

目 录

第一章 透平机械流体力学基础 1	§ 4-2 叶轮中的流动机理及损失分析.....108
§ 1-1 绪论.....1	§ 4-3 静止流道中的流动分析与设计.....119
§ 1-2 三元流动基本方程组.....7	§ 4-4 通流部分损失计算的工程方法.....126
§ 1-3 不可压理想流体的无旋流动..... 16	第五章 斜流叶轮的设计140
§ 1-4 涡运动与涡所引起的速度..... 21	§ 5-1 沿准正交线的平衡条件.....140
§ 1-5 薄翼的奇点解析法..... 27	§ 5-2 斜流叶轮回转面的基础方程.....14 ₂
§ 1-6 映象解析法..... 38	§ 5-3 斜流叶轮的设计理论.....143
第二章 透平机械与内部流动 46	§ 5-4 翼形斜流叶轮的准三元设计法.....148
§ 2-1 透平机械与能量转换..... 46	§ 5-5 斜流叶轮的简化设计方法.....155
§ 2-2 轴流叶轮与平面叶栅..... 52	§ 5-6 斜流叶轮的负荷界限.....162
§ 2-3 离心叶轮叶片形式与相对涡流.....64	第六章 轴流式叶轮的有限元设计
§ 2-4 斜流式叶轮..... 70	与计算.....168
§ 2-5 透平机械与比转数..... 74	§ 6-1 有限元素法的基本原理.....168
§ 2-6 透平机械的性能..... 78	§ 6-2 S_1 流面(任意回转面)气动
§ 2-7 透平机械内的三元流动..... 84	参数计算的有限元素法.....179
第三章 透平机械内的准三元流动 89	§ 6-3 S_2 流面设计的有限元素法.....210
§ 3-1 三元流动的欧拉方程与简化..... 89	附录 1 离心式压缩机计算例题223
§ 3-2 准三元流动理论与解析模型..... 92	附录 2 利用 NACA叶栅资料的
§ 3-3 流线曲率法..... 97	轴流风机设计.....228
第四章 离心式压缩机械的设计100	附录 3 设计用参考图线240
§ 4-1 一元流动理论分析.....100	参考文献244

第一章 透平机械流体力学基础

§ 1-1 绪 论

一、流体运动的分析方法

流体力学是以满足所给边界条件、求解流体运动状态为最终目的的基础学科。从连续介质模型出发,研究流体运动规律的方法,主要有拉格朗日法和欧拉法。

1. 拉格朗日法

力学的根本法则是关于质点运动的牛顿法则。即质点的速度与作用于该质点的力成比例地变化。由于流体是质点集合的连续体,故可以通过研究其质点的运动来分析流场内流体的速度、压力、密度等的变化。这种分析方法就是流体运动的拉格朗日(Lagrange)方法。

采用拉格朗日方法进行流体运动状态分析时,由于流体质点间力的相互作用,流体质点的运动轨迹有时与预想的差别较大,且数学关系较复杂。同时对于透平机械而言,问题主要在于确定叶面或界壁上的流动状态,往往不需要详细了解流体质点运动轨迹的变化。因此,除了特殊场合以外,在透平机械中很少采用拉格朗日的分析方法。

2. 欧拉法

欧拉(Euler)法是以流场中某固定空间为对象,研究该空间进出口速度与其作用力之间的关系。它不研究流体质点的运动轨迹,而考虑流体在某一空间的运动变化。为此,适用于这种情况的流体运动诸法则,都可以由牛顿力学体系导出。欧拉方法是流体运动的基本分析方法,也是透平机械最常用的分析方法。

二、流体物理量对时间的变化率

为了便于导出透平机械流体力学基础方程,这里首先引入流体物理量变化的一般分析方法。

设在时刻 t ,流场内任意点 (x, y, z) 的物理量为 A , A 为 t, x, y, z 的函数即 $A = f(t, x, y, z)$, 这时 A 的变化量 ΔA 按台劳级数展开为:

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial A}{\partial z} \Delta z + \delta(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$$

忽视二阶小量 δ , 物理量 A 对时间的变化率为:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z}$$

式中 u, v, w 表示流体速度 V 在 x, y, z 方向的分量。利用偏微分算子

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

物理量 A 的变化可以写成(直角坐标系):

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z} \quad (1-1)$$

如果用圆柱坐标 (r, θ, z) 表示时:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{v_\theta \partial A}{r \partial \theta} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} \quad (1-2)$$

式 (1-1)、式 (1-2) 中, 右边第一项表示物理量 A 对于时间的变化。该项不存在时称为定常流动, 否则称为非定常流动。第二项以后的式子表示物理量 A 在空间不均匀, 因流体移动所产生的对流变化。它的存在是连续流体力学与刚体力学的重要区别。这两者的和称为物理量 A 对时间的变化率。

当物理量为矢量时, 以上式子亦可适用。例如以流体质点的位置矢量 $r(x, y, z)$ 作为物理量, 若采用欧拉法分析, 则 r 与 t 无关, 故有

$$\mathbf{V} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = u \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (1-3)$$

速度矢量 \mathbf{V} 对时间的变化为

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (1-4)$$

或者

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (1-5)$$

由此可见, 在欧拉法中流体质点的加速度由两部分组成。其中第一项称为当地加速度, 它是由流场的非定常性引起的。第二项称为对流加速度, 它是由流场的非均匀性引起的。对于非均匀流场, 即使在定常流情况下, 对流加速度这一项仍然存在。

三、流体的变形与涡度

分析微元流体在流场中的运动状态告诉我们, 微元流体在流场的运动过程中, 一边产生伸缩变形和剪切变形, 一边又伴随着回转运动。

如果流场中任意微元流体上任意点 (x, y, z) 的速度为 u, v, w , 同一时刻相邻点 $(x + dx, y + dy, z + dz)$ 的速度分别为 $u + du, v + dv, w + dw$, 根据赫姆霍兹速度分解定理, 微元流体上该两点的速度差可以表示为:

$$\left. \begin{aligned} du &= \varepsilon_{xx} dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz - \omega_x dy + \omega_y dz \\ dv &= \varepsilon_{yx} dx + \varepsilon_{yy} dy + \varepsilon_{yz} dz + \omega_x dx - \omega_x dz \\ dw &= \varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{zy} dy + \varepsilon_{zz} dz - \omega_y dx + \omega_x dy \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式中 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ 分别表示单位时间内单位长度流体沿 x, y, z 方向的延伸率;

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-7)$$

$\varepsilon_{yx}(\varepsilon_{xy}), \varepsilon_{zx}(\varepsilon_{xz}), \varepsilon_{xy}(\varepsilon_{yx})$ 分别表示微元流体在垂直于 x, y, z 轴的平面上的剪切变形速度:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 分别表示微元流体绕坐标轴的回转角速度:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

或者

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \quad (1-10)$$

这里 $\nabla \times \mathbf{V}$ 表示微元流体回转的强弱, 通常称为涡度或涡量。将它写成旋度的形式:

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (1-11)$$

由此可见, 微元流体的涡度等于它绕坐标轴回转角速度的 2 倍值。

应用赫姆霍兹速度分解定理, 可以把流体的旋转和变形从一般运动中区分开来, 使我们有可能将流体运动分成有旋流动和无旋流动, 从而可以进行分别研究。同时可以将流体的变形与流体应力联系起来, 对于研究粘性的影响有着较大的意义。

流动是否有旋, 取决于涡度是否等于零来决定。若 $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$, 称为有旋流动; 若 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, 则称为无旋流动。

对于直角坐标系, 如果用 ξ, η, ζ 分别表示涡度在 x, y, z 方向的分量, 则有:

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1-12)$$

在圆柱坐标系 (θ, r, z) 中, 对应的涡度分量是:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \eta &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \zeta &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

四、速度环量与涡

对于流场中面积为 A 、周线为 S 的空间曲面, 应用斯托克斯定理, 速度环量 Γ 表示为:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \iint_A |\boldsymbol{\Omega}| dA = \iint_A (\xi dA_x + \eta dA_y + \zeta dA_z) \\ &= \oint_S (u dx + v dy + w dz) = \oint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (1-14)$$

式中 A_x, A_y, A_z 分别表示面积 A 在坐标轴 x, y, z 方向的投影面积。由上可知, 速度环量与涡度有着密切的关系, 同时它在透平机械及其叶栅理论中具有特别重要的意义。

对于无旋流动, 只要满足无旋条件 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, 不论流体是否可压还是定常或非定常流动, 必有速度势 φ 存在, 即

$$\mathbf{V} = \nabla \varphi = \text{grad } \varphi \quad (1-15)$$

或者

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-16)$$

所以，无旋流动又称为有势流或位势流。

透平机械中还常用到自由涡的概念，这里加以简单说明。如图 1-1 所示那样，当流体绕中心 o 作同心圆运动时，如果速度 v_0 与半径 r 满足 $v_0 r = \kappa = \text{const}$ ，扇形 $ABCD$ 的速度环量 $\Gamma = r_0 \theta \kappa / r_0 - r_i \theta \kappa / r_i = 0$ ，这表明该扇形内的流动为无旋流动，象这样的涡称为自由涡运动。在透平机械特别是风机中，大多数情况下是按自由涡流型设计的。

对于包含中心 o 的任意半径 r 的闭曲线（图中的虚线圆），其速度环量值 Γ 等于 $2\pi\kappa$ 并非为零，而为定值，且与半径 r 无关。说明该部分流体随流线一起绕圆心 o 作涡运动。

五、应力张量

为了分析运动流体中的应力张量，这里以图 1-2 所示的微元六面体流体加以说明。如图示那样，作用于该微元六面体单位面积的表面力，分为与表面垂直的法向应力 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 及与表面平行的切向应力 τ 。 τ 的第一个下角标表示应力作用面的法线方向，后面的下角标为应力的方向。作用于坐标轴 x, y, z 方向的九个应力分量与变形速度，由于对称性，九个分量只有六个独立，分别组成一个二阶对称应力张量 \mathbf{II} 和变形速率张量 $\mathbf{\Lambda}$ ：

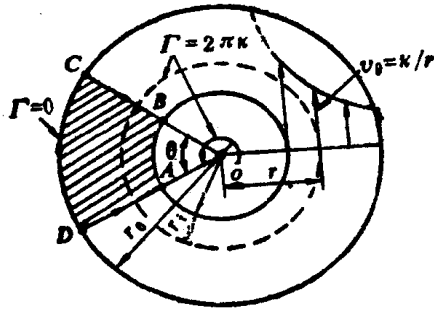


图1-1 自由涡流动

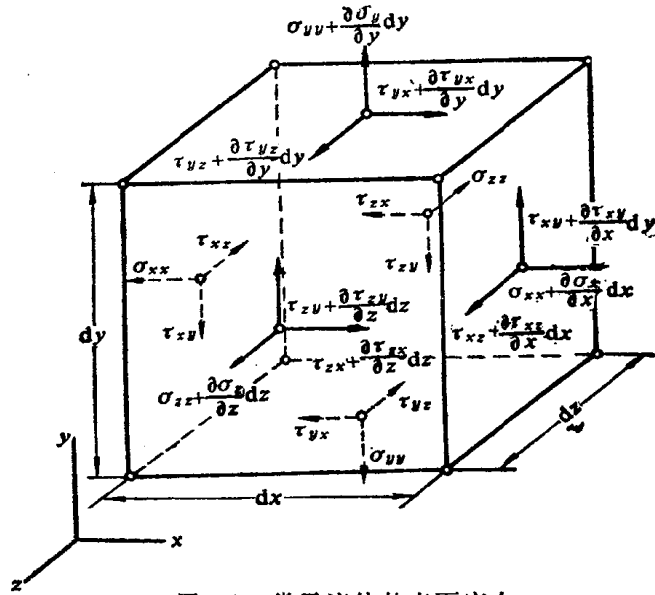


图1-2 微元流体的表面应力

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1-17)$$

根据牛顿粘性公式及式 (1-8)，可得剪切应力为：

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

对于粘性流体运动, 严格地说来, 并不存在热力学平衡状态上的压力, 流体质点的物理量都处在变化过程中, 通过任意点的不同表面上的法向应力并不相等, 为此, 将其平均值定义为流场中任意点的压力 p :

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad (1-19)$$

式中, 负号表示压力为相对于负的法线方向。

对于非粘性流体, 法向应力均相等, 它与方向无关:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \quad (1-20)$$

按照斯托克斯关于应力与变形速率关系的假定, 由应力张量分析, 可得平均压力 p 与热力学平衡态压力 p_0 的关系为:

$$p = p_0 - \mu' \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1-21)$$

这里 μ' 称为第二粘度。除了象激波层内的流动以外, 对大多数气体和液体的实际流动, 都可以按 $\mu' = 0$ 处理。

对于粘性流体运动, 作用于各表面的法向应力由平均压力 p 和变形速度的粘性力所组成, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + \tau_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \\ \sigma_{yy} &= -p + \tau_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \\ \sigma_{zz} &= -p + \tau_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

式中, 粘性力分别用下面式子表示:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

这里,

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

将式 (1-18), 式 (1-22), 式 (1-23) 用应力张量 σ_{ij} 表示的话, 可得应力与变形速度的一般关系为:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (1-24)$$

式中

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu \operatorname{div} \mathbf{V}$$

这里 δ_{ij} 称为克罗内克符号 (Kronecker's delta)。当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$; $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$ 。

对于圆柱坐标系，应力与变形速度的关系为：

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= \mu \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \right) \\ \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} &= \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \\ \sigma_{\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{\partial v_{\theta}}{r \partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V} \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

这里

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial}{r \partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_{\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

六、作用于单位质量流体的表面力

作用于单位质量粘性流体的表面力 \mathbf{F}_i ，由压力梯度项和粘性摩擦力项构成。它的矢量形式用下式表示：

$$\mathbf{F}_i = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{f} \quad (1-27)$$

式中

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} &= (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \\ \mathbf{f} &= (f_x, f_y, f_z \text{ 或 } f_r, f_{\theta}, f_z) \end{aligned}$$

式 (1-27) 在不同坐标系中的分量为：

直角坐标系：

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \\ F_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y \\ F_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ f_y &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ f_z &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

圆柱坐标系：

$$\left. \begin{aligned} f_r &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) \\ f_\theta &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} \right) \\ f_z &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

将式 (1-27) 中的 f 用式 (1-30) 代替, 便可得到圆柱坐标的作用于单位质量流体的表面力。

§ 1-2 三元流动基本方程组

求解透平机械内流体运动时, 空间坐标 (x, y, z) 及时间 t 作为四个独立变量, 而流体的状态量压力、密度、温度加上流体速度 V 的三个分量 u, v, w , 共有六个未知数。它们的求解可以利用下列方程组:

- (1) 状态方程 (表示流体状态量之间的关系);
- (2) 连续方程 (根据质量守恒法则);
- (3) 运动方程 (根据运动量守恒法则);
- (4) 能量方程 (根据能量守恒法则)。

其中运动方程的矢量形式, 对于空间坐标具有三个标量方程式, 于是以上方程组的个数与未知数相同。所以, 对于不同问题的求解, 当初始条件和边界条件给定时, 理论上可以完全确定满足边界条件的流体运动状态。

以上方程组就是透平机械流体动力学微分形式的基本方程组, 通常简称透平机械基本方程。其中状态方程比较简单, 亦可从其它书本上查到, 这里予以省略。

应该指出, 透平机械中还经常用到积分形式的动量定理及动量矩定理, 来确定气流作用在壁面上的力及总的能量传递关系, 在本节的最后将给予讨论。

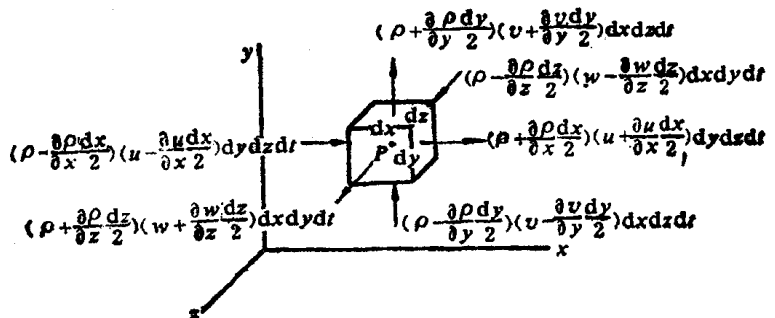


图1-3 连续方程的推导说明

一、连续方程

如图 1-3 所示, 现以空间任一点 $P(x, y, z)$ 为中心的微元六面体来考虑。该点的速度为 u, v, w , 密度为 ρ 。单位时间 dt 内通过垂直于 x, y, z 轴平面的进出口流量已写在图中。由图可见, 垂直于 x 轴的平面进出口流量差 q_x 为:

$$q_x = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz dt - \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \times \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz dt$$

$$= \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz dt$$

故有

$$q_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$$

同理可得垂直于 y, z 轴平面的进出口流量差:

$$q_y = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$q_z = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt$$

于是微元六面体流出的流量 q 为:

$$q = q_x + q_y + q_z = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

该出口流量 q 应等于微元体内因密度的变化而使得质量减少, 即

$$q = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

由以上两式, 最后可得直角坐标系的连续方程为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1-31)$$

或

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1-32)$$

对于定常流动:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1-33)$$

对不可压缩流动, 无论定常还是非定常:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-34)$$

由上可知, $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V})$ 表示通过空间内某点单位体积的出口流量。对于二元定常流动, 必然存在着自动满足上述连续条件的流函数 ψ , 它与速度的关系为:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\rho}{\rho_0} v \quad (1-35)$$

这里 ρ_0 表示参考点的密度。对不可压缩二元流场, ψ 可写成常见的形式:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (1-36)$$

对于圆柱坐标系, 按照类似的推导, 写出该坐标系的连续方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \\ & = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \end{aligned} \quad (1-37)$$

对于定常流动:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (1-38)$$

对于不可压缩流动:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1-39)$$

对于定常流动, 当考虑轴对称时:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (1-40)$$

圆柱坐标系中可压或不可压情况下的流动函数关系分别为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{\rho}{\rho_0} v_\theta, & \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\rho}{\rho_0} v_r \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -v_\theta, & \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= v_r \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

顺便指出, 对于相对坐标系, 只要将式 (1-37) 中的速度 \mathbf{V} 换成相对速度 \mathbf{W} 后, 便可得到该坐标系的连续方程表达式。

二、运动方程

1. 直角坐标系

运动方程可以用牛顿第二定律来描述, 即某物体的质量和加速度的乘积, 与作用于该物体的力相等。据此写出图 1-2 所示的单位质量六面体的运动方程式为:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{F}_i \quad (1-42)$$

作用于该单位质量流体的力 \mathbf{F}_i , 除了外力 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 外, 还包括内部应力产生的表面力 \mathbf{F}_s 。将式 (1-27) 代入上式, 运动方程可以写成:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{f} \quad (1-43)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \\ \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y \\ \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

式 (1-43)、式 (1-44) 也就是通常所称的纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程或 N-S 方程。式中右边第一项为外力 (如质量力), 第二项为压力梯度, 第三项表示摩擦力。左边表示单位质量流体的惯性力。所以 N-S 方程也称平衡方程。

对于动力粘度 $\mu = \nu\rho$ 为常数的粘性流体 (ν 为运动粘度), 把式 (1-18)、式 (1-23)、式 (1-29) 代入上式, 可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

或者

$$\frac{DV}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 V + \frac{1}{3} \nu \text{grad}(\text{div} V) \quad (1-46)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对于不可压缩粘性流动:

$$\frac{DV}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 V \quad (1-47)$$

对于非粘性流体, 不论压缩性有无:

$$\frac{DV}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (1-48)$$

或者

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} |V|^2 - V \times \text{rot} V = F - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (1-49)$$

将式 (1-48) 写成分量有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-50)$$

式 (1-48)、式 (1-49)、式 (1-50) 即是人所共知的欧拉方程。

2. 圆柱坐标系

对于如图 1-4 示出的圆柱坐标系, 微元流体在 r , θ 方向的运动量变化, 除了加速度 Dv_r/Dt 和 Dv_θ/Dt 外, 分别还有离心加速度 $(-v_\theta^2/r)$ 和哥氏加速度 $(v_r v_\theta/r)$ 所引起的运动量变化。作用于该单位质量流体的力有外力 $F(R, \theta, Z)$ 和表面力 $f(f_r, f_\theta, f_z)$, 故圆柱坐标系的 N-S 方程为:

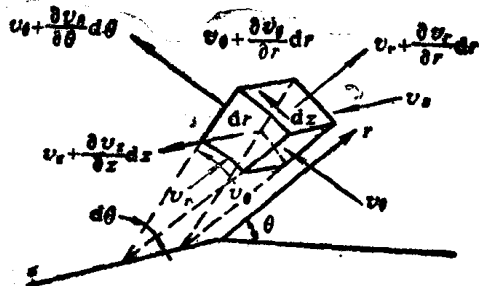


图1-4 圆柱坐标的速度变化

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} &= R + f_r \\ \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \Theta + f_\theta \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= Z + f_z \end{aligned} \right\} \quad (1-51)$$

对于不可压缩粘性流动:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} &= R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \Theta - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z \end{aligned} \right\} \quad (1-52)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对于非粘性流体, 不论有无压缩性, 圆柱坐标的欧拉方程写成与式 (1-50) 的对应形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} &= R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \Theta - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-53)$$

利用式 (1-1)、式 (1-2) 分别把式 (1-50) 和式 (1-53) 左边的第一项展开, 便可得到欧拉方程的常用分量形式。

3. 相对圆柱坐标系

研究透平机械内部流动计算时, 往往采用相对圆柱坐标系。由绝对速度与相对速度的关系,

$$v_r = w_r, \quad v_\theta = w_\theta + r\omega, \quad v_z = w_z \quad (1-54)$$

或者

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \omega \times \mathbf{r} \quad (1-55)$$

可得绝对坐标和相对坐标系的加速度关系为:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{D\mathbf{W}}{Dt} + 2\omega \times \mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{r} \quad (1-56)$$

式中 ω 为角速度。

将式 (1-56) 替代式 (1-48), 便可得到相对直角坐标系中的欧拉方程:

$$\frac{D\mathbf{W}}{Dt} + 2\omega \times \mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (1-57)$$

或者

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{W}|^2 - \mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{W} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{r} \\ & = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \end{aligned} \quad (1-58)$$

当不考虑外力时，由式 (1-53) 可以直接写出相对圆柱坐标系的欧拉方程的常见形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dw_r}{Dt} - \frac{(w_\theta + \omega r)^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{Dw_\theta}{Dt} + \frac{w_r w_\theta}{r} + 2\omega w_r &= -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{Dw_z}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-59)$$

利用热力学关系：

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla i - T \nabla s \quad (1-60)$$

运动方程式 (1-49) 可以改写成：

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = -\nabla I + T \nabla s + \mathbf{F} \quad (1-61)$$

式中 总焓 $I = i + v^2/2$

对于定常流动、且不考虑外力时，绝对运动方程为：

$$-\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = -\nabla I + T \nabla s \quad (1-62)$$

利用相对坐标与绝对坐标的速度关系式 (1-55)，相对运动方程式 (1-58) 又可写成：

$$-\mathbf{W} \times (\nabla \times \mathbf{W} + 2\boldsymbol{\omega}) = -\nabla I_R + T \nabla s \quad (1-63)$$

式中 转子焓

$$I_R = I - r\omega v_\theta \quad (1-64)$$

三、能量方程

单位质量流体 (如图1-5) $\rho dx dy dz$ 在 dt 时间内，其内能的变化及在压力作用下因体积变化对外所作的功为：

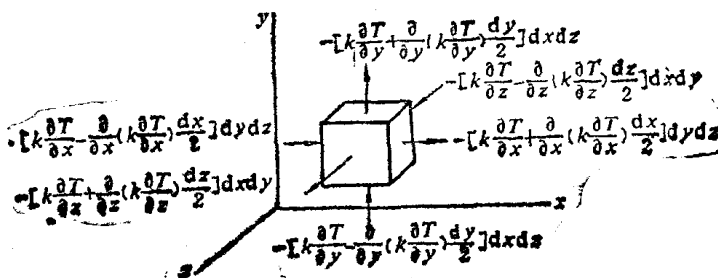


图1-5 微元质量流体的传热

$$\rho dx dy dz \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] dt$$

按照热力学第一法则，它应与流体从外界所得到的热量 q (忽略辐射热) 及流体因粘性

产生的热量 Φ 的和相等:

$$\rho dx dy dz \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] dt = (q + \Phi) dx dy dz dt$$

于是可得能量方程为:

$$\frac{De}{Dt} = -p \frac{D(1/\rho)}{Dt} + \frac{1}{\rho} (q + \Phi) \quad (1-65)$$

由于热传导, 单位时间、单位体积内流体所获得的热量 q , 由傅里叶法则可以写成:

$$q = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \text{div}(k \text{grad} T) \quad (1-66)$$

式中 k 表示热导率。 k 与动力粘度 μ 一样, 系压力 p 和温度 T 的函数。当 k 为常数时, 上式可以表示为:

$$q = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = k \nabla^2 T \quad (1-67)$$

流体因粘性所产生的热流量 Φ , 能够通过作用于微元六面体任意相对应两面的粘性力与变形之间的关系求得。它可以写成:

$$\begin{aligned} \Phi = & \left(\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & + \left[\tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-68)$$

把式(1-18)、式(1-22)代入上式加以整理得到,

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{2}{3} \mu (\text{div} \mathbf{V})^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1-69)$$

Φ 是因为内部应力的粘性效果, 使得流体摩擦(变形)以热量耗散所产生的能量损失, 故常称 Φ 为能量耗散函数。可以证明, 耗散函数 Φ 永远为正值。

如果引入单位质量气体比焓 $i = e + p/\rho$ 的关系, 则能量方程式(1-65)又可表示为:

$$\frac{Di}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} (q + \Phi) \quad (1-70)$$

对于完全气体有:

$$e = c_v T, \quad i = c_p T \quad (1-71)$$

把上式和式(1-67)代入式(1-65)和式(1-70)可得:

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} = \frac{1}{\rho} (k \nabla^2 T + \Phi) \quad (1-72)$$

对于不可压缩流体, 上式则变为:

$$c_v \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho} (k \nabla^2 T + \Phi) \quad (1-73)$$

利用式(1-73), 于是可以求得流场的温度分布。

对于理想完全气体, 将式(1-71)及状态方程 $p = \rho RT$ 代入式(1-70), 可以得到:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^r} \right) = 0 \quad (1-74)$$

式中 $\gamma = c_p/c_v$ 称为比热〔容〕比。引入完全气体熵的热力学关系式: $s = c_v \ln(p/\rho^\gamma) + \text{常数}$ 并代入上式, 可得理想完全气体在绝热流动时的能量方程为:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (1-75)$$

上式表明, 当理想完全气体作绝热流动时, 流体沿每条流线的熵值保持不变, 即作等熵流动。

下面讨论欧拉方程的积分形式, 可以得到伯努利(Bernoulli) 方程的一般表达式。

为了便于对欧拉方程式 (1-49) 进行积分, 假设定义:

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dP}{f(P)}$$

当 P 亦为 p 的函数时, 于是有:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} P$$

当外力只是重力, 根据质量力有势条件:

$$F = -\text{grad} U \quad (1-76)$$

式中 U 为质量力势。把上述关系代入欧拉方程式 (1-49), 可以得到:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\text{grad} \left(\frac{1}{2} |V|^2 + P + U \right) + V \times \text{rot} V \quad (1-77)$$

对于无旋流动, 必有速度势 φ 的关系式 (1-15) 存在, 把该式代入上式并积分得到:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |V|^2 + P + U = F(t) \quad (1-78)$$

式中 $F(t)$ 为时间 t 的任意函数。式 (1-78) 就称为伯努利方程的一般表达式, 亦称压力方程式。

对于定常流动, 对式 (1-77) 积分后可得常见形式的伯努利方程为:

$$\frac{1}{2} V^2 + P + U = \text{常数} \quad (1-79)$$

对于不可压缩流动, 当不考虑位置变化时, 其伯努利方程可写成:

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} = \text{常数} \quad (1-80)$$

这里 $P = p/\rho$ 。该式说明, 对不可压缩流动, 沿流线的动压和静压保持不变。

四、动量方程和动量矩方程

利用连续方程的关系, 对运动方程进行积分, 便能获得动量方程。应用动量方程虽然不能求解流场内部流动的有关数据, 但是用它可以方便地了解流场的总性能和能量转换。它无论对粘性流体还是理想流体, 也无论内部流场是层流还是湍流运动, 或经历何种热力过程, 它是一个普遍适用的流动关系式, 亦是透平机械的一个重要的基本方程, 下面对此进行一般的讨论。

这里取流场中某一闭曲面 S 所围成的控制体 R 来考虑。将运动方程式 (1-43) 用于该控制体, 并在空间 R 内对式 (1-43) 进行积分有:

$$\iiint_R \rho \frac{DV}{Dt} dR = \iiint_P \rho F dR + \iiint_R \text{grad} p dR + \iiint_R \rho f dR \quad (1-81)$$

式中 $\rho dR = dm$ 表示控制体内微元流体的质量。把式 (1-5) 的关系代入上式。式 (1-81) 左边变成:

$$\iiint_R \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dR = \iiint_R \left[\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] dR \quad (1-82)$$

由连续方程式 (1-31) 有:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \rho \cdot \mathbf{V}$$

以及求导关系

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{V}$$

可以得到:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} \mathbf{V}$$

将上式代入式 (1-82) 后, 于是式 (1-81) 则可以改写为:

$$\begin{aligned} & \iiint_R \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} dR + \iiint_R [\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] dR \\ &= \iiint_R \rho \mathbf{F} dR + \iiint_R \text{grad } p dR + \iiint_R \rho \mathbf{f} dR \end{aligned} \quad (1-83)$$

因为控制体 R 的形状不随时间而变化, 故式 (1-83) 左边第一项可以写成:

$$\iiint_R \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} dR = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_R \rho \mathbf{V} dR = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_R dm \mathbf{V} \quad (1-84)$$

由于 $\rho dR \mathbf{V} = dm \mathbf{V}$, 故式 (1-84) 表示控制体内的动量对时间的变化率。

由并矢量的微分关系, 式 (1-83) 左边第二项中的方括号部分, 可以用并矢量的散度 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V})$ 表示。又根据并矢量的高斯 (Gauss) 散度公式, 该项的体积分可以用面积分表示。故式 (1-83) 左边第二项表示为:

$$\begin{aligned} & \iiint_R [\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] dR \\ &= \iiint_R \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) dR = \iint_S \mathbf{V} (\rho \mathbf{V} dS) \end{aligned} \quad (1-85)$$

这里 dS 表示曲面 S 上与速度 \mathbf{V} 垂直的微元面积。于是 $\rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot dS)$ 的积分, 也就表示单位时间内通过控制体 R 的表面 S 的进出口动量差, 即

$$\iint_S \mathbf{V} (\rho \mathbf{V} dS) = \iint_{S_2} dm_{S_2} \mathbf{V}_2 - \iint_{S_1} dm_{S_1} \mathbf{V}_1 \quad (1-86)$$

式 (1-83) 右边第一项表示控制体 R 内的体积力, 第二、三项表示因流体内部应力产生的表面力, 利用高斯散度公式亦可换成面积分:

$$\iiint_R \text{grad } p dR = \iint_S \sigma_n dS, \quad \iiint_R \rho \mathbf{f} dR = \iint_S \tau_t dS$$

式中 σ_n 表示与曲面 S 垂直的法向应力, τ_t 为与曲面 S 平行的切向应力。

将上述结果代入式 (1-83) 后, 于是可得动量方程的表达式为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_R dm \mathbf{V} + \iint_{S_2} dm_{S_2} \mathbf{V}_2 - \iint_{S_1} dm_{S_1} \mathbf{V}_1 = \iiint_R \rho \mathbf{F} dR + \iint_S \sigma_n dS + \iint_S \tau_t dS \quad (1-87)$$

对于定常流动且不考虑外力时, 则式(1-87)变成为:

$$\iint_{S_2} dm_{S_2} \mathbf{V}_2 - \iint_{S_1} dm_{S_1} \mathbf{V}_1 = \iint_S \sigma_n dS + \iint_S \tau_t dS \quad (1-88)$$

该式说明, 单位时间内通过曲面 S 的动量增加与作用于此曲面的表面力成正比。

将动量方程式 (1-87) 对矢径为 \mathbf{r} 的某固定点取矩, 便可得到如下的动量矩方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iiint_R dm \mathbf{V} \times \mathbf{r} + \iint_{S_2} dm_{S_2} \mathbf{V}_2 \times \mathbf{r} - \iint_{S_1} dm_{S_1} \mathbf{V}_1 \times \mathbf{r} \\ & = \iiint_R \rho \mathbf{F} dR \times \mathbf{r} + \iint_S \sigma_n dS \times \mathbf{r} + \iint_S \tau_t dS \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (1-88a)$$

§ 1-3 不可压理想流体的无旋流动

一、拉普拉斯方程

透平机械内流体的运动, 很多情况下可以用无旋流动来考虑, 即 $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V} = 0$ 来处理。

按照无旋条件, 则必有速度势 $\text{grad} \varphi = \mathbf{V}$ 存在。将它代入式 (1-31) 可以得到:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-89)$$

对于不可压缩流动, 上式简化为:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-90)$$

或

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1-91)$$

式 (1-90)、式 (1-91) 就是拉普拉斯 (Laplace) 方程, 它是不可压缩无旋流动的基本方程。

圆柱坐标系中拉普拉斯方程的形式为:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-92)$$

式中速度势与分速度的关系为:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-93)$$

速度势的拉普拉斯方程的前提条件是流动无旋与不可压缩, 与流动是否定常无关。因此求解给定边界条件下的不可压无旋流动, 相当于求解满足给定边界条件下的拉普拉斯方程。

对于 $x-y$ 面上的二元流动, 由流函数和速度势的关系式 (1-16), 式 (1-36) 有:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v \quad (1-94)$$

于是可以得到不可压理想流体平面无旋流动的拉普拉斯方程为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \\ \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-95)$$

式(1-94), 式(1-95)即是众所周知的柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 条件。

由于满足拉普拉斯方程的连续函数为调和函数, 且拉普拉斯方程为线性方程, 其解有可能进行叠加。利用解的叠加性, 能够通过某些简单的基本复势如均匀流场、点源(汇)、点涡以及偶极子等的线性组合, 去求解满足具体问题边界条件的比较复杂流动。

如果流场中满足柯西-黎曼条件的由速度势和流函数组成的复势 W 用下式

$$W = \varphi + i\psi \quad (1-96)$$

表示, 将式(1-96)对 z 微分可得:

$$\frac{dW}{dz} = u - iv \quad (1-97)$$

相对于复速度 $V = u + iv$ 而言, 这里把 $u - iv$ 称为共轭复速度。

二、基本复势流动

不可压缩理想流体平面无旋流动的某些简单的复势, 在专门的流体力学书籍中已有介绍, 为了便于应用, 这里只写出它们的结果。

1. 均匀流场

对于来流速度 U 不变的均匀流场, 如果速度 U 与 x 轴的夹角为 θ , 则在 xy 平面上的任意点 z 的复势为:

$$W = Uze^{-i\theta} \quad (1-98)$$

式中 $z = x + iy$ 表示流场内任意点的位置。

该流场相应的速度势与流函数分别为

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= U(x\cos\theta + y\sin\theta) \\ \psi &= -U(x\sin\theta - y\cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (1-99)$$

2. 点源与点汇

如果点源处于坐标原点, 单位时间从原点涌出的流量为 Q , 这时该放射状流场的复势可以表示为:

$$W = m \ln(re^{i\theta}) = m \ln z \quad (1-100)$$

式中 $m = Q/2\pi$ 表示点源强度。当 m 为负值时, 流动向原点汇集故称为点汇。

相应的速度势和流函数为:

$$\varphi = m \ln r, \quad \psi = m\theta \quad (1-101)$$

这时沿径向和周向的速度 v_r, v_θ 分别为:

$$v_r = \partial\varphi/\partial r = m/r, \quad v_\theta = \partial\varphi/r\partial\theta = 0 \quad (1-102)$$

上式表明, 无论 m 为正还是为负, $r = 0$ 时速度 $v_r = \pm\infty$, 即原点为奇点。这种奇点在物理上不合理, 因此, 一般将奇点从物理面上除去, 不予考虑。从这里亦可看出, 如果已知

流场的复势, 则便可确定相应的速度和压力分布。

如果点源不在坐标原点, 且有多个点源自 z_1, z_2, \dots, z_s 处分别涌出流量 q_1, q_2, \dots, q_s 时, 按照复势叠加原理, 这时 z 点的复势 W 为:

$$W = \sum_s m_s \ln(z - z_s) \quad (1-103)$$

相应的速度势和流函数为:

$$\varphi = \sum_s m_s \ln r_s, \quad \psi = \sum_s m_s \theta_s \quad (1-104)$$

3. 点涡

具有反时针环量 Γ 的点涡如果位于坐标原点时, 它的复势表示为:

$$W = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (1-105)$$

相应的速度势和流函数为:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (1-106)$$

这时由于点涡所引起的速度 v_θ 及 v_r 为:

$$v_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1-107)$$

上式说明, v_θ 与 r 成反比, 原点为奇点。将速度 v_θ 沿半径 r 的流线进行线积分:

$$\int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \Gamma$$

这表明环量 Γ 与半径 r 无关, 而为一常数, 即在原点虽然存在循环为 Γ 的涡运动, 而在不含原点的其它区域仍为无旋的圆周流动, 这种涡运动亦是 § 1-1 中所述的自由涡流动。

同样对于不在坐标原点的具有环量 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s$ 的多个点涡 z_1, z_2, \dots, z_s , 这时的复势为:

$$W = \sum_s \frac{\Gamma_s}{2\pi i} \ln(z - z_s) \quad (1-108)$$

相应的速度势与流函数表示为:

$$\varphi = \sum_s \frac{\Gamma_s}{2\pi} \theta_s, \quad \psi = \sum_s -\frac{\Gamma_s}{2\pi} \ln r_s \quad (1-109)$$

4. 偶极子

作为简单复势叠加的例子, 偶极子实际上是由一对强度相等的点源和点汇所组成的流场。如果在坐标原点, 存在强度为 m , 方向为负 x 轴的偶极子时, 其复势表达式为:

$$W = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (1-110)$$

相应的速度势和流函数为:

$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad \psi = -\frac{m}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (1-111)$$

同样地对于不在坐标原点, 具有强度 m_1, m_2, \dots, m_s 的多个偶极子 z_1, z_2, \dots, z_s , 它

与负 x 轴方向的夹角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 时, 叠加后的复势 W 可以用下式表示:

$$W = \sum_s \frac{m_s}{2\pi} \frac{e^{i\alpha_s}}{z - z_s} \quad (1-112)$$

三、茹可夫斯基保角变换

对于理想不可压平面无旋流动的问题, 也可以利用无分离流动的保角变换原理进行求解。即通过保角变换方法, 可以将未知的物理平面 z 面上的复杂流动, 转换为在已知的映象平面 ζ 面上的简单流动, 然后加以求解。

如果 ζ 面上的复势为 $W(\zeta)$, z 面上的复势为 $W(z)$, 对应的复速度关系为:

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = \frac{dW(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta} \quad (1-113)$$

保角变换在叶轮机械中的应用, 主要表现在:

- (1) 已知流体的势流运动, 求取映象函数 (变换函数)。
- (2) 已知映象函数, 求解与之对应的流动。
- (3) 根据保角变换, 寻求复速度面和势流面之间的关系。

下面我们讨论一种最重要的保角变换, 即茹可夫斯基 (Жуковский) 变换。

假如把与 x 轴平行的均匀流场和偶极子叠加, 由式 (1-98), 式 (1-110) 可得复势为:

$$W = Uz + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (1-114)$$

它表示 z 面上位于坐标原点, 半径 $a = \sqrt{m/2\pi U}$ 的无环量圆柱绕流运动。把 a 代入式 (1-114) 有:

$$W = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (1-115)$$

这时在 ζ 平面上 ($\zeta = \xi + i\eta$) 存在着与 ξ 轴平行的均匀流场 $W = U\zeta$ 的话, 应用式 (1-113) 的关系, 由 $W = U\zeta$ 及式 (1-115) 可得变换函数为:

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} \quad (1-116)$$

实际使用时, 习惯将 z 写成 $z = f(\zeta)$ 的形式, 故式 (1-116) 可以改写成:

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (1-117)$$

式 (1-117) 或式 (1-116) 即是所谓的茹可夫斯基变换函数。采用变换函数式 (1-117), 可以把物理面 z 平面上的平板叶片、圆弧叶片以及机翼形叶片, 分别转换为映象面 ζ 平面上的圆心在坐标原点、圆心在 η 轴上以及圆心在任意点 (非 η 轴和 ξ 轴上的任意点) 的圆柱绕流运动。按照茹可夫斯基变换所得到的翼形亦称做茹可夫斯基翼。

在图1-6中分别示出了它们对应的变换图形。

四、库塔条件

茹可夫斯基升力定理告诉我们, 要想求得机翼升力, 首先必须要知道环量的大小。但是, 即使已知翼的形状和流体速度, 环量值也很难从理论上加以确定, 而根据大量实验结果所确认的如下事实加以决定。即是说, 对于均匀流场中的尖锐后缘的翼形绕流运动, 当不存在气流严重分离的情况下, 必将产生一个使驻点 A 移向后缘的环量值, 环量的大小由满足气

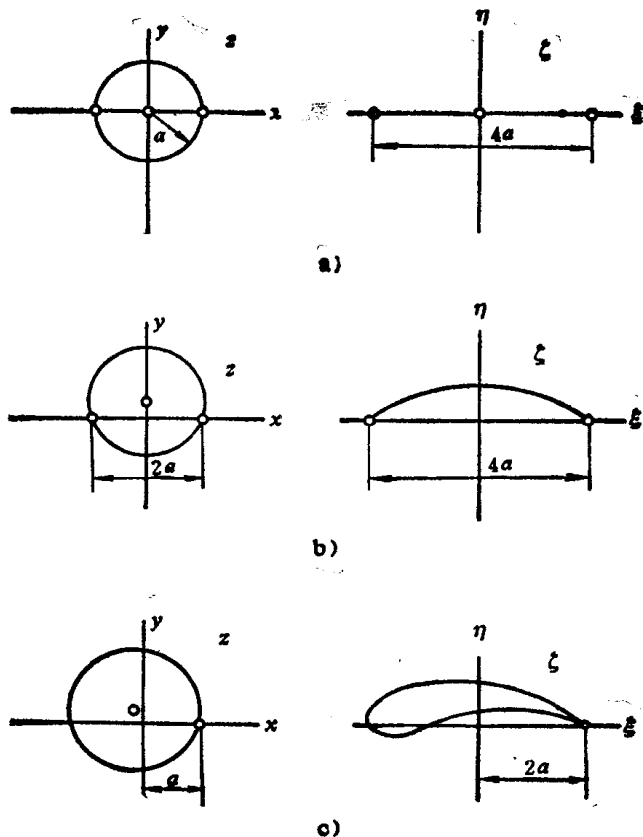


图1-6 茹可夫斯基变换

流从后缘光滑流出的条件确定，这个条件就称为库塔 (Kutta) 条件。图1-7示出了翼形绕流环量形成的物理过程。

叶轮机器的实际翼形其尾缘并不是尖角，考虑工艺性一般做成圆角，如图1-8所示。

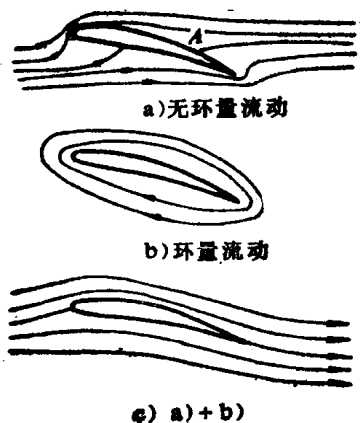


图1-7 翼形绕流环量的形成

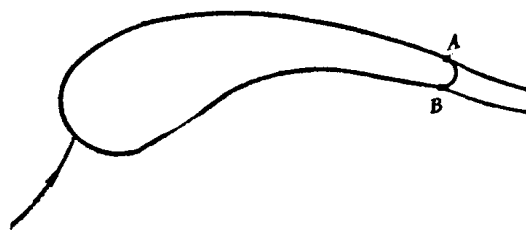


图1-8 广义的库塔条件

一般来说，后缘圆弧都比较小。特别是对于薄翼，该圆弧很小。因此可以认为，气流与后缘处翼形上下表面的分离点 A、B 极为接近并趋近尾缘点。测量结果表明，这两点的压力相

等。由伯努利方程可得该两点的速度亦相等：

$$V_A = V_B \quad (1-118)$$

式 (1-118) 就叫作广义的库塔条件。分离点 A 、 B 的位置事先并不知道，为此在数值计算时，开始可以把分离点取在尾缘点上进行计算。

§ 1-4 涡运动与涡所引起的速度

一、涡运动

前已指出，流动可以分为无旋和有旋（涡运动）。但是如何判断流场是否有旋或存在涡运动呢？

众所周知，涡与环量密切相关。对于不可压缩粘性流体，利用式 (1-4) 和式 (1-47) 的关系，式 (1-14) 对时间的变化为：

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \oint_S (u dx + v dy + w dz) \\ &= \oint_S \left[d\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{dp}{\rho} - dU \right] + \nu \oint_S (\nabla^2 u dx + \nabla^2 v dy + \nabla^2 w dz) \end{aligned} \quad (1-119)$$

对于不可压流体，沿任意闭曲线 S 的积分时，上式第一项等于零，故对于非粘性流体，由式 (1-119) 可得：

$$D\Gamma/Dt = 0 \quad (1-120)$$

即环量大小不随时间变化。式 (1-120) 即是理想流体无旋流动的开尔文 (Kelvin) 定理。实际流动上式右边第二项并不为零，涡沿物体表面不断生成，又不断向流场扩散和消失。

二、涡度输送方程

当流体作涡运动时，由式 (1-12) 的关系，可以得到与连续方程式 (1-34) 对应的不可压缩流体涡度场守恒方程式为：

$$\operatorname{div} \Omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (1-121)$$

对于不可压缩粘性流体，当外力具有质量力势 U 时，由运动方程 (1-47) 及式 (1-77) 则有：

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + P + U \right) + \mathbf{V} \times \Omega + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1-122)$$

如果对式 (1-122) 两边取旋度：

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \Omega) + \nu \nabla^2 \Omega \quad (1-123)$$

利用关系 $\operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V}) = (\operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{V}$ 则式 (1-123) 可写成：

$$\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{V})}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{V} = (\operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \nabla^2(\operatorname{rot} \mathbf{V}) \quad (1-124)$$

或者

$$\frac{D\Omega}{Dt} = (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \nabla^2 \Omega \quad (1-125)$$

写出 x , y , z 三个方向的分量形式有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \nabla^2 \xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} + \nu \nabla^2 \eta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \nabla^2 \zeta \end{aligned} \right\} \quad (1-126)$$

式 (1-125)、式 (1-126) 就称为涡度输送方程。

对于非粘性流体:

$$\frac{D\Omega}{Dt} = (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (1-127)$$

该式亦称为赫姆霍兹方程, 它是理想流体涡运动的基础式子。

对于 $x-y$ 面上的二元有旋流动, 涡度输送方程简化为:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \nu \nabla^2 \xi \quad (1-128)$$

或者

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu \nabla^2 \xi \quad (1-129)$$

这时把式 (1-12) 最后一式代入柯西-黎曼条件式 (1-94), 则可得到:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi \quad (1-130)$$

式 (1-130) 就是直角坐标系中泊桑 (Poisson) 方程的表达式。对于圆柱坐标系, 泊桑方程写为:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\xi \quad (1-131)$$

从式 (1-130) 和式 (1-131) 可以看出, 它们的右边比拉普拉斯方程右边多一项 $(-\xi)$, 故泊桑方程的求解远比拉普拉斯方程困难。它的求解可以通过满足所定边界条件的拉普拉斯方程一般解和泊桑方程的特解获得。

三、涡运动所引起的速度

如前所述, 已知速度 \mathbf{V} 的分布, 能够由 $\Omega = \text{rot} \mathbf{V}$ 求得涡度 Ω 的大小。但是从涡度 Ω 的分布要求取速度 \mathbf{V} 时则比较困难。这是因为流场中即使涡度不存在, 还是有着无旋流动的速度场的缘故。下面就讨论由于涡度所引起的流体运动的变化。

如果流场的速度 \mathbf{V} 用下面一般式子

$$\mathbf{V} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \mathbf{A} \quad (1-132)$$

表示, 当满足条件 $\text{div} \mathbf{A} = 0$ 时, 对式 (1-132) 两边取旋度: $\text{rot} \mathbf{V} = \text{rot} \text{grad} \varphi + \text{rot} \text{rot} \mathbf{A}$ 后, 则有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\text{rot} \mathbf{V} \quad (1-133)$$

这里 \mathbf{A} 表示速度 \mathbf{V} 的矢量势函数。式 (1-133) 亦称为泊桑方程的一般表达式。

如果将 $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$, $\text{rot} \mathbf{V} = \Omega(\xi, \eta, \zeta)$ 用分量表示, 则可得式 (1-133) 的等价形式为:

$$\nabla^2 A_x = -\xi, \quad \nabla^2 A_y = -\eta, \quad \nabla^2 A_z = -\zeta \quad (1-134)$$

数理方程告诉我们，泊桑方程式 (1-133) 的解可以写成：

$$A_i = \frac{1}{4\pi} \iiint_{R'} \frac{\Omega_i'}{r} dR' \quad (1-135)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{R'} \frac{\xi'}{r} dx' dy' dz' \\ A_y &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{R'} \frac{\eta'}{r} dx' dy' dz' \\ A_z &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{R'} \frac{\zeta'}{r} dx' dy' dz' \end{aligned} \right\} \quad (1-136)$$

式中符号意义如下 (见图1-9)： ξ' 、 η' 、 ζ' 为涡度存在领域内点 P' (x' 、 y' 、 z') 的涡度分量； A_x 、 A_y 、 A_z 为空间点 P (x 、 y 、 z) 的矢量势函数的分量； r 为 $P'P$ 的距离，

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

如果对式 (1-132) 取散度，则有 $\text{div} \mathbf{V} = \text{div grad} \varphi + \text{div rot} \mathbf{A}$ ，对于不可压缩流体，于是可得：

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

这亦是式 (1-91) 所表示的拉普拉斯方程。由式 (1-132) 可知，当涡度不存在时，即对于无旋流动，则有 $\mathbf{V} = \text{grad} \varphi$ 存在，这也说明 φ 表示涡度不存在时的无旋流动的速度势。所以，对于含有涡度的流体运动的一般形式，可以用式 (1-132) 来描述。

如果只考虑涡度的存在，它所引起的速度由式 (1-132) 可得：

$$\mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (1-137)$$

再利用式 (1-135) 的结果，可以得到涡所引起的速度为：

$$\mathbf{V} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{R'} \Omega_i' \times \mathbf{r} \frac{dR'}{r^3} \quad (1-138)$$

或写出 $\mathbf{V} (u, v, w)$ 的分量形式：

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{R'} \left[\zeta' \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) - \eta' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz' \\ v &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{R'} \left[\xi' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) - \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz' \\ w &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{R'} \left[\eta' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) - \xi' \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz' \end{aligned} \right\} \quad (1-139)$$

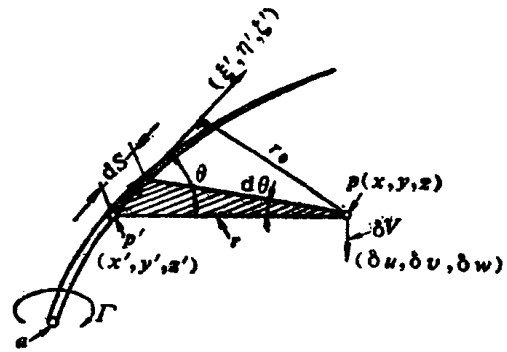


图1-9 涡所引起的速度

式中:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x-x'}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y-y'}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z-z'}{r^3}$$

要注意的是, 涡所引起的速度表达式 (1-138) 和式 (1-139), 不仅适用于涡度存在的领域, 而且对于涡度不存在的领域也成立。由于在无涡领域内流体作无旋运动, 所以具有速度势。

作为涡所引起速度的例子, 下面讨论比奥-萨伐尔 (Biot-Savart) 法则。

现以如图 1-9 所示的涡管来考虑。由于涡度 Ω_p' (ξ', η', ζ') 的存在, 在点 $P(x, y, z)$ 所引起的速度 δV ($\delta u, \delta v, \delta w$), 由式 (1-138) 可得:

$$\delta V = \frac{1}{4\pi} (\Omega_p' \times r) \frac{a dS}{r^3} \quad (1-140)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= \frac{1}{4\pi} [\eta'(z-z') - \zeta'(y-y')] \frac{a dS}{r^3} \\ \delta v &= \frac{1}{4\pi} [\zeta'(x-x') - \xi'(z-z')] \frac{a dS}{r^3} \\ \delta w &= \frac{1}{4\pi} [\xi'(y-y') - \eta'(x-x')] \frac{a dS}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (1-141)$$

如果涡管的断面积为 a , Ω_p' 与 r 的夹角为 θ , 把环量 $\Gamma = a\Omega_p'$ 代入式 (1-140), 则可得引起速度 δV 的大小为:

$$|\delta V| = \frac{\Gamma \sin\theta dS}{4\pi r^2} \quad (1-142)$$

式 (1-142) 亦和电磁学中的比奥-萨伐尔法则具有同一公式形式。利用几何关系 $r d\theta = dS \sin\theta$, $r_0 = r \sin\theta$, 式 (1-142) 又可写成:

$$|\delta V| = \frac{\Gamma \sin\theta d\theta}{4\pi r_0} \quad (1-143)$$

四、涡层与涡列

现在我们讨论如图 1-10 所示的涡面所引起速度的问题。如果沿 x 轴方向单位长度涡的强度 γ 一定, 这时涡面内以任意点 $A(x-x')$ 为中心长度 dx' 的涡所具有的环量 $d\Gamma$ 则等于 $\gamma dx'$ 。设该涡对涡面外任意点 P 所引起的速度为 dV , 与 A 点对称的且有着同样环量大小的点 A' , 它对点 P 所引起的速度为 dV' 。因为对称关系, 它们对点 P 所引起的速度在 y 方向抵消, 只有 x 方向的分量。如图所示, 在点 A 环量为 $d\Gamma$ 的涡对点 P 所引起速度 dV 沿 x 方向的分量 du 为:

$$du = -|dV| \cos\theta$$

这里:

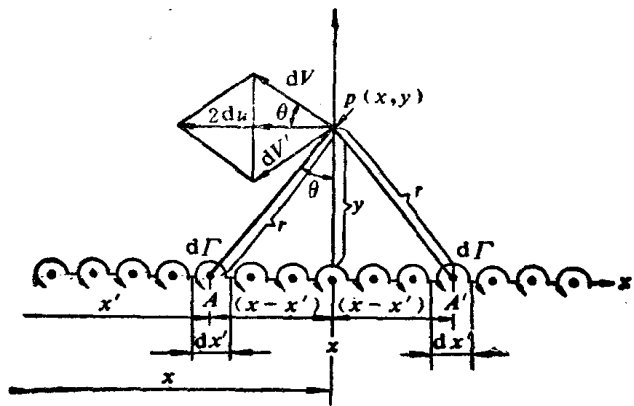


图1-10 涡面所引起的速度

$$|dV| = \frac{d\Gamma}{2\pi r} = \frac{\gamma dx'}{2\pi \sqrt{(x-x')^2 + y^2}}, \quad \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}$$

故有

$$du = -\frac{\gamma dx'}{2\pi [(x-x')^2 + y^2]} y \quad (1-144)$$

于是整个涡面所引起的速度 u 为:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} du = -\frac{\gamma y}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{(x-x')^2 + y^2} = \frac{\gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{x-x'}{y} \right| \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

最后可得:

$$u = -\gamma/2 \quad (1-145)$$

同理; 在涡面下方所引起速度为:

$$u = +\gamma/2 \quad (1-146)$$

由此可见, 因涡面所引起的速度, 沿 x 轴方向在 x 轴上方和下方有着速度差 $\gamma = d\Gamma/dx'$, 使 x 轴成为速度的不连续面。这种由涡引起的速度不连续面, 常称之为涡层, γ 则称为涡层强度 (如图 1-11)。图中 U 为平均速度。在涡层不连续面处, 只要与 x 轴稍有偏移, 该位移将很快增加, 成为一种不稳定流动。

这种速度的不连续流动, 在透平机械叶轮翼形后缘处常可见到。

透平机械叶轮设计及叶栅计算中, 有时还应用到涡列所引起速度的问题。所谓涡列就是强度 Γ 相等方向相同的无数个点涡, 以等间隔 a 布置所组成的涡排。对于如图 1-12 所示的单排涡列, 它对涡列以外任意点 $M(x, y)$ 的复势 W , 由式 (1-108) 及正弦函数无穷乘积

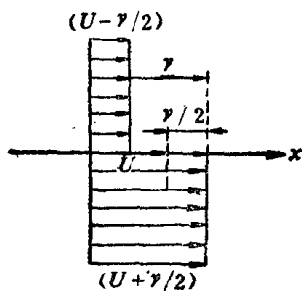


图1-11 涡层

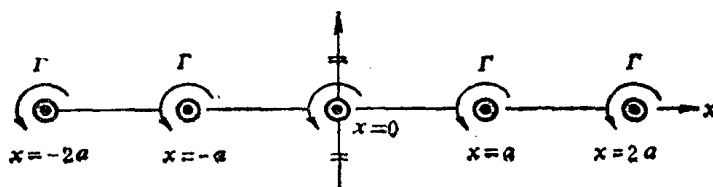


图1-12 涡列

展开式可得:

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\sin \frac{\pi}{a} z \right) \quad (1-147)$$

由上式可得 M 点的共轭复速度为:

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2ai} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} z \quad (1-148)$$

将 $z = x + iy$ 及数学关系式:

$$\operatorname{ctg}(x - iy) = i \frac{\operatorname{sh}(2y) - i\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}$$

代入式 (1-148), 可得共轭复速度为:

$$u - iv = \frac{\Gamma}{2a} \left[\frac{-\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{a}y\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{a}y\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)} \right] \quad (1-149)$$

故可得 M 点在 x, y 方向的引起速度为:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\Gamma}{2a} \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{a}y\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{a}y\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)} \right] \\ v &= \frac{\Gamma}{2a} \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{a}y\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-150)$$

如果除去原点 ($z = 0$) 的复势, 则式 (1-147) 变成:

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln\left(\sin\frac{\pi}{a}z\right) - \ln z \right]$$

它的共轭复速度为:

$$\begin{aligned} u - iv &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln\left(\sin\frac{\pi}{a}z\right) - \ln z \right] \right\} \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{\pi}{a} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{a}z - \frac{1}{z} \right\} \end{aligned} \quad (1-151)$$

当 $z (= x + iy)$ 很小时, 将 $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{a}z$ 按幂级数展开并忽略第二项以后的值代入上式, 则有

$$u - iv = -\frac{\pi\Gamma}{6a^2i} z$$

上式表明, 当原点 $z = 0$ 时, 则 $u - iv = 0$, 说明涡列处于静止状态。但只要 $z = x + iy$ 有微小位移, 则速度不为零, 涡列处于不稳定状态。

假如令 $\lambda = \pi\Gamma/6a^2$ 及把 $z = x + iy$ 代入上式, 于是有:

$$u - iv = -\lambda y + i\lambda x$$

因为 $u = dx/dt$, $v = dy/dt$, 对比上式有: $dx/dt = -\lambda y$, $dy/dt = -\lambda x$, 由它们消去 y 最后可得:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda^2 x = 0$$

上式的一般解为:

$$x = Ae^{At} + Be^{-At} \quad (1-152)$$

这说明, 随着时间 t 的增加, x 将不断增大, y 也同样增大。即是说, 如果在原点的点涡稍有偏移, 则该涡列将远离原点方向运动。

§ 1-5 薄翼的奇点解析法

一、薄翼

众所周知, 翼形可以由一定弯度的中线和具有一定厚度的对称翼组合而成。所谓薄翼是指满足如下条件的翼形:

- (1) 对称翼的半厚度 y_t 比较小, 即 $y_{t,max}/c$ 比较小 (c 表示弦长)。
- (2) 中线的弯度 y_c 小, 即 $y_{c,max}/c$ 小。
- (3) 气流攻角 α 小。

对于图 1-13 所示的薄翼, 任意位置 x 处的中线坐标 y_c 及半厚度 y_t 表示为:

$$y_c = \frac{1}{2}(y_u + y_l), \quad y_t = \frac{1}{2}(y_u - y_l) \quad (1-153)$$

由于气体流过翼形上下表面时, 它们的速度是不相同的, 因此可以把翼形上下表面的流动, 当作沿中线的涡层来看待。为此, 取图 1-14 所示的翼形中线来考虑。

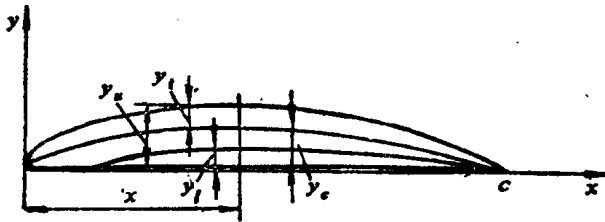


图1-13 薄翼

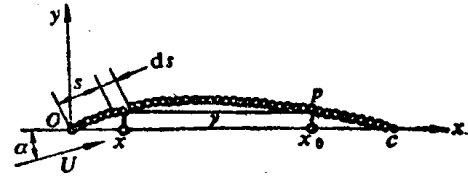


图1-14 中线上的涡层

如图示那样, 取沿弦长方向为 x 轴。这时如果强度 $\gamma(s)$ 的涡连续分布于中线上, 在中线上任意微元长度 ds 处的环量 $d\Gamma$ 为:

$$d\Gamma = \gamma ds = (V_u - V_l) ds$$

故可得:

$$\gamma = (V_u - V_l) \quad (1-154)$$

式中 V_u 和 V_l 分别表示 ds 处上下表面的速度。在后缘处按照库塔条件, 流动应连续光滑不存在不连续面, 所以对于薄翼而言, 中线即为一曲线。从 $V_u = V_l$ 可得后缘 ($x = c$) 处的库塔条件为:

$$\gamma = 0 \quad (1-155)$$

ds 处强度 γ 的涡在中线上任意点 P 的引起速度, 由式 (1-107) 可得:

$$dU_p = -\frac{\gamma}{2\pi r} ds \quad (1-156)$$

该速度垂直于 r 方向, 对于薄翼而言, 由于中线挠度小, 故可以认为, 该速度近似垂直于中线。当涡层强度 γ 为 x 的函数时, 则可以用弦线 ($x_0 - x$) 代替弧线 r 。这时将式 (1-

156) 从前缘 ($x = 0$) 到后缘 ($x = c$) 积分可得:

$$U_{pn} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma}{x_0 - x} dx \quad (1-157)$$

在这个涡场中, 如果有来流速度为 U , 攻角为 α 的均匀流动, 那么 U 垂直于中线的速度分量 U_n 可以表示为:

$$U_n = U \sin(\alpha - \theta) \quad (1-158)$$

这里 $\theta = \arctg(dy/dx)$ 表示中线的倾斜角。对于薄翼而言, 攻角 α , 倾斜角 θ 均很小, 故有

$$U_n = U \left(\alpha - \frac{dy}{dx} \right) \quad (1-159)$$

由于速度 $U_n = -U_{pn}$ 互相抵消, 故可得中线即为流线。根据式 (1-157) 和式 (1-159) 有:

$$U_{pn} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma}{x_0 - x} dx = U \left[\alpha - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} \right] \quad (1-160)$$

上式亦为中线上涡层 γ 分布方程式。对于薄翼而言, 只要按照上式对中线进行解析, 便可估计翼形的升力及无冲击流入条件等流动特性。下面分两种情况加以讨论。

1. 对称翼

在对称翼的情况下, 中线成为直线, 则有 $dy/dx = 0$ 。在后缘 $x = c$ 处应满足库塔条件式 (1-155), 故将 x 用倾斜角 θ 的函数关系表示有:

$$x = \frac{c}{2} (1 - \cos\theta) \quad (1-161)$$

把式 (1-161) 代入式 (1-160) 可得:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\pi) &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta &= U\alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-162)$$

它的解为:

$$\gamma = 2\alpha U \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = 2\alpha U \cotg \frac{\theta}{2} \quad (1-163)$$

将式 (1-163) 代入式 (1-162) 于是有:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{2\alpha U (1 + \cos\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta = U\alpha \quad (1-164)$$

根据涡层上下表面速度差的关系式 (1-145) 和 (1-146) 可得翼形上下表面的速度 V_u 和 V_l 分别为:

$$V_u = U + \frac{\gamma}{2}, \quad V_l = U - \frac{\gamma}{2} \quad (1-165)$$

对于前缘点 $\theta = 0$, 由式 (1-163) 知 $\gamma = \infty$, 故由上式可得, 前缘点的速度为 ∞ 。这是薄翼理论与实际流动的不同点。

当速度变化不大时, 由伯努利方程 (1-80) 有:

$$P = p + \frac{\rho}{2} U^2 - \frac{\rho}{2} (U + \Delta U)^2 \approx p - \rho U \Delta U \quad (1-166)$$

由式 (1-165) 及式 (1-166) 可得:

$$P_s = p - \rho U \frac{\gamma}{2}, \quad P_t = p + \rho U \frac{\gamma}{2} \quad (1-167)$$

将表面压差 $p_t - p_s$ 沿弦长 c 积分:

$$L = \int_0^c (p_t - p_s) dx = \int_0^c \rho U \gamma dx = 2\alpha \rho U^2 \int_0^\pi \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \frac{c}{2} \sin\theta d\theta$$

故可得升力为:

$$L = \pi \alpha \rho U^2 c \quad (1-168)$$

升力系数 c_L 可以表示为:

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 c} = 2\pi \alpha \quad (1-169)$$

在图 1-15 中示出了升力系数与攻角的关系。

从式 (1-169) 看出, 升力系数 c_L 与攻角 α 成线性关系。但是实际流体由于粘性效果, 一般当攻角 $\alpha > 15^\circ$ 时, 气流将从叶片表面分离, 这时升力会突然下降而产生如图 1-15 中虚线所示的失速现象。

2. 具有弯度的翼

对于有着弯度的薄翼, 由库塔条件式 (1-155) 和涡层 γ 分布方程式 (1-160), 用 θ 代替 x 则有:

$$\gamma(\pi) = 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta = U \left[\alpha - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\theta=\theta_0} \right] \quad (1-170)$$

考虑库塔条件 $\gamma(\pi) = 0$, 假定将分布涡 γ 用 θ 的级数来表示:

$$\gamma = 2U \left[A_0 \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right] \quad (1-171)$$

式中右边第一项表示没有弯度的解, 其它为傅里叶级数解。 A_0, A_1, \dots, A_n 表示待定系数。

把式 (1-171) 代入式 (1-170) 后可得:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sin n\theta \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta = \left[\alpha - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\theta=\theta_0} \right] \quad (1-172)$$

利用定积分关系:

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta = \pi \frac{\sin n\theta_0}{\sin\theta_0}$$

对式 (1-172) 第一项进行积分可得:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta = \frac{1}{\pi} A_0 \pi = A_0$$

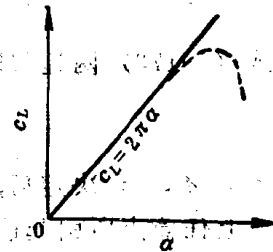


图1-15 对称翼的 c_L 与 α 的特性

利用三角函数关系: $\sin n\theta \sin \theta = \frac{1}{2} [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta]$ 代入式 (1-172) 第三项后进行积分可得:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_0$$

把以上积分结果代入式 (1-172), 便可得到薄翼中线上任意点的斜率 dy/dx 的级数表达式:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (1-173)$$

对于式 (1-173) 而言, 不论 θ_0 为何值 (即翼弦上任何位置) 它都成立, 故可以将 θ_0 的角标去掉而写成 θ 。

将式 (1-173) 的两边加以积分可得系数 A_0 为:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} d\theta \quad (1-174)$$

将式 (1-173) 两边乘以 $\cos n\theta$ 后积分可得系数 A_n 为:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos n\theta d\theta \quad (1-175)$$

当系数 A_0, A_n 决定后, 便可根据式 (1-171)、式 (1-173) 及式 (1-167), 求得分布涡 γ 对中线上任意点所引起速度和翼形表面压力分布。

将式 (1-173) 代入式 (1-160), 可得分布涡 γ 对任意点的引起速度 V_{in} 为:

$$V_{in} = U \left(-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \right) \quad (1-176)$$

把式 (1-171) 代入式 (1-167) 并将表面压差沿弦长积分, 可得表面升力 L 为:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^c \rho U \gamma dx = \int_0^\pi \rho U^2 c \left[A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right] \sin \theta d\theta \\ &= \pi c \rho U^2 \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \end{aligned} \quad (1-177)$$

故可得升力系数为:

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 c} = \pi (2A_0 + A_1) \quad (1-178)$$

把系数 A_0, A_n 的关系式 (1-174) 和式 (1-175) 代入上式, 式 (1-178) 又可表示为:

$$c_L = 2\pi \left[\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (\cos \theta - 1) d\theta \right] \quad (1-179)$$

当升力系数 $c_L = 0$ 时, 由上式则有:

$$\alpha = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (\cos \theta - 1) d\theta = -\alpha_L \quad (1-180)$$

这时升力系数与攻角的特性如图 1-16 所示。

如果 $A_0 = 0$ ，对于前缘点 ($\theta = 0$) 而言 $\gamma = 0$ ，这时翼的上下表面速度相等，气体沿中线无冲击流入。所以满足无冲击流入的条件为：

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy}{dx} d\theta = \alpha. \quad (1-181)$$

这里 α 称为无冲击流入攻角。

二、孤立薄翼的奇点解析法

我们把如图 1-13 所示的薄翼，置入速度为 V_∞ 、攻角为 α 的均匀流场内。为了分析这种薄翼绕流运动，为此在中线 and 对称翼弦上，分别设置有强度为 γ 的涡列和点源 q (如图 1-17)，由它们所引起的速度场来讨论这种薄翼流动。

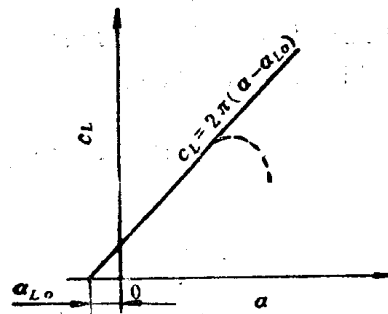


图1-16 具有弯度的翼升力与攻角特性

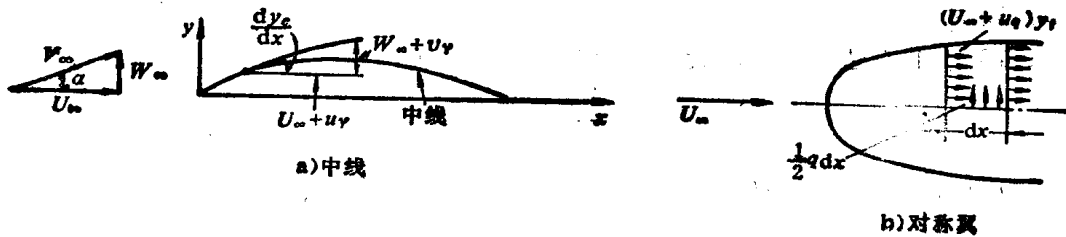


图1-17 流动条件

这里首先讨论中线上的流动。如图 1-17 a 所示，如果来流速度 V_∞ 沿 x 、 y 方向的分量分别为 U_∞ 和 W_∞ ，由于攻角 α 较小，故认为 U_∞ 远大于 W_∞ 。而由于涡列 γ 所引起的速度分别为 u_γ 和 v_γ 时，因为中线弯度小，所以可以认为 U_∞ 远大于 u_γ 和 v_γ 。当不考虑叶片厚度即不考虑点源分布时，流动应沿中线运动，故中线上任意点的斜率可表示为：

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{W_\infty + v_\gamma}{U_\infty + u_\gamma}$$

由于 $U_\infty \gg u_\gamma, v_\gamma$ ，略去微小量 u_γ ，则可得到沿中线的流动条件为：

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{W_\infty + v_\gamma}{U_\infty} \quad (1-182)$$

下面再讨论半厚度 y_i 的对称翼形在均匀来流速度 U_∞ 内的流动情况。如图 1-17 b 所示那样，如果 u_γ 表示点源 q 在 x 方向引起的速度，则在半厚度 y_i 内所涌出的流量为：

$$\frac{1}{2} q dx = \frac{d}{dx} [(U_\infty + u_\gamma) y_i] dx$$

忽略微小量 u , ($U_\infty \gg u$) 时, 由上式可得:

$$\frac{1}{2} q = \frac{dy_t}{dx} U_\infty \quad (1-183)$$

该式即为沿对称翼形的流动条件。

为了解析这种无旋流场中的薄翼绕流运动, 斯利希廷根 (Schlichting) 提出了将几个点涡 (涡列) 和点源分布于翼弦上, 并用如下的格劳尔特 (Glauert) 级数表示:

$$\gamma = 2U_\infty \left(A_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \quad (1-184)$$

$$q = 2U_\infty \left[B_0 \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - 2\sin\theta \right) \right] + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (1-185)$$

根据该涡列 γ 和点源 q 在翼弦上所引起的速度, 求取满足上述中线和对称翼流动条件的待定系数 A_n , B_n , 便可获得薄翼的流动特性。下面据此作进一步的讨论。

对于后缘来说, $\theta = \pi$, 由式 (1-184) 知 $\gamma = 0$, 故式 (1-184) 满足库塔条件。

对于对称翼形而言, 自点源 q 涌出的流体不应流出翼形外部, 故式 (1-185) 应该满足:

$$\int_0^c q dx = \frac{c}{2} \int_0^\pi q \sin\theta d\theta = 0 \quad (1-186)$$

这亦是翼形封闭的必要条件。

把式 (1-185) 的右边一、二项代入式 (1-183), 则有:

$$\frac{dy_t}{dx} = B_0 \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - 2\sin\theta \right)$$

利用式 (1-161) 和三角函数关系 $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = (1 + \cos\theta)/\sin\theta$, 对上式积分可得半厚度 y_t 为:

$$y_t = \frac{1}{2} c B_0 \sin\theta (1 + \cos\theta) = 2c B_0 \left(1 - \frac{x}{c} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x}{c}} \quad (1-187)$$

如果最大翼厚在 $x/c = 1/4$ 处的话, 式 (1-187) 则可近似表示为厚度是 $(3\sqrt{3}/4) \times c B_0$ 的茹可夫斯基翼形。也就是说, 式 (1-187) 所表示的翼形, 是把茹可夫斯基翼用傅里叶级数加以修正后所得到的翼形。

如果对式 (1-185) 加以改造, 将它写成如下的一般形式:

$$q = 2U_\infty \left[B_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + B_0' \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right] \quad (1-188)$$

然后把上式代入对称翼的流动条件式 (1-183) 有:

$$\frac{dy_t}{dx} = B_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + B_0' \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (1-189)$$

因为 $\int_0^c dy_t = \int_0^c \frac{dy_t}{dx} dx = 0$, 对上式进行积分可得:

$$B_0 + B_0' + \frac{1}{2} B_1 = 0$$

故当取式 (1-189) 的第一、二项时, 式(1-189) 变成:

$$c \frac{dy_i}{dx} = B_0 \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)$$

对上式积分, 最后可得半厚度 y_i 为:

$$y_i = c B_0 \sin \theta = 2c B_0 \sqrt{\frac{x}{c} \left(1 - \frac{x}{c} \right)} \quad (1-190)$$

该式表示厚度为 $2c B_0$ 的椭圆。

由于中线弯度和翼厚较小, 分布于翼弦上的涡列 γ 和点源 q , 在弦上沿 x 、 y 方向所引起的速度分别为:

$$u_\gamma = \pm \frac{1}{2} \gamma, \quad v_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x')}{x-x'} dx' \quad (1-191)$$

$$v_q = \pm \frac{1}{2} q, \quad u_q = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{q(x')}{x-x'} dx' \quad (1-192)$$

如果将式 (1-191)、式 (1-192) 中的 x 作为常数, 把式 (1-184)、式 (1-185) 代入上两式, 沿翼弦坐标 x' 从前缘到后缘进行积分有:

$$\left. \begin{aligned} u_\gamma &= \pm U_\infty \left(A_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \\ v_\gamma &= U_\infty \left(-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-193)$$

$$\left. \begin{aligned} u_q &= U_\infty \left[B_0 (1 + 2\cos\theta) - \sum_{n=2}^{\infty} B_n \cos n\theta \right] \\ v_q &= \pm \left[B_0 \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - 2\sin\theta \right) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-194)$$

将式 (1-193) 代入中线流入条件式 (1-182) 可得:

$$-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta = -k + y_i' \quad (1-195)$$

这里 $k = \operatorname{tg} \alpha = W_\infty / U_\infty$, α 表示攻角。

同样把式 (1-185) 代入对称翼流动条件式 (1-183) 可得:

$$B_0 \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - 2\sin\theta \right) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\theta = y_i' \quad (1-196)$$

对于翼弦上的 n 个点, 根据式 (1-195)、式(1-196)可以得到 $2n$ 个方程式, 便可确定如下系数值:

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}; B_0, B_2, B_3, \dots, B_n$$

要指出的是, 翼弦上 n 个点的选取方法与解的精度有关。这里我们采用斯利希廷根的方法, 即按如下关系:

$$\frac{x_i^{(n)}}{c} = \frac{4\nu - 1}{4n} \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (1-197)$$

加以选取, 式中 ν 表示 n 个点中的第 ν 点。斯利希廷根的三点法, 就是在弦上选取三个点满足上述流动条件进行计算, 可以得到满意的精度。当 $n = 3$ 时这三点的位置是 $3c/12, 7c/12, 11c/12$, 其中 c 为弦长。

从式 (1-196) 看出, 系数 B_n 与攻角 α 无关, 即 B_n 与 k 无关。而从式 (1-195) 可知, A_n 与 k 值有关。当 A_n 用下式表示时:

$$A_n = A_{n0} + kA_{n\beta} \quad (1-198)$$

则式 (1-195) 变成:

$$\left(-A_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \cos n\theta \right) - y'_0 = -k \left(1 - A_{0\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\beta} \cos n\theta \right) \quad (1-199)$$

当 k 值变化时, 为了保持式 (1-199) 成立, 则该式两边应均为零, 故有:

$$-A_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \cos n\theta = y'_0 \quad (1-200)$$

$$-A_{0\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\beta} \cos n\theta = -1 \quad (1-201)$$

这表明 $A_{n0}, A_{n\beta}$ 与 k 无关, 可由上面两式分别加以确定。同时由式 (1-201) 有:

$$A_{0\beta} = 1, A_{n\beta} = 0 \quad (1-202)$$

根据式 (1-202) 和式 (1-198) 可得:

$$A_0 = A_{00} + k, A_n = A_{n0} \quad (n = 1, 2, \dots, n) \quad (1-203)$$

这样由上式便可求得任意攻角 α 下的系数 A_n , 而从式 (1-196) 可以求得与攻角 α 无关的系数 B_n , 于是根据式 (1-184)、式 (1-185), 最后能够确定涡列 γ 和点源 q 的分布。据此可以按以下方法, 计算求得沿翼面的速度分布等特性。

首先叶片环量 Γ 由下式计算:

$$\Gamma = \int_0^c \gamma dx = c\pi U_{\infty} \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \quad (1-204)$$

升力和升力系数分别为:

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma = \frac{c}{2} \rho V_{\infty}^2 \times 2\pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \cos \alpha \quad (1-205)$$

$$c_L = \frac{L}{\frac{c}{2} \rho V_{\infty}^2} = 2\pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \cos \alpha$$

$$= 2\pi \left[\left(A_{00} + \frac{1}{2} A_{10} \right) \cos \alpha + \sin \alpha \right] \quad (1-206)$$

$$\left[\frac{dc_L}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = 2\pi \quad (1-207)$$

当 $L = 0$ 时, 可得无升力攻角为:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \left(A_{00} + \frac{1}{2} A_{10} \right) \quad (1-208)$$

当 $A_{10} = 0$ 时, 可得无冲击流入的攻角为:

$$\operatorname{tg} \alpha = -A_{00} \quad (1-209)$$

最后从式 (1-193) 和式 (1-194) 可得翼弦上计算所得的叶面速度 U_s 为:

$$\frac{U_s}{U_\infty} = 1 + \frac{u_x}{U_\infty} + \frac{u_y}{U_\infty} = 1 + \left[B_0(1 + 2\cos\theta) - \sum_{n=2}^{\infty} B_n \cos n\theta \right] \pm \left[(A_{00} + k) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right] \quad (1-210)$$

前已叙及, 薄翼理论的不足之处是在前缘点的速度为无穷大。为此, 里根尔斯(Riegels) 采用下式进行修正, 修正后的叶面速度 V_s 为:

$$V_s = \frac{U_s}{\sqrt{1 + y^2}} \quad (1-211)$$

斯利希廷根的计算例如图 1-18 所示。

三、薄翼叶栅的奇点解析法

如图 1-19 所示, 在位置 $z = ivse^{-i\lambda}$ ($v = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty$) 处, 分布着强度 $G = Q + i\Gamma$ 的奇点 (涡与点源) 列, 第 v 个奇点对任意点 z 所引起的速度为:

$$dW = u - iv = \frac{G}{2\pi} \frac{1}{z - ivse^{-i\lambda}} \quad (1-212)$$

于是全部奇点对该点所引起的速度可写成:

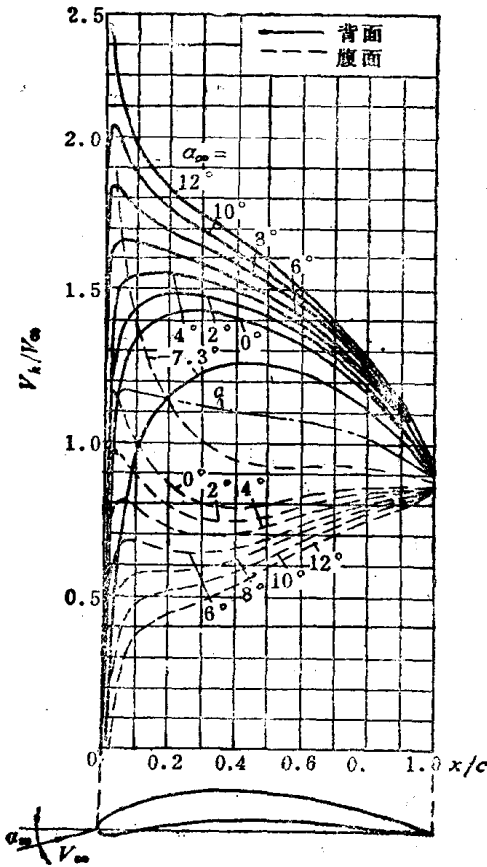


图1-18 叶面速度分布

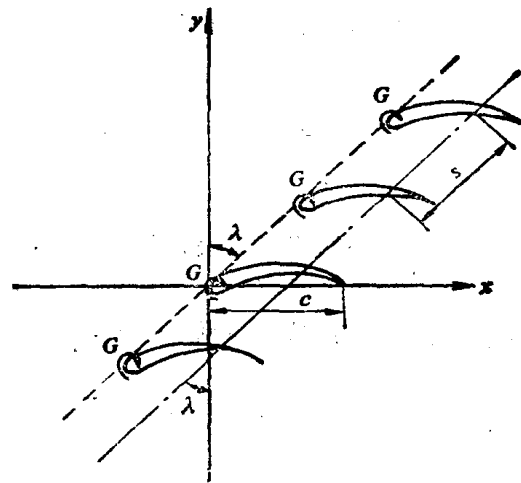


图1-19 薄翼叶栅的奇点分布

$$W = \frac{G}{2s} e^{i\lambda} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi z}{s} e^{i\lambda} - i\nu\pi} = \frac{G}{2s} e^{i\lambda} \operatorname{cth} \left(\frac{\pi z}{s} e^{i\lambda} - i\nu\pi \right) \quad (1-213)$$

如同孤立薄翼一样，对于薄翼叶栅而言，把所有奇点均布于翼弦上，并用分布函数 $g(x')$ 表示奇点的强度：

$$g(x') = q(x') + i\gamma(x') \quad (1-214)$$

这样由式 (1-213) 可得所有奇点对任意点 z 的引起速度为：

$$W = \frac{e^{i\lambda}}{2s} \int_{x'=0}^c g(x') \operatorname{cth} \left[\frac{\pi e^{i\lambda}}{s} (x - x') \right] dx' \quad (1-215)$$

翼形封闭的条件为：

$$Q \int_{-c/2}^{c/2} g(x') dx' = 0 \quad (1-216)$$

这里环量 Γ 为：

$$\Gamma = \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x') dx' \quad (1-217)$$

流动条件与孤立薄翼完全一样，但对于叶栅来说，涡列 γ 和点源 q 在 x 方向的引起速度 u_γ, u_q 不能忽视，即有：

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{W_\infty + u_\gamma}{U_\infty + u_q}, \quad \frac{1}{2} q = \frac{dy_t}{dx} (U_\infty + u_q) \quad (1-218)$$

某叶片面上的引起速度 W ，可用该翼所引起的速度 W_E 和别的翼对它所引起的速度 W_c 来表示：

$$W = W_E + W_c \quad (1-219)$$

式中 W_E 可以沿用式 (1-191)、式 (1-192)，只要加上角标 E 即可。 $W_c = u_c - i v_c$ 根据式 (1-215) 可以表示为：

$$W_c = \frac{c}{2s} \int_{x'=0}^c g(x') \left[e^{i\lambda} \operatorname{cth} \left(\pi \frac{x - x'}{s/c} e^{i\lambda} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{s/c}{x - x'} \right] dx' \quad (1-220)$$

式中，方括号内的第一项表示所有翼的影响，并用 A 来表示，第二项表示孤立翼的影响，用 B 来表示。对于 A 而言，当 $x = x'$ 时 A 虽不为正则函数，但 $A - B = F$ 仍为正则函数。 F 表示其它翼的影响，故将 F 称为影响系数。它的实部和虚部分别为：

$$\left. \begin{aligned} R(F) &= \frac{\cos \lambda \operatorname{sh} \left(2\pi \frac{x - x'}{s} \cos \lambda \right) + \sin \lambda \sin \left(2\pi \frac{x - x'}{s} \sin \lambda \right)}{\operatorname{ch} \left(2\pi \frac{x - x'}{s} \cos \lambda \right) - \cos \left(2\pi \frac{x - x'}{s} \sin \lambda \right)} \\ J(F) &= \frac{\sin \lambda \operatorname{sh} \left(2\pi \frac{x - x'}{s} \cos \lambda \right) - \cos \lambda \sin \left(2\pi \frac{x - x'}{s} \sin \lambda \right)}{\operatorname{ch} \left(2\pi \frac{x - x'}{s} \cos \lambda \right) - \cos \left(2\pi \frac{x - x'}{s} \sin \lambda \right)} \end{aligned} \right\} \quad (1-221)$$

利用式 (1-219) 的关系，可得涡列 γ 和点源 q 所引起的速度为：

$$\left. \begin{aligned} u_\gamma &= u_{\gamma E} + u_{\gamma G}, & v_\gamma &= v_{\gamma E} + v_{\gamma G} \\ v_q &= v_{qE} + v_{qG}, & u_q &= u_{qE} + u_{qG} \end{aligned} \right\} \quad (1-222)$$

如同分析孤立薄翼一样，当 γ, q 用式 (1-184), (1-185) 的级数形式表示的话，由式(1-220)有：

$$u_{\gamma G} = \frac{c}{2s} \int_{x'=0}^c \gamma(x') J(F) dx' = U_\infty (A_0 g_{\gamma 0} + A_1 g_{\gamma 1} + A_2 g_{\gamma 2} + \dots) \quad (1-223)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} g_{\gamma 0} &= -\frac{c}{s} \int_{x'=0}^c \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} J(F) dx' \\ g_{\gamma n} &= -\frac{c}{s} \int_{x'=0}^c \sin n\theta J(F) dx' \end{aligned} \right\} \quad (1-224)$$

$$v_{\gamma G} = -\frac{c}{2s} \int_{x'=0}^c \gamma(x') R(F) dx' = U_\infty (A_0 f_{\gamma 0} + A_1 f_{\gamma 1} + A_2 f_{\gamma 2} + \dots) \quad (1-225)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} f_{\gamma 0} &= -\frac{c}{s} \int_{x'=0}^c \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} R(F) dx' \\ f_{\gamma n} &= -\frac{c}{s} \int_{x'=0}^c \sin n\theta R(F) dx' \end{aligned} \right\} \quad (1-226)$$

$$u_{qG} = \frac{c}{2s} \int_{x'=0}^c q(x') R(F) dx' = U_\infty (B_0 g_{q 0} + B_2 g_{q 2} + B_3 g_{q 3} + \dots) \quad (1-227)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} g_{q 0} &= \frac{c}{s} \int_{x'=0}^c \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - 2\sin \theta \right) R(F) dx' \\ g_{q n} &= \frac{c}{s} \int_{x'=0}^c \sin n\theta R(F) dx' \end{aligned} \right\} \quad (1-228)$$

$$v_{qG} = -\frac{c}{2s} \int_{x'=0}^c q(x') J(F) dx' = U_\infty (B_0 f_{q 0} + B_2 f_{q 2} + B_3 f_{q 3} + \dots) \quad (1-229)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} f_{q 0} &= -\frac{c}{s} \int_{x'=0}^c \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - 2\sin \theta \right) J(F) dx' \\ f_{q n} &= -\frac{c}{s} \int_{x'=0}^c \sin n\theta J(F) dx' \end{aligned} \right\} \quad (1-230)$$

式 (1-222) 中其余各项 $u_{\gamma E}, v_{\gamma E}, u_{qE}, v_{qE}$ 可由式 (1-193) 和式 (1-194) 求得系数 A_n, B_n 用以下式子表示：

$$A_n = A_{n0} + k A_{n\beta}, \quad B_n = B_{n0} + k B_{n\beta} \quad (1-231)$$

这里 $k = \operatorname{tg} \alpha = W_\infty / U_\infty$ 。将式(1-222)~式(1-230)代入流动条件式 (1-218)，可以得到含有 k 的项和不含 k 的项，整理后可得：

$$\sum_{n=0}^{n-1} A_{n0} P_n = \gamma'_c - \sum_{n=0,2}^n B_{n0} R_n, \quad \sum_{n=0}^{n-1} A_{n\beta} P_n = -1 - \sum_{n=0,2}^n B_{n\beta} R_n \quad (1-232)$$

$$\sum_{n=0,2}^n B_{n0}Q_n = y_i' + \sum_{n=0}^{n-1} A_{n0}S_n, \quad \sum_{n=0,2}^n B_{n\beta}Q_n = \sum_{n=0}^{n-1} A_{n\beta}S_n \quad (1-233)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= q_n - y_i' g_{qn}^*, & P_n &= f_{\gamma n}^* - y_i' g_{\gamma n} \\ R_n &= f_{qn} - y_i' g_{qn}^*, & S_n &= y_i' g_{\gamma n} \end{aligned} \right\} \quad (1-234)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - 2\sin\theta, & q_n &= \sin n\theta \\ g_{q0}^* &= g_{q0} + 2\cos\theta + 1, & g_{qn}^* &= g_{qn} - \cos n\theta \\ f_{\gamma 0}^* &= f_{\gamma 0} - 1, & f_{\gamma n}^* &= f_{\gamma n} + \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-235)$$

对于翼弦上 n 个点, 联立式 (1-232) 和式 (1-233), 便可决定以下 $2n$ 个系数值:

$$\begin{aligned} A_{n0}, A_{n\beta} & \quad (n = 0, 1, \dots, n-1) \\ B_{n0}, B_{n\beta} & \quad (n = 0, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

由以上可得翼弦上速度 U_{cs} 为:

$$\begin{aligned} \frac{U_{cs}}{U_\infty} = \frac{u_r + u_q}{U_\infty} &= 1 + \sum_{n=0,2}^n B_{n0}g_{qn}^* + k \sum_{n=0,2}^n B_{n\beta}g_{qn}^* \\ &+ \sum_{n=0}^{n-1} A_{n0}g_{\gamma n} + k \sum_{n=0}^{n-1} A_{n\beta}g_{\gamma n} \pm \sum_{n=0}^{n-1} A_{n0}\gamma_n + k \sum_{n=0}^{n-1} A_{n\beta}\gamma_n \end{aligned} \quad (1-236)$$

式中 $\gamma_0 = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$, $\gamma_n = \sin n\theta$.

