

# 高速旋转机械轴系 动力学设计

徐龙祥 著

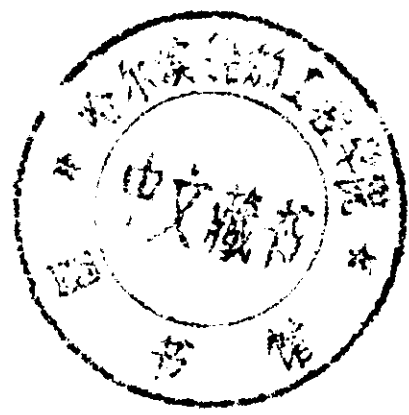
国防工业出版社

77628  
77629

# 高速旋转机械轴系

## 动力学设计

徐龙祥 著



国防工业出版社

(京)新登字 106 号

图书在版编目(CIP)数据

高速旋转机械轴系动力学设计/徐龙祥著. —北京:  
国防工业出版社, 1994  
ISBN 7-118-01226-2

- I. 高…
- I. 徐…
- Ⅲ. 机构动力学-轴系-设计
- IV. TH133

*010.11*

高速旋转机械轴系动力学设计

徐龙祥 著

责任编辑 周润芬

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

新华书店经售

北京市王史山胶印厂印刷

\*

开本 850×1168 1/32 印张 8 1/2 222 千字

1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月北京第 1 次印刷 印数 1—2000 册

ISBN 7-118-01226-2/TH·88

定价: 8.70 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

## 致 读 者

本书由**国防科技图书出版基金**资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技发展具有较大推动作用的专著;密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。
4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。
5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版,随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

**国防科技图书出版基金  
评审委员会**

# 国防科技图书出版基金 第二届评审委员会组成人员

名誉主任委员 怀国模

主任委员 黄宁

副主任委员 殷鹤龄 高景德 陈芳允  
曾 铎

秘书长 刘琯德

委员 尤子平 朱森元 朵英贤

(按姓氏笔划为序) 刘 仁 何庆芝 何国伟

何新贵 宋家树 张汝果

范学虹 胡万忱 柯有安

侯 迁 侯正明 莫梧生

崔尔杰

# 前 言

对旋转机械转子-轴承系统(转子-轴承系统以下简称轴系)进行动力学设计,传统方法是计算轴系的临界转速与不平衡响应。但是,现代旋转机械的转速越来越高,转子更加细长,而且机组常常在超临界转速下运行。对这样高速旋转的机组来说,轴系稳定性表现得更为重要。它往往成为制约机组能否稳定安全运行的主要问题,而且是困扰设计工程师们的主要难题。由于传统的动力学设计不考虑机组轴系的稳定性,从而导致很多旋转机械因缺乏足够的稳定性裕度而不能安全运行。

对现代高速旋转机械轴系进行动力学设计,主要是计算轴系的稳定性、临界转速与不平衡响应,共有以下五个内容:

## 1. 计算稳定性

高速旋转机械往往采用滑动轴承支承,稳定性往往是制约机组能否安全运行的主要难题。动力学设计的首要任务就是计算轴系的失稳转速,并使其偏离工作转速足够远。

## 2. 修改设计参数提高稳定性裕度

一旦设计工程师不能精确确定机组的失稳转速,或者计算的失稳转速与工作转速比较靠近,或者实际运行的机组发生了动力失稳现象,此时就要修改设计参数,以达到提高稳定性裕度,抑制不稳定性的目的。这部分内容在动力学设计中占有极为重要的地位,这是因为在设计过程中,需要不断修改设计参数来改善机组的动态性能;此外,用于定量计算不稳定激振力的模型比较简单,使得失稳转速的计算结果与实际情况偏差较大,此时可将不稳定激振力作为一个相对值,研究在不同的设计参数下机组抵抗减稳因素的能力,以便能选择到一组较合理的设计参数。

## 3. 计算临界转速

这是动力学设计的传统内容,目前研究得较为成熟。其目的是

使工作转速远离临界转速。

#### 4. 修改设计参数以改变临界转速

当临界转速与工作转速比较接近时,需要修改设计参数使临界转速偏离工作转速足够远。

#### 5. 计算不平衡响应

由于转子不平衡量的大小与分布以及系统的阻尼都很难测定,要精确计算不平衡响应的大小极为困难。研究不平衡响应的目的,主要用于研究转子对在某些部位上的不平衡量的敏感程度,为确定最终的设计参数提供依据。

稳定性、临界转速与不平衡响应这三个内容属于转子动力学的主要范畴。目前国内已出版的转子动力学的专著多偏重于理论分析与基本性知识,本书则偏重于实际应用与工程设计。编写时力求简明扼要,尽量采用较简单的数学工具建立系统的运动方程,在保证工程设计精度的前提下,略去了一些次要因素(如陀螺力矩)的影响,使数学推导更加简单。所有这些旨在帮助读者顺利自学和尽快掌握动力学设计的精华。

本书主要以作者自 1983 年以来的研究成果与体会改写而成,共分五个部分。

第一部分(第一、二章)辅助性知识,主要介绍滑动轴承的基本知识与特征值的计算方法;第二部分(第三、四章)着重讨论轴系稳定性的计算,介绍典型的失稳现象,分析引起失稳的主要原因,讨论用不同形式轴承支承的转子系统稳定性的计算方法,研究轴系稳定性与支承轴承的关系;第三部分(第五、六章)主要研究临界转速与不平衡响应的计算;第四部分(第七章)以一台离心压缩机的转子-轴承系统为例,介绍动力学设计的全过程;第五部分(第八章)常用滑动轴承的性能数据与动力学设计程序。

本书在写作过程中得到了导师朱均先生的极大支持与帮助,用到了东方电机厂赵昌宗总工程师、东方汽轮机厂张绳铨副总工程师、林才珍、金志伟高级工程师以及金陵石化公司化肥厂沈立智工程师提供的珍贵资料,在此向他们表示衷心感谢。



全书由学部委员高为炳先生审稿,在出版过程中得到了国防工业出版社全体同仁的支持与帮助,在此一并向他们表示感谢。

书中难免会有不当之处,敬请读者批评指正。

徐龙祥 1993年4月

于南京航空航天大学

# 目 录

第一章 滑动轴承 .....	(1)
1.1 概述 .....	(1)
1.2 滑动轴承的主要形式及几何参数 .....	(1)
1.3 滑动轴承的工作状态简述 .....	(5)
1.4 滑动轴承工作的基本原理 .....	(7)
1.5 滑动轴承的静平衡位置 .....	(9)
1.6 滑动轴承的动特性系数 .....	(11)
1.7 可倾瓦轴承 .....	(14)
参考文献 .....	(18)
第二章 特征值计算与线性稳定性概念 .....	(19)
2.1 概述 .....	(19)
2.2 高次方程求根法 .....	(19)
2.3 矩阵特征值法 .....	(20)
2.4 线性系统稳定性基本概念 .....	(23)
参考文献 .....	(24)
第三章 单圆盘对称转子-轴承系统的稳定性 .....	(26)
3.1 研究稳定性的意义及背景 .....	(26)
3.2 转子-轴承系统失稳的典型现象 .....	(27)
3.3 失稳机理 .....	(30)
3.4 引起转子-轴承系统 失稳的主要因素 .....	(34)
3.5 单圆盘对称刚性转子-固定瓦 轴承系统的稳定性 .....	(36)
3.6 单圆盘对称弹性转子-固定瓦 轴承系统的稳定性 .....	(45)
3.7 失稳转速的计算 .....	(52)
3.8 同向涡动与反向涡动 .....	(55)
3.9 单圆盘对称弹性转子-可倾瓦	

轴承系统的稳定性 .....	(59)
3.10 轴承设计参数与结构形式	
对稳定性的影响 .....	(67)
参考文献 .....	(70)
第四章 实际转子-轴承系统的稳定性 .....	(72)
4.1 概述 .....	(72)
4.2 转子的简化模型 .....	(72)
4.3 固定瓦轴承系统的运动方程 .....	(75)
4.4 可倾瓦轴承系统的运动方程 .....	(89)
4.5 转子-轴承-基础系统的运动方程 .....	(92)
4.6 多支承转子系统的负荷分配计算 .....	(98)
4.7 稳定性计算示例 .....	(111)
4.8 转子涡动时的模态振型 .....	(116)
4.9 轴系稳定性与支承轴承的关系 .....	(118)
4.10 提高轴系稳定性的措施 .....	(127)
4.11 集总圆盘个数的合理选取 .....	(127)
参考文献 .....	(129)
第五章 单圆盘对称转子-轴承	
系统的临界转速与不平衡响应 .....	(131)
5.1 刚性支承的临界转速与不平衡响应 .....	(131)
5.2 弹性支承的临界转速与不平衡响应 .....	(137)
5.3 不平衡响应的涡动形态 .....	(142)
5.4 有阻尼的单圆盘转子系统 .....	(145)
5.5 临界转速与系统参数的关系 .....	(148)
第六章 实际转子-轴承系统的	
临界转速与不平衡响应 .....	(149)
6.1 转子和支座的简化模型 .....	(149)
6.2 转子-轴承-刚性基础系统的运动方程 .....	(151)
6.3 转子-轴承-弹性基础系统的运动方程 .....	(155)
6.4 临界转速与模态振型 .....	(156)
6.5 不平衡响应 .....	(159)
6.6 计算示例 .....	(164)

6.7	临界转速的调整	(168)
6.8	阻尼系统的临界转速	(171)
6.9	阻尼系统的不平衡响应	(173)
	参考文献	(182)
第七章 一台离心压缩机轴系设计示例		(183)
7.1	机组的原始数据	(183)
7.2	轴承的设计计算过程	(185)
7.3	轴承设计示例	(190)
7.4	轴系动力学设计示例	(194)
7.5	轴系的最终设计参数	(202)
7.6	压缩机的运行情况	(202)
	参考文献	(204)
第八章 常用滑动轴承性能数据及 动力学设计计算程序		(205)
8.1	常用固定瓦轴承性能数据	(205)
8.2	常用五瓦可倾瓦轴承性能数据	(205)
8.3	单圆盘对称弹性转子-轴承 系统的稳定性计算程序	(225)
8.4	多支承多圆盘轴系的 稳定性计算程序	(233)
8.5	多支承多圆盘轴系的 无阻尼临界转速计算程序	(255)
	参考文献	(262)
	主要符号	(263)

# 第一章 滑动轴承

## 1.1 概 述

滑动轴承对转子的动力特性有很大的影响。一方面,滑动轴承对轴系提供足够的阻尼,以保证机组在稳定状态下运行;另一方面,轴承的弹性又使转子的实际临界转速比刚性支承时要小,而且产生的交叉刚度是促使系统失稳的主要原因之一。因此,了解滑动轴承的性能参数,对设计一台具有良好动态性能的旋转机械来说是非常必要的。

在旋转机械中,油润滑的径向动压滑动轴承最为常用。下面扼要介绍这种轴承的基本原理,更详细的分析请参考有关专著<sup>[1,2]</sup>。

## 1.2 滑动轴承的主要形式及几何参数

这一节主要介绍国内外常用的圆柱轴承、椭圆轴承、三油楔轴承和可倾瓦轴承。

图 1-1 是圆柱轴承的工作及结构示意图。其结构比较简单,通常由上下两块瓦组成,只有一个收敛油楔。

图 1-2 是椭圆轴承的结构及工作示意图。它由上下两块瓦组成,每块瓦的圆心  $o_1$ 、 $o_2$  与轴承中心  $o$  有一偏距  $e'$ , 共有两个收敛油楔。

图 1-3 是三油楔轴承的工作示意图及油楔展开图。

上述三种轴承的轴瓦是固定不动的,统称为**固定瓦轴承**。除此之外,有一种轴承的瓦块是可以摆动的,称为**可倾瓦轴承**。图 1-4 是五瓦可倾瓦轴承的两种常见的结构形式及瓦块摆动示意图。

为便于查对,上述几种轴承的主要参数汇总于表 1-1。

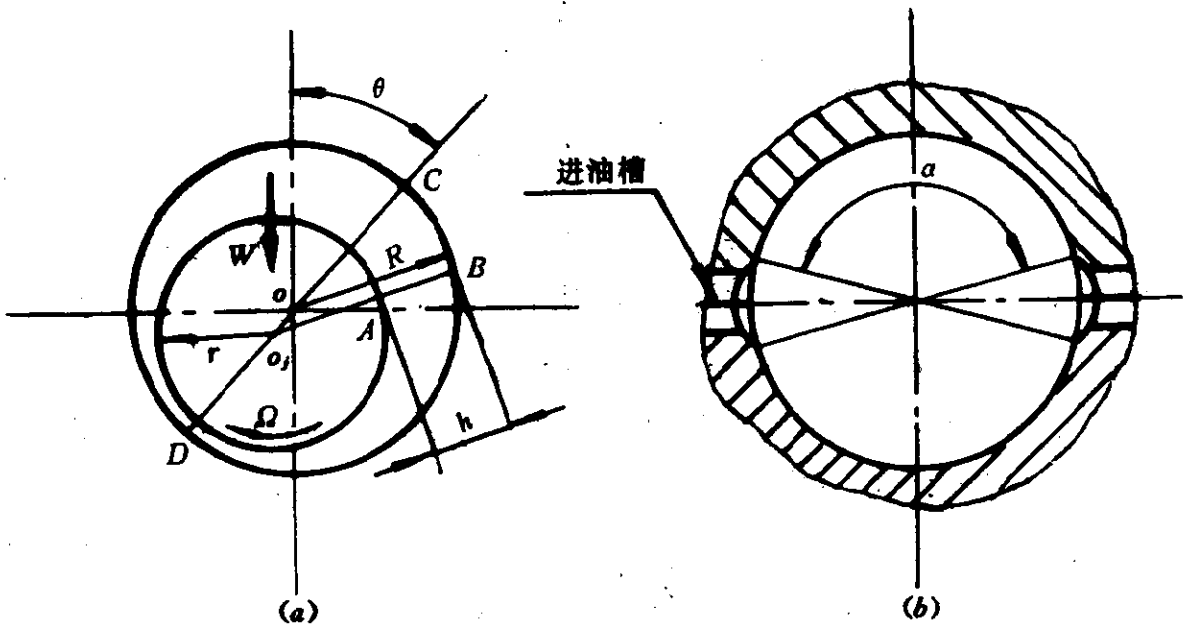


图 1-1 圆柱轴承  
(a) 工作示意图; (b) 进油槽简图。

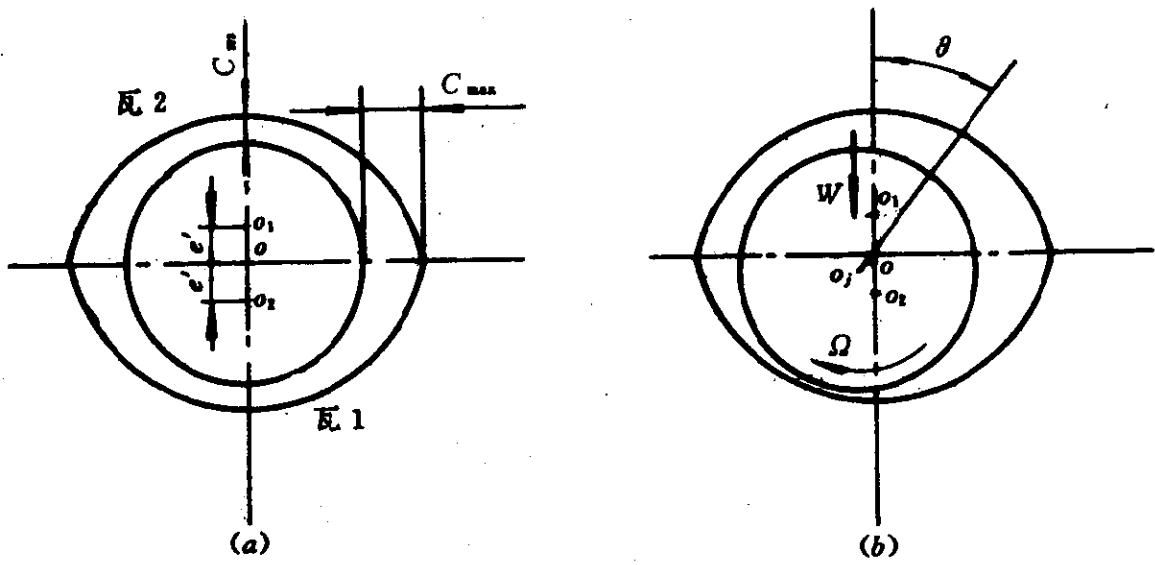


图 1-2 椭圆轴承  
(a) 结构简图; (b) 工作示意图。

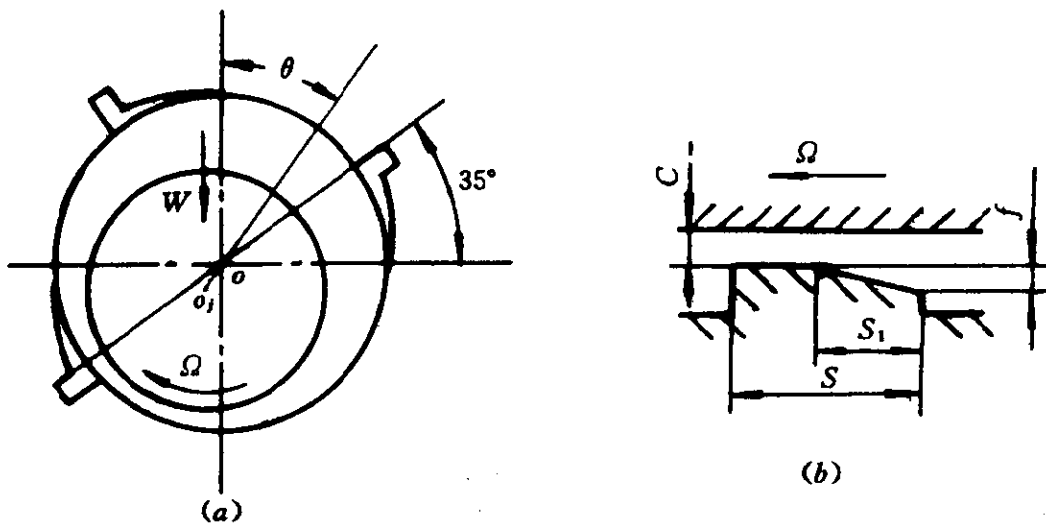


图 1-3 三油楔轴承  
(a) 工作示意图; (b) 油楔展开图。

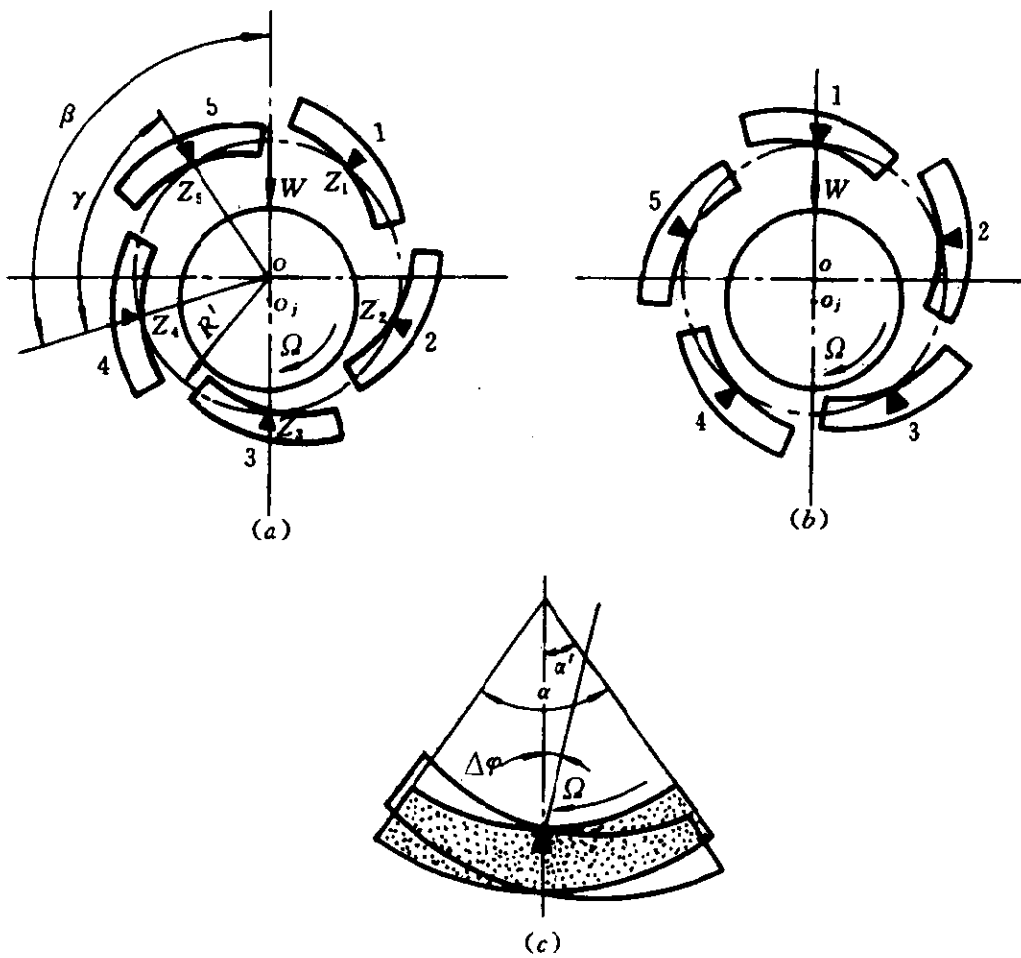


图 1-4 可倾瓦轴承工作及结构示意图  
(a) 载荷作用在支点上; (b) 载荷作用在支点间; (c) 瓦块摆动示意图。

表 1-1 滑动轴承主要参数

符 号	名 称	说 明
$C$	半径间隙	$C = R - r$
$C' \text{①}$	装配间隙	$C' = R' - r$
$C_m \text{②}$	半径顶隙	$C_m = C - e'$ , 见图 1-2(a)
$C_{\max} \text{②}$	半径侧隙	$C_{\max} \approx C$ , 见图 1-2(a)
$D$	轴瓦直径	$D = 2R$
$d$	轴颈直径	$d = 2r$
$e$	偏心距	轴颈中心与轴承中心的距离
$e'$	偏距	轴瓦中心与轴承中心的距离, 见图 1-2(a)
$F$	油膜力	
$h$	油膜厚度	见图 1-1(a)
$L$	轴瓦有效工作长度	
$m_b$	预负荷系数	$m_b \text{①} = 1 - \Psi' / \Psi; m_b \text{②} = 1 - \Psi_m / \Psi$
$o$	轴承中心	见图 1-1(a)
$o_j$	轴颈中心	见图 1-1(a)
$R$	轴瓦半径	$R = D/2$
$R' \text{②}$	简化支点圆半径	见图 1-4(a)
$r$	轴颈半径	$r = d/2$
$W$	外载荷	
$Y \text{③}$	楔深比	$Y = (f + C)/C$ , 见图 1-3(b)
$Z$	瓦块支点	见图 1-4
$L/D$	长径比	
$S_1/S \text{③}$	楔弧比	$S_1, S$ 见图 1-3(b)
$\Omega$	轴旋转角速度	
$\epsilon$	偏心率	$\epsilon = e/C$
$\eta$	油的动力粘度	



(续)

符 号	名 称	说 明
$\psi$	间隙比	$\psi = C/R$
$\psi' \text{①}$	装配间隙比	$\psi' = C'/R$
$\psi_m \text{②}$	顶隙比	$\psi_m = C_m/R$
$\theta$	偏位角	见图 1-1(a)
$\alpha$	瓦块张角	见图 1-4(c)
$\alpha' \text{①}$	进油边到 瓦块支点的夹角	见图 1-4(c)
$\alpha_r \text{①}$	瓦块支点系数	$\alpha_r = \alpha'/\alpha$
$\beta \text{①}$	瓦块支点角	见图 1-4(a), 以逆时针为正
$\gamma \text{①}$	相邻支点的夹角	见图 1-4(a)
$\phi_f$	阻力系数	见式(7-3)
$\phi_q$	流量系数	见式(7-2)
$\phi_w$	无量纲承载力	见式(7-1)

① 仅适用于可倾瓦轴承；

② 仅适用于椭圆轴承；

③ 仅适用于三油楔轴承。

### 1.3 滑动轴承的工作状态简述

以图 1-1(a) 的圆柱轴承为例, 简要叙述滑动轴承的工作状态。轴颈中心  $o_j$  在轴承中的位置可用偏心率和偏位角 ( $\epsilon, \theta$ ) 唯一地表示。假设转子以某一恒定不变的角速度  $\Omega$  旋转, 且轴颈受的外载荷是不随时间变化的稳定载荷。在这一稳定状态下, 轴颈中心  $o_j$  在轴承中的位置是不变的, 并处在某一确定的偏心率  $\epsilon$  和偏位角  $\theta$  上, 轴承油膜施加给轴颈的油膜力  $F$  与轴颈受的外载荷  $W$  相平衡, 这一位置称为静平衡位置。如果轴颈在静平衡位置上受到外界扰动 (如外界施加给转子的冲击, 转子上叶片的断裂脱落, 机组工

作状况的变化等)时,轴颈中心 $o_j$ 在静平衡位置附近作微小的涡动。如图1-5,静平衡位置处的轴颈中心及涡动后的轴颈中心分别用 $o_{j0}$ (下角标“0”表示静平衡位置上的值,下同)和 $o_j$ 表示。 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 表示 $o_j$ 偏离 $o_{j0}$ 的距离,称为动态位移。

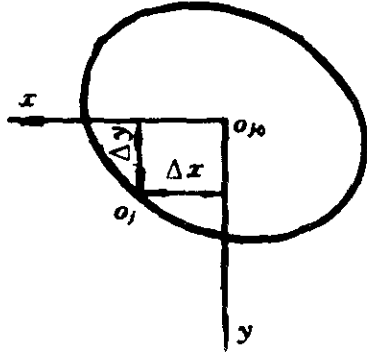


图1-5 轴颈中心涡动图

设静平衡位置上的油膜力为 $F_{x0}$ 、 $F_{y0}$ ,涡动后的油膜力为 $F_x$ 、 $F_y$ 。将油膜力 $F_x$ 、 $F_y$ 在静平衡位置处对动态位移 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 作泰勒(Taylor)展开,并略去高阶小量得到

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_{x0} + \frac{\partial F_x}{\partial x} \Big|_0 \Delta x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Big|_0 \Delta y + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \Big|_0 \Delta \dot{x} + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \Big|_0 \Delta \dot{y} \\ F_y &= F_{y0} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Big|_0 \Delta x + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Big|_0 \Delta y + \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \Big|_0 \Delta \dot{x} + \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \Big|_0 \Delta \dot{y} \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

定义八个系数如下

$$\left. \begin{aligned} k_{xx} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} \Big|_0; & k_{xy} &= \frac{\partial F_x}{\partial y} \Big|_0 \\ k_{yx} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} \Big|_0; & k_{yy} &= \frac{\partial F_y}{\partial y} \Big|_0 \\ d_{xx} &= \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \Big|_0; & d_{xy} &= \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \Big|_0 \\ d_{yx} &= \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \Big|_0; & d_{yy} &= \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \Big|_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中  $k_{ij}$ ——轴承的刚度系数,  $i, j = x, y$ ;  
 $d_{ij}$ ——轴承的阻尼系数,  $i, j = x, y$ ;  $k_{ij}$  和  $d_{ij}$  统称为轴承的  
 动特性系数。

滑动轴承的动特性系数是静平衡位置的函数, 即是偏心率  $\epsilon$  和偏位角  $\theta$  的函数。令

$$\begin{cases} \Delta f_x = F_x - F_{x0} \\ \Delta f_y = F_y - F_{y0} \end{cases} \quad (1-3)$$

式中  $\Delta f_x, \Delta f_y$ ——分别称为相对于静平衡位置的油膜力增量在水平方向和垂直方向的分量。

由式(1-1)、式(1-2)得

$$\begin{cases} \Delta f_x \\ \Delta f_y \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta x \\ \Delta y \end{cases} + \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{cases} \quad (1-4)$$

上式是滑动轴承(固定瓦)油膜力增量的表达式。

## 1.4 滑动轴承工作的基本原理

滑动轴承工作的基本原理是二维的雷诺(Reynolds)方程。径向滑动轴承的雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial p}{\partial x} + 6h \frac{\partial U}{\partial x} + 12V \quad (1-5)$$

式中  $\eta$ ——润滑油动力粘度( $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ );  
 $p$ ——油膜压力( $\text{N}/\text{m}^2$ );  
 $Z$ ——轴瓦轴向坐标;  
 $x$ ——轴瓦沿旋转方向的坐标;  
 $U$ ——轴颈表面切向速度分量( $\text{m}/\text{s}$ );  
 $V$ ——轴颈表面径向速度分量( $\text{m}/\text{s}$ )。

下面以图1-6的圆柱轴承为例, 给出方程(1-5)的具体表达式。

在上图中, 轴颈绕其中心  $o_1$  以角速度  $\Omega$  旋转; 此外, 受扰涡动后, 轴颈中心还有沿  $o_1\eta, o_1\epsilon$  方向的速度  $e\dot{\theta}$  和  $\dot{e}$ 。故有

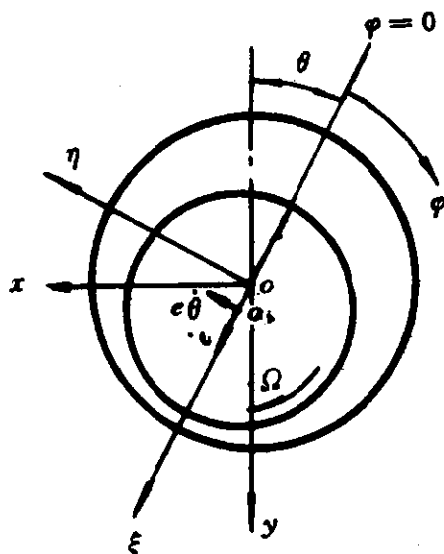


图 1-6 轴颈受扰涡动图

$$\left. \begin{aligned} U &= r\Omega + \dot{e}\sin\varphi - e\dot{\theta}\cos\varphi \\ V &= \dot{e}\cos\varphi + e\dot{\theta}\sin\varphi \\ x &= r\varphi \\ h &= C(1 + \epsilon\cos\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式中  $\varphi$  的角起始线为  $o, o'$  射线。

将式(1-6)代入式(1-5)并认为粘度  $\eta$  为常数, 则有

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right) + r^2\frac{\partial}{\partial Z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial Z}\right) = 6r^2\eta[C\epsilon(\Omega - 2\dot{\theta})\sin\varphi + 2\dot{e}\cos\varphi] \quad (1-7)$$

在静平衡位置上有

$$\dot{e} = \dot{\theta} = 0$$

代入式(1-7)得

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right) + r^2\frac{\partial}{\partial Z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial Z}\right) = -6r^2\Omega\eta C\epsilon\sin\varphi \quad (1-8)$$

方程(1-7)是计算轴承动特性的基础, 式(1-8)是计算静特性的基础。其中轴承的功耗、流量、承载力(即静平衡位置上的油膜力)统称为静特性。

## 1.5 滑动轴承的静平衡位置

如图 1-6 所示,作用在轴颈上的油膜力沿  $o\eta$ 、 $o\xi$  方向的分量为

$$\left. \begin{aligned} F_{\eta} &= - \iint pr \sin \varphi \, d\varphi \, dZ \\ F_{\xi} &= - \iint pr \cos \varphi \, d\varphi \, dZ \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式中  $p$ ——由式(1-8)解得的油膜压力。  
油膜力的合力为

$$F = \sqrt{F_{\eta}^2 + F_{\xi}^2} \quad (1-10)$$

在静平衡位置上,油膜力  $F$  和外载荷  $W$  平衡,  $F_{\eta}$ 、 $F_{\xi}$ 、 $W$  三者构成封闭力系(见图 1-7)。

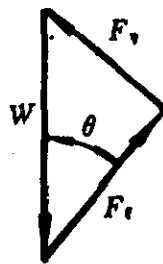


图 1-7 静平衡封闭力系

根据图 1-7 有

$$\operatorname{tg} \theta = F_{\eta} / F_{\xi} \quad (1-11)$$

实际计算时,外载荷  $W$  的大小及方向都是已知的,一般情况下只有唯一的一组  $(\epsilon, \theta)$  与之对应。如果给定一系列不同的外载荷  $W$  的值,通过计算可以得到一系列相应的静平衡位置  $(\epsilon, \theta)$ 。例如,无量纲承载力  $\phi_w$  与  $\epsilon, \theta$  的对应关系由本书第八章表 8-2 摘列于表 1-2。

表 1-2  $\phi_w$  与  $\epsilon, \theta$  的对应关系

$\phi_w$	0.069	0.147	0.247	0.386	0.599	0.963
$\epsilon$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\theta$	77.46	67.48	60.08	54.12	48.18	42.35

这些数据非常有用,例如要计算无量纲外载荷  $\bar{W} = 0.1$  时的静平衡位置,利用上述数据用插值的方法可以求得相应的静平衡位置,而不需求解雷诺方程。

无量纲油膜力  $\phi_w$  和无量纲外载荷  $\bar{W}$  的定义为

$$\left. \begin{aligned} \phi_w &= F\psi^2/(\eta\Omega LR) \\ \bar{W} &= W\psi^2/(\eta\Omega LR) \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

由上式知道,无量纲载荷与轴的角速度  $\Omega$  成反比。对于一台实际机组,作用在轴颈上的外载荷  $W$  是不变的,但在不同的转速下,  $\bar{W}$  的无量纲值  $\bar{W}$  是不同的。在刚刚启动时,  $\Omega$  很小,相应的  $\bar{W}$  较大,静平衡位置的偏心率  $\epsilon$  较大。在  $\Omega = 0$  的极限状态,轴颈中心  $o_{j0}$  处在图 1-8 的  $b_1$  点。随着  $\Omega$  的不断升高,  $\bar{W}$  不断减小,静平衡点  $o_{j0}$  偏离  $b_1$  点上升到  $b_2$ 。当  $\Omega$  趋于无穷大时,  $o_{j0}$  与轴承中心  $o$  重合。将不同转速下  $o_{j0}$  描绘的轨迹称为轴颈中心的静平衡轨迹,如图 1-8 所示。

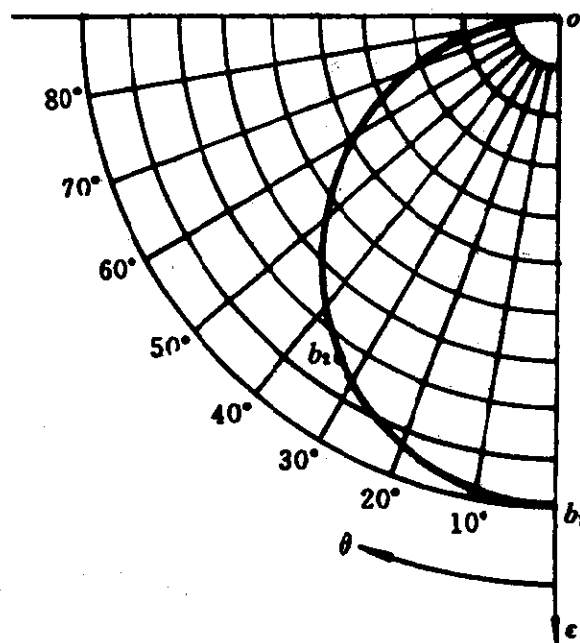


图 1-8 轴颈中心静平衡轨迹

## 1.6 滑动轴承的动特性系数

类似方程(1-2),定义极坐标系 $\xi\eta$ (见图1-6)下轴承的动特性系数为

$$\left. \begin{aligned} k_{\eta\eta} &= \frac{\partial F_{\eta}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( - \iint pr \sin \varphi d\varphi dZ \right) \\ k_{\eta\xi} &= \frac{\partial F_{\eta}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( - \iint pr \sin \varphi d\varphi dZ \right) \\ k_{\xi\eta} &= \frac{\partial F_{\xi}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( - \iint pr \cos \varphi d\varphi dZ \right) \\ k_{\xi\xi} &= \frac{\partial F_{\xi}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( - \iint pr \cos \varphi d\varphi dZ \right) \\ d_{\eta\eta} &= \frac{\partial \dot{F}_{\eta}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( - \iint pr \sin \varphi d\varphi dZ \right) \\ d_{\eta\xi} &= \frac{\partial \dot{F}_{\eta}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( - \iint pr \sin \varphi d\varphi dZ \right) \\ d_{\xi\eta} &= \frac{\partial \dot{F}_{\xi}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( - \iint pr \cos \varphi d\varphi dZ \right) \\ d_{\xi\xi} &= \frac{\partial \dot{F}_{\xi}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( - \iint pr \cos \varphi d\varphi dZ \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

油膜力增量在极坐标系下可表示为

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_{\eta} \\ \Delta f_{\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\eta\eta} & k_{\eta\xi} \\ k_{\xi\eta} & k_{\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \eta \\ \Delta \xi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{\eta\eta} & d_{\eta\xi} \\ d_{\xi\eta} & d_{\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\eta} \\ \Delta \dot{\xi} \end{Bmatrix} \quad (1-14)$$

式中  $\Delta \eta, \Delta \xi$  —— 轴颈中心涡动后偏离静平衡位置的位移增量;

$\Delta f_{\eta}, \Delta f_{\xi}$  —— 极坐标系下的油膜力增量。

极坐标系和直角坐标系有以下转换关系

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\xi \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \Delta f_\eta \\ \Delta f_\xi \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

将式(1-15)代入式(1-14)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{\eta\eta} & k_{\eta\xi} \\ k_{\xi\eta} & k_{\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{\eta\eta} & d_{\eta\xi} \\ d_{\xi\eta} & d_{\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1-16)$$

由上式可得到不同坐标系下轴承动特性的转换关系为

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{\eta\eta} & k_{\eta\xi} \\ k_{\xi\eta} & k_{\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

$$\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{\eta\eta} & d_{\eta\xi} \\ d_{\xi\eta} & d_{\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

为了方便使用,轴承的动特性和静特性往往是以无量纲的形式给出的。无量纲的常用相对单位如下

$\eta\Omega LR/\psi^2$  —— 载荷和承载力的相对单位。

$\eta\Omega L/\psi^3$  —— 刚度系数的相对单位,无量纲的刚度系数为

$$K_{ij} = k_{ij}\psi^3/(\eta\Omega L), i, j = x, y$$

$\eta L/\psi^3$  —— 阻尼系数的相对单位,无量纲的阻尼系数为

$$D_{ij} = d_{ij}\psi^3/(\eta L), i, j = x, y$$

在第八章的附录中,表8-1~表8-13是常用三种固定瓦轴承的无量纲性能参数。更为详细的轴承数据,可在参考文献[3]中查到。有了这些性能参数,设计轴承是非常方便的。例如下面两个圆柱轴承,其参数如表1-3所示。



表 1-3 两个圆柱轴承的参数

几何参数	轴承 1	轴承 2
$D(\text{mm})$	100	150
$L(\text{mm})$	50	75
$L/D$	0.5	0.5

这两个轴承的绝对尺寸尽管不同,但  $L/D$  的值却相同。如果不考虑进油压力的影响,且认为润滑油处于层流状态。在相同的无量纲载荷或相同的  $\epsilon, \theta$  下,上述两个轴承的静特性和动特性的无量纲值是完全相同的。

例 1-1: 设两个圆柱轴承的  $D, L$  如表 1-2 所示,其他参数为:  $\eta_1 = \eta_2 = 0.0184 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2, \Omega_1 = \Omega_2 = 100 \text{ 1/s}, \psi_1 = 1.5\text{‰}, \psi_2 = 2.0\text{‰}$ 。试计算当  $\bar{W} = 0.554$  时两个轴承的  $k_{xx}, d_{xx}$  及  $W$  各等于多少。

解: 根据表 8-2, 用内插法求得  $L/D = 0.5$  的轴承当  $\phi_w = 0.554$  时的  $K_{xx}, D_{xx}$  为

$$K_{xx} = 0.888; \quad D_{xx} = 1.156$$

刚度、阻尼及承载力的相对单位分别是

$$\left(\frac{\eta\Omega L}{\psi^3}\right)_1 = 27259259 \text{ N/m}; \quad \left(\frac{\eta\Omega L}{\psi^3}\right)_2 = 17250000 \text{ N/m}$$

$$\left(\frac{\eta L}{\psi^3}\right)_1 = 272593 \text{ N} \cdot \text{s/m}; \quad \left(\frac{\eta L}{\psi^3}\right)_2 = 172500 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$\left(\frac{\eta\Omega LR}{\psi^2}\right)_1 = 2044 \text{ N}; \quad \left(\frac{\eta\Omega LR}{\psi^2}\right)_2 = 2588 \text{ N}$$

所以有

$$k_{xx1} = 24206222 \text{ N/m}; \quad k_{xx2} = 15318000 \text{ N/m}$$

$$d_{xx1} = 315118 \text{ N} \cdot \text{s/m}; \quad d_{xx2} = 199410 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$F_1 = W_1 = 1132 \text{ N}; \quad F_2 = W_2 = 1434 \text{ N}$$

从这个例题看到,计算轴承的动特性和静特性,先要确定润滑油的动力粘度  $\eta$ 。在不同温度下  $\eta$  的值是不同的,一般是根据油的平均温度  $\bar{T}$  查  $\eta$ 。 $\bar{T}$  常按下面两式估算

$$\bar{T} = T_i + (T_o - T_i)/2 = T_i + \Delta T/2 \quad (1-19)$$

$$\text{或} \quad \bar{T} = T_i + (T_o - T_i) = T_i + \Delta T \quad (1-20)$$

式中  $T_i$  —— 进油温度；

$T_o$  —— 出油温度；

$\Delta T$  —— 温升。

本书第八章表 8-14 给出了两种常用润滑油在不同温度下的物性参数。

## 1.7 可倾瓦轴承

方程(1-4)是固定瓦轴承油膜力增量的表达式。对于可倾瓦轴承,经典理论也是这样表示的。但是,近年来的研究表明,这样处理对轴系的稳定性分析会带来较大的误差<sup>[4]</sup>。为了以后便于分析可倾瓦轴承转子系统的稳定性,下面主要研究可倾瓦轴承油膜力增量及力矩增量的表达式。

### 1. 坐标系的选取

如果可倾瓦轴承承受一个稳定的载荷,在一定的工况下,轴颈中心处于静平衡位置上。此时,每块瓦都有一个静态摆角,这一状态称为瓦块的静平衡位置。只要没有外界扰动,轴颈中心及瓦块的位置都不会改变,处于各自的静平衡位置上。受到外界扰动后,轴颈中心相对于静平衡位置作微小涡动;此外,每块瓦相对于各自的静平衡位置作微小摆动。可倾瓦轴承和固定瓦轴承的区别仅在于前者瓦块的摆动。图 1-9 是任一第  $i$  块瓦的工作示意图及坐标系的选取参考图。

在以上参数中, $e_x$ 、 $e_y$ 、 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、和  $\Delta\varphi$  等参数相对于  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$  属于高阶小量。

### 2. 油膜力增量的表达式

图 1-9 中的  $\eta Z \xi$  是同瓦块固结在一起的相对坐标系,随同瓦块一起摆动。涡动后,在绝对坐标系  $x_{o_0}y$  中观察到瓦块在其静平衡位置附近作微小摆动,但在相对坐标系中,瓦块却是固定不动的。因此,可倾瓦轴承油膜力增量的表达式在  $\eta Z \xi$  坐标系中同固定

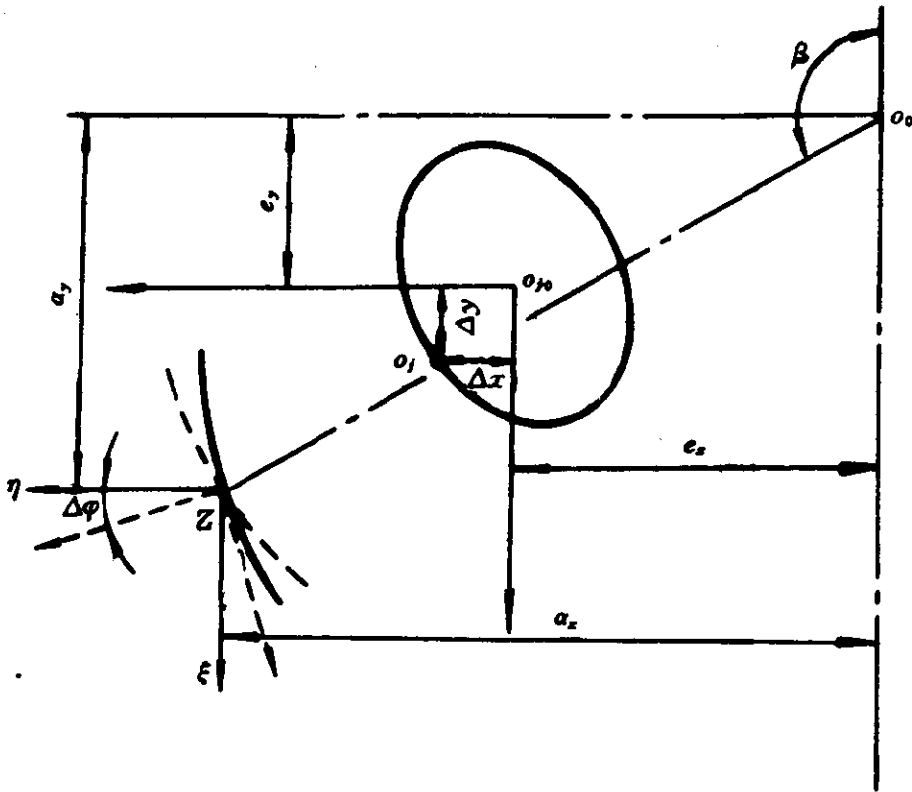


图 1-9 任一瓦块的工作情况及坐标系的选取示意图

$o_0$ —瓦弧中心;  $xo_jo_y$ —绝对坐标系;  $\eta Z\xi$ —与瓦块固结在一起的相对坐标系;  $\Delta\varphi$ —瓦块相对于静平衡位置的动态摆角;  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ —涡动后轴颈中心  $o_j$  在  $xo_jo_y$  坐标系中的水平、垂直位移增量;  $e_x$ 、 $e_y$ — $o_j$  相对于  $o_0$  的水位分量;  $a_x$ 、 $a_y$ —瓦块的支点系数, 表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= R\sin(\pi - \beta) \\ a_y &= R\cos(\pi - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

瓦轴承完全一样。

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_\eta \\ \Delta f_\xi \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{\eta\eta} & k_{\eta\xi} \\ k_{\xi\eta} & k_{\xi\xi} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\xi \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} d_{\eta\eta} & d_{\eta\xi} \\ d_{\xi\eta} & d_{\xi\xi} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta\dot{\eta} \\ \Delta\dot{\xi} \end{Bmatrix}_i \quad (1-22)$$

式中下角标“ $i$ ”表示任意第  $i$  块瓦, 下同。

相对坐标系与绝对坐标系间有以下转换关系

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi \\ -\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} x - a_{xi} + e_{xi} \\ y - a_{yi} + e_{yi} \end{Bmatrix} \quad (1-23)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_\eta \\ F_\xi \end{Bmatrix}_i \quad (1-24)$$

在静平衡位置上有

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \\ \Delta\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

将上式代入式(1-23)得

$$\begin{Bmatrix} \eta_0 \\ \xi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 - a_{xi} + e_{xi} \\ y_0 - a_{yi} + e_{yi} \end{Bmatrix} \quad (1-26)$$

由式(1-23)、式(1-26)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\xi \end{Bmatrix}_i &= \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \eta_0 \\ \xi_0 \end{Bmatrix}_i \\ &= \begin{bmatrix} \cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi \\ -\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} x - a_{xi} + e_{xi} \\ y - a_{yi} + e_{yi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_0 - a_{xi} + e_{xi} \\ y_0 - a_{yi} + e_{yi} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1-27)$$

一般情况下,瓦块的动态摆角  $\Delta\varphi$  是一个很小的数值,因此有

$$\left. \begin{aligned} \cos\Delta\varphi &\approx 1 \\ \sin\Delta\varphi &\approx \Delta\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

将上式代入式(1-27)并略去高阶小量得

$$\begin{Bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\xi \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \Delta x - \Delta\varphi_i a_{yi} \\ \Delta y + \Delta\varphi_i a_{xi} \end{Bmatrix} \quad (1-29)$$

将  $\Delta\varphi = 0$  代入式(1-24)得

$$\begin{Bmatrix} F_{x0} \\ F_{y0} \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} F_{\eta 0} \\ F_{\xi 0} \end{Bmatrix}_i \quad (1-30)$$

由式(1-24)、式(1-30)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \end{Bmatrix}_i &= \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} F_{x0} \\ F_{y0} \end{Bmatrix}_i \approx \begin{Bmatrix} \Delta f_\eta - \Delta\varphi F_\xi \\ \Delta f_\xi + \Delta\varphi F_\eta \end{Bmatrix}_i \\ &= \begin{Bmatrix} \Delta f_\eta - \Delta\varphi(\Delta f_\xi + F_{y0}) \\ \Delta f_\xi + \Delta\varphi(\Delta f_\eta + F_{x0}) \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (1-31)$$

式中  $\Delta f_\xi$ 、 $\Delta f_\eta$  相对于  $F_{y0}$ 、 $F_{x0}$  均属于高阶小量,略去后上式成为

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \end{Bmatrix}_i \approx \begin{Bmatrix} \Delta f_\eta - \Delta\varphi F_{y0} \\ \Delta f_\xi + \Delta\varphi F_{x0} \end{Bmatrix}_i \quad (1-32)$$

将式(1-22)、式(1-29)代入式(1-32)得

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{\eta\eta} & k_{\eta\xi} \\ k_{\xi\eta} & k_{\xi\xi} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{\eta\dot{x}} & d_{\eta\dot{y}} \\ d_{\xi\dot{x}} & d_{\xi\dot{y}} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_{x\varphi}\Delta\varphi \\ k_{y\varphi}\Delta\varphi \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} d_{x\dot{\varphi}}\Delta\dot{\varphi} \\ d_{y\dot{\varphi}}\Delta\dot{\varphi} \end{Bmatrix}_i \quad (1-33)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k_{x\varphi i} &= \alpha_{xi}k_{\eta\xi i} - \alpha_{yi}k_{\eta\eta i} - F_{y0i} \\ k_{y\varphi i} &= \alpha_{xi}k_{\xi\xi i} - \alpha_{yi}k_{\xi\eta i} + F_{x0i} \\ d_{x\dot{\varphi} i} &= \alpha_{xi}d_{\eta\dot{x} i} - \alpha_{yi}d_{\eta\dot{y} i} \\ d_{y\dot{\varphi} i} &= \alpha_{xi}d_{\xi\dot{x} i} - \alpha_{yi}d_{\xi\dot{y} i} \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

设可倾瓦轴承共有  $s$  块瓦, 轴承油膜力增量为

$$\begin{aligned} \Delta f_x &= \sum_{i=1}^s \Delta f_{xi} \\ &= k_{xx}\Delta x + k_{xy}\Delta y + d_{xx}\Delta \dot{x} + d_{xy}\Delta \dot{y} + \sum_{i=1}^s (k_{x\varphi}\Delta\varphi + d_{x\dot{\varphi}}\Delta\dot{\varphi})_i \end{aligned} \quad (1-35)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_y &= \sum_{i=1}^s \Delta f_{yi} \\ &= k_{yx}\Delta x + k_{yy}\Delta y + d_{yx}\Delta \dot{x} + d_{yy}\Delta \dot{y} + \sum_{i=1}^s (k_{y\varphi}\Delta\varphi + d_{y\dot{\varphi}}\Delta\dot{\varphi})_i \end{aligned} \quad (1-36)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k_{xx} &= \sum_{i=1}^s k_{\eta\eta i}; & k_{xy} &= \sum_{i=1}^s k_{\eta\xi i} \\ k_{yx} &= \sum_{i=1}^s k_{\xi\eta i}; & k_{yy} &= \sum_{i=1}^s k_{\xi\xi i} \\ d_{xx} &= \sum_{i=1}^s d_{\eta\dot{x} i}; & d_{xy} &= \sum_{i=1}^s d_{\eta\dot{y} i} \\ d_{yx} &= \sum_{i=1}^s d_{\xi\dot{x} i}; & d_{yy} &= \sum_{i=1}^s d_{\xi\dot{y} i} \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

由式(1-35)、式(1-36)知道,可倾瓦轴承油膜力增量不仅是线位移  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  的函数,而且还是瓦块动态摆角  $\Delta\varphi$  的函数。式(1-37)中的  $k_{ij}$ 、 $d_{ij}$  ( $i, j = x, y$ ) 是可倾瓦轴承在相对坐标系下的动特性系数,称为相对动特性,其计算方法与固定瓦轴承相同。

### 3. 可倾瓦轴承力矩增量的表达式

受到外界扰动后,轴颈中心在静平衡位置附近涡动。除此之外,瓦块还要绕其支点在瓦块的静平衡位置附近摆动。

摆动时第  $i$  块瓦绕其支点的力矩增量为

$$\begin{aligned} \Delta M_i &= \alpha_{yi} \Delta f_{xi} - \alpha_{xi} \Delta f_{yi} \\ &= - (k_{\varphi xi} \Delta x + k_{\varphi yi} \Delta y + k_{\varphi\varphi i} \Delta\varphi + d_{\varphi xi} \Delta\dot{x} \\ &\quad + d_{\varphi yi} \Delta\dot{y} + d_{\varphi\varphi i} \Delta\dot{\varphi}_i) \end{aligned} \quad (1-38)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k_{\varphi xi} &= \alpha_{xi} k_{\xi\eta i} - \alpha_{yi} k_{\eta\eta i} \\ d_{\varphi xi} &= \alpha_{xi} d_{\xi\eta i} - \alpha_{yi} d_{\eta\eta i} \\ k_{\varphi yi} &= \alpha_{xi} k_{\xi\xi i} - \alpha_{yi} k_{\eta\xi i} \\ d_{\varphi yi} &= \alpha_{xi} d_{\xi\xi i} - \alpha_{yi} d_{\eta\xi i} \\ k_{\varphi\varphi i} &= \alpha_{xi} k_{y\varphi i} - \alpha_{yi} k_{x\varphi i} \\ d_{\varphi\varphi i} &= \alpha_{xi} d_{y\varphi i} - \alpha_{yi} d_{x\varphi i} \end{aligned} \right\} \quad (1-39)$$

式(1-35)、式(1-36)、式(1-38)知道,要表征可倾瓦轴承的动力学行为,除八个相对动特性系数外,每块瓦还增加了10个系数,共有  $10s + 8$  个系数。这些系数可根据瓦块的相对动特性系数按式(1-34)、式(1-39)计算。为了方便读者使用,在第八章给出了常用五瓦可倾瓦轴承的相对动特性,供设计时参考。

### 参 考 文 献

- 1 张直明主编. 滑动轴承的流体动力润滑理论. 北京:高等教育出版社,1986.
- 2 平克斯 O, 斯德李希特 B. 流体动力润滑理论. 北京:机械工业出版社,1980.
- 3 汽轮机径向滑动轴承性能计算联合工作组. 中华人民共和国机械工业部指导性技术文件, 汽轮机径向滑动轴承性能计算: 审查稿上、下册,1982.
- 4 徐龙祥, 朱均. 大型汽轮发电机组轴系稳定性分析. 机械工程学报, 1992(3): 6~11.

## 第二章 特征值计算与线性稳定性概念

### 2.1 概 述

具有  $n$  个自由度的转子 - 轴承系统(线性系统)的运动方程可用式(2 - 1)所示的二阶矩阵微分方程表示

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (2 - 1)$$

式中  $[M]$ 、 $[D]$ 、 $[K]$ —— 分别是系统的质量、阻尼和刚度矩阵  
(维数为  $n$ );

$\{q\}$ —— 位移矢量;

$\{F\}$ —— 激振力矢量。

系统作自由振动的方程为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (2 - 2)$$

不论是计算系统的稳定性、临界转速还是不平衡响应,其中心任务是计算式(2 - 2)的特征值与特征向量。这一章简要介绍特征与特征向量的常用算法和程序。

### 2.2 高次方程求根法

在式(2 - 2)中令  $\{q\} = \{\phi\}e^{\nu t}$  得

$$(\nu^2[M] + \nu[D] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (2 - 3)$$

式中  $\nu$  —— 特征值;

$\{\phi\}$  —— 特征向量。

上式具有非平凡解的条件是系数矩阵的行列式为零,即

$$|\nu^2[M] + \nu[D] + [K]| = 0 \quad (2 - 4)$$

上面的行列式称为特征行列式,将它展开后得到一个关于  $\nu$  的  $2n$  次方程,称为特征方程。

$$b_{2n}\nu^{2n} + b_{2n-1}\nu^{2n-1} + \dots + b_1\nu + b_0 = 0 \quad (2-5)$$

求解式(2-5)可得系统的 $2n$ 个特征值 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n}$ 。目前常用的算法有牛顿—贝尔斯托(Newton—Bairstow)法<sup>[1]</sup>、最速下降法<sup>[2]</sup>和三步算法<sup>[3]</sup>。

将特征值代入式(2-3)求解线性方程组,就能得到与某一特征值对应的特征向量。下面再介绍一种用伴随矩阵求解特征向量的方法。

将式(2-3)改写成

$$[H]\{\phi\} = \{0\} \quad (2-6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中} \quad [H] &= \nu^2[M] + \nu[D] + [K] \\ \{\phi\} &= \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}^T \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

设矩阵 $[H]$ 的伴随矩阵为 $[H^*]$ ,根据定义有

$$[H]^{-1} = [H^*]/|H| \quad (2-8)$$

实际上,由于 $|H|=0$ , $[H]^{-1}$ 是不存在的。根据上式可得以下关系

$$[H][H^*] = [H][H]^{-1}|H| = [0] \quad (2-9)$$

比较式(2-6)、式(2-9)可以看到,特征向量 $\{\phi\}$ 与伴随矩阵 $[H^*]$ 的任何不等于零的列成比例,由此可求得各阶特征值对应的特征向量。

轴系的特征方程(2-5)往往是病态的。大量的计算表明,詹金斯(Jenkins)<sup>[3]</sup>提出的三步算法具有较强的适用性,一般都能给出令人满意的结果。

当轴系的自由度较多时,式(2-5)的系数 $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ 的数量级差别较大,计算时常出现溢机的现象,给计算结果带来较大的误差。

## 2.3 矩阵特征值法

这一节主要介绍工程上常用的矩阵特征值计算方法及相应的软件。书中以后各章给出的计算实例以及第八章给出的计算程序,



均是按这一节介绍的方法计算系统的特征值与特征向量。

### 1. 广义特征值方法

方程(2-2)是系统作自由振动的微分方程,为了求式(2-2)的特征值和特征向量,增加下面一个恒等方程。

$$[M]\{\dot{q}\} - [M]\{\dot{q}\} = \{0\} \quad (2-10)$$

将式(2-2)与式(2-10)结合一起便得到系统在状态空间作自由振动的方程为

$$\begin{bmatrix} -K & \\ & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

设 $\{q\} = \{\phi\}e^{\nu t}$ ,则有 $\{\dot{q}\} = \nu\{\phi\}e^{\nu t}$ , $\{\ddot{q}\} = \nu^2\{\phi\}e^{\nu t}$ 。将这些关系代入式(2-11)得

$$\begin{bmatrix} -K & \\ & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \nu\phi \end{Bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} D & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \nu\phi \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} -K & \\ & M \end{bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} D & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \\ \{\psi\} &= \{\phi^T, \nu\phi^T\}^T \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

将式(2-13),代入式(2-12)得

$$[A]\{\psi\} = \nu[B]\{\psi\} \quad (2-14)$$

上式称为广义特征值问题,求解式(2-14)可以得到 $2n$ 个特征值 $\nu$ 与相应的特征向量 $\{\psi\}$ 。由上面的分析知道,式(2-3)的特征值就是式(2-14)的特征值,式(2-3)的特征向量 $\{\phi\}$ 只是式(2-14)的特征向量 $\{\psi\}$ 的上半部分。如果矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 是对称的,已有很多成熟的算法和程序<sup>[4]</sup>可以用来求解式(2-14)的特征值与特征向量。但是,对转子—轴承系统来说,矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 往往是非对称的。对于非对称矩阵的广义特征值问题,已有一些求解方法<sup>[5]</sup>。

### 2. 标准特征值求解方法

在方程(2-14)的两边左乘矩阵 $[B]^{-1}$ 得

$$\nu\{\psi\} = [S]\{\psi\} \quad (2-15)$$

$$\text{式中 } [S] = [B]^{-1}[A] \begin{Bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

式(2-16)中的分块矩阵 $[I]$ 为单位矩阵,维数与 $[M]$ 的阶数相同。式(2-15)称为矩阵 $[S]$ 的标准特征值问题。一般情况下, $[S]$ 是非对称的实矩阵,在参考文献[4]中已有很多成熟的算法及程序可用来计算式(2-15)的特征值与特征向量。

由式(2-16)知道,计算矩阵 $[S]$ 需要计算质量矩阵 $[M]$ 的逆,当 $[M]$ 为满阵时, $[M]^{-1}$ 的计算工作量较大。但在转子-轴承系统中,质量矩阵 $[M]$ 往往是对角阵, $[M]^{-1}$ 的计算就十分方便。

### 3. 部分特征值方法

当系统的自由度很多时,式(2-14)的矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 或式(2-15)的矩阵 $[S]$ 的阶数往往都很高。工程上只对系统的某些低阶特征值及特征向量感兴趣,求出全部特征值及特征向量不仅没有必要而且非常困难。计算系统在某一范围内的部分特征值及特征向量便是一种非常实用而又经济的方法。计算实对称矩阵的部分特征值已有很多成熟的算法<sup>[4]</sup>,但是,在转子-轴承系统中,矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 或 $[S]$ 一般都是非对称的。此时可应用参考文献[6]提出的方法直接计算式(2-3)的部分特征值与特征向量。实践表明这是一种很有效的方法,笔者曾将一台300MW汽轮发电机组离散成100个集中质量,应用此方法计算轴系前120阶特征值及特征向量,计算时采用双精度,整个计算过程在ELXSI/6400计算机上仅用了260s的CPU时间。下面简要介绍这种方法的基本思想。

式(2-3)称为二阶特征值问题,其中矩阵 $[M]$ 、 $[D]$ 、 $[K]$ 均为 $n \times n$ 的实数矩阵。假设存在 $n \times m$  ( $m < n$ )的复数矩阵 $[Q]$ 和 $m \times m$ 的复数矩阵 $[F]$ ,并满足

(1) 矩阵 $[F]$ 的秩为 $m$ 。

$$(2) [M][Q][F]^2 + [D][Q][F] + [K][Q] = \{0\}$$

(2-17)

又设矩阵 $[F]$ 的特征值与特征向量分别是 $\nu$ 和 $\{r\}$ ,那么 $\nu$ 和 $[Q]\{r\}$ 分别是式(2-3)的特征值与特征向量。这一结论可证明如下

用  $\{r\}$  右乘(2-17)得

$$[M][Q][F]^2\{r\} + [D][Q][F]\{r\} + [K][Q]\{r\} = \{0\} \quad (2-18)$$

因为  $\nu$  和  $\{r\}$  是  $[F]$  的特征值与特征向量,故有

$$\nu\{r\} = [F]\{r\} \quad (2-19)$$

将式(2-19)代入式(2-18)得

$$\nu^2[M][Q]\{r\} + \nu[D][Q]\{r\} + [K][Q]\{r\} = \{0\} \quad (2-20)$$

在上式中令  $\{\phi\} = [Q]\{r\}$  得

$$(\nu^2[M] + \nu[D] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (2-21)$$

证毕。

根据上面的证明过程可以看到,这种方法的主要目的是生成满足式(2-17)的矩阵  $[Q]$  和  $[F]$ 。根据需要,矩阵  $[F]$  的阶数  $m$  可以大大小于式(2-3)的矩阵的阶数  $n$ 。因此,原先一个阶数很大的二阶特征值问题式(2-3)便转化为一个阶数很小的矩阵  $[F]$  的标准特征值问题。

## 2.4 线性系统稳定性基本概念

研究系统的稳定性,就是研究系统的平衡状态的稳定性。下面用图 2-1 简要说明稳定性的基本概念。

在图 2-1(a)中,一个圆柱体放在内圆柱面上。平衡时圆柱体处于最低点  $A$ ,如果施加一扰动,使圆柱体偏离平衡状态而处于图中的虚线位置。去掉扰动后,在重力的作用下,圆柱体绕  $A$  点左右滚动,最后返回到原先的平衡状态。我们称这样的平衡状态是稳定的。

在图 2-1(b)中,圆柱体放在外圆柱面上。设平衡时圆柱体处于最高点  $B$ 。当圆柱体受到扰动偏离其平衡状态,它将无限地偏离原先的平衡状态。我们称这样的平衡状态是不稳定的。

线性系统的稳定性可以这样定义:如果受到扰动后,系统最终

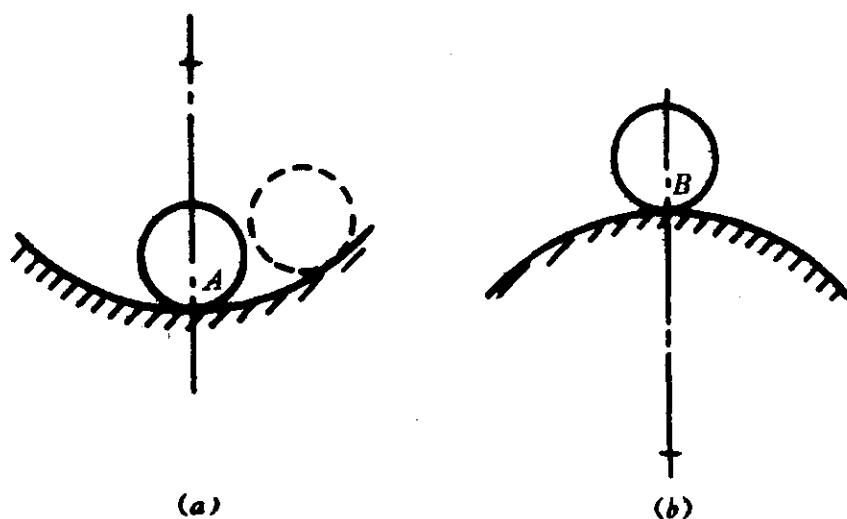


图 2-1 平衡状态示意图

可以返回到原先的平衡状态,则这一平衡状态是稳定的;如果受扰后,系统无限偏离原先的平衡状态,则这一平衡状态是不稳定的。

方程(2-2)描述的是线性系统在平衡状态附近作自由振动的方程。可以证明,平衡状态(简称系统)是稳定的充要条件,式(2-2)所有特征值具有负实部。线性系统稳定状态与特征值的关系可表述为

当所有特征值的实部均小于零时,系统是稳定的;

当至少有一个特征值的实部大于零时,系统是不稳定的;

当只有一个特征值的实部等于零时,系统处于稳定性界限状态。

### 参 考 文 献

- 1 中国科学院沈阳计算技术研究所等编. 电子计算机常用算法,增订版. 北京:科学出版社,1983.
- 2 刘德贵,费景高,于泳江等编. FORTRAN 算法汇编:第一分册. 北京:国防工业出版社,1982.
- 3 Jenkins MA, Traub J F. A three-stage algorithm for real polynomials using quadratic iteration. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1970, 7:545~566

- 4 郭富印,冯国环等编. FORTRAN 算法汇编:第三分册. 北京:国防工业出版社,1982.
- 5 周树荃,戴华. 非对称矩阵广义特征值问题的组合 QZ 法. 南京航空学院学报, 1983,(1):17~28
- 6 Zhen T S, Liu W M, Cai Z B. A Generalized Iteration Method for Quadratic Eigenvalue Problems in Structural Dynamic Analysis. Computers & Structures, 1989, 33(5):1139~1143

# 第三章 单圆盘对称转子-轴承系统的稳定性

## 3.1 研究稳定性的意义及背景

大型旋转机械的功率越来越大,工作转速越来越高,机组的动力稳定性日益受到人们的重视。特别是近年来,国内外许多大型、高速旋转机组都相继发生了不同程度的油膜失稳事故,造成了巨大的经济损失。

80年代初,我国曾从国外引进了数套大化肥设备,其中透平压缩机组,由于经常发生油膜失稳事故,在很长一段时间内只能依靠降低生产能力来保证机组的安全运行。1972年,日本海南电厂一台600MW汽轮发电机组,超速试验时,50多米长的转子断成了17段。国产200MW汽轮发电机组,自1972年在朝阳电厂投运以来,先后已有多台机组发生了不同程度的油膜失稳甚至油膜振荡。例如,1985年某电厂一台200MW机组发生了严重的油膜振荡事故,机组转子断裂成数段飞出;1988年,又一台国产200MW机组在某电厂做超速试验时发生了类似的灾难性事故,30多米长的转子断成了13段,直接经济损失达2千多万元,间接经济损失竟以亿计。

以上这些事故说明,国内外大型、高速旋转机械轴系的稳定性有待于进一步的研究和提高。研究、计算旋转机械转子-轴承系统的稳定性,是设计研究人员在设计新机组时必须考虑的主要问题之一。

一百多年以前,兰金(Rankine)发表了一篇题为 Centrifugal Whirling of Shafts 的论文。从此便标志着应用力学领域里的一门

新学科——转子动力学的诞生。其主要目的是研究旋转机械的动力学问题,尤其是旋转机械的动力稳定性。本世纪 20 年代,是转子动力学发展史上的一个里程碑。由于工业的日益发展,需要更大型的机组在超临界转速下运行。人们得以观察到很多轴系的失稳现象,并进行了许多基础研究。纽金科(Newkirk)曾研究过由于轴承油膜和干摩擦效应引起的不稳定性<sup>[1,2]</sup>。金布尔(Kimball)还研究过由于转子内阻尼引起的不稳定性<sup>[3]</sup>。对轴系稳定性的定量计算,最早可以追溯到 50 年代,普劳尔(Prohl)<sup>[4]</sup>用传递矩阵法成功地计算了多跨转子的临界转速。70 年代,伦德(Lund)<sup>[5]</sup>在轴系稳定性领域作出了杰出的贡献,他沿用经典的传递矩阵法,成功地计算了实际转子-轴承系统的稳定性。此后,有关稳定性的分析方法与计算程序<sup>[6~11]</sup>应运而生。这些工作,为轴系的动力学设计奠定了理论基础。

### 3.2 转子-轴承系统失稳的典型现象

一根对称的转轴,有轻微的不平衡量,它的临界转速约为 5000r/min,支承在两个 360° 的圆柱轴承上,轴承工作在轻载状态下。该系统的振动特性如图 3-1<sup>[12]</sup>所示,称为转子振动的级联图,纵坐标为轴的转速,横坐标为涡动频率。图中的 1X 表示同期强迫振动,0.5X 表示油膜涡动。

由该图可以观察到以下现象

(1) 当转子的工作转速  $n < 2000\text{r/min}$  时,在整个转轴上只观察到由于不平衡引起的强迫振动(1X 处的振动),而且振幅都较小。强迫振动的特点是振动频率总是与轴的旋转频率相等,常常称之为同期振动。

(2) 当轴的转速  $n$  大于 2000r/min 而又低于一阶临界转速时,在转轴上同时观察到两种形式的振动。第一种还是 1X 处的同期振动,另一种则是 0.5X 处的油膜涡动,涡动频率总是近似等于转轴频率的一半,通常称之为半速涡动。油膜涡动的振幅在这一转

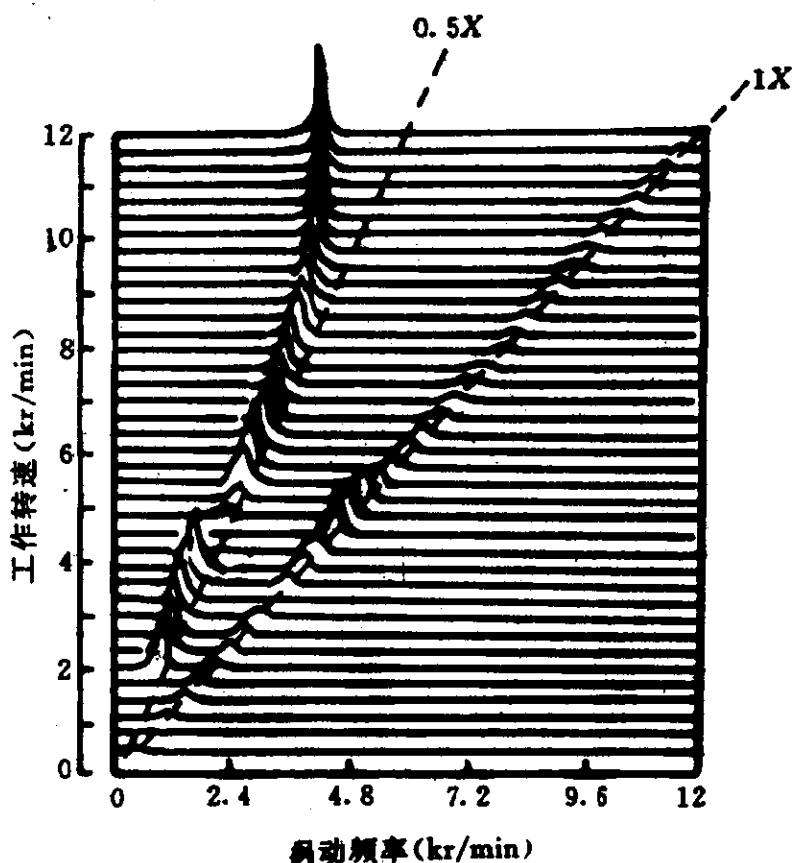


图 3 - 1 转子振动级联图

速范围内基本保持不变,但比此时的强迫振动的振幅要大。油膜涡动占主导地位,相对于转轴来说,轴承的动态性能起主要作用。

(3) 当轴的转速  $n$  升高到一临界转速附近,油膜涡动突然消失,强迫振动的振幅很大。强迫振动占主导地位,这是典型的共振现象。由于滑动轴承的阻尼效应,共振峰值为一有限值。

