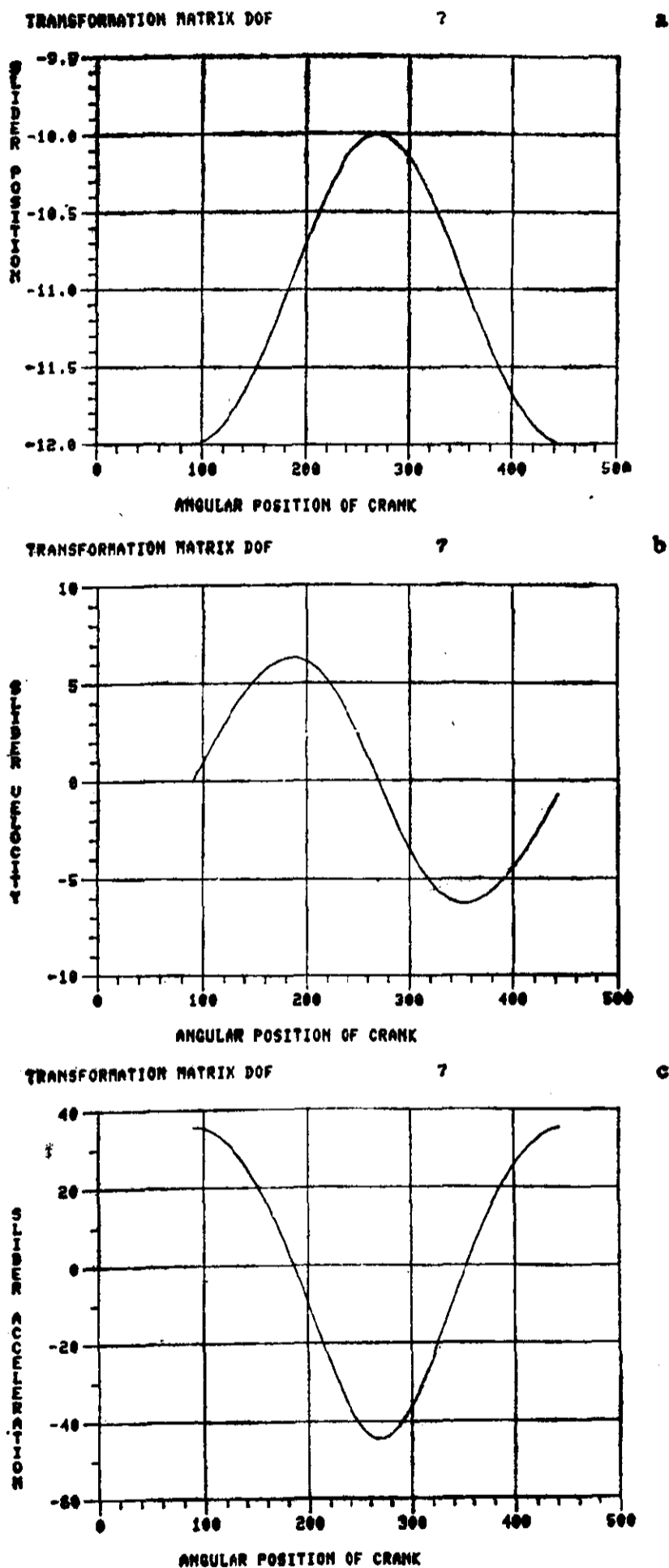


图 6.53 图 6.51 中的滑块的位置(a), 速度(b), 加速度(c)

① 这个例子是在王森洪(Sern Hong Wang)帮助下准备的。

件,从而显示出整个机构。图 6.54 就是这些输出的例子,图中画出了机构的六个位置。这些从图形终端得到的打印件(hard copy)是对机构位置分析的直观检查。这对于复杂的空间机构的

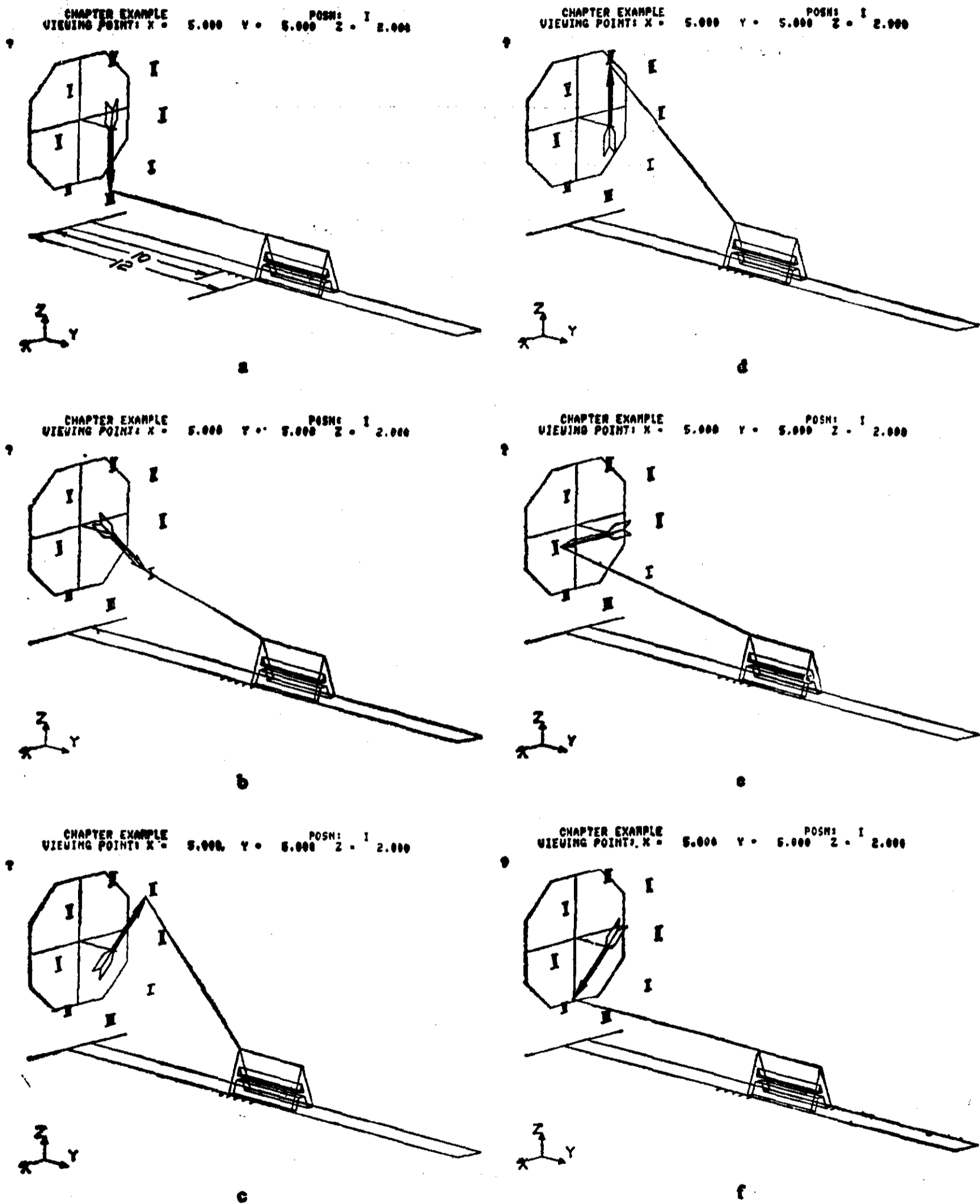


图 6.54 曲柄位置为 90° (a)、 135° (b)、 225° (c)、 270° (d)、 0° (e)和 45° (f)时图 6.51的滑块-曲柄机构的位置

分析是非常宝贵的。

还有其他可以买到的计算机程序,它们可以完成空间机构的运动分析和动力分析。ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanism Systems) [37,309] 和 IMP (Integrated Mechanisms Program) [255,256,294-296] 就是两个这样的程序。

6.19 空间机构的综合

在第二章中我们研究过用解析方法来设计平面机构的标准形式的综合方程。这个标准形式的方程是以代表机构的复向量的环路封闭为基础的。一旦预定了各个参数的值,那么这个一般手段就可以用来求解余下的未知量,从而产生出适合条件的双杆组(dyads)以便组成所有形式的轨迹发生器机构、运动发生器机构或函数发生器机构。因为引出非线性约束方程的空间机构和空间联接类型的形式多样,所以到现在为止还没有找到这样一种标准形式的空间综合方法。这里,我们介绍两种用空间双杆组来解空间综合问题的方法。在这一节中,所介绍的空间综合方法部分地是建立在苏靖华(C. H. Suh)和C. W. 拉德克列菲(C. W. Radcliffe) [272-275] 的研究成果基础之上。我们之所以挑选这种方法,是因为它易懂、易于使用计算机来计算,对于初学者来说,提供了一个灵活的工具。在节 6.20 要介绍一种方法,它的基础是向量法。有兴趣希望进一步研究空间机构综合的学生,可参考其它著作,例如文献[2-4, 13, 41, 54, 60, 62, 124, 125, 127, 141, 151, 159, 167, 215, 223, 238, 239, 249, 269, 291, 319]等。

怎样建立综合方程

各种不同的约束方程,就象盖房用的砖块一样,可以用来组成空间机构综合的数学模型。其结果是一个描述联接约束条件的非线性方程组。表 6.2 列出了五种可以形成空间双杆组的最有用的组成单元。正象平面双杆组可以组合成平面机构一样,这些空间双杆组也可以组合起来,形成许多形式的有用机构。表 6.2 清楚地列出了适合于编成计算机程序和适合于进行这种双杆组综合的约束方程。在下面各段中,将要讨论每一种形式的约束。

组成单元

读者可以回想一下,在讨论平面问题时,我们建立了基本双杆组的“标准形式”。那时,问了这样一个问题:给定一个刚性平面的所希望的共平面运动,我们能不能求得共平面双杆组来引导这一运动平面通过几个预定的位置?把这个想法用到空间机构上来,我们要问:给定一个刚性物体所希望的空间运动,能不能求得空间双杆组来引导这一运动物体通过几个预定的空间位置?要回答这一问题,我们需要有各种类型空间双杆组的空间约束数学表达式。在表 6.3 中有它们的介绍和说明。

假设我们希望引导点 A 通过空间几个预定位置,从而需要预定如下的位置向量:

$$A_j = (x_j \mathbf{i} + y_j \mathbf{j} + z_j \mathbf{k}) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

如果把一个坐标系的原点定在 A_1 , 那么我们只需要规定 $n-1$ 个向量:

$$a_j = A_j - A_1$$

这样,可令 A_1 为一个未知量,而通过规定 $a_j (j = 2, 3, \dots, n)$ 来描述 $A_j (j = 2, 3, \dots, n)$ 相对于 A_1

表 6.2 构件的约束——用于空间机构综合的组成单元(约束方程见表 6.3)

双杆组联接类型	约束方程	对于最多预 定位置的标 量方程个数	最多的位 置个数/ 标量方程 个数	未知的标量	设计者可以 自由规定的 标量个数
SS: 	恒定长度	6	7/6	x_0, y_0, z_0 x_1, y_1, z_1	无
RS: 	恒定长度 平面运动 方向余弦	3 4 1	4/8	x_0, y_0, z_0 x_1, y_1, z_1 u_x, u_y, u_z	1
RR: 	恒定长度 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 平面运动 $\overrightarrow{A_0A_1}$ $\perp \hat{u}_0, \hat{u}_1$ 方向余弦 (辅助构件的)恒定 长度 $\overrightarrow{B_0B_1}$	2 6 2 2	3/12	x_0, y_0, z_0 x_1, y_1, z_1 u_{x0}, u_{y0}, u_{z0} u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}	无
RC: 	恒定长度 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 平面运动 $\overrightarrow{A_0A_1}$ $\perp \hat{u}_0$ 方向余弦 (辅助构件的)恒 定长度 平移运动	2 3 2 2	3/12	x_0, y_0, z_0 x_1, y_1, z_1 u_{x0}, u_{y0}, u_{z0} u_{x1}, u_{y1}, u_{z1} S_2-S_1, S_3-S_1	2
CC: 	恒定长度 $\overrightarrow{A_0A_1} \perp \hat{u}_0$ 方向余弦 (辅助构件的)恒 定长度 两个平移运动	4 5 2 4 5	5/20	x_0, y_0, z_0 x_1, y_1, z_1 u_{x0}, u_{y0}, u_{z0} u_{x1}, u_{y1}, u_{z1} S_2, S_3, S_4, S_5 $S_2-S_1, S_3-S_1,$ S_4-S_1, S_5-S_1	无

的相对位置。

为了引导点 A 通过位置 $A_j (j=1, 2, \dots, n)$, 我们来看一看表 6.2 中的球面-球面二副构件, 当两个端点都没有固定时, 它有五个自由度, 再加上绕联接中心之间构件的轴线的第六个局部的旋转自由度。该构件所固有的唯一约束为, 运动联接在所有预定位置 (A_1, A_j) 必须保持在一中心位于某未知固定联接 A_0 的球面上。因此, 构件长 $|A_0 A_1|$ 对于所有位置来说都必须恒定:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = (x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 + (z_j - z_0)^2 \quad (j=2, 3, \dots, n) \quad (6.189)$$

式中 $x_j = x_1 + a_{xj}, y_j = y_1 + a_{yj}, z_j = z_1 + a_{zj}$, 并且 a_{xj}, a_{yj}, a_{zj} 是位移向量 a_j 的坐标。上式中 n 是预定位置的个数, 也就是说, $A_j(x_j, y_j, z_j) (j=1, 2, \dots, n)$ 的坐标是给定的。如果点 A_j 的位置向量 A_j 用 A_1 来表示成 $A_j = A_1 + a_j$, 这里 a_j 是给定的对应于 $j=2, 3, \dots, n$ 的位移向量, 那么式(6.189)就变成一组非线性的设计方程, 可以通过计算求解出二副构件的未知初始位置 $(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1)$ 。如果通过给出 $A_0(x_0, y_0, z_0)$ 来规定了固定销轴的位置, 那么, 对应于四个预定位置 ($n=4$), 或三个预定位移 $a_j (j=2, 3, 4)$ 的情况, 我们可以求得三个未知数 (x_1, y_1, z_1) (未知量 A_1 的坐标)。如果要求算出 A_1 和 A_0 的所有六个坐标, 那么最多可以用到七个位置 (六个位移) (见表 6.3)。

表 6.3 空间综合的约束方程 (S-S, R-S 和 R-R 构件的图示见表 6-2)

双杆组的类型(位置的个数)约束方程	方程形式	方程的个数
S-S ($n \leq 7$): $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = (x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 + (z_j - z_0)^2 \quad (j=2, 3, \dots, n)$	恒定长度	6
R-S ($n \leq 4$): $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = (x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 + (z_j - z_0)^2 \quad (j=2, 3, \dots, n)$ $u_x(x_j - x_0) + u_y(y_j - y_0) + u_z(z_j - z_0) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$ $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$	恒定长度 平面运动 方向余弦	3 4 1
R-R ($n \leq 3$): $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = (x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 + (z_j - z_0)^2 \quad (j=2, 3)$ $u_{x0}(x_j - x_0) + u_{y0}(y_j - y_0) + u_{z0}(z_j - z_0) = 0 \quad (j=1, 2, 3)$ $u_{x0}(x_j + u_{xj} - x_0 - u_{x0}) + u_{y0}(y_j + u_{yj} - y_0 - u_{y0}) + u_{z0}(z_j + u_{zj} - z_0 - u_{z0}) = u_{x0}(x_1 + u_{x1} - x_0 - u_{x0}) \quad (j=1, 2, 3)$ $u_{x0}(y_1 + u_{y1} - y_0 - u_{y0}) + u_{z0}(z_1 + u_{z1} - z_0 - u_{z0})$ $u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2 = 1, \quad u_{x1}^2 + u_{y1}^2 + u_{z1}^2 = 1$ $[(x_1 + u_{x1}) - (x_0 + u_{x0})]^2 + [(y_1 + u_{y1}) - (y_0 + u_{y0})]^2 + [(z_1 + u_{z1}) - (z_0 + u_{z0})]^2 = [(x_j + u_{xj}) - (x_0 + u_{x0})]^2 + [(y_j + u_{yj}) - (y_0 + u_{y0})]^2 + [(z_j + u_{zj}) - (z_0 + u_{z0})]^2 \quad (j=2, 3)$	恒定长度 $A_1 - A_j$ 的平面运动 $B_1 - B_j$ 的平面运动 方向余弦 恒定长度	2 3 3 2 2

对于在空间同样的点导引, 现在考虑用表 6.2 中的回转-球面 (R-S) 二副构件。从表中的图示可以直观地看清楚, 铰销在回转轴线上的位置是不相干的, 而且表中所示的所有三个构件在运动

上是等效的: 对于所有这三个固定铰销的位置(A_0, A'_0 和 A''_0)来说, 球面联接总是被约束在垂直于回转联接轴线的同一平面内运动。实际上, 在这根轴线上的任何一个固定的回转联接, 都可以代替作为综合中解出的任何联接, 而不会使机构改变。如果我们把一个联接选定在点 A_0 (球面联接的运动平面与转动轴的交点), 将得出一个简单的约束方程。参看表 6.2, 向量 $\overrightarrow{A_0 A_j}$ 必须永远垂直于表示固定回转联接轴线的单位向量 \hat{u} 。我们知道, 两个垂直向量的点积为零。那么直角约束条件方程为

$$\hat{u} \cdot \overrightarrow{A_0 A_j} = 0$$

或者

$$u_x(x_j - x_0) + u_y(y_j - y_0) + u_z(z_j - z_0) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.190)$$

式中 n 同样是预定位置的个数。 \hat{u} 是单位向量这个事实也可以用来形成约束条件。 \hat{u} 的分量是回转轴的方向余弦; 因此, 这个约束条件可称为方向余弦方程:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \quad (6.191)$$

读者可能注意到 R-S 构件与 S-S 构件有些相似, 但是前者比后者少了两个自由度, 这是因为固定铰销只允许一个转动自由度。从未知点 A_0 到所有给定的点 A_j 之间的距离也是不变的, 因此, 式 (6.189) 所示的恒定长度方程也必须用于这种构件。

要完全确定 R-S 构件的初始位置, 九个未知的标量分量需要确定: $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, u_x, u_y$ 和 u_z 。正象 S-S 构件的情况一样, 如果各个 A_j 是用 A_1 来表示的话, 那么式 (6.189) 和 (6.190) 是仅仅包含这些未知量的函数。方向余弦方程式 (6.191) 只需要用一次。所以, 对于最多四个位置的情况 (即预定了 $A_j(x_j, y_j, z_j)$ ($j = 1, 2, 3, 4$)), 总共有三个恒定长度方程, 四个直角方程 (平面运动) 和一个方向余弦方程。也就是说, 对于四个预定的位置 A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 共有八个标量方程, 九个标量未知数。这些约束方程列在表 6.3 中。其中一个未知量可以任意指定。例如, 回转联接的 x 分量可以任意指定, 以保证它与相邻的联接有足够的距离。

对于回转-回转构件的情况, 除了第二根回转轴也必须被确定以外, 与 R-S 构件的情况相似。我们运用在分析 R-S 构件时同样的思路, 选择同时垂直于两根回转轴的唯一构件, 以简化方程。固定铰链的实际位置可以由设计者选在其轴线上的其它地方。这个唯一的构件只有两种情况不存在, 即: 两根轴线重合的无意义情况和两根轴线互相平行的平面情况。基本的 R-R 构件在表 6.2 中表示了两个位置。不考虑平面情况, 则构件绕固定联接的每一次旋转都将改变运动轴 \hat{u}_j 的方向, 同时改变动联接位置 (A_j) 的坐标。假设 \hat{u}_j 和 A_j 可以用 \hat{u}_1 和 A_1 的函数来描述, 则留下 12 个标量是描述该构件处于其初始位置所必需的 ($x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}, u_{x1}, u_{y1}$ 和 u_{z1})。