同样前缘点的速度采用里根尔斯方法加以修正, 最后可得叶面的速度 V_{ck} 的分布为:

$$V_{ck} = \frac{U_{cs}}{\sqrt{1+y_i'}} \quad (1-237)$$

§ 1-6 映象解析法

一、孤立翼形的保角映象解析法

对于非茹可夫斯基翼的任意翼形, 为了能够把翼形变为圆的映象, 必须对茹可夫斯基映象函数式 (1-116) 加以修正, 即变成:

$$\zeta = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots$$

但是当翼的弯度和厚度不同时, 映象圆的中心及位置将发生变化。为了便于确定圆的大小和圆心位置, 把上述映象函数变形为:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= c_{-1}z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \\ c_n &= A_n + iB_n \end{aligned} \right\} \quad (1-238)$$

式中 A_n, B_n 为实数。

将 ζ 面上弦长为 2 的任意翼形 (翼弦位于 ζ 轴上且中心在原点), 在 z 面上映象为以原点为中心的 unit 圆, 且后缘点在 $x = 1, y = 0$ 的位置上。将 $z = e^{i\theta}$ 代入式 (1-238) 并写成实部和虚部的形式有:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A_{-1} \cos \theta - B_{-1} \sin \theta + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ \eta &= B_{-1} \cos \theta + A_{-1} \sin \theta + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta) \end{aligned} \right\} \quad (1-239)$$

因为翼形具有

$$\eta = f(\xi) \quad (1-240)$$

的关系, 式 (1-239) 应满足上式。为此要求其系数值的大小, 这里采用逐步近似的方法求取。

作为第一次近似取:

$$\xi = \cos \theta \quad (1-241)$$

将式 (1-241) 代入式 (1-240) 并按傅里叶级数展开有:

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad (1-242)$$

将式 (1-239) 与式 (1-242) 比较有:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= a_0 & A_{-1} + A_1 &= b_1 \\ B_{-1} + B_1 &= a_1 & A_2 &= -b_2 \\ B_2 &= a_2 & A_3 &= -b_3 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_n &= a_n & A_n &= -b_n \end{aligned} \right\} \quad (1-243)$$

由于条件不足, 为了求得系数 A_0, A_{-1}, B_{-1} , 取式 (1-241) 和式 (1-242) 的共轭傅里叶级数 ξ^*, η^* 有:

$$\left. \begin{aligned} \xi^* &= -\sin \theta \\ \eta^* &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-244)$$

同样从式 (1-239) 可得:

$$\left. \begin{aligned} \xi^* &= -B_{-1} \cos \theta - A_{-1} \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta) \\ \eta^* &= A_{-1} \cos \theta - B_{-1} \sin \theta - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \end{aligned} \right\} \quad (1-245)$$

从式 (1-241)、式 (1-242) 及式 (1-244) 则有:

$$\left. \begin{aligned} \xi + \eta^* &= \cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) \\ \eta - \xi^* &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-246)$$

同理，从式 (1-239) 和式 (1-245) 可得：

$$\left. \begin{aligned} \xi + \eta^* &= 2A_{-1} \cos\theta - 2B_{-1} \sin\theta + A_0 \\ \eta - \xi^* &= 2B_{-1} \cos\theta + 2A_{-1} \sin\theta + B_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-247)$$

在 $\theta = 0 \sim 2\pi$ 的范围内对式 (1-246) 和式 (1-247) 积分：

$$A_0 = 0, \quad B_0 = a_0 \quad (1-248)$$

然后对式 (1-246) 和式 (1-247) 微分，当 $\theta = 0$ 时，则有：

$$2B_{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n, \quad 2A_{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \quad (1-249)$$

由式 (1-243)、式 (1-248) 及式 (1-249) 将所有系数值确定后，把它们代入式 (1-239) 中的第一式，作为第二次近似值，按上述步骤进行计算，直至满足所需精度为止。

用以上方法求得映象函数后，可以根据下面方法计算翼的流体力学特性。

利用式 (1-238) 的关系，如果有：

$$\left. \begin{aligned} c_{-1} &= A_{-1} + iB_{-1} = Ke^{ik} \\ V_0 &= V_{0z}/K, \quad \alpha = \alpha_z + k \end{aligned} \right\} \quad (1-250)$$

以及

这时当 $V_{0z}e^{-i\alpha_z}$ 的均匀流场流过 z 面的单位圆的话，于是可得 z 面的复势 W 为：

$$W = V_{0z}e^{-i\alpha_z z} + \frac{V_{0z}e^{i\alpha_z}}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (1-251)$$

由库塔条件： $(dW/dz)_{z=1} = 0$ ，故从式 (1-251) 则可得环量 Γ 为：

$$\Gamma = 4\pi V_{0z} \sin \alpha_z \quad (1-252)$$

由式 (1-251) 可得 z 面的复速度：

$$\frac{dW}{dz} = V_{0z}e^{-i\alpha_z} - \frac{V_{0z}}{z^2} e^{i\alpha_z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (1-253)$$

根据式 (1-113) 并利用式 (1-238) 第一式，可得 ζ 面上的复速度为：

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \left/ \left(c_{-1} - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} - \dots \right) \right. \quad (1-254)$$

当 $z = \infty$ 时，把式 (1-253) 和式 (1-250) 代入上式，则式 (1-254) 变成：

$$\left(\frac{dW}{d\zeta} \right)_{z=\infty} = \frac{V_{0z}e^{-i\alpha_z}}{c_{-1}} = V_0 e^{-i\alpha} \quad (1-255)$$

对于实际问题， ζ 面上的速度 V_0 和攻角一般事先已给出，于是从式 (1-253)、式 (1-254) 可以求得 ζ 面的速度。如果给出了 $z = e^{i\theta}$ ，则可求得叶面上的速度分布。

根据式 (1-252)，(1-250) 可得环量 Γ 为：

$$\Gamma = 4\pi V_0 K \sin(\alpha - k) \quad (1-256)$$

由库塔-茹可夫斯基定理，可以求得升力大小为：

$$L = \rho V_0 \Gamma = 4\pi \rho V_0^2 (A_{-1} \sin \alpha - B_{-1} \cos \alpha) \quad (1-257)$$

二、平板叶栅的映象解法

这里以图 1-20 所示的弦长 s ，安装角为 β_A 的平板叶栅来考虑。

在物理面 z 内研究这种叶栅的流动是比较困难的。但我们知道， z 面内沿平板流动的复势，可以用 ζ 面内的圆柱绕流复势代替。为此，我们先在映象平面 ζ 内将平板叶栅变成圆柱绕流运动，再利用映象函数的关系解决平板叶栅的绕流问题。

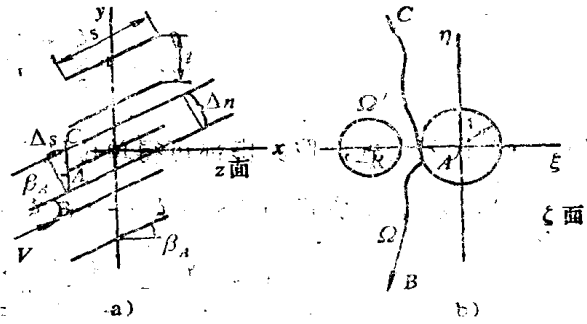


图 1-20 平板叶栅的映象

如图示那样，如果 z 面内与平板叶栅平行的来流速度为 V ，它的复势 W 为：

$$W = V z e^{-i\beta_A} \quad (1-258)$$

故有共轭复速度为：

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = V e^{-i\beta_A} \quad (1-259)$$

从图 1-20 看出， z 面上一个栅距 l 间的流动，在 ζ 面内的映象为图示单位圆以外的领域。也就是说， z 面上通过前缘 A 的 BC 线，在 ζ 面上为通过单位圆上的映象点 A 且如 Ω 线那样指向无穷远处。因为 B 、 C 为对应点，故 z 面和 ζ 面的势流相等，即有：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\psi = \psi_c - \psi_B = V l \cos\beta_A &= \int_{\Omega} d\psi \\ \Delta\varphi = \varphi_c - \varphi_B = V l \sin\beta_A &= \int_{\Omega} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-260)$$

ζ 面上 $\xi = R$ ， $\eta = 0$ 的映象点对应于 z 面上无限远的上游流动时，如果取该点为奇点，其强度为 $Q = q + i\Gamma$ 。当 ζ 面上沿线 Ω 的积分用以奇点 $\xi = -R$ 为中心的 Ω' 圆的积分代替时，由式 (1-96) 和式 (1-100) 则有：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dW &= \int_{\Omega'} d\varphi + i \int_{\Omega'} d\psi \\ &= \int_{\Omega'} dW = \frac{Q}{2\pi} i [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= iq + \Gamma \end{aligned} \quad (1-261)$$

把式 (1-260) 与式 (1-261) 比较可得：

$$\begin{aligned} q = \Delta\psi = V l \cos\beta_A, \quad \Gamma = -\Delta\varphi \\ = -V l \sin\beta_A = -\Gamma' \end{aligned} \quad (1-262)$$

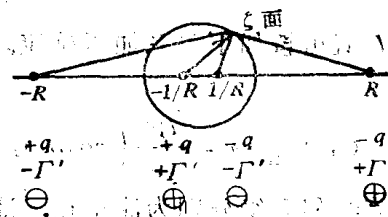


图 1-21 单位圆柱绕流

$\xi = -R$ 奇点的点源和涡 (环量) 由式 (1-262) 决定后， $\xi = +R$ 的奇点强度亦可确定。为了实现单位圆柱绕流运动，根据镜像原理，在圆内 $\xi = \pm(1/R)$ 处分别配置点源 (汇) 和涡形成的流场，如图 1-21 所示。

因源（汇）所引起的复势 W_s 为：

$$W_s = \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{\zeta + R}{\zeta - R} + \ln \frac{\zeta + \frac{1}{R}}{\zeta - \frac{1}{R}} \right) \quad (1-263)$$

将 $\zeta = e^{i\theta}$ 代入上式，取其虚部可得单位圆上的流函数 $(\psi_s)_{\zeta=e^{i\theta}} = (-\pi)q/2\pi$ 。圆周上 $(\psi_s)_{\zeta=e^{i\theta}} = 0$ ，利用关系式 $\ln(R - \zeta) - \ln(\zeta - R) = i\pi$ ，则有：

$$i\pi \frac{q}{2\pi} = \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{R - \zeta}{\zeta - R} \right)$$

将上式与式 (1-263) 相加，其复势不变，故可得：

$$W_s = \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{\zeta + R}{R - \zeta} + \ln \frac{\zeta + \frac{1}{R}}{\zeta - \frac{1}{R}} \right) \quad (1-264)$$

同样因点涡所引起的复势可以写成如下形式：

$$W_r = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(-\ln \frac{\zeta + R}{R - \zeta} + \ln \frac{\zeta + \frac{1}{R}}{\zeta - \frac{1}{R}} \right) \quad (1-265)$$

于是从式 (1-264)、式 (1-265) 可得：

$$W = W_s + W_r = \frac{iV}{2\pi} \left(e^{-i\beta} \ln \frac{\zeta + R}{R - \zeta} + e^{-i\beta} \ln \frac{\zeta + \frac{1}{R}}{\zeta - \frac{1}{R}} \right) \quad (1-266)$$

因为式 (1-258) 与式 (1-266) 为对应流动故相等。这时可求得映象函数为：

$$z = \frac{t}{2\pi} \left(\ln \frac{\zeta + R}{R - \zeta} + e^{2i\beta} \ln \frac{\zeta + \frac{1}{R}}{\zeta - \frac{1}{R}} \right) \quad (1-267)$$

这里 R 值可按如下关系加以确定。首先将 $\zeta = e^{i\theta}$ 代入式 (1-266)，则可得 $\psi = 0$ ，故有：

$$(\varphi)_{\zeta=e^{i\theta}} = \frac{iV}{2\pi} \left(\cos\beta \ln \frac{R^2 + 2R\cos\theta + 1}{R^2 - 2R\cos\theta + 1} + 2\sin\beta \operatorname{arctg} \frac{2R\sin\theta}{R^2 - 1} \right) \quad (1-268)$$

叶片前缘和后缘分别为滞止点，滞止点上 $(d\varphi/d\theta)_{\zeta=e^{i\theta}} = 0$ ，由式 (1-268) 可得前、后缘滞止点为：

$$\theta_{s1} = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg}\beta \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} \right), \quad \theta_{s2} = \theta_{s1} + \pi \quad (1-269)$$

利用关系 $(\varphi)_{\zeta=e^{i\theta_{s1}}} - (\varphi)_{\zeta=e^{i\theta_{s2}}} = Vs$ ，从式 (1-268) 可得：

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{\pi} \left[\cos\beta \ln \frac{R^2 + 2R\cos\theta_{s1} + 1}{R^2 - 2R\cos\theta_{s1} + 1} + 2\sin\beta \operatorname{arctg} \left(\frac{2R\sin\theta_{s1}}{R^2 - 1} \right) \right] \quad (1-270)$$

当节弦比 t/s ，安装角 β_A 已知时，则可从式 (1-269)、式 (1-270) 决定 θ_{a1} 、 θ_{a2} 以及 R 值。图 1-22 示出了它们之间的关系。

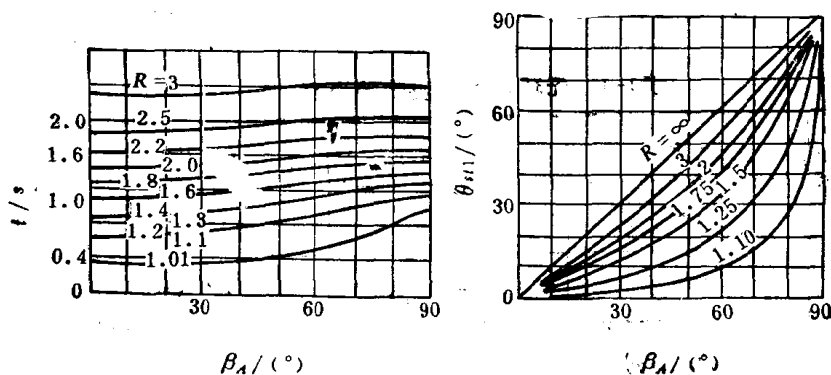


图1-22 R 和 θ_{a1} 的关系

沿平板叶栅的流动，一般有如图 1-23 所示的三种情况。

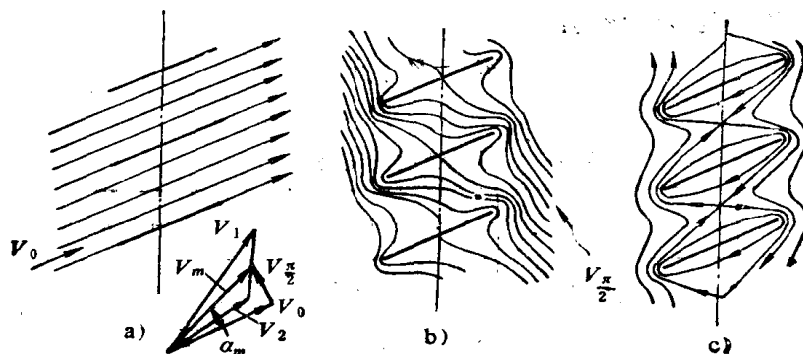


图1-23 平板叶栅流动

1. 如图 1-23 a 所示的无环量平行流动

对于这种情况，前已求出，其复势可由式 (1-266) 得到：

$$W_0 = \frac{V_0 t}{2\pi} \left(e^{-i\beta_A} \ln \frac{R + \zeta}{R - \zeta} + e^{i\beta_A} \ln \frac{\zeta + \frac{1}{R}}{\zeta - \frac{1}{R}} \right) \quad (1-271)$$

2. 如图 1-23 b 所示的无环量垂直流动

这时对应于 R 的无限远上游有：

$$\left. \begin{aligned} q = \Delta\varphi = V \frac{\pi}{2} t \cos\beta_A \\ \Gamma = -\Gamma' = -\Delta\psi = -V \frac{\pi}{2} t \sin\beta_A \end{aligned} \right\} \quad (1-272)$$

为了使 ζ 面上的单位圆成为流线，按表 1-1 设置奇点，这时可得其复势为

$$W_{\frac{x}{2}} = V_{\frac{x}{2}} \frac{t}{2\pi} \left(-ie^{-i\beta_A} \ln \frac{R+\zeta}{R-\zeta} + ie^{i\beta_A} \ln \frac{\zeta + \frac{1}{R}}{\zeta - \frac{1}{R}} \right) \quad (1-273)$$

表1-1 无环量垂直流动的奇点

$\zeta =$	$-R$	$-1/R$	$+1/R$	R
点 源	$-q$	$-q$	$+q$	$+q$
环 量	Γ'	$-\Gamma'$	Γ'	$-\Gamma'$

3. 如图 1-23 c 所示的环量流动

如果按照表 1-2 那样布置奇点, 这时可得环量流动的复势为:

$$W_{\Gamma} = \frac{i\Gamma}{4\pi} \ln \left(\frac{R+\zeta}{\zeta + \frac{1}{R}} \right) \left(\frac{R-\zeta}{\zeta - \frac{1}{R}} \right) \quad (1-274)$$

最后可得合成流动的复势 W 为:

$$W = W_0 + W_{\frac{x}{2}} + W_{\Gamma} \quad (1-275)$$

表1-2 环量流动的奇点

$\zeta =$	$-R$	$-1/R$	$+1/R$	R
环量	$-\Gamma/2$	$\Gamma/2$	$\Gamma/2$	$-\Gamma/2$

表 1-2 中的环量 Γ 可以这样确定: 从图 1-23 中的速度三角形看出, 当平均速度 V_{∞} 及平均攻角 α_{∞} 已知时, 则可确定 V_0 和 $V_{\frac{x}{2}}$ 。单位圆上 $\theta = \theta_{st_2}$ (对应于后缘点) 的速度 $v_0 = 0$, 由库塔条件可以确定平板叶栅的环量值, 它等于:

$$\Gamma = V_{\infty} \sin \alpha_{\infty} \frac{4tR}{R^2 + 1} \frac{\cos \theta_{st_1}}{\cos \beta_A} \quad (1-276)$$

于是可得平板叶栅升力和升力系数分别为:

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma = \rho V_{\infty}^2 \sin \alpha_{\infty} \frac{4tR}{R^2 + 1} \frac{\cos \theta_{st_1}}{\cos \beta_A} \quad (1-277)$$

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 s} = \sin \alpha_{\infty} \frac{t}{s} \frac{8R}{R^2 + 1} \frac{\cos \theta_{st_1}}{\cos \beta_A} \quad (1-278)$$

速度分布为:

$$u - iv = \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)_{\zeta = e^{i\theta}} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta = e^{i\theta}} \quad (1-279)$$

如果孤立平板的升力系数为 c_{L0} , 由孤立平板的环量值可以求得 c_{L0} 为:

$$c_{L0} = \frac{\rho V_{\infty} \Gamma_0}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 s} = \frac{\rho V_{\infty} \pi s V_{\infty} \sin \alpha_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 s} = 2\pi \sin \alpha_{\infty} \quad (1-280)$$

式中 $\Gamma_0 = \pi s V_{\infty} \sin \alpha_{\infty}$ 表示孤立平板的环量值。

通常将 c_L/c_{L0} 的比称为干涉系数，平板叶栅的干涉系数 λ 可以表示为：

$$\lambda = \frac{c_L}{c_{L0}} = \frac{t}{s} \frac{4R}{\pi(R^2+1)} \frac{\cos \theta_{st1}}{\cos \beta_A} \quad (1-281)$$

在图 1-24 中示出了平板叶栅 λ 值与节弦比 t/s 的关系。

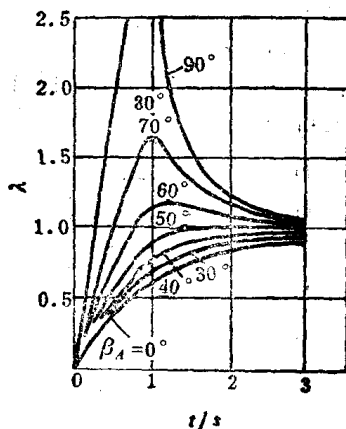


图1-24 平板叶栅的干涉系数

第二章 透平机械与内部流动

§ 2-1 透平机械与能量转换

透平机械是以回转着的叶栅与通过其间的流体进行能量转换的流体机械。它包括通风机、压缩机、泵、水轮机、蒸汽和燃气轮机等。

不同的透平机械，虽然分别有着某些特殊的现象如气蚀、喘振、凝缩等，但是从能量转换的观点来看，透平机械内的流体与力学能之间的这种能量转换关系，则都是一种连续的功能转换与传递过程。如图 2-1 所示，加给透平机械的功（机械动力）可以转变为流体的能量，以提高流体的能级（如压缩机）；反之利用流体的能量，亦可使其转变为外部机械功（如蒸汽或燃气轮机）。但是在其转换过程中，必然伴随着以热量形式出现的损失。

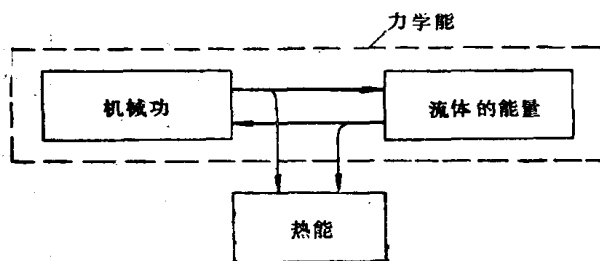


图2-1 透平机械的能量转换

一、透平机械的分类

透平机械主要由旋转的叶轮与固定的静叶所组成。流体穿过旋转的叶轮时，一方面受到叶片力的作用，另一方面同时进行功与能的转换。如图 2-2 所示，如果取叶轮进口处的 0—0 面为控制面，将该面上半径为 r 的点 A 所通过的流线，绕 z 轴旋转形成的包络面，一般称之为流面。严格说来，流面随着叶轮转动是变化的。为此，今后我们所说的流面，则是指以转轴 z 为对称的平均回转面。而把通过轴 z 所在的面(子午面)上的流面切线称为子午面流线。

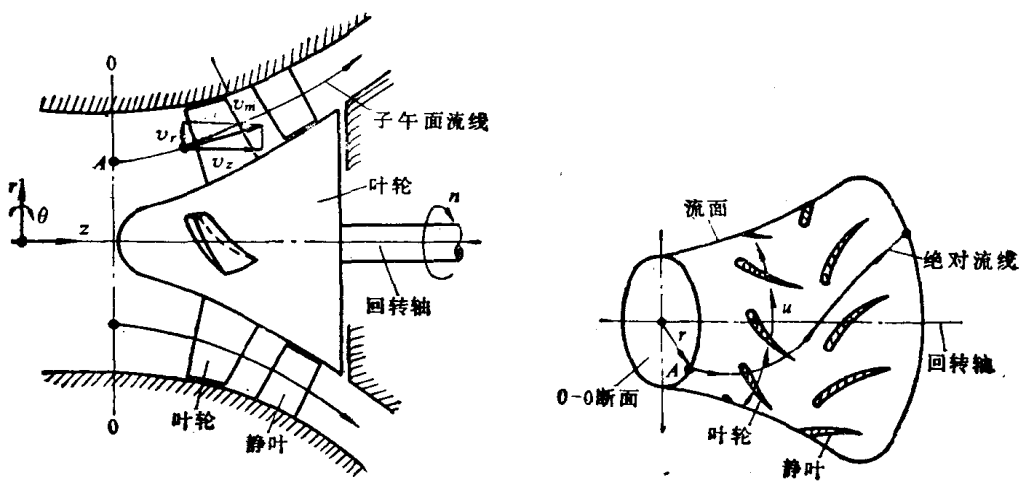


图2-2 流面与子午面流线

按照流面形状透平机械可以分为：当流面与转轴近似成同心的圆柱面时称为轴流式；近似成垂直面时称为离心式；成锥面时则称为斜流式。

透平机械内的流动解析时，往往以使用圆柱相对坐标系更为方便。这时绝对速度 $V(v_r, v_\theta, v_z)$ 与相对速度 $W(w_r, w_\theta, w_z)$ 的关系为：

$$\left. \begin{aligned} v_r &= w_r \\ v_\theta &= u - w_\theta \\ v_z &= w_z \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

二、欧拉关系式

欧拉关系式是透平机械的最基本关系式，图 2-3 示出了它的推导用简图。如图所示，取叶轮进出口截面①、②为控制体，以流道内极薄的两个流面间质量流量为 dm 的流体来考虑。当流体通过时，作用叶轮叶片的合力 dR 可以分解成沿子午面方向的分量 dR_m 和沿周方向的分量 dR_θ 。使叶片旋转所需的转矩 dT 与周向分力 dR_θ 有关。

对于控制体来说，单位时间内从面①流入面②流出的流体，其动量矩的变化为

$$dm(v_{\theta 2}r_2 - v_{\theta 1}r_1)$$

根据动量矩定理，单位时间内流体动量矩的变化，等于作用于控制体内流体上的外力矩之和。由于我们所取的控制体为一旋转对称面，作用在控制体的压力方向与轴线相交或平行，故不产生转矩。作用于控制体上的切应力 τ_θ 虽然形成转矩，但我们着眼的流体 dm 是处于流道内极为相近的两个回转流面之间的流体，作用于这两个流面上 τ_θ 所产生的转矩将相互抵消。最后，流体所受的转矩只有叶片力形成的外转矩，它等于 $dT = r dR_\theta$ ，故有

$$dm(v_{\theta 2}r_2 - v_{\theta 1}r_1) = dT$$

上式两边乘以转子的角速度 ω ，右边的项 ωdT 则表示抵抗外转矩 dT 所需的机械功率 dP ：

$$dP = dm(v_{\theta 2}r_2 - v_{\theta 1}r_1) \omega = dm(u_2v_{\theta 2} - u_1v_{\theta 1})$$

如果 $W (= dP/dm)$ 表示单位质量流体得到的外功，于是上式则与①→②间流体的总焓变化相等：

$$I_2 - I_1 = (u_2v_{\theta 2} - u_1v_{\theta 1}) = W \quad (2-2)$$

对于透平机械而言，往往将动叶与其后的静叶所组成的单元称为级。当流体通过单级透平机械时，功的转换仅在动叶轮中进行，流体在静叶中并不获得功，只是穿过它。因此，静叶出口的总焓 I_3 与静叶进口 (= 动叶出口) 的总焓 I_2 相同。如果单级的总焓变化用 ΔI_{st} 表示，则有

$$\Delta I_{st} = I_3 - I_1 = (I_2 - I_1) + (I_3 - I_2) = I_2 - I_1$$

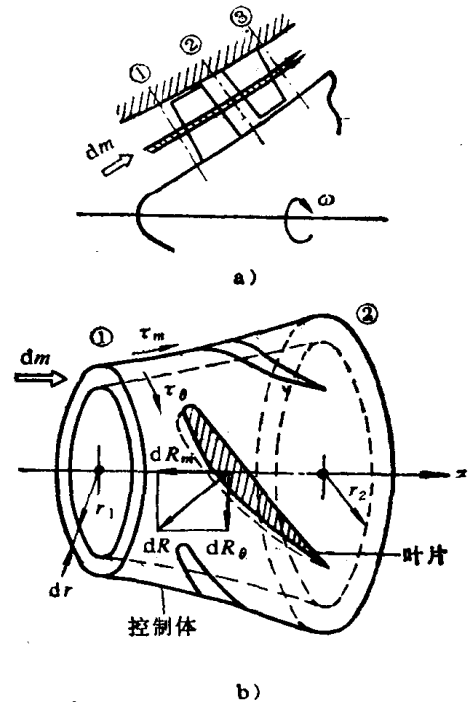


图2-3 欧拉关系式的推导
a) 流面间的流体 b) 控制体

故式 (2-2) 变成:

$$\Delta I_{st} = (u_2 v_{\theta 2} - u_1 v_{\theta 1}) \quad (2-3)$$

上式亦是著名的欧拉关系式。对于多级透平机械, 当级数为 z 时, 总焓的变化 ΔI 为

$$\Delta I = \sum_1^z \Delta I_{st} \quad (2-4)$$

对于泵、风机、压缩机来说, $\Delta I_{st} > 0$, 对水轮机、蒸汽或燃气轮机, $\Delta I_{st} < 0$ 。

三、叶轮

叶轮是与流体进行功能转换的最主要部件, 下面对此加以进一步的分析。

利用图 2-4 所示的速度矢量关系,

式 (2-3) 可以化为:

$$\Delta I_{st} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \quad (2-5)$$

透平机械中, 一般不考虑流体势能的变化, 这时流体的总焓 I 可以用 $I = v^2/2 + i$ 来表示。因此, 叶轮进出口流体的总焓变化为:

$$I_2 - I_1 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + (i_2 - i_1) \quad (2-6)$$

由式 (2-5) 和式 (2-6) 可得

$$i_2 - i_1 = \Delta i_R = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \quad (2-7)$$

这里 Δi_R 表示叶轮内流体静止焓的变化。当叶轮效率为 η_R 时, 对应于静止焓 Δi_R 变化的静压头变化 Δh_R 为:

$$\left. \begin{aligned} \text{对于泵、压缩机} \quad \Delta h_R &= \eta_R \Delta i_R \\ \text{对于水轮机、燃气轮机} \quad \Delta h_R &= \Delta i_R / \eta_R \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

为了简单起见, 如果 $\eta_R = 1$, 则静压 Δp_R 可以写成:

$$\Delta p_R = \rho \left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \right) \quad (2-9)$$

上式说明: 叶轮中压力的变化由两部分组成: 第一项为叶轮进出口的周速差, 它表示因为离心力所产生的压力变化; 第二项表示流体在扩压器 (或喷管) 内由于相对速度 w 的减少 (或增加) 所引起的压力变化。图 2-5 示出了这种压力变化的原因。

以泵、压缩机为例, 在图 2-6 中表示了叶轮对流体做功及其流体能量的转换过程。由式 (2-5) 可知, 叶轮加给流体的能量 ΔI_{st} 当中, $(v_2^2 - v_1^2)/2$ 作为动能的增加与压力的上升无关系。剩下的能量 Δi_R 虽以叶轮离心力作用和叶轮扩压通道为媒介转变为压力的升高, 但在

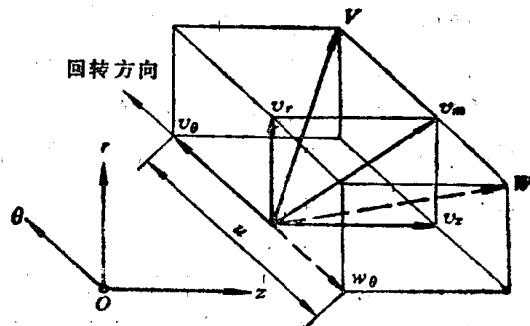


图2-4 速度矢量

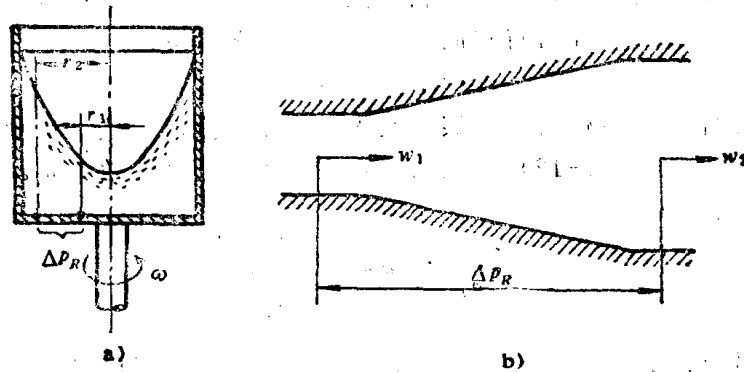


图2-5 叶轮内压力的变化

a) 离心力产生的压力差 b) 相对速度变化引起的压力差

$$\Delta P_R = \rho \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \quad \Delta P_R = \rho \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}$$

转换过程中伴随着 $(1-\eta_R)\Delta i_R$ 的流体损失。最后只有 $\Delta h_R = \eta_R \Delta i_R$ 才是实际的压头上升值。

流体因离心力作用和扩压器作用在叶轮内压力上升的比例，对不同形状的叶轮，它们是不相同的。离心力作用占主要部分的称为离心式，扩压器作用占主要部分的为轴流式，两个作用兼有的则称为斜流式。

四、静叶

前已指出，流体在静叶中总焓保持不变：

$$I_3 - I_2 = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2} + (i_3 - i_2) = 0$$

故静叶中静止焓的增加为

$$\Delta i_s = i_3 - i_2 = \frac{v_2^2 - v_3^2}{2} \quad (2-10)$$

这时静压头 Δh_s 或静压上升 Δp_s 为

$$\Delta h_s = \eta_s \Delta i_s, \quad \Delta p_s = \rho \eta_s \frac{v_2^2 - v_3^2}{2} \quad (2-11)$$

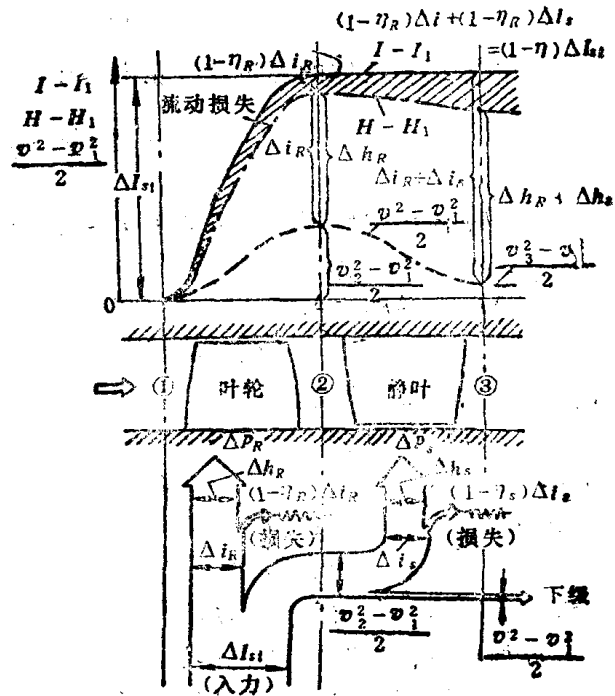


图2-6 能量的转换

这里 η_s 表示静叶效率。上式表明，静叶中的压力变化，是因为扩压器作用的结果。此外，图 2-6 告诉我们，在叶轮出口的动能增加 $(v_2^2 - v_1^2) / 2$ 当中，经过静叶后只有 $(v_2^2 - v_3^2) / 2$ 部分转变为压力能的升高，剩下的部分 $(v_3^2 - v_1^2) / 2$ 仍以动能的形式进入下一级。

五、透平压缩机械的级

对一个透平压缩机械的级而言，叶轮对流体所作的功 ΔI_{st} ，只有一部分转变成流体能量头 $\Delta H_{st} = H_3 - H_1$ 的提高，通常将它们的比定义为级效率 η_{st} ，

$$\eta_{st} = \Delta H_{st} / \Delta I_{st} \quad (2-12)$$

在一台多级透平压缩机械之中，实际流体的能量转变，分别是在级间实现的，且级间压比变化一般较小，所以式 (2-12) 定义的效率往往指的是多变效率 η_{pol} 。对于压缩机而言，多变效率可以写成：

$$\eta_{pol} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{m}{m - 1} \quad (2-13)$$

式中 κ 表示气体绝热指数， m 为多变指数。一般情况下，级的进出口速度 $v_1 = v_3$ ，这时叶轮所作的功 ΔI_{st} 及用于能量头 ΔH_{st} 的增加为：

$$\Delta I_{st} = \frac{v_3^2 - v_1^2}{2} + (i_3 - i_1) = \Delta i_R + \Delta i_s$$

$$\Delta H_{st} = \frac{v_3^2 - v_1^2}{2} + (h_3 - h_1) = \Delta h_R + \Delta h_s$$

故有

$$\eta_{st} = \frac{\eta_R \Delta i_R + \eta_s \Delta i_s}{\Delta I_{st}} = \frac{\eta_R \Delta i_R + \eta_s \Delta i_s}{\Delta i_R + \Delta i_s} \quad (2-14)$$

为了衡量级中流体的能量在叶轮内静压能转变的快慢，通常用反动度 Ω 来表示：

$$\Omega = \frac{\Delta i_R}{\Delta I_{st}} = \frac{\Delta i_R}{\Delta i_R + \Delta i_s} \quad (2-15)$$

如果级中流体密度不变，级效率 $\eta \approx \eta_R \approx \eta_s$ 时，由式 (2-15) 可得：

$$\Omega = \frac{\Delta p_R}{\Delta p_i} = \frac{\Delta p_R}{\Delta p_R + \Delta p_s} \quad (2-16)$$

这里， Δp_i 为全压的升高。

利用反动度的概念，级效率又可写成：

$$\eta_{st} = \Omega \eta_R + (1 - \Omega) \eta_s \quad (2-17)$$

六、透平压缩机械所需的功率
外界加给泵、压缩机的机械功 W ，用于克服级间各种损失和使得流体能量头提高。如图 2-7 所示那样，总损失它包括机械损失、泄漏损失和流动损失等三大部分。如何尽量减少这部分损失，一直是透平机械研究者和设计者所追求的目标。扣除这些损失，机器的输出有效功 W_e 为

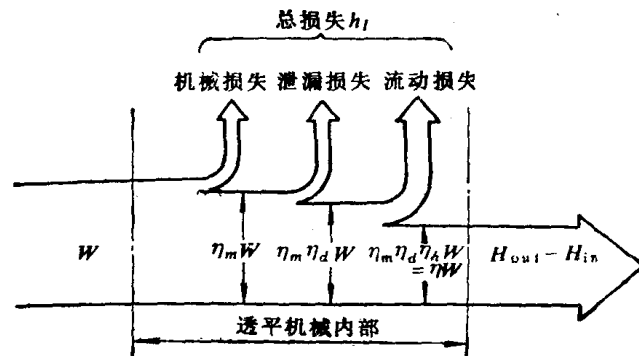


图2-7 级中的损失

$$W_s = H_{out} - H_{in} = \eta W \quad (2-18)$$

式中 η 表示整台泵或压缩机的效率，它等于

$$\eta = \eta_m \eta_d \eta_v \quad (2-19)$$

式中 η_m 表示机械效率， η_d 表示流动效率， η_v 为表示外泄漏损失大小的容积效率。对压缩机而言，整机效率往往用绝热效率 η_{ad} 来表示，它与多变效率 η_{pol} 的关系为

$$\eta_{ad} = \left[\left(\frac{p_{out}}{p_{in}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] / \left[\left(\frac{p_{out}}{p_{in}} \right)^{\eta_{pol} \frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad (2-20)$$

式中 p 表示全压， κ 表示气体绝热指数。

对具有中间冷却器的多级压缩机，则用等温效率 η_{is} 衡量机器的好坏：

$$\eta_{is} = W_{is} / W \quad (2-21)$$

式中 W_{is} 表示等温压缩功：

$$W_{is} = RT_{in} \ln(p_{out}/p_{in}) \quad (2-22)$$

根据上述关系，便可求得驱动泵和压缩机所需功率的大小。图2-8示出了它的计算过程。

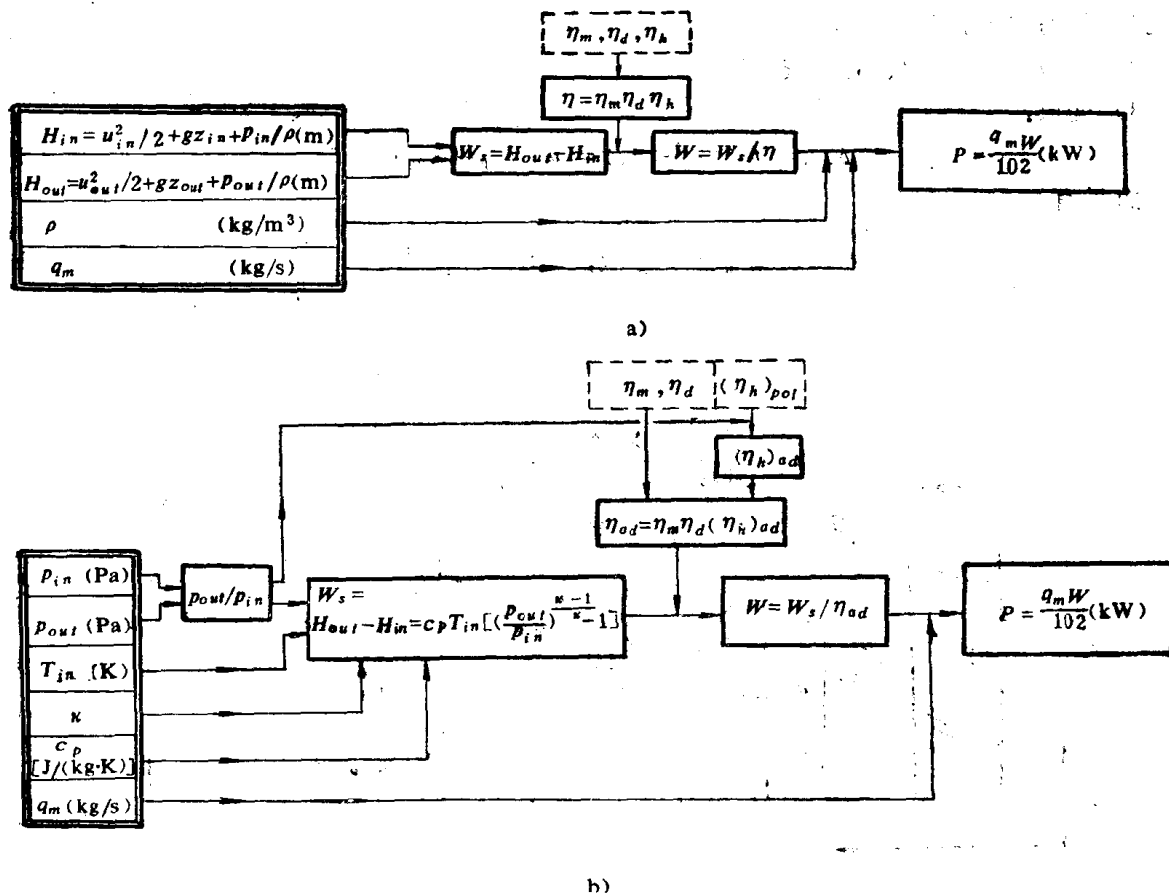


图2-8 泵和压缩机所需功率

a) 泵 b) 压缩机

§ 2-2 轴流叶轮与平面叶栅

一、展开面上的叶栅配置

对于轴流叶轮而言，流面近似成圆柱面。这时径向分速度 v_r 与轴向分速度 v_z 和周向分速度 v_θ 相比要小得多，即 $v_r \ll v_z, v_\theta$ 。因此，在要求不高的情况下，可以取子午面速度 $v_m \approx v_z$ 来进行设计。图 2-9 示出了具有进口导叶 (IG) 和出口导叶 (OG) 的多级轴流式透平机械的流道示意图。由于流面近似为圆柱面，将它在平面上展开所得到的对应叶栅配置如图 2-10 所示。展开面上相邻流面的干涉可以不考虑，因此在任一流面上，流体的能量变化可以作为独立的能量平衡进行分析。

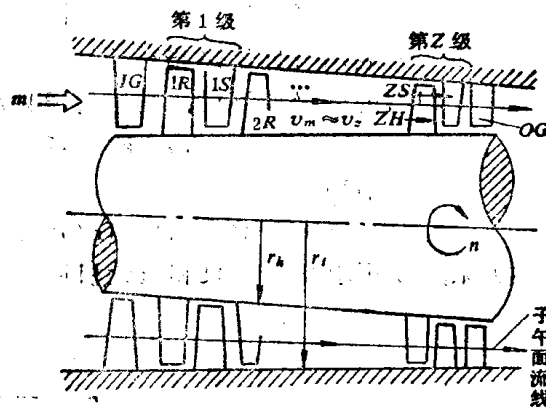


图 2-9 多级轴流式流道

对于轴流叶轮，欧拉关系式 (2-3) 变成

$$\Delta I_{11} = u (v_{\theta 2} - v_{\theta 1}) = u (w_{\theta 1} - w_{\theta 2}) \quad (2-23)$$

而且有

$$\Delta i_R = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}, \quad \Delta i_s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \quad (2-24)$$

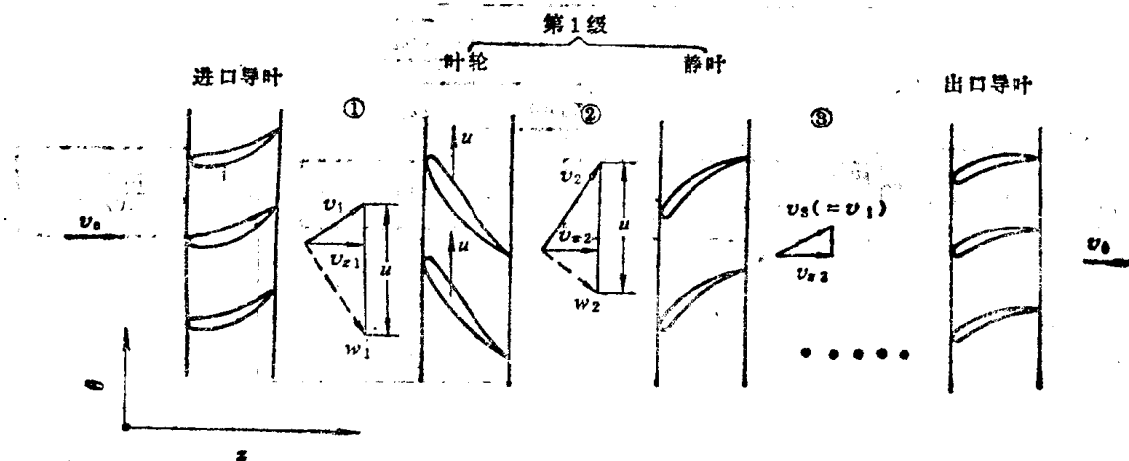


图 2-10 展开面上的叶栅配置

二、速度三角形

透平机械设计时，往往将级的进出口速度画在一起，用速度三角形表示。图 2-11 示出了一个单级泵或压缩机的速度三角形。

1. 反动度 Ω

轴流叶轮设计时，如果取 $v_1 = v_2$, $v_{z1} = v_{z2}$ ，则它的反动度 Ω 由式 (2-15) 可以表示为：

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\Delta i_R}{\Delta I_{st}} = \frac{(w_{01}^2 - w_{12}^2)}{2u(w_{01} - w_{02})} \\ &= \frac{w_{01} + w_{02}}{2u} = \frac{w_{0\infty}}{u} \quad (2-25) \end{aligned}$$

式中 $w_{0\infty}$ 表示平均相对速度 w_{∞} 的周向分速度。图 2-12 示出了当反动度 $\Omega = 0$ 、0.5、1.0 时的速度三角形。从式 (2-25) 可知， Ω 值随着半径 r 而变化。

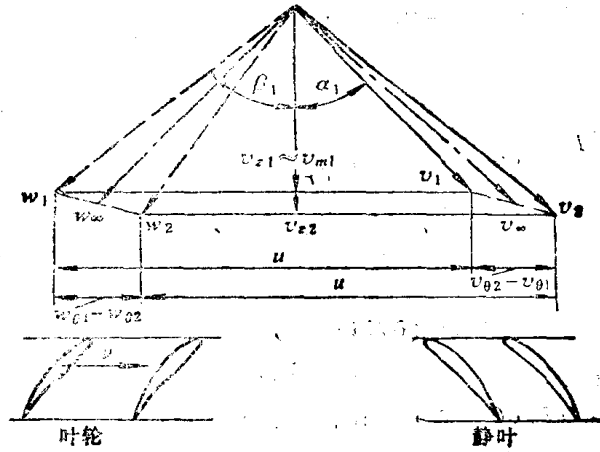


图2-11 速度三角形

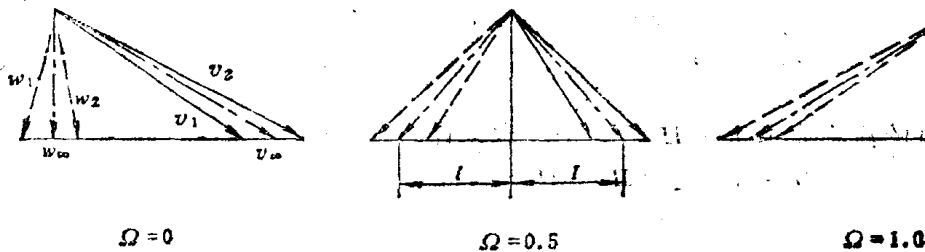


图2-12 反动度

2. 流量系数和压力系数

流量系数 φ 和压力系数 ψ 定义为：

$$\varphi = \frac{v_z}{u}, \quad \psi = \frac{\Delta I_{st}}{u^2/2} = \frac{2(v_{02} - v_{01})}{u} \quad (2-26)$$

在不同流面上 φ 和 ψ 是变化的，即 φ 和 ψ 为半径 r 的函数。为此，常用从叶根至叶顶处各流面的平均值或特征值与叶顶圆周速度 u_t 来表示：

$$\varphi_{st} = \frac{\overline{v_z}}{u_t}, \quad \psi_{st} = \frac{\overline{\Delta I_{st}}}{u_t^2/2} \quad (2-27)$$

这里 $\overline{v_z}$ 和 $\overline{\Delta I_{st}}$ 分别表示环形通道内平均轴向分速度（或特征轴向分速度）和平均焓值（或特征焓值）。

三、平衡条件式

为了简单起见,从图2-13所示的不含叶片的通流部分的流体来考虑。这时流体的总能量头 H 为

$$H = \frac{1}{2} (v_z^2 + v_\theta^2 + v_r^2) + h$$

故有

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial h}{\partial r}$$

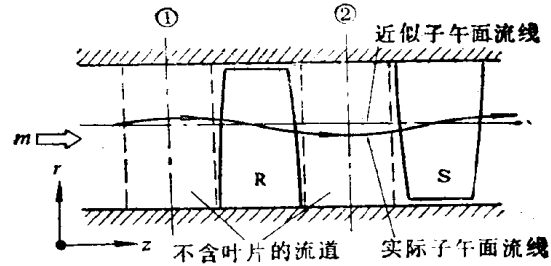


图2-13 平衡条件

对于定常流动 ($\partial/\partial t = 0$), 当不考虑粘性 ($\mu = 0$) 且在轴对称条件下 ($\partial/\partial \theta = 0$), 由圆柱坐标的运动方程有:

$$\left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{\partial h}{\partial r}$$

由以上两式消去 $\partial h/\partial r$ 则可得:

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \left[\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} + v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right]$$

如果叶轮进口处的流体能量头为 H_0 , 于是任意位置的 H 可以写成:

$$H = H_0 + \sum \Delta H_{st} = H_0 + \sum \eta_{st} \Delta I_{st}$$

则有

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \sum \frac{\partial (\Delta H_{st})}{\partial r} = \sum \frac{\partial (\eta_{st} \Delta I_{st})}{\partial r}$$

最后可得平衡条件式为:

$$\sum \frac{\partial (\eta_{st} \Delta I_{st})}{\partial r} = \left[\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} + v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] \quad (2-28)$$

根据平衡条件式, 可以求得子午面流线沿半径方向的分布。

四、叶栅与翼形

所谓叶栅就是同一形状的叶片按一定位置关系排成的叶列。对于轴流叶轮而言, 流体主要沿着转子的轴向和圆周方向运动, 在半径方向的速度分量较小, 这种叶栅称为环形叶栅。如果将环状叶栅在任意半径上沿轴向的圆柱面切开, 并在平面上展开, 可以得到同一断面形状的叶片在该面内成直线状的等间隔排列, 这时称为直线叶栅。对于直线叶栅, 由于展弦比

可以为任意值，故通过叶栅的流体实际上为三元流动。

当展弦比较大，且叶栅进口均匀时，则认为流动沿叶高方向不变化，可以当作二元直线叶栅来考虑。对于离心叶轮来说，流动主要沿着径向和圆周方向，轴向分量较小，有时称这种叶栅为圆形叶栅。与二元直线叶栅一样，如果圆形叶栅内流体的运动只在沿着与轴垂直的平面内流动，这种圆形叶栅亦称为二元圆形叶栅。斜流叶轮介于轴流叶轮与离心叶轮中间状态，斜流叶栅内的流动具有明显的三元特征。设计时可以利用轴流叶轮或离心叶轮延长的方法对斜流叶轮进行设计。

1. 翼形

由基本翼和中线的不同组合，可以构成不同的翼形。如图2-14 a所示，自前缘长度为 x_c 的基本翼形（对称翼）上取 $1/2$ 翼厚的距离为 y_i ，这时 x_c 处的中线高度 y_c 如图2-14 b，将基本翼形重合在中线上便构成了通常的翼形如图2-14 c。

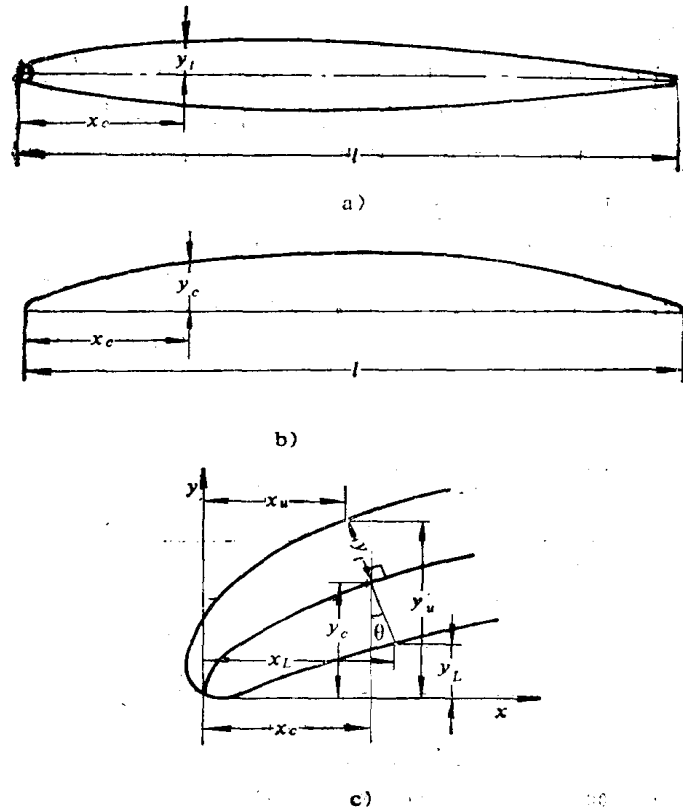


图2-14 翼形的构成

a) 基本翼形 b) 中线 c) 翼形的构成

透平机械中采用的翼形各式各样。其中以美国NACA-65系列翼形和英国NGTE-C4翼形最为有名。这里以NACA-65系列翼形为例加以进一步说明。

NACA-65系列翼形的基本翼形为相对厚度（最大厚度 $y_{i_{max}}$ /弦长 l ）等于10%的对称翼NACA-65010，中线坐标 y_c 由非压缩非粘性流体沿薄翼翼弦方向的载荷分布按下式确定：

$$\frac{y_c}{l} = \frac{c_{l0}}{2\pi(1+a)} \left\{ \frac{1}{1-a} \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{x_c}{l} \right)^2 \ln \left(a - \frac{x_c}{l} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_c}{l} \right) \ln \left(1 - \frac{x_c}{l} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x_c}{l} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(a - \frac{x_c}{l} \right)^2 \right] - \frac{x_c}{l} \ln \left(\frac{x_c}{l} \right) + g - h \left(\frac{x_c}{l} \right) \right\} \quad (2-29)$$

式中

$$g = -\frac{1}{1-a} \left[a^2 \left(\frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \right]$$

$$h = \frac{1}{1-a} \left[\frac{1}{2} (1-a)^2 \ln(1-a) - \frac{1}{4} (1-a)^2 \right] + g$$

这里 c_{l0} 表示孤立翼的设计升力系数，它与中线弯度 y_c 成正比。 a 表示载荷分布系数，

一般 $a = 0 \sim 1.0$ 。对于NACA-65系列翼形，不同的载荷分布对应不同的中线形状。这种翼形的载荷分布，从前缘至 $x_c/l = a$ 为沿弦向均匀分布， $x_c/l = a$ 到后缘载荷线性减少至零（如图 2-15 所示）。

当 $c_{l0} = 1.0$ ， $a = 1.0$ 时其基本翼形和中线的坐标如图 2-16 所示。确定了中线和基本翼形厚度分布以后，根据图 2-14 可以由下式计算 NACA-65 系列翼形叶背和叶腹坐标尺寸：

$$\left. \begin{aligned} x_u &= x_c - y_t \sin \theta, & y_u &= y_c + y_t \cos \theta \\ x_L &= x_c + y_t \sin \theta, & y_L &= y_c - y_t \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

$$\theta = \arctg(dy_c/dx_c) \quad (2-31)$$

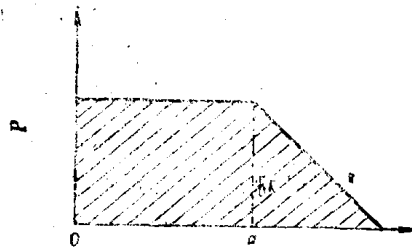
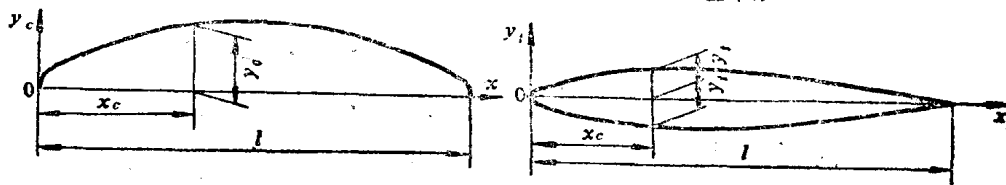


图2-15 载荷沿弦向的分布



基本形

	$t/C = 0.1$	$C_{l0} = 1.0$	$a = 1.0$	$C_{l0} = 1.0$	$a = 0.2$	$C_{l0} = 1.0$	A_2/A_0
$x_c/l \times 100$	$\pm y_t/l \times 100$	$y_c/l \times 100$	dy_c/dx	$y_c/l \times 100$	dy_c/dx	$y_c/l \times 100$	dy_c/dx
0.0	0.0	0.0		0.0		0.0	
0.5	0.772	0.250	0.42120	0.414	0.69492	0.087	0.15926
0.75	0.932	0.350	0.38875	0.581	0.64047	0.126	0.15411
1.25	1.169	0.535	0.34770	0.882	0.57135	0.201	0.14824
2.5	1.574	0.930	0.29155	1.530	0.47592	0.382	0.14190
5.0	2.177	1.580	0.23430	2.583	0.37661	0.730	0.13775
7.5	2.647	2.120	0.19995	3.443	0.31487	1.073	0.13625
10	3.040	2.585	0.17485	4.169	0.26803	1.412	0.13530
15	3.666	3.365	0.13805	5.317	0.19373	2.084	0.13310
20	4.143	3.980	0.11030	6.117	0.12405	2.741	0.12958
25	4.563	4.475	0.08745	6.572	0.06345	3.377	0.12439
30	4.760	4.860	0.06745	6.777	0.02030	3.982	0.11737
35	4.924	5.150	0.04925	6.789	-0.01418	4.547	0.10839
40	4.996	5.355	0.03225	6.646	-0.04246	5.062	0.09732
45	4.963	5.475	0.01595	6.373	-0.06588	5.517	0.08400
50	4.812	5.515	0.0	5.994	-0.08522	5.898	0.06818
55	4.530	5.475	-0.01595	5.527	-0.10101	6.193	0.04951
60	4.146	5.355	-0.03225	4.989	-0.11359	6.388	0.02752
65	3.682	5.150	-0.04925	4.396	-0.12317	6.461	0.00149
70	3.156	4.860	-0.06745	3.762	-0.12985	6.394	-0.02973
75	2.584	4.475	-0.08745	3.102	-0.13363	6.153	-0.06825
80	1.987	3.980	-0.11030	2.431	-0.13440	5.690	-0.12130
85	1.385	3.365	-0.13805	1.764	-0.13186	4.927	-0.18259
90	0.810	2.585	-0.17485	1.119	-0.12541	3.852	-0.24939
95	0.306	1.580	-0.23430	0.518	-0.11361	2.382	-0.34815
100	0.0	0.0		0.0	-0.08941	0.0	

图2-16 NACA-65翼形坐标

2. 叶栅和平面叶栅资料

流体在各流面上进行功能转换时，当满足平衡条件式速度三角形决定后，以下的问题是采用什么样的翼形和叶栅实现该速度三角形。为此，现以图2-17所示的X—Y平面上的叶栅流动来考虑。对于上述平面叶栅可以从以下两个不同角度进行分析：首先如图a)所示那样，将叶栅看成一个弯曲的扩张通道(扩压器)，流体流过通道时一边减速($v_1 > v_2$)，一边同时进行转向($\alpha_1 - \alpha_2$)。寻求在最小损失条件下，满足所需减速和转向角的通道形状，这便是透平机械研究者和设计者所追求的目标。这种分析方法称为通流理论。另外还可以根据流体与叶片间力的相互作用使流体变速和转向，利用叶栅理论加以分析。如图b)所示，作用于叶片的合力R的Y向分量 R_θ 的反作用力，使得流体沿-Y方向加速并转向，X向的分力 R_x 的反作用力，将流体挤向X方向，相当于活塞的作用使压力提高。下面应用叶栅理论，对二元叶栅内非压缩性流动的基本关系按照图2-18进一步地加以说明。

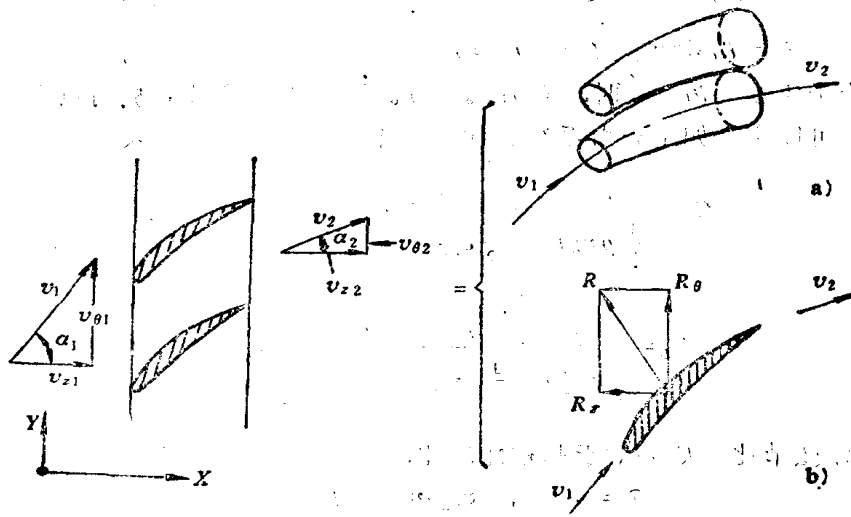


图2-17 叶栅的作用

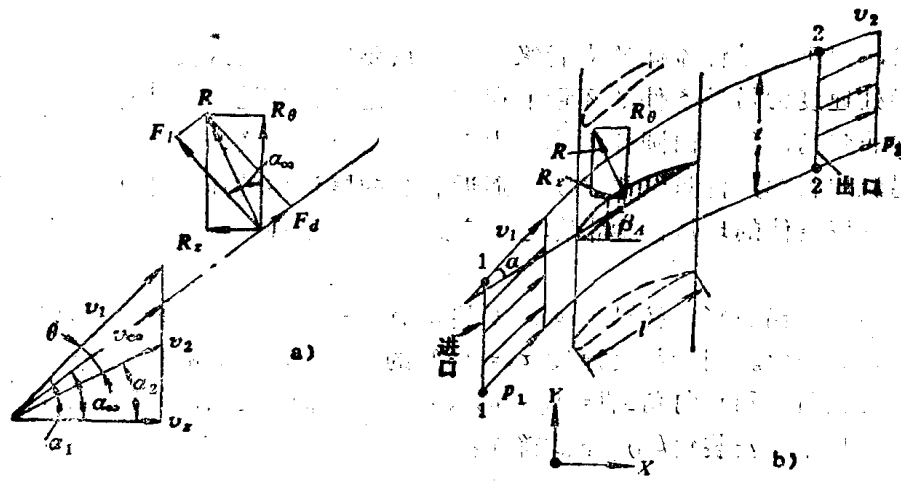


图2-18 直线叶栅

如图示那样,取叶栅进出口相当远处间距为 t 的控制面来考虑。这时对于叶栅进出口面

$$v_{x1} = v_1 \cos \alpha_1 = v_{x2} = v_2 \cos \alpha_2 = v_x \quad (2-32)$$

上式说明,叶栅进出口轴向分速度不变化。

如果 $h_l (= H_1 - H_2)$ 表示叶栅内流体的能量头损失,则有效能量头为:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - h_l = (v_{01} - v_{02})v_{0\infty} - h_l \quad (2-33)$$

对控制面应用动量矩法则,流体作用于叶片的合力 R 在 X 、 Y 方向的分量 R_x 、 R_y 为:

$$\begin{aligned} R_x &= (p_2 - p_1) t = \rho t (v_{01} - v_{02}) v_{0\infty} - p_l t \\ R_y &= \rho t (v_{01} - v_{02}) v_x \end{aligned}$$

根据图 2-18 a 可以得到叶栅升力 F_l 和阻力 F_d 的关系为:

$$\left. \begin{aligned} F_l &= R_y \cos \alpha_\infty + R_x \sin \alpha_\infty = \rho t (v_{01} - v_{02}) v_x - F_d \operatorname{tg} \alpha_\infty \\ F_d &= R_y \sin \alpha_\infty - R_x \cos \alpha_\infty = p_l t \cos \alpha_\infty \end{aligned} \right\} \quad (2-34)$$

上式表明,当全压损失 $p_l = 0$ 时,阻力 $F_d = 0$ 。因此对于直线叶栅可以用平均速度矢量作为定义基准。故可以定义如下升力系数 C_l 和阻力系数 C_d 为:

$$C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 l} = \frac{v_{01} - v_{02}}{\frac{1}{2} v_\infty} - C_d \operatorname{tg} \alpha_\infty \quad (2-35)$$

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 l} = \frac{p_l}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} \frac{\cos \alpha_\infty}{\sigma} \quad (2-36)$$

这里 $\sigma = l/t$ 表示弦节比。如果对于非粘性流体,从式(2-34)可得叶片升力为

$$\left. \begin{aligned} F_l &= \rho t (v_{01} - v_{02}) v_x = \rho \Gamma v_\infty \\ F_l &\perp v_\infty \end{aligned} \right\} \quad (2-37)$$

式中 $\Gamma = t(v_{01} - v_{02})$ 亦为叶片环量值。式(2-37)亦是茹可夫斯基升力定理在叶栅中的表现形式。

应该指出,对于非粘性流体的尖后缘流动,只要气流在后缘没有严重分离,则认为必有一个保持后缘处速度为常数条件的环量值存在,满足该条件的环量值则称为库塔条件。实际的翼形后缘并非尖角,往往由圆弧组成。由于圆弧很小,真实流动在接近后缘处上下两层脱离所形成的尾流层很薄,测量结果表明,逼近后缘的尾流中的压力相等,即上下两点的速度为一常数,满足该条件的环量值通常称之为广义的库塔条件。为此,可以近似认为分离点就在后缘上。

对于叶栅而言,当翼形、弦节比 σ 、安装角 β_A 一旦被确定,该叶栅便是一个确定的叶栅,叶栅设计就算完成。对于相对厚度 $\tau_0 = 10\%$ 的 NACA-65 翼形,设计时,可以根据给定的相对进口气流角 β_1 和转向角 $\Delta\beta = \beta_1 + \beta_2$ 以及 σ 值,由图 2-18 a 和 b 决定翼形中线 c_{10} 和设计攻角 α ,这时叶片安装角 β_A 用下式确定:

$$\beta_A = \beta_1 - \alpha \quad (2-38)$$

如果 σ 值不等于图中示出的数值时,可以用内插方法求得 σ 、 c_{10} 和 α 的大小。

对于任意相对厚度 τ 的 NACA-65 翼形, 设计时, 先按 $\tau_0 = 10\%$ 的 NACA-65 翼形(图 2-19) 求得 $(C_{l_0})_0$ 和 $(\beta_A)_0$ 值, 然后由图 2-20 用下式加以修正:

$$\left. \begin{aligned} c_{l_0} &= (c_{l_0})_0 + \frac{\Delta c_{l_0}}{(\Delta \tau \times 100)} (\tau - \tau_0) \\ \beta_A &= (\beta_A)_0 + \frac{\Delta \beta_A}{(\Delta \tau \times 100)} (\tau - \tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (2-39)$$

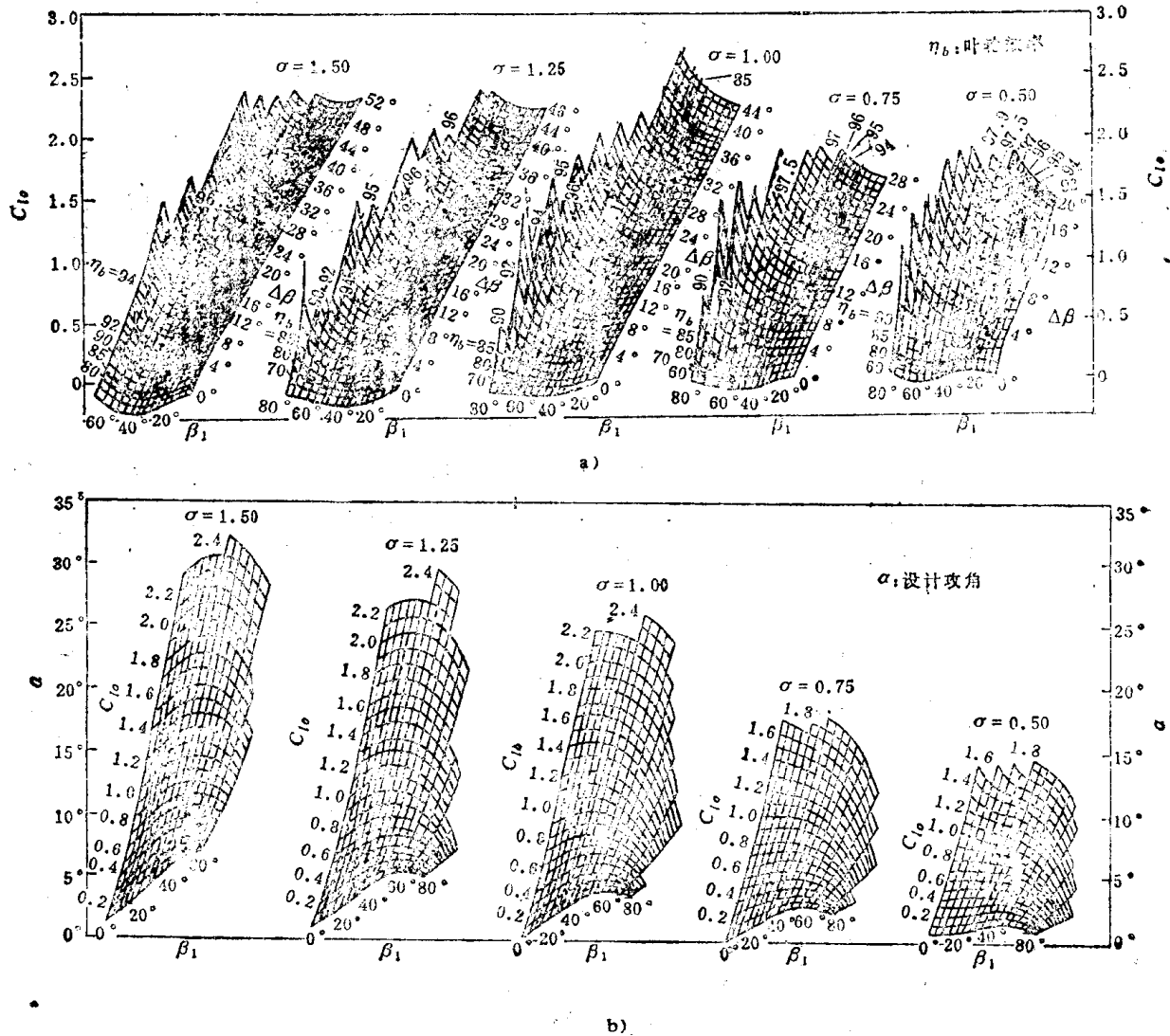


图2-19 翼形中线和攻角的确定(NACA-65)

a) 翼形中线, b) 设计攻角

设计时, 将各流面上的翼形和安装角沿半径方向重叠, 便可获得三元扭曲的叶栅形状。要注意的是, 翼形沿径向重叠时, 对于叶轮来说, 翼形的重心应在同一半径线上, 以防止离心力形成弯曲作用于叶根处。对于静叶来讲, 则只需考虑工艺方便即可。

五、叶片负荷和当量扩散系数

当轴流叶轮在大于或小于设计冲角下工作时, 由于负荷的增大, 叶片会发生失速现象,

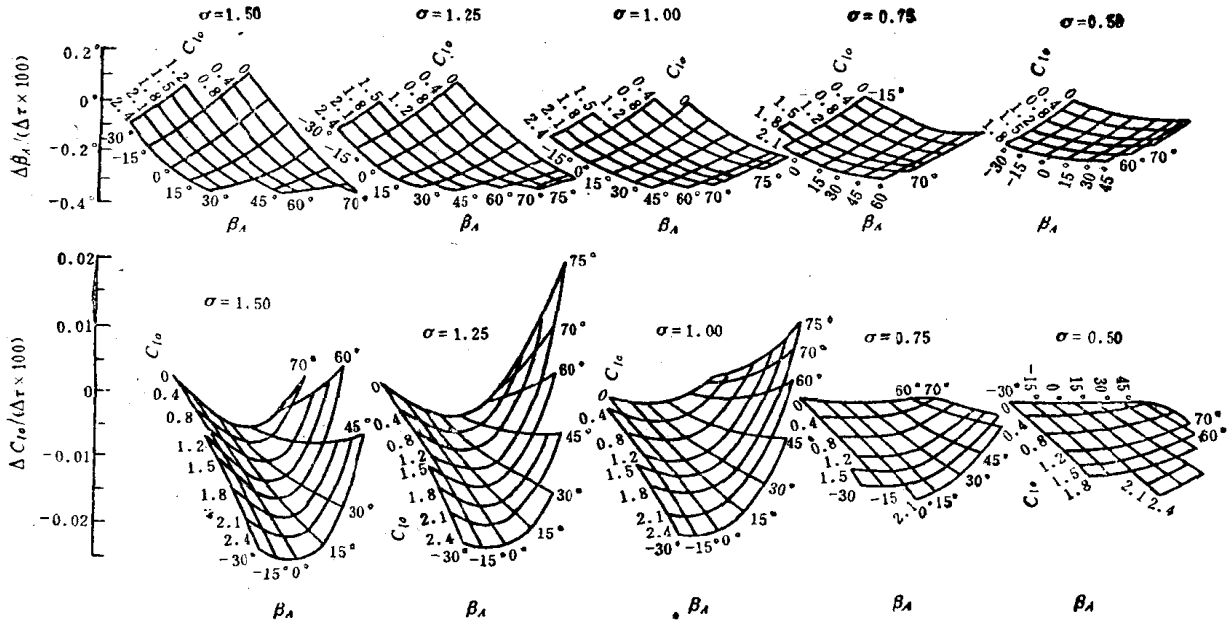


图2-20 相对厚度的修正

这时性能将显著降低。因此如何判断失速界限是一个非常重要的问题。叶片失速往往从叶背的边界层分离开始，其失速界限有着不同的衡量方法，这里我们采用应用广泛的扩散系数来衡量。它是以叶片背面的减速率超过某一限值时作为叶片失速的判断基准。这时扩散系数 D 用沿负压面的相对速度减速率表示为：

$$D = \frac{w_{max} - w_2}{w_{mean}} \approx \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) + \frac{(w_{\theta 1} - w_{\theta 2})}{2\sigma w_1} \quad (2-40)$$

式中 w_{max} 为叶背的最大相对速度， w_{mean} 表示 w_{max} 与出口速度 w_2 的平均值。从上式可知，叶片负荷与 $(w_{\theta 1} - w_{\theta 2}) / \sigma$ 成正比变化。

如果定义全压损失系数 $\xi = p_l / \frac{1}{2} \rho w_1^2$ 则式 (2-36) 变成：

$$C_D = \xi \frac{\cos \beta_{\infty}}{\sigma} \left(\frac{w_1}{w_{\infty}}\right)^2 \quad (2-41)$$

图2-21示出了扩散系数 D 与全压损失系数 ξ 的关系。可以看出，对于叶轮顶端而言，如果 D 大于 0.4 以上时损失将急剧增加；而在叶根和对于静叶来说， D 大于 0.6 左右损失也并不明显变化。

根据叶面边界层动量积分方程式，可以得到叶面减速比 w_{max}/w_2 与叶片后缘的动量损失厚度 θ 的关系为：

$$\frac{\theta}{l} = \frac{\varepsilon}{1 - K \cdot \ln(w_{max}/w_2)} \quad (2-42)$$

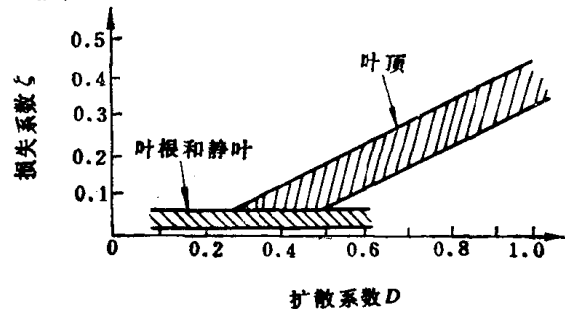


图2-21 扩散系数 D

这时由动量损失厚度 θ 与全压损失 ΔP 间的平衡条件, 全压损失系数 ζ 可以写成:

$$\zeta = \frac{2}{\cos \beta_2} \left(\frac{\theta}{l} \right) \sigma \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2 \quad (2-43)$$

根据NACA—65翼形和C4翼形的试验结果, 最佳冲角条件下叶面速度比 w_{max}/w_1 与循环参变量 F 的关系, 可以近似用下面直线关系式表示 (如图2-22):

$$\left. \begin{aligned} w_{max}/w_1 &= 1.12 + 0.305 F \\ F &= \frac{2 \cos^2 \beta_1}{\sigma} (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (2-44)$$

这时在最佳冲角条件下, 式 (2-42) 的减速比用当量扩散系数 D_{eq} 表示为:

$$\begin{aligned} D_{eq} &= \frac{w_{max}}{w_2} = \frac{w_1}{w_2} \left(\frac{w_{max}}{w_1} \right) \\ &= \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} (1.12 + 0.305 F) \end{aligned} \quad (2-45)$$

实验结果表明, 当 $D_{eq} > 2.0$ 时, θ/l 将急剧增大。作为负荷界限, 一般使 $D_{eq} \leq 2.0$ 。

在大于设计冲角条件下, 当量扩散系数 D'_{eq} 则用下式表示:

$$D'_{eq} \approx \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} [1.12 + a (\alpha' - \alpha)^{1.43} + 0.305 F] \quad (2-46)$$

式中系数 $a = 0.0117$ (NACA—65翼形) 或 $a = 0.007$ (C4圆弧叶形)。

六、干涉系数与角超过系数

对于叶栅而言, 由于单个叶片环量相互作用的结果, 使得叶栅的升力系数与孤立叶形时不相同。如果在无升力攻角 (升力等于零时的攻角) 条件下, 叶栅与孤立叶形在相同攻角时的升力系数分别为 C_L 和 C'_L , 把它们的比定义为干涉系数 λ , 即

$$C_L = \lambda C'_L \quad (2-47)$$

对于风机来说, 如果弦节比 $\sigma < 0.5$ 时, 叶片间的干涉效果可以忽略而作为孤立叶形来考虑。这时升力系数 C_L 和速度三角形的关系为 (参图2-11):

$$\begin{aligned} C_L &= 2 \frac{t}{l} (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \cos \beta_\infty \\ &\quad - C_{Dt} \operatorname{tg} \beta_\infty \end{aligned} \quad (2-48)$$

式中 $t/l = 1/\sigma$ 表示节弦比, β_∞ 表示平均进出口气流角。设计时可以根据豪威尔 (Howell) 所提供的图线 (图2-23) 来选取最佳节弦比的数值。一般希望:

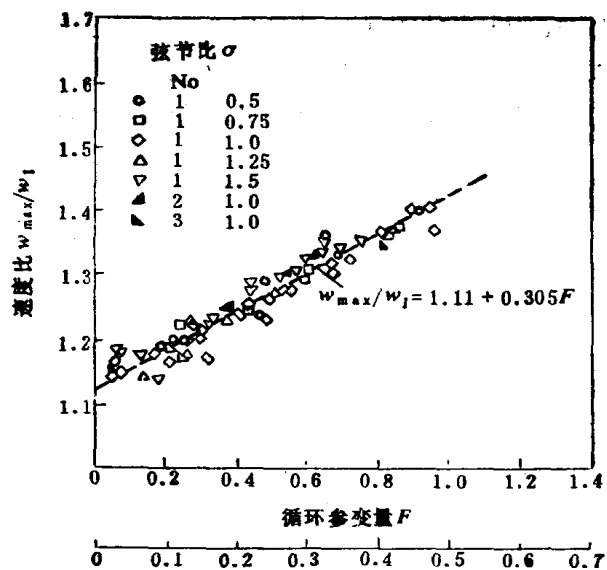


图2-22 w_{max}/w_1 与 F 的关系

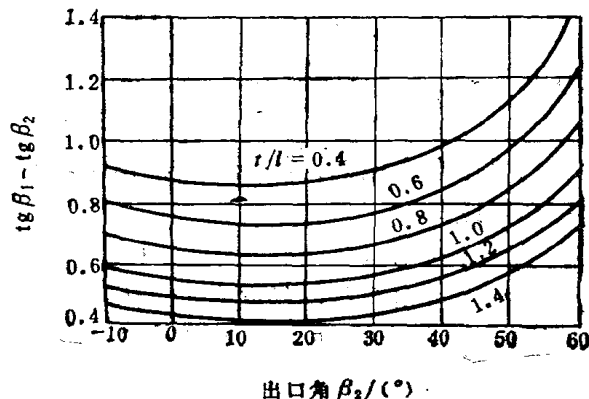


图2-23 节弦比的选定

$$t/l = 0.7 \sim 1.0$$

叶根处的值通常应大于 0.6。

设计时 β_m 可以取为：

$$\operatorname{tg} \beta_m = (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) / 2 \quad (2-49)$$

孤立叶形的攻角就是指这个平均进出口方向与弦线的夹角。NACA—65 孤立翼形的性能如图 2-24 所示。图中数字 10 是指翼厚比，其余数字表示 c_{t0} 的 10 倍值。设计时选取 C_D 最小的攻角，作为设计攻角 α_m 来选择叶形。

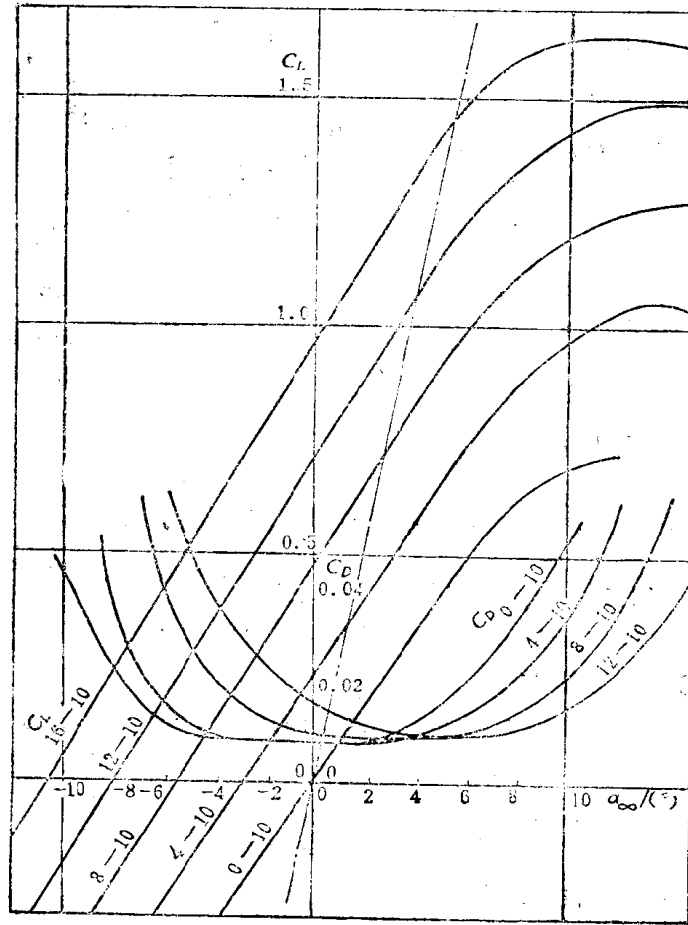


图2-24 NACA—65孤立翼形的性能。

当采用自由涡以外的流型时，由于轴向速度 $v_{z1} \neq v_{z2}$ ，此时可按如图 2-25 所示的等价速度三角形取：

$$v_{zm} = (v_{z1} + v_{z2}) / 2 \quad (2-50)$$

同时近似用进口角 β_1 ，转向角 $\Delta\beta'$ 从叶栅资料图 2-19 选择叶栅形状。

当弦节比 $\sigma > 0.5$ 时，可以用圆弧叶栅的干涉系数对孤立翼形加以修正，求得其叶栅的性能。即将式 (2-48) 所得到的 C_L 值用 (λC_L) 值代替。对于弧高小的圆弧叶栅而言，它的干涉系数 λ 的概略值如图 2-26 所示。

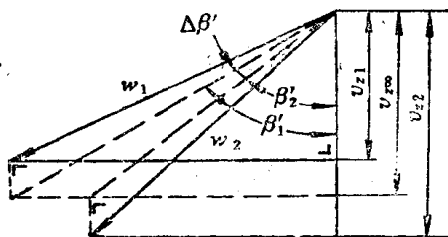


图2-25 等价速度三角形

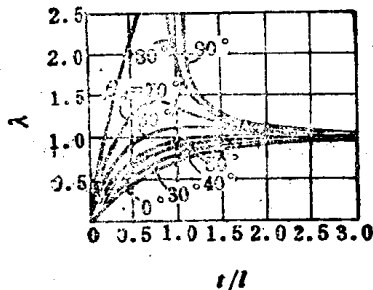


图2-26 圆弧叶栅的干涉系数

对于有限叶片数的圆弧叶栅，由于叶片间的干涉效果，叶片进出口气流转向角 θ 小于叶片弧线中心角 θ_c 。（如图 2-27），把它们的比称为角超过系数 μ ：

$$\mu = \theta / \theta_c \quad (2-51)$$

威尼格(Weinig) 根据势流理论，应用保角映象的方法，根据理论求得的角超过系数为：

$$\mu = \frac{2t}{\pi l} \cos \beta_{\infty} \ln \left(\frac{R^2 + 1}{R^2 - 1} \right) \quad (2-52)$$

在图 2-28 中示出了 μ 值与节弦比以及安装角 $\beta_{A0} = \alpha_m = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2$ 的关系。

图2-28适用于叶片数无限多、无限薄的叶形。对于实际具有厚度的有限叶片数的情况，必须要对安装角 β_{A0} 予以修正，修正后的安装角 β_A 为：

$$\beta_A = \beta_{A0} - \Delta\beta_A \quad (2-53)$$

这里修正值 $\Delta\beta_A$ 用下式表示：

$$\Delta\beta_A = 21\sigma^2\tau \sin 2\beta_A \quad (2-54)$$

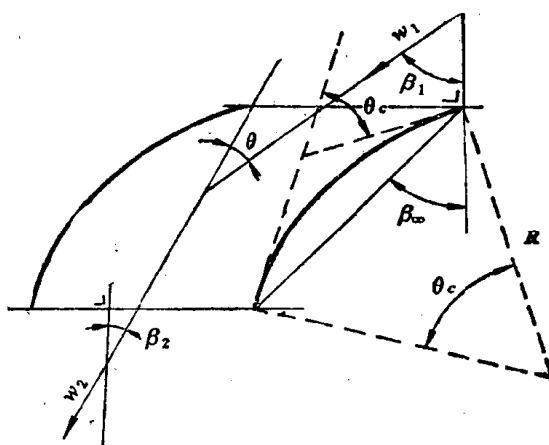


图2-27 角超过系数

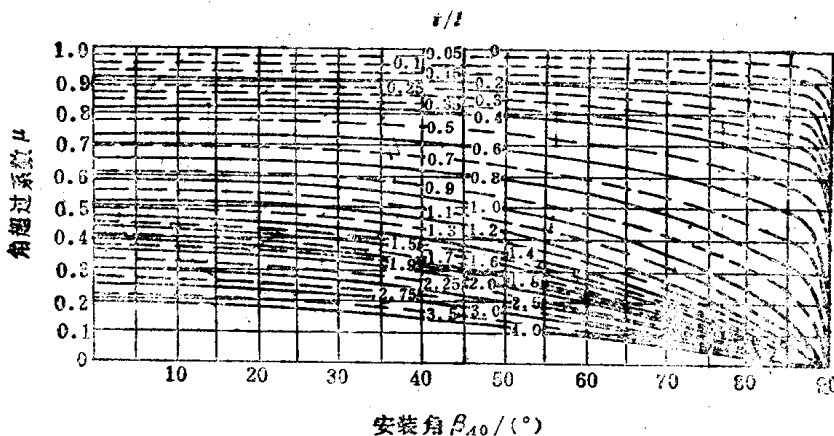


图2-28 角超过系数和安装角

式中 $\tau = y_{t_{max}}/l$ 表示相对厚度的大小。

§ 2-3 离心叶轮叶片形式与相对涡流

一、通流截面和流面上的叶栅配置

对于离心式叶轮来说，由于流面近似垂直于轴线，此时轴向分速度 $v_a \ll v_r, v_\theta$ ，设计时一般可以不考虑轴向分速度 v_a 的变化。

在图2-29中示出了一个多级（图的上半部）和单级（图的下半部）的离心式透平机械的通流截面示意图。

与轴线垂直的流面上的叶栅配置如图2-30所示。如图示那样，在叶轮进出口半径 r_1 和 r_2 之间规则地排列着叶片，故有时称为圆形叶栅，以与轴流式叶轮的直线叶栅相区别。

一般情况下，流体无预旋地进入叶轮进口，这时 $v_{\theta 1} = 0$ ，故由欧拉方程可得：

$$\Delta I_{i1} = u_2 v_{\theta 2} \quad (2-55)$$

叶轮中焓的变化 Δi_R 以及扩压器进出口焓的变化 Δi_s ，分别与式 (2-7)、式 (2-10) 相同。即

$$\Delta i_R = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}, \quad \Delta i_s = \frac{v_2^2 - v_3^2}{2}$$

通常叶轮内相对速度的变化较小， Δi_R 的增加主要是因为离心力 $(u_2^2 - u_1^2)/2$ 的效果，并

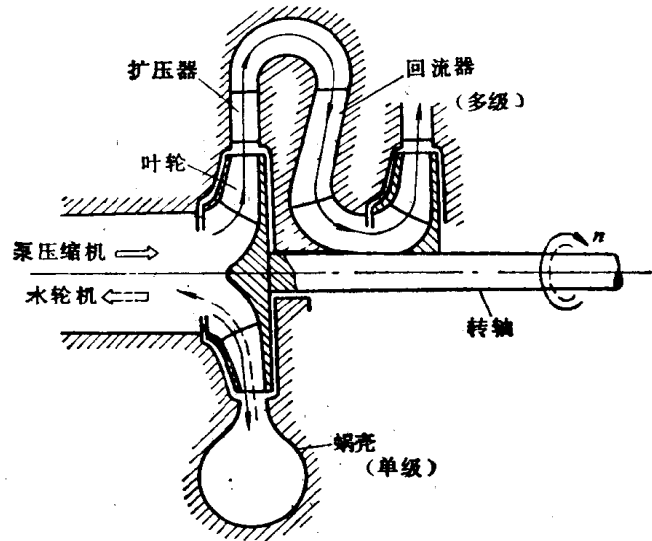


图2-29 通流截面示意图

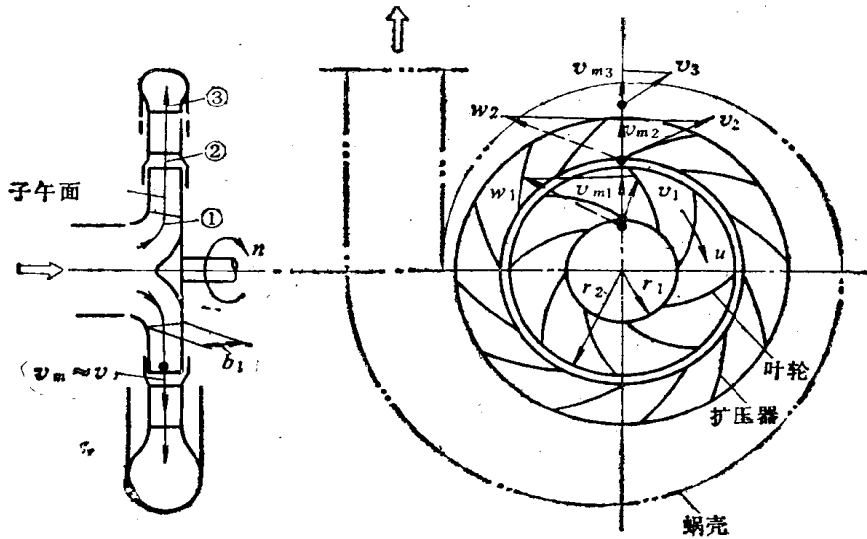


图2-30 流面上的叶栅配置

由此得名为离心式叶轮。

二、速度三角形和叶片形式

叶轮的进出口速度三角形如图2-31所示。同轴流式一样，离心叶轮设计时，一般保持冲角 $i = \beta_{A1} - \beta_1 \approx 0$ 进行设计，以达到损失最小的要求。这里 β_{A1} 表示叶片进口安装角。在叶轮出口，有时将叶片出口安装角 β_{A2} 与相对速度出口角 β_2 的差 $\beta_{A2} - \beta_2 = \delta$ 称之为落后角。当叶片数 N 无限多时 $\delta = 0$ 。

如果叶片进出口宽度分别为 b_1, b_2 ，由连续方程有：

$$m = r_1 b_1 \rho_1 v_{m1} = r_2 b_2 \rho_2 v_{m2} \quad (2-56)$$

对于轴流式而言，一般保持 $v_z \approx \text{const}$ 进行设计，而对于离心式来说，通常保持子午面分速度 v_m 不变来考虑。对于不可压缩流动，当 $v_{m1} = v_{m2}$ 时，则有 $r_1 b_1 = r_2 b_2$ 的关系成立，这说明宽度 b 与半径成反比变化。因此，离心式叶轮的流面不一定为平面，其流面多半为顶角近似等于 180° 的锥面。式

(2-56) 中不用径向分速度 v_r ，而用于午面分速度 v_m ，正是出于流面有某种倾斜的缘故。与轴流式不同的是，离心式叶轮各流面的反动度 Ω ，压力系数 ψ 和流量系数 φ 可以认为不变，一般不必将各流面的值与代表值加以区别。当 $v_{\theta 1} = 0$ 时，

则有如下式子成立：

$$\Omega = \frac{\Delta i_R}{\Delta I_{st}} = \frac{2v_{\theta 2}u_2 - v_{\theta 2}^2}{2(v_{\theta 2}u_2)} = 1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\theta 2}}{u_2} \quad (2-57)$$

$$\psi = \frac{\Delta I_{st}}{u_2^2/2} = 2 \frac{v_{\theta 2}}{u_2} \quad (2-58)$$

$$\varphi = v_{m2}/u_2 = v_{m1}/u_2 \quad (2-59)$$

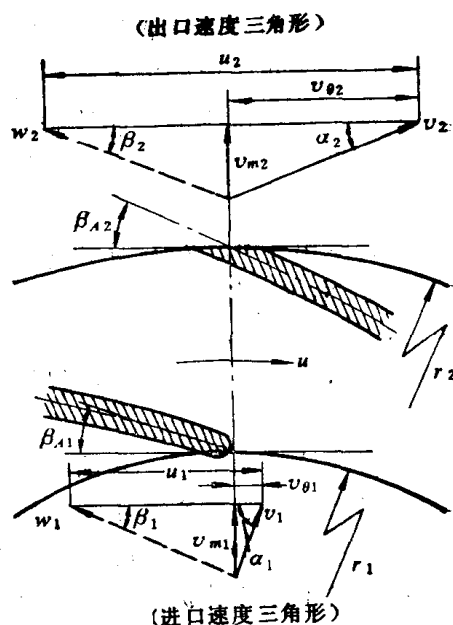


图2-31 速度三角形

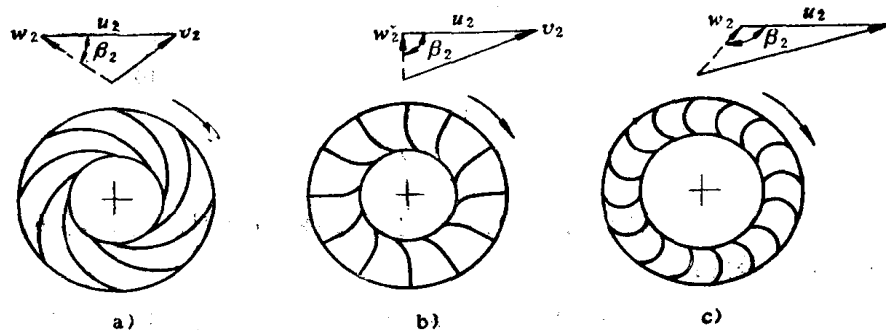


图2-32 叶轮形状

a) 后弯式, $\beta_2 < 90^\circ$, $\frac{v_{\theta 2}}{u_2} < 1$ b) 径向式, $\beta_2 = 90^\circ$, $\frac{v_{\theta 2}}{u_2} = 1$ c) 前弯式, $\beta_2 > 90^\circ$, $\frac{v_{\theta 2}}{u_2} > 1$

从式(2-57)、式(2-58)看出, v_{02}/u_2 的值对 Ω , ψ 有很大影响, 而它的大小与叶片出口安装角 β_{A2} 有关。当 $\beta_{A2} = \beta_2$ 时, 对应于 $\beta_{A2} \cong 90^\circ$, 则有 $v_{02}/u_2 \cong 1$ 的关系式成立。通常将 $\beta_{A2} < 90^\circ$ 的称为后弯叶轮, $\beta_{A2} = 90^\circ$ 的称为径向叶轮, $\beta_{A2} > 90^\circ$ 的则叫做前弯叶轮, 这三种叶轮的形式如图2-32所示。

对于上述三种不同形式的离心叶轮, 大多采用后弯式的叶轮, 这是因为它与其它两种叶轮相比, 后弯式叶轮比较容易获得高效率的缘故。但是对于高压压缩机来说, 通常采用径向叶轮, 特别是整体铣制的径向叶轮, 它可以得到很高的圆周速度 u_2 以实现高压力的要求, 同时强度也很好。前弯式叶轮由于出口速度 v_2 较大, 多用于压力较低的通风机上。

图2-33示出了 v_{02}/u_2 对 Ω 和 ψ 的影响。由图可见, 随着 v_{02}/u_2 的增大 ψ 增大, 而 Ω 却减少。当 $(v_{02}/u_2) > 1.0$ 时, 则出现 $\Delta i_R < \Delta i_s$ 的情况, 这时应特别注意扩压器的设计, 以满足提高机器效率的特性。

为了将叶轮的动能进一步回收、转变为压力能和作为通道, 多级离心式压缩机械在叶轮出口, 通常设置有扩压器(无叶或有叶的)。图2-34分别示出了这两种扩压器的流道示意图。

如图 a) 所示, 当叶片进出口的面积分别为 A_2 , A_3 时, 对于不可压缩流体, 则有

$$\Delta i_s = \frac{v_2^2 - v_3^2}{2} = \frac{v_2^2}{2} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_3} \right) \right] = \frac{\Delta p_s}{\rho \eta_s} \quad (2-60)$$

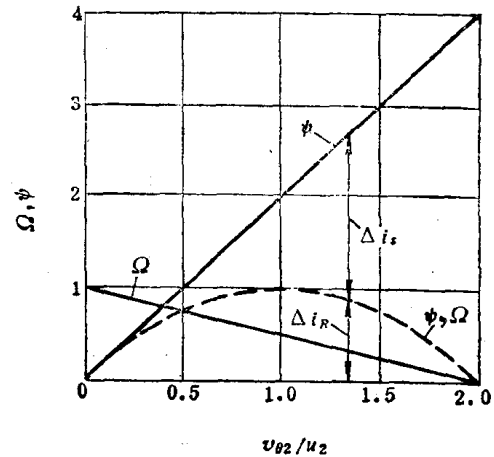


图2-33 反动度和压力系数

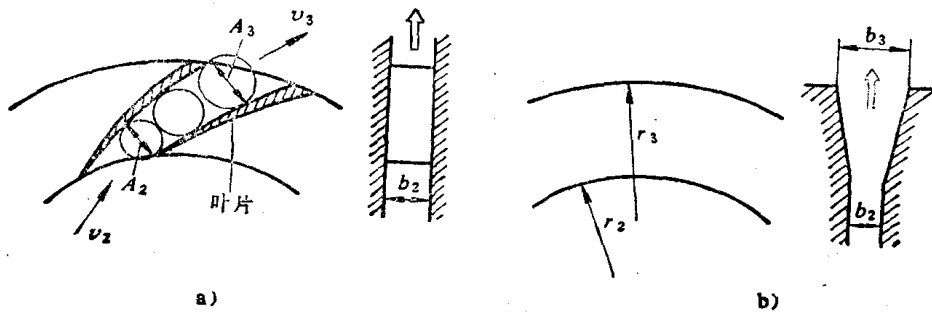


图2-34 扩压器

a) 叶片扩压器 b) 无叶扩压器

对于图 b) 所示的无叶扩压器而言, 如果不考虑粘性和压缩性, 当 b_2 、 b_3 分别表示扩压器进出口宽度时, 其焓差为:

$$\Delta i_s = \frac{v_2^2 - v_3^2}{2} = \frac{v_{m2}^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_2 b_2}{r_3 b_3} \right) + \frac{v_{02}^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \right] \quad (2-61)$$

此外, 蜗壳通流截面面积的计算, 可以简单地根据截面上的平均速度 \bar{v} 的大小加以确定。

$$\bar{v} = a \sqrt{2\Delta H} \quad a = 0.3 \sim 0.4 \quad (2-62)$$

三、相对涡流

在 § 2-1 中我们应用动量矩定理, 导出了叶轮对单位质量流体所作的功, 可以用欧拉关系式 (2-3) 来度量。它表示当叶轮叶片数无限多时, 叶轮对单位质量流体所作的理论功 (或理论能量头)。

对于有限叶片数的实际叶轮, 因为叶片具有厚度, 气流出口角和叶片安装角并不一致, 即 $\beta_2 \neq \beta_{A2}$ (如图 2-35), 使得气流除了从内径向外径沿着叶片方向流动外, 还有所谓相对涡流的运动, 两者叠加起来, 使得叶轮内的气流速度分布不均匀。这种相对涡流的产生, 是由于气体本身具有惯性, 而它的粘性又不大, 当叶轮旋转时, 气体随着叶轮平移而不转动。于是相对于叶轮而言, 气流在有限叶片槽道内会出现一个与叶轮转向相反的旋涡流动, 即相对涡流运动。