(4) 当工作转速大于一临界转速时,同期强迫振动的成分减弱,油膜涡动再次出现并占主导地位。

(5) 当工作转速近似等于两倍的临界转速时,油膜涡动的频率近似等于一临界转速,油膜涡动的振幅迅速增加。一旦出现这种情况,机组很难冲过这一区域,因此十分危险。此时的油膜涡动称为油膜振荡,其特点是振荡频率不随转速的增加而有明显的变化,总是近似等于转子的一临界角频率。

图 3 - 1 所示是一种比较典型的油膜失稳现象。转速较低时



无油膜涡动,只有同期强迫振动;当转速增加到一定值后,除同期振动外,还有油膜涡动,且涡动占主导地位;当转速继续增加到一临界转速的两倍时,油膜涡动变成油膜振荡,由于振荡的振幅很大,机组处于十分危险的状态。这种失稳现象还有一个特征,即在发生危险的油膜振荡之前,存在着一种不太危险的油膜涡动,它向人们提供了足够的警告信息,预示不久机组将会发生危险的油膜振荡。而图 3-2 展示的失稳现象却并非如此。

工作转速(kr/min)

涡动频率(kr/min)

图 3-2 转子振动级联图

图 3-2 是另一种典型的油膜失稳现象。当转速  $n < 4800\text{r/min}$  时,转轴上只观察到由于不平衡引起的同期强迫振动,从图上可粗略地估算出转轴的一临界转速为  $2300\text{r/min}$ 。当  $n$  增加到  $4800\text{r/min}$  附近时,除同期强迫振动外,还有一种振幅很大的突发性的油膜涡动,而且涡动的频率基本保持不变,近似等于轴的一临界角频率,这是一种十分危险的油膜振荡。这种失稳现象的特点是,在发生油膜振荡前,整个转轴没有油膜涡动。而一旦出现油膜涡动,还来不及向人们提出足够的警告信息,就迅速发展成为十分危险的油膜振荡。与图 3-1 相比,图 3-2 展示的失稳现象具有更大的危害性。

从上述油膜失稳现象可以看到,支承在滑动轴承上的转子,有

两种不同的振动。一种是由于转子不平衡引起的同期强迫振动；另一种是由于滑动轴承的油膜激发的自激振动——油膜涡动。对于圆柱轴承来说，油膜涡动的角频率总是近似等于轴的旋转角频率之半。对于其他形式的轴承，其涡动角频率略小于轴的旋转角频率之半，但有时仍称油膜涡动为半速涡动。当油膜涡动发展到一定阶段后便转化为油膜振荡，其典型特征是振荡的频率基本保持不变。约为转轴的一临界频率，且振荡振幅迅速增加。

油膜涡动和油膜振荡都是由于系统在这一工况下丧失了动力稳定性（简称失稳）而出现的自激振动。开始出现油膜涡动时轴的旋转角速度称为失稳角速度或界限角速度  $\Omega_c$ ，与此对应的转速称为失稳转速或界限转速  $n_c$ 。

出现油膜涡动后系统便失去了动力稳定性，按照 2.4 节的线性稳定性理论，一旦失稳后，振动的幅值随时间不断增大。而图 3-1 观察到的实际情况并非如此，涡动振幅增加到某一值后不再增加，这是因为失稳后，线性微分方程已不能准确描述失稳后的运动，更为精确的描述需要一组非线性微分方程。

对高速旋转机械的转子-轴承系统进行动力学设计，首要任务就是计算机组的失稳转速  $n_c$ ，并使  $n_c$  足够地大于系统的额定工作转速。

### 3.3 失稳机理

转子-轴承系统发生动力不稳定性的原因，主要是因为系统本身存在负阻尼或交叉刚度。这一节对它们激发系统失稳的原因作一简单的理论分析。

#### 1. 负阻尼

对单自由度弹簧阻尼系统有

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad (3-1)$$

式中  $m$  —— 振动体质量；

$r$  —— 阻尼系数；

$k$  —— 刚度系数。

设  $x = x_0 e^{\nu t}$ , 代入式(3-1) 得特征方程为

$$m\nu^2 + r\nu + k = 0 \quad (3-2)$$

式中  $\nu$  —— 特征值。

解方程(3-2) 得两个特征值为

$$\nu_{1,2} = (-r \pm \sqrt{r^2 - 4mk}) / (2m)$$

讨论弱阻尼的情况, 认为  $r^2 - 4mk < 0$ , 上式变为

$$\nu_{1,2} = -\mu \pm j\omega \quad (3-3)$$

式中  $-\mu = -r/(2m)$  —— 特征值  $\nu$  的实部;

$\omega = \sqrt{4mk - r^2}/(2m)$  —— 特征值  $\nu$  的虚部;

$j = \sqrt{-1}$ 。

自由振动的位移可表示为

$$x = c_1 e^{\nu_1 t} + c_2 e^{\nu_2 t} = A e^{-\mu t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3-4)$$

式中  $A, \varphi$  —— 由系统初始条件决定的常数;

$A e^{-\mu t}$  —— 自由振动的振幅。

如果阻尼系数  $r > 0$ , 则  $-\mu < 0$ , 即特征值具有负实部。此时式(3-4) 描绘的是形如图 3-3(a) 所示的自由振动, 随着时间的增加, 振幅不断衰减并最终衰减至零, 此时的振动是稳定的衰减振动。如果阻尼系数  $r < 0$  (称为负阻尼), 则  $-\mu > 0$ , 即特征值的实部大于零, 其振动图象如图 3-3(b) 所示, 随着时间的增加, 振幅不断增大并最终为无穷大, 此时的振动称为不稳定振动。

上面的分析表明, 负阻尼是促使系统失稳的一个因素。有时滑动轴承提供的阻尼就是负阻尼, 例如可倾瓦轴承, 当偏心率小到一定程度时, 轴承油膜产生的阻尼系数  $D_{xx}, D_{yy}$  往往小于零<sup>[13]</sup>。

## 2. 交叉刚度

在图 3-4(a) 中, 质点  $m$  在  $x, y$  方向分别受到交叉刚度力  $F_{Lx}, F_{Ly}$  的作用, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} F_{Lx} &= -ay \\ F_{Ly} &= ax \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

式中  $a$  —— 交叉刚度系数。

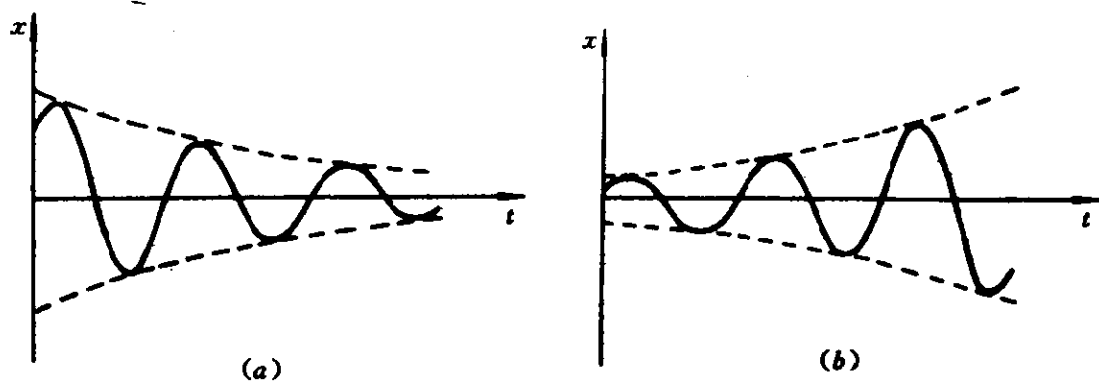


图 3-3 振动图象

(a) 稳定振动; (b) 不稳定振动。

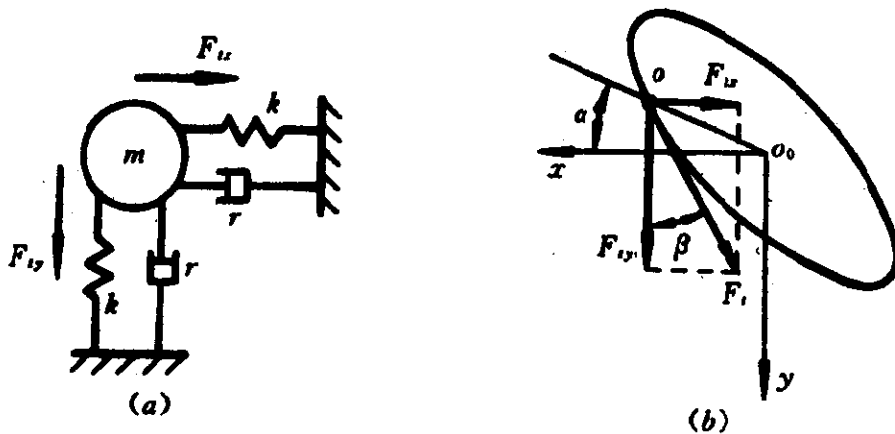


图 3-4 交叉刚度示意图

(a) 力学模型; (b) 物理解释。

质点  $m$  在  $x, y$  方向的运动方程为

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx - ay = 0 \quad (3-6)$$

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky + ax = 0 \quad (3-7)$$

令  $\rho = x + jy$ , 这样上面两式可用一个等式表示为

$$m\ddot{\rho} + r\dot{\rho} + k\rho + j a \rho = 0 \quad (3-8)$$

可以求得式(3-8)的两个特征值为

$$\nu = (-r \pm \sqrt{r^2 - 4mk - j4ma}) / (2m) \quad (3-9)$$

特征值  $\nu$  的实部为

$$\operatorname{Re}(\nu) = \sqrt{2} (-\sqrt{2}r \pm \sqrt{r^2 - 4mk + S}) / (4m) \quad (3-10)$$

$$\text{式中} \quad S = \sqrt{(r^2 - 4mk)^2 + (4ma)^2} \quad (3-11)$$

在方程式(3-10)中考虑下面两种情况

(1)  $r = 0$ , 由式(3-10)得

$$\operatorname{Re}(\nu) = \sqrt{2} \sqrt{(mk)^2 + (ma)^2} - mk / (2m) \quad (3-12)$$

式(3-12)表明, 当外部阻尼系数  $r = 0$  时, 有一个特征值的实部大于零, 故交叉刚度激发系统失稳。

(2)  $r > 0$ , 此时要保证系统稳定,  $\operatorname{Re}(\nu)$  必须小于零。根据式(3-10)得系统稳定的条件为

$$-\sqrt{2}r \pm \sqrt{r^2 - 4mk + S} < 0$$

即  $S < r^2 + 4mk$

将式(3-11)代入上式得

$$-r\omega_k < a < r\omega_k \quad (3-13)$$

式中  $\omega_k = \sqrt{k/m}$ 。式(3-13)表明, 同时存在外部阻尼与交叉刚度时, 要保证系统稳定, 交叉刚度系数  $a$  不能太大。当  $|a| > r\omega_k$  时, 系统不稳定。

以上分析表明, 交叉刚度总是激发系统不稳定。关于交叉刚度引起不稳定的过程, 可用图3-4(b)简单说明。 $o_0$  表示静平衡时的圆盘中心,  $o$  表示涡动后的中心, 图示椭圆为圆盘中心的涡动轨迹。交叉刚度力  $F_{lx}$ 、 $F_{ly}$  的方向如图3-4(b)所示, 它们的合力用  $F_l$  表示。用  $\beta$  表示  $F_l$  与  $F_{ly}$  的夹角,  $\alpha$  表示涡动后的位移矢径  $o_0o$  与  $x$  轴的夹角。由图3-4(b)得

$$\operatorname{tg}\alpha = y/x$$

$$\operatorname{tg}\beta = F_{lx}/F_{ly} = y/x$$

比较以上两式不难发现

$$\beta = \alpha$$

这表示  $F_{lx}$ 、 $F_{ly}$  的合力  $F_l$  总是与位移矢径  $o_0o$  垂直, 沿涡动轨迹的

切线方向,  $F_t$  也称为切向力。如果没有足够的外部阻尼力与这一切向力  $F_t$  平衡,  $F_t$  将使涡动不断加剧, 从而激发系统不稳定。

### 3.4 引起转子-轴承系统失稳的主要因素

前一节的分析表明, 负阻尼与交叉刚度是激发系统失稳的主要原因。在转子-轴承系统中, 下面就系统中产生负阻尼或交叉刚度的主要零部件, 作一简单说明。

#### 1. 滑动轴承

滑动轴承(以下简称轴承)是引起轴系失稳的主要因素之一, 目前研究得比较成熟。由第一章知道, 可以用四个刚度系数和四个阻尼系数表征轴承的动力学性能。在四个刚度系数中有两个交叉刚度  $k_{xy}$ 、 $k_{yx}$ , 如果轴承通过交叉刚度系数施加给轴颈的切向力大于轴承施加给轴颈的阻尼力, 则轴承激发系统失稳。

#### 2. 迷宫密封

迷宫密封是高速旋转机械广为采用的一种非接触式密封。例如一些离心压缩机, 为了防止级间或段间的气体泄漏, 有时采用较长的迷宫密封。在高速旋转情况下, 迷宫密封往往引起较大的振动。理论分析表明, 迷宫密封类似于滑动轴承, 也可用四个线性化的刚度系数表征其动力学性能<sup>[14,15]</sup>。由于存在交叉刚度, 迷宫密封往往也是促使系统失稳的主要原因之一。

#### 3. 叶片顶隙激振

如图 3-5 所示为叶片在汽缸中旋转的情况。由于轴的弹性使得叶片中心偏离汽缸中心。叶片与汽缸间的径向间隙沿圆周方向是不均匀的。图 3-5(a) 表示的是压气机叶片, 转动时叶片驱动气体流动。气体施加于叶片的周向力在间隙大的一侧大于间隙小的一侧。图 3-5(b) 表示的是汽轮机叶片, 它是由高压蒸汽驱动的。此时蒸汽施加在叶片上的圆周力在间隙小的一边大于间隙大的一边。不论是压气机还是汽轮机, 气体施加给叶片的周向力除有一力偶外, 都还有一个与位移矢径垂直的力  $F_t$ , 它总是沿涡动轨

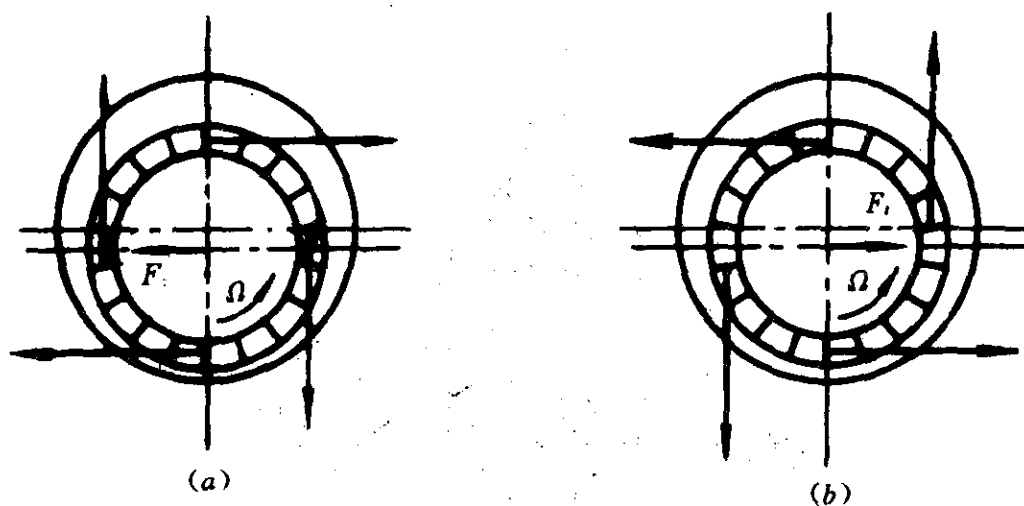


图 3-5 叶片的气体流动示意图

(a) 压汽机; (b) 汽轮机。

迹的切线方向,促使系统失稳。 $F_t$  在坐标轴  $x$ 、 $y$  上的投影分别是  $F_{tx}$ 、 $F_{ty}$ , 它们的表达式为

$$\left. \begin{aligned} F_{tx} &= -ay \\ F_{ty} &= ax \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

#### 4. 内阻尼

大多数工程材料承受交变载荷时,都有应变落后于应力变化的滞后情况,这称为材料的滞后现象。产生这种现象的原因是材料的内部摩擦即内阻尼。理论分析表明,轴在超临界转速下运行,内阻尼的影响类似于负阻尼,总是激发系统不稳定。除这种转轴材料本身的内阻尼外,还有一种结构内阻尼,它来自转子变形时部件之间的相互摩擦,如图 3-6 所示。

图 3-6 是叶轮与轴的配合情况,当轴弯曲变形后,轴的上表面被拉长,而下表面被缩短。在配合面间,轴与叶轮沿轴向有微小的相对滑动,因而产生相互摩擦。由这种部件间的相互摩擦产生的内阻尼称为结构内阻尼。当轴在超临界转速下运行时,结构内阻尼与材料内阻尼一样,往往激发系统不稳定。

定量计算结构内阻尼非常困难。实践表明结构内阻尼引起的

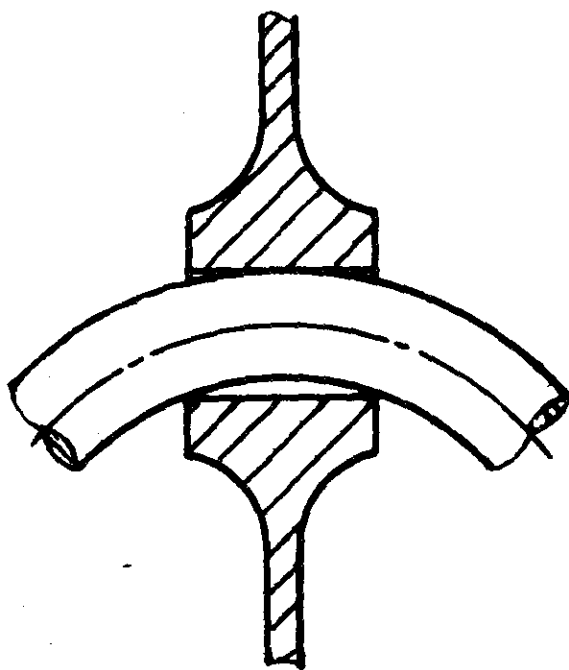


图 3-6 结构阻尼示意图

不稳定性问题,比材料本身内阻尼引起的不稳定性问题更为严重。因此,对于超临界转速下运行的转子,要尽量避免部件之间出现间隙和松动现象。

### 5. 干摩擦

为了不断提高机组的运行效率,转子与静子之间的间隙不断减小。在极端条件下,两者容易发生接触,产生强烈的干摩擦。在接触点处,静子作用于转子上的力是一个与转动方向相反的切向力,激发转子作后向涡动,使系统丧失稳定性。

## 3.5 单圆盘对称刚性转子-固定瓦轴承系统的稳定性

有些旋转机械的结构比较简单,其轴系由一根轴、一级叶轮和两个轴承组成,如图 3-7 所示。当轴的刚度比轴承的刚度大很



多时,可认为轴是刚性的。

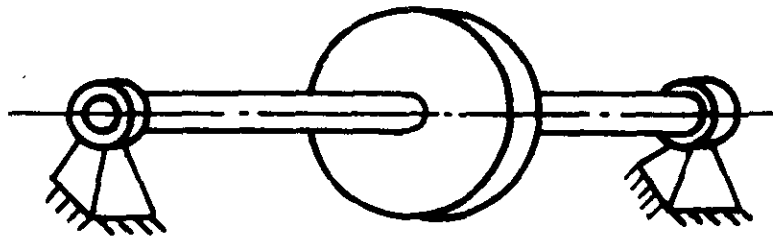


图 3-7 对称单圆盘机组的轴系

### 1. 建立运动方程的基本思想

图 3-8 所示为质量-弹簧-阻尼系统,设振体的质量为  $m$ , 阻尼系数为  $r$ , 弹簧刚度系数为  $k$ , 弹簧的自由长度为  $l_0$ , 由于振体的自重引起的弹簧静伸长为  $x_0$ , 由定义可知

$$x_0 = mg/k \quad (3-15)$$

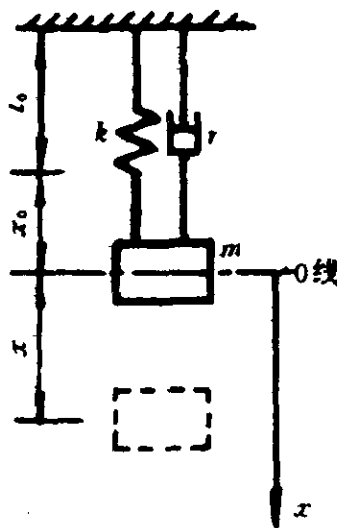


图 3-8 质量-弹簧-阻尼系统

弹簧处于静伸长  $x_0$  的位置称为静平衡位置,此时振体自重  $mg$  与弹簧静伸长引起的弹性恢复力  $kx_0$  平衡,即  $kx_0 = mg$ 。

取静平衡位置作为振体坐标轴  $ox$  的原点。在任一时间  $t$ , 振体

$m$  偏离静平衡位置的位移为  $x$ , 若不计弹簧的质量, 作用在振体  $m$  上的力为

弹性恢复力(与 $x$ 反向)	$k(x + x_0)$
惯性力(与 $x$ 反向)	$m\ddot{x}$
阻尼力(与 $x$ 反向)	$r\dot{x}$
重力(与 $x$ 同向)	$mg$

根据力平衡关系得

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x_0 + x) - mg = 0 \quad (3-16)$$

将式(3-15)代入式(3-16)得

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad (3-17)$$

式(3-17)是振体  $m$  在静平衡位置附近作自由振动的运动方程。从建立式(3-17)的过程中发现, 如果将坐标原点取在静平衡位置上, 由于自重与弹簧的静变形引起的弹性恢复力相平衡, 在运动方程中这两者是不出现的。在此称恢复力  $kx$  为恢复力增量, 称阻尼力  $r\dot{x}$  为外部力。由式(3-17)可以看到, 根据惯性力、外部力和恢复力增量这三者的平衡, 就可以得到振动系统的运动方程。下面根据这一思想, 重新建立图3-8所示系统的运动方程。振体  $m$  上受的力有

恢复力增量(与 $x$ 反向)	$kx$
惯性力(与 $x$ 反向)	$m\ddot{x}$
外部力(阻尼力, 与 $x$ 反向)	$r\dot{x}$

根据以上三个力的平衡得

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

采用后一种方法建立系统的运动方程比较方便, 在以后各章中, 均是利用这一思想建立轴系的运动方程。

## 2. 运动方程

图3-9(a)是单圆盘对称刚性转子-轴承系统的力学模型, 质量为  $2m$  的圆盘装在一根被设想成没有质量的刚性轴的中央, 转轴支承在两个完全相同的滑动轴承上, 整个轴系位于中央圆盘左右对称。

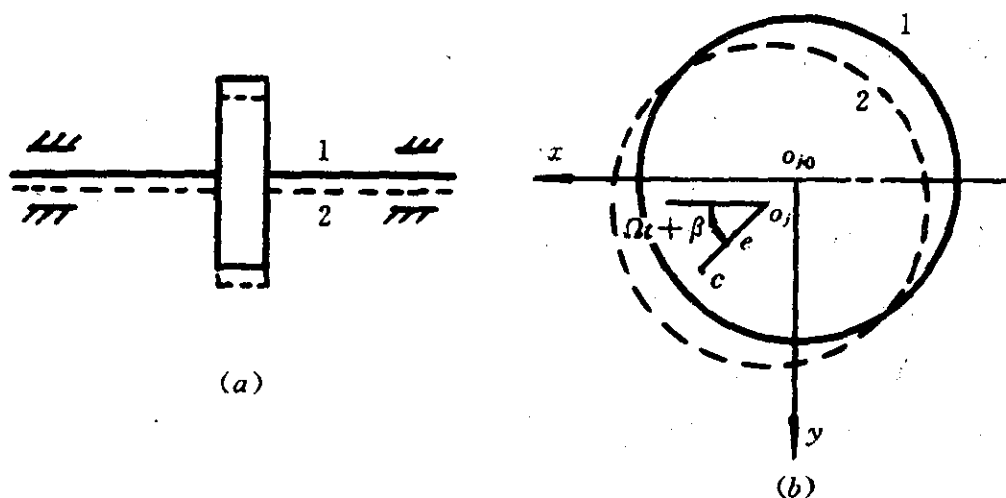


图 3-9 单圆盘刚性转子

(a) 力学模型; (b) 质心  $c$  的位移。

1—静平衡时的位置; 2—涡动后的位置。

由于轴是刚性的, 因此圆盘中心  $o$  与轴颈中心  $o_j$  在右边的侧视图上是重合的。图中只标了  $o_j$  而未标  $o$ 。由于材质的不均匀性等原因, 圆盘质心  $c$  与几何中心有一偏距, 用  $e$  表示。为了得到系统在静平衡位置附近的涡动(轴心偏离其静平衡位置的运动称为涡动)方程, 设涡动后轴线始终保持平行(称为圆柱形涡动), 这样两端的滑动轴承的性能完全相同。图示的坐标系  $x o_j y$  选在圆盘的中分面上并与轴线垂直,  $y$  轴沿自重方向为正。涡动后, 圆盘中心  $o(o_j)$  和质心  $c$  的位移分别用  $(x, y)$  和  $(x_c, y_c)$  表示。由图 3-9(b) 得质心  $c$  和中心  $o(o_j)$  的位移转换关系为

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x + e \cos(\Omega t + \beta) \\ y_c &= y + e \sin(\Omega t + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

在稳定旋转状态下, 转轴处在一个固定的静平衡位置上。当系统受到扰动后, 平衡被破坏, 转轴在静平衡位置附近涡动。由于偏离了静平衡位置, 滑动轴承必然要施加一个油膜力增量作用在轴颈上。由式(1-4)知该油膜力增量为

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_x &= k_{xx} \Delta x + k_{xy} \Delta y + d_{xx} \Delta \dot{x} + d_{xy} \Delta \dot{y} \\ \Delta f_y &= k_{yx} \Delta x + k_{yy} \Delta y + d_{yx} \Delta \dot{x} + d_{yy} \Delta \dot{y} \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

式中  $\Delta x, \Delta y$ ——动态位移。

由于图 3-9 的坐标原点  $o_{j0}$  是静平衡时的圆盘中心,也是静平衡时的轴颈中心,故有

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x; \Delta y = y \\ \Delta \dot{x} &= \dot{x}; \Delta \dot{y} = \dot{y} \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

这样式(3-19)可表示为

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_x &= k_{xx}x + k_{xy}y + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} \\ \Delta f_y &= k_{yx}x + k_{yy}y + d_{yx}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

涡动时圆盘自身产生的惯性力为

$$\left. \begin{aligned} G_x &= 2m\ddot{x}_c = 2m[\ddot{x} - e\Omega^2\cos(\Omega t + \beta)] \\ G_y &= 2m\ddot{y}_c = 2m[\ddot{y} - e\Omega^2\sin(\Omega t + \beta)] \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

作用在图 3-9 的转子上的外部力为零。根据作用在轴颈上的油膜力增量和惯性力的平衡,如图 3-10 所示,可以得到系统的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} + k_{xx}x + k_{xy}y &= me\Omega^2\cos(\Omega t + \beta) \\ m\ddot{y} + d_{yx}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} + k_{yx}x + k_{yy}y &= me\Omega^2\sin(\Omega t + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

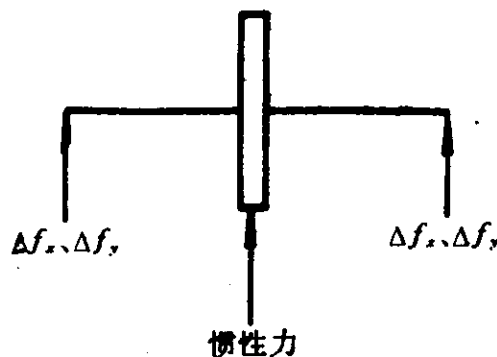


图 3-10 转子受力分析

上式就是单圆盘对称刚性转子-轴承系统的运动方程,它表明转子在  $y$  方向和  $x$  方向的振动通过轴承的交叉刚度和交叉阻尼系数耦合在一起。方程的右端项是由转子的不平衡引起的不平衡激振

力。研究系统的稳定性主要是研究自由振动的方程,它是上式的齐次方程,即

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} + k_{xx}x + k_{xy}y &= 0 \\ m\ddot{y} + d_{yx}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} + k_{yx}x + k_{yy}y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

将上式用矩阵可表示为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (3-25)$$

式中  $[M] = \text{diag}[m, m]$  —— 质量矩阵;

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix} \text{ —— 阻尼矩阵};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \text{ —— 刚度矩阵};$$

$\{q\} = \{x, y\}^T$  —— 位移向量。

### 3. 稳定性分析

方程(3-25)共有4个特征值和相应的特征向量。它们往往是共轭成对的,可记为

$$\nu_1, \nu_2, \nu_1, \nu_2 \\ \{\phi^{(1)}\} \{\phi^{(2)}\} \{\bar{\phi}^{(1)}\} \{\bar{\phi}^{(2)}\}$$

设特征值  $\nu$  具有如下的形式

$$\nu = -\mu + j\omega \quad (3-26)$$

这样系统作自由振动的位移响应为

$$\begin{aligned} \{q\} &= \sum_{i=1}^2 (c_i \{\phi^{(i)}\} e^{\nu_i t} + c_i \{\bar{\phi}^{(i)}\} e^{\bar{\nu}_i t}) \\ &= \sum_{i=1}^2 e^{-\mu_i t} [c_i \{\phi^{(i)}\} (\cos \omega t + j \sin \omega t) + c_i \{\bar{\phi}^{(i)}\} (\cos \omega t - j \sin \omega t)] \end{aligned} \quad (3-27)$$

如果系统的4个特征值的实部均小于零,式(3-27)表示的位移响应 $\{q\}$ 总是随时间增加而不断衰减的。此时圆盘中心 $o$ 绕其静平衡位置 $o_0$ 的涡动轨迹如图3-11(a)所示,表现为受扰涡动后,圆盘中心 $o$ 偏离其静平衡位置 $o_0$ 的距离越来越小,并最终返回到原先的静平衡位置 $o_0$ 。这一平衡位置是稳定的。如果至少有一个特征值的实部大于零,此时式(3-27)表示的位移响应 $\{q\}$ 随时间不

断增加。圆盘中心  $o$  的涡动轨迹如图 3-11(b) 所示, 表现为受扰涡动后, 圆盘中心  $o$  偏离其静平衡位置  $o_0$  的距离越来越大。这一平衡位置是不稳定的。如果有一个特征值的实部等于零, 而其他特征值均有负实部, 式(3-27) 的位移响应  $\{q\}$  的幅值保持不变, 圆盘中心  $o$  的涡动轨迹如图 3-11(c) 所示。表现为受扰涡动后, 圆盘中心  $o$  的涡动轨迹为一幅值不变的封闭轨迹。这一平衡状态称为稳定性界限状态。

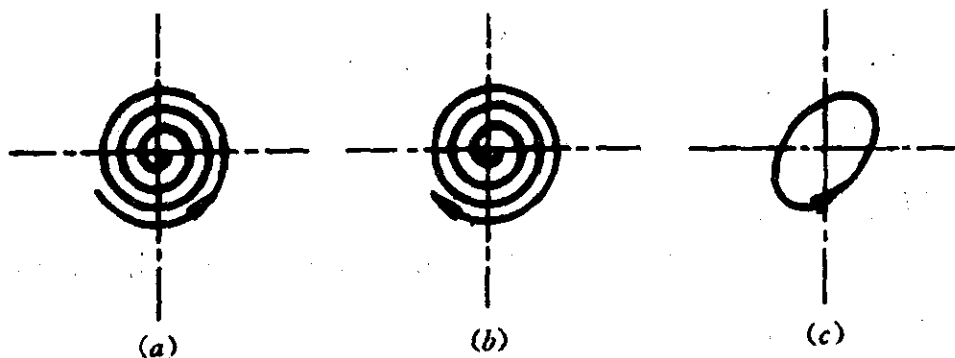


图 3-11 圆盘中心的涡动轨迹

#### 4. 计算示例

前面建立了系统的运动方程, 这是稳定性计算的基础。下面以一个算例为例, 给出特征值的计算过程和计算时经常采用的措施。

例 3-1: 一对称刚性转子, 质量  $2m = 520\text{kg}$ , 支承在两个相同的  $2 \times 150^\circ$  的圆柱轴承上。轴承参数为:  $L/D = 0.5$ ,  $D = 114\text{mm}$ ,  $\psi = 2.0\text{‰}$ ,  $\eta = 0.0184\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 。试确定轴系在转速  $n = 3000\text{r}/\text{min}$  时的稳定状态。

解: 转轴的工作角速度  $\Omega = \pi n/30 \Rightarrow 314.16\text{ s}^{-1}$

分配在每个轴承上的载荷  $W = mg = 2548\text{N}$

阻尼系数的相对单位  $\eta L/\psi^3 = 131100\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$

刚度系数的相对单位  $\eta \Omega L/\psi^3 = 41186376\text{N}/\text{m}$

承载力的相对单位  $\eta \Omega L R/\psi^2 = 4695.25\text{N}$

无量纲承载力  $\phi_w = 0.543$

根据表 8-2 的数值,用内插法求得  $\phi_w = 0.543$  时轴承的无量纲动特性系数为

$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$
0.888	-0.390	2.016	1.498
$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yx}$	$D_{yy}$
1.156	0.986	0.995	3.832

将上述无量纲数据乘以各自的相对单位得到有量纲的刚度阻尼系数为

$k_{xx}$ N/m	$k_{xy}$ N/m	$k_{yx}$ N/m	$k_{yy}$ N/m
36573501.89	-16062686.64	83031734.02	61697191.25
$d_{xx}$ N·s/m	$d_{xy}$ N·s/m	$d_{yx}$ N·s/m	$d_{yy}$ N·s/m
151551.60	129264.60	130444.50	502375.20

该系统的质量、阻尼和刚度矩阵分别为

$$[M] = \begin{bmatrix} 260 & \\ & 260 \end{bmatrix}; [M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.003846 & \\ & 0.003846 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 151551.60 & 129264.60 \\ 130444.50 & 502375.20 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 36573501.89 & -16062686.64 \\ 83031734.02 & 61697191.25 \end{bmatrix}$$

根据式(2-16)得到式(2-15)的矩阵[S]为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -140667.32 & 61779.56 & -582.89 & -497.17 \\ -319352.82 & -237296.89 & -501.71 & -1932.21 \end{bmatrix}$$

调用参考文献[16]中求解实矩阵的全部特征值及特征向量的驱分子程序 RG,算得[S]矩阵的 4 个特征值为

$$\nu_1 = -1934.59s^{-1}; \nu_2 = -422.46s^{-1};$$

$$\nu_{3,4} = -79.03 \pm j242.36s^{-1}$$

计算结果表明,系统所有 4 个特征值的实部都小于零。因此系统在 3000r/min 下运行是稳定的。

在上例的计算过程中,矩阵[M]、[D]、[K]的元素均为有量纲

量,实际计算时有很多不便。通常都是先将运动方程无量纲化,用无量纲量参与计算。在这一章以及第四章所给的算例中,均是采用无量纲量计算。所以下面讨论运动方程(3-25)的无量纲化。

在式(3-25)中令 $\{q\} = \{\phi\}e^{\nu t}$ 得

$$(\nu^2[M] + \nu[D] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (3-28)$$

特征值 $\nu$ 的量纲为 $s^{-1}$ ,设 $\nu$ 的相对单位为轴的旋转角速度 $\Omega$ , $\lambda$ 为无量纲特征值,即

$$\lambda = \nu/\Omega \quad (3-29)$$

又设矩阵 $[M]$ 、 $[D]$ 、 $[K]$ 的相对单位分别为 $\eta L/(\Omega\psi^3)$ 、 $\eta L/\psi^3$ 和 $\eta\Omega L/\psi^3$ ,它们的无量纲矩阵分别记为 $[\bar{M}]$ 、 $[\bar{D}]$ 、 $[\bar{K}]$ 。这样式(3-28)可改写为

$$(\lambda^2[\bar{M}] + \lambda[\bar{D}] + [\bar{K}])\{\phi\} = \{0\} \quad (3-30)$$

式中  $[\bar{M}] = (\eta L/\Omega\psi^3)[M]$ ;  $[\bar{D}] = (\eta L/\psi^3)[D]$ ;

$$[\bar{K}] = (\eta\Omega L/\psi^3)[K]$$

略去无量纲矩阵的上标“ $\bar{\phantom{x}}$ ”后,式(3-30)可改写为

$$(\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (3-31)$$

式(3-28)和式(3-31)在形式上是完全一样的,其差别仅在于前者的特征值和矩阵均是有量纲量,而后者则为无量纲量。下面应用无量纲量重新计算例3-1。

轴承的无量纲刚度、阻尼系数不变。质量矩阵的相对单位为 $\eta L/\Omega\psi^3 = 417.30$ ,各无量纲矩阵为

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.6231 & \\ & 0.6231 \end{bmatrix}; [M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.605 & \\ & 1.605 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1.156 & 0.986 \\ 0.995 & 3.832 \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} 0.888 & -0.390 \\ 2.016 & 1.498 \end{bmatrix}$$

此时式(2-15)中的矩阵 $[S]$ 为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.425 & 0.626 & -1.855 & -1.583 \\ -3.236 & -2.404 & -1.597 & -6.150 \end{bmatrix}$$

用同样的程序,算得矩阵 $[S]$ 的4个特征值为



$$\lambda_1 = -6.16; \lambda_2 = -1.34$$

$$\lambda_{3,4} = -0.25 \pm j0.77$$

对比两次计算结果不难发现

$$\nu_i = \lambda_i \Omega \quad (i = 1, 4)$$

### 3.6 单圆盘对称弹性转子 - 固定瓦轴承系统的稳定性

在上一节中,认为转子是刚性的,在涡动过程中转子不会变形。这一节讨论转轴弹性对稳定性的影响,并给出稳定性裕度的评估准则。

#### 1. 运动方程

图 3-12 是弹性转子的示意图,质量为  $2m$  的圆盘装在一根被认为是没有质量的弹性轴的中央,轴在其中点的刚度系数为  $2k$ 。图中  $o_{j0}$ 、 $o_0$  分别表示静平衡时轴颈中心和圆盘中心的位置,图示实线表示静平衡时轴和圆盘的位置,虚线表示涡动后的位置。由于轴的弹性,涡动后圆盘中心和轴颈中心偏离各自的静平衡位置的距离是不同的。建立如图所示的两个坐标系  $x_0y_0$  和  $x_1o_{j0}y_1$ , 其坐标原点分别是圆盘中心的静平衡位置  $o_0$  和轴颈中心的静平衡位置  $o_{j0}$ 。用  $(x, y)$  和  $(x_1, y_1)$  分别表示圆盘中心和轴颈中心涡动后偏离各自静平衡位置的距离。

为了便于后面的讨论,设圆盘还受到阻尼力  $2F_r$  与交叉刚度力  $2F_c$  这两个外部力的作用(除油膜力增量与惯性力外,其他一切力统称为外部力)。为了得到系统的运动方程,将弹性轴与圆盘分开,成为图 3-13 所示的两个子系统。

图 3-13(a) 是圆盘的受力分析,作用在圆盘上的力如表 3-1 所示。

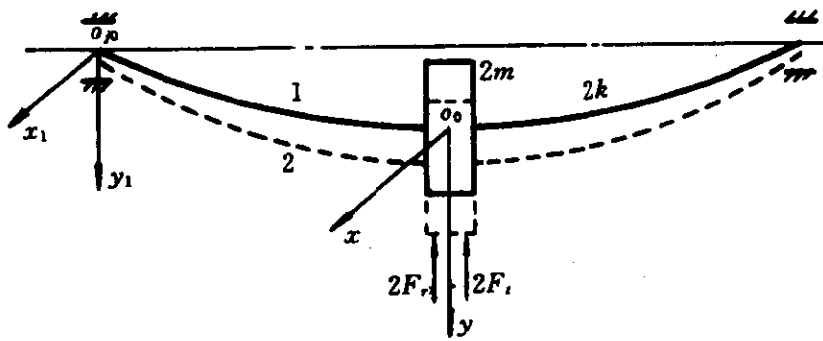


图 3-12 单圆盘弹性转子

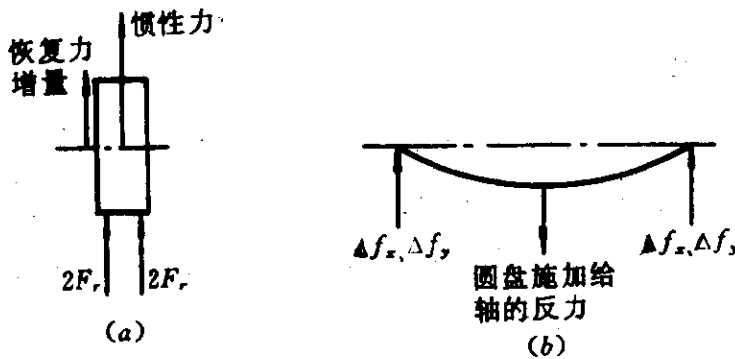


图 3-13 圆盘与转轴的受力分析  
(a) 圆盘受力分析；(b) 转轴受力分析。

表 3-1 作用在圆盘上的力

力的名称		水平方向	垂直方向
轴给圆盘的恢复力增量		$2k(x - x_1)$	$2k(y - y_1)$
惯性力		$2m[\ddot{x} - e\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta)]$	$2m[\ddot{y} - e\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta)]$
外部力	阻尼力	$2r\dot{x}$	$2r\dot{y}$
	交叉刚度力	$-2ay$	$2ax$

根据圆盘的力平衡条件得

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x - x_1) - ay &= me\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \\ m\ddot{y} + r\dot{y} + k(y - y_1) + ax &= me\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \end{aligned} \right\} (3-32)$$

图 3-13(b) 是无质量的弹性轴的受力分析, 轴上只作用有两

种力。一种是轴承油膜产生的油膜力增量；另一种是圆盘施加给轴的反力。其表达式如表 3-2 所示。

表 3-2 作用在轴上的力

力的名称	水平方向	垂直方向
油膜力增量	$2\Delta f_x$	$2\Delta f_y$
圆盘施加给轴的反力	$-2k(x - x_1)$	$-2k(y - y_1)$

根据轴的受力平衡条件,并将  $\Delta f_x$ 、 $\Delta f_y$  用式(3-21)代入得[式(3-21)中的  $x, y$  就是现在的  $x_1, y_1$ ]

$$\begin{cases} (k + k_{xx})x_1 + k_{xy}y_1 + d_{xx}x_1 + d_{xy}y_1 - kx = 0 \\ k_{yx}x_1 + (k + k_{yy})y_1 + d_{yx}x_1 + d_{yy}y_1 - ky = 0 \end{cases} \quad (3-33)$$

将式(3-32)、式(3-33)合并得

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (3-34)$$

式中  $[M] = \text{diag}[m, m, 0, 0]$ ;

$$\{q\} = \{x, y, x_1, y_1\}^T;$$

$$\{F\} = me\Omega^2 \{\cos(\Omega t + \beta), \sin(\Omega t + \beta), 0, 0\}^T;$$

$$[D] = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{xx} & d_{xy} \\ 0 & 0 & d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -a & -k & 0 \\ a & k & 0 & -k \\ -k & 0 & k + k_{xx} & k_{xy} \\ 0 & -k & k_{yx} & k + k_{yy} \end{bmatrix}$$

系统作自由振动的方程为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (3-35)$$

将上式化为式(2-14)所示的广义特征问题或式(2-15)的标准特征值问题,可以求得系统的特征值及特征向量。此时式(2-14)的矩阵  $[A]$ 、 $[B]$  为

$$[A] = \begin{bmatrix} -k & a & k & 0 & 0 & 0 \\ -a & -k & 0 & k & 0 & 0 \\ k & 0 & -(k+k_{xx}) & -k_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & k & -k_{yx} & -(k+k_{yy}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & d_{xx} & d_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{yx} & d_{yy} & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. 稳定性裕度及其评估

要设计一台具有良好稳定性能的旋转机械,仅仅保证它在稳定区域工作是不够的。除此之外,还必须保证它具有足够的稳定性储备,即应具有足够的稳定性裕度,以抵抗外界的各种干扰。本书采用下面三个判据来评估机组的稳定性裕度。

(1) 对数衰减率判据 对数衰减率  $\delta$  定义为

$$\begin{aligned} \delta &= -2\pi \operatorname{Re}(\nu) / \operatorname{Im}(\nu) \\ &= -2\pi \operatorname{Re}(\lambda) / \operatorname{Im}(\lambda) \end{aligned} \quad (3-36)$$

系统稳定状态与对数衰减率  $\delta$  的关系为

$\delta > 0$  时,系统是稳定的;

$\delta < 0$  时,系统是不稳定的;

$\delta = 0$  时,系统处于稳定性界限状态。

由上式看到,每一个复特征值都有一个相应的对数衰减率。对于多自由度系统,有很多个特征值和相应的对数衰减率。一般取其中的最小者作为系统的对数衰减率,即

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

很多文献建议,为了有足够的稳定性裕度,机组在额定工作转速下的对数衰减率  $\delta$  应足够大,即满足

$$\delta \geq 0.5$$

但是,实际计算表明,要满足这一条件非常困难。即使对于稳定性极好的可倾瓦轴承,尽管其失稳转速很高,但在额定工作转速下的对数衰减率往往都不是很大。此外,作者还对数台国产 200MW、300MW 汽轮发电机组的轴系进行过计算,结果表明在额定转速下机组的对数衰减率仅为 0.1 ~ 0.3。而且大多数机组的  $\delta$  都在 0.2 以下。

(2) 失稳转速判据 国外有些资料介绍,如果失稳转速大于额定工作转速的 125% 时,可以认为机组具有足够的稳定性裕度。

上面的第一个判据表达了自由振动的衰减速率;第二个判据表达了工作转速距离失稳转速的远近程度。它们并不直接表达或有时不能表达系统抵抗外来减稳因素(负阻尼和交叉刚度)的能力。为了全面综合地考察机组的稳定性裕度,有时还要应用第三个判据——减稳因素界限值判据。

(3) 减稳因素界限值判据<sup>[17]</sup> 在额定工作转速下,系统所能承受的减稳因素(负阻尼和交叉刚度)的界限值越大,系统的稳定性裕度也越大。

应用以上三个判据,可以粗略地评估机组的稳定性裕度。在机组的设计阶段,往往要修改参数反复设计。根据以上三个判据,可以知道哪一组设计参数更为合理。

### 3. 计算示例

例 3-2:图 3-14 是单圆盘转子示意图,转子参数如图所示。该转子支承在两个相同的  $2 \times 150^\circ$  的圆柱轴承上。轴承参数为:  $L/D = 0.5$ ,  $\psi = 2.0\%$ ,  $D = 114\text{mm}$ , 润滑油为 22 号透平油,润滑油的平均温度  $\bar{T} = 50^\circ\text{C}$ 。试确定系统的失稳转速。假设该系统的额定工作转速为  $n = 4000\text{r/min}$ , 试判断机组是否具有足够的稳定性裕度。

解:取材料的弹性模量和密度分别为  $E = 2.1 \times 10^{11}\text{N/m}^2$ ,  $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ ; 取重力加速度  $g = 9.8\text{m/s}^2$ ; 转子的总质量  $2m =$

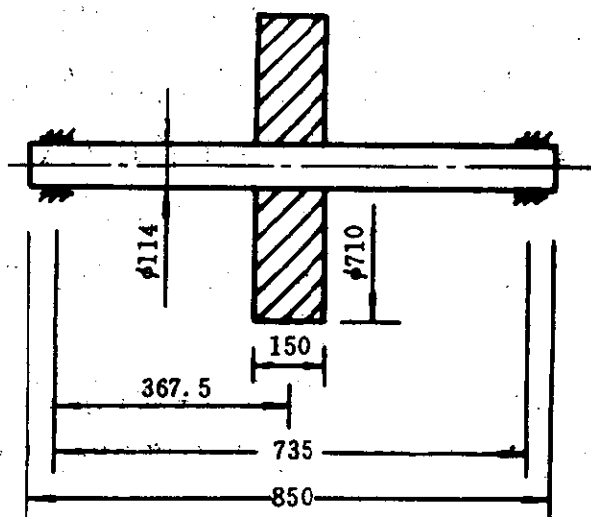


图 3-14 转子参数(例 3-2)

520kg; 转轴中央的刚度为  $2k = 2.104 \times 10^8 \text{N/m}$ ; 由表 8-14 查得油的动力粘度  $\eta = 0.018 \text{N} \cdot \text{s/m}^2$ 。

应用 8.3 节的程序计算(其使用说明见第八章), 输入原始数据见表 3-3。表 3-4 是不同转速下系统的六个无量纲特征值及系统的对数衰减率  $\delta$ , 表中  $i$  是与  $\delta$  对应的特征值的阶数。

表 3-3 输入原始数据

1, 7, 1, 16
1. 052E + 08, 260. 0, 0. 05, 0. 057, 0. 002, 0. 018, 9. 8, 0. 0, 0. 0
0. 147, 0. 247, 0. 386, 0. 599, 0. 963, 1. 677, 3. 404
2000. 0, 2250. 0, 2500. 0, 2750. 0, 3000. 0, 3250. 0, 3500. 0, 3750. 0
4000. 0, 4250. 0, 4500. 0, 4750. 0, 5000. 0, 5250. 0, 5500. 0, 5750. 0
0. 257, - 0. 364, 0. 858, 0. 261, 0. 669, 0. 237, 0. 202, 1. 698
0. 449, - 0. 386, 1. 118, 0. 476, 0. 887, 0. 510, 0. 518, 2. 188
0. 638, - 0. 400, 1. 499, 0. 825, 0. 964, 0. 697, 0. 741, 2. 880
0. 976, - 0. 387, 2. 202, 1. 742, 1. 223, 1. 090, 1. 099, 4. 180
1. 569, - 0. 357, 3. 513, 3. 501, 1. 671, 1. 818, 1. 821, 6. 717
2. 677, - 0. 063, 6. 569, 8. 168, 2. 302, 3. 101, 3. 134, 12. 25
5. 521, 1. 050, 15. 21, 24. 25, 2. 931, 6. 756, 6. 719, 28. 42

表 3-4 不同转速下的无量纲特征与对数衰减率  $\delta$ 

转速 (r/min)	第一阶特征值	第二阶特征值	第三阶特征值	$\delta$	$i$
2000	$-0.511 \pm 0.897j$	$-2.051 \pm 1.659j$	$-0.298 \pm 2.967j$	0.632	3
2250	$-0.406 \pm 0.886j$	$-2.012 \pm 1.340j$	$-0.298 \pm 2.622j$	0.713	3
2500	$-0.321 \pm 0.857j$	$-1.970 \pm 1.100j$	$-0.294 \pm 2.347j$	0.787	3
2750	$-0.253 \pm 0.820j$	$-1.927 \pm 0.920j$	$-0.290 \pm 2.122j$	0.857	3
3000	$-0.200 \pm 0.782j$	$-1.880 \pm 0.781j$	$-0.285 \pm 1.934j$	0.925	3
3250	$-0.157 \pm 0.745j$	$-1.833 \pm 0.672j$	$-0.279 \pm 1.776j$	0.988	3
3500	$-0.117 \pm 0.710j$	$-1.834 \pm 0.468j$	$-0.278 \pm 1.642j$	1.031	1
3750	$-0.090 \pm 0.678j$	$-1.767 \pm 0.424j$	$-0.271 \pm 1.525j$	0.830	1
4000	$-0.068 \pm 0.648j$	$-1.707 \pm 0.414j$	$-0.264 \pm 1.423j$	0.656	1
4250	$-0.050 \pm 0.621j$	$-1.648 \pm 0.425j$	$-0.258 \pm 1.333j$	0.504	1
4500	$-0.035 \pm 0.597j$	$-1.590 \pm 0.446j$	$-0.251 \pm 1.254j$	0.368	1
4750	$-0.023 \pm 0.574j$	$-1.534 \pm 0.470j$	$-0.243 \pm 1.182j$	0.246	1
5000	$-0.012 \pm 0.554j$	$-1.482 \pm 0.494j$	$-0.236 \pm 1.119j$	0.136	1
5250	$-0.008 \pm 0.537j$	$-1.398 \pm 0.558j$	$-0.225 \pm 1.062j$	0.097	1
5500	$-0.0001 \pm 0.520j$	$-1.356 \pm 0.569j$	$-0.218 \pm 1.010j$	0.001	1
5750	$0.007 \pm 0.504j$	$-1.318 \pm 0.577j$	$-0.212 \pm 0.963$	-0.097	1

表 3-4 说明,当转速  $n = 2000 \sim 3250$ r/min 时,系统对数衰减率  $\delta$  由第三阶特征值决定;当  $n = 3500 \sim 5750$ r/min 时, $\delta$  由第一阶特征值决定。当  $n = 5500$ r/min 时, $\delta = 0.001 \approx 0$ 。轴系失稳转速为  $n_v \approx 5500$ r/min。

在额定工作转速  $n = 4000$ r/min 时,系统的对数衰减率为  $\delta = 0.656 > 0.5$ 。系统的失稳转速  $n_v$  大于 1.25 倍的额定工作转速。根据前面介绍的稳定性裕度判据,该轴系具有足够的稳定性裕度。

#### 4. 外部阻尼等参数对稳定性的影响

在例 3-2 中,没有考虑外部阻尼及交叉刚度的影响,并认为轴的刚度不变。在实际运行时,由于叶片顶隙激振等原因,在转子

上往往作用有交叉刚度激振力;有时为了抑制轴的振动,常常在转轴上施加一阻尼;此外,当转轴某处出现裂纹时,轴的刚度会下降。下面以例 3-2 为例,讨论上述各因素对稳定性的影响。其计算结果示于表 3-5 中。

表 3-5 各参数对失稳转速  $n_w$  的影响

$n_w$ (r/min)	计 算 说 明
5500	系统参数同例 3-2
4770	转轴刚度减半,其他参数同例 3-2
4430	$a = 1 \times 10^7 \text{N/m}$ ,其他参数同例 3-2
4630	$r = -1 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{s/m}$ ,其他参数同例 3-2
6250	$r = 1 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{s/m}$ ,其他参数同例 3-2

根据表 3-5 知道,交叉刚度与负阻尼促使系统的稳定性下降;减小轴的刚度也会降低稳定性;相反提高轴的刚度或外部正阻尼都可以提高系统的稳定性。

### 3.7 失稳转速的计算

在前两节中,建立了单圆盘转子-轴承系统的运动方程。通过计算不同转速下的特征值,可以近似求得系统的失稳转速。对于单圆盘这样简单的轴系,按下面介绍的方法来计算失稳转速,不需要计算矩阵的特征值,显得比较方便。

#### 1. 理论分析

式(3-35)是单圆盘弹性转子-轴承系统作自由振动的方程,如果不考虑交叉刚度和外部阻尼的影响,式(3-35)可以展开成如下的形式

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + kx - kx_1 &= 0 \\ m\ddot{y} + ky - ky_1 &= 0 \\ d_{xx}\dot{x}_1 + d_{xy}\dot{y}_1 + (k + k_{xx})x_1 + k_{xy}y_1 - kx &= 0 \\ d_{yx}\dot{x}_1 + d_{yy}\dot{y}_1 + k_{yx}x_1 + (k + k_{yy})y_1 - ky &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$



在稳定性界限状态下,系统必有一个特征值的实部为零,这样可取

$$\begin{aligned}x &= x_0 e^{j\omega t}; y = y_0 e^{j\omega t} \\x_1 &= x_{10} e^{j\omega t}; y_1 = y_{10} e^{j\omega t}\end{aligned}$$

代入式(3-37)得

$$\left. \begin{aligned}x &= kx_1 / (k - m\omega^2) \\y &= ky_1 / (k - m\omega^2)\end{aligned} \right\} \quad (3-38)$$

$$\left. \begin{aligned}kx &= (k + k_{xx} + j\omega d_{xx})x_1 + (k_{xy} + j\omega d_{xy})y_1 \\ky &= (k_{yx} + j\omega d_{yx})x_1 + (k + k_{yy} + j\omega d_{yy})y_1\end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

将式(3-38)代入式(3-39)得

$$\left. \begin{aligned}[mk\omega^2 / (k - m\omega^2)]x_1 &= (k_{xx} + j\omega d_{xx})x_1 + (k_{xy} + j\omega d_{xy})y_1 \\[mk\omega^2 / (k - m\omega^2)]y_1 &= (k_{yx} + j\omega d_{yx})x_1 + (k_{yy} + j\omega d_{yy})y_1\end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

上式的右边是油膜力增量的表达式,左边是常数  $mk\omega^2 / (k - m\omega^2)$  与位移  $x_1, y_1$  的乘积。这表明在界限状态下,轴承油膜动力特性综合表现为一个各向同性的弹簧,其刚度称为**相当刚度**,用  $k_{eq}$  表示,即

$$k_{eq} = mk\omega^2 / (k - m\omega^2) \quad (3-41)$$

将上式代入式(3-40)得

$$\begin{bmatrix} k_{eq} - k_{xx} - j\omega d_{xx} & -k_{xy} - j\omega d_{xy} \\ -k_{yx} - j\omega d_{yx} & k_{eq} - k_{yy} - j\omega d_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-42)$$

式(3-42)有非平凡解的条件是系数矩阵的行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} k_{eq} - k_{xx} - j\omega d_{xx} & -k_{xy} - j\omega d_{xy} \\ -k_{yx} - j\omega d_{yx} & k_{eq} - k_{yy} - j\omega d_{yy} \end{vmatrix} = 0 \quad (3-43)$$

将上式展开后可得到

$$\left. \begin{aligned}k_{eq}(d_{xx} + d_{yy}) &= k_{xx}d_{yy} + k_{yy}d_{xx} - k_{xy}d_{yx} - k_{yx}d_{xy} \\ \omega^2(d_{xx}d_{yy} - d_{xy}d_{yx}) &= (k_{eq} - k_{xx})(k_{eq} - k_{yy}) - k_{xy}k_{yx}\end{aligned} \right\} \quad (3-44)$$

将上式化为无量纲的形式有

$$\left. \begin{aligned} K_{eq}(D_{xx} + D_{yy}) &= K_{xx}D_{yy} + K_{yy}D_{xx} - K_{xy}D_{yx} - K_{yx}D_{xy} \\ (\omega/\Omega)^2(D_{xx}D_{yy} - D_{xy}D_{yx}) &= (K_{eq} - K_{xx})(K_{eq} - K_{yy}) - K_{xy}K_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (3-45)$$

式(3-45)是在稳定性界限状态下得到的方程,因此 $\omega$ 就是界限状态下的涡动角速度,以 $\omega_u$ 表示, $\Omega$ 就是系统的失稳角速度,以 $\Omega_u$ 表示。 $\omega_u$ 与 $\Omega_u$ 的比值称为界限状态下的涡动比,以 $\gamma_u$ 表示。由式(3-45)得到

$$K_{eq} = (K_{xx}D_{yy} + K_{yy}D_{xx} - K_{xy}D_{yx} - K_{yx}D_{xy}) / (D_{xx} + D_{yy}) \quad (3-46)$$

$$\gamma_u^2 = [(K_{eq} - K_{xx})(K_{eq} - K_{yy}) - K_{xy}K_{yx}] / (D_{xx}D_{yy} - D_{xy}D_{yx}) \quad (3-47)$$

将 $\omega_u = \gamma_u \Omega_u$ 代入式(3-41)得

$$\frac{\eta \Omega_u L}{\psi^3} K_{eq} = \frac{mk \gamma_u^2 \Omega_u^2}{k - m \gamma_u^2 \Omega_u^2} \quad (3-48)$$

由上式可得

$$\Omega_u = -\frac{m \omega_k^2 \psi^3}{2\eta L K_{eq}} + \sqrt{\left(\frac{m \omega_k^2 \psi^3}{2\eta L K_{eq}}\right)^2 + \frac{\omega_k^2}{\gamma_u^2}} \quad (3-49)$$

式中  $\omega_k = \sqrt{k/m}$ ——刚性支承下轴的固有角频率。

式(3-49)是计算弹性转子失稳角速度 $\Omega_u$ 的计算公式。对于刚性转子,轴的刚度 $k = \infty$ ,由式(3-41)得

$$k_{eq} = m\omega^2$$

将上式化为无量纲的形式有

$$(\eta \Omega_u L / \psi^3) K_{eq} = m \gamma_u^2 \Omega_u^2$$

由此得

$$\Omega_u = \eta L K_{eq} / (m \psi^3 \gamma_u^2) \quad (3-50)$$

式(3-49)、式(3-50)分别是计算弹性转子和刚性转子失稳角速度 $\Omega_u$ 的公式。与 $\Omega_u$ 对应的转速是失稳转速 $n_u$ ,其换算关系为

$$n_u = 30 \Omega_u / \pi \quad (3-51)$$

## 2. 计算过程

根据式(3-49)和式(3-50)计算失稳角速度 $\Omega_u$ 时,需要预

先知道  $K_{c\eta}$  和  $\gamma_{st}$ 。而这两者又和界限状态下轴承的无量纲动特性有关,要得到此时轴承的动特性,必须知道失稳角速度  $\Omega_{st}$ ,而  $\Omega_{st}$  正是我们要求的变量。因此,为了得到  $\Omega_{st}$  需要进行迭代计算,其过程如下

(1) 首先假设失稳角速度为  $\Omega_{st}^{(1)}$ ,取  $\Omega_{st} = \Omega_{st}^{(1)}$ ,并根据  $\Omega_{st}^{(1)}$  查取轴承的动特性系数。

(2) 将根据式(3-49)或式(3-50)计算得到的失稳角速度记为  $\Omega_{st}^{(2)}$ 。

(3) 比较  $\Omega_{st}^{(1)}$  和  $\Omega_{st}^{(2)}$  的差别是否足够小,若两者的差别较小, $\Omega_{st}^{(1)}$  或  $\Omega_{st}^{(2)}$  就是真实的失稳角速度;如果两者的差别较大,则应修改  $\Omega_{st}^{(1)}$ ,重复上述计算过程,直到满足要求为止。

实践表明,上面的迭代过程收敛很快,只需要很少几次迭代就可以求得较准确的失稳转速。应用式(3-49)算得例3-2的失稳转速为 5504r/min,这与求解特征值得到的结果是一致的。

计算  $\Omega_{st}$  时,如果  $K_{c\eta} < 0$ ,即为绝对不稳定系统,不能计算失稳转速;如果  $K_{c\eta} > 0$  而  $\gamma_{st}^2 < 0$ ,则为绝对稳定系统,不存在失稳转速;只有当  $K_{c\eta} > 0$  且  $\gamma_{st}^2 > 0$  时才可计算失稳转速。

将式(3-41)改写成如下的形式

$$\frac{k}{k_{c\eta}} = \frac{\omega_k^2 - \omega_{st}^2}{\omega_{st}^2} \quad (3-52)$$

当  $k \ll k_{c\eta}$  时,有  $\omega_{st} \approx \omega_k$ ,这说明失稳涡动角频率接近转子的固有角频率  $\omega_k$ 。对于这种轴系,一旦发生油膜失稳,便迅速发展成突发性的油膜振荡,具有很大的危害性。

### 3.8 同向涡动与反向涡动

设系统处于欠阻尼状态,此时系统的特征值与特征向量均是共轭成对的复数。假设系统有  $n$  个自由度,故有  $n$  对共轭特征值和相应的特征向量。它们可表示为

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$$

$$\{\phi^{(1)}\}\{\phi^{(2)}\}, \dots, \{\phi^{(n)}\}, \{\bar{\phi}^{(1)}\}\{\bar{\phi}^{(2)}\}, \dots, \{\bar{\phi}^{(n)}\}$$

系统作自由振动的位移响应可表示为

$$\begin{aligned} \{q\} &= \sum_{i=1}^n (C_i \{\phi^{(i)}\} e^{s_i t} + \bar{C}_i \{\bar{\phi}^{(i)}\} e^{\bar{s}_i t}) \\ &= \sum_{i=1}^n \{q^{(i)}\} \end{aligned} \quad (3-53)$$

式中  $C_i$  —— 第  $i$  阶模态的复模态参数, 由初始条件决定;

$\{q^{(i)}\} = C_i \{\phi^{(i)}\} e^{s_i t} + \bar{C}_i \{\bar{\phi}^{(i)}\} e^{\bar{s}_i t}$  —— 第  $i$  阶主振动。

式(3-53)表明, 自由振动的响应  $\{q\}$  由系统  $n$  个独立的纯模态的主振动叠加而成。任一纯模态的主振动可进一步表示为

$$\{q^{(i)}\} = 2\text{Re}(C_i \{\phi^{(i)}\} e^{s_i t})$$

为了书写方便, 略去上、下角标“ $i$ ”, 这样上式简写为

$$\{q\} = 2\text{Re}(C\{\phi\}e^{st}) \quad (3-54)$$

系统的位移向量  $\{q\}$  的元素是由水平位移向量  $\{x\}$  和垂直位移向量  $\{y\}$  两部分组成。相应地将特征向量  $\{\phi\}$  的元素也分成两部分, 与水平位移  $\{x\}$  对应的记为  $\{\phi_x\}$ , 与  $\{y\}$  对应的记为  $\{\phi_y\}$ 。用  $x, y$  分别表示某点的水平位移和垂直位移, 特征向量在该点处的分量为  $\phi_x, \phi_y$ , 根据式(3-54)有

$$\left. \begin{aligned} x &= 2\text{Re}(C\phi_x e^{st}) \\ y &= 2\text{Re}(C\phi_y e^{st}) \end{aligned} \right\} \quad (3-55)$$

一般情况下  $C$  与  $\{\phi\}$  都是复数, 故可设

$$\left. \begin{aligned} C &= C^0 + jC^* = |C|e^{j\beta} \\ \phi_x &= \phi_x^0 + j\phi_x^* = |\phi_x|e^{j\varphi_x} \\ \phi_y &= \phi_y^0 + j\phi_y^* = |\phi_y|e^{j\varphi_y} \end{aligned} \right\} \quad (3-56)$$

式中 上角标“0”、“\*” —— 表示复数的实部和虚部;

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \text{tg}^{-1} C^* / C^0 \\ \varphi_x &= \text{tg}^{-1} \phi_x^* / \phi_x^0 \\ \varphi_y &= \text{tg}^{-1} \phi_y^* / \phi_y^0 \end{aligned} \right\} \quad (3-57)$$

根据复数的性质有

$$\left. \begin{aligned} C\phi_x e^{i\omega t} &= |C| |\phi_x| e^{-\mu} e^{j(\omega t + \beta + \varphi_x)} \\ C\phi_y e^{i\omega t} &= |C| |\phi_y| e^{-\mu} e^{j(\omega t + \beta + \varphi_y)} \end{aligned} \right\} \quad (3-58)$$

将上式代入式(3-55)并化成三角函数的形式有

$$\left. \begin{aligned} x &= 2A_x \cos(\omega t + \beta + \varphi_x) \\ y &= 2A_y \cos(\omega t + \beta + \varphi_y) \end{aligned} \right\} \quad (3-59)$$

$$\text{式中} \quad \left. \begin{aligned} A_x &= |C| |\phi_x| e^{-\mu} \\ A_y &= |C| |\phi_y| e^{-\mu} \end{aligned} \right\} \quad (3-60)$$

将式(3-59)展开得

$$x = 2A_x [\cos\omega t \cos(\beta + \varphi_x) - \sin\omega t \sin(\beta + \varphi_x)] \quad (3-61)$$

$$y = 2A_y [\cos\omega t \cos(\beta + \varphi_y) - \sin\omega t \sin(\beta + \varphi_y)] \quad (3-62)$$

为了便于讨论转子的涡动形态,取  $x$  轴作为实数轴,  $y$  轴为虚数轴。转轴上任一点的位移用复数  $\rho$  表示,即

$$\rho = x + jy \quad (3-63)$$

将式(3-61)、式(3-62)代入式(3-63)得

$$\begin{aligned} \rho &= 2[A_x \cos(\beta + \varphi_x) + jA_y \cos(\beta + \varphi_y)] \cos\omega t - \\ &\quad - 2[A_x \sin(\beta + \varphi_x) + jA_y \sin(\beta + \varphi_y)] \sin\omega t \end{aligned} \quad (3-64)$$

根据欧拉公式  $e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t$  得

$$\left. \begin{aligned} 2\cos\omega t &= e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \\ 2j\sin\omega t &= e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (3-65)$$

将式(3-65)代入式(3-64)得

$$\rho = \rho_+ e^{j\omega t} + \rho_- e^{-j\omega t} \quad (3-66)$$

$$\text{式中} \quad \left. \begin{aligned} \rho_+ &= [A_x \cos(\beta + \varphi_x) - A_y \sin(\beta + \varphi_y)] \\ &\quad + j[A_x \sin(\beta + \varphi_x) + A_y \cos(\beta + \varphi_y)] \\ \rho_- &= [A_x \cos(\beta + \varphi_x) + A_y \sin(\beta + \varphi_y)] \\ &\quad + j[A_x \sin(\beta + \varphi_x) - A_y \cos(\beta + \varphi_y)] \end{aligned} \right\} \quad (3-67)$$

式(3-66)说明,对于某一阶主振动,轴上任一点的复数位移  $\rho$  由两部分组成。第一部分  $\rho_+ e^{j\omega t}$  表示在复平面上半径为  $|\rho_+|$  的圆,圆运动的角频率为  $\omega$ ,运动方向与轴的旋转方向相同;第二部分  $\rho_- e^{-j\omega t}$  表示在复平面上半径为  $|\rho_-|$  的圆,圆运动的角频率也是  $\omega$ ,

但与轴的旋转方向相反。将两个半径不同且反向旋转的圆运动叠加在一起可以得到一个椭圆，如图 3-15 所示。这就是圆盘中心的涡动轨迹，其旋转方向与两个圆运动的半径有关。

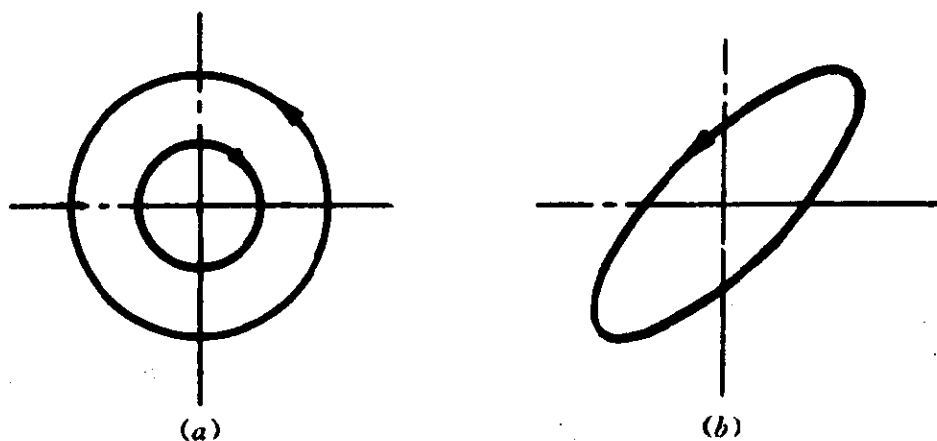


图 3-15 圆盘中心的涡动轨迹图象  
(a) 反向旋转的圆；(b) 涡动轨迹。

当  $|\rho_+| > |\rho_-|$  时，与轴同向旋转；

当  $|\rho_+| < |\rho_-|$  时，与轴反向旋转；

当  $|\rho_+| = |\rho_-|$  时，涡动轨迹为一直线。

由式(3-67)得

$$|\rho_+|^2 - |\rho_-|^2 = 4A_x A_y \sin(\varphi_x - \varphi_y) \quad (3-68)$$

由上式知道

当  $0 < \varphi_x - \varphi_y < \pi$  时， $|\rho_+| > |\rho_-|$ ，涡动轨迹为一同向旋转的椭圆，简称同向涡动；

当  $-\pi < \varphi_x - \varphi_y < 0$  时， $|\rho_+| < |\rho_-|$ ，涡动轨迹为一反向旋转的椭圆，简称反向涡动。

综上所述，主振动的涡动方向由位移  $x, y$  的相位差(即是特征向量的元素  $\phi_x, \phi_y$  的幅角差)  $\varphi_x - \varphi_y$  决定。当  $0 < \varphi_x - \varphi_y < \pi$  时为同向涡动；当  $-\pi < \varphi_x - \varphi_y < 0$  时为反向涡动。

式(3-67)表明  $\rho_+$  和  $\rho_-$  都是复数。设它们的幅角分别是  $\theta_+$

与  $\theta_-$ , 将  $\rho_+$  与  $\rho_-$  表示成指数的形式有

$$\left. \begin{aligned} \rho_+ &= |\rho_+| e^{j\theta_+} \\ \rho_- &= |\rho_-| e^{j\theta_-} \end{aligned} \right\}$$

将上式代入式(3-66)得

$$\rho = |\rho_+| e^{j(\omega t + \theta_+)} + |\rho_-| e^{-j(\omega t - \theta_-)} \quad (3-69)$$

由式(3-69)可进一步看到,同向旋转的圆运动  $|\rho_+| e^{j(\omega t + \theta_+)}$  与反向旋转的圆运动  $|\rho_-| e^{-j(\omega t - \theta_-)}$  在  $t=0$  时的初始相位并不相同。因此,椭圆轨迹的长短轴不在坐标轴  $x, y$  上,而是旋转了一个角度(见图 3-15(b))。

根据式(3-60)、式(3-67)知道,同向与反向旋转的圆运动的半径  $|\rho_+|$ 、 $|\rho_-|$  随时间不断衰减,因此合成的椭圆轨迹也是不断衰减的。图 3-16 是系统某一主振动的真实涡动图象。