与 S-S 和 R-S 构件的情况一样, 两个联接之间的刚性约束要求 A_0 和 A_1 的相对距离保持不变, 所以式 (6.189) (恒定长度方程) 就成为我们约束方程中的第一组。其次, 向量 $\overrightarrow{A_0 A_1}$ 要保持在垂直于 \hat{u}_0 的平面内, 因此, 直角约束方程 [式 (6.190)] 也是适用的。当我们定义了该构件为两转动轴之间唯一的最短构件之后, 第二根转动轴 \hat{u}_1 也垂直于此构件。这是可应用的第三个约束

条件,它是用直角约束方程。另外,对于每根转动轴可用一次方向余弦方程[式(6.191)],又增加两个设计方程。

最后,除这些约束之外,还要用一个不太明显的约束。上面提到的方程并没有排除运动联接 A_j 可能绕构件 $\overrightarrow{A_0A_j}$ 的轴线旋转 180° 的可能性。构件绕回转联接的 \hat{u}_j 的正向旋转(右手法则)与绕 $-\hat{u}_j$ 的负方向旋转是一样的。因此,为了保持结果的一致性,我们要在两个联接之间定义一个辅助构件($\overrightarrow{B_0B_j}$)。为了避免增加任何新的未知量,如表 6.2 所示,构件($\overrightarrow{B_0B_j}$)的端点定义如下:

$$B_0 = A_0 + \hat{u}_0$$

$$B_j = A_j + \hat{u}_j$$

因为 $\overrightarrow{A_0A_j}$ 是一刚性构件,而且 \hat{u}_0 和 \hat{u}_j 是与 A_0 和 A_j 刚性相连的恒定长度向量,所以,辅助构件 $\overrightarrow{B_0B_j}$ 也可应用恒定长度约束。这就确保了 \hat{u}_0 和 \hat{u}_j 具有不变的相对方位,因而完成了对 R-R 构件约束的数学建模。对于最多三个位置的情况,综合方程组包括了以下 12 个非线性方程:

2 个恒定长度方程 ($\overrightarrow{A_0A_j}$)

3 个直角方程 ($\overrightarrow{A_0A_j} \cdot \hat{u}_0$)

3 个直角方程 ($\overrightarrow{A_0A_j} \cdot \hat{u}_j$)^①

2 个方向余弦方程 (\hat{u}_0 和 \hat{u}_j)

2 个恒定长度方程 ($\overrightarrow{B_0B_j}$)

表 6.3 列出了对于 S-S、R-S 和 R-R 构件的约束方程。对于 R-C 和 C-C 构件,在为这些联接推导模型方程和建立表 6.2 和 6.3 中各项数据的过程中,也可用类似的办法来处理。

由表 6.2 中所示的构件组成单元构成的空间机构,可以用表 6.3 中的约束方程来综合。这些方程对于确定机构初始位置的未知量来说,是非线性的。因此,解这些方程时,要用到数值方法。下一节,我们要介绍用向量来解约束方程的类似方法。

6.20 空间机构的向量综合^②

机构的向量表示法

图 6.55 所示的是一个要进行综合的机构示意图。它包含:两个分别带有在 A_0, B_0 的固定轴回转联接和运动球面联接 A, B 的连架杆(R-S 二副构件,构件 2 和 3),一个带有固定轴圆柱联接 C_0 和球面联接 C 的连架杆(C-S 二副构件,构件 4),一个具有三球面联接 A, B 和 C 的连杆(S-S-

① 原文如此,但似应为 $\overrightarrow{A_0A_j} \cdot \hat{u}_j$ ——译者注。

② G. N. Sandor, D. Kohli, C. F. Reinholtz, and A. Ghosal, "Closed-Form Analytic Synthesis of a Five-Link Spatial Motion Generator," *Proceedings, 7-th Conference on Apld. Mechanisms, Kansas City, Sept. 1982*, pp. xxvii-7; *J. Mechanism and Machine Theory*, 1983 or 1984.

S 三副构件, 构件 5) 和一固定机架(R-R-C 三副构件, 构件 1)。图中固定的直角参考坐标系 $OXYZ$ 是设在构件 1 上, 而运动的直角坐标系 $oxyz$ 则与连杆(构件 5)相连。这里, 我们只用了这两个坐标系, 这与许多传统空间机构原理的做法——对每一构件最少要建立一个独立的局部坐标系——不一样。

这是有一个固定构件的单自由度机构, 因此, 一构件, 例如构件 2 的转动位置就确定了其它所有运动构件的位置。

我们所希望的物体的运动是通过指定运动原点 o 的依次位置及运动的 $oxyz$ 坐标系的相应方位来规定的。

在图 6.55 中, 固定向量 a_0, b_0 和 c_0 确定了在点 A_0 和 B_0 的两个固定回转联接的位置, 以及在点 C_0 的固定圆柱联接的位置。这些联接的轴线方向用单位向量 \hat{u}_a, \hat{u}_b 和 \hat{u}_c 来表示。代表连架杆 2、3 和 4 的向量 a, b 和 c 表示在 $OXYZ$ 坐标系内。由图可知, 向量 a, b 和 c 分别垂直于单位向量 \hat{u}_a, \hat{u}_b 和 \hat{u}_c 。由于在 A_0 和 B_0 处是 R-联接, 所以杆向量 a 和 b 只能绕它们各自的转动轴 \hat{u}_a 和 \hat{u}_b 旋转。杆向量 c 不仅可以绕 \hat{u}_c 旋转, 而且可以沿 \hat{u}_c 平移。尽管向量 c 在运动的过程中始终要与 \hat{u}_c 相连且垂直。固定在连杆上的向量 α, β, γ 确定了球面联接 A, B, C 相对于同样固定在连杆上的动坐标系 $oxyz$ 的位置。这些球面联接必须分别保持与三个连架双杆组相连接。因此, “并矢向量” $(a, \alpha), (b, \beta)$ 和 (c, γ) 在整个运动过程中必须保持它们的头部互相连接。

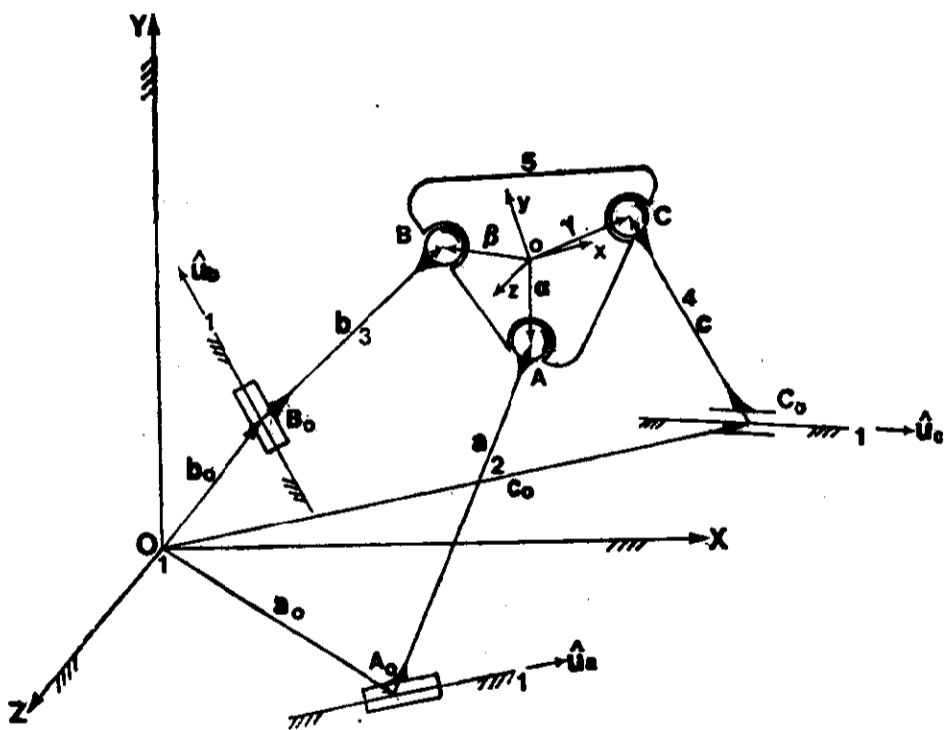


图 6.55 RSSR-SC 机构及有关向量

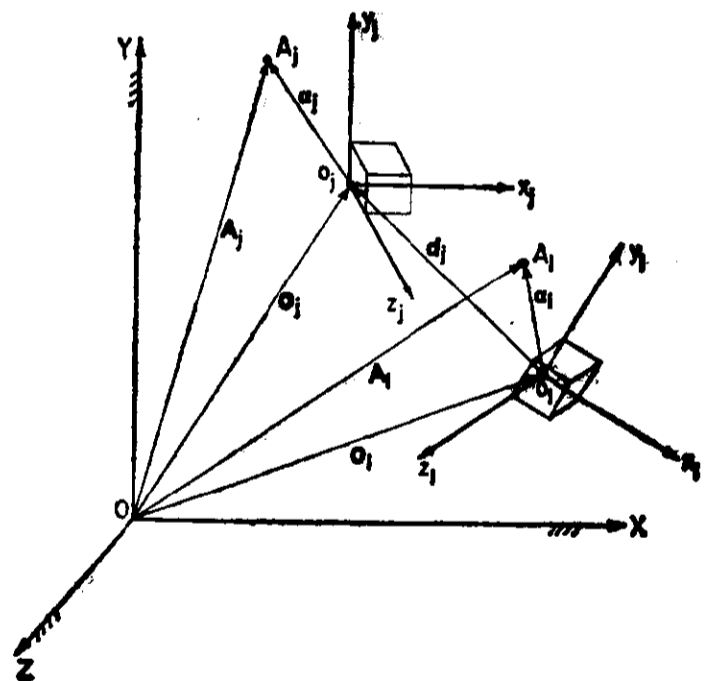


图 6.56 运动的和固定的坐标系

预定运动的给出

在图 6.56 中, $o_1x_1y_1z_1$ 和 $o_jx_jy_jz_j$ 分别是动坐标系的第 1 个和第 j 个预定位置。它们的原点 o_1 和 o_j 由已知的位置向量 o_1 和 o_j 定位, 而它们的方位则由 3×3 旋转矩阵^① $[R_1]$ 和 $[R_j]$ 给出, 该旋转矩阵以相对于固定坐标系 $OXYZ$ 的欧拉角来表示。为了用数学方法表示这些条件,

① 参看式(6.70)的 3×3 旋转矩阵。

设 V^1 为表示在第一个位置时的动坐标系中的向量, V^0 为表示在固定的整体坐标系中的同一向量。 V^1 和 V^0 之间的关系由下式给出:

$$V^0 = [R_1]V^1 \quad (6.192)$$

或者, 更一般一些, 设 V^j 是表示在第 j 个位置时的动坐标系中的向量,

$$V^0 = [R_j]V^j \quad (6.193)$$

这样, 对于 $j=2, 3, \dots, n$, 只要给出 $o_1, o_j, [R_1]$ 和 $[R_j]$, 就预定了连杆(图 6.55 中的构件 5)的几个离散位置。

双杆组位移多边形(Dyadic Displacement Polygon)

图 6.57 画出了图 6.55 中五杆机构的三个构件。它们是:

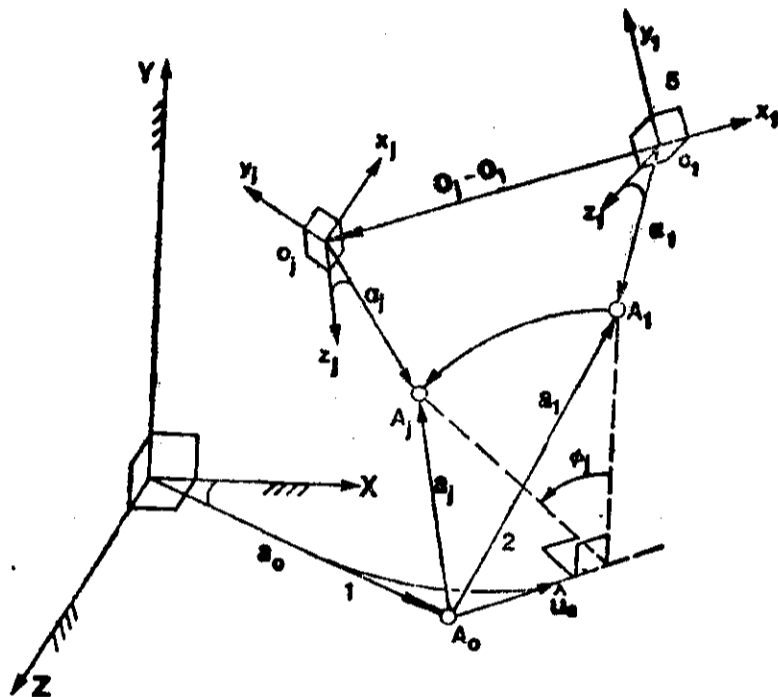


图 6.57 构件 2 和构件 5 的第 1 个和第 j 个位置示意图

构件 1: 与坐标系 $OXYZ$ 相连以及带有向量 a_0 的固定杆。向量 a_0 确定了固定的回转轴 \hat{u}_0 上点 A_0 的位置;

构件 2: 带有向量 a_1 的 R-S 连架杆, 向量 a_1 把位置 1 中的运动球面联接 A_1 与固定的回转联接相连。

构件 5: 连杆, 带有固定在其上面的坐标系 $oxyz$ 和向量 a , 这个向量把坐标原点 o 与球面联接 A 相连。在位置 1 时, 记为 a_1 和 $o_1 x_1 y_1 z_1$ 。

除这第一个即开始位置以外, 图 6.57 还显示了构件 2 和构件 5 的位移后的第 j 个位置。分别说明如下:

构件 5: 原点 o 从位置 1, 移动 $o_j - o_1$ 后到达位置 j 。固定在其上的坐标系运动到 $o_j x_j y_j z_j$, 包括与之固结的 a 向量, 从方位 1 旋转到方位 j (从 a_1 到 a_j);

构件 2: 向量 a 绕 \hat{u}_0 轴从位置 a_1 旋转角 ϕ_j 后到达 a_j 。注意, 在图 6.57 中具有下列已知性质, 即预定的量为 $o_1, o_j, o_1 x_1 y_1 z_1$ [见式(6.192)] 和 $o_j x_j y_j z_j$ [见式(6.193)]。未知量有 a_j, a_1, a_j, a_0 。另外, 以后将会看到, 对于三个预定位置, a_1 可以任意假定。

我们现在把由顶点 A_0, A_1, o_1, o_j 和 A_j 组成的封闭向量多边形定义为双杆组位移多边形。将

所有各边向量都表示在 $OXYZ$ 系统中, 并令它们之和为零, 就可以写出这一多边形的封闭性。按图 6.57 的逆时针方向顺序, 我们有:

$$\alpha_1 - [R_1]\alpha_1 + \alpha_j - \alpha_1 + [R_j]\alpha_1 - \alpha_j = 0 \quad (6.194)$$

在式(6.194)中, $\alpha_j, \alpha_1, [R_1]$ 和 $[R_j]$ 是已知的, 而其余的为未知量。可是, 正象我们后面将会看到的那样, 对于 $j=2, 3$ (即三个预定位置时), α_1 是一个可自由选择的参数。

求构件 2 相适合的回转轴

前面的讨论已经表明, 一物体在空间的位置是通过给出与该物体相连的动坐标系在每一处的位置和方位来确定的。因此, 我们给出了

$$\alpha_j \text{ 和 } [R_j] \quad (j=1, 2, 3) \quad (6.195)$$

现在, 我们把注意力转到图 6.57 中的用向量形式表示的 R-S 双杆组。如果假定了 α 的值, 那么就确定了球面联接相对固定参考系的位置, 也就是 $[R_1]$, 而在第 j 个位置, α_j 由下式确定:

$$\alpha_j = [R_j]\alpha_1 \quad (j=1, 2, 3) \quad (6.196)$$

因为 $[R_1]$ 和 $[R_j]$ 已经预定, 所以, α_j 也为已知。

参看图 6.56, 在 $OXYZ$ 坐标系中的向量 A_j 可以表示成 α_j 和 $[R_j]\alpha_1$ 的向量和, 即

$$A_j = \alpha_j + [R_j]\alpha_1 \quad (j=1, 2, 3) \quad (6.197)$$

对于有三个预定位置的 R-S 构件来说, 向量 $(A_j - A_1)$ ($j=2, 3$) 必须位于与转动联接轴垂直的平面内。因此, 沿回转联接轴线的单位向量 \hat{u}_a 由下列关系求得:

$$\hat{u}_a = \frac{(A_2 - A_1) \times (A_3 - A_1)}{|(A_2 - A_1) \times (A_3 - A_1)|} \quad (6.198)$$

确定固定回转联接 A_0 的位置

由于连架杆 a 绕转动轴 \hat{u}_a 旋转, 则使 a 垂直于 \hat{u}_a 并不会失去其运动的普遍性。因此, 我们可以认为向量 α_j ($j=1, 2, 3$) 也位于由 $(A_j - A_1)$ ($j=2, 3$) 所确定的平面内。另外, 垂直于这个平面的轴线 \hat{u}_a , 与该平面相交于点 A_0 , 点 A_0 则可用 $OXYZ$ 坐标系内的未知向量 α_0 来定位。这就是回转联接 A_0 在整体坐标系中的未知位置。点 A_0 的位置, 可由确定过点 A_1, A_2 和 A_3 的圆的圆心来求得。这可用下列方法来实现。

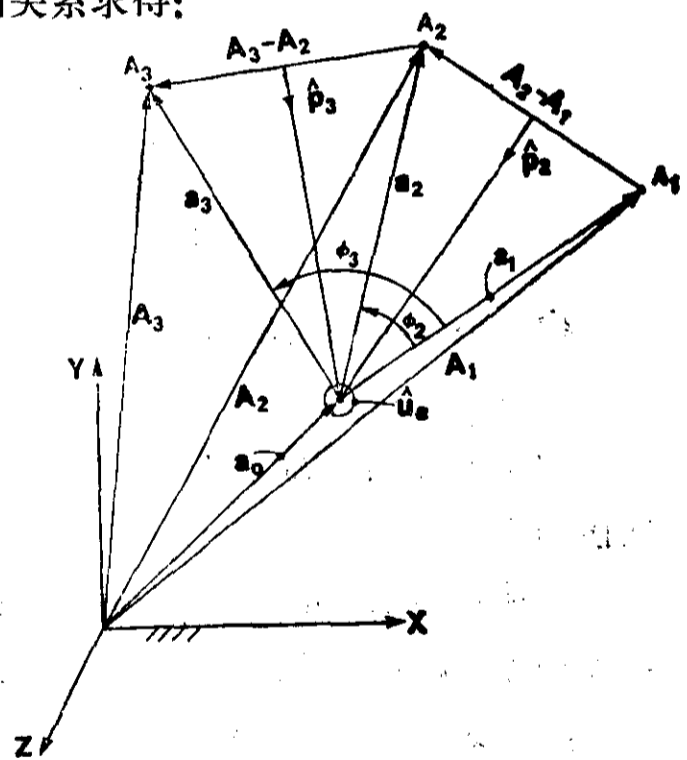


图 6.58 R-S 构件的三个位置及其有关向量

首先, 参照图 6.58, 求出分别垂直于 $(A_2 - A_1)$ 和 $(A_3 - A_2)$, 而且同时垂直于 \hat{u}_a 的单位向量 \hat{p}_2 和 \hat{p}_3 。

$$\hat{p}_2 = \hat{u}_a \times (A_2 - A_1) / |A_2 - A_1| \quad (6.199)$$

$$\hat{p}_3 = \hat{u}_a \times (A_3 - A_2) / |A_3 - A_2| \quad (6.200)$$

现在, 让这两个向量的作用线分别与 $(A_2 - A_1)$ 和 $(A_3 - A_2)$ 的垂直平分线重合, 那么这两条线相交于点 A_0 。记沿 \hat{p}_2 方向从 $(A_2 - A_1)$ 到 A_0 的距离是 λ_2 , 沿 \hat{p}_3 方向从 $(A_3 - A_2)$ 到 A_0 为