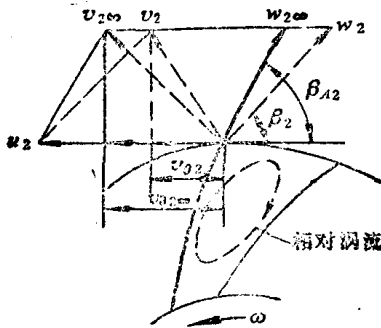


图2-35 有限叶片数的影响

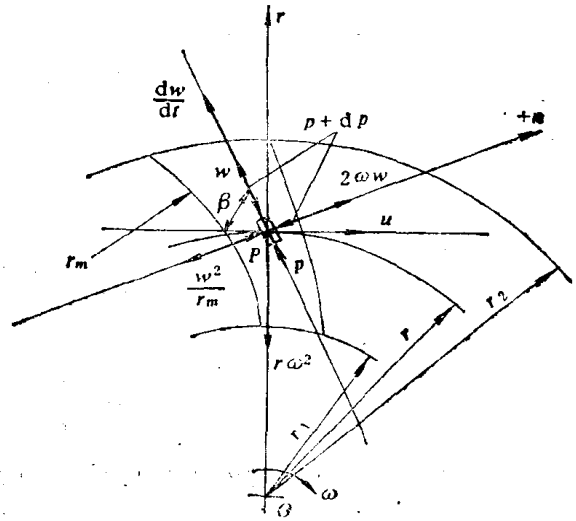


图2-36 叶片通道内气体的流动

下面我们进一步讨论离心式叶轮的径向平面内, 理想流体在有限叶片槽道内的分布规律。

如图 2-36 所示那样, 在叶轮径向平面内的叶片通道中, 取一微元体来考虑。

如果气体在子午面上无分速度只在图示的径向平面内运动。该微元体的质量为:

$$dm = \rho b dn ds$$

式中 b 表示子午面上叶轮的宽度, dn 表示微元体垂直于流线方向的坐标, ds 为沿流线方向的坐标。由图 2-36 所示的加速度, 可以得到作用于微元体上的力如下:

1. 气体随叶片流道转动受到的离心力

$$df_1 = dm r \omega^2$$

2. 相对运动的惯性力

- (1) 气流质点沿半径 r_m 运动的离心力

$$df_2 = dm \frac{w^2}{r_m}$$

- (2) 在叶道中因相对加速度引起的惯性力

$$df_3 = dm \frac{dw}{dt}$$

3. 气流质点因哥氏加速度产生的哥氏力

$$df_4 = dm 2w\omega$$

4. 微元体分别沿法线和流线所受压力差

$$b \, dn \, s \frac{\partial p}{\partial n}, \quad b \, dn \, ds \frac{\partial p}{\partial s}$$

按照达朗贝尔 (D'Alembert) 原理, 上述 1、2、3 项力分别为法线和流线的压力差所平衡, 即

$$dm \left(\frac{w^2}{r_n} - 2w\omega + r\omega^2 \cos \beta \right) = b \, dn \, ds \frac{\partial p}{\partial n}$$

$$dm \left(r\omega^2 \sin \beta - \frac{dw}{dt} \right) = b \, dn \, ds \frac{\partial p}{\partial s}$$

将三角关系: $\cos \beta = dr/dn$, $\sin \beta = dr/ds$ 代入上面两式, 可以分别得到:

$$\frac{\partial p}{\rho} = r\omega^2 dr + \left(\frac{w^2}{r_n} - 2w\omega \right) dn \quad (2-63)$$

$$\frac{\partial p}{\rho} = r\omega^2 dr - w \, dw \quad (2-64)$$

将上两式相减, 最后可得:

$$\frac{dw}{dn} = 2\omega - \frac{w}{r_n} \quad (\beta_{A2} < 90^\circ) \quad (2-65)$$

式 (2-65) 即为后弯式叶轮内相对速度分布的微分方程。

同理, 对径向直叶片叶轮 ($r_n = \infty$) 和前弯式叶轮分别有:

$$\frac{dw}{dn} = 2\omega \quad (\beta_{A2} = 90^\circ \text{ 直叶片}) \quad (2-66)$$

$$\frac{dw}{dn} = 2\omega + \frac{w}{r_n} \quad (\beta_{A2} > 90^\circ) \quad (2-67)$$

对于后弯叶片, 若为单圆弧, r_n 等于常数, 代入式 (2-65) 则有:

$$\frac{dn}{r_n} = \frac{dw}{2\omega r_n - w}$$

对于叶片中心 $n = 0$, 且令相对速度 $w = w_n$ (w_n 为平均相对速度), 对上式进行积分:

$$\int_0^n \frac{dn}{r_n} = \int_{w_n}^w \frac{dw}{2\omega r_n - w}$$

积分可得:

$$w = (w_n - 2\omega r_n) e^{-\frac{n}{r_n}} + 2\omega r_n \quad (2-68)$$

将 $e^{-\frac{n}{r_n}}$ 按泰勒级数展开取至第二项为止 (因为 $r_n \gg n$), 并代入式 (2-68) 则有:

$$w = (w_n - 2\omega r_n) \left(1 - \frac{n}{r_n} \right) + 2\omega r_n \quad (2-69)$$

或者

$$w = w_n \left(1 - \frac{n}{r_n} \right) + 2\omega n \quad (\beta_{A2} < 90^\circ) \quad (2-70)$$

如果令:

$$w_I = w_n \left(1 - \frac{n}{r_n} \right), \quad w_{II} = 2\omega n \quad (2-71)$$

则式(2-70)可写成:

$$w = w_I + w_{II} \quad (2-72)$$

式中 w_I 为相当于角速度 $\omega = 0$ 时, 即叶轮不转动时叶道内的相对速度分布。

由于 $r_n \gg n$, n/r_n 表示叶片曲率的影响, 从式(2-71)可以有: $w_I \approx w_n$ 。它说明沿流线方向的相对速度几乎不变; w_{II} 为相当于 $w_n = 0$ 时, 即叶轮以 ω 转动时叶道内的相对速度分布。也就是说, 因为相对涡流的影响所引起的相对速度分布。

在图2-37中示出了按照式(2-72)叠加后的流动图形。结果表明, 从理论上证明了由于相对涡流的影响, 叶道内的速度分布是不均匀的。

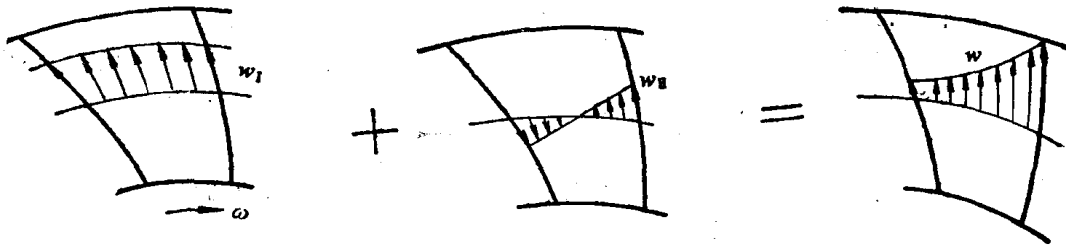


图2-37 叶道内流动的叠加

此外, 从式(2-70)可以看出, 当叶片数无限多时(这时 n 趋近于零), 则有:

$$w = w_n \left(1 - \frac{n}{r_n} \right) + 2\omega n \approx w_n$$

它说明, 在离心式压缩机中, 可以把气流假定当作一元稳定流动来处理并进行分析计算。从理论上证明了, 在要求不是很高的情况下, 一元流动计算还是切实可行的。

对于后弯式叶轮, 如果任一半径截面上的宽度为 b (如图2-38), 在工作面(凸面) $n = -b/2$, 由式(2-70)有:

$$w' = w_n \left(1 - \frac{n}{r_n} \right) + 2\omega n = w_n \left(1 + \frac{b}{2r_n} \right) - b\omega \quad (2-73)$$

在非工作面(凹面) $n = +b/2$, 由式(2-70)可得:

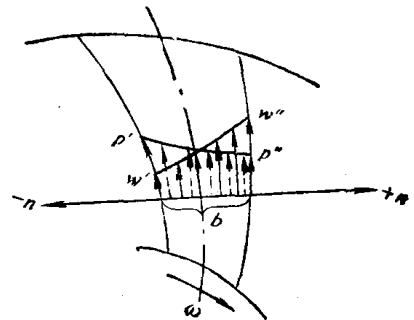


图2-38 叶轮工作面和非工作面

$$w'' = w_n \left(1 - \frac{b}{2r_n} \right) + b\omega \quad (2-74)$$

比较式 (2-73) 和式 (2-74) 可知, $w'' > w'$, 则有 $p' > p''$ 。这说明叶片两侧存在着压力差, 这个压力差正是叶轮通过叶片将能量传给气体所需克服的阻力矩。

同理, 可以得到前弯叶轮和径向直叶片叶轮内的速度分布为:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_n \left(1 + \frac{n}{r_n} \right) + 2\omega n \\ w' &= w_n \left(1 - \frac{n}{2r_n} \right) - b\omega \\ w'' &= w_n \left(1 + \frac{n}{2r_n} \right) + b\omega \end{aligned} \right\} (\beta_{A2} > 90^\circ) \quad (2-75)$$

$$\left. \begin{aligned} w &= w_n + 2\omega n \\ w' &= w_n - b\omega \\ w'' &= w_n + b\omega \end{aligned} \right\} (\beta_{A2} = 90^\circ) \quad (2-76)$$

§ 2-4 斜流式叶轮

一、斜流叶轮的特点及应用的问题

斜流叶轮内的流动如图 2-39 所示那样, 是一种介于轴流式和离心式中间状态的沿着锥形流面的流动, 气流在三个方向的速度分量 v_z , v_θ , v_r 大小相差不大。因此, 斜流叶轮内的流动具有显著的三元性质。

与离心式相比, 斜流叶轮进口处的流动没有急剧的 90° 拐弯, 子午面速度比较大。在同样设计条件下, 它的叶轮外径只有离心式的 $2/3 \sim 1/2$, 且灰尘附着少, 耐磨性好。叶轮的转动惯量 GD^2 比离心式小一个数量级。与轴流式相比, 由于子午面加速流动和离心效果, 斜流叶轮有着良好的低流量特性。

随着节省能源、节省资源以及为防止公害对低噪声的要求, 无论从社会的经济的, 还是国家的规模上来看, 世界各国都极为重视。透平机械的研究者和技术者, 对于高性能透平机械的研究和高精度透平机械的设计, 即使当效率有提高 1% 的可能时, 对此也会予以极大的兴趣并为之献身。

斜流叶轮同时兼有轴流式的大流量系数、高效率 and 离心式的高压力系数、较宽的工作范围的特点。但斜流叶轮在气体机械上的应用却比水力机械来说晚了许多时间, 究其根源, 可以归纳为如下三点:

(1) 斜流泵在工业上的应用早已很普遍, 而斜流式风机, 特别是性能良好的斜流式风机、鼓风机的应用, 却是近数年来事情。因为对于以水为工质的水泵而言, 水的密度为

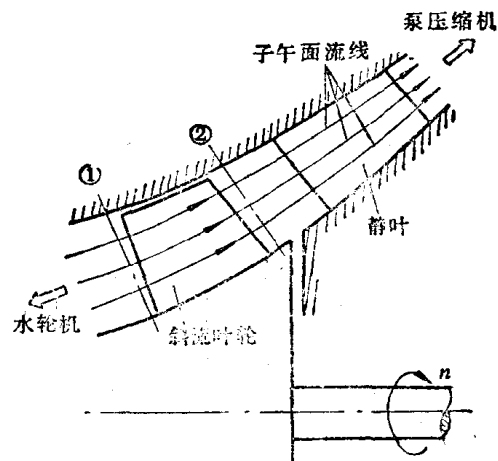


图2-39 斜流叶轮

$1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，它差不多是空气密度的 1000 倍，一般扬水发电用的泵和水轮机，其功率往往达数十万千瓦以上，它不能象容量小的风机那样，牺牲一点效率无所谓，而要尽量谋求提高效率。因此，斜流式叶轮在水力机械中得到了充分的研究并早已用于工业部门之中。

(2) 其次从设计上来看，斜流式水泵叶轮其流量和压力都比较低，因此大多应用一元流动理论加上经验系数予以修正的方法进行设计。而斜流式风机一方面缺乏这方面的经验数据，另一方面，由于周速较高，气体在斜流叶轮内的流动是一种三元流动现象。对这种三元叶轮的设计，在数学上十分困难和相当麻烦，不易为人们所掌握。

(3) 最后是制造上的原因。显而易见，制作与斜流叶轮内部流动相适应的三元叶片，无疑要比二元叶片或一元叶片困难得多。而且一般风机用叶轮大多用钢板焊接而成，焊接二元形状的叶片问题还不大，要焊钢板的三元形状的叶片则是十分困难的事情。

尽管如此，随着省能的时代要求，为减轻公害而要求的低噪声，以及大容量和高压力的用户要求，加上制造技术的进步和设计理论的完善，斜流式透平机械可望获得日益广泛地应用和不断的发展。

二、离心式斜流叶轮的设计

斜流式叶轮的设计，可以按照下面两种方法进行：一种是根据滑动系数的概念，采用离心式延长的方法，另一种是利用叶栅资料的轴流式延长的方法。这里先就离心式延长的设计方法进行说明。

对于斜流叶轮来说，由于与流面垂直方向有着离心力的作用，按照平衡条件所求得的 v_n 、 v_θ 值，各个流面是不相同的。因此，速度三角形和实现该速度三角形的叶片形状，每个流面也是不相同的，叶片形状必然是三元扭曲的叶形。

如图 2-40 所示，现以不含叶片的自由空间内流体的平衡情况来考虑。如果微元流体上过点 P 沿子午面流线的距离为 s ，取垂直于子午面流线的法线方向为 n 。这时沿 n 方向的平衡条件可以写成：

$$\frac{v_\theta^2}{r} \cos \delta - \frac{v_n^2}{r_m} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{v_\theta^2 + v_n^2}{2} \right) = 0 \quad (2-77)$$

式中 δ 表示流线的倾角， r_m 为流线的曲率半径。从上式可知，当给定 r_m 、 δ 以及 v_θ 的分布，便可求出子午面速度 v_n 的大小。设计时，开始可以先假定子午面流线的形状，由已知的 r_m 、 δ 以及 v_θ 值的分布，根据式 (2-77) 求得子午面速度 v_n ，并与假设的流线加以比较，反复迭代计算直至收敛为止，从而得到子午面速度 v_n 的分布。叶轮进口在无预扭的情况下 ($v_{\theta 1} = 0$)，出口周向分速度由下式确定：

$$v_{\theta 2} = \Delta I_{s1} / u_2 \quad (2-78)$$

ΔI_{s1} 在所有流面上通常为一常数，它由设计条件给定。根据不同半径上的叶片出口圆周速度的大小，能够求得各流面上不同的 $v_{\theta 2}$ 的分布值。这样各个流面的速度三角形即被确定。

为了将离心叶轮滑动系数应用于斜流叶轮的设计，为此先引入离心叶轮滑动系数的概念。

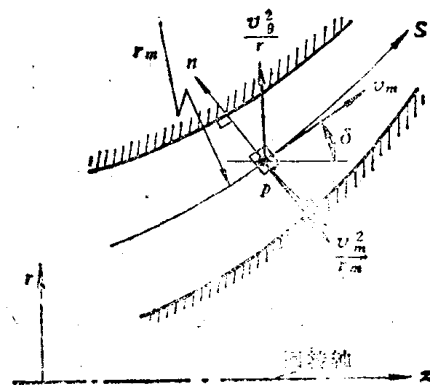


图2-40 平衡条件

下面按照图 2-41 示出的后弯式叶轮的出口速度三角形给予说明。如图所示, 当叶片数 N 无限多时, 出口相对速度 $w_{2\infty}$ 的方向与叶片出口方向 β_{A2} 一致。实际的叶轮叶片数都是有限的, 这时 $\beta_2 < \beta_{A2}$, 真正的速度三角形如图中实线所示。两者的周向分速度的差 v_s 为:

$$v_s = v_{\theta 2\infty} - v_{\theta 2} = v_{m2} (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_{A2}) \quad (2-79)$$

v_s 称为滑动速度。它与圆周速度 u_2 的比定义为

$$1 - \mu = v_s / u_2 \quad (2-80)$$

式中 μ 称为滑动系数。

滑动系数 μ 的确定, 有不少学者进行了理论和实验的研究, 提出了很多半经验的关系式。威斯勒 (Wiesner) 根据叶轮半径比, 出口角 β_2 以及叶片数 N 的关系, 在一定的 β_2 , N 的条件下, 所得到的 r_1/r_2 与滑动系数的变化如图 2-42 所示。从图可见, 在某一临界半径比 $(r_1/r_2)_{cr}$ 以内时, μ 的值几乎不变。当半径比超过 $(r_1/r_2)_{cr}$ 时, 随着 r_1/r_2 的增加, μ 的值很快减少。按照实验结果, $(r_1/r_2)_{cr}$ 可以近似表示为 β_2 和 N 的函数关系:

$$(r_1/r_2)_{cr} = 1 / \exp(8.16 \sin \beta_{A2} / N) \quad (2-81)$$

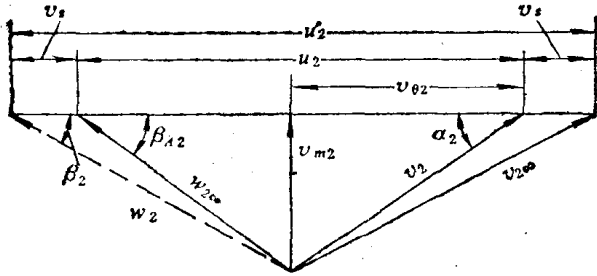


图2-41 滑动速度

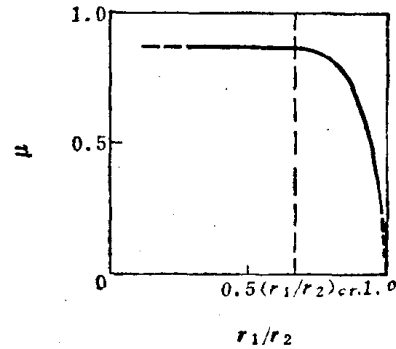


图2-42 滑动系数

这时不同半径比下的滑动系数为:

$$\begin{aligned} & r_1/r_2 > (r_1/r_2)_{cr} \text{ 时} \\ & \mu = (1 - \sqrt{\sin \beta_{A2} / N^{0.70}}) \left\{ 1 - \left[\frac{r_1/r_2 - (r_1/r_2)_{cr}}{1 - (r_1/r_2)_{cr}} \right]^3 \right\} \end{aligned} \quad (2-82)$$

$$\begin{aligned} & r_1/r_2 \leq (r_1/r_2)_{cr} \text{ 时} \\ & \mu = 1 - \sqrt{\sin \beta_{A2} / N^{0.70}} \end{aligned} \quad (2-83)$$

叶片数 N 的最佳值 N_{opt} 可以用下式确定:

$$N_{opt} = \frac{2\pi \sin[(\beta_{A1} + \beta_{A2})/2]}{(0.35 \sim 0.45) \ln(r_1/r_2)} \quad (2-84)$$

于是由式 (2-79) 可得叶片出口安装角 β_{A2} :

$$\operatorname{ctg} \beta_{A2} = \operatorname{ctg} \beta_2 - v_s / v_{m2} = \operatorname{ctg} \beta_2 - (1 - \mu) / \varphi \quad (2-85)$$

设计时如果取冲角 $i = 0$, 则可得叶片进口安装角 $\beta_{A1} = \beta_{i0}$ 。叶片进出口方向决定后, 以下的问题是如何决定叶片的形状。

这里我们介绍一种误差三角形原理, 说明斜流叶轮叶片形状确定的作图方法。(如图 2-43)。

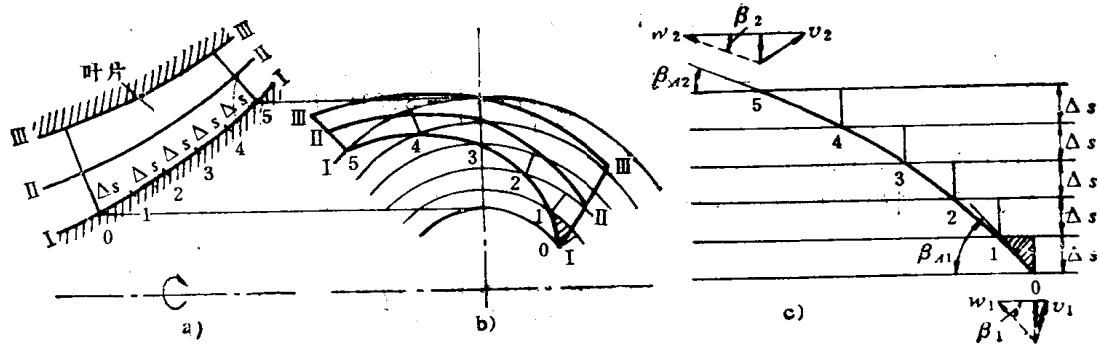


图2-43 误差三角形确定叶片形状

a) 断面图 b) 正面图 c) I—I 流面展开图

如图a)所示,以叶根处的I—I流面的叶片形状为例加以说明。这里首先将叶片进出口沿子午面流线的距离 n 等分为 Δs ,且自各等分点引圆弧线如图b,然后将各圆弧线展开为间隔 Δs 的平行直线如图c,以该展开面上的叶片形状作为直线叶栅来考虑。

展开面上叶片进出口安装角的决定,可以仍用离心叶轮的实验相关式(2-81)~式(2-83)由式(2-85)决定叶片出口安装角 β_{A2} ,按照 $\beta_{A1} = \beta_1 + i$ 的关系可以确定叶片进口安装角 β_{A1} 的大小。根据 β_{A1} , β_{A2} 的值用适当方法确定叶片形状(圆弧或二次曲线),利用图示的误差三角形,可以将展开面上的叶形向流面进行转换,便能得到如图b)所示的流面I—I的叶片形状。按照同样的方法,亦能得到其余流面II—II, III—III, …等的叶形。把各流面的叶片形状在一定位置沿叶高方向重叠所形成的叶片形状,就是一枚三元叶形。

误差三角形方法模拟保角映象原理,用近似的作图方法亦可达到与按照复杂的保角映象计算所得到的相差不大的叶形,可以作为设计时应用与参考。

三、斜流叶轮的滑动系数

按照离心式叶轮延长的方法进行斜流叶轮设计时,关键问题是如何确定滑动系数的值。很早以来,不少学者根据理论计算与实验结果,对离心式叶轮的滑动系数的确定,提出了各种不同的计算式子,前面介绍的威斯勒的实验相关式就是其中较为一般的关系式。理论计算与实验结果表明,通常斜流叶轮的滑动系数比离心式要大,且滑动系数的分布从叶根到叶顶是变化的并非为一常数。

目前关于斜流叶轮滑动系数的研究尚不充分,所提出的式子大多是按照势流理论并考虑涡度的影响,对离心式叶轮的滑动系数进行修正后,提出来的实验相关计算式。这里列出其中代表的关系式如下:

1. 斯坦尼兹(Stanitz)公式

$$\mu_D = (1 - \mu) \sin \delta \quad (2-86)$$

式中 μ_D 表示斜流叶轮的滑动系数, δ 为流线与轴线的倾角。

2. 酒井公式

$$\mu_D = 1 - \left(- \int_0^\lambda \frac{v_{\theta 2}}{u_2} d\theta \right) / \lambda \quad (2-87)$$

式中 $\lambda = 2\pi/N$ 表示相邻叶片的流面间的夹角。

3. 山口公式

$$\left. \begin{aligned} \mu_D &= \left(1 - \frac{\sqrt{\sin \beta_{A2}}}{N^{0.70}} \right) (1 - f) \\ f &= \sin^2 \left[\frac{r_1/r_2 - (r_1/r_2)_{cr}}{1 - (r_1/r_2)_{cr}} \frac{\pi}{2} \right] \exp \left[-3.31 \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right)^{0.3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-88)$$

式中 $(r_1/r_2)_{cr}$ 的值等于式(2-81)。

上述式子可供斜流叶轮设计时参考。

§ 2-5 透平机械与比转数

一、比转数 n_s

三种形式的透平机械，如图 2-44 所示，叶轮形状按照同一方向连续变化时，可以得到不同的机型。从图亦可看出，作为中间形式的斜流叶轮，可以分别用离心式或轴流式延长的方法获得。

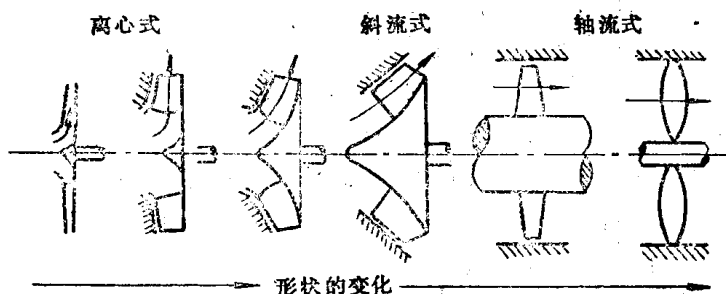


图2-44 叶轮形状的变化

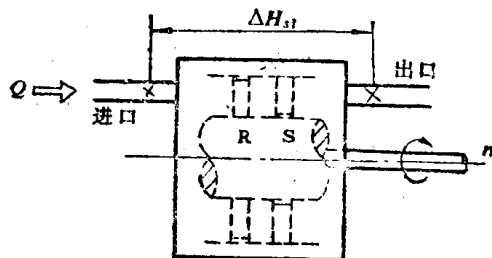


图2-45 比转数

透平机械中常用比转数的概念进行相似设计或选择所需机型。比转数是一个无量纲量，它通常以单进气的一个级作为定义单位。如图 2-45 所示那样，对于进口容积流量为 Q ，能量头上升为 ΔH_{st} 及转速为 n 的级而言，比转数 n_s 定义为：

$$n_s = n \frac{Q^{1/2}}{(\Delta H_{st})^{3/4}} \quad (2-89)$$

式中 Q 用 m^3/min ， ΔH_{st} 用 m ， n 用 r/min 表示。

如果流量 Q 用 m^3/s 表示时，换算关系为：

$$n_s(\text{r}/\text{min}, \text{m}^3/\text{min}, \text{m}) = 0.129 n_s(\text{r}/\text{min}, \text{m}^3/\text{s}, \text{m}) \quad (2-90)$$

风机比转数一般是在空气标准状况 ($\rho = 1.2 \text{kg}/\text{m}^3$) 下的计算值，因此 $\Delta H_{st} = p/\rho$ 中的密度 ρ 常省去，故式(2-89)可简化为：

$$n_s = n \frac{Q^{1/2}}{p^{3/4}} \quad (2-91)$$

全压 p 可用 mmH_2O 或用 Pa 表示，这时换算关系为：

$$n_s(\text{r}/\text{min}, \text{m}^3/\text{s}, \text{Pa}) = 5.54 n_s(\text{r}/\text{min}, \text{m}^3/\text{s}, \text{mmH}_2\text{O}) \quad (2-92)$$

二、叶轮形状与比转数

下面以离心式和轴流式为例，说明叶轮形状和比转数的关系。

对于离心式叶轮而言, 当不考虑密度的变化, 容积流量 Q 等于:

$$Q = 2\pi r_2 b_2 v_{m2} = \pi D_2 b_2 u_2 \varphi$$

在无预旋的进口状态下, 能量头上升为

$$\Delta H_{st} = \eta_{st} u_2 v_{o2} = \eta_{st} u_2 v_{m2} \operatorname{ctg} \alpha_2 = \eta_{st} u_2^2 \varphi \operatorname{ctg} \alpha_2$$

故从式 (2-89) 可得

$$n_s = \frac{(b_2/D_2)^{1/2}}{\sqrt{\pi^2 \varphi \eta_{st} \operatorname{ctg}^3 \alpha_2}} \quad (2-93)$$

上式说明:

(1) 尺寸不同但是几何相似的两个离心叶轮在同一流量点工作时, 两者的比转数一定相等。

(2) 如果两个离心叶轮的比转数相同, 但它们的相对出口宽度 b_2/D_2 以及几何形状则不一定相似。

在图 2-46 中示出了叶轮形状、效率和比转数的对应关系。由图可见, 随着比转速的减小, 叶轮出口宽度也减少, 流动摩擦损失的增加, 使效率下降。如果比转数增大, 出口宽度亦增大。当超过某一界限时, 出口面积的过大叶轮形状不合理, 效率则会降低。因此, 为保持叶轮在较高效率下工作, 比转数有一个最佳的适用范围。如图 2-46 所示那样, 离心叶轮的最佳适用范围为 $3 \sim 14$ (r/\min 、 m^3/s 、Pa) 左右。

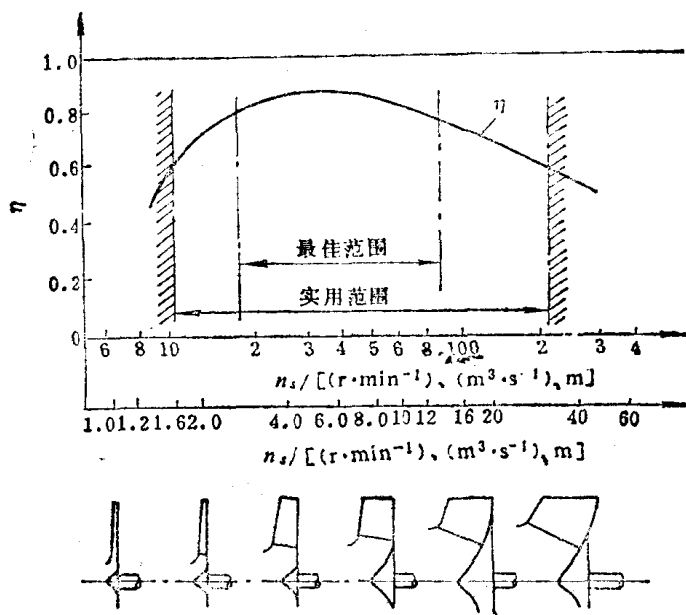


图2-46 离心叶轮与比转数

对于轴流式叶轮来说, 如果不考虑级中轴向速度的变化, 流量 Q 表示为:

$$Q = \pi r^2 (1 - v^2) v_z = \pi^2 D^3 (1 - v^2) n \varphi_{st} / 4$$

一般来说, 轴流叶轮的负荷在叶根处最大, 这时叶根处的能量头为:

$$\Delta H_{st} = \eta_{st} u_k (v_{o2} - v_{o1})_k = \eta_{st} \pi^2 D^2 v^2 Q (C_L \sigma)_k / 2 \sin \beta_{o-k}$$

故由式 (2-89) 则有:

$$n_s = \sqrt[4]{\frac{\varphi_{st}^2 \sin^3 \beta_{\omega,h}}{2\pi^2 \eta_{st} \Omega^3}} \sqrt{\frac{1-\nu^3}{\nu^3}} \frac{1}{(C_L \sigma)_h^{3/4}} \quad (2-94)$$

设计时 η_{st} , φ_{st} 以及叶根处的反动度 Ω , 相对速度矢量平均角 $\beta_{\omega,h}$ 等值不会有很大变化, 故式(2-94)可以写成:

$$n_s \propto \sqrt{\frac{1-\nu^3}{\nu^3}} \frac{1}{(C_L \sigma)_h^{3/4}} \quad (2-95)$$

式中 $\nu = r_h/r_t$ 表示轮毂比, $(C_L \sigma)_h$ 表示叶根处叶片负荷, 设计时通常取 $(C_L \sigma)_{max} \leq 1.0 \sim 1.5$ 。于是由式(2-95)可知, n_s 仅为轮毂比 ν 的函数, 其变化如图 2-47 所示。

由图可见, 随着 n_s 的减小而 ν 增大。当 $\nu \geq 0.9 \sim 0.95$ 时, 叶高的减少流动摩擦损失激增, 效率将下降很快。故对于轴流叶轮其比转数应有一个最小值的限制。

反之当 n_s 增大 ν 会减小, 但过小的 ν 值 ($\leq 0.4 \sim 0.5$) 使得结构上有困难。为此, 通常保持一定的 ν 值, 通过减少 $(C_L \sigma)_h$ 使 n_s 增大 (如图 2-47)。设计时可以先确定叶根处最佳的升力系数 C_L 的大小, 通过减少叶片数来达到。但当叶片数 $N \leq 2$ 时, 升力系数本身不大, 加上阻力增大, 效率也将下降很快。一般来说, 轴流叶轮的 n_s 值不存在最大界限, 从效率角度来考虑, 它的最佳适用范围约为 16~100。

介于离心式与轴流式叶轮中间状态的斜流式叶轮, 在它们的搭接处有着比前两者较高的效率特性。这个范围大致为 $n_s = 10 \sim 23$ 左右。这三种叶轮的比转数与效率的关系已示于图 2-48 之中, 供设计时选择叶轮型式的参考。

对于整台机器它的比转数 N_s 为

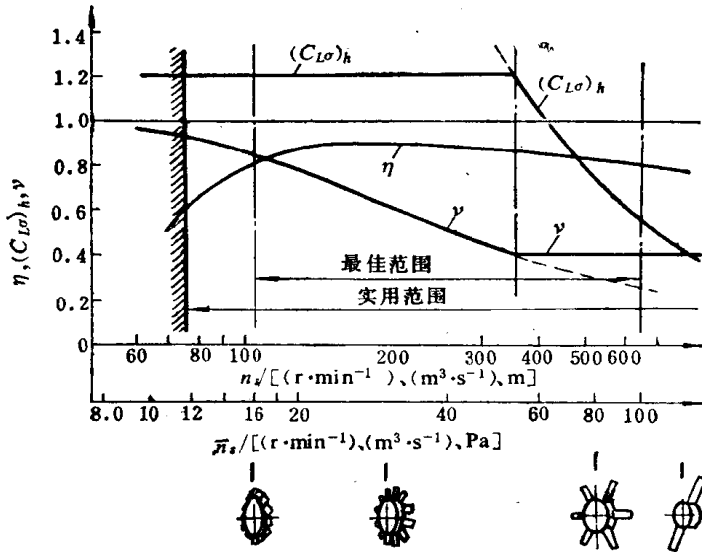


图2-47 轴流叶轮与比转数

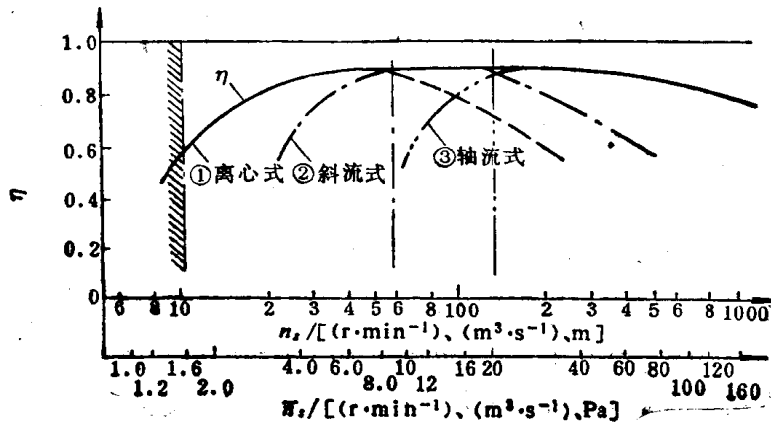


图2-48 比转数与叶轮型式

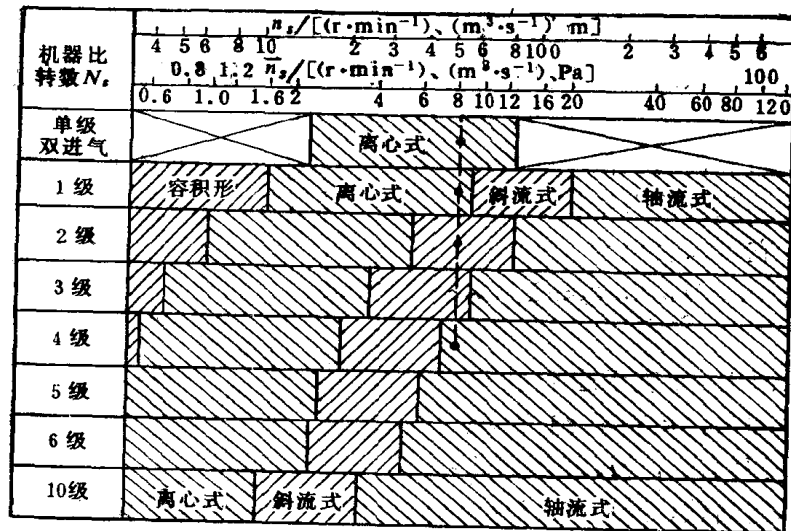


图2-49 比转数和机型的选择

$$N_s = nQ^{1/2} / H^{3/4} \quad (2-96)$$

如果整台机器为单级, 则 $H = \Delta H_{st}$, $n_s = N_s$; 对于级数为 z 的多级机器, $H = z\Delta H_{st}$, 则 $n_s = N_s z^{3/4}$ 。当考虑压缩性时, 由于各级进口的容积流量是变化的。这时 n_s 值仅是第一级的比转数。对于单级双进气的离心式和斜流式叶轮, 这时比转数 $n_s = N_s / \sqrt{2}$ 。

不同比转数下各种机型的选取和级数的决定情况, 如图 2-49 所示。要注意的是, 有时对于同一比转数, 可能出现多种的选择余地。例如在 $N_s = 50 (r/\text{min}, \text{m}^3/\text{s}, \text{m})$ 时, 可以采用单级离心式、单级双进气离心式; 两级或三级斜流式或四级以上的轴流式来实现。遇到这种情况, 应根据综合条件加以考虑。

§ 2-6 透平机械的性能

一、性能曲线

透平机械工作时, 在一定转速条件下, 流量与压力、功率、效率、噪声等的变化关系称为性能曲线。它一般由实验获得, 在设计点附近机器往往具有最高的效率。图 2-50 示出了某斜流式风机的性能曲线例。

在非设计工况下机器的性能, 亦可根据内部流动状态的变化加以预测和估计。这里以图 2-51 所示的速度三角形进行说明。图 a) 示出了当流量 $Q = Q_D$ 及 $Q = Q_D/2$ (Q_D 表示设计流量) 情况下轴流式级的速度三角形的变化。当 $Q = Q_D/2$ 时, 进口相对速度 W_1' 的冲角显著增大, 而出口相对速度的方向几乎不变, 使得周向分速度的变化值 $\Delta w'_0 > \Delta w_0$, 由式(2-23)可知 $(\Delta I_{st})_{Q_D/2} > (\Delta I_{st})_{Q_D}$ 。当级效率不变时, 能量头的变化随着流量的减少而增加, 故呈现出向右下降的 $Q-p$ 曲线的变化。

当流量过分减小, 叶片冲角的增大将会在叶片背面产生分离, 低能量流体的集中会使得级效率很快下降, 因此会呈现出向右升高的 $Q-p$ 性能曲线的变化。

从图 b) 所示的后弯式离心叶轮的出口速度三角形看出, 当 $Q = Q_D/2$ 时, 流量减少, 而

v_{02} 增大, 结果使得焓的变化 $\Delta I_{1,2}$ 增加。

二、性能相似法则

透平机械性能相似必须同时满足几何相似条件和力学相似条件。对于两个几何形状相似的透平机械, 力学相似条件是指进出口速度、压力以及温度分布等流动相似, 即要求支配透平机械性能的某些流体力学和热力学的无量纲参数相等, 它可以表示为

$$\varepsilon, \eta, \bar{N}, \dots = f(M_z, M_u, Re, \kappa, \dots) \quad (2-97)$$

这里 $\varepsilon = p_{out}/p_{in}$ 表示压比, η 表示透平机械的效率, \bar{N} 表示功率系数, κ 表示绝热指数, M_z 表示轴向速度马赫数, M_u 表示周向速度马赫数, Re 表示雷诺数。其中 M_z, M_u, Re 可以用以下式子表示:

$$M_z = \frac{v_z}{a} \propto m \sqrt{\frac{T_{in}}{T_0}} \left(\frac{p_0}{p_{in}} \right) \left(\frac{D_0}{D} \right)^2 \quad (2-98)$$

$$M_u = \frac{u}{a} \propto n \sqrt{\frac{T_0}{T}} \left(\frac{D}{D_0} \right) \quad (2-99)$$

$$Re = \frac{v l}{\nu} \quad (2-100)$$

式中 $a = \sqrt{KRT_{in}}$ 表示进口处气体的声速, ν 表示气体的运动粘度。角标 0 表示参考值或基准值。此外, 在雷诺数的表达式中, 对于轴流式来说, l 一般取叶轮弦长, v 一般用进口相对速度; 而对于离心式来说, 特征长度 l 则往往用叶轮外径 D_2 , 特征速度 v 则多用叶轮出口圆周速度 u_2 表示。

对液体和低速气体流动的泵和风机, 一般情况下都不考虑压缩性的影响。这时对于几何相似的两台机器内的流动, 其力学相似条件只要满足流量系数 φ 和雷诺数 Re 相等的条件便可。

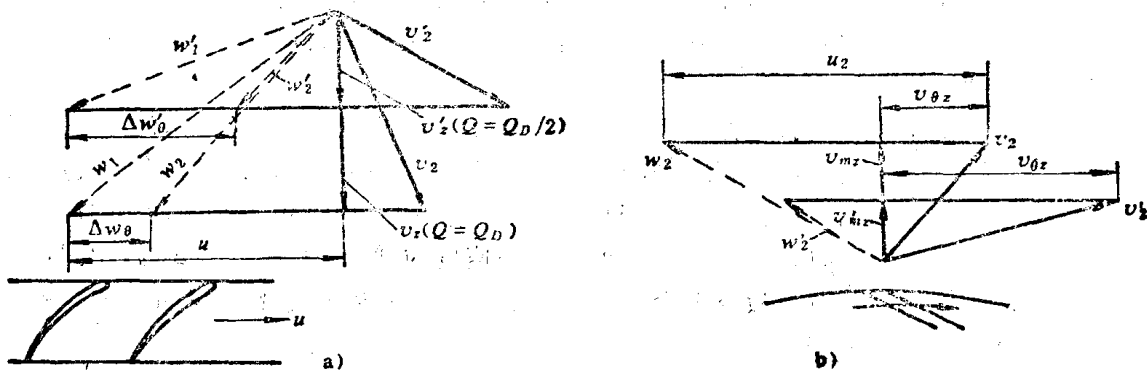


图2-51 不同流量下的速度三角形
a) 轴流式 b) 离心式

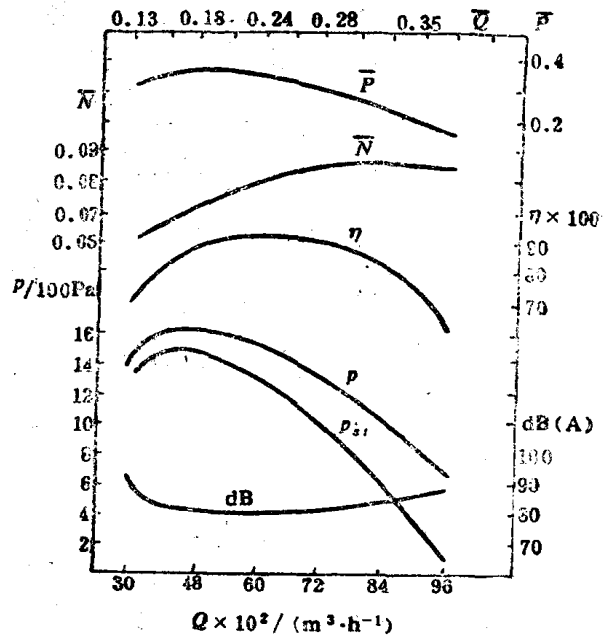


图2-50 斜流风机性能曲线

特别是在临界雷诺数以上时，雷诺数的变化对性能的影响并不大。在这种情况下只要满足雷诺数近似相等亦可，这时无量纲性能仅为流量系数 φ 的函数关系。

对于两台相似的泵和风机，其流量、能量头、功率的换算关系分别为：

$$\frac{Q'}{Q} = \left(\frac{D'}{D}\right) \frac{n'}{n} \quad (2-101)$$

$$\frac{H'}{H} = \left(\frac{D'}{D}\right)^2 \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \quad (2-102)$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{D'}{D}\right)^5 \left(\frac{n'}{n}\right)^3 \quad (2-103)$$

对于同一台机器在不同转速下运转时，相似运转条件下的流量 Q ，能量头 H ，功率 P 与转速 n 的关系为：

$$Q \propto n, H \propto n^2, P \propto n^3 \quad (2-104)$$

它们的变化关系如图 2-52 所示。由图可见，在设计转速条件下，机器有着最高的效率。等效率线为一组 $\varphi = \text{const}$ 的近似抛物线群。当转速降低时，雷诺数的减少使得流动效率降低，机械损失的比例增大，结果机器的效率下降；反之转速增大时，由于压缩性的影响效率也会下降。所以效率的等高线如图 2-52 所示那样，呈现出以设计点为中心的封闭曲线。

试验研究中常常用几何相似的模型代替实机进行试验预测实机的性能。这时如果模型与实机的雷诺数相差很大时，必须考虑 Re 数对性能变化的影响。图 2-53 示出了 Re 数与损失系数 $\zeta = h_l / (v_1^2 / 2)$ 和叶轮流动效率 η_h 之间的关系。如图 a) 所示那样，当 $Re < 10^5$ 时，叶片表面大部分被层流边界层所覆盖，损失的增加主要是由于层流边界层的形成生长和被分离造成，所以叶轮流动效率下降。如图 b) 所示，在低临界雷诺数 $(Re)_{cr1}$ 以下，流动效率 η_h 因为雷诺数较小叶栅损失增大而下降。当雷诺数超过高临界雷诺数 $(Re)_{cr2}$ 时，开始出现表面粗糙度的影响 η_h 与 Re 数无关。而在 $(Re)_{cr1} \sim (Re)_{cr2}$ 雷诺数的影响比较缓和。进行模型试验研究时，一般希望 Re 值大于 $(Re)_{cr2} \approx 2 \times 10^6$ 为宜。

考虑雷诺数的变化对效率的影响，各国学者提出了大量的换算关系式，可以将它们写成如下的一般表达为

$$1 - \eta \propto Re^{-n} \quad (2-105)$$

式中 n 表示与临界雷诺数有关的指数。不同换算的选择要注意其使用条件与应用范围。

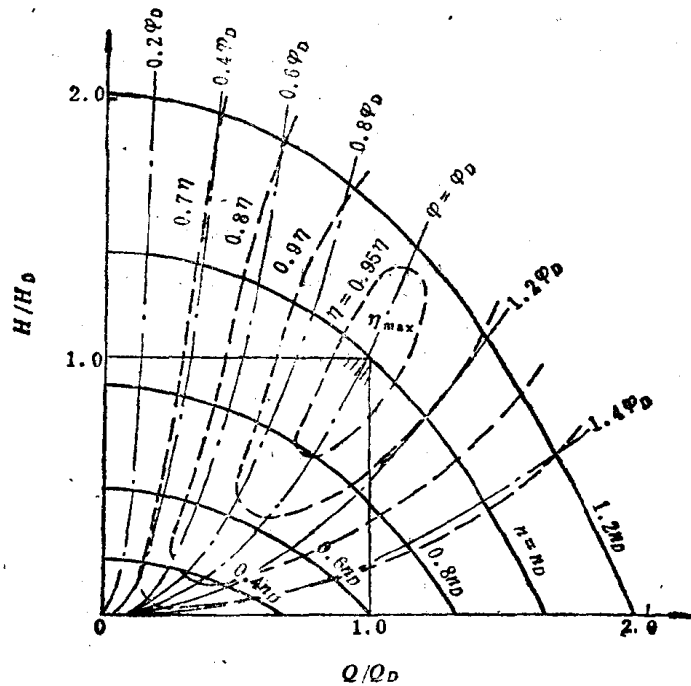


图2-52 转速与性能的变化

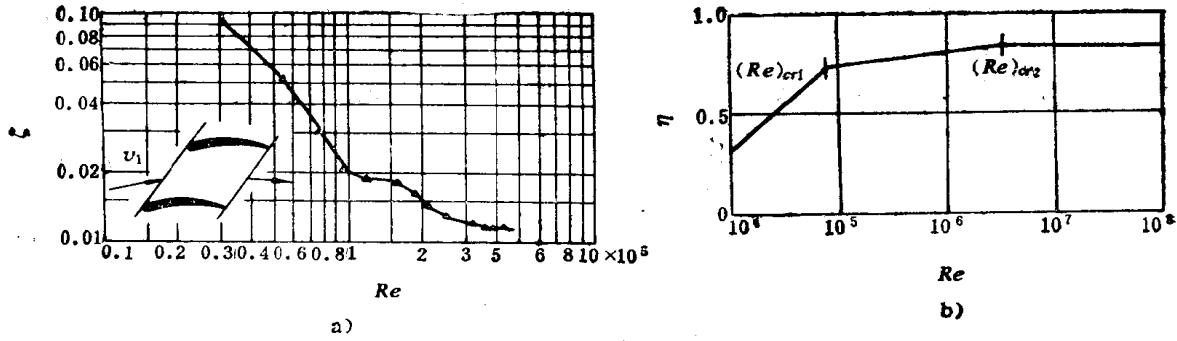


图2-53 雷诺数对效率的影响

对于必须考虑压缩性影响的压缩机来说，性能相似条件除了与非压缩性情况的泵和风机所要求的力学相似条件以外，还要求补充马赫数 M 和绝热指数 κ 相等的相似条件。

如果是同一工质下的两台压缩机，这时 κ 自动相似。在这种情况下，压缩性流动的力学相似条件为 φ ， Re ， M 相等亦可。当然表示压缩机性能的独立变量不一定非要这三个无量纲特征数不可，还可以是其它三个无量纲特征数的组合。对于多级压缩机，在很多情况下，往往用第一级的轴向速度马赫数 M_x 和周向速度马赫数 M_u 来代替 φ 和 M ，如果雷诺数 Re 的影响可以不考虑的话，这时压缩机的性能可以用式(2-98)、(2-99) 来表示(如图2-54)。利用这种无量纲特性曲线，可以看出任意进口条件下 (p_{11}, T_{11}) 相似压缩机的性能。

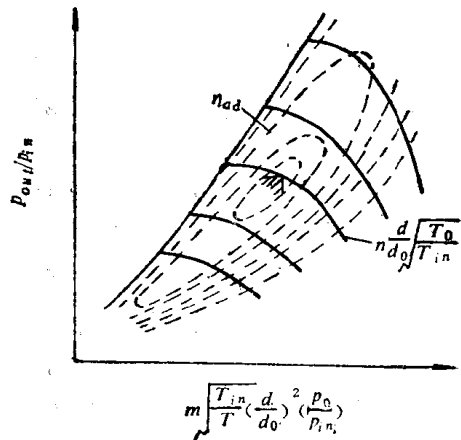


图2-54 压缩机的特性

如果是同一台压缩机在不同进口状态下的特性，直径 D 可以省去，这时常常用 $m\sqrt{T_{11}/T_0} (p_0/p_{11})$ 为修正流量， $n\sqrt{T_0/T_{11}}$ 为修正转速表示其性能曲线。

马赫数对压缩机性能的影响，一般来说，对于轴流式而言，当进口马赫数超过临界马赫数时，压力系数将急剧减少，效率也会降低；对于离心式来说，随着周向出口马赫数 M_{u2} 的升高，效率将逐渐降低。

对于绝热指数 κ 不同的压缩机内的流动，在一定马赫数 M_u 的范围内，其相似性能的换算，可以采用近似的换算方法进行，读者可参考这方面的有关文献。

三、性能曲线与比转数

透平机械在非设计点下的外部特性，取决于透平机械内部流动状态，并且与叶轮形状即比转数有关。图2-55示出了在一定比转数条件下，水泵的扬程 H ，功率 L ，效率 η 与流量的关系。由图可见，随着比转数的不同，特性曲线保持一定的趋向而变化。例如对于比转数较大的轴流式而言，在零流量点附近，非设计点与设计点的功率比 $L/L_D \gg 1$ ，说明在非设计工况下，电机负荷加大，这时扬程急剧增加。而作为离心式与轴流式中间状态的斜流式机器，设计点以外的性能比前两者的变化都显得比较缓和。

由于比转数与特性曲线有着一定的关系，因此进行设计时，可以按照比转数选择适合于

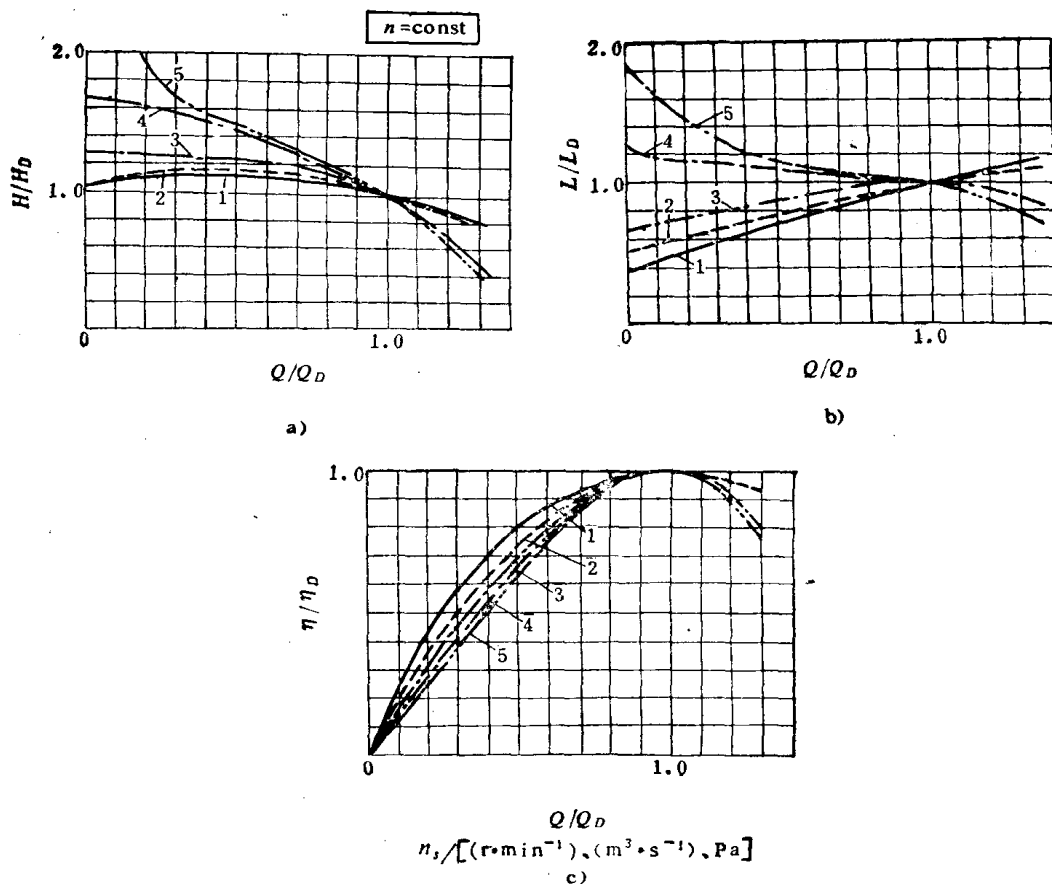


图2-55 比转数和特性曲线

1— $n_s = 3$ (离心式) 2— $n_s = 5$ (离心式) 3— $n_s = 11$ (离心式) 4— $n_s = 17$ (斜流式) 5— $n_s = 34$ (轴流式)

具体使用条件的机型。

四、小流量域特性

透平机械在非设计点工作时，其内部流动与设计状态下的流动情况会有着较大的不同。特别是在小于设计流量时，这种差别更为明显。下面对此加以进一步地说明。

透平机械叶轮内的流动，例如斜流叶轮子午面上的流线，在设计流量点附近，其流面为一组近似的圆锥面如图2-56 a 所示。保持转速不变、当流量减少时，在叶轮内作用于流体的离心力比半径方向的压力梯度要大，这时叶轮内的子午面流线将沿着径向移动如图2-56 b，当流量减少至最高效率点流量的40~60%左右时，首先会在进口处的叶顶附近发生逆流现象，进而扩展到出口侧的叶根处形成逆流区如图2-56 c。

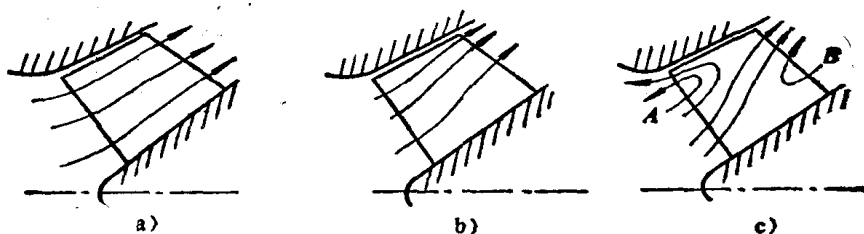


图2-56 子午面流线的变化

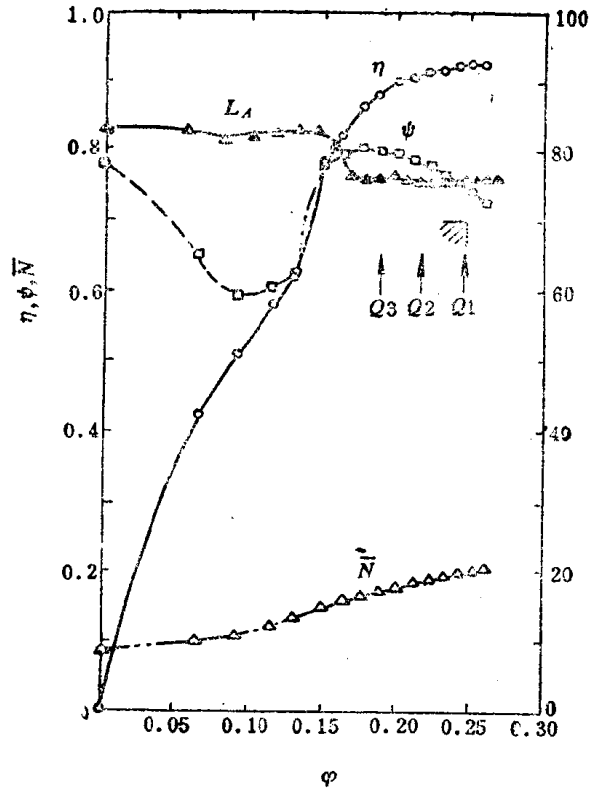


图2-57 斜流风机的小流量域特性

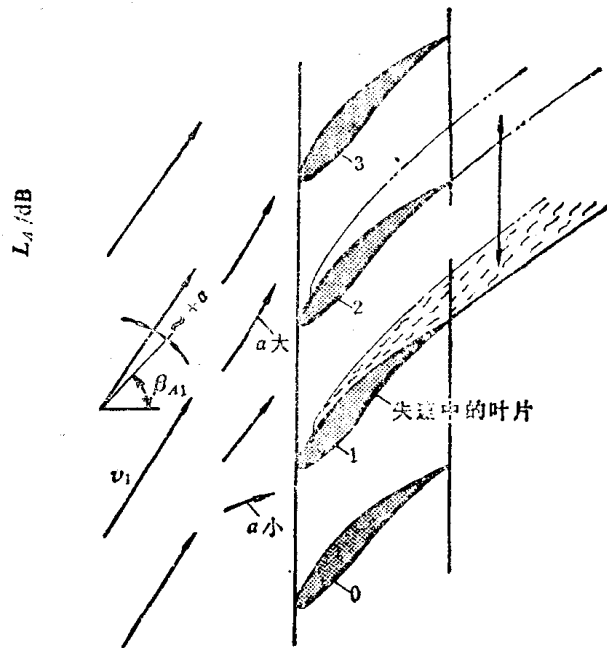


图2-58 旋转失速

由于逆流区域的存在，使得斜流叶轮内的流动和能量传递，近似于离心式的流动状态。同时这种逆流区域随着流量的进一步减少将明显增大。当流量小于某一临界值时，压力先是陡然减小继而急剧上升，图2-57示出了某斜流式风机的小流量域的特性曲线。对于比转数一定的斜流叶轮而言，出口侧可以采用不同的轮毂比，改善其小流量域的性能。同时实验表明，斜流叶轮在小流量时性能变化比离心式和轴流式都要显得缓和些。

对于轴流压缩机来说，如果当转速不变流量减少时，叶轮攻角增大。当达到某一正攻角 $+\alpha$ 时，气体首先从某一叶片表面分离并扩展到相邻叶片，致使整个叶栅产生所谓的旋转失速现象。在图2-58中示出了叶轮的旋转失速过程。压缩机内的这种失速现象，对于叶轮来说，首先发生在叶轮顶端；对于静叶来说，则出现在叶根。由于动、静叶内不同失速区域相互干涉的结果，造成多级压缩机在小流量时的内部流动状态非常复杂，正确的性能预测还有待于进一步的深入研究。

当泵、风机、压缩机处于小流量状态下工作时，将引起压力和流量的周期性变化，使得透平机械运转不稳定，这种现象称为喘振。喘振是一种强烈的自激振动现象。如果

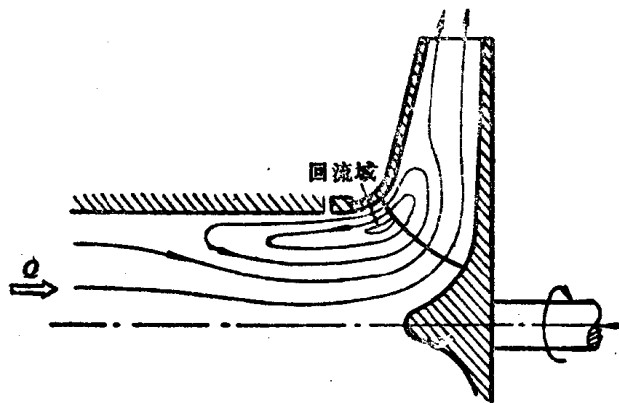


图2-59 离心叶轮的回流域

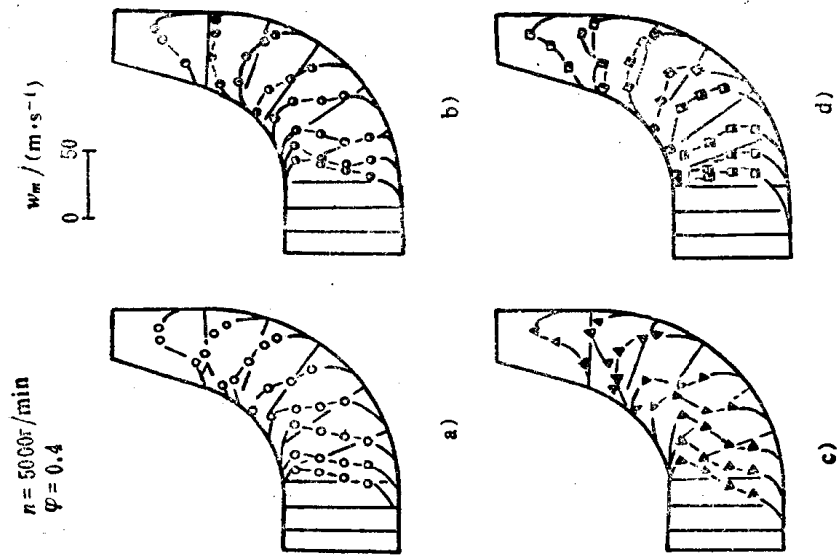
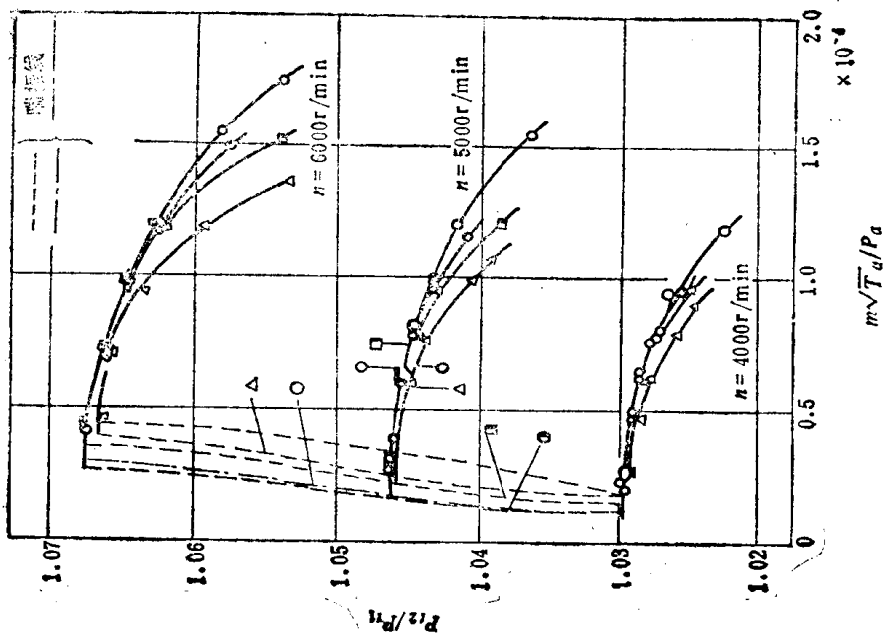


图 2-60 叶轮性能的比较

图 2-61 叶轮内相对速度的分布

机器长期在喘振状态下运转的话，会造成机器或整个系统产生破坏和导致事故，使用时应当充分加以注意。

离心式叶轮在小流量区域运转时，叶轮进口处容易产生回流现象（如图2-59）使得子午面流线发生变化。随着流量的减少，回流区域不断向外扩展，因此不会向轴流叶轮那样引起激剧的流面变化。故离心叶轮在小流量区域的性能变化比轴流式的场合要稍微缓和些。

此外，随着离心式风机、压缩机的大形化，在叶轮进口处，压力、速度以及温度的分布会出现不均匀现象，对叶轮性能产生影响。图2-60示出了叶轮进口处径向和周向速度分布不均匀时叶轮性能的比较。图中△表示速度分布在轮毂侧减少；■表示速度分布在叶顶侧减少；⊙表示速度分布在圆周方向不均匀；○表示进口处速度分布均匀时的情况。由图可见，均匀进口状态时压比最大，随后按照⊙■△的次序减少，而喘振线按照同一顺序变窄。即相对于喘振流量线○而言，周向进口不均匀时，喘振线向小流量侧移动，轮毂侧进口不均匀时，喘振线则向着大流量方向移动。当叶顶侧进口不均匀时，喘振线变化不大。

在图2-61中还示出了这四种情况下叶轮内相对速度分布的测量结果。

§ 2-7 透平机械内的三元流动

前已叙及，透平机械可以按照流面的形状分为不同类型。可以看出，斜流叶轮内的流动具有明显的三元特征。为了较好地把握叶轮内的流动情况，以便进行高精度的透平机械设计，这里以轴流叶轮为例，进一步对叶轮内的三元流动情况加以说明。

对于轴流式透平机械而言，一般情况下，叶轮内的流动可以当成是与转轴同心的圆柱面上的流动，应用平面叶栅理论进行叶片设计。实际上流体在叶轮与静叶内的流动仍然属于三元流动现象，下面就一些影响因素予以说明。

一、流道形状的影响

如图2-62所示那样，当流道倾斜时，在倾斜壁面附近会产生明显的径向流动。由于流线在子午面内呈曲线流动，于是就有是沿锥面流动进行叶片设计还是沿曲面流动进行叶片设计的问题。沿曲面流动设计时，必须考虑因流线弯曲所产生的离心力的影响。如果流线曲率比较大，该离心力在半径方向的分量 $\pm v_m^2 \cos \varepsilon$ 值，则与流体绕 z 轴旋转所产生的离心力 v_0^2/r_m 相同， v_0^2/r_m 是重要的径向平衡条件，叶片设计时要充分注意。

二、叶片厚度的影响

当不考虑叶片厚度影响时，流体的运动如图2-63 a 所示那样，它处于同心的圆柱面上。实际的叶片都具有厚度，如 b) 示出的那样，当叶片厚度随着半径变化不同时，流线面积的减少亦不相同，为了补偿这种不同，使得流线发生径向移动。

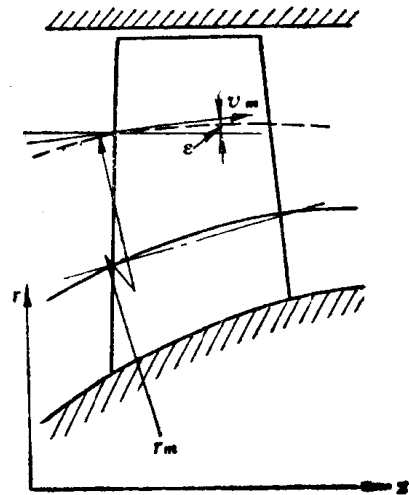


图2-62 流道倾斜的影响

三、叶面气动作用力径向分量的影响

流体沿叶面转向时，在与叶面垂直的平面内作用于叶面的切向力，如果叶面与半径方向一致，该力在半径方向无分量。在叶面相对于半径方向倾斜的情况下，该力的径向分量则会引起径向流动。这种影响在叶片的压力侧比较显著。根据叶面与半径方向的倾斜状态，会产生内向或外向的径向流动。图 2-64 a 示出了外向径向流动的情况，b) 在所示的情况下，进口处为内向流，出口处则呈现为外向流动。

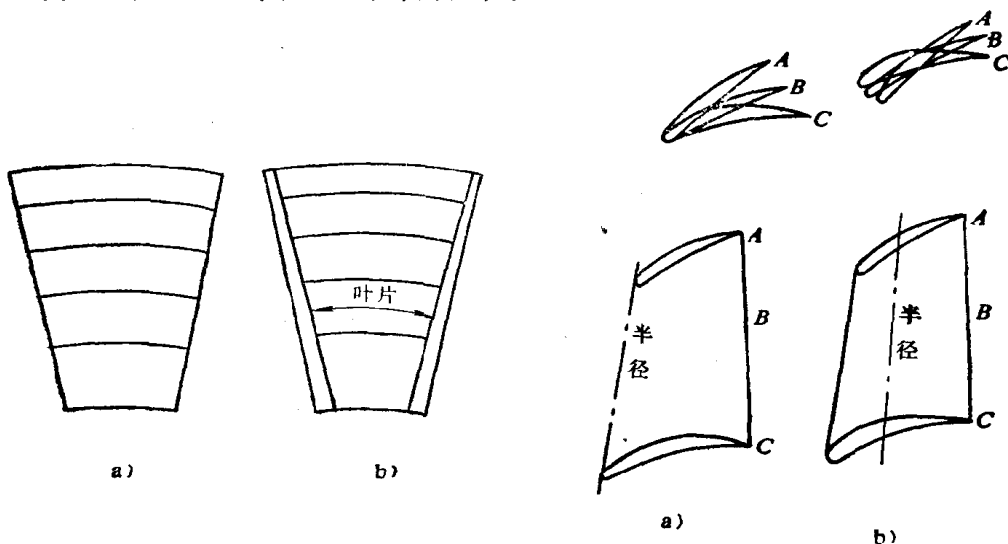


图2-63 叶片厚度的影响

图2-64 叶面的径向倾斜

四、叶栅进出口径向密度梯度的影响

当叶栅进出口之间存在径向密度变化时，即使没有径向速度分量，也会产生半径方向的流动。这时流体运动的单纯径向平衡条件为：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r} \quad (2-106)$$

如果绕翼的速度环量为 Γ ，则可将周向分速度写为 $v_\theta = \Gamma/r$ 。当不考虑熵沿径向变化，即对于绝热过程有 $p = c\rho^\kappa$ (c 为常数， κ 表示绝热指数)，由式 (2-106) 可得：

$$(\kappa/\kappa - 1)c\rho^{\kappa-1} = \text{const} - \Gamma^2/2r^2$$

上式说明：当叶片环量 Γ 不同时，叶栅前后的密度在半径方向亦不相同。假如将叶片进出口的流体看成是一根流管，这时连续方程写成：

$$\int_r^{r_1} \rho v_z r dz \Big|_1 = \int_r^{r_1} \rho v_z r dz \Big|_2 \quad (2-107)$$

在叶顶附近， $\rho v_z r$ 值叶片出口比进口大，当叶顶半径 r_1 一定时， $(r_1 - r)$ 的值随着 $\rho v_z r$ 的增加而减小，因此流线必然向叶顶方向移动。即是说，虽然叶栅进出口没有径向分速度，但由于密度变化，叶栅内仍会出现径向流动，它的大小与 Γ 及 $\rho v_z r$ 有关。

五、涡流型式的影响

轴流机械内的流动，当叶片数很多轮毂比 r_h/r_l (r_h 为叶根半径) 比较大时，可以用二元流动来考虑。这时积分式 (2-106) 可得：

$$\Delta p = \int_{r_h}^{r_l} \rho \frac{v_\theta^2}{r} dr \quad (2-108)$$

上式表明, 在轮毂比较大的情况下, 径向速度和压力的变化将很小, 这时轴流压缩机的性能, 可以用叶轮平均半径处的值来表示。

一般轴流式透平压缩机械, 设计时通常保持全压沿半径方向变化为一常数。对于非压缩流体, 由式 (2-106) 可以有如下关系式成立:

$$v_z \frac{dv_z}{dr} = -\frac{v_\theta}{r} \frac{d}{dr}(rv_\theta) \quad (2-109)$$

对于可压缩流体, 当滞止焓和熵值沿径向一定时, 亦可得到同样关系式。由式 (2-109) 告诉我们, 如果给定周向速度沿径向分布的函数关系 $v_\theta = f(r)$, 则可求得轴向速度 v_z 沿半径方向的大小。这种 $v_\theta = f(r)$ 的关系时常称为涡流型式。它的代表设计流型有:

1. 等环量流型 (自由涡流型)

$$v_\theta = K/r \quad (2-110)$$

由式 (2-109) 于是有 $v_z = \text{常数}$ 的关系成立。这说明按等环量流型设计时, 轴向速度沿径向不变。这种流型一般取进口圆周分速度 $v_{\theta 1} = 0$, 故全压沿径向分布亦为常数。这时反动度 Ω 表示为:

$$\Omega = 1 - (K/2r^2\omega) \quad (2-111)$$

上式说明: 等环量流型的轴流机械, 反动度沿径向增大。由于 $v_{\theta 1} = 0$ 这时叶轮进口前无需设置进口导叶, 故称为自由涡流型。是一种广泛应用的涡流型式。

2. 强迫涡流型

$$v_\theta = Kr \quad (2-112)$$

由式 (2-109) 可得该流型的轴向速度 $v_z = \sqrt{A - 2K^2r^2}$, 它说明这种流型的轴向速度沿径向而变化。

如果 $v_{\theta 1} = 0$, 这时反动度 Ω 等于

$$\Omega = 1 - (K/2\omega) \quad (2-113)$$

说明反动度 Ω 沿径向一定。设计时这种流型很少采用。

3. 一般涡流型

将上述两种流型写成更一般的涡流型式为

$$v_\theta = ar^n \mp \frac{b}{r} \quad (2-114)$$

或者写成:

$$v_{\theta 1} = ar^n - \frac{b}{r}, \quad v_{\theta 2} = ar^n + \frac{b}{r} \quad (2-115)$$

由于叶轮进出口都具有周向分速度, 故要设置进出口导叶才能达到。这种流型常用于多级轴流压缩机的设计, 并可满足全压沿径向分布为一常数的设计要求。它的反动度为

$$\Omega = 1 - (a/\omega)r^{n-1} \quad (2-116)$$

在这种流型中, 当常数 a 、 b 、 n 为不同数值时, 可以有以下三种型式:

(1) 当 $a = 0$ 或 $n = -1$ 时, 这种流型即为自由涡流型。

(2) 当 $n = 1$ 时, 反动度 $\Omega = 1 - (a/\omega)$, 即反动度 Ω 与半径无关, 而为一常数, 故有时称为等反动度型。大多数情况下, 可以采用 $\Omega = 50\%$ 的等反动度流型进行轴流压缩机的设计。这时叶轮进出口轴向速度为:

$$v_z^2 = -2a^2 r^2 \pm 4ab \lg r + \text{const} \quad (2-117)$$

(3) 当 $n = 0$ 时, 反动度 $\Omega = 1 - (a/r\omega)$, 即反动度随着半径的增大而变大。这时叶轮进出口轴向速度为:

$$v_z^2 = -2a^2 \lg r \mp \frac{2ab}{r} + \text{const} \quad (2-118)$$

利用式 (2-115) 的关系, 将自由涡流型和强迫涡流型可以写成:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{r} + \omega r \quad (2-119)$$

在轴对称情况下, 由上式可得轴向涡度分量 ζ_z 为

$$\zeta_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} = 2\omega$$

如果 I_0 表示单位体积的滞止焓, s 表示熵, 流体温度用 T 表示的话, 则有以下式子

$$\frac{\partial I_0}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} = 2\omega v_\theta - v_z \zeta_\theta \quad (2-120)$$

成立。当 I_0 和 s 沿径向不变, 并将周向涡度分量 ζ_θ 的关系代入上式, 可得

$$2\omega v_\theta + v_z (\partial v_z / \partial r) = v_z (\partial v_r / \partial z)$$

该式表明: $\partial v_r / \partial z \neq 0$, 故在一般情况下总是存在着沿半径方向的流动。

六、二次流的影响

如果流体密度一定, 当不考虑流体粘性时, N-S 方程的径向式子为:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} - f_r \quad (1-121)$$

对于静叶而言, 主流区内 v_r 较小, 而在边界层内 v_θ 、 v_z 又比主流区小。同时在叶片尾流区内 f_r 也比较小, 因此在静叶表面边界层内出现半径方向的内向流动, 低能量流体在叶根处集中。叶顶间隙的存在, 也会出现自压力侧向负压侧的流动 (如图 2-65)。

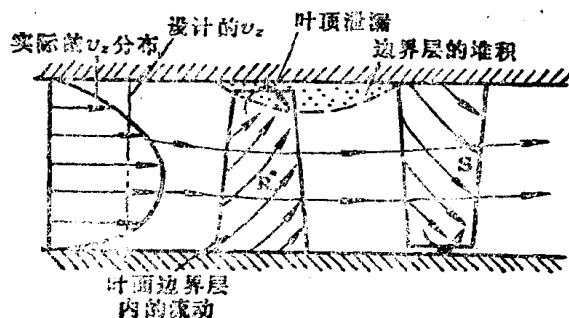


图2-65 叶轮与静叶内的流动

对于叶轮而言, 在叶轮表面边界层内相对速度的减小, 使得绝对速度的周向分量 v_θ 增大, 叶面边界层内存在着比主流区大的离心力作用。而边界层内的压力和压力梯度可以认为与主流区的值相等, 该离心力的作用克服半径方向的压力梯度, 产生如图 2-65 所示的半径方向的外向流动 (二次流)。这种离心流动的结果, 使得叶面边界层在叶顶堆积。大量低能量流体的集中, 往往使得叶轮失速首先从叶顶开始发生。叶轮内的这种二次流现象, 亦可用非粘性涡运动理论加以解释。即随着流线移动着的涡丝, 由于叶片压力侧和负压侧的速度差, 将

产生沿流线方向的二次涡，从而引起二次流动。

而在叶顶壁面边界层区域的叶栅进口相对速度，一部分经顶端间隙自压力侧流向负压侧成为泄漏流动；另一部分冲击叶片前缘刮擦边界层，在叶顶压力侧形成刮擦涡运动。

此外，叶面和壁面边界层影响所形成的角失速区域的存在，使得翼展中部平均轴向速度增加。当角失速区增大到某一限度，轴向速度比急增，这时将会引起叶根处的全面失速。

叶片尾迹流的伴随涡运动，目前无论定性还是定量的研究都还不充分。有的研究表明，这种伴随涡运动在叶根附近比较明显，因为粘性影响自后缘流出衰减也较快。对于轴对称流动当叶栅稠度（弦节比）较大时，伴随涡的作用可以看成为流面扭曲的影响。

由于叶轮流道中内向的二次流与静叶中外向二次流的不同，以及叶轮内环壁边界层的影响，致使叶轮内的流动呈现出如图 2-66 所示的二次流与二次涡运动，造成了实际透平机械的性能与二元叶栅性能的不同。

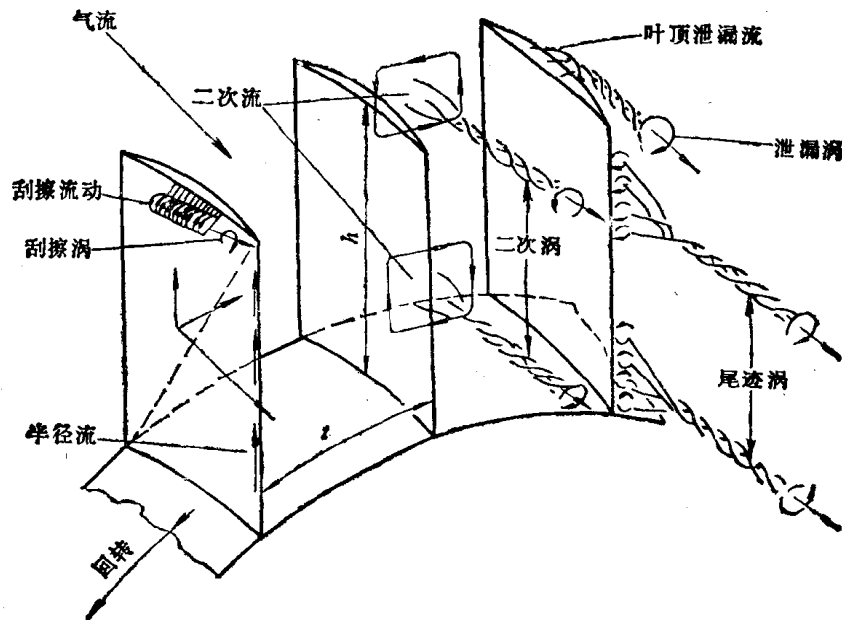


图2-66 叶轮内的二次流与二次涡

第三章 透平机械内的准三元流动

§ 3-1 三元流动的欧拉方程与简化

一、叶轮内三元流动的欧拉方程

以上讨论和分析告诉我们，在透平机械内部，由于离心力和哥氏力影响的三元尾迹流，环壁边界层产生的二次流，以及叶顶间隙产生的泄漏流动等，使得透平机械内部的实际流动，出现一种三元的、非定常的粘性流动现象。对于这种复杂的内部流动问题，当叶轮进出口条件、机壳形状等初始条件和边界条件一定时，虽然理论上可以用纳维-斯托克斯方程式(1-46)求解，但由于它是一个四元 (x, y, z, t) 的非线性偏微分方程，加上初始条件和边界条件各式各样，要直接进行准确求解，就是在电子计算机和数值计算方法进步的现在，仍然在数学上还存在着目前无法克服的困难。为此，在透平机械设计时，通常将这种非定常的粘性流动当作定常的理想流体来处理，于是纳维-斯托克斯方程就简化为欧拉方程。

对于绝对运动而言，旋度表达式(1-11)在圆柱坐标系 (r, θ, z) 的分量形式为：

$$\left. \begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{V})_r &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial z} \right] \\ (\text{rot}\mathbf{V})_\theta &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ (\text{rot}\mathbf{V})_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

按照矢量乘法：

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V})_r &= \frac{v_\theta}{r} \left[\frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] - v_z \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ (\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V})_\theta &= \frac{v_z}{r} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial z} \right] - \frac{v_r}{r} \left[\frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ (\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V})_z &= v_r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

把式(3-2)代入运动方程式(1-62)，最后可以得到绝对运动圆柱坐标系的三元流动欧拉方程式的分量形式为：

$$\left. \begin{aligned} -\frac{v_\theta}{r} \left[\frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + v_z \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} \\ -\frac{v_z}{r} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial z} \right] + \frac{v_r}{r} \left[\frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] &= -\frac{\partial I}{r \partial \theta} + T \frac{\partial s}{r \partial \theta} \\ -v_r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial s}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

对于相对运动的圆柱坐标系来说，首先从相对速度和绝对速度的关系式(1-55)，可以

得到如下式子:

$$\text{rot}\mathbf{V} = (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \times \mathbf{W} + 2\boldsymbol{\omega} \quad (3-4)$$

将式 (3-4) 代入相对运动的三元流动基本方程式 (1-63), 则可得到:

$$-\mathbf{W} \times \text{rot}\mathbf{V} = -\nabla I_R + T\nabla s \quad (3-5)$$

根据下面三阶行列式 (i_r, i_θ, i_z 为单位矢量):

$$\mathbf{W} \times \text{rot}\mathbf{V} = \begin{vmatrix} i_r & i_\theta & i_z \\ w_r & w_\theta & w_z \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial z} \right] & \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (v_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{vmatrix}$$

可以求出 ($\mathbf{W} \times \text{rot}\mathbf{V}$) 在相对圆柱坐标系 r, θ, z 方向的分量并将它们代入式 (3-5), 同时考虑式 (1-54) 的关系, 最后可以得到相对圆柱坐标系的三元流动欧拉方程的分量表达式为:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{w_\theta}{r} \left[\frac{\partial (v_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] + w_z \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I_R}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} \\ -\frac{w_z}{r} \left[\frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial z} \right] + \frac{w_r}{r} \left[\frac{\partial (v_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] &= -\frac{\partial I_R}{r \partial \theta} + T \frac{\partial s}{r \partial \theta} \\ -w_r \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{w_\theta}{r} \left[\frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial I_R}{\partial z} + T \frac{\partial s}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

二、径向平衡方程

将三元流动的欧拉方程进行简化, 可以得到不同形式的径向平衡方程, 下面对此加以讨论。

1. 完全径向平衡方程

在轴对称情况下, 如果只考虑轴向间隙内气流参数沿径向的分布, 这时三元流动的欧拉方程就简化为如下的完全径向平衡方程, 即由式 (3-3) 的第一式有:

$$-\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial r} + v_z \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} \quad (3-7)$$

按照完全径向平衡方程进行设计, 首先在轴流式叶轮机械中获得了应用。完全径向平衡方程虽然只考虑了气流参数只在径向有变化, 但式 (3-7) 仍是一个三元 (r, θ, z) 的偏微分方程。同时在完全径向平衡方程中, 由于包含了流面倾斜和流线曲率的影响, 因此它所描述的流体运动实际上是一种准三元流动。这时叶片间的流动不是沿圆柱表面, 而是在以子午面流线绕轴 z 旋转所形成的回转面上。下面根据式 (3-7) 对完全径向平衡方程作进一步的分析。当考虑流面倾斜和流线曲率的影响时, 为了计算沿子午面流线 m 的流动 (如图3-1), 需要对坐标加以如下转换:

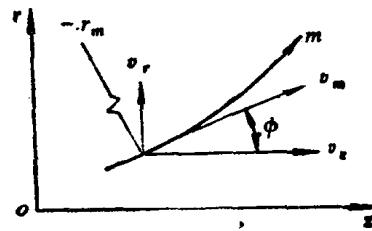


图3-1 流面倾斜和流线曲率

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial z} \\ v_m \frac{\partial}{\partial m} &= v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial m} = -\frac{1}{r_m} \right\}$$

这里 ϕ 表示流面倾斜角, r_m 表示流线曲率半径。一般规定流线向上弯曲的曲率半径为负, 反之为正。把转换关系式 (3-8) 代入完全径向平衡方程式 (3-7) 中左边第二项, 并考虑 $v_r = v_m \sin \phi$, $v_z = v_m \cos \phi$ 的关系, 进行整理后可得:

$$v_z \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = v_m \left(\frac{\sin \phi}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} - \frac{\cos \phi}{r_m} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_m^2}{\partial r} \quad (3-9)$$

对于完全气体, 总焓 $I = i + v_m^2/2 + v_\theta^2/2$, 将它代入热力学关系式 (1-60), 于是完全径向平衡方程式 (3-7) 的右边可以写成:

$$\frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_m^2}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r}$$

把上式及式 (3-9) 代入式 (3-7), 最后可得完全径向平衡方程

$$\frac{v_\theta^2}{r} - v_m \frac{\partial v_m}{\partial m} \sin \phi + \frac{\cos \phi}{r_m} v_m^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3-10)$$

从式 (3-10) 看出, 完全径向平衡方程中左边第二项和第三项, 分别表示了流面倾斜和流线曲率对流动的影响。由于式 (3-10) 中含有流线曲率项, 所以完全径向平衡理论有时又简称为流线曲率法。

2. 单纯径向平衡方程

在完全径向平衡方程式 (3-10) 中, 如果流面倾斜角 $\phi = 0$ 时, 流线就沿着圆柱面流动, 这时曲率半径 $r_m = \infty$, 故式 (3-10) 中的第二项和第三项均为零, 于是完全径向平衡方程就简化为单纯径向平衡方程, 即

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3-11)$$

这就是式 (2-106) 所表述的单纯径向平衡条件。在不考虑外力的情况下, 对于定常的轴对称流动, 当径向分速度 $v_r = 0$ (即气流沿圆柱面流动) 时, 根据式 (1-53) 亦可得到单纯径向平衡方程式 (3-11)。由于单纯径向平衡方程假定沿圆柱面流动, 要是在不同半径上将该圆柱面展开, 就可得到不同半径上的平面叶栅。由于假定为轴对称流动, 故可以在子午面上应用单纯径向平衡, 求出气流参数沿径向的变化。所以单纯径向平衡方程所描述的气流运动, 实际上是用子午流面和圆柱流面上的流动, 近似表示透平机械内的三元流动。

3. 等熵径向平衡方程

由完全径向平衡方程式 (3-7), 可得单纯径向平衡方程的另一表达式为:

$$-\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} \quad (3-12)$$

当熵沿径向保持不变, 则式 (3-12) 可进一步简化为:

$$\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial I}{\partial r} \quad (3-13)$$

式 (3-13) 就称为等熵径向平衡方程。

§ 3-2 准三元流动理论与解析模型

1952年吴仲华根据两类相对流面的概念，首先提出了透平机械内部流动的普遍理论。这是假定在轴对称、非粘性、定常流条件下，将透平机械内实际的三元流动，通过迭代求解多个 S_1 流面和一个中心 S_{2m} 流面（如图3-2）内的二元气体流动，从而获得透平机械内部流动的准三元解。

一、 S_1 流面和 S_2 流面的概念

一般说来， S_1 流面是两个相邻叶片间的周向扭曲面。它在叶片进口处或叶片通道间与垂直于轴 z 的 $r-\theta$ 平面的交线为一条接近于圆弧的曲线。而 S_2 流面则是从叶根至叶顶的径向扭曲面。它在叶片进口处或叶片通道间与垂直于轴 z 的 $r-\theta$ 平面的交线是一条接近于径向线的曲线。所以 S_1 流面和 S_2 流面这两类相对流面是两组复杂的空间曲面。如果 S_1 流面和 S_2 流面无穷多，其迭代求解的结果就越接近叶轮内三元流动的真实情况。

为了简化数值计算和工程应用，通常假定流动为轴对称，这时周向流面不扭曲， S_1 流面就变成以流面上任一流线为母线绕轴 z 旋转所形成的任意回转面。至于 S_2 流面则通常取为中心流面 S_{2m} ，而 S_{2m} 流面大致为两叶片通道间平均流量所在的流面。显然，当叶片数愈多，回转面和 S_{2m} 流面才更加分别接近于 S_1 流面和 S_2 流面。通过在这两类相对流面上迭代求解气体在这两个面上的运动，从而可以得到叶轮内气流运动的准三元解。

二、叶轮内部流动的解析模型

电子计算机的出现和数值计算方法的发展，使得按照三元流动普遍理论求解叶轮机械内部流动成为可能。1964年卡兹里斯（Katsanis）应用准三元流动理论，以准正交坐标系编制了求解子午面流动解析的计算机程序。随后，国内外研究者在此基础上，按照准三元理论提出了举不胜数的关于求解这两类流面 S_1 和 S_2 的计算方法，促进了中心流线法的发展，研究成果越来越广泛地用于叶轮机械的设计与工程实际。

以下从流动模型的角度出发，对子午面和回转面的解析方法加以简略介绍。

1. 子午面流动解析

子午面流动的解析方法，从流动模型分类可以分为三种：

(1) 中心 S_2 流面（ S_{2m} ）的解析 如图3-2，这是由吴仲华1952年提出的 S_2 流面上的流动解析方法。当 S_2 流面的形状给定时， θ 则为 r, z 的从属关系，于是 S_2 流面上的流动就归结为以 r, z 为独立变量的二元流动问题。如果 S_2 流面用以下关系表示：

$$s(r, \theta, z) = 0 \quad (3-13a)$$

则有：

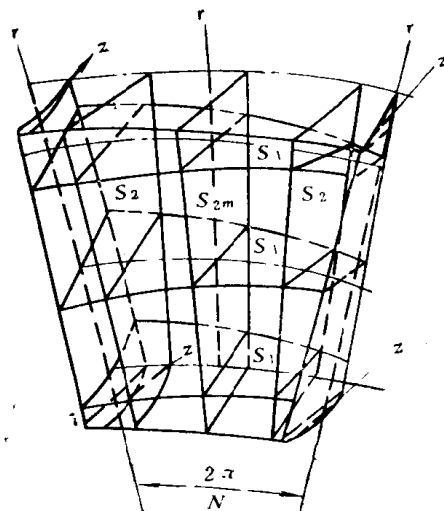


图3-2 两类相对流面 S_1 和 S_2

$$\frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial s}{\partial z} dz = 0 \quad (3-13 b)$$

如果 $n(n_r, n_\theta, n_z)$ 表示 S_2 流面上任意点的法向单位矢量, 它与流面梯度的关系为:

$$\frac{n_r}{\partial s / \partial r} = \frac{n_\theta}{\partial s / r \partial \theta} = \frac{n_z}{\partial s / \partial z} = \frac{1}{\sqrt{(\partial s / \partial r)^2 + (\partial s / r \partial \theta)^2 + (\partial s / \partial z)^2}} \quad (3-14)$$

因为流动沿 S_2 流面, 故有:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{W} = 0 \quad (3-15)$$

或者

$$n_r w_r + n_\theta w_\theta + n_z w_z = 0 \quad (3-15 a)$$

由式 (3-13 b) 和式 (3-15 a) 可得:

$$n_r dr + n_\theta r d\theta + n_z dz = 0 \quad (3-16)$$

当 S_2 流面用 r, z 为独立变量的 θ 坐标表示时, 由流面方程式 (3-13 a) 可得 S_2 面上任意的气流参数 q 的表达式为:

$$q = q[r, \theta(r, z), z] \quad (3-17)$$

当选取沿 S_2 流面的偏导数 $\bar{\partial} / \partial r, \bar{\partial} / \partial z$ 来考虑, 这时根据式 (3-16) 的关系, 可以得到 S_2 流面上任意气流参数 q 沿 r, z 的流面偏导数为:

$$\frac{\bar{\partial} q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta}, \quad \frac{\bar{\partial} q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{n_z}{n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \quad (3-18)$$

对于相对流动为定常的非粘性流动, 利用式 (3-18) 的关系, 运动方程式 (3-6) 及连续方程可以写成:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{w_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}(v_\theta r)}{\partial r} + w_z \left(\frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} - \frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\bar{\partial} I_R}{\partial r} + T \frac{\bar{\partial} s}{\partial r} + F_r \\ \frac{w_r}{r} \frac{\bar{\partial}(v_\theta r)}{\partial r} + \frac{w_z}{r} \frac{\bar{\partial}(v_\theta r)}{\partial z} &= F_\theta \\ -w_r \left(\frac{\bar{\partial} w_r}{\partial z} - \frac{\bar{\partial} w_z}{\partial r} \right) - \frac{w_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}(v_\theta r)}{\partial r} &= -\frac{\bar{\partial} I_R}{\partial z} + T \frac{\bar{\partial} s}{\partial z} + F_z \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}(r \rho w_r)}{\partial r} + \frac{\bar{\partial}(\rho w_z)}{\partial z} = -\frac{\rho}{r n_\theta} \left(n_r \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + n_\theta \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + n_z \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right) \quad (3-20)$$

运动方程式 (3-19) 右边的质量力 F 为:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{n}}{n_\theta} F_\theta = -\frac{\mathbf{n}}{n_\theta} \frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (3-21)$$

式中:

$$F_\theta = \frac{1}{r} \left(w_r \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + w_\theta \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial I_R}{\partial \theta} + T \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (3-22)$$

从式 (3-19) 表明, 垂直作用于 S_2 流面的质量力 F 是作为运动方程的附加项出现的。由式 (3-21) 可知, F 的大小取决于 S_2 流面两侧的切向压力梯度 $\partial p / \partial \theta$, 它的方向与 S_2 流面的法向矢量相反。

如果假设式 (3-20) 的右边等于 $\left(-\rho \frac{D \ln b}{Dt} \right)$, 于是连续方程式 (3-20) 则变成:

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}(r \rho w_r)}{\partial r} + \frac{\bar{\partial}(\rho w_z)}{\partial z} = -\frac{\rho}{b} \left(w_r \frac{\bar{\partial} b}{\partial r} + w_z \frac{\bar{\partial} b}{\partial z} \right) \quad (3-23)$$

式中 b 表示 S_2 流面的角厚度。在式 (3-23) 两边同乘以 br , 最后可得 S_2 流面的连续方程为:

$$\frac{\bar{\partial}(rb\rho w_r)}{\partial r} + \frac{\bar{\partial}(rb\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (3-24)$$

在轴对称情况下, 质量力 F 等于零, 从式 (3-18) 可知, 流面偏导数与普通偏导数一致。这时运动方程式 (3-19) 和式 (3-6) 相同, 连续方程式 (3-20) 也和一般相对坐标的连续方程一样。实际上当 $b = 1$ 时, 将流面偏导数改写为普通偏导数, 从 S_2 流面的连续方程式 (3-24) 亦可得到一般相对坐标的连续方程。

对于实际的透平机械叶轮而言, 由于叶片都有着一定的厚度, 叶轮设计时应该考虑叶片厚度对气流所造成的准三元效果, 这一点对于长叶片叶轮来说, 应该特别加以注意。

由式 (3-19)~式 (3-22) 和式 (3-24) 便可以求得 S_2 流面上的气流运动。可以看出, 它归结为求解沿 r, z 方向的二元流动的问题。

基于上述模型不同学者提出了很多求解子午面流动的数值解析方法。主要有:

1) 流线曲率法 在子午面上引入与流线近似垂直的准正交线 q 或径向线 r , 把式 (3-19) 变形为沿 q 或 r 方向的平衡条件式, 然后求解沿 q 或 r 方向的子午面速度分布。