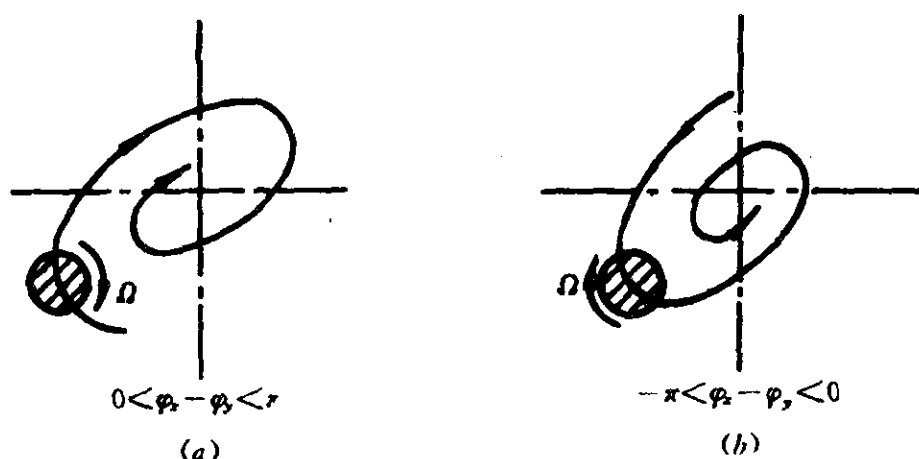


图 3-16 真实涡动图象

(a) 同向涡动; (b) 反向涡动。

### 3.9 单圆盘对称弹性转子-可倾瓦轴承系统的稳定性

#### 1. 历史回顾

通常,高速旋转机械较难治理的故障之一是滑动轴承油膜引起的不稳定性。一旦机组出现了不稳定性,最常用的治理措施是改

用稳定性能较好的轴承如可倾瓦轴承。可倾瓦轴承的每块瓦可以绕其支点摆动,在不同的工况下,瓦块能够自动追踪轴颈中心的运动,形成最佳的润滑油楔适应不同的运转条件。经典理论认为,当不计瓦块惯性时,可倾瓦轴承的交叉刚度  $k_{xy} = k_{yx}$ ,于是被认为是“本质稳定的”<sup>[18,19]</sup>。直到 1982 年,研究发现当轴承的偏心率及涡动比较小时,可倾瓦轴承会产生负阻尼,第一次对“可倾瓦轴承的本质稳定”提出了质疑<sup>[13]</sup>。1987 年,弗拉克(Flack)等人用实验的方法观察到可倾瓦轴承的失稳现象<sup>[20]</sup>。

在计算这种轴系的稳定性时,经典理论将可倾瓦轴承当作固定瓦轴承一样处理,用八个线性化的刚度、阻尼系数表征可倾瓦轴承的动力学特性<sup>[19,21,22]</sup>。其稳定性分析方法和固定瓦轴承-转子系统完全一样<sup>[23,24]</sup>。由于可倾瓦轴承的交叉刚度相等,所以按照这种方法计算,系统总是稳定的(不考虑瓦块惯性与支点摩擦力)。但是,大量的运行数据及最近的研究<sup>[9,25]</sup>都表明,以可倾瓦轴承支承的转子也会发生失稳。近几年的研究是用  $10s + 8$  个系数( $s$  为瓦块数)表征可倾瓦轴承的动力学特性,其油膜力增量的表达式如式(1-35)、式(1-36)所示。这样处理后,其运动方程稍有不同。

用  $10s + 8$  个系数表征可倾瓦轴承的动力学特性,所得的计算结果表明,可倾瓦轴承并非本质稳定,与固定瓦轴承一样也会失稳。这和实验观察到的现象<sup>[20]</sup>以及大量的运行数据比较一致。在参考文献[26]中还给出了可倾瓦轴承失稳的理论证明。

## 2. 运动方程

单圆盘对称弹性转子-可倾瓦轴承的力学模型和图 3-12 的固定瓦轴承的模型相同,要注意的是此时的轴承是可倾瓦轴承。

按照与 3.6 节相同的分析方法知道,作用在圆盘上的力不变,与图 3-12(a)一样。因此可以得到与式(3-32)相同的两个方程为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x - x_1) - ay &= me\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \\ m\ddot{y} + r\dot{y} + k(y - y_1) + ax &= me\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \end{aligned} \right\} (3-70)$$

轴的受力分析如图 3-12(b)所示,根据表 3-2 得到轴的力



平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_x - k(x - x_1) &= 0 \\ \Delta f_y - k(y - y_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-71)$$

下面以五瓦可倾瓦轴承为例,给出运动方程的具体表达式。

可倾瓦轴承油膜力增量的表达式分别是式(1-35)、式(1-36),力矩增量的表达式为式(1-38)。在以上三式中的  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  是轴颈中心的动态位移,  $\Delta\varphi$  是瓦块的动态摆角。由于我们是讨论系统偏离静平衡位置的涡动情况,坐标系的原点都选在相应的静平衡位置上。参照图 3-12 有

$$\Delta x = x_1$$

$$\Delta y = y_1$$

$$\Delta\varphi = \varphi$$

这样油膜力增量与力矩增量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_x &= k_{xx}x + k_{xy}y + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} + \sum_{i=1}^5 (k_{x\varphi_i}\varphi_i + d_{x\varphi_i}\dot{\varphi}_i) \\ \Delta f_y &= k_{yx}x + k_{yy}y + d_{yx}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} + \sum_{i=1}^5 (k_{y\varphi_i}\varphi_i + d_{y\varphi_i}\dot{\varphi}_i) \end{aligned} \right\} \quad (3-72)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_i &= - (k_{\varphi i}x_1 + k_{\varphi y}y_1 + k_{\varphi\varphi}\varphi_i + d_{\varphi i}\dot{x}_1 + d_{\varphi y}\dot{y}_1 + d_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}_i) \\ &\quad (i = 1, 5) \end{aligned} \quad (3-73)$$

将式(3-72)代入式(3-71)得

$$\left. \begin{aligned} -kx + (k + k_{xx})x_1 + k_{xy}y_1 + d_{xx}\dot{x}_1 + d_{xy}\dot{y}_1 \\ + \sum_{i=1}^5 (k_{x\varphi_i}\varphi_i + d_{x\varphi_i}\dot{\varphi}_i) &= 0 \\ -ky + (k + k_{yy})y_1 + k_{yx}x_1 + d_{yx}\dot{x}_1 + d_{yy}\dot{y}_1 \\ + \sum_{i=1}^5 (k_{y\varphi_i}\varphi_i + d_{y\varphi_i}\dot{\varphi}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-74)$$

在式(3-70)、式(3-74)中,只有四个方程,但有九个未知量( $x$ ,  $y$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\varphi_1 \sim \varphi_5$ ),因此还必须增加五个方程。可倾瓦轴承工作时,每块瓦可以绕其支点摆动。因此每块瓦还有一个绕支点的摆动方

程,即

$$\Delta M_i = J_i \ddot{\varphi}_i \quad (3-75)$$

式中  $J_i$ ——第  $i$  块瓦绕其支点的转动惯量。

将力矩增量  $\Delta M_i$  的表达式(3-73)代入上式得

$$J_i \ddot{\varphi}_i + d_{\varphi x i} \dot{x}_1 + d_{\varphi y i} \dot{y}_1 + d_{\varphi \varphi i} \dot{\varphi}_i + k_{\varphi x i} x_1 + k_{\varphi y i} y_1 + k_{\varphi \varphi i} \varphi_i = 0$$

$$(i = 1, 5) \quad (3-76)$$

将式(3-70)、式(3-74)和式(3-76)结合在一起并写成矩阵的形式有

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (3-77)$$

式中  $[M] = \text{diag}[m, m, J_1, \dots, J_5, 0, 0]$ ;

$$\{q\} = \{x, y, \varphi_1, \dots, \varphi_5, x_1, y_1\}^T;$$

$$\{F\} = m\epsilon\Omega^2 \{\cos(\Omega t + \beta), \sin(\Omega t + \beta), 0, \dots, 0\}^T;$$

$$[D] = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{\varphi 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{\varphi x 1} & d_{\varphi y 1} \\ 0 & 0 & 0 & d_{\varphi 2} & 0 & 0 & 0 & d_{\varphi x 2} & d_{\varphi y 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{\varphi 3} & 0 & 0 & d_{\varphi x 3} & d_{\varphi y 3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{\varphi 4} & 0 & d_{\varphi x 4} & d_{\varphi y 4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{\varphi 5} & d_{\varphi x 5} & d_{\varphi y 5} \\ 0 & 0 & d_{x\varphi 1} & d_{x\varphi 2} & d_{x\varphi 3} & d_{x\varphi 4} & d_{x\varphi 5} & d_{xx} & d_{xy} \\ 0 & 0 & d_{y\varphi 1} & d_{y\varphi 2} & d_{y\varphi 3} & d_{y\varphi 4} & d_{y\varphi 5} & d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix}$$

$$[K] =$$

$$\begin{bmatrix} k & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 \\ a & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k_{\varphi 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi x 1} & k_{\varphi y 1} \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varphi 2} & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi x 2} & k_{\varphi y 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi 3} & 0 & 0 & k_{\varphi x 3} & k_{\varphi y 3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi 4} & 0 & k_{\varphi x 4} & k_{\varphi y 4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi 5} & k_{\varphi x 5} & k_{\varphi y 5} \\ -k & 0 & k_{x\varphi 1} & k_{x\varphi 2} & k_{x\varphi 3} & k_{x\varphi 4} & k_{x\varphi 5} & k_{xx} + k & k_{xy} \\ 0 & -k & k_{y\varphi 1} & k_{y\varphi 2} & k_{y\varphi 3} & k_{y\varphi 4} & k_{y\varphi 5} & k_{yx} & k_{yy} + k \end{bmatrix}$$

矩阵  $[D]$ 、 $[K]$  中的元素  $k_{ij}$ 、 $d_{ij}$  ( $i, j = x, y, \varphi$ ) 的表达式见式(1-

34)、式(1-37)和式(1-39),要引起注意的是刚度、阻尼系数 $k_{ij}, d_{ij}$  ( $i, j = x, y$ )不是普通意义上的动特性,而是在相对坐标系下的相对动特性,详细说明参见1.8节。

相应地可以得到自由振动的方程为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (3-78)$$

由于瓦块的摆动,每增加一块瓦就增加了一个自由度。如果考虑瓦块惯性( $J \neq 0$ )的影响,系统共有 $2s + 6$ 个特征值;若不计瓦块惯性,只有 $s + 6$ 个特征值。

瓦块绕支点的转动惯量一般都很小,它对稳定性的影响往往可以不计<sup>[6]</sup>。

### 3. 计算示例

例3-3:设例3-2的转子支承在两个相同的五瓦可倾瓦轴承上,轴承形式如图1-4(a)所示。其参数为: $L/D = 0.4, D = 114\text{mm}, \psi = 1.4\text{‰}, \eta = 0.018\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ ,瓦块张角 $\alpha = 60^\circ$ 。试分析当支点系数 $\alpha_T = 0.5$ 和 $\alpha_T = 0.6$ 时,系统稳定性与预负荷系数 $m_b$ 的关系,并估算 $\alpha_T = 0.5, m_b = 0$ 时的失稳转速。

解:由例3-2得 $2m = 520\text{kg}; 2k = 2.104 \times 10^8\text{N}/\text{m}$ 。根据8.3节的程序要求,原始数据的输入格式如表3-7所示,表中的数据是以 $\alpha_T = 0.5, m_b = 0.2$ 的轴承为例。为便于考证程序,表3-6中给出了 $n = 12000\text{r}/\text{min}$ 时计算得到的11个无量纲特征值(没有考虑瓦块惯性的影响)以及相应的对数衰减率。

表3-6<sup>①</sup> 特征值与对数衰减率

Re( $\lambda$ )	Im( $\lambda$ )	$\delta$
-0.02165	0.43710	0.311
-0.02267	0.43340	0.329
-0.50312	0.67958	4.652
-0.49009	0.68614	4.488
-0.78520 <sup>②</sup>	0	
-0.88497	0	
-1.03900	0	

① $\alpha_T = 0.5, m_b = 0.2, n = 12000\text{r}/\text{min}$ ;

②实特征值没有相应的对数衰减率。

表 3-7 原始数据的输入格式

5.5,2,1															
1.052E+08,	260.0,	0.4,	0.057,	0.0014,	0.0180,	10.0,	0.0,	0.0,							
0.041,	0.092,	0.206,	0.478,	1.218											
12000.0															
324.0,	252.0,	180.0,	108.0,	36.00											
0.211,	-0.028,	0.273,	-0.008,	0.234,	0.276,	0.274,	0.376,	-0.034,					-0.046		
0.117,	-0.359,	-0.021,	0.137,	0.590,	-0.204,	-0.208,	0.099,	-0.065,					0.021		
0.027,	-0.010,	0.355,	0.264,	0.027,	0.027,	0.023,	0.718,	0.000,					0.077		
0.305,	-0.238,	0.101,	-0.051,	0.616,	0.172,	0.168,	0.073,	0.065,					0.021		
-0.059,	-0.185,	0.115,	0.262,	0.201,	-0.263,	-0.266,	0.410,	0.034,					-0.046		
0.161,	-0.036,	0.212,	-0.027,	0.190,	0.227,	0.225,	0.313,	-0.024,					-0.033		
0.141,	-0.394,	-0.027,	0.152,	0.639,	-0.223,	-0.227,	0.108,	-0.073,					0.024		
0.042,	-0.011,	0.468,	0.412,	0.035,	0.043,	0.036,	0.947,	0.000,					0.109		
0.345,	-0.253,	0.113,	-0.052,	0.669,	0.185,	0.181,	0.078,	0.073,					0.024		
-0.061,	-0.140,	0.108,	0.195,	0.168,	-0.218,	-0.220,	0.335,	0.024,					-0.033		
0.107,	-0.047,	0.147,	-0.051,	0.143,	0.174,	0.173,	0.246,	-0.011,					-0.015		
0.180,	-0.450,	-0.038,	0.175,	0.719,	-0.252,	-0.257,	0.123,	-0.086,					0.028		
0.079,	-0.013,	0.730,	0.787,	0.056,	0.084,	0.075,	1.479,	0.000,					0.181		
0.410,	-0.279,	0.133,	-0.055,	0.755,	0.208,	0.202,	0.087,	0.086,					0.028		
-0.065,	-0.091,	0.103,	0.121,	0.134,	-0.170,	-0.171,	0.255,	0.011,					-0.015		
0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,					0.000		
0.257,	-0.553,	-0.058,	0.220,	0.865,	-0.308,	-0.315,	0.151,	-0.108,					0.035		
0.229,	-0.008,	1.667,	2.326,	0.132,	0.257,	0.238,	3.395,	0.000,					0.408		
0.535,	-0.324,	0.171,	-0.058,	0.915,	0.247,	0.240,	0.102,	0.108,					0.035		
0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,					0.000		
0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,					0.000		
0.364,	-0.691,	-0.088,	0.279,	1.055,	-0.381,	-0.390,	0.189,	-0.137,					0.000		
0.893,	0.059,	5.268,	9.314,	0.445,	1.115,	1.069,	10.832,	0.000,					0.044		
0.705,	-0.382,	0.222,	-0.062,	1.122,	0.296,	0.288,	0.121,	0.137,					1.130		
0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,	0.000,					0.044		
													0.000		

根据题目要求,分别对  $\alpha_T = 0.5, \alpha_T = 0.6$  两种轴承进行了对比计算,轴承的预负荷系数  $m_b$  分别为  $0.0, 0.1, 0.2, 0.3$  和  $0.4$  ( $m_b = 1 - C'/C$ , 计算时认为半径间隙  $C$  不变,通过改变装配间隙  $C'$  来改变预负荷系数  $m_b$ ), 所得计算结果示于图 3-17 和图 3-18。

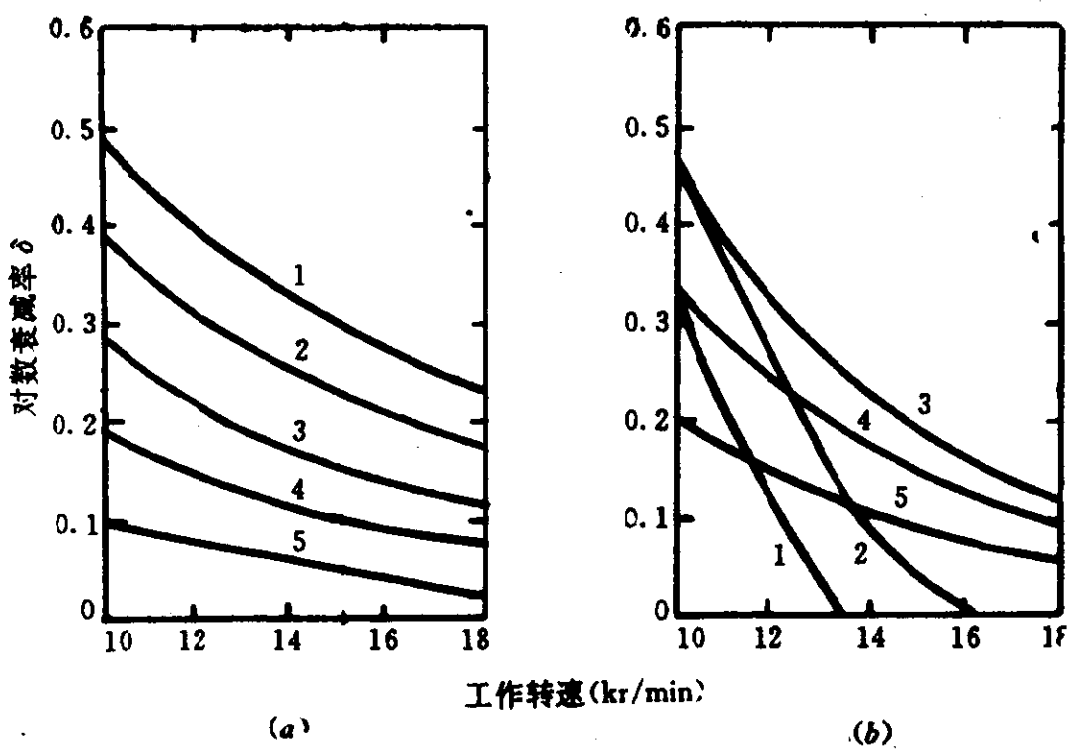
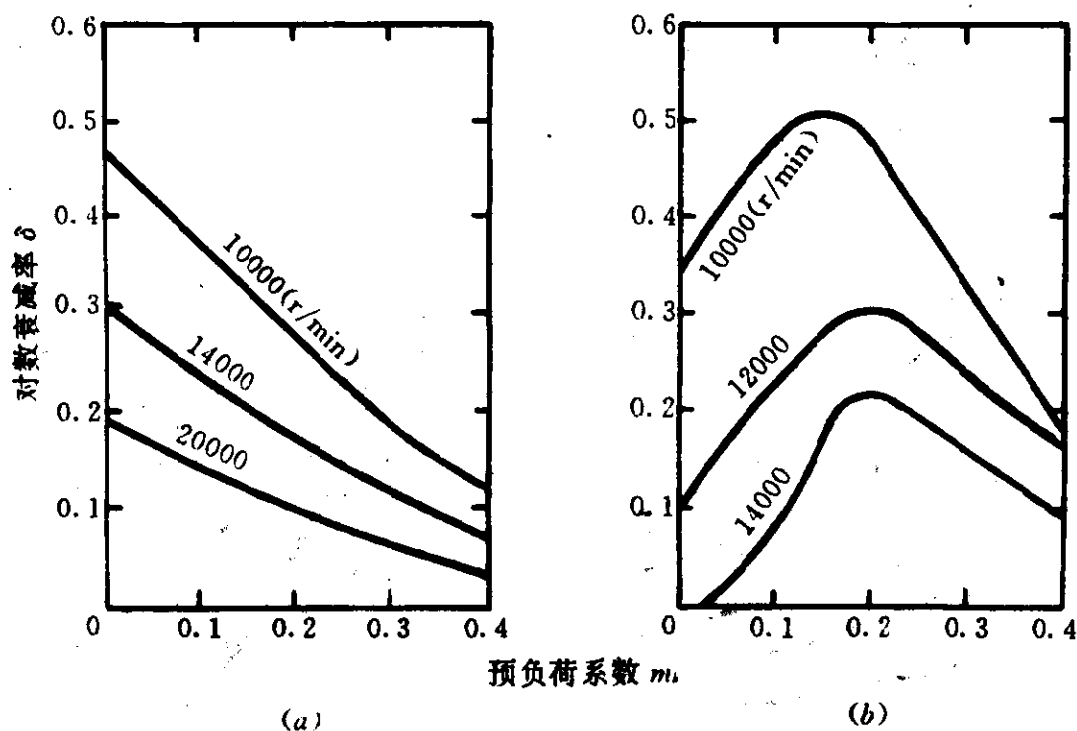


图 3-17 稳定性与转速的关系  
 (a)  $\alpha_T = 0.6$ ; (b)  $\alpha_T = 0.5$ 。  
 1— $m_b = 0.0$ ; 2— $m_b = 0.1$ ;  
 3— $m_b = 0.2$ ; 4— $m_b = 0.3$ ;  
 5— $m_b = 0.4$ 。

图 3-17 是稳定性与转速  $n$  的关系,纵坐标为系统的对数衰减率  $\delta$ 。它表明,随着转速的上升,稳定性总是下降的。对于  $\alpha_T = 0.6$  的轴承,在  $10000 \sim 18000$  r/min 之间,没有出现失稳现象;而对于  $\alpha_T = 0.5$  的轴承来说,当  $m_b = 0$  时发生了失稳现象,其失稳转速约为  $13800$  r/min。

图 3-18 是稳定性与预负荷的关系。对于  $\alpha_T = 0.6$  的偏支轴承,系统稳定性总是随  $m_b$  的增加而下降,  $m_b = 0$  时稳定性最好;对

图 3-18 稳定性与预负荷  $m_b$  的关系(a)  $\alpha_T = 0.6$ ; (b)  $\alpha_T = 0.5$ 。

于  $\alpha_T = 0.5$  的轴承, 当  $m_b$  较小时, 稳定性随  $m_b$  的增加而提高, 当  $m_b$  增大到某一值后, 稳定性反而随  $m_b$  的增加而下降, 这说明存在一个最佳的预负荷  $m_b$ , 其值约为  $0.15 \sim 0.3$ 。

为了机组有足够的稳定性裕度, 对于  $\alpha_T = 0.6$  的偏支轴承, 设计时宜取  $m_b = 0$ ; 对于  $\alpha_T = 0.5$  的轴承则宜取  $m_b = 0.15 \sim 0.3$ 。

从图 3-17 还可看到, 对于  $\alpha_T = 0.6$  和  $\alpha_T = 0.5$  这两种轴承, 在高速时,  $\alpha_T = 0.6$  的轴承所具有的对数衰减率  $\delta$  总比  $\alpha_T = 0.5$  的轴承大。这说明  $\alpha_T = 0.6$  的偏支轴承在高速下所具有的稳定性裕度比  $\alpha_T = 0.5$  的轴承大。为了进一步比较这两种轴承的稳定性性能, 表 3-8 是不同转速下它们所能承受的减稳因素界限值的对比结果。

表 3-8 减稳因素界限值对比结果

工作转速 (kr/min)		10	12	14	16	18	20
交叉刚度 (MN/m)	$\alpha_T = 0.6, m_b = 0.0$	12	10	8.5	7.0	6.0	5.0
	$\alpha_T = 0.5, m_b = 0.2$	11	8.0	5.5	4.5	3.5	3.0
负阻尼 (kN·s/m)	$\alpha_T = 0.6, m_b = 0.0$	23	19	15	13	11	9.0
	$\alpha_T = 0.5, m_b = 0.2$	22	14	10	8.5	7.0	5.0

表 3-8 表明,  $\alpha_T = 0.6$  的轴承所能承受的减稳因素界限值均比  $\alpha_T = 0.5$  的轴承大, 在高速时尤为明显。

以上数据充分表明, 不论根据对数衰减率判据还是其他两个判据,  $\alpha_T = 0.6, m_b = 0$  的可倾瓦轴承比  $\alpha_T = 0.5$  的轴承的稳定性好, 特别适用于高速旋转机械。

该算例中只计算了  $\alpha_T = 0.5$  与  $\alpha_T = 0.6$  这两种情况, 如果以稳定性为优化目标, 可倾瓦轴承则存在一个最佳的支点系数  $\alpha_T$ 。

### 3.10 轴承设计参数与结构形式对稳定性的影响

当现有机组的稳定性裕度不足时, 必须修改设计参数以提高机组的稳定性。根据表 3-7 的结果知道, 提高轴的刚度或在转子中央施加一外部正阻尼, 可以提高稳定性。但是, 这两种方法在实际应用中由于种种原因受到了很大的限制。相反, 改变轴承的设计参数或结构形式, 不但不会受到机组结构的限制, 而且可以有效地提高稳定性。下面以例 3-2 为例, 讨论轴承的设计参数与结构形式对稳定性的影响。

#### 1. 设计参数的影响

图 3-19 ~ 图 3-21 是长径比  $L/D$ 、间隙比  $\psi$  和动力粘度  $\eta$  对稳定性的影响。

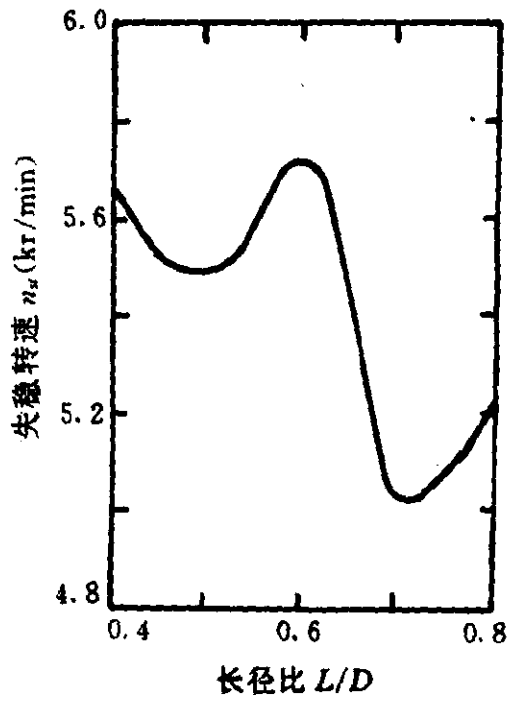


图 3-19 失稳转速  $n_c$  与  $L/D$  的关系

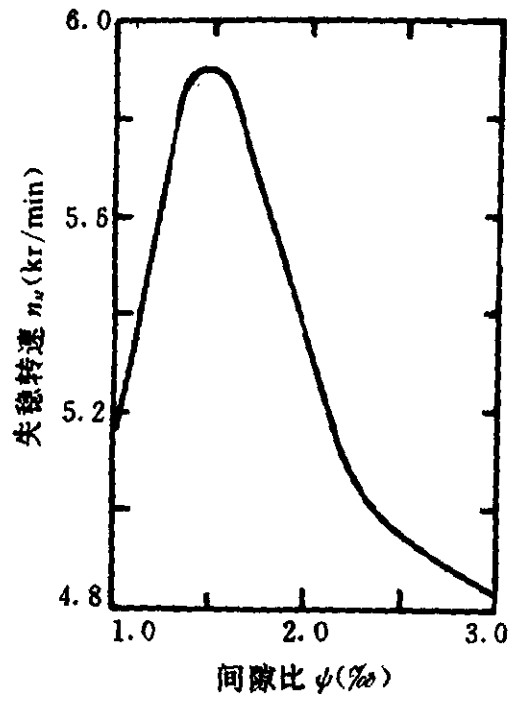


图 3-20 失稳转速  $n_c$  与  $\phi$  的关系

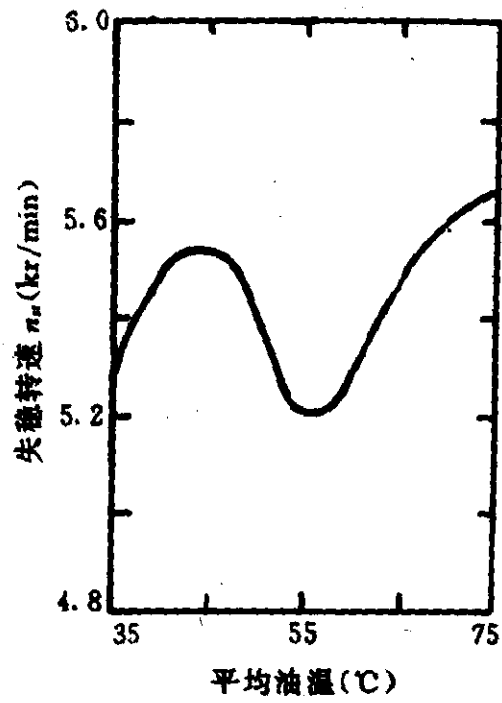


图 3-21 失稳转速  $n_c$  与  $\eta$  的关系



在以上三个图中,纵坐标为失稳转速  $n_w$ 。除各图中专门讨论的参数外,其他参数与例 3-2 相同。

关于  $L/D$  对稳定性的影响,目前比较一致的看法是:减小  $L/D$  能够增大轴承的偏心率,因而可以提高稳定性<sup>[27,28]</sup>。但是,图 3-19 表明,减小  $L/D$  有时可以提高稳定性,有时反而会降低稳定性。因此,在寻求提高稳定性的措施时,不可盲目减小  $L/D$ ,而应具体问题具体分析。

由图 3-20 看出,当间隙比较小时,增加  $\psi$  可以提高稳定性。当  $\psi$  增加到一定值后,稳定性反而随  $\psi$  的增加而下降。参考文献 [28] 曾提到,在实践中发现,当振动较大时,增大间隙比有时反而使振动更加剧烈,减小  $\psi$  则有利于振动平稳。这一现象与图 3-20 的结论是比较吻合的。

图 3-21 是失稳转速与  $\eta$  的关系,横坐标为油的平均温度。该图表明,提高进油温度(相当于提高平均温度)并不总能提高稳定性。只有当平均油温已经很高时,继续提高进油温度才可以提高稳定性。由于平均油温  $\bar{T} \leq 70^\circ\text{C}$ ,大幅度地提高进油温度是不现实的。但据此可以推论,如果选用粘度较低的油品,往往可以提高稳定性。

## 2. 轴承结构形式的影响

表 3-9 是不同结构形式轴承的稳定性对比。

表 3-9 不同结构轴承的稳定性对比

$n_w$ (r/min)	轴承结构形式及参数
5726	$L/D = 0.6$ 的圆柱轴承
7786	$L/D = 0.6, m_b = 2/3, \psi = 3\%$ 的椭圆轴承
9782	$L/D = 0.6, Y = 4/3$ 的三油楔轴承
13800	例 3-3 的可倾瓦轴承, $L/D = 0.4, \alpha_T = 0.5, m_b = 0, \psi = 1.4\%$
> 20000	例 3-3 的可倾瓦轴承, $L/D = 0.4, \alpha_T = 0.6, m_b = 0, \psi = 1.4\%$

由表 3-9 知道,圆柱轴承的稳定性最差,三油楔与椭圆轴承较好,可倾瓦轴承最好。

从这一节的计算结果可以看到,适当改变轴承的设计参数( $L/D$ 、 $\psi$ 、 $\eta$ ),可以提高稳定性,但提高的幅度很有限。而改变轴承的结构形式,采用稳定性较好的轴承,则可以大幅度地提高轴系的稳定性。

### 参 考 文 献

- 1 Newkirk BL, Taylor HD. Shaft Whipping Due to Oil Action in Journal Bearings. General Electric Review, 1925, 28:559~568
- 2 Newkirk BL. Shaft Whipping. General Electric Review, 1924, 27:169~178
- 3 Kimball AL. Internal Friction Theory of Shaft Whipping. General Electric Review, 1927, 27:244~251
- 4 Prohl MA. A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors. Journal of Applied Mechanics, Trans. of ASME, 1945, 12(3):A-142~A-148
- 5 Lund JW. Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings. Journal of Engineering for Industry, Trans. of ASME, 1974, 96(2):509~517
- 6 徐龙祥,朱均,虞烈. 可倾瓦轴承转子系统的稳定性研究. 应用力学学报, 1987,4(3):57~68
- 7 李建国,朱均,虞烈. 多个滑动轴承支承的转子系统稳定性研究. 全国第二届转子动力学学术讨论会论文集,1989,1~8
- 8 郑兆昌等. 大型转子-油膜轴承-柔性基础系统的动力学计算. 振动与冲击, 1984,10(4):27~41
- 9 徐龙祥,朱均. 大型汽轮发电机组稳定性研究. 机械工程学报,1992,28(3):6~11
- 10 Athre K, Kurian J. A Numerical Approach to the Stability of Rotor-Bearing Systems. Journal of Mechanical Design, Trans. of ASME, 1982,104:356~363
- 11 Murphy BT, Vance JM. An Improved Method for Calculating Critical Speeds and Rotordynamics Stability of Turbomachinery. Journal of Engineering for Power, Trans. of ASME, 1983, 105:591~595
- 12 Muszynska A. Whirl and Whip — Rotor/Bearing Stability Problems. Journal of Sound and Vibration, 1986, 110(3):443~462
- 13 朱均. 关于可倾瓦径向滑动轴承稳定性的探讨(一). 摩擦学第三届全国学术交流会议论文集,1982.

- 14 潘永密,郑水英. 迷宫密封气流激振问题的研究. 全国第二届转子动力学学术讨论会论文集,1989,158~163
- 15 鲁周勋,谢友柏,丘大谋. 迷宫气体密封转子动力学特性分析. 润滑与密封, 1991,(2):10~19
- 16 郭富印等编. FORTRAN 算法汇编:第三分册. 北京:国防工业出版社,1982.
- 17 张直明,虞烈. 滑动轴承-转子系统的系统阻尼值与稳定裕度的相互关系. 上海工业大学学报,1985(4):11~20
- 18 堀幸夫. 油膜震荡防止法,日本机械学会第 329 回讲习会教材《回转体振动问题》,1970.
- 19 Elwell RC, Findlay JA. Design of Pivoted-Pad Journal Bearing. Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, 1969, 91(1):87~103
- 20 Flack RD, Zuck CJ. Experiments on the Stability of Two Flexible Rotors in Tilting Pad Bearings. The 42nd ASLE Annual Meeting in Anaheim, California, 1987, Preprint No. 87-AM-3A-1
- 21 Lund JW. Spring and Damping Coefficients for the Tilting-Pad Journal Bearing. Trans. of ASLE, 1964, 7:342~352
- 22 庞良坤,董勋. 汽轮机特殊结构轴承稳定性能理论分析和试验研究. 上海交通大学学报,1988,22(4):21~30
- 23 张直明,计入支点弹性和阻尼时可倾瓦轴承支承的转子系统的动力稳定性. 机械工程学报,1983,19(2):9~21
- 24 Nicholas JC, Gunter EJ. The Influence of Tilting Pad Bearing Characteristics on the Stability of High Speed Rotor-Bearing Systems. Topics in Fluid Film Bearing and Rotor Bearing System Design and Optimization, ASME, 1978, 55~78
- 25 Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery. NASA Conference Publication, 1980, 1982, 1984, 1986
- 26 虞烈等. 可倾瓦轴承-转子系统自身不稳定性证明. 第四届全国摩擦学学术会议论文集,1987,129~134
- 27 张直明主编. 滑动轴承的流体动力润滑理论. 北京:高等教育出版社,1986.
- 28 刘士学等编著. 透平压缩机振动. 北京:机械工业出版社,1987.

## 第四章 实际转子-轴承系统的稳定性

### 4.1 概 述

在前一章中,转子被简化成单圆盘对称转子。只有结构极其简单的旋转机械才可以采用这种转子模型。在工业日益发展的今天,大型、高速旋转机械得到了广泛的应用,转子的结构非常复杂。如果仍采用单圆盘转子模型,不但计算结果与实际情况偏差较大,而且难以设计出具有良好动态性能的旋转机械。

计算实际转子-轴承系统的稳定性,往往将轴系简化为多支承多圆盘的力学系统。其稳定性计算目前有两种比较常用的方法,一种是传递矩阵法及其变形里卡迪(Riccati)传递矩阵法<sup>[1,2]</sup>;另一种是有限元分析法。这两种方法各有其优缺点,传递矩阵法的特点是存储空间少,计算速度快,但常常会产生漏根现象,而且数值稳定性差。有限元分析法的特点是计算精度高,数值稳定性好,并有很多成熟的计算程序可供利用,不会产生漏根现象,但占用的存储空间大,计算速度稍慢。

本书采用第二种方法即有限元分析法计算轴系的稳定性。为了读者更好地掌握这一章的内容,采用较简单的传递矩阵法作为数学工具建立系统的运动方程。

### 4.2 转子的简化模型

实际的转子是一个质量连续分布的弹性轴,具有无穷多个自由度。计算时常常把它离散成带有若干个集总圆盘(质量)的多自由度系统。

图4-1(a)是一个实际旋转机械的转子示意图,转轴上装有多级叶轮(叶片)。计算时,首先将转轴及其上面的叶轮或轴向定位

套筒等效成一根变直径的光轴,等效的原则是保证质量及抗弯刚度  $EJ$  不变。等效后直径不变的轴段称为自然轴段,相邻两个自然轴段的交界处称为自然节点,最左端与最右端的自然轴段的端面也称为自然节点。因此一个共有  $s$  个自然轴段的转子共有  $s + 1$  个自然节点。书中约定,自然节点从左至右编号为  $1, 2, 3, \dots$ ,自然轴段从左至右编号为  $(1), (2), (3), \dots$ ,如图 4-1(b) 所示。

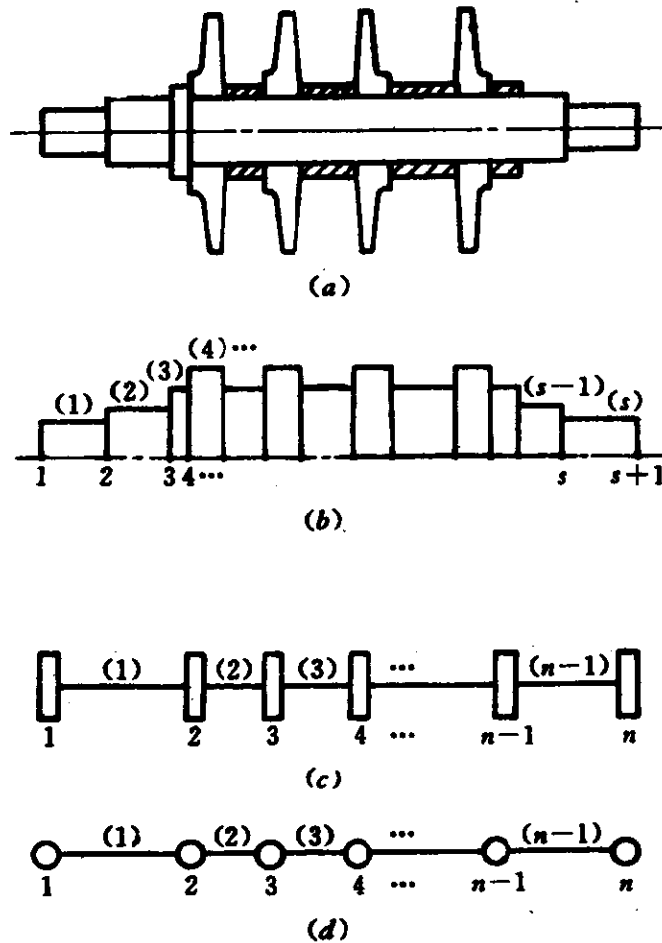


图 4-1 转子模型的简化

(a) 实际结构; (b) 等效光轴;  
(c) 集总圆盘模型; (d) 集总质量模型。

每一个自然轴段用其长度  $l$ 、等效质量直径(计算轴段质量的直径)  $d_m$  和等效刚度直径(计算轴段的抗弯刚度  $EJ$ )  $d_s$  来表征它的力学性能。轴上的叶轮(叶片)和轴向定位套筒增加了相应轴段的质量,设转轴的外径为  $d$ ,叶轮或定位套筒的质量为  $m$ ,其等效

质量直径  $d_m$  可表示为

$$d_m = \sqrt{d^2 + 4m/(\pi\rho l)}$$

式中  $\rho$ ——轴的密度。

此外,在轴上装有叶轮的地方,叶轮不但增加了轴段的质量,而且还增加了轴段的抗弯刚度。各自然轴段的等效刚度直径  $d_k$  可取为

$$d_k = \begin{cases} d + 3B/4, & \text{考虑叶轮对轴的加强。} \\ d, & \text{不考虑叶轮对轴的加强。} \end{cases}$$

式中  $B$ ——叶轮或叶片的宽度。

然后将图 4-1(b) 所示的每个自然轴段的质量集总到选定的节点上,如图 4-1(c)。这些节点往往选在轴承与叶轮的中央以及轴径突变处。集总后的圆盘是一个只计质量不计大小的理想圆盘,有时也将图 4-1(c) 用图 4-1(d) 的形式表示。集总后,相邻两个圆盘间的轴段称为主轴段。为了减少系统的自由度,一个主轴段内可以含有多个轴径不等的自然轴段。在主轴段内的自然轴段认为是没有质量只有弹性的理想自然轴段。质量集总的原则是保证集总前后主轴段内的质心不变,如果第一个集总圆盘的左边或最后一个集总圆盘的右边有外伸轴段,则将外伸轴段的质量全部集总在这两个圆盘上。

经过这样处理后,一个质量连续分布的实际转子便离散成了如图 4-1(c) 或 4-1(d) 所示的具有  $n$  个集总圆盘(集中质量)、 $n-1$  个主轴段的离散模型。书中约定,集总圆盘从左至右编号为  $1, 2, 3, \dots, n$ , 主轴段从左至右编号为  $(1), (2), (3), \dots, (n-1)$ , 如图 4-1(c) 或 4-1(d) 所示。

在本章及第六章中,转子均采用这一离散模型。

有时我们要处理的是一个轴径不变但很长的转子,计算时也要将它离散成带有若干个集总圆盘的离散系统。除了在轴承中心一定要有一个集总圆盘外,其他集总圆盘的位置根据计算者的经验人为确定。

### 4.3 固定瓦轴承系统的运动方程

为了减少系统的自由度,本书不考虑陀螺力矩的影响,这样得到的运动方程比较简单。作者曾对一台国产 200MW 汽轮发电机组进行过对比计算,不计陀螺力矩时得到的失稳转速为 3229r/min,计入了陀螺力矩的失稳转速为 3360r/min,两者的误差小于 4%,而且不计陀螺力矩得到的失稳转速偏安全。

#### 1. 坐标系的选取

如图 4-2 所示,取  $z$  轴表示转子的轴线方向, $xoy$  坐标系选在垂直  $z$  轴的平面内, $y$  轴沿自重方向为正, $x$  轴为水平方向。

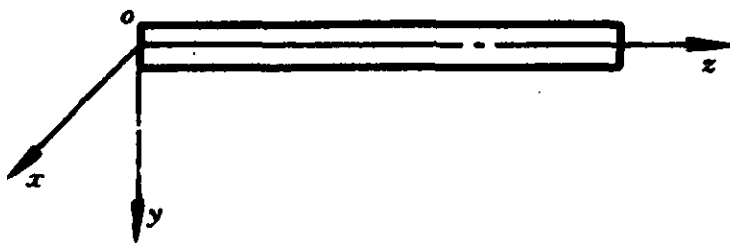


图 4-2 坐标系的选取示意图

#### 2. 相邻两个集总圆盘间的传递关系

下面主要用传递矩阵法建立两个相邻圆盘之间的传递关系。

图 4-3(a) 是任意第  $j-1$  个主轴段的示意图,假设主轴段内共有  $m$  个自然轴段,并从左至右重新编号为 (1), (2),  $\dots$ , ( $m$ ); 共有  $m+1$  个自然节点,从左至右重新编号为 0, 1, 2,  $\dots$ ,  $m$ 。将自然轴段的质量集总到左、右两个端点后,主轴段内的自然轴段是不计质量只计弹性的理想自然轴段。为了表明不同的抗弯刚度,用一系列直径不等的细小轴段表示理想自然轴段(见图 4-3(b))。

在图 4-3 中,对第  $j-1$  个主轴段内的自然轴段以及自然节点重新进行了编号,它们与自然轴段以及自然节点的总体编号是不同的,要注意两者之间的区别与联系。节点编号的对应关系为

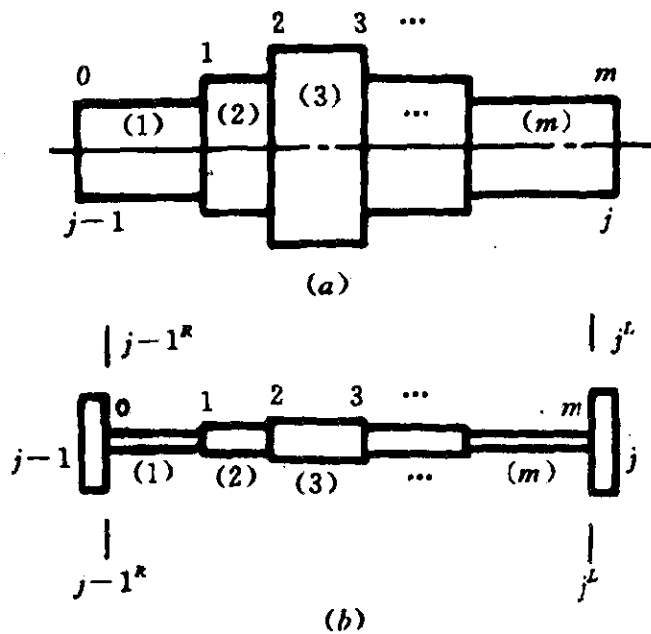


图 4-3 第  $j-1$  个主轴段  
(a) 实际结构; (b) 质量集总后的模型。

总体编号为  $j-1$  的集总圆盘 =  $j-1$  个  
 主轴段内局部编号为 0 的自然节点;  
 总体编号为  $j$  的集总圆盘 =  $j-1$  个  
 主轴段内局部编号为  $m$  的自然节点。 } (4-1)

图 4-4 是第  $j-1$  个主轴段内任意第  $i$  个理想自然轴段在  $yoz$  平面内的变形关系, 轴段的等效刚度直径、长度以及抗弯刚度分别用  $d_i$ 、 $l_i$  和  $EJ_i$  表示, 该轴段的左、右两个自然节点的局部编号为  $i-1$  和  $i$ 。将  $i-1$ 、 $i$  节点所在的截面称为  $i-1$  和  $i$  截面。任何一个截面, 可用以下四个变量来表征它的状态

- (1) 截面线位移, 用  $y$  表示;
- (2) 截面角位移, 用  $\theta$  表示;
- (3) 截面上的力矩, 用  $N$  表示;
- (4) 截面上的剪力, 用  $Q$  表示。

向量  $\{Z\} = \{y, \theta, N, Q\}^T$  称为截面状态向量或称状态变量。根据图 4-4 轴段的力平衡关系可得



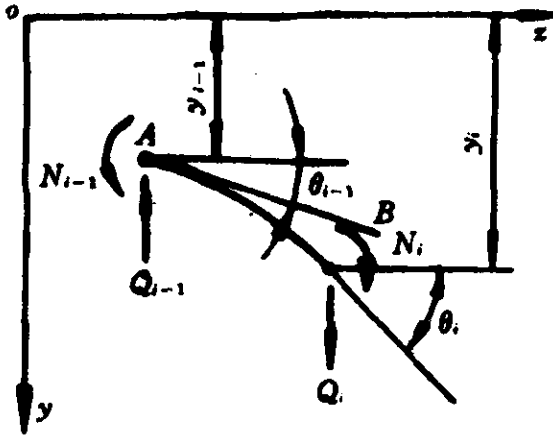


图 4-4 理想自然轴段的变形关系

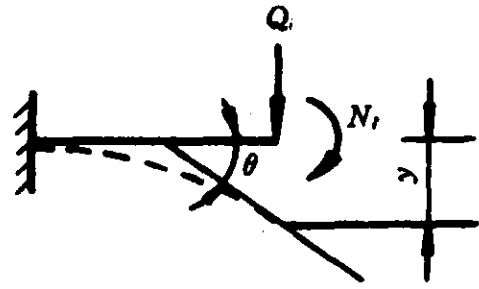


图 4-5 悬臂梁的变形关系

$$\left. \begin{aligned} N_i &= N_{i-1} - Q_{i-1}l_i \\ Q_i &= Q_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

为了得到截面  $i$  与  $i-1$  之间的变形关系, 作  $i-1$  截面的法线  $AB$  并与  $i-1$  节点处的轴线相切, 截面  $i$  相对于法线  $AB$  的变形与图 4-5 的悬臂梁的变形完全一样。

根据材料力学的变形计算公式<sup>[3]</sup> 有

$$\left. \begin{aligned} y &= N_i l_i^2 / (2EJ_i) + Q_i l_i^3 / (3EJ_i) \\ \theta &= N_i l_i / (EJ_i) + Q_i l_i^2 / (2EJ_i) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

根据图 4-4 的几何关系有

$$\left. \begin{aligned} y_i - y_{i-1} - \theta_{i-1} l_i &= N_i l_i^2 / (2EJ_i) + Q_i l_i^3 / (3EJ_i) \\ \theta_i - \theta_{i-1} &= N_i l_i / (EJ_i) + Q_i l_i^2 / (2EJ_i) \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

式中  $J_i = \pi d_i^4 / 64$ 。

将式(4-2)代入式(4-3)得

$$\left. \begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + l_i \theta_{i-1} + l_i^2 N_{i-1} / (2EJ_i) - l_i^3 Q_{i-1} / (6EJ_i) \\ \theta_i &= \theta_{i-1} + l_i N_{i-1} / (EJ_i) - l_i^2 Q_{i-1} / (2EJ_i) \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

将式(4-5)、式(4-2)结合在一起, 得到截面  $i$  与截面  $i-1$  之间状态向量的传递关系为

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/(2EJ) & -l^3/(6EJ) \\ 0 & 1 & l/(EJ) & -l^2/(2EJ) \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_{i-1} \quad (4-6)$$

令

$$[A]_i = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/(2EJ) & -l^3/(6EJ) \\ 0 & 1 & l/(EJ) & -l^2/(2EJ) \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i$$

$$\{Z\} = \{y, \theta, N, Q\}^T$$

这样式(4-6)又可改写为

$$\{Z\}_i = [A]\{Z\}_{i-1} \quad (4-7)$$

式(4-7)是任意一个理想自然轴段的两个节点之间状态向量 $\{Z\}$ 的传递关系。根据式(4-7)可得局部编号为 $m$ 的自然节点与局部编号为0的自然节点之间状态向量的传递关系为

$$\begin{aligned} \{Z\}_m &= [A]_m \{Z\}_{m-1} = [A]_m [A]_{m-1} \{Z\}_{m-2} \\ &= [A]_m [A]_{m-1} \cdots [A]_2 [A]_1 \{Z\}_0 \end{aligned} \quad (4-8)$$

上式是某一主轴段内所有理想自然轴段的传递关系。主轴段内的理想自然轴段是不计质量的轴段,而且任何相邻理想轴段之间没有集总圆盘。由式(4-1)知道,局部编号为0的自然节点对应着总体编号为 $j-1$ 的圆盘,局部编号为 $m$ 的自然节点对应着总体编号为 $j$ 的圆盘。参考图4-3(b),在第 $j-1$ 个圆盘右边一点点的节点记为 $j-1^R$ ,相应的状态向量记为 $\{Z\}_{j-1}^R$ ;在第 $j$ 个圆盘左边一点点的节点记为 $j^L$ ,相应的状态向量记为 $\{Z\}_j^L$ 。根据式(4-1)和图4-3(b)可以得到

$$\left. \begin{aligned} \{Z\}_0 &= \{Z\}_{j-1}^R \\ \{Z\}_m &= \{Z\}_j^L \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

式中的上角标“L、R”分别表示左状态向量与右状态向量。等式左边的下角标表示局部节点编号,右边为总体圆盘编号。将上式代入

式(4-8)得

$$\{Z\}_j^L = [H]_{j-1} \{Z\}_{j-1}^R \quad (4-10)$$

式中  $[H]_{j-1} = [A]_m [A]_{m-1} \cdots [A]_2 [A]_1$ 。

式(4-10)具有如下的形式

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_j^L = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ 0 & 1 & h_{23} & h_{24} \\ 0 & 0 & 1 & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R \quad (4-11)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} h_{34} &= -h_{12} \\ h_{13} - h_{24} &= h_{12} h_{23} \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

式(4-10)和式(4-11)就是相邻两个集总圆盘间的传递关系。

### 3. 系统的运动方程

将式(4-11)分成上、下两块得

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^L = \begin{bmatrix} 1 & h_{34} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R \quad (4-13)$$

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j^L = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1}^R + \begin{bmatrix} h_{13} & h_{14} \\ h_{23} & h_{24} \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R \quad (4-14)$$

由于

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j^L = \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j^R = \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}$$

这样式(4-14)可改写为

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} h_{13} & h_{14} \\ h_{23} & h_{24} \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R \quad (4-15)$$

由上式可得

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1} \quad (4-16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= h_{24}/\Delta; & e_{12} &= -h_{14}/\Delta \\ e_{21} &= -h_{23}/\Delta; & e_{22} &= h_{13}/\Delta \\ b_{11} &= e_{11}; & b_{12} &= e_{11} + e_{12}h_{12} \\ b_{21} &= e_{21}; & b_{22} &= e_{22} + e_{21}h_{12} = e_{11} \\ \Delta &= h_{13}h_{24} - h_{14}h_{23} \end{aligned} \right\} (4-17)$$

在式(4-16)中令  $j = j + 1$  得

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^R = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j+1} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j \quad (4-18)$$

把式(4-16)代入式(4-13)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^L &= \begin{bmatrix} 1 & h_{34} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R \\ &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j - \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1} \end{aligned} \quad (4-19)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= e_{11} + e_{21}h_{34} = e_{22}; & s_{12} &= e_{12} + e_{22}h_{34} \\ s_{21} &= e_{21}; & s_{22} &= e_{22} \\ g_{11} &= b_{11} + b_{21}h_{34} = e_{22}; & g_{12} &= b_{12} + b_{22}h_{34} = e_{12} \\ g_{21} &= b_{21} = e_{21}; & g_{22} &= b_{22} = e_{11} \end{aligned} \right\} (4-20)$$

图4-6是第  $j$  个集总圆盘的受力简图,根据力与力矩的平衡关系得

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^L - \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^R = - \begin{Bmatrix} 0 \\ p_y \end{Bmatrix}_j \quad (4-21)$$

上式的  $p_{y,j}$  是第  $j$  个圆盘在  $yo_z$  平面内所受的激振力的总和,方向与  $y$  轴相反。在建立方程(4-6)时,未计入轴的静变形。因此  $p_{y,j}$  不应包括第  $j$  个圆盘的重力  $m_j g$ 。相应地,图4-4中的  $z$  轴应理解为静平衡时的轴线。

将式(4-18)、式(4-19)、代入式(4-21)得

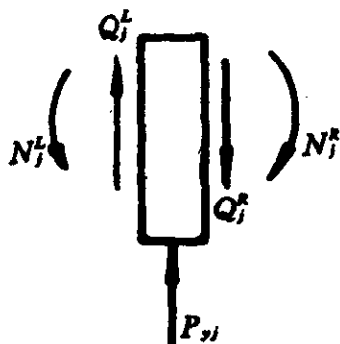


图 1-6 集总圆盘的受力分析

$$\begin{aligned}
 & - \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}_{j-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1} + \left[ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{j-1} \right] \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j \\
 & - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j+1} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ p_{y_j} \end{Bmatrix} \quad (4-22)
 \end{aligned}$$

将上式写成分量的形式有

$$\begin{aligned}
 & -g_{11}^{(j-1)}y_{j-1} + (b_{11}^{(j)} + s_{11}^{(j-1)})y_j - e_{11}^{(j)}y_{j+1} \\
 & -g_{12}^{(j-1)}\theta_{j-1} + (b_{12}^{(j)} + s_{12}^{(j-1)})\theta_j - e_{12}^{(j)}\theta_{j+1} = 0 \quad (4-23) \\
 & -g_{21}^{(j-1)}y_{j-1} + (b_{21}^{(j)} + s_{21}^{(j-1)})y_j - e_{21}^{(j)}y_{j+1} \\
 & -g_{22}^{(j-1)}\theta_{j-1} + (b_{22}^{(j)} + s_{22}^{(j-1)})\theta_j - e_{22}^{(j)}\theta_{j+1} = -p_{y_j} \quad (4-24)
 \end{aligned}$$

式中 上角标“(j)、(j-1)”——第 j、j-1 个主轴段；

下角标“j、j-1、j+1”——第 j、j-1 与 j+1 个集总圆盘。

绝大多数情况下，旋转机械的轴系都可以简化为图 4-1(c) 的计算模型。在第一个集总圆盘的  $1^L$  截面以及第 n 个集总圆盘的  $n^R$  截面上，可以认为没有弯矩与剪力作用。这就是转轴在两端的边界条件，称为自由—自由边界条件。这一边界条件可表示为

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{1^L} = \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{n^R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-25)$$

将第一个集总圆盘处的边界条件等式(4-25)和式(4-18)代入式(4-21)得

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_1 - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_2 = - \begin{Bmatrix} 0 \\ p_y \end{Bmatrix}_1 \quad (4-26)$$

将上式写成分量的形式有

$$b_{11}^{(1)} y_1 - e_{11}^{(1)} y_2 + b_{12}^{(1)} \theta_1 - e_{12}^{(1)} \theta_2 = 0 \quad (4-27)$$

$$b_{21}^{(1)} y_1 - e_{21}^{(1)} y_2 + b_{22}^{(1)} \theta_1 - e_{22}^{(1)} \theta_2 = - p_{y1} \quad (4-28)$$

按照边界集总圆盘 1 的相同分析方法,可以得到边界集总圆盘  $n$  的关系为

$$- g_{11}^{(n-1)} y_{n-1} + s_{11}^{(n-1)} y_n - g_{12}^{(n-1)} \theta_{n-1} + s_{12}^{(n-1)} \theta_n = 0 \quad (4-29)$$

$$- g_{21}^{(n-1)} y_{n-1} + s_{21}^{(n-1)} y_n - g_{22}^{(n-1)} \theta_{n-1} + s_{22}^{(n-1)} \theta_n = - p_{yn} \quad (4-30)$$

将式(4-28)、式(4-24)和式(4-30)结合在一起可得

$$[\mathbf{K}_{11}]\{\mathbf{Y}\} + [\mathbf{K}_{12}]\{\boldsymbol{\theta}\} = - \{\mathbf{P}_y\} \quad (4-31)$$

再将式(4-27)、式(4-23)和式(4-29)结合在一起可得

$$[\mathbf{K}_{21}]\{\mathbf{Y}\} + [\mathbf{K}_{22}]\{\boldsymbol{\theta}\} = \{0\} \quad (4-32)$$

上两式中

$$\left. \begin{aligned} \{\mathbf{Y}\} &= \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^T \\ \{\boldsymbol{\theta}\} &= \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}^T \\ \{\mathbf{P}_y\} &= \{p_{y1}, p_{y2}, \dots, p_{yn}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (4-33)$$

$[\mathbf{K}_{11}] =$

$$\begin{bmatrix} b_{21}^{(1)} & -e_{21}^{(1)} & & & \\ -e_{21}^{(1)} & b_{21}^{(2)} + s_{21}^{(1)} & -e_{21}^{(2)} & & \\ & -e_{21}^{(2)} & b_{21}^{(3)} + s_{21}^{(2)} & -e_{21}^{(3)} & \\ & & \ddots & & \\ & -e_{21}^{(n-2)} & b_{21}^{(n-1)} + s_{21}^{(n-2)} & -e_{21}^{(n-1)} & \\ & & & -e_{21}^{(n-1)} & s_{21}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

$$[\mathbf{K}_{22}] = \begin{bmatrix} b_{12}^{(1)} & -e_{12}^{(1)} & & & \\ -e_{12}^{(1)} & b_{12}^{(2)} + s_{12}^{(1)} & -e_{12}^{(2)} & & \\ & -e_{12}^{(2)} & b_{12}^{(3)} + s_{12}^{(2)} & -e_{12}^{(3)} & \\ & & \ddots & & \\ -e_{12}^{(n-2)} & b_{12}^{(n-1)} + s_{12}^{(n-2)} & & -e_{12}^{(n-1)} & \\ & & & -e_{12}^{(n-1)} & s_{12}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

$$[\mathbf{K}_{12}] = \begin{bmatrix} b_{22}^{(1)} & -e_{22}^{(1)} & & & \\ -e_{22}^{(1)} & b_{22}^{(2)} + s_{22}^{(1)} & -e_{22}^{(2)} & & \\ & -e_{22}^{(2)} & b_{22}^{(3)} + s_{22}^{(2)} & -e_{22}^{(3)} & \\ & & \ddots & & \\ -e_{22}^{(n-2)} & b_{22}^{(n-1)} + s_{22}^{(n-2)} & & -e_{22}^{(n-1)} & \\ & & & -e_{22}^{(n-1)} & s_{22}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

$$[\mathbf{K}_{21}] = [\mathbf{K}_{12}]^T \quad (4-37)$$

由式(4-32)得

$$\{\theta\} = -[\mathbf{K}_{22}]^{-1}[\mathbf{K}_{21}]\{Y\} = -[\mathbf{K}_{22}]^{-1}[\mathbf{K}_{12}]^T\{Y\} \quad (4-38)$$

将式(4-38)代入式(4-31)得

$$[\mathbf{K}']\{Y\} = -\{P_y\} \quad (4-39)$$

式中  $[\mathbf{K}'] = [\mathbf{K}_{11}] - [\mathbf{K}_{12}][\mathbf{K}_{22}]^{-1}[\mathbf{K}_{12}]^T$

由式(4-34)、式(4-35)知道,矩阵 $[\mathbf{K}_{11}]$ 、 $[\mathbf{K}_{22}]$ 均是实对称矩阵,因此式(4-39)中的 $[\mathbf{K}']$ 矩阵也是对称矩阵。

同理,在  $xoz$  平面内有

$$[\mathbf{K}']\{X\} = -\{P_x\} \quad (4-40)$$

式中  $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ ;

$\{P_x\} = \{p_{x1}, p_{x2}, \dots, p_{xn}\}^T$ ;

$x_i$ ——第  $i$  个圆盘中心在  $xoz$  平面内沿  $x$  轴方向的位移；  
 $p_x$ ——作用在第  $i$  个集总圆盘上的激振力的总和，与  $x$  轴反向。

将式(4-40)和式(4-39)结合在一起得

$$[K'']\{q\} = -\{P\} \quad (4-41)$$

式中  $[K''] = \text{diag}[K', K']$ ;

$\{q\} = \{X^T, Y^T\}^T$ ——位移矢量；

$\{P\} = \{P_x^T, P_y^T\}^T$ 。

为了便于下面分析，现将位移矢量  $\{q\}$  分块成

$$\{q\} = \{q_I^T, q_B^T\}^T \quad (4-42)$$

式中  $\{q_I\} = \{X_I^T, Y_I^T\}^T$

$\{q_B\} = \{X_B^T, Y_B^T\}^T$ 。

为了叙述方便，以下称集总圆盘为**结点**（用“结点”而不用“节点”主要是便于同自然节点相区别）。

$\{q_I\}$ 、 $\{q_B\}$  分别表示由系统所有内结点和外结点的位移组成的位移矢量。所谓内结点就是在该结点上没有轴承力作用的结点；外结点就是作用有轴承力的结点。

将位移矢量按式(4-42)分块后，方程(4-41)可改写为

$$\begin{bmatrix} K''_{II} & K''_{IB} \\ K''_{BI} & K''_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_I \\ q_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} P_I \\ P_B \end{Bmatrix} \quad (4-43)$$

式中  $\{P_I\} = \{P_{xI}^T, P_{yI}^T\}^T$ ——内结点力矢量；

$\{P_B\} = \{P_{xB}^T, P_{yB}^T\}^T$ ——外结点力矢量；

$\{P_{xI}\} = \{p_{xI1}, p_{xI2}, \dots, p_{xIt}\}^T$ ；

$\{P_{xB}\} = \{p_{xB1}, p_{xB2}, \dots, p_{xBt}\}^T$ ；

$\{P_{yI}\} = \{p_{yI1}, p_{yI2}, \dots, p_{yIt}\}^T$ ；

$\{P_{yB}\} = \{p_{yB1}, p_{yB2}, \dots, p_{yBt}\}^T$ ；

$p_{xli}$ ——作用在第  $i$  个内结点上的力的水平分量，其他类同；

$t$ ——内结点数；



$l$ ——外结点数即轴承个数,  $t + l = n$ 。

方程(4-43)的物理意义是,等式的左边表示轴线变形后轴产生的弹性恢复力增量;等式右边是作用在圆盘上的力的总和。下面我们详细讨论式(4-43)右边的具体表达式,以便得到系统的运动方程。

首先讨论内结点力矢量 $\{P_i\}$ 的表达式。对任意第 $i$ 个内结点来说,作用力有惯性力和外部力(外部阻尼力与交叉刚度力)两个,其表达式如表4-1所示。

表4-1<sup>①</sup> 作用在内结点上的力

力的性质		水平方向	垂直方向
惯性力		$m_{li}\ddot{x}_{li} - m_{li}e_{li}\Omega^2\cos(\Omega t + \beta_{li})$	$m_{li}\ddot{y}_{li} - m_{li}e_{li}\Omega^2\sin(\Omega t + \beta_{li})$
外部力	阻尼力	$r_{li}\dot{x}_{li}$	$r_{li}\dot{y}_{li}$
	交叉刚度力	$-a_{li}y_{li}$	$a_{li}x_{li}$

① 下角标“ $li$ ”表示第 $i$ 个内结点。

根据上表知道第 $i$ 个内结点受的力为

$$\left. \begin{aligned} p_{xli} &= m_{li}\ddot{x}_{li} + r_{li}\dot{x}_{li} - a_{li}y_{li} - m_{li}e_{li}\Omega^2\cos(\Omega t + \beta_{li}) \\ p_{yli} &= m_{li}\ddot{y}_{li} + r_{li}\dot{y}_{li} + a_{li}x_{li} - m_{li}e_{li}\Omega^2\sin(\Omega t + \beta_{li}) \end{aligned} \right\} \quad (4-44)$$

式中  $\beta_{li}$ ——第 $i$ 个内结点处的圆盘在 $t=0$ 时圆盘中心 $o$ 与质心 $c$ 的连线 $oc$ 与 $x$ 轴的夹角,参考图3-9(b)。

根据式(4-44)可得

$$\left. \begin{aligned} \{P_{XI}\} &= [M_I]\{\ddot{X}_I\} + [R_I]\{\dot{X}_I\} - [A_I]\{Y_I\} - \Omega^2\{F_{XI}\} \\ \{P_{YI}\} &= [M_I]\{\ddot{Y}_I\} + [R_I]\{\dot{Y}_I\} + [A_I]\{X_I\} - \Omega^2\{F_{YI}\} \end{aligned} \right\} \quad (4-45)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{式中 } [M_I] &= \text{diag}[m_{I1}, m_{I2}, \dots, m_{In}] \\
 [R_I] &= \text{diag}[r_{I1}, r_{I2}, \dots, r_{In}] \\
 [A_I] &= \text{diag}[a_{I1}, a_{I2}, \dots, a_{In}] \\
 \{F_{xI}\} &= \{m_{I1}e_{I1}\cos(\Omega t + \beta_{I1}), \dots, m_{In}e_{In}\cos(\Omega t + \beta_{In})\}^T \\
 \{F_{yI}\} &= \{m_{I1}e_{I1}\sin(\Omega t + \beta_{I1}), \dots, m_{In}e_{In}\sin(\Omega t + \beta_{In})\}^T
 \end{aligned} \right\} \quad (4-46)$$

在式(4-45)中,等式右边第一项是圆盘中心运动时产生的惯性力,它总是存在的;第二项是外部阻尼力,只有考虑外部阻尼的影响时才有这一项,若不考虑则没有;第三项是交叉刚度激振力,若不考虑它的影响则没有这一项;第四项是由于质心偏离几何中心而产生的不平衡激振力,一般情况下它总是存在的。

根据式(4-45)可得 $\{P_I\}$ 的表达式为

$$\{P_I\} = [M_{II}]\{\ddot{q}_I\} + [R_{II}]\{\dot{q}_I\} + [A_{II}]\{q_I\} - \Omega^2\{F_I\} \quad (4-47)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{式中 } [M_{II}] &= \text{diag}[M_I, M_I] \\
 [R_{II}] &= \text{diag}[R_I, R_I] \\
 \{F_I\} &= \{F_{xI}^T, F_{yI}^T\}^T \\
 [A_{II}] &= \begin{bmatrix} & -A_I \\ A_I & \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (4-48)$$

式(4-47)是内结点力矢量 $\{p_I\}$ 的表达式,对于外结点,不同之处是除内结点的力矢量 $\{p_I\}$ 外,还作用有轴承油膜力增量 $\{\Delta f\}$ 。故 $\{P_B\}$ 可表示为

$$\begin{aligned}
 \{P_B\} &= [M_{BB}]\{\ddot{q}_B\} + [R_{BB}]\{\dot{q}_B\} + [A_{BB}]\{q_B\} \\
 &\quad - \Omega^2\{F_B\} + \{\Delta f\}
 \end{aligned} \quad (4-49)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{式中 } [M_{BB}] &= \text{diag}[M_B, M_B] \\
 [R_{BB}] &= \text{diag}[R_B, R_B] \\
 \{F_B\} &= \{F_{xB}^T, F_{yB}^T\}^T \\
 [A_{BB}] &= \begin{bmatrix} & -A_B \\ A_B & \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \{\Delta f\} &= \{\Delta f_x^T, \Delta f_y^T\}^T = \{\Delta f_{x1}, \dots, \Delta f_{xl}, \Delta f_{y1}, \dots, \Delta f_{yl}\}^T \\
 [M_B] &= \text{diag}[m_{B1}, m_{B2}, \dots, m_{Bl}] \\
 [R_B] &= \text{diag}[r_{B1}, r_{B2}, \dots, r_{Bl}] \\
 [A_B] &= \text{diag}[a_{B1}, a_{B2}, \dots, a_{Bl}] \\
 \{F_{xB}\} &= \{m_{B1}e_{B1}\cos(\Omega t + \beta_{B1}), \dots, m_{Bl}e_{Bl}\cos(\Omega t + \beta_{Bl})\}^T \\
 \{F_{yB}\} &= \{m_{B1}e_{B1}\sin(\Omega t + \beta_{B1}), \dots, m_{Bl}e_{Bl}\sin(\Omega t + \beta_{Bl})\}^T
 \end{aligned}$$

下角标“ $B_i$ ”——第  $i$  个外结点,  $i=1, 2, \dots, l$ .