λ_3 , 我们以两个途径来表示 a_0 :

$$a_0 = \lambda_2 \hat{p}_2 + A_1 + \frac{A_2 - A_1}{2} = \lambda_3 \hat{p}_3 + A_2 + \frac{A_3 - A_2}{2} \quad (6.201)$$

为了求得 λ_3 , 首先将式(6.201)的第二、第三式左叉乘 \hat{p}_2 , 得出

$$\lambda_2 \hat{p}_2 \times \hat{p}_2 + \hat{p}_2 \times A_1 + \hat{p}_2 \times \frac{A_2 - A_1}{2} = \lambda_3 \hat{p}_2 \times \hat{p}_3 + \hat{p}_2 \times A_2 + \hat{p}_2 \times \frac{A_3 - A_2}{2} \quad (6.202)$$

可观察到, 式(6.202)左边第一项为零, 从而消掉了 λ_2 。

其次将式(6.202)两边都以 $\hat{p}_2 \times \hat{p}_3$ 作点乘, 再除以 $\hat{p}_2 \times \hat{p}_3 \cdot \hat{p}_2 \times \hat{p}_3$, 使 λ_3 的系数等于 1, 求解 λ_3 得:

$$\lambda_3 = (\hat{p}_2 \times \hat{p}_3) \cdot \left[\hat{p}_2 \times A_1 + \left(\hat{p}_2 \times \frac{A_2 - A_1}{2} \right) - \frac{(\hat{p}_2 \times A_2) - \hat{p}_2 \times \frac{A_3 - A_2}{2}}{\hat{p}_2 \times \hat{p}_3 \cdot \hat{p}_2 \times \hat{p}_3} \right] \quad (6.203)$$

将如此求得的 λ_3 值代入式(6.201), 可求出 a_0 :

$$a_0 = \lambda_3 \hat{p}_3 + A_2 + \frac{A_3 - A_2}{2} \quad (6.204)$$

知道了 a_0, a_1 可由下式求出:

$$a_1 = A_1 - a_0 \quad (6.205)$$

这个结果给出了在初始位置时构件 2 的固定 R 联接和运动 S 联接的位置, 从而完全确定了由 a_1 和 α_1 组成的 R-S 双杆组。

确定构件 3 的固定回转联接的方向和位置

第二组 R-S 双杆组可以用与求解第一组 R-S 双杆组完全等同的方法求解, 所不同的是式(6.194)到(6.205)中带所有下标的 α, A 和 a 要用 β, B 和 b 来代替。注意与 α_1 一样, β_1 也可以由设计者任意指定。

确定构件 4 的圆柱联接的轴线和初始位置

图 6.59 以向量形式表示了 C-S 双杆组。象处理 R-S 双杆组一样, 给定在三个预定位置中的每一个位置上运动坐标系的位置和方位, 这是由式(6.195)给出的。

同时, 我们也假定球面联接 (在该情况下是联接 C) 位于由向量 γ_1 确定的运动坐标系 $oxyz$ 中, 并与连杆构件相连。现在, 我们可以列出象式(6.196)一样的式子来求出在固定坐标系中的 γ_j :

$$\gamma_j = [R_j] \gamma_1 \quad (j=1, 2, 3) \quad (6.206)$$

注意, $[R_j]$ 代表运动物体的预定方位, 它们与分析 R-S 构件时相同。因此, 式(6.206)右边的每个量都是已知的。

这里, 我们必须再假设两个标量以便去综合 C-S 对。这可以或者假设圆柱联接轴线方向上的两个位移 S_2 和 S_3 , 或者假设圆柱联接轴线的方向 \hat{u}_c 。注意, \hat{u}_c 是一个单位向量, 只要它的三个标量分量中有两个给出后, \hat{u}_c 就确定了。剩下的一个分量则可以由下式求得:

$$u_{cx}^2 + u_{cy}^2 + u_{cz}^2 = 1 \quad (6.207)$$

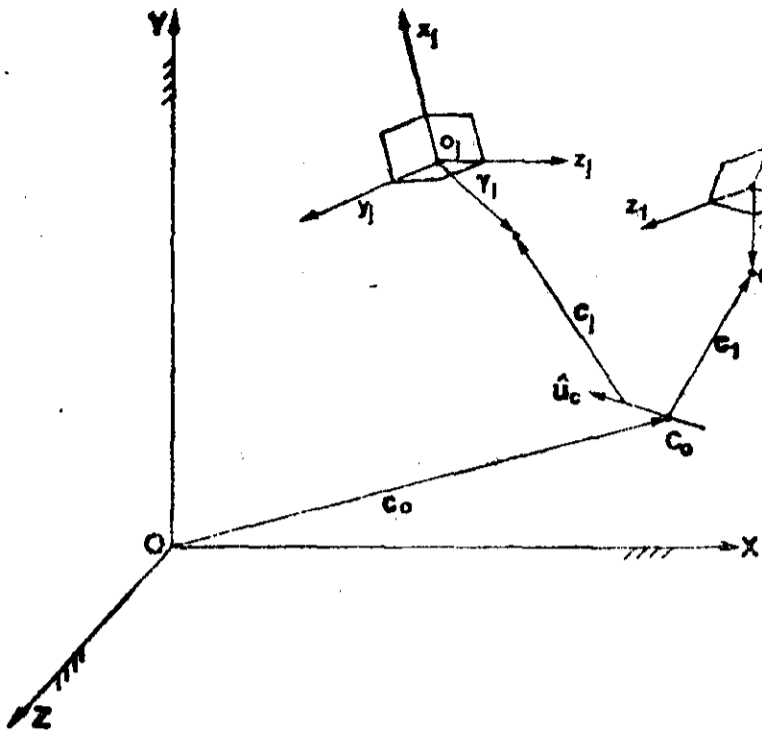


图 6.59 C-S 对的第一个和第 j 个位置

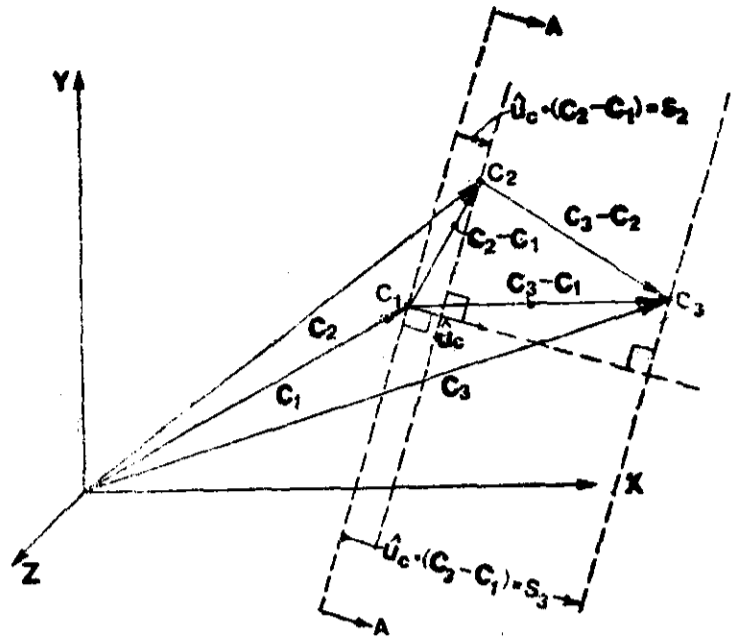


图 6.60 C-S 构件的三个位置和有关的向量

向量 \hat{u}_c 和标量位移 S_2 及 S_3 之间的关系可以从图 6.60 中得出为:

$$S_2 = \hat{u}_c \cdot (C_2 - C_1) \quad (6.208)$$

$$S_3 = \hat{u}_c \cdot (C_3 - C_1) \quad (6.209)$$

如果我们假定的是 S_2 和 S_3 的值, 则式(6.207)、(6.208)及(6.209)形成一组包括 \hat{u}_c 三个未知分量的三个方程。另一方面, 如果我们通过假定 \hat{u}_c 的两个分量而假定了它的方向, 则可以直接解方程(6.207)求得 \hat{u}_c 的第三个分量。由于向量 \hat{u}_c 已定, 可以直接解方程(6.208)和(6.209)求出位移 S_2 和 S_3 。两种情况都很容易求解。第三种情况是假定 \hat{u}_c 的一个分量和一个轴向位移。

图 6.61 展示了图 6.60 中取的截面 A-A。这是一个由单位法线 \hat{u}_c 、并通过点 C_1 所规定的平面。点 C'_2 和 C'_3 是点 C_2 和 C_3 在该平面上的投影, 而从原点开始的向量 C'_2 和 C'_3 由下式计算:

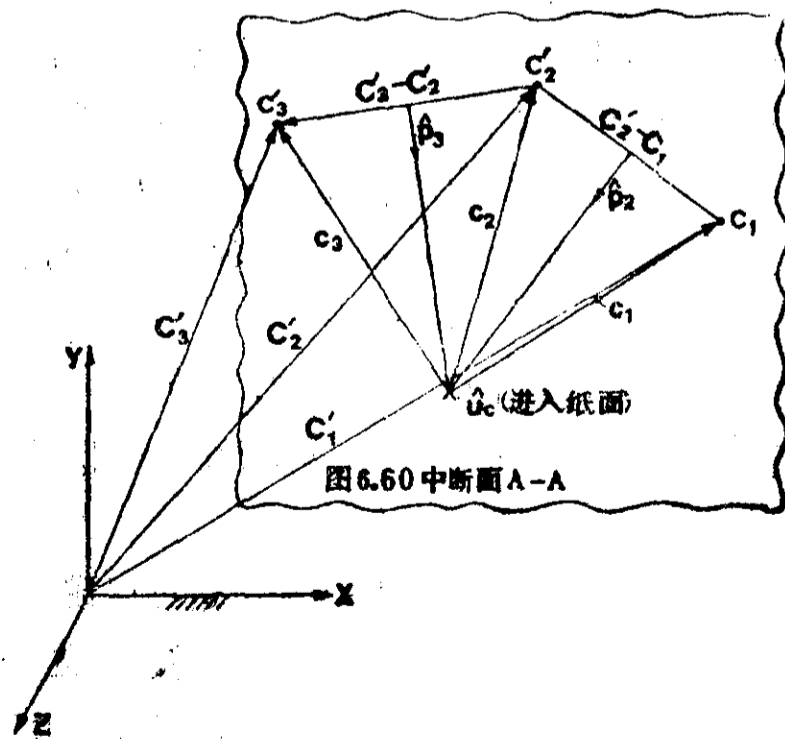


图 6.61 C-S 构件中有关向量在垂直于 \hat{u}_c 并通过点 C_1 的平面上的投影

$$C'_2 = C_2 - S_2 \hat{u}_c \quad (6.210)$$

$$C'_3 = C_3 - S_3 \hat{u}_c \quad (6.211)$$

注意上面两式的右边各项的所有值都是已知的,而且 $C'_1 = C_1$ 。

对于 C-S 双杆组,圆柱联接把球面联接限制在轴线为 \hat{u}_c 的圆柱表面上运动,因而圆柱面上的点在垂直于 \hat{u}_c 的平面上的投影都落在一个圆周上。这样,点 C_1, C'_2 和 C'_3 定义了一个圆心在轴 \hat{u}_c 上的圆。

现在,求圆柱联接的初始位置 C_0 的问题,就变成了求 R-S 双杆组中转动轴线 \hat{u}_c 的位置 C_0 的问题。

对于 C-S 双杆组,综合方程(6.203)、(6.204)和(6.205)变成:

$$\lambda_3 = \frac{\hat{p}_2 \times \hat{p}_3 \cdot \left[\hat{p}_2 \times C_1 + \left(\hat{p}_2 \times \frac{C'_2 - C_1}{2} \right) - (\hat{p}_2 \times C'_2) - \hat{p}_2 \times \frac{C'_3 - C'_2}{2} \right]}{\hat{p}_2 \times \hat{p}_3 \cdot \hat{p}_2 \times \hat{p}_3} \quad (6.212)$$

$$C_0 = \lambda_3 \hat{p}_3 + C'_2 + [(C'_3 - C'_2)/2] \quad (6.213)$$

$$c_1 = C_1 - c_0 \quad (6.214)$$

这样,C-S 双杆组的尺寸就完全确定下来了。

用向量表示法作空间机构闭式综合的数字例题

例 6.12

设计一个 RSSR-SC 机构以引导一刚体通过空间三个有限分离位置 ($o_{jz} \equiv 0$ 并不影响这个例子的普遍性,因为三个点确定一个平面)。

输入数据:

运动原点:

$$o_j = \begin{bmatrix} 1.50 & 1.50 & 0 \\ 0.75 & 1.25 & 0 \\ 0.35 & 0.80 & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} o_1^T \\ o_2^T \\ o_3^T \end{Bmatrix}$$

运动平面的欧拉角(以度表示):

$$\begin{bmatrix} 18.5 & 21 & 30 \\ 10 & 20 & 30 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{1z} & \lambda_{2z} & \lambda_{3z} \\ \mu_{1x'} & \mu_{2x'} & \mu_{3x'} \\ \xi_{1z'} & \xi_{2z'} & \xi_{3z'} \end{bmatrix}$$

这里第一个下标表示位置,第二个表示转动轴。例如 λ_{1z} 是在初始(第一个)位置绕 z 轴的转动, $\mu_{2x'}$ 是在第二个位置绕新的 x' 轴(即转动后的 x 轴)的转动。

运动物体的位置如图 6.62 所示,图中对三个预定位置中的每一位置都用正交投影来显示。而且用边长为 1 的立方体来表示运动物体在三个预定位置上的位置和方位。立方体在三个预定位置上的正视图和顶视图如图 6.62 所示。

在动坐标系中球面联接 A、B 和 C 的位置如下:

$$\begin{Bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \\ \gamma^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

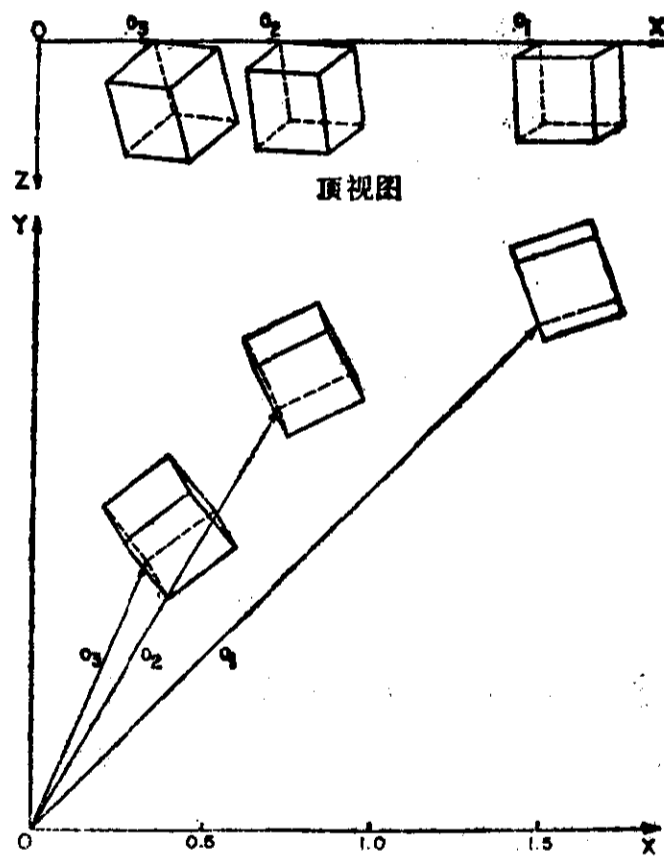


图 6.62 例 6.12 中所用的三个预定位置

圆柱联接轴线的方向 \hat{u}_c 为:

$$\hat{u}_c = 0.632\hat{i} - 0.632\hat{j} + 0.447\hat{k}$$

综合出的机构尺寸如下(所有向量都表示在固定坐标系中):

	X	Y	Z
$a_0 =$	0.287	-0.055	-0.130
$a_1 =$	-0.21	1.080	0.130
$b_0 =$	2.89	-1.230	1.530
$b_1 =$	0.037	3.200	-1.53
$c_0 =$	0.958	-0.751	-4.360
$c_1 =$	0.460	2.500	2.880
$\hat{u}_a =$	0.008	-0.118	0.993
$\hat{u}_b =$	0.009	0.431	0.902
$S_1 =$	-0.497		
$S_2 =$	-0.644	(标量)	

综合出来的机构示于图 6.63 中。

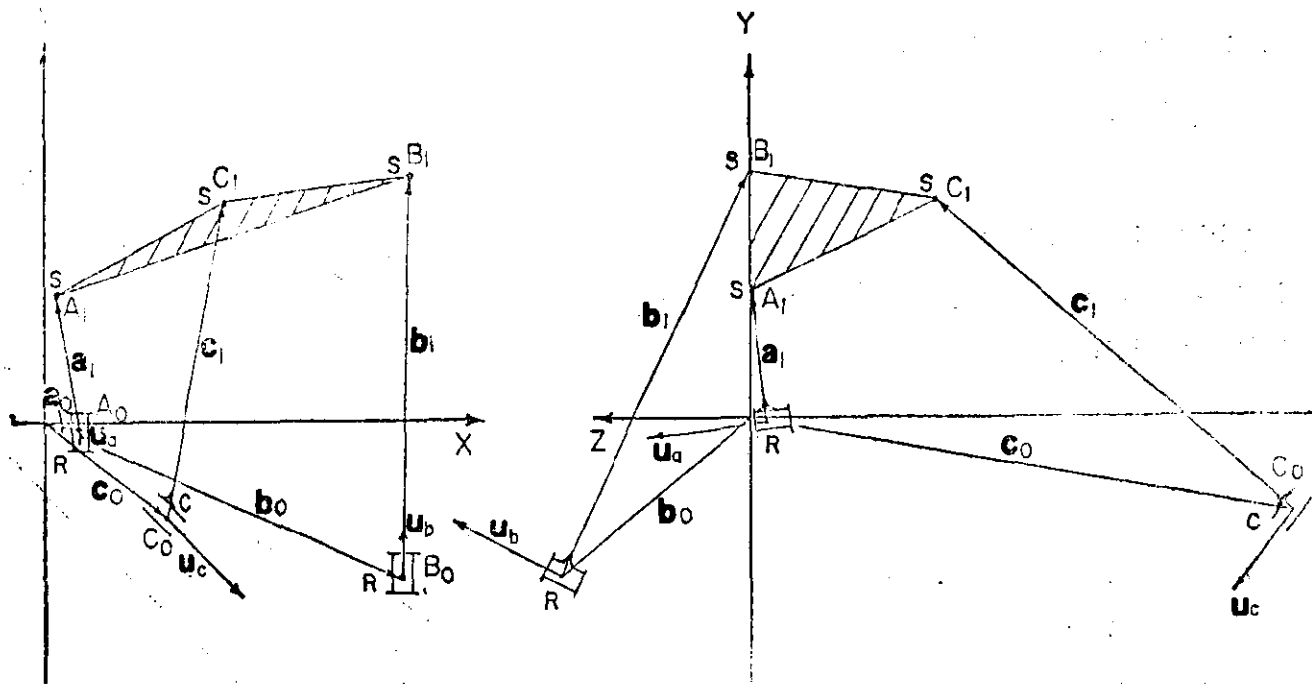


图 6.63 例 6.12 中综合出的机构的两个正交投影图

这一节我们建立了 RSSR-SC 五杆空间运动发生机构的综合方法。所建立的综合方法是简单的,并可推广到包括引导刚体通过空间复式分离位置的机构的设计。这种方法也很容易改编成带有图形显示的对话式的计算程序。

因为综合方程式是线性的,所以在计算中没有什么困难。但是,在计算中会遇到曲柄整周回转性和分支问题。由于有几个参数可供设计师任意选择(例如 α 、 β 、 γ 、 S_2 和 S_3),因此,一个既能引导物体通过三个预定位置,又能满足曲柄整周回转和避免分支问题等附加条件的机构是可以设计出来的。

习 题

6.1 图 P6.1 所示的是使用在许多汽车中的麦克弗逊(MacPherson)支撑悬挂系统^[49]。

(a) 用表 6.1 所示的联接副, 画出这个悬挂系统的三维运动简图;

(b) 用式 (6.1) 到 (6.3), 证实这个机构的自由度。

6.2 对于图 6.1 到图 6.15:

(a) 描述机构的性能;

(b) 用表 6.1 所示的联接副, 画出机构的三维运动简图;

(c) 用式 (6.1) 到 (6.3) 验证这个机构的自由度;

(d) 该机构是否有多余(或局部)的自由度?