2) 差分法 导出满足式 (3-24) 的流函数 ψ , 将流面划分网格, 对各结点的流函数进行求解。

3) 有限元法 将式 (3-19) 利用变分原理归化为与之等价的泛函表达式, 然后采用任意剖分区域和分片插值的办法将泛函离散化, 最后由泛函极值条件导出一组代数方程而加以求解。

以上的数值解析方法, 对 S_2 流面的定义和选取也有差别, 但这些并非都有理论根据和严格的数学物理基础。这是因为当 S_2 流面的形状变化时, 质量力 F 的方向难以正确决定的缘故。与叶轮内部流场复杂的物理现象对流动的影响相比, S_2 流面的选取对子午面形状和流动的影响是不大的。解法的选择要着重考虑数值解析的可靠性 (精度)、普遍性 (适用范围) 和经济性 (收敛性及处理时间)。

(2) 轴对称流动理论的解析 轴对称流动理论 (或轴对称假定) 是透平机械设计数值解析中的一个十分重要的理论。它假定如果叶轮叶片数无限多, 这时流面与叶面一致, 沿 θ 方向的所有偏导数 $\partial/\partial\theta$ 均为零 (即加功量 $v_\theta r$ 不变), 故可以当作二元流动来处理。但这时必须将叶片对气流的作用力, 用与叶面垂直分布的质量力 F 加进运动方程, 以考虑叶片作用力的影响。这是因为当叶片对流体做功时, 由于叶片两侧的压力差, 流体通过叶片槽道时加功量 $v_\theta r$ 会发生变化。如果叶片数无限多, 一枚叶片的作用力近似等于零, 同时通过叶片间的流量也接近为零。两者的比即单位质量的力近似为定值, 于是叶片的作用力可以用分布质量力予以置换。对于非粘性流体, 与叶面平行的质量力不存在, 故该分布质量力 F 与叶面垂直。

对于这种非粘性的轴对称流动, 由式 (1-59) 可得它的运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ w_r \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_\theta}{\partial z} + 2\omega w_r + \frac{w_r w_\theta}{r} &= F_\theta \\ w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-25)$$

根据质量力 F 与相对速度 W 垂直的条件, 即由 $n \cdot F = 0$, $n \cdot W = 0$, 消去质量力 F 可得轴对称流动理论的基本关系式为:

$$\frac{\partial w_\theta}{\partial z} n_r - \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) n_\theta - \left(\frac{w_\theta}{r} + \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + 2\omega \right) n_z = 0 \quad (3-26)$$

式中, 法向单位矢量 n 的方向余弦 n_r , n_θ , n_z 由叶面形状加以确定。

在轴对称条件下, 这时相对运动的连续方程为:

$$\frac{\partial(r\rho w_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (3-27)$$

引入满足上式的流函数 ψ

$$w_r = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w_z = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3-28)$$

将式 (3-28) 代入轴对称流动的基本关系式, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial(\ln \rho)}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial(\ln \rho)}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &+ \frac{r\rho}{n_\theta} \left[\frac{\partial w_\theta}{\partial z} n_r - \left(\frac{w_\theta}{r} + \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + 2\omega \right) n_z \right] \end{aligned} \quad (3-29)$$

根据式 (3-29) 便可求解子午面流动。

由于实际的透平机械叶轮, 叶片数并非无限多, 因此, 轴对称假定是对实际流面的一种近似。这种轴对称假定用于含叶片的通流区或长叶片叶轮以及高负荷的透平机械时, 所得结果虽然与实际流面有着较大的偏差, 但对于不含叶片的管道通流区域或短叶片叶轮、低负荷以及流面接近于圆柱面的透平机械来说, 轴对称假定是合理的, 而且与实际流面有着较好的近似性。

(3) 周向平均的解析 这是将连续方程、运动方程等沿周向 (θ 方向) 在单位栅距间进行平均, 然后转化为二元问题加以求解的方法 (如图 3-3)。

例如某气流参数 q 沿单位栅距间的周向平均值, 可以用以下三种平均值来定义:
简单平均:

$$\bar{q} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q d\theta / (\theta_2 - \theta_1) \quad (3-30)$$

质量平均:

$$\bar{q} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho q d\theta / \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho d\theta = \overline{\rho q} / \bar{\rho} \quad (3-31)$$

质量流量平均:

$$\bar{q} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho w_n q d\theta / \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho w_n d\theta = \overline{\rho w_n q} / \overline{\rho w_n} \quad (3-32)$$

前述的两种解析方法, 要求选取 S_2 流面或要求假定流面与叶面一致。周向平均是使用

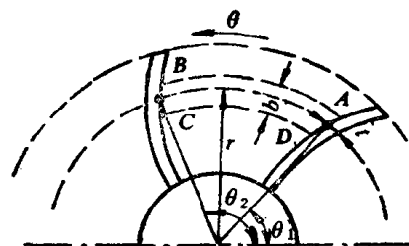


图 3-3 周向平均

了较为严密的周向平均的式子来定义的, 故可以不需要对 S_2 流面进行选取或假定。同时能够更合理地考虑叶片的作用, 即叶轮内部流动的非轴对称性的影响。这时连续方程和运动方程的表达式分别为:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{\rho}\tilde{w}_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{w}_z)}{\partial z} = 0 \quad (3-33)$$

$$-\frac{\tilde{w}_\theta}{r} \frac{\partial(\tilde{v}_\theta r)}{\partial r} + \tilde{w}_z \left(\frac{\partial\tilde{w}_r}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{w}_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial\tilde{I}_R}{\partial r} + T \frac{\partial\tilde{s}}{\partial r} + \bar{F}_r + \bar{F}_N + \bar{F}_f \quad (3-34)$$

式中 \bar{F}_N 为考虑非轴对称时叶片作用力; \bar{F}_f 为粘性力。 \sim 表示质量平均, $\bar{\quad}$ 表示简单平均。

2. 回转面流动解析

下面, 我们从相对坐标运动方程式及图 3-4 的回转面坐标系来加以说明。在图 3-4 所示的坐标系中, 如果 i_1, i_2, i_3 分别表示旋转方向 (θ), 流线方向 (m) 及与它们垂直的法线方向 (n) 的单位矢量, 其对应的相对速度分别为 w_θ, w_m, w_n 。根据矢量关系, 可将运动方程式 (1-63) 的左边写成:

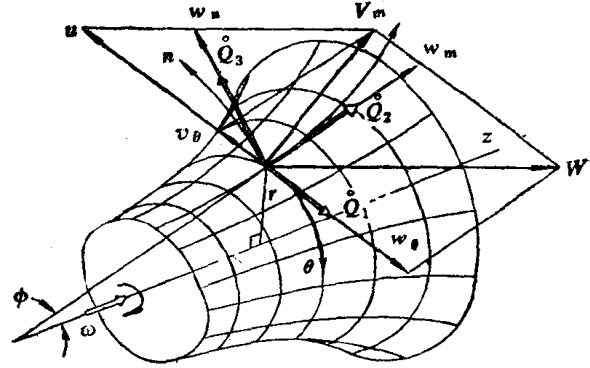


图3-4 回转面坐标系

$$\mathbf{W} \times (\nabla \times \mathbf{W} + 2\boldsymbol{\omega}) = (w_m A_3 - w_n A_2) \mathbf{i}_1 + (w_n A_1 - w_\theta A_3) \mathbf{i}_2 + (w_\theta A_2 - w_m A_1) \mathbf{i}_3 \quad (3-35)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial w_n}{\partial m} + w_n K_n - \frac{\partial w_m}{\partial n} - w_m K_m \\ A_2 &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(w_\theta r + r^2 \omega)}{\partial n} - \frac{\partial w_n}{\partial \theta} \right] \\ A_3 &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - \frac{\partial(w_\theta r + r^2 \omega)}{\partial m} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

这里 K_m, K_n 分别表示流线 m 和法线 n 方向的曲率。由式 (3-35) 和 (1-63) 可以得到:

$$\left. \begin{aligned} w_n A_1 - w_\theta A_3 &= \frac{\partial I_R}{\partial m} - T \frac{\partial s}{\partial m} \\ w_\theta A_2 - w_m A_1 &= \frac{\partial I_R}{\partial n} - T \frac{\partial s}{\partial n} \\ w_m A_3 - w_n A_2 &= \frac{\partial I_R}{r \partial \theta} - T \frac{\partial s}{r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

在回转面上 $w_n = 0$, 由式 (3-36) 和式 (3-37), 最后可以得到无论是轴流式、离心式或斜流式叶轮机械回转面流动的运动方程式为:

$$-\frac{w_m}{r} \left[\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - \frac{\partial(w_\theta r + r^2 \omega)}{\partial m} \right] = \frac{\partial I_R}{r \partial \theta} + T \frac{\partial s}{r \partial \theta} + F_f \quad (3-38)$$

基于上式的求解方法有流线曲率法、差分法, 有限元法以及奇点法等解析方法。

轴流叶轮 S_1 面的求解, 即使同时考虑边界层的计算, 在叶栅前后缘也算不准。这是因为

在后缘处库塔条件很难满足的缘故。应用平面叶栅试验资料的轴流叶轮计算以及斜流叶轮的设计，获得了性能良好的透平机械。然而考虑叶面边界层计算的 S_1 流面上的流动解析，使得应用平面叶栅资料的必然性正在逐渐消失。

上面对透平机械叶轮内的准三元流动及其解析模型给予了扼要的说明。目前关于这两类相对流面的解析，从可靠性和实用性的角度来讲，主要采用如下方法：子午面上（从轮毂面到机壳面或轮盖面）的流动解析，主要应用了轴对称理论，目的在于将数学问题简化，使基本方程由三元简化为二元，以便很快能够得到解答；回转面上（叶片到叶片面）的流动解析，主要应用了叶栅理论，目的在于从二元叶栅研究中得到试验数据，以修正计算与实际流动的偏差。

§ 3-3 流线曲率法

按照三元流动普遍理论进行透平机械叶轮准三元设计和性能验算时，诺瓦克 (Novak) 的流线曲率法获得了广泛地应用。该方法是在不含叶片的管道通流断面内设置径向计算站，根据径向平衡条件沿流线求得状态参数，决定子午面流动。由于它不在叶片内设置计算截面，所以该方法不仅适用于设计问题，特别是对于轴流叶轮可以利用平面叶栅试验数据进行高精度的设计，而且还可适用于性能验算的问题。

一、适用于设计问题的径向平衡条件

对于如图3-5所示的轴流式机械，为了计算子午面流线分布，在机器进出口处设置了若干个径向计算站 ($i, i+1, i+2, \dots$)。由于这些计算站处于叶片间的轴向间隙内，不存在着叶片力的作用，故可以在轴对称假定下进行分析。

为了导出适用于设计问题的径向平衡条件，这里将式(3-9)的关系代入式(3-7)，则可把完全径向平衡方程改写为如下形式：

$$\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - v_m^2 \left(\frac{\sin\phi}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} - \frac{\cos\phi}{r_m} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial v_m^2}{\partial r} = \frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} \quad (3-39)$$

透平机械设计时，一般事先要确定损失沿径向的分布，因此需要计算熵沿径向的变化。为此，我们引入熵函数 Q^* ：

$$s = -c_p \ln Q^* \quad (3-40)$$

于是有：

$$\frac{\partial s}{\partial r} = -c_p \frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r}$$

将上式和热力学关系 $c_p T = I - v_m^2/2 - v_\theta^2/2$ 代入式(3-29)的右边，可得：

$$\frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{1}{Q^*} \frac{\partial(IQ^*)}{\partial r} - \frac{v_m^2}{2} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta^2}{2} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} \right) \quad (3-41)$$

把式(3-41)代入式(3-39)经过整理，最后可以得到用如下线性微分方程所表达的径向平衡条件为：

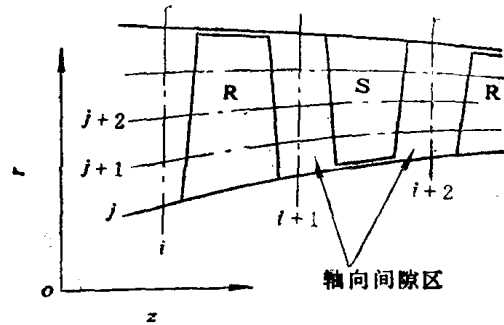


图3-5 计算站的设置

$$-\frac{\partial v_m^2}{\partial r} + A(r)v_m^2 = B(r) \quad (3-42)$$

式中

$$\begin{aligned} A(r) &= 2 \left[\frac{\cos\phi}{r_m} - \frac{\sin\phi}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} \right) \right] \\ B(r) &= 2 \left[\frac{1}{Q^*} \frac{\partial(IQ^*)}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{2} v_\theta^2 \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-43)$$

式(3-43)第一式中的第二项 $\frac{\sin\phi}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m}$ 可以由连续方程和轴对称假定求出, 这里直接写出推导结果:

$$\frac{\sin\phi}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} = - \frac{(1 + M_\theta^2) \frac{\sin^2\phi}{r} + \frac{\sin\phi \operatorname{tg}\phi}{r_m} + \frac{\partial\phi}{\partial r} \operatorname{tg}\phi}{1 - M_m^2} \quad (3-44)$$

这里, 马赫数 $M_\theta = v_\theta/a$, $M_m = v_m/a$, a 表示计算点的声速。如果求得 $A(r)$ 、 $B(r)$, 便可由下式得到径向平衡条件式(3-42)的解为:

$$v_m^2 = \exp \left[- \int A(r) dr \right] \left\{ \int B(r) \exp \left[\int A(r) dr \right] dr + C \right\} \quad (3-45)$$

式中, 积分常数 C 由以下连续条件决定:

$$q_m = 2\pi \int r \rho v_m \cos\phi dr \quad (3-46)$$

q_m 表示计算截面上的质量流量。设计时由已知的质量流量 q_m 以及 I , $v_\theta r$, Q^* 的分布, 经过数值迭代计算, 便可求得子午面流线沿径向的分布。

二、适用于验算问题的径向平衡条件

性能验算问题一般是已知叶片几何形状以及叶片相对气流角 β 或绝对气流角 α 。

由转子焓与总焓的关系式 $I_R = I - r\omega v_\theta$, 于是有:

$$\frac{\partial I_R}{\partial r} = \frac{\partial I}{\partial r} - \omega \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r}$$

把上式代入式(3-41)的左边, 则有:

$$\frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{1}{Q^*} \frac{\partial(I_R Q^*)}{\partial r} + \frac{r\omega v_\theta}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} + \omega \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} - \frac{v_m^2}{2} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta^2}{2} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} \right) \quad (3-47)$$

从绝对速度和相对速度的关系 $v_\theta = w_\theta + r\omega$, 可以得到:

$$r\omega v_\theta = r\omega w_\theta + r^2\omega^2, \quad \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} = r \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + w_\theta + 2r\omega \quad (3-48)$$

由速度三角形知道, 相对气流角 β 或绝对气流角 α 可以表示为:

$$\operatorname{tg}\beta = w_\theta/v_m, \quad \operatorname{tg}\alpha = v'_\theta/v_m \quad (3-49)$$

要注意的是: β 或 α 分别为相对速度 W 或绝对速度 V 与轴向 z 方向的夹角。

把上述式(3-47)~式(3-49)代入式(3-39), 整理后可以得到类似于式(3-42)的径向平衡条件为:

$$-\frac{\partial v_m^2}{\partial r} + A_R(r)v_m^2 = B_R(r) \quad (3-50)$$

式中

$$\begin{aligned}
 A_R(r) &= 2\cos^2\beta \left[\frac{\cos\phi}{r_m} - \frac{\sin\phi}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} + \frac{1}{2\cos^2\beta} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial(\operatorname{tg}^2\beta)}{\partial r} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{r} + \frac{2\omega}{v_m} \operatorname{tg}\beta \right] \\
 B_R(r) &= 2\cos^2\beta \left[\frac{1}{Q^*} \frac{\partial(I_R Q^*)}{\partial r} + \frac{r^2\omega^2}{2} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3-51}$$

将 $A_R(r)$, $B_R(r)$ 分别代替式(3-45)中的 $A(r)$, $B(r)$, 便可求得子午速度 v_m 沿径向的分布。

如果用绝对气流角 α 代替相对气流角 β , 令角速度 ω 为零并用总焓 I 代替转子焓 I_R , 由式(3-50)、式(3-51)便可获得静叶出口子午速度沿径向的分布。

第四章 离心式压缩机械的设计

通常决定压缩机械特性的基本参数是质量流量 q_m 、终压 p_{out} 或压升 Δp 、功率 P 。这三个基本参数依赖于转速 n 和进气初始条件——压力 p_{in} 、温度 T_{in} 及其物性。有气体冷却装置时还依赖于冷却介质质量 m 和其初温 T_w 。

气体的物性由状态方程 (p 、 T 和 ρ 间的关系) 及热量方程 (i 和 T 的关系) 决定。在大多数情况下, 被压缩气体可看成是理想气体, 于是气体状态方程中热物理常数仅包括气体常数 R 。如果气体压缩时温度变化不大, 其比热容可认为与温度无关, 那么用等熵指数 k 代替热量方程是足够的。简言之, 此时基本参数 q_m 、 p_{out} (Δp) 和 P 依赖于 p_{in} 、 T_{in} 、 R 、 k 、 n 、 m 和 T_w 七个量。鼓风机的基本参数取决于前五个量, 而通风机仅与初始密度 ρ_{in} 和转速 n 有关。

气动热力计算可求出通流部分的尺寸, 以保证给定初始条件下要求的 q_m 和 p_{out} , 功率 P 在计算过程中确定。转子的转速 n 不常是给定的初始条件, 有时也在计算中决定。

离心式压缩机械的通流部分中气体流动具有紊流特性。此外, 由于通流部分表面形状复杂、气体呈空间的三元特性。描述这种紊流空间气流的封闭方程组还没有。如果忽略了气体粘性的影响, 则可建立通流部分元件中的空间流谱, 确定气体与叶片的作用力。但是, 这种理论计算结果不能确定通流部分中能量损失, 因此不能仅根据计算数据来计算通流部分的效率, 计算确定它的气动特性, 只有在试验资料的基础上才能解决这个问题。

离心式压缩机械通流部分的高度与长度之比一般较小, 用一元方法计算这种窄通道已积累了宝贵的经验和大量的试验资料, 同时考虑到离心式压缩机械中空间气流计算的复杂性和近似性, 故一元理论分析仍有实用价值, 特别是对于初步的计算和方案的选择。它反映了流道截面上平均参数的主要变化规律和总的流动特性, 为进一步的二元、三元流场的计算提供依据。

§ 4-1 一元流动理论分析

压缩机械的设计点计算, 目前使用两种不同的方法。基于叶栅理论的分析广泛应用于轴流式机械, 而流道理论分析常用于离心式机械。离心式压缩机中的典型压缩过程示于图4-1。图上表示了流道中压力和温度的变化。等熵绝热过程从状态 (p_1, T_1) 到理论状态 (p_{2th}, T_{2th}) , h_{th} 为理论能量头。由于转子中的流动损失, 转子后的实际总压 p_2 比理论值 p_{2th} 要小, 距离 $p_2 - p_{2th}$ 代表转子中的能量头损失 h_{wr} , 若认为与外界无热交换, 则转子出口后的状态为 (p_2, T_{2th}) 。泄漏损失和轮盘摩擦损失也以热的形式传给气体, 引起了气体总温增加到 T_2 , 图上用 $h_l + h_{df}$ 表示这两种损失。转子后再没有给气体加入能量, 转子后所有截面上总温 T_2 保持不变。扩压器损失用 h_{wd} 表示, 扩压器出口状态由 (p_3, T_2) 决定。级的实际总能量头是 h_1 , 它可由不同能量头的代数和表示

$$h_1 = h_{th} + h_l + h_{df} \quad (4-1)$$

若忽略图上压力线的发散性，则有关系式

$$h_{th} = h_{ad} + h_{wr} + h_{wd}$$

一、叶轮作功能力

叶轮是通流部分中给气体输入功的唯一部件，它传入的理论能量头由欧拉方程式求得，在 $v_{o1} = 0$ 的情况下，由式(2-55)计算，即

$$h_{th} = u_2 v_{o2} = \varphi_{o2} u_2^2 \quad (4-2)$$

由于叶轮出口流动发生偏离， v_{o2} 不能精确计算，所以，周速系数 $\varphi_{o2} = v_{o2}/u_2$ 只能由经验或半经验公式计算，一般形式为

$$\varphi_{o2} = K_1 - K_2 \varphi_{r2} \text{ctg} \beta_{A2} \quad (4-3)$$

式中，流量系数 $\varphi_{r2} = v_{r2}/u_2$ ，系数 K_1 和 K_2 根据不同研究者有不同的推荐值，但没有一个式子能保证计算值与试验结果无条件的一致。

$K_1 = K_2 = 1$ 时为无限多叶片的情况，此时叶轮出口气流角 β_2 与叶片出口几何角 β_{A2} 一致，其周向分速 $v_{o2\infty} = u_2 - v_{r2} \text{ctg} \beta_{A2}$ ，相应的周速系数用 $\varphi_{o2\infty}$ 表示。

斯托道拉假设叶轮出口的相对涡流的直径 $2a$ 等于径向面叶道出口宽度，即

$$2a = 2\pi r_2 \sin \beta_{A2} / N$$

同时认为相对涡流以角速度 ω 旋转，则诱导速度（或滑动速度）

$$\Delta v_{\theta} = v_{o2\infty} - v_{o2} = -\omega a = -\pi \omega r_2 \sin \beta_{A2} / N$$

因此有

$$\begin{aligned} v_{o2} &= u_2 - v_{r2} \text{ctg} \beta_{A2} - \pi u_2 \sin \beta_{A2} / N \\ \varphi_{o2} &= 1 - \varphi_{r2} \text{ctg} \beta_{A2} - \pi \sin \beta_{A2} / N \end{aligned} \quad (4-3a)$$

这就是计算周速系数的斯托道拉公式。

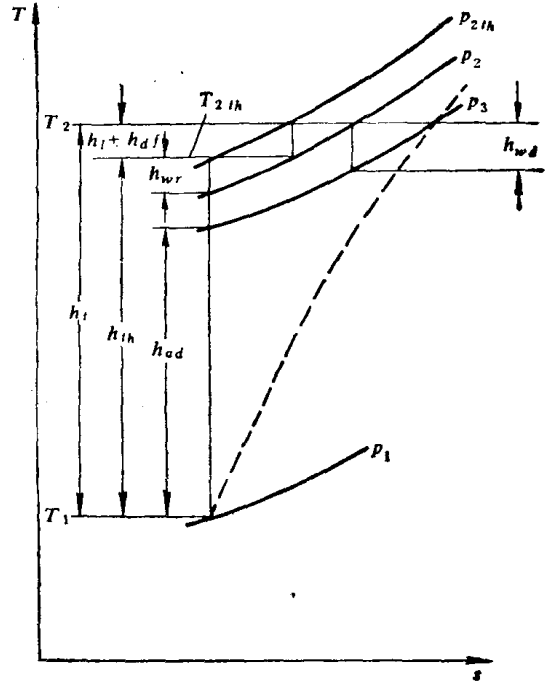


图4-1 压缩过程

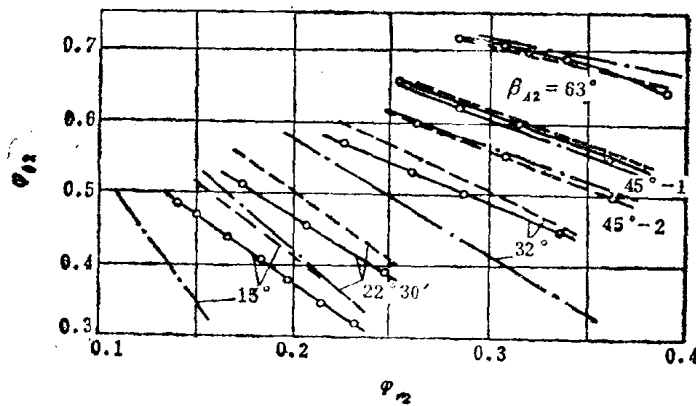


图4-2 φ_{o2} 值的比较

—○—试验值 - - - 按 β_{A2} 计算 - · - 按 β_{eq2} 计算

若用叶轮出口当量角 β_{e, r_2} 代替上式中 β_{A2} , 发现计算值与试验结果有较好的一致 (图4-2)。 β_{e, r_2} 定义为

$$\sin \beta_{e, r_2} = 2abN / \pi D_2 b_2$$

式中 a 为径向面叶道出口内切圆半径; b 为内切圆圆心所在半径 r_0 上的子午面叶道宽度 (图4-3)。

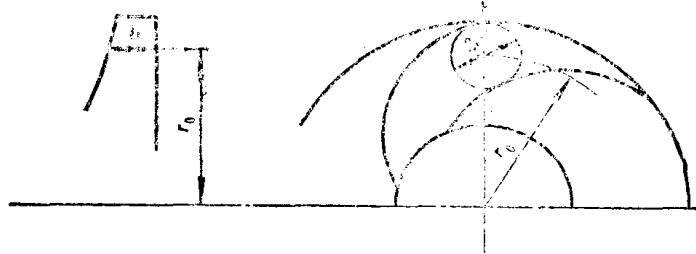


图4-3 β_{e, r_2} 计算用图

威斯勒研究了65个叶轮的试验资料, 根据式(2-81)~式(2-83)提出如下的计算关系:

$r_1/r_2 > (r_1/r_2)_{cr}$ 时

$$\varphi_{\theta_2} = \left(1 - \sqrt{\sin \beta_{A2} / N^{0.7}} \right) \left\{ 1 - \left[\frac{(r_1/r_2) - (r_1/r_2)_{cr}}{1 - (r_1/r_2)_{cr}} \right]^3 \right\} - \varphi_{r_2} \operatorname{ctg} \beta_{A2}$$

$r_1/r_2 \leq (r_1/r_2)_{cr}$ 时

$$\varphi_{\theta_2} = 1 - \frac{\sqrt{\sin \beta_{A2}}}{N^{0.7}} - \varphi_{r_2} \operatorname{ctg} \beta_{A2}$$

$$(r_1/r_2)_{cr} = 1 / \exp(8.16 \sin \beta_{A2} / N)$$

(4-3 b)

考虑叶轮结构和其中气流特性对系数 φ_{θ_2} 影响的最普及方法还有引进减功系数 $\xi = K_1 = K_2 = v_{\theta_2} / v_{\theta_2\infty}$, 此时

$$\varphi_{\theta_2} = \xi (1 - \varphi_{r_2} \operatorname{ctg} \beta_{A2}) \quad (4-4)$$

ПфляйдерерK提出

$$\xi = \left[1 + \frac{a + 1.2 \sin \beta_{A2}}{N(1 - r_1^2)} \right]^{-1}$$

式中标“ a ”表示相对值, 线性尺寸相对 r_2 , 速度相对 u_2 ; a 为经验系数, 平均值取 1.2。

埃克提出

$$\xi = \left[1 + \frac{1.5 + 0.0122 \beta_{A2}}{N(1 - r_1^2)} \right]^{-1}$$

有的作者在计算理论能量头时, 引进滑动系数 $\mu = 1 - \Delta v_{\theta_2} / u_2$ 的概念, μ 与上述系数关系为:

$$1 - \mu = \varphi_{\theta_2\infty} - \varphi_{\theta_2} = \varphi_{\theta_2\infty} (1 - \xi)$$

由以上讨论的理论能量头计算可知, 对于任一叶轮, 在给定转速 n 和流量系数 φ_{r_2} 的条

件下,其做功能力是一定的。一般称设计点对应的周速系数 $\varphi_{02} > 0.7$ 的叶轮为高能头叶轮, $\varphi_{02} = 0.55 \sim 0.7$ 为中等能量头叶轮, $\varphi_{02} < 0.55$ 时为低能量头叶轮。 φ_{02} 是反映叶轮做功能力的一个重要无量纲参数。

叶轮的另一个重要无量纲参数是流量系数。式(4-3)表明了周速系数与流量系数 φ_{r2} 呈线性关系。设计点 φ_{r2} 的选取,直接影响到叶轮出口宽度 b_2 、理论能量头和反作用度,从而影响到级的做功和效率。图4-4给出了圆弧叶片叶轮 φ_{r2} 的最佳范围。为了分析和计算方便,还引进假想流量系数 $\phi = m / (\rho_2^* \pi r_2^2 u_2)$, 它与 φ_{r2} 的关系为 $\phi = 4\rho_2 \tau_2 \varphi_{r2} b_2 / (D_2 \rho_2^*)$, 式中 ρ_2^* 为级进口处的滞止密度。显然,由 ϕ 很容易换算出流量 q_m 或叶轮径向尺寸。对于工业离心压缩机叶轮,一般计算工况下 $\phi = 0.01 \sim 0.12$ 。 $\phi > 0.8$ 的叶轮常称为大流量叶轮, $\phi = 0.08 \sim 0.045$ 时称为中等流量叶轮, $\phi < 0.045$ 时称为小流量叶轮。

二、气体压缩功

对于不同的压缩过程,气体的压缩功计算关系式也不同。在与外界无热交换的条件下,压缩过程从 (p_1, T_1) 到某给定压力 p_2 , 此时最小的压缩功是绝热能量头 h_{ad} 。由式(2-20)可知, h_{ad} 仅与过程的初态、终态的压力或温度以及气体的等熵指数有关。因此绝热能量头很容易求得。

实际的压缩过程为多变过程,多变能量头 h_{pol} 的确定,还应知道与损失有关的多变过程指数 m , 其计算关系式为:

$$h_{pol} = \frac{m}{m-1} R T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] = \frac{m}{m-1} R (T_2 - T_1) \quad (4-5)$$

上式表明,在进口气流状态一定时, p_2 愈大,所需功愈多。在压比 p_2/p_1 一定时,所需压缩功与进口温度成正比,进口温度越低, h_{pol} 越小,即机器耗功越小,这正是压缩机采用冷却的主要原因之一。气体常数 R 和等熵指数 k 也影响气体压缩所需能量头大小。尤其是 R 有显著的影响,这是由于压缩介质中 R 相差很大。若在压比为2.5,进口温度为27°C的条件下,并设叶轮的做功能力相同(如 $h_{pol} = 45000 \text{ J/kg}$),级效率均等于0.80,则对于不同 R 的气体所需压缩功和级数差别甚大(表4-1)。

由表可看出,氢气 R 值是 $R11$ 的 R 值的68倍,加上等熵指数的影响,相同条件下两种工质所需能量头 h_{pol} 之比达75。 R 小的气体 $R11$ 的相对分子质量大,所需压缩功少,即重气体很易压缩,一级叶轮就可满足要求,若不是受到气体马赫数的限制,上述叶轮的压比可达到5.2。相

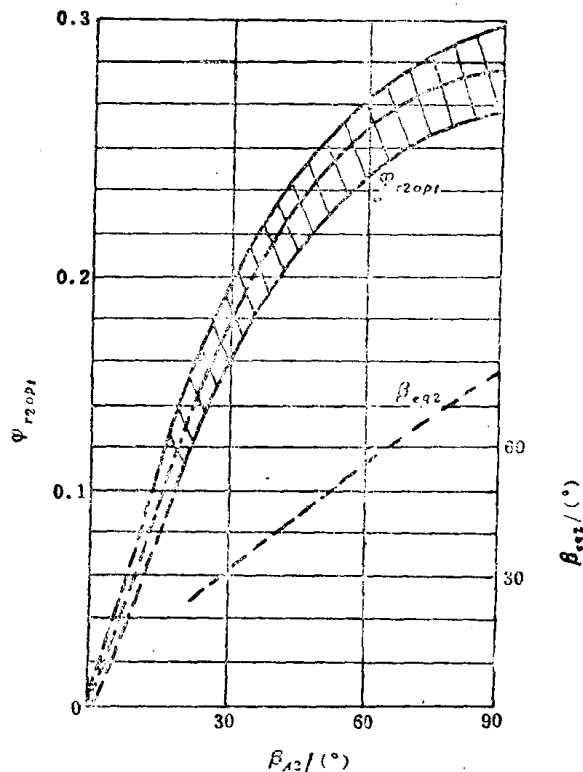


图4-4 φ_{r2} 最佳范围和 $\beta_{c,q2}$ 的近似值

表4-1 R与所需压缩功和级数的关系

工 质	$R/[\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}]$	相对分子质量	k	$h_{pol}/(\text{J} \cdot \text{kg}^{-1})$	级数	每级压比
氢 气	4124.0	2.016	1.41	1299013	36	1.026
空 气	287.0	28.966	1.4	90183	3	1.357
R11	60.5	137.39	1.1	17343	1	2.5

反, R 大的氢气相对分子质量小, 所需压缩功大, 即轻气体很难压缩, 一级叶轮所达压比仅 1.037。

泵和通风机中的流体常看成是不可压缩的, 等容压缩功

$$h_{i,c} = (p_2 - p_1) / \rho$$

三、级中损失和多变过程指数

要确定实际的能量头 h_{pol} 和 h_{tot} , 必须正确计算各种损失。离心式压缩机级中损失一般分外部流动损失和内部流动损失两大类。

外部流动损失包括泄漏损失 $h_l = \beta_l h_{th}$ 和轮阻损失 $h_{df} = \beta_{df} h_{th}$ 。泄漏损失系数 β_l 和轮阻损失系数可由下式估算:

$$\beta_l + \beta_{df} = (0.12 + 0.18/\varphi_{02}) / (1000 \bar{b}_2 \varphi_{r2}) \quad (4-6)$$

由 φ_{02} 的关系式和图4-4可以看出, β_{df} 的减少导致 φ_{02} 和 φ_{r2} 的下降, 因此, 随着叶轮 \bar{b}_2 和 β_{df} 的减少, $\beta_l + \beta_{df}$ 有明显的增加。且计算表明 β_{df} 总是比 β_l 大得多。

式(4-6)推导过程中的假设之一, 是认为旋转盘与壳体的间隙内气流周向速度为 $0.5u$, 这和间隙中实际气流周速 v_θ 是不相符的, 从而也影响到计算精度。

间隙中气流具有周向运动和泄漏引起的径向运动。在轮盖与壳体的间隙中, 径向流动由叶轮外缘指向中心(除最大工况外, 此时叶轮静压升不大于零), 而在轮盘与壳体的间隙中, 气流流向可和上述相同(末级)或相反(中间级)。注意到间隙中气流相对转盘的周速 $w_\theta = v_\theta - u > 0$, 即 $v_\theta > u$ 时, 气流对叶轮做功, 反之, 叶轮给气流能量。因此, 对于间隙中微元气体 dm , 加给旋转盘的摩擦力 $df_1 = 0.5\lambda_1 \rho |w_\theta| w_\theta dF$, 壳体的摩擦力 $df_2 = -0.5\lambda_1 \rho v_\theta^2 dF$, (λ_1 为摩擦系数), 根据动量矩定理

$$dm d(v_\theta r) / dt = df_1 r - df_2 r$$

将该式整理成无量纲形式, 则

$$d\bar{v}_\theta = a \bar{r} [(\bar{v}_\theta - \bar{r}) |\bar{v}_\theta - \bar{r}| - \bar{v}_\theta^2] d\bar{r} - (\bar{v}_\theta - \bar{r}) d\bar{r}$$

式中 $a = \lambda_1 \rho / (\rho_0 \phi \beta_l)$ 。上式通过龙格-库塔法解得 $\bar{v}_\theta = f(a, \bar{r})$ 后, 由 $dP_{df} = u df_{df} = -u 0.5 \rho |w_\theta| w_\theta dF$ 有

$$\beta_{df} = \frac{P_{df}}{m h_{th}} = \frac{\lambda_1 \rho}{\rho_0 \phi \varphi_{02}} \int_1^{\bar{r}_2} |\bar{r} - \bar{v}_\theta| (\bar{r} - \bar{v}_\theta) \bar{r}^2 d\bar{r} = \frac{\lambda_1 \rho}{\rho_0 \phi \varphi_{02}} \beta_{df}^* \quad (4-7)$$

这里的假想摩擦损失系数 β_{df}^* 对于轮盖和轮盘可分别按下列近似公式计算:

$$\beta_{df}^* = 0.09 - \frac{0.3}{\sqrt{a}} + \bar{r}_2 \left(\frac{0.4}{a^2} - 0.0075 \right) + \left[\frac{0.16}{\sqrt{a}} - 0.02 - \bar{r}_2 \left(0.00035 - \frac{0.35}{a^2} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{\varphi_{02}}}$$

$$\beta_{df}^* = 10^{-4} [0.442 - 0.071 \bar{r}_2^2 + (0.857 + 0.052 \bar{r}_2^2) a^{-0.5}]$$

考虑到叶轮外缘表面摩擦而引进修正系数 1.1, 则

$$\beta_{df} = 1.1(\beta_{df_s}^* + \beta_{df_n}^*) \frac{\lambda_1 \rho}{\rho_0 \phi \varphi_{\theta_2}} \quad (4-7a)$$

式中 \bar{r}_s 为密封处相对半径；摩擦系数 λ_1 在未得到可靠的试验资料之前，推荐 $\lambda_1 = 4\lambda'$ ，系数 λ' 是用封闭式壳体中旋转盘得到的试验数据，用近似代数式表示：

对于光滑盘，雷诺数 $Re_u = \frac{D_2 u_2}{\nu_{in}} \geq 6 \cdot 10^5$ 时

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= (10^{-2}/\pi)(2.12 - 0.231 \lg Re_u) & B/D_2 = 0.2 \\ \lambda' &= (10^{-2}/\pi)(1.96 - 0.215 \lg Re_u) & B/D_2 = 0.1 \\ \lambda' &= (10^{-2}/\pi)(1.51 - 0.154 \lg Re_u) & B/D_2 = 0.015 \end{aligned} \right\}$$

$Re_u < 6 \cdot 10^5$ 时的光滑盘有

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= (10^{-2}/\pi)(27.5/\lg Re_u - 4) & B/D_2 = 0.2 \\ \lambda_1 &= (10^{-2}/\pi)(24/\lg Re_u - 3.46) & B/D_2 = 0.1 \\ \lambda_1 &= (10^{-2}/\pi)(20.4/\lg Re_u - 2.9) & B/D_2 = 0.015 \end{aligned} \right\}$$

对于粗糙盘， $Re_u \geq 6 \cdot 10^5$ 时

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= (10^{-2}/\pi)(6.65/\lg Re_u - 0.35) & B/D_2 = 0.155 \\ \lambda' &= (10^{-2}/\pi)(5.54/\lg Re_u - 0.3) & B/D_2 = 0.01 \end{aligned} \right\}$$

泄漏损失系数的常见关系式为：

$$\beta_l = (2\alpha \bar{r}_s \delta_s / \phi) \sqrt{2\rho_u \Delta \bar{p}_s / (N\rho_0^*)} \quad (4-8)$$

密封前后相对压差 Δp_s 在考虑间隙中 v_s 计算值的影响和引进叶轮反动度 Ω 后，上式变成

$$\beta_l = (2\alpha \bar{r}_s \delta_s / \phi) \sqrt{(2.1 \sim 2.3) [\varphi_{\theta_2} (\eta_{im} - 1 + \Omega) - \Delta \bar{p}] / N} \quad (4-8a)$$

式中系数 α 一般取 0.7； δ_s 是密封间隙；叶轮效率 η_{im} 用叶轮进出口滞止压差 $p_2^* - p_0^*$ 表示，即 $\eta_{im} = (p_2^* - p_0^*)/h_{is}$ ；叶轮出口到密封进口的相对压差 $\Delta \bar{p}$ 有如下表达式：

对于间隙中背离叶轮出口的流动

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p} &= \varphi_{\theta_2}^{1.05} \{ \bar{r}_s^{1.5} / [a (0.18 + 1.56 \bar{r}_s^3)] - \bar{r}_s / (9.11 + 107.88 \bar{r}_s^{3.4}) + a^{-2} (0.848 \bar{r}_s^{1.3} - 1.84) \} \\ &+ a / 10^2 [-0.64 + 8.69 \bar{r}_s - 26.55 \bar{r}_s^2 + 25.93 \bar{r}_s^3 + (0.19 - 4.72 \bar{r}_s + 14.15 \bar{r}_s^2 \\ &- 13.16 \bar{r}_s^3) \sqrt{a} + (-0.034 + 1.12 \bar{r}_s - 2.87 \bar{r}_s^2 + 2.61 \bar{r}_s^3) a] \} \end{aligned}$$

对于间隙中流向叶轮出口的流动

$$\Delta \bar{p} = 0.048 - 0.031 \bar{r}_s^4 + \sqrt{a} (0.0068 - 0.0066 \bar{r}_s)$$

由于参数 a 中含有 β_l 值，因此在计算 β_l 和 β_{df} 时应采用迭代法。

内部流动损失按机理可分为摩擦损失、分离损失、二次流损失、冲击损失、混合损失等。由于这些损失相互影响和关联，使得分项计算相当困难，因此工程上主要是凭经验和试验资料选取流动损失系数，来估价总的内部流动损失，或选取级的效率（如多变效率）来考虑包括外部损失在内的所有损失。

离心式压缩机用流道法设计时，以其通流部分各元件为对象，选取有关流动损失系数进行损失计算，此时与损失有关的过程多变指数 m 有如下关系式：

$$\frac{m}{m-1} = \frac{k}{k-1} - \frac{\Sigma h_{wi}}{R\Delta T} \quad (4-9)$$

式中 Σh_{wi} 为任两截面间各项损失之和, ΔT 为两截面间温差, 取正值。

用效率法设计时, 对于整个级选取一个效率, 同一个级中各元件的损失不论大小, 都认为效率相同, 即多变指数相等, 其值由式(2-13)可表示为:

$$\frac{m}{m-1} = \frac{k}{k-1} \eta_{p,oi} \quad (4-10)$$

无论采用哪种设计方法, 只要决定了多变指数 m , 压缩给定条件下气体所需要的功就能计算。叶轮的作功能力利用外部损失系数 $\beta_i + \beta_{df}$ 和周速系数 φ_{o2} 的关系式确定。压缩机的设计就是要使这两者相等。

四、方案选择和级的计算

在进行级流道设计之前, 应首先确定采用压缩机械的类型和级数, 为此利用爱克尔特 (Θ ккерт) 定义的无量纲转速 K_n :

$$K_n = 2n(\pi\theta_{i,n})^{0.5} h_{t1}^{-0.75} = \phi^{0.5} / \varphi_{o2}^{0.75} \quad (4-11)$$

式中 n 为转速, 单位 r/s , 由预先给定或计算时选取。在满足相同进口容积流量 Q_{v1} 和 h_{t1} 的条件下, 决定 n 后还可任意选择 ϕ 和 φ_{o2} 的组合。但考虑到 $\phi = 0.05 \sim 0.08$ 范围内工业离心压缩机级有最大效率, 空间轴径向叶轮的最大效率范围可扩大到 $0.12 \sim 0.16$, 而周速系数的最佳值 $\varphi_{o2} = 0.5 \sim 0.6$, 故最佳无量纲转速是 $K_n = 0.32 \sim 0.48$ 。若从级效率出发, 单级的最大无量纲转速 $K_{n,max} = 0.6 \sim 0.65$ (包括空间叶轮), 最小值 $K_{n,min} = 0.1 \sim 0.15$ 。因此, $K_n < K_{n,min}$ 时应采用多级离心压缩机或螺杆式, $K_n > K_{n,max}$ 时必须采用双面进气离心压缩机或轴流式。

级的一元设计是根据推荐的近似公式或大概范围确定通流部分的几何参数, 并在满足气体流量和压力的要求下, 力图有最好的效率。级中流道相对几何参数的选取范围依压升不同有较大区别, 明显的例子是通风机和压缩机之间的差异。各种参数的具体推荐范围由试验确定, 这些范围被用于与其试验条件类似或相差不大的其它机器时是有效的, 对于条件差别较大的机器, 还必须重新进行试验。

一元分析时, 需要计算各特征截面 (图2-30) 上的平均气流参数。级中任两截面间的气动参数由一元的连续性方程、能量方程、状态方程和过程方程相关联, 迭代求解这四个方程, 就可依次决定各截面上的气动参数。若用 $i-j$ 表示任两截面, 则迭代步骤一般为:

1. 设 j 截面上气体密度 ρ_j
2. 依次解下列方程

$$\left. \begin{aligned} v_j &= m / (\rho_j F_j) \\ T_j &= \frac{h_i}{Rk/(k-1)} + \frac{v_i^2 - v_j^2}{2Rk/(k-1)} + T_i \\ \rho_j &= \rho_i (T_j/T_i)^{\frac{m}{m-1}} \\ \rho_j' &= \rho_j / (RT_j) \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

3. 比较 ρ_j 和 ρ'_j , 若认为两者差值满足精度要求, 则迭代完成, 否则从第一步开始重复计算。

式(4-11)中多变过程指数 m 由式(4-8)或式(4-9)决定, 对于两截面间不包括叶轮时 $h_i = 0$, j 截面的面积 F_j 由几何参数选取时确定。

五、叶轮几何参数的选择

由式(4-11)可知, 在满足相同的流量 q_m 和能量头 h_{1k} 时, 能选取不同的假想流量系数 ϕ 和周速系数 $\varphi_{\theta 2}$ 的组合, 也就是说有多种叶轮结构方案符合同一设计要求。只要叶轮的各主要参数为推荐值, 或 $\varphi_{\theta 2}$ 和 ϕ 在最佳值范围内, 所采用的方案一般都是可行的。但由于选取这些参数的准则, 目前还不能被准确地描述, 因此有些可行方案之间的优劣也无法科学地予以判断。

叶轮出口半径 r_2 在确定 n 和 u_2 后很易决定:

$$r_2 = \frac{30u_2}{\pi n} \quad (4-13)$$

叶轮出口的其它主要几何参数 β_{A2} , b_2 , N_2 直接或间接地反映在 $\varphi_{\theta 2}$ 的表达式(4-3 a) 中。

叶片出口角 β_{A2} 除与 $\varphi_{\theta 2}$ 有关外, 还对叶轮反动度 Ω 和叶道形状有明显的影响, 即还影响到效率。 β_{A2} 大, 叶轮作功能力强, 这对于减少机器级数和尺寸是有利的。另一方面, 由于此时反动度 Ω 的减少和叶道中气流不均匀性增大而引起效率下降。对于确定 β_{A2} , 目前还没有一个单独的公式。在效率较高的叶轮中, β_{A2} 为 $30^\circ \sim 50^\circ$, 实际应用时 β_{A2} 的取值范围更大。

叶片数 N 也是影响周速系数 $\varphi_{\theta 2}$ 和叶道形状的参数。大的 N 值可提高 $\varphi_{\theta 2}$ 值, 减少叶片负荷和叶道当量扩张角 θ_{eq} , 这对作功和效率都有利。但因叶片数多, 增加了叶片表面积和进口阻塞(使 ω_1 增加)而引起损失增加。这对矛盾可通过采用双列叶栅(长短叶片)来调和。最佳叶片数的经验关系式较多, 在已知 β_{A2} 而不知叶轮进口几何参数时, 可由下式估计:

$$N = 10\pi \sin \beta_{A2} \quad (4-14)$$

通过周速系数 $\varphi_{\theta 2}$ 、平均阻塞系数 τ_m 和最佳平均负荷 $\Delta \bar{w}_m = 0.25 \sim 0.35$, 计算叶片数公式为:

$$N = \frac{2\pi\tau_m}{l} \frac{\varphi_{\theta 2}}{\Delta \bar{w}_m} = \frac{\pi(\tau_1 + \tau_2)\varphi_{\theta 2}}{\Delta \bar{w}_m(1 - \bar{r}_1)} \sin\left(\frac{\beta_{A1} + \beta_{A2}}{2}\right) \quad (4-14 a)$$

叶轮出口宽度 b_2 与流量系数 φ_{r2} 有关

$$b_2 = \frac{q_m}{2\pi r_2 \rho_2 \varphi_{r2} u_2} \quad (4-15)$$

因此, b_2 是间接地影响 $\varphi_{\theta 2}$ 的值。图4-4给出了 φ_{r2} 最佳值与 β_{A2} 的关系, 该关系的平均值可近似表示为

$$\varphi_{r2} = -\beta_{A2}^2/36000 + \beta_{A2}/187 + 0.045 \quad (4-16)$$

最终的 φ_{r2} 允许在该式计算值上变化 0.02。

根据以上关系式, 在给定 h_{1k} 、 q_m 和 n 时, 叶轮出口参数 $\varphi_{\theta 2}$, φ_{r2} , β_{A2} , N_2 , b_2 , r_2 中只要选取了一个, 其它参数就可计算确定。

叶轮进口的主要几何参数有 β_{A1} , b_1 , $r_1(r_0)$ 和轮毂半径 r_h 。相对轮毂半径 $\bar{r}_h = r_h/r_2$ 由

结构和强度条件（如机器工作转速应避开轴系的临界转速）决定，希望 $\bar{r}_h \leq 0.35 \sim 0.40$ 。若其它参数不变时， \bar{r}_h 值增大引起 w_1 增加，从而使损失增大。

叶片进口安装角 β_{A1} 和半径 r_1 ，是从使进口相对速度 w_1 最小，而期望叶轮中损失最小的原则出发选取的，由此推导出如下计算关系：

$$\bar{r}_0 w_{1\min} = \left[\bar{r}_h^2 + 1.26 \left(\frac{\phi K_v \rho_{in}^*}{K_D \tau_1 \rho_0} \right)^{2/3} \right]^{0.5} \quad (4-17)$$

$$\operatorname{tg} \beta_{1w_{1\min}} = \sqrt{0.5(\bar{r}_0^2 w_{1\min}^2 - \bar{r}_h^2)} / \bar{r}_0 w_{1\min} \quad (4-18)$$

$$r_1 = K_D r_{0w_{1\min}} = (1 \sim 1.05) r_{0w_{1\min}} \quad (4-17a)$$

$$\beta_{A1} \approx \beta_{1w_{1\min}} \quad (4-18a)$$

式中加速系数 $K_v = v_1'/v_0 = F_0/F_1$ ，它将叶片进口子午面宽度 b_1 和叶轮进口半径 r_0 联系起来：

$$K_v = (\bar{r}_0 - \bar{r}_h^2) / (2K_D \bar{r}_0 \bar{b}_1) \quad (4-19)$$

若 $K_v > 1$ ，即气流加速，可减少叶轮进口部分气流转弯引起的损失，但加速导致 b_1 减少，增加 w_1 ，同时因小 b_1 促使轮盖进口处曲率加大，叶片进口气流更加不均匀，气流转弯后的扩压度增加，这都提高损失。因此，对于离心鼓风机和压缩机，推荐 $K_v = 0.9 \sim 1.1$ ，而对于通风机，该值一般较小，可达 0.5。

进口几何参数确定后，通过进口马赫数 $M_{w_1} = w_1 / \sqrt{kRT_1}$ 检验其合理性，一般要求 $M_{w_1} \leq 0.55 \sim 0.65$ 。

为了综合评价叶轮进、出口几何参数选择的合理性，引进叶道扩压度 w_1/w_2 或当量扩张角 θ_{eq} ：

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_{eq}}{2} = \frac{\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1}}{\sqrt{\pi l}} = \frac{\sqrt{2r_2 b_2 \tau_2 \sin \beta_{A2} / N} - \sqrt{2r_1 b_1 \tau_1 \sin \beta_{A1} / N}}{(r_2 - r_1) / \sin[(\beta_{A1} + \beta_{A2}) / 2]} \quad (4-20)$$

一般叶轮的较小损失可能发生在 $w_1/w_2 = 1.5$ ，并认为 $w_1/w_2 < 1.6 \sim 1.8$ 是合理的。对于叶道当量扩张角 θ_{eq} ，希望不超过 $6^\circ \sim 8^\circ$ 。

叶轮进出口之间子午面上，盘的型线常是直线和圆弧组成，盖的型线一般为连接 b_1 和 b_2 端点的斜线。径向面上，叶片型线惯用单圆弧。

以上叶轮的设计仅考虑进出口截面的气流平均参数值，没有涉及到叶道内流动特性，因此，这种设计方法是比较粗糙的，设计的好坏主要依赖于所凭借试验资料的可利用程度。为了改善设计方法，提高压缩机的性能，必须研究叶轮内部流动机理，比较深入地了解内部流场的知识。从而使设计时不仅选定进、出口截面上的几何参数，还要确定进、出口间几何参数的合理分布。

§ 4-2 叶轮中的流动机理及损失分析

利用管道摩擦损失的关系计算透平机械通道中的摩擦损失，在损失系数的近似值能被确定时，可给出满意的结果。研究已表明，附面层的一些论点，为计算减速及加速流动的透平

机械通道的损失系数提出了良好的基础，并可表示叶片负荷损失的影响。叶栅中附面层发展的分析处理，也成为特殊的工程领域，人们致力发展专门的理论，以期对透平机械通道中的损失机理有更完全的了解。

下面仅讨论附面层的最基本关系，主要兴趣是导出满足一般情况和有一定精度的关系式，这些式子在不忽略主要因素（如哥氏效应）的条件下得到简化。

所有摩擦损失都是由附面层中剪切力引起的。附面层在靠壁面的速度为零，而在靠中心的速度为自由流速度。附面层的排挤厚度 δ 定义为：

$$\delta = \int_0^{\delta} (1 - v/v_f) dy$$

表示动量损失的附面层动量厚度是

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{v}{v_f} \left(1 - \frac{v}{v_f}\right) dy$$

式中 v 为附面层中速度， v_f 为参考速度， y 是垂直壁面的方向。可以看出， δ 、 θ 都随通道长度 l 和逆向压力梯度增加而增加。

对于一般形式的附面层方程，精确求解很困难。由特鲁肯布罗德 (Truckenbrodt) 提出的逆向梯度下附面层增长的近似式为：

$$\theta_2 \left(\frac{v}{v_2} \theta_2 \right)^{1/n} v_2^{3+2/n} = C_1 + A \int_0^l v^{3+2/n} dx \quad (4-21)$$

若定义 v_2 为叶栅出口运动粘度， v_2 为叶栅出口的自由流速度， l 为流道长度，积分常数 C_1 为初始层流部分的动量厚度时，则上式更容易求得一般解。式中 A 和 n 是常数，与流动特性有关，其数值见表4-2。假定速度 v 沿流道长度的变化关系，积分式(4-21)得流道出口处动量厚度。若其变化关系呈线性且忽略 C_1 ，则积分得到相对动量厚度

$$\frac{\theta_2}{l} = \frac{[A/(4 + 2/n)]^{n/(n+1)}}{Re_2} \left[\frac{1 - (1/\mu)^{4+2/n}}{1 - (1/\mu)} \right]^{n/(n+1)} \quad (4-22)$$

式中 $\mu = v_2/v_1$ ，称为减速比。 $\mu = 1$ 时有

$$\left(\frac{\theta_2}{l} \right)_0 = \frac{A^{n/(n+1)}}{Re_2^{1/(n+1)}} \quad (4-23)$$

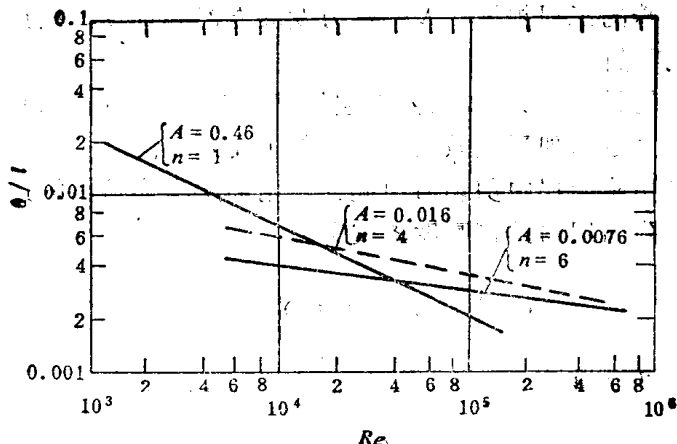
这些关系式的意义示于图4-5。图中实线表示紊流和层流的情况， θ/l 随 Re 减少而增加，两种状况相交于 $Re = 4 \times 10^4$ 。图中虚线表示接近分离的紊流状况，它有稍高的 θ/l 值。

若忽略了初始层流部分 (C_1)，可认为附面层动量厚度的层流部分在高雷诺数时相当小，并随雷诺数减少而增加。假设 $Re = 4.4 \times 10^5$ 时， $C_1 = 0$ ，层流部分的 θ/l 约为紊流的30%，则 $Re = 4 \times 10^4$ 时图4-5

中虚线表示了总动量厚度。在许多情况下，这些数据有好的近似结果，因此 $A = 0.016$ 和 $n = 4$ 可用于紊流附面层的计算。

表4-2 流动特性与 A 、 n 的关系

A	n	流动特性
0.0076	6	紊流
0.016	4	紊流、接近分离
0.46	1	层流

图4-5 相对动量厚度与雷诺数的关系 ($\mu = 1$)

流动线性减速和加速对动量厚度的影响由式 (4-22) 与式 (4-23) 之比表示

$$\frac{\theta/l}{(\theta/l)_0} = \left[\frac{1 - (1/\mu)^{4+2/n}}{(1 - 1/\mu)(4 + 2/n)} \right]^{\frac{n}{n+1}} \quad (4-24)$$

相对动量厚度 θ/l 随减速率减小更迅速增长, 随加速率增大而减少。

对于减速运动, 采用开始段增大减速代替线性减速方案能有较小的 θ/l 值, 图 4-6 a 中减速方案由式 (4-21) 分部积分有

$$\frac{\theta}{l} = \frac{\left[A / \left(4 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \right]}{Re^{1/(n+1)}} \left\{ \frac{\mu x_1 [(\alpha^* - 1)/\mu]^{4+2/n}}{\alpha^* - 1} + \frac{(1 - x_1) [1 - (\alpha^*/\mu)^{4+2/n}]}{1 - \alpha^*/\mu} \right\}^{\frac{n}{n+1}} \quad (4-25)$$

式中 α^* 表示开始部分的减速比 $\alpha^* = v_1/v_{in}$, x_1 表示无量纲的开始部分长度 $x_1 = l_1/l_{tot}$ 。对于图 4-6 b 中减速方案则:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{l} = & \frac{\left[A / \left(4 + \frac{2}{n} \right) \right]^{n/(n+1)}}{Re^{1/(n+1)}} \left\{ \frac{\mu x_1 [(\alpha^* - 1)/\mu]^{4+2/n}}{\alpha^* - 1} \right. \\ & + \frac{\mu (x_1 - x_2) [(\beta^*/\mu)^{4+2/n} - (\alpha^*/\mu)^{4+2/n}]}{\beta^* - \alpha^*} \\ & \left. + \frac{(1 - x_2) [1 - (\beta^*/\mu)^{4+2/n}]}{1 - \beta^*/\mu} \right\}^{\frac{n}{n+1}} \quad (4-26) \end{aligned}$$

式中 $\beta^* = v_2/v_{in}$, $x_2 = l_2/l_{tot}$ 。

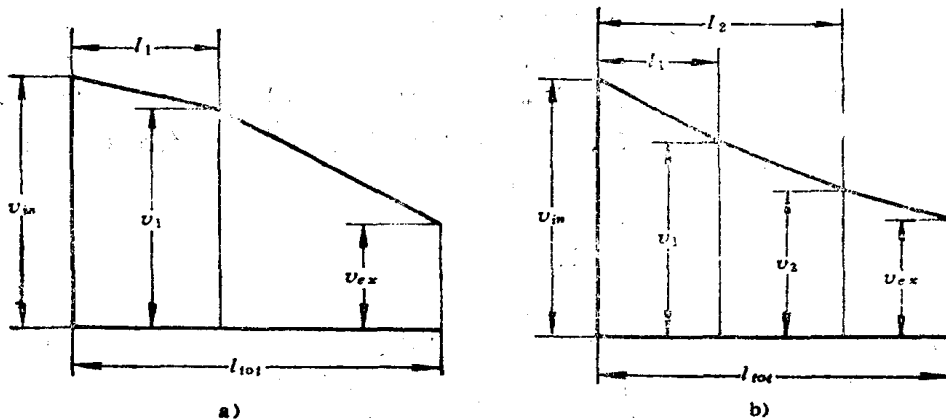


图4-6 流动减速方案

减速和加速对附面层动量厚度的影响示于图 4-7。\$v_2/v_1 < 1\$ 时，开始部分高的减速率能减小相对动量厚度，而加速 (\$v_2/v_1 > 1\$) 时，开始部分较少加速可减小相对动量厚度。

另一个重要参数是临界附面层动量厚度 \$(\theta/l)_{cr}\$，此时可期望有附面层分离。

为了计算动量厚度 \$(\theta/l)_{cr}\$，可以引进哈根 (Hagen) 数，它被定义为压力与粘性力之比。将这个概念应用于平板，当 \$\delta^*\$ 表示附面层厚度时

$$H_o = \frac{(-dp/dx)\delta^* b dx}{\tau_w b dx} = - \frac{(dp/dx)\delta^*}{\tau_w}$$

若壁面剪切力

$$\tau_w \approx \rho v^2 \left(\frac{\nu}{v \delta^*} \right)^{2/(n+1)}$$

和

$$\frac{dp}{dx} = - \rho v \frac{dv}{dx}$$

并用附面层动量厚度 \$\theta\$ 代替附面层厚度 \$\delta^*\$，则

$$H_{o\theta} = \frac{dv/dx}{v} \theta Re_\theta^{2/(n+1)} \tag{4-27}$$

式中 \$n = 7\$，\$Re_\theta = v\theta/\nu\$。有的文献规定，分离条件由普朗特 (Prandtl) 附面层方程的类似考虑解得：

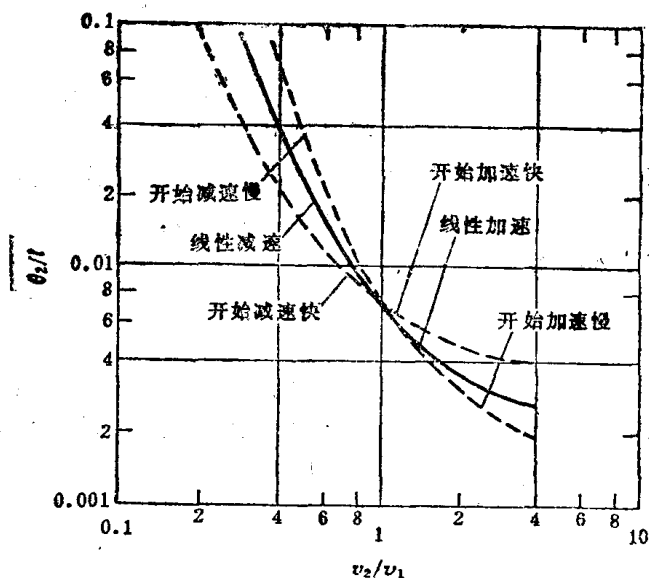


图4-7 相对动量厚度与减速(加速)方案的关系

$$\lambda_{...p} = \frac{Ha_{\theta \rightarrow \dots p}}{Re_{\theta}^{2/(n+1)}} = f(Re_{\theta}) \quad (4-28)$$

式中 $Ha_{\theta \rightarrow \dots p}$ 为分离发生时的 Ha 数。文献资料表明，层流时 $\lambda_{...p} = 0.09/Re_{\theta}$ ，紊流时 $\lambda_{...p} = 0.0044$ 。将以上资料代入式 (4-27)，则临界动量厚度表示成自由流减速率 μ 的函数：

$$\left(\frac{\theta}{l}\right)_{cr} = \begin{cases} \frac{0.045(1+\mu)}{Re_{\theta}(1-\mu)} & \text{层流} \\ \frac{0.0022(1+\mu)}{(1-\mu)} & \text{紊流, } Re_{\theta} > 10^3 \end{cases} \quad (4-29)$$

透平机械通道中的附面层现象是很复杂的，特别是在紊流向层流转换的区域，以致损失预示相当困难。尽管如此，还是通过附面层研究和定义单壁损失的损失系数 ζ_0 ，来获得主要倾向和可能量级的满意数据。 ζ_0 由相对动量厚度计算的表达式为：

$$\zeta_0 = 2 \left(\frac{\theta}{l}\right) \frac{l}{B} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{l}\right) \frac{l}{B} H^2 \right] \quad (4-30)$$

式中 H 为形状因子，定义为附面层排挤厚度 δ 与动量厚度之比； B 为通道宽度。若由上式计算叶栅中吸力面和压力面的损失系数为 ζ_{0s} 和 ζ_{0p} ，则叶栅中能量头损失可表示成参考速度 v 的关系：

$$h_w = (\zeta_{0s} + \zeta_{0p}) v^2 / 2$$

注意到方程 (4-30) 仅包括叶栅中的“翼型”损失，且基于完全的“尾迹混合”。因此，严格地说，方程 (4-30) 仅适用于附面层产生的尾迹完全混合的场合。

ζ_0 值可与管道内摩擦系数 ζ_p 相比较，对于“完全发展了的流动”，即在开始长度段之外， ζ_p 遵循关系：

$$\zeta_p = \lambda \frac{l}{4r_h}$$

式中 r_h 为水力半径，定义为通道横截面面积 F 与横截面周长 U 之比 (F/U)； λ 为摩擦因子，对于紊流区通常用勃拉休斯 (Blasius) 关系 $\lambda = 0.3164/Re_h^{0.25}$ ，雷诺数 $Re_h = vr_h/\nu$ 。取 $r_h = B/4$ 的正方形通道作为基准，则

$$\zeta_p = \frac{0.3164}{[Re(B/l)]^{0.25}} \frac{l}{B} \quad (4-31)$$

将式 (4-21) 除上式，得

$$\frac{\zeta_p}{\zeta_0} = \frac{0.3164}{8 [Re(B/l)]^{0.25} (\theta/l) [1 + (l/B) H^2 (\theta/l) / 2]} \quad (4-32)$$

(θ/l) 由式 (4-23) 计算，其结果示于图 4-8。由图可知，在高雷诺数且 $l/B < 10$ (即在开始长度区) 时，比值 $\zeta_p/\zeta_0 < 1$ ，这正象通常预料的那样。对于 $\lambda = 64/Re_h$ 的层流区，有类似的结果 (图中虚线)。

显然，用叶片高 h 代替通道宽度 B 后，也可用方程式 (4-30) 计算通道另外两个壁的损失系数。不过这是近似的，因为通道中吸力面和压力面之间压差产生了二次流。

为了计算方便，出口速度的平均值 (混合后) 作为参考速度，损失系数 ζ_0 由附面层排挤来修正，其近似关系式为：

$$\zeta = \zeta_0 / [1 - 0.5 \zeta_0 H (1 + B/h)]^2 \quad (4-33)$$

附面层增长还受马赫数 M 的影响，可压和不可压流动的相对动量厚度之比由下式表示：

$$\frac{(\theta/l)_e}{(\theta/l)_{ic}} = (1 + 0.12M^2)^{-0.65} \quad (4-34)$$

但这并不意味着损失系数 ζ 在高马赫数时是减少的，因为高马赫数时，叶栅的 l/h 值比低马赫数时要大。

离心式叶栅中在利用以上讨论的附面层关系时，还应讨论哥氏力的影响。虽然这种影响至今还未被充分揭示，但已知它对附面层可能产生相当激烈的作用。尽管某些关系仍是试验性的，但决定性准则的定性分析，有助于了解离心式叶栅设计中的主要倾向。

离心式通道中表面速度分布，由分析作用在旋转通道中粒子上的力获得（图 4-9）。垂直于流动方向的力是：（1）离心力 $(w^2/r_m)dm$ ，由流道曲率引起；（2） $r\omega^2 \cos\beta dm$ ，由旋转 ω 引起；（3）哥氏力 $2w\omega dm$ 。由此可得到垂直于流动方向的速度梯度表达式（2-67）：

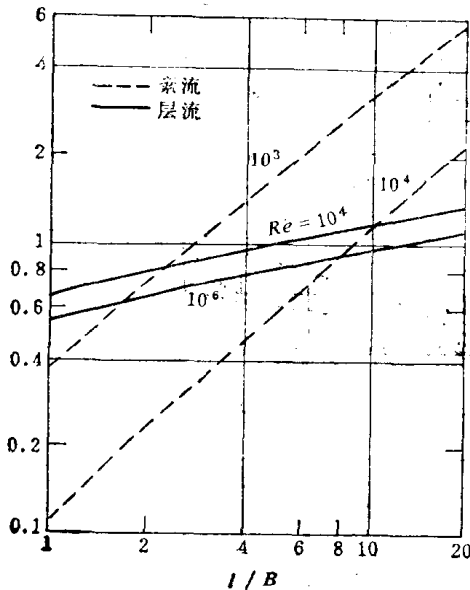


图4-8 损失系数的比较

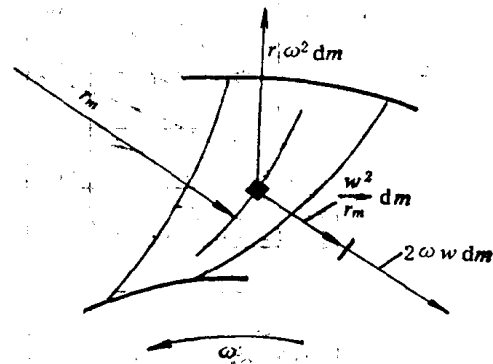


图4-9 离心式通道中的力

$$\frac{dw}{dn} = 2\omega + \frac{w}{r_m}$$

流道中相对速度几乎随流道宽度呈线性变化。离心叶栅的压力边和吸力边速度差 $\Delta w = (w_1 - w_2)$ 由近似关系表示：

$$\Delta w = a(2\omega + w_m/r_m) \quad (4-35)$$

式中 r_m 表示曲率半径， a 为径向面叶道的宽度； w_m 表示相对速度的平均值。相对速度梯度的典型值取为圆弧叶片通道中的值，此时曲率半径 r_m 和流道宽度 a 分别为：

$$r_m = \frac{r_1[(r_2/r_1)^2 - 1]}{2[(r_2/r_1)\cos\beta_{A2} - \cos\beta_{A1}]}$$

$$a = 2\pi r_s \sin\beta_{A2} / N$$

平均相对流动速度 w_m 由子午流速分量 v_m 和叶片角表示

$$w_m = v_{mz} / \sin\beta_{Ax}$$

则相对速度梯度为：

$$\frac{\Delta w}{w_m} = \frac{4\pi \sin \beta_{A2}}{N} \frac{r_x}{r_1} \left[\frac{u_1 \sin \beta_{A2}}{v_{m1} K_{Rx}} - \frac{(r_2/r_1) \cos \beta_{A2} - \cos \beta_{A1}}{(r_2/r_1)^2 - 1} \right] \quad (4-36)$$

式中，下角标 x 表示半径 r_x 所在位置相应的值， $K_{Rx} = v_{mx}/v_{m1}$ ，称作当地子午加速系数，角 β_{Ax} 由下式计算

$$\cos \beta_{Ax} = \frac{r_1}{r_x} \left[\frac{(r_x/r_1)^2 - 1}{(r_2/r_1)^2 - 1} \left(\frac{r_2}{r_1} \cos \beta_{A2} - \cos \beta_{A1} \right) + \cos \beta_{A1} \right]$$

图 4-10 示出了相对速度梯度的典型值。图中 $\beta_{A2} < 90^\circ$ 时，最大梯度发生在转子出口，并随进口角增加而增大。对于 $\beta_{A2} > 90^\circ$ 的叶轮，若曲率半径为常数，则最大相对速度梯度朝流道中间移动。

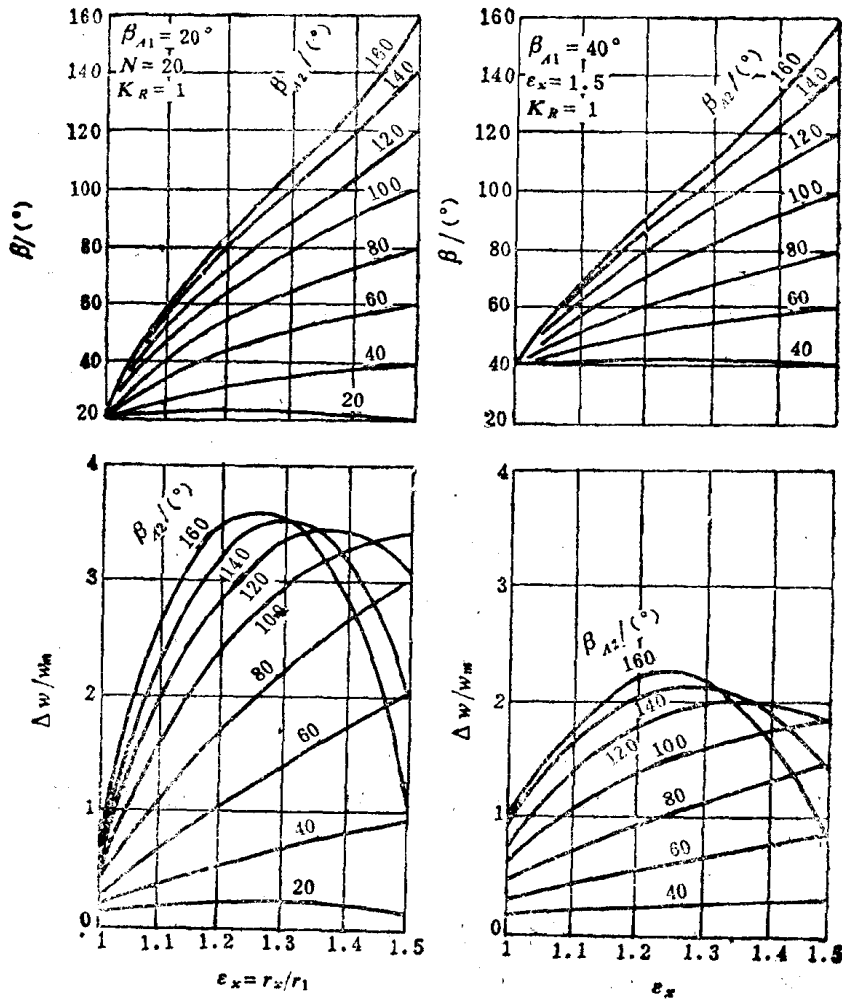


图4-10 离心转子中相对速度梯度的典型值

相对压力梯度决定了叶片的压力负荷。转子叶片的横向压差

$$\Delta p = \rho (w_s^2 - w_p^2) / 2$$

引进 $w_s = w_m + 0.5\Delta w$, $w_p = w_m - 0.5\Delta w$

则 $\Delta p = \rho w_m \Delta w$

以上相对速度分布是根据势流导出的，但势流并不总能实现，离心转子中因素流的影响而观察到了“分层”，它改变了流场及附面层特性。这种情况可通过研究特殊点的速度脉动而加以认识。脉动的影响可通过考虑高速和低速微粒的动态平衡条件来讨论。

对于压力面和吸力面之间的流动，有如下关系（式中符号见图 4-11）：

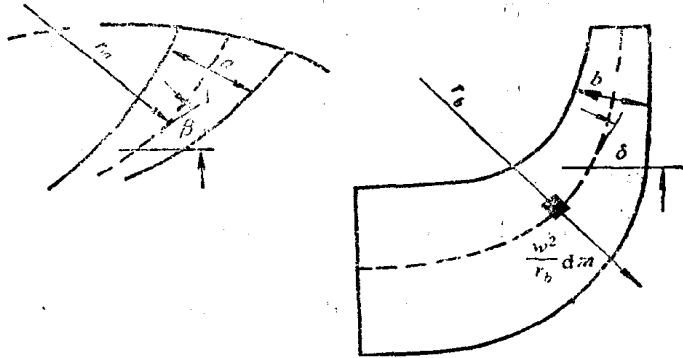


图4-11 流道符号

$$\frac{dp/da}{\rho} = \frac{w^2}{r_m} - \frac{u^2}{r} \sin \delta \cos \beta + 2w\omega \sin \delta = \frac{w^2}{a} \left(\frac{a}{r_m} + \frac{2a\omega}{w} \sin \delta \right) - \omega^2 r \sin \delta \cos \beta$$

上式括号中的项是相对速度梯度

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{2a\omega}{w} \sin \delta + \frac{a}{r_m} = Ri_p \quad (4-37)$$

与式(4-35)相比，该式增加了 $\sin \delta$ ，这是为了补偿混流式叶轮或离心式叶轮的混流部分。式右边 Ri_p ，称作理查森 (Richardson) 数，它支配着转子通道吸力面和压力面之间的流动分布和附面层发展。

转子通道中盘和盖之间的流动平衡条件是：

$$\frac{dp/db}{\rho} = \frac{v_0^2}{r} \cos \delta - \frac{w^2 \sin^2 \beta}{r_i} = \frac{v_0^2}{r} \cos \delta - \frac{w^2}{b} \left(\frac{b}{r_i} \sin^2 \beta \right) \quad (4-38)$$

括号中的项也称理查森数，用 $Ri_{s1} = b \sin^2 \beta / r_i$ 表示，它决定了盘和盖之间的流动特性。考虑到角度影响，并用 w/b 代替 dw/dy 后， Ri_{s1} 与曲面理查森数 (Ri_c) 等价：

$$Ri_c = \frac{w/r}{dw/dy} \quad (4-39)$$

曲面上的二元流动研究指出：凸面流动 ($Ri_c > 0$) 是稳定的 (层流化)，紊流被抑制。反之，凹面流动 ($Ri_c < 0$) 是不稳定的，紊流动能值增加并一直保持较高的值。凸面上紊流在弯管的开始部分是减弱的，但到下游又再次增加。这适用于流动方向的脉动。另一方面，垂直于流动方向的脉动 (横向紊流) 在凸面上仍是被抑制的。与 Ri 数有关的其它特性是：由层流向紊流转变的临界雷诺数 Re_{cr} ，在 $Ri = 0$ (均匀流) 时为 575，而到 $Ri = 1/24$ 时 Re_{cr} 增到无穷大。这样， $Ri > 0.0417$ 时流动保持稳定，因此横向紊流在 $Ri > 2$ 时不可能维持下去。根据早期文献，在 $Ri > 2$ 时横向紊流可能消失，后期文献指出这个界限可低至 $Ri = 1$ 。旋转的影响与曲率的影响类似，这意味着流动在转子通道中的压力面上不稳定，而在吸力面上稳定。

回到式 (4-38), 在离心叶轮流道内给定半径 r 处, 粒子仅有某一速度 ω 时才处于平衡状态。高于这个速度的粒子向流道的压力面移动, 反之, 低于这个速度的粒子则向流道的吸力面聚集, 形成一个低静压的区域。这种影响的增加倍数是 Ri_p , 因此, 分层影响的强度随 Ri_p 数增加而明显增加。

图 4-12 表示了这些影响, 叶轮的叶片出口安装角为 90° 。压力面上流动是不稳定的, 紊流的动能增加。吸力面上流动是稳定的, 横向紊流被抑制。尽管流动减速通常有不稳定的影响, 但高的 Ri 数也许可减少不稳定的倾向, 至少在流道的开始部分是这样。在跨盘-盖面上也有类似的现象发生。在轮盘边流动是不稳定的, 紊流能量增加, 轮盖边流动是稳定的, 横向紊流再次被抑制。于是, 在叶轮流道吸力边和轮盖边相邻的角落, 形成了一个低能量粒子的中心, 并发展直到占据高能粒子没有覆盖的全部流动区域, 如图 4-13 所示。由于被抑制的横向紊流, 低能中心与相邻的高能流区混合的可能性很小。但是在流动方向, 紊流朝通过出口可能是增强的。

在压力边和轮盘边高能粒子的积累, 增加了自由流的速度, 这样, 流体速度不象势流模型中所示的那样低, 即减速变慢, 从而阻碍了分离的倾向, 延迟了附面层的生长。在吸力边和轮盖边, 低能粒子的加入降低了自由流的速度, 与势流模型假设相比减速变快, 这就加速了分离的倾向和附面层的生长。因此, 压力边和吸力边之间的速度分布, 比势流模型得到的要平坦 (图 4-12), 甚至可能有图 4-13 中的突变现象, 动能的分布变得很不均匀, 流动呈更

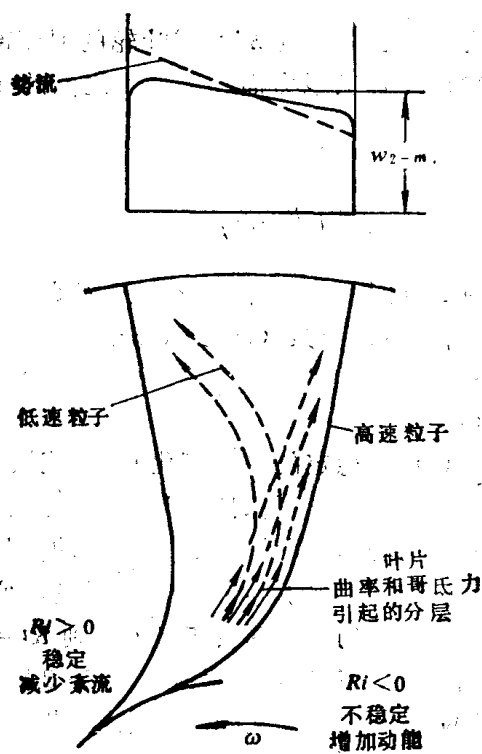


图4-12 中等 Ri 数转子中的流动现象

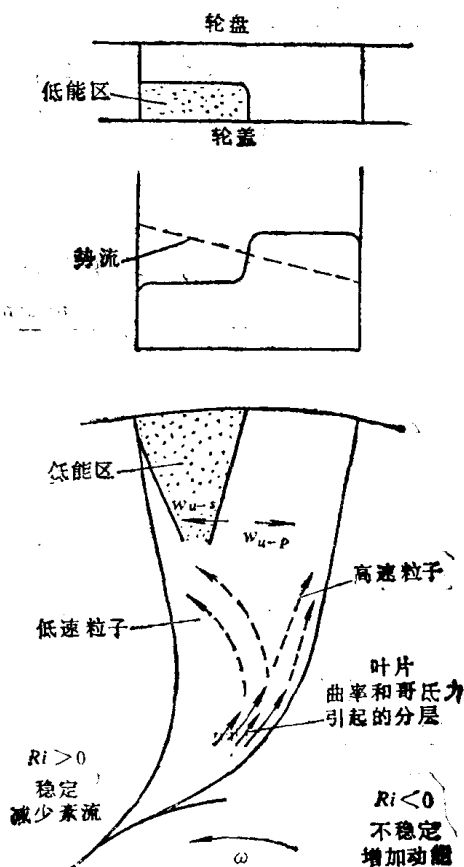


图4-13 高 Ri 数转子中的流动现象

急剧的变化，这种不连续现象在低 Ri 数时是不存在的。

紊流机理也影响附面层特性。由于吸力边和轮盖边之间形成了低能中心，则吸力面和轮盖面上附面层动量厚度比式(4-25)计算的要大，而在压力面和轮盘面上，因高能粒子的聚集使其动量厚度比计算值小。

以上讨论说明了常规的势流理论，尚不能计算出旋转流道内流动分布。若仍利用势流理论进行分析，则应引进“修正因子”，这种处理方法也适用于附面层增长的计算。附面层增长的关系，可通过引用或扩张目前提供的“薄层剪切层”近似修正，或重新由纳维-斯托克斯方程推导并考虑常规附面层理论中被忽略的项。建立一个合适的方法是困难的，因为紊流机理仍处在加紧研究中，尚未达到可以实用的数值关系式的阶段。

分析紊流的最有力工具是量纲分析。关于紊流对叶道中流动分布、分层倾向、附面层发展等影响的一个关键相似参数是 Ri 数，根据这个数评价旋转通道中流动的有关数据，或许产生有意义的信息。这里的问题是：唯一发表的一组详细数据，是在单个旋转通道(图4-14)中得到的，因为此种结构的叶片在两个径向平面之间，所以它仅包括 $Ri_{s,p}$ 的影响。

有的文献给出了这些数据的单参数关系，并根据 Ri 数给出了修正因子的合理表达式。深入研究表明，更合适的关系在引进一个补充参数时导出。这个补充参数为相对进口速度 w_{m1} 与进口圆周速度 u_1 之比 $\phi^* = w_{m1}/u_1$ ，它表示了转子进口状态。由此得两参数组合(设 $\delta = 90^\circ$, $r_m = \infty$):

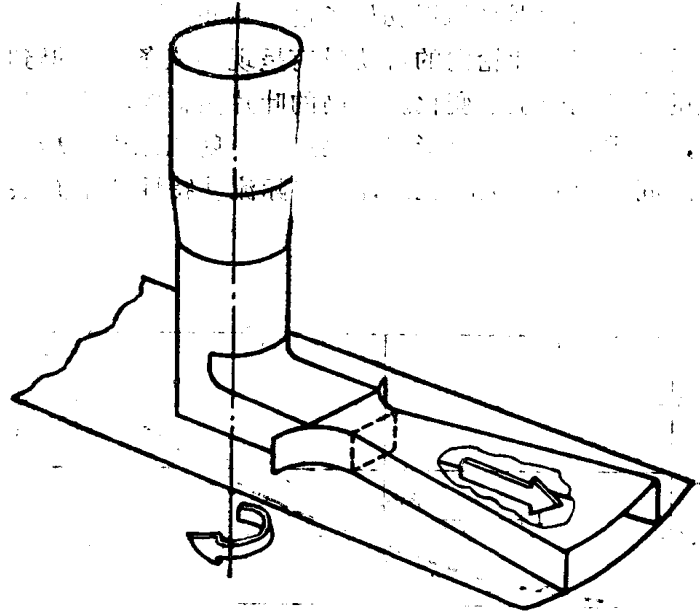


图4-14 试验用单通道装置

$$Ri\phi^* = \frac{4\pi \sin^2 \beta_A (r/r_t)}{N K_R \sin \beta_{A1}} \quad (4-40)$$

和

$$Ri\sqrt{\phi^*} = \frac{4\pi \sin^2 \beta_A}{N} \sqrt{\left(\frac{r/r_t}{K_R}\right) \left(\frac{u}{v_m}\right) \left(\frac{1}{\sin \beta_{A1}}\right)}$$

这些两参数组合，可用来表示实际流动分布(下标 act)与势流理论计算值(下标 pot)之间的偏差，即

$$\frac{\Delta w_{act}}{\Delta w_{pot}} = 1 - 0.25 Ri_{s,p} \phi^* \quad (4-41)$$

和

$$\left(\frac{w_{act}}{w_{pot}}\right)_p = 1 + \frac{(Ri_{s,p} \sqrt{\phi^*})^2}{2.5}$$

式中，下角标 p 表示压力面上的值。由这两个式子计算的结果示于图4-15中。

转子通道中压力面和吸力面上附面层增长受分层的影响，这样，以上相对动量厚度的关

系，必须用单参数或双参数函数修正，以给出离心转子中附面层增长的实际数据。预期的影响是压力面上附面层增长，比方程式(4-21)表示的要慢，这是由于高能粒子的有利影响。而吸力面上附面层增长，比方程式(4-21)计算的更快，这是低能粒子的不良作用。图4-16 a所示的两参数关系，为压力面上实际附面层动量厚度与势流时的计算值之比。对于吸力面修正关系，可能仅在分离点 ($Ri^* = 1 \sim 1.2$) 之前适用，图 4-16 b 表示的单参数关系，在中等和大流量时给出了满意的结果，但在小流量范围有很大的偏离，这可能是由于在小流量测量时，难以获得精确的数据所致。

图 4-16 中流道进口处的相对动量厚度之比不等于 1 并不奇怪，因为势流计算是由标准的转子通道喉部（径向部分）开始的，而实验装置中附面层发展是在轴向进口处就开始了。因此，图中的数据必须用初始长度来修正。

总之，离心叶轮内的流动没有呈现势流条件下得到的流谱，而由紊流的机理所控制，附面层的生长也产生了变化。在高的叶片负荷时，由于分层效应，低能量粒子占据流道的较大部分，以致叶轮出口处形成了尾迹——射流流谱。 Ri 数是一个有利于表示势流与实际流动特性之间差异的参数，也是计算实际流动特性和附面层增长的关键参数。

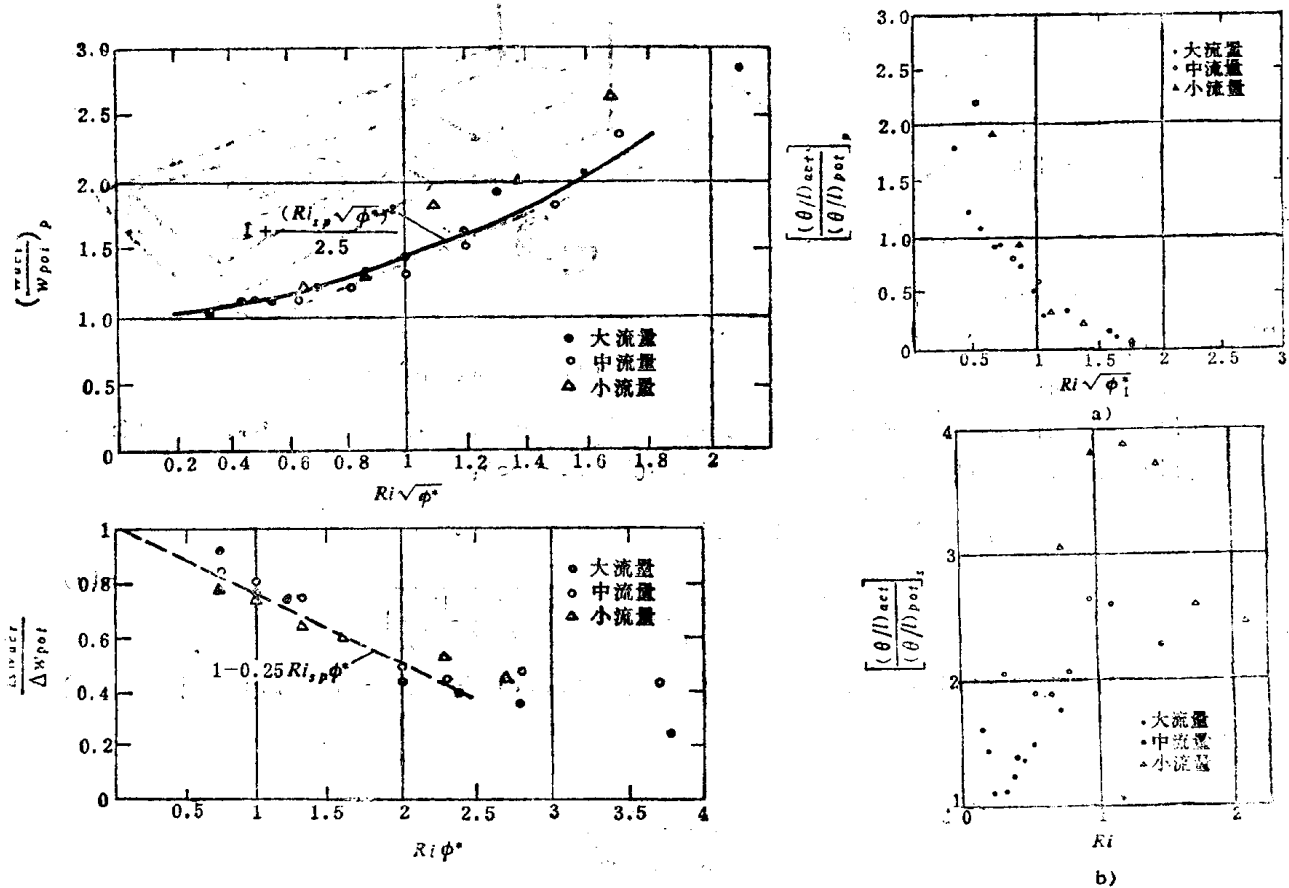


图4-15 两参数关系与测量结果的比较

图4-16 附面层动量厚度

§ 4-3 静止流道中的流动分析与设计

一般忽略静止流道中气体与外界的热量交换，气体总的能量不变，但动能、压力能和损失产生的热量之间发生转换。

静止流道包括进口装置（吸气室）、扩压器和出口装置。

一、吸气室

吸气室是将气体均匀且按一定的旋绕供给叶轮。它一般分为两种型式，一种是常用于悬臂叶轮的轴向进气吸气室，另一种是径向或近似径向进气的吸气室。轴向进气吸气室的出口截面上气流是均匀的，在子午面形状良好的情况下，其中损失常小于级有效能量头的 0.5%，气流分析可由轴对称无粘气体运动方程求解。作为这种进气管的设计准则，子午速度不应出现局部峰值和负的梯度，即呈单调平稳的变化。

径向吸气室较为复杂，为了方便分析，被分成三段（图 4-17），分别是进气通道（ $in \sim 180^\circ$ ），螺旋通道（ $180^\circ \sim k$ ）和轴对称环形收敛通道。进气通道和螺旋通道中的流动有极其复杂的图谱，螺旋通道中速度矢量在各计算截面上是不均匀的，而且沿流动方向也是变化的，这是吸气室出口截面上沿周向气流不均匀的主要原因。图 4-18 表示了静吹风得到的 $0-0$ 截面上损失系数 $\zeta_{i,0} = 2h_w/v_0^2$ 沿周向的分布。损失 h_w 是相应各角度 θ 的实际值。特性 $\zeta_{i,0} = f(\theta)$ 相应于 $0-0$ 截面上速度的不均匀分布： $\theta = 0$ 时速度最小， $\theta = 180^\circ$ 时速度达最大值 v_{max} ，这由速度不均匀性系数 x_v 表征

$$x_v = (v_{max} - v_m)/v_m$$

式中 v_m 为 $0-0$ 面上的平均速度。

进气通道对螺旋通道中气流有很大影响，有的研究表明：进气通道的收敛度从 1 增到 3，则气流的不均匀度 x_v 从 1.60 减到 1.25，而损失系数从 0.48 下降到 0.24。

按 $0-0$ 截面上速度和水力直径计算的 Re 数在范围 $7 \times 10^4 \sim 3.5 \times 10^6$ 内，粘性对气流结构的实际影响不大。假设气流是二元时，还可由电模拟法研究吸气室中的流动，其结果示于图 4-19。图中等位线实际上与半径 r_c 的圆周切线相吻合，即速度矢量约与圆切线垂直，但在螺旋通道进口两者出现明显的差别。

图 4-20 表示了吸气室损失系数的试验结果，这些曲线是在进口面积 f_{in} 不变，出口面积

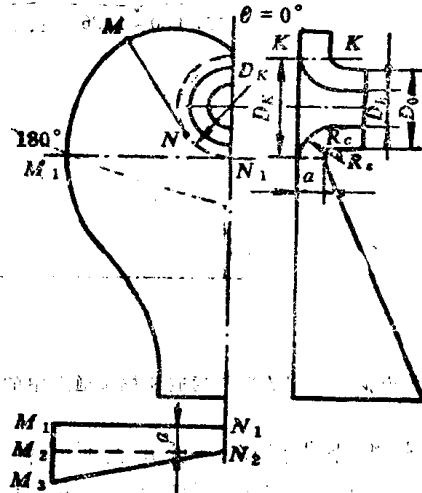


图 4-17 径向吸气室

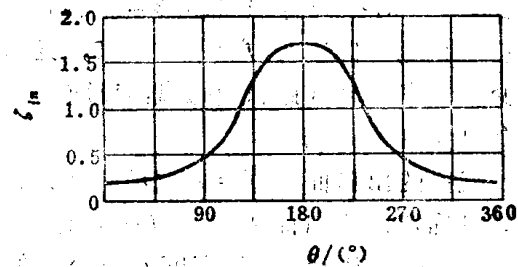


图 4-18 径向吸气室出口截面上损失沿周向分布

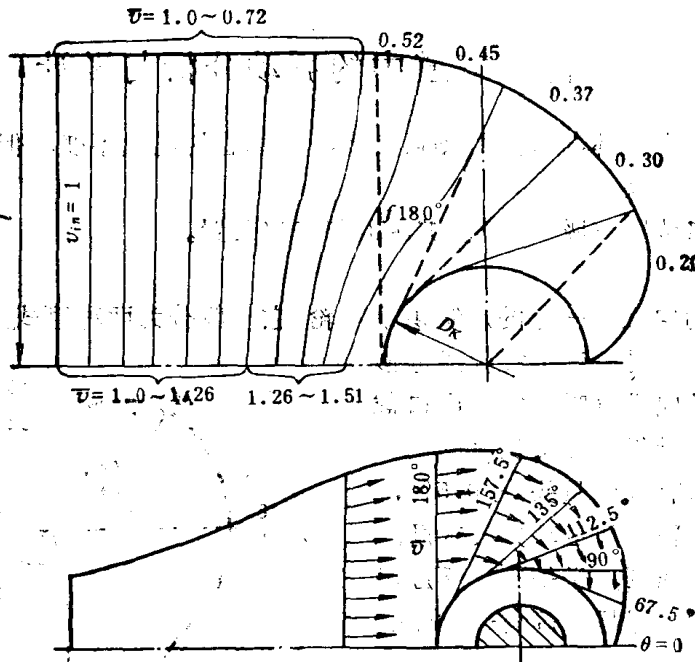


图 4-19

a) 电模拟法得到的进气通道和螺旋通道中的等位线分布 b) 静吹风得到的螺旋通道中速度 \$v/v_0\$ 向量场

\$f_0\$ 变化的情况下得到的。研究表明，在给定质量流量 \$q_m\$ 和 \$f_{in}\$ 时，不同 \$f_0\$ 引起 \$f_h/f_0\$ 变化对吸气室损失影响不大，因此，设计中推荐损失系数 \$\zeta'_{in} = 2h_{in}/v_{in}^2\$ 更合适。显然 \$\zeta'_{in} = \zeta_{in}(f_{in}/f_0)^2\$。图 4-20 还表明环形收敛通道凸壁的相对半径 \$R_s/a\$ 对损失有强烈的影响。根据损失系数 \$\zeta_{in}\$ 曲线，推荐 \$f_h/f_0 = 1 \sim 1.5\$，这就允许减少吸气室的轴向距离并使螺旋通道和进气通道有更大收敛。

吸气室的出口面积 \$f_0 = \pi(r_0^2 - r_h^2)\$ 由叶轮计算时确定，进口面积 \$f_{in}\$ 应尽可能大，以期减少损失，半径 \$R_s\$ 和宽度 \$a\$ 由允许的轴向尺寸考虑，希望 \$R_s/a \ge 0.6\$，从而

$$\frac{f_h}{f_0} = \frac{2\pi r_h a}{\pi(r_0^2 - r_h^2)} = \frac{2(r_0 + r_h)a}{r_0^2 - r_h^2} \quad (4-42)$$