(4-50)

将式(4-47)、式(4-49)代入式(4-43)得

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_{II} & \\ & M_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_I \\ \ddot{q}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{II} & \\ & R_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_I \\ \dot{q}_B \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} K''_{II} + A_{II} & K''_{IB} \\ K''_{BI} & K''_{BB} + A_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_I \\ q_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta f \end{Bmatrix} + \Omega^2 \begin{Bmatrix} F_I \\ F_B \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

(4-51)

下面我们再来讨论轴承油膜力增量  $\{\Delta f\}$  的表达式。对于第  $i$  个轴承(固定瓦轴承)有

$$\begin{aligned}
 \Delta f_{xi} &= k_{xxi}x_{Bi} + k_{xyi}y_{Bi} + d_{xxi}\dot{x}_{Bi} + d_{xyi}\dot{y}_{Bi} \\
 \Delta f_{yi} &= k_{yxi}y_{Bi} + k_{yyi}y_{Bi} + d_{yxi}\dot{x}_{Bi} + d_{yyi}\dot{y}_{Bi}
 \end{aligned}$$

(4-52)

根据式(4-52)可以得到  $\{\Delta f\}$  的表达式为

$$\{\Delta f\} = [K_B]\{q_B\} + [D_B]\{\dot{q}_B\}$$

(4-53)

式中

$$\begin{aligned}
 [K_B] &= \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \\
 [D_B] &= \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} \\
 [K_{ij}] &= \text{diag}[k_{ij1}, k_{ij2}, \dots, k_{ijl}] \\
 [D_{ij}] &= \text{diag}[d_{ij1}, d_{ij2}, \dots, d_{ijl}] \\
 i, j &= x, y
 \end{aligned}$$

(4-54)

请注意, 上式  $[K_B]$ 、 $[D_B]$  中的  $K_{ij}$ 、 $D_{ij}$  ( $i, j = x, y$ ) 是分块矩阵

$[K_{ij}]$ 、 $[D_{ij}]$ ，而不是无量纲的轴承动特性系数。将式(4-53)代入式(4-51)得到系统运动方程的最终形式为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \Omega^2\{F\} \quad (4-55)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [M] &= \text{diag}[M_{II}, M_{BB}] \\ [D] &= \text{diag}[R_{II}, R_{BB} + D_B] \\ [K] &= \begin{bmatrix} K''_{II} + A_{II} & K''_{IB} \\ K''_{BI} & K''_{BB} + A_{BB} + K_B \end{bmatrix} \\ \{F\} &= \{F_I^T, F_B^T\}^T \end{aligned} \right\} (4-56)$$

系统作自由振动的方程为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (4-57)$$

方程(4-56)表明，阻尼矩阵 $[D]$ 由两部分组成，一部分由外部阻尼构成；另一部分是由滑动轴承的阻尼系数构成的矩阵 $[D_B]$ 。若不计外部阻尼的影响，系统的阻尼矩阵仅仅由滑动轴承的阻尼系数构成。刚度矩阵 $[K]$ 由三部分组成，第一部分是转轴的刚度系数构成的矩阵；第二部分是交叉刚度系数组成的矩阵；第三部分是轴承的刚度系数构成的矩阵。如果不考虑交叉刚度的影响，则系统的刚度矩阵仅仅由转轴和轴承的刚度系数组成。

在建立方程(4-55)~(4-57)时，没有考虑迷宫密封的影响。由于迷宫密封最终也可以用与轴承类似的四个线性化的刚度系数表征其动力学行为，因此分析时可以将它视为固定瓦轴承一样处理。实际上，式(4-55)~式(4-57)包含了迷宫密封的影响。

#### 4. 运动方程的无量纲化

方程(4-57)是系统作自由振动的方程，式中的矩阵 $[M]$ 、 $[D]$ 、 $[K]$ 的元素均是有量纲的。实际计算表明，将方程无量纲化，特征值的计算显得比较方便。

令 $\{q\} = \{\phi\}e^{\nu t}$ ，并代入式(4-57)得

$$(\nu^2[M] + \nu[D] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (4-58)$$

在前一章中，刚度矩阵、阻尼矩阵与质量矩阵的相对单位分别是 $\eta\Omega L/\psi^3$ 、 $\eta L/\psi^3$ 和 $\eta L/(\Omega\psi^3)$ ，采用这样的相对单位对单圆盘

转子系统是合适的。但对多支承多圆盘轴系来说,采用下面的相对单位更为合适。

刚度的相对单位为  $1/f_m$ ,无量纲刚度矩阵为  $[\bar{K}] = f_m[K]$ 。

阻尼的相对单位为  $1/(f_m\Omega)$ ,无量纲阻尼矩阵为  $[\bar{D}] = f_m\Omega[D]$ 。

质量的相对单位为  $1/(f_m\Omega^2)$ ,无量纲质量矩阵为  $[\bar{M}] = f_m\Omega^2[M]$ 。

特征值  $\nu$  的相对单位为工作转速  $\Omega$ ,无量纲特征值为  $\lambda = \nu/\Omega$ 。

$f_m$  的表达式为

$$f_m = 64/(\pi E d_e)$$

式中  $d_e$ ——等效刚度直径的平均值。

将式(4-58)中的每个矩阵以及特征值  $\nu$  都用无量纲表示,则该式可改写为

$$(\lambda^2[\bar{M}] + \lambda[\bar{D}] + [\bar{K}])\{\phi\} = \{0\} \quad (4-59)$$

为了书写方便,将上式中表示无量纲的上标“ $\bar{\quad}$ ”去掉,这样可以得到

$$(\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (4-60)$$

式(4-58)、式(4-59)都称为二阶特征值问题。但前者的矩阵以及特征值都是有量纲的,而后者都是无量纲的。以后如不作特别说明,本章所给出的算例都是计算系统的无量纲特征值。

#### 4.4 可倾瓦轴承系统的运动方程

在前一节的分析中,认为支承轴承是固定瓦轴承。这一节专门讨论以可倾瓦轴承支承的转子系统的运动方程。

由前几章的分析知道,可倾瓦轴承和固定瓦轴承的区别仅在于前者瓦块的摆动性。这一差别导致了两者油膜力增量的表达式大不一样。对于固定瓦轴承,油膜力增量仅仅是动态位移  $x, y$  以及动态速度  $\dot{x}, \dot{y}$  的函数,可以用八个线性化的刚度、阻尼系数表征轴承的动力学性能。而对于可倾瓦轴承,油膜力增量还是瓦块的动态

角位移  $\varphi$  以及动态角速度  $\dot{\varphi}$  的函数。此外, 由于瓦块绕其支点摆动, 还要增加瓦块的摆动方程(参见 3.9)。

为了简单起见, 本节略去繁琐的推导过程, 只给出运动方程的最终形式。以可倾瓦轴承支承的转子系统作自由振动的方程仍然如式(4-57)所示, 但矩阵  $[M]$ 、 $[D]$ 、 $[K]$  以及向量  $\{q\}$  与固定瓦轴承不同, 具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} [M] &= \text{diag}[M_{II}, M_{BB}, J] \\ [D] &= \begin{bmatrix} R_{II} & 0 & 0 \\ 0 & R_{BB} + D_B & D_\varphi \\ 0 & D'_\varphi & D_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \\ [K] &= \begin{bmatrix} K''_{II} + A_{II} & K''_{IB} & 0 \\ K''_{BI} & K''_{BB} + A_{BB} + K_B & K_\varphi \\ 0 & K'_\varphi & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \\ \{q\} &= \{q_I^T, q_B^T, \varphi^T\}^T \end{aligned} \right\} (4-61)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [D_\varphi] &= \begin{bmatrix} D_{x\varphi} \\ D_{y\varphi} \end{bmatrix}; [K_\varphi] = \begin{bmatrix} K_{x\varphi} \\ K_{y\varphi} \end{bmatrix} \\ [D_{\varphi\varphi}] &= \text{diag}[D_{\varphi\varphi}^{(1)}, D_{\varphi\varphi}^{(2)}, \dots, D_{\varphi\varphi}^{(l)}] \\ [K_{\varphi\varphi}] &= \text{diag}[K_{\varphi\varphi}^{(1)}, K_{\varphi\varphi}^{(2)}, \dots, K_{\varphi\varphi}^{(l)}] \\ [D'_\varphi] &= [D_{\varphi x}, D_{\varphi y}] \\ [K'_\varphi] &= [K_{\varphi x}, K_{\varphi y}] \\ [J] &= \text{diag}[J^{(1)}, J^{(2)}, \dots, J^{(l)}] \\ \{\varphi\} &= \{\varphi^{(1)T}, \varphi^{(2)T}, \dots, \varphi^{(l)T}\}^T \\ [D_{x\varphi}] &= \text{diag}[D_{x\varphi}^{(1)}, D_{x\varphi}^{(2)}, \dots, D_{x\varphi}^{(l)}] \\ [K_{x\varphi}] &= \text{diag}[K_{x\varphi}^{(1)}, K_{x\varphi}^{(2)}, \dots, K_{x\varphi}^{(l)}] \\ [D_{y\varphi}] &= \text{diag}[D_{y\varphi}^{(1)}, D_{y\varphi}^{(2)}, \dots, D_{y\varphi}^{(l)}] \\ [K_{y\varphi}] &= \text{diag}[K_{y\varphi}^{(1)}, K_{y\varphi}^{(2)}, \dots, K_{y\varphi}^{(l)}] \\ [D_{\varphi x}] &= \text{diag}[D_{\varphi x}^{(1)}, D_{\varphi x}^{(2)}, \dots, D_{\varphi x}^{(l)}] \\ [K_{\varphi x}] &= \text{diag}[K_{\varphi x}^{(1)}, K_{\varphi x}^{(2)}, \dots, K_{\varphi x}^{(l)}] \\ [D_{\varphi y}] &= \text{diag}[D_{\varphi y}^{(1)}, D_{\varphi y}^{(2)}, \dots, D_{\varphi y}^{(l)}] \end{aligned} \right\}$$

$$[\mathbf{K}_{\varphi y}] = \text{diag}[\mathbf{K}_{\varphi y}^{(1)}, \mathbf{K}_{\varphi y}^{(2)}, \dots, \mathbf{K}_{\varphi y}^{(l)}] \quad (4-62)$$

在式(4-62)中,上角标“(i)”( $i = 1, 2, \dots, l$ )表示第*i*个轴承。式中带有上角标“(i)”的参数为

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{J}^{(i)}] &= \text{diag}[J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \dots, J_{s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{D}_{x\varphi}^{(i)}] &= \text{diag}[d_{x\varphi 1}^{(i)}, d_{x\varphi 2}^{(i)}, \dots, d_{x\varphi s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{K}_{x\varphi}^{(i)}] &= \text{diag}[k_{x\varphi 1}^{(i)}, k_{x\varphi 2}^{(i)}, \dots, k_{x\varphi s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{D}_{y\varphi}^{(i)}] &= \text{diag}[d_{y\varphi 1}^{(i)}, d_{y\varphi 2}^{(i)}, \dots, d_{y\varphi s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{K}_{y\varphi}^{(i)}] &= \text{diag}[k_{y\varphi 1}^{(i)}, k_{y\varphi 2}^{(i)}, \dots, k_{y\varphi s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{D}_{\varphi x}^{(i)}] &= \text{diag}[d_{\varphi x 1}^{(i)}, d_{\varphi x 2}^{(i)}, \dots, d_{\varphi x s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{K}_{\varphi x}^{(i)}] &= \text{diag}[k_{\varphi x 1}^{(i)}, k_{\varphi x 2}^{(i)}, \dots, k_{\varphi x s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{D}_{\varphi y}^{(i)}] &= \text{diag}[d_{\varphi y 1}^{(i)}, d_{\varphi y 2}^{(i)}, \dots, d_{\varphi y s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{K}_{\varphi y}^{(i)}] &= \text{diag}[k_{\varphi y 1}^{(i)}, k_{\varphi y 2}^{(i)}, \dots, k_{\varphi y s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{D}_{\varphi\varphi}^{(i)}] &= \text{diag}[d_{\varphi\varphi 1}^{(i)}, d_{\varphi\varphi 2}^{(i)}, \dots, d_{\varphi\varphi s_i}^{(i)}] \\ [\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{(i)}] &= \text{diag}[k_{\varphi\varphi 1}^{(i)}, k_{\varphi\varphi 2}^{(i)}, \dots, k_{\varphi\varphi s_i}^{(i)}] \\ \{\varphi^{(i)}\} &= \{\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \dots, \varphi_{s_i}^{(i)}\}^T \\ &i = 1, 2, \dots, l (l \text{ 为轴承数}) \end{aligned} \right\} \quad (4-63)$$

式中  $J_m^{(i)}$ ——第*i*个轴承第*m*块瓦绕支点的转动惯量;  
 $d_{x\varphi m}^{(i)}$ ——第*i*个轴承第*m*块瓦的系数 $d_{x\varphi}$ ,其他类同,表达式  
 见式(1-33)、式(1-37)和式(1-39);  
 $\varphi_m^{(i)}$ ——第*i*个轴承第*m*块瓦的动态摆角;  
 下角标“*si*”——第*i*个可倾瓦轴承的瓦块数。

比较式(4-56)、式(4-61)看到,可倾瓦轴承转子系统的质量、阻尼和刚度矩阵,比固定瓦轴承系统多了一块与瓦块动态摆角 $\varphi$ 有关的分块矩阵。与瓦块摆角无关的分块矩阵是不变的。但要引起注意的是,可倾瓦轴承的矩阵 $[\mathbf{K}_B]$ 、 $[\mathbf{D}_B]$ 的元素是相对坐标系下的动特性即相对动特性系数。

## 4.5 转子 - 轴承 - 基础系统的运动方程

在前两节中,建立多支承多圆盘系统的运动方程时,都认为基础是绝对刚性的。随着生产的发展,大型旋转机械的功率越来越大,从而导致转子越来越细长,基础也更加柔性化。为了更好地了解旋转机械的动态性能,必须将转子 - 轴承 - 基础作为一个整体来研究。本节仅简单介绍目前常用的分析方法——固定界面模态综合法。更为详细的分析与计算请参考文献[4]。

### 1. 模态综合法的基本思想

图 4 - 7 是转子 - 轴承 - 基础系统的示意图,转子支承在油膜轴承上,轴承则支承在柔性基础上。

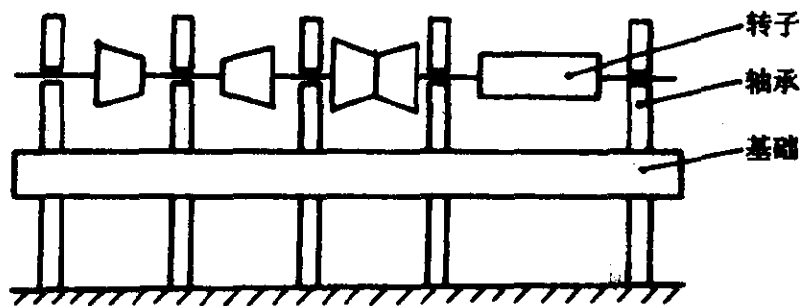


图 4 - 7 转子 - 轴承 - 基础系统

为了建立系统的运动方程,先将图 4 - 7 所示的系统按自然结构的形式划分成转子和基础两个子结构。设转子为子结构 1,基础为子结构 2,将轴承处理为弹性联接件<sup>[5]</sup>。上述两个子结构通过油膜轴承耦合成整个系统。模态综合法的主要思想是先对每个子结构进行模态分析,然后采用模态综合技术将转子 - 轴承 - 基础综合为一个整体。在综合的过程中,大幅度地缩减系统的自由度。从而将一个具有很多自由度的系统简化成一个自由度较少的力学系统,只需很少的机时和存储空间就可以计算整个转子 - 轴承 - 基础



系统的动力学特性,并且具有较高的精度。

## 2. 分析方法

方程(4-51)是系统的运动方程,但由于尚未给出油膜力增量 $\{\Delta f\}$ 的表达式,故它还不是运动方程的最终形式。式(4-51)等号右边的第二项是不平衡引起的不平衡激振力,分析稳定性时不用考虑它的影响。假设不考虑交叉刚度的影响,那么由式(4-51)可得转子作自由振动的方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{II}^{(1)} & \\ & \mathbf{M}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_I^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_B^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{II}^{(1)} & \\ & \mathbf{R}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_I \\ \dot{\mathbf{q}}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(1)} & \mathbf{K}_{IB}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{BI}^{(1)} & \mathbf{K}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I^{(1)} \\ \mathbf{q}_B^{(1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (4-64)$$

式中 $[\mathbf{K}_{II}^{(1)}]$ 就是式(4-51)中的 $[\mathbf{K}''_{II}]$ ,但为了书写方便,略去了上角标“''”,并加上角标“(1)”表示子结构1。 $\{\Delta f\}$ 是子结构2通过滑动轴承施加给子结构1的耦合力矢量,将它记为 $\{f_{12}\}$ 。为了下面的分析更具一般性,认为质量矩阵 $[\mathbf{M}]$ 和外部阻尼矩阵 $[\mathbf{R}]$ 不是对角阵,而是一般的实对称满阵,并将外部阻尼矩阵 $[\mathbf{R}]$ 记为 $[\mathbf{D}]$ 。这样式(4-64)可改写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{II}^{(1)} & \mathbf{M}_{IB}^{(1)} \\ \mathbf{M}_{BI}^{(1)} & \mathbf{M}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_I^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_B^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{II}^{(1)} & \mathbf{D}_{IB}^{(1)} \\ \mathbf{D}_{BI}^{(1)} & \mathbf{D}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_I^{(1)} \\ \dot{\mathbf{q}}_B^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(1)} & \mathbf{K}_{IB}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{BI}^{(1)} & \mathbf{K}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I^{(1)} \\ \mathbf{q}_B^{(1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{12} \end{Bmatrix} \quad (4-65)$$

同理,基础作自由振动的方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{II}^{(2)} & \mathbf{M}_{IB}^{(2)} \\ \mathbf{M}_{BI}^{(2)} & \mathbf{M}_{BB}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_I^{(2)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_B^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{II}^{(2)} & \mathbf{D}_{IB}^{(2)} \\ \mathbf{D}_{BI}^{(2)} & \mathbf{D}_{BB}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_I^{(2)} \\ \dot{\mathbf{q}}_B^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(2)} & \mathbf{K}_{IB}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{BI}^{(2)} & \mathbf{K}_{BB}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I^{(2)} \\ \mathbf{q}_B^{(2)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{21} \end{Bmatrix} \quad (4-66)$$

式中 上角标“(2)” —— 子结构2;

$\{f_{21}\} = -\{f_{12}\}$  —— 子结构1通过滑动轴承施加给子结构2的耦合力矢量。

在式(4-65)中令 $\{q_B^{(1)}\} = \{0\}$ ,且不考虑阻尼项,根据式(4-65)的上半部分得

$$[M_{II}^{(1)}]\{\bar{q}_I^{(1)}\} + [K_{II}^{(1)}]\{q_I^{(1)}\} = \{0\} \quad (4-67)$$

与上式相应的特征值问题是

$$(-\omega_i^{(1)2}[M_{II}^{(1)}] + [K_{II}^{(1)}])\{\phi_{II}^{(1)}\} = \{0\} \quad (4-68)$$

式中  $\omega_i^{(1)2}$  —— 子结构 1 的第  $i$  阶特征值;

$\{\phi_{II}^{(1)}\}$  —— 与  $\omega_i^{(1)2}$  相应的特征向量。

设子结构 1 共有  $t_1$  个内结点,由于水平方向和垂直方向的振动耦合在一起。因此式(4-68)中矩阵的阶数为  $2t_1$ ,共有  $2t_1$  个特征值  $\omega_i^{(1)2}$  和相应的  $2t_1$  个特征向量 $\{\phi_{II}^{(1)}\}$ 。用模态综合法建立系统的运动方程,并不需要将这  $2t_1$  个特征值以及相应的特征向量都求出来,而只需计算在某一感兴趣的范围内 $(0, \omega_{\max}^{(1)2})$ 的特征值与特征向量。假设在 $(0, \omega_{\max}^{(1)2})$ 范围内式(4-68)共有  $s_1$  个特征值与相应的特征向量,由这  $s_1$  个特征向量组成的模态矩阵记为 $[\Phi_I^{(1)}]$ ,其表达式为

$$[\Phi_I^{(1)}] = [\phi_{I1}^{(1)}, \phi_{I2}^{(1)}, \dots, \phi_{Is_1}^{(1)}] \quad (4-69)$$

$[\Phi_I^{(1)}]$ 就是子结构 1 的固定界面模态矩阵,其维数为  $2t_1 \times s_1$ 。

假设 $[\Phi_I^{(1)}]$ 已正则化(正则模态振型的概念请参考 6.6 节),则有

$$\left. \begin{aligned} [\Phi_I^{(1)T}][M_{II}^{(1)}][\Phi_I^{(1)}] &= [I] \\ [\Phi_I^{(1)T}][K_{II}^{(1)}][\Phi_I^{(1)}] &= \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{s_1}^2]^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (4-70)$$

在式(4-65)中用单位矩阵 $[I]$ 代替 $\{q_B^{(1)}\}$ ,用 $[\Phi_B^{(1)}]$ 代替 $\{q_I^{(1)}\}$ ,不考虑惯性项和阻尼项,根据式(4-65)的上半部分得

$$[K_{II}^{(1)}][\Phi_B^{(1)}] + [K_{IB}^{(1)}] = [0] \quad (4-71)$$

由上式得

$$[\Phi_B^{(1)}] = -[K_{II}^{(1)}]^{-1}[K_{IB}^{(1)}] \quad (4-72)$$

$[\Phi_B^{(1)}]$ 称为子结构 1 的约束模态矩阵,其维数为  $2t_1 \times 2l_1$  ( $l_1$  为子结构 1 的外结点数)。

在方程(4-65)中引入下述坐标变换

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I^{(1)} \\ \mathbf{q}_B^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_I^{(1)} & \Phi_B^{(1)} \\ & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_I^{(1)} \\ \dot{\mathbf{q}}_B^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4-73)$$

式中  $\{\eta_I^{(1)}\}$  —— 与  $\{\mathbf{q}_I^{(1)}\}$  对应的正则坐标。

将上式代入式(4-65)中然后再用  $\begin{bmatrix} \Phi_I^{(1)} & \Phi_B^{(1)} \\ & I \end{bmatrix}^T$  左乘式

(4-65)得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & M_{12}^{(1)} \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_I^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_B^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^{(1)} & D_{12}^{(1)} \\ D_{21}^{(1)} & D_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_I^{(1)} \\ \dot{\mathbf{q}}_B^{(1)} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & \\ & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_I^{(1)} \\ \mathbf{q}_B^{(1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{12} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-74)$$

式中

$$\begin{aligned} [M_{12}^{(1)}] &= [\Phi_I^{(1)}]^T [M_{II}^{(1)}] [\Phi_B^{(1)}] + [\Phi_I^{(1)}]^T [M_{IB}^{(1)}] \\ [M_{21}^{(1)}] &= [M_{12}^{(1)}]^T \\ [M_{22}^{(1)}] &= [\Phi_B^{(1)}]^T [M_{BB}^{(1)}] [\Phi_B^{(1)}] + [\Phi_B^{(1)}]^T [M_{IB}^{(1)}] \\ &+ [M_{BI}^{(1)}] [\Phi_B^{(1)}] + [M_{BB}^{(1)}] \\ [D_{11}^{(1)}] &= [\Phi_I^{(1)}]^T [D_{II}^{(1)}] [\Phi_I^{(1)}] \\ [D_{12}^{(1)}] &= [\Phi_I^{(1)}]^T [D_{II}^{(1)}] [\Phi_B^{(1)}] + [\Phi_I^{(1)}]^T [D_{IB}^{(1)}] \\ [D_{21}^{(1)}] &= [\Phi_B^{(1)}]^T [D_{II}^{(1)}] [\Phi_I^{(1)}] + [D_{BI}^{(1)}] [\Phi_I^{(1)}] \\ [D_{22}^{(1)}] &= [\Phi_B^{(1)}]^T [D_{II}^{(1)}] [\Phi_B^{(1)}] + [\Phi_B^{(1)}]^T [D_{IB}^{(1)}] \\ &+ [D_{BI}^{(1)}] [\Phi_B^{(1)}] + [D_{BB}^{(1)}] \\ [K_{11}^{(1)}] &= \text{diag}[\omega_1^{(1)2}, \omega_2^{(1)2}, \dots, \omega_{s1}^{(1)2}] \\ [K_{22}^{(1)}] &= [K_{IB}^{(1)}] [\Phi_B^{(1)}] + [K_{BB}^{(1)}] \end{aligned} \quad (4-75)$$

类似地,我们可以得到子结构2的固定界面模态矩阵  $[\Phi_I^{(2)}]$  和约束模态矩阵  $[\Phi_B^{(2)}]$  为

$$\begin{aligned} [\Phi_I^{(2)}] &= [\phi_{I1}^{(2)}, \phi_{I2}^{(2)}, \dots, \phi_{Is2}^{(2)}] \\ [\Phi_B^{(2)}] &= - [K_{II}^{(2)}]^{-1} [K_{IB}^{(2)}] \end{aligned} \quad (4-76)$$

其中  $\{\phi_{II}^{(2)}\}$  是方程

$$(-\omega_i^{(2)2} [M_{II}^{(2)}] + [K_{II}^{(2)}]) \{\phi_{II}^{(2)}\} = \{0\} \quad (4-77)$$

在  $(0, \omega_{\max}^{(2)})$  范围内的特征向量,  $s_2$  为此范围内特征值的个数。矩阵  $[\Phi_I^{(2)}]$ 、 $[\Phi_B^{(2)}]$  的维数分别为  $2t_2 \times s_2$  和  $2t_2 \times 2l_1$ , 其中  $t_2$  是子结构 2 的内结点数。

在式(4-66)中引入下述坐标变换

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I^{(2)} \\ \mathbf{q}_B^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_I^{(2)} & \Phi_B^{(2)} \\ & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_I^{(2)} \\ \mathbf{q}_B^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4-78)$$

类似地式(4-66)可改写成

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & M_{12}^{(2)} \\ M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_I^{(2)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_B^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^{(2)} & D_{12}^{(2)} \\ D_{21}^{(2)} & D_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_I^{(2)} \\ \dot{\mathbf{q}}_B^{(2)} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & \\ & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_I^{(2)} \\ \mathbf{q}_B^{(2)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{21} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-79)$$

式中各分块矩阵的表达式和式(4-75)相似, 只要将上角标“(1)”改为“(2)”并将下角标“ $s_1$ ”改为“ $s_2$ ”就可以。

### 3. 轴承油膜力增量的表达式

设子结构 1(即转轴)第  $i$  个外结点的位移分别是  $x_{Bi}^{(1)}$ ,  $y_{Bi}^{(1)}$ , 子结构 2 的第  $i$  个外结点的位移分别是  $x_{Bi}^{(2)}$ ,  $y_{Bi}^{(2)}$ , 如图 4-8 所示。轴承总是装在基础上, 运动后由于柔性基础的影响, 轴承与基础一同发生变形。轴颈相对于轴承的位移就是子结构 1 相对于子结构 2 的位移, 即水平和垂直位移分别为  $x_{Bi}^{(1)} - x_{Bi}^{(2)}$ 、 $y_{Bi}^{(1)} - y_{Bi}^{(2)}$ 。

因此, 考虑了基础的弹性后, 耦合力即油膜力增量可表示为

$$\{\mathbf{f}_{12}\} = [\mathbf{K}_B]\{\mathbf{q}_B^{(1)} - \mathbf{q}_B^{(2)}\} + [\mathbf{D}_B]\{\dot{\mathbf{q}}_B^{(1)} - \dot{\mathbf{q}}_B^{(2)}\} \quad (4-80)$$

$$\{\mathbf{f}_{21}\} = -([\mathbf{K}_B]\{\mathbf{q}_B^{(1)} - \mathbf{q}_B^{(2)}\} + [\mathbf{D}_B]\{\dot{\mathbf{q}}_B^{(1)} - \dot{\mathbf{q}}_B^{(2)}\}) \quad (4-81)$$

### 4. 综合

将式(4-80)、式(4-81)分别代入式(4-74)和式(4-79)得

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\xi}\} + [\mathbf{D}]\{\dot{\xi}\} + [\mathbf{K}]\{\xi\} = \{0\} \quad (4-82)$$

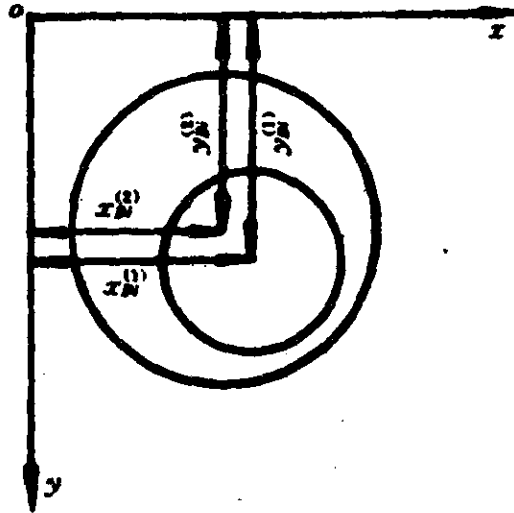


图 4-8 子结构 1 与 2 的相对位移

式中

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} I & 0 & M_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & I & 0 & M_{12}^{(2)} \\ M_{21}^{(1)} & 0 & M_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & M_{21}^{(2)} & 0 & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \\
 [D] &= \begin{bmatrix} D_{11}^{(1)} & 0 & D_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & D_{11}^{(2)} & 0 & D_{12}^{(2)} \\ D_{21}^{(1)} & 0 & D_{22}^{(1)} + D_B & -D_B \\ 0 & D_{21}^{(2)} & -D_B & D_{22}^{(2)} + D_B \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{22}^{(1)} + K_B & -K_B \\ 0 & 0 & -K_B & K_{22}^{(2)} + K_B \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\{\xi\} = \{\eta_1^{(1)T}, \eta_1^{(2)T}, q_B^{(1)T}, q_B^{(2)T}\}^T$  —— 模态坐标。

式(4-82)是系统在模态坐标 $\{\xi\}$ 下的运动方程,各矩阵的阶数均为 $s_1 + s_2 + 4l_1$ 。关于这一点,简单分析一下刚度矩阵 $[K]$ 的阶数就会一目了然。由式(4-75)不难发现,矩阵 $[K_{11}^{(1)}]$ 、 $[K_{11}^{(2)}]$ 的阶数分别为 $s_1$ 和 $s_2$ 。而矩阵 $[K_B]$ 的阶数为 $2l_1$ ,故总的刚度矩阵 $[K]$

的阶数为  $s_1 + s_2 + 4l_1$ 。

一般情况下  $s_1 \ll 2t_1, s_2 \ll 2t_2$ ，因此，一个原先维数为  $2n_1 + 2n_2$  ( $n_1, n_2$  为子结构 1 和子结构 2 的总圆盘数) 阶的二阶运动微分方程，经模态综合技术缩减后，变为一个维数仅为  $s_1 + s_2 + 4l_1$  的二阶微分方程。

## 4.6 多支承转子系统的负荷分配计算

### 1. 概述

在前面几节中，用传递矩阵法建立了以多个滑动轴承支承的转子系统的运动方程。在推导过程中，用八个线性化的刚度、阻尼系数表征滑动轴承的动力学行为。一般情况下，根据轴承承受的实际载荷，用插值的方法可以求得它的刚度、阻尼系数。如果讨论的轴系是一个以两个滑动轴承支承的转子系统，根据静力平衡的方法可以方便地求得每个轴承的支承反力即轴承承受的载荷。但是，很多大型旋转机械，其转子往往由多个滑动轴承支承，要计算这种轴系的轴承反力，就要计算静不定问题。

图 4-9(a) 是国产 200MW 汽轮发电机组轴系的结构简图，对于这样复杂的大型转子，制造时都是分成几个转子单独制造，然后用刚性联轴器将它们联成一体后支承在多个滑动轴承上。为了使各联轴器在额定工况下只承受很小的弯矩(理想情况下为不承受弯矩)，安装时各轴承的中心位置沿垂直方向的高度是不同的，这一安装高度称为轴系的静态标高，也称冷态标高。图 4-9(b) 就是图 4-9(a) 的标高曲线，其中曲线 1 是静态标高曲线。

由于滑动轴承油膜的弹性作用，转轴运转后转子轴线相对于静态标高曲线处于浮动状态。轴线的实际位置并不是静态标高曲线，而是偏离了一定的距离。在稳定工况下转子的轴线称为动态标高，如图 4-9(b) 中的曲线 2 所示。

### 2. 刚性支承下静不定连续梁的负荷分配计算

研究刚性支承下静不定连续梁的负荷分配的计算，常用的分

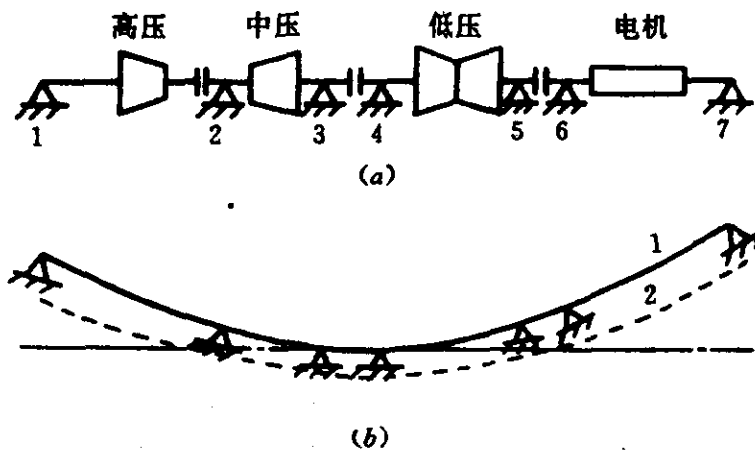


图 4-9 汽轮发电机组轴系结构简图

(a) 轴系简图; (b) 标高曲线。

1—静态标高曲线; 2—动态标高曲线。

析方法是三弯矩法<sup>[6]</sup>。国内已有很多学者采用这一分析方法<sup>[7]</sup>。为了读者更好地掌握这一节的内容并加深对 4.3 节的理解,这一节仍然采用传递矩阵法计算轴承的反力。

图 4-10 是一个多支承连续梁系统, 梁上的分布载荷  $q$  (N/m) 由转子的自重构成。由于不同的自然轴段上的等效质量直径  $d_m$  互不相同, 所以  $q$  的值也不相同, 但在同一自然轴段内  $q$  的值是不变的。因此  $q$  的分布成阶梯形。

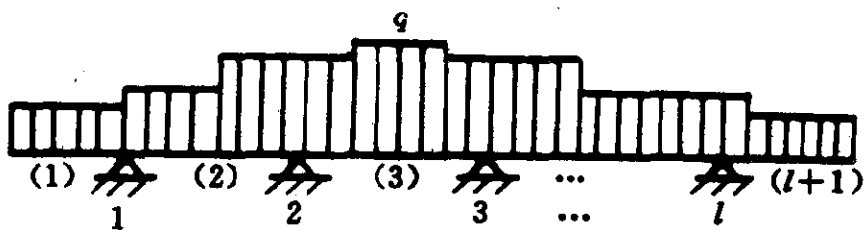


图 4-10 多支承连续梁系统

设图 4-10 的系统中共有  $l$  个轴承并认为轴承是刚性支承。从左至右轴承编号为  $1, 2, \dots, l$ 。轴承与轴承间的一段转子称为一

跨,对于大多数的旋转机械,在第一个轴承的左边以及最后一个轴承的右边都有一外伸轴段,这一外伸轴段也称为一跨。因此,一个具有 $l$ 个轴承的轴系共有 $l+1$ 跨,从左至右编号为(1),(2), $\dots$ ,( $l+1$ )。另外,将轴承中点及左、右两个端点分作一个结点,这样共有 $l+2$ 个结点,从左至右编号为 $0,1,2,\dots,l+1$ 。一般情况下,任一跨内的转子由一系列直径不等的自然轴段组成。下面我们以第 $j$ 跨为例,分析该跨左、右两个结点间状态向量的传递关系。

### (1) 梁上作用有分布载荷的传递矩阵法

设第 $j$ 跨内共有 $m$ 个自然轴段,从左至右重新编号为(1),(2), $\dots$ ,( $m$ ),有 $m+1$ 个自然节点,从左至右重新编号为 $0,1,\dots,m$ ,如图4-11所示。根据该图知有下面的对应关系

总体编号为 $j-1$ 的结点 = 第 $j$ 跨内局部编号为 $0$ 的自然节点;  
总体编号为 $j$ 的结点 = 第 $j$ 跨内局部编号为 $m$ 的自然节点。

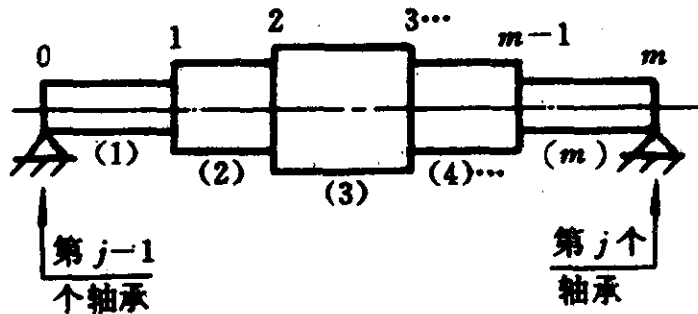


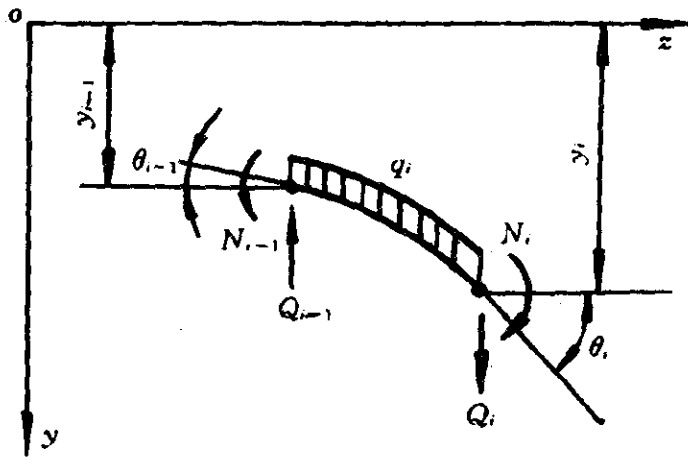
图4-11 第 $j$ 跨转子的局部编号

图4-12是第 $j$ 跨内任一自然轴段 $i$ 在 $yo_z$ 平面内的变形关系。在该轴段上作用有分布载荷 $q_i$ ,在 $i-1$ 截面上作用有剪力 $Q_{i-1}$ 和弯矩 $N_{i-1}$ ,在 $i$ 截面上作用有剪力 $Q_i$ 及弯矩 $N_i$ 。图4-12中的自然轴段是一个真实的自然轴段,而4.3节中图4-5的自然轴段是一个被简化成没有质量的理想自然轴段。

根据图4-12的力平衡关系得

$$\left. \begin{aligned} N_i &= N_{i-1} - Q_{i-1}l_i + q_i l_i^2 / 2 \\ Q_i &= Q_{i-1} - q_i l_i \end{aligned} \right\} \quad (4-83)$$



图 4-12 第  $i$  个自然轴段的变形关系

为了建立截面  $i$  与  $i-1$  间的变形关系,作截面  $i-1$  的垂线  $AB$  并与  $i-1$  点处的轴线相切。截面  $i$  相对于  $AB$  的变形与图 4-13 所示的悬臂梁完全一样,根据参考文献[3]有

$$\left. \begin{aligned} y &= N_i l_i^2 / (2EJ_i) + Q_i l_i^3 / (3EJ_i) + q_i l_i^4 / (8EJ_i) \\ \theta &= N_i l_i / (EJ_i) + Q_i l_i^2 / (2EJ_i) + q_i l_i^3 / (6EJ_i) \end{aligned} \right\} \quad (4-84)$$

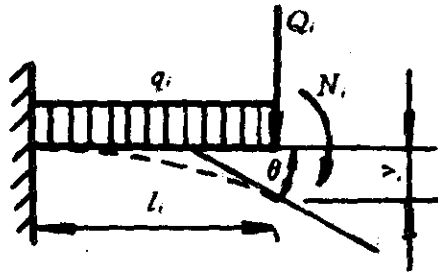


图 4-13 悬臂梁的变形关系

根据图 4-12 有下列几何关系

$$\left. \begin{aligned} y_i - y_{i-1} - \theta_{i-1} l_i &= N_i l_i^2 / (2EJ_i) + Q_i l_i^3 / (3EJ_i) + q_i l_i^4 / (8EJ_i) \\ \theta_i - \theta_{i-1} &= N_i l_i / (EJ_i) + Q_i l_i^2 / (2EJ_i) + q_i l_i^3 / (6EJ_i) \end{aligned} \right\} \quad (4-85)$$

将式(4-83)的关系代入上式得

$$\left. \begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \theta_{i-1}l_i + \frac{N_{i-1}l_i^2}{2EJ_i} - \frac{Q_{i-1}l_i^3}{6EJ_i} + \frac{q_i l_i^4}{24EJ_i} \\ \theta_i &= \theta_{i-1} + \frac{N_{i-1}l_i}{EJ_i} - \frac{Q_{i-1}l_i^2}{2EJ_i} + \frac{q_i l_i^3}{6EJ_i} \end{aligned} \right\} \quad (4-86)$$

将式(4-86)与式(4-83)结合在一起并写成矩阵的形式有

$$\{Z\}_i = [A]_i \{Z\}_{i-1} + \{P\}_i \quad (4-87)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \{Z\}_i &= \{y, \theta, N, Q\}_i^T \\ \{P\}_i &= q_i \{l^4/(24EJ), l^3/(6EJ), l^2/2, -l\}_i^T \\ [A]_i &= \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/(2EJ) & -l^3/(6EJ) \\ 0 & 1 & l/(EJ) & -l^2/(2EJ) \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \end{aligned} \right\} \quad (4-88)$$

式(4-87)是轴段上作用有分布载荷  $q_i$  时节点  $i$  与  $i-1$  之间的传递关系。和式(4-7)相比,式(4-87)多了等号右边的第二项  $\{P\}_i$ , 其原因是图 4-5 的轴段是不计质量的理想自然轴段, 而图 4-13 的轴段则是考虑了质量的实际轴段。

由式(4-87)得

$$\begin{aligned} \{Z\}_m &= [A]_m \{Z\}_{m-1} + \{P\}_m \\ &= [A]_m ([A]_{m-1} \{Z\}_{m-2} + \{P\}_{m-1}) + \{P\}_m \\ &= [A]_m [A]_{m-1} \{Z\}_{m-2} + [A]_m \{P\}_{m-1} + \{P\}_m \end{aligned} \quad (4-89)$$

不难发现, 上式可进一步表示成

$$\{Z\}_m = [H] \{Z\}_0 + \{B\} \quad (4-90)$$

$$\left. \begin{aligned} [H] &= [A]_m [A]_{m-1} \cdots [A]_2 [A]_1 \\ \{B\} &= \{P\}_m + [A]_m \{P\}_{m-1} + [A]_m [A]_{m-1} \{P\}_{m-2} \\ &\quad + \cdots + [A]_m [A]_{m-1} \cdots [A]_2 \{P\}_1 \end{aligned} \right\} \quad (4-91)$$

根据图 4-11 有

$$\left. \begin{aligned} \{Z\}_0 &= \{Z\}_{j-1}^R \\ \{Z\}_m &= \{Z\}_j^L \end{aligned} \right\} \quad (4-92)$$

上式是局部节点状态向量与总体结点状态向量的对应关系,将它代入式(4-90)有

$$\{Z\}_j^L = [H]_j \{Z\}_{j-1}^R + \{B\}_j \quad (4-93)$$

式中矩阵  $[H]_j$  和矢量  $\{B\}_j$  的下角标“ $j$ ”表示第  $j$  跨的矩阵  $[H]$  和矢量  $\{B\}$ , 其表达式为式(4-91)。状态向量  $\{Z\}_j$  的下角标“ $j$ ”表示第  $j$  个结点。

式(4-93)是第  $j$  跨的右结点  $j$  与左结点  $j-1$  之间的传递关系,其具体表达式如下

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_j^L = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ 0 & 1 & h_{23} & h_{24} \\ 0 & 0 & 1 & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}_j \quad (4-94)$$

式中  $h_{34} = -h_{12}$

$$h_{13} - h_{24} = h_{12}h_{23}$$

将式(4-94)分成上下两块得

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j^L = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1}^R + \begin{bmatrix} h_{13} & h_{14} \\ h_{23} & h_{24} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}_j \quad (4-95)$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^L = \begin{bmatrix} 1 & h_{34} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R + \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}_j \quad (4-96)$$

由于  $y_j^L = y_j^R = y_j$ ;  $\theta_j^L = \theta_j^R = \theta_j$ 。因此式(4-95)可改写为

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} h_{13} & h_{14} \\ h_{23} & h_{24} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}_j \quad (4-97)$$

令

$$\begin{bmatrix} h_{13} & h_{14} \\ h_{23} & h_{24} \end{bmatrix}_j^{-1} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_j \quad (4-98)$$

式中  $e_{mn} (m, n = 1, 2)$  的表达式同式(4-17)。

将上式代入式(4-97)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{j-1}^R &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1} \\ &\quad - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}_j \end{aligned} \quad (4-99)$$

式中  $b_{mN} (m, n = 1, 2)$  的表达式同式(4-17)。

令  $j = j + 1$  并代入式(4-99)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_{j+1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j+1} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{j+1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j \\ &\quad - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}_j \end{aligned} \quad (4-100)$$

将式(4-99)代入式(4-96)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^L &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j - \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1} + \begin{Bmatrix} b_5 \\ b_6 \end{Bmatrix}_j \end{aligned} \quad (4-101)$$

$$\text{式中 } \begin{Bmatrix} b_5 \\ b_6 \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}_j - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}_j ;$$

$s_{mn}$ ——表达式同式(4-20),  $m, n = 1, 2$ ;

$g_{mn}$ ——表达式同式(4-20),  $m, n = 1, 2$ 。

式(4-100)、式(4-101)说明,第  $j$  个结点所在截面上的左、右两个广义力矢量仅与结点的位移有关。

## (2) 负荷分配的计算

图4-14是总体编号为  $j$  的结点即第  $j$  个轴承处的受力简图,  $W_j$  表示第  $j$  个轴承施加给轴的反力即轴施加给轴承的载荷。

根据力平衡关系有

$$\left. \begin{aligned} N_j^R &= N_j^L \\ Q_j^R &= Q_j^L + W_j \end{aligned} \right\} \quad (4-102)$$

将上式写成向量的形式有

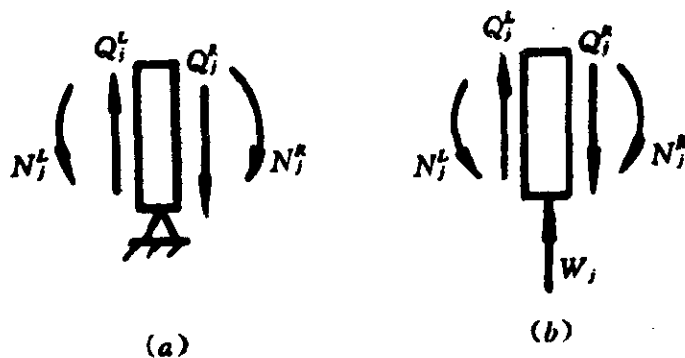


图 4-14 轴承处圆盘的受力分析

(a) 实际结构; (b) 受力简图。

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^L - \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_j^R = - \begin{Bmatrix} 0 \\ W \end{Bmatrix}_j \quad (4-103)$$

将式(4-100)、式(4-101)代入上式得

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j-1} + \left[ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{j+1} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_j \right] \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_j \\ & - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_{j+1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{j+1} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ W \end{Bmatrix}_j - \begin{Bmatrix} f \\ s \end{Bmatrix}_j \end{aligned} \quad (4-104)$$

式中

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} f \\ s \end{Bmatrix}_j &= \begin{Bmatrix} b_5 \\ b_6 \end{Bmatrix}_j + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_{j+1} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}_{j+1}; \\ j &= 2, 3, \dots, l-1. \end{aligned} \right\} \quad (4-105)$$

式(4-104)是结点  $2, 3, \dots, l-1$  满足的方程。对于结点 1 和  $l$  来说,要利用边界条件确定它们满足的关系。对于边界结点 0 和  $l+1$ ,其边界条件为

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_0^R = \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_{l+1}^L = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-106)$$

将边界条件式(4-106)代入式(4-96)得

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_1^L = \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}_1 \quad (4-107)$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_l^R = - \begin{bmatrix} 1 & -h_{34} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{l+1} \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}_{l+1} \quad (4-108)$$

在式(4-100)中令  $j=1$  并和式(4-107)一起代入式(4-103)得到结点1满足下列关系

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_2 = - \begin{Bmatrix} 0 \\ W \end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix} f \\ s \end{Bmatrix}_1 \quad (4-109)$$

式中

$$\begin{Bmatrix} f \\ s \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}_2 \quad (4-110)$$

在式(4-101)中令  $j=l$  并和式(4-108)一起代入式(4-103)得到结点  $l$  满足的关系为

$$- \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}_l \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_{l-1} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_l \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_l = - \begin{Bmatrix} 0 \\ W \end{Bmatrix}_l - \begin{Bmatrix} f \\ s \end{Bmatrix}_l \quad (4-111)$$

式中

$$\begin{Bmatrix} f \\ s \end{Bmatrix}_l = \begin{Bmatrix} b_5 \\ b_6 \end{Bmatrix}_l + \begin{bmatrix} 1 & -h_{34} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{l+1} \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}_{l+1} \quad (4-112)$$

式(4-109)、式(4-104)和式(4-111)是结点  $1, 2, \dots, l$  的位移与轴承反力之间的关系, 将这三式结合在一起可得如下的两个矩阵方程

$$[K_{11}]\{Y\} + [K_{12}]\{\theta\} = -\{W\} - \{S\} \quad (4-113)$$

$$[K_{21}]\{Y\} + [K_{22}]\{\theta\} = -\{F\} \quad (4-114)$$

式中  $\{Y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_l\}^T$ ;

$\{\theta\} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l\}^T$ ;

$\{W\} = \{W_1, W_2, \dots, W_l\}^T$ ;

$\{S\} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}^T$ ;

$\{F\} = \{f_1, f_2, \dots, f_l\}^T$ ;

$[K_{ij}]$ ——表达式与式(4-34)~式(4-37)类似, 只要

将上角标的  $n$  改为  $l + 1, i, j = 1, 2$ 。

由式(4-114)得

$$\{\theta\} = -[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{Y\} - [K_{22}]^{-1}\{F\} \quad (4-115)$$

将上式代入式(4-113)得

$$\{W\} = [T]\{F\} - \{S\} - [K]\{Y\} \quad (4-116)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [T] &= [K_{12}][K_{22}]^{-1} \\ [K] &= [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \end{aligned} \right\} \quad (4-117)$$

式(4-116)是刚性支承连续梁负荷分配的计算公式。等式的左边是支承反力矢量  $\{W\}$ ，其第  $i$  个分量  $W_i$  是第  $i$  个轴承的反力。等式右边的矢量  $\{Y\}$  的第  $i$  个元素  $y_i$  是第  $i$  个轴承的静态标高， $z$  轴以上的标高为负， $z$  轴以下为正。在 4.3 节中，式(4-39)、式(4-40)中的力矢量  $\{P_x\}$ 、 $\{P_y\}$  没有计入轴段的质量，相应的  $z$  轴是静平衡时转子的轴线。而在这一节中，我们要讨论的正是由于轴的质量引起的每个轴承的反力，在建立式(4-87)式时计入了轴段质量的影响。因此，在这一节中  $z$  轴应理解为水平零线，每个轴承的标高是轴颈中心偏离水平零线的垂直位移。

### 3. 以多个滑动轴承支承的转子系统的负荷分配

当轴承是刚性支承时，可以用式(4-116)计算各轴承的反力。如果支承轴承是滑动轴承但轴并不旋转，此时可以认为滑动轴承是刚性支承，根据每个轴承的静态标高可以求得支承反力。但是，当轴旋转后，滑动轴承中充满了油膜，随着转速的增加，轴颈中心沿图 1-8 所示的静平衡轨迹曲线上升。当转速稳定后，各轴颈中心处在各自的静平衡位置上。

由于轴承中的油膜，轴承变成了弹性支承，而且是非线性的。转轴始终浮动在轴承油膜上，在任一稳态工况下，转子的轴线相对于静态标高曲线偏离了一定的距离。由于这一原因，各轴承的反力与刚性支承下的反力有较大的差别。

在图 4-15 中示出了三个轴承稳态运行时标高的变化情况。图中的外圆表示从  $z$  轴方向看到的轴承，其中心在静态标高曲线

上；内圆表示轴颈，其中心在动态标高曲线上。以中间的轴承为例，设稳态运行时该轴承的偏心率与偏位角分别为  $\epsilon_i$  和  $\theta_i$ 。又设静态标高和半径间隙分别是  $h_i$  和  $C_i$ ，由图 4—15 可得其动态标高  $y_i$  为

$$y_i = h_i + C_i \epsilon_i \cos \theta_i \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (4-118)$$

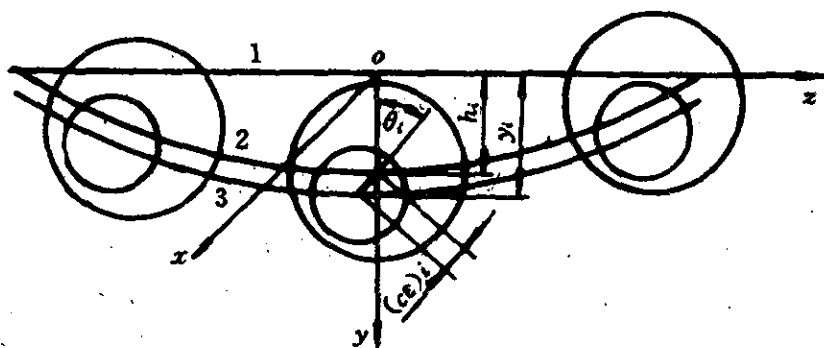


图 4—15 轴承稳态运行标高变化示意图

1—水平零线；2—静态标高；3—动态标高。

上式是动态标高的计算公式。式中的  $\epsilon_i$ 、 $\theta_i$  是静平衡时轴承的偏心率和偏位角，其值预先是不知道的，计算时要预先假定。如果轴承的静平衡位置即  $\epsilon_i$ 、 $\theta_i$  假设正确，那么按式(4—118)得到的便是轴承的真实动态标高。在这一动态标高下，每个轴承都工作在各自的静平衡位置上。只要系统没有受到外界干扰就一直处于稳态运行，任何一个轴承的工作位置都不会发生变化，转子中心线的位置保持不变。这种情况相当于转子又支承在刚性轴承上，其静态标高就是按式(4—118)得到的动态标高。将这一标高代入式(4—116)所得到载荷便是考虑了轴承油膜非线性弹性后每个轴承承受的实际载荷。这一载荷是转子施加给轴承的，它一定等于滑动轴承的油膜施加给转子的载荷。

但是，一般情况下假设的偏心率  $\epsilon_i$  与偏位角  $\theta_i$  并不是第  $i$  个轴承真正的静平衡位置，根据式(4—118)得到的  $y_i$  也不是第  $i$  个轴承真实的动态标高。因此，将由式(4—118)得到的  $y_i$  代入式(4—116)得到的载荷  $W_i$  并不等于此时轴承油膜施加给转轴的载荷。



为了得到作用在每个轴承上的真实载荷,一般要采用迭代算法,其迭代过程如下

- (1) 根据静态标高计算刚性支承下各轴承的反力并记为  $\{W^{(1)}\}$ ;
- (2) 根据各轴承的反力确定轴承的静平衡位置  $(\epsilon, \theta)$ ;
- (3) 根据轴承的平衡位置  $(\epsilon, \theta)$  以及静态标高  $h$  计算各轴承的动态标高  $y$ ;
- (4) 将得到的动态标高  $y$  再代入式(4-116),求得对应于这一动态标高下各轴承的反力  $\{W^{(2)}\}$ ;
- (5) 比较  $\{W^{(1)}\}$  与  $\{W^{(2)}\}$  的差别是否足够小。如果两者的差别较大,则令  $\{W^{(1)}\} = \{W^{(2)}\}$  并返回步骤(2),重复上述过程,直到两者的差别足够小为止。此时的  $\{W^{(1)}\}$  或  $\{W^{(2)}\}$  就是轴承的反力。

设第  $i$  个轴承前后相邻两次求得的反力分别是  $W_i^{(1)}$  和  $W_i^{(2)}$ ,本节采用的收敛精度判据为

$$\Delta W / W_{\Sigma} \leq \epsilon_0$$

式中 
$$\Delta W = \sum_{i=1}^l |W_i^{(1)} - W_i^{(2)}|;$$

$$W_{\Sigma} = \sum_{i=1}^l |W_i^{(2)}|;$$

$\epsilon_0$ ——给定的任意小量。

实践表明,上述迭代过程收敛很快,只要很少几次迭代就可以得到较准确的轴承反力。

#### 4. 计算示例

例 4-1:在图 4-16 中,一根等轴径的转子支承在三个轴承上。轴的直径  $d = 0.1\text{m}$ ,相邻支承间的跨距为  $1\text{m}$ ,左、右外伸端的长度为零。每个轴承的中心高度相同即处于零标高状态。假设轴承是刚性的,试计算每个轴承的反力。

解:选择这个算例,主要是为了和理论解进行比较,以便考证建立的算法和编制的程序。

取轴的密度  $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ ;

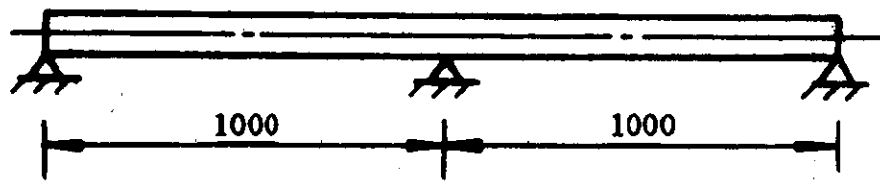


图 4-16 三支承静不定系统

材料的杨氏模量  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}$ ;

重力加速度  $g = 9.8 \text{m/s}^2$ ;

梁上作用的分布载荷  $q$  为

$$q = \pi d_m^2 \rho g / 4 = 600.36 \text{N/m}$$

各轴承反力的计算结果示于表 4-2 中。

表 4-2 轴承反力的计算结果

计算方法	轴承反力(N)		
	$W_1$	$W_2$	$W_3$
按材料力学得到的理论解	225.11	750.48	225.11
按本节的算法得到的数值解	225.11	750.48	225.11

由表 4-2 可以看到,这一节建立的刚性支承连续梁的负荷分配计算方法及编制的程序是正确的。

例 4-2:图 4-17 是一根等轴径的连续梁支承在四个滑动轴承上的静不定系统,各跨长度如图所示。轴的直径、密度  $\rho$  和杨氏模量  $E$  仍同例 4-1。四个轴承均为参数相同的圆柱轴承,其参数为

$$L/D = 0.5; \psi = 2.0\%; \eta = 0.0184 \text{N} \cdot \text{s/m}^2。$$

设各轴承的静态标高相同,试计算工作转速  $n = 3000 \text{r/min}$  时各轴承的反力。

解:为了进一步考证建立的算法与编制的程序,分别用本节提出的算法和参考文献[7]中提出的算法进行了对比计算,其结果示于表 4-3 中。

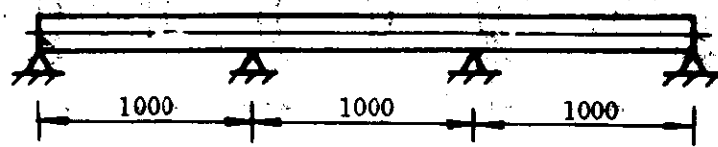


图 4-17 四支承静不定系统

表 4-3 轴承反力及动态标高的计算结果

轴承号 计算内容	本节的算法				参考文献[7]的算法			
	1	2	3	4	1	2	3	4
载荷(N)	250.1	650.5	650.5	250.1	250.1	650.5	650.5	250.1
偏心率 $\epsilon$	0.10	0.24	0.24	0.10	0.10	0.24	0.24	0.10
偏位角 $\theta(^{\circ})$	77.2	64.1	64.1	77.2	77.2	64.1	64.1	77.2
动态标高(mm)	0.02	0.10	0.10	0.02	0.02	0.10	0.10	0.02

表 4-3 说明,这一节建立的算法及编制的程序是正确有效的。

#### 4.7 稳定性计算示例

在这一章的前面几节,为计算多支承多圆盘轴系的稳定性奠定了理论基础。根据前面的理论推导,在 8.4 节中给出了作者近年来编制的并多次使用的稳定性计算程序,其使用说明详见第八章。下面应用这个程序计算两个算例。第一个算例比较简单,只有 7 个集总圆盘,其目的在于提供一组特征值的计算结果,便于读者考证程序;第二个算例比较复杂,转子被分成 25 个集总圆盘,共有 100 个特征值(不考虑陀螺力矩)。

例 4-3:将例 4-2 的转轴离散成如图 4-18 所示的带有 7 个集总圆盘的力学系统,其他参数同例 4-2。试计算该轴系在 3000r/min 时的特征值并判断系统是否稳定。

解:根据 8.4 节的程序要求,图 4-18 轴系的原始输入数据如表 4-4 所示。

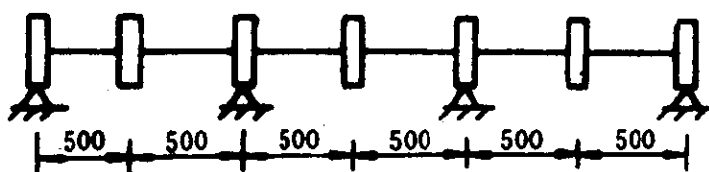


图 4-18 计算模型(例 1-3)

表 4-4 原始输入数据

1,8,4,7				
2.1E + 11,7800.0,9.8				
3000.0				
2,4,6,8				
.0000,	.0000,	.0000,	.0000	
.0000,	.1000,	.0000,	.1000	
.5000,	.1000,	.0000,	.1000	
.5000,	.1000,	.0000,	.1000	
.5000,	.1000,	.0000,	.1000	
.5000,	.1000,	.0000,	.1000	
.5000,	.1000,	.0000,	.1000	
.5000,	.1000,	.0000,	.1000	
.0000,	.1000,	.0000,	.1000	
.0020,	.0500,	.1000,	.0184	
7				
.0686,	.1000,	77.46		共 4 份
.1470,	.2000,	67.48		
.2470,	.3000,	60.08		
.3860,	.4000,	54.12		
.5990,	.5000,	48.18		
.9630,	.6000,	42.35		
1.6770,	.7000,	36.34		
2,2,2				
2,3,4,5,6,7,8				
.1170,	-.2818,	.7166,	.1157	共 4 份
.5530,	.1189,	.1083,	1.4290	
.2573,	-.3636,	.8583,	.2614	
.6692,	.2734,	.2020,	1.6980	
.4486,	-.3885,	1.1180,	.4755	
.8871,	.5103,	.5178,	2.1880	
.6378,	-.3997,	1.4990,	.8249	
.9640,	.6965,	.7407,	2.8800	
.9755,	-.3866,	2.2016,	1.7420	
1.2230,	1.0900,	1.0990,	4.1800	
1.5690,	-.3565,	3.5126,	3.5010	
1.6710,	1.8180,	1.8210,	6.7170	
2.6770,	-.0629,	6.5693,	8.1680	
2.3020,	3.1010,	3.1340,	12.250	

不考虑陀螺力矩时,带有 7 个集总圆盘的轴系共有 28 个特征值。在表 4-5 中,仅仅给出了 20 个复特征值。

表 4-5 无量纲特征值  $\lambda$

序号	$\text{Re}(\lambda)$	$\text{Im}(\lambda)$
1	$-0.10265e+00$	$0.52793e+00$
2	$-0.12394e+00$	$0.53142e+00$
3	$-0.24068e+00$	$0.59466e+00$
4	$-0.94123e+00$	$0.61831e+00$
5	$-0.77816e-01$	$0.40518e+01$
6	$-0.20387e+00$	$0.41019e+01$
7	$-0.55611e+00$	$0.51665e+01$
8	$-0.14527e+01$	$0.60341e+01$
9	$-0.11408e+01$	$0.73409e+01$
10	$-0.17115e+01$	$0.92309e+01$

由上表知道,所有特征值均有负实部,这表明在 3000r/min 时系统是稳定的。

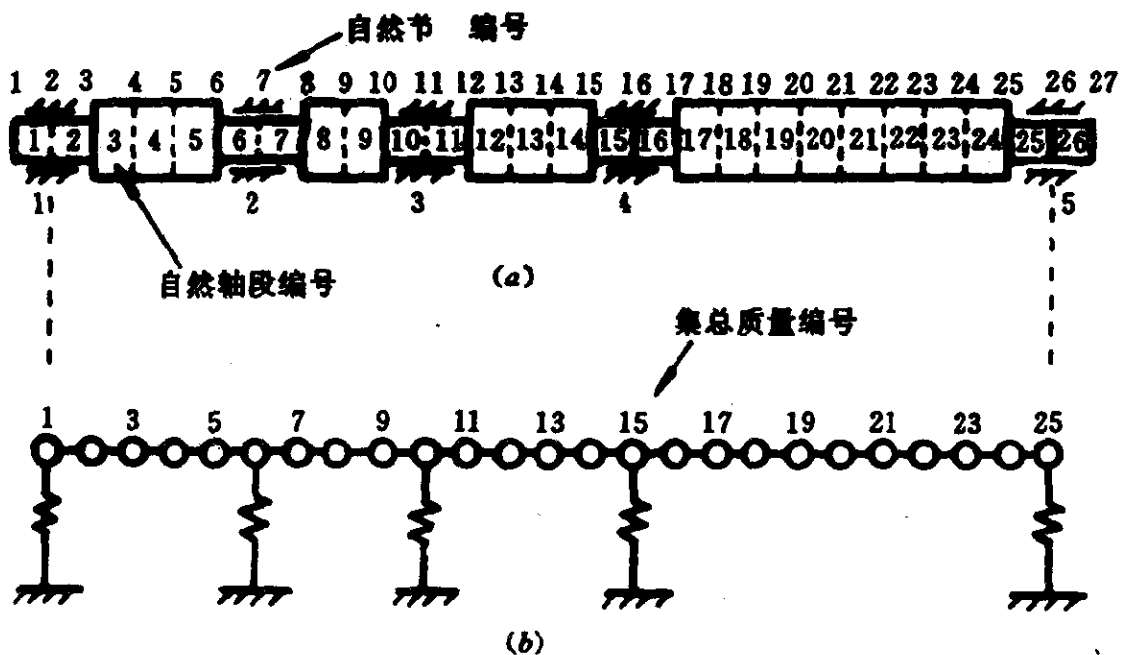


图 4-19 轴系示意图(例 4-4)

(a) 实际结构;(b) 简化模型。

表 4-6 转子各自然轴段的参数

$i^{①}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d_m = d_k(\text{m})$	0.06	0.06	0.12	0.12	0.12	0.06	0.06	0.12	0.12
$l(\text{m})$	0.05	0.30	0.43	0.47	0.40	0.25	0.25	0.33	0.37
$i$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$d_m = d_k(\text{m})$	0.06	0.06	0.12	0.12	0.12	0.10	0.10	0.25	0.25
$l(\text{m})$	0.25	0.35	0.43	0.47	0.40	0.35	0.40	0.40	0.43
$i$	19	20	21	22	23	24	25	26	
$d_m = d_k(\text{m})$	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.10	0.10	
$l(\text{m})$	0.38	0.45	0.34	0.44	0.33	0.44	0.40	0.10	

①  $i$  表示自然轴段号。

例 4-4: 一根总长为 9.21m 的转子支承在 5 个圆柱轴承上 (见图 4-19a)。图中 1~5 号轴承的静态安装标高分别是 0.001、0.0、0.0、0.0005 和 0.002m。转子被分成 26 个自然轴段, 各自然轴段的参数见表 4-6。轴承 1、2、3 =  $y-1$  轴承, 轴承 4、5 =  $y-2$  轴承, 其中  $y-1$ 、 $y-2$  轴承的参数见表 4-7。该转子轴承系统的工作转速为  $n = 3000\text{r/min}$ 。试计算该轴系的稳定性, 并判断轴系的设计参数是否合理。

表 4-7 两个  $2 \times 150^\circ$  圆柱轴承的参数

轴承	$L/D$	$D(\text{m})$	$\psi(\%)$	$\eta(\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2)$
$y^{①}-1$	0.5	0.06	2.0	0.0184
$y-2$	0.6	0.10	1.5	0.0184

①  $y$  表示圆柱轴承。

解: 取转轴的杨氏模量和密度分别为  $2.1 \times 10^{11}\text{N}/\text{m}^2$ 、 $7800\text{kg}/\text{m}^3$ , 重力加速度为  $g = 9.8\text{m}/\text{s}^2$ 。计算时转子离散成带有 25 个集总质量的简化计算模型 (见图 4-19b)。集总质量的位置与自然节点的对应关系见表 4-8。

表 4-8 集总质量与自然节点对应关系

集总质量编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
自然节点编号	2 <sup>①</sup>	3	4	5	6	7 <sup>①</sup>	8	9	10	11 <sup>①</sup>	12	13	14
集总质量编号	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
自然节点编号	15	16 <sup>①</sup>	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26 <sup>①</sup>	

① 轴承中央。

不考虑陀螺力矩时,带有 25 个集总质量的轴系共有 100 个特征值。给出所有的特征值是不必要的,因为轴系的稳定性往往由低阶特征值决定。所以在表 4-9 中,仅仅给出了主要的 4 阶特征值的信息。

表 4-9 4 阶特征值的信息

转速(r/min)	$\omega_1$	$\delta_1$	$\omega_2$	$\delta_2$	$\omega_3$	$\delta_3$	$\omega_4$	$\delta_4$
1500	1.04	0.31	1.12	0.06	2.43	1.01	2.53	0.09
1600	0.97	0.29	1.05	0.07	2.27	1.05	2.38	0.10
1700	0.91	0.26	0.98	0.07	2.12	1.10	2.23	0.11
1800	0.86	0.24	0.93	0.07	1.99	1.15	2.11	0.11
1900	0.81	0.21	0.88	0.08	1.86	1.21	2.00	0.12
2000	0.77	0.18	0.84	0.08	1.76	1.26	1.89	0.12
2100	0.73	0.16	0.80	0.08	1.66	1.31	1.81	0.13
2200	0.70	0.14	0.76	0.08	1.56	1.36	1.72	0.13
2300	0.67	0.12	0.73	0.08	1.47	1.41	1.65	0.14
2400	0.64	0.10	0.70	0.09	1.39	1.46	1.58	0.15
2500	0.62	0.08	0.67	0.09	1.31	1.50	1.52	0.15
2600	0.60	0.06	0.64	0.09	1.24	1.51	1.46	0.16
2700	0.57	0.04	0.62	0.09	1.17	1.51	1.40	0.16
2800	0.55	0.03	0.60	0.09	1.09	1.48	1.35	0.17
2900	0.53	0.01	0.58	0.10	1.04	1.43	1.30	0.17
3000	0.52	0.002	0.56	0.10	0.99	1.35	1.26	0.18
3100	0.50	-0.01	0.54	0.10	0.96	1.26	1.22	0.18
3200	0.49	-0.02	0.52	0.10	0.92	1.17	1.18	0.19
3300	0.47	-0.03	0.50	0.10	0.88	1.09	1.15	0.19

在上表中, $\omega_i$ 、 $\delta_i$ 分别表示第*i*个阶无量纲特征值的虚部(即无量纲涡动速度或称涡动比)以及相应的对数衰减率。该表说明,第

二阶和第四阶的对数衰减率总是随着转速的上升而增加,因此不会出实现部小于零的情况。第三阶特征值对应的对数衰减率  $\delta_3$  开始随转速的上升而增加,但当工作转速大于 2700r/min 后,  $\delta_3$  则不断下降。第一阶的对数衰减率  $\delta_1$  总是随转速的上升而下降,当转速达到 3100r/min 时  $\delta_1 < 0$ , 系统已经失稳。根据表中的数据,插值求得失稳转速为  $n_s \approx 3010$ r/min。在额定工作转速 3000r/min 下系统的对数衰减率  $\delta$  仅为 0.0001。

由于轴系的失稳转速非常接近工作转速,而且在额定工作转速下的对数衰减率  $\delta$  偏小。根据对数衰减率判据或失稳转速判据知道,该轴系的稳定性裕度偏低,该轴系的设计参数是不合理的。

此外,根据第一阶涡动速度  $\omega_1$  知道,在稳定性界限状态下的涡动频率约为

$$0.52 \times 3010/60 = 26.1\text{Hz}$$

该转子的一阶临界频率约为 28.0Hz(临界转速的计算参见 6.7 节)。由此可以看出,失稳时的涡动频率与转子的一临界频率非常接近。一旦轴系发生油膜失稳,很可能会迅速发展成为油膜振荡。

#### 4.8 转子涡动时的模态振型

当整个轴系以某一阶主振动涡动时,根据式(3-66)知道转轴上任意两点的复数位移  $\rho$  为

$$\left. \begin{aligned} \rho_m &= \rho_+^{(m)} e^{j\omega t} + \rho_-^{(m)} e^{-j\omega t} \\ \rho_n &= \rho_+^{(n)} e^{j\omega t} + \rho_-^{(n)} e^{-j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (4-119)$$

由 3.8 节的分析知道,任意  $m, n$  两点的涡动轨迹均为椭圆。但由于一般情况下有

$$\begin{aligned} \rho_+^{(m)} &\neq \rho_+^{(n)} \\ \rho_-^{(m)} &\neq \rho_-^{(n)} \end{aligned}$$

因此,式(4-119)描绘的是两个偏心率不同、长短轴不等且方向不同的两个椭圆。这说明涡动时,转子的轴线不是一条平面曲线,而是一条扭曲的空间曲线,如图 4-20 所示。此外,轴线涡动的角



速度是变化的,但涡动一周的时间即周期  $T$  不变,为  $T = 2\pi/\omega$ 。

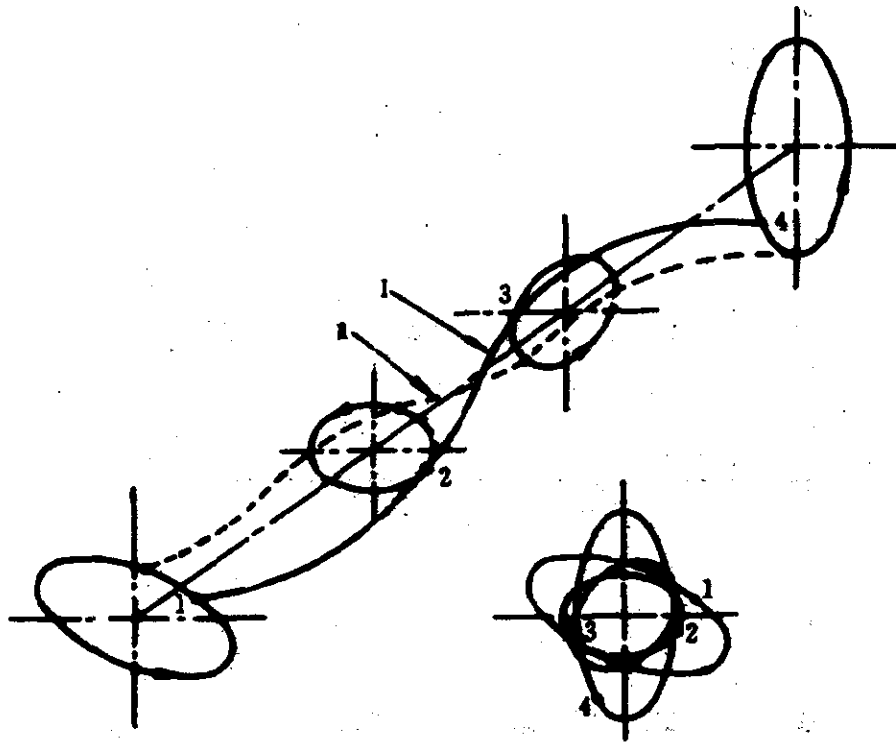


图 4-20 涡动时轴线的模态振型

I —  $t_1$  时刻的模态振型; I' —  $t_2$  时刻的模态振型。

由于涡动时轴线是一条空间曲线,不能将任一时刻的模态振型曲线绘在二维的平面图上。为了能够用平面曲线形象地表征模态振型,将任一时刻的轴线投影到  $xoz$  和  $yoze$  平面上,得到下面两条振型曲线

水平方向的振型曲线 —— 轴线在  $xoz$  平面上的投影;

垂直方向的振型曲线 —— 轴线在  $yoze$  平面上的投影。

由式(3-59)得  $m$ 、 $n$  两点的水平位移为

$$x_m = 2A_{xm} \cos(\omega t + \beta + \varphi_{xm})$$

$$x_n = 2A_{xn} \cos(\omega t + \beta + \varphi_{xn})$$

水平位移的比值为

$$\frac{x_m}{x_n} = \frac{A_{xm} \cos(\omega t + \beta + \varphi_{xm})}{A_{xn} \cos(\omega t + \beta + \varphi_{xn})} \quad (4-120)$$

由式(3-57)知道,  $\beta$  是复模态参数  $C$  的幅角, 由系统的初始条件决定。因此上式表达的水平位移的比值即水平方向的振型曲线, 不但是时间  $t$  的函数而且是初始条件的函数。同理知道垂直方向的位移曲线也是如此。图 4-21 是国产 300MW 汽轮发电机组某阶振型随时间  $t$  的变化情况。