(e) 可动性是否依赖于一些特殊的比例? 是些什么比例?

(f) 是否可能去掉某些构件, 而不影响机构的性能? 如果可能, 是哪一些? 究竟为什么使用这些构件?

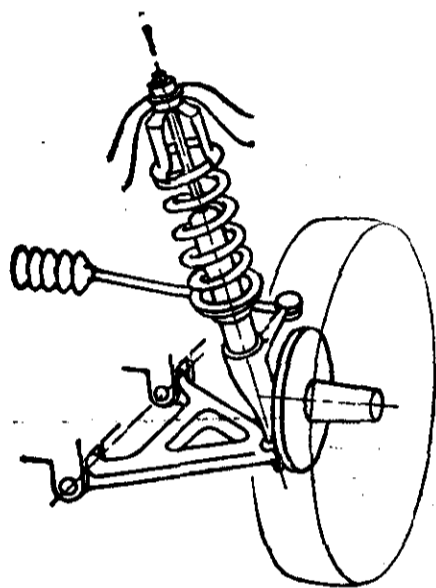


图 P6.1 麦克弗逊支撑悬挂系统

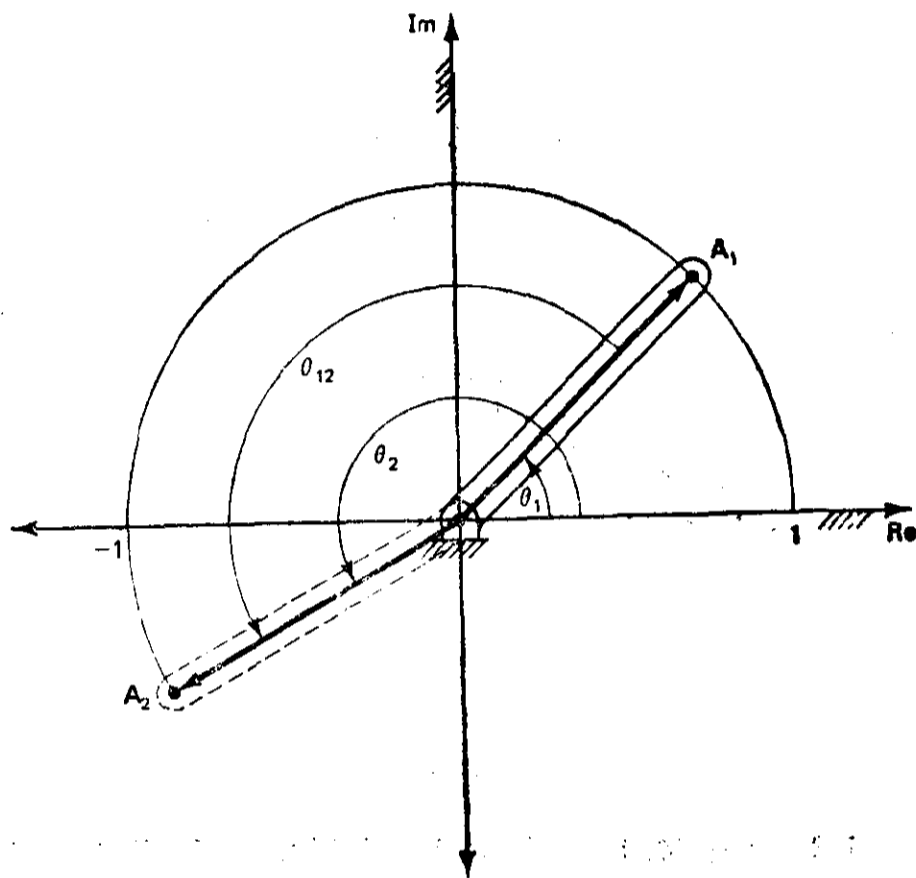


图 P6.2

6.3^① 确定图 6.6 中空间平行导引机构的自由度。

6.4 在图 P6.2 中, 如果 $A_1 = 0.707 + 0.707i$:

(a) 如果 $\theta_{12} = 165^\circ$, 用矩阵旋转算子方法求 A_2 ;

(b) $\theta_1 = ?$

(c) $\theta_2 = ?$

6.5 平面刚体上的三个点为给定: $A = 0.866 + 5i$, $B = 1 + i$, $C = 1.5 - i$ 。该刚体的运动已知为: $\theta = 90^\circ$, $\Delta x = 1$, 和 $\Delta y = 0.5$ 。用式 (6.18) 求出这些点的最终位置 (A' , B' 和 C'), 并按比例一步一步地画出其变换图形。

(提示: 先画旋转, 再画平移)

6.6 利用本章例 6.5 中所得到的旋转矩阵, 将由 A , B , C 和 D 四点所定义的四面体用坐标变换到最终位置。这四点的初始位置为:

$$\{A_1 B_1 C_1 D_1\} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 10 & 6 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

① 从这以后的习题是在加州 San Jose 的 IBM 公司的克利斯·波尔逊 (Chris Paulson) 帮助下编出的。

6.7 图 P6.3 中的空间机构包含一个被限制在绕 x 和 y 轴旋转的卡当 (Cardano) ① 联接。

- 设先转动 θ_x , 再转动 ψ_y , 利用基本变换矩阵相结合的方法, 确定该机构的变换算子;
- 设 P 的开始位置为 $P = [18 \ 32 \ 25 \ 1]^T$, $\theta_x = 33^\circ$, $\psi_y = 44^\circ$, 求先转动 θ_x , 再转动 ψ_y 后的点 P 位置;
- 从同样的初始位置开始, 但先转动 ψ_y , 再转动 θ_x , 求点 P 的最终位置;
- 这两个最终位置是否一样? 换句话说, θ_x 和 ψ_y 是否可以互换?

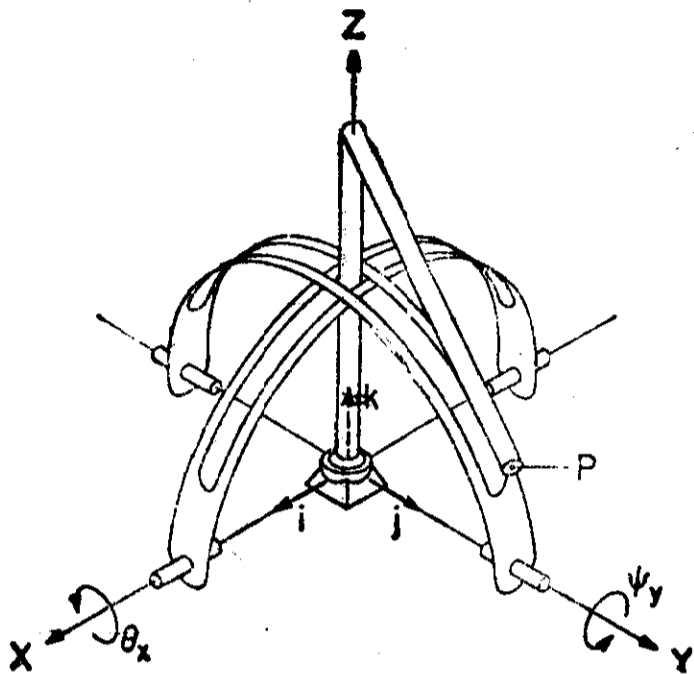


图 P6.3

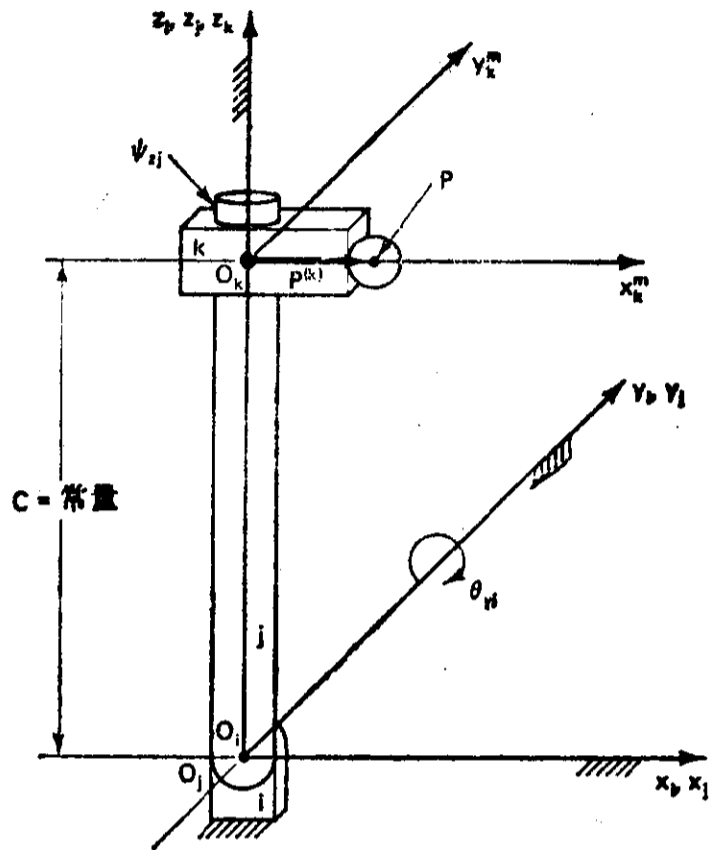


图 P6.4

6.8 对图 P6.4 所示的空间开环机构, 试利用基本变换矩阵相结合的方法, 求出从构件 k 的局部运动坐标系到构件 i 的固定坐标系的变换算子。注意, 因为构件 j 是 R-R 构件, 所以 θ_{y_j} 和 ψ_{x_k} 是运动变量。

6.9 ② 如图 P6.4 中的空间机构, 已知表示在第 k 个局部 (运动) 坐标系中的点 $P^k = (9, 0, 0)^T$, $\theta_{y_j} = 30^\circ$, $C = 36$, 和 $\psi_{x_k} = 180^\circ$, 求该点表示在固定的第 i 个坐标系中的位置 P^i 。并画出在 x_i, y_i, z_i 坐标系中的最终位置来验证你的结果。

6.10 对于图 P6.5 中的螺旋机构, 求出能够把表示在第 j 个运动坐标系中的向量 P^j 变换为表示在第 i 个“固定”坐标系中的向量 P^i 的变换算子。

6.11 对于图 P6.5 的螺旋联接机构, 如果 $P^j = (0, 2, 0)^T$, $\theta_{x_j} = 180^\circ$, $A = 2$, $B = -3$, $C = 2$ 而且螺旋导程 $k = 0.125$, 计算 P^i , 并画图验证。

6.12 利用基本变换矩阵相结合的方法, 对于图 P6.6 中平面开环机构, 求出从向量 P^j 到向量 P^i 的变换算子。

6.13 在图 P6.6 的平面开环机构中, 已知 $P^j = (2, 0, 0)^T$, $\theta_{y_i} = -90^\circ$, $\psi_{y_k} = 180^\circ$, $\phi_{y_1} = 180^\circ$, $A = 4$, 且 $B = 4$, 计算 P^i , 并按比例画图验证。

6.14 利用基本变换矩阵相结合的方法, 对于图 P6.7 中的空间开环机构, 求出从向量 P^j 到向量 P^i 的变换算子。

① 轴线相交并互相垂直的两个转动联接。

② 应用前一习题中导出算子。

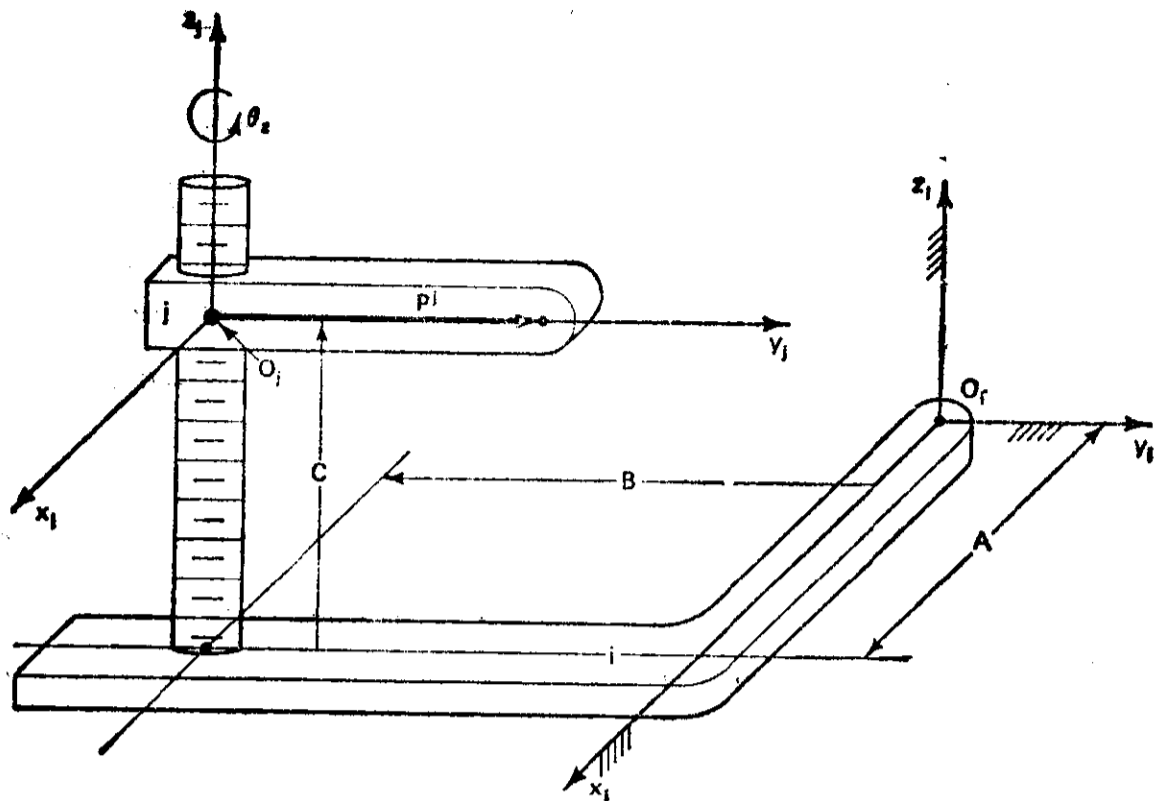


图 P6.5

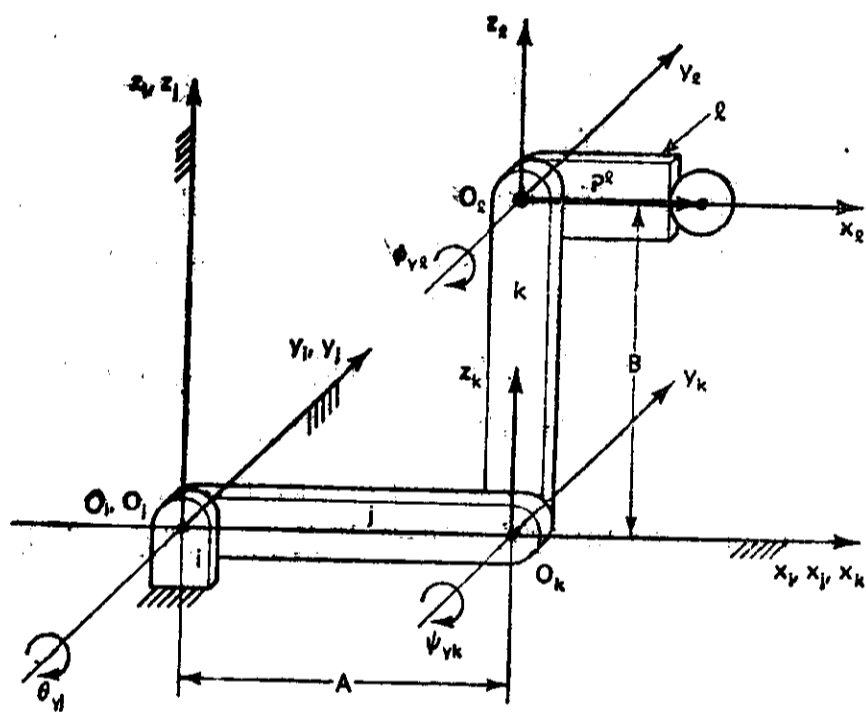


图 P6.6

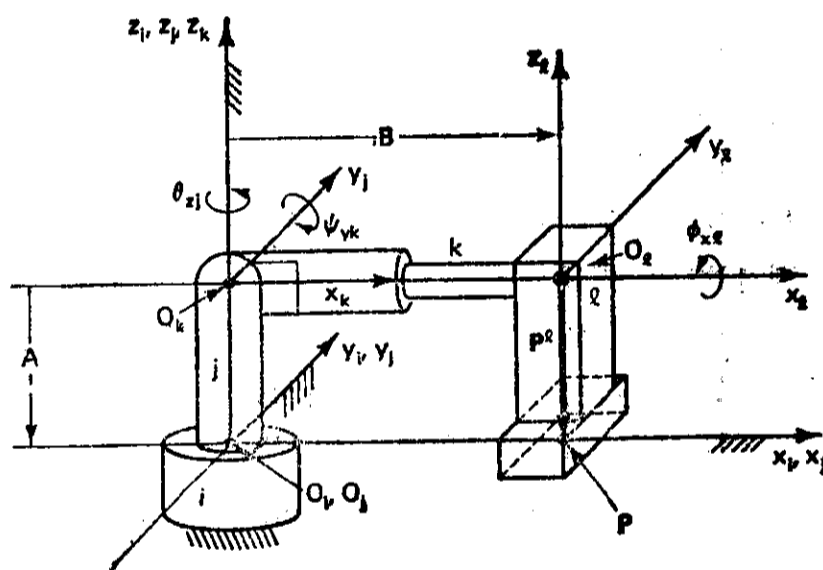


图 P6.7

6.15^① 对于图 P6.7 中的空间开环机构, 给定 $P^i = (0, 0, -0.5)^T$, $\theta_{z_1} = 180^\circ$, $\psi_{y_k} = -90^\circ$, $\phi_{x_1} = -90^\circ$, $A = 0.5$, 及 $B = 1.0$ 。求 P^i 。并按比例画图验证其结果。

6.16 在图 P6.4 中, 已知表示在第 k 个局部(运动)坐标系中, $P^k = (1.5, 0, 0)^T$, $C = 6$, $\theta_{y_j} = -45^\circ$, 而且 $\psi_{z_k} = 90^\circ$, 用习题 6.8 中求出的变换算子, 计算表示在空间开环机构第 i 个坐标系中的向量 P^i 。画出在 x_1, y_1, z_1 坐标系中的最终位置, 验证你所得到的结果。

6.17 对于图 P6.5 中的螺旋联接机构, 如果 $P^j = (0, 12, 0)^T$, $\theta_{z_1} = 14\pi \text{rad}$, $A = 12$, $B = -18$, $C = 12$, 导程 $\Rightarrow 1/12$, 利用习题 6.10 导出的变换算子, 计算 P^i , 并按比例画图验证。

6.18 在图 P6.6 中, 已知 $P^i = (1, 0, 0)^T$, $\theta_{y_1} = -135^\circ$, $\psi_{y_k} = 180^\circ$, $\phi_{y_1} = 45^\circ$, $A = 2$, $B = 2$, 利用习题 6.12 所得的变换算子, 求出平面开环机构中的 P^i 并画图证实。