流道凸壁相对半径 \$R_s/a\$ 取定后，为保证凸壁上速度峰值有所下降，凹壁有最佳相对半径

$$\left(\frac{R_c}{a}\right)_{opt} = \frac{R_s}{a} \left[\frac{f_h}{f_0} \cdot \bar{r}_0 + [\bar{r}_0^2 + 2(f_h/f_0)(R_s/a)(\bar{r}_0^2 - \bar{r}_h^2)]^{0.5} \right] \quad (4-43)$$

螺旋通道的计算截面是沿半径 \$r_s\$ 的圆周的相切截面，其径向尺寸是基圆 \$D_s\$ 的渐开线，

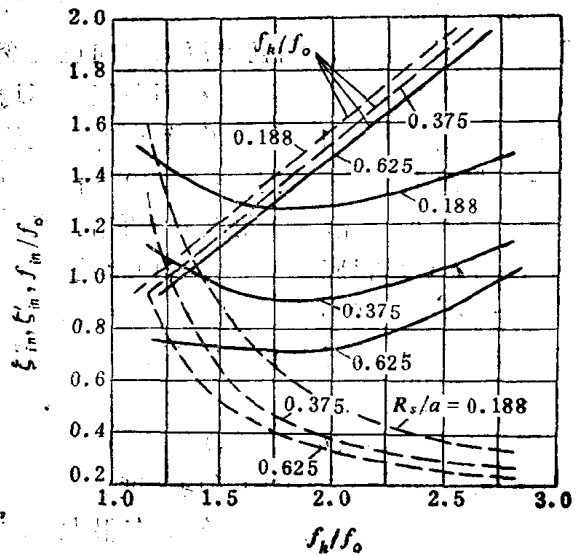


图4-20 径向吸气室的损失系数

渐开线的曲率半径

$$MN = r_1 \theta^\circ \pi / 180^\circ$$

为了减少沿 θ 方向气流的不均匀性, 增加子午面通道面积是合理的, 即取

$$M_1 M_3 / a = 1.5 \sim 2.0$$

由 $M_1 N_1 = 2\pi r_1$, 螺旋通道的收敛度为

$$\frac{f_{180^\circ}}{f_k} = \frac{2M_1 N_1 (M_1 M_3 + N_1 N_2) / 2}{2\pi r_1 a} = (M_1 M_3 / a + 1) / 2 \quad (4-44)$$

进气室的总收敛度由下式检验

$$f_{in} / f_0 = (f_{in} / f_{180^\circ}) (f_{180^\circ} / f_k) (f_k / f_0)$$

在总收敛度不变的情况下, 三个部分的收敛度之间的关系可借助 $M_1 M_3$ 、 a 和 R 来改变。

二、扩压器

叶轮出口的气流动能比级出口动能大得多, 它占级能量头的 20~50%, 扩压器就是将叶轮出口处的大部分动能有效地转换成压力能。扩压器常分无叶、叶片(或通道)扩压器两种。无论采用哪种结构型式, 叶轮后总有一无叶环形空间以使叶轮尾迹均匀, 无叶扩压器看成是这一环形空间的继续。

无叶扩压器结构和工艺最简单, 并保证级有较宽的工作范围。它是由二个壁(通常是平行壁)面组成的环形通道, 其中气流速度按子午宽度平均的圆周分量 v_θ 和子午分量 v_r 分别由动量矩定理和连续方程决定:

$$v_\theta = k_m v_{\theta 2} r_2 / r; \quad v_r = v_{r 2} r_2 b_2 \rho_2 / (r b \rho) \quad (4-45)$$

式中 $k_m < 1$ 是考虑动量矩因壁面摩擦而减少的系数。

对于常用的等 b 无叶扩压器中无粘不可压流动 ($k_m = 1$, $\rho = \text{const}$, $b = \text{const}$)

$$\alpha = \arctg(v_r / v_\theta) = \alpha_2 = \text{const} \quad (4-46)$$

此时的气流轨迹为对数螺旋线。

由式(4-45)和式(4-46)可知, 扩压器中气体密度随半径的增加而使 α 角减少(因 v_r 减少), 子午面扩张(即 b 沿半径增加)也使 α 角下降。在这两种情况下, v_r 随半径增加而减少比 $b = \text{const}$ 的不可压流动时要快些。相反, 无叶扩压器壁面上切向粘性力增加 α 值(因减少 v_θ), 子午面收敛也增加 α 角。在 $k = \text{const}$ 时, 同时考虑可压流动(v_r 减小)和粘性(v_θ 减少)的影响, 无叶扩压器中的气流角 α 仍近似不变。

无叶扩压器中的实际流动也是复杂的三元和不稳定流动, 它由与叶轮的相互影响和周期性气流特性决定。根据周向对称的观点, 无叶扩压器中压力梯度仅沿半径方向存在, 气流的分离和回流也只沿半径方向出现。为了简化问题, 将无叶扩压器中的流动表示成速度的径向分量 $v_r = v \sin \alpha$ 和周向分量 $v_\theta = v \cos \alpha$ 的叠加。径向分量可能引起分离, 周向分量在周向无梯度, 但引起径向的附加压力梯度 v_θ^2 / r , 由径向平衡条件有

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{v_\theta^2}{r} \quad (4-47)$$

若忽略 ρ 、 b 沿径向的变化, 由 $q_m = v_r 2\pi r b \rho$ 和 $v_\theta r = \text{const}$ 有 $r dv_r + v_r dr \approx 0$, $-dv_r/dr = v_r/r$ 及 $dv_\theta/dr = -v_\theta/r$ 则(4-47)变成

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{r} + \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{v^2}{r} \approx -v \frac{dv}{dr} \quad (4-48)$$

由上式, $-dv/dr \approx v/r$, 变换后得 $vr = \text{const}$, 即无叶扩压器中气流速度 v 与半径 r 成反比。上式还表明, 在给定速度 v 值后, 压力梯度 dp/dr 与气流角 α 无关, 即与分速 v_r 和 v_θ 之间关系无关, 但 α 角的大小对径向分离有影响, α 角小表示 v_r 小, 此时 v_r 不能补偿附面层中能量损失, 产生分离。实验表明, 高效叶轮后的无叶扩压器中在 $\alpha_2 > 25^\circ \sim 30^\circ$ 时流动没有旋涡。此外, 大气流角 α 表明流动轨迹较短, 所产生的摩擦损失较小。因此, 从效率角度考虑, 在叶轮出口气流角 α_2 较大时才用无叶扩压器。

上述分析仅适用于其进口有均匀气流的无叶扩压器。叶轮出口气流结构对无叶扩压器中的流动特性有很大影响。图 4-21 表示了无叶扩压器中产生旋涡区的不对称流谱, 它与叶轮出口沿叶片宽度 b_2 的气流不均匀性有关。

在亚声速流动时, 扰动向上、下游传递, 因此, 通流部分每一个元件的结构和工况在某种程度上影响到下一个元件及前一个元件中的流动。因为叶轮出口截面上绝对速度 v_2 大, 而且相对速度 w_2 在轴向和周向都显著的不均匀, 故它对扩压器工作的影响最大。这样, 扩压器进口速度场沿宽度 b 有很大的不稳定性和不均匀性。根据叶轮的结构和工况, 扩压器进口的绝对速度场, 是不同的, 即对于给定的无叶扩压器在与不同叶轮匹配时, 其效率也是不同的。图 4-22 是常规气压法测得的按时间平均的无叶扩压器中速度场。可看到叶轮工况随流量变化时半径 $r = 1.05r_2$ 处速度分布 $\bar{v}_r = f(b)$ 的差别。在 $\varphi_{r_2} = 0.232$ 时, $\bar{r} = 1.35$ 处前壁面上有回流 ($\bar{v}_r < 0$), 而在 $\varphi_{r_2} = 0.145$ 时, $\bar{r} = 1.05$ 处就出现回流, 并占据了叶轮的某些区域。有的研究表明, 无叶扩压器开始部分收缩到 $b = 0.7b_2$ 时, $\bar{r} = 1.05$ 处的回流在整个特性区都消失了。计算表明, 与 $b = b_2$ 相比, 开始部分收敛减少混合损失, 但增加摩擦损失。

无叶扩压器的损失在理想情况时可由下面方程计算:

$$h_{\text{tot}} = \frac{v_3^2}{2} \frac{(r_3/r_2 - 1)(\theta_2/l)(1 + \mu)}{\sin \alpha_m \times 4b_2/D_2} = \zeta_{01} v_3^2 / 2 \quad (4-49)$$

式中 μ 表示实际的减速率, α_m 为无叶扩压器进出口气流角 α_3 和 α_1 的平均值 (下角标 3、4 表示扩压器进、出口), 相对动量厚度 θ_2/l 的计算见 § 4-2。该式仅适用于转子出口是均匀流动时, 即适用于低 Re 转子的设计。对于较高的转子叶片负荷, 尾迹区与射流区的混合由增加 ζ_{01} 的值来考虑。

加列尔金 (Галеркин) 在总结试验资料后提出了计算 ζ_{01} 的经验公式:

$$\begin{aligned} \zeta_{01} = & 0.22(b_2/D_2)^{-0.6} \{0.03[1 + 3.5\sin^2(\alpha_2 - 28^\circ)](1 + 1.5M_{22}^2)(5.2\varphi_{02} - 1.6) \\ & \times [1 + 8.3(b_3/b_2 - 0.785)^2] + [(b_2 \sin \alpha_2 / b_3)^2 + (\cos \alpha_2 / 1.2)^2] \{1 - 0.085 \\ & \times [1 - (\bar{r}_2 - 1.6)^2 \cdot 0.22(b_2/D_2)^{-0.6}] [1 - 1.7\sin^2(\alpha_2 - 38^\circ)] [1 - 2.1(b_3/b_2 \\ & - 0.785)^2] \} [1 - (\bar{r}_3/1.2)^2] \end{aligned} \quad (4-50)$$

此时无叶扩压器中损失

$$h_{\text{tot}} = 0.5\zeta_{01}(v_2 k_H)^2$$

式中速度 v_2 为叶轮出口处的一元计算值, 气流不均匀系数 k_H 由图 4-23 查得。

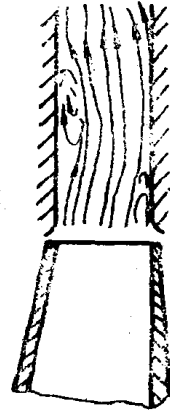


图4-21 进气不均匀时
无叶扩压器中的流谱

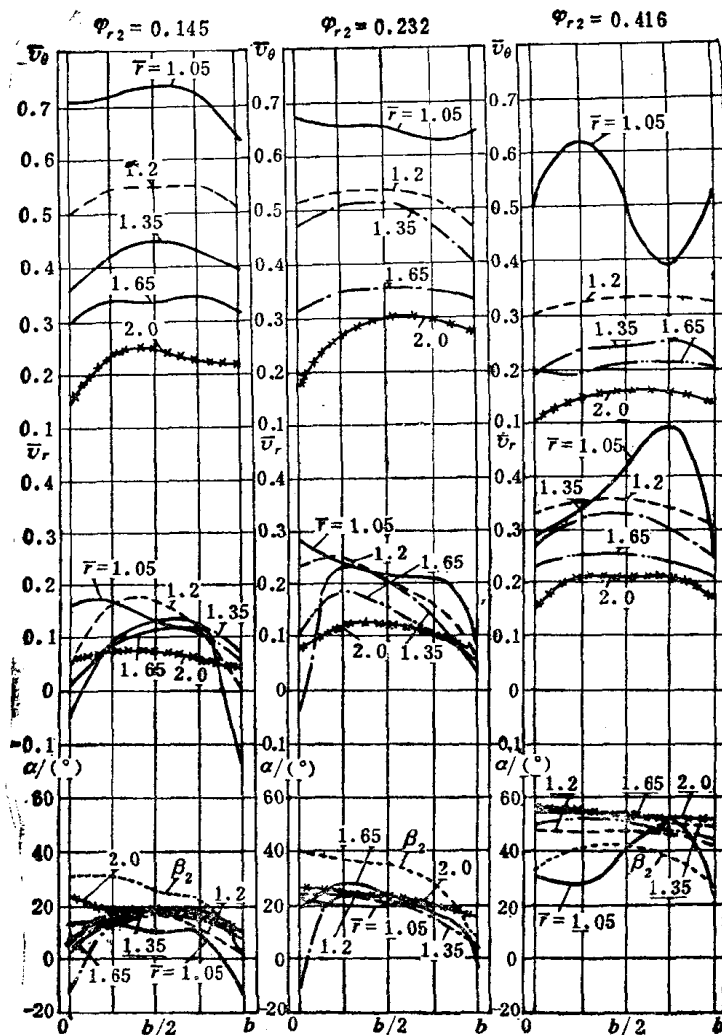


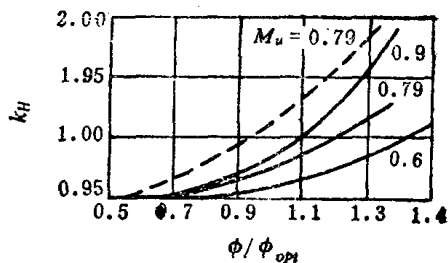
图4-22 无叶扩压器中气流速度和角度

无叶扩压器的设计是否合理可由级效率下降值 $\Delta\eta_{poi}$ 来评价

$$\Delta\eta_{poi} = (0.5v_4^2/\psi_{02})(\xi_{vt} + \xi_{ex}v_4^2)$$

式中 v_4 为无叶扩压器出口处气流速度； ξ_{ex} 为扩压器后出口装置的损失系数。由上式可知，对于级而言，扩压器中损失 $\xi_{vt}v_4^2/2$ 最小不一定是最佳选择，因为 $\Delta\eta_{poi}$ 还与 v_4 、 ξ_{ex} 和 φ_{02} 有关。

增加无叶扩压器的径向距离导致摩擦损失系数的增加，此时速度 v_4 下降。损失系数 ξ_{ex} 在某种程度上也与 \bar{r}_4 有关， \bar{r}_4 还决定了出口装置的尺寸和无叶扩压器出口处气流结构及参数，还必须考虑到 \bar{r}_4 对压缩机尺寸和重量的影响。设计经验表明：对于 $\varphi_{02} = 0.6 \sim 0.75$ 的中等和大流量的级， $\bar{r}_4 = 1.65 \sim 1.7$ 时有满意的效率和合适的重量及外形尺寸指数。增加 \bar{r}_4

图4-23 气流不均匀系数 k_H 与叶轮工况的关系

到2还可提高效率, $\bar{r}_1 > 2.0$ 的结构通常不采用。

无叶扩压器的宽度根据叶轮相对宽度决定, 在较大叶轮宽度, 即 $b_2/D_2 > 0.06$ 时, 无叶扩压器的宽度 $b_1 < b_2$ 是合理的, 此时扩压器的收敛有利于其中气流的稳定, 消除计算工况下壁面气流分离, 扩大工况范围。在 $b_2/D_2 = 0.04 \sim 0.05$ 时建议 $b_1 = b_2$, 而在小 b_2/D_2 时取 $b_1 > b_2$ 是有效的。

三、出口装置

弯道回流器可看成是中间级的出口装置, 末级的出口装置又有蜗室(螺旋室)和环形室之分。环形室的子午面形状随周向不变, 而螺旋室子午面的面积随周向变化。

图4-24表示了最简单的蜗室型式。如果半径 r_1 后的通流部分是 $b = b_1$ 的无叶空间, 则和无叶扩压器一样, 其中流动轨迹可看成是对数螺旋线。若在中心角 $\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$ 的范围内, 使蜗室外壁与质点轨迹一致, 则它与两侧壁一起形成蜗室的螺旋通道。螺旋通道与出口接管形成了“蜗舌”。显然, 尽管这种蜗室形状是非轴对称的, 但它几乎不引起其进口截面上速度场的畸变, 此时的速度场仍是轴对称的, 而且蜗室的外型尺寸与轴对称气流的轨迹相一致。这就意味着经过蜗室子午截面的质量流量与中心角成正比

$$m_\theta = \frac{\theta}{2\pi} q_m = \int_{r_1}^{r_{out}} \rho v_\theta b dr$$

在实际情况时, 图4-24表示的蜗室外形尺寸不是对数螺旋线, 这是因为气流密度的变化及壁面摩擦的影响。精确考虑这些因素是困难的, 由于蜗室进口速度场不均匀。气流强烈不均匀性是在 $\alpha_1 \approx \alpha_{1d}$ (叶片扩压器后, 下角标 d 表示设计) 或 $\varphi \approx \varphi_d$ (无叶扩压器后) 时出现。

图4-25表示了无叶扩压器后蜗室中的流谱。在 $\varphi \approx \varphi_d$ 时流谱的改变主要发生在蜗室中的

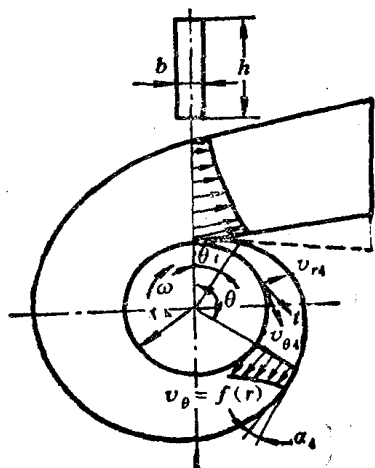


图4-24 蜗室简图

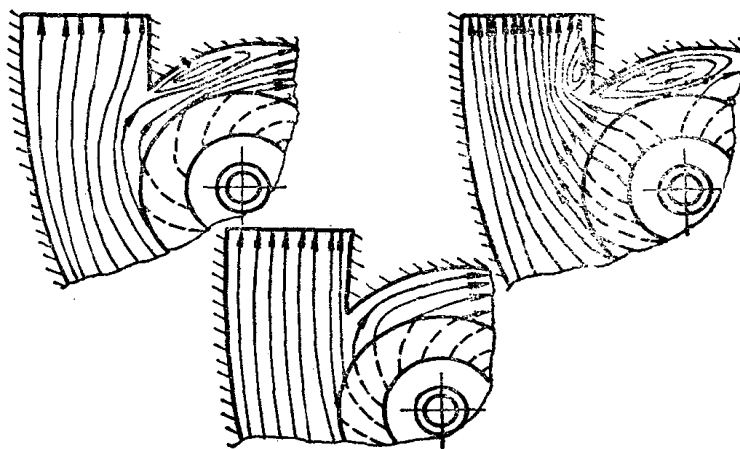


图4-25 $\varphi \approx \varphi_d$ 时蜗室径向面流动

蜗舌区。由图可看到, 在 $\theta = 0$ 时流谱的改变直接发生在扩压器内, 由于速度的提高, 这就导致了更坏的结果。在蜗舌区的接管进口, 速度 $v \approx v_1$, 而在外壁半径 r_{out} 处速度约为 $v_1 r_1 / r_{out}$, 即蜗室的螺旋通道是扩压的。同时, 出口扩压管开始部分的气流呈明显的不均匀性, 并导致其内壁上的分离。

图4-24表示的蜗室有时用于大 \bar{b}_2 的通风机电中。对于压缩机, b/h 过小不利于与输送管

道连接, 而且还受到蜗室径向尺寸的限制。为了解决这个问题, 采用扩散型侧壁结构的蜗室 (图4-26), 此时质点的轨迹为其气流角 α 随半径增加而减少的螺旋线。

图4-26是由气压法测量得到的梯形蜗室中子午面流动情况。这种蜗室两侧壁和外壁相交而成的尖角因工艺要求 (铸造) 和气动原因被修圆。通常梯形蜗室的扩张角 $\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ$ 。由图可知, 无论在哪一个子午截面都出现了旋涡, 当然, 沿不同周向子午截面上的流谱还与径向面流动 (图4-25中蜗舌绕流) 有关。



图4-26 蜗室子午面流动

蜗室中损失系数按其进口截面上速度 v_1 计算是合理的

$$\zeta_{ex} = 2h_{wex}/v_1^2$$

损失系数 ζ_{ex} 是蜗室的几何尺寸、进口气流角 α_1 和有关气流相似准则的函数。对于任意形状横截面的蜗室, ζ_{ex} 可表示为

$$\zeta_{ex} = 1 - 2\bar{f}_{max} \sin \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \Delta\alpha) + (1 + k_\phi A) \bar{f}_{max}^2 \sin^2 \alpha_1 \quad (4-51)$$

式中 $\bar{f}_{max} = F_1/F_{max}$, 它是蜗室进口截面积 $F_1 = \pi D_1 b_1$ 与其最大截面积 ($\theta = 360^\circ$ 时的子午截面积) 之比 (图4-27); $k_\phi = f(b_m/h)$, 横截面形状系数, 由于 b_m/h 沿周向 θ 是变化的 (图4-28), 所以应先求出 k_ϕ 与 θ 的关系, 然后求其平均值; 系数 A 和角 $\Delta\alpha$ 按下列式子计算, 对于变外径蜗室:

$$A = 0.0585 + 0.345\bar{D}_1 \left(\frac{2\delta_1}{\bar{D}_1} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{1+\delta_1}{1-\delta_1} \right| - 3 \arctg \delta_1 + \frac{3}{2} \pi \right) \quad (4-51a)$$

$$\Delta\alpha = -\arctg[1/(\pi\bar{D}_1)] \quad (4-51b)$$

式中 $\bar{D}_1 = D_1/h_{max}$; $\delta_1 = (\bar{D}_1 + 1)^{0.25}$; h_{max} 为 $\theta = 360^\circ$ 处高度。对于变内径、不变外径的蜗壳:

$$A = 0.0585 + 0.345\bar{D}_{out} \left[\frac{2\delta_2}{\bar{D}_{out}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \left(\ln \frac{1 + \delta_2\sqrt{2} + \delta_2^2}{1 - \delta_2\sqrt{2} + \delta_2^2} + 2 \arctg \frac{\sqrt{2}\delta_2}{1 - \delta_2^2} \right) \right] \quad (4-51c)$$

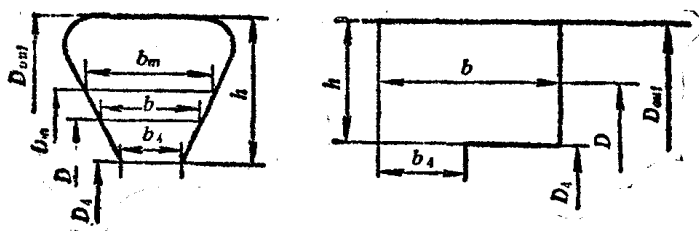
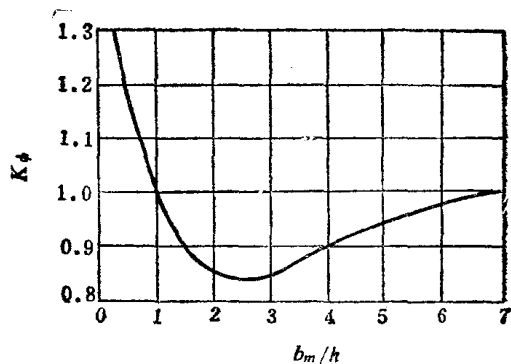


图4-27 梯形截面蜗室

图4-28 系数 $k_\phi = f(b_m/h)$

$$\Delta\alpha = \arctg[1/(\pi\bar{D}_{out})] \quad (4-51d)$$

式中 $\bar{D}_{out} = D_{out}/h_{max}$; $\delta_2 = (\bar{D}_k - 1)^{0.25}$ 。

由上面式子可求不同蜗室进口气流角 α_i 下的损失系数 ζ_{**} , 也可求使 ζ_{**} 最小的最佳值 α_{opti} :

$$\tg 2\alpha_{opti} = 2\cos\Delta\alpha / [2\sin\Delta\alpha + \bar{f}_{max}(1 + K_{\phi}A)] \quad (4-52)$$

在给定计算气流角 α_i^* 时, 蜗室最小损失系数由下面条件保证:

$$F_{max}/F_4 = (1 + K_{\phi}A)\sin\alpha_i^*/\cos(\alpha_i^* + \Delta\alpha) \quad (4-53)$$

在确定蜗室横截面尺寸时常用两种方法。一种是基于蜗室中动量矩不变的假设, 它导得了蜗室内表面螺旋线半径 r_{out} 和中心角 θ 之间的关系:

$$\theta = \frac{180}{\pi} \ctg\alpha_i^* \int_{r_4}^{r_{out}} \frac{b}{b_i} \frac{dr}{r} \quad (4-54)$$

由此式可计算各截面 (不同 θ) 对应的 r_{out} 值。

第二种方法是认为蜗室所有横截面上气流速度相等。此时各中心角对应的横截面积

$$F(\theta) = \int_{r_4}^{r_{out}} b dr = \frac{v_{o4}}{v_m} \frac{\pi}{180} r_4 b_i \theta \tg\alpha_i^* \quad (4-55)$$

其中 $v_m = 1.82v_{o4}(\alpha_i^*)^{-0.357}$ (α_i^* 用 ($^\circ$) 表示)

压缩机设计时出口扩压管的出气速度 v_{out} 由出口被连接的管道直径和结构决定。为了减少气体输送管道中的损失, 应有马赫数 $M_{v_{out}} = v_{out}/\sqrt{KRT_{out}} \leq 0.1 \sim 0.15$ 。

§ 4-4 通流部分损失计算的工程方法

一、损失计算的可能途径

在透平机械的动力学研究中, 常使用的计算方法是近似的或半经验的, 为了使计算与实验资料一致, 必须引进基于大量试验的修正系数 (§ 4-2)。本节讨论的通流部分损失数学模型也是近似的, 但又是具有依据的代数方程式。发展这种方法所需的客观条件已经具备: 具有通流部分流动过程足够完整的物理概念, 具有大量的试验资料和计算技术发展到一个水平。

为了减少模型中的变量, 我们利用无量纲形式研究级的特性。相似理论建立了无量纲和有量纲特性间的简单关系, 因此实际中应用无量纲形式不会碰到困难。在无冷却时, 忽略气体与外部热交换, 有如下函数关系

$$\psi, \eta = f(\varphi, \bar{F}, K_m, M, Re, k) \quad (4-56)$$

建立数学模型的过程就是将这个关系扩展成能够进行计算的方程组或一个方程。

我们描述的数学模型的基本特征是由各种损失现象的现代观点决定。对各分量损失的分析, 放弃了直接讨论通流部分形状的影响, 而采用通流部分各段中速度分布来描述。这就保证了模型的极大灵活性, 特别是在通流部分最佳化中表现出的灵活性。

从几何尺寸 \bar{F} 转移到速度 \bar{w} 可用一个简单的例子说明。在马赫数 M 和雷诺数 Re 自动化时, 沿水力学流动表面的损失仅由相对速度分布决定:

$$C_w = f(\bar{w}) \quad (4-57)$$

式中 C_w 是阻力系数, 而不是损失系数。无粘气流速度 \bar{w} 的分布与附面层参数的关系可表示

为

$$\delta^*/l = f(\bar{w}) \quad (4-58)$$

这种关系也可用来计算损失。在研究实际流动时，式(4-57)和式(4-58)都应考虑流面厚度 b 沿 l 变化的情况。

若引进平均速度 w_m 和平均流面厚度 b_m ，则由式(4-57)导出阻力的一般关系式

$$P_w = \int_0^l C_w \rho \frac{w^2}{2} b dl = C_w(\bar{w}) \rho_m \frac{w_m^2}{2} b_m l \quad (4-59)$$

一般情况下，相对速度 w 分布可能很复杂，但透平机械通流部分的设计力求避免速度的急剧变化，而且我们将通流部分分段讨论，以使每段的速度变化都很简单，如接近线性。为了确定阻力系数 C_w ，还可引进每段终端和始端的速度之比 $K_w = w_2/w_1$ ， K_w 完全是一个具体的数值。

虽然，阻力系数 C_w 随 K_w 减小而增大，但其实际关系还不太清楚，我们用如下代数多项式来逼近：

$$C_w = x_1 + x_2 K_w^{x_3} \quad (4-60)$$

式中 系数 x_1 、 x_2 、 x_3 的值应使上式的计算值与不同 K_w 时的各种试验资料基本吻合。如 $K_w = 1$ 时的 $C_w = x_1 + x_2$ 应与无速度梯度流动的摩擦阻力系数大致相同。

叶片表面的流动因旋转和弯曲受二次流和不稳定性的影响，二次流强度通常与体积力有关。如轴流压缩机二次流阻力系数 $C_{w,sec}$ 与体积力系数 C_v 的关系是：

$$C_{w,sec} = 0.113 \frac{C_v^2}{\pi(b/l)} \quad (4-61)$$

同样，不稳定性也与 C_v 相关联，因为由压差 Δp 计算的动量矩方程有

$$L = N \int_1^2 \Delta p b r dr = N \int_1^2 \rho \Delta w \sin \beta_A r b dl = N \rho_m \Delta w_m w_m \sin \beta_{A_m} F_b r_m$$

又
则

$$L = N P_v r_m \sin \beta_{A_m} = N C_v \rho_m 0.5 w_m^2 F_b r_m \sin \beta_{A_m}$$

$$C_v = 2 \Delta w_m / w_m$$

式(4-37)在 $\delta = 90^\circ$ 时

$$Ri_{s,p} = \Delta w / w = 0.5 C_v \quad (4-62)$$

因此，为了考虑二次流和不稳定性的影响，引入修正因子 $(1 + x_4 C_v^{x_5})$ ，该因子满足平面 $C_v = 0$ 的条件。同时考虑到马赫数 M 、雷诺数 Re 、相对粗糙度 K_m 的影响，叶片表面阻力系数

$$C_{w,b} = (x_1 + x_2 K_w^{x_3}) (1 + x_4 C_v^{x_5}) (1 + x_6 M^{x_7}) (1 + x_8 Re^{x_9}) (1 + x_{10} K_m^{x_{11}}) \quad (4-63)$$

对于叶片的压力面和吸力面， x_4 和 x_5 的值是不同的，因 C_v 对这两个面上流动的影响相反。

数学模型中除有关气流参数外，还应有少数极简单的几何参数。如叶轮通道在从叶片的阻力 $P_{w,b}$ 过渡到损失系数 ζ_b 时：

$$P_{w,b} = C_{w,b} l b_m \rho_m (w_m^2 / 2) \quad (4-64)$$

式中 $l b_m$ 为叶片平均表面积。在一个通道中，翼型损失功率 $N_{w,b} = P_{w,b} w_m$ 。 $N_{w,b}$ 还可通过能量头损失 $h_{w,b}$ 决定， $N_{w,b} = h_{w,b} q_m = h_{w,b} \rho_m b_m a_m w_m$ 。又因 $h_{w,b} = \zeta_b w_m^2 / 2$ ，则损失系数 ζ_b 的表达式为：

$$\zeta_s = C_{ws} (l/a_n)(w_n/w_1)^2 \quad (4-65)$$

上式表明, 由叶片表面的阻力系数 C_{ws} 转换到损失系数 ζ_s 时引进了叶栅稠度 (l/a_n) 。类似地, 在计算盘和盖表面上的损失系数时应引进 l/b_m , 而对无叶扩压器引进的几何参数是相对宽度 b/D_2 等。

这样, 模型的一般关系式(4-56)可由具有更大灵活性和通用性的关系代替:

$$\psi, \eta = f(\varphi, \bar{w}, \bar{F}', K_n, M, Re) \quad (4-66)$$

式中 \bar{F}' 为少数简单的几何参数。

该模型用于具有圆柱叶片叶栅的工业离心压缩机级时简化如下:

1. 损失按平均流面上的速度分布计算。空间性的影响由各元件中的附加系数考虑, 如叶轮中引入 b_m/l , 曲率准则 $\bar{r}_{md} = r_s/b_1 + 0.8r_1/r_2 - 0.5$ 和叶轮进口相对面积 F 。 r_s 为轮盖进口处圆弧半径。

2. 每个元件中马赫数 M 用表面上最大值, 雷诺数 Re 用通道中平均值计算其影响, 而粗糙度不予考虑。

二、数学模型的一般形式

离心式压缩机组的损失数学模型一般是相当复杂的方程组, 其系数 x_i 由级通流部分的各元件决定。这里的主要问题是确定任意叶栅中的翼型损失, 由式(4-64), 翼型能量头损失通过叶片上 G 条带区($G-1$ 个轴对称流面分割)的损失求和:

$$h_{wb} = \frac{N}{q_n} \sum_{j=1}^G C_{wbj} \rho_{mj} \frac{w_{mj}^3}{2} l_j \Delta b_{mj} \quad (4-67)$$

式中 Σ 下的值是在轴对称流面上沿翼型长度 l_j 的平均值, 确定这些值还需要条件。每条带区的阻力系数 C_{wbj} 应在叶片压力面和吸力面上分段决定, 在每段范围内函数 $w = f(l)$ 是线性的并可由速度比 K_w 足够精确地描述, 这样第 j 条带区的阻力系数由下式确定

$$C_{wbj} \rho_{mj} \frac{w_{mj}^3}{2} l_j \Delta b_{mj} = \sum_{i=1}^L C_{wbi} \rho_{mi} \frac{w_{mi}^3}{2} \Delta l_i \Delta b_{mi} \quad (4-68)$$

式中 C_{wbi} 为 L 个小段中的阻力系数, 它由式(4-63)计算。每个小段长为 Δl_i , 而 Δb_{mi} 表示第 i 个小段在第 j 条带区的宽度。

将式(4-68)代入式(4-67), 翼型损失采用无量纲形式 $\Delta \eta_{wb} = h_{wb}/h_{th}$, 并考虑到 $q_m = \rho \phi \pi u_2 D_2^2 / 4$ 和 $h_{th} = \varphi_{\theta 2} u_2^2$, 则

$$\Delta \eta_{wb} = \frac{2N}{\pi \phi \varphi_{\theta 2} D_2^2} \sum_{j=1}^G \sum_{i=1}^L C_{wbi} \varepsilon_{mij} \bar{w}_{mij}^3 \Delta l_i \Delta b_{mi} \quad (4-69)$$

式中 $\varepsilon_m = \rho_m / \rho_0^*$, $\bar{w}_m = w_m / u_{20}$ 。

将轮盘、轮盖端面也划分成 G 条带区(通过 $G-1$ 个与叶片形状相同的流面划分), 每条带区又用长度 s_j 分割为 L 段, 则类似式(4-69)有

$$\Delta \eta_{w0} = \frac{2N}{\pi \phi \varphi_{\theta 2} D_2^2} \sum_{j=1}^G \sum_{i=1}^L C_{w0ij} \varepsilon_{mij} \bar{w}_{mij}^3 \Delta s_{ij} \Delta b_{mij} \quad (4-70)$$

式中 C_{w0i} 也按式(4-63)计算。与轴对称流面上体积力系数相似, 系数 C_{a0} 可用来考虑正压力梯度:

$$C_{a0} = 2\Delta\bar{w}_{m0}/\bar{w}_{m0} \quad (4-71)$$

这里, $\Delta\bar{w}_{m0}$ 是沿长度 s 积分的平均值

$$\Delta\bar{w}_{m0} = \frac{1}{s} \int_0^s \Delta\bar{w}_0 ds$$

s 是中间轴对称流面与给定的跨盘盖流面 (与叶片形状相同的面) 的交线。 \bar{w}_{m0} 也应在同一条 s 线上确定。

为了寻求阻力系数 C_{w0} 与轴对称流面上偏移流动的关系, 我们研究一般情况下哥氏加速度 $2\omega w_{se}$ 的分量。在与径向成倾角 γ 的壁面上, 哥氏加速度在 w 方向的投影为 $2\omega w_{se} \cos \gamma$, 而垂直壁面的投影等于 $2\omega w_{se} \sin \gamma$ 。 w_{se} 是偏移流动的速度。第一个分量提高壁面上流动的切应力, 阻止分离, 因此在一般扩压流动时, 它减少阻力系数 ($\gamma < 90^\circ$ 时), 这种情况由相应的修正考虑。第二个分量在 $\gamma > 0$ 时使气流“紧贴”轮盖表面, 这就加强了附面层中紊流交换过程, 即这里轴对称流面上流动偏移 ($C_a = 2\Delta\bar{w}_m/\bar{w}_m$) 引起的二次流与叶片吸力面上流动偏移引起的二次流相比, 具有相反的分层效应。从而轮盖的阻力系数可写成一般形式:

$$C_{wsh} = C_{wsh}(1 - x_i C_{a0}^{x_{i+1}} \cos \gamma)(1 - x_{i+2} C_{a0}^{x_{i+3}} \sin \gamma) \quad (4-72)$$

同理, 轮盘的阻力系数

$$C_{wh} = C_{wh}(1 - x_i C_{a0}^{x_{i+1}} \cos \gamma)(1 + x_{i+2} C_{a0}^{x_{i+3}} \sin \gamma) \quad (4-73)$$

式中 $C_a = 2\Delta\bar{w}_m/\bar{w}_m$ 相应是轮盖和轮盘轴对称流面上的值。

在叶高方向产生二次流时, 哥氏加速度的分量 $2\omega w_{se}$ 同样影响到流动条件。对于柱面叶片, 这个分量在径向面叶道的 a 向投影等于 $2\omega w_{se} \cos \gamma$, 而 w 方向上的投影可忽略。那么在 w_{se} 从轮盘指向轮盖时

$$C_{wp} = C_{wp}(1 - x_{i+2} C_{a0}^{x_{i+3}} \cos \gamma) \quad (4-74)$$

$$C_{ws} = C_{ws}(1 + x_{i+2} C_{a0}^{x_{i+3}} \cos \gamma) \quad (4-75)$$

式中 C_{a0} 相应由叶片压力面和吸力面上的速度分布决定。

关系式 (4-74) ~ 式 (4-75) 表明, 沿长度 l 和 s 应至少分成二个部分, 如常分为叶栅的轴向和径向部分。这就允许在各部分选择平均倾角 γ_m , 该值通过运动方程的惯性项有效地考虑了二次流对附面层状态的影响。

研究的最后一种损失与二次流本身引起的阻力有关。此时, 部分多变能量头转变成二次流的动能, 二次流旋涡又使这种动能耗散成熟的形式。

计算损失能量头或阻力有许多经验公式, 如可利用已提到的式 (4-61) 的形式

$$C_{wsc} = x_{i+4} C_{a0}^2 / (b/l)^{x_{i+5}} \quad (4-76)$$

式中 x_{i+5} 是小于 1 的指数。

二次流损失被认为沿相应的通道表面可以计算。那么, 沿叶道四个面的二次流使无量纲二次流损失为:

$$\Delta\eta_{wsc} = \frac{2N}{\pi \phi \varphi_{02} D_2^2} (C_{ash} \varepsilon_{sh} \bar{w}_{sh}^3 F_{sh} + C_{ah} \varepsilon_h \bar{w}_h^3 F_h + C_{ap} \varepsilon_p \bar{w}_p^3 F_p + C_{as} \varepsilon_s \bar{w}_s^3 F_s) \quad (4-77)$$

式中四种 C_a 分别按式 (4-62) 和式 (4-71) 计算, 其它参数沿表面取平均值。

上述的关系式是任意叶栅的数学模型, 它们是所有通流部分中损失计算的基础。静止叶栅的通常情况是忽略式 (4-72) ~ 式 (4-75) 中与哥氏加速度 (即 ω) 有关的修正项。对于半开式叶轮, 还应增加其它项以考虑叶顶泄漏引起的损失。

下面以离心式压缩机级的数学模型通用形式为例，讨论通道元件——无叶扩压器、弯道中的损失计算，并讨论对不太长叶栅的数学模型可能进行的简化：

$$\begin{aligned}
 \eta_{p,oi} = & \underbrace{\frac{1}{1 + \beta_i + \beta_{d,i}}}_1 \left\{ 1 - \left[\underbrace{\frac{2N}{\pi \phi \varphi_{\theta 2} D_2^2}}_2 \sum_{i=1}^L \left[\underbrace{\varepsilon_{m,i} b_{m,i} l_i}_3 \left(\underbrace{C_{wpi} \bar{w}_{m,pi}^3}_4 + \underbrace{C_{wsi} \bar{w}_{m,si}^3}_5 + \underbrace{C_{woi} \bar{w}_{m,oi}^3}_6 \frac{F_{oi}}{F_{vi}} \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \underbrace{C_{wsei} \bar{w}_{m,si}^3}_7 \right) \right] + \underbrace{\xi_i \frac{\Delta \bar{w}_2'^2 N}{2 \varphi_{\theta 2}}}_8 + \underbrace{\xi_{i,p} \frac{\Delta \bar{w}_{i,p}^2 N}{2 \varphi_{\theta 2}}}_9 + \underbrace{\xi_{en} \frac{\bar{v}_i^2}{2 \varphi_{\theta 2}}}_10 \underbrace{K_{Re} K_M K_{s,p}}_11 \right\}_{im} \\
 & - \left[\underbrace{\xi_{ex} \left(\frac{\phi D_2}{4 b_2 \varepsilon_2 \sin \alpha'_2} \right)^2 \frac{(1 - b_2/b_3)^2}{2 \varphi_{\theta 2}}}_{12} \right]_{ex} - \left(\underbrace{\xi_{vl} \frac{\bar{v}_2^2}{2 \varphi_{\theta 2}}}_13 \underbrace{K_{Re} K_M K_{s,p}}_14 \right)_{vl} \\
 & - \left\{ \underbrace{\frac{2N}{\pi \phi \varphi_{\theta 2} D_2^2}}_15 \sum_{i=1}^L \left[\underbrace{\varepsilon_{m,i} b_{m,i} l_i}_16 \left(\underbrace{C_{wpi} \bar{v}_{m,pi}^3}_17 + \underbrace{C_{wsi} \bar{v}_{m,si}^3}_18 + \underbrace{C_{woi} \bar{v}_{m,oi}^3}_19 \frac{F_{oi}}{F_{vi}} \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \underbrace{C_{wsei} \bar{v}_{m,si}^3}_20 \right) \right] + \underbrace{\xi_i \frac{\Delta \bar{v}_i^2 N}{2 \varphi_{\theta 2}}}_21 + \underbrace{\xi_{i,p} \frac{\Delta \bar{v}_{i,p}^2 N}{2 \varphi_{\theta 2}}}_22 \right] \underbrace{K_{Re} K_M}_23 \right\}_{vd} - \left(\underbrace{\xi_{cu} \frac{\bar{v}_i^2}{2 \varphi_{\theta 2}}}_24 K_{Re} K_M K_{s,p} \right)_{cu} \\
 & - \left\{ \underbrace{\frac{2N}{\pi \phi \varphi_{\theta 2} D_2^2}}_25 \sum_{i=1}^L \left[\underbrace{\varepsilon_{m,i} b_{m,i} l_i}_26 \left(\underbrace{C_{wpi} \bar{v}_{m,pi}^3}_27 + \underbrace{C_{wsi} \bar{v}_{m,si}^3}_28 + \underbrace{C_{woi} \bar{v}_{m,oi}^3}_29 \frac{F_{oi}}{F_{vi}} + \underbrace{C_{wsei} \bar{v}_{m,si}^3}_30 \right) \right] \right. \\
 & \left. + \underbrace{\xi_i \frac{\Delta \bar{v}_i^2 N}{2 \varphi_{\theta 2}}}_31 + \underbrace{\xi_{i,p} \frac{\Delta \bar{v}_{i,p}^2 N}{2 \varphi_{\theta 2}}}_32 + \underbrace{\xi_{ex} \frac{\bar{v}_0^2}{2 \varphi_{\theta 2}}}_33 \right] \underbrace{K_{Re} K_M K_{s,p}}_34 \right\}_{re} \quad (4-78)
 \end{aligned}$$

式中下角标 $im, en, ex, vl, vd, cu, re$ 分别表示叶轮，进气通道，出口装置，无叶、有叶扩压器，弯道和回流器。

为了节省计算时间可采用如下简化：

(1) 叶栅中流动计算在平均轴对称流面上进行，流动的空间性由引进通流部分各元件的修正系数 $K_{s,p}$ 来考虑。

(2) 马赫数 M 和由通道平均速度确定的雷诺数 Re 对翼型表面的影响是按通流部分每个元件（叶轮、无叶扩压器、叶片扩压器、弯道、回流器）考虑。

(3) 选择能简单概括叶栅中速度分布的段应根据具体问题而定。

模型式 (4-78) 适用于径向部分具有叶片的离心式压缩机叶轮。因此我们单独计算轴对称通道进口的损失，该损失是 $K_F = f_0/f_1$ 和凸面局部扩压度决定的参数 $\bar{r}_{m,d}$ 的函数。

上述的参数和长度 b_m/l 一起决定叶轮中的气流空间特性，因此对于叶轮和进口通道， $K_{s,p}$ 可作为公用因子标出（对于回流器和出口环形通道可类似处理）。于是，模型式 (4-78) 中因子 (2~9) 与因子 11 的乘积是叶轮叶栅中的损失，而因子 10 与 11 的乘积是进口通道中的损失。对于回流器，因子乘积 (25~32) × 34 是叶栅中损失，33 × 34 的积是出口环形

通道的损失。

我们来详细讨论无叶扩压器数学模型的特性。模型式(4-78)中有二项描述这个元件的工作过程,即 $b_3 > b_2$ 时气流突然膨胀的损失和直接在无叶扩压器中的损失。第一项损失是与叶轮后突然膨胀成正比的损失:

$$h_{exp} = \zeta_{exp}(v_2 - v_2')^2 / 2$$

该式通过简单转换后就可得到式(4-78)中的形式。

无叶扩压器尽管通流部分形式简单,但其中气流仍有复杂的空间特性。在一般情况下,无叶扩压器中损失可分为壁摩擦损失,叶轮后气流不均匀产生的损失和分离引起的旋涡损失。

无叶扩压器开始段气流混合损失产生的根源是叶轮,因此,这种损失作为叶轮损失是自然的。那么,无叶扩压器中总损失为:

$$h_{wvt} = h_{wfr} + h_{wvor} = (\zeta_{fri} + \zeta_{vor})v_2^2 / 2 = \zeta_{vt}v_2^2 / 2$$

无叶扩压器的损失系数可通过阻力系数来表示,阻力系数为 \bar{r}_3 、 b_3/b_2 、 α_2' 的函数,如在模型式(4-82)中就是这样。也可利用公式

$$\zeta_{fri} = \frac{\lambda}{2b \sin \alpha} \left(1 - \frac{1}{\bar{r}} \right) \quad (4-79)$$

计算摩擦损失,而旋涡损失由在 α_2' 和 b_2 的函数关系中引进修正系数决定,如模型式(4-85)中。在计算工况附近,无叶扩压器中分离和二次流可忽略。在非设计工况,旋涡损失 h_{vor} 较大,因此模型式(4-89)中无叶扩压器中总损失为 $h_{wfr} + h_{vor}$ 。

叶片扩压器中损失计算与叶轮的类似,考虑到叶片扩压器前气流没有从轴向到径向的方向变化,取 $K_{sp} = 1$ 。因静止叶栅中分层效应的影响,翼型上速度分布的简单表示方法及与此有关的阻力系数计算将在具体数学模型式(4-86)中讨论。

弯道中的流动可看成是弯曲(子午面转弯 180°)轴对称扩压器中的流动。试验研究表明:弯道损失可通过类似无叶扩压器的摩擦损失计算及考虑转弯影响来确定。

(4-78)中的回流器数学模型除一点外,其它与叶片扩压器的相同。回流器前的气流在弯道中改变了方向,这由引用空间性修正系数考虑:

$$K_{sp} = f[r_{mdu} K_{pca}(b_m/l)_{re}]$$

三、具体的数学模型及其应用

为了求得具体的模型,损失可表示为如下通用形式:

$$\eta = \varphi(X, A) \quad (4-80)$$

式中 X 是未知系数矢量, A 为已知的气动参数和几何参数矢量, η 表示所研究目标的效率。若效率的试验值用 η_e 表示,则可作函数

$$G = \sum_{i=1}^n [\eta_e - \varphi(X, A)]^2 = G(X) \quad (4-81)$$

通过求函数 $G(X)$ 的最小值求矢量 X 。从统计的观点,这样可保证模型(4-78)与试验值之间有较好吻合。由此,我们建立离心式压缩机各元件的具体数学模型。

首先讨论计算工况下的数学模型。式(4-82)是叶轮和无叶扩压器数学模型的具体型式:

$$\begin{aligned}
\eta_{p,1} = & \frac{1}{1 + x_{22}\beta_l + x_{23}\beta_{df}} - \frac{1}{2\varphi_{02}} \underbrace{\left(1 + x_1 M_{w_{max}}^2\right)}_1 \underbrace{\left(1 + \frac{x_2}{Re^{x_4}} + x_5 K_m^{x_6}\right)}_2 \\
& \times \underbrace{\left[1 + x_7 \exp(-x_8 \bar{r}_{md})\right]}_3 \left\{ \underbrace{\frac{2NF_b}{\pi\phi D_2^2} \left(\frac{H\rho_2}{\rho_0}\right) \bar{w}_m^3}_4 \left[x_9 \left(1 - x_{10} \frac{\Delta\bar{w}_{p1}}{\bar{w}_{mp1}} - x_{11} C_a\right)^{x_{12}} \right. \right. \\
& \times \underbrace{\left(\frac{\bar{w}_{ms1}}{\bar{w}_m}\right)^2 \frac{F_{bs1}}{F_b}}_5 + x_9 \left(1 - x_{10} \frac{\Delta\bar{w}_{p2}}{\bar{w}_{mp2}} - x_{11} C_a\right)^{x_{12}} \underbrace{\left(\frac{\bar{w}_{mp2}}{\bar{w}_m}\right)^2 \frac{F_{bp2}}{F_b}}_6 \\
& + x_9 \left(1 - x_{10} \frac{\Delta\bar{w}_{s1}}{\bar{w}_{ms1}} - x_{11} C_a\right)^{x_{12}} \underbrace{\left(\frac{\bar{w}_{ms1}}{\bar{w}_m}\right)^2 \frac{F_{bs1}}{F_b}}_7 + x_9 \left(1 - x_{10} \frac{\Delta\bar{w}_{s2}}{\bar{w}_{ms2}} - x_{11} C_a\right)^{x_{12}} \\
& \times \underbrace{\left(\frac{\bar{w}_{ms2}}{\bar{w}_m}\right)^2 \frac{F_{bs2}}{F_b}}_8 + x_{17} \frac{C_a^2}{(b_m/l)^{x_{18}}} + x_{19} \left(1 - x_{21} \frac{\bar{w}'_1 - \bar{w}'_2}{0.5(\bar{w}'_1 + \bar{w}'_2)}\right)^{x_{20}} \frac{F_0}{NF_b} \\
& + x_{16} \underbrace{\left(\frac{\sin i'_1}{\sin \beta_{A1}}\right)^2 \bar{w}'_1{}^2}_9 + x_{18} \underbrace{\left(\frac{\bar{w}'_2}{\bar{w}'_2} - 1\right) \bar{w}'_2{}^2}_10 \left. \right\}_{im} - \underbrace{\left(\frac{\bar{r}_3^2 - 1}{2\varphi_{02}\phi} \frac{\rho_m \bar{v}_m^3}{\rho_0}\right)}_{11} \\
& \times \underbrace{\left(1 + x_{24} M_{v_2}^{x_{25}}\right)}_{12} \underbrace{\left(1 + \frac{x_{26}}{Re^{x_{27}}} + x_{28} K_m^{x_{28}}\right)}_{13} \left[x_{30} (\bar{r}_3 - 1)^{x_{31}} + x_{32} \left(\frac{b_3}{b_2} - 1\right)^{x_{32}} \right. \\
& \left. + x_{34} (\cos \alpha'_2)^{x_{35}} + x_{38} \right]_{vl} \tag{4-82}
\end{aligned}$$

模型式 (4-82) 的特点如下:

1. 速度分布的简化方法: 对于叶片表面上的速度计算, 式 (4-82) 中采用通道法, 该法与更精确方法 (积分方程法) 在计算工况下结果有满意的吻合。它将叶片主要部分分成速度单调变化的两段 (I 和 II), 每段速度用线性关系简化 (图 4-29)。线性关系代替计算速度曲线用手工按两者吻合最好的条件进行。

2. 叶轮中各种损失: 叶片压力面和吸力面上每一段的翼型阻力系数由因子 5~8 项确定, 而 9 和 10 项考虑所有叶道间的壁面诱导阻力系数。除叶片主要部分的损失外, 以冲角为函数的进口段冲击损失和卸荷段假想混合损失由项 11 和 12 计算。

局部最大马赫数 $M_{w_{max}}$, (第 1 项) 的影

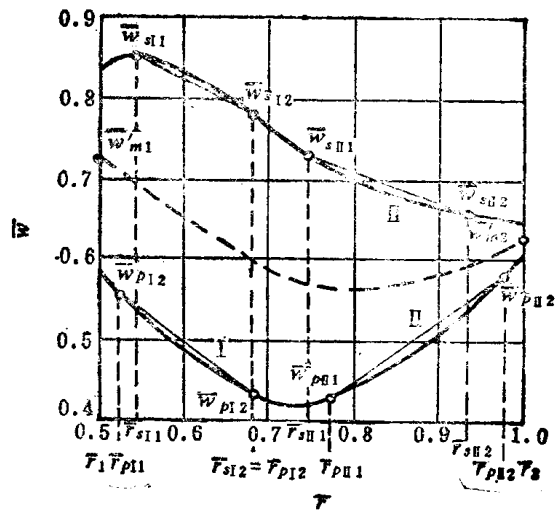


图4-29 速度分布的简化

响由叶片吸力面最大相对速度决定，粘性力由雷诺数 Re 和表面粗糙度计算，空间性系数为 F_{nl} 的函数（第3项）。

3. 无叶扩压器中的损失计算：无叶扩压器中的损失功率

$$P_{wvl} = C_{wvl} v_{mvl}^3 \rho_{mvl} F_{vl} / 2 \\ = q_m \xi_{vl} v_2^2 / 2$$

由此进行不复杂的变换，损失系数表示成阻力系数的函数

$$\xi_{vl} = \frac{\rho_{mvl}}{\rho_0} (\bar{r}_3^2 - 1) \left(\frac{\bar{v}_{mvl}}{\bar{v}_2} \right)^2 \frac{\bar{v}_{mvl}}{\phi} C_{wvl}$$

式中 $\rho_{mvl} = (\rho_2 + \rho_3) / 2$; $\bar{v}_{mvl} = (\bar{v}_2 + \bar{v}_3) / 2$ 。

无叶扩压器阻力系数是一个很复杂的函数，它依赖于扩压器的型式、工况、沿通道宽度的速度分布的特性、分离区和二次流的产生。为简单起见，作为决定 C_{wvl} 的主要参数，建议利用 \bar{r}_3 、 b_3/b_2 和 α'_2 （第16项）。独立项 x_{30} 弥补描述 C_{wvl} 时可能的错误。与叶轮类似， M_{v2} 和 Re 的影响用修正因子（第14、15项）考虑。

模型式（4-82）给出了足够完整的损失分解，其数值分析可用来比较所研究和设计级的有效性。所求矢量 X 按式（4-81）求极值得出：

$x_1 = 1.2$; $x_2 = 3.0$; $x_3 = 100.0$; $x_4 = 0.8$; $x_5 = 5.0$; $x_6 = 0.5$; $x_7 = 1.85$; $x_8 = 1.0$; $x_9 = 1.0$; $x_{10} = 1.2$; $x_{11} = 0.5$; $x_{12} = 0.5$; $x_{13} = 0.1$; $x_{14} = 1.0$; $x_{15} = 1.0$; $x_{16} = 0.3$; $x_{17} = 1.0$; $x_{18} = 0.07$; $x_{19} = 3.0$; $x_{20} = 2.0$; $x_{21} = 1.2$; $x_{22} = 0.94$; $x_{23} = 0.94$; $x_{24} = 0.05$; $x_{25} = 2.5$; $x_{26} = 95$; $x_{27} = 0.8$; $x_{28} = 0.5$; $x_{29} = 0.001$; $x_{30} = 0.05$; $x_{31} = 0.01$; $x_{32} = 0.01$; $x_{33} = 0.08$; $x_{34} = 0.003$; $x_{35} = 0.7$; $x_{36} = 0.001$ 。

模型式（4-82）的优点是广泛包括可能的参数，效率计算值和实验结果有相当好的吻合。180种方案的平方偏差为1.6%。不足之处是速度分布的简化方法，还没有提出任何定量表示的准则。

另一个叶轮和无叶扩压器模型特别适用于通流部分的最佳化。为了得到尽量少的相对速度 w 的参数， w 的计算曲线用梯形代替（图4-30中的阴影部分）。梯形的底是叶片端点的突然加荷和卸荷值，两侧边代表了速度沿叶道长度的分布。利用最小二乘法，以使侧边表示的速度与计算值有较好的吻合。为此，直线方程写成如下形式：

$$\bar{w}_{si} = \bar{w}_m + a(\bar{r}_m - \bar{r}) \quad (4-83)$$

速度计算值 \bar{w} 和简化表示值 \bar{w}_{si} 之间误差平方和

$$S_m = \sum_{i=0}^n [\bar{w}(\bar{r}_i) - \bar{w}_{si}(\bar{r}_i)]^2 \quad (4-84)$$

式（4-83）中的系数 a 通过对式（4-84）

求极小值求得，这就确定了梯形侧边的直线方程。考虑到这种简化速度分布，模型式（4-85）中利用平均负荷 $\Delta \bar{w}_m$ 、平均速比 K_{wm} 和 \bar{w}'_1 等参数，其多变效率表达式为：

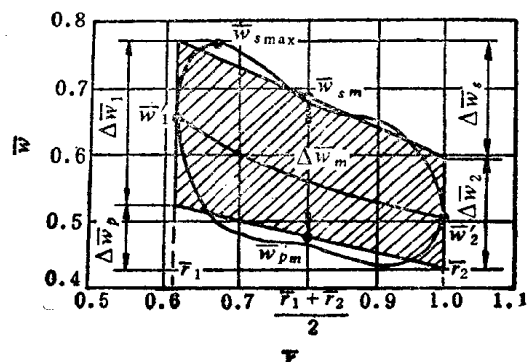


图4-30 式（4-85）中的简化速度分布

$$\begin{aligned}
 \eta_{p,t} = & \frac{1}{1 + \beta_t + \beta_{df}} \left\{ 1 - \frac{\bar{w}_m^3 b_m \varepsilon_m \tau_m}{\phi \Delta \bar{w}_m D_2} \left[\left(\frac{\bar{w}_m}{\bar{w}_m} \right)^2 \left[x_1 + x_2 \left(\frac{\Delta \bar{w}_p / \bar{w}_m}{1 + x_3 C_a^{x_4}} \right)^{x_5} \right] + \left(\frac{\bar{w}_m}{\bar{w}_m} \right)^2 \left[x_1' \right. \right. \right. \\
 & + x_2' \left. \left. \left[\frac{\Delta \bar{w}_s}{\bar{w}_m} (1 + x_3 C_a^{x_4}) \right]^{x_5} \right] + \frac{C_{wp} + C_{ws}}{2} \frac{F_0}{F_s} + x_6 \frac{C_a^2}{(b_m/l)^{x_7}} + x_8 \frac{2\Delta \bar{w}_s' \phi \pi D_2^2}{NF_b \varepsilon_m \bar{w}_m^2} \right. \\
 & + x_9 \left(\frac{\sin i_1'}{\sin \beta_{A1}} \right)^2 \frac{2 \bar{w}_1' \phi \pi D_2^2}{NF_b \varepsilon_m \bar{w}_m^2} + x_{10} \frac{\bar{w}_2' \phi N \delta^2}{\pi F_b \varepsilon_m \bar{w}_m^2 \sin^2 \beta_{A2}} \left. \right] (1 + x_{11} M_{\bar{w}_m}^{x_{12}}) (1 + x_{13} Re^{-x_{14}}) \\
 & \times \left[1 + \frac{x_{15} (b_m/l)^{x_{16}}}{K_F^{x_{17}}} \right]_{im} - \left\{ \frac{\bar{v}_2^2}{2\varphi_{02}} \frac{(1 - 1/\bar{r}_3)}{2b_2 \sin \alpha_2'} \frac{0.3164}{Re^{0.25}} [1 + x_{18} \sin(\alpha_2' - x_{19})] \right. \\
 & \left. \times \left[\left(1 + x_{20} \left(\frac{b_2}{D_2} \right)^{x_{21}} \right) (1 + x_{22} M_{v_2}^{x_{23}}) \right]_{vi} \right\} \quad (4-85)
 \end{aligned}$$

与式(4-82)相比,式(4-85)是比较简单的形式,如未知系数从36减到23,壁面上阻力系数看成是叶片压力面和吸力面阻力系数之和的一半。此外,引进了端部损失,在考虑气流空间性的修正系数中有相对长度 b_m/l 和表征叶道前气流加速系数 $K_F = F_0/F_1$ 。式(4-85)中的平均参数由如下方法决定:

$$b_m = (b_1 + b_2)/2; \quad \varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2; \quad \bar{w}_m = \sqrt[3]{(\bar{w}_1'^3 + \bar{w}_2'^3)/2}$$

该模型中的矢量 X 是:

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0.003; \quad x_2 = 0.0054; \quad x_3 = 0.68; \quad x_4 = 2.0; \quad x_5 = 4.0; \quad x_6 = 0.003; \quad x_7 = 0.4; \quad x_8 = \\
 0.022; \quad x_9 = 0.02; \quad x_{10} = 0.4; \quad x_{11} = 1.0; \quad x_{12} = 3.0; \quad x_{13} = 880.0; \quad x_{14} = 1.0; \quad x_{15} = 1.7; \quad x_{16} = \\
 2.0; \quad x_{17} = 0.5; \quad x_{18} = 3.5; \quad x_{19} = 0.35; \quad x_{20} = 450.0; \quad x_{21} = 2.0; \quad x_{22} = 1.26; \quad x_{23} = 4.0.
 \end{aligned}$$

尽管该模型比模型式(4-82)简单,但对24种所研究的单列叶栅叶轮的级,其精度还提高了。

根据具体的数学模型式(4-85),可编制叶轮通流部分最佳化的程序。对于计算效率最佳的级,程序中应包括的已知数据是能量头系数 φ_{02} ,流量系数 ϕ ,假想马赫数 M 和轮毂比 \bar{r}_3 。程序在 $\Delta \bar{w}_m$ 、 K_{wm} 等不同参数的给定范围内进行级的计算,选择最佳的级方案,其中包括级的主要几何尺寸 \bar{r}_1 , \bar{b}_1 , \bar{b}_2 , \bar{r}_3 等,气动参数 \bar{w}_1' , \bar{w}_2' , α_2' , \bar{v}_2' 等以及 K_{wm} 、 $\Delta \bar{w}_m$ 等的最佳值。

叶片扩压器的数学模型是以上面讨论的叶轮模型为基础。叶片扩压器中损失分为翼型损失和端部损失。典型叶栅的速度分析表明:翼型上速度分布主要呈线性关系,因此翼型阻力系数 C_w 由假想扩压系数 $\Delta \bar{v}$ 决定, $\Delta \bar{v}$ 定义成

$$\Delta \bar{v}_p = (\bar{v}_{3p} - \bar{v}_{4p})/\bar{v}_p$$

$$\Delta \bar{v}_s = (\bar{v}_{3s} - \bar{v}_{4s})/\bar{v}_s$$

式中 \bar{v}_{3p} , \bar{v}_{3s} , \bar{v}_{4p} , \bar{v}_{4s} 分别为叶片扩压器进、出口翼型压力面和吸力面上的相对速度,而 \bar{v}_p , \bar{v}_s 表示翼型压力面和吸力面上气动合力所在半径处的相对速度。

端部损失又可分为诱导损失和壁面损失,壁面损失系数 C_w 由叶栅扩压系数 $C_d = \bar{v}_4/\bar{v}_3$ 决定。对于所有损失进行马赫数 M 和雷诺数 Re 的修正后,叶片扩压器阻力系数

$$\begin{aligned}
 C_w = & \left[1 + x_{11} (M_{v_3} \bar{v}_{3s})^{x_{12}} \right] \left(1 + \frac{x_{13}}{Re^{x_{14}}} \right) \left\{ x_6 \left(1 + \frac{x_7 \Delta \bar{v}_p}{(x_8 + C_d)^{x_{10}}} \right)^{x_9} \left(\frac{\bar{v}_p}{\bar{v}_m} \right)^2 \right. \\
 & + x_6 \left[1 + x_7 \Delta \bar{v}_s (x_8 + C_d)^{x_{10}} \right]^{x_9} \left(\frac{\bar{v}_s}{\bar{v}_m} \right)^2 + x_1 \frac{C_a^2}{(b/l)^{x_4}} \\
 & \left. + x_4 \left(1 - \frac{1 - 1/C_d}{1 + 1/C_d} \right)^{x_5} \frac{F_0}{F_s} \right\} \quad (4-86)
 \end{aligned}$$

式中 $\bar{v}_m = (\bar{v}_p + \bar{v}_s) / 2$; $x_1 = 0.015$; $x_2 = 2.0$; $x_3 = 0.5$; $x_4 = 0.002$; $x_5 = 1.5$; $x_6 = 0.005$; $x_7 = 0.3$; $x_8 = 0.6$; $x_9 = 2.0$; $x_{10} = 0.8$; $x_{11} = 0.5$; $x_{12} = 2.0$; $x_{13} = 880.0$; $x_{14} = 1.0$ 。

式(4-86)适用于最小损失系数的工况。

回流器的数学模型有如下形式:

$$\eta_{pot} = \frac{1 + \beta_l + \beta_{sl}}{\varphi_{e2}} \left\{ \underbrace{\frac{0.3164}{Re^{0.25}} \frac{\bar{r}_c (0.5\pi - 6\bar{r}_c/\bar{r}_4)}{2\bar{b}_m \sin \alpha_m}}_1 \left[\underbrace{\bar{v}_{\theta 4}^2 + \left(\frac{v_{r4} b_4}{b_m} \right)^2}_2 \right] \right. \\ \times \left[\underbrace{1 + x_1 \left(\frac{\bar{v}_5}{\bar{v}_4} \right)^{x_2}}_3 \right] \left[\underbrace{1 + x_3 \left(\frac{r_k}{b_4} - 12 \right)^{x_4}}_4 \right] \right]_{cu} + \underbrace{\left\{ \frac{2\epsilon_m \bar{v}_m^3 b_m l N}{\pi \phi D_2^2} (1 + x_5 Re^{-x_6}) \right\}}_5 \underbrace{\left. \right\}}_6 \\ \times \left[\underbrace{1 + x_7 \left(\frac{b_m}{l} \right)^{x_8}}_7 \right] \left\{ \left[\left(\frac{\bar{v}_{mp}}{\bar{v}_m} \right)^2 \left[\underbrace{x_9 + x_{10} \left(\frac{\Delta \bar{v}_p / \bar{v}_{mp}}{1 + x_{11} C_{d12}^{x_{12}}} \right)^{x_{13}}}_8 \right] \right] + \left(\frac{\bar{v}_{mp}}{\bar{v}_m} \right)^2 \left[\underbrace{x_9 + x_{10}}_9 \right] \right. \\ \times \left[\underbrace{\frac{\Delta \bar{v}_s}{\bar{v}_m} (1 + x_{11} C_{d12}^{x_{12}})}_8 \right]^{x_{13}} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{F_0}{2F_b} \right)}_{10} + x_{14} \underbrace{\frac{C_d^2}{(b_m/l)^{x_{15}}}}_{11} + \frac{\pi \phi D_2^2}{4 N \epsilon_m F_b \bar{v}_m^2} \right. \\ \times \left. \left. \left[\underbrace{x_{16} 2 \Delta \bar{v}'_6 + x_{17} \frac{\bar{v}'_6}{4} \left(\frac{\sin i'_5}{\sin \beta_{45}} \right)^2}_{13} + \underbrace{x_{18} \bar{v}'_6 \left(\frac{\delta N}{\pi D_6} \right)^2}_{15} \right] \right] \right\}_{re} + \left\{ \left[\underbrace{1 + x_{21} \left(\frac{r_{cm}}{b_6} \right)^{x_{22}}}_{16} \right] \right. \\ \times \left[\underbrace{1 - x_{19} \left(\frac{\bar{v}'_6 - \bar{v}_6}{\bar{v}_6} \right)^{x_{20}}}_{17} \right] \times \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \cdot \frac{(\bar{v}_6^2 + \bar{v}'_6) \pi r_{cm}}{4 b_m \sin \alpha_m} \right. \\ \left. \left. + \frac{0.074 N Re^{-0.2} \bar{v}_m^3 F_b \rho_m}{\pi \rho_0 \phi D_2^2} \right\}_{AC} \right. \quad (4-87)$$

式中,下角标4、5、6分别表示弯道进口、出口(回流器进口)和回流器出口。 \bar{r}_c 为弯道相对曲率半径。

弯道中总损失由二个分量决定,其中摩擦损失计算与无叶扩压器的摩擦损失计算相同。另一个分量是分离和二次流有关损失,这种损失通常由扩压度 v_5/v_4 和气流轨迹的相对曲率半径 r_k/b_4 有关的因子考虑,这里 $r_k = (r_c + b_{m.cu}/2)/(b_4 \sin \alpha_{m.cu})$ 。

回流器的数学模型不需另外的解释,因为它的结构型式和速度分布的简化方法实际上与模型式(4-85)完全相同。仅有的区别是没有考虑压缩性,且在气流空间性有关的第7项中没有 K_F 。

环形扩压器中的损失包括壁面和叶片尾部的摩擦损失。壁面摩擦损失由项18确定,而空间性和紊流度的影响由项16和17考虑。我们将回流器叶片端部简化为薄板,则叶端阻力系数

$$C_{wt} = 0.074 / Re^{0.2} \quad 5 \cdot 10^5 \leq Re \leq 10^7$$

考虑到式(4-69)就有模型式(4-87)项19表示的叶片端部损失。

X矢量为: $x_1 = 2.0$; $x_2 = -1.15$; $x_3 = 0.0002$; $x_4 = 2.0$; $x_5 = 840.0$; $x_6 = 0.41$; $x_7 = 4.45$; $x_8 = 2.0$; $x_9 = 0.00045$; $x_{10} = 0.001$; $x_{11} = 0.17$; $x_{12} = 1.0$; $x_{13} = 0.05$; $x_{14} = 0.0001$; $x_{15} = 0.1$; $x_{16} = 0.00001$; $x_{17} = 0.1$; $x_{18} = 0.0001$ 。

出口装置的数学模型将损失分为蜗室表面流动损失,舌部流动的冲击损失,气体的径向

质量传递损失（由子午面流动特性决定），诱导损失和出口管损失：

$$\begin{aligned}
 \Delta\eta = & \underbrace{\frac{1}{(1 + \beta_l + \beta_{df})2\varphi_{02}}}_{1} \underbrace{(1 + x_{12}M^{x_{13}})}_{2} \underbrace{\left(1 + \frac{x_{14}}{Re^{x_{15}}}\right)}_{3} \underbrace{\left\{\frac{\varepsilon F_{ex}\bar{v}_{exm}^3}{\pi r_2^2\phi} x_1\right\}}_{4} \left[1 + x_2 \left(\frac{\Delta\bar{v}_0}{\bar{v}_{exm}}\right)^{x_3} \frac{F_{vc}}{F_{ex}} + x_4 (\bar{v}_{\theta k} - \bar{v}_{\theta l})^2 \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_5}{\operatorname{tg}\alpha_{5d}}\right)^{x_5}\right] \\
 & + x_6 \operatorname{tg}^{1.25} \frac{\nu_{eqm}}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{b_5 r_5}{b_m r_m}\right)^2}_{6} \bar{C}_{r4}^2 + \underbrace{\frac{\varepsilon F_{ex}\bar{v}_{exm}^3}{\pi r_2^2\phi} x_7}_{7} \frac{C_a^2}{(b_m/l_m)^{x_8}} \\
 & + \bar{v}_{\theta k}^2 \left[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{x_9}{\sin(\nu_{eq}/2)} + x_{10} \operatorname{tg}^{x_{11}} \left(\frac{\nu_{eq}}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}_{8} \right] \quad (4-88)
 \end{aligned}$$

式中 F_{vc} , ν_{eq} 分别为蜗室表面积和当量扩张角。第4项表示出口装置表面损失，它与用气流平均减速表示的阻力系数成正比。冲击损失由舌部上、下速度 ($v_{\theta k}$ 和 $v_{\theta l}$) 之差决定（第5项），并用 $\operatorname{tg}\alpha_5/\operatorname{tg}\alpha_{5d}$ （下角标 d 表示设计点对应值）考虑非设计工况下损失的变化。子午面中的损失与径向分速 v_{r4} 的平方成正比（第6项），此时二次流旋涡强度依赖于子午面扩张度。径向压力梯度引起的诱导损失由第7项确定。出口扩压管损失（第8项）分为摩擦损失和膨胀损失，它与试验值有较好吻合。 M 和 Re 对所有损失的影响一起考虑。在决定实际气流特性时，利用了电拟法，该法可得到任何形式出口装置中的速度分布。

式 (4-88) 中系数 x_i 分别为： $x_1=0.0022$ ； $x_2=0.255$ ； $x_3=0.78$ ； $x_4=0.006$ ； $x_5=0.93$ ； $x_6=2.54$ ； $x_7=0.00015$ ； $x_8=1.28$ ； $x_9=0.044$ ； $x_{10}=48.0$ ； $x_{11}=1.58$ ； $x_{12}=1.8$ ； $x_{13}=2.0$ ； $x_{14}=75.5$ ； $x_{15}=1.0$ 。

模型式 (4-88) 在 $\phi = (0.85 \sim 1.15)\phi_d$ 的范围内与试验值有较好的一致。结果分析建立了各种损失之间的关系（图4-31），而蜗壳装置的方案计算表明了利用数学模型 (4-88) 来选择最佳出口装置的可能性，这可使该元件中能量头损失减少15~20%。

以上讨论的数学模型仅在计算工况附近给出满意的精度。但设计阶段知道 $\phi \approx \phi_d$ 范围内的级效率是很有意义的，因此应进一步建立能计算级的性能（性能预示）的数学模型。

由于性能预示需要足够可靠的叶栅速度分布的计算方法，而以上模型中速度分布计算仅适用于设计工况，这里根据大量的速度图形分析，选择如下参数反映非设计工况下叶栅中的流动（图4-32）：

1. 叶片压力面和吸力面上速度积分平均值

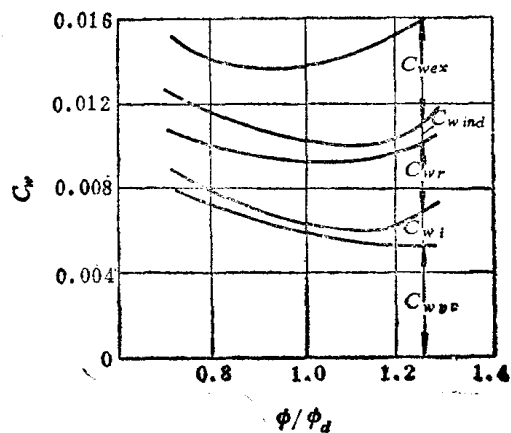


图4-31 出口装置中各分量阻力系数
 C_{wex} —出口管中损失 C_{wind} —诱导损失 C_{wi} —冲击损失 C_{wr} —径向质量传递损失 C_{wvc} —蜗旋室损失

$$\bar{w}_{mp} = \int_{\bar{r}_1}^1 \bar{w}_p d\bar{r} / (1 - \bar{r}_1)$$

$$\bar{w}_{ms} = \int_{\bar{r}_1}^1 \bar{w}_s d\bar{r} / (1 - \bar{r}_1)$$

2. 叶片压力面和吸力面上的扩压度

$$K_{wp} = \bar{w}_{minp} / \bar{w}_{maxp}; \quad K_{ws} = \bar{w}_{min_s} / \bar{w}_{max_s}$$

式中 \bar{w}_{minp} , \bar{w}_{maxp} 和 \bar{w}_{min_s} , \bar{w}_{max_s} 分别为叶片压力面和吸力面上主要部分最小、最大速度值。

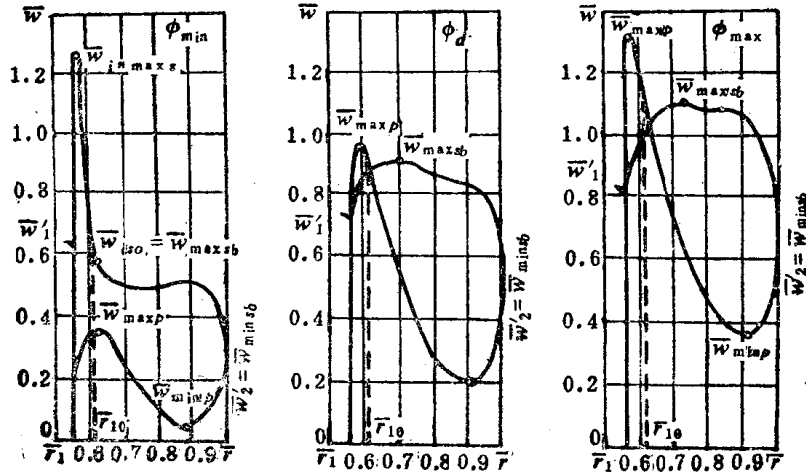


图4-32 不同工况下某叶轮中的速度分布

3. 叶片吸力面开始部分速度变化参数

$$\Delta \bar{w}_{s1} = \bar{w}_{s1s} - \bar{w}_{1s0}$$

这里 \bar{w}_{s1s} 表示叶片吸力面开始部分的最大速度； \bar{w}_{1s0} 表示在半径 \bar{r}_{10} 上吸力面速度。

$$\bar{r}_{10} = \bar{r}_1 + K_{10} \frac{2\pi \bar{r}_1 \tau_1}{N} \sin \beta_{A1}$$

系数 K_{10} 与通道喉部尺寸 \bar{a}_t 有关

$$K_{10} = 1.9 - 17.6 \bar{a}_t$$

4. 翼型的速度环量 Γ ，其值用于确定体积力系数 C_v 和理论能量头。

下面模型中的参数平均值是 $\bar{w}_m = (\bar{w}_{mp} + \bar{w}_{ms}) / 2$ ； $b_m = (b_1 + b_2) / 2$ ； $\varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2$ 。

考虑到上面引进的参数和其有关变换，对于预示两元件级（叶轮和无叶扩压器）的性能，有如下数学模型：

$$\eta_{pot} = \frac{1}{1 + \beta_t + \beta_{df}} \left\{ 1 - \left\{ \frac{\varepsilon_m (b_m / D_2) l N}{\pi \phi \varphi_{e2}} \left[\bar{w}_{mp}^3 \left[x_1 + x_2 \left(\frac{1 / K_{wp}}{1 + x_3 C_a^{x_4}} \right)^{x_5} \right] \right. \right. \right. \\ + \bar{w}_{ms}^3 \left[x_1 + x_2 \left[\frac{1}{K_{ws}} (1 + x_6 C_a^{x_7}) \right]^{x_5} \right] + \bar{w}_m^3 \frac{0.074}{R \varepsilon^{0.2}} \frac{(F_s + F_h)}{2 (b_m / D_2) l N} \\ \left. \left. \left. + \bar{w}_m^3 \frac{x_8 C_a^2}{(b_m / l)^{x_9}} \right] + x_{10} \frac{\bar{w}_2'^2 (1 - \bar{w}_2 / \bar{w}_2')^2 N}{2 \varphi_{e2}} + x_{11} \frac{\Delta \bar{w}_{s1}^2 N}{2 \varphi_{e2}} + x_{12} \frac{\bar{v}_1^2}{2 \varphi_{e2}} \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 + x_{13} M_{v1}^{x_{14}} + \frac{x_{15}}{(x_{16} - M_{v1})^{x_{17}}} \right] (1 + x_{18} Re^{-x_{19}}) \left[1 + x_{20} \frac{(b_m/l)^{x_{21}}}{K_F^{x_{22}} \bar{r}_{nd}^{x_{23}}} \right] \Bigg\} \\ & - \left\{ \frac{\bar{v}_2^2}{2\varphi_{\theta 2}} \left[x_{24} \frac{0.3164 (1 - 1/\bar{r}_2)}{Re^{0.25} 4(b_m/D_2) \sin \alpha'_2} + \frac{x_{25} (b_m/D_2)^{x_{26}}}{(1 + x_{27} \sin^{x_{28}} \alpha'_2)^2} (1 + x_{29} Re^{-x_{30}}) \right] \right. \\ & \left. \times (1 + x_{31} M_{v2}^{x_{32}}) \right\} \Bigg\} \quad (4-89) \end{aligned}$$

其中, 系数 $x_1 = 0.0037$; $x_2 = 0.00006$; $x_3 = 0.45$; $x_4 = 4.5$; $x_5 = 3.5$; $x_6 = 0.6$; $x_7 = 1.0$; $x_8 = 0.003$; $x_9 = 0.4$; $x_{10} = 0.2$; $x_{11} = 0.003$; $x_{12} = 0.15$; $x_{13} = 0.2$; $x_{14} = 3.0$; $x_{15} = 0.03$; $x_{16} = 0.9$; $x_{17} = 2.5$; $x_{18} = 700.0$; $x_{19} = 0.9$; $x_{20} = 1.5$; $x_{21} = 1.6$; $x_{22} = 1.7$; $x_{23} = 1.4$; $x_{24} = 0.7$; $x_{25} = 100.0$; $x_{26} = 2.0$; $x_{27} = 0.5$; $x_{28} = 0.85$; $x_{29} = 700.0$; $x_{30} = 0.9$; $x_{31} = 1.0$; $x_{32} = 3.5$ 。

模型式 (4-89) 中项 $(1 + x_3 C_{d1}^*)$ 和 $(1 + x_6 C_{d2}^*)$ 同时考虑横向压力梯度对附面层从叶片压力面向吸力面迁移的影响以及因叶片负荷产生的流体质点分层的效果。流动可视化表明: 在不同工况下, 离心叶轮的盘、盖壁面上无分离流动, 因此, 其壁面上阻力系数按类似平板阻力系数确定。诱导阻力系数利用式 (4-61) 的形式计算。

在 $\phi < \phi_d$ 时, 叶片负压面开始部分的速度峰值导致的冲击损失与速度变化的平方成正比

$$\Delta \eta_{wi} = x_{11} \frac{\Delta \bar{w}_{i1}^2}{2\varphi_{\theta 2}} K_M K_R K_p$$

在 $\phi > \phi_d$ 时, 叶片压力面开始部分的类似损失已在前面指出, 由于沿叶片整个长度的速度 \bar{w}_1 变化平稳, 因而通常在翼型损失中考虑。叶轮后的混合损失在给定模型中没有单独列出, 而包括在翼型损失的隐含形式中, 因为它主要由叶片表面流动条件决定。此外, 式 (4-89) 中引进了叶轮进口前弯曲通道中的损失

$$\Delta \eta_{win} = x_{12} \frac{\bar{v}_1^2}{2\varphi_{\theta 2}} K_M K_R K_p$$

级工作时, 特别是强烈偏离设计的工况, 局部最大马赫数 M_{v1} 和 M_{v1} (考虑阻塞时的值) 对损失有很大影响。因此, 模型式 (4-89) 中用系数 $K_M = f(M_{v1}, M_{v1})$ 来考虑这种情况。分析影响气流空间特性的参数后将空间系数表示成 K_F , \bar{r}_{nd} 和 b_m/l 的函数。

无叶扩压器的数学模型中一般有摩擦损失及与分离有关的旋涡损失。在级的非设计工况, 特别是宽无叶扩压器和小角度 α'_2 时, 分离导致总损失的很大增加。取 $d_{s1} = 4f/U = 2b_m$; $\alpha = \alpha'_2 = \text{const}$; $\lambda = x_{21} \cdot 0.3164/Re^{0.25} = \text{const}$; $d/l = dr/\sin \alpha$; x_{21} 是考虑摩擦损失和旋涡损失的相互影响, 则摩擦损失

$$h_{f,r1} = \int_{r_2}^{r_3} \lambda \frac{v^2}{2} \frac{dl}{d_{s1}}$$

旋涡损失可按类似突然膨胀的损失计算

$$\Delta \eta_{vvc} = \zeta_{vc} \frac{\bar{v}_{vc}^2}{2\varphi_{\theta 2}}$$

式中 \bar{v}_{vc} 表示无量纲分离速度。由于周向对称, 可认为气流分离和回流仅沿半径方向, 即实际上它们由径向分速 $v_{r,vc}$ 决定。在周向流动虽无梯度, 但可能引起气流的扭转, 从而加强了旋涡损失。因此分离点的绝对速度是 $\bar{v}_{r,vc}$ 和周向分量 $\bar{v}_{\theta,vc}$ 的矢量积。由连续性方程, 在

$b_2 = b_3$, $\alpha = \text{const}$ 和 $\rho = \text{const}$ 时应有 $\bar{v}_2 = \bar{v}_2 / \bar{r}_{2, \dots}$ 。作为第一次近似, 分离半径可表示成角 α_2 的函数, 而无叶扩压器壁面对分离区发展的相互影响表示成 b_m / D_3 的函数, 并引进雷诺数 Re 的修正, 则得到旋涡损失。

图4-33表示了效率的计算值 η_{pol}^* 和试验值 η_{pol} 的比较, 两者在所有工况都有满意的吻合, 在 ϕ_d 时其平均方差为1.5%, 对于非设计工况, 除 $\phi = \phi_{max}$ 外, 误差2.3%。在计算值 $\eta_{pol}^* < 0.7$ 的 $\phi = \phi_{max}$ 的范围内二者差别较大。图4-33 b 表示了 $M_u = 0.79$ 的某二元件级的效率曲线比较, 级效率吻合较好, 而叶轮效率的计算值 η_{polim}^* 比试验值 η_{polim} 低, 这是因为计算时混合损失作为叶轮的损失。

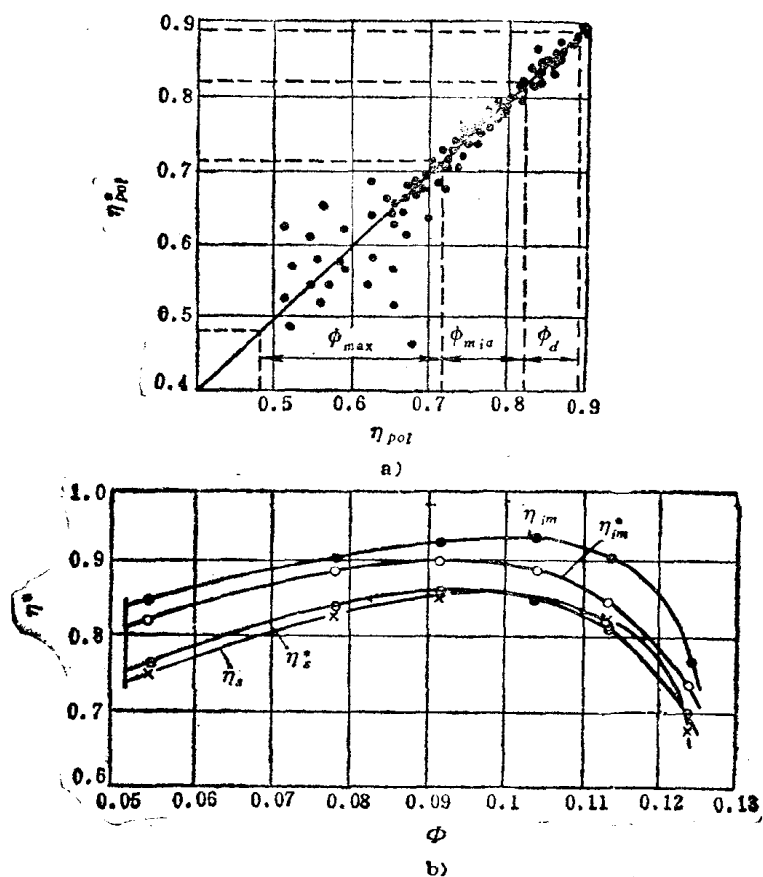


图4-33 η_{pol}^* 与 η_{pol} 的比较

第五章 斜流叶轮的设计

前已叙及，斜流叶轮是介于离心式和轴流式之间的一种叶轮，气体在斜流叶轮内的流动有着明显的三元特征。因此，可以用离心式延长和轴流式延长的两种方法，对斜流叶轮进行设计与计算。这两者当中，以轴流式延长的设计方法为优。因为用轴流式延长的研究方法对斜流叶轮进行设计时，可以以平面叶栅试验数据为基础，故设计精度较高可靠性较大。前者已在第二章中作过说明。本章将根据三元流动的普遍理论，应用平面叶栅资料，对斜流叶轮的准三元设计方法加以较为详细地介绍。

§ 5-1 沿准正交线的平衡条件

斜流叶轮进行准三元设计时，同样要首先计算子午面流线。为此，我们在斜流叶轮子午面上不含叶栅的管道通流区域内，设置一定数量的近似与流线垂直的准正交线（如图 5-1），这样我们可以应用轴对称假定进行分析并导出斜流叶轮子午面流动的平衡条件式，求解沿准正交线力的平衡条件，便可决定子午面流线。顺便指出，准正交线的优点还在于：迭代计算时，流线位置变化，而准正交线可以不变。

下面根据基本方程和热力学关系，导出斜流叶轮子午面上沿准正交线 $q = q(r, z)$ 的平衡条件式，供斜流叶轮准三元设计时使用。

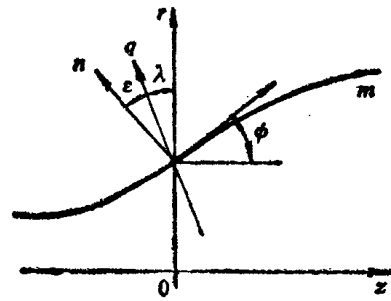


图5-1 准正交线

对于完全气体，总焓 I 可以表示为：

$$I = i + v_m^2/2 + v_\theta^2/2 \quad (5-1)$$

这里气体比焓 $i = c_p T$ 。由热力学关系式 (1-60)，则可得

$$\nabla i = T \nabla s + \nabla p / \rho \quad (5-2)$$

由式 (5-1)、式 (5-2) 及焓函数关系式 (3-40)，可得沿准正交线 q 的平衡条件：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\partial I}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_m^2}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial q} + \left(I - \frac{v_m^2}{2} - \frac{v_\theta^2}{2} \right) \frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial q} \quad (5-3)$$

对于一定斜流叶轮而言，叶轮转子焓为定值。将转子焓 $I_R = I - r\omega v_\theta$ 的关系代入式 (5-1) 并考虑 $\partial I_R / \partial m = 0$ 的关系，则有：

$$\frac{\partial i}{\partial m} = \frac{\partial(r\omega v_\theta)}{\partial m} - v_m \frac{\partial v_m}{\partial m} - v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial m}$$

由式 (5-2) 和上式，可得压力沿流线方向的变化为：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m} = \frac{\partial(r\omega v_\theta)}{\partial m} - v_m \frac{\partial v_m}{\partial m} - v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial m} + \left(I - \frac{v_m^2}{2} - \frac{v_\theta^2}{2} \right) \frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial m} \quad (5-4)$$

此外，子午面上气体沿法线 n 方向的平衡条件为：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{v_\theta^2}{r/(\partial r/\partial n)} + \frac{v_m^2}{r_m} \quad (5-5)$$

根据式 (5-5) 和式 (5-4) 可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial q} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial q} = & \left\{ \frac{\partial(r\omega v_\theta)}{\partial m} - v_m \frac{\partial v_m}{\partial m} - v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial m} \right. \\ & \left. + \left(I - \frac{v_m^2}{2} - \frac{v_\theta^2}{2} \right) \frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial m} \right\} \frac{\partial m}{\partial q} + \left(\frac{v_\theta^2}{r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{v_m^2}{r_m} \right) \frac{\partial n}{\partial q} \end{aligned} \quad (5-6)$$

令式 (5-6) 和式 (5-3) 相等并考虑以下微分关系:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial q}$$

经过整理, 可以得到沿准正交线的平衡条件为

$$\frac{\partial v_m^2}{\partial q} + A(q)v_m^2 = B(q) \quad (5-7)$$

式中

$$A(q) = 2 \left[\frac{\cos \varepsilon}{r_m} - \frac{\sin \varepsilon}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial q} \right) \right] - \frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial m} \sin \varepsilon \quad (5-8)$$

$$\begin{aligned} B(q) = 2 \left[\frac{1}{Q^*} \frac{\partial(IQ^*)}{\partial q} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial q} - \frac{1}{2} v_\theta^2 \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial q} \right) + \frac{v_\theta - r\omega}{r\omega} \frac{\partial(r\omega v_\theta)}{\partial m} \sin \varepsilon \right] \\ - (2I - v_\theta^2) \frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial m} \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (5-9)$$

式 (5-8) 右边第二项在假定轴对称条件下, 由连续条件可以写成:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varepsilon}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} = - \left[\frac{r\omega - v_\theta}{r\omega v_\theta^2} M_\theta^2 \frac{\partial(r\omega v_\theta)}{\partial m} \sin \varepsilon + (1 + M_\theta^2) \frac{\sin \phi \sin \varepsilon}{r} \right. \\ \left. + \frac{\sin \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon}{r_m} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial m} \sin \varepsilon \right] / (1 - M_m^2) \end{aligned} \quad (5-10)$$

式中 τ 为阻塞系数。

子午面计算时, 一般可以忽略沿流线 m 方向熵的变化, 即认为 $\partial Q^*/\partial m = 0$, 当不考虑叶片阻塞时, 沿准正交线平衡条件式中的式 (5-8)、式 (5-9) 及式 (5-10) 分别简化为:

$$A(q) = 2 \left[\frac{\cos \varepsilon}{r_m} - \frac{\sin \varepsilon}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial q} \right) \right] \quad (5-8a)$$

$$B(q) = 2 \left[\frac{1}{Q^*} \frac{\partial(IQ^*)}{\partial q} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial q} - \frac{1}{2} v_\theta^2 \left(\frac{1}{Q^*} \frac{\partial Q^*}{\partial q} \right) \right] \quad (5-9a)$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} = - \frac{(1 + M_\theta^2) \frac{\sin \phi \sin \varepsilon}{r} + \frac{\sin \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon}{r_m} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - M_m^2} \quad (5-10a)$$

明显看出, 当准正交线 q 变成径向线 r 时, $\angle \varepsilon = \angle \phi$, 这时式 (5-8a)、式 (5-9a)、式 (5-10a) 则与诺瓦克导出的径向平衡条件中的式 (3-43)、式 (3-44) 完全一致。类似于式 (3-45), 准正交线 q 的平衡条件式的解可以写成:

$$v_m^2 = e^{-\int A(q) dq} \left[\int B(q) e^{\int A(q) dq} dq + C \right] \quad (5-11)$$

式中积分常数 C 也应该由质量连续条件确定

$$m = 2\pi \int r \rho v_n \cos \epsilon dq \quad (5-12)$$

数值计算时, 如果各准正交线上的等面积分割点 (离散点) 近似用下式表示时:

$$r = F(z) \quad (5-13)$$

当已知 dr/dz , d^2r/dz^2 的话, 则流线 m 的斜率和曲率半径分别表示为:

$$\phi = \text{arctg} \frac{dr}{dz}, \quad r_n = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}}{(d^2r/dz^2)} \quad (5-14)$$

曲率半径 r_n 正负号的规定如同 § 3-1 所述。

设计计算时, 根据设计要求, 事先已给定各准正线上的 I 、 $v_\theta r$ 、 Q^* 等的分布, 当设定了子午面流线形状后, 便可由式 (5-8a), 式 (5-9a) 决定 $A(\varphi)$ 和 $B(\varphi)$, 按照式 (5-11) 进行数值迭代计算, 从而能够获得斜流叶轮子午面上沿准正交线的速度分布。

§ 5-2 斜流叶轮回转面的基础方程

前面在 § 3-2 中, 我们已对回转面上的流动解析模型作了初步的说明。下面在此基础上, 进一步导出适合于斜流叶轮回转面设计的基础关系式, 供设计时应用。

如图 3-4 所示, 在回转面上法线相对速度 w_n 等于零。对于等熵流动, 叶轮进出口转子焓为常数, 由式 (3-37) 知道 $A_s = 0$, 故从式 (3-36) 的第三式可以得到回转面上二元流动 (m, θ) 的运动方程为:

$$\frac{\partial w_n}{\partial \theta} - \frac{\partial(w_\theta r)}{\partial m} = 2r\omega \frac{\partial r}{\partial m} \quad (5-15)$$

当垂直于流面的法线方向的速度分量 $w_n = 0$ 的情况下, 这时连续方程表示为:

$$\nabla(\rho W) = \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho w_n)}{\partial m} + \rho w_n K_n = 0$$

式中, 法线 n 方向的曲率 $K_n = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial m}$, b 表示流面的角厚度 (如图 5-2)。

应用轴对称假定时, $\partial b / \partial m = 0$, 故由上式可得回转面上的连续方程为:

$$\frac{\partial(b \rho w_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r b \rho w_n)}{\partial m} = 0 \quad (5-16)$$

如果引入自动满足式 (5-16) 的流函数 ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -r b \rho w_n, \quad \frac{\partial \psi}{\partial m} = b \rho w_\theta \quad (5-17)$$

故有

$$w_\theta = \frac{1}{b \rho} \frac{\partial \psi}{\partial m}, \quad w_n = - \frac{1}{b \rho} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \quad (5-18)$$

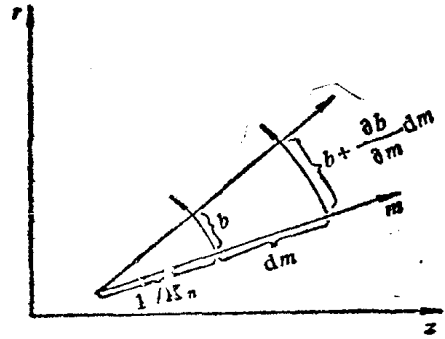


图5-2 法向曲率 K_n

将式(5-18)代入运动方程式(5-15),最后可以得到:假定在非粘性定常流动且垂直于回转面方向无速度分量情况下,通过斜流叶轮的气体满足于流函数 ψ 的回转面流动的相对运动方程为:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial m} - \frac{1}{b\rho} \frac{\partial(b\rho)}{\partial m} \right] \frac{\partial \psi}{\partial m} - \frac{1}{b\rho} \frac{\partial(b\rho)}{r\partial\theta} = -2\omega b\rho \frac{\partial r}{\partial m} \quad (5-19)$$