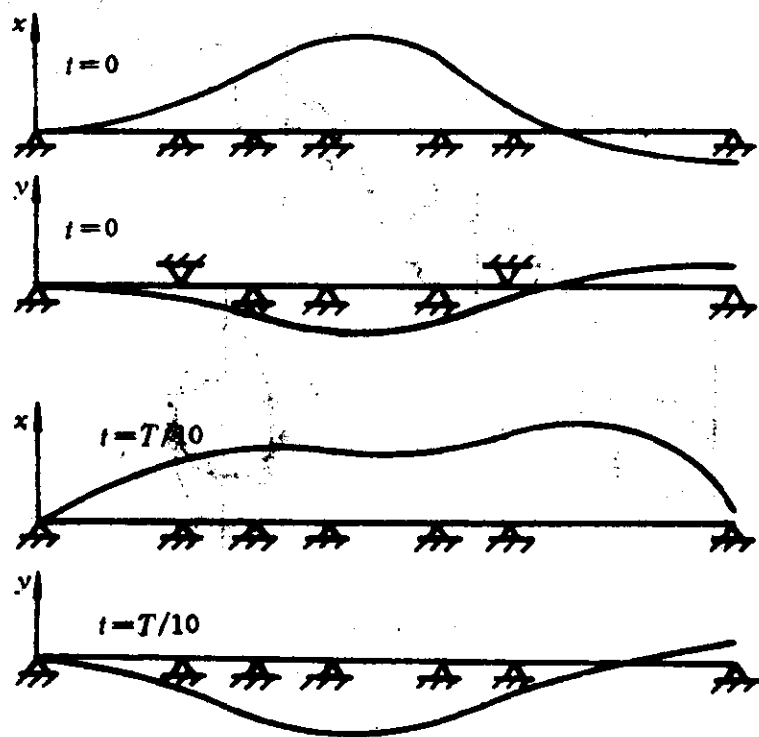


图 4-21 国产 300MW 汽轮发电机组的某阶模态振型

## 4.9 轴系稳定性与支承轴承的关系

### 1. 概述

在这一章的前面几节, 建立了多支承多圆盘转子-轴承系统的运动方程, 并讨论了稳定性的计算。其主要目的是计算机组在某一组特定的设计参数下的稳定性或稳定性裕度。

在设计一种新型的旋转机械时, 往往是根据机组的热力性能及国内外同类机组, 初步确定其结构形式和主要参数。但是, 这一初步确定的结构形式和参数并不是机组的最终设计参数。对于一

台高速旋转机械来说,除要满足热力性能外,还必须具有良好的动态性能,以保证机组稳定安全运行。因此,初步确定了机组的结构形式及主要参数后,就必须研究在这一组特定的设计参数下机组的动态性能,即机组的稳定性、临界转速与不平衡响应(这一节仅仅讨论稳定性)。根据给定的设计参数,可以计算机组在这一组设计参数下的稳定性或稳定性裕度。这种设计过程可称为“正问题”的设计过程。

一般情况下,根据初步确定的设计参数设计出来的机组,其动态性能往往不是很好。在这种情况下,通常的做法是以机组的动态性能为优化目标,不断修改设计参数。这种设计过程称为“逆问题”的设计过程。

按照已有的分析方法和计算程序,“正问题”的设计往往都能得到比较满意的解决。但是,“逆问题”的设计是否成功,则取决于我们对机组动态性能的了解程度。例如大型汽轮发电机组,其转子长30~50m,支承在7~10个滑动轴承上。对于这样复杂的轴系,可供修改的设计参数很多,有些参数对机组稳定性的影响较大,而有些参数的影响较小。如果盲目修改众多的设计参数,要达到提高稳定性的目的比较困难。因此,在修改参数再设计之前,必须研究机组的稳定性与每个设计参数之间的关系。只有修改那些对稳定性有较大影响的参数,才有可能达到提高稳定性的目的。国内外在这方面已做了很多研究工作<sup>[8]</sup>,其主要思想是建立系统特征值对各设计参数的敏感度。

要提高旋转机械的稳定性,不外乎这样两种方法:一是增加转子的刚度;二是改变轴承的结构形式或参数。增大转子的轴径可以提高转子的刚度,但这样设计出来的机械又笨又重,不符合现代设计潮流;缩短轴承间的跨距也可以提高转子的刚度,但是,通常情况下结构上不允许作很大的变动。由于以上原因,目前很少采用提高刚度的方法来提高稳定性。

实践表明,提高稳定性最常用也是最有效的方法是改变支承轴承的结构形式和设计参数。根据3.10节的计算结果知道,适当

改变轴承的设计参数可以提高稳定性,但提高的幅度不大;而改用稳定性较好的轴承形式如椭圆轴承或可倾瓦轴承则可以较大幅度地提高机组的稳定性。对于用两个滑动轴承支承的旋转机械来说,采用这一措施通常都能达到提高稳定性的目的。但是,对于由多个滑动轴承支承的旋转机械来说,采用上述措施有时很难奏效。其原因在于机组的稳定性与每个轴承的关系是不相同的,换句话说,每个轴承对稳定性的影响程度是不同的。有些轴承的影响较大,而有些轴承的影响则较小。只有修改那些对轴系稳定性有较大影响的轴承的结构形式或设计参数,才有可能达到提高稳定性的目的。因此,欲提高以多个滑动轴承支承的轴系的稳定性,首先要判断对机组稳定性有较大影响的是哪些轴承。

这一节从轴承力做功的角度出发,研究了轴承对稳定性的贡献与敏感轴承。轴系的稳定性主要取决于敏感轴承的结构形式和设计参数。

## 2. 理论分析

当轴系处于稳定性界限状态时,有一对实部为零的特征值  $\nu = \pm j\omega$  以及相应的一对共轭特征向量  $\{\phi\}$  和  $\{\bar{\phi}\}$ 。此时系统对初始条件的响应为

$$\{q\} = C\{\phi\}e^{j\omega t} + \bar{C}\{\bar{\phi}\}e^{-j\omega t} \quad (4-121)$$

式中  $C$ ——对应于  $\nu = j\omega$  的复模态参数。

设  $x_i, y_i$  分别是第  $i$  个轴承处的位移分量,根据式(3-59)得

$$\left. \begin{aligned} x_i &= 2A_{xi}\cos(\omega t + \beta + \phi_{xi}) \\ y_i &= 2A_{yi}\cos(\omega t + \beta + \phi_{yi}) \end{aligned} \right\} \quad (4-122)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_{ri} &= |C| |\phi_{ri}| \\ \cos\phi_{ri} &= \phi_{ri}^0 / |\phi_{ri}| \\ \sin\phi_{ri} &= \phi_{ri}^* / |\phi_{ri}| \end{aligned} \right\} \quad (4-123)$$

式中  $\phi_{ri}$ —— $\{\phi_r\}$  的第  $i$  个元素;

$$r = x, y.$$

在稳定性界限状态下,第  $i$  个轴承各油膜系数在一周内作的功为

$$\begin{aligned} W_{k_{xzi}} &= - \int k_{xzi} x_i dx_i \\ &= 4k_{xzi} A_{zi}^2 \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \beta + \varphi_{zi}) \sin(\omega t + \beta + \varphi_{zi}) d(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理

$$W_{k_{yyi}} = 0$$

$$\begin{aligned} W_{k_{xyi}} &= - \int k_{xyi} y_i dx_i \\ &= 4k_{xyi} A_{xi} A_{yi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \beta + \varphi_{yi}) \sin(\omega t + \beta + \varphi_{xi}) d(\omega t) \\ &= 4k_{xyi} A_{xi} A_{yi} \sin(\varphi_{xi} - \varphi_{yi}) \end{aligned} \quad (4-124)$$

将式(4-123)代入上式得

$$W_{k_{xyi}} = 4\pi |C|^2 k_{xyi} (\phi_{xi}^* \phi_{yi}^0 - \phi_{xi}^0 \phi_{yi}^*) \quad (4-125)$$

式中  $W_{k_{xyi}}$  —— 第  $i$  个轴承的油膜系数  $k_{xy}$  在一周内作的功,其他类同。

类似可以得到每个油膜系数一周内作功的表达式为

$$\left. \begin{aligned} W_{k_{xyi}} &= 4\pi |C|^2 k_{xyi} (\phi_{xi}^* \phi_{yi}^0 - \phi_{xi}^0 \phi_{yi}^*) \\ W_{k_{yxzi}} &= 4\pi |C|^2 k_{yxzi} (\phi_{yi}^* \phi_{xi}^0 - \phi_{yi}^0 \phi_{xi}^*) \\ W_{d_{xzi}} &= 4\pi |C|^2 \omega d_{xzi} (\phi_{xi}^{02} + \phi_{xi}^{*2}) \\ W_{d_{yyi}} &= 4\pi |C|^2 \omega d_{yyi} (\phi_{yi}^{02} + \phi_{yi}^{*2}) \\ W_{d_{xyi}} &= 4\pi |C|^2 \omega d_{xyi} (\phi_{xi}^0 \phi_{yi}^0 + \phi_{xi}^* \phi_{yi}^*) \\ W_{d_{yxi}} &= 4\pi |C|^2 \omega d_{yxi} (\phi_{xi}^0 \phi_{yi}^0 + \phi_{xi}^* \phi_{yi}^*) \end{aligned} \right\} \quad (4-126)$$

第  $i$  个轴承作的总功  $W_i$  为

$$\left. \begin{aligned} W_i &= W_{di} + W_{ki} \\ W_{di} &= W_{d_{xzi}} + W_{d_{yyi}} + W_{d_{xyi}} + W_{d_{yxi}} \\ W_{ki} &= W_{k_{xyi}} + W_{k_{yxzi}} \end{aligned} \right\} \quad (4-127)$$

式中  $W_{di}$  —— 第  $i$  个轴承油膜阻尼系数作的功;

$W_{ki}$  —— 第  $i$  个轴承油膜刚度系数作的功。

式(4-126)表明,在稳定性界限状态下,轴承力一周内作的

功不但是系统本征参数的函数,而且还是复模态参数  $C$  的函数。由于复模态参数由系统的初始条件决定,因而轴承力作的功还是初始条件的函数。对于一个实际机组来说,随机干扰总是存在的,难以确定初始条件,因此无法定量计算轴承功的绝对大小。式(4-126)表明油膜系数作的功都与参数  $4\pi|C|^2$  成正比,为了比较每个轴承作功的相对大小,下面引入相对功的概念

$$\bar{W} = W / (4\pi|C|^2) \quad (4-128)$$

式中  $\bar{W}$ ——油膜功的相对值。

这样式(4-126)、式(4-127)用相对功可表示为

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_{kxyi} &= k_{xyi}(\phi_{xi}^* \phi_{yi}^0 - \phi_{xi}^0 \phi_{yi}^*) \\ \bar{W}_{kyxi} &= k_{yxi}(\phi_{yi}^* \phi_{xi}^0 - \phi_{yi}^0 \phi_{xi}^*) \\ \bar{W}_{dxxi} &= \omega d_{xxi}(\phi_{xi}^{02} + \phi_{xi}^{*2}) \\ \bar{W}_{dyyi} &= \omega d_{yyi}(\phi_{yi}^{02} + \phi_{yi}^{*2}) \\ \bar{W}_{dxyi} &= \omega d_{xyi}(\phi_{xi}^0 \phi_{yi}^0 + \phi_{xi}^* \phi_{yi}^*) \\ \bar{W}_{dyxi} &= \omega d_{yxi}(\phi_{xi}^0 \phi_{yi}^0 + \phi_{xi}^* \phi_{yi}^*) \end{aligned} \right\} (4-129)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_i &= \bar{W}_{di} + \bar{W}_{ki} \\ \bar{W}_{di} &= \bar{W}_{dxxi} + \bar{W}_{dyyi} + \bar{W}_{dxyi} + \bar{W}_{dyxi} \\ \bar{W}_{ki} &= \bar{W}_{kxyi} + \bar{W}_{kyxi} \end{aligned} \right\} (4-130)$$

定义第  $i$  个轴承对轴系稳定性的贡献系数  $B_i$  为

$$B_i = -\bar{W}_i / G \quad (4-131)$$

式中  $G$ ——轴系中所有小于零的相对功之和,  $G = \sum \bar{W}_i$ , 且  $\bar{W}_i < 0$ 。

敏感轴承的定义为:在多支承轴系中,贡献系数的绝对值  $|B|$  较大的轴承称为敏感轴承,否则为非敏感轴承。

如果在整个轴系中只有轴承的油膜消耗系统的能量或向系统提供能量,那么在稳定性界限状态下所有轴承作功的总和应等于零,即所有轴承的贡献系数之和等于零。因此有

$$B_1 + B_2 + \dots + B_i = 0 \quad (4-132)$$

通常,作负功的轴承消耗系统的能量,促使系统稳定。作的负

功越大即贡献系数越大的轴承,对稳定性的贡献也越大。相反,作正功的轴承向系统提供能量,激发系统不稳定。作的正功越大即贡献系数越小的轴承,越容易激发系统不稳定。根据这一常识,轴系稳定性与支承轴承的关系可表述为

(1) 贡献系数大于零的轴承促使系统稳定,贡献系数越大,它对稳定性作出的贡献也越大。

(2) 贡献系数小于零的轴承,不但对稳定性没有贡献,反而激发系统不稳定。贡献系数越小的轴承越容易激发系统不稳定。

(3) 贡献系数最小的轴承是整个轴系中最危险的轴承。如果机组发生油膜失稳,往往由这个轴承首先激发。相反,贡献系数最大的轴承是轴系中最安全的轴承。

(4) 轴系稳定性主要取决于敏感轴承的动态性能。适当改变这些轴承的结构形式或设计参数,可以有效地提高轴系的稳定性。而改变非敏感轴承的结构形式或设计参数,轴系的稳定性变化甚小。

### 3. 计算示例

例 4—5: 计算例 4—4 在稳定性界限状态下每个轴承的贡献系数,探讨提高该轴系稳定性的有效措施。

解: 为了提高计算精度,采用双精度进行计算。计算结果表明例 4—4 的轴系当工作转速为 3006r/min 时处于稳定性界限状态。实部为零的无量纲特征值为

$$\lambda = -0.2695E - 0.5 \pm j0.5156 \approx \pm j0.5156$$

表 4—10 是贡献系数  $B$  的计算结果。

表 4—10 贡献系数等计算结果

轴承号	$B$	$ B $	敏感轴承否
1	$-0.4291E - 03$	$0.4291E - 03$	非敏感轴承
2	$0.2386E - 02$	$0.2386E - 02$	非敏感轴承
3	$-0.5231E + 00$	$0.5231E + 00$	敏感轴承
4	$-0.3907E + 00$	$0.3907E + 00$	敏感轴承
5	$0.9976E + 00$	$0.9976E + 00$	敏感轴承

表 4—10 说明

(1) 轴承 2、5 的贡献系数  $B$  大于零, 促使系统稳定。而其他三个轴承的贡献系数都小于零, 激发系统不稳定。

(2) 轴承 3 的贡献系数最小, 是系统中最危险的轴承; 而轴承 5 则是最安全的轴承。

(3) 轴承 3、4、5 是轴系的敏感轴承, 轴系稳定性主要取决于这三个轴承的动态性能。如果要提高轴系的稳定性, 最有效的措施是改变这些轴承的结构形式或设计参数。为了充分说明这一点, 表 4-11 给出了各种轴承组合方案对应的失稳转速。其中  $T-1$ 、 $T-2$  两个轴承的参数见表 4-12,  $y-1$ 、 $y-2$  两个轴承的参数不变, 见表 4-7。

表 4-11 不同轴承组合方案对应的失稳转速

轴承组合方案	轴承具体形式					轴系失稳转速 (r/min)
	1	2	3	4	5	
1	$y-1$	$y-1$	$y-1$	$y-2$	$y-2$	3006
2	$T-1$	$y-1$	$y-1$	$y-2$	$y-2$	3006
3	$y-1$	$T-1$	$y-1$	$y-2$	$y-2$	3006
4	$y-1$	$y-1$	$T-1$	$y-2$	$y-2$	3037
5	$y-1$	$y-1$	$y-1$	$T-2$	$y-2$	3326
6	$y-1$	$y-1$	$y-1$	$y-2$	$T-2$	3326
7	$y-1$	$y-1$	$y-1$	$T-2$	$T-2$	3930
8	$y-1$	$y-1$	$T-1$	$T-2$	$T-2$	4150
9	$T-1$	$T-1$	$T-1$	$T-2$	$T-2$	4150

表 4-12 两个  $2 \times 150^\circ$  椭圆轴承的参数

轴承	$L/D$	$D(m)$	$\phi(\%)$	$\eta(N \cdot s/m^2)$	$m_b$
$T^{\text{D}}-1$	0.5	0.06	2.0	0.0184	0.5
$T-2$	0.5	0.10	1.5	0.0184	0.5

①  $T$  表示椭圆轴承。

在表 4-11 的组合方案 1 中, 所有轴承均为圆柱轴承, 即是例。



4—4 给定的参数,轴系的失稳转速为 3006r/min。比较组合方案 1、2 和 3 以及方案 8 和 9 不难发现,将第一、第二两个非敏感轴承改换成稳定性较好的椭圆轴承后,轴系的稳定性没有任何变化。对组合方案 1、4、5、7、8 进行比较可以看出,将三个敏感轴承改换成稳定性较好的椭圆轴承后,轴系稳定性得到了很大的提高。

表 4—11 的计算结果与上面的分析是一致的。即轴系的稳定性主要依赖于敏感轴承的动态性能,改变这些轴承的结构形式或设计参数,才能有效地改变轴系的稳定性。这一结论为寻求提高大型机组稳定性的措施提供了理论依据。

#### 4. 实际应用——确定国产 200MW 汽轮发电机组轴承的改造方案

国产 200MW 汽轮发电机组,由于稳定性裕度偏低,近年来在一些机组上相继发生了不同程度的轴承油膜失稳甚至油膜振荡,造成了巨大的经济损失。为了确保现役 200MW 机组稳定安全运行,有关部门决定对机组的轴承进行改造设计。由于改换一副轴承的费用很大,所以希望在保证机组具有足够的稳定性裕度的前提下改换的轴承越少越好。这就需要研究现役机组轴承的改造方案。

表 4—13 国产 200MW 机组轴承的贡献系数与敏感轴承

轴承号	贡献系数 $B$	$ B $	敏感轴承否
1	$-0.9403E-07$	$0.9403E-07$	非敏感轴承
2	$-0.1209E-05$	$0.1209E-05$	非敏感轴承
3	$-0.6461E-04$	$0.6461E-04$	非敏感轴承
4	$-0.4375E-01$	$0.4375E-01$	非敏感轴承
5	$-0.7473E-01$	$0.7473E-01$	非敏感轴承
6	$-0.8782E+00$	$0.8782E+00$	敏感轴承
7	$1.0000E+00$	$1.0000E+00$	敏感轴承

图 4—9(a) 是国产 200MW 汽轮发电机组轴系的结构简图。机组额定工作转速为 3000r/min,汽轮机与发电机的 4 根转子分别

由 7 个三油楔轴承支承。计算表明机组的失稳转速为 3230r/min, 在稳定性界限状态下各轴承的贡献系数的计算结果示于表 4-13 中。

由上表知道, 第 6、第 7 这两个轴承是敏感轴承, 机组的稳定性主要决定于这两个轴承的动态性能。如果改变 6、7 两个轴承的结构形式或设计参数, 机组稳定性可望有较大幅度的提高。进一步的计算表明, 将 6、7 这两个轴承改用椭圆轴承后, 机组失稳转速由原来的 3230r/min 提高到 4000r/min 左右。如果将其他几个非敏感轴承改换成椭圆轴承, 机组的稳定性提高不大(见表 4-14) 但改造费用却显著增加。

表 4-14<sup>①</sup> 不同改造方案对应的失稳转速

失稳转速 (r/min)	轴承具体形式						
	1	2	3	4	5	6	7
3060	S	S	S	S	S	S	S
3060	S	S	T	S	S	S	S
3840	S	S	S	S	S	T	T
> 4000	S	S	T	T	T	T	T

①S、T 分别表示三油楔和椭圆轴承, 2~7 号轴承按紊流计算。

基于上面的分析结果, 宜将 6、7 两个轴承改换为椭圆轴承。采用这一改造方案, 不但可以保证机组有足够的稳定性裕度, 而且需要更换的轴承最少、费用最低。

国内有关单位对徐州电厂 6 号机组进行了轴承改造的工业性试验, 将机组的 3~7 号轴承改换为椭圆轴承, 运行情况良好<sup>[9]</sup>。超速试验至 3340r/min 时未发生油膜振荡, 而且振动比轴承改型前大为减小。这说明部分轴承改用椭圆轴承后, 机组稳定性裕度得到了很大的提高。

此外, 由表 4-13 还可看到, 第六号轴承的贡献系数最小, 是整个机组中最危险的轴承。机组发生油膜失稳或油膜振荡往往由这个轴承首先激发。这一结论已为数台 200MW 机组的实测结果所证实。例如徐州电厂的 6 号机组, 于 1986 年 9 月因事故大修后启

动,发现 6 号轴承的振动较大而其他几个轴承的振动都较小。超速试验至 3200r/min 以上时发生油膜振荡,且每次振荡均由 6 号轴承首先激发。这一实测结果与表 4-13 计算得到的结果吻合较好。

#### 4.10 提高轴系稳定性的措施

对于用两个滑动轴承支承的旋转机械来说,可以采用下述措施来提高机组的稳定性

(1) 采用稳定性较好的滑动轴承,如椭圆轴承或可倾瓦轴承。这一措施可以大幅度地提高系统的稳定性。

(2) 适当改变轴承的设计参数,如改变长径比  $L/D$ 、间隙比  $\psi$  以及预负荷系数  $m_b$  等。

(3) 适当改变进油温度或改用粘度较低的油品。

(4) 将轴承装在弹性、阻尼的外支承上。这一措施可以有效地提高系统的稳定性,在航空发动机上得到了广泛的应用。但必须注意,外支承的弹性和阻尼系数要匹配得当,否则达不到预期的目的。

对于用多个滑动轴承支承的旋转机械来说,情况要稍许复杂一些。首先要找出对机组稳定性起主要作用的轴承即敏感轴承,然后对这些轴承采用上面提到的双支承转子-轴承系统的改进措施,可以显著地提高机组的稳定性。除此之外,还可以通过调整轴承的静态标高来改变轴承的负荷分配,达到提高机组稳定性的目的。

#### 4.11 集总圆盘个数的合理选取

当代大型、高速旋转机械的轴承都比较复杂,有时支承轴承多达 10 多个,转子长数十米。这就使集总圆盘的个数很多,矩阵阶数太大。有时计算机容量可能满足不了要求,计算工作量及计算费用也太大。在工程实际中,我们只需要系统前几阶特征值及特征向

量。因此,在保证一定精度的前提下,希望集总圆盘的个数越少越好。下面通过大量的对比计算,对集总圆盘个数的合理选取提供一个定性的原则。

表 4-15 特征值的相对误差<sup>①</sup>与失稳转速

圆盘个数		10	15	20	25	30	50
前10阶特征值实部的相对误差	1	13.8	9.5	5.4	1.5	0.8	
	2	1.1	0.0	0.0	0.0	0.0	
	3	4.8	1.5	0.9	0.2	0.2	
	4	5.3	0.2	0.1	0.1	0.0	
	5	0.3	0.2	0.0	0.0	0.0	
	6	7.3	1.6	2.1	0.9	0.9	
	7	11.5	3.0	1.3	0.6	0.6	
	8	4.6	3.4	1.2	0.6	0.6	
	9	5.1	7.4	5.1	0.2	0.1	
	10	65.8	14.8	17.0	5.5	5.5	
前10阶特征值虚部的相对误差	1	2.4	1.3	0.7	0.2	0.1	
	2	1.7	0.6	0.3	0.2	0.0	
	3	4.4	1.8	1.2	0.5	0.5	
	4	2.0	1.3	0.7	0.1	0.1	
	5	3.7	1.3	0.6	0.3	0.3	
	6	0.2	0.7	0.4	0.2	0.2	
	7	12.3	2.3	2.7	1.3	1.3	
	8	17.4	5.0	4.4	1.4	1.4	
	9	18.2	4.8	2.3	1.1	0.9	
	10	26.0	7.9	5.3	1.8	1.8	
失稳转速(r/min)		3090	3050	3020	3006	3006	3006

① 以 50 个圆盘的特征值为近似真值,表中数据均为百分比。

表 4-15 是将例 4-4 的轴系离散成不同集总圆盘时的前 10 阶特征值的相对误差和失稳转速。以 50 个集总圆盘时的特征值作

为近似真值,表中的相对误差均为百分比。由该表知道,当选取 25 个集总圆盘时,至少能保证前 10 阶特征值的实部和虚部与 50 个集总圆盘的结果相同。当选取 15 个集总圆盘时,至少能保证前 10 阶特征值的虚部与 50 个集总圆盘的结果相同。

表 4-15 的结果表明,对于例 4-4 的轴系来说,选取 25 个集总圆盘对稳定性的计算是合适的。在第五章和第六章中讨论临界转速的计算时,其主要目的是计算轴系的固有频率或涡动频率,它们都是特征值的虚部。因此选取 15 个集总圆盘对轴系临界转速(其计算详见第五、第六两章)的计算是合适的。

根据大量的数值计算发现,集总圆盘个数的选取与转子的长度、轴径以及轴承的个数有关。一般情况下,计算稳定性时,集总圆盘的个数  $n$  可按下面的经验公式选取

$$n = \frac{L}{d_a \sqrt{l-1}} \sim 1.5 \frac{L}{d_a \sqrt{l-1}} \quad (4-133)$$

式中  $L$  —— 转子的总长度(m);

$d_a$  —— 转子等效刚度直径的平均值(m);

$l$  —— 轴承的个数。

如果计算临界转速,集总圆盘的个数可按上式选取然后再减半。

此外,由表 4-15 还可看出,当集总圆盘的个数较少时,计算得到的失稳转速总是偏高。其原因是质量集总相当于增加了转子的约束,集总质量越少增加的约束就越多。由于增加了转子的约束相当于提高了转子的刚度,因此当集总圆盘较少时,计算得到的失稳转速总是大于系统真实的失稳转速。

## 参 考 文 献

- 1 Lund J W. Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings. Journal of Engineering for Industry, Trans. of ASME, 1974, 96(2): 509~517
- 2 Horner GC, Pilkey WD. The Riccati Transfer Matrix Method. Journal of Mechanical

Design, Trans. of ASME, 1978, 100: 297~302

- 3 刘鸿文主编. 材料力学:上册. 北京:人民教育出版社, 1979.
- 4 郑兆昌等. 大型转子-油膜轴承-柔性基础系统的动力学计算. 振动与冲击, 1984, 10(2): 27~41
- 5 郑兆昌. 复杂结构系统振动研究的模态综合技术. 振动与冲击, 1982, 8(1): 28~35
- 6 刘鸿文主编. 材料力学:下册. 北京:人民教育出版社, 1979.
- 7 李建国等. 多个滑动轴承支承的转子系统稳定性研究. 全国第二届转子动力学学术讨论会论文集, 1989, 1~8
- 8 Rajan M, Nelson HD, Chen WJ. Parameter Sensitivity in the Dynamics of Rotor-Bearing Systems. Journal of Vibration Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Trans. of ASME, 1986, 108: 197~206
- 9 黄正一. 国产 200MW 汽轮发电机组三油楔轴承和椭圆轴承稳定性的比较和分析. 动力工程, 1990, 10(3): 33~38

## 第五章 单圆盘对称转子 - 轴承系统的临界转速与不平衡响应

稳定性、临界转速与不平衡响应是设计高速旋转机械转子 - 轴承系统必须解决的三大主要问题。在前两章中,主要研究了稳定性及其计算。这一章及下一章,主要介绍临界转速与不平衡响应的计算。

计算机组的临界转速,其目的是使机组偏离其临界转速工作,以保证机组稳定安全运行。一般要求为

对于在一临界转速  $n_{c1}$  以下工作的转子,应使工作转速  $n < 0.75n_{c1}$ ;

对于在一临界转速  $n_{c1}$  以上工作的转子,应使  $1.4n_{c1} < n < 0.7n_{c2}$ 。

转子在不平衡力激励下产生的振动响应称为不平衡响应。计算转子的不平衡响应,需要知道不平衡量的大小与分布情况。但是,对于一个实际的转子来说,不平衡量的大小与分布都是未知的。因此,计算不平衡响应的主要目的,在于研究转子对某一给定不平衡量的敏感程度,为确定最终的设计参数提供依据,使机组具有更好的动态性能;此外,还可以根据不同转速下的不平衡响应,确定转子的临界转速。

### 5.1 刚性支承的临界转速与不平衡响应

图 5 - 1 是一个质量为  $2m$  的圆盘装在一根被设想成无质量的弹性轴的中央,轴的刚度为  $2k$ ,轴的两端由两个刚性轴承支承。这一模型称为单圆盘对称弹性转子 - 刚性支承系统。这个模型比

较简单,便于分析,而且所得结论可以定性解释复杂旋转机械的一些基本现象。为了和第三章的模型相统一,仍用  $2m$  表示圆盘质量,用  $2k$  表示转轴的弯曲刚度。

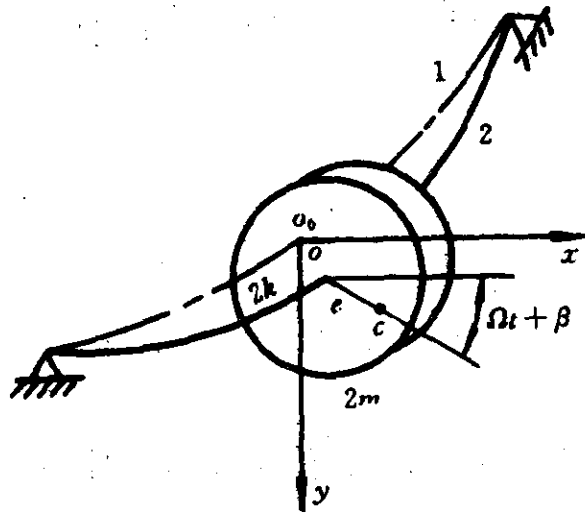


图 5-1 单圆盘转子系统

1—静平衡时的轴线;2—涡动后的轴线。

### 1. 运动方程

图 5-1 是单圆盘转子刚性支承系统,坐标系  $xO_0y$  的选取如图所示,其原点  $O_0$  为静平衡时的圆盘中心, $y$  轴沿自重方向为正。圆盘中心  $O$  与质心  $C$  的坐标分别用  $(x, y)$  和  $(x_c, y_c)$  表示。圆盘质量  $2m$  与偏心距  $e$  的乘积  $2me$  称为不平衡量。设  $OC$  与  $x$  轴的夹角为  $\Omega t + \beta$ ,由图 5-1 得

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x + e \cos(\Omega t + \beta) \\ y_c &= y + e \sin(\Omega t + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

由上式得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c &= \ddot{x} - e\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \\ \ddot{y}_c &= \ddot{y} - e\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

式中  $\beta$  是  $t=0$  时  $OC$  与  $x$  轴的夹角。

对于单圆盘系统,只要初始时间  $t$  选择合适,总可以使  $\beta=0$ 。在本章的分析中,均按  $\beta=0$  处理。这样式(5-1)、式(5-2)可改写为



$$\left. \begin{aligned} x_c &= x + e \cos \Omega t \\ y_c &= y + e \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c &= \ddot{x} - e \Omega^2 \cos \Omega t \\ \ddot{y}_c &= \ddot{y} - e \Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

转轴转动时,只有两个力作用在图 5-1 的圆盘上。一个是运转时产生的惯性力,另一个是变形后轴施加给圆盘的恢复力增量。这两个力的表达式如表 5-1 所列。

表 5-1 作用在圆盘上的力

力的名称	水平方向	垂直方向
恢复力增量	$2kx$	$2ky$
惯性力	$2m(\ddot{x} - e\Omega^2 \cos \Omega t)$	$2m(\ddot{y} - e\Omega^2 \sin \Omega t)$

根据力的平衡条件,可以得到圆盘的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= me\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{y} + ky &= me\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

上式是圆盘在水平方向与垂直方向的运动方程,为了便于讨论,将式(5-5)的两个等式用复数  $\rho = x + jy$  表示成如下的一个方程

$$m\ddot{\rho} + k\rho = me\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (5-6)$$

上式是用复数  $\rho$  表示的圆盘中心  $o$  的运动方程,位移  $x, y$  分别是  $\rho$  的实部和虚部。

## 2. 临界转速与不平衡响应

方程(5-6)的通解由齐次通解  $\rho_1$  和特解  $\rho_2$  两部分组成。下面先讨论齐次通解  $\rho_1$ 。式(5-6)的齐次方程为

$$m\ddot{\rho}_1 + k\rho_1 = 0$$

其特征方程为

$$m\nu^2 + k = 0 \quad (5-7)$$

解上式得特征值  $\nu$  为

$$\nu = \pm j\omega_k \quad (5-8)$$

式中  $\omega_k = \sqrt{k/m}$ ——固有频率。

由此得齐次通解  $\rho_1$  为

$$\rho_1 = \rho_+ e^{j\omega_k t} + \rho_- e^{-j\omega_k t} \quad (5-9)$$

式中  $\rho_+$ 、 $\rho_-$  均为复数,由系统的初始条件决定。

由 3.8 节的分析知道,上式描绘的是一个椭圆运动,其涡动方向与  $|\rho_+|$ 、 $|\rho_-|$  的关系为

$|\rho_+| > |\rho_-|$ , 同向涡动;

$|\rho_+| < |\rho_-|$ , 反向涡动;

$|\rho_+| = |\rho_-|$ , 涡动轨迹为一直线。

以上是系统的齐次通解即系统作自振动振动时的响应。

下面再来求式(5-6)的特解  $\rho_2$ 。取特解  $\rho_2$  具有式(5-6)右边的形式,即  $\rho_2 = Be^{j\Omega t}$ ,代入式(5-6)得

$$B = \frac{e\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2}$$

这样特解  $\rho_2$  为

$$\rho_2 = \frac{e\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} e^{j\Omega t} \quad (5-10)$$

上式是系统的特解,是由圆盘的不平衡激振力引起的振动响应,称为不平衡响应。

有了齐次通解式(5-9)和特解式(5-10)后,可以得到圆盘中心  $o$  的通解为

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

通常情况下,系统总是存在阻尼的,因此齐次通解  $\rho_1$  随时间不断衰减,并最终衰减为零。这样,经过一段时间后,持续的振动只有特解  $\rho_2$  即不平衡响应或称强迫振动响应。因此有

$$\rho = \rho_1 = \frac{e\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} e^{j\Omega t} \quad (5-11)$$

根据式(5-3)得

$$\rho_c = \rho + \rho e^{j\Omega t} = \frac{e\omega_k^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} e^{j\Omega t} \quad (5-12)$$

式(5-11)、式(5-12)分别是不平衡激振力在圆盘中心和质心激起的不平衡响应。该两式表明,中心 $o$ 与质心 $c$ 的涡动轨迹都是以坐标原点 $o_0$ 为圆心的圆周运动,涡动频率就是轴的旋转角频率,并与轴同向旋转。这种涡动称为同步正向涡动。另外,复数位移 $\rho$ 、 $\rho_c$ 均和离心力矢量的相位相同或相反,这说明轴转动时,圆盘中心 $o$ 、质心 $c$ 与坐标原点 $o_0$ 三点始终在一条直线上(见图5-2)。

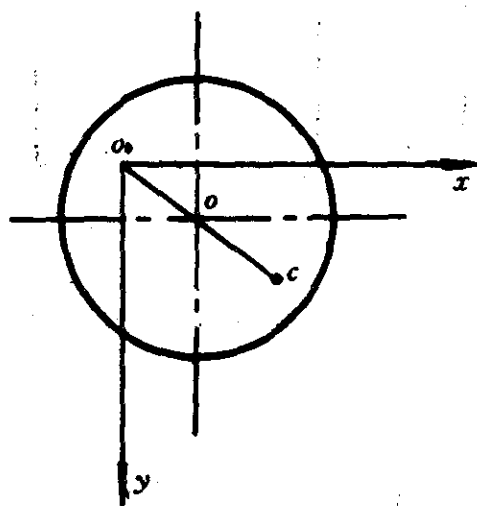


图5-2 圆盘中心与质心的相对位置

图5-3是中心 $o$ 与质心 $c$ 的不平衡响应的幅值 $|\rho|$ 、 $|\rho_c|$ 与转轴角速度 $\Omega$ 的关系。由该图可以观察到如下现象:

当 $\Omega < \omega_k$ 时,随着转速的上升,振幅不断增加,且有 $|\rho_c| > |\rho|$ 。这说明质心 $c$ 的振动在低速时总比中心 $o$ 的振动大。

当 $\Omega = \omega_k$ 时,振幅 $|\rho|$ 、 $|\rho_c|$ 趋向无穷大,此时称系统发生共振。 $\omega_k$ 称为临界角速度或固有频率,与此相应的转速称为临界转速,以 $n_c$ 表示。

当 $\Omega > \omega_k$ 时,随着转速的上升振幅反而不断减小,且有 $|\rho_c| < |\rho|$ 。这说明当工作转速大于临界转速后,随着转速的上升,振动反而变得越来越平稳,而且质心 $c$ 的振动比中心 $o$ 的振动小。在 $\Omega$ 趋向无穷大的极限状态下, $|\rho| \approx e$ 、 $|\rho_c| \approx 0$ 。这表明在转速极高

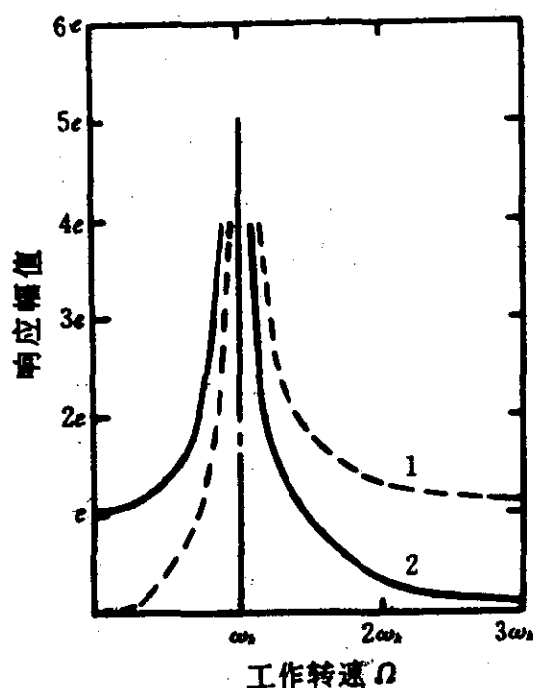


图 5 - 3 响应幅值与  $\Omega$  的关系

1—中心  $o$  的幅值  $|\rho_c|$ ; 2—质心  $c$  的幅值  $|\rho_g|$ 。

的情况下,质心  $c$  的振幅趋向于零,这种现象称为自动对中现象。

综上所述,不平衡力激起的振动响应的特点是:当工作转速小于临界转速时,振动程度随转速的增加而加剧;在超临界转速区工作时则刚好相反;当工作转速等于临界转速时,振动幅值为无穷大,此时提高转速或降低转速均可使振动减小。

机组不能在临界转速下工作是显而易见的。此外,在它附近的某个转速范围内运行都比较危险,因为振幅很大超过了允许值。因此,设计机组时,为了稳定安全运行,应使工作转速偏离临界转速足够远。

由上面的分析可以看到,计算不平衡响应就是求方程(5-6)的特解。计算临界转速就是计算系统的特征值即固有频率  $\omega_k$ 。

临界转速的定义为:与系统固有频率  $\omega_k$  相等的不平衡激振力的频率(即轴的旋转角速度)称为临界角速度,与此相应的转速称为临界转速  $n_c$ 。 $n_c$  与  $\omega_k$  的换算关系为

$$n_c = 30\omega_k/\pi \approx 9.55\omega_k \quad (5-13)$$

## 5.2 弹性支承的临界转速与不平衡响应

在前一节中,假设支承轴承是刚性的。如果支承轴承的刚度至少比轴的刚度高出一个数量级,这样处理是可以的。但是,如果轴的刚度相应增加而轴承刚度又相应减小,此时若还将轴承视为刚性支座,计算结果误差较大。尤其当轴支承在滑动轴承上,误差就更大。这是因为滑动轴承的刚度较小,有时甚至低于轴的刚度。因此必须研究弹性支承对临界转速的影响。

### 1. 弹性支座模型

对于一般的旋转机械,支承刚度在水平方向和垂直方向是互不相等的,例如离心压缩机、汽轮机和发电机等。这一节采用图 5-4 的模型来表征支承轴承。其中  $k_h$ 、 $k_v$  分别表示水平方向和垂直方向的支座刚度,并认为转轴两端的支承轴承是完全相同的。

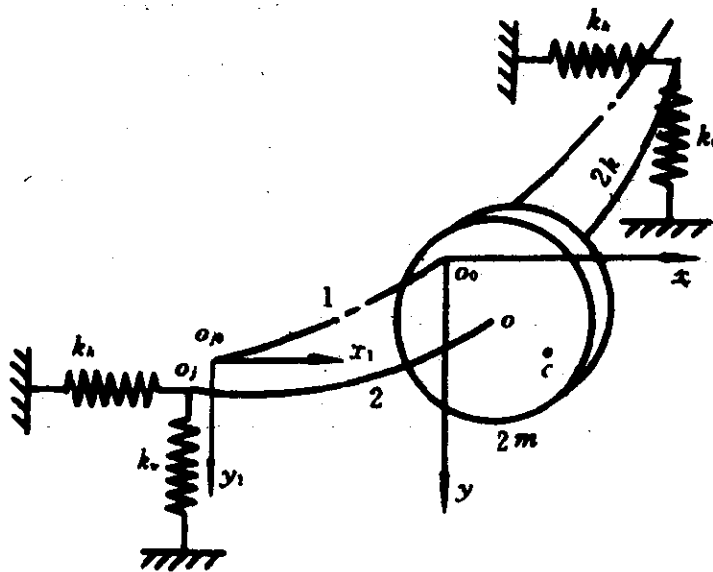


图 5-4 弹性支承—转子系统

1—静平衡时的轴线;2—涡动后的轴线。

### 2. 运动方程

如图 5-4 所示,建立两个坐标系。一个是  $x_0 y_0$ , 原点  $o_0$  是静

平衡时的圆盘中心；另一个是  $x_1 o_{j0} y_1$ ，其坐标原  $o_{j0}$  是静平衡时的轴颈中心。当轴未转动时，其轴线称为静平衡时的轴线，如上图所示。转动以后，由于圆盘的不平衡，轴线偏离其静平衡时的位置，即圆盘中心  $o$  和轴颈中心  $o_j$  要偏离各自的静平衡位置  $o_0$  和  $o_{j0}$ ，用  $(x, y)$ 、 $(x_1, y_1)$  分别表示  $o$  与  $o_j$  的坐标。

由图 5-4 知道，作用在圆盘上的力只有两个，一个是惯性力；另一个是轴施加给圆盘的恢复力增量。这两个力的表达式如表 5-2 所列。

表 5-2 作用在圆盘上的力

力的名称	水平方向	垂直方向
恢复力增量	$2k(x - x_1)$	$2k(y - y_1)$
惯性力	$2m(\ddot{x} - e\Omega^2 \cos\Omega t)$	$2m(\ddot{y} - e\Omega^2 \sin\Omega t)$

根据力平衡条件得

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k(x - x_1) &= me\Omega^2 \cos\Omega t \\ m\ddot{y} + k(y - y_1) &= me\Omega^2 \sin\Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-14)$$

由图 5-4 还知道，作用在无质量的弹性轴上的力也只有两个，一个是圆盘施加给轴的反力，大小与轴施加给圆盘的弹性恢复力增量相等但方向相反；另一个是两端的弹性支座在轴颈处施加给轴的恢复力增量。这两个力可表示成如表 5-3 的形式。

表 5-3 作用在轴上的力

力的名称	水平方向	垂直方向
圆盘施加给轴的反力	$-2k(x - x_1)$	$-2k(y - y_1)$
两端支承给轴的恢复力增量	$2k_h x_1$	$2k_v y_1$

根据轴的力平衡条件得

$$\left. \begin{aligned} k_h x_1 &= k(x - x_1) \\ k_v y_1 &= k(y - y_1) \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

由上式得

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= [k/(k+k_h)]x \\ y_1 &= [k/(k+k_v)]y \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

将式(5-16)代入式(5-14)得到圆盘中心  $o$  的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_x x &= me\Omega^2 \cos\Omega t \\ m\ddot{y} + k_y y &= me\Omega^2 \sin\Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-17)$$

式中  $k_x = kk_h/(k+k_h)$ ——水平方向的等效刚度；  
 $k_y = kk_v/(k+k_v)$ ——垂直方向的等效刚度。

和刚性支承的运动方程(5-5)比较知道,弹性支承的运动方程(5-17)与式(5-5)在形式上是一样的,差别仅在于方程中的刚度系数。在式(5-5)中,两个方向的刚度系数是相等的;而在式(5-17)中,两个方向的等效刚度不相同。

### 3. 临界转速与不平衡响应

将支承轴承简化为各向异性的弹簧后,系统在水平方向与垂直方向的等效刚度不相等,这就不能将式(5-17)的两个等式合并成一个用复数  $\rho$  表示的方程。计算系统的临界转速与不平衡响应,需要对式(5-17)的两个等式分别求解。

令  $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$ ,  $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$ 。由式(5-17)得到两个特征方程为

$$\left. \begin{aligned} \nu^2 + \omega_x^2 &= 0 \\ \nu^2 + \omega_y^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

由上式可求得两个固有频率即临界角速度为  $\omega_x$ 、 $\omega_y$ ,当  $\Omega = \omega_x$  或  $\omega_y$  时系统发生共振。因此,将支承轴承简化为各向异性的弹簧后,一般有两个临界转速,当支承简化为各向同性的弹簧( $k_h = k_v$ )后,两个临界转速又合二为一。

为了求得不平衡响应,设式(5-17)的特解具有如下的形式

$$\left. \begin{aligned} x &= A_x \cos\Omega t \\ y &= A_y \sin\Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

将上式代入式(5-17)可求得圆盘中心  $o$  的不平衡响应为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{e\Omega^2}{\omega_x^2 - \Omega^2} \cos\Omega t \\ y &= \frac{e\Omega^2}{\omega_y^2 - \Omega^2} \sin\Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-20)$$

根据式(5-3)可得质心  $c$  的不平衡响应为

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{e\omega_x^2}{\omega_x^2 - \Omega^2} \cos\Omega t \\ y_c &= \frac{e\omega_y^2}{\omega_y^2 - \Omega^2} \sin\Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

图 5-5 是响应幅值与轴的旋转角速度  $\Omega$  的关系曲线。

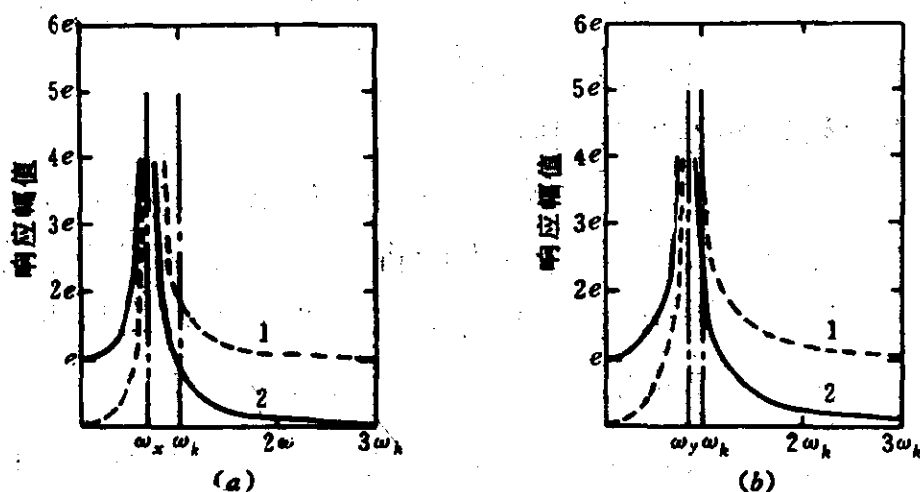


图 5-5 响应幅值与  $\Omega$  的关系

(a) 水平幅值; (b) 垂直幅值。

1—中心  $o$  的幅值; 2—质心  $c$  的幅值。

图 5-5(a) 是水平方向的响应幅值与转速  $\Omega$  的关系。当  $\Omega < \omega_x$  时, 随着转速的上升, 响应幅值不断增加, 振动程度不断加剧, 而且质心  $c$  的振动大于中心  $o$  的振动。当  $\Omega = \omega_x$  时, 响应幅值趋于无穷大, 这表明  $\Omega = \omega_x$  时系统发生共振,  $\omega_x$  是系统的一个临界角速度。当  $\Omega > \omega_x$  时, 振幅反而随着转速的增加而不断减小, 振动程度不断减弱, 而且质心  $c$  的振动小于中心  $o$  的振动。当  $\Omega$  趋向无穷大时,  $|x| \approx e$ ,  $|x_c| \approx 0$ 。仍然具有自动对中现象。

图 5-5(b) 是垂直方向的振幅  $|y|$ 、 $|y_c|$  与转速  $\Omega$  的关系。其



振动特点与图 5-5(a) 类似, 差别在于临界角速度是  $\omega$ , 而不是  $\omega_x$ 。

由图 5-5 可以看到, 将支承简化为各向异性的弹簧后, 系统有两个临界转速。一般情况下支承在垂直方向的刚度  $k_v$  总是比水平方向的刚度  $k_h$  大, 故有  $\omega_x < \omega_y < \omega_z$ 。其振动特点与刚性支承时基本相同。

由式(5-20)、式(5-21)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\omega_x^2 - \Omega^2}{\omega_y^2 - \Omega^2} \operatorname{tg} \Omega t \\ \frac{y_c}{x_c} &= \frac{\omega_y^2 (\omega_x^2 - \Omega^2)}{\omega_x^2 (\omega_y^2 - \Omega^2)} \operatorname{tg} \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

上式表明, 当支承在两个方向的刚度  $k_h, k_v$  不相等时, 质心  $c$ 、中心  $o$  和坐标原点  $o_0$  不在一条直线上。只有当  $k_h = k_v$  时, 上述三点才在一条直线上。

式(5-17)是考虑了支承弹性后的运动方程,  $k_h, k_v$  分别是支承在水平方向和垂直方向的刚度系数。如果令  $k_h = k_v = \infty$ , 式(5-17)就变成了刚性支承系统的运动方程(5-5)。在实际计算时, 只要  $k_h, k_v$  高出转轴刚度  $k$  两个数量级以上, 按弹性支承所得结果与刚性支承的结果相差甚小。为了节省篇幅, 在以后各章中, 不再专门讨论刚性支承的情况, 而按一般的弹性支承来考虑。若取  $k_h = k_v =$  足够大, 所得计算结果自然就是刚性支承的结果。

#### 4. 计算示例

例 5-1: 设例 3-2 的支承刚度系数  $k_h = 2 \times 10^8 \text{N/m}$ ,  $k_v = 5 \times 10^8 \text{N/m}$ , 试计算该轴系的临界转速。

解: 由例 3-2 得  $2m = 520 \text{kg}$ ,  $2k = 2.104 \times 10^8 \text{N/m}$ 。

(1) 将支承轴承简化成刚性支座

由式(5-13)得临界转速为

$$n_c = 9.55\omega_c = 9.55 \sqrt{k/m} = 6074.7 \text{r/min}$$

(2) 将支承轴承简化为各向异性的弹簧

$$k_x = k k_h / (k + k_h) = 6.89 \times 10^7 \text{N/m}$$

$$k_y = kk_v / (k + k_v) = 8.69 \times 10^7 \text{N/m}$$

$$\omega_x = \sqrt{k_x/m} = 514.78 \text{s}^{-1}$$

$$\omega_y = \sqrt{k_y/m} = 578.13 \text{s}^{-1}$$

$$n_{cx} = 9.55\omega_x = 4916.1 \text{r/min}$$

$$n_{cy} = 9.55\omega_y = 5521.1 \text{r/min}$$

(3) 按弹性支承模型计算刚性支承的临界转速

令  $k_h = k_v = 100k$ , 得  $n_c = 6044.5 \text{r/min}$ ,

令  $k_h = k_v = 1000k$ , 得  $n_c = 6071.7 \text{r/min}$ ,

令  $k_h = k_v = 10000k$ , 得  $n_c = 6074.4 \text{r/min}$ 。

这个算例说明, 计入支承弹性后, 系统在水平方向和垂直方向的两个临界转速比较接近, 且总是小于刚性支承的临界转速。当支承的刚度系数  $k_h$ 、 $k_v$  比转轴的刚度  $k$  大 2~4 个数量级时, 按弹性支承模型计算得到的临界转速与刚性支承的结果相差很小。

### 5.3 不平衡响应的涡动形态

由式(5-19)可得下面的关系

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1 \quad (5-23)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{e\Omega^2}{\omega_x^2 - \Omega^2} \\ A_y &= \frac{e\Omega^2}{\omega_y^2 - \Omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-24)$$

上式表明, 由不平衡引起的中心  $o$  的涡动轨迹为一椭圆, 其长、短轴在坐标轴上。当  $\omega_x = \omega_y$  即支承是各向同性时, 涡动轨迹是圆轨迹, 这和刚性支承时的涡动图象是相同的。下面我们要讨论的是支承为各向异性时椭圆轨迹的涡动方向。为了讨论方便, 用复数  $\rho = x + jy$  将式(5-19)的两个等式合并在一起得

$$\rho = A_x \cos \Omega t + j A_y \sin \Omega t \quad (5-25)$$

由式(3-65)得

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \Omega t &= e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t} \\ 2j \sin \Omega t &= e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t} \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

将上式代入式(5-25)得

$$\rho = \rho_+ e^{j\Omega t} + \rho_- e^{-j\Omega t} \quad (5-27)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \rho_+ &= (A_x + A_y)/2 \\ \rho_- &= (A_x - A_y)/2 \end{aligned} \right\} \quad (5-28)$$

式(5-27)说明,由不平衡力激起的圆盘中心 $o$ 的不平衡响应 $\rho$ 由两部分组成,第一部分 $\rho_+ e^{j\Omega t}$ 表示在复平面内半径为 $|\rho_+|$ 的圆运动,运动的频率就是转轴的旋转角频率,且与轴同向旋转;第二部分 $\rho_- e^{-j\Omega t}$ 表示复平面内半径为 $|\rho_-|$ 的圆,圆运动的频率也是轴的旋转角频率,但与轴反向旋转。由3.8节的分析知道,将两个反向旋转的圆运动叠加在一起得到一个椭圆。椭圆的旋转方向如下

$|\rho_+| > |\rho_-|$ , 椭圆轨迹与轴同向旋转;

$|\rho_+| < |\rho_-|$ , 椭圆轨迹与轴反向旋转;

$|\rho_+| = |\rho_-|$ , 涡动轨迹退化为直线。

由式(5-24)、式(5-28)知道, $\rho_+$ 和 $\rho_-$ 都是实数,故椭圆的长、短轴总是在坐标轴上。

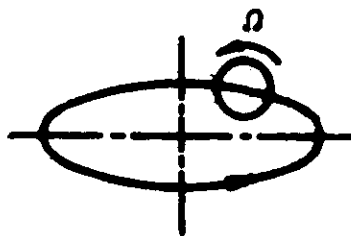
由式(5-28)得

$$|\rho_+|^2 - |\rho_-|^2 = A_x A_y = \frac{e^2 \Omega^4}{(\omega_x^2 - \Omega^2)(\omega_y^2 - \Omega^2)} \quad (5-29)$$

上式表明,当轴工作在不同的转速范围内时,圆盘中心 $o$ 的涡动方向是不同的。

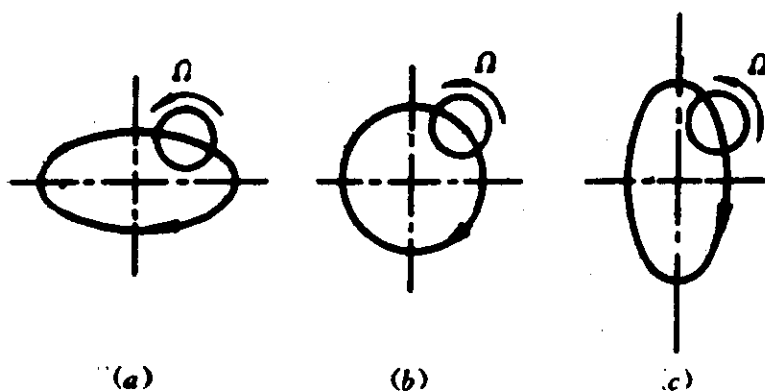
当 $0 < \Omega < \omega_x$ 时, $|\rho_+| > |\rho_-|$ , $o$ 点的涡动轨迹是一个与轴同向旋转的椭圆,长轴在 $x$ 轴上,如图5-6所示。

当 $\omega_x < \Omega < \omega_y$ 时, $|\rho_+| < |\rho_-|$ , $o$ 点的涡动轨迹是一个与轴

图 5-6  $\Omega < \omega_x$  时的涡动图象

反向旋转的椭圆,长轴方向不定,如图 5-7 所示。要注意的是,在实际运行中的转子很难观察到反向涡动的情况。因为支承在水平方向和垂直方向的刚度尽管不同,但差别较小。因此  $\omega_x$ 、 $\omega_y$  比较接近,转轴在  $\omega_x \sim \omega_y$  之间运行的振动很大,为了确保机组稳定运行,一般都是快速冲过这一转速区域。

当  $\Omega > \omega_y$  时,  $|\rho_+| > |\rho_-|$ ,  $o$  点的涡动轨迹由反向涡动又变为同向涡动,椭圆长轴在  $y$  轴上(见图 5-8a)。当  $\Omega \gg \omega_y$  时,  $|\rho_+| \approx e$ ,  $|\rho_-| \approx 0$ , 此时涡动轨迹是一个与轴同向旋转的圆(见图 5-8b)。

图 5-7  $\omega_x < \Omega < \omega_y$  时的涡动图象

$$(a) \omega_x < \Omega < \sqrt{(\omega_x^2 + \omega_y^2)/2}; \quad (b) \Omega = \sqrt{(\omega_x^2 + \omega_y^2)/2};$$

$$(c) \sqrt{(\omega_x^2 + \omega_y^2)/2} < \Omega < \omega_y.$$

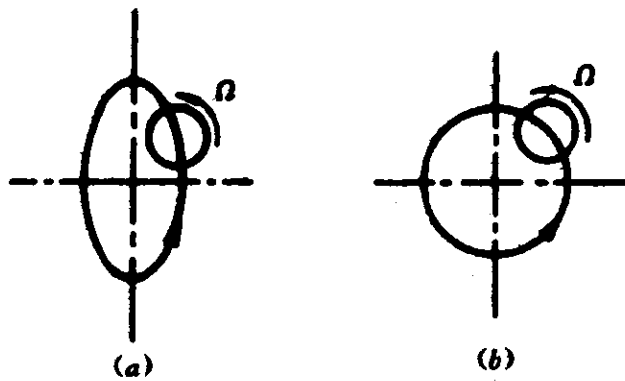


图 5-8  $\Omega > \omega$  时的涡动图象

在 3.8 节中讨论的涡动形态是系统作自由振动的涡动形态，其涡动轨迹为幅值不断衰减的椭圆。涡动频率是系统的某阶固有频率  $\omega$ ，但圆盘中心不作等角速动涡动，涡动一周的时间为  $T = 2\pi/\omega$ 。而这一节讨论的涡动是由不平衡力激起的强迫振动的涡动形态，圆盘中心的涡动轨迹为一幅值不变的椭圆，涡动频率就是转轴的旋转角频率  $\Omega$ ，涡动一周的时间为  $T = 2\pi/\Omega$ 。

#### 5.4 有阻尼的单圆盘转子系统

在前面的分析中，一直没有考虑阻尼的作用。

如果轴的工作转速小于一阶临界转速，这一转轴称为刚性轴。如果轴的工作转速大于一阶临界转速，则称这一转轴为柔性轴。前面的分析表明，超临界运行的转子，运转比较平稳。但是，在起动过程中要经过临界转速。不考虑阻尼时，在临界转速处的响应幅值为无穷大，使得机组冲过临界转速似乎不可能。但是，实际机组总是存在阻尼的。阻尼对临界转速的影响较小，但它可以控制转子的振幅不致太大。这就使得机组越过临界转速在超临界状态下运行成为可能。

下面以刚性支承为例，讨论阻尼对临界转速与不平衡响应的影

响。考虑了阻尼的影响后，作用在图 5-1 的圆盘上的力除惯性

力与恢复力增量外,还受到阻尼力的作用。按照 5.1 节的分析,可以得到有阻尼时圆盘中心  $o$  的运动方程为

$$m\ddot{\rho} + r\dot{\rho} + k\rho = me\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (5-30)$$

其特征方程为

$$mv^2 + rv + k = 0$$

由此得两个特征值为

$$\nu_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_k^2} \quad (5-31)$$

式中  $\mu = r/(2m)$ 。

一般情况下,阻尼系数  $r$  较小,  $\mu^2 - \omega_k^2$  往往小于零,这称为弱阻尼状态。在弱阻尼状态下,式(5-31)可表示为

$$\nu_{1,2} = -\mu \pm j\omega'_k \quad (5-32)$$

式中  $\omega'_k = \sqrt{\omega_k^2 - \mu^2}$  —— 阻尼固有频率。

为了讨论阻尼对临界转速的影响,将阻尼固有频率  $\omega'_k$  展开成级数的形式有

$$\omega'_k = \omega_k \sqrt{1 - \xi^2} = \omega_k (1 - \xi^2/2 - \dots) \quad (5-33)$$

式中  $\xi = \mu/\omega_k$ 。

在弱阻尼状态  $\xi \ll 1$ ,故上式可进一步表示成

$$\omega'_k \approx \omega_k$$

这表明有阻尼时,系统的固有频率基本保持不变,即阻尼对临界转速的影响很小。计算临界转速往往不考虑阻尼的影响,原因就出于此。

下面再来讨论阻尼对不平衡响应的的影响。

将式(5-30)两边除以  $m$  得

$$\ddot{\rho} + 2s\dot{\rho} + \omega_k^2\rho = e\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (5-34)$$

式中  $2s = r/m$ 。

设上式的特解为  $\rho = Ae^{j\Omega t}$ ,代入式(5-34)得

$$A = \frac{e p^2 [(1 - p^2) - j2s p]}{(1 - p^2)^2 + (2s p)^2} = |A| e^{-j\beta} \quad (5-35)$$

式中  $p = \Omega/\omega_k$  —— 无量纲频率比;

$$\left. \begin{aligned} |A| &= \frac{ep^2}{\sqrt{(1-p^2)^2 + (2sp)^2}} \\ \beta &= \text{tg}^{-1}(2sp)/(1-p^2) \\ \bar{s} &= s/\omega_k = r/(2m\omega_k) \end{aligned} \right\} \quad (5-36)$$

由此得圆盘中心  $o$  的不平衡响应为

$$\rho = \frac{ep^2}{\sqrt{(1-p^2)^2 + (2sp)^2}} e^{j(\Omega t - \beta)} \quad (5-37)$$

上式表明有阻尼时,中心  $o$  的不平衡响应与不平衡激振力矢量  $me\Omega^2 e^{j\Omega t}$  之间有一滞后角  $\beta$ 。中心  $o$ 、质心  $c$  与坐标原点  $o_0$  三点不在同一直线上。中心  $o$  的涡动轨迹仍然是一个与轴同向旋转的圆。图 5-9、图 5-10 分别是振幅  $|A|$  和滞后角  $\beta$  与频率比  $p$  的关系。

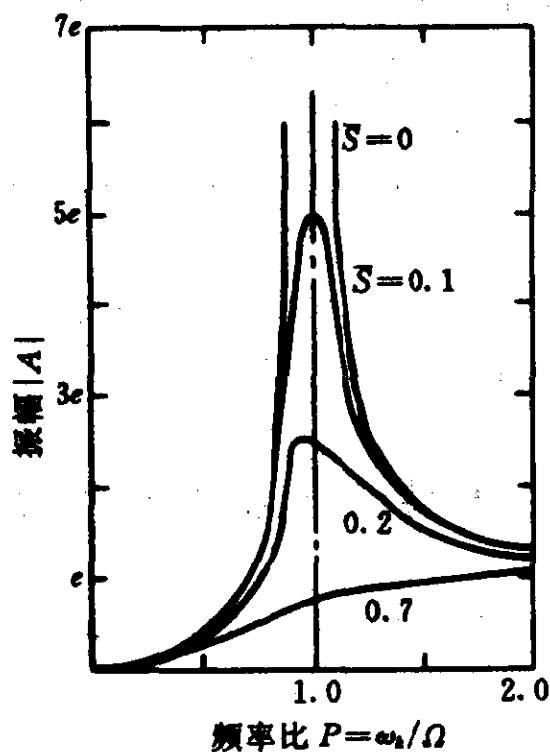


图 5-9 振幅  $|A|$  与频率比  $p$  的关系

由图 5-9 知道,当阻尼较小时,有阻尼与无阻尼的响应曲线相差较小,但在共振附近差别较大。对于无阻尼系统,  $p=1$  时振幅

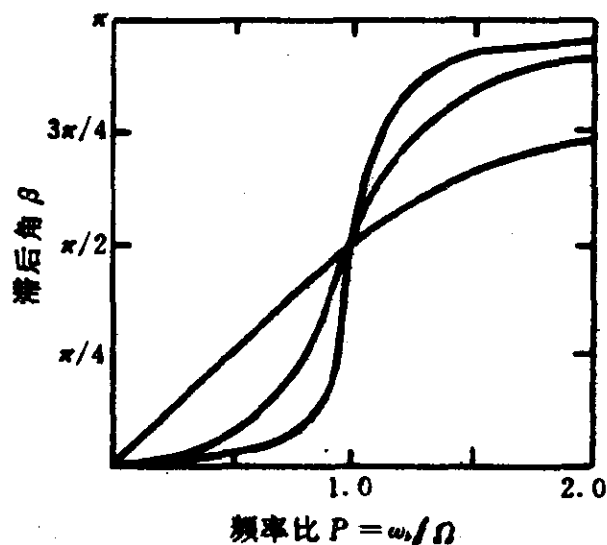


图 5-10 滞后角  $\beta$  与频率比  $P$  的关系

为无穷大；有阻尼时， $p = 1$  处的振幅仅为有限值。当  $p$  略大于 1 时，振幅  $|A|$  取得最大值为  $e/(2\zeta)$ 。此外还可以看到：有阻尼时，临界转速下的振幅并不是最大值，最大振幅对应的转速也不是临界转速。但由于差别较小，在实际使用中，往往不加严格区别。近似认为临界转速下的振幅最大，最大振幅对应的转速即为临界转速。

图 5-10 表明，当  $p = 1$  时， $\beta = \pi/2$ 。即位移响应落后不平衡激振力  $\pi/2$  相位。当  $p \gg 1$  时， $\beta \approx \pi$ ，此时可近似认为  $o_0$ 、 $o$ 、 $C$  三点又在同一直线上，并且仍然具有自动对中现象。

## 5.5 临界转速与系统参数的关系

由前面的分析知道，系统的固有频率  $\omega_k$  为

$$\omega_k = \sqrt{k/m} \quad (5-38)$$

因此，提高轴的刚度或减小圆盘的质量均可提高临界转速。

对简支梁来说，梁中央的刚度  $2k$  为

$$2k = 48EJ/l^3 = 48E\pi d^4/(64l^3)$$

由上面的等式知道，增大轴径或缩短支承跨距可以提高转轴刚度，即可以提高临界转速。



## 第六章 实际转子-轴承系统的临界转速与不平衡响应

和第四章相同,实际机组的转子-轴承系统,往往简化为多支承多圆盘的力学系统。计算这一系统的临界转速与不平衡响应,常用的方法有两种:一种是传递矩阵法及其变形里卡迪传递矩阵法;另一种是有限元分析法。本书采用后者即有限元分析法。

### 6.1 转子和支座的简化模型

转子离散成带有多个集总圆盘的力学模型,圆盘与圆盘之间用不计质量的弹性轴段联接。不计陀螺力矩的影响。详见 4.2 节。

支座的简化力学模型考虑以下两种情况。第一种情况认为基础是绝对刚性的,将轴承简化为各向同性的弹簧,刚度系数用  $k_r$  表示。此时的轴系简化力学模型如图 6-1 所示。

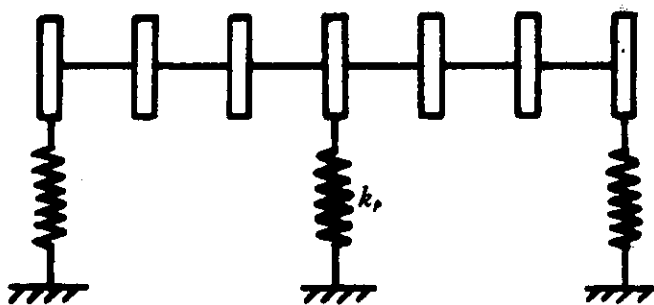


图 6-1 刚性基础时轴系的简化模型

如果支座使用的是滚动轴承,上述简化模型是合适的。对于使用滑动轴承的支座来说,轴承不但提供阻尼,而且还提供交叉刚度系数  $k_{xy}$ 、 $k_{yx}$ 。前一章分析表明,阻尼对临界转速的影响很小,计算时可以略去。现在进一步假设转子在水平方向与垂直方向的振动

耦合较弱,并认为轴承是各向同性的。这样对使用滑动轴承的支座有

$$d_{xx} = d_{yy} = d_{xy} = d_{yx} = 0$$

$$k_{xy} = k_{yx} = 0$$

$$k_{xx} = k_{yy} = k_p$$

这样处理后,不论支座采用滚动轴承还是滑动轴承,都可以简化为各向同性的弹簧。只要基础是刚性的,就可用图 6-1 的力学模型来表征轴系的力学行为。

第二种情况认为基础是弹性的,轴承仍然简化为各向同性的弹簧,其刚度系数为  $k_p$ 。将基础也简化成各向同性的弹簧,刚度系数为  $k_f$ 。 $m_f$  表示轴承座及基础的参振质量。图 6-2 所示是相应的轴系简化力学模型。

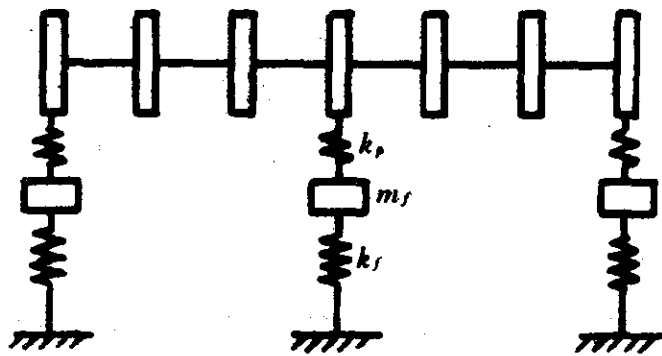


图 6-2 弹性基础时轴系的简化模型

实践表明,将滑动轴承简化成各向同性的弹簧,由此引起的临界转速的计算误差是很小的。此外,滑动轴承的刚度系数与转速有关,但常用某一转速范围内的平均值代替,视  $k_p$  为常数。参考文献 [1] 认为由此引起的计算误差不大。

在 6.9 节中讨论的阻尼临界转速中,轴承被简化成各向异性的弹簧,并计入了交叉刚度及阻尼系数的影响。

限于篇幅,本章不专门讨论刚性支承的情况,而将支承轴承处理成弹性支承。如果支承轴承的刚度确实比转轴的刚度大很多,可

以近似认为是刚性支承。计算时只需令  $k_r$  足够大, 所得结果自然就是刚性支承的结果。

## 6.2 转子 - 轴承 - 刚性基础系统的运动方程

将式(4-32)、式(4-33)重写一遍为

$$[K_{11}]\{Y\} + [K_{12}]\{\theta\} = -\{P_y\} \quad (6-1)$$

$$[K_{21}]\{Y\} + [K_{22}]\{\theta\} = \{0\} \quad (6-2)$$

以上两个方程是转轴在  $yoz$  平面内各结点的位移和力之间的关系。其中  $\{Y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^T$ ,  $\{\theta\} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}^T$ 。  $y_i$  为第  $i$  个集总圆盘(结点)中心  $o_i$  相对于静平衡位置的垂直位移,  $\theta_i$  为第  $i$  个集总圆盘相对于静平衡位置时的转角。  $[K_{11}]$ 、 $[K_{22}]$  是实对称矩阵,  $[K_{12}] = [K_{21}]^T$ , 它们的具体表达式见第四章。

由式(6-2)得

$$\{\theta\} = -[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{Y\} \quad (6-3)$$

将上式代入式(6-1)得

$$[K']\{Y\} = -\{P_y\} \quad (6-4)$$

式中  $[K'] = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]$

$$\{P_y\} = \{p_{y1}, p_{y2}, \dots, p_{yn}\}^T$$

和第四章一样, 将位移矢量分块成

$$\{Y\} = \{Y_I^T, Y_B^T\}^T$$

这样式(6-4)可改写为(为书写方便略去了  $[K']$  的上角标“'”)

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IB} \\ K_{BI} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_I \\ Y_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} P_{yI} \\ P_{yB} \end{Bmatrix} \quad (6-5)$$

$\{Y_I\}$ 、 $\{Y_B\}$  分别是由内结点和外结点的位移组成的位移矢量。 $\{P_{yI}\}$ 、 $\{P_{yB}\}$  分别是由内结点和外结点受的力构成的力矢量, 分别称为内结点力矢量和外结点力矢量。以下约定用  $l$  表示外结点的个数,  $t$  表示内结点数。则有

$$\{Y_I\} = \{y_{I1}, y_{I2}, \dots, y_{It}\}^T$$

$$\begin{aligned}\{Y_B\} &= \{y_{B1}, y_{B2}, \dots, y_{Bl}\}^T \\ \{P_{yI}\} &= \{p_{yI1}, p_{yI2}, \dots, p_{yIt}\}^T \\ \{P_{yB}\} &= \{p_{yB1}, p_{yB2}, \dots, p_{yBl}\}^T \\ l + t &= n\end{aligned}$$

在第四章认为,任一结点受的力  $p_{yi}$  由惯性力、轴承力、外部阻尼力及交叉刚度激振力四部分组成。计算临界转速与不平衡响应时,一般不考虑外部阻尼力与交叉刚度激振力的影响(在 6.9 节、6.10 节中考虑了它们的影响),因此  $p_{yi}$  仅由惯性力和轴承力两部分组成。而对于内结点,没有作用轴承力,故只有惯性力一项。

设第  $i$  个内结点的质量和偏心距分别是  $m_{Ii}$  和  $e_{Ii}$ ,这样第  $i$  个内结点的力  $p_{yIi}$  可表示为

$$p_{yIi} = m_{Ii}\ddot{y}_{Ii} - m_{Ii}e_{Ii}\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta_{Ii}) \quad (6-6)$$