① 利用上题导出的算子。

6.19 在图 P6.7 中,已知 $P^i = (0, 0, -2)^T$, $\theta_{zj} = 180^\circ$, $\psi_{yk} = -45^\circ$, $\phi_{xl} = 0^\circ$, $A=2$, $B=4$, 利用习题 6.14 所得的变换算子,求空间开环机构中的 P^i , 并画图证实。

6.20 对于图 P6.4 中的空间机构, 已知表示在第 k 个局部(运动)坐标系中, $P^k = (1, 0, 0)^T$, $C=4$, $\theta_{yj} = -60^\circ$, 并且 $\psi_{zk} = 135^\circ$, 利用习题 6.8 中导出的变换算子, 求出表示在第 i 个坐标系中的 P^i , 并按比例画图来验证。

6.21 对于图 P6.4 中的空间机构, 已知表示在第 k 个局部(运动)坐标系中, $P^k = (16, 0, 0)^T$, $C=64$, $\theta_{yj} = 30^\circ$, 且 $\psi_{zk} = -45^\circ$, 利用习题 6.8 中导出的变换算子, 求出表示在第 i 个坐标系中的 P^i , 并按比例画图来验证。

6.22 在图 P6.5 中, 如果 $P^j = (0, 4.5, 0)^T$, $\theta_{zj} = -3.5\pi\text{rad}$, $A=4.5$, $B=-6.75$, $C=5$, 及导程 $k = \frac{1}{16}$, 利用习题 6.10 中得到的变换算子, 求出螺旋机构的 P^i , 并按比例画图来验证。

6.23 在图 P6.5 中, 如果 $P^j = (0, 15, 0)^T$, $\theta_{zj} = -6.25\pi\text{rad}$, $A=15$, $B=-22.5$, $C=16$, 及导程 $k = \frac{1}{8}$, 利用习题 6.10 中得到的变换算子, 求出螺旋机构的 P^i , 并按比例画图来验证。

6.24 在图 P6.6 中, 已知 $P^i = (2.75, 0, 0)^T$, $\theta_{yj} = -60^\circ$, $\psi_{yk} = 120^\circ$, $\phi_{yl} = -45^\circ$, $A=5.5$, 及 $B=5.5$, 利用习题 6.12 中得到的变换算子, 求出平面机构的 P^i , 并按比例画图来验证。

6.25 在图 P6.6 中, 已知 $P^i = (18, 0, 0)^T$, $\theta_{yj} = -30^\circ$, $\psi_{yk} = 45^\circ$, $\phi_{yl} = -90^\circ$, $A=40$, 及 $B=40$, 利用习题 6.12 中得到的变换算子, 求出平面机构的 P^i , 并按比例画图来验证。

6.26 在图 P6.7 中, 已知 $P^i = (0, 0, -4.5)^T$, $\theta_{zj} = 45^\circ$, $\psi_{yk} = -60^\circ$, $\phi_{xl} = 30^\circ$, $A=4.5$, 及 $B=9$, 利用习题 6.14 中得到的变换算子, 求出空间机构的 P^i , 并按比例画图来验证。

6.27 在图 P6.7 中, 已知 $P^i = (0, 0, -7.5)^T$, $\theta_{zj} = -150^\circ$, $\psi_{yk} = -45^\circ$, $\phi_{xl} = -30^\circ$, $A=7.5$, 及 $B=14.5$, 利用习题 6.14 得到的变换算子, 求出空间机构的 P^i , 并按比例画图来验证。

6.28 我们通常需要对包含细节(掩蔽了机构结构)的专利或蓝图进行说明。参考文献[31]引用了有下列字句的这种例子:“把旋转运动变为往复运动的机构[Boxall, 1939]。”图 P6.8(Boxall 的图 4)表示了基本概念。专利对这幅图描述如下:

高速往复泵的柱塞 10 可以在支承于框架件 12 上的圆筒内滑动。要求柱塞 10 作往复运动, 这是由安装在轴承上的轴 13 的旋转来实现的, 轴承则固定在框架件 15 上。所有的框架件都支承在机架 17 上。

在轴 13 的一端有一个偏心的凹槽, 槽外有盖 18, 槽内装有圆柱形杆 20 的球形端头 19。圆柱形杆的另一端 21 处是一个叉子。它被一个管状的销钉 22 与弯曲连杆 24 的舌形端 23 相销接。弯曲连杆的另一端是一个球

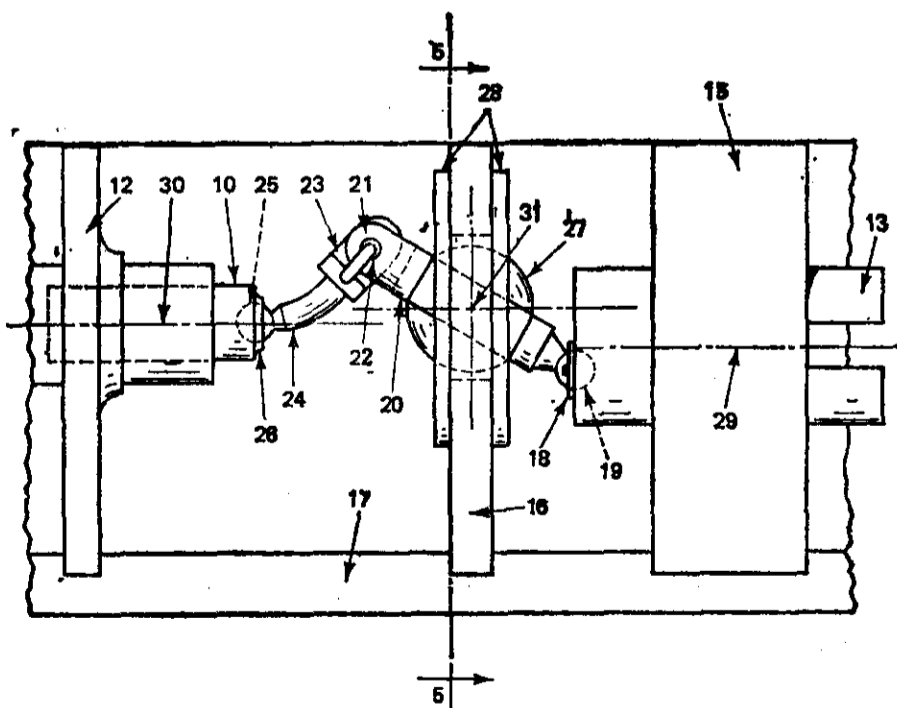


图 P6.8 Boxall 专利中的图 4, 参考文献[31][105]

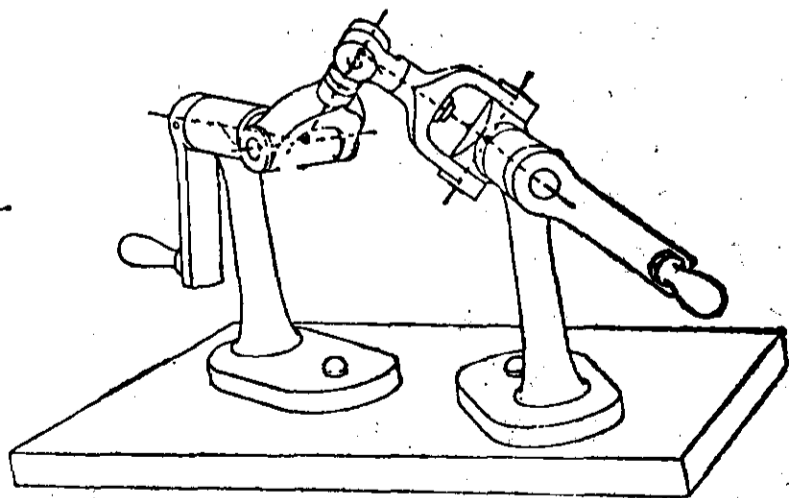


图 P6.9 Clemens 联轴器, (文献 [62])

头 25, 球头与柱塞 19 一端上的盖板 26 相连。

圆柱形杆 20 可以在球 27 的圆孔中滑动, 球 27 支承在平板 28 中的部分球形槽内摆动, 板 28 固定到框架件 16 上。

- (a) 确定该机构的基本运动学结构, 并画出运动简图;
- (b) 确定这个装置的自由度;
- (c) 从答案(b)中是否可以导出另一种设计方案?

6.29 试确定图 P6.9 中空间机构的自由度。

6.30 试确定图 P6.10 中空间机构的自由度。

6.31 试确定图 P6.11 中空间机构的自由度。

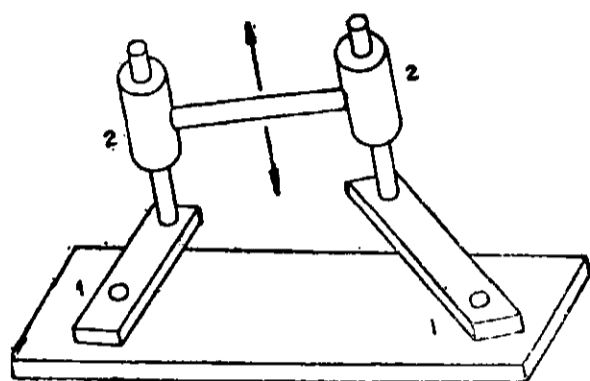


图 P6.10 文献[62]中的一种机构

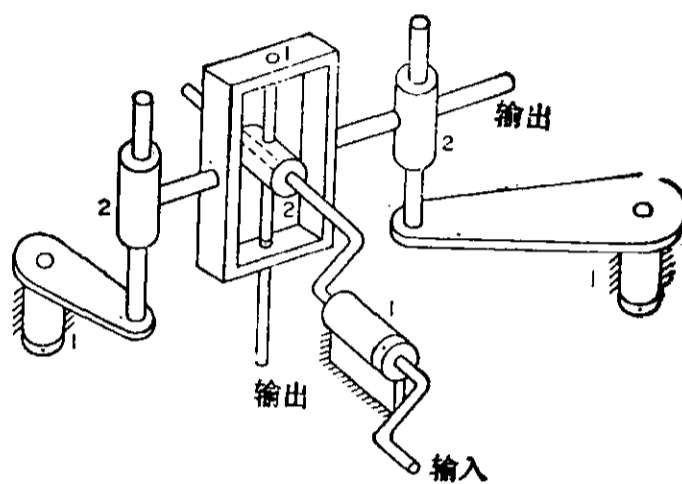


图 P6.11 文献[62]中的一种机构

6.32 图 P6.12 所示的是一个五轴工业机器人。利用节 6.11 和 6.12 中的基本矩阵, 确定该机器人中手部位置相对于固定坐标系的数学模型。

图 P6.12 五轴工业机器人(Pickomatic System-Fraser Automation 公司提供)

图 P6.13 三轴工业机器人(由 Pickomatic System-Fraser Automation 提供)

6.33 图 P6.13 所示的是一个三轴(RPP)工业机器人。利用节 6.11 和 6.12 中的基本矩阵, 确定这个机器人中手部位置相对于固定坐标系的数学模型。

6.34 图 P6.14 所示的是一个五轴工业机器人。利用节 6.11 和 6.12 中的基本矩阵, 确定该机器人中手部位置相对固定坐标系的数学模型。

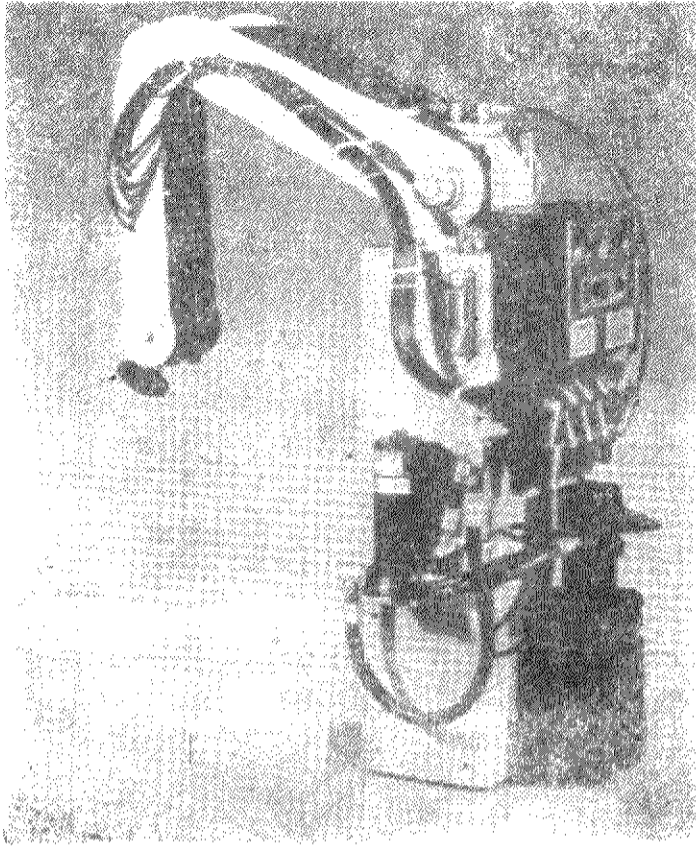


图 P6.14 五轴工业机器人(由 Thermwood Corp., Inc 提供)

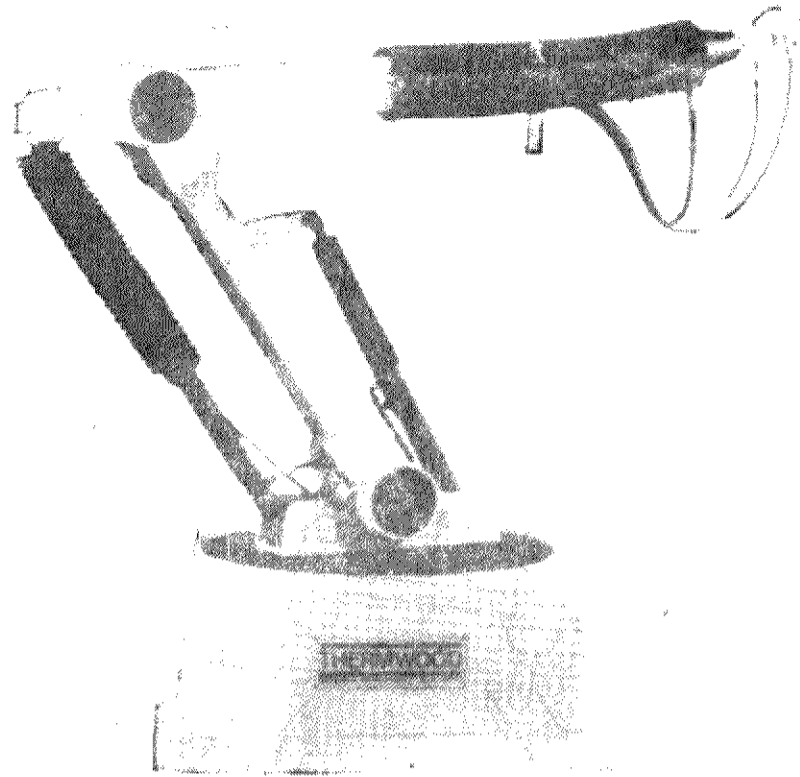


图 P6.15 六轴工业机器人(由 Thermwood Corp., Inc. 提供)

6.35 图 P6.15 所示的是一个六轴工业机器人(三个互相垂直的回转联接位于手臂的端点), 利用节 6.11 和 6.12 中的基本矩阵, 确定该机器人中手部位置相对固定坐标系的数学模型。

6.36 图 P6.16 所示的是一个五轴工业机器人(RRPRR)。利用节 6.11 和 6.12 中的基本矩阵, 确定该机器人中手部位置相对于固定坐标系的数学模型。

图 P6.16 工业机器人(由 United States Robots 提供)

图 P6.17 五轴工业机器人(General Electric Inc. 提供)

6.37 图 P6.17 所示的是一个含有一个闭环链的五轴工业机器人。这是一个什么样的闭链? 在这个型式的基础上对机器人进行分析是否简单一些? 你怎样分析这一机器人? 列出夹持器相对于固定坐标系的位置方程。

6.38 图 P6.12 和图 P6.14 所示的都是五轴机器人。比较它们的形式。它们的工作空间与图 P6.16 中的机器人相比,有何不同?

6.39 确定图 6.49 中空间曲柄滑块机构中的滑块的位置、速度和加速度特性(读者可用 SAM 计算机程序)。图 6.49 中的杆长规定如下:

$$L_1=3\text{in}, L_2=4\text{in}, L_3=9\text{in}, L_4=1\text{in}, L_5=12\text{in}$$

$$L_6=4\text{in}, \theta_1=90^\circ, \theta_5=-90^\circ$$

已知输入件 2 的恒定角速度为 6.3 rad/s, 初始角为 90° 。

6.40 除 $L_3=8\text{in}$ 以外, 其它条件与题 6.39 相同。在长度上这 1in 的改变成问题吗?

6.41 除 $L_1=1\text{in}, L_2=4\text{in}, L_3=30\text{in}, L_4=1\text{in}, L_5=31\text{in}, L_6=5\text{in}, \theta_1=0^\circ, \theta_5=0^\circ$ 以外, 与题 6.39 相同。

6.42 图 C.11 示出七种不同的恒速联轴器。作为需要这样一种机构的设计者, 请列出每一种联轴器的优缺点。

练 习

6.1 在图 6.22a 中, 设 $A_1=78+52i, Q=52+26i, \theta=90^\circ$ 。试将 A_1 和 Q 表示成齐次 3×1 列向量的形式, 求出齐次 3×3 矩阵算子 $[T(-Q)], [R(\theta)]$ 和 $[T(+Q)]$, 并把这些算子并置运算去求 $[D(\theta, Q_x, Q_y)]$, 然后将这一并置算子应用于 $\{A_1\}$ 以求 $\{A_2\}$ 。最后再将 $\{A_2\}$ 用复向量形式表示, 并按比例画图 6.22a 来验证你的结果。

6.2 参考图 6.24 及课文中有关说明, 做下面几种情况的练习:

(a) 将点 A 置于第一象限(即 $a_x > 0, a_y > 0, a_z > 0$)。

(b) 将点 A 置于第二象限(即 $a_x < 0, a_y > 0, a_z > 0$)。

(c) 将点 A 置于第三象限(即 $a_x < 0, a_y < 0, a_z > 0$)。

(d) 将点 A 置于第四象限(即 $a_x > 0, a_y < 0, a_z > 0$)。

(e) 将点 A 置于第五象限(即 $a_x > 0, a_y > 0, a_z < 0$)。

(f) 将点 A 置于第六象限(即 $a_x < 0, a_y > 0, a_z < 0$)。

(g) 将点 A 置于第七象限(即 $a_x < 0, a_y < 0, a_z < 0$)。

(h) 将点 A 置于第八象限(即 $a_x > 0, a_y < 0, a_z < 0$)。

6.3 用示于图 6.23b、c、d 和 6.24 中的正交投影和画法几何的方法, 检查例 6.6 的结果。

6.4 用并置运算, 推导先作沿通过原点的轴线平移, 再绕同一轴线转动的算子。这算子是否与式 6.30 的螺旋算子一样? 用例 6.8 中的数据作为例子来说明你的结果。

6.5 将式(6.69)写成完全矩阵的形式, 并且用矩阵的乘法验证式(6.70)。

6.6 将式(6.72)写成完全矩阵的形式, 并且用矩阵的乘法验证式(6.73)。

6.7 在图 6.41 中, 设构件 n 上的点 P 的位置由 $P^i = (4, 12, 9)^T$ (全部坐标的单位为毫米) 来确定。如果 $A_j = 58, B_j = -9, \alpha_{y_i} = -30^\circ, \beta_{x_k} = -45^\circ$, 且 $\gamma_{z_k} = 45^\circ$, 根据式(6.73)确定 P^i , 并参照图 6.40 按比例画出正交投影图来验证。(提示: 复习例 6.11。)