上式亦为斜流叶轮回转面流动的基础方程。

§ 5-3 斜流叶轮的设计理论

在§2-4中我们对离心形斜流叶轮进行了讨论,以下将对以叶栅资料为基础的斜流叶轮设计理论,加以重点的讨论。

一、等价速度三角形理论

为了把丰富的二元减速叶栅试验数据应用于斜流叶轮的设计,这里引进映象函数:

$$\frac{dX}{dm} = \frac{r^*}{r}, \quad \frac{dY}{d\theta} = -r^* \quad (5-20)$$

将回转面(m, r, θ)上的流动(如图3-4),在任意半径 r^* (例如叶轮出口半径)的圆柱展开面 $X-Y$ 面内映象,把式(5-20)代入式(5-19)并考虑到 $\sin\phi = \partial r / \partial m$ 的关系,斜流叶轮回转面流动在该面上的运动方程由式(5-19)可得:

$$\nabla^2 \psi = -2\omega b\rho \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \sin\phi + \frac{1}{b\rho} \left[\frac{\partial(b\rho)}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{\partial(b\rho)}{\partial Y} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right] \quad (5-21)$$

利用微分关系:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial m} = \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial m} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial m}$$

将式(5-20)代入上式并考虑轴对称假定,于是有

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{r}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial m}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (5-22)$$

由上式和式(5-17)可以得到回转面上的相对速度 w_m, w_θ 与映象面上对应的速度关系为:

$$w_x = \frac{1}{b\rho} \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{r}{r^*} w_m, \quad w_y = -\frac{1}{b\rho} \frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{r}{r^*} w_\theta \quad (5-23)$$

如果定义欧拉理论能量头系数 ψ_{th} 和流量系数 ϕ 分别为:

$$\psi_{th} = \frac{2(u_2 v_{\theta 2} - u_1 v_{\theta 1})}{u^{*2}}, \quad \phi = \frac{r_1 w_{m1} + r_2 w_{m2}}{2(r^* u^*)} \quad (5-24)$$

将式(5-23)及绝对速度和相对速度关系 $v_\theta = u + w_\theta$ 代入上式,式(5-24)又可写成:

$$\psi_{th} = 2\phi \left(\frac{w_{y1} - w_{y2}}{w_{x\infty}} + X \right), \quad \phi = \frac{w_{x\infty}}{u^*} \quad (5-25)$$

式中 $w_{x\infty}$ 表示平均轴向相对速度, X 表示流面倾斜参变量。它们分别定义为:

$$w_{x\infty} = \frac{w_{x1} + w_{x2}}{2}, \quad X = \frac{1}{\phi} \left[\left(\frac{r_2}{r^*} \right)^2 - \left(\frac{r_1}{r^*} \right)^2 \right] \quad (5-26)$$

一般说来, 如图 5-3 所示那样, 在映象面上叶栅进出口的轴向相对速度并不相等 (即 $w_{x1} \neq w_{x2}$), 为了应用平面叶栅吹风数据, 为此取平均轴向相对速度 $w_{x\infty}$ 和周向相对速度不变的 w_{y1} , w_{y2} 所构成的等价速度三角形 (图 5-3 中点划线) 来考虑。由式 (5-25) 可得等价速度三角形的进出口气流角 β_1 , β_2 为:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{w_{y1}}{w_{x\infty}} = -\frac{1}{\phi} \frac{r_1 w_{\theta 1}}{r^* u^*} \quad (5-27)$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{w_{y1} - w_{y2}}{w_{x\infty}} = \frac{\psi_{th}}{2\phi} - X \quad (5-28)$$

如果叶片数为 N , 安装角为 β_A 时, 映象面上叶栅的弦节比 σ 表示为:

$$\sigma = \frac{l}{t} = \frac{(X_2 - X_1) / \cos \beta_A}{2\pi r^* / N} \quad (5-29)$$

由所求得的 β_1 , β_2 及 σ 值, 根据第二章图 2-19 所示的平面叶栅资料, 可以确定 $X-Y$ 面上的翼形参数 (弯度 c_{10} , 攻角 α^*) 并求得安装角 β_A 值。

但是对于斜流叶轮而言, 因为流面倾斜和轴向速度变化的影响, 使得斜流叶栅性能与平面叶栅性能之间造成差别, 为了保证设计点的性能, 需要对所选定的叶栅形状予以适当的修正。

在运动方程式 (5-21) 中, 如果用 $f(r)$ 表示斜流叶轮因流面倾斜对相对流动的影响, 用 $g(b\rho)$ 表示因密度及流面厚度变化 (即轴向相对速度变化 $w_{x1} \neq w_{x2}$) 的影响, 则式 (5-21) 可以写成:

$$\nabla^2 \psi = f(r) + g(b\rho) \quad (5-30)$$

式中

$$f(r) = -2\omega b\rho \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \sin \phi, \quad g(b\rho) = \frac{1}{b\rho} \left[\frac{\partial(b\rho)}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{\partial(b\rho)}{\partial Y} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right]$$

当 $g(b\rho)$ 只是 X, Y 的函数时, 运动方程式 (5-30) 就是泊桑方程, 它的解可以写成:

$$\psi = \psi_0 + \psi' \quad (5-31)$$

这里 ψ_0 表示 $\nabla^2 \psi = 0$ 的拉普拉斯方程的一般解, ψ' 表示 $\nabla^2 \psi = f(r) + g(b\rho)$ 的特解。

对于轴流叶轮, 式 (5-30) 右边两项很小, 一般情况下可以当作零处理。所以斜流叶栅在映象平面上, 能够按照上述等价速度三角形的概念, 利用平面叶栅资料选定翼形, 从而求出一般解 ψ_0 。

为了求出特解 ψ' , 即修正因流面倾斜和轴向速度变化对二元叶栅性能的影响, 通过对选定的叶形进行修正的办法, 以保持斜流叶栅性能不变。下面对此作如下的讨论。

在斜流叶轮回转面上, 当不考虑气体粘性且绝对流动无旋的情况下, 斜流叶轮因流面倾斜的影响, 可以用 $X-Y$ 面上的分布涡 ζ 来表示, 由式 (5-21)、式 (5-23) 可得:

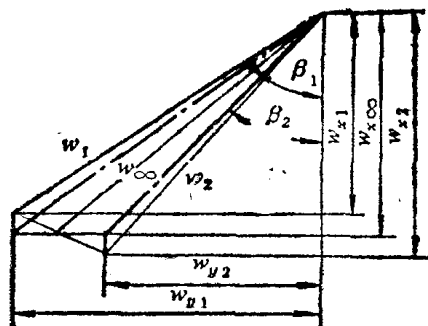


图5-3 等价速度三角形

$$\xi = \text{rot}(w_x, w_y) = \frac{\partial w_y}{\partial X} - \frac{\partial w_x}{\partial Y} = 2\omega \left(\frac{r}{r^*}\right)^2 \sin\phi \quad (5-32)$$

斜流叶轮因密度及流面厚度变化 (即 $w_{x1} \neq w_{x2}$) 的影响, 则可以用 $X-Y$ 面上点源 μ 的分布表示, 它由式 (5-23) 可以写成:

$$\mu = \text{div}(w_x, w_y) = \frac{\partial w_x}{\partial X} + \frac{\partial w_y}{\partial Y} = -\frac{1}{b\rho} \left[\frac{\partial(b\rho)}{\partial X} w_x + \frac{\partial(b\rho)}{\partial Y} w_y \right] \quad (5-33)$$

流场由于存在着涡与点源的分布, 它们对叶面所引起的速度将使叶片环量发生变化。如果取叶栅前后缘和节距为 t 的两条流线所围成的闭回路 (如图 5-4 中的虚线) 考虑的话, 这时绕该闭回路的环量 Γ 表示为:

$$\Gamma = tw_{x\infty}(\text{tg}\beta_1 - \text{tg}\beta_2) = \Gamma_0 + \Delta\Gamma + \int_0^t \int_{X_1}^{X_2} (-\xi) dXdY \quad (5-34)$$

式中 Γ_0 表示不存在涡及点源分布时的叶片环量, $\Delta\Gamma$ 表示由于涡及点源分布引起的叶片环量变化值。将式 (5-32) 和式 (5-20) 代入式 (5-34) 等式右边第三项进行积分, 然后在等式两边同除以 $tw_{x\infty}$, 于是可得:

$$\text{tg}\beta_1 - \text{tg}\beta_2 = \frac{\Gamma_0}{tw_{x\infty}} + \frac{\Delta\Gamma}{tw_{x\infty}} - X \quad (5-35)$$

上式表明, 按照式 (5-27)~式 (5-29) 应用叶栅资料选定翼形时, 因流面倾斜和轴向速度变化对叶栅性能的影响, 使得相当于上式右边第二项的数值与式 (5-28) 右边不同。为此令式 (5-35) 右边和式 (5-28) 右边相等, 对叶栅形状予以修正。

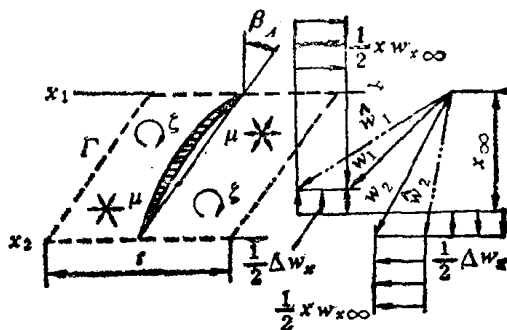


图5-4 $X-Y$ 面的涡及点源的分布

二、假想速度三角形理论

流过斜流叶轮的气体, 其理论压力的提高由式 (5-28) 可得:

$$\psi_{th} = 2\phi[(\text{tg}\beta_1 - \text{tg}\beta_2) + X] \quad (5-28a)$$

上式表明, 斜流叶轮内气体压力的上升由两部分组成, 即由流动的转向所产生的部分 $(\text{tg}\beta_1 - \text{tg}\beta_2)$ 和因离心力作用所产生的部分 X 组成。一般情况下, 等价速度三角形理论适用于流面倾斜小的轴流叶轮或负荷较大的斜流叶轮的设计。这时转向角 $(\text{tg}\beta_1 - \text{tg}\beta_2) > 0$, 故通常能够应用二元减速叶栅试验资料选定翼形。但是当流面倾斜与负荷相比, 前者较大时, 即在 $X > \psi_{th}/2\phi$ 的情况下, 这时需要采用增速叶栅资料。然而目前还十分缺乏作为风机翼形选用的合适的增速叶栅资料。为了把丰富的减速叶栅试验资料应用于上述情况下的斜流叶轮的设计, 故导入了以下的假想速度三角形的概念。

如前所述, 斜流叶轮流面倾斜的影响, 可以用式 (5-32) 所表示的分布涡加以置换。

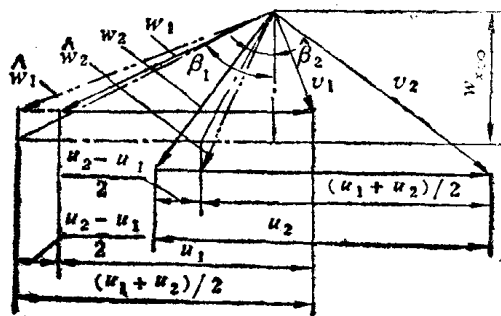


图5-5 假想速度三角形

在映象面的叶栅内由于分布涡 ζ 的存在, 假设在叶栅进出口 Y 方向分别产生 $\pm X w_{x\infty}/2$ 的引起速度, 这时实际的进出口相对速度 w_1 、 w_2 分别变成 \hat{w}_1 、 \hat{w}_2 (如图 5-5)。我们把 \hat{w}_1 、 \hat{w}_2 称之为假想相对速度 (简称假想速度)。该假想速度的考虑方法, 与前述等价速度的考虑方法是一致的。因为从相对速度 w_1 、 w_2 分别矢量减去点源分布所产生的引起速度 $\pm X w_{x\infty}/2$, 便可得到图 5-3 所示的等价速度。

为了说明假想速度的物理意义, 我们把物理面的叶轮周速 u_1 、 u_2 转换为映象面的叶轮周速 u_1 、 u_2 , 根据式 (5-23) 可以得到它们之间的关系为:

$$u_2 - u_1 = \frac{r_2}{r^*} u_2 - \frac{r_1}{r^*} u_1 = X w_{x\infty} \quad (5-36)$$

这时如图 5-5 所示, 斜流叶轮映象面上的进出口速度三角形如同轴流叶栅一样, 具有同一周速 $(u_1 + u_2)/2$ 。所以假想速度 \hat{w}_1 、 \hat{w}_2 表示斜流叶栅进出口平均半径处的周速对应的相对速度。

按照与等价速度三角形类似的办法, 保持假想速度的进出口轴向相对速度不变, 即取平均轴向相对速度时, 便可得到如图 5-5 点划线所示的假想速度三角形。如果用 $\hat{\beta}_1$ 、 $\hat{\beta}_2$ 分别表示该速度三角形的进出口气流角, 根据图 5-5 的几何关系并考虑到式 (5-36), 可以得到:

$$\operatorname{tg} \hat{\beta}_1 = \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{X}{2}, \quad \operatorname{tg} \hat{\beta}_2 = \operatorname{tg} \beta_2 - \frac{X}{2} \quad (5-37)$$

于是由式 (5-28) 则有:

$$\operatorname{tg} \hat{\beta}_1 - \operatorname{tg} \hat{\beta}_2 = \frac{\psi_{th}}{2\phi} (> 0) \quad (5-38)$$

故这时能够将减速叶栅资料应用于斜流叶轮的设计。同时由式 (5-37) 和式 (5-35) 可得:

$$\operatorname{tg} \hat{\beta}_1 - \operatorname{tg} \hat{\beta}_2 = \frac{\Gamma_0}{t w_{x\infty}} + \frac{\Delta \Gamma}{t w_{x\infty}} \quad (5-39)$$

上式表明, 按照二元叶栅资料选定翼形时, 只是上式右边第二项与式 (5-38) 右边不同。所以令式 (5-39) 右边与式 (5-38) 右边相等, 据此对叶栅形状加以修正。

对于斜流叶栅而言, 一般 $X > \Delta \Gamma / (t w_{x\infty}) > 0$, 故按照等价速度三角形理论由平面叶栅资料选定的叶栅转向角 $\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2$ 要比式 (5-28) 小, 即式 (5-35) 的右边要小于式 (5-28) 的右边值。这时为满足式 (5-28) 的转向角要求 (即满足设计点性能), 应使翼形弯度增大, 即翼形弯度的修正量为正值。而按照假想速度三角形理论选定翼形时, 转向角 $\operatorname{tg} \hat{\beta}_1 - \operatorname{tg} \hat{\beta}_2$ 的值则比式 (5-38) 要大, 因此叶形修正时应使翼形弯度减小, 即翼形弯度的修正量应为负值。之所以如此, 可以这样来加以解释: 按照实际的速度三角形由平面叶栅资料选定翼形时, 由于在相对流场内存在如式 (5-32) 所表示的涡度 ζ 的影响, 流动“滑移”的结果使得转向角变小。按照假想速度选定翼形的方法, 从式 (5-38) 明显看出, 翼形选定时没有考虑离心力作用项 X 的影响。所以按照假想速度三角形理论选定翼形时转向角增大, 增加量恰好相当于离心力作用项 X 的大小。

三、理论的扩张与一般化

以上讨论的两种速度三角形理论, 在二元无旋流场中应用它们选定翼形时, 所得叶形虽然不同, 但因为这两种方法具有同一基础方程式, 所以在分别满足式 (5-28) 和式 (5-38)

的条件下对翼形加以修正后，它们应该有着相同的叶栅形状。这一点根据势流理论，通过对如图 5-6 a 所示的斜流叶轮的计算例得到了证实，在图 5-6 b 中示出了该斜流叶轮的 计算结果。

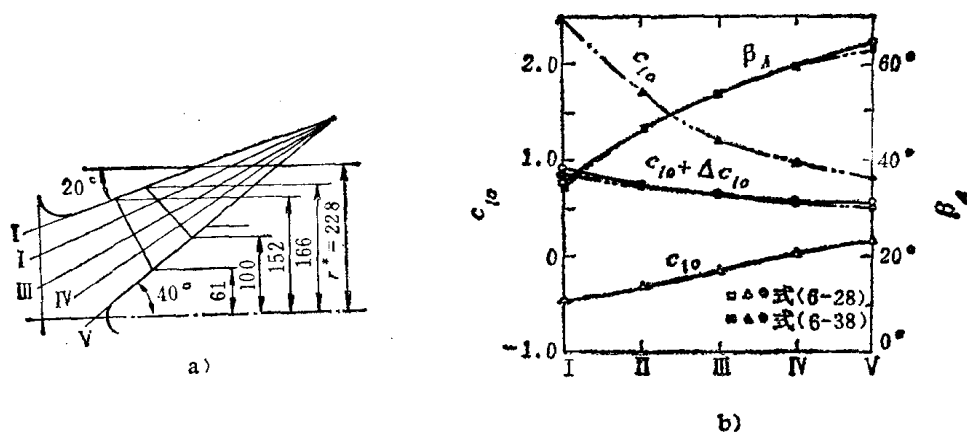


图5-6 计算用斜流叶轮与计算结果

a) 计算叶轮 b) 计算结果

该计算用斜流叶轮为NACA-65翼形。从计算结果可以看出，分别满足式(5-28)和式(5-38)条件的修正后的弯度值 $c_{l_0} + \Delta c_{l_0}$ （其中 Δc_{l_0} 表示修正量），除了在叶顶和叶根处稍有差别外，翼形弯度大小几乎相同。同时对于式(5-28)而言，修正后的弯度值比修正前的弯度 c_{l_0} 要大（即修正量 Δc_{l_0} 为正）；而对于式(5-38)而言，修正后的弯度值却比修正前的弯度 c_{l_0} 要小（即修正量 Δc_{l_0} 为负），这与以前的分析是一致的。

此外，在图 5-6 b 中还示出了分别满足式(5-28)及式(5-38)的条件下，按照无冲击流入条件求得的叶片安装角 β_A 的计算结果。从图可见，也是除了在叶顶和叶根处外，两种方法的 β_A 值几乎相同。

有关翼形弯度和安装角的修正，可根据薄翼理论和奇点法予以修正。详细请参考§5-4。

由上面计算例告诉我们，对于流面有着较大倾斜的斜流叶栅，两种方法的翼形修正量虽然均较大，但修正后却有着几乎相同的叶栅形状。这说明上述两种设计方法的差异，与初值的不同有关。所以对两种方法给予适当的线性组合，便可以将两种速度三角形理论统一，并扩张成适合于任意初值的一般设计方法。为此，我们对假想速度的进口角 $\hat{\beta}_1$ ，出口角 $\hat{\beta}_2$ 定义如下：

$$\operatorname{tg} \hat{\beta}_1 = \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{a}{2} \chi, \quad \operatorname{tg} \hat{\beta}_2 = \operatorname{tg} \beta_2 - \frac{a}{2} \chi \quad (5-40)$$

式中 a 为任意常数。

故由式(5-28)、式(5-35)、式(5-38)、式(5-39)可得：

$$\operatorname{tg} \hat{\beta}_1 - \operatorname{tg} \hat{\beta}_2 = \frac{\psi_{th}}{2\phi} - (1-a)\chi \quad (5-41)$$

$$\operatorname{tg} \hat{\beta}_1 - \operatorname{tg} \hat{\beta}_2 = \frac{\Gamma_0}{tw_{x_\infty}} + \frac{\Delta\Gamma}{tw_{x_\infty}} - (1-a)\chi \quad (5-42)$$

于是首先由满足式(5-40)的 $\hat{\beta}_1$ 、 $\hat{\beta}_2$ 及 σ 值从叶栅资料选定翼形，然后根据式(5-42)

的计算值与式(5-41)右边相等的条件,对叶栅形状予以修正。

从以上式子可以看出,当 $a = 0$ 时,即为等价速度三角形理论,当 $a = 1$ 时,就成为假想速度三角形理论。这样,通过常数 a 就把上述两种速度三角形理论统一起来,并扩张成为了适用于任意流面倾斜及负荷变化的斜流叶轮设计方法。一般在叶栅资料存在的范围内,取 $0 \leq a \leq 1$ 。

如果当 a 值取以下值的话:

$$a = 1 - \Delta\Gamma / (tw_{x\infty}X) \quad (5-43)$$

把它代入式(5-42),则可得到 $\text{tg}\hat{\beta}_1 - \text{tg}\hat{\beta}_2 = \Gamma_0 / (tw_{x\infty})$,这时叶栅形状并不需要进行修正。

如果选取 a 值为:

$$a = 1 - \psi_{t_2} / (\phi X) \quad (5-44)$$

把它代入式(5-41),则可得 $\text{tg}\hat{\beta}_1 - \text{tg}\hat{\beta}_2 = 0$,说明只需应用转向角为零的叶栅资料。

应该指出,按照上述理论进行斜流叶轮设计时,如果 aX 值愈小,设计精度愈高。因为从式(5-40)可知,随着 aX 的增大,假想速度与实际速度的叶片负荷差别增大,所以造成转向角的变化量变大,结果将使得设计点的性能比所要求的偏高。文献[66]根据九台不同斜流风机的性能实验结果,在图5-7中示出了 aX 值与转向角变化量 Δf 的关系。由图可见,当 $a =$

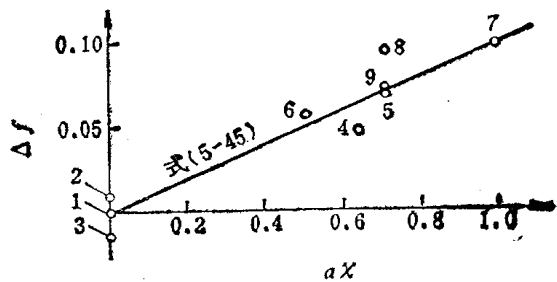


图5-7 转向角变化量与 aX 的关系

0时,转向角变化量 Δf 也几乎为零,随着 aX 的增大 Δf 也明显增大。由于这九台斜流风机其子午流面的设计及流面倾斜的不同,加上制造误差的影响,实验数据有着一定的离散现象。根据图5-7的实验结果,我们可以用以下实验式近似描述转向角变化量 Δf 随 aX 的变化关系:

$$\Delta f = 0.10aX \quad (5-45)$$

在缺乏叶栅资料而 aX 值又必须取较大值的情况时,利用式(5-45)的近似关系,可以在一定程度上正确进行斜流叶轮的设计。

§ 5-4 翼形斜流叶轮的准三元设计法

翼形斜流叶轮准三元设计过程是,首先应用诺瓦克的流线曲率法,通过求解沿准正交线的平衡条件式,求得子午面速度分布,从而确定子午面流线。然后在子午面流线绕中心轴旋转得到的回转面上,应用叶栅理论进行叶片造形设计。即先将回转面相对运动方程在任意半径处的圆柱展开面内映象,由映象面内的假想速度三角形按照平面叶栅资料选取翼形,斜流叶轮因流面倾斜和负荷变化对二元叶栅性能影响的准三元效果,用分布于叶片间的涡与点源置换后对翼形予以修正,从而完成叶片造形的设计。下面就此设计过程分别加以说明。

一、子午面流线的计算

在§5-1中已经导出了斜流叶轮沿准正交线 q 的平衡条件式(5-7)。在此基础上,下面主要按照斜流叶轮子午面设计计算时的实际步骤和数值计算方法,给予具体说明。

图5-8给出了斜流叶轮子午面流线的计算过程和程序框图。根据图中示出的顺序,逐项说明如下:

(1) 由设计要求的已知质量流量 q_m ，确定子午面几何形状，并给定各准正交线 q 上的焓 I 、熵 S 以及加功量 $v_\theta r$ 的分布。

(2) 为了应用轴对称假定，在不含叶栅的管道通流区域设置一定数量的计算站，即准正交线 q ，决定 λ 角的大小（参图5-1）。

(3) 假设适当的流线条数及子午面速度 v_m 。这时可以将各准正交线上面积等分点的连线作为最初流线，而取平均流线上的速度为最初子午面速度 v_m 。

(4) 一般用样条函数拟合求得 $r = F(z)$ 的关系，由式(5-14)求得流线 m 的斜率 ϕ 和曲率半径 r_m ，然后根据式(5-8a)、式(5-9a)、式(5-10a)计算 $A(q)$ 、 $B(q)$ 的大小。

要指出的是，式(5-10a)中的马赫数 $M_\theta = v_\theta/a$ ， $M_m = v_m/a$ ，这时声速 a 为计算点的声速。它可表示为：

$$a = a_0 \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{v_\theta^2 + v_m^2}{a_0^2} \right) \right]^{1/2} \quad (5-46)$$

式中 $a_0 = \sqrt{\kappa RT_0}$ 表示滞止点声速。

对于压缩机、鼓风机（压缩性流体），应该按照式(5-8a)~式(5-10a)计算 $A(q)$ 、 $B(q)$ 值。而对于风机、水泵（不可压缩性流体）来说， $A(q)$ 、 $B(q)$ 可简化为用下式计算：

$$A(q) = 2 \left(\frac{\cos \varepsilon}{r_m} - \frac{\sin \varepsilon}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} \right) \quad (5-8b)$$

$$B(q) = 2 \left[\frac{\partial (p_t)}{\partial q} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial q} \right] \quad (5-9b)$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial m} = - \left(\frac{\sin \phi}{r} + \frac{1}{\cos \varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial q} + \frac{\tan \varepsilon}{r_m} \right) \sin \varepsilon \quad (5-10b)$$

式中 p_t 表示全压，它与理论全压 p_{th} 的关系为：

$$p_t = p_{th} - \frac{1}{2} \rho w_1^2 \zeta_p \quad (5-47)$$

这里 w_1 表示叶轮进口相对速度， ζ_p 表示全压损失系数。

(5) 由式(5-11)求解沿准正交线上的 v_m 值时，积分常数 C 取积分下限点 v_m 所对应

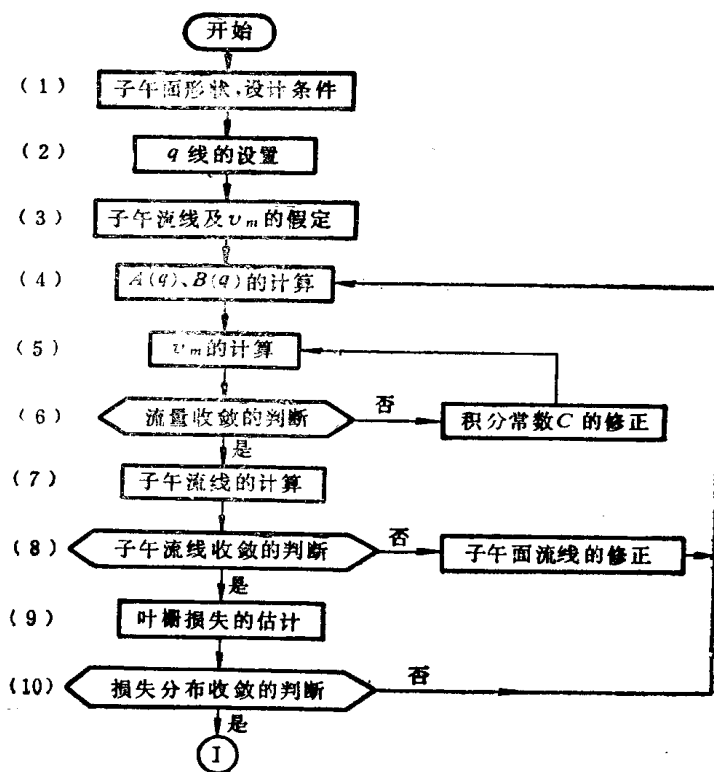


图5-8 子午面的计算过程与框图

的值。实际计算时，式（5-11）中沿准正交线上的积分均按样条函数求积法则计算。

（6）将求得的 v_m 值按照连续条件式（5-12）计算质量流量 q'_m 。当与设计条件给定的 q_m 不一致时，修正积分常数 C ，返回到（5）直至 $q'_m = q_m$ 为止。

应该指出，对于压缩机、鼓风机而言，连续条件式（5-12）中的密度 ρ ，应取各计算点的密度，即

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{v_0^2 + v_m^2}{a_0^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (5-48)$$

式中 ρ_0 表示滞止点的密度。

（7）因为子午面流线亦是等流量面，由求得的 v_m 分布，用样条拟合反向插值求得等流量面和准正交线的交点，决定新的子午面流线。

（8）将（7）所求得的新流线与前一次计算中的流线比较，其最大的位置差若大于规定的精度值，则按两者差值的0.1倍左右修正原流线作为新的流线，再回到（4）重新迭代计算。

（9）采用利布莱因（Lieblein）根据边界层理论，由式（2-42）～式（2-45）求得的全压损失系数 ξ_p ，估计叶形损失：

$$\xi_p = \frac{0.008}{1 - 1.17 \ln(D_{e,q})} \frac{\sigma}{\cos \beta_2} \left(\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2} \frac{r_1 b_1}{r_2 b_2} \right)^2 \quad (5-49)$$

式中，作为负荷界限的当量扩散系数 $D_{e,q}$ 为：

$$D_{e,q} = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \frac{w_{m1}}{w_{m2}} \left\{ 1.12 + 0.61 \frac{\cos^2 \beta_1}{\sigma} \left[\operatorname{tg} \beta_1 - \frac{r_2}{r_1} \frac{w_{m2}}{w_{m1}} \operatorname{tg} \beta_2 - \frac{r_1 \omega}{w_{m1}} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) \right] \right\} \quad (5-50)$$

要指出的是，式（5-49）、式（5-50）中的弦节比 σ 及叶片安装角 β_A ，应为映象面的值。即 σ 采用式（5-29），其中 β_A 第一次计算时按下式近似：

$$\operatorname{tg} \beta_A = (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) / 2 \quad (5-51)$$

（10）根据以下式（5-52）进行损失分布的收敛性判断：

$$Q^* = \left[1 - \frac{\Delta p}{\rho_{01}} \left(\frac{T_0}{T_{01}} \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \right]^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \quad (5-52)$$

式中 $\Delta p = \rho w^2 \xi_p / 2$ 表示全压损失的大小。角标0和1分别表示滞止点和叶轮进口参数。

第一次计算时，假使各计算截面 Q^* 都一样，即取 $Q^* = 1$ 进行计算。

至此，子午面流线计算完毕，将计算结果输入回反面。

二、映象面的翼形选定与翼形修正法

在图5-9中示出了回反面的计算过程和框图。以下仍然按照图示的顺序逐项进行说明：

（1）利用映象函数式（5-20），将回反面运动方程式（5-19）转换到映象面上，得到该面上的运动方程式（5-21）。

（2）这里按照假想速度三角形选定翼形。为此，先由式（5-24）、式（5-25）求得 ψ_{th} 、 ϕ ，然后再由式（5-23）、式（5-40）、式（5-41）便可决定 $X-Y$ 面上假想速度三角形。

(3) 由式(5-51)和假设的叶片数 N , 便能够从式(5-29)确定 $X-Y$ 面上斜流叶栅的弦节比 σ , 根据式(5-40)、式(5-41)求得的假想速度三角形的进口气流角 $\hat{\beta}_1$, 出口气流角 $\hat{\beta}_2$ 及弦节比 σ , 于是可以选定 $X-Y$ 面的翼形。具体方法有如下两种:

① 当弦节比 $\sigma < 1.5$ 时

根据 $\hat{\beta}_1$, $\Delta\beta = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2$, σ 从NACA减速叶栅资料图2-19查取得到弯度 c_{10} , 设计攻角 α^* 后, 则可按下式决定安装角 β_A , 即

$$\beta_A = \hat{\beta}_1 - \alpha^*$$

② 当弦节比 $\sigma > 1.5$ 时

这时应用利布莱因根据丰富的实验资料, 在最佳的冲角条件下提出的翼形选定方法进行。其步骤如下:

(a) 首先决定NACA-65翼形的当量中心角 θ_c 。(如图5-10)

$$\theta_c = \frac{\Delta\beta - i_0 - \delta_0}{1 + n - m} \quad (5-53)$$

式中 i_0 , δ_0 分别表示当量中心角 $\theta_c = 0$ 时的气流的冲角和落后角。它们表示为:

$$i_0 = (k_i)_{sh}(k_i)_t(i_0)_{10}, \quad \delta_0 = (k_\delta)_{sh}(k_\delta)_t(\delta_0)_{10}$$

这里 $(k_i)_t$, $(k_\delta)_t$ 表示不同相对厚度时的修正系数。对于相对厚度10%的翼来说, 它们都等于1.0。 $(i_0)_{10}$, $(\delta_0)_{10}$ 表示相对厚度10%翼形的 i_0 , δ_0 值。 $(k_i)_{sh}$, $(k_\delta)_{sh}$ 表示不同翼形时的修正系数。对于NACA-65翼形而言, 它们都等于1.0; 对于NGTE.C系列翼形, 它们等于0.7; 对于双圆弧翼形, 它们等于0.7。系数 $(k_i)_t$, $(k_\delta)_t$, $(i_0)_{10}$, $(\delta_0)_{10}$, 以及 $(1+n-m)$ 应用时, 可以从附录3-4查到。

(b) 对应弯度 c_{10} 可用下式求得:

$$c_{10} = 9.066 \text{tg}(\theta_c / 4) \quad (5-54)$$

(c) 攻角 α^* 和安装角 β_A 由下式确定:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^* &= i + \frac{\theta_c}{2} = i_0 + n\theta_c + \frac{\theta_c}{2} \\ \beta_A &= \hat{\beta}_1 - \alpha^* \end{aligned} \right\} \quad (5-55)$$

上式中的系数 n 以及式(5-53)中的系数 m 为实验常数, 亦可从附录3-4中查到。

(4) 流面倾斜及负荷变化对翼形的修正

由式(5-21)可知, 运动方程(5-21)的解可以由两部分组成。一部分为 $\nabla^2\psi = 0$ 的拉

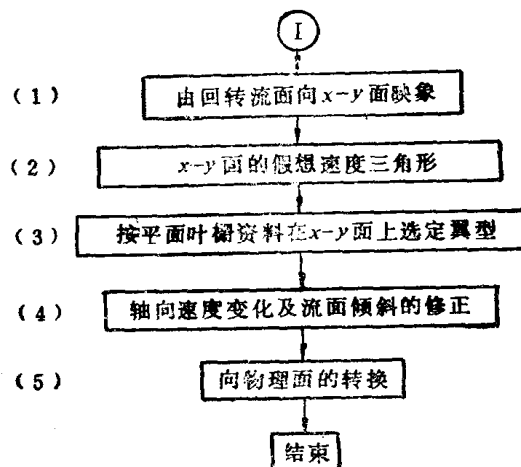


图5-9 回转面的计算过程与框图

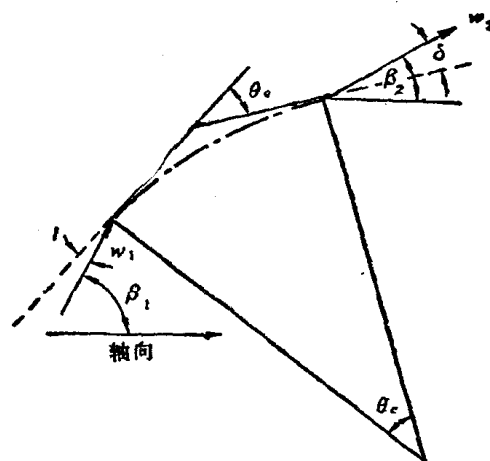


图5-10 当量中心角 θ_c 。

普拉斯方程的一般解,另一部分为 $\Delta^2\psi \equiv 0$ 的特解 ψ' 。前者已在上面由平面叶栅资料或利布莱因方法求出,后者表示斜流倾斜和负荷变化(即轴向速度变化)影响的部分,用分布于叶片间的涡与点源置换后,使得叶栅性能发生变化,为保持叶栅性能不变,通过对翼形进行修正予以补偿。

① 理论修正方法

当斜流叶轮流面倾斜及负荷变化用分布于流场的涡与点源置换后,为了修正它们对二元叶栅性能的影响,这里按照薄翼理论,应用斯利希廷根的奇点解析方法进行修正。

为了求解无旋流场中的薄翼流动,斯利希廷根将分布在翼弦上的涡与点源用格劳尔特级数来表示。分布于流场的涡与点源的引起速度对流动的影响,根据薄翼流动条件,用满足格劳尔特级数所决定的翼形加以修正。

流场中因式(5-32)表示的分布涡 $\zeta = \text{rot}(w_x, w_y)$ 存在时,它所引起的速度由文献[66]可得:

$$v_{\zeta x} = 0, \quad v_{\zeta y} = u^* \left[\left(\frac{r}{r^*} \right)^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r^*} \right] \quad (5-56)$$

流场中因式(5-33)表示的点源 $\mu = \text{div}(w_x, w_y)$ 所引起的速度,根据文献[66]可得:

$$v_{\mu x} = \frac{1}{K_b} \left[\frac{b_1 \rho_1}{b \rho} \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) - 1 \right], \quad v_{\mu y} = 0 \quad (5-57)$$

式中 $K_b = (t - d)/t$ 表示考虑叶片周向厚度及边界层影响的流面阻塞系数,这里 d 为叶片在 Y 方向的厚度。 ξ 表示轴向速度变化率,它定义为:

$$\xi = \frac{w_{x2} - w_{x1}}{w_{x\infty}} = \frac{1}{\phi} \frac{r_2 w_{m2} - r_1 w_{m1}}{r^* u^*} \quad (5-58)$$

对于薄翼流动,当用格劳尔特级数表示分布于翼弦上的几个点涡和点源时,对式(1-84)、式(1-85)变形,可以得到如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_b &= A_0 \text{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n A_i \text{sinn} \theta \\ q_b &= B_0 \text{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n B_i \text{sinn} \theta \end{aligned} \right\} \quad (5-59)$$

根据薄翼叶栅流动条件式(1-218),可以得到涡及点源分布存在的流场与满足格劳尔特级数所决定的翼形适合条件为:

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{w_{\infty y} + w_{by} + v_y}{w_{\infty x} + w_{bx} + v_x}, \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{q_b}{w_{\infty x} + w_{bx} + v_x} \quad (5-60)$$

式中 x, y 分别表示翼弦方向和垂直于翼弦方向的坐标, y_0, y_i 分别表示翼的弯度和厚度。 w_b 表示按照式(5-59)的分布涡与点源所引起的速度。 v_x, v_y 为分布于流场的涡及点源同时存在时所引起的速度大小:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= (v_{\zeta x} + v_{\mu x}) \cos \beta_A + (v_{\zeta y} + v_{\mu y}) \sin \beta_A \\ v_y &= -(v_{\zeta x} + v_{\mu x}) \sin \beta_A + (v_{\zeta y} + v_{\mu y}) \cos \beta_A \end{aligned} \right\} \quad (5-61)$$

联立式(5-59)和式(5-60),可以求得满足流动条件式(5-60)的分布于翼弦上与涡对应的格劳尔特系数值 $A_{00}, A_{01}, A_{a0}, A_{a1}$ 。这时绕翼的环量 Γ_b 由薄翼理论及式(5-59)可

以写成:

$$\Gamma_0 = \int_0^{2\pi} \gamma_i d\theta + \frac{\pi}{2} l w_\infty \cos \alpha_\infty \left[\left(A_{00} + \frac{A_{01}}{2} \right) + \left(A_{\alpha 0} + \frac{A_{\alpha 1}}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha_\infty \right] \quad (5-62)$$

该环量如果与图 5-5 中沿虚线部分的环量一致, 则从式 (5-34)、式 (5-35) 可得:

$$\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\pi \sigma \cos \alpha_\infty}{2 \cos \beta_\infty} \left[\left(A_{00} + \frac{A_{01}}{2} \right) + \left(A_{\alpha 0} + \frac{A_{\alpha 1}}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha_\infty \right] - \chi \quad (5-63)$$

将式 (5-40) 并考虑 $\alpha_\infty = \beta_\infty - \beta_A$, $\operatorname{tg} \beta_\infty = (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) / 2$ 的关系代入上式, 最后可得:

$$F = \operatorname{tg} \hat{\beta}_1 - \operatorname{tg} \hat{\beta}_2 = \frac{\pi}{2} \sigma (S + T \operatorname{tg} \beta_\infty) - (1 - a) \chi \quad (5-64)$$

式中 F 表示循环参变量, S 、 T 用下式表示:

$$\left. \begin{aligned} S &= (A_{00} + A_{01} / 2) \cos \beta_A - (A_{\alpha 0} + A_{\alpha 1} / 2) \sin \beta_A \\ T &= (A_{00} + A_{01} / 2) \sin \beta_A + (A_{\alpha 0} + A_{\alpha 1} / 2) \cos \beta_A \end{aligned} \right\} \quad (5-65)$$

式(5-64)即为考虑流面倾斜及负荷变化影响时的数值计算修正式。下面根据式(5-64), 写出翼形弯度的修正步骤为:

(a) 在映象面流场内, 当不考虑流面倾斜及负荷变化的影响时, 即认为:

$$v_{\xi x} + v_{\mu x} = 0, \quad v_{\xi y} + v_{\mu y} = 0, \quad \chi = 0$$

这时由式 (5-64) 求得的值为 F_0 。

(b) 当考虑流面倾斜及负荷变化的影响, 由求得的 v_x , v_y , χ 及给定的 a 值, 由式 (5-64) 求得 F 值。

(c) 如果 $F_0 \neq F$ 时, 给定转向角 $\Delta\beta$ 变化的近似关系:

$$\delta_{(\Delta\beta)} = [\partial(\Delta\beta) / \partial F] (F - F_0)。$$

这时相应的弯度中心角 θ 的变化为:

$$\delta_{(\theta)} = -\delta_{(\Delta\beta)} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\operatorname{tg} \beta_\infty + F/2)^2 + 1} + \frac{1}{(\operatorname{tg} \beta_\infty - F/2)^2 + 1} \right] (F - F_0) \quad (5-66)$$

变化弯度中心角求 F 值, 反复计算直到规定的精度范围内 $F = F_0$ 为止。

② 图线的修正方法

根据文献[33]及所提供的附录 3-2、3-3, 可以按下式计算弯度的修正值和安装角的修正值:

$$\Delta c_{l_0} = \left(\frac{\partial c_{l_0}}{\partial x} \right)_{\xi=0} \chi + \left(\frac{\partial c_{l_0}}{\partial \xi} \right)_{x=0} \xi \quad (5-67)$$

$$\Delta \beta_A = \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial x} \right)_{\xi=0} \chi + \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \xi} \right)_{x=0} \xi \quad (5-68)$$

对于流面倾斜及负荷变化不大的斜流叶轮, 利用这种方法还是可以得到满意的结果。同时对于这样的斜流叶轮, 安装角的修正量很小, 故实际应用时往往只需对弯度加以修正便可。这种方法的适用范围是:

$$|\chi| < (0.2 \sim 0.3) F, \quad |\xi| < 0.2 \sim 0.3$$

(5) 最后, 利用式 (5-20) 将映象面上的叶栅形状, 转换到物理面 (m , r , θ)。

结果示于图 5-14 中。

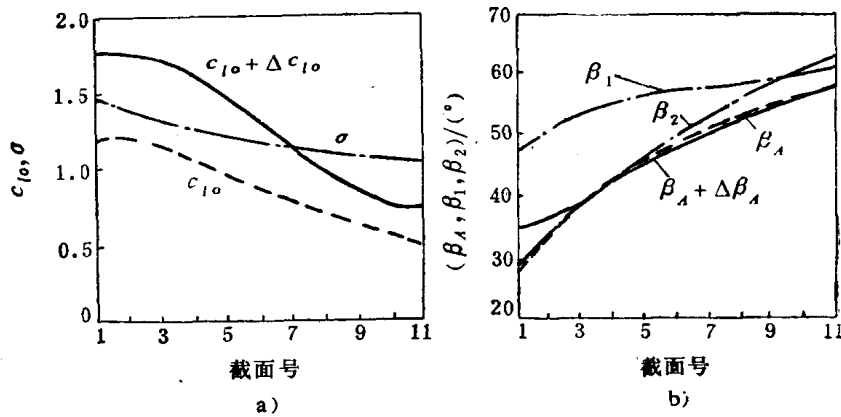


图5-14 弯度和安装角的修正

a) 弯度及弦节比 b) 截面号

将映象面求得的叶栅形状，根据映象函数式 (5-20) 的关系，向物理面转换所得到的叶轮形状如图 5-15 所示。

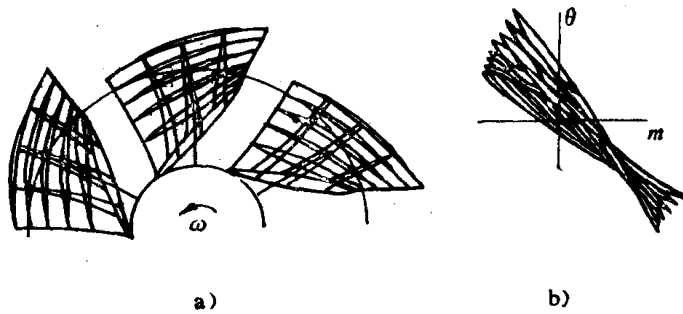


图5-15 物理面的叶轮形状

a) 正面图 b) 断面图

§ 5-5 斜流叶轮的简化设计方法

上面我们对翼形斜流叶轮的设计理论与设计方法作了介绍。设计时由于要进行两类相对流面的迭代计算，所以必须要借助相当容量的计算机才能完成。

对于低压情况下使用的斜流式风机，如果叶顶和叶根绕转轴的回转面为圆锥面，这样设计时可以不考虑流线曲率的影响，从而简化了设计计算，或有时要求降低成本和使工艺过程简单，采用等厚度的板材圆弧叶片进行设计。为了适应这种场合的需要，这里分别就此作如下的讨论和某些说明。

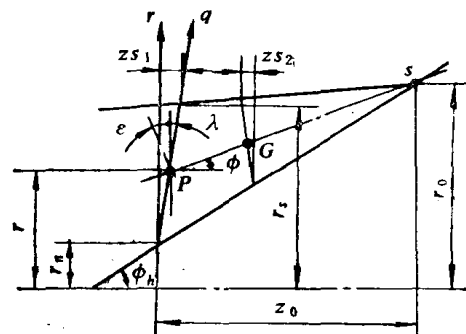


图5-16 子午面流线的近似

一、忽略曲率影响的斜流叶轮设计法

1. 沿准正交线平衡条件的简化

对于叶顶和叶根绕轴的回转面为锥面的斜流叶轮, 如果假设叶片区子午面流线都在一束共底的圆锥面上, 而锥底是叶顶和叶根回转面的交线, 即是以半径为 r_0 的圆 (如图 5-16)。

对于自由涡流型, 且当全压沿 q 方向的分布为常数时, 则有:

$$\partial(v_\theta r)/\partial q = 0, \quad \partial(p_t/\rho)/\partial q = 0$$

又因为叶轮顶部和根部为圆锥面, 故可认为曲率半径 $r_m = \infty$, 将这些关系代入式(5-8b)和(5-9b), 并考虑式(5-10b)的关系, 则可得到:

$$A(q) = 2 \left(\frac{\sin \phi \sin \varepsilon}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \operatorname{tg} \varepsilon \right), \quad B(q) = 0 \quad (5-69)$$

这时沿准正交线 q 的平衡条件式(5-7)简化为:

$$\frac{\partial v_m^2}{\partial q} + A(q)v_m^2 = 0 \quad (5-70)$$

由式(5-70)解得子午面速度 v_m 的平方为:

$$v_m^2 = k \exp(-2I) \quad (5-71)$$

式中:

$$I = \int_{q_h}^q \left(\frac{\sin \phi \sin \varepsilon}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) dq \quad (5-72)$$

如图 5-16 所示, 子午面顶部和根部流线交于 s 点, 其它任一流线是过 s 点的射线, 它与叶片前后缘分别交于 P 、 G 点, 与轴线的夹角为 ϕ 。如果设 $\operatorname{tg} \phi = x$, 由图示几何关系及三角关系, 则有:

$$r = \frac{r_0 - bx}{1 - ax}, \quad dr = \frac{b(ax - 1) + a(r_0 - bx)}{(1 - ax)^2} dx$$

$$\sin^2 \phi = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial q} = \frac{\cos \lambda (1 - ax)^2}{a(r_0 - bx) - b(1 - ax)} \frac{1}{1 + x^2}$$

这里: $a = zs/(r_s - r_h)$, $b = z_0 + ar_h$ 。

把以上式子代入式(5-72)并利用三角函数关系, 加以整理进行积分可得:

$$I = \int_{x_h}^x \left\{ \left[\frac{x^2}{1 + x^2} \cos \lambda - \frac{x}{1 + x^2} \sin \lambda \right] \frac{(ax - 1)b + a(r_0 - bx)}{(r_0 - bx)(1 - ax) \cos \lambda} + \frac{x - \operatorname{tg} \lambda}{(1 + x \operatorname{tg} \lambda)(1 + x^2)} \right\} dx$$

$$= \ln \left[\frac{(1 + x^2)^D (1 - ax)^E (r_0 - bx)^F}{1 + x \operatorname{tg} \lambda} \right] + G\phi - H \quad (5-73)$$

式中:

$$D = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2 + a \operatorname{tg} \lambda}{1 + a^2} + \frac{b^2 + br_0 \operatorname{tg} \lambda}{b^2 + r_0^2} \right)$$

$$E = \frac{a \operatorname{tg} \lambda - 1}{1 + a^2}, \quad F = \frac{r_0(r_0 - b \operatorname{tg} \lambda)}{b^2 + r_0^2}$$

$$G = \frac{a^2 \operatorname{tg} \lambda - a}{1 + a^2} + \frac{r_0 b + r_0^2 \operatorname{tg} \lambda}{b^2 + r_0^2}$$

$$H = \ln \left[\frac{(1+x_1^2)^D (1-ax_1)^E (r_0-bx_1)^F}{1+x_1 \operatorname{tg} \lambda} \right] + G\phi_A$$

这里, $x_A = \operatorname{tg} \phi_b$, $\lambda = \phi - \varepsilon$ 。

把式 (5-73) 代入式 (5-71), 最后可得:

$$v_m^2 = k \left[\frac{(1+x^2)^D (1-ax)^E (r_0-bx)^F}{1+x \operatorname{tg} \lambda} \right]^{-2} \exp(2H - 2G\phi) \quad (5-74)$$

式中积分常数 k 必须满足连续条件:

$$Q = 2\pi \int r v_m \cos \phi dr \quad (5-75)$$

叶片前后的周向分速度分别为:

$$v_{\theta 1} = 0, \quad v_{\theta 2} = \frac{P_t}{\rho u_2 \eta} \quad (5-76)$$

当子午面形状及 r_A , ϕ_A 等给定时, 由式 (5-74) 可以求得沿准正交线上任意点的子午面速度 v_m 的分布, 由此亦可求得轴向速度 v_x 的分布。

2. 映象面上的翼形选定

这里按照等价速度三角形进行翼形选定, 其步骤如下:

(1) 给定叶片数 N , 假设安装角 β_A , 按照式 (5-29) 或下式计算弦节比 σ :

$$\sigma = \frac{N}{2\pi \cos \beta_A \operatorname{tg} \phi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (5-77)$$

式中 r_1 、 r_2 分别表示叶片进出口半径。

(2) 确定映象面上的进出口速度三角形:

$$\left. \begin{aligned} w_{x1} = \frac{r_1}{r^*} w_{z1} = \frac{r_1}{r^*} v_{z1}, \quad w_{x2} = \frac{r_2}{r^*} v_{z2} \\ w_{y1} = \frac{r_1}{r^*} u_1, \quad w_{y2} = \frac{r_2}{r^*} (u_2 - v_{\theta 2}) \end{aligned} \right\} \quad (5-78)$$

(3) 由式 (5-27)、式 (5-28) 计算 β_1 , $\Delta\beta$

(4) 由转向角 $\Delta\beta$, 进口角 β_1 及弦节比 σ , 从图 2-19 查得弯度 c_b 和攻角 α 。

(5) 计算安装角 $\beta_A = \beta_1 - \alpha$, 并将它与假设值比较。如果两者不符, 则重复以上计算直至两者相等为止。

3. 流面倾斜及轴向速度变化的影响, 应用附录 3-2、3-3 和式 (5-67), 采用图线的方法对 c_b 进行修正。

4. 映象面上的翼形向物理面转换

将映象面上的翼形坐标 (X, Y) , 根据映象函数:

$$dX/dz = r^*/r, \quad dY/d\theta = -r^*$$

以及几何关系 $r = z \operatorname{tg} \phi$, 转换为物理面上的坐标 (r, θ) , 则有:

$$r = r_1 - \exp \left(\frac{X - X_1}{r^*} \operatorname{tg} \phi \right), \quad \theta = \theta_1 - \frac{Y - Y_1}{r^*} \quad (5-79)$$

利用以下关系, 再把物理面 (圆锥面) 的坐标 (r, θ) 转换到如图 5-17 所示的 (m, θ) 坐标

$$m = r / \sin \theta, \quad \Theta = \theta \sin \phi$$

二、圆弧形斜流叶轮的设计与性能

1. 圆弧形斜流叶轮的设计特点

斜流叶轮设计时, 如果用厚度一样的圆弧形叶片, 通过板金加工扭曲成形的话, 在满足所需性能条件下, 用圆弧形叶片代替翼形叶片, 以降低成本, 简化设计与工艺, 常为工厂乐意接受和具有一定的现实意义。

圆弧形斜流叶轮准三元设计时, 其设计过程大致与翼形斜流叶轮相同, 只是在设计方法上有些简化, 这里仅把有关的不同点予以简单的说明如下。

(1) 子午面设计计算时, 对于低压下使用或要求不高的斜流叶轮, 可以按照上述简化设计方法确定子午面流线。否则仍然采用 § 5-4 所述的方法进行设计计算。但当量扩散系数可以应用下式计算:

$$D_{\epsilon q} = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \left[1.12 + 0.61 \frac{\cos^2 \beta_1}{\sigma} (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \right] \quad (5-80)$$

(2) 映象面上的叶形选定, 根据假想速度三角形理论, 由附录 3-1 所提供的圆弧叶栅资料查取弯度中心角 θ_c 和攻角 α_D (如图 5-18)

叶片安装角 β_A 由下式确定:

$$\beta_A = \hat{\beta}_1 - \alpha_D$$

该圆弧叶形的弯度中心角, 如用相当于 NACA-65 翼形的弯度 c_{i0} 表示时, 则有

$$c_{i0} = 9.066 \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_c}{4} \right) \quad (5-81)$$

(3) 流面倾斜及轴向速度变化的影响, 一般情况下, 仍然采用斯利希廷根奇点法予以修正。由于是等厚度叶形, 因此在式 (5-60) 中可以不考虑沿厚度 y_t 方向的流动条件, 使得计算变得简单。此外, 对于低压下的圆弧形斜流叶轮的计算表明, 直接从圆弧叶栅资料查得的 θ_c 值用式 (5-81) 计算后的弯度 c_{i0} 以及安装角 β_A , 与同参数的翼形斜流叶轮按照斯利希廷根奇点法, 理论计算所得的结果都相当近似。这表明对于低压下的圆弧斜流叶轮, 当要求不高时, 设计时可以不考虑对叶形的修正计算。

2. 圆弧形斜流叶轮不同设计法的比较

下面根据设计参数相同而按照三种不同设计方法所得出的圆弧形斜流叶轮的计算结果, 进行比较并加以说明。

在表 5-2 中列出了这三种圆弧形斜流叶轮的主要几何参数和设计方法。同时在表中还示出了相同设计参数下的翼形斜流叶轮 A, 以便进行比较。

三种叶轮的叶片厚度均为 3mm 的等厚度圆弧形。子午面的设计都按照前述的简化设计方法计算, 不同的只是在回转面上的设计与计算。其中叶轮 A-2 系按照假想速度三角形

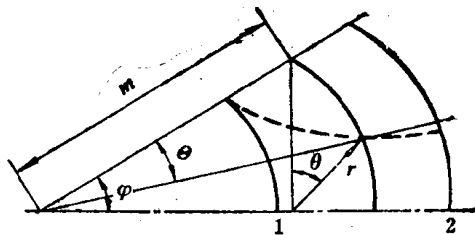


图5-17 圆锥面上的坐标转换

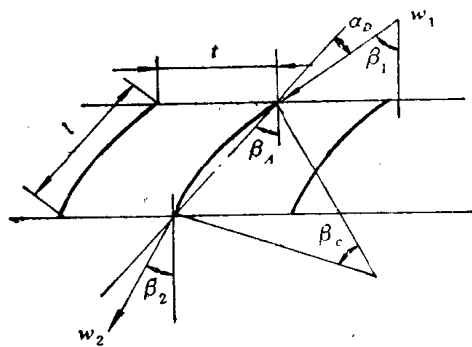


图5-18 圆弧叶栅

表5-2 圆弧形斜流叶轮的比较

叶 轮	叶 形	弦 节 比	展 弦 比	设计 方法	
				二元叶栅资料	速度三角形
A	NACA—65	0.84	1.15	NACA—65翼形图线	假想速度三角形($\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$)
A-2	圆弧叶形	0.84	1.15	圆弧叶形图线	假想速度三角形($\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$)
A-3	圆弧叶形	0.89	1.08	斯利希廷根奇点法	假想速度三角形($\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$)
A-4	圆弧叶形	0.91	1.06	斯利希廷根奇点法	实际速度三角形(β_1, β_2)

($\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$); 由圆弧叶栅资料进行了叶形的选定。叶轮 A-3 的叶形选定, 根据假想速度三角形的 ($\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$), 由最佳流入条件, 用斯利希廷根奇点法理论计算加以确定。叶轮 A-4 则是采用实际速度三角形 (β_1, β_2), 用斯利希廷根奇点法进行计算选定了叶形。它们的计算结果如图 5-19 所示。

由图可见, 由于上述叶轮的弦节比和展弦比差不多, 子午面的形状也接近, 所以图中的 $\sigma, \chi, \xi, d/l$ (相对厚度) 等的分布, 每个叶轮都相同。比较图 a 和 b 看出, 由于两者都采用了假想速度三角形, 故 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ 的分布一致, 但叶轮 A-2 的安装角比叶轮 A-3 的安装角 β_A 稍小, 而弯度中心角 θ 。前者比后者又略大。这说明按照圆弧叶栅资料选定叶形的叶轮 A-2, 其气流在后缘处的偏差角比按照势流理论进行叶形计算的叶轮 A-3 的偏差角要大。由于两者的设计值差别不大, 故对流面倾斜和轴向速度变化的影响加以修正后, 所得叶形的 ($\theta + \Delta\theta$) 分布几乎一样。比较图 b 和 c 看出, 由于叶轮 A-4 采用了实际速度三角形进行设计, 故在其叶根处 $\beta_1 < \beta_2$ 变成了增速叶栅, 结果使得相应的弯度中心角 θ 成为负值。从图还可知道, 两者的安装角相近, 它们通过修正后的圆弧叶形的弯度分布, 除叶根处差别较大外, 其余地方几乎一致。

以上设计结果表明, 如果把叶轮 A-4 设计时采用的实际速度三角形改为假想速度三角形进行计算, 三种圆弧形斜流叶轮的设计结果几乎一致, 都可得到同一形状的圆弧形斜流叶轮。在图 5-20 中示出了上述三种叶轮的截面形状。

3. 圆弧形斜流风机的性能

为了考察上述三种圆弧形斜流叶轮的性能, 在转速 $n = 3200 \text{ r/min}$ 条件下, 对由它们构成的斜流风机进行了性能试验, 实验结果如图 5-21 所示。

由图可知, 叶轮 A-2 和 A-3 的性能, 在有效工作区域几乎完全一样。说明按照叶栅资料与势流理论设计的叶轮具有同一特性。同时也说明, 对于低压斜流风机而言, 由于负荷低, 叶面边界层的影响小, 应用斯利希廷根奇点法进行设计, 亦可得到较好的设计精度。从叶轮 A-4 的实验结果来看, 风机在喘振点附近压力略有升高, 在失速点处向小流量延伸。这一点可从图 5-19 b 和 c 的比较中得到解释: 因为叶轮 A-4 叶根处的 ($\theta + \Delta\theta$) 与按照无冲击流入条件设计的叶轮 A-3 相比, 前者比后者要大些, 使得失速点向左延伸。

此外, 在图 5-22 中还示出了同样设计参数的 NACA—65 翼形斜流叶轮与 A-2 的实验比较结果。从图可见, 在有效工作区域, 除了前者的效率比后者高出 2~3% 以外, 两者的性能完全相同。所以对于低压下的斜流风机, 从降低成本的观点考虑, 采用圆弧叶形有利。

某文献按照假想速度三角形研制了一台圆弧形斜流风机, 并在不同叶轮顶端间隙条件下, 对设计点的性能进行了测量, 其结果如表 5-3 所示。由表中实验结果比较可以看出, 当

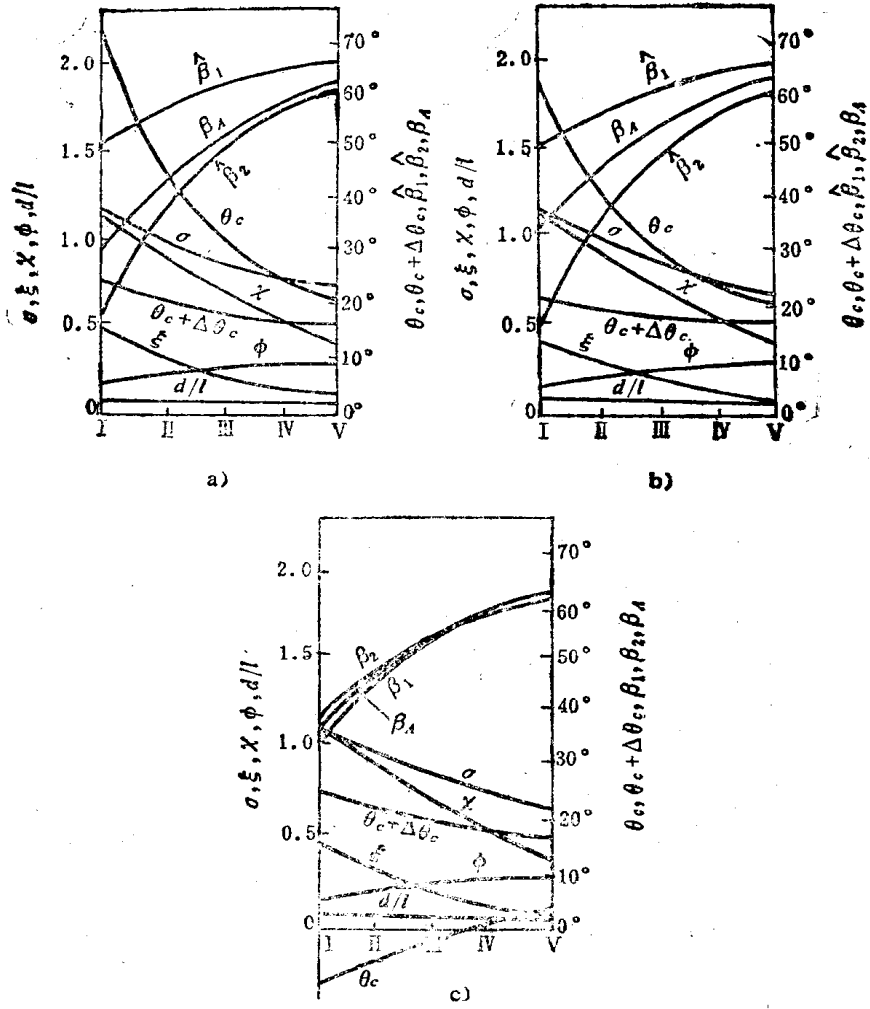


图5-19 不同叶轮的主要设计值

a) A-2 b) A-3 c) A-4

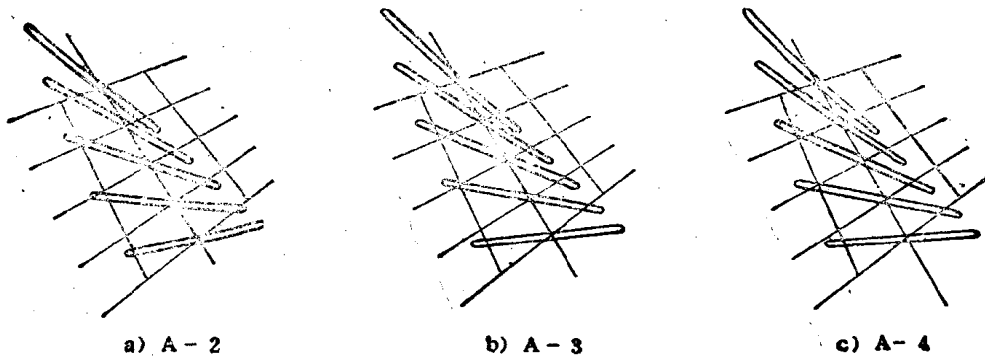


图5-20 叶轮的截面形状

a) A-2 b) A-3 c) A-4

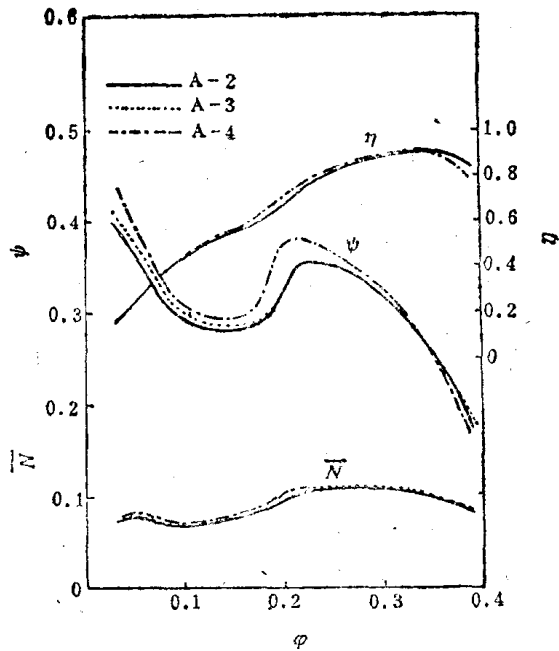


图5-21 各叶轮的性能曲线

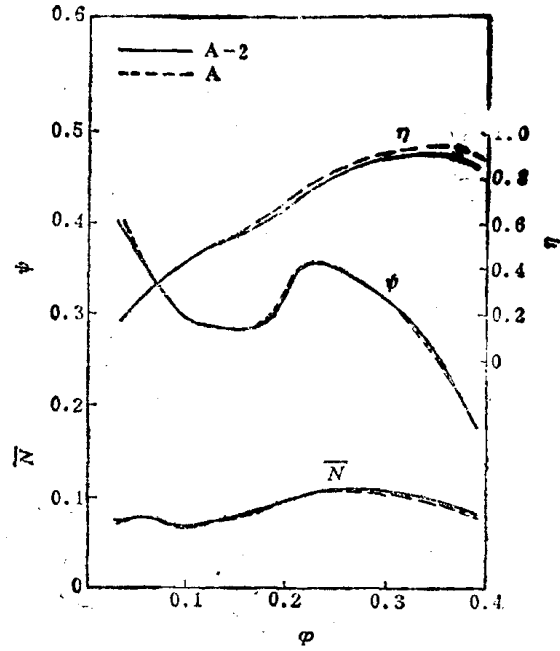


图5-22 翼形叶轮与圆弧形叶轮

表5-3 不同间隙下的设计点性能

特性 间隙	Q_0	P_0	P_{st}	η_{st}	η	L_{sA}	L_A
	m^3/min	10Pa (mmH ₂ O)	10Pa (mmH ₂ O)	%	%	dB	dB
0.5mm	118.3	185	170	78.3	85.1	18.4	83.5
1.0	120.5	181	165	76	83.1	19.3	85
1.5	120.3	176	160	73.6	80.7	20.9	86
2.0	119.9	174	158.8	72.7	79.7	22.5	87.5

顶端间隙 $\tau = 0.5mm$ 时，风机性能是最好的，其设计点的效率 $\eta = 85\%$ ，噪声比 A 声级 $L_{sA} = 18.4dB$ 。随着顶端间隙的增加，风机性能将逐渐变差。为了进一步了解该圆弧形斜流风机的噪声性能，还实验测量了风机在不同顶端间隙时的噪声能量分布。当 $\tau = 0.5mm$ 时风机设计点的 1/3 倍频程分布特性如图 5-23 所示。

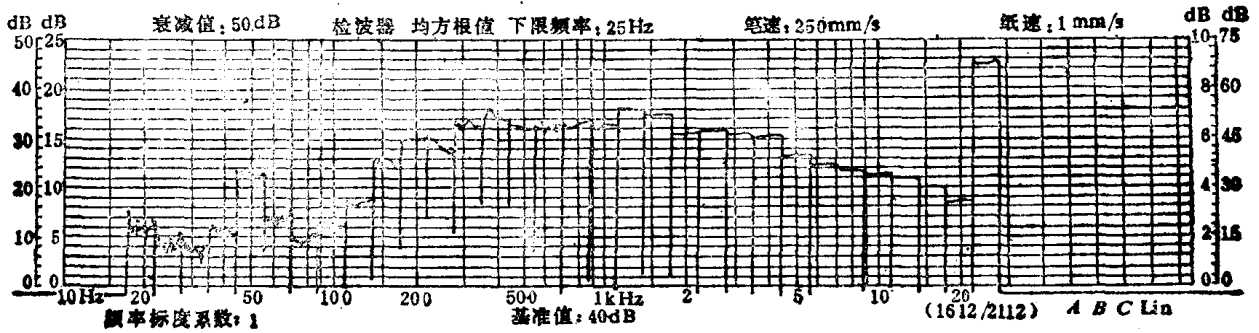


图5-23 圆弧形斜流风机频谱特性

§ 5-6 斜流叶轮的负荷界限

一、平面叶栅的负荷界限表达式

轴流压缩机或泵设计时, 为了避免马赫数或汽蚀的影响, 常常应用转向角大的高负荷减速叶栅。如何判断和预测叶轮的失速界限, 在实用上是一个非常重要的问题。

研究表明, 叶片表面边界层的积累与生长, 对叶轮的失速有很大的影响。而叶片表面边界层的生长和分离则跟众多的因素相关。例如叶面上的速度分布, 雷诺数的大小, 表面粗糙度以及流动的混乱等因素。其中叶片表面速度的分布要受到翼形(如翼的厚度及弯度), 叶栅形状(弦节比及安装角)和攻角等的影响。此外还有叶栅前后轴向速度变化和流面倾斜的影响。基于这种考虑, 可以把平面叶栅负荷界限的有关判别准则, 引伸到斜流叶轮中去, 得出适合于斜流叶轮负荷界限的判别式。

1. 利布莱因的当量扩散系数

利布莱因根据 NACA-65 翼形和 C4 翼形叶栅试验资料, 在设计攻角(最佳攻角)条件下, 将该叶栅资料应用于式(2-42), 可以得到动量厚度与叶面减速比的实验关系式:

$$\frac{\theta}{l} = \frac{\epsilon}{1 - k_s \ln(w_{\max}/w_2)} = \frac{0.004}{1 - 1.17 \ln(D_{e_g})} \quad (5-82)$$

式中, 与动量厚度有关的系数 $k_s = 1.17$, 与减速比有关的系数 $\epsilon = 0.004$, D_{e_g} 表示利布莱因当量扩散系数。它的表达式已在 § 2-2 中用式(2-45)、式(2-44)表示过。这里为了讨论方便, 将上两式改为本章编号分别写在下面:

$$D_{e_g} = \frac{w_1}{w_2} \left(\frac{w_{\max}}{w_1} \right) = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} (1.12 + 0.305 F) \quad (5-83)$$

$$F = \frac{2 \cos^2 \beta_1}{\sigma} (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \quad (5-84)$$

2. 大进口角时的负荷界限表达式

利布莱因提出的负荷界限式, 对于进口角比较小的场合适用性较好, 对于大进口角的情况则并不一定适合。基于对二元叶栅的分析研究, 提出了这样一种考虑, 即取 (θ/l) 趋向无穷大值的 90% 作为界限值的大小, 由式(5-82)可以有:

$$D_{e_g} = 0.9 \exp\left(\frac{1}{k_s}\right), \quad k_s = 2.0 - 1.4 \cos \beta_1 \quad (5-85)$$

在进口角较大的情况下, 通常按照式(5-85)判别失速点的位置。

3. 克拉普鲁斯的修正式

克拉普鲁斯(Klaproth)考虑到叶轮进出口轴向速度(w_{x1} , w_{x2})的变化, 对利布莱因式子(5-84)加以扩展为如下形式:

$$F = \frac{2 \cos^2 \beta_1}{\sigma} \left[\operatorname{tg} \beta_1 - \frac{r_2}{r_1} \frac{w_{x2}}{w_{x1}} \operatorname{tg} \beta_2 - \frac{r_1 \omega}{w_{x1}} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) \right] \quad (5-86)$$

4. 其它负荷界限式

利布莱因的负荷界限表达式, 是按照叶栅资料从叶片表面减速比与动量厚度的关系提出

的负荷界限式。其它为数众多的负荷界限式中，并不是着眼于叶面边界层分离出发，而是从考虑壁面边界层不分离为条件提出来的。这里仅列出用压力系数 c_p 和相对速度比 w_1/w_2 所表示的负荷界限式：

$$c_p = 1 - w_2^2/w_1^2 < 0.6 \quad (5-87)$$

$$w_1/w_2 < 1.6 \quad (5-88)$$

二、斜流叶轮用负荷界限式

前已指出，利用映象函数式 (5-20)，将斜流叶轮的任意平均流面 (m, r, θ) 上的流动，在映象面内展开后，根据式 (5-23) 可以得到如图 5-24 所示的等价速度三角形。

在映象面 $X-Y$ 面上，对应于式 (5-86) 的循环参变量 F 可以写成：

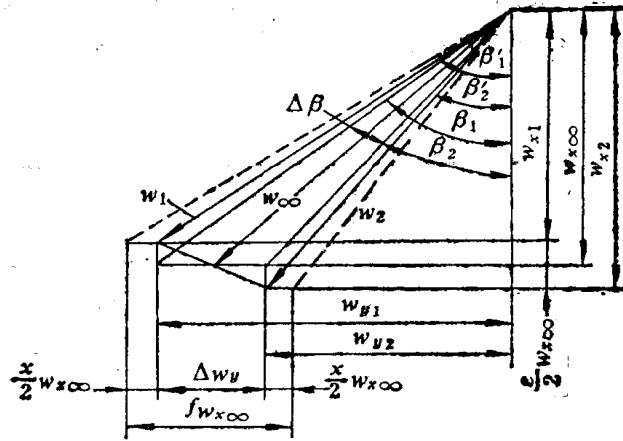


图5-24 进出口速度和等价速度

$$F = \frac{(1 - \xi/2)}{(1 - \xi/2)^2 \cos^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_1} \frac{2 \cos^2 \beta_1}{\sigma} f \quad (5-89)$$

式中

$$f = \operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2 + X \quad (5-90)$$

这里叶轮进出口气流角 β'_1 、 β'_2 和等价速度的关系为：

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_1 &= \operatorname{tg} \beta'_1 (1 - \xi/2) \\ \operatorname{tg} \beta_2 &= \operatorname{tg} \beta'_2 (1 + \xi/2) \end{aligned} \right\} \quad (5-91)$$

于是由式 (5-25)、式 (5-26) 可把流量系数 ϕ 和压力系数 ψ_{t_k} 表示为：

$$\phi = \frac{w_{x\infty}}{u^*} = \frac{w_{x1} + w_{x2}}{2u^*}, \quad \psi_{t_k} = 2\phi f \quad (5-92)$$

对于斜流叶轮而言，考虑轴向速度 w_{x1} 、 w_{x2} 的变化有：

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_{x1}}{w_{x2}} \frac{\cos \beta'_2}{\cos \beta'_1} \quad (5-93)$$

对应于等价速度三角形的当量扩散系数 $D_{e,q}^*$ 由式 (5-83) 可得：

$$D_{e,q}^* = \frac{w_1}{w_2} \left(\frac{w_{\max}}{w_1} \right) = \frac{w_{x1}}{w_{x2}} \frac{\cos \beta'_2}{\cos \beta'_1} (1.12 + 0.305 F) \quad (5-94)$$

1. 大于设计攻角的场合

对于等价速度三角形而言，如果进口攻角 α 大于设计攻角 α^* 时，类似于式 (2-46)，这时当量扩散系数 $D_{e,q}$ 可表示为：

$$D_{e,q} = \frac{w_{x1}}{w_{x2}} \frac{\cos \beta'_2}{\cos \beta'_1} [1.12 + \alpha (\alpha - \alpha^*)^{1.43} + 0.305 F] \quad (5-95)$$

同样这里系数 α 对于 NACA-65 翼形 $\alpha = 0.0117$ ，对于 C4 翼形 $\alpha = 0.007$ 。

气流进口角及等价进口角由进口条件决定，等价出口角按下式求得：

$$\beta_2 = \beta_1 - \Delta\beta = \beta_1 - \Delta\beta^* - \frac{d(\Delta\beta)}{d\alpha}(\alpha - \alpha^*) \quad (5-96)$$

式中 $\Delta\beta^*$ 表示设计转向角, $d(\Delta\beta)/d\alpha$ 表示与叶栅形状有关的函数。它和翼形弯度 c_{10} , 弦节比 σ , 安装角 β_A 有关, 可以由图 5-25 查得。

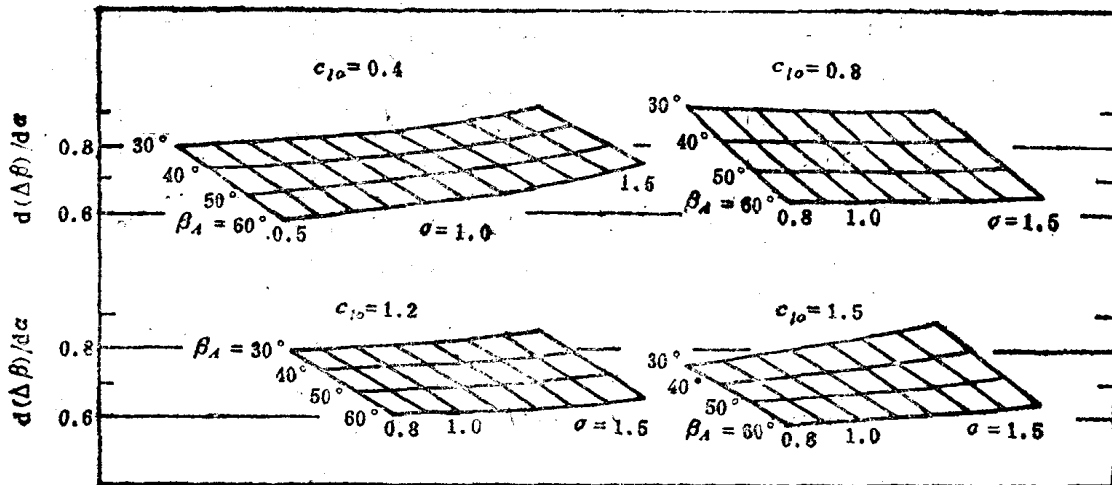


图5-25 $d(\Delta\beta)/d\alpha$ 值的选定

2. 设计安装角变化的场合

设计时, 当安装角由设计值 β_A^* 变化为 $\beta_A^* + \Delta\beta_A$, 这时如果设计攻角不变仍为 α^* 的话, 其进口角 β_1 为 (如图 5-26):

$$\beta_1(\beta_A^* + \Delta\beta_A) = \beta_1(\beta_A^*) + \Delta\beta_A \quad (5-97)$$

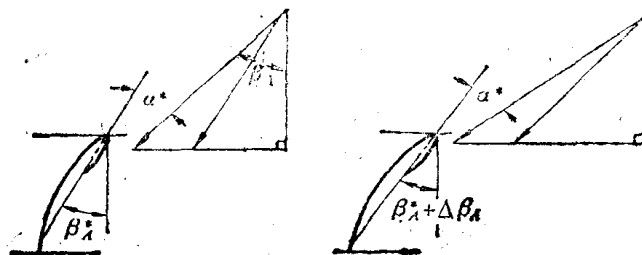
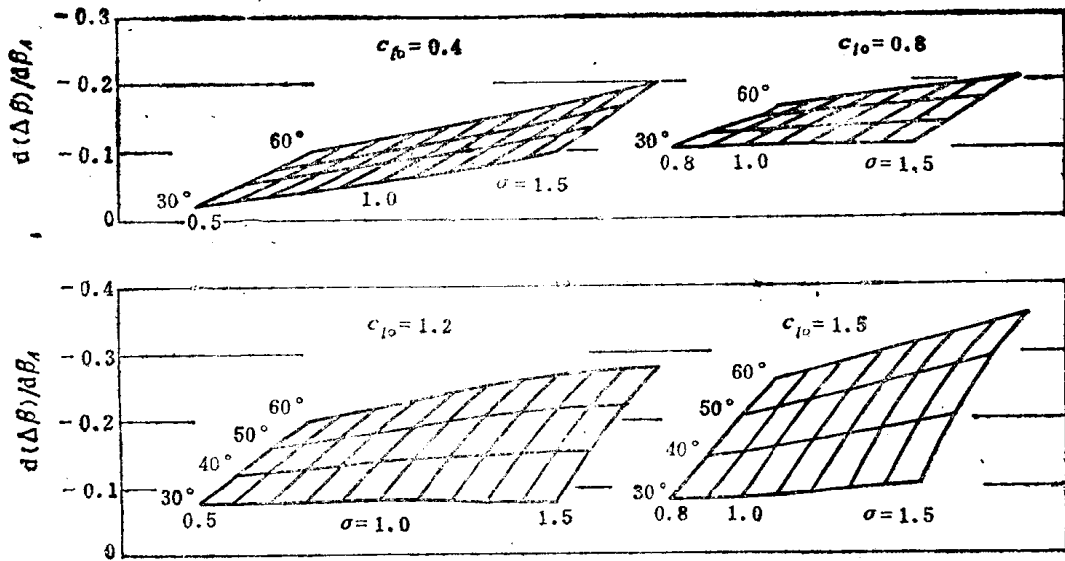


图5-26 安装角的变化

按照进口条件, 由上式可以求得与设计点对应的安装角为 $(\beta_A^* + \Delta\beta_A)$ 时的流量系数。这时的出口角 β_2 为:

图5-27 $d(\Delta\beta)/d\beta_A$ 值的选定

$$\beta_{2(\beta_A^* + \Delta\beta_A)} = \beta_{1(\beta_A^* + \Delta\beta_A)} - \Delta\beta_{(\beta_A^*)} - \frac{d(\Delta\beta)}{d\beta_A} \Delta\beta_A \quad (5-98)$$

式中 $\Delta\beta_{(\beta_A^*)}$ 表示设计安装角 β_A^* 时的设计转向角， $d(\Delta\beta)/d\beta_A$ 也是表示与叶栅形状有关的函数，可以根据叶栅形状 (c_{l0} , σ , β_A) 从图 5-27 查得。

当攻角比设计攻角大时，其出口角应按式 (5-96) 计算，但这时的 $d(\Delta\beta)/d\alpha$ 值，应按新的 $(\beta_A^* + \Delta\beta_A)$ 从图 5-25 求得。

三、实验结果及其比较

在图 5-28 中示出了在设计安装角 ($\Delta\beta_A = 0$) 以及非设计安装角 $\Delta\beta_A = 5^\circ$, -5° , -10° 情况下，某斜流叶轮的当量扩散系数 $D_{e\eta}$ 与流量系数的关系。图中 ϕ^* 表示设计流量系数， ϕ_c 为失速点的流量系数。由图可见，叶片顶端失速点 (ϕ_c) 的 $D_{e\eta}$ 值在设计安装角时约为 2.2，随着 $\Delta\beta_A$ 的变化呈现出明显的不同。

文献[53]对 18 种不同叶栅形状的斜流叶轮进行了实验比较。首先图 5-29 示出了不同斜流叶轮叶顶处失速点的 $D_{e\eta}$ 值与安装角的实验结果，图中点划线为根据式 (5-85) 的计算值。可以看出，大多数实验结果比计算值大，且两者差别较大。作为对比，在图 5-30 中示出了 4 种轴流叶轮在不同 $\Delta\beta_A$ 时，叶顶处失速点的 $D_{e\eta}$ 实验结果与按照式 (5-85) 的计算值的比较。明显可见，对于轴流叶轮而言，按照式 (5-85) 的计算值与实验结果基本吻合一致。

此外，根据斜流叶轮进出口速度分布的测量值，由等价速度三角形得到的 $D_{e\eta}$ 的实验值与计算值的比较，如图 5-31 所示。从图可以看出，测量值比计算值曲线陡斜，特别是叶顶处明显。这是因为，叶轮顶端处出口轴向速度减小，使得等价速度三角形的转向角增大所造成的结果。

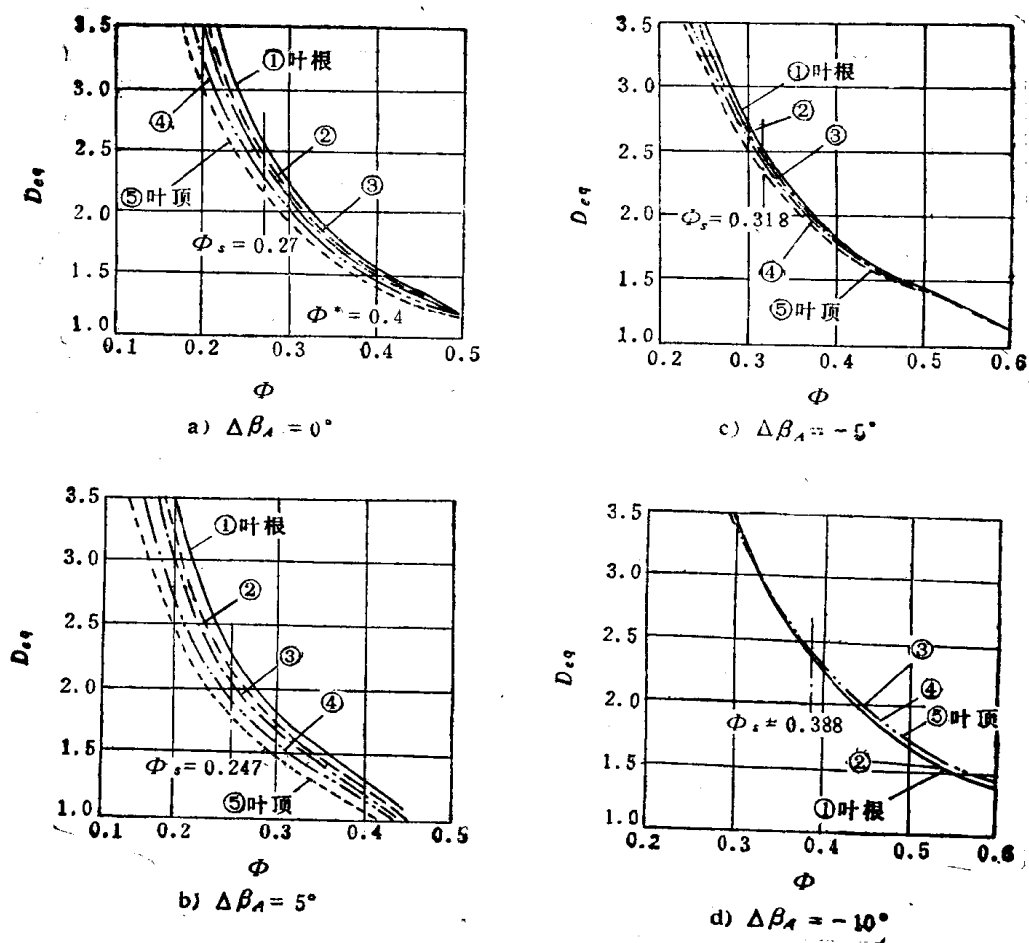


图5-28 斜流叶轮的当量扩散系数

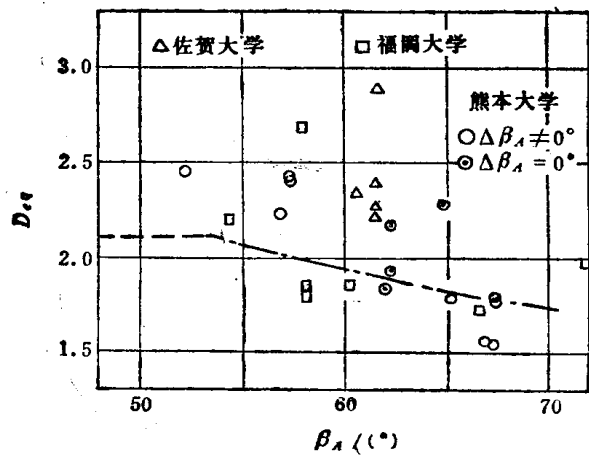
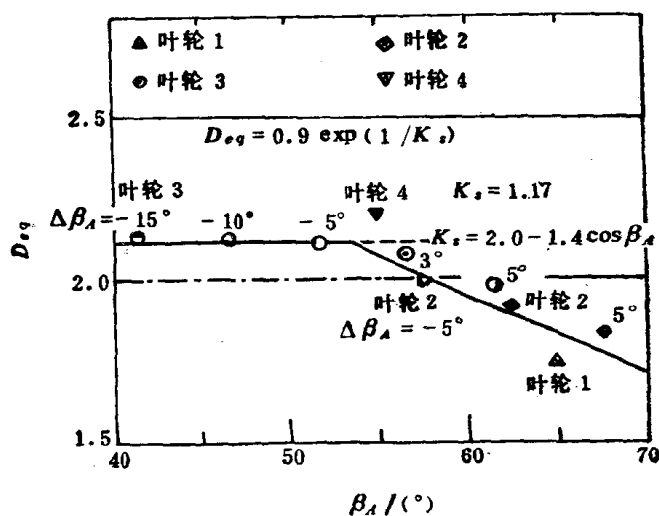
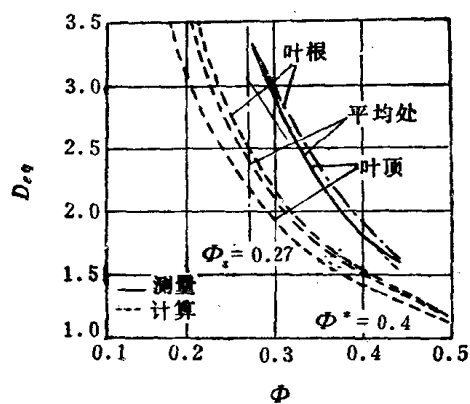


图5-29 斜流叶轮失速点的 D_{eq} 与 β_A 的关系

图5-30 轴流叶轮失速点的 $D_{e,q}$ 与 β_A 的关系图5-31 $D_{e,q}$ 的计算值与测量值的比较

最后要指出的是，如果把准正交线 q 变成径向线 r ，则以上关于斜流叶轮的讨论，同样可以用于轴流叶轮的设计与计算。所以本章的内容在很多方面与轴流叶轮是共通的。

第六章 轴流式叶轮的有限元设计与计算

随着生产的发展、科学技术的进步，轴流式叶轮机械（如轴流压缩机、风机等）按“一元流”理论的设计方法已不能完全满足要求。与离心式、斜流式叶轮一样，吴仲华教授提出的两类相对流面（ S_1 和 S_2 流面）的普遍理论在轴流式叶轮机械中也早已在工程实际中得到应用。

实际计算时，往往是将 S_1 流面又近似成任意回转面（又称旋成面），而将 S_2 流面近似为平均叶片面。求解这样的 S_1 和 S_2 流面的方法也很多，正如前面章节中已指出的那样，主要有流线曲率法、有限差分法及有限元素法等。本章只介绍在变分或加权的基础上的有限元素法在求解 S_1 流面和 S_2 流面气动问题时的应用，这种方法最大的优点是对任意几何形状的叶型边界处理时很容易而方便，同时，对进口攻角较大时求解也较稳定，而这正是前两种方法所存在的缺点。因此，有限元素法在轴流式叶轮机械（以至所有透平机械）的气动计算中具有广阔的前景。

本章介绍了有限元素法的数学基础：变分原理和加权余量法以及它们的有限元素法； S_1 流面分别以势函数和流函数为求解参数的变分原理及有限元素法； S_2 流面以伽辽金加权余量为基础的有限元解，并且将计算结果与实验结果进行了比较，结果是令人满意的。

§ 6-1 有限元素法的基本原理

一、变分原理及其有限元法

1. 泛函的极值与欧拉方程

变分问题是研究泛函的极值问题。所谓“泛函”是指这样一种变量，它的值是由一个函数或几个函数确定的。如图 6-1 所示，在空间给出了一个曲面 $z = z(x, y)$ ，曲面的表面积 S 应按下式计算：

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

显然，表面积 S 依赖于曲面形状，曲面形状一改变，表面积 S 即随之改变，所以曲面的表面积 S 就是一个泛函，我们把它记为 $S[z(x, y)]$ 。

下面看一个具体的二元问题：

有微分方程

$$J(u) = \iint_G \left\{ \frac{1}{2} \left[p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} au^2 - \varphi u \right\} ds \quad (6-1)$$

$u|_{\Gamma} = \bar{u}$

式中 $p = p(x, y) > 0$ ， $f = f(x, y)$ 是已给定的函数； G 为 x, y 平面上由分段光

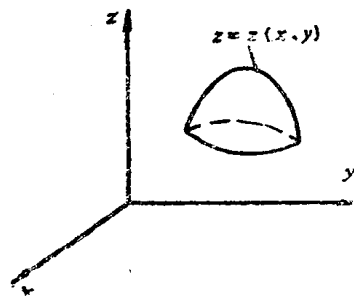


图6-1 曲面表面积

滑曲线 Γ 所围成的连通域; $\bar{u} = \bar{u}(s)$; $\varphi = \varphi(s)$; $\alpha = \alpha(s) \geq 0$ 为给定在边界上的函数; s 为 Γ 的弧长变量。

若 $u(x, y)$ 使泛函 $J(u)$ 取极小, 考虑函数:

$$\bar{u} = u(x, y) + \beta\eta(x, y)$$

式中 β 是任意小纯量; $\eta(x, y)$ 是这样的任意函数, 在 G 域内它以及它的一阶、二阶偏导数连续, 那么, 由数学的极值原理可知, 应有:

$$\delta J = \frac{d}{d\beta} J(u + \beta\eta) \Big|_{\beta=0} = 0$$

即

$$\begin{aligned} \delta J = \frac{d}{d\beta} \left[\iint_G \left\{ \frac{1}{2} \left[p \left(\frac{\partial(u + \beta\eta)}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial(u + \beta\eta)}{\partial y} \right)^2 \right] - f(u + \beta\eta) \right\} dx dy \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \alpha (u + \beta\eta)^2 - \varphi(u + \beta\eta) \right) ds \right] \Big|_{\beta=0} = 0 \end{aligned} \quad (6-1a)$$

因为 β 是无量纲因子, 而 p 、 u 、 η 等又独立于 β , 所以根据积分号下求微分的原则, 现将 (6-1a) 式等号右边各项分别处理如下:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left[\frac{1}{2} p \left(\frac{\partial(u + \beta\eta)}{\partial x} \right)^2 \right] \Big|_{\beta=0} &= p \frac{\partial(u + \beta\eta)}{\partial x} \frac{d}{d\beta} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \Big|_{\beta=0} \\ &= p \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (6-1b)$$

同理

$$\frac{d}{d\beta} \left[\frac{1}{2} p \left(\frac{\partial(u + \beta\eta)}{\partial y} \right)^2 \right] \Big|_{\beta=0} = p \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (6-1c)$$

$$\frac{d}{d\beta} [f(u + \beta\eta)] \Big|_{\beta=0} = f\eta \quad (6-1d)$$

$$\frac{d}{d\beta} \left[\frac{1}{2} \alpha (u + \beta\eta)^2 \right] \Big|_{\beta=0} = \alpha u \eta \quad (6-1e)$$

$$\frac{d}{d\beta} [\varphi(u + \beta\eta)] \Big|_{\beta=0} = \varphi\eta \quad (6-1f)$$

将式(6-1b)~式(6-1f)代入式(6-1a), 得:

$$\begin{aligned} \delta J = \frac{d}{d\beta} J(u + \beta\eta) &= \iint_G \left[p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - f\eta \right] dx dy \\ &+ \int_{\Gamma} [\alpha u - \varphi] \eta ds = 0 \end{aligned} \quad (6-1g)$$

再将上式等号右边第一个积分中的前两项用格林公式变换:

$$\begin{aligned} \iint_G p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_G \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \eta dy - p \frac{\partial u}{\partial y} \eta dx \right) \\ &- \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \eta dx dy \end{aligned}$$

代回到式 (6-18) 中, 得:

$$\delta J = \frac{d}{d\beta} J(u + \beta\eta) \Big|_{\beta=0} = - \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \right] \eta dx dy$$

$$+ \iint_{\Gamma} \left\{ p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right) + au - \varphi \right\} \eta ds = 0$$

因为 $\eta(x, y)$ 是任意的, 所以上式要成立, 必有:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f \\ \text{边界上: } p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right) + au - \varphi = 0 \end{cases}$$

注意到:

$$\frac{dy}{ds} = \cos(n, x) \quad \frac{dx}{ds} = -\cos(n, y)$$

所以边界条件化为:

$$p \frac{\partial u}{\partial n} + au = \varphi$$

这就证明了:

条件变分问题(泛函的极值问题):

$$J(u) = \iint_G \left\{ \frac{1}{2} \left[p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy$$

$$+ \iint_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} au^2 - \varphi u \right] ds = \min \quad (6-2)$$

$$u|_{\Gamma} = \bar{u}$$

等价于椭圆方程的边值问题:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f & (x, y) \in G \\ p \frac{\partial u}{\partial n} + au = \varphi \\ u|_{\Gamma} = \bar{u} \end{cases} \quad (6-3)$$

以上说明, 使泛函 $J(u)$ ((6-2)式) 达到极值的函数 $u(x, y)$, 就是椭圆方程((6-3)式) 的解 $u(x, y)$ 。实际上, 在这种情况下, 得到的条件也是充分的, 也就是说, 如果函数 $u(x, y)$ 是微分方程的边值问题式 (6-3) 的解, 则其一定也是使泛函 $J(u)$ 达到极值的函数 $u(x, y)$, 或者说其一定也是变分问题式(6-2)的解。下面证明之。