式中 下角标“ $Ii$ ”——第  $i$  个内结点。

$\beta_{Ii}$  ——第  $i$  个内结点的圆盘在  $t = 0$  的初始时刻  $\alpha$  与  $x$  轴的夹角。

对于单圆盘转子,合适地选择起始时间总可以使  $\beta = 0$ 。但对于多圆盘转子系统来说,每个圆盘的不平衡量往往不在同一平面内,故  $\beta$  角总是存在的。

由式(6-6)知道,内结点力矢量  $\{P_{yI}\}$  可表示为

$$\{P_{yI}\} = [M_{II}]\{Y_I\} - \Omega^2\{F_{yI}\} \quad (6-7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [M_{II}] &= \text{diag}[m_{I1}, m_{I2}, \dots, m_{It}] \\ \{Y_I\} &= \{y_{I1}, y_{I2}, \dots, y_{It}\}^T \\ \{F_{yI}\} &= \{f_{yI1}, f_{yI2}, \dots, f_{yIt}\}^T \\ f_{yIi} &= m_{Ii}e_{Ii}\sin(\Omega t + \beta_{Ii}) \end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

式(6-7)是内结点力矢量的表达式,下面再来讨论外结点力矢量的表达式。外结点上除惯性力外,还作用有轴承反力。图 6-3 是一个支承在轴承上的圆盘,轴承用刚度系数  $k_p$  表示。

图 6-3(a)的实线表示静平衡时圆盘的位置,中心为  $o_0$ ;虚线表示涡动后圆盘的位置,中心为  $o$ 。涡动后的中心  $o$  相对于  $o_0$  在  $yoz$

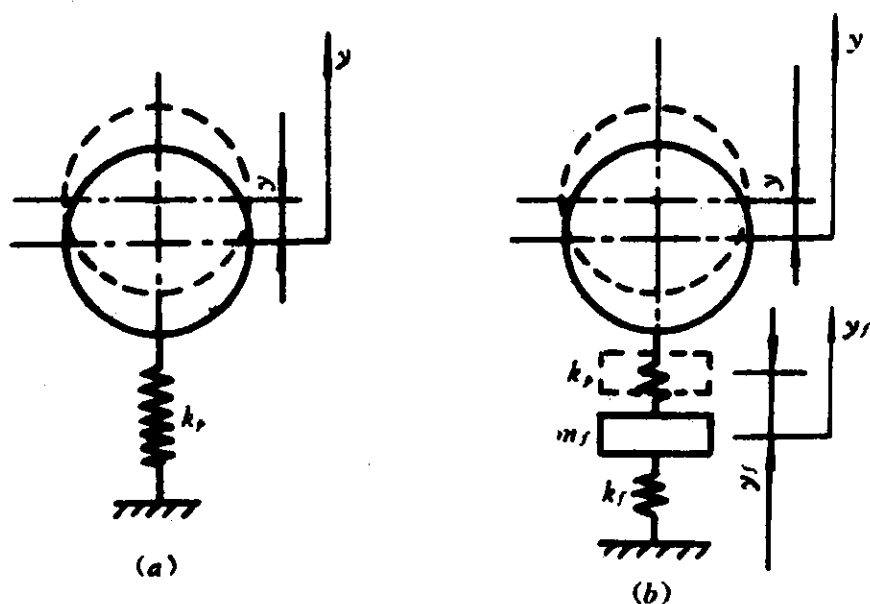


图 6-3 支承在轴承上的集总圆盘

(a) 刚性基础; (b) 弹性基础。

平面内的位移用  $y$  表示。涡动时轴承在  $y$  方向施加给圆盘的恢复力增量为  $k_p y$ 。这样外结点的力矢量  $\{P_{yB}\}$  可表示成下面的形式

$$\{P_{yB}\} = [M_{BB}]\{\ddot{Y}_B\} + [K_p]\{Y_B\} - \Omega^2\{F_{yB}\} \quad (6-9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [M_{BB}] &= \text{diag}[m_{B1}, m_{B2}, \dots, m_{Bi}] \\ [K_p] &= \text{diag}[k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pi}] \\ \{Y_B\} &= \{y_{B1}, y_{B2}, \dots, y_{Bi}\}^T \\ \{F_{yB}\} &= \{f_{yB1}, f_{yB2}, \dots, f_{yBi}\}^T \\ f_{yBi} &= m_{Bi} e_{Bi} \sin(\Omega t + \beta_{Bi}) \end{aligned} \right\} \quad (6-10)$$

下角标“ $B_i$ ”——第  $i$  个外结点

将式(6-7)、式(6-9)代入式(6-5)得

$$\begin{bmatrix} M_{II} & \\ & M_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_I \\ \ddot{Y}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{II} & K_{IB} \\ K_{BI} & K_{BB} + K_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_I \\ Y_B \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} F_{yI} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} \quad (6-11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{令} \quad [M] &= \text{diag}[M_{II}, M_{BB}] \\ \{q_y\} &= \{Y_I^T, Y_B^T\}^T; \quad \{F_y\} = \{F_{yI}^T, F_{yB}^T\}^T \\ [K] &= \begin{bmatrix} K_{II} & K_{IB} \\ K_{BI} & K_{BB} + K_p \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (6-12)$$

将上式代入式(6-11)得

$$[M]\{\ddot{q}_y\} + [K]\{q_y\} = \Omega^2\{F_y\} \quad (6-13)$$

上式是系统在  $yoz$  平面内的运动方程,  $[M]$ 、 $[K]$  分别称为质量矩阵和刚度矩阵。按照同样的分析方法可得  $xoz$  平面内的运动方程为

$$[M]\{\ddot{q}_x\} + [K]\{q_x\} = \Omega^2\{F_x\} \quad (6-14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中} \quad \{q_x\} &= \{X_I^T, X_B^T\}^T; \quad \{F_x\} = \{F_{xI}^T, F_{xB}^T\}^T \\ \{X_I\} &= [x_{I1}, x_{I2}, \dots, x_{It}]^T \\ \{X_B\} &= [x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bl}]^T \\ \{F_{xI}\} &= \{f_{xI1}, f_{xI2}, \dots, f_{xIt}\}^T \\ \{F_{xB}\} &= \{f_{xB1}, f_{xB2}, \dots, f_{xBl}\}^T \\ f_{xIi} &= m_{Ii}e_{Ii}\cos(\Omega t + \beta_{Ii}) \\ f_{xBi} &= m_{Bi}e_{Bi}\cos(\Omega t + \beta_{Bi}) \end{aligned} \right\} (6-15)$$

式(6-13)、式(6-14)是系统在  $yoz$  和  $xoz$  平面内的运动方程, 两者的差别仅在于方程的右端项。由于支座简化为各向同性的弹簧, 下面采用与 5.1 节类似的方法, 用复数位移矢量  $\{\rho\} = \{q_x\} + j\{q_y\}$  将系统在  $xoz$ 、 $yoz$  平面内的运动方程合并在一起得

$$[M]\{\ddot{\rho}\} + [K]\{\rho\} = \Omega^2\{F\}e^{j\Omega t} \quad (6-16)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中} \quad \{F\} &= \{f_1, f_2, \dots, f_t, f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_n\}^T \\ f_i &= m_{Ii}e_{Ii}e^{j\beta_{Ii}} \quad (i = 1, t) \\ f_{t+i} &= m_{Bi}e_{Bi}e^{j\beta_{Bi}} \quad (i = 1, l) \end{aligned} \right\} (6-17)$$

式(6-16)就是用复数位移向量  $\{\rho\}$  表示的运动方程。

### 6.3 转子 - 轴承 - 弹性基础系统的运动方程

比较图 6-1 和图 6-2 知道,弹性基础与刚性基础的差别仅在于支座模型不同。即外结点力矢量  $\{F_{yB}\}$  的表达式不同,而内结点力矢量  $\{F_{yI}\}$  的表达式不变。将式(6-7)代入式(6-5)的上半部分得

$$[M_{II}]\{\ddot{Y}_I\} + [K_{II}]\{Y_I\} + [K_{IB}]\{Y_B\} = \Omega^2\{F_{yI}\} \quad (6-18)$$

图 6-3(b) 是支承在轴承上的集总圆盘。图中实线表示静平衡时圆盘及参振质量的位置,  $y$  和  $y_f$  分别表示涡动后圆盘中心及参振质量偏离各自的静平衡位置的距离。

除自身产生的惯性力外,涡动时轴承还施加一弹性恢复力增量  $k_p(y - y_f)$  作用在圆盘上。第  $i$  个外结点圆盘上受的力可表示为

$$p_{yBi} = m_{Bi}\ddot{y}_{Bi} + k_{pi}(y_{Bi} - y_{fi}) - m_{Bi}e_{Bi}\Omega^2\sin(\Omega t + \beta_{Bi}) \quad (6-19)$$

根据上式知道外结点力矢量  $\{P_{yB}\}$  可表示为

$$\{P_{yB}\} = [M_{BB}]\{\ddot{Y}_B\} + [K_p](\{Y_B\} - \{Y_f\}) - \Omega^2\{F_{yB}\} \quad (6-20)$$

式中  $\{Y_f\} = \{y_{f1}, y_{f2}, \dots, y_{fn}\}^T$

$[M_{BB}]$ 、 $[K_p]$ 、 $\{Y_B\}$ 、 $\{F_{yB}\}$ ——表达式见式(6-10)。

将式(6-20)代入式(6-5)的下半部分得

$$[M_{BB}]\{\ddot{Y}_B\} + [K_{BI}]\{Y_I\} + [K_{BB}]\{Y_B\} + [K_p]\{Y_B - Y_f\} = \Omega^2\{F_{yB}\} \quad (6-21)$$

现在我们来讨论参振质量的运动方程。作用在  $m_f$  上的力共有三个,一个是惯性力,另两个是弹性恢复力增量。由这三个力的平衡可得

$$m_{fi}\ddot{y}_{fi} + k_{fi}y_{fi} - k_{pi}(y_{Bi} - y_{fi}) = 0 \quad (6-22)$$

根据式(6-22),将所有参振质量的运动方程综合在一起并写成矩阵的形式有

$$[M_f]\{\ddot{Y}_f\} + [K_f]\{Y_f\} - [K_p](\{Y_B\} - \{Y_f\}) = \{0\} \quad (6-23)$$

式中  $[M_f] = \text{diag}[m_{f1}, m_{f2}, \dots, m_{fi}]$

$$[K_f] = \text{diag}[k_{f1}, k_{f2}, \dots, k_{fi}]$$

将式(6-18)、式(6-21)和式(6-23)结合在一起得到系统在  $yoz$  平面内的运动方程为

$$[M]\{\ddot{q}_y\} + [K]\{q_y\} = \Omega^2\{F_y\} \quad (6-24)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [M] &= \text{diag}[M_{II}, M_{BB}, M_f] \\ \{q_y\} &= \{Y_I^T, Y_B^T, Y_f^T\}^T \\ \{F_y\} &= \{F_{yI}^T, F_{yB}^T, 0\}^T \\ [K] &= \begin{bmatrix} K_{II} & K_{IB} & 0 \\ K_{BI} & K_{BB} + K_p & -K_p \\ 0 & -K_p & K_p + K_f \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6-25)$$

类似地,可以得到系统在  $xoz$  平面内的运动方程为

$$[M]\{\ddot{q}_x\} + [K]\{q_x\} = \Omega^2\{F_x\} \quad (6-26)$$

式中  $\{q_x\} = \{X_I^T, X_B^T, X_f^T\}^T$

$$\{F_x\} = \{F_{xI}^T, F_{xB}^T, 0\}^T$$

按照前一节的处理措施,用复数位移  $\{\rho\} = \{q_x\} + j\{q_y\}$  将  $xoz$ 、 $yoz$  两个平面内的运动方程综合在一起得

$$[M]\{\ddot{\rho}_y\} + [K]\{\rho\} = \Omega^2\{F\}e^{j\Omega t} \quad (6-27)$$

式中  $\{F\} = \{f_1, f_2, \dots, f_i, f_{i+1}, \dots, f_n, 0, 0, \dots, 0\}^T$ ;

$f_1, f_2, \dots, f_n$ ——表达式同式(6-17)。

## 6.4 临界转速与模态振型

### 1. 临界转速

在前面两节中,建立了轴系的运动方程。对于不同的支座模型,运动方程的形式是一致的,即可用下面的方程统一表示



$$[M]\{\ddot{\rho}\} + [K]\{\rho\} = \Omega^2 \{F\} e^{j\Omega t} \quad (6-28)$$

式中 质量矩阵 $[M]$ —— 对角矩阵;

刚度矩阵 $[K]$ —— 对称矩阵。

计算临界转速与模态振型,核心是计算轴系的特征值与特征向量。式(6-28)的齐次方程即系统作自由振动的方程为

$$[M]\{\ddot{\rho}\} + [K]\{\rho\} = \{0\} \quad (6-29)$$

令 $\{\rho\} = \{\phi\}e^{\nu t}$ 代入上式得

$$\nu^2 [M]\{\phi\} + [K]\{\phi\} = \{0\} \quad (6-30)$$

式中  $\nu$  —— 特征值;

$\{\phi\}$  —— 特征向量。

对于一个具有 $n$ 个自由度的力学系统,由式(6-30)可求得 $2n$ 个特征值 $\nu$ 和相应的 $2n$ 个特征向量 $\{\phi\}$ 。为了计算临界转速与模态振型,先证明下面两条性质。

(1)  $2n$ 个特征值 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n}$ 是 $n$ 对共轭纯虚数

用 $\{\phi\}^T$ 左乘式(6-30)得

$$\nu^2 = \frac{\{\phi\}^T [K] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [M] \{\phi\}} \quad (6-31)$$

质量矩阵 $[M]$ 总是对称正定的,即有 $\{\phi\}^T [M] \{\phi\} > 0$ ;刚度矩阵 $[K]$ 是对称正定或半正定的,即有 $\{\phi\}^T [K] \{\phi\} \geq 0$ ,故有 $\nu^2 \leq 0$ 。 $\nu = 0$ 相当于转子作刚体运动,我们不讨论这种情况,这样我们总有 $\nu^2 < 0$ 。因此系统 $2n$ 个特征值 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n}$ 必定是 $n$ 对共轭纯虚数。

(2) 一对共轭纯虚数特征值对应的特征向量是相等的实数向量

设一对共轭纯虚数特征值为 $\nu = j\omega, \bar{\nu} = -j\omega$ ,相应的特征向量分别记为 $\{\phi\}$ 和 $\{\bar{\phi}\}$ 。将它们分别代入式(6-30)得

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = \{0\}$$

$$([K] - \omega^2 [M])\{\bar{\phi}\} = \{0\}$$

以上是两个齐次线性方程组,由于系数矩阵相同,其解也必定相同,故有

$$\{\phi\} = \{\bar{\phi}\} = \text{实数向量}$$

根据上面证明的两条性质,系统  $2n$  个特征值及相应的特征向量可记为

$$\begin{aligned} & \pm j\omega_1, \pm j\omega_2, \dots, \pm j\omega_n \\ & \{\phi^{(1)}\}, \{\phi^{(2)}\}, \dots, \{\phi^{(n)}\} \end{aligned}$$

这样式(6-30)可改写为

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (6-32)$$

求解式(6-32)就可以得  $n$  个特征值  $\omega_i^2 (i=1, n)$ , 即  $n$  个固有频率  $\omega_i$  的平方。将  $n$  个特征值按从小到大的次序排列成

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2$$

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  分别称为第一阶固有频率、第二阶固有频率... 第  $n$  阶固有频率。与此相应的临界转速分别称为第一阶临界转速、第二阶临界转速... 式(6-32)的矩阵  $[M]$ 、 $[K]$  是系统在  $yoz$  或  $xoz$  平面内运动方程的质量矩阵与刚度矩阵, 因此建立了转子在某一个平面内的运动方程, 就可以求得系统的临界转速以及下面要讨论的模态振型。

## 2. 模态振型

系统作自由振动时, 其位移响应可表示为

$$\begin{aligned} \{\rho\} &= \sum_{r=1}^n (a^{(r)}\{\phi^{(r)}\}e^{j\omega_r t} + b^{(r)}\{\bar{\phi}^{(r)}\}e^{-j\omega_r t}) \\ &= \sum_{r=1}^n (a^{(r)}\{\phi^{(r)}\}e^{j\omega_r t} + b^{(r)}\{\bar{\phi}^{(r)}\}e^{-j\omega_r t}) \quad (6-33) \end{aligned}$$

式中  $a^{(r)}, b^{(r)}$  —— 第  $r$  阶模态参数, 一般为复数, 由系统的初始条件决定;

$\omega_r$  —— 第  $r$  阶固有频率;

$\{\phi^{(r)}\}$  —— 与特征值  $\omega_r^2$  相应的  $r$  阶模态振型(特征向量)。

令  $\{\rho^{(r)}\} = a^{(r)}\{\phi^{(r)}\}e^{j\omega_r t} + b^{(r)}\{\bar{\phi}^{(r)}\}e^{-j\omega_r t}$ , 并代入式(6-33)得

$$\{\rho\} = \sum_{r=1}^n \{\rho^{(r)}\} \quad (6-34)$$

式中  $\{\rho^{(r)}\}$  —— 第  $r$  阶主振动。

上式说明, 自由振动的位移响应  $\{\rho\}$  由  $n$  个纯模态的主振动

$\{\rho^{(r)}\}$  叠加而成。假设系统存在这样一组特殊的初始条件,使得只有第  $r$  阶的模态参数  $a^{(r)}$  和  $b^{(r)}$  不等于零,而其他几阶的模态参数均等于零。即

$$a^{(i)} = 0; \quad b^{(i)} = 0, \quad (i \neq r)$$

在这一组特殊的初始条件下,系统只存在  $r$  阶主振动,因此式(6-34)可表示成

$$\begin{aligned} \{\rho\} &= \{\rho^{(r)}\} \\ &= \{\phi^{(r)}\} (a^{(r)} e^{j\omega_r t} + b^{(r)} e^{-j\omega_r t}) \end{aligned} \quad (6-35)$$

设  $\{\rho\}$  和  $\{\phi^{(r)}\}$  的第  $i$  个元素记为  $\rho_i$  和  $\phi_i^{(r)}$ ,将上式写成分量的形式有

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1^{(r)} (a^{(r)} e^{j\omega_r t} + b^{(r)} e^{-j\omega_r t}) \\ \rho_2 &= \phi_2^{(r)} (a^{(r)} e^{j\omega_r t} + b^{(r)} e^{-j\omega_r t}) \\ &\vdots \\ \rho_n &= \phi_n^{(r)} (a^{(r)} e^{j\omega_r t} + b^{(r)} e^{-j\omega_r t}) \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

由前面几章的分析知道,任一圆盘中心的涡动轨迹  $\rho_i (i = 1, n)$  为一椭圆。由式(6-36)得

$$\frac{\rho_1}{\phi_1^{(r)}} = \frac{\rho_2}{\phi_2^{(r)}} = \dots = \frac{\rho_n}{\phi_n^{(r)}} \quad (6-37)$$

上式说明,转子轴线以任一  $r$  阶主振动涡动时,任意两圆盘中心位移的比值  $\rho_i/\rho_k$  等于该阶特征向量相应元素的比值  $\phi_i^{(r)}/\phi_k^{(r)}$ 。因此特征向量各元素的比值完全确定了各圆盘中心的位移比值,即确定了轴线的振动形态。所以第  $r$  阶特征向量  $\{\phi^{(r)}\}$  又被称为  $r$  阶模态振型。此外,式(6-37)还表明任意两圆盘中心的复数位移的比值  $\rho_i/\rho_k$  为一实数,这说明  $\rho_i$  与  $\rho_k$  的幅角相同或相差  $180^\circ$ ,轴线弯成一平面曲线。图 6-4 是轴线的涡动图象。

## 6.5 不平衡响应

计算不平衡响应的方法很多,这里只介绍最常用的模态叠加法。计算不平衡响应,就是计算运动方程(6-28)的特解。为了讨

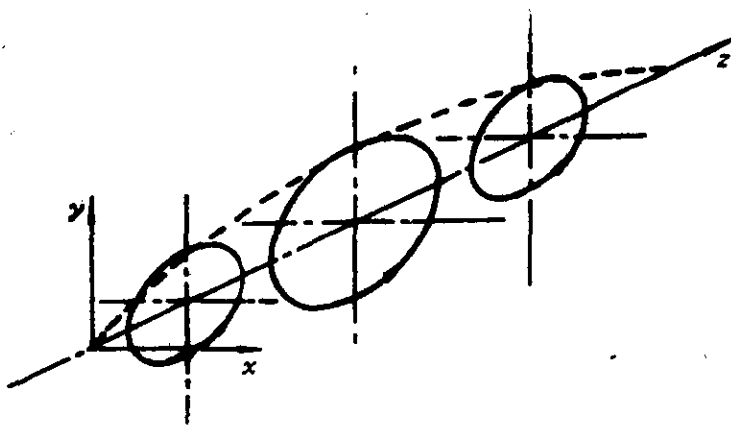


图 6-4 轴线转动图象

论方便,下面先证明固有频率与模态振型间的一些关系。

设  $\omega_r$ 、 $\omega_s$  分别是系统第  $r$  阶和第  $s$  阶固有频率,  $\{\phi^{(r)}\}$ 、 $\{\phi^{(s)}\}$  是相应的模态振型。根据式(6-32)有

$$[\mathbf{K}]\{\phi^{(r)}\} = \omega_r^2[\mathbf{M}]\{\phi^{(r)}\} \quad (6-38)$$

$$[\mathbf{K}]\{\phi^{(s)}\} = \omega_s^2[\mathbf{M}]\{\phi^{(s)}\} \quad (6-39)$$

用  $\{\phi^{(s)}\}^T$  左乘式(6-38)得

$$\{\phi^{(s)}\}^T[\mathbf{K}]\{\phi^{(r)}\} = \omega_r^2\{\phi^{(s)}\}^T[\mathbf{M}]\{\phi^{(r)}\} \quad (6-40)$$

用  $\{\phi^{(r)}\}^T$  左乘式(6-39)得

$$\{\phi^{(r)}\}^T[\mathbf{K}]\{\phi^{(s)}\} = \omega_s^2\{\phi^{(r)}\}^T[\mathbf{M}]\{\phi^{(s)}\} \quad (6-41)$$

由于  $[\mathbf{K}]$ 、 $[\mathbf{M}]$  均为对称矩阵,故有

$$\{\phi^{(r)}\}^T[\mathbf{K}]\{\phi^{(s)}\} = \{\phi^{(s)}\}^T[\mathbf{K}]\{\phi^{(r)}\} \quad (6-42)$$

$$\{\phi^{(r)}\}^T[\mathbf{M}]\{\phi^{(s)}\} = \{\phi^{(s)}\}^T[\mathbf{M}]\{\phi^{(r)}\} \quad (6-43)$$

式(6-40)减式(6-41)得

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\{\phi^{(s)}\}^T[\mathbf{M}]\{\phi^{(r)}\} = 0 \quad (6-44)$$

当  $\omega_r \neq \omega_s$  时,由上式得

$$\{\phi^{(s)}\}^T[\mathbf{M}]\{\phi^{(r)}\} = 0 \quad (6-45)$$

将上式回代到式(6-40)得

$$\{\phi^{(s)}\}^T[\mathbf{K}]\{\phi^{(r)}\} = 0 \quad (6-46)$$

式(6-45)、式(6-46)表明,不相等的两个固有频率对应的模态振型之间,既存在着对质量矩阵  $[\mathbf{M}]$  的正交性,又存在着对

刚度矩阵 $[K]$ 的正交性。这一性质称为模态振型的正交性。

当  $s = r$  时,由式(6-40)得

$$\{\phi^{(r)}\}^T [K] \{\phi^{(r)}\} = \omega_r^2 \{\phi^{(r)}\}^T [M] \{\phi^{(r)}\} \quad (6-47)$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} m_r &= \{\phi^{(r)}\}^T [M] \{\phi^{(r)}\} \\ k_r &= \{\phi^{(r)}\}^T [K] \{\phi^{(r)}\} \end{aligned} \right\} \quad (6-48)$$

$m_r, k_r$  分别称为第  $r$  阶主质量和  $r$  阶主刚度。由于模态振型  $\{\phi^{(r)}\}$  的每个元素只具有确定的比值,但每个元素的真实值是不定的。这样就使得由式(6-48)决定的  $m_r, k_r$  的值是不定的。如果欲使式(6-48)具有确定的值,必须给各阶模态振型施加一个约束条件。这一约束条件常取为

$$\{\phi^{(r)}\}^T [M] \{\phi^{(r)}\} = 1 \quad (6-49)$$

根据式(6-49)可以得到一组特定的模态振型  $\{\phi^{(r)}\}$ , 它的每个元素之间不但具有不变的比值,而且每个元素具有确定的值。由式(6-49)确定的模态振型称为正则振型。对于正则振型  $\{\phi^{(r)}\}$ , 式(6-48)可表达为

$$\left. \begin{aligned} \{\phi^{(r)}\}^T [M] \{\phi^{(r)}\} &= 1 \\ \{\phi^{(r)}\}^T [K] \{\phi^{(r)}\} &= \omega_r^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-50)$$

用矩阵 $[\Phi]$ 表示由系统  $n$  个正则振型组成的矩阵,称为正则振型矩阵。

$$[\Phi] = [\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(n)}] \quad (6-51)$$

正则振型矩阵 $[\Phi]$ 的第  $r$  列就是系统的第  $r$  阶正则振型  $\{\phi^{(r)}\}$ 。根据式(6-45)、式(6-46)和式(6-50)得

$$\left. \begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [K] [\Phi] &= \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2] \end{aligned} \right\} \quad (6-52)$$

以上证明了模态振型的正交性并介绍了正则振型的概念。下面主要根据等式(6-52)讨论不平衡响应的计算。

在运动方程(6-28)中引进下面的坐标变换

$$\{\rho\} = [\Phi] \{\eta\} \quad (6-53)$$

中  $[\Phi]$ ——正则振型矩阵;

$\{\eta\}$ ——正则坐标;

$\{\rho\}$ ——物理坐标。

将上式代入式(6-28)得

$$[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [K][\Phi]\{\eta\} = \Omega^2\{F\}e^{j\Omega t} \quad (6-54)$$

用 $[\Phi]^T$ 左乘上式得

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\eta\} = \Omega^2\{T\}e^{j\Omega t} \quad (6-55)$$

式中  $\Omega^2\{T\}e^{j\Omega t}$ ——广义激振力矢量；

$$\{T\} = [\Phi]^T\{F\} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}^T;$$

$t_1, t_2, \dots, t_n$ ——均为复数。

将式(6-52)代入式(6-55)并写成分量的形式有

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 &= \Omega^2 t_1 e^{j\Omega t} \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 &= \Omega^2 t_2 e^{j\Omega t} \\ &\vdots \\ \ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n &= \Omega^2 t_n e^{j\Omega t} \end{aligned} \right\} \quad (6-56)$$

以上分析表明,具有  $n$  个自由度的系统的运动方程(6-28),经过式(6-53)所示的坐标变换后,变成了  $n$  个相互独立的运动方程(6-56),每个方程类似于单圆盘转子的运动方程(5-6)。所不同的是,式(5-6)中的坐标  $\rho$  为物理坐标,而式(6-56)中的坐标  $\eta_r$  是正则坐标。

对于上式中的任一第  $r$  个方程,可以方便地求得广义激振力  $\Omega^2 t_r e^{j\Omega t}$  激起的响应为

$$\eta_r = \frac{\Omega^2 t_r}{\omega_r^2 - \Omega^2} e^{j\Omega t} \quad (6-57)$$

当  $\Omega = \omega_r$  即轴的旋转角频率等于系统第  $r$  阶固频率时,第  $r$  个正则坐标上的响应趋于无穷大,此时称系统发生  $r$  阶共振。

有了系统在正则坐标上的响应,再通过坐标变换式(6-53)就可以方便地得到系统在物理坐标上的不平衡响应为

$$\{\rho\} = [\Phi]\{\eta\} = \sum_{r=1}^n \eta_r \{\phi^{(r)}\}$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{\Omega^2 t_r}{\omega_r^2 - \Omega^2} \{\phi^{(r)}\} e^{j\Omega t} \quad (6-58)$$

由上式可得任一第  $i$  个圆盘中心的不平衡响应为

$$\rho_i = \sum_{r=1}^n \eta_r \phi_i^{(r)} = \sum_{r=1}^n \frac{\Omega^2 t_r \phi_i^{(r)}}{\omega_r^2 - \Omega^2} e^{j\Omega t} \quad (6-59)$$

以上两式表明

(1) 圆盘中心的不平衡响应是系统各阶模态的线性组合, 各阶模态在响应中所占的比重与其加权系数  $\eta_r$  有关,  $\eta_r$  的含义是第  $r$  个正则坐标上的响应。当  $\Omega \approx \omega_r$  时, 第  $r$  阶模态的分量大大超过其他各阶模态的分量。

(2) 不平衡激起的圆盘中心的涡动轨迹是与轴同向旋转的圆, 涡动频率就是轴的旋转角频率  $\Omega$ , 而且各点作等角速度涡动。

将式(6-59)进一步表示成如下的形式

$$\rho_i = A_i e^{j\Omega t} \quad (6-60)$$

式中 
$$A_i = \sum_{r=1}^n \frac{\Omega^2 t_r \phi_i^{(r)}}{\omega_r^2 - \Omega^2}.$$

一般情况下  $A_i$  是复数, 设  $A_i$  的幅角为  $\alpha_i$ , 则  $A_i$  可表示成

$$A_i = |A_i| e^{j\alpha_i}$$

将上述关系代入式(6-60)得

$$\rho_i = |A_i| e^{j(\Omega t + \alpha_i)} \quad (6-61)$$

上式说明, 每个圆盘中心的复数位移  $\rho_i$  具有不同的幅角, 因此转子轴线是一条扭曲的空间曲线。图 6-5 是不平衡激起的轴线运动图象。

从上面的分析过程看到, 用模态叠加法计算转子的不平衡响应, 首先要求出系统的特征值与模态振型。然后通过坐标变换  $\{\rho\} = [\Phi]\{\eta\}$ , 将系统在物理坐标  $\{\rho\}$  下的运动方程(6-28)转化到正则坐标  $\{\eta\}$  下的运动方程(6-56)。由于系统在正则坐标  $\{\eta\}$  下, 运动方程转化为  $n$  个相互独立的单圆转子的运动方程, 可以方便地求得每个正则坐标上的响应。然后再通过坐标变换得到物理坐标下的不平衡响应。这种计算过程称为模态分析。

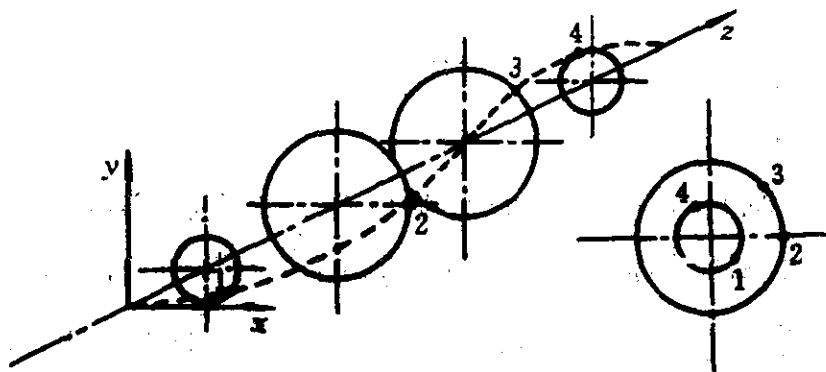


图 6-5 不平衡激起的轴线涡动图象

## 6.6 计算示例

前面几节讨论了系统的运动方程、临界转速与不平衡响应。8.5节中提供的计算程序就是根据前几节的分析编制的临界转速计算程序,其说明见8.5节。下面应用这个程序计算几个算例。并与理论结果或现有计算结果比较,以考证提供的程序和建立的算法。

例6-1:图6-6(a)是一根两端简支的等轴径直梁,轴的直径为 $d = 0.01\text{m}$ ,支承跨距为 $l = 0.5\text{m}$ 。两端支承简化为刚性支座。试计算该系统的前5阶临界转速。

解:两端的支承为刚性支座,计算时取 $k_p = 1 \times 10^{10}\text{N/m}$ ,它比轴的刚度大4~5个数量级,这样处理与刚性支座比较接近。将轴离散成带有11个集总圆盘的系统(见图6-1b),每两个相邻圆盘间的长度相等,均为 $0.05\text{m}$ 。取轴的杨氏模量为 $E = 2.1 \times 10^{11}\text{N/m}^2$ ,密度 $= 7840\text{kg/m}^3$ 。表6-1是根据8.5节的程序要求输入的原始数据。



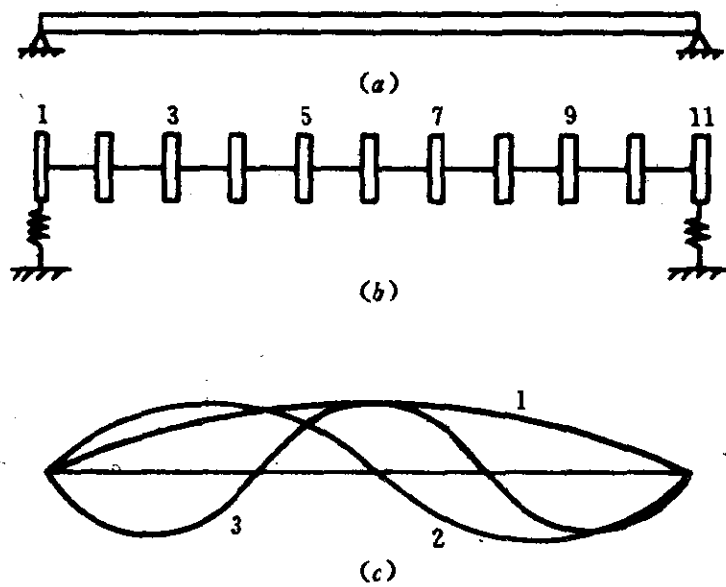


图 6-6 等轴径直梁简图(例 6-1)

(a) 等轴径直梁; (b) 简化计算模型;

(c) 前三阶模态振型。

表 6-1 原始输入数据

10, 11, 2, 2	
2.1E+11, 7840.0	
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	
1, 11	
1.0E+10, 1.0E+10	
0.05, 0.01, 0.0, 0.01	} 共 10 行
0.05, 0.01, 0.0, 0.01	
⋮	
0.05, 0.01, 0.0, 0.01	

按程序计算得到该轴系的前 5 阶临界转速为 4878、19510、43873、77856、121070r/min。图 6-6(a) 的转子比较简单, 临界转速有理论解。根据参考文献[2] 得前 5 阶临界转速的理论解为 4878、19513、43904、78052 和 121956r/min。经比较得知按所给程

序算得的前5阶临界转速与理论解的差别很小,其误差最大者也不超过0.8%。

图6-6(c)是计算得到的前三阶模态振型。

例6-2<sup>①</sup>:图6-7(a)为一简化后的等轴径直梁,支承在5个滑动轴承上。计算时被离散成13个集总圆盘,图6-7(b)为相应的轴系简化计算模型。

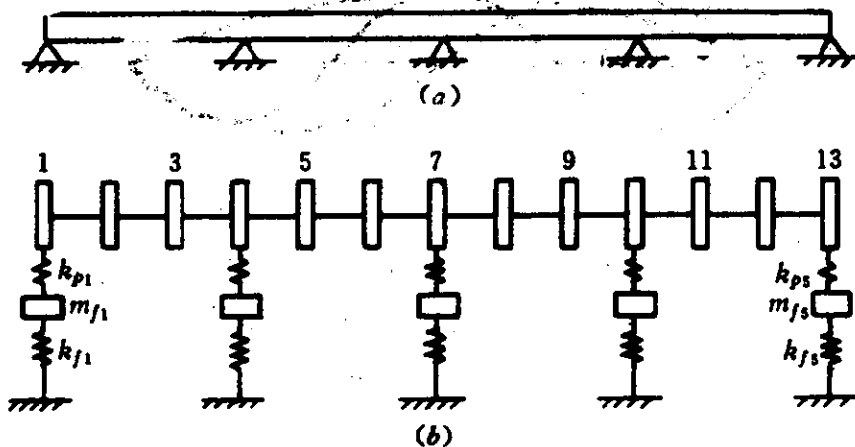


图6-7 经简化的等轴径直梁简图(例6-2)

(a) 等轴径转子; (b) 简化计算模型。

系统参数为:

杨氏模量  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$

转轴密度  $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$

等效质量直径  $d_{mi} = 0.8593 \text{m}$ ,  $i = 1, 12$

等效刚度直径  $d_{ki} = 0.4544 \text{m}$ ,  $i = 1, 12$

相邻集总圆盘间的长度  $l_i = 1.3 \text{m}$ ,  $i = 1, 12$

轴承的等效弹簧系数  $k_{pi} = 1.96 \times 10^9 \text{N/m}$ ,  $i = 1, 5$

基础的等效弹簧系数  $k_{fi} = 2.70 \times 10^9 \text{N/m}$ ,  $i = 1, 5$

参振质量  $m_{fi} = 3557 \text{kg}$ ,  $i = 1, 5$

解:表6-2是该算例的原始输入数据。临界转速的计算结果

① 该算例是根据参考文献[1]中156~157页上的例题等效过来的。

列于表 6—3 中。

表 6—2 原始输入数据

12, 13, 5, 1
2.1E+11, 7800.0
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
1, 4, 7, 10, 13
1.96E+09, 1.96E+09, 1.96E+09, 1.96E+09, 1.96E+09
3577.0, 3577.0, 3577.0, 3577.0, 3577.0
2.70E+09, 2.70E+09, 2.70E+09, 2.70E+09, 2.70E+09
1.3, 0.8593, 0.0, 0.4544
⋮
1.3, 0.8593, 0.0, 0.4544

} 共 12 行

表 6—3 前 5 阶临界转速计算结果

计算方法	临界转速(r/min)				
	1	2	3	4	5
本文法(单精度)	1865.0	1886.3	2027.7	2122.9	3939.9
参考文献[1]的结果 (单精度)	1864.5	1885.9	2027.4	2122.6	3939.3

根据上面两个算例的结果知道,本章建立的算法及 8.5 节的计算程序是正确的。为了和后面讨论的阻尼临界转速作一比较,下面再给一个算例。

例 6—3: 计算例 4—4 的转子-轴承系统的临界转速。转子参数同例 4—4。轴承的简化刚度系数为

$$k_{pi} = 2.2 \times 10^7 \text{N/m}, i = 1, 2, 3$$

$$k_{pi} = 9.5 \times 10^7 \text{N/m}, i = 4, 5$$

解: 计算时将转子仍然划分为 25 个集总圆盘, 集总圆盘的位置不变, 与例 4—4 相同。该算例的原始输入数据略, 表 6—4 是根据 8.5 节的程序算得的前 5 阶临界转速。由该表知道, 计入了轴承的弹性后, 临界转速下降较多。图 6—8 是前两阶临界转速对应的

模态振型。

表 6—4 前 5 阶临界转速

支承情况	临界转速 (r/min)				
	1	2	3	4	5
刚性支承	1682.1	3792.0	4062.1	5393.4	8624.8
弹性支承	1529.3	3155.7	3541.8	4168.1	5402.2

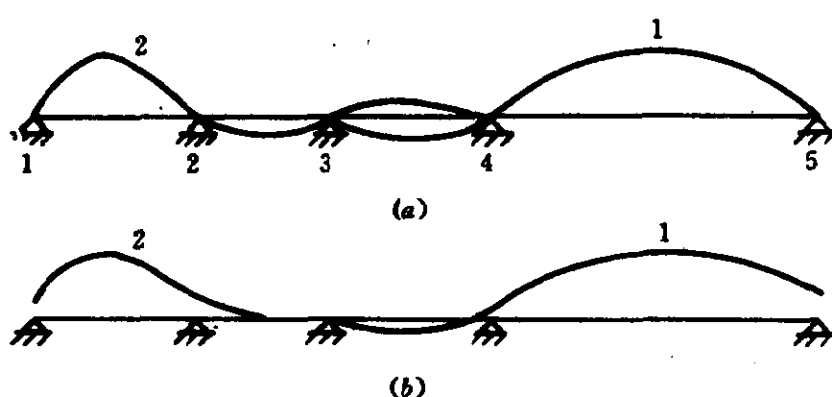


图 6—8 前两阶模态振型

(a) 刚性支承；(b) 弹性支承。

离散成 25 个集总圆盘后，系统共有 25 个临界转速。在 IBM/AT 机上只运行了 30s 就完成了整个计算过程。

## 6.7 临界转速的调整

设计高速旋转机械时，常常会碰到这样的情况，在某一组设计参数下，机组的某阶临界转速与工作转速比较靠近而影响机组稳定运行，希望修改某些设计参数使临界转速偏离工作转速足够的距离，确保机组稳定安全运行。由于机组可供修改的设计参数很多，有些参数对临界转速的影响较大，有些则较小。因此，在修改设计参数之前，必须了解临界转速对每个参数的敏感程度。只有修改敏感度大的设计参数才能有效地改变临界转速；而修改敏感度小的设计参数，系统的临界转速几乎不变。关于临界转速对每个设计

参数的敏感度在参考文献[3]中有较为详细的理论分析。本节只给出一些可供设计者采用的有效措施。

图 6-8 是例 6-3 的前两阶模态振型。第一阶临界转速只在第四跨内激起较大的振动,而在其他几跨内激起的振动都较小。如果希望改变系统的一阶临界转速,只要修改第四跨内的转子或轴承的参数。同理,第二阶临界转速只在第一跨内激起较大的振动,若要改变第二阶临界转速,只需修改第一跨内的转子或支承的参数。

提高系统的临界转速,通常采用的措施为:

- (1) 增加支承轴承的刚度系数  $k_p$ ;
- (2) 缩短支承轴承间的跨距或增加转轴的直径。

表 6-5 是修改设计参数后例 6-3 前两阶临界转速的变化情况。

表 6-5 临界转速的变化情况

临界转速(r/min)	采取的措施
$n_{c1} = 1676.9$ $n_{c2} = 3151.9$	将 4、5 两个支承改为刚性支承,其他参数不变
$n_{c1} = 1529.5$ $n_{c2} = 3540.2$	将 1、2 两个支承改为刚性支承,其他参数不变
$n_{c1} = 3156.2$ $n_{c2} = 4048.3$	将第四跨内转轴长度由原来的 4m 缩短为 2m,其他参数不变
$n_{c1} = 1529.5$ $n_{c2} = 3540.2$	将第一跨内转轴长度由原来的 1.85m 缩短为 0.925m,其他参数不变
$n_{c1} = 1593.7$ $n_{c2} = 3156.2$	将第四跨转轴的直径增加一倍,其他参数不变
$n_{c1} = 1529.2$ $n_{c2} = 2574.3$	将第一跨转轴的直径增加一倍,其他参数不变

由表 6-5 可以看出

- (1) 将 4、5 两个支承改为刚性支承后,系统的一阶临界转速

由原来的 1529.3r/min 提高到 1676.9r/min, 而第二阶临界转速基本保持不变; 将 1、2 两支承改为刚性支承后, 系统的第一阶临界转速基本不变, 而第二阶临界转速由原来的 3155.7r/min 提高到 3540.2r/min。

(2) 将第四跨转轴的 length 缩短一倍后, 一阶临界转速由原来的 1529.3r/min 提高到 4048.3r/min 而成为此时的第二阶临界转速。原来的第二阶临界转速基本保持不变但成为第一阶临界转速; 将第一跨的转轴的 length 由原来的 1.8m 缩短到 0.925m 后, 一阶临界转速基本保持不变, 而第二阶临界转速由 3155.7r/min 提高到 3540.2r/min。

(3) 将第四跨的轴径增加一倍后, 一阶临界转速提高到 1593.7r/min, 二阶临界转速变化不大; 将第一跨的轴径增加一倍后, 一临界转速基本不变, 二阶临界转速出现了一个反常现象, 不但没有提高二阶临界转速, 反而由原来的 3155.7r/min 降低到 2574.3r/min。这种情况可以这样解释: 增加轴的直径, 一方面增加了轴的刚度, 但另一方面也增加了圆盘的质量。如果第二阶临界转速对第一跨圆盘的质量比较敏感, 那么增加轴的直径就有可能降低临界转速〔由式(5-38)可以看到, 增加圆盘质量会使临界转速下降〕。

由上面的分析、计算可以看到, 要改变系统的某阶临界转速, 首先要判断该阶临界转速在哪一跨内激起较大的振幅, 然后修改这一跨内的转子或支承的参数, 可以有效地改变临界转速的大小。需要引起注意的是, 实际机组转子的 length 或直径可供修改的余量不多, 依靠缩短跨距或增大轴径的方法来提高临界转速往往收效不大。更为常用的措施是增加支承的刚度。如果支承使用滚动轴承, 可采用刚性较好的轴承形式; 如果使用滑动轴承, 可适当增加  $L/D$  或降低间隙比  $\psi$ , 这两个措施都可以增大滑动轴承的刚度。用增加支承刚度的方法来提高临界转速, 一般不会受到结构上的太大限制, 但要注意临界转速所能达到的最高限度是刚性支承下的临界转速。

## 6.8 阻尼系统的临界转速

在这一章的前几节,均未考虑阻尼对临界转速或不平衡响应的影 响。这对以滚动轴承支承的转子系统来说是合适的。在实际的旋转机械中,运行时总是存在阻尼的,尤其当机组采用滑动轴承为支承时,机组具有较大的阻尼。这一节及下一节,主要讨论阻尼系统临界转速与不平衡响应的计算方法。

### 1. 转子和支座模型

轴系采用第四章的模型。滑动轴承用 4 个刚度系数和 4 个阻尼系数表征其动力学行为,转子仍简化为多个集总圆盘组成的多自由度系统,可以计入外部阻尼及交叉刚度激振力的影响。由于轴承的交叉刚度、阻尼系数,系统在  $yoz$ 、 $xoz$  平面内的振动是耦合在一起的。下面以一个计算实例,给出阻尼临界转速的计算过程。

### 2. 临界转速计算

例 6-4: 计算例 4-4 轴系的阻尼临界转速。

解: 在例 4-4 中,计算了系统在  $1500 \sim 3300\text{r/min}$  之间的无量纲特征值  $\lambda$ 。它的虚部  $\omega$  表示无量纲的涡动角速度,  $\omega$  与  $\Omega$  的积便是真正的涡动角速度(为了表达方便,仍用  $\omega$  表示涡动角速度)。在表 4-8 中,给出了前 4 阶无量纲涡动角速度  $\omega$  及相应的对数衰减率  $\delta$  随转速  $\Omega$  的变化关系。图 6-9 是根据表 4-8 的数据绘制的涡动角速度  $\omega(\text{r/min})$  与工作转速  $n(\text{r/min})$  之间的曲线关系,通常称为涡动速度图。曲线上的数值是相应点处的对数衰减率。

上图中,直线 5 表示同期涡动,即涡动速度等于轴的旋转速度。它与各阶涡动曲线的交点对应的工作转速称为阻尼临界转速。由此图近似求得前 4 阶临界转速为  $1550\text{r/min}$ 、 $1680\text{r/min}$ 、 $3000\text{r/min}$  和  $3500\text{r/min}$ ,其中第四阶临界转速外推求得。

5.2 节的分析表明,对于单圆盘转子系统,将轴承简化为各向异性的支座后,临界转速总是分成两个很接近的临界转速。例 6-4 的阻尼临界转速的计算结果也表明了这一点。在例 6-3 中,轴

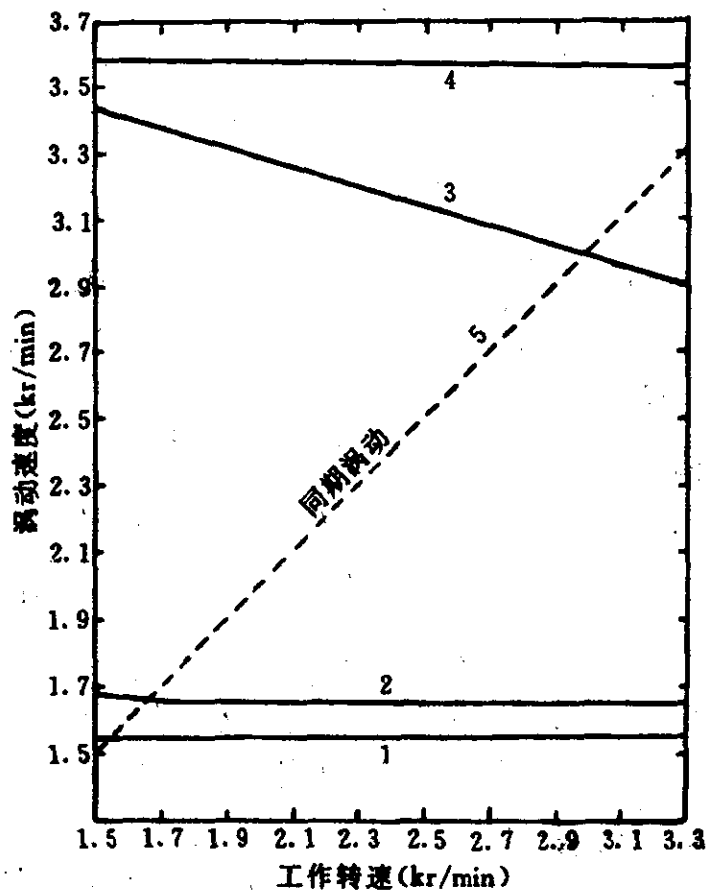


图 6-9 涡动速度图

$i$ —第  $i$  阶涡动曲线 ( $i=1\sim 4$ ); 5—同期涡动曲线。

承被简化为各向同性的支座, 前 2 阶临界转速为  $1529.3\text{r/min}$  和  $3155.7\text{r/min}$ ; 而在该算例中, 轴承被简化为各向异性支座, 例 6-3 的一阶临界转速  $1529.3\text{r/min}$  分解为  $1550\text{r/min}$  和  $1700\text{r/min}$ , 第二阶临界转速  $3155.7\text{r/min}$  分解为  $3000\text{r/min}$  和  $3500\text{r/min}$ 。

例 6-3 的一阶临界转速与例 6-4 的一阶临界转速相差很小, 这说明将滑动轴承简化为图 6-1(a) 的模型对临界转速的计算是适合的。

当工作转速等于某阶阻尼临界转速时, 系统发生共振。但由于存在阻尼, 共振幅值仅为有限值。如果某阶临界转速对应的对数衰减率  $\delta > 1$ , 可以认为由这阶临界转速引起的振动被很好地阻尼



掉了<sup>[4]</sup>。即使机组在这一临界转速附近工作也不会激起太大的振动。

## 6.9 阻尼系统的不平衡响应

在 6.5 节讨论的不平衡响应的计算中,没有考虑阻尼的影响,并认为轴承是一个各向同性的支座。

对于无阻尼系统,轴上任一点在临界转速处的不平衡响应为无穷大。但是,实际机组在运行时总是存在阻尼的,尤其是以滑动轴承支承的转子系统。由 5.4 节的分析知道,阻尼的存在使转子的振动响应减小,特别是在临界转速处,不平衡响应不再是无穷大而是一有限值。一台机组的转子-轴承系统,理论上有无穷多个自由度,即有无穷多个临界转速。设计时要使机组的工作转速完全避开临界转速有时相当困难。实践表明,很多机组往往工作在某些临界转速附近。这似乎和前面的结论相矛盾,其实不然。衡量机组振动剧烈的程度不是临界转速,而是振动响应的大小。当工作转速等于某阶临界转速时,系统发生共振。只要系统存在足够的阻尼,即使发生了所谓的“共振”,也能保证机组平稳运行。

这一节仍然采用模态叠加法分析不平衡响应。

### 1. 转子和支座的模型

仍然采用第四章的模型,此外不再详述。

### 2. 左特征向量与右特征向量

将式(2-14)重写一遍为

$$[A]\{\psi\} = \nu[B]\{\psi\} \quad (6-62)$$

上式中的 $\{\psi\}$ 是特征向量,因为 $\{\psi\}$ 在矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 的右边,形象地称它为右特征向量。将特征向量 $\{\psi\}$ 记为 $\{r\}$ ,并将上式改写成

$$[A]\{r\} = \nu[B]\{r\} \quad (6-63)$$

与式(6-63)相对应,式(6-64)中的特征向量 $\{l\}$ 称为左特征向量。

$$\{l\}^T[A] = \lambda\{l\}^T[B] \quad (6-64)$$

为了计算不平衡响应,先证明以下两个性质

(1) 式(6-63)、式(6-64)的特征值 $\nu$ 、 $\lambda$ 相等

将式(6-64)转置得

$$[\mathbf{A}]^T \{l\} = \lambda [\mathbf{B}]^T \{l\} \quad (6-65)$$

将式(6-63)、式(6-65)改写成

$$([\mathbf{A}] - \nu [\mathbf{B}]) \{r\} = \{0\} \quad (6-66)$$

$$([\mathbf{A}]^T - \lambda [\mathbf{B}]^T) \{l\} = \{0\} \quad (6-67)$$

上两式有解的条件是系数行列式为零,即

$$|([\mathbf{A}] - \nu [\mathbf{B}])| = 0 \quad (6-68)$$

$$|[\mathbf{A}]^T - \lambda [\mathbf{B}]^T| = 0 \quad (6-69)$$

根据行列式的性质知道,矩阵转置后行列式的值不变,故式(6-69)可改写为

$$|[\mathbf{A}] - \lambda [\mathbf{B}]| = 0 \quad (6-70)$$

比较式(6-68)和式(6-70)不难发现

$$\lambda = \nu$$

这样式(6-64)可改写为

$$\{l\}^T [\mathbf{A}] = \nu \{l\}^T [\mathbf{B}] \quad (6-71)$$

(2) 不同阶的左、右特征向量 $\{l^{(j)}\}$ 、 $\{r^{(i)}\}$ 存在着对矩阵 $[\mathbf{A}]$ 、 $[\mathbf{B}]$ 的正交性

设 $\nu_i$ 、 $\{r^{(i)}\}$ 分别是第 $i$ 阶特征值和相应的右特征向量, $\nu_j$ 、 $\{l^{(j)}\}$ 分别是第 $j$ 阶特征值与相应的左特征向量。由式(6-63)和式(6-71)得

$$[\mathbf{A}] \{r^{(i)}\} = \nu_i [\mathbf{B}] \{r^{(i)}\} \quad (6-72)$$

$$\{l^{(j)}\}^T [\mathbf{A}] = \nu_j \{l^{(j)}\}^T [\mathbf{B}] \quad (6-73)$$

用 $\{l^{(j)}\}^T$ 左乘式(6-72)得

$$\{l^{(j)}\}^T [\mathbf{A}] \{r^{(i)}\} = \nu_i \{l^{(j)}\}^T [\mathbf{B}] \{r^{(i)}\} \quad (6-74)$$

用 $\{r^{(i)}\}$ 右乘式(6-73)得

$$\{l^{(j)}\}^T [\mathbf{A}] \{r^{(i)}\} = \nu_j \{l^{(j)}\}^T [\mathbf{B}] \{r^{(i)}\} \quad (6-75)$$

将式(6-74)减式(6-75)得

$$(\nu_i - \nu_j)\{l^{(j)}\}^T[B]\{r^{(i)}\} = 0 \quad (6-76)$$

当  $\nu_i \neq \nu_j$  时有

$$\{l^{(j)}\}^T[B]\{r^{(i)}\} = 0 \quad (6-77)$$

将上式回代到式(6-74)得

$$\{l^{(j)}\}^T[A]\{r^{(i)}\} = 0 \quad (6-78)$$

式(6-77)、式(6-78)表明,特征值互不相等的左、右特征向量存在着对矩阵[A]、[B]的正交性。

当  $j = i$  时,由式(6-74)得

$$\{l^{(i)}\}^T[A]\{r^{(i)}\} = \nu_i \{l^{(i)}\}^T[B]\{r^{(i)}\} \quad (6-79)$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} a_i &= \{l^{(i)}\}^T[A]\{r^{(i)}\} \\ b_i &= \{l^{(i)}\}^T[B]\{r^{(i)}\} \end{aligned} \right\} \quad (6-80)$$

由于特征向量  $\{l^{(i)}\}$ 、 $\{r^{(i)}\}$  只表征各元素有不变的比值,但每个元素的具体值是不确定的。因此由式(6-80)决定的  $a_i$ 、 $b_i$  没有确定的值。和 6.5 节相类似,如果欲使式(6-80)具有确定的值,必须对左、右特征向量施加一约束条件,取约束条件为

$$\{l^{(i)}\}^T[B]\{r^{(i)}\} = 1 \quad (6-81)$$

为了和 6.5 节相一致,由式(6-81)确定的左、右特征向量分别称为正则左特征向量与正则右特征向量。对于正则特征向量,式(6-80)可以改写为

$$\left. \begin{aligned} \{l^{(i)}\}^T[B]\{r^{(i)}\} &= 1 \\ \{l^{(i)}\}^T[A]\{r^{(i)}\} &= \nu_i \end{aligned} \right\} \quad (6-82)$$

对于一个由  $n$  个集总圆盘组成的转子-轴成系统,共有  $2n$  个特征值和相应的特征向量。不损一般性,设这  $2n$  个特征值是共轭成对的复数,相应的左、右特征向量也是共轭成对的。这  $2n$  个特征值与特征向量可表示成如下的形式

$$\begin{aligned} &\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \bar{\nu}_n, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_n \\ &\{l^{(1)}\}, \{l^{(2)}\}, \dots, \{l^{(n)}\}, \{\bar{l}^{(1)}\}, \{\bar{l}^{(2)}\}, \dots, \{\bar{l}^{(n)}\} \\ &\{r^{(1)}\}, \{r^{(2)}\}, \dots, \{r^{(n)}\}, \{\bar{r}^{(1)}\}, \{\bar{r}^{(2)}\}, \dots, \{\bar{r}^{(n)}\} \end{aligned}$$

类似地,由  $2n$  个正则共轭特征向量  $\{l\}$ 、 $\{r\}$  组成的矩阵分别称为正则左模态矩阵  $[L]$  和正则右模态矩阵  $[R]$ 。  $[L]$ 、 $[R]$  可表示为

$$[L] = [l^{(1)}, l^{(2)}, \dots, l^{(n)}, \bar{l}^{(1)}, \bar{l}^{(2)}, \dots, \bar{l}^{(n)}] \quad (6-83)$$

$$[R] = [r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(n)}, \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(2)}, \dots, \bar{r}^{(n)}] \quad (6-84)$$

根据式(6-77)、式(6-78)和式(6-82)有

$$\left. \begin{aligned} [L]^T [B] [R] &= [I] \\ [L]^T [A] [R] &= \text{diag}[\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_n] \end{aligned} \right\} \quad (6-85)$$

### 3. 不平衡响应

转子和轴承采用第四章的模型,系统的运动方程可参阅第四章的有关部分。下面以 4.3 节的转子-固定瓦轴承系统为例,给出不平衡响应的计算方法。对于以其他形式的轴承支承的转子系统,其分析方法完全相同。

方程(4-55)是以固定瓦轴承支承的转子系统的运动方程。在建立式(4-55)的过程中,为了方便曾将位移向量  $\{X\}$ 、 $\{Y\}$  按内外结点分块。现在将式(4-55)的位移向量  $\{q\} = \{X_I^T, Y_I^T, X_B^T, Y_B^T\}^T$  再变回到按结点的自然顺序排列的位移向量,即

$$\{q\} = \{X^T, Y^T\}^T = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}^T$$

$\{q\}$  按结点的自然顺序排列后,系统的运动方程在形式上与式(4-55)相同,仍然表示为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \Omega^2 \{F\} \quad (6-86)$$

式中的矩阵  $[M]$ 、 $[D]$ 、 $[K]$  的表达式与式(4-56)略有不同,其差别仅在于各元素的排列次序不同。按结点自然顺序排列后,不平衡激振力矢量  $\{F\}$  可表示为

$$\left. \begin{aligned} \{F\} &= \{F_x^T, F_y^T\}^T \\ \{F_x\} &= \{m_1 e_1 \cos(\Omega t + \beta_1), \dots, m_n e_n \cos(\Omega t + \beta_n)\}^T \\ \{F_y\} &= \{m_1 e_1 \sin(\Omega t + \beta_1), \dots, m_n e_n \sin(\Omega t + \beta_n)\}^T \end{aligned} \right\} \quad (6-87)$$

参照 2.3 节的方法,将系统的运动方程(6-86)变换到状态空间得

$$[B]\{\dot{p}\} - [A]\{p\} = \Omega^2 \{F'\} \quad (6-88)$$

$$\text{式中 } [A] = \begin{bmatrix} -K & \\ & M \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} D & M \\ M & 0 \end{bmatrix};$$

$$\{F'\} = \{F^T, 0\}^T; \quad \{p\} = \{q^T, \dot{q}^T\}^T.$$

式(6-88)是系统在状态空间的运动方程,系统在状态空间的自由振动方程是式(6-88)的齐次方程,即

$$[A]\{p\} = [B]\{\dot{p}\} \quad (6-89)$$

令  $\{p\} = \{r\}e^{\nu t}$ , 代入上式得

$$[A]\{r\} = \nu[B]\{r\} \quad (6-90)$$

式中  $\{r\}$ ——系统在状态空间的特征向量,称为右特征向量。

相应可得左特征向量  $\{l\}$  为

$$\{l\}^T[A] = \nu\{l\}^T[B] \quad (6-91)$$

根据这一节前面的分析知道,正则左模态矩阵  $[L]$  和正则右模态矩阵  $[R]$  满足式(6-85)。下面根据式(6-85)的关系计算系统的不平衡响应。

在式(6-88)中引进下述坐标变换

$$\{p\} = [R]\{\eta\} \quad (6-92)$$

式中  $\{\eta\}$ ——正则坐标;

$[R]$ ——正则右模态矩阵;

$\{p\}$ ——状态坐标,为了和 6.6 节统一,仍称它为物理坐标。

将上式代入式(6-88)得

$$[B][R]\{\dot{\eta}\} - [A][R]\{\eta\} = \Omega^2\{F'\} \quad (6-93)$$

用  $[L]^T$  左乘式(6-93)得

$$[L]^T[B][R]\{\dot{\eta}\} - [L]^T[A][R]\{\eta\} = \Omega^2\{T'\} \quad (6-94)$$

式中  $\Omega^2\{T'\}$ ——广义激振力;

$$\{T'\} = [L]^T\{F'\} = \{T^T, \bar{T}^T\}^T;$$

$$\{T\} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}^T.$$

将式(6-85)的关系代入式(6-94)得到下面一组  $2n$  个独立的一阶线性微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 - \nu_1 \eta_1 &= \Omega^2 t_1 \\ \dot{\eta}_2 - \nu_2 \eta_2 &= \Omega^2 t_2 \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_n - \nu_n \eta_n &= \Omega^2 t_n \\ \dot{\eta}_{n+1} - \bar{\nu}_1 \eta_{n+1} &= \Omega^2 \bar{t}_1 \\ \dot{\eta}_{n+2} - \bar{\nu}_2 \eta_{n+2} &= \Omega^2 \bar{t}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{n+n} - \bar{\nu}_n \eta_{n+n} &= \Omega^2 \bar{t}_n \end{aligned} \right\} \quad (6-95)$$

以上分析表明, 阻尼系统的不平衡响应, 通过坐标变换式 (6-92), 可转化为计算在广义激振力  $\Omega^2 \{T'\}$  激励下  $2n$  个正则坐标上的响应, 然后再通过坐标变换求得系统在物理坐标上的不平衡响应。由于变换到正则坐标下的运动方程是  $2n$  个互不耦合的一阶线性微分方程, 其响应的计算十分方便。其解法如下

由式 (6-87) 知道, 式 (6-95) 的右端项总是可以表示成

$$\Omega^2 t_i = \Omega^2 (t_{ci} \cos \Omega t + t_{si} \sin \Omega t)$$

这样式 (6-95) 的任一第  $i$  个方程为

$$\dot{\eta}_i - \nu_i \eta_i = \Omega^2 (t_{ci} \cos \Omega t + t_{si} \sin \Omega t) \quad (6-96)$$

式中  $t_{ci}, t_{si}$  —— 均为复数。

令上式的特解为

$$\eta_i = A_i \cos \Omega t + B_i \sin \Omega t \quad (6-97)$$

将上式代入式 (6-96) 得

$$\left. \begin{aligned} A_i &= -\Omega^2 \frac{(\Omega t_{si} + \nu_i t_{ci})}{\Omega^2 + \nu_i^2} \\ B_i &= \Omega^2 \frac{(\Omega t_{ci} - \nu_i t_{si})}{\Omega^2 + \nu_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-98)$$

将上式代入式 (6-97) 得

$$\eta_i = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \nu_i^2} [ -(\Omega t_{si} + \nu_i t_{ci}) \cos \Omega t + (\Omega t_{ci} - \nu_i t_{si}) \sin \Omega t ] \quad (6-99)$$

上式就是第  $i$  个正则坐标上的响应计算公式。观察式 (6-99)

不难发现

$$\eta_{n+i} = \bar{\eta}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6-100)$$

根据式(6-92)可以得到物理坐标 $\{p\}$ 上的不平衡响应为

$$\begin{aligned} \{p\} &= [R]\{\eta\} = \sum_{i=1}^{2n} \eta_i \{r^{(i)}\} \\ &= \sum_{i=1}^n (\eta_i \{r^{(i)}\} + \bar{\eta}_i \{\bar{r}^{(i)}\}) \end{aligned} \quad (6-101)$$

上式表明不平衡响应 $\{p\}$ 是实数向量。设 $\{p\}$ 和 $\{r^{(i)}\}$ 的第 $k$ 个元素分别为 $p_k$ 和 $r_k^{(i)}$ ，由上式得

$$p_k = \sum_{i=1}^n (\eta_i r_k^{(i)} + \bar{\eta}_i \bar{r}_k^{(i)}) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (6-102)$$

以上两式表明，物理坐标 $\{p\}$ 上的不平衡响应，是由系统的 $n$ 对共轭模态(特征向量)叠加后得到的，各阶模态在 $p_k$ 中所占的密度与 $\eta_i$ 有关。

#### 4. 不平衡响应的涡动形态

根据式(6-101)或式(6-102)可以得任一圆盘中心的不平衡响应。由于 $\{p\} = \{q^T, \dot{q}^T\}^T$ ， $\{q\} = \{X^T, Y^T\}^T$ 因此矢量 $\{p\}$ 的元素的含义是系统某个圆盘中心的位移 $x, y$ 或速度 $\dot{x}, \dot{y}$ 。设第 $k$ 个圆盘中心的位移为 $x_k, y_k$ ，由式(6-99)知道它们可进一步表示成

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x_{ck} \cos \Omega t + x_{sk} \sin \Omega t \\ y_k &= y_{ck} \cos \Omega t + y_{sk} \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (6-103)$$

式中  $x_{ck}, y_{ck}$ ——与 $x_k, y_k$ 对应的 $\cos \Omega t$ 前的实系数；

$x_{sk}, y_{sk}$ ——与 $x_k, y_k$ 对应的 $\sin \Omega t$ 前的实系数。

为了方便，略去上式中的下角标“ $k$ ”，这样式(6-103)可写为

$$\left. \begin{aligned} x &= x_c \cos \Omega t + x_s \sin \Omega t \\ y &= y_c \cos \Omega t + y_s \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (6-104)$$

式中  $x_c, x_s, y_c, y_s$ ——均为实数。

用复数位移 $\rho$ 将式(6-104)的两个等式综合在一起得

$$\begin{aligned} \rho &= x + jy \\ &= (x_c + jy_c) \cos \Omega t + (x_s + jy_s) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (6-105)$$

将式(5-26)代入上式得

$$\rho = \rho_+ e^{j\Omega t} + \rho_- e^{-j\Omega t} \quad (6-106)$$

$$\text{式中} \quad \left. \begin{aligned} \rho_+ &= [(x_c + y_s) + j(y_c - x_s)]/2 \\ \rho_- &= [(x_c - y_s) + j(y_c + x_s)]/2 \end{aligned} \right\} \quad (6-107)$$

由前面的分析知道,式(6-106)描绘的是一个椭圆,但椭圆的长、短轴不与坐标轴  $x, y$  重合。下面我们来讨论椭圆的涡动方向,椭圆长、短轴的方向及大小。

设  $\rho_+, \rho_-$  的幅角分别为  $\theta_+$  和  $\theta_-$ , 由式(6-107)知

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\theta_+ &= \frac{y_c - x_s}{x_c + y_s} \\ \operatorname{tg}\theta_- &= \frac{y_c + x_s}{x_c - y_s} \end{aligned} \right\} \quad (6-108)$$

将  $\rho_+, \rho_-$  用指数的形式可表示为

$$\left. \begin{aligned} \rho_+ &= |\rho_+| e^{j\theta_+} \\ \rho_- &= |\rho_-| e^{j\theta_-} \end{aligned} \right\} \quad (6-109)$$

将上式代入式(6-106)得

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \quad (6-110)$$

$$\text{式中} \quad \left. \begin{aligned} \rho_1 &= |\rho_+| e^{j(\Omega t + \theta_+)} \\ \rho_2 &= |\rho_-| e^{-j(\Omega t - \theta_-)} \end{aligned} \right\} \quad (6-111)$$

式(6-110)表明,任一点的复数响应  $\rho$  由  $\rho_1$  和  $\rho_2$  两个复数叠加而成。 $\rho_1$  的轨迹为半径为  $|\rho_+|$  的圆运动,圆运动的角频率就是轴的旋转角速度  $\Omega$ ,且与轴同向旋转。 $t=0$  时  $\rho_1$  的初始幅角为  $\theta_+$ 。 $\rho_2$  的轨迹是半径为  $|\rho_-|$  的圆运动,圆运动的频率就是轴的旋转角频率  $\Omega$ ,但与轴反向旋转。 $t=0$  时  $\rho_2$  的初始幅角为  $\theta_-$ 。图 6-10(a) 是两个反向旋转的圆,图 6-10(b) 是合成的椭圆。

在图 6-10(a) 中的  $\rho_1, \rho_2$  是  $t=0$  时的起始位置,它们与  $x$  轴的夹角分别是  $\theta_+$  和  $\theta_-$ 。  $\rho_1$  从起始位置开始作逆时针转动(设轴的旋转方向为逆时针方向)。 $\rho_2$  也从起始位置出发但作顺时针转

① 图 6-10(a) 中,  $\theta_+ = \pi/2, \theta_- = 0$ 。



动。在某一  $t$  时刻,  $\rho_1, \rho_2$  旋转到同一条直线上且幅角差为零。此时  $\rho_1, \rho_2$  的位置就是椭圆长轴的位置。在任意  $t$  时刻,  $\rho_1, \rho_2$  的幅角分别是

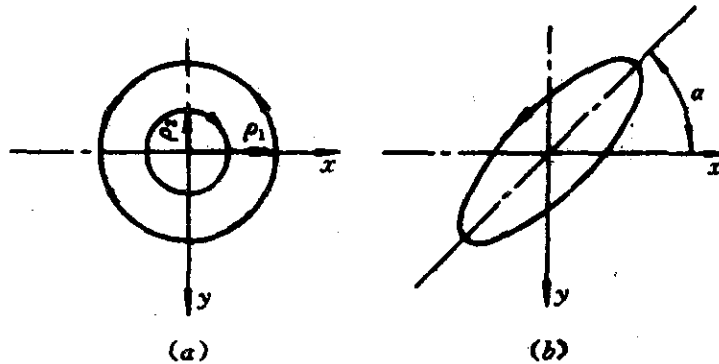


图 6-10 不平衡响应的涡动图象  
(a) 同向与反向旋转的圆运动; (b) 叠加后的椭圆。

$$\theta_1 = \Omega t + \theta_+$$

$$\theta_2 = -(\Omega t - \theta_-)$$

$\rho_1, \rho_2$  的幅角差为

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\Omega t + \theta_+ - \theta_-$$

在长轴上,  $\rho_1, \rho_2$  的幅角差为零。即

$$\Omega t = (\theta_- - \theta_+)/2 \quad (6-112)$$

长轴与  $x$  轴的夹角  $\alpha$  (见图 6-11) 为

$$\alpha = \Omega t + \theta_+ = (\theta_+ + \theta_-)/2 \quad (6-113)$$

根据式(6-108)有

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \operatorname{tg}(\theta_+ + \theta_-) \\ &= \frac{2(x_c y_c + x_s y_s)}{(x_c^2 + x_s^2) - (y_c^2 + y_s^2)} \end{aligned} \quad (6-114)$$

设椭圆的长半轴和短半轴分别为  $a$  和  $b$ , 由上面的分析知

$$\left. \begin{aligned} a &= |\rho_+| + |\rho_-| \\ b &= |\rho_+| - |\rho_-| \end{aligned} \right\} \quad (6-115)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中 } |\rho_+| &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_c^2 + x_s^2) + (y_c^2 + y_s^2) + 2(x_c y_s - y_c x_s)} \\ |\rho_-| &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_c^2 + x_s^2) + (y_c^2 + y_s^2) - 2(x_c y_s - y_c x_s)} \end{aligned} \right\} \quad (6-116)$$

当  $|\rho_+| > |\rho_-|$  时, 圆盘中心作正向涡动;

当  $|\rho_+| < |\rho_-|$  时, 圆盘中心作反向涡动。

由上式知道

$$|\rho_+|^2 - |\rho_-|^2 = x_c y_s - y_c x_s$$

当  $x_c y_s - y_c x_s > 0$  时作正向涡动;

当  $x_c y_s - y_c x_s < 0$  时作反向涡动。

在式(6-116)中, 当  $|\rho_+| < |\rho_-|$  时,  $b < 0$ , 此时椭圆的短半轴应理解为  $b$  的绝对值。

根据上面的分析知道, 将轴承简化为各向异性的支座并计入了阻尼的影响后, 转子的不平衡响应具有如下特点

(1) 每个圆盘中心的涡动轨迹是偏心率不同且长、短轴方向也不相同的椭圆。

(2) 每个圆盘中心的复数位移  $\rho$  具有不同的幅角, 因此轴线弯曲成一条扭曲的空间曲线, 其涡动形态如图 4-21 所示。

(3) 轴线涡动的角速度是变化的, 但其涡动一周的时间即周期  $T$  是不变的,  $T = 2\pi/\Omega$ 。

### 参 考 文 献

- 1 钟一谔等编著. 转子动力学. 北京: 清华大学出版社, 1987.
- 2 郑兆昌主编. 机械振动: 上册. 北京: 机械工业出版社, 1980.
- 3 Lund JW. Sensitivity of the Critical Speeds of a Rotor to Changes in the Design. *Journal of Mechanical Design, Trans. of ASME*, 1980, 102(1): 115~121
- 4 Lund JW. Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearing. *Journal of Engineering for Industry, Trans. of ASME*, 1974, 96(2): 509~517