6.8 将 S_{01} 左乘 S_{12} 来证明式(6.78)。

6.9 用并置乘法证明式(6.79)。

6.10 用并置乘法证明式(6.81)和(6.82)的左边相等。

6.11 验证式(6.83)。

6.12 对各个基本矩阵取导数, 验证式(6.114)。

6.13 对各个基本矩阵取导数, 验证式(6.118)。

6.14 用熟悉的非奇异方阵求逆的规则, 证明式(6.131)。

6.15 证明:一个 $n \times n$ 非奇异矩阵 $[A]$ 的逆矩阵 $[A]^{-1}$ 可以用下法求得:先组成一个 n 行, $2n$ 列的矩阵 $[A|I]$,然后进行初等列运算一直到得到矩阵 $[I|B]$ 为止。这里 $[B][A]=[A][B]=[I]$,因此, $[B]=[A]^{-1}$ 。

6.16 假设适当的 θ_1, θ_2, L_2 值及点的位置向量,并进行 $[S_{02}][A_1 B_1 C_1 D_1]=[A_2 B_2 C_2 D_2]$ 的变换,以此来验证练习6.8中得到的 S_{12}^0 的数值,并按比例画图来验证你的结果。

9E

23

何

① 似应为 S_{02} ——译者注。

参 考 文 献

1. Alexander, R. M., and K. L. Lawrence, "An Experimental Investigation of the Dynamic Response of an Elastic Mechanism," *Journal of Engineering for Industry*, 96, no. 1 (February 1974), pp. 268-74.
2. Alizade, R. I., I. G. Novruzebekov, F. Freudenstein, and G. N. Sandor, "Optimum Synthesis of Path Generator Spatial Slider-Crank Mechanism," *Zhurnal Machinovedenie*, no. 1 (1980) (in Russian).
3. —, A. V. M. Rao, and G. N. Sandor, "Optimum Synthesis of Two-Degree-of-Freedom Planar and Spatial Function Generating Mechanisms Using the Penalty Function Approach," *Journal of Engineering for Industry*, 97, no. 2 (May 1975), pp. 629-34.
4. —, G. N. Sandor, and A. V. M. Rao, "Optimum Synthesis of Four-Bar and Offset Slider-Crank Planar and Spatial Mechanisms Using the Penalty Function Approach with Inequality and Equality Constraints," *Journal of Engineering for Industry*, 97, no. 3 (August 1975), pp. 785-90.
5. Alt, H., "The Geometry of Linkage Dwell Mechanisms," *Ing. -Arch.*, 3 (1932), pp. 394-411 (in German).
6. —, "Linkages of Dwell Mechanisms," *Zeitschrift des VDI*, 76 (1932), pp. 456-62, 533-37 (in German).
7. Badlani, M., and W. Kleinhenz, "Dynamic Stability of Elastic Mechanisms," *Journal of Mechanical Design*, 101, no. 1 (January 1979), pp. 149-53.
8. —, and A. Midha, "A Hierarchy of Equations of Motion of Planar Mechanisms with Elastic Link," *Proceedings of the Sixth Applied Mechanisms Conference (Denver, Colorado, October 1979)*, pp. XXII-1-4. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1979.
9. Bagci, C., "Dynamic Force and Torque Analysis of Mechanisms Using Dual Vectors and 3×3 Screw Matrix," *Journal of Engineering for Industry*, 94 (1972), pp. 738-45.
10. —, "Force and Torque Analyses of Plane Mechanisms by Matrix Displacement — Direct Element Method," *International Symposium on Linkages and Computer Design Methods (Bucharest, Romania, June 1973)*, pp. 77-97.
11. Ball, R. S., *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge: Cambridge University Press, 1900.
12. Bathe, K. J., and E. K. Wilson, "Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods," *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1, no. 3 (1973), pp. 283-91.
13. Beggs, J. S., *Mechanism*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

14. Benedict, C. E., and D. Tesar, "Analysis of a Mechanical System Using Kinematic Influence Coefficients," *Proceedings of the First Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, July 1969)*, Paper No. 37. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1969.
15. —, and D. Tesar, "Optimal Torque Balancing for a Commex Stamping and Indexing Machine," ASME Paper No. 70-Mech-82, 1970.
16. Berkof, R. S., "Force Balancing of a Six-Bar Linkage," *Proceedings of the Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, pp. 1082-85. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1979.
17. —, "The Input Torque in Linkages," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 14(1979), pp. 61-73.
18. —, "On the Optimization of Mass Distribution in Mechanisms," Ph. D. thesis, City University of New York, 1969.
19. —, "Complete Force and Moment Balancing of Inline Four-Bar Linkages," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 8, no. 3 (1973), pp. 397-410.
20. —, and G. G. Lowen, "A New Method for Completely Force Balancing Simple Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, no. 1 (1969), pp. 21-6.
21. —, and G. G. Lowen, "Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 93B, no. 1 (1971), pp. 53-60.
22. —, J. Boomgaarden, A. G. Erdman, et al., "Mechanism Case Studies VI," ASME Paper No. 82-DET-47, 1982.
23. —, A. G. Erdman, D. Hewitt, T. Bjorklund, D. Harvey, et al., "Mechanism Case Studies IV," ASME Paper No. 78-DET-19, 1978.
24. Beyer, R., *Kinematic Synthesis of Mechanisms*. Translated by Kuenzel, Chapman, and A. S. Hall, Jr., 1962. New York: McGraw-Hill Book Company, 1963.
25. Bickford, J. H., *Mechanisms for Intermittent Motion*. New York: Industrial Press, Inc., 1972.
26. Bisshopp, K. E., "Rodrigues' Formula and the Screw Matrix," *Journal of Engineering for Industry*, 91, no. 1 (February 1969), pp. 178-84.
27. Bjorklund, T., and A. G. Erdman, "Case Study: The Thing," *Proceedings of the Fifth Applied Mechanisms Conference (Oklahoma City, Oklahoma, November 1977)*. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1977.
28. Black, Ted, "Designing Geared Five-Bar Mechanisms," *Design Engineering*, (May 1980), pp. 51-4.
29. Bobillier, E., *Cours de géométrie*, 12th ed., p. 232, 1870.
30. Bonhom, W. E., "Calculating the Response of a Four-Bar Linkage," ASME Paper No. 70-Mech-69, 1970.
31. Boxall, F. C., *Mechanism for Converting Rotary Motion into Reciprocating Motion*, U. S. Patent No. 2,173,247, October 31, 1939.
32. Broniarek, C. A., and G. N. Sandor, "Dynamic Stability of an Elastic Parallelogram Link-

- age," *Journal of Nonlinear Vibration Problems*, 12, pp. 315-25. Warsaw: Polish Academy of Science/Institute of Basic Technical Problems, 1971.
33. Carnahan, B., H. A. Luther, and J. O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969.
 34. Carpenter, W. C., "Viscoelastic Stress Analysis," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 4, no. 3 (1972), pp. 357-66.
 35. Carson, W. L., and J. M. Trummel, "Time Response of Lower Pair Spatial Mechanisms Subjected to General Forces," ASME Paper No. 68-Mech-57, 1968.
 36. Caughey, T. K., "Classical Normal Modes in Damped Linear Systems," *Journal of Applied Mechanics*, 27 (1960), pp. 269-71.
 37. Cayley, A., "On Three-bar Motion," *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 7, 1876.
 38. Chace, M. A., "Using DRAM and ADAMS Programs to Simulate Machinery, Vehicles," *Agricultural Engineering*, (November 1978), pp. 16-18.
 39. —, "Vector Analysis of Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 84, no. 2 (May 1963), pp. 289-96.
 40. —, and J. C. Angell, "Interactive Simulation of Machinery with Friction and Impact Using DRAM," SAE Paper No. 770050, 1977.
 41. —, and J. C. Angell, "User's Guide to DRAM (Dynamic Response of Articulated Machinery)," Design Engineering Computer Aids Lab, University of Michigan, 1972.
 42. Chakraborty, J., and S. G. Dhande, *Kinematics and Geometry of Planar and Spatial Cam Mechanisms*. New Delhi, India: Wiley Eastern Limited, 1972.
 43. Chase, T., A. G. Erdman, and D. Riley, "Synthesis of Six Bar Linkages Using an Interactive Package," *Proceedings of the Seventh Applied Mechanisms Conference (Kansas City, Missouri, December 1981)*, Paper No. LI, 5 pgs. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1981.
 44. Chebyshev, P. L., "Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes (1952)," in *Oeuvres de P. L. Tchebychef*, Vol. 1. St. Petersburg: Markoff et Sonin, 1899; *Modern Mathematical Classics: Analysis*, S730. Ed. Richard Bellom. New York: Dover Publications, Inc., 1961.
 45. Chen, P., and B. Roth, "A Unified Theory for the Finitely and Infinitesimally Separated Position Problems of Kinematic Synthesis," *Journal of Engineering for Industry*, 91 (1969).
 46. Chironis, N. P., *Machine Devices and Instrumentation*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
 47. —, *Mechanisms, Linkages, and Mechanical Controls*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.
 48. Clough, R. W., "Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response," *U. S. -Japan Seminar on Recent Advances in Matrix Models of Structural Analyses and Design (Tokyo, Japan, 1969)*, pp. 441-86. R. H. Gallagher, Y. Yamada, and J. T. Oden, eds. Huntsville,

Alabama: University of Alabama Press, 1971.

49. Cook, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1974.
50. Cronin, D. L., "MacPherson Strut Kinematics," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 16, no. 6 (1981), pp. 631-44.
51. Dahlquist, G., and A. Bjorck, *Numerical Methods*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1974.
52. Denavit, J., "Displacement Analysis of Mechanisms Based on (2×2) Matrices of Dual Numbers," *VDI Berichte*, 29 (1958).
53. Desai, C. S., *Elementary Finite Element Method*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1974.
54. —, and J. F. Abel, *Introduction to the Finite Element Method*. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
55. Dhande, S. H., B. S. Bhadoria, and J. Chakraborty, "A Unified Approach to the Analytical Design of Three-Dimensional Cam Mechanisms," ASME Paper No. 74-DET-8, 1974.
56. Dijkstra, E. A., *Motion Geometry of Mechanisms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
57. —, "Six-Bar Cognates of Watt's Form," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 1 (1971), pp. 183-90.
58. Dimarogonas, A. D., *Vibrating Engineering*, p. 568. St. Paul, Minnesota: West Publishing Company, 1976.
59. —, G. N. Sandor, and A. G. Erdman, "Synthesis of a Geared N -Bar Linkage," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 1 (February 1971), pp. 157-64.
60. Dimentberg, F. M., "A General Method for the Investigation of Finite Displacements of Spatial Mechanisms and Certain Cases of Passive Joints," *Akademiya Nauk SSSR, Trudy Sem. Teor. Mash. Mekh.*, 5, no. 17 (1948), pp. 5-39.
61. —, *The Screw Calculus and Its Applications in Mechanics*. Moscow: Izdatel'stvo "Nauka," Glavnaya Redaktsiya Fiziko-Matematicheskoy Literatury, 1965.
62. Dixon, M. W., and C. O. Huey, Jr., "Fundamentals of Kinematic Synthesis," 1973 *Textile Engineering Conference (Charlotte, North Carolina, April 1973)*, pp. 1-31.
63. Diziuglu, B., "Theory and Practice of Spatial Mechanisms with Special Positions of the Axes," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 13 (1978), pp. 139-53.
64. Dobrovolskii, V. V., "General Investigation of Motion of the Links in a Seven-Link Spatial Mechanism by the Method of Spherical Images," *Akademiya Nauk SSSR, Trudy Sem. Teor. Mash. Mekh.*, 12, no. 47 (1952), pp. 52-62.
65. Dubowsky, S., "On Predicting the Dynamic Effects of Clearance in Planar Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 96, no. 1 (February 1974), pp. 317-23.
66. —, and F. Freudenstein, "Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Clearances, Part I: Formation of Dynamic Model; Part II: Dynamic Response," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 1 (February 1971), pp. 305-16.

67. —, and T. N. Gardner, "Dynamic Interactions of Link Elasticity and Clearance Connection," *Journal of Engineering for Industry*, 97, no. 2 (May 1975), pp. 652-61.
68. —, and T. N. Gardner, "Design and Analysis of Multi-Link Flexible Mechanisms with Multiple Clearance Connections," *Journal of Engineering for Industry*, 99, no. 1 (February 1977), pp. 88-96.
69. —, and M. F. Moening, "An Experimental and Analytical Study of Impact Forces in Elastic Mechanical Systems with Clearances," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 13 (1978), pp. 451-65.
70. —, and S. C. Young, "An Experimental and Analytical Study of Connection Forces in High-Speed Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 97, no. 4 (1975), pp. 1166-74.
71. Duffy, J., "An Analysis of Five, Six and Seven-Link Spatial Mechanisms," *Proceedings of the Third World Congress for the Theory of Machines and Mechanisms (Kupari, Yugoslavia, 1971)*, Vol. C, pp. 83-98.
72. —, *Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1981.
73. —, "A Derivation of Dual Displacement Equations for Spatial Mechanisms Using Spherical Trigonometry," *Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée*, Part 1, 6 (1971); Part 2, 1 (1972); Part 3, 3 (1972).
74. Erdman, A. G., "Dynamic Synthesis of a Variable Speed Drive," *Proceedings of the Third Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, November 1973)*, Paper No. 38. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1973.
75. —, "A General Method for Kineto-elastodynamic Analysis and Synthesis of Mechanisms," Doctoral dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, 1972.
76. —, "A Guide to Mechanism Dynamics," *Proceedings of the Third Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, November 1973)*, Paper No. 6. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1973.
77. —, "Three and Four Precision Point Kinematic Synthesis of Planar Linkages," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 16, (1981), pp. 227-45.
78. —, and W. L. Carson, "Teaching Unit on Complex Numbers as Applied to Linkage Modeling," in *Monograph on Mechanism Design*, Paper No. 12, 7 pgs. New York: McGraw-Hill Book Company; NSF Report No. GK-36624, 1977.
79. —, and J. E. Gustafson, "LINCAGES: Linkage Interactive Computer Analysis and Graphically Enhanced Synthesis Package," ASME Paper No. 77-DTC-5, 1977.
80. —, and Dana Lonn, "Synthesis of Planar Six-Bar Linkages for Five Precision Conditions by Complex Numbers," in *Monograph on Mechanism Design*, Paper No. 59, 7 pgs. New York: McGraw-Hill Book Company; NSF Report No. GK-36624, 1977.
81. —, and Dana Lonn, "A Unified Synthesis of Planar Six-Bar Mechanisms Using Burmester Theory," *Proceedings of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Newcastle-upon-Tyne, England, September 1975)*.

82. —, and A. Midha, "Man-Made Mechanism Models Multiply Mental Motivation," *Proceedings of the Third Applied Mechanics Conference (Stillwater, Oklahoma, November 1973)*, Paper No. 3. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1973.
83. —, and J. A. Peterson, "Operator for a Casement-Type Window," U. S. Patent No. 4,266,371, May 12, 1981.
84. —, and D. Riley, "Computer Aided Linkage Design Using the LINCAGES Package," ASME Paper No. 81-DET-121, 1981.
85. —, and D. Riley, "Computer Graphics and Computer Aided Design in Mechanical Engineering at the University of Minnesota," *Computers in Education*, 5 (Summer 1981), pp. 229-43.
86. —, and G. N. Sandor, "Kinematic Synthesis of a Geared-Five-Bar Function Generator," *Journal of Engineering for Industry*, 93B, no. 1 (February 1971) pp. 157-64.
87. —, and G. N. Sandor, "Kineto-elastodynamics—A Review of the State of the Art and Trends," *Mechanism and Machine Theory*, 7 (1972), pp. 19-33.
88. —, and G. N. Sandor, "Applied Kineto-elastodynamics," *Proceedings of the Second Applied Mechanisms Conference*, pp. 21-1 to 21-17. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1971.
89. —, and P. Starr, "Towards Technology Transfer: Kinematic and Dynamic Analysis of Linkages for the Design Engineer," *Proceedings of the First ASME Design Technology Conference in Machine Design (October 1974)*, pp. 335-46. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1974.
90. —, E. Nelson, J. Peterson, and J. Bowen, "Type and Dimensional Synthesis of Casement Window Mechanisms," ASME Paper No. 80-DET-78, 1980; *Mechanical Engineering*, (December 1981), pp. 46-55.
91. —, G. N. Sandor, and R. G. Oakberg, "A General Method for Kineto-elastodynamic Analysis and Synthesis of Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 94, no. 4 (February 1971), pp. 11-16.
92. —, C. Tekse, and D. Ferguson, "Application of Burmester Theory—An Eight-Bar Inserting Head Mechanism," *Proceedings of the Fourth Applied Mechanisms Conference (Chicago, November 1975)*, pp. 11-1 to 11-7. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1975.
93. —, R. K. Westby, G. R. Fichtinger, and F. R. Tepper, "Mechanisms Case Studies II: A New Derailleur Mechanism," ASME Paper No. 74-DET-56, 1974; *Mechanical Engineering*, 97 (July 1975), pp. 36-7.
94. Ferguson, D. E., A. G. Erdman, and D. A. Frohrib, "Design Analysis of Feedbows," *Proceedings of the Fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Montreal, July 1979)*, pp. 61-4.
95. Fiacco, A. V., and G. P. McCormick, *Nonlinear Programming—Sequential Unconstrained Minimization Technique*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968.
96. Fichtinger, G., R. Westby, and A. Erdman, "Combination of Design Disciplines Offers Series of Novel Mechanisms," *Product Engineering*, 45, no. 12 (December 1974), pp.

35-6.

97. Filemon, E., "In Addition to the Burmester Theory," *Proceedings of the Third World Congress for the Theory of Machines and Mechanisms (Kupari, Yugoslavia, 1971)*, Vol. D, pp. 63-78.
98. —, "Useful Ranges of Centerpoint Curves for Design of Crank-and-Rocker Linkages," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 7 (1972), pp. 47-53.
99. Fletcher, R., and M. J. D. Powell, "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," *Computer Journal*, 6, no. 2 (1963), pp. 163-68.
100. Fox, R. L., *Optimization Methods for Engineering Design*, 2nd ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1973.
101. —, and K. C. Gupta, "Optimization Technology as Applied to Mechanism Design," *Journal of Engineering for Industry*, 95 (1973), pp. 657-63.
102. —, and K. D. Willmert, "Optimum Design of Curve-Generating Linkage with Inequality Constraints," *Journal of Engineering for Industry*, 89, no. 1 (February 1967), pp. 144-52.
103. Freudenstein, F., "An Analytical Approach to the Design of Four-Link Mechanisms," *Transactions of the ASME*, 76 (1954), pp. 483-92.
104. —, "Harmonic Analysis of Crank-and-Rocker Mechanisms with Applications," *Journal of Applied Mechanics*, 81E (1959), pp. 673-75.
105. —, "Structural Error Analysis in Plane Kinematic Synthesis," *Journal of Engineering for Industry*, 81, no. 1 (January 1959), pp. 15-22.
106. —, and E. R. Maki, "The Creation of Mechanisms According to Kinematic Structure and Function," General Motors Research Publications, GMR-3073, September 1979; *International Journal for the Science of Architecture and Design* (1980).
107. —, and G. N. Sandor, "Kinematics of Mechanisms," in *Mechanical Design and System Handbook*, pp. 4.1-4.68. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964.
108. —, and G. N. Sandor, "On the Burmester Points of a Plane," *Journal of Applied Mechanics*, 28, no. 1 (March 1961), pp. 41-9; Discussion and Authors' Closure, *Journal of Applied Mechanics*, 28, no. 3 (September 1961), pp. 473-75.
109. —, and G. N. Sandor, "Synthesis of Path-Generating Mechanisms by Means of a Programmed Digital Computer," *Journal of Engineering for Industry*, 81B, no. 2 (May 1959), pp. 159-68.
110. Garrett, R. E., and A. S. Hall, Jr., "Effect of Tolerance and Clearance in Linkage Design," *Journal of Engineering for Industry*, 91B (1969), pp. 198-202.
111. Giese, R. C., "Three Position Dyad Linkage Synthesis Summary," Master's Paper, University of Minnesota, August 1982.
112. Goldstein, H., *Classical Mechanics*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1957.
113. Golebiewski, E. P., and J. P. Sadler, "Analytical and Experimental Investigation of Elastic Slider-Crank Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 98, no. 4 (November 1976), pp. 1266-71.