若 $u^*(x, y)$ 是函数集合 μ 中另一函数, 于是

$$u^*(x, y) = u(x, y) + \eta(x, y)$$

因此:

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J(u^*) - J(u) \\
&= \iint_G \left\{ \frac{1}{2} \left[p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] - f(u + \eta) \right\} dx dy \\
&\quad - \iint_G \left\{ \frac{1}{2} \left[p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} a(u + \eta)^2 - \varphi(u + \eta) \right] ds - \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} au^2 - \varphi u \right] ds \\
&= \iint_G \left\{ p \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] - f\eta \right\} dx dy + \int_{\Gamma} [au - \varphi]\eta ds \\
&\quad + \iint_G \frac{p}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} a\eta^2 ds \\
&= \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \eta \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \eta \right) \right] dx dy - \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad \times \eta dx dy - \iint_G f\eta dx dy + \int_{\Gamma} [au - \varphi]\eta ds + \iint_G \frac{p}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} a\eta^2 ds \\
&= - \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \right] \eta dx dy + \int_{\Gamma} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \eta dy - p \frac{\partial u}{\partial y} \eta dx \right) \\
&\quad + \int_{\Gamma} [au - \varphi]\eta ds + \iint_G \frac{p}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} a\eta^2 ds \\
&= - \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \right] \eta dx dy + \int_{\Gamma} \left\{ p \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right] \right. \\
&\quad \left. + au - \varphi \right\} \eta ds + \iint_G \frac{p}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} a\eta^2 ds
\end{aligned}$$

由于 $u(x, y)$ 是微分方程式 (6-3) 的解, 所以上式等号右边前二项之和为零, 这样又由于有 $p(x, y) > 0$, $a(x, y) \geq 0$ (且 $a \equiv 0$) 时上式等号右边第 3 项和第 4 项显然是正的, 所以有:

$$\Delta J > 0$$

至此, 就证明了微分方程式 (6-3) 的解 $u(x, y)$, 此时确实给出了泛函 $J(u)$ 的极小值。

值得注意的是, 在解微分方程时, 边界条件 $p \frac{\partial u}{\partial n} + au|_{\Gamma} = \varphi$ 必须作为定解条件列出, 而在解等价变分问题时, 它们是为极值解自动满足的, 无须作为定解条件列出, 因此, 这类

边界条件就称为自然边界条件。而边界条件 $u|_r = \bar{u}$ 在变分问题和微分方程边值问题中都一样须作为定解条件列出，因此，这类边界条件就称为强加边界条件。强加边界条件总比自然边界条件简单些。在这里所讨论的二阶椭圆形方程中，强加条件只涉及函数 u 本身，而自然边界条件涉及 u 及其法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ ，后者当边界条件比较复杂时，在处理上是相当困难的。此外，微分方程中含二阶导数，而变分问题中只含一阶导数，低阶导数处理总比高阶导数方便些，而基于变分原理的有限元方法能使这些有利因素得到充分发挥。由此可见，一般说来，求解某泛函的极值要比求解相应的微分方程要来得容易些。

2. 求解泛函的极值（即变分问题）的里兹（Ritz）法

在轴流式叶轮机中的气动问题，实际上就是微分方程的边值问题。由于使泛函实现极值的函数 $u(x, y)$ 必然满足相应的微分方程，这样，我们就可以构造一个泛函，使它对应的微分方程就是我们要求解的微分方程，在一定条件下（尽管不是在任何情况下都能满足这些条件），这是有可能实现的，如极小泛函基本定理。

定理：设 A 是对称的正算子，如果方程：

$$Au = f \quad (*)$$

有解，则它的解使得二次泛函：

$$J(u) = \langle Au, u \rangle - 2 \langle u, f \rangle = \int_{\Omega} (uAu - 2uf) d\Omega \quad (**)$$

取极小值；反之，在 D_A 中存在函数，使得式 (**) 取极小值，则该函数是方程 (*) 的解。

这样，根据上述定理，就把求解某个微分方程的边值问题变成了求泛函极值的变分问题。所以，当求出了使泛函实现极值的函数 $u(x, y)$ 后，它也就满足了我们要求解的微分方程，因而也就是我们所需要的解。

下面要讨论的是如何求出使泛函实现极值的函数 $u(x, y)$ 。里兹法就是解决这个问题的方法之一，它的基本概念如下：

(1) 先假定泛函 $J(u)$ 所依赖的函数 $u(x, y)$ 具有如下形式：（这里以二元问题为例）

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + \cdots + a_n \varphi_n(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y) \end{aligned} \quad (6-4)$$

式中 $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y)$ 是我们给定的一组满足边界条件的坐标函数。而 a_1, a_2, \cdots, a_n 是一组待定系数。

(2) 把式 (6-4) 代入泛函 $J(u)$ 的表达式中， $J(u)$ 就换成了系数 a_1, a_2, \cdots, a_n 的函数，即

$$J[u(x, y)] = J(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

(3) 因为泛函 $J[u(x, y)]$ 在 $u(x, y)$ 上实现极值，那么，由实现极值的必要条件，可知应该有：

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial J}{\partial a_n} = 0 \quad (6-5)$$

这是一组含未知数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的方程组。

(4) 解方程组 (6-5), 就可求出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 再将求得的系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 代回式 (6-4), 就得到了要求的解 $u(x, y)$ 。

3. 变分原理的有限元素法

用里兹法求解变分问题 (泛函的极值) 时, 坐标函数 $\varphi_i(x, y)$ 必须在整个求解区域上满足边界条件, 这样, 很明显, 只有边界条件比较简单, 容易满足, 而且求解的区域比较有规则 (如矩形, 正方形, 圆, 椭圆等), 才能找到这样的坐标函数, 但在实际中, 如轴流压缩机的求解区域就并不是上述那样规则, 边界条件有时还很复杂, 不易找出满足整个边界条件的坐标函数 $\varphi_i(x, y)$, 尽管如此, 里兹法解决问题的思路却给我们提供了行之有效的办法, 称之为有限元素法。

所谓有限元素法, 就是将整个求解区域 Ω 划分为有限多个元素 (又称单元, 如三角形单元, 矩形单元等) 的组合, 即 $\Omega = \Sigma \Delta \Omega$, 按变分原理的基本原则求解, 寻求使泛函实现极值时的函数 $u(x, y)$ 。这样, 由于求解区域 Ω 被划分为有限多个单元 $\Delta \Omega$, 而区域划分的单元越多, 从数学的观点使可知, 不规则的外形就越趋近于规则的的外形, 见图 6-2, 复杂的边界条件就越容易分解为较简单的边界条件的组合, 从而就可按里兹法一样, 根据变分思路求解, 进而可以解决实际中提出的种种复杂的问题。

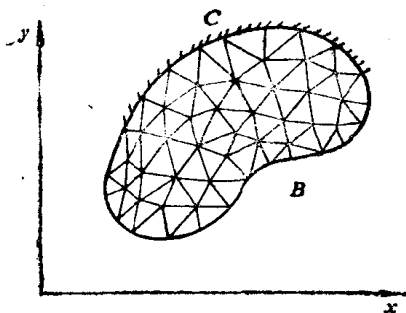


图6-2 区域的划分

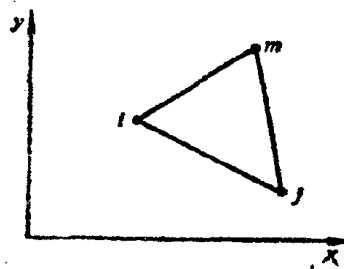


图6-3 单元

现以一个常见的二元拉普拉斯方程为例, 在区域 Ω 内, 微分方程为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

在边界 Γ_1 上

$$u = \bar{u}$$

在边界 Γ_2 上

$$l_x \frac{\partial u}{\partial x} + l_y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta(u - t) = 0$$

这个微分方程有相应的泛函, 它是:

$$J[u(x, y)] = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_2} \beta u(u - t) ds$$

如同图 6-2 和图 6-3, 把求解区域 Ω 划分为 n 个单元, 每个单元构成一个子域 $\Delta \Omega$, 由这些子域组成原求解区域 Ω :

$$\Omega = \Sigma \Delta \Omega \quad (6-6)$$

相应的, 泛函 $J[u(x, y)]$ 变成在这些子域上的积分 (从积分的性质来说, 这是一个合理

的应用)。

$$J[u(x, y)] = \Sigma J^* \quad (6-7)$$

式中 J^* 就是在作为单元 e 的子域 $\Delta\Omega$ 上的积分:

$$J^* = \iint_{\Delta\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Delta\Gamma_2} \beta (u^2 - tu) ds \quad (6-8)$$

因为上式右端第二项是沿着边界 Γ_2 的线积分, 所以只有那些靠着边界 Γ_2 的单元才会出现这一项积分。

在单元 e 内, 函数 $u(x, y)$ 可近似地表示为:

$$u^*(x, y) = [N]\{u\}^* \quad (6-9)$$

式中 N 是形函数 (或称插值函数), 因为这里讨论的是二元问题, 所以它显然是 x, y 的函数, 其具体的形式, 以后再讨论。

在整个求解域 Ω 内, 任何一个单元 e 内的函数 u 的表达式都是式 (6-9), 表面上看, 形式是一样的, 但因为形函数 $[N]$ 不但与所讨论点的坐标有关, 而且与单元的结点坐标有关, 同时, $\{u\}^*$ 是表示单元结点上的 u 值, 所以 u^* 可反映出不同位置处不同的 u 值, 这样, 在整个求解域 Ω 上的边界条件都能得到满足, 这是有限元素法的很大的优点。

如果单元 e 取为三角形单元 (如图 6-3) 三个角顶点分别为结点 i, j, m , 那么式 (6-9) 可具体写为:

$$u^*(x, y) = [N]\{u\}^* = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \quad (6-10)$$

式中 u_i, u_j, u_m 就是结点 i, j, m 上的 u 值。

把式 (6-10) 代入式 (6-8), J^* 就可用单元 e 的三个结点上的函数值 u_i, u_j, u_m 来表示。再由式 (6-7), 把各个单元的 J^* 累加起来, 就得到全区域的泛函 $J(u)$ 。显然, 此时泛函 $J(u)$ 就已成为结点函数 $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n$ (假设有 n 个结点) 的函数了:

$$J[u(x, y)] = J(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (6-11)$$

由此我们便可看出, 此时有限元素法中的 u_i 就相当于里兹法 (6-4) 式中的系数 a_i ($u = \Sigma a_i \varphi_i$), 但有限元素法中的 u_i 又有其特点, 即在边界上的结点, 自然有其结点上的 u_i 值, 满足边界条件 $u = \bar{u}$, 这也是有限元素法的优点所在, 因为这样边界条件就容易满足了。而里兹法中的系数 a_i 与边界条件无直接关系, 边界条件是由 φ_i 来满足的。

再由泛函达到极值的必要条件, 得到方程组:

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J}{\partial u_i} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J}{\partial u_n} = 0 \quad (6-12)$$

由于有 $J = \Sigma J^*$, 所以上式改写为:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial J^*}{\partial u_1} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial J^*}{\partial u_2} = 0, \quad \dots, \\ \Sigma \frac{\partial J^*}{\partial u_i} = 0, \quad \dots, \quad \Sigma \frac{\partial J^*}{\partial u_n} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

由于结点 (例如见图 6-2 结点 i) 一般都是好几个单元的公共点, 所以对 u_i 求偏导时, 凡是含有结点 i 的 u_i 值的单元对其求导, 然后叠加组成一个方程。在式 (6-13) 中, 这个方程组共包含有 n 个方程, 求解之, 便可得出 n 个结点的函数值 u_1, u_2, \dots, u_n , 然后由 (6-10) 式便可求得各单元内的 u 值。

二、加权余量法及其有限元方程

1. 加权余量法——伽辽金 (Галёркин) 法

前面所讨论的用里兹法和以其为基础的有限元素法解微分方程时, 是以变分原理为基础的, 也就是说首先要找到微分方程相应的泛函。而有些问题相应的泛函尚未找到, 或者根本就不存在相应的泛函 (如奇阶导数就无法导出变分原理), 为此, 我们可应用加权余量法 (无需变分) 来求解。加权余量法有多种, 如配置法、最小二乘法、矩阵法以及伽辽金法等, 在我们求解轴流叶轮的 S_1 和 S_2 流面的气动问题时, 主要是用伽辽金余量法, 所以本节只介绍伽辽金加权余量法。

(1) 加权余量法的基本思想

有如下微分方程

$$\text{在 } \Omega \text{ 域内} \quad A(u) = f \quad (6-14)$$

$$\text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \quad B(u) = g \quad (6-15)$$

其中 $A(\quad)$, $B(\quad)$ 是微分算子。

显然其准确解 u 必须在 Ω 域内任一点满足微分方程 (6-14), 且在边界 Γ 上满足边界条件式 (6-15)。对于轴流式叶轮机中复杂的实际气动问题, 精确解往往是很难找到的。

$$\text{设近似解为} \quad \tilde{u} = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \quad (6-16)$$

式中 c_i 是待定系数; φ_i 满足边界条件但不满足微分方程, 同时, φ_i 是线性无关的函数, 且应取自完备函数集合。在 φ_i 满足上述要求下, 伽辽金余量法一般能达到收敛的目的。

由于式 (6-16) 是近似解, 不完全满足微分方程, 所以代入式 (6-14) 之后, 将得余量:

$$A(\tilde{u}) - f = \varepsilon \quad (6-17)$$

对精确解, 在区域 Ω 内的任一点, 余量 ε 均为零。而对近似解来说, 我们可以这样选择系数 c_i , 使得在某种平均意义上余量 ε 为零。如, 我们引进一个权函数集合 Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

构成内积: $\langle \varepsilon, Q_i \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

且取内积为零: $\langle \varepsilon, Q_i \rangle = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (6-18)

这样, 就相当于强制使近似方程式 (6-17) 的误差在这种 $\langle \varepsilon, Q_i \rangle = 0$ 的平均的意义上等于零。取 n 个权函数, 就可由 (6-18) 式得到 n 个方程, 则可求得 n 个待定系数 c_i , 采用不同的权函数形式, 得到不同的计算方法。

(2) 伽辽金余量法

由式 (6-16) 可知, 近似解的基函数是 φ_i , 现取权函数为:

$$Q_i = \varphi_i \quad (6-19)$$

将式 (6-19) 代入式 (6-18), 得:

$$\langle \varepsilon, \varphi_i \rangle = \int_{\Omega} \varepsilon \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} \left[A \left(\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right) - f \right] \varphi_i d\Omega = 0 \quad (6-20)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

展开上式, 即得:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_1 \left[A \left(\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right) - f \right] d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \varphi_2 \left[A \left(\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right) - f \right] d\Omega &= 0 \\ &\vdots \\ \int_{\Omega} \varphi_n \left[A \left(\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right) - f \right] d\Omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-20 a)$$

由此可得 n 个方程, 则可解得 n 个待定系数 c_i , 将求得的 c_i 代回近似解 (6-16) 式中, 便可得到微分方程 (6-14) 的近似解。

下面简单举一例:

$$\text{有微分方程} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + u = -x \quad 0 < x < 1 \quad (6-20 b)$$

$$\text{边界条件:} \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (6-20 c)$$

解: 设近似解 $\bar{u} = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots)$

显然, 相对于 $\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ 而言

$$c_1 = \alpha_1, \quad \varphi_1 = x(1-x); \quad c_2 = \alpha_2, \quad \varphi_2 = x^2(1-x); \quad \dots$$

如果近似解只取前 2 项, 则有:

$$\bar{u} = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x)$$

$$\text{所以:} \quad \bar{u} + \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2$$

余量则为:

$$\varepsilon = \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u} + x = (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2 + x$$

由式 (6-20 a), 便可得到由 2 个方程构成的方程组:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \varepsilon \varphi_1 dx &= \int_0^1 \varepsilon x(1-x) dx = 0 \\ \int_0^1 \varepsilon \varphi_2 dx &= \int_0^1 \varepsilon x^2(1-x) dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-20 d)$$

积分式 (6-20 d), 得:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{13}{105} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{Bmatrix}$$

$$\text{解得} \quad \alpha_1 = \frac{71}{369}, \quad \alpha_2 = \frac{7}{41}$$

所以微分方程式 (6-20 b) 的伽辽金近似解为:

$$\bar{u} = x(1-x) \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x \right)$$

注意：1) 用伽辽金余量法求微分方程近似解时，不必再求其对应的泛函，这样，在找不到变分泛函的那些特殊问题中，里兹法不能解决，伽辽金法却得到成功的运用。

2) 凡是存在变分泛函的问题，用伽辽金余量法的解与里兹法解所得结果是完全一致的。

2. 用伽辽金加权余量法建立的有限元基本方程

由式(6-16)，近似解为：
$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y)$$

它的坐标函数 φ_i 应满足整个边界条件，而这对于具有复杂的几何形状的边界或具有复杂的边界条件的问题，用伽辽金法求解同样是困难的。对此，我们也可将其与由里兹法到有限元法的过程相同，也可以在伽辽金加权余量法的基础上建立有限元素法的解。

$$\text{有微分方程 } A(u) = f \quad (6-21)$$

$$\text{在边界 } \Gamma \text{ 上 } B(u) = 0 \quad (6-22)$$

式中 $A(\quad)$ 和 $B(\quad)$ 是微分算子。

把区域 Ω 划分为 n 个单元(这里以三角形为单元)，从中取出任一单元 e 来分析，其结点仍为 i, j, m ，则单元结点上的未知量为 u_i, u_j 和 u_m 。单元 e 内任一点的 u 值仍用结点值来表示，设为：

$$u^e = [N_i N_j N_m] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = [N]^e \{u\}^e \quad (6-23)$$

式中 N_i, N_j 和 N_m 为形函数。

采用有限元素法的概念后，划整体为许多细小的单元，对于某一个具体的细小单元，因为它可以很小，那么要它满足它所占据的部分的边界条件自然就容易多了，另外，对于边界上的结点 i ，那么 u_i 就不是待求的未知数，而是作为应满足边界条件的已知量代入。

对于近似解，其余量为：

$$e = A(\bar{u}) - f$$

要求在求解域 Ω 中，余量 e 的加权积分为零。我们已知，伽辽金加权余量法的特点就是取权函数 Q_i 为形函数 N_i ，即

$$Q_i = N_i \quad (6-24)$$

那么，对任一单元 e ，取式(6-23)，则有：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i e d\Omega &= \int_{\Omega} N_i [A(\bar{u}) - f] d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Delta\Omega} N_i [A([N]^e \{u\}^e) - f] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6-25)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

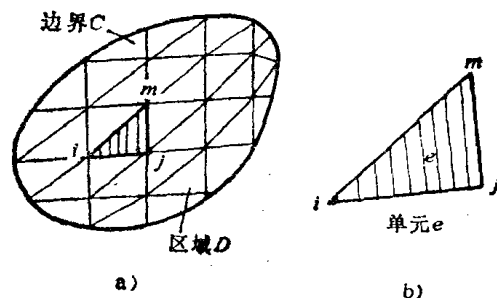


图6-4 单元的选取

式中 \sum_e 表示对每个单元求和, $\Delta\Omega$ 为单元 e 对应的子域。

上式表明, 对每个单元计算余量 e 的加权积分, 累积后, 其总和应为零。因为设共有 n 个待求的结点未知数, 所以要假设 n 个权函数 N_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 由上式则可得 n 个方程, 所以可解得 n 个未知量 $\{u\}$ 。

即由式 (6-25) 可得如下 n 个方程:

$$\left. \begin{aligned} \sum_e \int_{\Delta\Omega} N_1 [A([N]^T \{u\}) - f] d\Omega &= 0 \\ \sum_e \int_{\Delta\Omega} N_2 [A([N]^T \{u\}) - f] d\Omega &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_e \int_{\Delta\Omega} N_i [A([N]^T \{u\}) - f] d\Omega &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_e \int_{\Delta\Omega} N_n [A([N]^T \{u\}) - f] d\Omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

不过, \sum_e 虽然表示的是对单元求和, 但当权函数为形函数 N_i 时, 具体只对与 i 点有关的单元求和。

三、有限元素法的基本原则及解题时的主要步骤

综上所述, 可以这样说, 有限元素法是在变分原理或加权余量法的基础上, 采用了分块逼近的思想而形成的系统化的数值计算方法。它的基本原则就是将求解区域进行离散化, 剖分成若干互相连结而又不重叠的、有一定几何形状的子区域, 这样的子区域我们称之为单元。在单元中选定插值函数 (又称基函数或形函数), 用单元基函数的组合来逼近单元的精确解, 总体基函数可以看成是由单元基函数所组成。同时, 总体区域上的积分则由各个单元上的积分来合成。由于单元的几何形状是可以有规则的, 因此, 选择决定单元的形函数时可以给出一定的规则, 这样单元积分也就比较容易些。

有限元法的解题主要步骤可大致分为:

1. 找出积分表达式

由前面介绍的加权余量积分原理或变分原理建立起与要求解的微分方程初边值问题等价的积分表达式。

2. 区域的剖分

根据求解区域的几何形状及问题的物理性质, 将区域剖分为由许多小单元所组成, 这些单元在不同的位置可大可小, 且有一定的几何形状 (如三角形、矩形、曲边三角形以及曲边四边形等), 并确定单元与结点的数目与位置。

3. 形函数的确定

选择满足一定插值条件的插值函数作为单元的形函数, 记作为 $[N]^T$ 或 $[N]^e$, 单元的近似函数若为 u , 则它可通过形函数的组合表示为:

$$u = [N]^T \{u\}$$

4. 单元有限元方程的建立

将各单元的求解函数用单元的形函数的组合表达式来逼近得出近似函数，再将近似函数代入积分表达式，在单元区域进行积分，便得单元有限元方程。

5. 总体的合成

将求解区域中所有单元的有限元方程按一定的规则进行叠加，形成总体有限元方程，即将单元“刚度”阵叠加成为总体“刚度”阵。

6. 边界条件的加入

正如前述，自然边界条件已在积分表达式中得到满足，此时主要是将强加边界条件赋入位于边界的单元结点上。

7. 解有限元方程组

根据强加边界条件修正后的有限元方程组，是含有所要求的未知量的封闭的方程组，解此方程组，求出未知量。

8. 计算有关的物理量

待定未知量求解出来后，就可得出近似函数的表达式，由此就可计算出各种由题意所决定的物理量。

以上便是用有限元素法求解有关问题时的基本原理和主要步骤。下面将根据以上原则，针对 S_1 流面和 S_2 流面的气动问题进行具体的计算。

§ 6-2 S_1 流面（任意回转面）气动参数 计算的有限元素法

前已述及，文献〔1〕提出的以 S_1 和 S_2 二类相对流面理论为基础的准三元流理论早已在国内外作为叶轮机设计和气动性能分析的理论依据。一般情况下，除了内外壳边界的流面外，严格说来， S_1 流面并不与任意回转面重合，而是一个翘曲的空间曲面，但是，对于大多数轴流叶轮机而言，可以近似地认为 S_1 流面与任意回转面重合。这样，可以使 S_1 流面的计算大大简化，实践表明，这种简化也是完全合理的。所以，这一节的有限元计算主要是针对任意回转面叶栅而言。

有限元素法是求解流动问题的一个相当好的方法，目前用它求解准三元流的研究取得了很大的进展和可喜的成果。文献〔15〕首先提出了任意回转面叶栅气动问题的广义变分原理、变分原理与互偶极值原理，为在叶轮机流场计算中使用有限元素法提供了完密的理论基础。

对轴流叶轮机（如轴流压缩机、风机等）的 S_1 流面的设计，虽然随着计算机的广泛应用，数值计算的问题已不是什么主要问题，但目前最可靠和有效的设计还是利用已有的丰富的叶栅试验资料来进行，对于这方面的内容，请看书中有章节，另外，也有专著对此作了全面的介绍，这里不再重复，这一节的重点乃是在对任意回转面的气动性能的计算以及在变工况下可能的性能预测（即所谓的正命题）。

另外，在 S_1 流面的流动中，我们不考虑损失，关于粘性对上游气体流动的累积影响，则在下一节中对 S_2 流面的计算中加以考虑。应指出的是，以下的变分原理及有限元解只适用于全亚声速流和无激波的跨声速流。

一、 S_1 流面 (任意回转面) 的基本方程

在以等角速度 ω 旋转的叶栅中, 假理想气体沿任意回转面作绝热、相对定常、转子焓 (又称广义焓 $I_R = i + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2}$) 均匀的等熵流动时, ($\bar{\nabla} S = \bar{\nabla} I_R \equiv 0$) 气动方程组可写成以下无量纲的形式 (参见图 6-5), (所有 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 都简写为 $\frac{\partial}{\partial \theta}$)

(1) 连续方程:

$$\frac{\partial(\tau r \bar{\rho} A_l)}{\partial l} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau r \bar{\rho} A_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (6-27)$$

(2) 涡度方程:

$$\frac{\partial A_l}{\partial \theta} - \frac{\partial[(A_\theta + A_u) r]}{\partial l} = 0 \quad (6-28)$$

(3) 能量方程:

$$\bar{\rho} = \bar{p}^{1/k} = \bar{a}^{2m} = \left\{ 1 - \frac{1}{2m} (A^2 - A_u^2) \right\}^m \quad (6-29)$$

式中 $A = w/a_0$; $A_\theta = w_\theta/a_0$; $A_l = w_l/a_0$; $A_u = \omega r/a_0 = u/a_0$; $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$; $\bar{a} = a/a_0$; $\bar{p} = p/p_0$; $a_0^2 = c_p T_0/m = I_R/m$; $m = 1/(k-1)$; $k = c_p/c_v$.

式中 w 为气体相对速度; ρ 为气体密度; p 为气体压力; T 为热力学温度; a 为声速; c_p 为定压比热容; c_v 为定容比热容; k 为绝热指数; τ 为流片厚度。下角标“0”表示图 6-6 中 0 点的参量。所有线性尺寸都采用与叶栅 l 向的宽度 B 的比值。

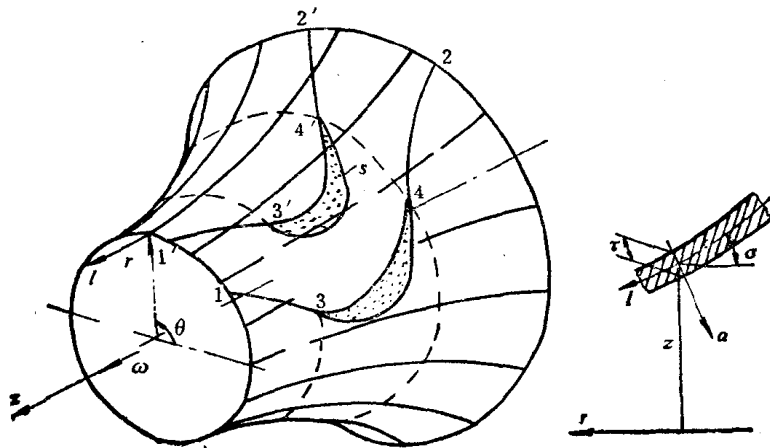


图6-5 任意回转面叶栅及流片厚度

为了简化求解, 常常要引进某些标量函数来减少未知函数的数目, 这样既能大量地减少计算机的贮存量, 又能缩短计算时间。根据守恒型方程的数学形式, 显然, 从式 (6-27) 和式 (6-28) 中, 我们可以分别引入流函数 ψ 和势函数 φ 如下:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \tau r \bar{\rho} A_l, \quad \frac{\partial \psi}{\partial l} = -\tau \bar{\rho} A_\theta \quad (6-30)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = A_l, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (A_\theta + A_u) r \quad (6-31)$$

这样, 从原来须求 2 个未知量 A_l 和 A_θ 的问题就变成了只须求一个未知数 ψ 或 φ 的问题了。但须指出的是, 势函数 φ 的存在并不一定就意味着流动是无旋的, 而只是说明绝对旋度 $\nabla \times$

V 在流面法向的分量为零，即流面和涡面完全重合。

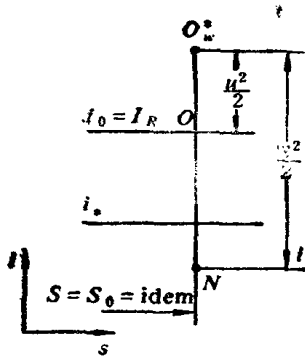


图6-6 等熵流动

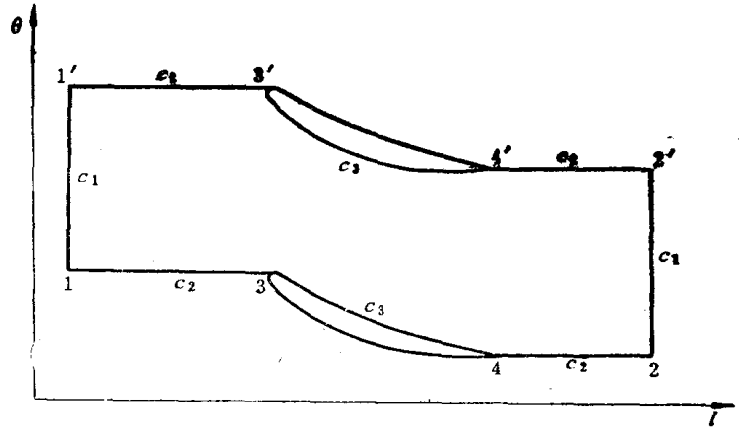


图6-7 任意回转面变换平面的求解域

二、任意回转面叶栅等熵流动（势函数 φ ）的变分原理及其有限元解

1. 变分原理

文献[15]首先给出了任意回转面各种变分原理。任意回转面以势函数 φ 作为其基本函数后（势函数的优点是从它的偏导数可以直接求出相对流速），此时流面上的气动方程组就成为：

$$\text{连续方程: } \frac{\partial(\tau r \bar{\rho} \Lambda_l)}{\partial l} + \frac{\partial(\tau \bar{\rho} \Lambda_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (6-32)$$

等价于涡度方程：

$$\partial \varphi / \partial l = \Lambda_l, \quad \partial \varphi / \partial \theta = r (\Lambda_\theta + \Lambda_s) \quad (6-33)$$

$$\text{能量方程: } (\bar{p} / \bar{\rho}) + (\Lambda^2 - \Lambda_s^2) / (2m) = 1 \quad (6-34)$$

$$\text{等熵关系: } \bar{p} = \bar{p}^{(k)} \quad (6-35)$$

根据图 6-7，其边界条件为：

在 c_1 上：进、出口密流为给定：

$$q_l = [q_l(\theta)]_{pr} \quad (a)$$

式中 $q = \bar{p} \Lambda$ ，则 $q_l = \bar{p} \Lambda_l$ ，下同。下角标“pr”表示给定值。

在 c_2 上，（是周期性边界）满足周期性条件：

$$\Delta \varphi_{1,2} = \varphi_{\pm} - \varphi_{\mp} \quad (b)$$

即在 $\overline{13}$ 和 $\overline{1'3'}$ 以及 $\overline{42}$ 和 $\overline{4'2'}$ 上，所有气动参量都相等。

在 c_3 上，给定吸、喷密流

$$q_n = [q_n(l)]_{pr} \quad (c)$$

当叶片无传质时， $q_n = 0$

在人工分界面 Σ 上：

$$(q_+)_n = (q_-)_n \quad \text{及} \quad \varphi_+ = \varphi_- \quad (d)$$

即在 Σ 上，全部气动参量都连续。

以上任意回转面上的气动微分方程的定解问题是与下面的变分问题是等价的：

泛函 $J'(\varphi)$ 为：

$$\begin{aligned}
 J'(\varphi) = & \iint_A G_1 dl d\theta - \int_{c_1+c_3} (q_n)_{pr} \varphi \tau ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_{c_2'} (\varphi_{\pm} - \varphi_{\mp} - \Delta\varphi_{1,2}) (\mathbf{q}_{\pm} + \mathbf{q}_{\mp}) \cdot \mathbf{n}_{\mp} \tau ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\varphi_{+} - \varphi_{-}) (\mathbf{q}_{+} + \mathbf{q}_{-}) \cdot \mathbf{n} \tau ds
 \end{aligned} \quad (6-36)$$

式中 \mathbf{n} 表示积分路线的外法向单位矢

$$G_1 = \frac{\tau r}{k} \left\{ 1 - \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 - 2 \frac{A_*}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] \right\}^{mk}$$

且附加的约束条件是式 (6-33)、式 (6-34) 和式 (6-35)。

则泛函的极值为

$$\delta J'(\varphi) = 0 \quad (6-37)$$

显然, 上述泛函的无条件极值问题等价于泛函:

$$J(\varphi) = \iint_A G_1 dl d\theta - \int_{c_1+c_3} (q_n)_{pr} \varphi \tau ds \quad (6-38)$$

在条件:

$$c_{2F} \text{ 上: } \varphi_{\pm} = \varphi_{\mp} + \Delta\varphi_{1,2} \quad (6-39)$$

下的极值问题。(此时不考虑人工分界面)

另外, 在大多数轴流叶轮机械中, 尤其是轴流压缩机、风机中, 在其叶片表面一般都无喷气和吸气, 即:

$$q_n = (\rho \Lambda)_{pr} \cdot \mathbf{n} = 0$$

因此, 在这种情况下, 求解时对物面可不作任何处理。这样, 在式 (6-38) 中将物面条件处理成自然边界条件的情况就可略去, 泛函式 (6-38) 改写为:

$$J(\varphi) = \iint_A G_1 dl d\theta - \int_{c_1} (q_n)_{pr} \varphi \tau ds \quad (6-38a)$$

强加边界条件为:

在 c_{2F} 上 (式6-39), $\varphi_{\pm} = \varphi_{\mp} + \Delta\varphi_{1,2}$

由式 (6-37), $\delta J(\varphi) = 0$

则得:

$$\begin{aligned}
 & - \iint_A \left[r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \right] \frac{\tau \tilde{\rho}}{r} dl d\theta + \iint_A A_* \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \tau \tilde{\rho} dl d\theta \\
 & - \int_{11'} q_{l,pr} \delta \varphi \tau r d\theta + \int_{22'} q_{l,pr} \delta \varphi \tau r d\theta = 0
 \end{aligned} \quad (6-40)$$

$$\tilde{\rho} = \rho / \rho_0 = \left[1 - \frac{k-1}{2} (A^2 - A_*^2) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (6-40a)$$

在 c_{2F} 上 (式6-39), $\varphi_{\pm} = \varphi_{\mp} + \Delta\varphi_{1,2}$

以上式 (6-40) 和式 (6-39) 就是在一般轴流式叶轮机械中最常见的任意回转面叶栅泛函的条件极值问题。

综上所述，即有任意回转面上的气动微分方程定解问题（正命题）与一个有条件的变分问题等价。所以，只要我们先对 $J(\varphi)$ 求极值，即： $\delta J(\varphi) = 0$ ，然后再加入强加边界条件式(6-39)，便可得泛函 $J(\varphi)$ 的极值问题的方程组。以上也就是任意回转面 (S_1 流面特例) 有限元解的基本出发点。

2. 有限元解

(1) 任意回转面求解区域的选取与剖分 由于叶栅沿周向 (图 6-8 c 中的 θ 向) 具有周期性，所以只须取栅距内的区域求解便可。求解区域的选取原则上是任意的，但具体取法一般分为三种，如图 6-8 a、图 6-8 b 和图 6-8 c。

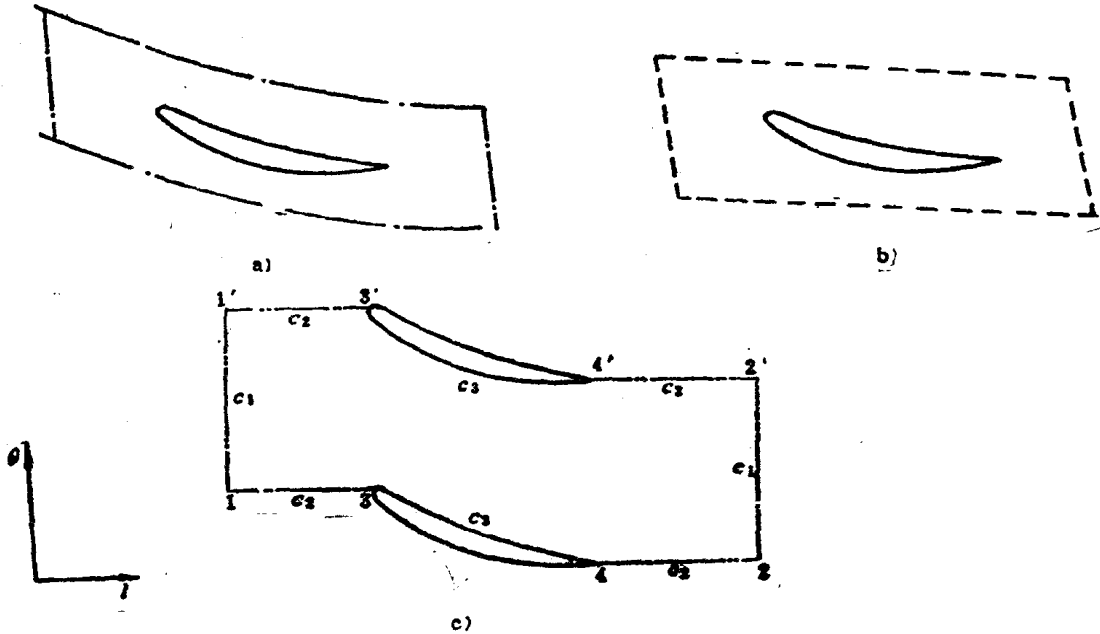


图6-8 任意回转面求解域的取法

正如在前面变分原理中已提出的，我们采用图 6-8 c 的求解区域，所以求解区域的面积 A 就是图 6-8 c 中的 $13422'4'3'2'1'$ 面积， c_1 表示出口面 $22'$ 和入口面 $11'$ ； c_2 表示叶栅前、后的周期区的 13 ， $1'3'$ ， 42 ， $4'2'$ 边界面； c_{2T} 表示下界面 13 和 42 ； c_3 表示叶型表面

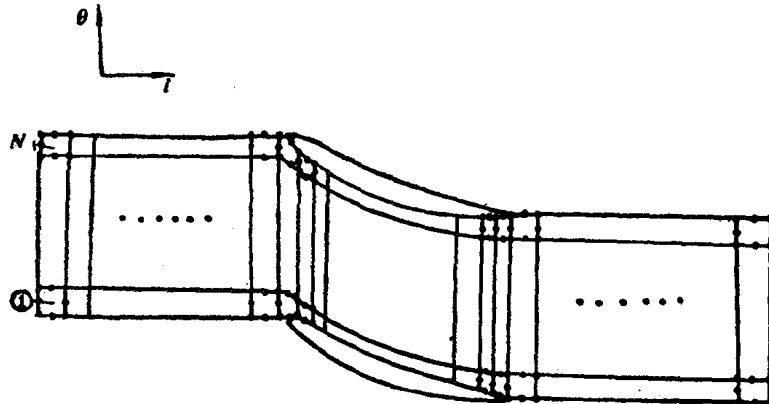


图6-9 任意回转面求解域的剖分

压力面和吸力面；下角标 $-$ 、 $+$ 分别表示积分路线的左、右侧； pr 表示预先给定的量。

所谓区域的剖分，就是把整个求解区域离散化，剖分为有限个互相连结而又不重叠的、有一定几何形状的、有利于用有限元素法求解的单元子区域，见图6-9。这样，总体区域的积分就可由各个单元的积分之和来合成，总体区域的解就可看作由所有单元的近似解构成。从图6-9中我们可看出，事先要将求解区域划分成许多小单元，并给出整体结点的顺序编号和几何参数（如整体坐标 θ 、 l 、 r ，流片厚度，周期性节点等）。同时，可将叶栅通道的求解区域分为栅前区、栅内区和栅后区。栅前后区又包括栅前、栅后无穷远处边界和周期性边界。栅内区有物面边界，为了提高精度，需将近物面和叶栅前、后缘区域的网格划分得密一些。

(2) 单元的选取 正如前述，有限元素法求解问题的关键是整体泛函表达式的离散化，变量的整体泛函表达式即整个求解区域的积分式是由局部泛函表达式即单元内积分式汇集而成。而整个求解区域的求解问题又是通过每个单元变分的离散化，转化为单元的代数方程组，然后加入边界条件后总体合成求解。所以，对不同的单元应选择不同的、适合于所选单元本身的基函数（即形函数），从而求出单元系数阵与“载荷”向量的数学表达式。

在任意回转面的求解区域中，一般情况下，叶型的内、背弧（即叶型的压力面和吸力面）通常是由几段曲线组成，选择单元时，我们应使单元的边界尽可能地与叶面形线吻合，这样，如果我们采用由曲线边组成的单元，显然就可以更准确地表示求解区域的复杂边界。这里，我们可采用曲线四边形的“等参单元”。

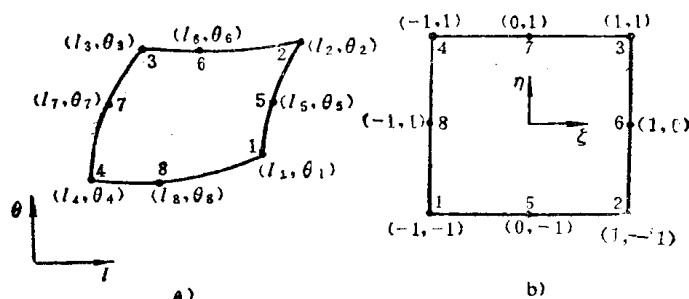


图6-10 二次四边形等参数单元

a) 二次曲线四边形单元 b) 八结点正方形单元（基本单元）

1) 八节点四边形等参单元 如图6-10 a所示，单元的边线是二次曲线，整个单元有八个结点，除4个顶点外，每条边线上还有一个结点，这样，边线的二次曲线形状由这条边线上的三个结点完全决定。显然，这种单元的二次曲线边线是能满足象叶型内、背弧这样的复杂的边界的。

但是，要在这样的单元内进行计算是比较麻烦的（例如，要对曲线单元进行积分），为此，可进行坐标变换，使在目前的 $l-\theta$ 坐标系中，具有曲线边界的形状复杂的单元，在 $\xi-\eta$ 坐标系中变换成形状简单而且规则的单元，如图6-10 b，这是一个边长为2的正方形，计算只在这种简单规则的单元中进行。为了进行坐标变换，必须在坐标系 $l-\theta$ 与 $\xi-\eta$ 之间建立一一对应的关系，在有限元法中，这种对应关系是利用“形函数”建立起来的。图6-10 b中正方形单元其形函数为二次拉格朗日插值函数，即：

$$\left. \begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)
 \end{aligned} \right\} \quad (6-41)$$

只要将形函数 $N_i(6-41)$ 式作为坐标变换关系式中的等参函数:

$$\left. \begin{aligned}
 l &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) l_i \\
 \theta &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \theta_i
 \end{aligned} \right\} \quad (6-42)$$

就可以将二次曲线四边形单元 (即等参四边形八节点单元) 与八结点正方形一一对应起来。其中, (l_i, θ_i) , $(i=1, 2, \dots, 8)$ 是与局部坐标 (ξ_i, η_i) , $(i=1, 2, \dots, 8)$ 一一对应的整体坐标值。

同理, 应有:

$$\varphi = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \varphi_i \quad (6-43)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \rho_i \quad (6-44)$$

$$\tau = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \tau_i \quad (6-45)$$

2) 12 结点四边形等参单元 为了进一步提高精度或者是计算中的需要, 在任意回转面的有限元计算中, 还可采用精度更高的 12 结点四边形等参单元, 如图 6-11 a, 与其对应的正方形单元见图 6-11 b。这是三次曲线的四边形单元, 其形函数构造方法与二次曲线的等参单元所采用的方法完全类似。

引用一新变量:

$$\xi_0 = \xi_i \xi; \quad \eta_0 = \eta_i \eta \quad (6-46)$$

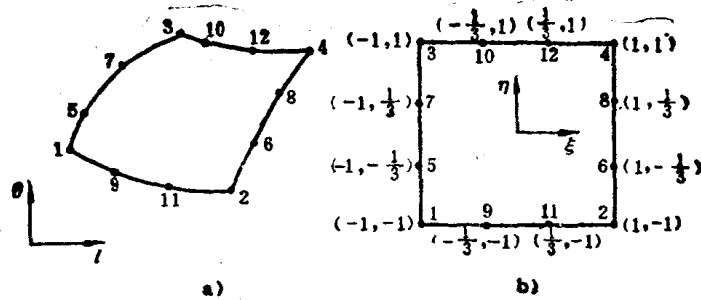


图6-11 三次四边形等参数单元

a) 三次曲线四边形单元 b) 十二结点正方形单元 (基本单元)

式中 ξ_i, η_i 是结点 i 的坐标, 于是其形函数为: 在角点:

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

边三分点:

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0) \quad (i = 5, 6, 7, 8) \quad (6-47)$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \eta_0)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0) \quad (i = 9, 10, 11, 12)$$

与八结点等参单元的形式一样, 此时的局部坐标 (ξ, η) 和整体坐标 (l, θ) 之间的坐标变换式为:

$$l = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) l_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \theta_i \quad (6-48)$$

单元中的物理参数也可用其形函数来描述:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \varphi_i \quad (6-49)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \rho_i \quad (6-50)$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \tau_i \quad (6-51)$$

不过, 根据目前对任意回转面的有限元计算表明, 采用八结点四边形等参单元已具有足够的精度, 所以, 以下进行的有限元计算, 是以八节点四边形等参单元为基本单元的。

(3) 单元的有限元方程

1) 变换关系式的导出 由于已引入了 $\xi - \eta$ 坐标系, 因此, 在导出单元的有限元方程之前还需要引出一些变换关系, 如下:

根据图 6-10 a 和图 6-10 b, 若有一函数 $f(\xi, \eta)$, 那么, 由函数的微分法则知应有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial l} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (6-52)$$

因为一般不容易用 l 和 θ 表示出 ξ, η 的显式, 为此, 我们将 f 对 ξ, η 先求导:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (6-53 a)$$

将上式写成矩阵形式, 则:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial l}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial l} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial l} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (6-53)$$

式中,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial l}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6-54)$$

称为雅可比 (Jacobian) 矩阵。

所以得出:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial l} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6-55 a)$$

式中 J^{-1} 是 J 的逆矩阵。

由矩阵的法则知, 有:

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} J^*$$

式中 J^* 是雅可比矩阵的伴随矩阵, 它为:

$$J^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial l}{\partial \eta} & \frac{\partial l}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

而 $|J|$ 则为雅可比行列式, 它为:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial l}{\partial \eta} & \frac{\partial l}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (6-55 b)$$

所以, 再由式 (6-55 a) 得:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial l} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial l}{\partial \eta} & \frac{\partial l}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6-55c)$$

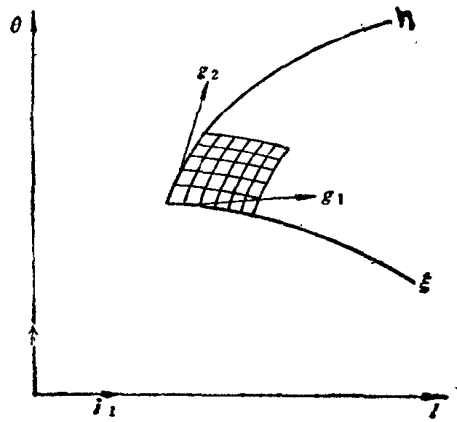
为下面使用方便，同时去掉 f ，上式改写为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} &= \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial l}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-55)$$

至于整体坐标系中的积分与相应的等参坐标的积分关系从图 6-12 中可得出。整体坐标系 $l-\theta$ 和任意的等参坐标系的方向分别用单位向量 i_1, i_2 和单位切向量 g_1, g_2 表示，它们的关系是：

$$g_1 = \frac{\partial l}{\partial \xi} i_1 + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} i_2,$$

$$g_2 = \frac{\partial l}{\partial \eta} i_1 + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} i_2$$



则图中的微分面积是：

图6-12 坐标转换

$$dl i_1 \times d\theta i_2 = dl d\theta i_3 = g_1 d\xi \times g_2 d\eta = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial l}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & 0 \end{vmatrix} d\xi d\eta$$

由式 (6-55) 可知，上式即为：

$$dl d\theta i_3 = |J| d\xi d\eta i_3$$

所以有：

$$dl d\theta = |J| d\xi d\eta \quad (6-56)$$

2) 单元的基本方程 前已得出，任意回转过面上泛函的极值问题由式(6-37)、式(6-39)及式(6-40)来表达，而有限元解的核心就是将泛函的整体表达式离散化，因此，应有：

$$J(\varphi) = \sum_c J^c(\varphi) \quad (6-57)$$

\sum_c 表示对所有单元求和。

这样, 将式(6-43)、式(6-54)、式(6-55)及式(6-56)代入式(6-40), 离散化后, 再整理, 对每个元素可得:

$$[K]^e \{ \varphi \} = \{ f \}^e \quad (6-58)$$

上式就是每个单元的有限元表达式。一般为了与弹塑性力学中的有限元的称号一致, 将矩阵 $[K]^e$ 称为元素(或单元)的刚度阵, $\{ f \}^e$ 则称为元素的负荷(或载荷)列向量。对图(6-8c)的求解区域而言, 它们可分别写成:

单元刚度阵:

$$\begin{aligned} [K]^e = & \iint_e \left[r \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\tau \bar{\rho}}{r |J|} d\xi d\eta \\ & (i, j = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (6-59)$$

负荷列向量:

$$\begin{aligned} \{ f \}^e = & \iint_e \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) A_r \tau \bar{\rho} d\xi d\eta \\ & (j = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (6-60)$$

由于变分原理中, 对进、出口边界条件是作为自然边界条件得到处理的, 所以对进、出口边界上的单元, 负荷列向量 $\{ f \}^e$ 还得叠加上有关线积分:

$$\{ f \}_{i-1}^e = - \int_{1-1'} q_{l,rr} - N_j \tau r \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta \quad (6-61)$$

或

$$\begin{aligned} \{ f \}_{2-2}^e = & \int_{2-2'} q_{l,rr} + N_j \tau r \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta \\ & (j = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (6-62)$$

应指出的是, 由于计算是在 $\xi - \eta$ 坐标系中进行的, 所以式(6-59)和式(6-60)中在单元的面积分为:

$$\iint_e d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} d\xi d\eta \quad (6-63)$$

同理, 沿有关边界的线积分为:

$$\int_{1-1'} d\eta = \int_{2-2'} d\eta = \int_{-1}^{+1} d\eta \quad (6-64)$$

3) 边界条件的有关问题

人工分界面 Σ 和叶面:

对于叶栅问题复杂多样的边界条件, 文献[15]提出的变分原理中, 全部边界条件都已根据具体情况, 划出人工分界面, 从而转化为自然边界条件, 因而在求解中不需再考虑它们, 这样就充分发挥了自然边界条件和人工分界面的独特作用, 这是文献[15]的作者对在叶轮机械气动计算领域中引进和推广有限元素法提供的一个较严密的基础理论。由于本节介绍的是

任意回转面最基本也是较简单的情况, 无需进行人工分界面的处理, 另外, 对于处理成自然边界条件的叶面上, 在无喷气和吸气时, 有:

$$q_n = (\rho A)_{pr} n = 0$$

因此, 此时在解题过程就不必再对叶面作任何额外的处理。

进、出口边界:

此处, 进、出口边界条件也是作为自然边界条件处理的, 它只对与其对应边界的有限单元有贡献, 因此, 只须对在这些边界上的单元中加入其线积分项, 以考虑对总体合成系数矩阵的影响: 在 1—1' 进口边界上: $q_{1,pr-} = \bar{\rho}_1 A_{11}$ 为进口密流。可根据计算的设计进口马赫数 M_1 , 由式 (6-33)、式 (6-43) 和式 (6-40 a) 求出相应的 A_1 和 ρ_1 , 再由已知的 β_1 就可由下式求得进口边界上的密流 q_{11} :

$$A_{11} = A_1 \cos \beta_1 \quad (6-65)$$

$$q_{11} = \bar{\rho}_1 A_{11} \quad (6-66)$$

(由于 “pr” 的意思就是指规定值, 这里已省去)

在 2—2' 出口边界上: $q_{1,pr+} = \bar{\rho}_2 A_{12}$ 为出口密流。在叶片无喷、吸气条件下, 且假定叶栅的无穷远处均匀流动时, 根据连续方程, 应有:

$$q_{12} \tau_2 r_2 \Delta \theta = q_{11} \tau_1 r_1 \Delta \theta \quad (6-67)$$

式中 $\Delta \theta$ 为角栅距, 从上式则有:

$$q_{12} = \frac{r_1 \tau_1}{r_2 \tau_2} q_{11} \quad (6-67 a)$$

周期性边界条件:

周期性边界 c_2 上应满足周期性条件, 此处将周期性边界条件作为强加边界条件来处理, 即 c_2 上势函数应满足的周期性条件为:

$$\varphi(l, \theta + m\Delta\theta) = \varphi(l, \theta) + m\Delta\varphi_{1,2}$$

$\Delta\theta$ 为角栅距。 $\Delta\varphi_1$ 和 $\Delta\varphi_2$ 分别表示栅前区边界 $\overline{13}$ 和 $\overline{1'3'}$ 、栅后区边界 $\overline{42}$ 和 $\overline{4'2'}$ 段上势函数 φ 之差值。根据势函数的定义, 有:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = r(A_0 + A_n)$$

沿着 c_1 边界积分上式, 考虑到此时边界上的气流为均匀, 则有:

$$\Delta\varphi_{1,2} = \int_0^{\theta + \Delta\theta} [(A_0 + A_n) r]_{1,2} d\theta = [(A_0 + A_n) r]_{1,2} \Delta\theta \quad (6-68)$$

式中 A_0 、 A_n 和 r 取自相应的栅前区和栅后区。

(4) 整体有限元方程组的合成 对整个求解区域的所有单元的刚度矩阵 $[K]^e$ 和单元负荷列向量 $\{f\}^e$ 按一定的规则叠加就汇集成总体刚度阵和总体负荷列向量, 从而得出了整个求解域的有限元方程组, 记作:

$$[K] = \sum_e [K]^e; \{f\} = \sum_e \{f\}^e; \{\varphi\} = \sum_e \{\varphi\}^e \quad (6-69)$$

即:

$$[K]\{\varphi\} = \{f\} \quad (6-70)$$

总体刚度阵是一个较大型的矩阵, 但其又具有稀疏、对称的性质, 为了节省计算机的贮存单元和计算时间, 在程序中可采用变带宽下三角一维数组贮存。

(5) 有限元方程中的数值积分 在上述的有限元方程中, 其刚度阵 $[K]^e$ (或 $[K]$) 和 荷载列向量 $\{f\}^e$ (或 $\{f\}$) 中的积分, 无论是面积分还是线积分, 此时要直接求积分还是比较困难的, 因为被积函数 $f(\xi, \eta)$ 一般较复杂, 通常难以用显式表示其积分, 所以一般都采用数值积分方法来计算积分值。数值积分一般又分为二类, 一类方法的积分点是等距的, 例如辛浦生方法; 另一类方法积分点是不等距的, 例如高斯积分法。在有限元法中, 由于被积函数很复杂, 一般采用高斯求积法, 因为它可用较少的积分点达到较高的精度, 从而可节省计算时间。

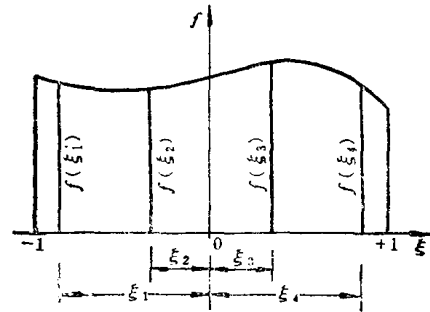


图6-13 高斯积分

一元求积公式:

要求在区间 $[-1, 1]$ 中求下列积分值 (见图 6-13):

$$J = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \quad (a)$$

选定 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为积分点, 然后由下式计算积分值:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi = G_1 f(\xi_1) + G_2 f(\xi_2) + \dots + G_n f(\xi_n) \\ &= \sum_{j=1}^n G_j f(\xi_j) \end{aligned} \quad (6-71)$$

式中 G_j 是加权系数。 G_j 和 ξ_j 是根据计算精度最高而选定的。为了达到最高的计算精度, 积分点 ξ_j 应是勒让德多项式 $L_n(\xi)$ 的根, 而且加权系数 G_j 的数值应按下式计算:

$$G_j = \frac{2}{(1 - \xi_j^2) [L'_n(\xi_j)]^2} \quad (b)$$

为了便于计算, 表 6-1 中列出了积分点 ξ_j 和加权系数 G_j 的数值, 对于 n 个积分点的情况, 高斯求积公式 (6-71) 对任一不高于 $2n - 1$ 次的多项式 $f(\xi)$ 都可给出准确的结果。

二元求积公式:

计算下面二重积分:

$$J = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (c)$$

先令 η 保持常数, 计算沿 ξ 方向的积分:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi, \eta) d\xi = \sum_{j=1}^n G_j f(\xi_j, \eta) = F(\eta)$$

再沿 η 方向积分, 得:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-1}^1 F(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^n G_i F(\eta_i) = \sum_{i=1}^n G_i \sum_{j=1}^n G_j f(\xi_j, \eta_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_i G_j f(\xi_j, \eta_i)
 \end{aligned} \tag{6-72}$$

表6-1 高斯积分点坐标和加权系数

$\pm \xi_j (\pm \eta_i)$		$G_j (G_i)$	
0.57735	02692	$n = 2$	1.00000 00000
0.77459	66692	$n = 3$	0.55555 55556
0.00000	00000		0.88888 88889
0.86113	63116	$n = 4$	0.34785 48451
0.33998	10436		0.65214 51549
0.90617	98459	$n = 5$	0.23692 68851
0.53846	93101		0.47862 86705
0.00000	00000		0.56888 88889

对目前我们采用的八结点等参单元，通常取 3 个积分点就基本上能满足工程设计计算上的精度要求，所以，下面的计算均采用三个积分点进行。

将式 (6-72) 运用到式 (6-59) 和式 (6-60) 中，则得：

$$\begin{aligned}
 [K]^e &= \iiint_V \left[r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\tau \bar{\rho}}{r |J|} d\xi d\eta \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\tau \bar{\rho}}{r |J|} d\xi d\eta \\
 &\quad (i, j = 1, 2, \dots, 8)
 \end{aligned} \tag{6-73}$$

所以，

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left(r_{n,n}^2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right] \right) \frac{\tau_{n,n} \bar{\rho}_{n,n}}{r_{n,n} |J|} G_n G_n \\
 &\quad (i, j = 1, 2, \dots, 8)
 \end{aligned} \tag{6-74}$$

同理，

$$\begin{aligned} \{f\}^e = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) A_u \tau \bar{f} d\xi d\eta \\ & - \int_{-1}^1 q_{l,pr} - N_j \left(\frac{r \partial \theta}{\partial \eta} \right) \tau d\eta + \int_{-1}^1 q_{l,pr} + N_j \left(\frac{r \partial \theta}{\partial \eta} \right) d\eta \\ & (j = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (6-75)$$

若单元不在进、出口边界，则无后两项线积分。

所以得：

$$\begin{aligned} f_j = & \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[\left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) A_u \tau \bar{p} \right]_{n,m} G_n G_m \\ & - \sum_{m=1}^3 q_{l,pr} - \left[N_j \left(\frac{r \partial \theta}{\partial \eta} \right) \tau G \right]_m + \sum_{m=1}^3 q_{l,pr} + \left[N_j \left(\frac{r \partial \theta}{\partial \eta} \right) \tau G \right]_m \\ & (j = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (6-76)$$

式中 $|J|$ 是雅可比矩阵的行列式，由式 (6-55 b) 得：

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial l}{\partial \eta} & \frac{\partial l}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \theta_i & -\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \theta_i \\ -\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} l_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} l_i \end{vmatrix} \quad (6-77)$$

由于 $N_i = N_i(\xi, \eta)$ 所以式 (6-74) 和式 (6-76) 便可求解。

致此，便可对有限元方程组式 (6-70) 求解

(6) 有限元方程组的求解

在式 (6-70)， $[K]\{\varphi\} = \{f\}$ 中，因为在系数 K_{ij} 中还含有 \bar{p} ，由式 (6-40 a)，我们已知：

$$\bar{p} = \left[1 - \frac{k-1}{2} (A^2 - A_0^2) \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

所以总方程式 (6-70) 是一个非线性方程组，这个方程组既包含了未知的势函数 φ ，又包含了密度 \bar{p} ，因此，用直接法求解是很困难的，需对此非线性方程组进行线性化处理，即采用密度场与势函数场联合迭代的办法来求解有限元方程组 (6-70) 式，其具体步骤是：

1) 首先假设一个初始密度场或上次迭代求得的密度场 $\{\bar{p}^{(n)}\}$ ，这样，方程组式 (6-70) 就成为一个线性代数方程组，这个方程组根据刚度矩阵中非零元素的贮存方式不同而有不同的解法，解此方程组后，便可得到势函数场 $\{\varphi^{(n)}\}$ 。

2) 由此势函数场 $\{\varphi^{(n)}\}$ 再根据式 (6-40 a) 便可算出对应的新的密度场 $\{\bar{p}^{(n+1)}\}$ 。如果 $\{\bar{p}^{(n)}\}$ 和 $\{\bar{p}^{(n+1)}\}$ 未能达到预先规定的吻合程度，则由它们来决定一个新的密度场 $\{\bar{p}^{(n+1)}\}^*$ ，为此，需引进一个低松弛因子 ν ，使得有：

$$\{\bar{p}^{(n+1)}\}^* = \{\bar{p}^{(n)}\} + \nu [\bar{p}^{(n+1)} - \bar{p}^{(n)}]$$

用 $\{\bar{p}^{(n+1)}\}^*$ 代替 $\{\bar{p}^{(n)}\}$ ，重复以上计算步骤，直至 $\{\bar{p}^{(n)}\}$ 和 $\{\bar{p}^{(n+1)}\}$ 达到预先规定的

吻合程度。这样，有限元方程式 (6-70) 得解，求出了势函数场 $\{\varphi\}$ 。

3) 迭代求解时的精度判断 对势函数场 $\{\varphi\}$ 和密度场 $\{\bar{\rho}\}$ 的迭代过程是否收敛，即前面所说的是否达到预先所规定的吻合程度，一般采用以下判断方式：

$$\left| \frac{\bar{\rho}^{(n+1)} - \bar{\rho}^{(n)}}{\bar{\rho}^{(n)}} \right| < \varepsilon_1 \text{ 和 } \left| \frac{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}{\varphi^{(n)}} \right| < \varepsilon_2 \quad (6-78)$$

式中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 可取 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 。

式 (6-78) 中，可取同时满足二式，也可取只满足前一判断式。

对于非线性问题，初值的选取是很重要的，如果它与正确值偏离太大，可能致使迭代失败。在实际计算时，往往先取 $\bar{\rho} = 1$ ，即先作不可压流场来计算，并以此得出的结果作为可压绕流的初始流场，显然，这样产生的偏差是不会太大的，尤其是对级压比不大的轴流式压气机。因此，也就解决了初始密度场 $\{\bar{\rho}\}$ 的选取问题。

(7) 关于相对气流角 β_2 的问题 一般说来，给出气流进气条件后，气流出气角 β_2 也就确定了，但是通过以上迭代求解后得出的 β_2 是不一定能满足广义的库塔-儒可夫斯基条件的。文献[14]对此作了有关的说明，即对于以等角速度旋转着的、叶型后缘为圆角形的任意回转面叶栅，当无显著分离区时（即除后缘邻区外，叶型上并无分离区），叶栅出气角（或后驻点位置）应当按照后缘两侧局部分离点 a 和 b （见图 6-14）的流速相等的条件来确定，即

$$W_a = W_b \quad (6-79)$$

也即：

$$A_a = A_b \quad (6-80)$$

在用程序计算时，一般都事先规定一个收敛精度 ε_3 ，收敛条件应为：

$$||A_b| - |A_a|| \leq \varepsilon_3 \quad (6-80a)$$

具体计算大致可按如下两种方法进行：

1) 正如前述，由于我们现在研究的叶片是无吸气和喷气的情况，所以由连续流性质，出口处的平均密流为，见式 (6-67a)

$$q_{t_2} = \frac{\tau_1 r_1}{\tau_2 r_2} q_{t_1}$$

在一定的 β_2 下的平均密流则为：

$$q_2 = q_{t_2} / \cos \beta_2 \quad (6-81)$$

而有式 (6-40a)，

$$\bar{\rho} = \left[1 - \frac{k-1}{2} (A_2^2 - A_1^2) \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

所以有式 (6-40b)，

$$q_2 = A_2 \bar{\rho} = A_2 \left[1 - \frac{k-1}{2} (A_2^2 - A_1^2) \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

联立式 (6-81) 和式 (6-40b)，便可求得对应于此时 β_2 下的 A_2 。

2) q_2 近似取下式

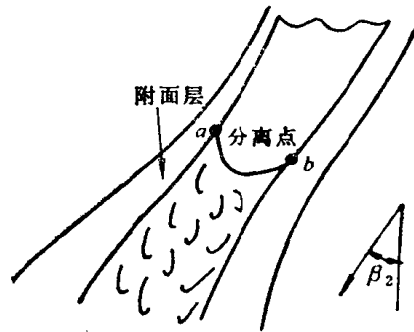


图6-14 尾迹区的流动

$$q_2 = \bar{\rho}_{\text{出}} A_2 \quad (6-82)$$

这里 $\bar{\rho}_{\text{出}}$ 代表出口处的相对密度。因为出口处密度已趋均匀，所以可近似地取出口最后一站上任一点的相对密度，这样，对应于此时 β_2 下的 A_2 就很容易由式 (6-82) 求出了，即：

$$A_2 = q_2 / \bar{\rho}_{\text{出}}$$

以上两种考虑相对气流角 β_2 的方法其计算框图大致如下：

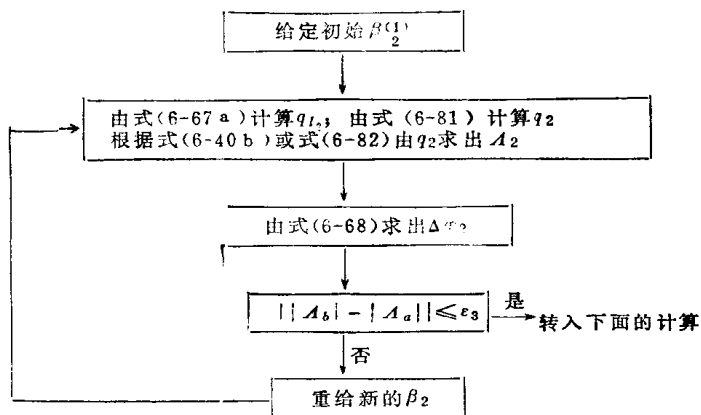


图 6-15

3) 两点说明 对于 β_2 的初始值的估计，对轴流式压缩机、风机，可按落后角公式确定：

$$\beta_2 = \beta_{A2} - \delta \quad (6-83)$$

而

$$\delta = m\theta\sqrt{t/b} \quad (6-84)$$

式中，

$$m = 2.3 \left(2 \frac{a}{b} \right)^2 - 0.002\beta_2 + 0.18 \quad (6-85)$$

$$\theta = \beta_{A2} - \beta_{A1} \text{ (翼型弯曲角)} \quad (6-86)$$

β_{A1} 、 β_{A2} 为叶片进出口安装角； t 为栅距； b 为叶片弦长； a 为翼型前缘至最大挠度处的距离。

将式 (6-83)、式 (6-84) 和式 (6-85) 迭代求解便可得出 β_2 。

对中线为抛物线和圆弧的压缩机、风机， m 值与安装角 β_1 的变化关系曲线见图 6-16，查出 m 后，即可由式 (6-84) 直接求出落后角 δ ，从而由式 (6-83) 得出 β_2 。

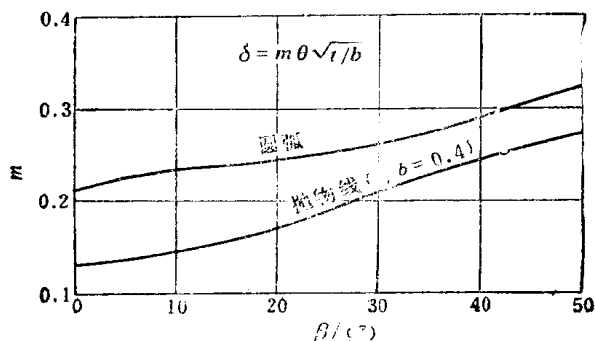


图6-16 安装角的变化曲线

其次, 当不满足式 (6-90 b) 时, 应如何给出它的 β_2 值。我们由初次近似的 $\beta_2^{(1)}$ 算得势函数场后, 若 $|A_0| < |A_1|$, 则应按图 6-14 所示方向增大 β_2 角, 重新计算势函数场。反之则应减小 β_2 角。 β_2 的改变, 在整个有限元方程组中只对方程右端的负荷列向量 $\{f\}$ 中含向量线积分的那一项有影响。

(8) 各物理量的求解 在解得有限元方程式 (6-70) 后, 即解得势函数场 $\{\varphi\}$ 后, 便可进一步求得速度、压力和密度。

相对速度:

$$A_1 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) / |J| \quad (6-87)$$

$$A_0 = \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial l}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) / (r |J|) - A_1 \quad (6-88)$$

式中 正如前面已指出, 应有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \varphi_i, & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \varphi_i \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \theta_i, & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \theta_i \\ \frac{\partial l}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} l_i, & \frac{\partial l}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} l_i \end{aligned} \right\} \quad (6-89)$$

在求得各结点的速度后, 则可进一步求出密度:

$$\bar{\rho} = \left[1 - \frac{k-1}{2} (A^2 - A_0^2) \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

压力则为:

$$\bar{P} = \bar{\rho}^{(k)} \quad (6-90)$$

(9) 关于速度的修正 沿着单元的边界, 势函数 φ 是连续的, 但其导数即速度却往往不是连续的, 因此, 在各单元的公共边界上就会出现速度不连续的情况, 如图 6-17 所示。

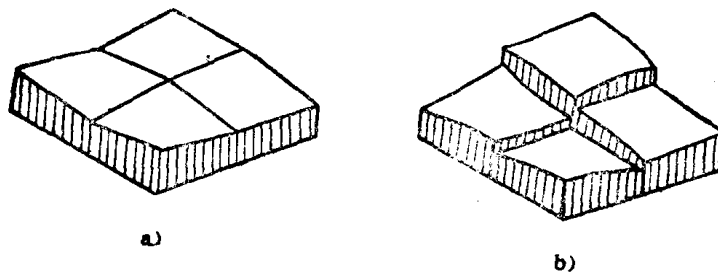


图6-17 修匀速度(a)与未修匀速度(b)

对于利用数值积分的曲边单元, 经验表明, 在积分点上算得的速度具有良好的精度, 而在结点上算得的速度精度却最差。而工程实际中感兴趣的乃是边缘和结点上的速度, 为了克服边缘和结点上速度不连续和精度差的缺点, 最好而又实用的办法是在每个单元内用最小二乘法修匀, 而在结点上取有关单元的速度平均值。

以修匀后的 4 个角点速度 \bar{A}_1 , \bar{A}_2 , \bar{A}_3 和 \bar{A}_4 作为未知数, 单元内部任一点修匀后的速度用形函数表示如下:

$$\bar{A}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i \bar{A}_i \quad (6-91)$$

式中, 其形函数 \bar{N}_i 为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, & \bar{N}_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \bar{N}_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, & \bar{N}_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \right\} \quad (6-92)$$

在单元内任一点, 修匀速度与未修匀速度之间的误差是:

$$e(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) - \bar{A}(\xi, \eta) \quad (6-93)$$

根据最小二乘法的原理确定 \bar{A}_1 、 \bar{A}_2 、 \bar{A}_3 和 \bar{A}_4 , 就必须使泛函

$$J = \iint e^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (6-94)$$

取极小值。

$$\text{即} \quad \frac{\partial J}{\partial \bar{A}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (6-95)$$

将式 (6-93)、式 (6-94) 代入, 得:

$$\left. \begin{aligned} \iint (A - \bar{A}) \bar{N}_1 |J| d\xi d\eta &= 0; \\ \iint (A - \bar{A}) \bar{N}_2 |J| d\xi d\eta &= 0; \\ \iint (A - \bar{A}) \bar{N}_3 |J| d\xi d\eta &= 0; \\ \iint (A - \bar{A}) \bar{N}_4 |J| d\xi d\eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-96)$$

上式是以 \bar{A}_1 、 \bar{A}_2 、 \bar{A}_3 和 \bar{A}_4 为未知量的代数方程组, 可利用高斯积分法求出未知量。但在这里我们可采用一种更为方便的解法, 即采用 2×2 高斯积分点, 这 4 个积分点分别为:

$$\begin{aligned} \text{I} &(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}); & \text{II} &(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}); \\ \text{III} &(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); & \text{IV} &(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}). \end{aligned}$$

在这 4 个积分点上, 先由未修匀的结点上的速度求出积分点的未修匀的速度, 然后, 让这 4 个积分点上的修匀速度 \bar{A} 等于未修匀速度 A ,

$$\text{即:} \quad \left. \begin{aligned} \bar{A}(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) &= A_{\text{I}} \\ \bar{A}(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) &= A_{\text{II}} \\ \bar{A}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) &= A_{\text{III}} \\ \bar{A}(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) &= A_{\text{IV}} \end{aligned} \right\} \quad (6-97)$$

因此, 在这 4 个积分点上, 都有 $A - \bar{A} = 0$, 当我们用 2×2 积分求式 (6-96) 时, 各个方程都将等于零。这就是说式 (6-97) 和式 (6-96) 是等价的。由式 (6-97) 求得修匀后四个角

点的速度 \bar{A}_1 、 \bar{A}_2 、 \bar{A}_3 和 \bar{A}_4 如下:

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \\ \bar{A}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & c & b \\ b & c & b & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad (6-98)$$

$$\text{式中} \quad a = 1 + \sqrt{3}/2; \quad b = -1/2; \quad c = 1 - \sqrt{3}/2 \quad (6-99)$$

而 A_1 、 A_1 、 A_1 和 A_2 是已先求出的4个高斯积分点I、II、III和IV上的未修匀的速度。各边中点的修匀速度则可由相邻角点的已修匀的速度取平均值而得到。其他任一点的修匀速度则可由式(6-91)求得。同时,这样算出的修匀速度,在各单元公共边上,不同的单元可能有不同的数值,可取各单元速度的平均值。

(10) 有限元代数方程组的解 前已指出,有限元方程组式(6-70)是个大型的非线性代数方程组,为了便于计算,需先进行线性化处理,即本次计算 φ 场时的 $\bar{\rho}$ 值取自上次迭代计算得到的 $\bar{\rho}$ 值,然后再求解此大型线性代数方程组。求解时应注意到,此线性代数方程组虽然是大型的,但其又是稀疏的(即有很多零元素)、对称的,根据 $[K]$ 矩阵的这一特点,为了减少计算机的贮存量 and 计算时间,可采用以下的贮存方式和解法:

1) 等带宽贮存方式和线性代数方程组的直接解 所谓等带宽,就是找出刚度矩阵 $[K]$ 的下三角阵的带域宽度(因其对称性,用上三角阵也可),令其为 dk ,那么就可以把 $[K]$ 阵中的带内元素,贮存在一个二元数组 $R[1:n, 1:dk]$ 的范围内,即把 $[K]$ 阵中的下三角形内各行元素都压缩到右边线,大大地节省了计算机的内存,从而也减少了计算量,加快了计算速度。

对这种贮存方式,我们可用消元法(直接法)来求解此大型线性代数方程组。

2) 一元数组紧缩贮存方式与线性代数方程组的迭代法求解 上面简单介绍了等带宽贮存方式,虽然已大大地节省了计算机中的贮存单元,但在 R 阵中,仍然存了不少零元素,为了进一步节省贮存单元和计算时间,可采用一元数组紧缩贮存,即只把 $[K]$ 阵中的非零元素一个接一个地排成一队贮存到一元数组 R_1 中去,也就是说 $[K]$ 阵中大量的零元素一个也不存,当然,这样做要有一定的技巧,但只要注意到 $[K]$ 阵的对称性和疏希性则并不难办到,这就最大可能地节省了计算机的贮存单元。

对于这种贮存方式,其线性代数方程组可采用迭代法求解,例如共轭斜量法就是一种有效的迭代方式。

对以上所介绍的两种有效的贮存方式和方程组的解法,其具体作法,读者可参看文献[6]。(其上不但有详细说明,还有对应的程序)

(11) 程序框图 以上介绍了任意回转面上以势函数 φ 为参变量的有限元解,其有关计算程序的基本框图如下:

三、任意回转面叶栅等熵流动(流函数 ψ)的加权有限元解

前面我们已介绍,有限元素法是在变分原理或加权余量原理的基础上采用分块逼近的思想而形成的系统的数值计算方法。上一节,我们已在变分法的基础上,对任意回转面上的气动问题,进行了以势函数为基本函数的有限元解。下面,我们将以流函数为基本函数,对回转面上的气动问题,进行伽辽金加权余量的有限元解,同时还给出其近似的变分原理。

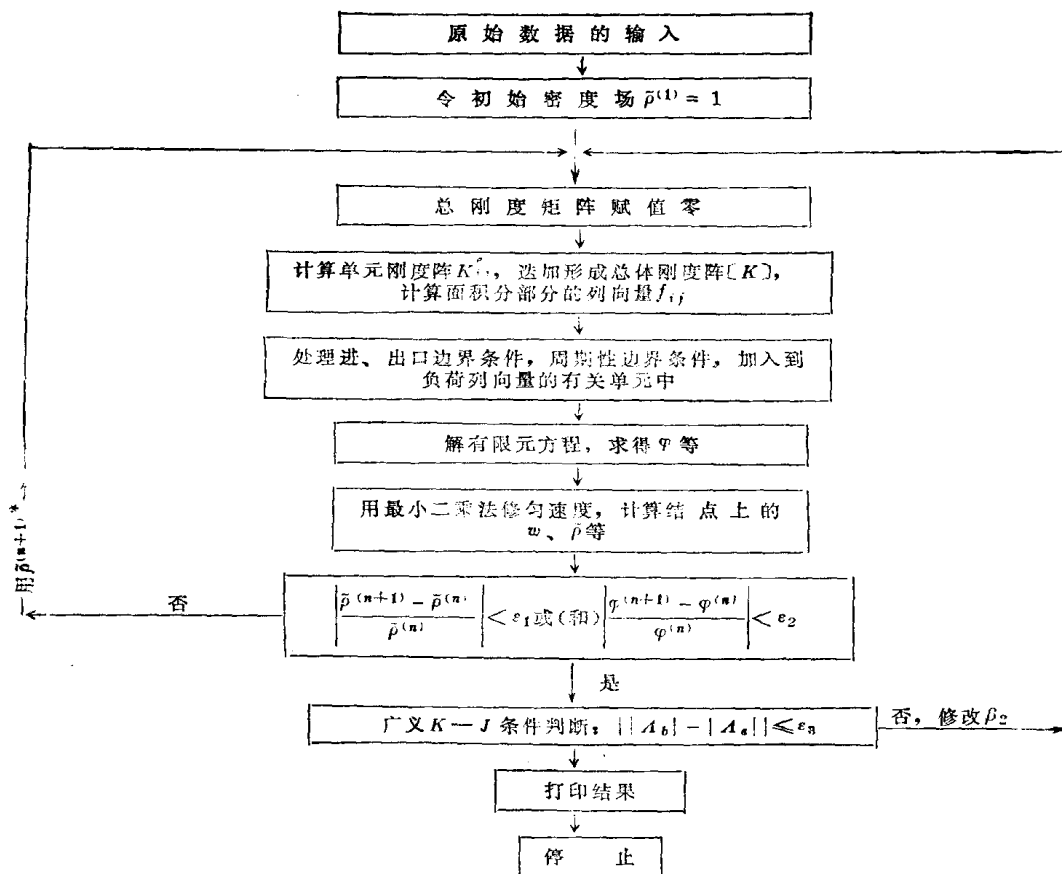


图 6-18

1. 气动方程组

仍有基本的气动方程组，式 (6-27 a)，如下：

连续方程：
$$\frac{\partial (\tau r \bar{\rho} A_t)}{\partial l} + \frac{\partial (\tau \bar{\rho} A_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

涡度方程，式 (6-28)：
$$\frac{\partial [(A_\theta + A_u) r]}{\partial l} - \frac{\partial A_t}{\partial \theta} = 0$$

能量方程，式 (6-29)：
$$\bar{\rho} = \bar{\rho}^{1/k} = \bar{a}^{2m} = \left\{ 1 - \frac{1}{2m} (A^2 - A_u^2) \right\}^m$$

式中变量符号含义同前。

因为已由式 (6-27 a) 引入流函数 ψ ，式 (6-30)：

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \tau r \bar{\rho} A_t, \quad \frac{\partial \psi}{\partial l} = -\tau \bar{\rho} A_\theta$$

又因为任意回转面是以子午流线为母线的回转面 (见图 6-19)，所以：

$$r = r(l) \tag{6-100}$$

由涡度方程有：

$$\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial l} + \frac{\partial (r A_u)}{\partial l} - \frac{\partial A_t}{\partial \theta} = 0$$

即：
$$\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial l} - \frac{\partial A_t}{\partial \theta} + 2 A_u \frac{dr}{dl} = 0$$

引入流函数，则：

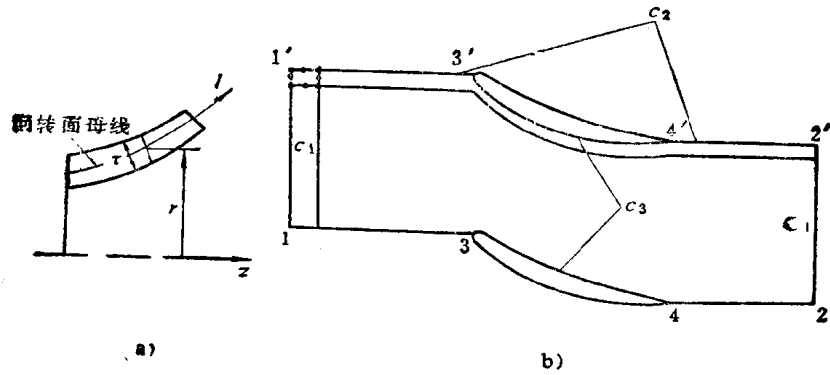


图6-19 任意回转面

a) 跨叶片回转流面的子午截面 b) 求解域

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(-\frac{r}{\tau \bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\tau r \bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + 2A_u \frac{dr}{dl} = 0$$

即,

$$-\frac{\partial}{\partial l} \left(E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(E_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - f = 0 \quad (6-101)$$

式中

$$E_l = \frac{r}{\tau \bar{\rho}}; \quad E_\theta = \frac{1}{\tau r \bar{\rho}}; \quad f = -2A_u \frac{dr}{dl} \quad (6-102)$$

边界条件为:

(1) 在进、出口边界 c_1 上, 由进、出口边界流动均匀的假设, 有:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{c_1} = \frac{Q \operatorname{tg} \beta_{1,2}}{\Delta \theta r_{1,2}} \quad (6-103)$$

式中 Q 为求解域叶片间流道的流量; $\Delta \theta$ 为相邻叶片的角栅距。

对式 (6-103), 进口边界取 “+” 号, 出口边界取 “-” 号。

(2) 在叶片型面 c_3 上, 取

$$\psi_{c_{3T}} = 0; \quad \psi_{c_{3\perp}} = \Delta \psi = Q \quad (6-104)$$

(3) 栅前区、栅后区 c_2 上的周期性边界:

$$\psi_{\perp} = \psi_{\top} + \Delta \psi \quad (6-105)$$

即有:

$$\psi(l, \theta + n\Delta\theta) = \psi(l, \theta) + n\Delta\psi_{1,2}$$

式中 $\Delta\theta$ 为角栅距; $\Delta\psi_{1,2}$ 则表示栅前区 $\overline{13}$ 和 $\overline{1'3'}$ 上以及栅后区 $\overline{42}$ 和 $\overline{4'2'}$ 上的流函数 ψ 的差值。

以上式 (6-101) 就是回转面上以流函数为基本函数的微分方程, 显然, 在亚声速流动时, 它是一个二阶拟线性椭圆方程, 其边界条件是式 (6-103)、式 (6-104)、式 (6-105)。

2. 加权有限元方程及其解

首先, 应与前节的方法一样, 对求解域进行有限元的剖分, 如图6-19 b, 详情见前。

为书写方便, 令

$$A(\psi) = - \left[\frac{\partial}{\partial l} \left(E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(E_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]$$

则式 (6-101) 改写为:

$$A(\psi) - f = 0 \quad (6-106)$$

设 ψ 是方程式 (6-106) 的近似解, 即:

$$\psi \approx \sum N_j \psi_j \quad (6-107)$$

将式 (6-107) 代入式 (6-106), 则有:

$$A(\psi) - f = \varepsilon(\psi) \quad (6-108)$$

取权函数系为 $\{G_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$

根据加权余量法的基本原理, $\varepsilon(\psi)$ 正交于 $\{G_i\}$,

$$\text{即:} \quad \langle \varepsilon(\psi), G_i \rangle = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6-109)$$

$$\begin{aligned} \text{则:} \quad \langle \varepsilon(\psi), G_i \rangle &= \iint_{\Omega} - \left[\frac{\partial}{\partial l} \left(E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(E_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] G_i d l d \theta \\ &\quad - \iint_{\Omega} f G_i d l d \theta = 0 \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

由格林定理及有关边界条件, 上式则为:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(\psi), G_i \rangle &= \iint_{\Omega} \left[E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \frac{\partial G_i}{\partial l} + E_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial G_i}{\partial \theta} \right] d l d \theta \\ &\quad - \iint_{\Omega} f G_i d l d \theta - \int_{c_1} R G_i d s = 0 \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (6-110)$$

式中 c_1 为进、出口边界, 由式 (6-103) 知:

$$\text{在进口边界上:} \quad R = E_l \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{Q \operatorname{tg} \beta_1}{\tau_1 \bar{\rho}_1 \Delta \theta} \quad (6-103 a)$$

$$\text{在出口边界上:} \quad R = E_l \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{Q \operatorname{tg} \beta_2}{\tau_2 \bar{\rho}_2 \Delta \theta} \quad (6-103 b)$$

另外, 在边界 c_2 和 c_3 上还应有强加边界条件: 式 (6-104) 和式 (6-105)。

在将求解域进行有限单元的剖分时, 我们仍选基本单元为等参四边形八结点单元, 所以在单元上有:

$$\psi = \sum_{i=1}^8 N_i \psi_i \quad (6-111)$$

形函数仍为式 (6-41): $N_i = N_i(\xi, \eta)$

ψ_i 为结点上的流函数值。

根据伽辽金加权原则, 取权函数为近似式中的形函数, 即:

$$G_i = N_i \quad (6-112)$$

将式 (6-111) 和式 (6-112) 代入式 (6-110), 经整理, 则得有限元方程组:

$$[K]\{\psi\} = \{f\} \quad (6-113)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad [K] = K_{ij} &= \sum_e \iint_e \left(E_l \frac{\partial N_i}{\partial l} \frac{\partial N_j}{\partial l} + E_\theta \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \right) d l d \theta \\ &= \sum_e K_{ij} = \Sigma [K]^e \end{aligned} \quad (6-114)$$

显然, 上式中, 有:

$$[K]_{ij} = K'_{ij} = \iint_e \left(E_i \frac{\partial N_i}{\partial l} \frac{\partial N_j}{\partial l} + E_\theta \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \right) d l d \theta \quad (6-115)$$

上式就称为单元 e 的刚度阵。

$$\text{同理: } \{f\} = \sum_e \{f\}' = \sum_e \iint_e f N_i d l d \theta + \int_{c_1} R N_i d s \quad (6-116)$$

$$\text{式中 } \{f\}' = f'_i = \iint_e f N_i d l d \theta + \int_{c_1} R N_i d s \quad (6-117)$$

上式中等号右端的第二项线积分只在进、出口边界的单元上才出现。

根据关系变换式 (6-55)、式 (6-55 b) 和式 (6-56), 就可将式 (6-115) 写为:

$$K'_{ij} = \iint_e \left[\frac{r}{\tau r \bar{\rho} |J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\tau r \bar{\rho} |J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial l}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial l}{\partial \xi} - \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) \right] d \xi d \eta \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-118)$$

式 (6-117) 则为

$$f'_i = \iint_e f N_i |J| d \xi d \eta \pm \int_{c_1} R N_i r \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d \eta \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-119)$$

同样, 利用高斯三点求积公式 (6-72) 和表 6-1, 则式 (6-118) 和式 (6-119) 分别为:

$$K'_{ij} = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left\{ \frac{r}{\tau r \bar{\rho} |J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\tau r \bar{\rho} |J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial l}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial l}{\partial \xi} - \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) \right\} G_n G_m \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-120)$$

$$f'_i = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 (f_{n,m} N_i |J|) G_n G_m \pm \sum_{n=1}^3 \left(R_n N_i r_n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) G_n \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-121)$$

式中, 等号右端第二项进口处单元取“+”号, 出口处单元取“-”号。

求解域所有单元叠加后则得

$$[K]\{\psi\} = \{f\} \quad (6-122)$$

对非线性代数方程组 (6-122) 的解及有关物理量的计算以及迭代收敛的判断和广义 $K-J$ 条件的应用等, 均同前节中的有限元解相同, 此处不再赘述。

上面所介绍的就是在任意回转面 (S_1 流面特例) 以流函数为基本函数的伽辽金加权有限元解。为了便于与以变分原理为基础的有限元解比较, 下面我们根据文献 [14] 所介绍的“对一个简单的数理方程导出它相应的变分原理”的方法, 对任意回转面上 (S_1 流面特例) 的基本微分方程 (6-101) 导出其近似的变分原理 (文献中导出了 S_2 流面近似的变分原理)。

3. 任意回转面叶栅 (流函数) 近似变分原理

以流函数的变分 $\delta\psi$ 遍乘式 (6-101) 左端各项, 并对整个求解域积分 (图 6-19 b), 分部积分后应用格林公式, 则可得下式:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} - \left[\frac{\partial}{\partial l} \left(E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(E_{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + f \right] \delta\psi dld\theta \\ &= \iint_{\Omega} \left[E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \frac{\partial \delta\psi}{\partial l} + E_{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \delta\psi}{\partial \theta} \right] dld\theta - \int_{c_1} R \delta\psi ds - \iint_{\Omega} f \delta\psi dld\theta \\ &= \iint_{\Omega} \left[E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \frac{\partial \delta\psi}{\partial l} + E_{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \delta\psi}{\partial \theta} - f \delta\psi \right] dld\theta - \int_{c_1} R \delta\psi ds \quad (a) \end{aligned}$$

式中 $R = E_l \frac{\partial \psi}{\partial n}$ 为式 (6-103 a) 和式 (6-103 b)。

等号右端第一项, 可改写为:

$$\delta \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[E_l \left(\frac{\partial \psi}{\partial l} \right)^2 + E_{\theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right] - f \psi \right\} dld\theta$$

引入泛函 J :

$$J = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[E_l \left(\frac{\partial \psi}{\partial l} \right)^2 + E_{\theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right] - f \psi \right\} dld\theta \quad (6-123)$$

则 (a) 式可改写为

$$\delta J = - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial l} \left(E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(E_{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + f \right] \delta\psi dld\theta + \int_{c_1} R \delta\psi ds$$

由上式可看出, 从泛函 J 的极值必要条件 $\delta J = 0$ 可知, 除在边界 c_2 和 c_3 外, $\delta\psi$ 是任意的, 所以必有:

$$\text{欧拉方程} \quad \frac{\partial}{\partial l} \left(E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(E_{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + f = 0 \quad (b)$$

自然边界条件: 在 c_1 上有式 (6-103 a) 和式 (6-103 b)。强加边界条件: 在 c_2 上有式 (6-105), 在 c_3 上有式 (6-104)。

上面的 (b) 式即为式 (6-101)。可见式 (6-101) 在上述条件下的解与式 (6-123) 中泛函 J 的极值问题等价, 即等价于变分原理 $\delta J = 0$ 。

那么, 我们由 (6-123) 式的泛函得变分:

$$\delta J = \iint_{\Omega} \left[E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial l} \right) + E_{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - f \delta\psi \right] dld\theta = 0$$

将式 (6-107) 代入上式的变分符号内, 得

$$\delta J = \iint_{\Omega} \left[E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \frac{\partial N_i}{\partial l} + E_{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} - f N_i \right] \delta\psi_i dld\theta = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

即有:

$$\iint_{\Omega} \left[E_l \frac{\partial \psi}{\partial l} \frac{\partial N_i}{\partial l} + E_{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} - f N_i \right] dld\theta = 0 \quad (6-124)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

根据伽辽金加权余量法的原则, 权函数 G_i 就取近似值中的基函数即形函数:

$$G_i = N_i$$

那么式 (6-124) 再加上边界 c_1 上的自然边界条件后就和由加权余量的式 (6-110) 是完全相同的。由此可见, 基于式 (6-110) 的伽辽金加权有限元法和基于式 (6-123) 的近似变分原理的有限元法是一致的。

四、平面叶栅绕流的有限元解

1. 平面叶栅的气动方程

对进、出口有效通流截面积变化不大 (见图6-20 a)、速度不太大、压力变化较小的轴流叶轮机械, 如轴流式通风机等 (图6-20 b) 的 S_i 流面的气动问题, 我们可以认为是理想气体作相对定常, 绝热 (无粘性) 的无旋不可压平面叶栅绕流问题 (此时它也是任意回转面在 $\bar{p} = \text{常数}$, $\tau = 1$ 时的特例)。

这时的基本气动方程组为:

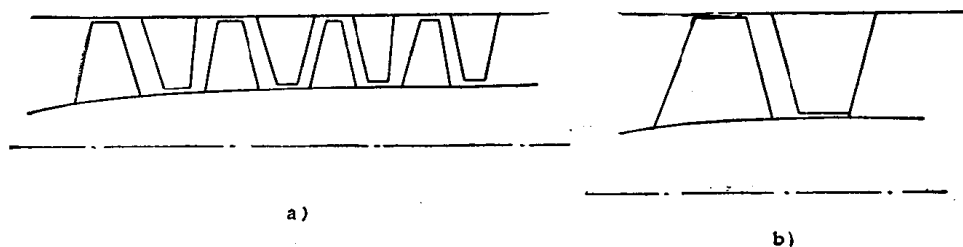


图6-20 子午面

a) 轴流压缩机子午面 b) 轴流通风机子午面

$$\text{连续方程} \quad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (6-125)$$

$$\text{涡度方程} \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0 \quad (6-126)$$

2. 微分方程及其变分原理

从全微分定理可知, 由式 (6-125), 必有一流函数 ψ 存在, 使得有:

$$\partial\psi/\partial y = w_x; \quad \partial\psi/\partial x = -w_y \quad (6-127)$$

将式 (6-127) 代入式 (6-126), 得:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (6-128)$$

上式便是不可压理想气体在无旋平面叶栅中以流函数为基本函数的待求微分方程。其边界条件为 (见图6-21):

(1) 在求解域进、出口边界 c_1 上, 应满足:
进口边界上:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{c_1} = v_x \operatorname{tg} \beta_1 \quad (6-129)$$

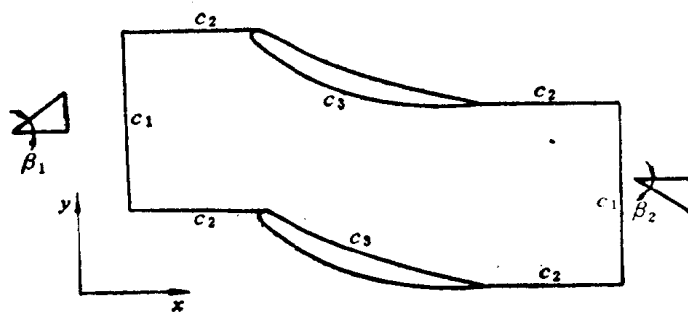


图6-21 平面叶栅求解域

出口边界上:
$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{c_1} = -v_z \operatorname{tg} \beta_2 \quad (6-130)$$

而 v_z 是远前方来流的轴向速度

(2) 在叶型表面 c_3 上:

$$\psi = \text{常数} \quad (6-131)$$

(3) 在叶栅前后区的周期性边界上

$$\psi_{\text{上}} - \psi_{\text{下}} = \Delta \psi \quad (6-132)$$

式中

$$\Delta \psi = v_z t = Q \quad (6-133)$$

t 为平面叶栅栅矩; Q 为求解域中两叶片间流道的流量。

显然, 式 (6-128) 是一个标准的拉普拉斯方程, 而流函数 ψ 则是满足此方程的调和函数。

同理, 由式 (6-126), 也必有一势函数 φ 存在, 使得有:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = w_x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = w_y \quad (6-134)$$

将式 (6-134) 代入式 (6-125) 便得:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (6-135)$$

上式与式 (6-128) 相同, 同样是一个拉普拉斯方程。可见, 对平面叶栅不论是解以流函数为基函数的式 (6-128), 还是以势函数为基函数的式 (6-135), 均可得到所要求的速度场。下面我们将只进行以流函数 ψ 为基函数的式 (6-128) 的有限元解。

由于微分方程式 (6-128)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

是一个拉普拉斯方程, 因此根据本章 § 1 中介绍的极小泛函基本定理, 微分方程式 (6-128) 的边值问题等价于求解泛函:

$$J(\psi) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{c_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \psi ds \quad (6-136)$$

的极值问题。泛函的强加边界条件是在叶型表面应满足式 (6-131) 和在叶栅前、后区的周期性边界条件式 (6-132)。而式 (6-129)、式 (6-130) 已作为自然边界条件在泛函的表达式中反映出来。

$$\text{令} \quad \delta J(\psi) = 0 \quad (6-137)$$

并考虑强加边界条件式 (6-131) 和式 (6-132), 便可求出流函数 ψ , 再由式 (6-127), 则可得到速度的分布。

3. 有限元方程的导出及其解

由式 (6-137), 得

$$\begin{aligned} \delta J(\psi) = & \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ & - \int_{c_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi ds = 0 \end{aligned} \quad (6-138)$$