## 第七章 一台离心压缩机轴系设计示例

在前几章中,给出了稳定性、临界转速与不平衡响应的计算方法。这一章主要以一台实际机组为例,给出轴系动力学设计的一般过程。旨在进一步帮助读者掌握动力学的设计方法。

### 7.1 机组的原始数据

图 7-1 是某化肥厂引进的合成气压缩机低压缸转子-轴承系统示意图。压缩机的额定工作转速为  $n=11230\text{r}/\text{min}$ , 转子总长  $2.052\text{m}$ , 轴上装有 9 级叶轮。在第五级与第九级叶轮之间有一个长为  $0.126\text{m}$  的梳齿密封。转子支承在两个滑动轴承上, 轴承跨距为  $1.616\text{m}$ 。左端轴承的直径为  $0.101\text{m}$ , 右端为  $0.114\text{m}$ 。根据该转子的实际结构, 将它分成 40 个自然轴段, 每个轴段的参数如表 7-1 所示。

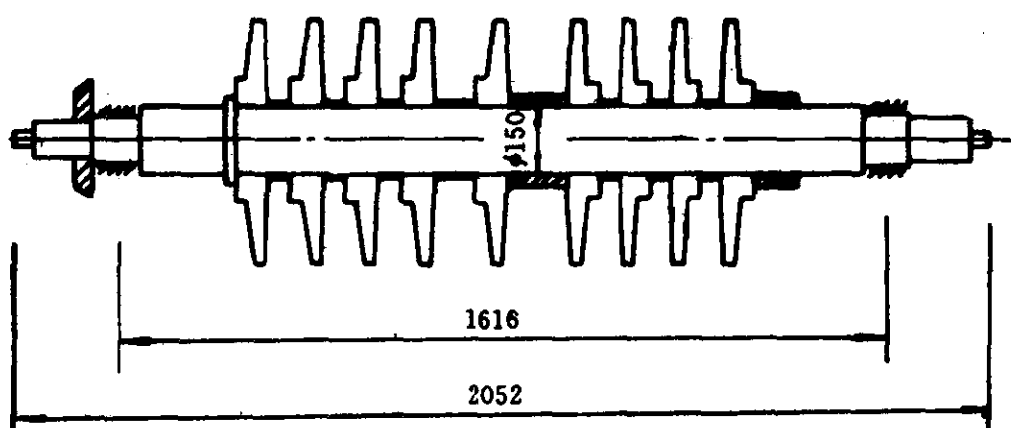


图 7-1 某离心压缩机转子-轴承系统示意图

表 7-1<sup>①</sup> 各自然轴段的数据

自然轴段号	轴段长度 $l$ (m)	等效质量直径 $d_m$ (m)	等效刚度直径 $d_k$ (m)
1	0.025	0.040	0.040
2	0.106	0.090	0.090
3	0.035	0.221	0.090
4~5	0.047	0.101	0.101
6	0.178	0.140	0.140
7	0.026	0.165	0.165
8~9	0.029	0.305	0.150
10	0.060	0.151	0.150
11~12	0.029	0.305	0.150
13	0.060	0.151	0.150
14~15	0.029	0.305	0.150
16	0.060	0.151	0.150
17~18	0.029	0.310	0.150
19	0.095	0.151	0.150
20~21	0.029	0.310	0.150
22~23	0.063	0.196	0.150
24~25	0.029	0.305	0.150
26	0.050	0.151	0.150
27~28	0.029	0.312	0.150
29	0.050	0.151	0.150
30~31	0.029	0.312	0.150
32	0.050	0.151	0.150
33~34	0.029	0.312	0.150
35	0.095	0.197	0.150
36	0.150	0.140	0.140
37~38	0.047	0.114	0.114
39	0.130	0.090	0.090
40	0.046	0.040	0.040

① 5、38 两个自然节点为轴承的中心；9、12、15、18、21、25、28、31、34 等 9 个自然节点为叶轮中心；自然节点 23 是梳齿密封的中心。

## 7.2 轴承的设计计算过程<sup>①</sup>

设计转子-轴承系统时,转子的参数往往是已知的,设计的中心任务是设计滑动轴承。设计内容主要有:(1)选择合适的轴承形式;(2)确定合理的轴承参数;(3)计算轴系的稳定性;(4)计算轴系的临界转速与不平衡响应。

### 1. 轴承结构形式和润滑剂

轴承的结构形式,一般是根据给定条件,参照国内外同类机组轴承的结构形式选定。表7-2是几种国外离心压缩机轴承的结构形式和主要设计参数;表7-3是国内外大型汽轮发电机轴承的结构形式与参数。

表7-2 国外离心压缩机轴承的结构形式和参数

国家、制造厂	轴承形式	转速 (r/min)	L/D	$\phi_{min}$ (%)	平均比压 (MPa)
法国克罗佐-罗亚尔	五瓦可倾瓦轴承,载荷作用在支点上	11230	0.4	1.6 ~ 2.1	0.75 ~ 1.2
法国索热(SOGET)	三瓦、四瓦可倾瓦轴承,载荷在支点上	6900 11000	0.55	1.0 ~ 1.2	1.0 ~ 1.4
意大利新比隆	椭圆轴承	6900		1.3 ~ 1.5	0.6
美国迪拉瓦(DELAVAL)	五瓦可倾瓦轴承,载荷在支点上	10720	0.46	1.1 ~ 2.0	
日本日立	五瓦可倾瓦轴承,载荷在支点上	8700 11630	0.37 ~ 0.43	1.2 ~ 1.7	1.5

选择润滑油的原则是,重载低速宜选粘度较大的油品;高速轻载宜选粘度较低的油品。第八章的表8-14是两种常用润滑油在不同温度下的物性参数。

<sup>①</sup> 这一节内容主要根据参考文献[1]编写而成。

表 7—3 国内外汽轮发电机轴承结构形式与主要参数

国家、 制造厂	轴承形式		容量 $10^4(\text{kW})$	$L/D$	$\psi_{\min}$ (%)	预负荷 $m_b$	平均比压 (MPa)
	汽轮机	发电机					
日本日立	椭圆	六瓦可倾瓦	10, 12.5, 25, 60, 100	0.6 ~ 0.9	1.3 ~ 1.7	0.5	1.1 ~ 2.1
日本三菱	椭圆	四瓦可倾瓦	60	0.6 ~ 1.06	2.0		0.8 ~ 1.4
德国 KWU	椭圆		30	0.7	1.4		2.1 ~ 3.0
英国 EEC		椭圆, 圆	30, 32, 66	0.49 ~ 0.67	1.2, 1.5	0.5	1.0 ~ 1.78
美国 GE	椭圆	六瓦可倾瓦	30, 60				1.03 ~ 1.98
意大利 ANSALDO	椭圆		15, 32		1.3	0.5	0.7 ~ 1.7
原苏联	椭圆		20, 30	0.8	1.2 ~ 1.5	0.5	0.7 ~ 1.59
原苏联	椭圆	可倾瓦	80		1 ~ 1.5	0.5	
波兰		椭圆	12.5	0.74 ~ 1.0	0.9 ~ 1.4	0.5	0.57 ~ 1.14
中国		三油楔	20	0.75 ~ 0.8	1.5		0.76 ~ 1.6
中国		椭圆	30	0.65 ~ 0.8	1.4 ~ 1.8	0.5 ~ 0.57	1.3 ~ 1.8

## 2. 轴承参数的选择

### (1) 长径比 $L/D$

长径比是轴承主要的设计参数之一,选取  $L/D$  的原则是:高速轻载宜取较小值,低速重载宜取较大值;转子刚性较小时宜取较小值,需要增加刚性时(如机床轴承)宜取较大值。一些机器轴承的  $L/D$  的值为

汽轮机、压缩机、风机	0.4 ~ 1.0
发电机、离心泵、齿轮 变速装置	0.6 ~ 1.5
机床、拖拉机	0.8 ~ 1.2
轧钢机	0.6 ~ 0.9

选取长径比  $L/D$  时应考虑使轴承的平均比压  $p_m = W/(LD)$  有合适的值。在可能的情况下,  $p_m$  可取大些以提高机组的稳定性并减小轴承的尺寸。常见机器的  $p_m$  值为

汽轮机、发电机、机床	0.6 ~ 2.0MPa
压缩机、风机	0.2 ~ 2.0MPa
齿轮变速箱、拖拉机	0.5 ~ 3.5MPa
轧钢机	10.0 ~ 20.0MPa

### (2) 最小间隙比 $\psi_{\min}$

最小间隙比  $\psi_{\min}$  的定义为

$$\psi_{\min} = \begin{cases} \text{顶隙比 } \psi_m & \text{—— 椭圆轴承;} \\ \text{装配间隙比 } \psi' & \text{—— 可倾瓦轴承;} \\ \text{间隙比 } \psi & \text{—— 其他形式轴承。} \end{cases}$$

改变间隙比对轴承动、静特性影响较大,但并不影响轴承的总体尺寸。因此,设计时常把  $\psi_{\min}$  作为优化设计中的重要可变参数。最小间隙比  $\psi_{\min}$  的选取原则是:高速轻载取较大值,低速重载时宜取较小值;直径大、长径比小、调心性好、加工精度高时取较小值,反之取较大值。常见机器中轴承的  $\psi_{\min}$  值为

汽轮机、发电机、压缩机	1‰ ~ 2‰
-------------	---------

轧钢机、铁路车辆	0.2‰ ~ 1.5‰
风机、齿轮变速装置	1‰ ~ 3‰
机床	0.1‰ ~ 0.5‰

### (3) 预负荷系数 $m_b$

由表 1-1 知, 预负荷系数  $m_b$  的定义为

$$m_b = \begin{cases} 1 - \psi_m / \psi & \text{— 椭圆轴承;} \\ 1 - \psi' / \psi & \text{— 可倾瓦轴承。} \end{cases}$$

改变  $m_b$  的大小就是改变间隙比的相对比值。适当改变  $m_b$  的值可以有效地提高轴系的稳定性而又不影响轴承的总体尺寸。设计时常将它作为主要的优化参数之一。 $m_b$  的常用范围为:

椭圆轴承	0.5 ~ 0.7
可倾瓦轴承: 中心支承	0.2 ~ 0.4
偏支支承	0.0 ~ 0.2

### (4) 许用最小油膜厚度 $[h_{\min}]$

为了确保轴承在液体润滑条件下安全运行, 应使算出的最小油膜厚度大于其许用值。即

$$h_{\min} > [h_{\min}]$$

$[h_{\min}]$  的值可按表 7-4 选取。

表 7-4 许用最小油膜厚度(参照德国 VDI 导则 2204)

轴径(mm)	10	20	40	60	80	100	200	400	600
$[h_{\min}]$ ( $\mu\text{m}$ )	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	14.0	15.0

### (5) 进油温度、平均温度、温升、最高瓦温和进油压力

进油温度常取为  $T_{in} = 30 \sim 45^\circ\text{C}$ ;

要求平均温度  $T \leq 70^\circ\text{C}$ ;

要求温升  $\Delta T \leq 30^\circ\text{C}$ ;

要求最高瓦温  $T_{\max} \leq 90 \sim 100^\circ\text{C}$ 。

如果采用压力供油, 通常取进油压力为  $0.05 \sim 0.15\text{MPa}$ 。

## 3. 轴承设计计算内容

根据前面提到的原则, 首先选取轴承的结构形式和主要参数



$L/D$ 、 $\psi_{\min}$ 、 $m_b$ 、 $T_{in}$ ，然后计算其静态性能(流量、功耗、温升等)并校核是否满足要求。为轴系动力学设计准备轴承的数据。其设计内容如下

(1) 计算承载系数  $\phi_w$

承载系数  $\phi_w$  的定义为

$$\phi_w = W\psi^2 / (\eta\Omega LR) \quad (7-1)$$

式中  $W$ ——作用在轴承上的载荷即轴承反力(N)。

上式中除油的粘度  $\eta$  外，其他参数均是已知的。关于  $\eta$  的值，不考虑温度分布对粘度  $\eta$  的影响。首先选取进油温度  $T_{in}$ ，估取温升  $\Delta T$ ，取平均温度  $\bar{T} = T_{in} + \Delta T$ 。根据  $\bar{T}$  由表 8—14 插值求得粘度  $\eta$  的值。

(2) 计算流量系数  $\phi_q$ 、阻力系数  $\phi_f$  以及轴承的静平衡位置 ( $\epsilon, \theta$ )

根据  $\phi_w$  和  $L/D$  等参数，用插值的方法求得  $\phi_q$ 、 $\phi_f$ 、 $\epsilon$  和  $\theta$ 。 $\phi_q$ 、 $\phi_f$  的表达式为

$$\phi_q = \frac{Q}{\psi\Omega LRD} \quad (7-2)$$

式中  $Q$ ——润滑油流量( $m^3/s$ )。

$$\phi_f = f/\psi \quad (7-3)$$

(3) 计算润滑油流量  $Q$

由式(7-2)得

$$Q = \phi_q(\psi\Omega LRD) \quad (m^3/s) \quad (7-4)$$

(4) 计算轴承功耗  $N_i$

$$N_i = W\psi\Omega R\phi_f \quad (W) \quad (7-5)$$

(5) 计算润滑油温升  $\Delta T$  和平均温度  $\bar{T}$

$$\Delta T = N_i / (C_p \rho Q) \quad (^\circ C) \quad (7-6)$$

式中  $C_p$ ——润滑油比热[J/(kg· $^\circ C$ )]

$\rho$ ——润滑油密度(kg/ $m^3$ )

$$\bar{T} = T_{in} + \Delta T \quad (7-7)$$

(6) 校核温升与平均温度

如果按式(7-6)计算得到的温升 $\Delta T$ 与(1)中估取的值的误差小于 $\pm 10\%$ 且 $\Delta T \leq 30^\circ\text{C}$ ,则上述计算合适,否则重新修改参数再设计,直到满足要求为止。

如果按式(7-7)得到的平均温度 $\bar{T} \leq 70^\circ\text{C}$ ,说明计算是合适的,否则要修改参数重新设计。

### (7) 检验最小油膜厚度

计算得到的最小油膜厚度 $h_{\min}$ 应大于其许用值 $[h_{\min}]$ 。对于高速旋转的机械来说,轴承一般都工作在高速、轻载状态,常常总能满足

$$h_{\min} > [h_{\min}]$$

的条件。鉴于这一原因,在后面给出的轴承设计示例中,认为这一条件自动满足,无需检验。

## 7.3 轴承设计示例

由7.1节提供的原始数据知道,转子的工作转速很高,机组轴系的稳定性问题比较突出。选择轴承的结构形式时,要优先选择稳定性较好的滑动轴承。参照表7-2,初步选用五瓦可倾瓦轴承与椭圆轴承。其中前者的结构如图1-4(a)所示。为了有较大的选择余地,可倾瓦轴承选取了三组不同的参数,即三个不同的可倾瓦轴承。这三个轴承的主要参数为

可倾瓦轴承 1:  $\alpha_T = 0.5, m_b = 0$

可倾瓦轴承 2:  $\alpha_T = 0.5, m_b = 0.2$

可倾瓦轴承 3:  $\alpha_T = 0.6, m_b = 0$

实际上这一节共设计了4个滑动轴承,为了叙述方便。由这4个不同的轴承支承的机组分别称为机组1~机组4。这4个机组轴承的设计计算过程及结果见表7-5。

表 7-5 滑动轴承的设计计算结果

设计计算内容	单位	设计计算说明	设计计算结果			
			机组 1	机组 2	机组 3	机组 4
轴承形式		选定	可倾瓦	可倾瓦	可倾瓦	椭圆
转子密度	kg/m <sup>3</sup>		7800	7800	7800	7800
重力加速度	m/s <sup>2</sup>		9.8	9.8	9.8	9.8
轴承反力 W	N	根据表 7-1 的数据计算	2416	2416	2416	2416
工作转速 n	r/min	已知	11230	11230	11230	11230
工作角速度 $\Omega$	S <sup>-1</sup>	$\Omega = n\pi/30$	1176	1176	1176	1176
轴颈直径 d	mm	已知	101	101	101	101
轴瓦直径 D	mm	已知	114	114	114	114
长径比 L/D		选定	0.4	0.4	0.4	0.5
平均比压 P <sub>m</sub>	MPa	$P_m = W/(LD)$	0.592	0.592	0.592	0.474
最小间隙比 $\psi_{\min}$	%	选定	1.4	1.4	1.4	1.4
预负荷系数 m <sub>b</sub>		选定	0.0	0.2	0.0	0.5
间隙比 $\psi$	%	$\psi = \psi_{\min}/(1 - m_b)$	1.4	1.75	1.4	2.8

(续)

设计计算内容	单位	设计计算说明	设计计算结果			
			机组 1	机组 2	机组 3	机组 4
半径间隙 $C$	mm	$C = \phi D/2$	0.07	0.09	0.07	0.14
瓦块数		选定	5	5	5	2
瓦块包角 $\alpha$	(°)	选定	60	60	60	150
瓦块支点系数 $\sigma_T$		选定	0.5	0.5	0.6	0.6
瓦 1 的支点角 $\beta_1$	(°)	逆时针为正	324	324	324	324
支点跨度角 $\gamma$	(°)	瓦块均布	72	72	72	72
润滑油牌号		选定	22	22	22	22
进油温度 $T_m$	°C	选定	40	40	40	40
润滑油温升 $\Delta T$	°C	初步估取	12	12	11	25
平均油温 $T$	°C	$T = T_m + \Delta T$	52	52	51	65
润滑油密度 $\rho$	kg/m <sup>3</sup>	按 $T$ 查取	870	870	876	860
润滑油比热 $C_p$	J/(kg·°C)	按 $T$ 查取	1960	1960	1960	2015
润滑油粘度 $\eta$	N·s/m <sup>2</sup>	按 $T$ 查取	0.0172	0.0172	0.0172	0.0095

承载系数 $\phi_w$		式(7-1)	0.115	0.090	0.179	0.112	0.665
偏心率 $\epsilon$		按 $\phi_w$ 插值	0.26	0.22	0.18	0.15	0.28
偏位角 $\theta$	(°)	按 $\phi_w$ 插值	0	0	0	0	86.0
流量系数 $\phi_q$		按 $\phi_w$ 插值	1.25	1.25	1.08	1.60	0.14
阻力系数 $\phi_f$		按 $\phi_w$ 插值	46.0	59.0	37.0	51.0	13.0
润滑油流量 $Q$	cm <sup>3</sup> /s	式(7-4)	424	610	458	542	128
摩擦功耗 $N_f$	W	式(7-5)	8885	13370	9290	10237	5223
润滑油温升 $\Delta T$	°C	式(7-6)	12.2	12.8	11.8	11.0	23.5
检验 $\Delta T$		估取值与计算值不超过 ±10%	合适	合适	合适	合适	合适
检验 $T$	°C	$T = T_m + \Delta T \leq 70$	合适	合适	合适	合适	合适
结论		是否满足静特性要求	满足	满足	满足	满足	满足

① 表中的数据分别是左、右轴承的结果,如右所示:

左轴承	右轴承
-----	-----

## 7.4 轴系动力学设计示例

在前一节中,根据静特性设计,确定了4个轴承的设计参数。从静特性的角度来看,以上4个轴承均可作为机组的支承轴承。但是,对于高速旋转的机械来说,仅仅从静特性的角度来设计滑动轴承是远远不够的。我们必须把转子和轴承甚至还有基础作为一个整体,研究它在某一转速范围内的动力学特性,即稳定性、临界转速与不平衡响应。滑动轴承的设计是否成功,除了要考察轴承的静特性外,更为重要的是要保证机组具有良好的动态性能。因此,有了轴承的初步设计参数后,还必须对转子-轴承系统进行动力学设计。

### 1. 转子-轴承系统的动力学计算模型

图7-1的转子按其结构分成了40个自然轴段,共有41个自然节点,从左至右编号为1,2,...,41。计算轴系的稳定性、临界转速与不平衡响应时,将该转子离散成带有16个集总圆盘的力学系统,从左至右集总圆盘编号为1,2,...,16。这些集总圆盘的位置与自然节点的对应关系示于表7-6。计算时认为基础是刚性的。

表7-6 集总圆盘的位置与自然节点的对应关系

集总圆盘序号	1	2	3	4	5	6	7	8
自然节点序号	1	5 <sup>①</sup>	7	9 <sup>②</sup>	12 <sup>②</sup>	15 <sup>②</sup>	18 <sup>②</sup>	21 <sup>②</sup>
集总圆盘序号	9	10	11	12	13	14	15	16
自然节点序号	23 <sup>③</sup>	25 <sup>②</sup>	28 <sup>②</sup>	31 <sup>②</sup>	34 <sup>②</sup>	36	38 <sup>①</sup>	41

① 轴承中心; ② 叶轮中心; ③ 密封中心。

### 2. 稳定性计算结果比较

稳定性是高速旋转机械首先需要考虑的问题。对一台实际机组的轴系进行稳定性设计,主要包括以下几个内容:(1) 计算机组在额定转速下的稳定状态以及系统所具有的对数衰减率 $\delta$ ,并判断 $\delta$ 是否足够大;(2) 计算机组的失稳转速 $n_u$ ,并判断失稳转速偏离额定工作转速是否足够远;(3) 在额定工作转速下,比较在不同

的设计参数下,机组抵抗减稳因素的界限值,即比较抵抗负阻尼与交叉刚度的能力。

以轴系稳定性为目标函数来选择轴承的设计参数,就是要综合考虑以上三方面的问题。

### (1) 机组在额定转速下的对数衰减率 $\delta$

表 7-7 是额定转速 11230r/min 下各机组的对数衰减率  $\delta$  的计算结果。

表 7-7 额定转速下机组的对数衰减率  $\delta$

机组序号	机组 1	机组 2	机组 3	机组 4
$\delta$	0.27	0.46	0.46	< 0
稳定状态	稳定	稳定	稳定	不稳定

由上表知道,机组 4 在额定工作转速下已经失稳,在下面的分析计算中不再讨论该机组的情况。

由三种可倾瓦轴承支承的机组在额定转速下都是稳定的,而且所具有的对数衰减率  $\delta$  较大。但相对来说,机组 1 的对数衰减率偏小。根据对数衰减率判据知道,机组 2 和机组 3 的稳定性裕度较大。

### (2) 机组的失稳转速

表 7-5 中各轴承的温升,是在额定转速下的温升。当转速升高以后各轴承的温升都会发生变化,即润滑油的动力粘度  $\eta$  会发生变化。计算失稳转速需要将不同转速下润滑油的动力粘度  $\eta$  的真实值代入计算,但这会显著增加计算工作量。计算失稳转速时可以采用比较简便的方法,即认为油的动力粘度  $\eta$  不变,以额定转速下的值代入计算。这样得到的失稳转速,一般来说偏安全。

表 7-8 是前三台机组的失稳转速  $n_s$ ,由此可以看到三台机组的失稳转速均大于额定工作转速的 125%,都有较大的稳定性裕度。但相对来说,机组 1 的失稳转速比另外两台机组低很多。根据失稳转速判据知道,机组 2 和机组 3 的稳定性裕度较大。

表 7—8 失稳转速计算结果

机组序号	机组 1	机组 2	机组 3
失稳转速 $n_{st}$ (r/min)	14500	> 20000	> 20000

### (3) 减稳因素界限值

表 7—7、表 7—8 的计算结果都没有计入减稳因素(负阻尼与交叉刚度)的影响。根据 3.4 节知道,图 7—1 所示的压气机转子,由于叶轮顶隙分配不均匀,它始终对转子施加一个交叉刚度激振力。此外,转轴中间较长的梳齿密封,存在较大的气体激振力。选择机组的设计参数时,除了保证机组有较高的失稳转速和较大的对数衰减率外,还要保证机组具有较大的抵抗减稳因素的能力。

下面主要计算在额定转速 11230r/min 下,机组所能够承受的交叉刚度和负阻尼的极限值。为了简单起见,认为交叉刚度与负阻尼均作用在梳齿密封的中心即第九个集总圆盘上。其计算结果示于表 7—9 中。

表 7—9 减稳因素界限值计算结果

机组序号	机组 1	机组 2	机组 3
交叉刚度(N/m)	$0.14 \times 10^8$	$0.16 \times 10^8$	$0.17 \times 10^8$
负阻尼 $N \cdot s/m$	$0.18 \times 10^5$	$0.26 \times 10^5$	$0.27 \times 10^5$

由上表不难看出,机组 2 和机组 3 抵抗减稳因素的能力比机组 1 大。根据减稳因素界限值判据知道,机组 2 和机组 3 的稳定性裕度较大。

综合以上三方面的计算结果可以看到,机组 2 和机组 3 不但具有较大的对数衰减率和较高的失稳转速,而且具有较大的抵抗交叉刚度与负阻尼的能力。因此,这两台机组都有较高的稳定性裕度,但以机组 3 的稳定性为最佳。

### 3. 临界转速的计算

计算轴系的临界转速,其目的就是使机组的额定工作转速偏离临界转速足够远的距离,以保证机组不会产生过大的强迫振动。临界转速的计算一般包括三部分内容:(1)刚性支承下的临界转



速；(2) 考虑了支承弹性后的临界转速；(3) 阻尼临界转速。

### (1) 刚性支承的临界转速

计算时仍将转子划分为 16 个集总圆盘，各圆盘的位置见表 7-6。应用 8.5 节的程序，并取一个较大的支承等效刚度系数  $k_p = 0.75 \times 10^{14} \text{N/m}$ 。计算得到该转子的前五阶临界转速为 4420r/min、17390r/min、37860r/min、47874r/min 和 59006r/min

### (2) 弹性支承的临界转速

计算弹性支承转子系统的临界转速，首先要知道轴承与基础的等效弹簧刚度系数  $k_p$  与  $k_f$  以及基础的参振质量  $m_f$ 。在这个算例中近似认为基础是刚性的，因此只需要知道  $k_p$  就可以计算。对于滑动轴承来说，可以将某一转速范围内  $k_{yy}$  的平均值作为  $k_p$ 。由于计算临界转速的目的，主要是考察工作转速偏离临界转速距离的大小， $k_p$  可以取工作转速附近某一范围内  $k_{yy}$  的平均值。在该算例中，取各机组的  $k_p$  为

	机组 1	机组 2	机组 3
$k_p(\text{N/m})$	$0.75 \times 10^8$	$1.84 \times 10^8$	$2.54 \times 10^8$

考虑了支承弹性后，各机组的前 5 阶临界转速的计算结果示于表 7-10。

表 7-10 考虑支承弹性后的临界转速

机组序号	临界转速(r/min)				
	1	2	3	4	5
机组 1	3463	8898	15111	24189	38973
机组 2	3955	12423	20112	26779	39202
机组 3	4070	13584	22535	28472	39395

由上表看到，考虑了支承弹性后，各阶临界转速均有不同程度的下降，其中机组 1 下降最多。机组 1 工作在第二阶与第三阶临界转速之间；机组 2 和机组 3 都工作在第一阶与第二阶临界转速之间。为了保证机组工作时不会产生过大的强迫振动，要求工作远

离临界转速。对于用滚动轴承支承的转子系统来说,轴承的刚度较大但阻尼较小。对于这种机组一般要求

$$1.4(n_c)_m < n < 0.7(n_c)_{m+1} \quad (7-8)$$

式中  $(n_c)_m$ 、 $(n_c)_{m+1}$ ——相邻的  $m$  阶和  $m+1$  阶临界转速。

但是,对于用滑动轴承支承的转子系统来说,要满足上述关系比较困难。例如国产 200MW 汽轮发电机组,额定工作转速为 3000r/min,该机组的前 5 阶临界转速为

1002r/min、1470r/min、1936r/min、2014r/min、2678r/min

由上面数据知道,机组的额定工作转速与第五阶临界转速比较接近,不满足关系(7-8)。尽管如此,在实际运行时并没有产生较大的强迫振动。究其原因,是因为滑动轴承提供了较大的阻尼,将强迫振动的振幅限制在较低的水平上。因此,对于以滑动轴承支承的轴系来说,并不要求满足关系式(7-8),只要工作转速偏离临界转速一定的距离就可以。根据表 7-10 知道,三台机组均满足这一要求。

### (3) 阻尼临界转速

前面计算了刚性支承与弹性支承的临界转速,支承被简化为各向同性的支承并没有考虑阻尼等其他因素的影响。为了全面了解机组临界转速的分布情况,还必须计算轴系的阻尼临界转速。

图 7-2 ~ 图 7-4 分别是三台机组前几阶的涡动速度图,由此求得这三台机组在 5000 ~ 15000r/min 转速范围内的阻尼临界转速示于表 7-11。

表 7-11 阻尼临界转速

机组序号	5000 ~ 15000r/min 的阻尼临界转速
机组 1	7000r/min、7600r/min
机组 2	7000r/min、8000r/min
机组 3	5400r/min、5800r/min

根据表 7-11 的结果知道,这三台机组在 5000 ~ 15000r/min 范围内只有两阶临界转速,且都小于 8000r/min。因此,三台机组

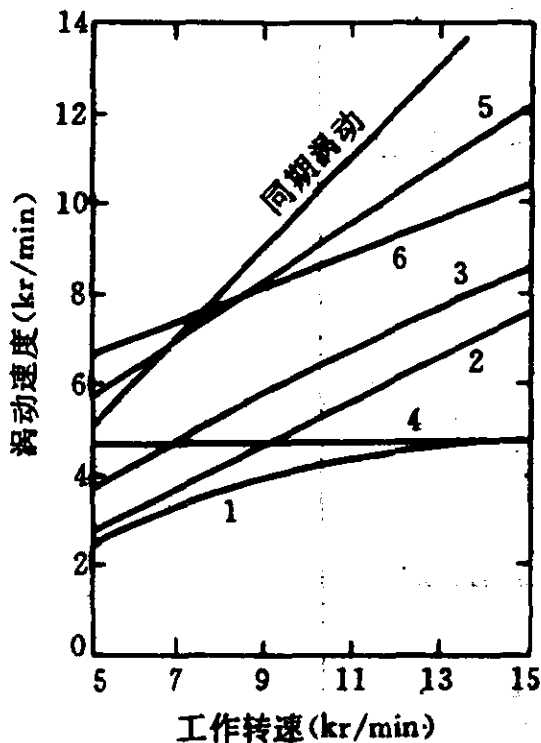


图 7-2 机组 1 的涡动速度

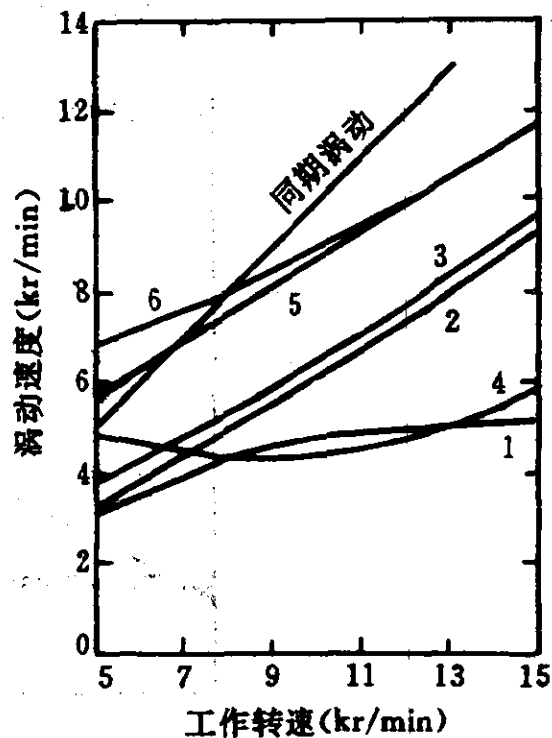


图 7-3 机组 2 的涡动速度

的工作转速偏离各自的阻尼临界转速足够远。

### 3. 不平衡响应的计算

选择轴系的最终设计参数时,首先要保证机组有足够的稳定性裕度,其次应使机组的工作转速偏离临界转速足够远,最后还要保证由不平衡激振力激起的不平衡响应要小。

由于转子不平衡量的大小及分布都是不知道的,实际计算时,往往在转子某些部位施加一已知的不平衡量,并计算在这一组特定的不平衡量的激振下转子的不平衡响应的大小。

不平衡响应的计算一般包括两部分内容,其一是计算无阻尼时的不平衡响应,其二是计算阻尼系统的不平衡响应。为了简单起见,下面只计算无阻尼时的不平衡响应。

假设图 7-1 所示的轴系,有一不平衡量为  $me = 0.001\text{kg} \cdot \text{m}$  作用于梳齿密封的中心即第九个集总圆盘上。轴承简化为各向同性的弹簧,其等效弹簧系数  $k_p$  同前。在额定工作转速  $11230\text{r}/\text{min}$  下各机组的不平衡响应的大小示于图 7-5。

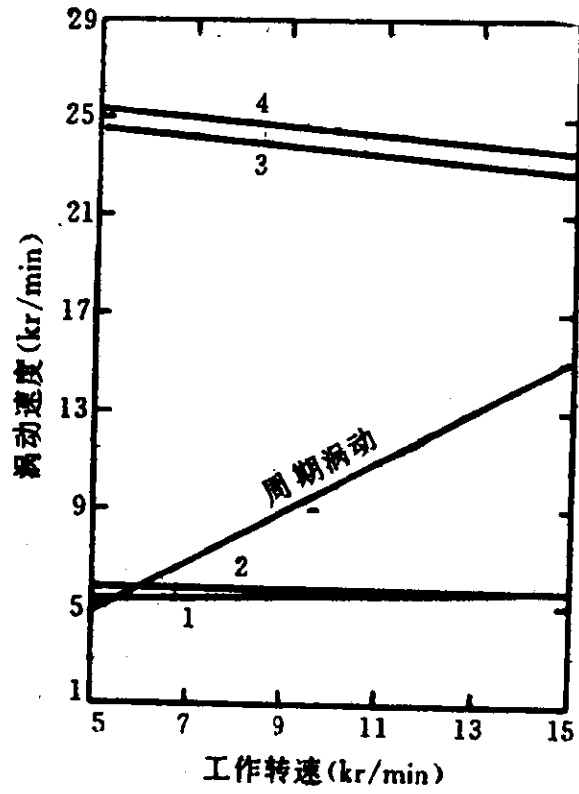


图 7-4 机组 3 的涡动速度

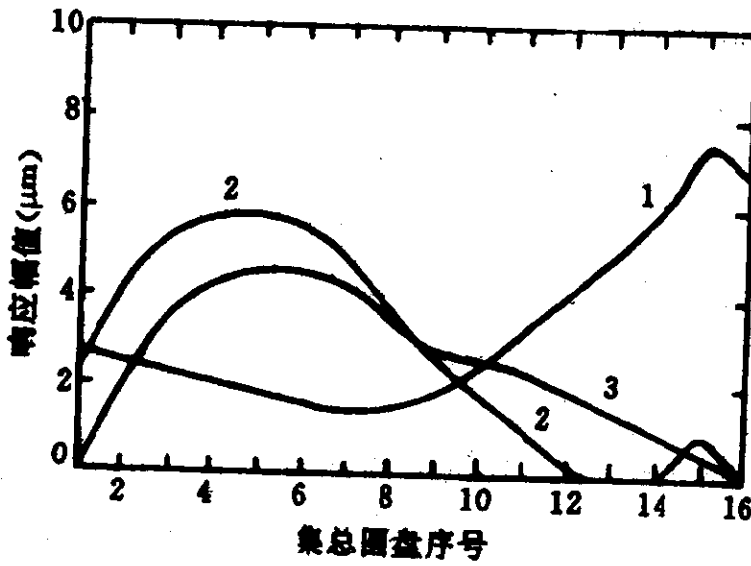


图 7-5 不平衡响应曲线

1—机组 1； 2—机组 2； 3—机组 3。

在图 7-5 中,横坐标为各集总圆盘的位置,其中第二和第十

五个集总圆盘为轴承中心；纵坐标为不平衡响应的振幅。由该图看到，机组 1 在前几个集总圆盘处的振幅较小，在后面几个集总圆盘处则较大，特别是在右端轴承处的振幅最大，容易造成轴承的损坏。机组 2 和机组 3 在前面几个圆盘处的振幅较大，在后面几个圆盘处则较小，而且左、右两个轴承处的振幅都较小。此外还可看到，在这三台机组中，机组 3 的最大振幅比其他两台机组都小，机组 1 的最大振幅比另外两台机组都大。

从不平衡响应的角度考虑，机组 3 最好。因为在整个转轴上，各点的振幅比较均匀也比较小，而且最大振幅均比其他两台机组小。

图 7-6 是上述三台机组在 2000 ~ 20000r/min 转速范围内第

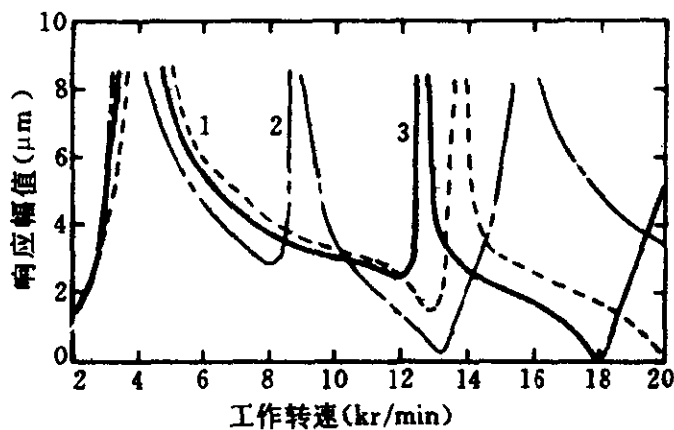


图 7-6 第九个集总圆盘处的响应幅值与转速的关系  
1—机组 1； 2—机组 2； 3—机组 3。

九个集总圆盘处的响应幅值与工作转速的关系。由该图近似求得各机组在 2000 ~ 20000r/min 的临界转速为

机组 1: 3500r/min、8400r/min、15500r/min

机组 2: 4000r/min、12400r/min、20000r/min

机组 3: 4000r/min、13800r/min

以上结果与表 7-10 的计算结果是一致的。

## 7.5 轴系的最终设计参数

根据前面的计算结果,宜选择机组 3 的参数作为最终的设计参数。与其他两台机组相比,该机组具有较好的动态性能,具体表现在以下几个方面

- (1) 在额定工作转速下的对数衰减率  $\delta$  较大并接近 0.5;
- (2) 失稳转速大于 20000r/min,大大超过了工作转速的 125%;
- (3) 在额定工作转速下抵抗负阻尼与交叉刚度的能力最大;
- (4) 额定工作转速偏离临界转速的距离最大;
- (5) 在 6000 ~ 20000r/min 转速范围内没有阻尼临界转速;
- (6) 额定工作转速下轴上各点的不平衡响应的幅值较小。

## 7.6 压缩机的运行情况

图 7-1 所示的机组是 80 年代初从国外引进的大化肥设备中的合成气低压缸压缩机,额定工作转速为 11230r/min。在实际运行中,当转速升高到 10800r/min 左右时多次发生突发性的油膜失稳事故,密封被严重磨损。在大振前,一直存在一个约 74Hz 的低频涡动,这一涡动频率正是刚支下转子的一阶临界转速 4420r/min。根据第三章的分析知道,这是典型的油膜振荡现象。造成这一现象的主要原因可能是由于机组缺乏足够的稳定性裕度以及转子中部较长的梳齿密封而引起的。

事故发生后,有关部门曾召集有关专家商讨机组的改进方案。但是,几经努力,在很长的时间内都未找到治理故障的有效措施,致使运行厂家只能依靠降低生产能力来保证机组稳定安全运行。

根据国内测绘的数据,该压缩机转子两端轴承的原始设计参数见表 7-12。

表 7-12 支承轴承的原始设计参数

设计内容	单位	左端轴承	右端轴承
轴承型式		五瓦可倾瓦轴承, 载荷在支点上	
轴瓦直径 $D$	mm	101	114
长径比 $L/D$		0.403	0.411
预负荷系数 $m_b$		0	0
间隙比 $\psi$		1.47‰	1.40‰
支点系数 $a_T$		0.5	0.5
瓦块包角 $\alpha$	(°)	57	57

由上表可以看到,该机组轴承的原始设计参数与表 7-5 中机组 1 轴承的设计参数非常接近。根据 7.4 节的计算结果知道,机组 1 的稳定性裕度偏低。作者曾根据表 7-12 轴承的原始设计参数对轴系进行过动力学设计,结果表明轴系的失稳转速仅为 13000r/min, 低于额定工作转速的 125%; 在额定转速下的对数衰减率  $\delta$  仅为 0.09。此外,计算时尚未计及密封、叶片顶隙激振的影响。当如实地考虑这些因素后,机组的失稳转速将会进一步下降并与实际机组事故报道的失稳转速比较一致。

上述分析表明,该压缩机组缺乏足够的稳定性裕度,轴系的原始设计参数不甚合理。

由于油膜失稳事故长期没有得到很好的解决,给运行厂家造成了巨大的经济损失。为了确保机组满负荷稳定安全运行,后耗资数十万美元委托国外某公司对该离心压缩机轴系进行全面改造设计,油膜失稳才得以消除。在轴系的改造设计中,主要采用了以下几个措施

- (1) 将可倾瓦轴承瓦块的支点系数  $a_T$  由原来的 0.5 改为 0.53;
- (2) 将轴承跨距由原来的 1.616m 缩短为 1.478m, 转子直径由原来的  $\phi 150$  增大到  $\phi 152$ ;
- (3) 减小密封齿数,并在适当位置沿密封周向打孔从二段出口引进高压气体减小由密封产生的激振力。

不难看出,以上几个措施都是为了提高机组轴系的稳定性裕

度。

根据 7.4 节的计算结果, 作者认为只要适当改变轴承的设计参数(如改为机组 3 轴承的参数), 就可以解决不稳定性问题, 而不必花费这么大的资金对机组作如此之大的改动。

### 参 考 文 献

- 1 张直明主编. 滑动轴承的流体动力润滑理论. 北京: 高等教育出版社, 1986.



# 第八章 常用滑动轴承性能数据 及动力学设计计算程序

## 8.1 常用固定瓦轴承性能数据

表 8—1 ~ 表 8—13 给出了常用轴承在层流工况下的静、动特性数据的无量值, 计算时没有考虑粘度不均匀分布和进油压力的影响。

表中  $K_{ij}$ 、 $D_{ij}$  ( $i, j = x, y$ ) 分别表示无量纲的刚度、阻尼系数。刚度、阻尼及承载力的相对单位分别是  $\eta\Omega L/\psi^3$ 、 $\eta L/\psi^3$  和  $\eta\Omega LR/\psi^2$ 。

表 8—1 ~ 表 8—6 是圆柱轴承的性能数据;

表 8—7 ~ 表 8—11 是椭圆轴承的性能数据;

表 8—12 ~ 表 8—13 是三油楔轴承的性能数据;

表 8—14 是两种常用润滑油的物性参数。

## 8.2 常用五瓦可倾瓦轴承性能数据

这一节给出的是常用五瓦可倾瓦轴承的静特性和相对动特性的无量纲值, 各无量纲量的相对单位与前一节相同。计算时未考虑粘度不均匀分布和进油压力的影响, 并认为轴承工作在层流状态。可倾瓦轴承的结构简图及受力情况见图 1—4(a)。

表 8—15 至表 8—26 中各符号的含义为

$K_{ij}$ ——无量纲相对刚度系数,  $i, j = \eta, \xi$ ;

$D_{ij}$ ——无量纲相对阻尼系数,  $i, j = \eta, \xi$ ;

$F_{x0}$ ——平衡时无量纲油膜力的水平分量;

$F_{y0}$ ——平衡时无量纲油膜力的垂直分量；

$\beta_1$ ——第一块瓦的支点角，逆时针为正。

其他符号的含义见表 1-1。在下面的表格中，有些瓦块的数据为零，这说明该瓦块不承载。

表 8-1 圆柱轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ, L/D = 0.4$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yz}$	$K_{yy}$	$D_{zz}$	$D_{xy}$	$D_{yz}$	$D_{yy}$
0.10	78.20	0.046	0.042	108.70	0.084	-0.214	0.481	0.077	0.414	0.085	0.085	0.959
0.20	68.38	0.099	0.080	49.300	0.185	-0.236	0.579	0.174	0.501	0.191	0.191	1.139
0.30	61.07	0.167	0.112	29.210	0.322	-0.293	0.760	0.318	0.665	0.371	0.371	1.471
0.40	54.51	0.263	0.140	19.380	0.459	-0.279	1.035	0.634	0.708	0.501	0.501	1.960
0.50	48.51	0.412	0.165	13.210	0.679	-0.248	1.520	1.253	0.826	0.714	0.714	2.817
0.60	43.05	0.670	0.186	9.000	1.050	-0.161	2.463	2.611	1.032	1.146	1.146	4.463
0.70	36.48	1.196	0.204	5.880	1.942	0.038	4.785	6.131	1.672	2.182	2.182	8.611

表 8-2 圆柱轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ, L/D = 0.5$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yz}$	$K_{yy}$	$D_{zz}$	$D_{xy}$	$D_{yz}$	$D_{yy}$
0.10	77.46	0.069	0.040	72.020	0.117	-0.282	0.717	0.116	0.553	0.119	0.108	1.429
0.20	67.48	0.147	0.076	33.270	0.257	-0.364	0.858	0.261	0.669	0.273	0.202	1.698
0.30	60.08	0.247	0.106	19.800	0.449	-0.389	1.118	0.475	0.887	0.510	0.518	2.188
0.40	54.12	0.386	0.132	13.270	0.638	-0.400	1.499	0.825	0.964	0.697	0.741	2.880
0.50	48.18	0.599	0.153	9.170	0.975	-0.387	2.202	1.742	1.223	1.090	1.090	4.180
0.60	42.35	0.963	0.171	6.350	1.569	-0.356	3.513	3.501	1.671	1.818	1.821	6.717
0.70	36.34	1.677	0.185	4.260	2.677	-0.063	6.569	8.168	2.302	3.101	3.134	12.25

表 8-3 圆柱轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ, L/D = 0.6$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yz}$	$K_{yy}$	$D_{zz}$	$D_{xy}$	$D_{yz}$	$D_{yy}$
0.10	77.14	0.093	0.038	53.700	0.150	-0.354	0.976	0.158	0.679	0.142	0.142	1.949
0.20	66.57	0.200	0.072	24.530	0.330	-0.345	1.165	0.357	0.823	0.339	0.339	2.315
0.30	59.09	0.333	0.099	14.940	0.575	-0.499	1.506	0.643	1.096	0.663	0.663	2.978
0.40	53.12	0.518	0.122	9.937	0.879	-0.559	2.042	1.160	1.391	1.044	1.044	4.011
0.50	47.35	0.797	0.141	6.957	1.283	-0.533	2.923	2.214	1.639	1.505	1.505	5.689
0.60	42.08	1.262	0.156	4.906	1.974	-0.447	4.566	4.445	2.085	2.255	2.255	8.806
0.70	36.22	2.147	0.168	3.377	3.204	0.013	8.012	10.18	2.668	3.610	3.610	15.29

表 8-4 圆柱轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ, L/D = 0.7$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yx}$	$D_{yy}$
0.10	76.40	0.119	0.036	41.990	0.182	-0.308	1.249	0.203	0.791	0.164	0.164	2.497
0.20	66.09	0.254	0.067	19.270	0.399	-0.468	1.485	0.254	0.959	0.423	0.423	2.965
0.30	58.14	0.423	0.092	11.810	0.693	-0.596	1.905	0.813	1.275	0.793	0.793	3.802
0.40	52.18	0.652	0.113	7.998	1.087	-0.680	2.574	1.415	1.711	1.313	1.313	5.139
0.50	46.58	0.994	0.129	5.621	1.543	-0.637	3.600	2.689	1.949	1.830	1.830	7.145
0.60	41.45	1.551	0.143	4.032	2.290	-0.485	5.438	5.358	2.351	2.633	2.601	10.70
0.70	36.19	2.586	0.152	2.843	3.718	0.019	9.353	11.84	3.072	4.181	4.242	18.23

表 8-5 圆柱轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ, L/D = 0.8$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yx}$	$D_{yy}$
0.10	76.10	0.146	0.034	34.390	0.213	-0.445	1.527	0.246	0.886	0.231	0.231	3.057
0.20	65.22	0.309	0.063	15.860	0.464	-0.512	1.808	0.548	1.080	0.483	0.483	3.627
0.30	57.23	0.512	0.086	9.787	0.802	-0.673	2.301	0.875	1.431	0.913	0.913	4.634
0.40	51.31	0.785	0.104	6.683	1.252	-0.771	3.070	1.679	1.917	1.524	1.524	6.217
0.50	46.31	1.183	0.119	4.752	1.753	-0.696	4.211	3.152	2.157	2.064	2.064	8.483
0.60	41.31	1.823	0.130	3.464	2.614	-0.560	6.269	6.113	2.669	3.023	3.022	12.56
0.70	36.15	2.984	0.138	2.492	4.099	0.077	10.43	13.52	3.309	4.517	4.584	20.64

表 8-6 圆柱轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ, L/D = 1.0$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yx}$	$D_{yy}$
0.10	75.11	0.197	0.030	25.450	0.267	-0.519	2.069	0.326	1.038	0.276	0.276	4.150
0.20	63.59	0.415	0.055	11.850	0.580	-0.600	2.431	0.720	1.265	0.612	0.612	4.915
0.30	55.55	0.680	0.074	7.410	0.993	-0.732	3.050	1.262	1.680	1.139	1.139	6.235
0.40	50.08	1.029	0.089	5.140	1.562	-0.943	4.014	2.099	2.319	1.919	1.919	8.316
0.50	45.32	1.524	0.100	3.735	2.104	-0.816	5.294	3.808	2.507	2.429	2.429	10.97
0.60	40.54	2.296	0.109	2.796	3.214	-0.826	7.776	7.151	3.407	3.933	3.929	16.23
0.70	36.02	3.654	0.114	2.079	4.977	-0.203	12.51	15.07	4.330	5.947	5.940	25.96

表 8-7 椭圆轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ$ ,  $L/D = 0.5$ ,  $m_b = 0.5$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_b$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yx}$	$D_{yy}$
0.05	91.40	0.091	0.111	89.300	-0.037	-2.351	1.797	3.868	1.818	-2.652	-2.612	6.868
0.10	91.00	0.183	0.115	44.340	0.029	-2.371	1.948	4.040	1.900	-2.542	-2.573	7.146
0.15	90.02	0.294	0.120	27.990	0.089	-2.381	2.082	4.254	2.029	-2.489	-2.402	7.324
0.20	88.41	0.423	0.128	19.570	0.293	-2.394	2.340	4.453	2.216	-2.101	-2.088	7.711
0.25	87.10	0.582	0.138	14.430	0.544	-2.359	2.585	4.823	2.394	-1.643	-1.618	7.964
0.30	84.49	0.809	0.148	10.630	0.900	-2.234	3.349	5.479	2.731	-0.976	-0.992	9.091
0.35	81.20	1.144	0.160	7.753	1.292	-1.833	4.353	6.592	2.939	-0.294	-0.321	10.36
0.40	75.32	1.772	0.171	5.298	2.234	-1.074	6.803	10.62	3.237	1.301	1.202	13.93
0.45	60.57	3.994	0.173	2.762	5.549	-1.783	17.14	32.67	3.764	5.634	5.616	31.41

表 8-8 椭圆轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ$ ,  $L/D = 0.6$ ,  $m_b = 0.5$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_b$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yx}$	$D_{yy}$
0.05	92.51	0.116	0.099	69.870	-0.129	-2.885	2.476	4.993	2.247	-3.407	-3.330	9.074
0.10	92.24	0.238	0.102	34.420	-0.035	-2.898	2.703	5.080	2.358	-3.248	-3.253	9.509
0.15	91.17	0.376	0.108	21.840	0.186	-2.935	2.871	5.251	2.529	-3.011	-3.031	9.753
0.20	89.58	0.542	0.115	15.340	0.387	-2.881	2.850	5.545	2.670	-2.614	-2.653	9.480
0.25	88.11	0.752	0.124	11.260	0.688	-2.845	3.459	5.535	3.005	-2.007	-2.021	10.46
0.30	85.40	1.035	0.134	8.369	0.950	-2.679	4.209	6.872	3.338	-1.506	-1.533	11.44
0.35	82.08	1.450	0.145	6.184	1.656	-2.358	5.541	8.321	3.736	-0.121	-0.111	13.37
0.40	76.03	2.220	0.155	4.276	2.767	-1.323	8.289	12.55	3.948	1.792	1.738	17.40
0.45	61.19	4.858	0.156	2.313	7.396	-1.330	21.37	36.19	5.661	8.939	8.895	41.49

表 8-9 椭圆轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ$ ,  $L/D = 0.7$ ,  $m_b = 0.5$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yr}$	$D_{yy}$
0.05	94.07	0.137	0.089	59.450	-0.235	-3.344	3.102	5.827	2.629	-4.122	-4.119	11.09
0.10	93.20	0.287	0.092	28.540	-0.109	-3.375	3.286	6.013	2.754	-3.902	-3.815	11.40
0.15	92.21	0.457	0.096	18.080	0.091	-3.385	3.443	6.176	2.923	-3.551	-3.557	11.63
0.20	91.05	0.655	0.104	12.750	0.424	-3.358	3.578	6.573	3.158	-2.930	-2.918	11.70
0.25	88.58	0.913	0.112	9.322	0.663	-3.253	4.286	7.016	3.552	-2.535	-2.502	12.79
0.30	86.27	1.245	0.122	7.006	1.112	-3.117	5.889	7.820	3.939	-1.692	-1.608	13.86
0.35	82.31	1.742	0.132	5.157	2.009	-2.669	6.701	9.503	4.424	0.028	0.028	16.29
0.40	76.18	2.654	0.140	3.618	3.358	-1.623	9.903	12.12	4.800	2.521	2.543	21.26
0.45	61.25	5.648	0.140	2.018	8.212	1.623	23.67	40.53	6.113	9.651	9.583	46.72

表 8-10 椭圆轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ$ ,  $L/D = 0.8$ ,  $m_b = 0.5$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yr}$	$D_{yy}$
0.05	95.04	0.160	0.079	51.220	-0.291	-3.738	3.836	6.687	2.964	-4.855	-4.663	13.27
0.10	94.23	0.338	0.082	24.860	-0.180	-3.751	3.709	6.827	3.086	-4.480	-4.481	12.90
0.15	93.16	0.534	0.087	15.550	0.071	-3.758	3.953	6.875	3.275	-4.031	-4.031	13.28
0.20	91.46	0.768	0.094	10.970	0.350	-3.772	4.494	7.278	3.639	-3.545	-3.535	14.21
0.25	89.39	1.601	0.102	8.071	0.687	-3.675	4.966	7.825	3.993	-2.949	-2.960	14.75
0.30	86.51	1.443	0.111	6.030	1.354	-3.450	5.972	8.740	4.470	-1.612	-1.622	16.26
0.35	82.50	2.036	0.120	4.473	2.279	-2.932	7.950	10.56	4.864	0.215	0.277	18.58
0.40	76.21	3.062	0.127	3.167	3.839	-1.776	11.21	15.59	5.352	3.060	3.090	24.42
0.45	61.34	6.302	0.126	1.825	9.137	1.629	25.97	43.34	6.864	10.93	10.82	52.38

表 8-11 椭圆轴承, 瓦张角  $2 \times 150^\circ$ ,  $L/D = 1.0$ ,  $m_b = 0.5$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yz}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yz}$	$D_{yy}$
0.05	96.33	0.202	0.065	40.830	-0.426	-4.349	4.938	7.656	3.495	-5.621	-5.639	16.60
0.10	95.51	0.420	0.068	19.780	-0.239	-4.399	4.961	7.999	3.694	-5.266	-5.209	16.58
0.15	94.43	0.661	0.072	12.680	-0.100	-4.396	5.267	8.294	3.921	-5.022	-5.000	17.06
0.20	92.51	0.962	0.071	8.813	0.371	-4.379	5.701	8.589	4.301	-4.201	-4.212	17.72
0.25	90.33	1.327	0.085	6.517	0.883	-4.226	6.337	9.146	4.791	-3.224	-3.155	18.63
0.30	87.28	1.819	0.092	4.879	1.629	-3.990	7.345	10.15	5.222	-1.750	-1.737	20.90
0.35	83.19	2.450	0.100	3.664	2.611	-3.193	8.853	12.22	5.375	0.129	0.123	21.91
0.40	76.17	3.756	0.105	2.625	4.521	-1.912	13.18	17.86	6.047	3.707	3.701	29.34
0.45	62.02	7.286	0.103	1.603	9.967	2.038	28.19	47.53	7.229	11.38	11.28	57.79

表 8-12 三油楔轴承,  $L/D = 0.6$ ,  $Y = 4/3$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yz}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yz}$	$D_{yy}$
0.10	73.38	0.096	0.370	48.080	0.693	-0.637	0.541	0.941	0.980	-0.191	-0.191	1.624
0.20	57.52	0.217	0.387	21.670	0.758	-0.680	0.614	1.093	1.041	-0.184	-0.184	1.830
0.30	51.62	0.357	0.403	13.560	0.866	-0.699	0.756	1.359	1.087	-0.120	-0.120	2.152
0.40	48.04	0.540	0.421	9.252	1.055	-0.667	1.014	1.827	1.075	0.042	0.042	2.671
0.50	44.20	0.809	0.437	6.588	1.320	-0.625	1.559	2.768	1.201	0.272	0.272	3.699
0.60	39.98	1.255	0.451	4.697	1.816	-0.464	2.711	4.776	1.478	0.783	0.783	5.848
0.70	34.85	2.098	0.460	3.196	3.009	0.052	5.909	9.759	2.145	2.235	2.235	11.32

表 8-13 三油楔轴承,  $L/D = 0.8, Y = 4/3$ 

$\epsilon$	$\theta(^{\circ})$	$\phi_w$	$\phi_q$	$\phi_f$	$K_{xx}$	$K_{xy}$	$K_{yx}$	$K_{yy}$	$D_{xx}$	$D_{xy}$	$D_{yx}$	$D_{yy}$
0.10	95.37	0.139	0.277	33.570	0.800	-0.775	0.710	1.200	1.227	-0.299	-0.299	2.112
0.20	66.66	0.316	0.294	15.110	0.882	-0.825	0.803	1.410	1.305	-0.297	-0.297	2.376
0.30	58.16	0.503	0.302	9.768	0.999	-0.846	0.981	1.748	1.394	-0.245	-0.245	2.763
0.40	52.87	0.742	0.324	6.871	1.210	-0.795	1.297	2.325	1.406	-0.071	-0.071	3.379
0.50	48.13	1.089	0.337	5.015	1.544	-0.663	1.936	3.435	1.437	0.238	0.238	4.536
0.60	42.54	1.661	0.346	3.625	2.121	-0.407	3.403	5.865	1.761	0.820	0.820	7.093
0.70	36.16	2.726	0.349	2.573	3.545	0.350	7.201	11.83	2.517	2.509	2.509	13.63

表 8-14 22 号和 30 号透平油的物性参数

物 性	牌号	温 度 (C)										
		30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
密度 $\rho$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	22	888.5	885.5	882.5	879.3	876.0	872.8	869.5	866.3	863.0	859.8	856.5
	30	893.0	889.5	886.0	883.0	880.0	876.5	873.0	870.0	867.0	864.0	861.0
比热 $C_v$ [ $\text{KJ}/(\text{kg} \cdot \text{C})$ ]	22	1.889	1.906	1.923	1.944	1.960	1.981	1.998	2.015	2.032	2.048	2.065
	30	1.872	1.889	1.906	1.927	1.944	1.960	1.977	1.998	2.015	2.032	2.048
动力粘度 $\eta$ ( $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ ) ( $\times 10^{-3}$ )	22	50.00	36.50	28.00	22.10	18.00	14.20	11.80	9.500	8.000	7.001	6.100
	30	75.54		44.15		26.49		17.66'		12.26		7.161









表 8 — 18  $L/D = 0.4, \alpha_T = 0.6, m_b = 0, \beta_1 = 324^\circ, \gamma = 72^\circ, \alpha = 60^\circ$ 

瓦号	$K_{\eta}$	$K_{\pi}$	$K_{\xi}$	$K_{\eta}$	$K_{\xi}$	$D_{\eta}$	$D_{\pi}$	$D_{\xi}$	$D_{\eta}$	$D_{\xi}$	$F_{x0}$	$F_{y0}$
$\varepsilon = 0.030$	0.195	0.100	0.241	0.143	0.103	0.132	0.128	0.192	0.128	0.192	-0.067	-0.093
$\theta = 0.000$	0.278	-0.248	-0.093	0.100	0.287	-0.085	-0.090	0.039	-0.090	0.039	-0.118	0.038
$\phi_w = 0.021$	0.018	0.009	0.173	0.387	0.012	0.001	-0.005	0.334	-0.005	0.334	0.000	0.130
$\phi_q = 1.608$	0.378	-0.046	0.109	-0.001	0.284	0.093	0.088	0.041	0.088	0.041	0.118	0.038
$\phi_f = 259.81$	0.048	-0.193	-0.053	0.290	0.107	-0.129	-0.134	0.188	-0.134	0.188	0.067	-0.093
$\varepsilon = 0.100$	0.164	0.083	0.204	0.119	0.088	0.113	0.109	0.165	0.109	0.165	-0.060	-0.082
$\theta = 0.000$	0.299	-0.265	-0.100	0.107	0.305	-0.091	-0.096	0.042	-0.096	0.042	-0.124	0.040
$\phi_w = 0.071$	0.024	0.012	0.216	0.494	0.014	0.002	-0.003	0.415	-0.003	0.415	0.000	0.154
$\phi_q = 1.608$	0.406	-0.048	0.117	0.000	0.303	0.099	0.094	0.044	0.094	0.044	0.124	0.040
$\phi_f = 77.08$	0.039	-0.163	-0.042	0.244	0.093	-0.111	-0.115	0.160	-0.115	0.160	0.059	-0.082
$\varepsilon = 0.200$	0.130	0.065	0.162	0.092	0.071	0.091	0.089	0.134	0.089	0.134	-0.050	-0.069
$\theta = 0.000$	0.332	-0.293	-0.112	0.119	0.335	-0.101	-0.106	0.046	-0.106	0.046	-0.133	0.043
$\phi_w = 0.150$	0.035	0.019	0.306	0.723	0.020	0.006	-0.001	0.584	-0.001	0.584	0.000	0.202
$\phi_q = 1.606$	0.451	-0.051	0.130	0.000	0.334	0.107	0.103	0.047	0.103	0.047	0.134	0.043
$\phi_f = 37.05$	0.029	-0.129	-0.032	0.193	0.075	-0.090	-0.093	0.130	-0.093	0.130	0.050	-0.069
$\varepsilon = 0.350$	0.094	0.045	0.119	0.065	0.052	0.068	0.066	0.101	0.066	0.101	-0.040	-0.055
$\theta = 0.000$	0.394	-0.342	-0.132	0.139	0.387	-0.118	-0.124	0.054	-0.124	0.054	-0.150	0.049
$\phi_w = 0.309$	0.072	0.041	0.559	1.399	0.036	0.021	0.007	1.063	0.007	1.063	0.000	0.320
$\phi_q = 1.603$	0.531	-0.057	0.152	0.002	0.387	0.123	0.118	0.054	0.118	0.054	0.150	0.049
$\phi_f = 18.87$	0.020	-0.094	-0.021	0.139	0.057	-0.068	-0.070	0.096	-0.070	0.096	0.040	-0.054
$\varepsilon = 0.500$	0.070	0.032	0.089	0.047	0.040	0.052	0.051	0.078	0.051	0.078	-0.032	-0.044
$\theta = 0.000$	0.470	-0.403	-0.158	0.165	0.451	-0.139	-0.145	0.064	-0.145	0.064	-0.169	0.055
$\phi_w = 0.590$	0.171	0.106	1.196	3.171	0.074	0.071	0.046	2.252	0.046	2.252	0.000	0.568
$\phi_q = 1.598$	0.632	-0.064	0.181	0.003	0.452	0.143	0.137	0.062	0.137	0.062	0.169	0.055
$\phi_f = 10.69$	0.013	-0.070	-0.014	0.103	0.044	-0.052	-0.054	0.074	-0.054	0.074	0.032	-0.044

表 8-19  $L/D = 0.4, \alpha_T = 0.6, m_b = 0.1, \beta_1 = 324^\circ, \gamma = 72^\circ, \alpha = 60^\circ$ 

瓦号	$K_w$	$K_T$	$K_{T_1}$	$K_{R_1}$	$D_w$	$D_T$	$D_{T_1}$	$D_{R_1}$	$F_{z_0}$	$F_{y_0}$
$\epsilon = 0.030$	0.270	0.143	0.332	0.203	0.141	0.179	0.174	0.257	-0.085	-0.117
$\theta = 0.000$	0.395	-0.343	-0.133	0.140	0.388	-0.119	-0.124	0.054	-0.150	0.049
$\phi_w = 0.030$	0.027	0.014	0.238	0.551	0.016	0.003	-0.003	0.458	0.000	0.167
$\phi_T = 1.471$	0.533	-0.057	0.153	0.002	0.388	0.124	0.119	0.054	0.150	0.049
$\phi_f = 206.28$	0.070	-0.267	-0.078	0.403	0.142	-0.174	-0.179	0.256	0.085	-0.117
$\epsilon = 0.100$	0.224	0.116	0.276	0.166	0.117	0.150	0.145	0.218	-0.075	-0.102
$\theta = 0.000$	0.428	-0.370	-0.144	0.151	0.417	-0.128	-0.134	0.059	-0.159	0.052
$\phi_w = 0.100$	0.035	0.019	0.305	0.723	0.020	0.006	-0.001	0.584	0.000	0.202
$\phi_T = 1.471$	0.577	-0.060	0.165	0.003	0.417	0.133	0.127	0.058	0.159	0.052
$\phi_f = 61.12$	0.056	-0.221	-0.062	0.334	0.121	-0.146	-0.152	0.214	0.075	-0.102
$\epsilon = 0.200$	0.174	0.089	0.215	0.126	0.092	0.119	0.115	0.174	-0.062	-0.085
$\theta = 0.000$	0.483	-0.414	-0.163	0.170	0.462	-0.143	-0.149	0.065	-0.173	0.056
$\phi_w = 0.213$	0.056	0.031	0.450	1.106	0.029	0.014	0.003	0.859	0.000	0.272
$\phi_T = 1.470$	0.649	-0.066	0.185	0.004	0.464	0.147	0.140	0.064	0.172	0.056
$\phi_f = 29.16$	0.042	-0.173	-0.046	0.259	0.097	-0.116	-0.121	0.169	0.062	-0.085
$\epsilon = 0.350$	0.123	0.061	0.153	0.087	0.067	0.087	0.084	0.127	-0.048	-0.066
$\theta = 0.000$	0.581	-0.491	-0.197	0.203	0.544	-0.169	-0.177	0.078	-0.196	0.064
$\phi_w = 0.457$	0.125	0.075	0.911	2.361	0.056	0.046	0.026	1.717	0.000	0.462
$\phi_T = 1.466$	0.778	-0.074	0.221	0.006	0.548	0.172	0.164	0.074	0.196	0.064
$\phi_f = 14.41$	0.027	-0.122	-0.030	0.182	0.072	-0.086	-0.088	0.123	0.048	-0.066
$\epsilon = 0.500$	0.089	0.043	0.112	0.061	0.050	0.065	0.063	0.097	-0.038	-0.052
$\theta = 0.000$	0.707	-0.590	-0.240	0.245	0.648	-0.203	-0.212	0.094	-0.225	0.073
$\phi_w = 0.955$	0.348	0.228	2.254	6.263	0.137	0.178	0.133	4.234	0.000	0.913
$\phi_T = 1.461$	0.941	-0.084	0.266	0.010	0.654	0.203	0.195	0.087	0.225	0.073
$\phi_f = 7.66$	0.018	-0.089	-0.020	0.132	0.054	-0.065	-0.067	0.092	0.038	-0.052

表 8 — 20  $L/D = 0.4, \alpha_T = 0.6, m_b = 0.2, \beta_1 = 324^\circ, \gamma = 72^\circ, \alpha = 60^\circ$

瓦号	$K_{\eta}$	$K_{\pi}$	$K_{\xi}$	$K_{\eta}$	$K_{\xi}$	$D_{\eta}$	$D_{\pi}$	$D_{\xi}$	$D_{\eta}$	$D_{\xi}$	$F_{x0}$	$F_{y0}$
$\epsilon = 0.030$	1	0.389	0.212	0.475	0.300	0.199	0.250	0.243	0.355	0.111	-	0.153
$\theta = 0.000$	2	0.584	-0.494	-0.198	0.204	0.546	-0.170	-0.178	0.078	-	0.197	0.064
$\phi_w = 0.043$	3	0.040	0.022	0.341	0.817	0.022	0.008	0.000	0.653	0.000	0.000	0.220
$\phi_q = 1.333$	4	0.781	-0.074	0.222	0.006	0.550	0.172	0.165	0.075	0.197	0.197	0.064
$\phi_f = 160.34$	5	0.107	-0.383	-0.120	0.582	0.195	-0.242	-0.249	0.359	0.111	0.111	-0.153
$\epsilon = 0.100$	1	0.315	0.169	0.386	0.240	0.163	0.206	0.200	0.294	-	0.095	-0.131
$\theta = 0.000$	2	0.639	-0.537	-0.216	0.222	0.593	-0.185	-0.193	0.085	-	0.210	0.068
$\phi_w = 0.146$	3	0.056	0.032	0.450	1.107	0.029	0.014	0.003	0.859	0.000	0.000	0.272
$\phi_q = 1.333$	4	0.853	-0.079	0.242	0.008	0.597	0.187	0.179	0.081	0.210	0.210	0.068
$\phi_f = 47.19$	5	0.084	-0.310	-0.094	0.470	0.162	-0.200	-0.206	0.295	0.095	0.095	-0.131
$\epsilon = 0.200$	1	0.238	0.125	0.293	0.177	0.124	0.159	0.154	0.230	-	0.078	-0.107
$\theta = 0.000$	2	0.729	-0.608	-0.248	0.253	0.666	-0.209	-0.218	0.097	-	0.230	0.075
$\phi_w = 0.317$	3	0.094	0.055	0.707	1.801	0.045	0.031	0.014	1.339	0.000	0.000	0.382
$\phi_q = 1.332$	4	0.971	-0.086	0.275	0.011	0.673	0.209	0.200	0.090	0.230	0.230	0.075
$\phi_f = 22.23$	5	0.060	-0.235	-0.067	0.355	0.128	-0.155	-0.161	0.227	0.078	0.078	-0.107
$\epsilon = 0.350$	1	0.163	0.083	0.203	0.118	0.087	0.112	0.108	0.164	-	0.059	-0.082
$\theta = 0.000$	2	0.897	-0.738	-0.305	0.309	0.801	-0.254	-0.265	0.117	-	0.266	0.086
$\phi_w = 0.721$	3	0.240	0.154	1.613	4.382	0.099	0.111	0.078	3.036	0.000	0.000	0.712
$\phi_q = 1.328$	4	1.191	-0.098	0.335	0.016	0.812	0.250	0.239	0.106	0.266	0.266	0.086
$\phi_f = 10.52$	5	0.039	-0.162	-0.042	0.243	0.092	-0.110	-0.114	0.159	0.059	0.059	-0.081
$\epsilon = 0.500$	1	0.116	0.057	0.145	0.081	0.063	0.082	0.080	0.121	-	0.046	-0.063
$\theta = 0.000$	2	1.120	-0.910	-0.382	0.383	0.976	-0.313	-0.326	0.145	-	0.309	0.101
$\phi_w = 1.730$	3	0.846	0.588	5.047	14.727	0.301	0.536	0.467	9.480	0.000	0.000	1.656
$\phi_q = 1.322$	4	1.480	-0.113	0.415	0.023	0.993	0.302	0.289	0.128	0.310	0.310	0.101
$\phi_f = 5.06$	5	0.026	-0.115	-0.028	0.171	0.068	-0.081	-0.084	0.116	0.046	0.046	-0.063









表 8 - 24  $L/D = 0.5, \alpha_T = 0.6, m_b = 0, \beta_1 = 324^\circ, \gamma = 72^\circ, \alpha = 60^\circ$

瓦号	$K_{\eta\eta}$	$K_{\eta\epsilon}$	$K_{\epsilon\eta}$	$K_{\epsilon\epsilon}$	$D_{\eta\eta}$	$D_{\eta\epsilon}$	$D_{\epsilon\eta}$	$D_{\epsilon\epsilon}$	$F_{r0}$	$F_{y0}$
$\epsilon = 0.030$	0.262	0.143	0.324	0.201	0.132	0.171	0.166	0.247	-0.092	-0.127
$\theta = 0.000$	0.382	-0.328	-0.130	0.132	0.367	-0.110	-0.116	0.049	-0.161	0.052
$\phi_w = 0.028$	0.023	0.013	0.224	0.527	0.014	0.001	-0.006	0.429	0.000	0.177
$\phi_q = 1.566$	0.514	-0.051	0.148	0.001	0.364	0.120	0.113	0.051	0.161	0.052
$\phi_f = 204.05$	0.069	-0.261	-0.081	0.393	0.137	-0.168	-0.173	0.242	0.092	-0.127
$\epsilon = 0.100$	0.221	0.119	0.274	0.168	0.112	0.146	0.142	0.212	-0.082	-0.113
$\theta = 0.000$	0.410	-0.351	-0.139	0.141	0.391	-0.117	-0.124	0.052	-0.169	0.055
$\phi_w = 0.093$	0.030	0.018	0.278	0.667	0.017	0.003	-0.006	0.532	0.000	0.209
$\phi_q = 1.566$	0.550	-0.054	0.158	0.001	0.389	0.127	0.121	0.055	0.169	0.055
$\phi_f = 60.65$	0.057	-0.221	-0.066	0.332	0.118	-0.144	-0.148	0.207	0.082	-0.113
$\epsilon = 0.200$	0.176	0.094	0.218	0.132	0.091	0.118	0.115	0.173	-0.070	-0.096
$\theta = 0.000$	0.455	-0.386	-0.154	0.156	0.429	-0.129	-0.137	0.057	-0.181	0.059
$\phi_w = 0.196$	0.044	0.027	0.391	0.964	0.023	0.006	-0.004	0.748	0.000	0.270
$\phi_q = 1.565$	0.609	-0.057	0.175	0.002	0.427	0.139	0.132	0.059	0.182	0.059
$\phi_f = 29.26$	0.045	-0.176	-0.051	0.263	0.097	-0.117	-0.120	0.167	0.070	-0.096
$\epsilon = 0.350$	0.129	0.068	0.161	0.095	0.067	0.089	0.086	0.130	-0.056	-0.077
$\theta = 0.000$	0.535	-0.450	-0.182	0.183	0.496	-0.150	-0.159	0.067	-0.203	0.066
$\phi_w = 0.401$	0.088	0.057	0.707	1.839	0.041	0.022	0.006	1.351	0.000	0.423
$\phi_q = 1.563$	0.713	-0.064	0.204	0.004	0.495	0.160	0.152	0.068	0.203	0.066
$\phi_f = 14.95$	0.031	-0.129	-0.036	0.193	0.073	-0.088	-0.090	0.125	0.056	-0.077
$\epsilon = 0.500$	0.097	0.050	0.122	0.070	0.051	0.068	0.066	0.100	-0.046	-0.063
$\theta = 0.000$	0.633	-0.527	-0.216	0.215	0.577	-0.176	-0.186	0.079	-0.228	0.074
$\phi_w = 0.759$	0.206	0.138	1.494	4.081	0.085	0.077	0.046	2.837	0.000	0.737
$\phi_q = 1.560$	0.842	-0.072	0.240	0.006	0.577	0.186	0.176	0.079	0.228	0.074
$\phi_f = 8.56$	0.022	-0.098	-0.025	0.145	0.056	-0.067	-0.069	0.095	0.046	-0.063