114. Goudreau, G. L., and R. L. Taylor, "Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics," *Computer Methods in Applied Mechanisms and Engineering*, 2, no. 1 (1973), pp. 69-97.
115. Gupta, K. C., "Design of Four-Bar Function Generators with Mini-Max Transmission Angles," *Journal of Engineering for Industry*, 99, no. 2 (1977), pp. 360-66.
116. —, "A General Theory for Synthesizing Crank-Type Four Bar Function Generators with Transmission Angle Control," *Journal of Applied Mechanics*, 45, no. 2 (June 1968).
117. —, "Synthesis of Position, Path and Function Generating 4-Bar Mechanisms with Completely Rotatable Driving Links," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 15 (1980), pp. 93-101.
118. Gupta, V. K., "Kinematic Analysis of Plane and Spatial Mechanisms," *Transactions of the ASME, Series B*, 95, no. 2 (1973), pp. 481-86.
119. Hagen, D., A. G. Erdman, D. Harvey, and J. Tacheny, "Rapid Algorithms for Kinematic and Dynamic Analysis of Planar Rigid Linkages with Revolute Joints," ASME Paper No. 78-DET-64, 1978.
120. Hain, K., *Applied Kinematics*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1967.
121. Hall, A. S. Jr., *Kinematics and Linkage Design*. West Lafayette, Indiana: Balt Publishers, 1961.
122. Halter, J. M., "Force Synthesis to Produce a Desired Time Response of Mechanisms," Ph. D. dissertation, University of Missouri—Columbia, May 1975.
123. Han, C.-Y., "Balancing of High Speed Machinery," *Journal of Engineering for Industry*, 89, no. 1 (1967), pp. 111-18.
124. Harris, C. M., and C. E. Crede, "Numerical Methods of Analysis," *Shock and Vibration Handbook*, 1 ed., Vol. 2, pp. 28-32 to 28-36. New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
125. Harrisberger, L., "A Number Synthesis Survey of Three-Dimensional Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 87, no. 2 (May 1965), pp. 213-20.
126. Hartenberg, R. S., and J. Denavit, *Kinematic Synthesis of Linkages*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964.
127. Hartmann, W., "A New Method for Seeking the Circle of Curvature," *Zeitschrift des VDI*, (1983), p. 95 (in German).
128. Hernandez, M., G. N. Sandor, and D. Kohli, "Closed-Form Analytic Synthesis of R-Sp-R Three-Link Function Generator for Multiply Separated Positions," ASME Paper No. 82-DET-75, 1982.
129. Hertrich, F. R., "How to Balance High-Speed Mechanisms with Minimum-Inertia Counterweights," *Machine Design*, 35, no. 6 (March 1963), pp. 160-64.
130. Hinkle, Rolland T., *Kinematics of Machines*, 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1960.
131. Holand, I., and K. Bell, eds., *Finite Element Methods in Stress Analysis*. Trondheim,

Norway: Tapir Press, 1969.

132. Hrones, J. A., and G. L. Nelson, *Analysis of the Four-Bar Linkage*. New York: The Technology Press of MIT and John Wiley & Sons, Inc., 1951.
133. Hunt, K. H., "Constant-Velocity Shaft Couplings—A General Theory," *Journal of Engineering for Industry*, (1973), pp. 455-64.
134. Hurty, W. C., and M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1964.
- 95 135. Imam, I., "A General Method for Kineto-elastodynamic Analysis and Design of High-Speed Mechanisms," Doctoral dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, 1973.
- 25 136. —, "High-Speed Mechanism Design—A General Analytical Approach," *Journal of Engineering for Industry*, 97, no. 2 (May 1975), pp. 609-28.
137. —, and G. N. Sandor, "A General Method of Kineto-elastodynamic Design of High Speed Mechanisms," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 8, no. 4 (Winter 1973), pp. 497-516.
138. —, G. N. Sandor, and S. N. Kramer, "Deflection and Stress Analysis in High-Speed Planar Mechanisms with Elastic Links," *Journal of Engineering for Industry*, 95, no. 2 (May 1973), pp. 541-48.
139. Jandrasits, W. G., and G. G. Lowen, "The Elastic-Dynamic Behavior of a Counterweighted Rocker Link with an Overhanging Endmass in a Four-Bar Linkage, Part I: Theory; Part II: Application and Experiment," *Journal of Mechanical Design*, 101, no. 1 (January 1979), pp. 77-98.
140. Jasinski, P. W., H. C. Lee, and G. N. Sandor, "Stability and Steady-State Vibrations in a High-Speed Slider-Crank Mechanism," *Journal of Applied Mechanics*, 37, no. 4 (December 1970), pp. 1069-76.
141. —, H. C. Lee, and G. N. Sandor, "Vibration of Elastic Connecting Rod of a High-Speed Slider-Crank Mechanism," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 2 (May 1971), pp. 636-44.
142. Jenkins, E. M., F. R. E. Crossley, and K. H. Hunt, "Gross Motion Attributes of Certain Spatial Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 90, no. 1 (February 1969), pp. 83-90.
143. Johnson, R. C., "Impact Forces in Mechanisms," *Machine Design*, 30 (1958), pp. 138-46.
144. —, and K. Towfigh, "Application of Number Synthesis to Practical Problems in Creative Design," ASME Paper No. 65-WA/MD-9, 1965; in *Mechanical Design Synthesis with Optimization Applications*. Ed. R. C. Johnson. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1971.
145. Jones, F. D., H. L. Horton, and J. A. Newell, eds. *Ingenious Mechanisms for Designers and Inventors*, 4 vols. New York: The Industrial Press, 1968.
146. Kalaycioglu, S., and C. Bagci, "Determination of the Critical Operating Speeds of Planar Mechanisms by the Finite Element Using Planar Actual Line Elements and Lumped

- Mass Systems," *Journal of Mechanical Design*, 101, no. 2 (April 1979), pp. 210-23.
147. Kamenskii, V. A., "On the Question of the Balancing of Plane Linkages," *Journal of Mechanisms*, 3 (1968), pp. 303-22.
148. Kaufman, R. E., "Mechanism Design by Computer," *Machine Design*, (October 1978), pp. 94-100.
149. —, "Singular Solution in Burmester Theory," ASME Paper No. 72-Mech-23, 1972.
150. —, and G. N. Sandor, "Bicycloidal Crank: A New Four Link Mechanism," *Journal of Engineering for Industry*, 91, no. 1 (February 1969), pp. 91-6.
151. —, and G. N. Sandor, "Complete Force Balancing of Spatial Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 2 (1971), pp. 620-26.
152. —, and G. N. Sandor, "Operators for Kinematic Synthesis of Mechanisms by Stretch Rotation Techniques," ASME Paper No. 70-Mech-79, 1970.
153. Keler, M. L., "Kinematics and Statics Including Friction in Single Loop Mechanisms by Screw Calculus and Dual Vectors," *Transactions of the ASME, Series B*, 95, no. 2 (1973), pp. 471-80.
154. Khan, M. R., and K. D. Willmert, "Vibrational Analysis of Mechanisms Using Constant Length Finite Elements," ASME Paper No. 76-WA/DE-21, 1976.
155. Khotin, B. M., "A Kinematic Analysis of Mechanisms with Consideration of Linkage Elasticity," *Sbornik Trudy, Leningradshii Institut Inzhenerov Zheleznodorozhnogo Transporta*, No. 218 (1964), pp. 214-19 (in Russian).
156. Kobrinsky, A. E., "Die Dynamik der Maschinen und Systeme mit Vibroschlagwirkung," *VDI Berichte*, 127 (1969).
157. Kohli, D., and G. N. Sandor, "Elastodynamics of Planar Linkages Including Torsional Vibrations of Input and Output Shafts and Elastic Deflections at Supports," *Proceedings of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Newcastle-upon-Tyne, England, September 1975)*, Vol. 2, pp. 247-52.
158. —, and G. N. Sandor, "Lumped Parameter Approach for Kineto-elastodynamic Analysis of Elastic Spatial Mechanisms," *Proceedings of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Newcastle-upon-Tyne, England, September 1975)*, pp. 253-58.
159. —, and G. N. Sandor, "Nonlinear Vibration Analysis of Elastic Spatial Mechanisms Using a Lumped Parameter Approach," in *Topics in Contemporary Mechanics, Courses and Lectures No. 210*, pp. A223-27. Udine, Italy: International Centre for Mechanical Sciences.
160. —, and A. H. Soni, "Synthesis of Spatial Mechanisms via Successive Screw Displacements and Pair Geometry Constraints," *Proceedings of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Newcastle-upon-Tyne, England, 1975)*, Vol. 4, no. 132, pp. 711-16.
161. —, D. Hunter, and G. N. Sandor, "Elastodynamic Analysis of a Completely Elastic

- System," *Journal of Engineering for Industry*, 99, no. 3 (1977), pp. 604-9.
162. —, A. E. Thompson, and G. N. Sandor, "Design of Four-Bar Linkages with Specified Motion Characteristics of All Moving Links," in *Monograph on Mechanical Design*, Paper No. 50. New York: McGraw-Hill Book Company, 1977; NSF Report No. GK36624.
 163. Kotelnikoff, A. P., "Screw Calculus and Some Applications of the Same to Geometry and Mechanics," *Annals of the Imperial University of Kazan*, No. 9 (1895), pp. 79-152; No. 10 (1895), pp. 1-90; No. 11 (1895), pp. 139-58; No. 1 (1896), pp. 110-44.
 164. Kramer, S. N., and G. N. Sandor, "Finite Kinematic Synthesis of a Cycloidal-Crank Mechanism for Function Generation," *Journal of Engineering for Industry*, 92, no. 3 (August 1970), pp. 531-36.
 165. —, and G. N. Sandor, "Kinematic Synthesis of Watt's Mechanism," ASME Paper No. 70-Mech-50, 1970.
 166. —, and G. N. Sandor, "Selective Precision Synthesis—A General Method of Optimization for Planar Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 97, no. 2 (May 1975), pp. 689-701.
 167. Lee, T. W., "On the Kinematics and Dynamic Synthesis of a Variable-Speed Drive," ASME Paper No. 77-DET-124, 1977.
 168. Levitskii, N. I., and S. H. Shakvasian, "Synthesis of Spatial Four Link Mechanisms with Lower Pairs," *Akademiya Nauk SSSR, Trudy Sem. Teor. Mash. Mekh.*, 14, no. 54 (1954), pp. 5-24; translated into English by F. Freudenstein, *International Journal of Mechanical Science*, 2 (1960), pp. 76-92.
 169. Lindholm, J. C., "A Survey of the Graphical Techniques in Designing for Specific Input-Output Relationships of a Four-Bar Mechanism," *Proceedings of the First Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, July 1969)*, pp. 35-1 to 35-6. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1969.
 170. —, "Design for Path Generation—Point Position Reduction," in *Monograph on Mechanism Design*, Paper No. 38, 7 pgs. New York: McGraw-Hill Book Company; NSF Report No. GK36624, 1977.
 171. Loerch, R. J., A. G. Erdman, and G. N. Sandor, "On the Existence of Circle-Point and Center-Point Circles for Three-Precision Point Dyad Synthesis," *Journal of Mechanical Design*, (October 1979), pp. 554-62.
 172. —, A. G. Erdman, G. N. Sandor, and A. Midha, "Synthesis of Four-Bar Linkages with Specified Ground Pivots," *Proceedings of the Fourth Applied Mechanisms Conference (Chicago, November 1975)*, pp. 10.1-10.6. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1975.
 173. Lowen, G. G., and R. S. Berkof, "Determination of Force Balanced Four-Bar Linkages with Optimum Shaking Moment Characteristics," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 1 (1971), pp. 39-46.
 174. —, and R. S. Berkof, "Survey of Investigations into the Balancing of Linkages," *Journal*

- of *Mechanisms*, 3, no. 4 (1968), pp. 221-31.
175. —, and W. G. Jandrasits, "Survey of Investigations into the Dynamic Behavior of Mechanisms Containing Links with Distributed Mass and Elasticity," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 7 (1972), pp. 3-17.
 176. —, F. R. Tepper, and R. S. Berkof, "The Qualitative Influence of Complete Force Balancing on the Forces and Moments of Certain Families of Four-Bar Linkages," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 9 (1974), pp. 299-323.
 177. Mabie, H. H., and F. W. Ocvirk, *Kinematics and Dynamics of Machinery*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1978.
 178. Martin, H. C., and G. F. Carey, *Introduction to Finite Element Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
 179. Matthew, G. K., and D. Tesar, "Synthesis of Spring Parameters to Balance General Forcing Functions in Planar Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 99 (May 1977), pp. 347-52.
 180. —, and D. Tesar, "Synthesis of Spring Parameters to Satisfy Specified Energy Levels in Planar Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 99 (May 1977), pp. 341-46.
 181. McGovern, J. F., and G. N. Sandor, "Kinematic Synthesis of Adjustable Mechanisms, Part I: Function Generation; Part II: Path Generation," *Journal of Engineering for Industry*, 95, no. 2 (May 1973), pp. 417-29.
 182. McLarnan, C. W., "A Linkage Synthesis with Minimum Error," *Journal of Mechanisms*, 3, no. 2 (Summer 1968), pp. 101-5.
 183. Meck, J. L., *Matrix Structural Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1971.
 184. Meyer zur Capellen, W., "Bending Vibrations in the Coupler of an Oscillating Crank Mechanism," *Osterreichisches Ingenieur Archiv*, 16, no. 4 (1962), pp. 341-48.
 185. —, "Kinematics—A Survey in Retrospect and Prospect," *Journal of Mechanisms*, 1 (1966), pp. 211-28.
 186. Midha, A., "Creativity in the Classroom—A Collection of Case Studies in Mechanisms Design Methods," *Proceedings of the Seventh Applied Mechanisms Conference (Kansas City, Missouri, December 1981)*, pp. XII-1 to XII-15. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1981.
 187. —, A. G. Erdman and D. A. Frohrib, "A Closed-Form Numerical Algorithm for the Periodic Response of High-Speed Elastic Linkages," *Journal of Mechanical Design*, 101, no. 1 (January 1979), pp. 154-62.
 188. —, A. G. Erdman, and D. A. Frohrib, "A Computationally Efficient Numerical Algorithm for the Transient Response of High-Speed Elastic Linkages," *Journal of Mechanical Design*, 101, no. 1 (January 1979), pp. 138-48.
 189. —, A. G. Erdman, and D. A. Frohrib, "An Approximate Method for the Dynamic Analysis of Elastic Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 99, no. 2 (May 1977), pp. 449-55.

190. —, A. G. Erdman, and D. A. Frohrib, "Finite Element Approach to Mathematical Modeling of High-Speed Elastic Linkages," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 13 (1978), pp. 603-18.
191. —, A. G. Erdman, and D. A. Frohrib, "Finite Element Approach to Mathematical Modeling of High-Speed Elastic Linkages," *Proceedings of the Fifth Applied Mechanisms Conference (Oklahoma City, Oklahoma, November 1977)*. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1977.
192. —, A. G. Erdman, G. N. Sandor, and D. A. Frohrib, "An Alternate Computationally Efficient and Conservative Method for Kineto-elastodynamic Analysis of Mechanisms," *Proceedings of the Fourth Applied Mechanisms Conference (Chicago, November 1975)*, pp. 19.1-19.19. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1975.
193. Modrey, J., "Analysis of Complex Kinematic Chains with Influence Coefficients," *Journal of Applied Mechanics*, 81E (1959), pp. 184-88.
194. Morris, C. M., and C. E. Crede, "Numerical Methods of Analysis," *Shock and Vibration Handbook*, 1st ed., Vol. 2, pp. 28-32 to 28-36. New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
195. Neubauer, A. H., Jr., R. Cohen, and A. S. Hall, Jr., "An Analytical Study of the Dynamics of an Elastic Linkage," *Journal of Engineering for Industry*, 88, no. 3 (August 1966), pp. 311-17.
196. Newman, W. M., and R. F. Sproull, *Principles of Interactive Computer Graphics*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1979.
197. Newmark, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85, no. EM3 (1959), pp. 67-94.
198. Nickell, R. E., "Direct Integration Methods in Structural Dynamics," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 99, no. EM2 (1973), pp. 303-17.
199. Oakberg, T. G., "The Analysis of Frames with Shear Walls by Finite Elements," Doctoral dissertation, Stanford University, 1967.
200. Paul, B., "Analytical Dynamics of Mechanisms—A Computer Oriented Overview," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 10, no. 6 (1975), pp. 481-507.
201. Paul, R. P., *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1981.
202. Paulson, W. C., "Finite Element Stress Analysis," *Machine Design*, 43, no. 24 (September 1971), pp. 46-94.
203. Peterson, D., "Linkage Design Using Analysis and Interactive Computer Graphics," in *Monograph on Mechanism Design*. Papers Nos. 76 and 77, 9 pgs. New York: McGraw-Hill Book Company; NSF Report No. GK36624, 1977.
204. Peterson, J. A., and E. W. Nelson, "Operator for a Casement-Type Window," U.S. Patent No. 4,253,276, March 3, 1981.
205. Pian, T. H., and P. Tong, "Finite Element Methods in Continuum Mechanics," in *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. 1-58. New York: Academic Press, Inc., 1972.
206. Pouliot, H. N., W. R. Delameter, and C. W. Robinson, "A Variable-Displacement Spark

- Engine, " SAE Paper No. 770114, 1977.
207. Primrose, E. J. F., F. Freudenstein, and G. N. Sandor, "Finite Burmester Theory in Plane Kinematics," *Journal of Applied Mechanics*, 31, no. 4 (December 1964), pp. 683-93.
 208. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.
 209. Quinn, B. E., "Energy Method for Determining Dynamic Characteristics of Mechanisms," *Journal of Applied Mechanics*, 16E (1949), pp. 283-88.
 210. Radcliffe, C. W., "Kinematics in Biomechanics Research," *Proceedings of the National Science Foundation Workshop on New Directions for Kinematics Research (Stanford University, August 1976)*, pp. 174-98.
 211. —, "Polycentric Linkages as Prosthetic Knee Mechanisms for the Through-Knee Amputee," *Proceedings of the World Congress of ISPO, INTERBOR, and APO (Montreux, Switzerland, October 1974)*.
 212. Rao, A. V. M., and G. N. Sandor, "Closed Form Synthesis of Four-Bar Path Generators by Linear Superposition," *Proceedings of the Third World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Dubrovnik, Yugoslavia, September 1971)*, pp. 383-94.
 213. —, and G. N. Sandor, "Extension of Freudenstein's Equation to Geared Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 1 (February 1971), pp. 201-10.
 214. —, and G. N. Sandor, "Synthesis of Function Generating Mechanisms with Scale Factors as Unknown Design Parameters," *Transactions of the International Symposium on Linkages and Computer Design Methods (Bucharest, June 1973)*, Vol. A-44, pp. 602-23.
 215. —, A. G. Erdman, G. N. Sandor, et al., "Synthesis of Multi-loop, Dual Purpose Planar Mechanisms Utilizing Burmester Theory," *Proceedings of the Second Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, October 1971)*, pp. 7.1-7.23. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1971.
 216. —, G. N. Sandor, and Steven N. Kramer, "Geared Six-Bar Design," *Proceedings of the Second Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, October 1971)*, pp. 25.1-25.13. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1971.
 217. —, G. N. Sandor, D. Kohli, and A. H. Soni, "Closed-Form Synthesis of Spatial Function Generating Mechanisms for Maximum Number of Precision Points," *Journal of Engineering for Industry*, 95, no. 3 (August 1973), pp. 725-36.
 218. Reklaitis, G. V., A. Ravindran, and K. M. Ragsdell, *Engineering Optimization: Methods and Application*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
 219. Reuleaux, F., *The Kinematics of Machinery*. Translated by Alex B. W. Kennedy. New York: Macmillan & Co., 1876.
 220. Richardson, M. M., and A. G. Erdman, "Computer-Aided Mechanism Synthesis Using the LINCAGES Package," *Proceedings of the First International Conference on Applied Modeling and Simulation in Industry*, Vol. 1, pp. 260-66. Paris, France: AMSE,

1981.

221. Roark, R. J., *Formulas for Stress and Strain*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1938.
222. Rogers, D. F., and J. A. Adams, *Mathematical Elements for Computer Graphics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1976.
223. Rooney, J., and J. Duffy, "On the Closures of Spatial Mechanisms," ASME Paper No. 72-Mech-77, 1972.
224. Rose, P. S., and G. N. Sandor, "Direct Analytical Synthesis of Four-Bar Function Generators with Optimal Structural Error," *Journal of Engineering for Industry*, 95, no. 2 (May 1973), pp. 563-71.
225. Roth, B., "On the Screw Axis and Other Special Lines Associated with Spatial Displacements of a Rigid Body," *Journal of Engineering for Industry*, 89, no. 1 (1967), pp. 102-10.
226. —, F. Freudenstein, and G. N. Sandor, "Synthesis of Four-Bar Path-Generating Characteristics," *Transactions of the Seventh Conference on Mechanisms (Purdue University, October 1962)*, pp. 46-8. West Lafayette, Indiana: Purdue University, 1962.
227. Rubel, A. J., and R. E. Kaufman, "KINSYN III: A New Human-Engineered System for Interactive Computer-Aided Design of Planar Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 99, no. 2 (May 1977).
228. Sadler, J. P., "A Lumped Parameter Approach to Kineto-Elastodynamic Analysis of Mechanisms." Doctoral dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, 1972.
229. —, "On the Analytical Lumped-Mass Model of an Elastic Four-Bar Mechanism," *Journal of Engineering for Industry*, 97, no. 2 (May 1975), pp. 561-65.
230. —, and G. N. Sandor, "Kineto-elastodynamic Harmonic Analysis of Four-Bar Path Generating Mechanisms," ASME Paper No. 70-Mech-61, 1970.
231. —, and G. N. Sandor, "A Lumped Parameter Approach to Vibration and Stress Analysis of Elastic Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 95, no. 2 (May 1973), pp. 549-57.
232. —, and G. N. Sandor, "Non-linear Vibration Analysis of Elastic Four-Bar Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 96, no. 2 (May 1976), pp. 411-19.
233. —, and R. W. Wayne, "Balancing of Mechanisms by Nonlinear Programming," *Proceedings of the Third Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, November 1973)*, pp. 29-1 to 29-17. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1973.
234. Sanders, J. R., and D. Tesar, "The Analytical and Experimental Evaluation of Vibratory Oscillations in Realistically Proportioned Mechanisms," *Journal of Mechanical Design*, 100, no. 4 (October 1978), pp. 762-68.
235. Sandor, G. N., "A General Complex-Number Method for Plane Kinematic Synthesis with Applications," Doctoral dissertation, Columbia University in the City of New York, 1959; University Microfilms, Ann Arbor, Michigan, 305 pgs. Library of Congress Card No. MIC 59-2596.

236. —, "On Computer-Aided Graphical Kinematic Synthesis," Technical Seminar Series, Princeton University, 1962.
237. —, "On Infinitesimal Cycloidal Kinematic Theory of Planar Motion," *Journal of Applied Mechanics*, 33, no. 4 (December 1966), pp. 927-33.
238. —, "On the Existence of a Cycloidal Burmester Theory in Planar Kinematics," *Journal of Applied Mechanics*, 31, no. 4 (December 1964), pp. 694-99.
239. —, "On the Loop Equations in Kinematics," *Transactions of the Seventh Conference on Mechanisms (Purdue University, October 1962)*, pp. 49-56. West Lafayette, Indiana: Purdue University, 1962.
240. —, "Principles of a General Quaternion-Operator Method of Spatial Kinematic Synthesis," *Journal of Applied Mechanics*, 35, no. 1 (March 1968), pp. 40-6.
241. —, and K. E. Bisshopp, "On a General Method of Spatial Kinematic Synthesis by Means of a Stretch Rotation Tensor," *Journal of Engineering for Industry*, 91, no. 1 (February 1969), pp. 115-22.
242. —, and A. G. Erdman, "Kineto-elastodynamics—A Frontier in Mechanism Design," *Mechanical Engineering News*, 7 (November 1970), pp. 27-8.
243. —, and F. Freudenstein, "Higher-Order Plane Motion Theories in Kinematic Synthesis," *Journal of Engineering for Industry*, 89, no. 2 (May 1967), pp. 223-30.
244. —, and Dan Perju, "Contributions to the Kinematic Synthesis of Adjustable Mechanisms," *Transactions of the International Symposium on Linkages and Computer Design Methods (Bucharest, Romania, June 1973)*, Vol. A-46, pp. 636-50.
245. —, and Donald R. Wilt, "Synthesis of a Geared Four-Link Mechanism," *Proceedings of the Second International Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Zakopane, Poland, September 1969)*, Vol. 2, pp. 222-32; *Journal of Mechanisms*, no. 4 (Winter 1969), pp. 291-302.
246. —, A. G. Erdman, L. Hunt, and E. Raghavacharyulu, "New Complex-Number Form of the Cubic of Stationary Curvature in a Computer-Oriented Treatment of Planar Path-Curvature Theory for Higher-Pair Rolling Contact," *Journal of Mechanical Design*, 104, pp. 233-38.
247. —, A. G. Erdman, L. Hunt, and E. Raghavacharyulu, "New Complex-Number Form of the Euler-Savary Equation in a Computer-Oriented Treatment of Planar Path-Curvature Theory for Higher-Pair Rolling Contact," *Journal of Mechanical Design*, 104, pp. 227-32.
248. —, A. G. Erdman, and E. Raghavacharyulu, "Coriolis Acceleration Analysis in Planar Mechanisms—A Complex Number Approach," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 17, no. 6 (1982), pp. 405-15.
249. —, I. Imam, and A. G. Erdman, "Applied Kineto-elastodynamics," *Proceedings of the Second Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, October 1971)*, pp. 21.1-21.17. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1971.
250. —, R. E. Kaufman, A. G. Erdman, et al., "Kinematic Synthesis of Geared Linkages," *Journal of Mechanisms*, 5, no. 1 (Spring 1970).

251. —, D. Kohli, X. Zhuang, and C. Reinholtz, "Synthesis of a Four-Link Spatial Motion Generator," ASME Paper No. 82-DET-130, 1982.
252. —, J. F. McGovern, and C. Z. Smith, "The Design of Four-Bar Path Generating Linkages by Fifth-Order Path Approximation in the Vicinity of a Single Point," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (London, September 1973)*, pp. 65-77.
253. —, A. V. Mohan Rao, and A. G. Erdman, "A General Complex-Number Method of Synthesis and Analysis of Mechanisms Containing Prismatic and Revolute Pairs," *Proceedings of the Third World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Dubrovnik, Yugoslavia, September 1971)*, Vol. D, pp. 237-49. Belgrade: Yugoslavian Committee on the Theory of Machines and Mechanisms, 1972.
254. Sauer, B., B. Williams, and A. G. Erdman, "Integration of Computer Graphics and Spatial Mechanism Analysis," *Proceedings of the Seventh Applied Mechanisms Conference (Kansas City, Missouri, 1981)*, Paper No. XXIII. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1981.
255. Scott, J. E., *Introduction to Interactive Computer Graphics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982.
256. *Selby Furniture Hardware Co. Inc. Catalog*, 15/12 East 22nd Street, New York, New York 10010.
257. Sheth, P. N., "A Digital Computer Based Simulation Procedure for Multiple Degree of Freedom Mechanical Systems with Geometric Constraints," Doctoral dissertation, University of Wisconsin, 1972; University Microfilm No. 73-2565.
258. —, and J. J. Uicker, "IMP (Integrated Mechanisms Program), A Computer-Aided Design Analysis System for Mechanisms and Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, 94, no. 2 (May 1972), pp. 454-64.
259. Shigley, J. E., *Kinematic Analysis of Mechanisms*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.
260. Shimojima, Hiroshi, Kiyoshi Ogawa, and Toru Kawano, "A Transmissibility for Single-Loop Spatial Mechanisms," *Bulletin of the JSME*, 22, no. 165 (March 1979).
261. Shoup, T. E., *A Practical Guide to Computer Methods for Engineers*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1979.
262. —, and J. M. Herrera, "Design of Double Boom Cranes for Optimum Load Capacity," *Proceedings of the Fifth Applied Mechanisms Conference (Oklahoma City, Oklahoma, November 1977)*, Paper No. 30. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1977.
263. —, and C. W. McLarnan, "On the Use of the Undulating Elastica for the Analysis of Flexible Link Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, 93B (1971), pp. 263-67.
264. —, and B. J. Pehan, "Design of Four-Bar Mechanisms for Optimum Transmission Angle and Optimum Structural Error," *Proceedings of the Second Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, October 1971)*, pp. 4.1-4.9. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State

University, 1971.

265. Showlater, G., R. Giese, and A. G. Erdman, "Synthesis of Skylight Mechanisms," *Proceedings of the Seventh Applied Mechanisms Conference (Kansas City, Missouri, 1981)*, Paper No. XXXVII. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1981.
266. Skreiner, M., "Acceleration Analysis of Spatial Linkages Using Axodes and the Instantaneous Screw Axis," *Journal of Engineering for Industry*, 89B, (1967), pp. 97-101.
267. Smith, M. R., "Dynamic Analysis and Balancing of Linkages with Interactive Computer Graphics," *Computer Aided Design*, 7, no. 1 (January 1975), pp. 15-19.
268. Soni, A. H., *Mechanism Synthesis and Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1974.
269. —, and L. Harrisberger, "Application of (3×3) Screw Matrix to Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms," *VDI Berichte*, (1968).
270. —, and M. Huang, "Synthesis of Four Link Space Mechanisms via Extension of Point-Position-Reduction Technique," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 1 (1971), pp. 85-9.
271. Stepanoff, B. I., "Design of Spatial Transmission Mechanisms with Lower Pairs," *Akademiya, Nauk SSSR*, 45 (1951).
272. Struble, K. R., J. E. Gustafson, and A. G. Erdman, "Case Study: Synthesis of a Four-Bar Linkage to Pick and Place Filters Using the LINCAGES Computer Package," *Proceedings of the Fifth Applied Mechanisms Conference (Oklahoma City, Oklahoma, November 1977)*. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1977.
273. Sturm, A. J., A. G. Erdman, and S. H. Wang, "Design and Analysis of an Industrial (3P3R) Robot," ASME Paper No. 82-DET-39, 1982.
274. Suh, C. H., "Design of Space Mechanisms for Function Generation," *Journal of Engineering for Industry*, 90, no. 3 (1968), pp. 507-13.
275. —, "Design of Space Mechanisms for Rigid Body Guidance," *Journal of Engineering for Industry*, 90, no. 3 (1968), pp. 499-506.
276. —, "Synthesis and Analysis of Space Mechanisms with the Use of the Displacement Theory," Ph. D. dissertation, University of California—Berkeley, 1966.
277. —, and C. W. Radcliffe, *Kinematics and Mechanisms Design*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1978.
278. Sutherland, G. H., "Analytical and Experimental Investigation of a High-Speed Elastic-Membered Linkage," *Journal of Engineering for Industry*, 98, no. 3 (August 1976), pp. 788-99.
279. Tacheny, J., A. G. Erdman, and D. L. Hagen, "Experimental Determination of Mechanism Time Response," *Proceedings of the Fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (Montreal, July 1979)*, pp. 130-38.
280. Tanner, W. R., ed., *Industrial Robots*. Dearborn, Michigan: Society of Manufacturing Engineers, 1979.
281. Tao, D. C., *Applied Linkage Synthesis*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964.

282. —, *Fundamentals of Applied Kinematics*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967.
283. Tepper, F. R., and G. G. Lowen, "General Theorems Concerning Full Force Balancing of Planar Linkages by Internal Mass Redistribution," *Journal of Engineering for Industry*, 94, no. 3 (August 1972), pp. 789-96.
284. —, and G. G. Lowen, "A New Criterion for Evaluating the RMS Shaking Moment in Unbalanced Planar Mechanisms," *Proceedings of the Third Applied Mechanisms Conference (Stillwater, Oklahoma, November 1973)*, p. 11-1. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1973.
285. —, and G. G. Lowen, "On the Distribution of the RMS Shaking Moment of Unbalanced Planar Mechanisms: Theory of Isomomental Ellipses," ASME Paper No. 72-Mech-4, 1972.
286. Tesar, D., and J. W. Sparks, "Multiply Separated Position Synthesis," ASME Paper No. 68-MECH-66, 1968.
287. Thompson, B. S., "The Analysis of an Elastic Four-Bar Linkage on a Vibrating Foundation Using a Variational Method," ASME Paper No. 79-DET-64, 1979.
288. Thompson, W. T., *Vibration Theory and Applications*. New York: Prentice-Hall, Inc., 1965.
289. Timoshenko, S., and D. G. Young, *Advanced Dynamics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1948.
290. —, and D. G. Young, *Engineering Mechanics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1940.
291. Tobias, J. R., "The Design of Planar Mechanisms with Distributed Flexibility and Inertia," Doctoral dissertation, University of Minnesota, 1970.
292. Torfason, L. E., and A. K. Sharma, "Analysis of Spatial RRGR Mechanisms by the Method of Generated Surface," *Journal of Engineering for Industry*, 95, no. 3 (August 1973), pp. 704-8.
293. Tsai, L. W., and B. Roth, "Design of Dyads with Helical, Cylindrical, Spherical, Revolute, and Prismatic Joints," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 7 (1972), pp. 85-102.
294. Turcic, D. A., "A General Approach to the Dynamic Analysis of Elastic Mechanism Systems," Doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, 1982.
295. Turner, J., and A. G. Erdman, "Design of a Mechanism Clock," *Proceedings of the Fourth Applied Mechanisms Conference, (Chicago, November 1975)*, pp. 2-1 to 2-5. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1975.
296. Uicker, J. J., Jr, "Dynamic Behavior of Spatial Linkages—1. Exact Equations of Motion," *Journal of Engineering for Industry*, 91B (1969), pp. 251-65.
297. —, "Dynamic Force Analysis of Spatial Linkages," *Journal of Applied Mechanics*, 98E (1967), pp. 418-24.
298. —, J. Denavit, and R. S. Hartenberg, "An Iterative Method for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms," *Journal of Applied Mechanics*, 86, no. 2 (June 1964), pp. 309-14.

299. Ural, Oktay, *Finite Element Method: Basic Concepts and Applications*. New York: Intext Education Publishers, 1973.
300. Van Klompenburg, M. G., J. A. Peterson, and E. W. Nelson, "Dual Arm Operator for a Casement-Type Window," U. S. Patent No. 4,241,541, December 30, 1980.
301. Vierck, R. K., *Vibration Analysis*, 2nd ed. New York: Harper & Row Publishers, Inc., 1979.
302. Viscomi, B. V., and R. S. Ayre, "Nonlinear Dynamic Response of Elastic Slider-Crank Mechanism," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 1 (February 1971), pp. 251-62.
303. Waldron, K. J., "Elimination of the Branch Problem in Graphical Burmester Mechanism Synthesis for Four Finitely Separated Positions," *Journal of Engineering for Industry*, 98 (1976) pp. 176-82.
304. —, "Graphical Solution of the Branch and Order Problems of Linkage Synthesis for Multiply Separated Positions," ASME Paper No. 76-DET-16, 1976.
305. —, "Improved Solutions of the Branch and Order Problems of Burmester Linkage Synthesis," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 13 (1978), pp. 199-207.
306. —, "Location of Burmester Synthesis Solutions with Fully Rotatable Cranks," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 13 (1978), pp. 125-37.
307. —, and S. M. Song, "Theoretical and Numerical Improvements to an Interactive Linkage Design Program, RECSYN," *Proceedings of the Seventh Applied Mechanisms Conference (Kansas City, Missouri, December 1981)*, pp. 8.1-8.8. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1981.
308. —, and W. H. Sun, "Graphical Transmission Angle Control in Planar Linkage Synthesis," *Proceedings of the Sixth Applied Mechanisms Conference (Denver, Colorado, October 1979)*, pp. 34.1-34.8. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1979.
309. Wallace, D. M., and F. Freudenstein, "The Displacement Analysis of the Generalized Tracta Coupling," *Journal of Applied Mechanics*, 37 (September 1970), pp. 713-19.
310. Wilde, D. J., "Jacobians in Constrained Nonlinear Optimization," *Operations Research*, 13, no. 5 (September 1965), pp. 848-56.
311. Wiley, J. C., B. E. Romiz, N. Orlandea, T. A. Berenyi, and D. W. Smith, "Automated Simulation and Display of Mechanisms and Vehicle Behavior," *Proceedings of the Fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms* (1979), pp. 680-83.
312. Williams, R. J., and S. Rupperecht, "Dynamic Force Analysis of Planar Mechanisms," *Proceedings of the Sixth Applied Mechanisms Conference (Denver, Colorado, October 1979)*, Paper No. XLIII, 9 pgs. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University, 1979.
313. Wilson, E. L., and R. W. Clough, "Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis," *Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering (Lisbon, Portugal, October 1962)*, pp. 45.1-45.14.
314. —, I. Farhoomand, and K. J. Bathe, "Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures,"

- International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1, no. 3 (1973), pp. 241-52.
315. Wilson, B. L., and I. Penzien, "Evaluation of Orthogonal Damping Matrices," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 4, no. 1 (1972), pp. 5-10.
316. Winfrey, P. C., "Dynamic Analysis of Elastic Link Mechanisms by Reduction of Coordinates," *Journal of Engineering for Industry*, 94 (November 1972), pp. 577-82.
317. —, "Dynamics of Mechanisms with Elastic Links," Doctoral dissertation, University of California—Los Angeles, 1969.
318. —, "Elastic Link Mechanism Dynamics," *Journal of Engineering for Industry*, 93, no. 1 (February 1971), pp. 268-72.
319. —, "Multidegree-of-Freedom Elastic Systems Having Multiple Clearances," *Shock Vibration Bulletin*, 43, Pt. 2, pp. 23-30. Washington, D. C.: Shock and Vibration Information Center, U. S. Naval Research Lab, 1973.
320. —, R. V. Anderson, and C. W. Gnilka, "Analysis of Elastic Machinery with Clearances," *Journal of Engineering for Industry*, 95, no. 3 (August 1973), pp. 695-703.
321. Wolford, J. C., "The Application of Chace's Vector Equations] to the Computer Generation of Burmester Curves," *Proceedings of the Sixth Applied Mechanisms Conference (Denver, Colorado, October 1979)*, pp. IV-1 to IV-17. Stillwater, Oklahoma: Oklahoma State University 1979.
322. Yang, A., "A Brief Survey of Space Mechanisms," *Proceedings of Design Technology Conference (New York, 1974)*, pp. 315-22.
323. —, "Displacement Analysis of Spatial Five-Link Mechanisms Using (3×3) Matrices with Dual-Number Elements," *Journal of Engineering for Industry*, 91, no. 1 (1969), pp. 152-57.
324. —, and F. Freudenstein, "Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms," *Journal of Applied Mechanics*, 86, no. 2 (June 1964), pp. 300-308.
325. Young, J. F., *Robotics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1973.
326. Yuan, M. S. C., and F. Freudenstein, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms by Means of Screw Coordinates, Part I," *Transactions of the ASME, Series B*, 93, no. 1 (1971), pp. 61-6.
327. —, F. Freudenstein, and L. Wood, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms by Means of Screw Coordinates, Part 2," *Trans. ASME, Series B*, 93, no. 1 (1971), pp. 67-73.
328. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1971.
329. —, "The Finite Element Method: From Intuition to Generality," *Applied Mechanics Reviews*, 23, no. 3 (March 1970), pp. 249-56.
330. Zorzi, E. S., "Dynamic Response of a Layered Viscoelastic Damped Slider-Crank Mechanism," Doctoral dissertation, University of Minnesota, 1973.