表 8 - 25  $L/D = 0.5, \alpha_T = 0.6, m_b = 0.1, \beta_1 = 324^\circ, \gamma = 72^\circ, \alpha = 60^\circ$ 

瓦号	$K_{\eta}$	$K_{\eta}^*$	$K_{\eta}$	$K_{\xi}$	$D_{\eta}$	$D_{\xi}^*$	$D_{\eta}$	$D_{\xi}$	$F_{x0}$	$F_{y0}$
$\epsilon = 0.030$	0.360	0.200	0.442	0.281	0.179	0.230	0.222	0.329	-0.116	-0.160
$\theta = 0.000$	0.537	-0.451	-0.183	0.183	0.498	-0.151	-0.159	0.067	-0.203	0.066
$\phi_w = 0.038$	0.033	0.020	0.307	0.742	0.018	0.004	-0.005	0.586	0.000	0.225
$\phi_q = 1.427$	0.716	-0.064	0.204	0.004	0.496	0.161	0.153	0.068	0.203	0.066
$\phi_f = 163.63$	0.100	-0.358	-0.116	0.541	0.182	-0.224	-0.231	0.326	0.116	-0.160
$\epsilon = 0.100$	0.299	0.165	0.369	0.231	0.150	0.194	0.187	0.278	-0.102	-0.140
$\theta = 0.000$	0.580	-0.486	-0.198	0.198	0.534	-0.162	-0.171	0.072	-0.215	0.070
$\phi_w = 0.130$	0.044	0.027	0.391	0.964	0.023	0.006	-0.004	0.748	0.000	0.270
$\phi_q = 1.427$	0.773	-0.068	0.220	0.005	0.533	0.172	0.163	0.073	0.215	0.070
$\phi_f = 48.39$	0.081	-0.298	-0.094	0.450	0.154	-0.189	-0.195	0.274	0.102	-0.140
$\epsilon = 0.200$	0.234	0.127	0.290	0.178	0.119	0.154	0.149	0.223	-0.085	-0.117
$\theta = 0.000$	0.650	-0.541	-0.222	0.221	0.592	-0.181	-0.191	0.081	-0.232	0.075
$\phi_w = 0.277$	0.069	0.044	0.572	1.462	0.033	0.016	0.001	1.091	0.000	0.361
$\phi_q = 1.426$	0.865	-0.073	0.246	0.007	0.592	0.190	0.181	0.081	0.232	0.076
$\phi_f = 23.14$	0.061	-0.234	-0.071	0.352	0.124	-0.151	-0.156	0.218	0.085	-0.117
$\epsilon = 0.350$	0.166	0.089	0.206	0.125	0.086	0.112	0.109	0.164	-0.067	-0.092
$\theta = 0.000$	0.779	-0.641	-0.266	0.263	0.698	-0.215	-0.226	0.096	-0.263	0.086
$\phi_w = 0.590$	0.152	0.100	1.140	3.059	0.065	0.052	0.025	2.161	0.000	0.603
$\phi_q = 1.424$	1.032	-0.082	0.292	0.010	0.699	0.223	0.213	0.094	0.263	0.086
$\phi_f = 11.50$	0.042	-0.166	-0.048	0.249	0.092	-0.111	-0.114	0.158	0.067	-0.092
$\epsilon = 0.500$	0.122	0.064	0.153	0.090	0.064	0.084	0.082	0.124	-0.054	-0.074
$\theta = 0.000$	0.943	-0.766	-0.323	0.317	0.825	-0.258	-0.270	0.115	-0.300	0.097
$\phi_w = 1.215$	0.414	0.292	2.783	7.915	0.155	0.199	0.141	5.280	0.000	1.168
$\phi_q = 1.421$	1.245	-0.092	0.351	0.015	0.830	0.261	0.250	0.109	0.300	0.097
$\phi_f = 6.19$	0.029	-0.123	-0.034	0.183	0.069	-0.084	-0.086	0.119	0.054	-0.074

表 8 - 26  $L/D = 0.5, \alpha_T = 0.6, m_b = 0.2, \beta_1 = 324^\circ, \gamma = 72^\circ, \alpha = 60^\circ$ 

瓦号	$K_w$	$K_{\theta}$	$K_{\phi}$	$K_{\psi}$	$K_{\xi}$	$D_w$	$D_{\theta}$	$D_{\phi}$	$D_{\psi}$	$D_{\xi}$	$F_{x0}$	$F_{y0}$
$\varepsilon = 0.030$	0.512	0.291	0.625	0.407	0.251	0.321	0.311	0.456	0.149	0.205	-0.149	-0.205
$\theta = 0.000$	0.782	-0.643	-0.267	0.264	0.701	-0.216	-0.227	0.096	-0.264	0.086	-0.264	0.086
$\phi_w = 0.055$	0.050	0.031	0.436	1.086	0.026	0.008	-0.004	0.834	0.000	0.294	0.000	0.294
$\phi_q = 1.288$	1.036	-0.083	0.293	0.010	0.702	0.224	0.213	0.095	0.264	0.086	0.264	0.086
$\phi_f = 127.47$	0.147	-0.507	-0.172	0.771	0.251	-0.311	-0.321	0.457	0.149	0.205	0.149	-0.205
$\varepsilon = 0.100$	0.417	0.235	0.512	0.328	0.206	0.265	0.256	0.377	0.129	0.177	-0.129	-0.177
$\theta = 0.000$	0.853	-0.698	-0.292	0.287	0.758	-0.235	-0.246	0.105	-0.280	0.091	-0.280	0.091
$\phi_w = 0.188$	0.069	0.044	0.572	1.462	0.033	0.016	0.001	1.091	0.000	0.361	0.000	0.361
$\phi_q = 1.288$	1.129	-0.087	0.319	0.012	0.761	0.242	0.230	0.102	0.280	0.091	0.280	0.091
$\phi_f = 37.63$	0.117	-0.414	-0.137	0.628	0.208	-0.257	-0.265	0.375	0.129	0.177	0.129	-0.177
$\varepsilon = 0.200$	0.318	0.176	0.392	0.247	0.159	0.205	0.198	0.294	0.106	0.146	-0.106	-0.146
$\theta = 0.000$	0.972	-0.789	-0.333	0.326	0.848	-0.266	-0.278	0.119	-0.306	0.099	-0.306	0.099
$\phi_w = 0.408$	0.114	0.074	0.892	2.349	0.051	0.033	0.013	1.698	0.000	0.502	0.000	0.502
$\phi_q = 1.287$	1.283	-0.094	0.362	0.016	0.854	0.269	0.257	0.112	0.306	0.100	0.306	0.100
$\phi_f = 17.78$	0.087	-0.317	-0.101	0.478	0.163	-0.200	-0.206	0.290	0.106	0.146	0.106	-0.146
$\varepsilon = 0.350$	0.220	0.119	0.272	0.167	0.112	0.145	0.141	0.211	0.082	0.112	-0.082	-0.112
$\theta = 0.000$	1.190	-0.955	-0.408	0.397	1.018	-0.322	-0.336	0.144	-0.352	0.114	-0.352	0.114
$\phi_w = 0.921$	0.287	0.198	2.006	5.589	0.113	0.124	0.081	3.805	0.000	0.917	0.000	0.917
$\phi_q = 1.285$	1.566	-0.107	0.440	0.023	1.029	0.321	0.307	0.133	0.352	0.114	0.352	0.114
$\phi_f = 8.48$	0.057	-0.220	-0.066	0.330	0.117	-0.143	-0.147	0.205	0.082	0.112	0.082	-0.112
$\varepsilon = 0.500$	0.157	0.083	0.195	0.117	0.081	0.107	0.103	0.156	0.064	0.089	-0.064	-0.089
$\theta = 0.000$	1.479	-1.173	-0.509	0.490	1.242	-0.396	-0.413	0.178	-0.408	0.133	-0.408	0.133
$\phi_w = 2.170$	0.991	0.730	6.109	18.194	0.337	0.596	0.517	11.653	0.000	2.082	0.000	2.082
$\phi_q = 1.281$	1.936	-0.122	0.542	0.032	1.259	0.389	0.373	0.160	0.408	0.133	0.408	0.133
$\phi_f = 4.16$	0.039	-0.157	-0.045	0.235	0.087	-0.105	-0.108	0.150	0.064	0.089	0.064	-0.089

## 8.3 单圆盘对称弹性转子 - 轴承 系统的稳定性计算程序

### 1. 程序适用范围

该程序适用于计算以固定瓦轴承或可倾瓦轴承支承的单圆盘弹性转子系统的稳定性, 轴承瓦块数  $s \leq 5$ 。该程序用 FORTRAN 语言编制, 在 IBM/AT 机上调试通过。程序中调用的两个子程序 RICSC 和 RMAT 在 8.4 节。此外, 该程序还调用了参考文献<sup>[1]</sup> 中的 IVSNC 和参考文献<sup>[2]</sup> 中的 BALANC、ELMHES、ELTRAN、HQR2 和 BALBAK 等标准子程序。程序前的“&”表示续行。

### 2. 输入数据及输出结果

第一张数据卡片为 NP、NE、NB、NS, 均为整型数, 其含义为

NP——轴承的瓦块数。如果是可倾瓦轴承则 NP 等于瓦块数; 如果是固定瓦轴承则  $NP = 1$ 。

NE——偏心率的个数。如果输入了 7 个不同偏心率下轴承的性能数据, 则  $NE = 7$ 。

NB——轴承类型判别参数, 如果是固定瓦轴承则  $NB = 1$ ; 如果是可倾瓦轴承则  $NB = 2$ 。

NS——转速个数, 如果需要计算 3 个不同转速下的稳定性, 则  $NS = 3$ 。

第二张数据卡片为 KSH、MASS、RAT、RD、PUSI、MU、G、AS、R, 均为实型数, 其含义为

KSH——转子中央刚度之半(N/m)。

MASS——转子中央圆盘质量之半(kg)。

RAT——轴承长径比  $L/D$ 。

RD——轴承内径或轴颈直径(m)。

PUSI——轴承间隙比。

MU——润滑油动力粘度( $N \cdot s/m^2$ )。

G——重力加速度( $m/s^2$ )。

AS——交叉刚度系数( $N/m$ ),不考虑时为零。

R——外部阻尼系数( $N \cdot s/m$ ),不考虑时其值为零。

第三张数据卡片为LOAD(I),  $I = 1, NE$ 。实型数组,其含义为LOAD(I)——对应第I个偏心率下轴承的无量纲承载系数。

第四张数据卡片为OMGA(I),  $I = 1, NS$ 。实型数组,其含义为OMGA(I)——第I个计算转速( $r/min$ )。

第五张数据卡片为BET(I),  $I = 1, NP$ 。实型数组,只有当NB = 2时才有,其含义为

BET(I)——第I块瓦的支点角 $\beta_i$ ,角起线为外载荷W作用方向,以逆时针为正,单位为度。

第六张数据卡片分两种情况,如果是固定瓦轴承即NB = 1,输入数据为轴承在不同偏心率下的无量纲刚度、阻尼系数,其排列次序为 $K_{xx}, K_{xy}, K_{yx}, K_{yy}, D_{xx}, D_{xy}, D_{yx}, D_{yy}$ ;如果是可倾瓦轴承即NB = 2,输入数据为轴承在不同偏心率下每块瓦的无量纲相对刚度、阻尼系数以及平衡时每块瓦的油膜力分量,其排列次序为

$$K_{\eta\eta}, K_{\eta\epsilon}, K_{\epsilon\eta}, K_{\epsilon\epsilon}, D_{\eta\eta}, D_{\eta\epsilon}, D_{\epsilon\eta}, D_{\epsilon\epsilon}, F_{x0}, F_{y0}。$$

输出结果只有两个,一个是无量纲特征值,另一个是对应的对数衰减率。特征向量存在数组Z中,但未打印。

WR(I)——第I个无量纲特征值 $\lambda$ 的实部。

WI(I)——第I个无量纲特征值 $\lambda$ 的虚部,特征值的相对单位为轴的旋转角速度 $\Omega(S^{-1})$ 。

B1(I)——第I个特征值的对数衰减率 $\delta_i$ ,如果是实特征值令 $B1(I) = 100$ 。

### 3. 完整的输入数据

如果是固定瓦轴承,完整的输入数据见表3-3;如果是可倾瓦轴承,完整的输入数据见表3-6。

### 4. 计算程序

```
REAL A(11,11),KKXX(5,9),KKXY(5,9),OMEGA(20),
& KKYX(5,9),KKYY(5,9),KXA(5),KYA(5),KYY(5),FX(5),
```

```

& KYX(5),DAX(5),DDXX(5,9),DDXY(5,9),DDYX(5,9),FY(5),
& DDYY(5,10),KXX(5),KXY(5),KAX(5),KAY(5),DXX(5),
& DXY(5),DYX(5),DYY(5),DXA(5),DYA(5),DAY(5),DAA(5),
& KAA(5),K(11,11),D(11,11),MASS,LE,MU,KSH,BI(11),
& FX0(5,10),FY0(5,10),BET(5),AL(5),BE(5),LOAD(9),
& S(11,11),B(11,11),WR(11),WI(11),Z(11,11),X(9)
LOGICAL P1,P2,P3,P4
COMMON /RG1/ WR,WI,Z
COMMON /RG2/ B
OPEN(11,FILE='s11')
OPEN(12,FILE='s12')
READ(11,*) NP,NE,NB,NS
READ(11,*) KSH,MASS,RAT,RD,PUSI,MU,G,AS,R
READ(11,*) (LOAD(I),I=1,NE)
READ(11,*) (OMEGA(I),I=1,NS)
IF(NB.EQ.1) GOTO 105
READ(11,*) (BET(I),I=1,NP)
DO 100 I=1,NP
100 BET(I)=3.1415926*(1.0-BET(I)/180.0)
105 DO 110 I=1,NE
DO 110 J=1,NP
IF(NB.EQ.2) READ(11,103) KKXX(J,I),KKXY(J,I),
& KKYX(J,I),KKYY(J,I),DDXX(J,I),DDXY(J,I),
& DDYX(J,I),DDYY(J,I),FX0(J,I),FY0(J,I)
IF(NB.EQ.1) READ(11,103) KKXX(J,I),KKXY(J,I),
& KKYX(J,I),KKYY(J,I),DDXX(J,I),DDXY(J,I),
& DDYX(J,I),DDYY(J,I)
110 CONTINUE
103 FORMAT(1X,10F7.4)
LE=2.0*RAT*RD
E=1.0E-15
AM=MASS
AK=KSH
AR=R
AA=AS
DO 300 KF=1,NS
O1=OMEGA(KF)
OMEGA(KF)=OMEGA(KF)*3.1415926/30.0
DO 140 I=1,11

```

```

DO 140 J=1,11
K(I,J)=0.0
D(I,J)=0.0
A(I,J)=0.0
140 B(I,J)=0.0
FM=MU * LE/OMEGA(KF)/PUSI/PUSI/PUSI
FD=MU * LE/PUSI/PUSI/PUSI
FK=MU * OMEGA(KF) * LE/PUSI/PUSI/PUSI
FW=MU * OMEGA(KF) * LE * RD/PUSI/PUSI
MASS=AM/FM
KSH=AK/FK
AS=AA/FK
R=AR/FD
W=G * AM/FW
CALL RK(LOAD,X,W,KXX,KKXX,XXK,NE,NP)
CALL RK(LOAD,X,W,KXY,KKXY,XYK,NE,NP)
CALL RK(LOAD,X,W,KYX,KKYX,YXK,NE,NP)
CALL RK(LOAD,X,W,KYY,KKYY,YYK,NE,NP)
CALL RK(LOAD,X,W,DXX,DDXX,XXD,NE,NP)
CALL RK(LOAD,X,W,DXY,DDXY,XYD,NE,NP)
CALL RK(LOAD,X,W,DYX,DDYX,YXD,NE,NP)
CALL RK(LOAD,X,W,DYY,DDYY,YYD,NE,NP)
IF(NB.EQ.1) GOTO 270
DO 230 J=1,NP
DO 235 I=1,NE
235 X(I)=FX0(J,I)
230 CALL RICSC(LOAD,X,W,FX(J),NE)
DO 240 J=1,NP
DO 245 I=1,NE
245 X(I)=FY0(J,I)
240 CALL RICSC(LOAD,X,W,FY(J),NE)
KP=0
G=1.0E-5
DO 250 I=1,NP
P1=ABS(KXX(I)).LT.G.AND.ABS(KXY(I)).LT.G
P2=ABS(KYY(I)).LT.G.AND.ABS(KYX(I)).LT.G
P3=ABS(DXX(I)).LT.G.AND.ABS(DXY(I)).LT.G
P4=ABS(DYY(I)).LT.G.AND.ABS(DYX(I)).LT.G
IF(P1.AND.P2.AND.P3.AND.P4) GOTO 250

```



```

KP=KP+1
T=BET(I)
AL(KP)=SIN(T)
BE(KP)=COS(T)
KXA(KP)=AL(KP)*KXY(I)-BE(KP)*KXX(I)-PUSI*FY(I)
DXA(KP)=AL(KP)*DXY(I)-BE(KP)*DXX(I)
KYA(KP)=AL(KP)*KYY(I)-BE(KP)*KYX(I)+PUSI*FX(I)
DYA(KP)=AL(KP)*DYY(I)-BE(KP)*DYX(I)
KAX(KP)=AL(KP)*KYX(I)-BE(KP)*KXX(I)
DAX(KP)=AL(KP)*DYX(I)-BE(KP)*DXX(I)
KAY(KP)=AL(KP)*KYY(I)-BE(KP)*KXY(I)
DAY(KP)=AL(KP)*DYY(I)-BE(KP)*DXY(I)
KAA(KP)=AL(KP)*KYA(KP)-BE(KP)*KXA(KP)
DAA(KP)=AL(KP)*DYA(KP)-BE(KP)*DXA(KP)
250 CONTINUE
N1=KP
M1=N1+3
M2=M1+1
D(1,1)=R
D(2,2)=R
D(M1,M1)=XXD
D(M1,M2)=XYD
D(M2,M1)=YXD
D(M2,M2)=YYD
K(1,1)=KSH
K(1,2)=-AS
K(1,M1)=-KSH
K(2,1)=AS
K(2,2)=KSH
K(2,M2)=-KSH
K(M1,M1)=XXK+KSH
K(M1,M2)=XYK
K(M2,M1)=YXK
K(M2,M2)=YYK+KSH
N2=N1+2
I2=N1+3
I3=N1+4
DO 260 I=3,N2
I1=I-2

```

```
D(1,1)=DAA(11)
K(1,1)=DAA(11)
D(1,M1)=DAX(11)
D(1,M2)=DAY(11)
K(1,M1)=KAX(11)
K(1,M2)=KAY(11)
D(M1,1)=DXA(11)
D(M2,1)=DYA(11)
K(M1,1)=KXA(11)
K(M2,1)=KYA(11)
260 CONTINUE
K(M1,1)=-KSH
K(M2,2)=-KSH
NMK=N1+4
GOTO 280
270 K(1,1)=KSH
K(1,2)=-AS
K(1,3)=-KSH
K(2,1)=AS
K(2,2)=KSH
K(2,4)=-KSH
K(3,1)=-KSH
K(3,3)=KSH+XXK
K(3,4)=XYK
K(4,2)=-KSH
K(4,3)=YXK
K(4,4)=KSH+YYK
D(1,1)=R
D(2,2)=R
D(3,3)=XXD
D(3,4)=XYD
D(4,3)=YXD
D(4,4)=YYD
NMK=4
280 DO 290 I=1,NMK
DO 290 J=1,NMK
A(I,J)=-K(I,J)
290 B(I,J)=D(I,J)
N1=NMK+1
```

```

N2=N1+1
A(N1,N1)=MASS
A(N2,N2)=MASS
B(1,N1)=MASS
B(2,N2)=MASS
B(N1,1)=MASS
B(N2,2)=MASS
N=NMK+2
CALL IV(N,E)
CALL RMAT(B,A,S,N,11)
CALL EIGEN1(N,S)
DO 295 I=1,N
IF(ABS(WI(I)).LT.E) GOTO 293
B1(I)=-2.0*3.1415926*WR(I)/ABS(WI(I))
GOTO 295
293 B1(I)=100.0
295 CONTINUE
WRITE(12,315) O1
WRITE(12,320) (WR(I),I=1,N)
WRITE(12,330) (WI(I),I=1,N)
WRITE(12,340) (B1(I),I=1,N)
300 CONTINUE
315 FORMAT(1X,6HSpeed ,E12.5)
320 FORMAT(1X,6H Real ,6E12.5)
330 FORMAT(1X,6H Imag ,6E12.5)
340 FORMAT(1X,6H log ,6E12.5)
STOP
END
SUBROUTINE RK(LOAD,X,W,KXX,KKXX,XXK,NE,NP)
REAL LOAD(9),X(9),KKXX(5,9),KXX(5)
XXK=0.0
DO 100 J=1,NP
DO 90 I=1,NE
90 X(I)=KKXX(J,I)
CALL RICSC(LOAD,X,W,KXX(J),NE)
100 XXK=XXK+KXX(J)
RETURN
END
SUBROUTINE IV(N,EP)

```

```

DIMENSION A0(11,11),A(11,11),B(11),C(11),ME(11),MF(11)
COMMON /RG2/ A0
CALL IV1(A,B,C,ME,MF,N,EP)
RETURN
END
SUBROUTINE IV1(A,B,C,ME,MF,N,EP)
DIMENSION A0(11,11),A(N,N),B(N),C(N),ME(N),MF(N)
COMMON /RG2/ A0
DO 25 I=1,N
DO 25 J=1,N
25 A(I,J)=A0(I,J)
CALL IVSNC(A,B,C,ME,MF,N,EP)
DO 30 I=1,N
DO 30 J=1,N
30 A0(I,J)=A(I,J)
RETURN
END
SUBROUTINE EIGEN1(NEI,A)
DIMENSION A(11,11),WR(11),WI(11),Z(11,11),FV1(11)
DIMENSION IV1(11),A1(11,11),A2(11),A3(11),A4(11,11)
COMMON /RG1/ WR,WI,Z
CALL RF(A,NEI,NEI,A1,A2,A3,A4,IV1,FV1,IEER)
RETURN
END
SUBROUTINE RF(A0,NM,N,A,WR,WI,Z,IV1,FV1,IEER)
DIMENSION A(NM,N),WR(N),WI(N),Z(NM,N),FV1(N),IV1(N)
DIMENSION A0(11,11),WR0(11),WI0(11),Z0(11,11)
COMMON /RG1/ WR0,WI0,Z0
DO 15 I=1,N
DO 15 J=1,N
15 A(I,J)=A0(I,J)
IF(N.LE.NM) GO TO 10
IEER=10*N
GO TO 50
10 CALL BALANC(NM,N,A,IS1,IS2,FV1)
CALL ELMHES(NM,N,IS1,IS2,A,IV1)
CALL ELTRAN(NM,N,IS1,IS2,A,IV1,Z)
CALL HQR2(NM,N,IS1,IS2,A,WR,WI,Z,IEER)
IF(IEER.NE.0) GO TO 50

```

```

NK=N
CALL BALBAK(NM,N,IS1,IS2,FV1,NK,Z)
DO 45 I=1,N
WR0(I)=WR(I)
WI0(I)=WI(I)
DO 45 J=1,N
45  Z0(I,J)=Z(I,J)
50  RETURN
END

```

## 8.4 多支承多圆盘轴系的稳定性计算程序

### 1. 程序适用范围

该程序适用于计算以固定瓦轴承支承的转子系统的稳定性,没有考虑基础及陀螺力矩的影响。集总圆盘的个数  $n \leq 50$ , 轴承数  $NB \leq 10$ 。该程序用 FORTRAN 语言编制,在南京航空航天大学 SUN3/280 计算机上调试通过。和前一节一样,该程序也要调用参考文献[2]中的 5 个标准子程序 BALANC、ELMHES、ELTRAN、HQR2 和 BALBAK,“&”表示续行。

### 2. 输入数据及输出结果

第一张数据卡片为 NSPED、NR、NB、N,均为整型变量,其含义为

NSPED——转速个数,如果要计算三个不同转速下的稳定性,则  $NSPED = 3$

NR——转子所有自然轴段的总数。如果转子左右端没有外伸轴段,应理解为各有一个虚拟的外伸自然轴段,但其长度为零,此时 NR 实际上等于所有自然轴段数再加 2。如例 4-3,实际上只有 6 个自然轴段,由于没有外伸轴段,故  $NR = 8$  而不是 6。

NB——轴承总数,  $2 \leq NB \leq 10$ 。

N——集总圆盘总数,  $N \leq 50$ 。

第二张数据卡片为 E、DENS、G,均为实型变量,其含义为

E——转轴的杨氏模量( $N/m^2$ )。

DENS——转轴的密度( $\text{kg}/\text{m}^3$ )。

G——重力加速度( $\text{m}/\text{s}^2$ )。

第三张数据卡片为  $\text{OMG1}(I), I = 1, \text{NSPED}$ 。实型数组,其含义为

$\text{OMG1}(I)$ ——第  $I$  个计算转速( $\text{r}/\text{min}$ )。

第四张数据卡片为  $\text{KBB}(I), I = 1, \text{NB}$ 。整形数组,其含义为

$\text{KBB}(I)$ ——第  $I$  个轴承对应的自然节点编号。如例 4-4 共有 5 个轴承,由表 4-7 知  $\text{KBB}$  的值为 2、7、11、16、26。在例 4-3 中,由于没有外伸轴段,计算时应加一虚拟的自然轴段,相应地也有一个虚拟的自然节点。如表 4-3 所示, $\text{KBB}$  的值为 2、4、6、8 而不是 1、3、5、7。

第五张数据卡片为  $\text{Y}(I), I = 1, \text{NB}$ 。实型数组,其含义为

$\text{Y}(I)$ ——第  $I$  个轴承的静态标高( $\text{m}$ ),零线以上为负,零线以下为正。只有当  $\text{NB} > 2$  时才要输入这组数据。

第六张数据卡片为  $\text{LENG}(I), \text{DM1}(I), \text{DK0}(I), \text{DK1}(I)$ ,均为实型数组,共有  $\text{NR}$  组,它们的含义为

$\text{LENG}(I)$ ——第  $I$  个自然轴段的长度( $\text{m}$ ),如果是虚拟轴段则其值为零。

$\text{DM}(I), \text{DK0}(I), \text{DK1}(I)$ ,——第  $I$  个自然轴段的等效质量直径、内径和等效刚度直径( $\text{m}$ )。

第七张数据卡片为  $\text{PUST}(I), \text{BB}(I), \text{DB}(I), \text{AITA}(I), I = 1, \text{NB}$ 。均为实型数组,分别是第  $I$  个轴承的间隙比  $\psi$ 、宽度  $L(\text{m})$ 、轴瓦直径  $D(\text{m})$  以及润滑油的动力粘度  $\eta(\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2)$ 。

第八张数据卡片为  $\text{NC}(I)$ ,整形数组,含义为第  $I$  个轴承的偏心率的个数。

第九张数据卡为  $\text{X}_0(I, J), \text{Y}_{10}(I, J), \text{Y}_{20}(I, J)$ ,均为实型数组。分别表示第  $I$  个轴承的第  $J$  个无量纲承载系数  $\phi_w$ 、偏心率  $\epsilon$  和偏位角  $\theta$ (度)。

第十张数据卡片为  $\text{NKS}, \text{NCS}, \text{IWVE}$ ,均为整形变量。其含义为

NKS——如果不考虑交叉刚度的影响,  $NKS = 2$ ; 否则为其他任意整数。

NCS——如果不考虑外部阻尼的影响,  $NCS = 2$ ; 否则为其他任意整数。

IWVE——输出控制变量, 若要打印特征向量时,  $IWVE = 1$ ; 否则为其他任意整数。

第十一张数据卡片为  $KM(I), I = 1, N$ 。整型数组,  $KM(I)$  的含义为第  $I$  个集总圆盘对应的自然节点编号。

第十二张数据卡片  $KKXX, KKXY, KKYX, KKYY$ 、分别是轴承的无量纲刚度系数  $K_{xx}, K_{xy}, K_{yx}, K_{yy}$ , 均为实型数组。

第十三张数据卡片为  $CCXX, CCXY, CCYX, CCYY$ , 均为实型数组, 分别是轴承的无量纲阻尼系数  $D_{xx}, D_{xy}, D_{yx}, D_{yy}$ 。

第十四张数据卡片为  $KS(I), I = 1, N$ 。实型数组,  $KS(I)$  表示第  $I$  个集总圆盘处的交叉刚度系数 ( $N/m$ ), 只有当  $NKS \neq 2$  时才有这张数据卡片。

第十五、十六张数据卡片为实型数组  $DX, DY, DX(I), DY(I)$  的含义分别是  $xoz, yoz$  平面内第  $I$  个集总圆盘处的外部阻尼系数 ( $N \cdot s/m$ )。这两张数据卡片只有当  $NCS \neq 2$  时才有。

该程序的输出结果只有两个, 一个是特征值, 另一个是特征向量, 分别存放在三个数组中。

WR——无量纲特征值的实部。

WI——无量纲特征值的虚部。特征值的相对单位为工作转速  $\Omega(s^{-1})$ 。

Z——存放特征向量的实部与虚部。如果第  $j$  个特征值是实数, 则  $Z$  的第  $j$  列存放相应的特征向量。如果第  $j$  个特征值是复数, 则  $Z$  的第  $j$  和第  $j+1$  列分别存放特征向量的实部与虚部。特征向量未被规范化。

### 3. 完整的输入数据

完整的输入数据见表 4-3。

### 4. 计算程序

```

REAL DM1(300),DK1(300),DK0(300),LENG(300),PUSI(10),
& BB(10),DB(10),AITA(10),X0(10,9),K11(50,50),K12(50,50),
& K21(50,50),K22(50,50),S(200,200),C(100,100),K(100,100),
& M(200),A(50,50),H(50,2),F(50),FF(50),X(50),Y(50),
& RZ(10),FV1(200),Z(200,200),WI(200),WR(200)
DIMENSION NC(10),KBB(10),IV1(200)
COMMON NC,NGT,NSPED
COMMON /LD1/ DM1,DK1,DK0,LENG,RZ,PUSI,BB
COMMON /LD2/ X0,OMG,E,DENS,KBB,DB,AITA
OPEN(11,FILE='bk11')
OPEN(12,FILE='bk12')
NGT=0
100 READ(11,*) NSPED,NR,NB,N
NN=N+N
NN2=NN+NN
NGT=NGT+1
WRITE(*,*) NGT,NSPED
CALL LOAD(NR,NB,K11,K12,K22,A,H,F,FF,X,Y)
CALL UNMAT(N,NB,NN,NN2,NR,K11,K12,K21,K22,
& A,H,M,C,K,S,WR,WI,Z,IV1,FV1)
IF(NGT.LT.NSPED) GOTO 100
CLOSE(11)
CLOSE(12)
STOP
END
SUBROUTINE LOAD(NR,NB,K11,K12,K22,AB,H,F,FF,X,Y)
REAL K11(NB,NB),K12(NB,NB),K22(NB,NB),H(NB,2),F(NB),
& FF(NB),X(NB),Y(NB),A(4,4),AB(NB,NB),DK0(300),DK1(300),
& DM1(300),Q(300),E11(10),E12(10),E21(10),E22(10),B12(10),
& S12(10),RZ(10),DB(10),PUSI(10),R(10),AITA(10),EF(10),
& X0(10,9),Y10(10,9),Y20(10,9),W(9),TE(10),BB(10),FI(9),
& OMG1(20),B(4,10),EE(9),S(10),DY(10),LENG(300)
INTEGER KBB(10),NC(10)
COMMON NC,NGT,NSPED
COMMON /LD1/ DM1,DK1,DK0,LENG,RZ,PUSI,BB
COMMON /LD2/ X0,OMG,E,DENS,KBB,DB,AITA
WRITE(*,*) ' IN LOAD'
READ(11,*) E,DENS,G
READ(11,*) (OMG1(I),I=1,NSPED)

```



```

READ(11, *) (KBB(I), I=1, NB)
IF(NB.EQ.2) GOTO 60
READ(11, *) (Y(I), I=1, NB)
WRITE(12, 65) (Y(I), I=1, NB)
60 DO 50 I=1, NR
50 READ(11, *) LENG(I), DM1(I), DK0(I), DK1(I)
OMG=OMG1(NGT) * 3.14159/30.0
WRITE(12, 55) OMG1(NGT)
55 FORMAT(1X, 6H speed, E13.5)
DO 90 I=1, NR
90 Q(I)=G * 3.14159/4.0 * DENS * (DM1(I) ** 2 - DK0(I) ** 2)
IF(NB.EQ.2) GOTO 215
N1=1
NB0=NB-1
NB1=NB+1
DO 130 K=1, NB1
IF(K.LT.NB1) N2=KBB(K)-1
IF(K.EQ.NB1) N2=NR
H12=0.0
H13=0.0
H14=0.0
H23=0.0
H24=0.0
H34=0.0
B(1, K)=0.0
B(2, K)=0.0
B(3, K)=0.0
B(4, K)=0.0
DO 100 I=1, 4
DO 100 J=1, 4
100 A(I, J)=0.0
DO 110 I=1, 4
110 A(I, I)=1.0
KQ=0
DO 120 II=N1, N2
IF(Q(II).LT.1.0E-09) GOTO 115
I2=N2-KQ
I1=I2-1
EJ=3.14159 * E * (DK1(I2) ** 4 - DK0(I2) ** 4) / 64.0

```

```

IF(LENG(I2).LT.1.0E-05) GOTO 111
P1=Q(I2)*LENG(I2)**4/24.0/EJ
P2=P1/LENG(I2)*4.0
P3=Q(I2)*LENG(I2)**2/2.0
P4=-Q(I2)*LENG(I2)
GOTO 112
111  P1=0.0
     P2=0.0
     P3=0.0
     P4=0.0
112  B(1,K)=B(1,K)+P1+A(1,2)*P2+A(1,3)*P3+A(1,4)*P4
     B(2,K)=B(2,K)+P2+A(2,3)*P3+A(2,4)*P4
     B(3,K)=B(3,K)+P3+A(3,4)*P4
     B(4,K)=B(4,K)+P4
     A12=LENG(I2)
     A13=LENG(I2)*LENG(I2)/2.0/EJ
     A14=-LENG(I2)*A13/3.0
     A23=LENG(I2)/EJ
     A24=-A13
     A34=-A12
     H12=A(1,2)+A12
     H13=A(1,3)+A13+A(1,2)*A23
     H14=A(1,4)+A14+A(1,2)*A24+A(1,3)*A34
     H23=A(2,3)+A23
     H24=A(2,4)+A24+A(2,3)*A34
     H34=-H12
     A(1,2)=H12
     A(1,3)=H13
     A(1,4)=H14
     A(2,3)=H23
     A(2,4)=H24
     A(3,4)=H34
115  KQ=KQ+1
120  CONTINUE
     N1=N2+1
130  CONTINUE
     DO 140 I=1,NB
     DO 140 J=1,NB
     K11(I,J)=0.0

```

```

K12(I,J)=0.0
140 K22(I,J)=0.0
DO 160 I=1,NB0
  II=I+1
  N1=KBB(I)
  N3=KBB(II)-1
  H12=0.0
  H13=0.0
  H14=0.0
  H23=0.0
  H24=0.0
  H34=0.0
  DO 150 I2=N1,N3
    EJ=3.14159 * E * (DK1(I2) * * 4 - DK0(I2) * * 4) / 64.0
    A12=LENG(I2)
    A13=LENG(I2) * * 2 / 2.0 / EJ
    A14=-LENG(I2) * A13 / 3.0
    A23=LENG(I2) / EJ
    A24=-A13
    A34=-A12
    H12=H12+A12
    H13=H13+A12 * H23+A13
    H14=H14+A12 * H24+A13 * H34+A14
    H23=H23+A23
    H24=H24+A23 * H34+A24
150 H34=-H12
    DATA=H13 * H24-H14 * H23
    E11(I)=H24/DATA
    E21(I)=-H23/DATA
    E12(I)=-H14/DATA
    E22(I)=H13/DATA
    B12(I)=(H24 * H12-H14)/DATA
160 S12(I)=- (H13 * H12+H14)/DATA
    DO 170 I=2,NB0
      II=I+1
      I2=I-1
      C1=B(3,I)-E22(I2) * B(1,I)-S12(I2) * B(2,I)
      C2=B(4,I)-E21(I2) * B(1,I)-E22(I2) * B(2,I)
      F(I)=C1+E11(I) * B(1,II)+E12(I) * B(2,II)

```

```

170  S(I)=C2+E21(I) * B(1,I1)+E22(I) * B(2,I1)
      F(1)=B(3,1)+E11(1) * B(1,2)+E12(1) * B(2,2)
      S(1)=B(4,1)+E21(1) * B(1,2)+E22(1) * B(2,2)
      C1=B(3,NB)-E22(NB0) * B(1,NB)-S12(NB0) * B(2,NB)
      C2=B(4,NB)-E21(NB0) * B(1,NB)-E22(NB0) * B(2,NB)
      F(NB)=C1+B(3,NB1)-A(3,4) * B(4,NB1)
      S(NB)=C2+B(4,NB1)
      K11(1,1)=E21(1)
      K11(1,2)=-E21(1)
      K11(NB,NB0)=-E21(NB0)
      K11(NB,NB)=E21(NB0)
      K12(1,1)=E11(1)
      K12(1,2)=-E22(1)
      K12(NB,NB0)=-E11(NB0)
      K12(NB,NB)=E22(NB0)
      H(1,1)=0.0
      H(1,2)=B12(1)
      H(NB,1)=-E12(NB0)
      H(NB,2)=S12(NB0)
      DO 180 I=2,NB0
        I1=I-1
        I2=I+1
        K11(I,I1)=-E21(I1)
        K11(I,I)=E21(I)+E21(I1)
        K11(I,I2)=-E21(I)
        K12(I,I1)=-E11(I1)
        K12(I,I)=E11(I)+E22(I1)
        K12(I,I2)=-E22(I)
        H(I,1)=-E12(I1)
180   H(I,2)=B12(I)+S12(I1)
        DO 190 I=1,NB
190   K22(I,I)=1.0
        CALL LDLT(H,NB,NB,2,K22,NB,IER)
        CALL RMAT(K12,K22,AB,NB,NB)
        CALL ARRAY(AB,F,NB,NB,FF)
        DO 195 I=1,NB
195   S(I)=FF(I)-S(I)
        DO 200 I=1,NB
        DO 200 J=1,NB

```

```

200   K22(I,J)=K12(J,I)
      CALL RMAT(AB,K22,K12,NB,NB)
      DO 210 I=1,NB
      DO 210 J=1,NB
210   K11(I,J)=K11(I,J)-K12(I,J)
      CALL ARRAY(K11,Y,NB,NB,FF)
      DO 220 I=1,NB
220   R(I)=S(I)-FF(I)
215   DO 250 I=1,NB
      READ(11,*) PUSI(I),BB(I),DB(I),AITA(I)
      READ(11,*) NC(I)
      DO 240 J=1,NC(I)
240   READ(11,*) X0(I,J),Y10(I,J),Y20(I,J)
250   CONTINUE
      IF(NB.EQ.2) GOTO 350
      DO 260 I=1,NB
260   RZ(I)=R(I)
      KGH=0
280   KGH=KGH+1
      DO 270 I=1,NB
      FB=AITA(I)*OMG*BB(I)*DB(I)/2.0/(PUSI(I)**2)
270   RZ(I)=RZ(I)/FB
      DO 300 I=1,NB
      DO 290 J=1,NC(I)
      W(J)=X0(I,J)
      EE(J)=Y10(I,J)
290   FI(J)=Y20(I,J)
      CALL RICSC(W,EE,RZ(I),EP,NC(I))
      CALL RICSC(W,FI,RZ(I),EP,NC(I))
      EF(I)=EP
      TE(I)=FP
      FP=FP*3.14159/180.0
      DY(I)=EP*PUSI(I)*DB(I)/2.0*COS(FP)
300   X(I)=Y(I)+DY(I)
      CALL ARRAY(K11,X,NB,NB,FF)
      DO 310 I=1,NB
310   RZ(I)=S(I)-FF(I)
      X3=0.0
      X4=0.0

```

```

DO 320 I=1,NB
X3=X3+ABS(RZ(I)-R(I))
320 X4=X4+ABS(RZ(I))
X4=X3/X4
IF(X4.LT.0.1E-05)GOTO 330
IF(KGH.GT.40)GOTO 340
DO 325 I=1,NB
325 R(I)=RZ(I)
GOTO 280
330 WRITE(12,400) (RZ(I),I=1,NB)
WRITE(12,403) (EF(J),J=1,NB)
WRITE(12,405) (TE(J),J=1,NB)
GOTO 410
340 STOP 2222
350 FP=0.0
N1=KBB(1)
DO 360 I=N1,NR
I1=I-1
IF(I.EQ.N1)Y1=LENG(I)/2.0
IF(I.NE.N1)Y1=Y1+(LENG(I1)+LENG(I))/2.0
360 FP=FP+Q(I)*Y1*LENG(I)
N1=N1-1
Y1=0.0
DO 370 I1=1,N1
I=N1-I1+1
I1=I+1
IF(I1.EQ.1)Y1=LENG(I)/2.0
IF(I1.NE.1)Y1=Y1+(LENG(I)+LENG(I1))/2.0
370 FP=FP-Q(I1)*Y1*LENG(I)
N1=KBB(1)
N2=KBB(2)-1
Y1=0.0
DO 380 I=N1,N2
380 Y1=Y1+LENG(I)
RZ(2)=FP/Y1
FP=0.0
DO 390 I=1,NR
390 FP=FP+Q(I)*LENG(I)
RZ(1)=FP-RZ(2)

```

```

WRITE(12,400) RZ(1),RZ(2)
65  FORMAT(1X,6H    height,7E13.5)
400  FORMAT(1X,6H    load,7E13.5)
403  FORMAT(1X,6H    ratio,7E13.5)
405  FORMAT(1X,6H    angle,7E13.5)
410  RETURN
END
SUBROUTINE UNMAT(N,NB,NN,NN2,NR,K11,K12,K21,K22,A,
& H,MASS,C,K,S,WR,WI,Z,IV1,FV1)
REAL MASS(NN),K(NN,NN),C(NN,NN),K11(N,N),K12(N,N),
& K21(N,N),K22(N,N),A(N,N),H(N,2),E11(100),E12(100),
& E21(100),E22(100),S12(100),B12(100),DK0(300),RZ(10),
& DK1(300),DM1(300),LENG(300),KKXX(9),KKXY(9),KKYX(9),
& KKYY(9),CCXX(9),CCXY(9),CCYX(9),CCYY(9),KXX(10),
& KXY(10),KYX(10),KYY(10),CXX(10),CXY(10),CYX(10),
& CYY(10),PUSI(10),MU(10),SOM(10,9),CC(20,20),DX(100),
& KK(20,20),S(NN2,NN2),Z(NN2,NN2),WR(NN2),WI(NN2),
& FV1(NN2),DY(100),KS(100),LOAD(9),DB(10),LB(10),
& AFM(100)
INTEGER KM(150),KB1(10),NC(10),KBB(10),IV1(NN2)
COMMON NC,NGT,NSPED
COMMON /LD1/ DM1,DK1,DK0,LENG,RZ,PUSI,LB
COMMON /LD2/ SOM,OMEGA,E,DENS,KBB,DB,MU
WRITE(*,*) ' IN UNMAT '
READ(11,*) NKS,NCS,IWVE
WRITE(12,771) N
771  FORMAT(/1X,' Rotor—bearibg system is divided into ',
& I3,' Joints')/
DO 809 I=1,NN
809  MASS(I)=0.0
DO 808 I=1,NN
DO 808 J=1,NN
C(I,J)=0.0
808  K(I,J)=0.0
DO 807 I=1,N
DO 807 J=1,N
K11(I,J)=0.0
K12(I,J)=0.0
K21(I,J)=0.0

```

```

807   K22(I,J)=0.0
      READ(11,*) (KM(I),I=1,N)
      IX=1
      DO 104 I=1,N
      IF(KM(I).NE.KBB(IX)) GOTO 104
      KB1(IX)=I
      IX=IX+1
104   CONTINUE
      D0=0.0
      DO 100 I=1,NR
100   D0=D0+DK1(I)
      D0=D0/FLOAT(NR)
      FM=64.0/3.14159/D0/E
      FGH=FM*OMEGA**2/D0/D0
      NSS=0
      DO 110 I=1,NB
      NSS=I
      NCC=NC(I)
      DO 105 J=1,NCC
105   LOAD(J)=SOM(I,J)
      WW=2.0*RZ(I)*PUSI(I)**2/MU(I)/LB(I)/DB(I)/OMEGA
      FKB=MU(I)*LB(I)*OMEGA*FM/(PUSI(I)**3)
      FK0=MU(I)*OMEGA*LB(I)*DB(I)*FM/2.0/D0/(PUSI(I)**
& 2)
      PSI=PUSI(I)
      DD0=D0
      RAD=DB(I)/2.0
      DO 103 IP=1,NCC
      READ(11,*) KKXX(IP),KKXY(IP),KKYX(IP),KKYY(IP)
103   READ(11,*) CCXX(IP),CCXY(IP),CCYX(IP),CCYY(IP)
      CALL RICSC(LOAD,KKXX,WW,XX,NCC)
      KXX(NSS)=XX*FKB
      CALL RICSC(LOAD,KKXY,WW,XX,NCC)
      KXY(NSS)=XX*FKB
      CALL RICSC(LOAD,KKYX,WW,XX,NCC)
      KYX(NSS)=XX*FKB
      CALL RICSC(LOAD,KKYY,WW,XX,NCC)
      KYY(NSS)=XX*FKB
      CALL RICSC(LOAD,CCXX,WW,XX,NCC)

```



```

CXX(NSS)=XX * FKB
CALL RICSC(LOAD,CCXY,WW,XX,NCC)
CXY(NSS)=XX * FKB
CALL RICSC(LOAD,CCYX,WW,XX,NCC)
CYX(NSS)=XX * FKB
CALL RICSC(LOAD,CCYY,WW,XX,NCC)
CYY(NSS)=XX * FKB
110 CONTINUE
IF(NKS.EQ.2) GOTO 120
READ(11,*) (KS(I),I=1,N)
120 IF(NCS.EQ.2) GOTO 130
READ(11,*) (DX(I),I=1,N)
READ(11,*) (DY(I),I=1,N)
130 DO 140 I=1,N
KS(I)=KS(I) * FM
DX(I)=DX(I) * FM * OMEGA
140 DY(I)=DY(I) * FM * OMEGA
160 FMB=3.14159/4.0 * DENS
N0=N-1
DO 180 I=1,N0
I1=I+1
N1=KM(I)
N2=KM(I1)
N3=N2-1
X=0.0
Y=0.0
X0=0.0
X10=0.0
Y0=0.0
DO 170 J=N1,N3
Y=Y+LENG(J)
X=Y-LENG(J)/2.0
Y0=FMB * (DM1(J) * * 2 - DK0(J) * * 2) * LENG(J)
X0=X0+X * Y0
170 X10=X10+Y0
X10=X10 * FM * OMEGA * * 2
X0=X0 * FM * OMEGA * * 2
MASS(I1)=X0/Y
180 MASS(I)=MASS(I)+X10-MASS(I1)

```

```

N1=KM(1)-1
N2=KM(N)
IF(N1.EQ.0) GOTO 200
FM1=3.14159/4.0 * DENS * FM * OMEGA * * 2
DO 190 I=1,N1
190  MASS(1)=MASS(1)+FM1 * (DM1(I) * * 2 - DK0(I) * * 2) * LENG
    &. (I)
200  IF(N2.EQ.NR) GOTO 215
    DO 210 I=N2,NR
210  MASS(N)=MASS(N)+FM1 * (DM1(I) * * 2 - DK0(I) * * 2) *
    &. LENG(I)
215  DO 240 I=1,N0
    I1=I+1
    N1=KM(I)
    N2=KM(I1)
    N3=N2-1
    H12=0.0
    H13=0.0
    H14=0.0
    H23=0.0
    H24=0.0
    H34=0.0
    DO 220 I2=N1,N3
    EJ=3.14159 * E * (DM1(I2) * * 4 - DK0(I2) * * 4)/64.0
    A12=LENG(I2)
    A13=LENG(I2) * * 2/2.0/EJ
    A14=-LENG(I2) * A13/3.0
    A23=LENG(I2)/EJ
    A24=-A13
    A34=-A12
    H12=H12+A12
    H13=H13+A12 * H23+A13
    H14=H14+A12 * H24+A13 * H34+A14
    H23=H23+A23
    H24=H24+A23 * H34+A24
220  H34=-H12
    DATA=H13 * H24 - H14 * H23
    E11(I)=H24/DATA * FM/D0
    E21(I)=-H23/DATA * FM

```

```

E12(I) = -H14/DATA * FM/D0/D0
E22(I) = H13/DATA * FM/D0
B12(I) = (H24 * H12 - H14)/DATA * FM/D0/D0
240 S12(I) = -(H13 * H12 + H14)/DATA * FM/D0/D0
K11(1,1) = E21(1)
K11(1,2) = -E21(1)
K11(N,N0) = -E21(N0)
K11(N,N) = E21(N0)
K12(1,1) = E11(1)
K12(1,2) = -E22(1)
K12(N,N0) = -E11(N0)
K12(N,N) = E22(N0)
H(1,1) = 0.0
H(1,2) = B12(1)
H(N,1) = -E12(N0)
H(N,2) = S12(N0)
DO 250 I = 2, N0
  I1 = I - 1
  I2 = I + 1
  K11(I,I1) = -E21(I1)
  K11(I,I) = E21(I) + E21(I1)
  K11(I,I2) = -E21(I)
  K12(I,I1) = -E11(I1)
  K12(I,I) = E11(I) + E22(I1)
  K12(I,I2) = -E22(I)
  H(I,1) = -E12(I1)
250 H(I,2) = B12(I) + S12(I1)
DO 260 I = 1, N
260 K22(I,I) = 1.0
CALL LDLT(H,N,N,2,K22,N,IER)
CALL RMAT(K12,K22,A,N,N)
DO 270 I = 1, N
DO 270 J = 1, N
270 K22(I,J) = K12(J,I)
CALL RMAT(A,K22,K12,N,N)
DO 280 I = 1, N
DO 280 J = 1, N
280 K11(I,J) = K11(I,J) - K12(I,J)
CALL TRANS(N,NB,N,KB1,K12)

```

```
DO 285 I=1,N
DO 285 J=1,N
285 K22(I,J)=K12(J,I)
CALL RMAT(K11,K12,A,N,N)
CALL RMAT(K22,A,K11,N,N)
DO 286 I=1,N
DO 286 J=1,N
286 K21(I,J)=0.0
DO 290 I=1,N
290 K21(I,I)=MASS(I)
CALL RMAT(K21,K12,A,N,N)
CALL RMAT(K22,A,K21,N,N)
DO 300 I=1,N
300 MASS(I)=K21(I,I)
IF(NCS. EQ. 2) GOTO 340
DO 320 I=1,N
DO 310 J=1,N
310 K21(I,J)=0.0
320 K21(I,I)=DX(I)
CALL RMAT(K21,K12,A,N,N)
CALL RMAT(K22,A,K21,N,N)
DO 330 I=1,N
330 DX(I)=K21(I,I)
DO 335 I=1,N
DO 333 J=1,N
333 K21(I,J)=0.0
335 K21(I,I)=DY(I)
CALL RMAT(K21,K12,A,N,N)
CALL RMAT(K22,A,K21,N,N)
DO 337 I=1,N
337 DY(I)=K21(I,I)
340 IF(NKS. EQ. 2) GOTO 380
DO 360 I=1,N
DO 350 J=1,N
350 K21(I,J)=0.0
360 K21(I,I)=KS(I)
CALL RMAT(K21,K12,A,N,N)
CALL RMAT(K22,A,K21,N,N)
DO 370 I=1,N
```

```
370   KS(I)=K21(I,I)
380   N0=N-NB
      DO 390 I=1,N0
      I1=N0+1
      DO 390 J=1,N0
      J1=N0+J
      K(I,J)=K11(I,J)
390   K(I1,J1)=K(I,J)
      DO 400 I=1,N0
      I1=N0+I
      DO 400 J=1,NB
      J0=N0+J
      J1=N0+J0
      J2=NB+J1
      K(I,J1)=K11(I,J0)
400   K(I1,J2)=K(I,J1)
      DO 410 I=1,NB
      I0=N0+I
      I1=N0+I0
      I2=NB+I1
      DO 410 J=1,N0
      J1=N0+J
      K(I1,J)=K11(I0,J)
410   K(I2,J1)=K(I1,J)
      DO 420 I=1,NB
      I0=N0+I
      I1=N0+I0
      I2=NB+I1
      DO 420 J=1,NB
      J0=N0+J
      J1=N0+J0
      J2=NB+J1
      K(I1,J1)=K11(I0,J0)
420   K(I2,J2)=K11(I0,J0)
      DO 430 I=1,N0
      I1=N0+I
      C(I,I1)=-KS(I)
430   C(I1,I)=KS(I)
      DO 440 I=1,NB
```

```

I0=N0+N0+I
I1=NB+I0
I2=N0+I
C(I0,I1)=-KS(I2)
440 C(I1,I0)=KS(I2)
DO 450 I=1,NB
I1=NB+I
KK(I,I)=KXX(I)
KK(I1,I1)=KYY(I)
KK(I,I1)=KXY(I)
KK(I1,I)=KYX(I)
CC(I,I)=CXX(I)
CC(I1,I1)=CYY(I)
CC(I,I1)=CXY(I)
450 CC(I1,I)=CYX(I)
DO 460 I=1,NN
DO 460 J=1,NN
460 K(I,J)=K(I,J)+C(I,J)
DO 465 I=1,NN
DO 465 J=1,NN
465 C(I,J)=0.0
NA=NB+NB
DO 470 I=1,NA
I1=N0+N0+I
DO 470 J=1,NA
J1=N0+N0+J
K(I1,J1)=K(I1,J1)+KK(I,J)
470 C(I1,J1)=CC(I,J)
DO 480 I=1,N0
I1=N0+I
C(I,I)=DX(I)
480 C(I1,J1)=DY(I)
DO 490 I=1,NB
I1=N0+I
I2=N0+I1
N3=NB+I2
C(I2,I2)=C(I2,I2)+DX(I1)
490 C(I3,I3)=C(I3,I3)+DY(I1)
DO 510 I=1,N0

```

```

      I1=N0+I
      AFM(I)=MASS(I)
510   AFM(I1)=MASS(I)
      DO 520 I=1,NB
      I1=N0+I
      I2=N0+I1
      I3=NB+I2
      AFM(I2)=MASS(I1)
520   AFM(I3)=MASS(I1)
      NDA=N+N
      NAC=NDA+NDA
      DO 710 I=1,NDA
710   MASS(I)=AFM(I)
      DO 960 I=1,NDA
      DO 960 J=1,NDA
      C(I,J)=-C(I,J)/MASS(I)
960   K(I,J)=-K(I,J)/MASS(I)
      DO 970 I=1,NDA
      I1=I+NDA
      DO 965 J=1,NDA
      J1=J+NDA
      S(I,J)=0.0
      S(I,J1)=0.0
      S(I1,J)=K(I,J)
965   S(I1,J1)=C(I,J)
970   S(I,I1)=1.0
      CALL RG(NN2,NN2,S,WR,WI,Z,IV1,FV1,IEER,IWVE)
      REWIND 11
      RETURN
      END
      SUBROUTINE ARRAY(A,Y,NA,MA,F)
      DIMENSION A(NA,MA),Y(NA),F(MA)
      DO 100 I=1,NA
100   F(I)=0.0
      DO 110 I=1,NA
      DO 110 J=1,MA
110   F(I)=F(I)+A(I,J)*Y(J)
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE RICSC(X0,Y0,X,Y,N)
REAL X0(9),Y0(9),X,Y,P
I=1
10 IF(X.LT.0.5*(X0(I+1)+X0(I+2))) GOTO 30
   IF(X.GE.0.5*(X0(N-2)+X0(N-1))) GOTO 20
   I=I+1
   GOTO 10
20 I=N-2
30 M=I+2
   Y=0.0
   DO 60 J=I,M
     P=1.0
     DO 50 K=I,M
       IF(J-K) 40,50,40
40   P=P*(X-X0(K))/(X0(J)-X0(K))
50   CONTINUE
60   Y=Y+P*Y0(J)
   RETURN
END

SUBROUTINE RMAT(A,B,C,N,M)
REAL A(M,M),B(M,M),C(M,M)
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
10  C(I,J)=0.0
   DO 20 I=1,N
   DO 20 J=1,N
   DO 20 K=1,N
20  C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
   RETURN
END

SUBROUTINE TRANS(N,NB,NEI,KM,L)
REAL L(NEI,NEI)
INTEGER KM(10)
DO 100 I=1,N
DO 100 J=1,N
100 L(I,J)=0.0
    K0=1
    DO 300 I=2,NB
      I1=I-1

```



```

L1=KM(I1)+1
L2=KM(I)-1
DO 200 N0=L1,L2
N4=N0-K0
200 L(N0,N4)=1.0
K0=K0+1
300 CONTINUE
K0=KM(I)
IF(K0.EQ.1) GOTO 320
L1=1
L2=KM(I)-1
DO 310 I=L1,L2
310 L(I,I)=1.0
320 K0=KM(NB)
IF(K0.EQ.N) GOTO 340
L1=K0+1
L2=N
DO 330 I=L1,L2
J=I-NB
330 L(I,J)=1.0
340 K0=0
DO 400 I=1,NB
K1=KM(I)
J1=N-NB+I
400 L(K1,J1)=1.0
RETURN
END
SUBROUTINE LDLT(A,N,MP,IWB,P,M,IER)
REAL A(MP,2),P(MP,MP)
DO 15 I=1,N
IF(I.LE.IWB) GOTO 20
IT=I-IWB+1
GOTO 30
20 IT=1
30 K=I-1
IF(I.EQ.1) GOTO 40
DO 25 L=IT,K
IL=L+IWB-1
B=A(I,IL)

```

```

A(I,IL)=B/A(L,IWB)
DO 35 LL=1,M
35 P(I,LL)=P(I,LL)-A(I,LL)*P(L,LL)
MI=L+1
DO 25 J=MI,I
IJ=J+IWB-I
JL=L+IWB-J
25 A(I,IJ)=A(I,IJ)-A(J,JL)*B
40 IF(A(I,IWB).EQ.0.0) GOTO 100
15 CONTINUE
DO 45 J=1,N
IF(J.LE.IWB) GOTO 60
IT=N-J+IWB
GOTO 70
60 IT=N
70 I=N-J+1
DO 55 L=1,M
55 P(I,L)=P(I,L)/A(I,IWB)
IF(J.EQ.1) GOTO 45
K=I+1
DO 65 MJ=K,IT
IJ=I-MJ+IWB
DO 65 L=1,M
65 P(I,L)=P(I,L)-P(MJ,L)*A(MJ,IJ)
45 CONTINUE
IER=0
GOTO 110
100 IER=1
110 RETURN
END
SUBROUTINE RG(NM,N,A,WR,WI,Z,IV1,FV1,IEER,IWVE)
DIMENSION A(NM,N),WR(N),WI(N),Z(NM,N),FV1(N),IV1(N)
WRITE(*,*) 'IN RG'
IF(N.LE.NM) GOTO 10
IEER=10*N
GOTO 50
10 CALL BALANC(NM,N,A,IS1,IS2,FV1)
CALL ELMHES(NM,N,IS1,IS2,A,IV1)
CALL ELTRAN(NM,N,IS1,IS2,A,IV1,Z)

```

```

CALL HQR2(NM,N,IS1,IS2,A,WR,WI,Z,IEER)
IF(IEER.NE.0) GOTO 50
NK=N
CALL BALBAK(NM,N,IS1,IS2,FV1,NK,Z)
DO 100 I=1,N
IF(ABS(WI(I)).LT.1.0E-5) GOTO 100
IF(WI(I).LT.0.0) GOTO 100
DATA=-2.0*3.14159*WR(I)/WI(I)
WRITE(12,70) WR(I),WI(I),DATA
100 CONTINUE
IF(IWVE.NE.1) GOTO 50
DO 60 I=1,N
60 WRITE(12,20) (Z(I,J),J=1,N)
70 FORMAT(5X,2Hs=,E13.5,1X,2H+j,E13.5,5X,5Hdata=,E13.5)
20 FORMAT(1X,6E13.5)
50 RETURN
END

```

## 8.5 多支承多圆盘轴系的无阻尼临界转速计算程序

### 1. 程序适用范围

该程序没有考虑陀螺力矩的影响。支座被简化为各向同性的弹簧，既可以是刚性支承也可以是弹性支承。集总圆盘的个数与参振质量的个数之和小于或等于 50，轴承数小于或等于 10。程序用 FORTRAN 语言编制并在 IBM/AT 机上调试通过。该程序也要调用参考文献 [2] 中的标准子程序 BALANC、ELMHES、ELTRAN、HQR2 和 BALBAK，此外还调用了 8.4 节的 RMAT、LDLT 和 TRANS 三个子程序。程序中的“&”表示续行。

### 2. 输入数据与输出结果

第一张数据卡片为 NR、NM、NB、MB，均为整型变量，它们的含义为

NR——自然轴段的总数,如果转子左右端没有外伸轴段,不用加虚拟轴段。这一点与前一节稍有不同。

NM、NB——集总圆盘的总数和轴承的总数。

MB——如果轴系简化为图 6-2 的模型,则  $MB = 1$ ; 否则为其他任意整数。

第二张数据卡片为 E、DENS,均为实型变量。分别表示轴的扬氏模量( $N/m^2$ )和密度( $kg/m^3$ )。

第三张数据卡片为 KB1(I),  $I = 1, NB$ 。整型数组,KB1(I)表示第 I 个轴承对应的集总圆盘的编号。

第四张数据卡片为 KB(I),  $I = 1, NB$ 。实型数组,KB(I)表示第 I 个轴承的等效刚度系数  $k_p(N/m)$ ,如果支承是刚性的,经验表明  $k_p$  比轴的刚度大 5 个数量级时结果最为理想。

第五、六张数据卡片为 MF(I)、KF(I),  $I = 1, NB$ 。实型数组, MF(I)、KF(I) 分别表示第 I 个轴承处基础的参振质量  $m_f(kg)$  与等效刚度系数  $k_f(N/m)$ 。这两张数据卡片只有当  $MB = 1$  时才有。

第七张数据卡片为 LENG(I)、DM1(I)、DK0(I)、DK1(I),实型数组。分别表示第 I 个自然轴段的长度(m)、等效质量直径  $d_m(m)$ 、内径(m)和等效刚度直径  $d_k(m)$ ,共有 NR 组。

该程序的输出结果只有两个,一个是临界转速,另一个是模态振型。

WR——一维实型数组,存放临界转速( $r/min$ )。

Z——二维实型数组,它的第 j 列是与存放在 WR 数组中第 j 个临界转速对应的模态振型,并将最大者归一。模态振型的排列次序为先排内结点后排外结点。

### 3. 完整的输入数据

完整的输入数据见表 6-1 和表 6-2。

### 4. 计算程序

```
REAL K11(50,50),K12(50,50),K21(50,50),K22(50,50),
& A(50,50),H(50,2),WR(50),WI(50),FV1(50)
INTEGER IV1(50)
```

```

OPEN(11,FILE='cs11')
OPEN(12,FILE='cs12')
READ(11,*)NR,NM,NB,MB
NEI=NM
IF(MB.EQ.1)NEI=NM+NB
CALL CRIT(NM,NB,NR,MB,NEI,K11,K12,K21,K22,A,H,
& WR,WI,IV1,FV1)
CLOSE(11)
CLOSE(12)
STOP
END
SUBROUTINE CRIT(N,NB,NR,MB,NEI,K11,K12,K21,K22,
& A,H,WR,WI,IV1,FV1)
REAL K11(NEI,NEI),K12(NEI,NEI),K22(NEI,NEI),
& K21(NEI,NEI),A(NEI,NEI),FV1(NEI),WR(NEI),WI(NEI),
& H(NEI,2),KB(10),KF(10),DM1(300),DK1(300),DK0(300),
& E11(50),E12(50),E21(50),E22(50),B12(50),S12(50),
& MASS(50),MF(10),LENG(300)
INTEGER KM(50),KB1(10),IV1(NEI)
READ(11,*)E,DENS
READ(11,*)(KM(I),I=1,N)
READ(11,*)(KB1(I),I=1,NB)
READ(11,*)(KB(I),I=1,NB)
IF(MB.EQ.1)READ(11,*)(MF(I),I=1,NB)
IF(MB.EQ.1)READ(11,*)(KF(I),I=1,NB)
DO 50 I=1,NR
50 READ(11,*)LENG(I),DM1(I),DK0(I),DK1(I)
FMB=3.14159*DENS/4.0
KKP=NR+1
N0=N-1
DO 807 I=1,N
MASS(I)=0.0
DO 807 J=1,N
K11(I,J)=0.0
K12(I,J)=0.0
K21(I,J)=0.0
807 K22(I,J)=0.0
DO 180 I=1,N0
I1=I+1

```

```

N1=KM(I)
N2=KM(I1)
N3=N2-1
X=0.0
Y=0.0
X0=0.0
X10=0.0
Y0=0.0
DO 170 J=N1,N3
Y=Y+LENG(J)
X=Y-LENG(J)/2.0
Y0=FMB * (DM1(J) * DM1(J) - DK0(J) * DK0(J)) * LENG(J)
X0=X0+X * Y0
170 X10=X10+Y0
MASS(I1)=X0/Y
180 MASS(I)=MASS(I)+X10-MASS(I1)
N1=KM(1)-1
N2=KM(N)
IF(N1.EQ.0) GOTO 200
DO 190 I=1,N1
190 MASS(1)=MASS(1)+FMB * (DM1(I) * DM1(I) - DK0(I) * DK0(I))
& * LENG(I)
200 IF(N2.EQ.KKP) GOTO 215
DO 210 I=N2,KKP
210 MASS(N)=MASS(N)+FMB * (DM1(I) * DM1(I) - DK0(I) * DK0
& (I) * LENG(I)
215 DO 240 I=1,N0
I1=I+1
N1=KM(I)
N2=KM(I1)
N3=N2-1
H12=0.0
H13=0.0
H14=0.0
H23=0.0
H24=0.0
H34=0.0
DO 220 I2=N1,N3
EJ=3.14159 * E * (DK1(I2) * * 4 - DK0(I2) * * 4) / 64.0

```

```

A12=LENG(I2)
A13=LENG(I2)*LENG(I2)/2.0/EJ
A14=-LENG(I2)*A13/3.0
A23=LENG(I2)/EJ
A24=-A13
A34=-A12
H12=H12+A12
H13=H13+A12*H23+A13
H14=H14+A12*H24+A13*H34+A14
H23=H23+A23
H24=H24+A23*H34+A24
220 H34=-H12
DATA=H13*H24-H14*H23
E11(I)=H24/DATA
E21(I)=-H23/DATA
E12(I)=-H14/DATA
E22(I)=H13/DATA
B12(I)=(H24*H12-H14)/DATA
240 S12(I)=- (H13*H12+H14)/DATA
K11(1,1)=E21(1)
K11(1,2)=-E21(1)
K11(N,N0)=-E21(N0)
K11(N,N)=E21(N0)
K12(1,1)=E11(1)
K12(1,2)=-E22(1)
K12(N,N0)=-E11(N0)
K12(N,N)=E22(N0)
H(1,1)=0.0
H(1,2)=B12(1)
H(N,1)=-E12(N0)
H(N,2)=S12(N0)
DO 250 I=2,N0
I1=I-1
I2=I+1
K11(I,I1)=-E21(I1)
K11(I,I)=E21(I)+E21(I1)
K11(I,I2)=-E21(I)
K12(I,I1)=-E11(I1)
K12(I,I)=E11(I)+E22(I1)

```

```

      K12(I,I2) = -E22(I)
      H(I,1) = -E12(I1)
250   H(I,2) = B12(I) + S12(I1)
      DO 260 I = 1, N
260   K22(I,I) = 1.0
      CALL LDLT(H, N, NEI, 2, K22, N, IER)
      CALL RMAT(K12, K22, A, N, NEI)
      DO 270 I = 1, N
      DO 270 J = 1, N
270   K22(I,J) = K12(J,I)
      CALL RMAT(A, K22, K12, N, NEI)
      DO 280 I = 1, N
      DO 280 J = 1, N
280   K11(I,J) = K11(I,J) - K12(I,J)
      CALL TRANS(N, NB, NEI, KB1, K12)
      DO 285 I = 1, N
      DO 285 J = 1, N
285   K22(I,J) = K12(J,I)
      CALL RMAT(K11, K12, A, N, NEI)
      CALL RMAT(K22, A, K11, N, NEI)
      DO 290 I = 1, N
290   K21(I,I) = MASS(I)
      CALL RMAT(K21, K12, A, N, NEI)
      CALL RMAT(K22, A, K21, N, NEI)
      DO 295 I = 1, N
295   MASS(I) = K21(I,I)
      IJ = 0
      NN0 = N - NB + 1
      DO 300 I = NN0, N
      IJ = IJ + 1
300   K11(I,I) = K11(I,I) + KB(IJ)
      IF(MB.EQ.2) GOTO 350
      DO 310 I = 1, NB
      IJ = N + I
310   MASS(IJ) = MF(I)
      N0 = N - NB
      DO 320 I = 1, NB
      I1 = N0 + I
      J1 = N + I

```



```

      K11(I1,J1)=-KB(I)
320  K11(J1,I1)=-KB(I)
      DO 330 I=1,NB
      I1=N+I
330  K11(I1,I1)=KB(I)+KF(I)
350  DO 400 I=1,NEI
      DO 400 J=1,NEI
400  K11(I,J)=K11(I,J)/MASS(I)
      CALL RE(NEI,NEI,K11,WR,WI,A,IV1,FV1,IEER)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RE(NM,N,A,WR,WI,Z,IV1,FV1,IEER)
      DIMENSION A(NM,N),WR(N),WI(N),Z(NM,N),FV1(N),IV1(N)
      IF(N.LE.NM) GOTO 10
      IEER=10*N
      GOTO 50
10   CALL BALANC(NM,N,A,IS1,IS2,FV1)
      CALL ELMHES(NM,N,IS1,IS2,A,IV1)
      CALL ELTRAN(NM,N,IS1,IS2,A,IV1,Z)
      CALL HQR2(NM,N,IS1,IS2,A,WR,WI,Z,IEER)
      IF(IEER.NE.0) GOTO 50
      NK=N
      CALL BALBAK(NM,N,IS1,IS2,FV1,NK,Z)
      DO 100 I=1,N
      IF(WR(I).LT.0.0) GOTO 100
      WR(I)=9.55*SQRT(WR(I))
100  CONTINUE
      DO 110 I=1,N
      G1=0.0
      DO 120 J=1,N
      G2=ABS(Z(J,I))
      IF(G2.LT.G1) GOTO 120
      G1=G2
      KG1=J
120  CONTINUE
      WI(I)=Z(KG1,I)
110  CONTINUE
      DO 150 J=1,N
      DO 140 I=1,N

```

```
140  Z(I,J)=Z(I,J)/WI(J)
150  CONTINUE
      DO 170 I=1,N
        WRITE(12,80)
        WRITE(12,90) WR(I)
        WRITE(12,90) (Z(J,I),J=1,N)
170  CONTINUE
80   FORMAT(/1X,72(1H*))/)
90   FORMAT(1X,6E12.5)
50   RETURN
      END
```

### 参 考 文 献

- 1 刘德贵等编. FORTRAN 算法汇编:第一分册. 北京:国防工业出版社,1982.
- 2 郭富印等编. FORTRAN 算法汇编:第三分册. 北京:国防工业出版社,1982.

## 主要符号



$d_{ij}$ ——有量纲阻尼系数,  $i, j = x, y$ ;

$D_{ij}$ ——无量纲阻尼系数,  $i, j = x, y$ ;

$k_{ij}$ ——有量纲刚度系数,  $i, j = x, y$ ;

$K_{ij}$ ——无量纲刚度系数,  $i, j = x, y$ ;

$[\ ]$ ——矩阵;

$\{ \}$ ——矢量。



## 容简介

本书系以作者近期的研究成果与体会著成。书中重点阐述现代高速旋转机轴系动力学设计的内容和方法,并着力分析除传统方法,即计算轴系临界转速与不平衡响应之外,尚需介绍轴系稳定性计算的必要性及现实意义。

全书分八章包含三个主要内容:计算稳定性,研究稳定性与支承轴承的内在关系;计算临界转速与不平衡响应;实际机组轴系动力学设计的全过程。

本书可供从事轴系动力学设计的工程技术人员及大专院校师生参考。