(1) 单元的选择和求解区域的剖分 前面的计算中, 所选取的单元均为四边形八结点单元, 本节选用三结点三角形单元作为基本单元 (见图6-22), 对求解区域剖分为有限个三角形单元。剖分时, 可将求解区域的栅前区、中间区和栅后区沿 x 方向分别划分为不同的等分, 而沿 y 方向则可进行等距离划分, 这样就把求解域划分为由四边形单元组成, 再联接每个四边形的一根对角线, 最后划分成三角形单元。为了提高精度, 可在叶栅进口沿 x 方向划密些, 也可在靠近叶背、叶腹处沿 y 方向加密划分点。由于三结点 (以三个顶点为结点) 的三角形的计算较简单, 可不再象前面的计算那样引入 $\xi - \eta$ 坐标系, 计算直接在 $x - y$ 坐标系中进行。

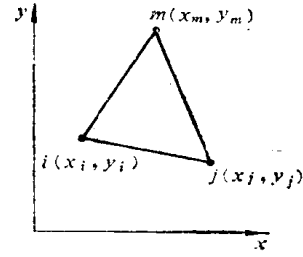


图6-22 三角形单元

(2) 插值函数

设单元 e (见图6-22) 上的流函数 ψ 是坐标 x, y 的线性函数, 为:

$$\psi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (6-139)$$

式中 α_1, α_2 和 α_3 是待定常数, 它们可由结点上的流函数 ψ_i 来决定。为此, 只要将结点的坐标及流函数值代入式 (6-139), 则得到:

$$\begin{cases} \psi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ \psi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ \psi_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{cases}$$

解以上线性代数方程组, 就可得到:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2\Delta} (a_i \psi_i + a_j \psi_j + a_m \psi_m) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\Delta} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_m \psi_m) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\Delta} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_m \psi_m) \end{aligned} \right\} \quad (6-140)$$

将式 (6-140) 代入式 (6-139), 经整理, 得出以单元三个顶点的 ψ 值所表示的三角形单元 e 内的流函数值的表达式:

$$\psi = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) \psi_i + (a_j + b_j x + c_j y) \psi_j + (a_m + b_m x + c_m y) \psi_m] \quad (6-141)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j; & a_j &= x_m y_i - x_i y_m; & a_m &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_i - y_m; & b_j &= y_m - y_i; & b_m &= y_i - y_j \\ c_i &= x_m - x_j; & c_j &= x_i - x_m; & c_m &= x_j - x_i \end{aligned} \right\} \quad (6-142)$$

而 Δ 是表示单元 e 的面积:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i) \quad (6-143)$$

由式 (6-141), 记:

$$\left. \begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \\ N_m(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_m + b_m x + c_m y) \end{aligned} \right\} \quad (6-144)$$

则式 (6-141) 可改写为:

$$\psi = [N_i \ N_j \ N_m] \{ \psi \}^e = [N] \{ \psi \}^e \quad (6-145)$$

式中 N 就是形函数。而

$$\{ \psi \}^e = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_m \end{Bmatrix} \quad (6-146)$$

将式 (6-145) 代入式 (6-138), 则泛函 J 成为 ψ_i 的二次式, 使泛函 J 取极小值的条件就变为:

$$\begin{aligned} \delta J(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) / \delta \psi_i &= 0 \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (6-147)$$

(3) 有限元方程的导出 由于求解区域 Ω 已划分成由有限个三角形单元组成, 所以有:

$$J = \sum_e J^e \quad (6-148)$$

这里 \sum_e 表示对三角形单元求和。

所以
$$\delta J / \delta \psi_i = \sum_e \delta J^e / \delta \{ \psi \}^e \quad (6-149)$$

对不在进、出口边界 c_i 上的单元 (设其三个顶点的编号为 i, j, m), 此时式 (6-138) 中等号右端第二项为零, 因此:

$$\begin{aligned} \delta J^e / \delta \psi_i &= \iint_e \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_e \left[\frac{b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_m \psi_m}{2\Delta} \frac{b_i}{2\Delta} + \frac{c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_m \psi_m}{2\Delta} \frac{c_i}{2\Delta} \right] dx dy \\ &= \iint_e \left[\frac{b_i b_i \psi_i + b_i b_j \psi_j + b_i b_m \psi_m}{4\Delta^2} + \frac{c_i c_i \psi_i + c_i c_j \psi_j + c_i c_m \psi_m}{4\Delta^2} \right] dx dy \\ &= \frac{[b_i b_i + c_i c_i \quad b_i b_j + c_i c_j \quad b_i b_m + c_i c_m]}{4\Delta^2} \{ \psi \}^e \iint_e dx dy \\ &= \frac{1}{4\Delta} [b_i b_i + c_i c_i \quad b_i b_j + c_i c_j \quad b_i b_m + c_i c_m] \{ \psi \}^e \end{aligned}$$

式中 Δ 为三角形单元面积, 而对三角形单元而言, 有:

$$\iint_e dx dy = \Delta$$

同理:

$$\delta J^e / \delta \psi_j = \frac{1}{4\Delta} [b_j b_i + c_j c_i \quad b_j b_j + c_j c_j \quad b_j b_m + c_j c_m] \{\psi\}^e$$

$$\delta J^e / \delta \psi_m = \frac{1}{4\Delta} [b_m b_i + c_m c_i \quad b_m b_j + c_m c_j \quad b_m b_m + c_m c_m] \{\psi\}^e$$

因此, 由以上 3 式可知:

$$\delta J^e / \delta \{\psi\}^e = [K]^e \{\psi\}^e \quad (6-150)$$

式中

$$[K]^e = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \quad (6-151)$$

对于有边线落在进、出口边界 c_1 上的单元, 我们先来看在进口边界上, 假设此时是单元 ijm 的 \bar{jm} 边落在栅前区的边界 c_1 上, 则根据式 (6-129):

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{c_1} = v_z \operatorname{tg} \beta_1 \quad (6-129)$$

这样, 变分后的式 (6-138) 等号右端第二项不为零, 而是:

$$\delta J^e / \delta \psi_i \Big|_{c_1} = \int_{y_m}^{y_j} v_z \operatorname{tg} \beta_1 \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) dy$$

将式 (6-142) 中有关系数代入上式, 得:

$$\begin{aligned} \delta J^e / \delta \psi_i \Big|_{c_1} &= v_z \operatorname{tg} \beta_1 \frac{1}{2\Delta} \left[a_i (-y_m + y_j) + b_i x_j (-y_m + y_j) + c_i \frac{-y_m^2 + y_j^2}{2} \right] \\ &= v_z \operatorname{tg} \beta_1 \frac{(-y_m + y_j)}{2\Delta} \left[x_j y_m - x_m y_j + y_j x_j - y_m x_j + (x_m - x_j) \frac{y_m + y_j}{2} \right] \end{aligned}$$

注意到在 c_1 边界上有: $x_j = x_m$, 上式方括号内则为零, 因此上式等于零, 即

$$\delta J^e / \delta \psi_i \Big|_{c_1} = 0 \quad (a)$$

而

$$\delta J^e / \delta \psi_j \Big|_{c_1} = \int_{y_m}^{y_j} v_z \operatorname{tg} \beta_1 \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) dy$$

同样将式 (6-142) 中有关的系数代入上式, 并也注意到 $x_j = x_m$, 则得:

$$\delta J^e / \delta \psi_j \Big|_{c_1} = v_z \operatorname{tg} \beta_1 \frac{(-y_m + y_j)}{2\Delta} \times \frac{1}{2} [-x_i y_m + y_m x_j + x_i y_j - x_m y_j]$$

在上式的方括号中加入 $x_m y_i - x_j y_i$ (因为有 $x_m = x_j$, 所以不影响其最终结果), 再注意到式 (6-142), 可知此时上式的方括号内为 2Δ , 所以有:

$$\delta J^e / \delta \psi_j \Big|_{c_1} = \frac{1}{2} v_z \operatorname{tg} \beta_1 (-y_m + y_j) \quad (b)$$

同理:

$$\left. \delta J^e / \delta \psi_m \right|_{c_1} = \frac{1}{2} v_z \operatorname{tg} \beta_1 (-y_m + y_j) \quad (c)$$

将以上 (a)、(b)、(c) 三式用向量的形式来表示:

$$\{f\}^e = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} v_z \operatorname{tg} \beta_1 (y_j - y_m) \\ \frac{1}{2} v_z \operatorname{tg} \beta_1 (y_j - y_m) \end{array} \right\} \quad (6-152)$$

显然, y_m 和 y_j 分别是三角形单元在边界 c_1 上的 j 顶点和 m 顶点的 y 坐标。

同理, 在栅后区的 c_1 边界上, 有:

$$\{f\}^e = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{2} v_z \operatorname{tg} \beta_2 (y_m - y_j) \\ -\frac{1}{2} v_z \operatorname{tg} \beta_2 (y_m - y_j) \end{array} \right\} \quad (6-153)$$

所以有:

$$\delta J^e / \delta \{\psi\}^e = [K]^e \{\psi\}^e - \{f\}^e = 0 \quad (6-154)$$

将各单元叠加, 则得到:

$$\delta J / \delta \psi_i = \sum_e \frac{\delta J^e}{\delta \{\psi\}^e} = [K] \{\psi\} - \{f\} = 0 \quad (6-155)$$

(4) 强加边界条件

1) 在叶型表面上

由式 (6-131): $\psi = \text{常数}$

不失一般性, 可取: 叶背 $\psi = 0$; 叶腹 $\psi = \Delta\psi = Q$

2) 在栅前、栅后区上、下边界的对应节点, 有周期性边界条件:

$$\psi_{\text{上}} = \psi_{\text{下}} + \Delta\psi$$

(5) 有限元方程的解

经过以上处理后, 式 (6-155) 成为:

$$[K]^* \{\psi\} = \{f\}^* \quad (6-156)$$

上式是一个大型线性代数方程组, 可直接求解。

解得网络点 (即结点) 上的流函数 $\psi_i(x_i, y_i)$ 后, 便可由式 (6-127) 和式 (6-145), 求出任一三角形单元 ijm 内的分速度 w_x 和 w_y :

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial [N] \{\psi\}^e}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_m \psi_m) \\ w_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2\Delta} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_m \psi_m) \end{aligned} \right\} \quad (6-157)$$

从而也可得合速度 w :

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad (6-158)$$

§ 6-3 S_2 流面设计的有限元素法

在前面一节关于 S_1 流面的计算, 是假定 S_1 流面为一些任意回转面, 它的形状和厚度的分布是根据 S_2 流面的计算所确定或根据轴流式叶轮机子午面流道形状来估定, 通过这个流面的流动分析, 则可求出气流参数沿周向和轴向的分布以及叶片型线的影响, 并且为 S_2 流面的计算提供原始数据 (即 S_2 流面的形状及流片厚度分布)。

关于 S_2 流面的计算, 在实际中, 也与 S_1 流面相似, 作为初步的近似, 通常也只取把流过通道的流量大致上平分的那个流面, 即所谓的 S_{2m} 作为设计计算的代表, 因为它上面的气流参数近似地描写了整个通道中气流状态。所以, 最终通过对这个流面的分析, 得出流场沿径向和轴向的分布, 从而可分析子午面流道型线、叶片径向线位置、叶片的后掠和周向倾斜以及叶片厚度分布对气流的影响, 并且为 S_1 流面的计算提供其形状和厚度分布的原始数据。由于目前在对于两类相对流面的普遍理论的实际应用, 往往还只是将 S_1 流面假定为任意回转面, 而 S_2 流面也只是 S_{2m} 流面化, 即只是进行所谓“准三元流解”, 所以在数值计算中, 又可用周向平均化的子午面流动来代替 S_{2m} 流面, 其数值结果是基本一致的。本节将介绍 S_2 流面的有限元解。并将计算数据与试验数据进行了比较, 结果是令人满意的。

一、 S_2 流面求解气流参数的基本方程

前面的有关章节中已全面地介绍了透平压缩机械中气动力学中的基本方程, 在具体求解时, 根据给定的条件不同, 从而方程组在形式上有所差异而已。本节用有限元素法求解 S_2 流面的气动问题时, 其有关基本方程如下:

气动力学方程组:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{w_\theta}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} + w_z \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I_R}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} + F_r + f_r \\ \frac{w_r}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial r} + \frac{w_z}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial z} &= F_\theta + f_\theta \\ -w_r \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial(v_\theta r)}{\partial z} &= -\frac{\partial I_R}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} + F_z + f_z \end{aligned} \right\} \quad (6-159)$$

F 与 W 的正交关系:

$$F_r w_r + F_\theta w_\theta + F_z w_z = 0 \quad (6-160)$$

能量方程

$$\frac{DI_R}{Dt} = T \frac{DS}{Dt} + f \cdot W \quad (6-161)$$

连续方程

$$\frac{\partial(\rho r B w_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho r B w_z)}{\partial z} = 0 \quad (6-162)$$

热力学第二定律

$$T \frac{DS}{Dt} = \frac{Dq}{Dt} + \Phi/\rho \quad (6-163)$$

状态方程

$$\rho = T^{\frac{1}{k-1}} e^{c - \frac{S}{R}} \quad (6-164)$$

式中 c 为积分常数
转子焓

$$I_R = c_p T + \frac{w^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad (6-165)$$

需要指出的是, 以上前五个方程中, 只有四个是独立的, 例如第 5 个方程, 即能量方程就可代替前四个方程中的任一个。因此, 在 S_2 流面上, 以上实际上只有八个独立的方程, 但方程中的未知参数却有十个: w_r 、 w_θ 、 w_z 、 F_r 、 F_θ 、 F_z 、 I_R 、 S 、 T 和 ρ , 这样, 要获得封闭的方程组, 还需要补充二个独立的方程。

在解正问题时, S_2 流面的方程式 $\theta = \theta(r, z)$ 是给定的, 因此, 可以从 F 力和流面的法线方向平行的条件, 补充二个方程式:

$$\frac{F_r}{F_\theta} = \frac{n_r}{n_\theta} \quad (6-166)$$

$$\frac{F_z}{F_\theta} = \frac{n_z}{n_\theta} \quad (6-167)$$

在设计问题中, 补充的两个方程是:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F_z}{F_\theta r} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_r}{F_\theta r} \right) \quad (6-168)$$

$$\text{及} \quad v_\theta r = c(r, z) \quad (6-169)$$

在设计中, 往往采用

$$v_\theta r = \text{常数} \text{——等环量设计。}$$

这样, S_2 流面的十个未知数, 同时有十个独立的方程, 是可以求解的。

二、 S_2 流面主方程式的选择

所谓主方程式的选择, 就是决定以哪个气流参数作为因变量, 并找出因变量与独立变量 (r, θ, z) 间的微分方程。这个微分方程就是解题时的“主方程式”。因变量选得不同, 主方程式也就不同。只要求出了主方程式的因变量与独立变量间的函数关系, 其他气动参数也就完全确定了。

我们知道, S_2 流面的连续方程式 (6-162) 是存在一个流函数 ψ 的必要和充分条件, 即有下列关系式存在 (其中, B 为薄流片的角厚度):

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \rho r B w_z; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\rho r B w_r \quad (6-170)$$

将上式代入气动方程组式 (6-159) 的第一个径向方程中, 得:

$$\begin{aligned} & -\frac{w_\theta}{r} \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial r} + w_z \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho B r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho B r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \\ & = -\frac{\partial I_R}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} + F_r + f_r \end{aligned} \quad (a)$$

令 $E = E(r, z) = 1/(\rho B r)$, 以及:

$$F = -\frac{1}{w_z} \left[\frac{\partial I_R}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - F_r - f_r - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial (v_\theta r)}{\partial r} \right]$$

则 (a) 式为

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial z} \left(E \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \right) + \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left(E \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \right) + F(r, z) = 0 \quad (6-171)$$

在上式中, 先将 E 、 F 都近似当作已知函数, ρ 和 $F_r + f_r$ 都从上次近似解求出。这样, 上式就是一个准调和方程。至此, 我们就得出了求解 S_2 流面气流参数的以流函数为基本因变量的主方程式 (6-171), 它可能是个椭圆方程, 也可能是双曲线型方程。如果气流角 β 已知, 当相对马赫数 M_∞ 是亚声速时, 方程 (6-171) 就是椭圆方程。同样, 如果规定了 $(v_\theta r)$, 那么对亚声速的子午速度, 方程同样也是椭圆方程。

三、 S_2 流面主方程式的有限元解

文献〔2〕指出, 根据以上导出的以流函数 ψ 为因变量的主方程式在轴流式压缩机 S_2 流面的求解域 V 内为:

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left(E \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \left(E \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \right) + F(r, z) = 0 \quad (6-171)$$

在外表面 S 上, 其边界条件是:

$$E \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha_1 (\psi - \psi_0) = 0 \quad (6-172)$$

显然, 在一般情况下, 方程 (6-171) 是不可能准确求解的。因此, 可利用伽辽金加权余量的有限元法, 则可得出其数值解。先将式 (6-171) 和式 (6-172) 各乘以 $\frac{1}{r}$ 后写成如下形式:

在 V 域内:

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left(E \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \left(E \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \right) + F(r, z) \right\} = 0 \quad (6-173)$$

在 S 上:

$$\frac{1}{r} \left[E \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha_1 (\psi - \psi_0) \right] = 0 \quad (6-174)$$

1. 微分方程的加权余量

我们要求得一个未知的近似值 $\psi(r, z)$, 使对应的加权余量为零:

$$\int_V G(r, z) R_V(r, z) dV + \int_S G(r, z) R_S(r, z) dS = 0 \quad (6-175)$$

式中 $G(r, z)$ 是权函数; R_V 和 R_S 分别称为容积余量和表面余量。

当 $\psi(r, z)$ 是式 (6-171) 和式 (6-172) 的准确解时, 则在域内任一点有:

$$R_V = R_S = 0$$

$$\text{则 } R_V = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left(E \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \left(E \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \right) + F(r, z) \right\} = \text{容积余量} \quad (6-176)$$

$$R_S = \frac{1}{r} \left[E \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha_1 (\psi - \psi_0) \right] = \text{表面余量} \quad (6-177)$$

考虑在子午平面中:

$\Omega = V$ 与子午平面的相截区域;

$c = S$ 与子午面的交线。

则方程 (6-175) 为:

$$\int_{\Omega} -G \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(E \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + F(r, z) \right] 2\pi d\Omega + \int_c GE \frac{\partial \psi}{\partial n} 2\pi dc = 0 \quad (6-178)$$

对上式分步积分, 由格林公式, 且若 ψ 值在有关的边界上满足规定的 ψ_0 , 则有:

$$\int_{\Omega} \left[E \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} \right) - FG \right] d\Omega = 0 \quad (6-179)$$

因为在求解域 Ω 上的整体坐标系为 $z-r$ 坐标, 所以上式为:

$$\iiint_{\Omega} \left[E \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} \right) - FG \right] dr dz = 0 \quad (6-180)$$

2. 单元的选取和整体的剖分以及坐标的变换

(下面凡与 S_i 流面的有限元解相似之处均只简单叙述)

将流体区域 Ω 划分为有限个四边形单元, 单元取八结点等参单元 (见图 6-23 a)。这样, 在每个单元上, 未知函数 ψ 具有由结点值 ψ_i 以及一组经选择的插值函数即形函数所决定:

$$\psi = \sum_1^8 N_i \psi_i \quad (6-181)$$

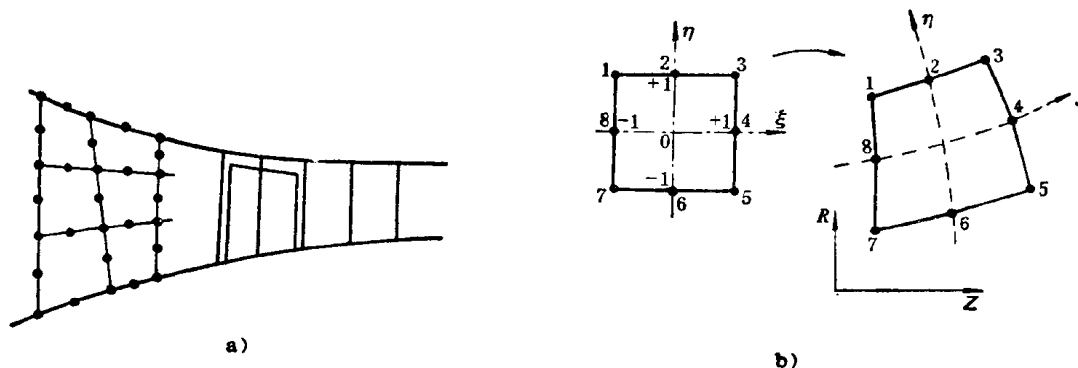


图6-23 子午面结点的形成及四边形等参单元

在局部坐标系 $\xi-\eta$ 中, 形函数与坐标的关系仍为式 (6-41)。(见图 6-23 b)。

局部坐标 (ξ, η) 和整体坐标 (r, z) 之间的坐标变换式为:

$$r = \sum_1^8 N_i(\xi, \eta) r_i, \quad z = \sum_1^8 N_i(\xi, \eta) z_i \quad (6-182)$$

因而有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-183)$$

而此时的雅可比行列式则为:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \eta} & -\frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{vmatrix} \quad (6-184)$$

及 $dz dr = |J| d\xi d\eta$ (6-185)

3. 有限元方程的形成

将式 (6-181) 代入式 (6-180), 同时考虑到伽辽金加权余量法的加权原则是取权函数等于近似式中的形函数 $G_i = N_i$, 则对任一单元而言, (6-180) 式写为:

$$\iint_e \left\{ E \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \Sigma \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \Sigma \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \right] - FN_j \right\} dr dz = 0 \quad (6-186)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, 8)$$

为方便起见, 上式可写为:

$$[K]^e \{\psi\}^e = \{F\}^e \quad (6-187)$$

式中:

$$K_{ij}^e = \iint_e E \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dr dz \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-188)$$

$$F_j^e = \iint_e FN_j dr dz \quad (j = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-189)$$

根据关系变换式 (6-183)、式 (6-184) 和式 (6-185), 则将式 (6-188) 改写为:

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{E}{|J|} \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-190)$$

同理:

$$F_j^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 FN_j |J| d\xi d\eta \quad (j = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-191)$$

再利用高斯三点求积公式 (6-72) 和表 6-1, 则求出积分式 (6-190) 和式 (6-191) 分别为:

$$K_{ij}^e = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left\{ \frac{1}{\rho B r |J|} \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \right] \right\}_{n,m} G_n G_m \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8) \quad (6-192)$$

$$f_j^e = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 (FN_j |J|)_{n,m} G_n G_m \quad (6-193)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 8)$$

对每个单元都写出式 (6-192) 和式 (6-193), 最后将所有单元的式 (6-192) 和式 (6-193) 按一定规律合成为一个总的方程:

$$[K]\{\psi\} = \{F\} \quad (6-194)$$

上式就是子午面上的总体有限元方程组。在子午面上剖分出有限元网络时, 一经确定, 则每个站上结点的数目就是固定的, 而角结点的位置则由在均匀流动中通过每个单元的质量流量相同来决定或者由等距离分布来决定。

4. 有限元方程的解

(1) 前面形成以流函数 ψ 为因变量的主方程式时已指出, 首先须按经验数据或已有机器的试验特性估计转子焓 I_R 和熵 S 。

(2) 按轴流机械的设计习惯给定 rv_0 沿径向的分布。

(3) 子午面内、外壳上的 ψ 值应按流函数的性质给定。

(4) 由于有限元方程 (6-194) 是非线性的, 因此, 必须按下面的步骤迭代求解:

1) 假设流函数的初始近似值, 例如可由速度均匀分布来假设或参考其他类似的机器进行类比假设。

2) 由已知的输入条件, 计算出进口第一站所有网络点(结点)的热力参数。

3) 这样, 第 i 站的结点的热力参数值就可通过前一站即 $(i - 1)$ 站上的值而求出。此时, 应注意到假定已有下面的关系:

在静子中: $i^* = c_p T^*$ 沿流线为常数

在转子中: $I_R = c_p T^* - \frac{\omega^2 r^2}{2}$ 沿流线为常数

在通道中: $rv_0 = \text{常数}$ 沿流线为常数

这样, 结点 A (见图6-24) 上的热力参数就可由 Z 点所算得的值来决定。

例如, 由于 Z 点是流线 AZ 与 $(i - 1)$ 站的交点, 所以应有:

$$\psi_z = \sum_{i=c}^E N_i(\xi_z, \eta_z) \psi_i \quad (a)$$

又因为 ZA 在同一流线上, 应有:

$$\psi_A = \psi_z \quad (b)$$

且此时已知 $\xi_z = -1$, 所以联立式 (a)、式 (b), 便可求出 Z 点的 η 坐标 η_z 。这样, 由下式就可求出 A 点的 I 值 I_A 来:

$$I_A = I_z = \sum_{i=c}^E N_i(\xi_z, \eta_z) I_i \quad (6-195)$$

如此类推, 则可求出第 i 站 A 点的其他热力参数。

4) 叶道间的损失和流面的形状, 可由 S_1 流面的解来确定, 也可由已有的实验综合关系给出, 例如文献[12]就给出了气流的偏转和损失的关系式。

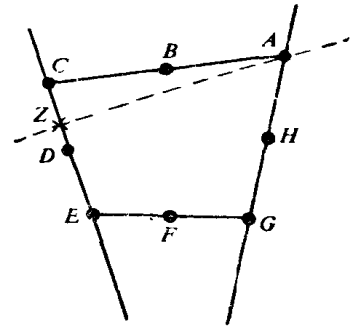


图6-24 流线的确定

5) 每个节点的密度 ρ 由下式决定:

以静叶为例:

$$\rho = \rho^* \left[1 - \frac{k-1}{2} \frac{v^2}{kRT^*} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (6-196)$$

根据式 (6-170) 对流函数的定义, v 由下式确定:

$$v^2 = \frac{1}{(Br)^2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \right] \frac{1}{\rho^2} \quad (6-197)$$

将式 (6-197) 代入式 (6-196), 就可得到一个关于 ρ 的式子, 具体如下:

$$\bar{\rho} = \left(1 - \frac{A}{\bar{\rho}^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (6-198)$$

式中 $\bar{\rho} = \rho / \rho^*$ 。

在每个结点上对上式应迭代求解。对式 (6-198) 的分析表明, 当 $\operatorname{tg} \beta$ 给定时, 对亚声速的相对速度, 方程总有唯一解。而当 v_0 已知时, 若子午速度为亚声速时, 方程也总有唯一解。

6) F_r 的计算

根据前已得出的气动方程组 (6-159) 的第二式和第三式可分别求出 F_θ 和 F_z , 再由式 (6-168), 则可求出 F_r 的分布。

7) 至此, 便可对式 (6-194) 的有限元方程组进行求解, 设此时求出结点上新的流函数为 $\bar{\psi}_i$, 由于方程组 (6-194) 强烈地非线性, 所以必须引入一个松弛因子 μ :

$$\psi_i^{(n+1)} = \psi_i^{(n)} + \mu [\bar{\psi}_i^{(n+1)} - \psi_i^{(n)}] \quad (6-199)$$

式中, 将 $\psi_i^{(n+1)}$ 作为 $(n+1)$ 次迭代的解, 同时用作下次迭代的初始值, 一直到收敛为止。

(5) 计算结果与试验数据的对比 以下是文献[2]中对几种轴流式压缩机有关参数用有限元素法计算的结果与试验所测得的对应数据比较的情况。

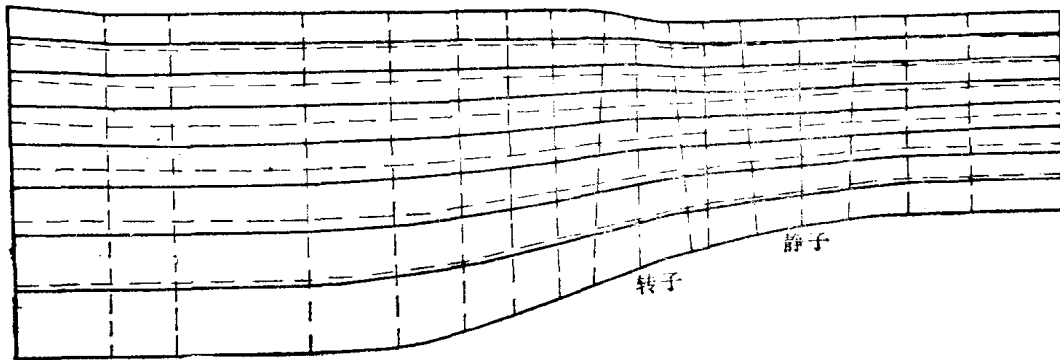


图6-25 TASK-1压缩机子午面几何形状、元素边界及计算流线

1) 第一个算例是 TASK-1 轴流压缩机, 它是美国通用电器公司为 NASA 设计制造的单级轴流压缩机, 并进行了试验。转子的叶顶周速 (u) 为 426.7 m/s , 进口轮毂比是 0.5 , 顶部的叶栅稠度是 1.3 , 展弦比为 2.5 , 弦长 (沿径向) 不变, 动叶为多圆弧叶型。静叶的展

弦比为2.065, 叶根的叶栅稠度为2.155, 静叶为双圆弧叶型, 但在叶根部分特别设计成适用于低马赫数(吸力面), 静叶的弦长不变。图6-25就是此压缩机子午面的几何形状, 图中虚线是元素的边界, 而实线则是质量流量为 95.25kg/s 和设计转速下所计算出的流线。

图6-26 a 给出了用有限元素法计算的相对马赫数与实验测出的相对马赫数沿径向变化的对比结果。而图6-26 b 则是 TASK-1 转子气流绝对出口角的计算值与实验值的比较曲线。

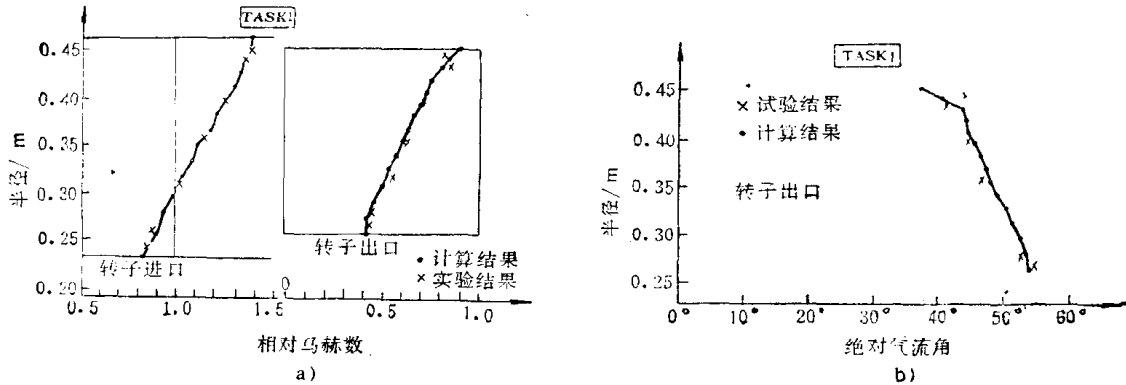


图6-26 TASK-1压缩机转子进、出口相对马赫数及转子出口绝对气流角

图6-27 a 是TASK-1转子的轴向速度计算值与实验值的比较。而图6-27 b 是TASK-1静子的轴向速度计算值与实验值的比较。以上的所有图中的曲线都表明: 计算值与实验值是相当吻合的。计算结果是令人满意的。

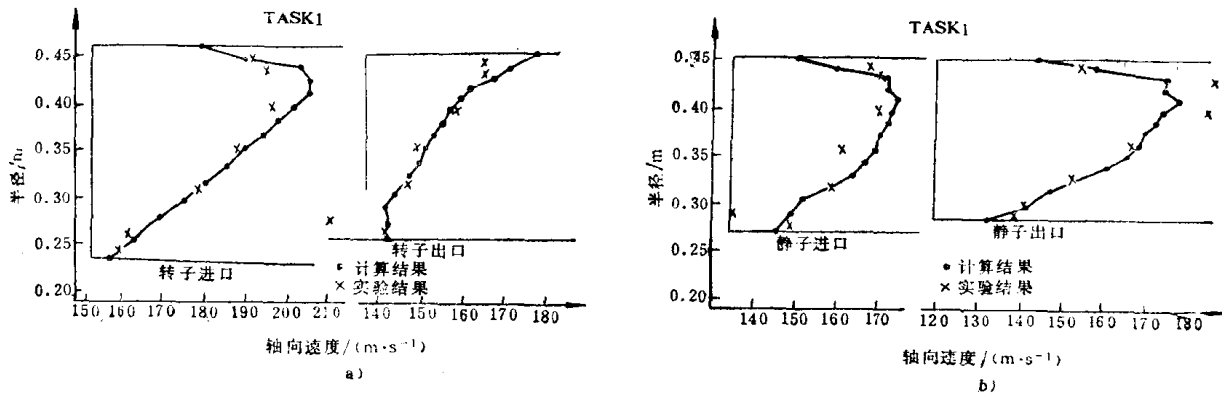


图6-27 TASK-1转子和静子轴向速度的分布

2) 二级高负荷轴流风机

图6-28是一台二级的轴流压缩机的子午面形状, 有限元素的几何边界以及在设计转速下、质量流量为 83.56kg/s 时所算出的流线分布图。

该高负荷2级轴流风机是NASA设计的, 叶顶周速是 442m/s , 其压比为2.8, 质量流量是 83.56kg/s 。第一级叶片外径是 0.787m , 进口轮毂比是0.4, 转子和静子的叶片均为多圆弧叶型。第一级转子共有28片叶片, 平均展弦比是2.48, 叶根处弦长为 0.092m , 叶顶处弦长为 0.116m 。第2级转子有60片叶片, 弦长不变, 是 0.053m 。第1级静子叶片数为46, 弦长从轮毂到叶顶是从 $0.07\sim 0.079\text{m}$, 平均展弦比等于2.75。第2级静子叶片数为59, 弦长从轮毂到叶顶是 $0.056\sim 0.062\text{m}$, 平均展弦比是2.20。

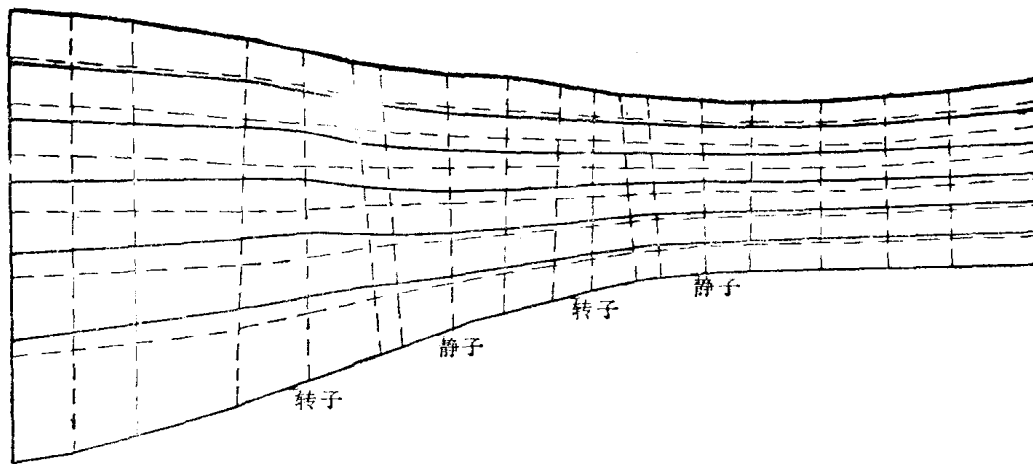


图6-28 二级轴流压缩机子午面形状、有限元边界及计算流线

图6-29 a、b 是第一级转子出口相对气流角和相对马赫数沿径向的变化,计算和试验是在70%设计转速和质量流量是51.35kg/s 下进行的。从图中可看出,计算数值与试验结果也是相当吻合的。

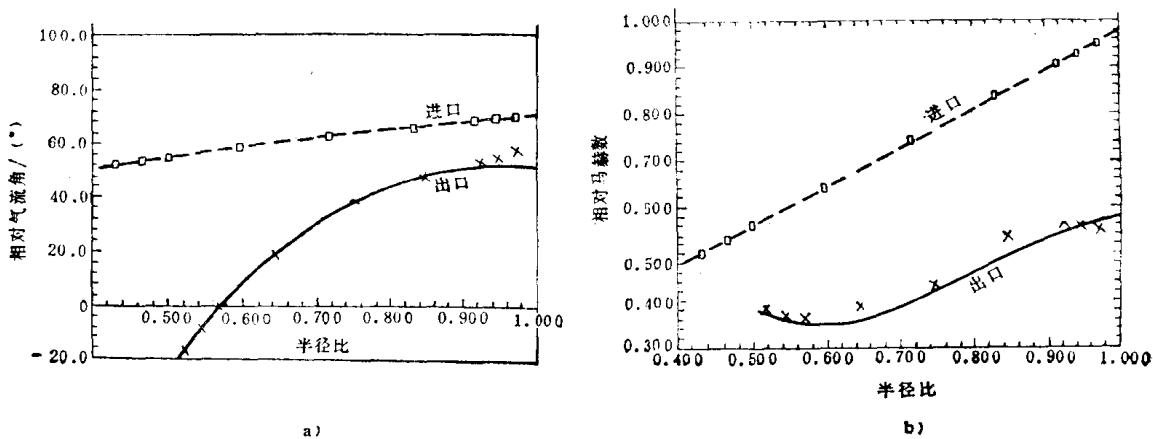


图6-29 二级轴流压缩机第一级转子的相对气流角及相对马赫数

图6-30 a、b 是第2级静子绝对气流角及子午速度的计算值与试验值的对比曲线。而图6-31 a、b 则是第2级静子的通过有关式子计算出的偏转角、损失系数与试验值的对比曲线。情况表明,通过有关式子计算出来的损失系数、偏转角与试验值一致时,那么气动参数变量用有限元法得出的计算值与实验值就能相当好地吻合,否则就有偏差,甚至会局部偏差较大。

3) 六级轴流压缩机 直径为9.4cm的六级轴流压缩机是为10KW Brayton循环电动机系统设计的。在进口压力为 $4.1 \times 10^4 \text{Pa}$ (0.41bar), 介质为氩气下进行了试验。第一级转子的进口,设计叶顶周速是247.5m/s, 对应的相对马赫数是0.788。第一级转子进口的轮毂比是0.69, 逐渐增加到第6级静子出口的0.73。轮毂直径不变。图6-32表明,计算值与试验性能曲线相当吻合。

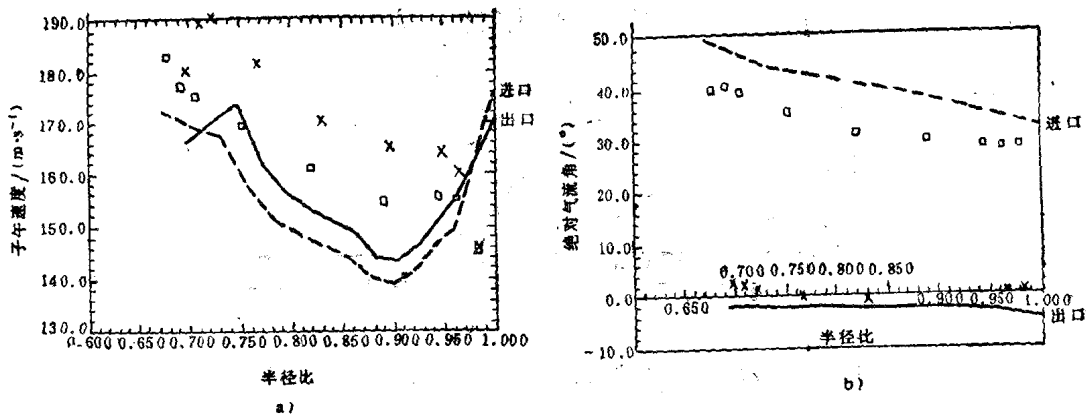


图6-30 二级轴流压缩机第二级静子的子午速度和绝对气流角

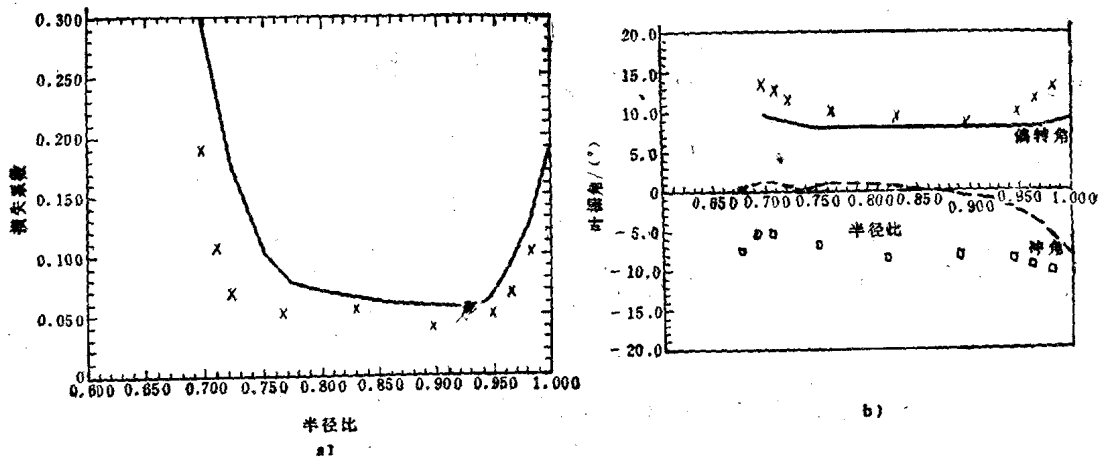


图6-31 二级轴流压缩机第二级静子损失系数、偏转角及冲角的分布

四、粘性损失的近似处理

这里所谈到的损失，主要是对轴流压缩机而言，对其它的轴流叶轮机械，原则上是相同的，其具体计算公式，请参看有关文献。

众所周知，要准确定量地考虑流动中的粘性损失，至今仍是个很困难的问题。因此，对前面计算公式中所出现的粘性力项 f 和耗散函数只能作以下的近似处理，同时，在下面的讨论中，均将在轴流压缩机中的流动过程作为绝热过程来处理，这样并不失其一般性。

首先，可将整个流场近似地认为是理想流体的流场，这样，粘性力项在公式中就可忽略不计，而粘性力对整个流动损失的影响，则用间接的方法来考虑，即从热力学知，在绝热过程中，若有熵增，那么过程一定是不可逆的，所以，我们可以拿熵增来估计粘性力所造成的流动损失的大小。

1. 根据设计者丰富的设计经验和所掌握的规律，把熵的变化考虑进去。至于广义焓 I_R 的变化，在绝热流动中可近似地认为 I_R 保持不变。这个近似虽较粗糙，但它很简便，尤其对有多数设计工作经验的设计者来说，还是比较可靠的，处理起来并不很困难，计算起来就方便多了。

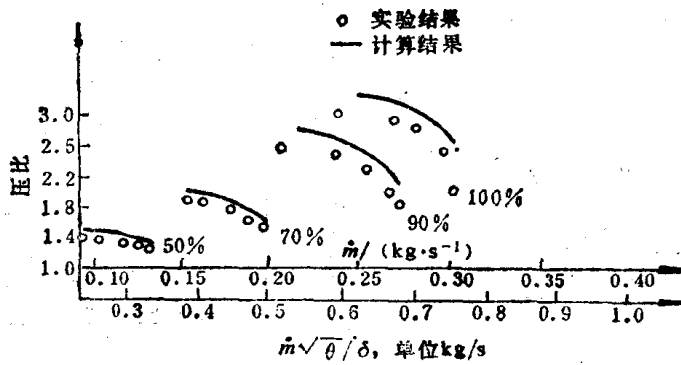


图6-32 六级轴流压缩机总压比与质量流量的关系曲线

2. 根据目前已有的有关试验数据来估计熵增

(1) 相对总压损失系数 $\bar{\omega}$ 首先，利用扩压因子来表达叶片极限载荷准则，扩压因子定义为：

$$\left. \begin{aligned} \text{对转子:} \quad D_R &= 1 - \frac{w_2}{w_1} + \frac{r_2 w_{2\theta} - r_1 w_{1\theta}}{2\bar{r}\tau w_1} \\ \text{对静子:} \quad D_S &= 1 - \frac{v_2}{v_1} + \frac{r_2 v_{2\theta} - r_1 v_{1\theta}}{2\bar{r}\tau v_1} \end{aligned} \right\} \quad (6-200)$$

式中， $\bar{r} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ ； $\tau = b/t$ ； b 为弦长； t 为栅距。

同时，由叶栅参数、叶型损失以及气流出口角定义总压损失参数为：

$$\frac{\bar{\omega}_R \sin \beta_2}{2\tau}$$

式中 $\bar{\omega}_R$ 为相对总压损失系数； β_2 为气流相对出口角。

图6-33示出了总压损失参数随扩压因子的变化曲线。从图中可看出，转子叶尖部分的总压损失参数比较分散，如图中虚线所包围的那部分所示。而从叶尖算起的从30%起到90%止的叶高部分则为一条曲线所表示。这里应指出的是，此曲线只适用于设计工况下。

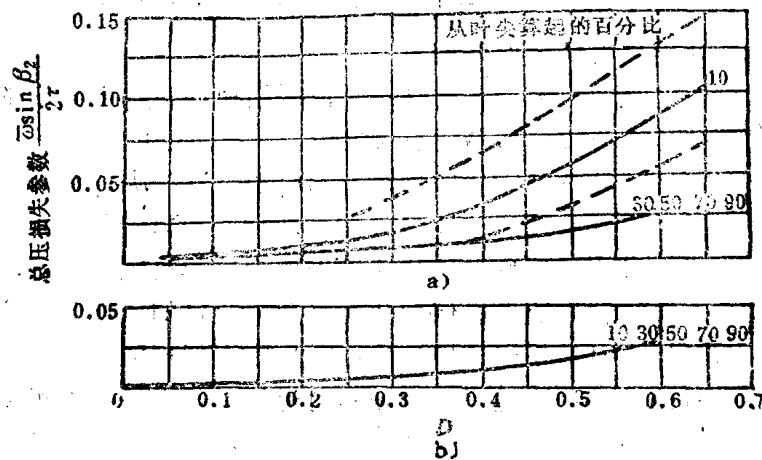


图6-33 NACA-65(A10)系和双圆弧叶片在基准流入角时总压损失参数随扩压因子的变化曲线 a) 转子 b) 静子

根据式(6-200)算出不同半径上的扩压因子，从图6-33则可查到对应的总压损失参数 $(\bar{\omega} \sin \beta_2)/(2\tau)$ ，如果是静子，则只须把 β_2 角，改为静叶出口角 α ，便可。由总压损失参数就可算出总压损失系数 $\bar{\omega}$ 。

(2) 总压恢复系数 对转子，文献[10]给出了总压恢复系数和总压损失系数的关系，

$$\sigma_R = \frac{p_{w2}^*}{p_{w1}^*} = 1 - \frac{\bar{\omega}_R [1 - \pi(\lambda_{w1})]}{\left\{ 1 + \frac{U_2^2}{2 \frac{k}{k-1} RT_{w1}^*} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{k}{k-1}}} \quad (6-201)$$

当气流进、出口半径相同时，则上式为：

$$\sigma_R = \frac{p_{w2}^*}{p_{w1}^*} = 1 - \bar{\omega}_R [1 - \pi(\lambda_{w1})] \quad (6-202)$$

式中 π 为气动函数，可从气动函数表由 λ_{w1} 查出， λ_{w1} 是速度系数。 p_{w1}^* 是进口相对总压； p_{w2}^* 是出口相对总压； p_{w1}^{*0} 是等熵滞止过程终了的出口相对总压。

同理，对静子当进、出口半径相同时，也可得到：

$$\sigma_s = 1 - \bar{\omega}_s [1 - \pi(\lambda_{v1})] \quad (6-203)$$

(3) 熵增与总压恢复系数的关系：

对转子有：

$$\sigma_R = e^{-\Delta S/R} \quad (6-204)$$

对静子有：

$$\sigma_s = e^{-\Delta S/R} \quad (6-205)$$

这样，由式 (6-200) 算出扩压因子，从图6-33便可查出相对损失参数 $(\bar{\omega}_R \sin \beta_2)/(2\tau)$ (或 $(\bar{\omega}_s \sin \alpha_2)/(2\tau)$)，从而得出相对损失系数 $\bar{\omega}$ 。根据式 (6-201)、式 (6-202) 和式 (6-203) 便可由相对损失系数 $\bar{\omega}$ 求出相对恢复系数 σ ，再由式 (6-204) 和式 (6-205) 则可求出熵增 ΔS 。

3. 在压缩机的设计过程中，往往也可从多变效率来考虑损失。因此，熵增也可从多变指数 m 来求出：

$$\Delta S/R = \frac{m - k}{(m - 1)(k - 1)} \ln(T_2/T_1) \quad (6-206)$$

而

$$m = \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta_{pol}} \frac{k-1}{k}} \quad (6-207)$$

根据设计者的经验可估计出多变效率，也可从类似的机器中类比来估计出多变效率，从而就可求出熵增。

4. 通道边界层

我们知道，由于粘性的作用，沿机壳内壁和轮毂表面会形成一附面层，如图6-34所示，进口处的边界层很薄，沿轴向向出口逐渐加厚，这个边界层的存在减小了通流部分的环形面积，从而减少了流量。因此，在工程设计中，常采用所谓“流量阻塞修正系数” $\epsilon_{..}$ 来考虑它对环形面积的影响，由图6-34可知，沿通道任一截面的连续方程为：

$$m_z = 2\pi \int_{r_A + \delta_A}^{r_1 - \delta_1} [\rho v_z r dr]_d = \epsilon_{..} 2\pi \int_{r_A}^{r_1} [\rho v_z r dr]_d \quad (6-208)$$

式中 $\epsilon_{..} < 1$ 为流量堵塞修正系数；下角标 d 表示不考虑端面边界层时的设计值。从式 (6-

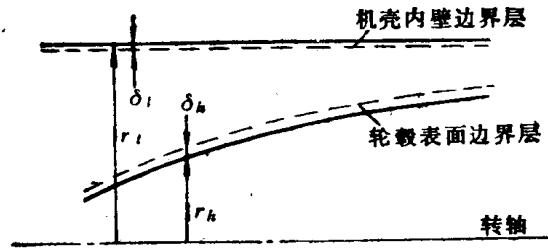


图6-34 端面边界层（压缩机）

208) 可看出，积分号里是假设不存在边界层的，因此积分出的流量大于设计流量，乘以阻塞修正系数 $e_{,,}$ 后，就得出设计流量。

一般，对进口级：取 $e_{,,} = 0.98$

对其余各级：取 $e_{,,} = 0.96$

附录1 离心式压缩机计算例题

设计空气压缩机, 其进口容积流量 $Q_{in} = 30 \text{ m}^3/\text{s}$, 进口压力 $p_{in} = 10^5 \text{ Pa}$, 出口压力 $p_{out} = 2.2 \times 10^6 \text{ Pa}$, 进口温度 $t_{in} = 27^\circ\text{C}$, 转速 $n = 3500 \text{ r/min}$ 。

方案选择

查气体的热物理常数表得空气的 $k = 1.4$, $R = 287 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。用效率法设计时, 根据经验或参考机器的效率选取本例的多变效率 $\eta_{pol} = 0.84$, 则

$$\sigma = m/(m-1) = \eta_{pol} k / (k-1) = 2.94$$

$$\Delta T = T_{in}[(p_{out}/p_{in})^{1/\sigma} - 1] = 92.28 \text{ K}$$

初选

$$1 + \beta_i + \beta_{df} = 1.025$$

$$h_{pol} = \sigma R \Delta T = 77860 \text{ J/kg}$$

$$h_{is} = h_{pol} / [(1 + \beta_i + \beta_{df}) \eta_{pol}] = 89991 \text{ J/kg}$$

$$K_n = 2 n (\pi Q_{in})^{0.5} h_{is}^{-0.75} = \phi^{0.5} / \varphi_{\theta_2}^{0.75} = 0.218$$

$K_n > K_{n, min}$, 可采一级离心压缩机。此时, 若从强度考虑, 取 $u_2 < 320 \text{ m/s}$, 由式 (4-2) 得相应 $\varphi_{\theta_2} > 0.8$, 即该叶轮属高能量头范围, 而相应 $\phi < 0.034$, 这又在小流量区, 高能量头、小流量级的效率不高。我们再讨论两级的情况, $K_n = 2^{0.75} \times 0.218 = 0.367$, 处在最佳范围内, 有较高的效率。此外, 与一级方案相比, 二级的机器径向尺寸大大减少。因此选取二级 ($X = 2$) 离心压缩机方案。

第一级的设计

叶轮:

叶轮采用后弯闭式, 在 β_{A2} 有较高效率的范围内选取 $\beta_{A2} = 48^\circ$ 。叶片数 $N = 10 \pi \sin \beta_{A2} = 23$, 因该叶片进口阻塞较大, 故采用长短两排叶片的形式, 即进口叶片数 N_1 为出口叶片数 N_2 的一半, 并取 $N_2/N_1 = 22/11$ 。

由式 (4-16)

$$\varphi_{r_2} = 0.237 \approx 0.24$$

由图 (4-4) 查得 $\beta_{\theta_2} = 46^\circ$, 则

$$\varphi_{\theta_2} = 1 - \frac{\pi}{N_2} \sin \beta_{\theta_2} - \varphi_{r_2} \text{ctg} \beta_{\theta_2} = 0.665$$

$$\phi = K_n^2 \varphi_{\theta_2}^{1.5} = 0.073$$

$$u_2 = [(h_{is}/X)/\varphi_{\theta_2}]^{0.5} = 260 \text{ m/s}$$

$$D_2 = 60 u_2 / (\pi n) = 1.42 \text{ m}$$

$$\tau_2 = 1 - N_2 \delta / (\pi D_2 \sin \beta_{A2}) = 0.947$$

式中, 叶片厚度 $\delta = 0.008 \text{ mm}$, 它由强度条件决定。

叶轮反动度

$$\Omega = 1 - 0.5(\varphi_{r_2}^2 + \varphi_{\theta_2}^2) / [\varphi_{\theta_2}(1 + \beta_i + \beta_{df})] = 0.63$$

密度比

$$\varepsilon_2 = \rho_2 / \rho_{in} = [1 + \Omega \Delta t / (X T_{in})]^{0.7} = 1.1965$$

$$b_2 = q_m / (\pi D_2 \rho_2 \varphi_{r_2} u_2) = Q_{in} / (\pi D_2 \varepsilon_2 \varphi_{r_2} u_2) = 0.090 \text{ m}$$

$$\beta_i + \beta_{df} = (0.12 + 0.18/\varphi_{\theta_2}) / (1000 \varphi_{r_2} b_2 / D_2) = 0.025$$

(验算)

为了避开容易产生轴系振动的转速, 平均轴径 d_m 由下式估算

$$d_m = K_d(X + 2.3)D_{2m}\sqrt{n/(1000K_{n_s})} = 0.168 \text{ m}$$

式中, 经验系数 $K_d = 0.02 \sim 0.03$; 系数 K_{n_s} 对于柔轴(n 大于其一阶临界转速 n_{k1} 的轴)取 $2.8 \sim 3.0$ 对刚轴($n < n_{k1}$)时取 1.25 ; $(d/D_2)_m$ 为轴中间三段最大 d/D_2 的平均值。

$$\bar{r}_{0w_{1min}} = \left[\bar{r}_n^2 + 1.26 \left(\frac{\phi K_v \rho_{in}}{K_D \tau_1 \rho_D} \right)^{2/3} \right]^{0.5} \quad (\text{设 } \tau_1, \rho_0/\rho_{in})$$

$$= \left[0.1183^2 + 1.26 \left(\frac{0.073 \times 1/0.973}{1.04 \times 0.932} \right)^{2/3} \right]^{0.5} = 0.4928$$

$$\beta_{1w_{1min}} = [0.5(\bar{r}_{0w_{1min}}^2 - \bar{r}_n^2)]^{0.5} / \bar{r}_{0w_{1min}} = 34^\circ$$

$$D_0 = 2\bar{r}_{0w_{1min}} \quad r_2 = 0.700 \text{ m}$$

$$D_1 = K_D D_0 = 0.728 \text{ m}, \quad \beta_{A1} = 34^\circ$$

$$\tau_1 = 1 - N_1 \delta / (\pi D_1 \sin \beta_{A1}) = 0.932 \quad (\text{验算})$$

由式(4-14a) 验算叶片数 N_2 :

$$N_2 = \frac{\pi(\tau_1 + \tau_2)\varphi_{\theta_2}}{\Delta \bar{w}_n(1 - \bar{r}_1)} \sin \frac{\beta_{A1} + \beta_{A2}}{2} = \frac{\pi(0.932 + 0.947)0.665}{0.25(1 - 1.04 \times 0.4928)} \sin 41^\circ \approx 22$$

$$b_1 = K_v(D_0^2 - d^2)/(4D_1) = 0.158 \text{ m}$$

$$v_1 = v_0 = 4q_n / [\rho_0(D_0^2 - d^2)] = 91 \text{ m/s}$$

$$\Delta T_0 = v_0^2 / [2Rk/(k-1)] = 4.15^\circ$$

$$\rho_0/\rho_{in} = (1 + \Delta T_0/T_{in})^{0.7} = 0.973 \quad (\text{验算})$$

$$w_1 = v_1 / \sin \beta_1 = 160 \text{ m/s}$$

$$M_{v_1} = w_1 / \sqrt{kRT_1} = 0.434 < 0.55 \sim 0.65 \quad \text{合理}$$

$$w_2 = u_2 [(1 - \varphi_{\theta_2})^2 + (\varphi_{r_2}/\tau_2)^2]^{0.5} = 108 \text{ m/s}$$

$$w_1/w_2 = 1.495$$

$$\alpha_2 = \arctg(\varphi_{r_2}/\varphi_{\theta_2}) = 19.85^\circ$$

$$v_2 = \varphi_{r_2} u_2 / \sin \alpha_2 = 184 \text{ m/s}$$

$$\Delta T_2 = 1 + \Omega \Delta T / X = 329^\circ$$

$$M_{v_2} = v_2 / \sqrt{kRT_2} = 0.506 < (0.55 \sim 0.6) \quad \text{合理}$$

轮盖制成锥型, 其倾斜角 θ 为

$$\theta = \arctg[(b_1 - b_2)/(r_2 - r_1)] = 11.12^\circ$$

叶片采用圆弧型线, 则圆弧的半径 R 和该圆弧圆心与轴线的距离 R_0 分别为:

$$R = \frac{r_2^2 - r_1^2}{D_2 \cos \beta_{A2} - D_1 \cos \beta_{A1}} = 1.072 \text{ m}$$

$$R_0 = \sqrt{R(R - D_1 \cos \beta_{A1}) + r_1^2} = 0.797 \text{ m}$$

轮盖进口处曲率半径 $r_s = \bar{r}_1 b_1 = 0.5 \times 0.158 \text{ m} = 0.079 \text{ m}$

扩压器:

采用平行壁无叶扩压器, 由于 $b_2/D_2 > 0.06$, 取 $b_3 < b_2$,

$$b_4 = b_3 = 0.9b_2 = 0.081 \text{ m}$$

为了有高的效率和合适的重量、外形尺寸指数, 取 $\bar{r}_4 = 1.7 \text{ m}$

$$r_4 = \bar{r}_4 r_2 = 2.414 \text{ m}$$

$$\alpha_4 = \arctg[\tg \alpha_2 / (b_3/b_2)] = 21.86^\circ$$

回流器:

弯道出口和进口宽度比 $b_5/b_4 = (1.05 \sim 1.75)$, 取 $b_5/b_4 = 1.15$, $b_5 = 1.15b_4 = 0.093$

弯道凸面半径 R . 由下面试验关系确定:

$$\frac{R_s}{b_4} = (6 \sim 12) \sin^2 \left(\frac{\alpha_4 + \alpha_5}{2} \right) - 0.25 \left(\frac{b_5}{b_4} + 1 \right) = 0.329$$

$$R_s = 0.067 \text{ m}$$

一般

$$r_5 = r_4 = 2.414 \text{ m}$$

$$K_{m,p} = \frac{r_5 v_{05}}{r_4 v_{04}} = \left[0.015 \left(\frac{b_5}{b_4} \right)^2 - 0.15 \frac{b_5}{b_4} + 1.075 \right] = 1.0017$$

$$\alpha_5 = \arctg \left[\frac{K_{m,p} \tg \alpha_4}{b_5/b_4} \right] = 24^\circ$$

最佳冲角 $i_5 = 7^\circ \sim 8^\circ$, $\alpha_{A5} = \alpha_5 + i_5 = 31^\circ$

为了保证下一级进口无气流预旋,

$$\alpha_{A6} = \alpha_6 + \delta = 90^\circ + 5^\circ = 95^\circ$$

回流器出口处凸面曲率半径 r_s 的相对值 \bar{r}_s . 推荐为 0.45, 则

$$\frac{b_6}{D_0} = -\frac{1}{4\bar{r}_s} + \sqrt{\left(\frac{1}{4\bar{r}_s} \right)^2 + \frac{v_0/v_6}{8\tau_6\bar{r}_s} \left(1 - \frac{d^2}{D_0^2} \right)} = 0.2238$$

式中取 $v_0/v_6 = 1.05$, $\tau_6 = 0.92$.

$$b_6 = D_0 b_6 / D_0 = 0.157 \text{ m}$$

$$D_6 = D_0 + 2r = 0.700 \text{ m} + 0.45 \times 0.157 \times 2 \text{ m} = 0.771 \text{ m}$$

叶片数

$$N = (2.1 \sim 2.2) \frac{2.73 \sin[(\alpha_{A5} + \alpha_{A6})/2]}{\lg(r_5/r_6)} = 10$$

$$\tau_6 = 1 - N\delta_6 / (\pi D_6) = 0.92$$

$$\tau_6 = 1 - N\delta_5 / (\pi D_5 \sin \alpha_{A5}) = 0.966$$

$$\frac{v_6}{v_5} = \frac{4D_5 b_5 \tau_5 \sin \sigma_{A5}}{(D_0^2 - d^2) v_0/v_6} = 0.921 > 0.75$$

合理

第二级的设计

叶轮:

从通用化出发, 叶轮盖、盘型线与第一级的相同。叶片数和型线也相同, 则

$$b_2 = (b_2 \epsilon_2)_1 / \epsilon_2 = (0.09 \times 1.1965 / 1.5434) \text{ m} = 0.070 \text{ m}$$

式中 $\epsilon_2 = (1 + \Delta t_2 / T_{in})^{0.4} = [1 + 46.14(1 + 0.63) / 300]^{0.4} = 1.5434$.

$$b_1 = (b_1 - b_2)_1 + b_2 = (0.158 - 0.09) \text{ m} + 0.070 \text{ m} = 0.138 \text{ m}$$

$$v_1 = Q_{in} / (\pi D b_1 \tau_1 \epsilon_1) = 78.6 \text{ m/s}$$

$$\Delta t_1 = 46.14 - 78.6^2 / (2 \times 287 \times 1.4 / 0.4) = 43.06^\circ$$

$$\epsilon_1 = \rho_1 / \rho_{1e} = (1 + 43.06 / 300)^{0.4} = 1.927$$

$$\beta_1 = \arctg(v_1 / u_1) = 30.5^\circ$$

$$\text{冲角 } i = \beta_{1A} - \beta_1 = 31^\circ - 30.5^\circ = 3.5^\circ$$

验算

合适

叶片扩压器:

$$D_3 = (1.08 \sim 1.15)D_2 \quad \text{取 } D_3 = 1.113 \quad D_2 = 1.58 \text{ m}$$

$$\frac{D_4}{D_2} = \begin{cases} 1.45 \sim 1.55 & \text{对中间级或有环形室的末级} \\ 1.35 \sim 1.45 & \text{对有蜗室的末级} \end{cases}$$

$$\text{取 } D_4 = 1.408D_2 = 2.00 \text{ m}$$

$$b_1 = b_3 = (1.3 \sim 1.7)b_2, \quad \text{小 } b_2/D_2 \text{ 和 } \alpha_3 \text{ 时取大值}$$

$$\text{选 } b_1 = b_3 = 1.429 \times 0.07 = 0.100 \text{ m}$$

$$\text{tg } \alpha_3 = \begin{cases} \text{tg } \alpha_2 / (b_3/b_2) & \text{对 } b_3/b_2 < 1 + 0.015 / (b_2 D_2^{-1}) \\ \text{tg } \alpha_2 / (b_3/b_2)^{0.03} & \text{对 } b_3/b_2 > 1 + 0.015 / (b_2 D_2^{-1}) \end{cases}$$

因 $b_3/b_2 = 1.429 > 1 + 0.015 / (0.07/1.42)$, 故

$$\alpha_3 = \arctg[\text{tg } 19.85^\circ / (1.429)^{0.03}] = 16.08^\circ$$

$$\alpha_{A4} = \arcsin[(K_* D_3 / D_4) \sin \alpha_{A3}] = \arcsin[1.8 \times 0.79 \times \sin 16.08] = 23.2^\circ$$

式中系数 K_* 表示扩压器出口与进口面积比, 后有回流器或环形室时 $K_* = 2 \sim 2.5$, 后有蜗室时 $K_* = 1.7 \sim 2.0$.

$$\text{叶片数} \quad N = (1.8 \sim 2.2) \frac{2.73 \sin[(\alpha_{A3} + \alpha_{A4})/2]}{\lg(D_4/D_3)} = 19$$

叶片中型线取为圆弧, 则

$$R = \frac{r_4^2 - r_3^2}{D_4 \cos \alpha_{A4} - D_3 \cos \alpha_{A3}} = 2.050 \text{ m}$$

$$R_0 = \sqrt{R(R - D_3 \cos \alpha_{A3}) + r_3^2} = 1.310 \text{ m}$$

蜗室:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{A4} - \delta \alpha_4 = \alpha_{A4} - 0.346(\alpha_{A4} - \alpha_{A3}) / \sqrt{1.8 \sim 2.2} \\ &= 23.2 - 0.346(23.2 - 16.08) / \sqrt{2} = 21.46^\circ \end{aligned}$$

对于梯形截面的蜗室, 子午宽度 b 的关系为

$$b = b_1 + (r - r_1) \text{tg}(\gamma/2)$$

$$\frac{b_m}{h} = \frac{b_1 + b_{out}}{2(r - r_1)} = \frac{b_1/r_1}{r_{out}/r_1 - 1} + \text{tg}(\gamma/2)$$

由式 (4-54) 积分得

$$\theta = \frac{180}{\pi} \text{ctg } \alpha_1 \left[\frac{2r_1}{b_1} \text{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{r_{out}}{r_1} - 1 \right) - \left(\frac{2r_1}{b_1} \text{tg} \frac{\gamma}{2} - 1 \right) \ln \frac{r_{out}}{r_1} \right]$$

取 $\gamma = 50^\circ$, 代入有关值后

$$\theta = 1359.307(r_{out}/r_1 - 1) - 1213.555 \ln(r_{out}/r_1)$$

不同 θ 对应的 r_{out} 值由迭代上式计算得下表

θ°	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
r_{out}/m	1	1.1358	1.2262	1.3015	1.3681	1.4292	1.4862	1.5400	1.5913	1.6406	1.6883	1.7345	1.7793
b_m/h		1.2027	0.9155	0.7980	0.7380	0.6993	0.6720	0.6515	0.6354	0.6224	0.6116	0.6025	0.5946
K_ϕ		0.9474	1.0268	1.0688	1.0923	1.1083	1.1199	1.1288	1.1360	1.1418	1.1467	1.1509	1.1545
R		0.0343	0.0496	0.0620	0.0728	0.0826	0.0917	0.1003	0.1085	0.1163	0.1239	0.1312	0.1383
r_{out}^*/m		1.1418	1.2352	1.3129	1.3816	1.4446	1.5034	1.5589	1.6118	1.6626	1.7117	1.7593	1.8055

梯形两顶角修圆, 圆角半径 R

$$R = \left[\frac{(0.03 \sim 0.07) F}{\operatorname{tg}(45^\circ + \gamma/4) - \pi(90^\circ + \gamma/2)/360} \right]^{0.5}$$

梯形截面积 $F = (r_{out} - r_i)[b_i + (r_{out} - r_i)\operatorname{tg}(\gamma/2)]$ 。

由于修圆使 F 减少, 为保持 F 不变应增加蜗壳型线半径到 r_{out}^*

$$r_{out}^* = r_{out} + \frac{2(0.03 \sim 0.07) F}{b_i + 2(r_{out} - r_i)\operatorname{tg}(\gamma/2)}$$

R 和 r_{out}^* 的值也在上表中列出。

损失系数 ζ_{xx} 由式 (4-51) 计算

$$\bar{D}_i = D_i/h_{max} = 2/0.8055 = 2.4829$$

$$\delta_i = (\bar{D}_i + 1)^{0.25} = 1.3661$$

$$\Delta\alpha = -\operatorname{arctg}[1/(\pi\bar{D}_i)] = -7.3^\circ$$

$$A = 0.0585 + 0.345\bar{D}_i \left(\frac{2\delta_i}{\bar{D}_i} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{1 + \delta_i}{1 - \delta_i} \right| - 3\operatorname{arctg} \delta_i + \frac{3}{2} \pi \right) = 0.2272$$

$$\bar{f}_{max} = F_i/F_{max} = \pi D_i b_i / [h_{max}(b_i + h_{max}\operatorname{tg}(\gamma/2))] = 1.64$$

将各截面的 K_i 平均得 $K_i = 1.1018$

$$\zeta_{xx} = 1 - 2\bar{f}_{max} \sin\alpha_i \cos(\alpha_i - \Delta\alpha) + (1 + K_i A) \bar{f}_{max}^2 \sin^2\alpha_i = 0.2722$$

$$v_i = q_{v,i} / (\pi \varepsilon_i D_i b_i \sin\alpha_i) = 78.8$$

$$\Delta t_i = 98.28 - 78.8^2 / (2 \times 287 \times 1.4 / 0.4) = 89.2^\circ$$

$$\varepsilon_i = (1 + 89.2/300)^{1.94} = 1.657$$

效率损失

$$\Delta\eta_{xx} = \zeta_{xx} \frac{(v_i/u_2)^2}{2\varphi_{\theta_2}(1 + \beta_i + \beta_{i'})} = 0.019$$

出口扩压管的最佳扩张角 $\theta_{e,9} = 6^\circ \sim 8^\circ$, 取扩压管长度为蜗室 $\theta = 90^\circ$ 时的 $r_{out}^* = 1.3129$, 则扩压管的出口半径 R_e 为

$$R_e = l \operatorname{tg} \frac{\theta_{e,9}}{2} + \sqrt{F_{max}/\pi} = 1.3129 \operatorname{tg} 4^\circ + \sqrt{0.3831/\pi} = 0.429 \text{ m}$$

$$v_e = Q_{i,9} / (\pi \varepsilon_e R_e^2) = 30 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 92.28 - 30^2 / (2 \times 287 \times 1.4 / 0.4) = 91.88^\circ, T_e = 391.88 \text{ K}$$

$$\varepsilon_e = (1 + 91.88/300)^{1.94} = 1.729$$

$$v_e / \sqrt{kRT_e} = 0.0756 \text{ m/s} < (0.1 \sim 0.15) \text{ m/s}$$

合理

附录2 利用NACA叶栅资料的轴流风机设计

下面根据NACA叶栅资料,首先对一般用轴流风机的设计方法和步骤加以说明,然后给出一个设计计算例,供设计时参考与套用。

一、设计方法和步骤

1. 设计条件

通常所给定的设计条件是:进口风量 Q (m^3/min),全压 P 或静压 P_{st} ,有时还给出转速 n 的要求。空气的标准进口状态是指进口温度 20°C ,相对湿度为50%,密度 ρ 为 $1.2\text{kg}/\text{m}^3$ 的空气状态。

2. 叶栅配置型式

如图2-10所示,轴流风机的配置型式有以下三种:

- (1) 前置导叶型(静叶-动叶型)
- (2) 后置导叶型(动叶-静叶型)
- (3) 前后导叶型(静叶-动叶-静叶型)

叶栅配置型式不同,反动度 Ω 也不相同。理论上 $\Omega = 0.5$ 的级效率最高。大多数轴流风机,一般情况下均采用后置导叶型的配置型式。

3. 流量系数、压力系数及轮毂比

按照式(2-27),流量系数 φ_l 和压力系数 ψ_l 定义为:

$$\varphi_l = \frac{v_x}{u_l}, \quad \psi_l = \frac{H_{t1}}{u_l^2/2} = \frac{P/\rho}{u_l^2/2} \quad (1)$$

式中 u_l 为叶轮顶端处的圆周速度, v_x 为轴向速度,它由流量 Q 决定:

$$Q = \frac{\pi}{4} D_t^2 (1 - \nu^2) v_x \quad (2)$$

式中 D_t 为叶轮顶端直径, $\nu = D_h/D_t$ 为轮毂比, D_h 为轮毂直径。

考虑机壳壁面及轮毂边界层的影响,引入阻塞系数 τ ,设计流量可取为:

$$Q' = \tau Q \quad (\tau = 1.02 \sim 1.03) \quad (3)$$

通常使用的轮毂比 ν ,流量系数 φ_l 和压力系数 ψ_l 的范围如表1所示。

表1 ν 与 φ_l 和 ψ_l 的关系

叶 栅 配 置	前 置 导 叶 型	后 置 导 叶 型
ν	0.5~0.8	0.5~0.8
φ_l	0.2~0.4	0.2~0.4
ψ_l	0.3~0.7	0.2~0.5

4. 比转数 n_s

比转数 \bar{n} 由式(2-89)可表示为:

$$\bar{n}_s = 1221 \sqrt{1 - \nu^2} \left(\frac{\varphi_i^{1/2}}{\psi_i^{3/4}} \right) \quad (4)$$

国内大多采用的比转数 n_s 的表达式为:

$$n_s = n \frac{Q^{1/2}}{p^{3/4}} \quad (5)$$

两者的关系为:

$$\bar{n}_s = 49.2 n_s \quad (6)$$

单级轴流风机比转数虽可达 $n_s = 16 \sim 100$, 但满足较高效率时的常用范围是 $n_s = 20 \sim 55$ 。

5. 确定叶轮直径及转速

将式(2)及圆周速度 $u_i = \pi D_i n / 60$ 代入式(1)并消去转速 n , 可得叶轮顶端直径 D_i 为:

$$D_i^2 = \frac{0.9}{1 - \nu^2} \sqrt{\frac{\rho \psi_i Q^{*2}}{p \varphi_i^2}} \quad (7)$$

式中 $Q^* = Q / 60$, 单位 m^3/s 。

由式(1)可得叶顶圆周速度 u_i 为:

$$u_i = \sqrt{\frac{2p}{\rho \psi_i}} \quad (8)$$

故转速 n 可表示为:

$$n = \frac{60}{\pi D_i} u_i \quad (9)$$

所求得的 D_i , n 一般应圆整后, 再反求最后的流量系数 φ_i 和压力系数 ψ_i 值。

6. 计算平均轴向速度 v_s

从式(2)可得平均轴向速度 v_s 为:

$$v_s = \frac{Q^*}{\frac{\pi}{4} D_i^2 (1 - \nu^2)} \quad (10)$$

7. 风机效率 η

风机效率 η 用式(2-19)表示为:

$$\eta = \eta_k \eta_v \eta_m \quad (11)$$

式中 η_k 为流动效率, 一般可取 $\eta_k = 0.85 \sim 0.95$, η_m 为机械效率, 通常 $\eta_m = 0.98 \sim 0.99$; η_v 为容积效率, 它表示叶轮因顶端存在 $0.5 \sim 3$ mm间隙等所产生的外泄漏损失。 η_v 可以用下式估算:

$$\eta_v = \exp \left[- \frac{2s/D}{\varphi_i^2/\psi_i} \left(3.1 - 8.1 \frac{2s}{D} \right) \right] \quad (12)$$

式中 D 为机壳内径, $s = (D - D_i)/2$ 为叶轮顶端间隙。

容积效率 η_v 也可简单地用阻塞系数作概略的估计:

$$\eta_v = 1 / \tau \quad (13)$$

8. 理论能量头 H_{th} 的确定

由伯努利方程可得气体能量头为:

$$H = p / \rho + v_n^2 / 2 + h_i \quad (14)$$

式中 $v_0 = Q^* / \left(\frac{\pi}{4} D_i^2 \right)$, h_i 为进口损失的大小

$$H_{ih} = H / (\eta A) \quad (15)$$

式中 A 为作用系数, 它表示机壳壁面及轮毂边界层使速度变形所产生的影响。根据爱克尔特(Eckert) 的实验, 它与轮毂比 ν 的关系如附录 7 所示。

9. 流动型式与半径平衡条件

为了把平面叶栅资料应用于轴流风机的设计, 将叶轮或导叶沿着与轴同心的圆柱面内展开, 在该面内应用平面叶栅理论, 此时需要决定任意半径 r 处的圆柱面内的进出口流动型式。流动型式通常用周向速度 v_θ 沿半径方向的分布来表示。如同 § 2-7 中已经介绍过的那样, 轴流叶轮的流动型式主要有以下几种:

(1) 自由涡流型 (等环量流型)

$$v_\theta = K / r \quad (16)$$

(2) 等反动度流型

$$v_{\theta 1} = ar - \frac{b}{r}, \quad v_{\theta 2} = ar + \frac{b}{r} \quad (17)$$

式中 a, b 为常数, 常取 $a = \omega / 2$ 的反动度为 50% 的等反动度流型 (ω 为角速度)。

(3) 半涡流型

$$v_\theta = ar + \frac{b}{r} \quad (18)$$

(4) 强制涡流型

$$v_\theta = Kr \quad (19)$$

(5) 等出口角流型

$$v_{\theta 2} = av_{z 2} \quad (20)$$

上述 v_θ 沿半径方向的分布, 在叶轮前后无限远处应满足以下径向平衡条件:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (21)$$

如果假定距叶栅相当远处的流动与叶栅前后的气流一样的话, 当全压沿径向不变时, 由给出的 $v_{\theta 1}, v_{\theta 2}$ 分布, 则可求得轴向速度 v_z 沿径向的分布值。

当全压沿径向不变, 即当 $\partial p / \partial r = 0$ 时, 如果采用自由涡流型, 则可得 v_z 沿径向分布为常数, 因此设计时常采用这种流型。其它几种流型由于要考虑 v_z 沿径向的变化, 故设计比较麻烦。例如对于等反动度流型来说, 当已知 v_θ 的分布为:

$$v_{\theta 1,2} = \omega \Omega r \mp \frac{K}{2r} \quad (22)$$

式中 $K = r(v_{\theta 2} - v_{\theta 1}) = p_{th} / \omega \rho = \text{常数}$ 。

则可得叶轮进出口 v_z 的分布为:

$$\begin{aligned} v_{z 1} &= \sqrt{A_1 - 2\omega\Omega(r^2\omega\Omega - K \ln r)} \\ v_{z 2} &= \sqrt{A_2 - 2\omega\Omega(r^2\omega\Omega + K \ln r)} \end{aligned} \quad (23)$$

式中 A_1, A_2 为积分常数, 它由以下连续条件决定:

$$\frac{Q}{60} = 2\pi \int_{r_h}^{r_t} v_{z1} r dr = 2\pi \int_{r_h}^{r_t} v_{z2} r dr \quad (24)$$

当采用自由涡以外的流型时, 最好能采用前后导叶型的叶栅配置方式。同时还要注意 v^* 的分布不应与平均值相差过大。

10. 叶轮速度三角形的决定

从叶根到叶顶选取 3~5 个断面, 决定各断面的速度三角形。对于自由涡流型, 由式 (10) 和欧拉方程式 (2-23) 计算 v_z 值和 v_θ 的大小。当叶栅配置采用前置导叶型时 $v_{\theta 2} = 0$; 后置导叶型时 $v_{\theta 1} = 0$; 前后导叶型时, 则可以自由给定 $v_{\theta 1}$, $v_{\theta 2}$ 的其中任何一个值。对于其它流型, 必须通过求解平衡方程式 (21) 得到 v_θ 沿径向的分布。

11. 叶片效率 η_M 的计算

叶片效率可由下式近似计算:

$$\eta_M = 1 - \varepsilon \left\{ 2\varphi + \frac{1}{\varphi} \left[1 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{2} \right] \right\} \quad (25)$$

式中 $\varphi = v_z / u$, $\lambda_1 = v_{\theta 1} / u$, $\lambda_2 = v_{\theta 2} / u$, $\varepsilon = 0.03 + 0.008 / (1 - \nu)$, u 表示叶轮平均半径处的周速。如果按上式计算出的平均半径处的叶片效率 η_M 与试取的流动效率 η_h 值相差很大, 则采用新的 η_h 再从步骤 8~11 进行迭代计算, 直至两者 $|\eta_M / \eta_h - 1| \leq 0.005$ 为止。

12. 弦长与叶片数的确定

(1) 展弦比 R

$$R = (r_t - r_h) / l_h \quad (26)$$

式中 r_t , r_h 分别为叶顶和叶根处的半径, l_h 为叶根处的弦长。弦长从叶根至叶顶逐渐减小。

通常弦长较长时工作范围宽, 但损失增加效率下降。轮毂比 ν 小时 R 大, 考虑到强度要求, R 一般取 $R = 1.0 \sim 2.5$ 。

(2) 节弦比 t/l

设计时可根据豪威尔 (Howell) 的图线 (图 2-23), 选取最佳节弦比的数值。一般希望: $t/l = 0.7 \sim 1.0$, 叶根处的节弦比应大于 0.6。

(3) 叶片数 z

一般按最佳节弦比 $(t/l)_{opt}$ 确定叶片数:

$$z = \frac{\pi D_m}{l (t/l)_{opt}} \quad (27)$$

式中 D_m 为平均直径。

13. 叶片负荷的校核

叶片负荷愈大效率虽高, 但当叶片负荷超过极限值时, 则会发生边界层分离和失速现象, 因此应校核叶根处的负荷限值。一般要求:

$$c_p = 1 - \left(\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2} \right)^2 = 1 - \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2 \leq 0.6 \quad (28)$$

$$(c_l \sigma)_{max} = 1.0 \sim 1.5 \quad (29)$$

式中 c_l 由式 (2-48) 求得。当叶根处的 $\sigma > 0.5$ 时, 则用 (λc_l) 值代替式 (2-48) 计算

求得的 c_l 值进行校核。

14. 列表表示出各断面的主要参数

15. 叶轮翼形的选定

由进口气流角 β_1 、转向角 $\Delta\beta$ 和弦节比 σ ，从图 2-19 查取弯度 c_{10} 、攻角 α ，然后根据下式决定安装角 β_A ：

$$\beta_A = \beta_1 - \alpha \quad (30)$$

16. 叶轮翼形坐标尺寸的计算

叶轮翼形背面和腹面坐标由式 (2-30) 和式 (2-31) 计算，即翼形背面坐标：

$$x_u = x_c - y_l \sin\theta, \quad y_u = y_c + y_l \cos\theta \quad (31)$$

翼形腹面坐标：

$$x_L = x_c + y_l \sin\theta, \quad y_L = y_c - y_l \cos\theta \quad (32)$$

$$\theta = \arctg(dy_c/dx_c) \quad (33)$$

从图 2-16 所示的表中可以看出，翼形后缘的厚度等于零，这在制造上是不可能的。为此，考虑叶片材料对翼形要加以修正。当采用铝合金铸件时，后缘厚度应在 1.5mm 左右。 y_l 的分布按下式修正：

$$y_l' = y_l + f \frac{x_c - x_{cf}}{100 - x_{cf}} \quad (x_c > x_{cf}) \quad (34)$$

式中 f 为翼的后缘厚度； x_{cf} 为厚度修正开始位置，一般从弦长 70% 处开始修正。

将各断面的弦长 l 、弯度 c_{10} 、翼形背面和腹面坐标列成表格，供制造翼形方便。

17. 导叶的选定

导叶的叶片数应与叶轮叶片数互为质数，并使前者大于后者。一般导叶在安装上又兼作叶轮的支持部，所以要注意从强度上考虑决定其厚度。

如果采用圆弧叶形，这时导叶的设计可按照角超过系数法进行设计，即

(1) 首先决定无厚度的叶片安装角 β_{A0}

$$\beta_{A0} = \alpha_n = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 \quad (35)$$

(2) 计算转向角 $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$

(3) 从图 2-28 查取角超过系数 μ ，按照式 (2-51) 计算叶片中心角 θ_c 。

$$\theta_c = \theta / \mu \quad (36)$$

(4) 由式 (2-54) 计算考虑叶片厚度 y_l 的安装角修正值 $\Delta\beta_A$ 。

$$\Delta\beta_A = 21\sigma^2 \left(\frac{y_l'}{l} \right) \sin 2\beta_{A0} \quad (37)$$

(5) 由式 (2-53) 最后求得叶片安装角 β_A

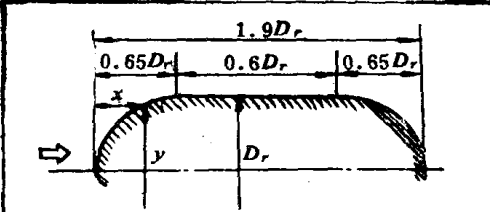
$$\beta_A = \beta_{A0} - \Delta\beta_A \quad (38)$$

18. 进口段的设计

进口段的设计主要是确定轮毂和喇叭口的尺寸。该部分的形状在设计时也应加以充分地注意，因为尽量减少进口损失对提高效率也是十分重要的。

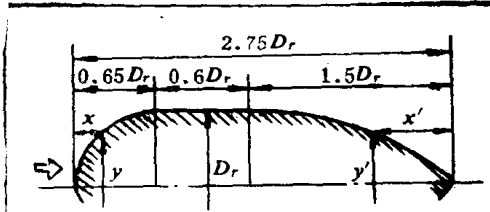
常用的两种轮毂形状和尺寸分别如表 2、表 3 所示。对应于表 2、表 3 所示轮毂处的损失系数 ζ 与雷诺数 Re 的关系如附录 8 所示。轮毂处的损失用下式计算：

表 2



x/D_r	y/D_r
0.0203	0.2478
0.0406	0.3480
0.0813	0.4841
0.1625	0.6615
0.3250	0.8660
0.4875	0.9682
0.6500	1.0000

表 3



z/D_r	y/D_r	x'/D_r	y'/D_r
0.0203	0.2478	0.125	0.1869
0.0406	0.3480	0.250	0.3469
0.0813	0.4841	0.500	0.6001
0.1625	0.6615	0.750	0.7818
0.3250	0.8660	1.000	0.9049
0.4875	0.9682	1.250	0.9765
0.6500	1.0000	1.500	1.0000

$$h_{ik} = \xi_k v_0^2 / 2 \quad (39)$$

喇叭口的标准尺寸如附录 9 所示,

其大小为:

$$h_{li} = \xi_i v_0^2 / 2 \quad (40)$$

式中 v_0 为轮毂进口前的速度, $\xi_i = 0.01 \sim 0.06$ 。

故进口段的总损失为:

$$h_l = h_{ik} + h_{li} = (\xi_k + \xi_i) v_0^2 / 2 \quad (41)$$

19. 风机轴功率和电动机功率的确定

风机轴功率 P (单位 kW) 按下式计算:

$$P = \frac{p Q}{1000 \eta} \quad (42)$$

式中 p 为风机全压, 单位 Pa, Q 为风机体积流量, 单位 m^3/s 。

电动机功率 P_m (单位 kW) 为

$$P_m = AP / \eta_m \quad (43)$$

式中 A 为电机容量安全系数, η_m 为机械效率。

20. 确定零部件材料及校核轴的临界转速。

二、设计例

1. 设计条件

设计一台单级轴流风机。设计条件如下: 该风机在标准进口状态下, 流量 $Q = 265 \text{ m}^3/\text{min}$, 全压 $P = 1039 \text{ Pa}$ 。

2. 叶栅配置型式的选定

采用后置导叶型。

3. 流量系数、压力系数及轮毂比的选定

由表 1 选取:

$$\nu = 0.6$$

$$\varphi_t = 0.3$$

$$\psi_t = 0.236$$

4. 比转数

$$\bar{n}_s = 1221 \sqrt{1 - \nu^2} (\varphi_t^{1/2} / \psi_t^{3/4}) = 1221 \sqrt{1 - 0.6^2} (0.3^{1/2} / 0.236^{3/4}) = 1580$$

$$n_s = \bar{n}_s / 49.2 = 1580 / 49.2 = 32$$

在 16~100 的范围内。

5. 确定叶轮直径及转速

$$D_t^2 = \frac{0.90}{1 - \nu^2} \sqrt{\frac{\rho \psi_t q^{*2}}{\rho \varphi_t^2}} = \frac{0.90}{1 - 0.6^2} \sqrt{\frac{1.2 \times 0.236 \times \left(\frac{265}{60}\right)^2}{106 \times 9.8 \times 0.3^2}} \text{ m}^2 = 0.342 \text{ m}^2$$

$$D_t = 0.585 \text{ m} \quad \text{圆整后得 } D_t = 0.59 \text{ m}$$

$$\text{叶轮周速} \quad u_t = \sqrt{\frac{2P}{\rho \psi_t}} = \sqrt{\frac{2 \times 1039}{1.2 \times 0.236}} \text{ m/s} = 85.65 \text{ m/s}$$

$$\text{转速 } n = \frac{60}{\pi D_t} u_t = \frac{60}{3.14 \times 0.59} \times 85.65 \text{ r/min} = 2774 \text{ r/min}$$

圆整后得: $n = 2780 \text{ r/min}$, 然后反算 φ_t 、 ψ_t :

$$\varphi_t = \frac{Q^*}{\frac{\pi}{4} D_t^2 (1 - \nu^2)} \bigg/ \frac{\pi D_t n}{60} = \frac{265/60}{\frac{\pi}{4} \times 0.59^2 (1 - 0.6^2)} \bigg/ \frac{\pi \times 0.59 \times 2780}{60} = 0.294$$

$$\psi_t = \frac{P/\rho}{\frac{1}{2} (\pi D_t n / 60)^2} = \frac{1039/1.2}{\frac{1}{2} (\pi \times 0.59 \times 2780 / 60)^2} = 0.234$$

6. 计算平均轴向速度 v_z

$$v_z = \frac{Q^*}{\frac{\pi}{4} D_t^2 (1 - \nu^2)} = \frac{265/60}{\frac{\pi}{4} \times 0.59^2 \times (1 - 0.6^2)} \text{ m/s} = 25.2 \text{ m/s}$$

7. 风机效率 η

取 $\eta_h = 0.865$, $\eta_m = 0.99$, 取叶轮顶端间隙 $s = 1 \text{ mm}$, 于是机壳内径 $D = 0.59 + 0.001 \times 2 = 0.592 \text{ m}$ 。故体积效率为:

$$\eta_v = \exp \left[-\frac{2s/D}{\varphi_t^2 / \psi_t} \left(3.1 - 8.1 \frac{2s}{D} \right) \right] = \exp \left[-\frac{2 \times 0.001 / 0.592}{0.294^2 / 0.234} \left(3.1 - 8.1 \frac{2 \times 0.001}{0.592} \right) \right]$$

$$= 0.9972$$

$$\eta = \eta_h \eta_v \eta_m = 0.865 \times 0.9972 \times 0.99 = 0.854$$

8. 理论能量头 H_{th} 的确定

$$v_0 = \frac{Q^*}{\frac{\pi}{4} D_t^2} = \frac{265/60}{\frac{\pi}{4} \times 0.59^2} \text{ m/s} = 16.2 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{v_0 D_h}{\nu^*} = \frac{16.2 \times (0.59 \times 0.6)}{0.156 \times 10^{-4}} = 3.7 \times 10^5$$

式中 ν^* 为空气的动粘性系数 $\nu^* = 0.156 \times 10^{-4}$ 。

轮毂形状选用表 2 所示的形式, 由附录 8 查得 $\zeta_h = 0.23$, 取喇叭口的损失系数 $\zeta_i = 0.04$, 故气体能量头由式 (14), 式(41) 可得:

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} (1 + \zeta_h + \zeta_i) = \left[\frac{1039}{1.2} + \frac{16.2^2}{2} (1 + 0.23 + 0.04) \right]$$

$$= 1032.3 \text{ J/kg} = 105 \text{ m}$$

由附录 7 查得作用系数 $A = 0.91$, 故可得理论能量头为:

$$H_{th} = H / (\eta A) = 1032.3 \text{ m} / (0.854 \times 0.91) = 1328.3 \text{ J/kg} = 135.5 \text{ m}$$

9. 流型的选定

选取自由涡流型。

10. 各断面速度三角形的决定

为简单起见, 选取叶顶、叶根和平均半径处三个断面, 其速度三角形为:
叶顶处:

$$r_t = D_t / 2 = 0.59 \text{ m} / 2 = 0.295 \text{ m}$$

$$u = u_t = 85.65 \text{ m/s}$$

$$v_{02} = H_{th} / u = (1328.3 / 85.65) \text{ m/s} = 15.5 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = \arctg(u / v_x) = \arctg(85.65 / 25.2) = 73.6^\circ$$

$$\beta_2 = \arctg[(u - v_{02}) / v_x] = \arctg[(85.65 - 15.5) / 25.2] = 70.2^\circ$$

$$\alpha_2 = \arctg(v_{02} / v_x) = \arctg(15.5 / 25.2) = 31.6^\circ$$

叶根处:

$$r_h = D_t v / 2 = 0.59 \times 0.6 \text{ m} / 2 = 0.177 \text{ m}$$

$$u = \pi D_h n / 60 = 3.14 \times 0.177 \times 2 \times 2780 / 60 = 51.5 \text{ m/s}$$

$$v_{02} = 1328.3 / 51.5 = 25.8 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = \arctg(51.5 / 25.2) = 63.9^\circ$$

$$\beta_2 = \arctg[(51.5 - 25.8) / 25.2] = 45.6^\circ$$

$$\alpha_2 = \arctg(25.8 / 25.2) = 45.7^\circ$$

平均半径处:

$$r_m = \sqrt{(r_t^2 + r_h^2)} / 2 = \sqrt{(0.295^2 + 0.177^2)} / 2 \text{ m} = 0.243 \text{ m}$$

$$u = 3.14 \times 0.243 \times 2 \times 2780 / 60 = 70.7 \text{ m/s}$$

$$v_{02} = 1328.3 / 70.7 = 18.78 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = \arctg(70.7 / 25.2) = 70.4^\circ$$

$$\beta_2 = \arctg[(70.7 - 18.78) / 25.2] = 64.1^\circ$$

$$\alpha_2 = \arctg(18.78 / 25.2) = 36.7^\circ$$

11. 叶片效率 η_m 的计算

由平均半径处计算 η_m :

$$v_{01} = 0, \lambda_1 = v_{01} / u = 0$$

$$\lambda_2 = v_{02} / u = 18.78 / 70.7 = 0.266$$

$$\varphi = v_s / u = 25.2 / 70.7 = 0.356$$

$$e = 0.03 + 0.008 / (1 - \nu) = 0.03 + 0.008 / (1 - 0.6) = 0.05$$

$$\begin{aligned} \eta_m &= 1 - e \left\{ 2\varphi + \frac{1}{\varphi} \left[1 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{2} \right] \right\} \\ &= 1 - 0.05 \times \left\{ 2 \times 0.356 + \frac{1}{0.356} \left[1 - 0.266 + \frac{0.266^2}{2} \right] \right\} = 0.866 \end{aligned}$$

它与假设 $\eta_h = 0.865$ 的差:

$$(\eta_m / \eta_h - 1) \times 100 = (0.866 / 0.865 - 1) \times 100 = 0.116 < 0.5$$

其差值在规定范围内, 故认为可以。

12. 弦长与叶片数的确定

(1) 弦长的决定

取叶根处的展弦比 $R = 2.0$, 则其弦长为:

$$l_h = (r_t - r_h) / R = (0.295 - 0.177) / 2.0 = 0.059 \text{ m}$$

如果取叶顶处弦长 $l_t = 0.048 \text{ m}$, 当弦长 l 沿半径为梯形分布时, 则由几何关系可得平均半径 r_m 上的弦长 l_m 为:

$$\begin{aligned} l_m &= \frac{(r_t - r_m)l_h + (r_m - r_h)l_t}{r_t - r_h} = \frac{(0.295 - 0.243) \times 0.059 + (0.243 - 0.177) \times 0.048}{0.295 - 0.177} \text{ m} \\ &= 0.0528 \text{ m} \end{aligned}$$

(2) 叶片数的决定

在平均半径处:

$$\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{tg} 70.4^\circ - \operatorname{tg} 64.1^\circ = 0.749$$

参考图 2-23 取节弦比 $t/l = 1.6$, 故可得:

$$t = 1.6l_m = 1.6 \times 0.0528 \text{ m} = 0.0845 \text{ m}$$

叶片数 $z = \pi D_m / t = 3.14 \times 0.486 / 0.0845 = 18.06$, 取叶片数 $z = 18$ 。

(3) 各断面的节弦比的决定

叶顶处:

$$\left(\frac{t}{l} \right)_t = \frac{\pi D_t / z}{l_t} = \frac{3.14 \times 0.59 / 18}{0.048} = 2.15$$

$$\sigma_t = (l/t)_t = 1 / 2.15 = 0.466$$

叶根处:

$$\left(\frac{t}{l} \right)_h = \frac{3.14 \times 0.177 \times 2 / 18}{0.059} = 1.05$$

$$\sigma_h = 1 / 1.05 = 0.953$$

平均半径处:

$$\left(\frac{t}{l} \right)_m = \frac{3.14 \times 0.243 \times 2 / 18}{0.0528} = 1.61$$

$$\sigma_m = 1 / 1.61 = 0.621$$

13. 叶根处叶片负荷的校核

$$c_p = 1 - (\cos \beta_1 / \cos \beta_2)^2 = 1 - (\cos 63.9^\circ / \cos 45.6^\circ)^2 = 0.60$$

$$\beta_{\infty} = \arctg[(\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2)/2] = \arctg[(\operatorname{tg}63.9^\circ + \operatorname{tg}45.6^\circ)/2] = 56.8^\circ$$

由式 (2-48) 可得升力系数 c_L 为:

$$\begin{aligned} c_L &= 2 \frac{t}{l} (\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2) \cos\beta_{\infty} - c_D \operatorname{tg}\beta_{\infty} \\ &= 2 \times 1.05 \times (\operatorname{tg}63.9^\circ - \operatorname{tg}45.6^\circ) \times \cos 56.8^\circ - 0.01 \times \operatorname{tg}56.8^\circ = 1.158 \end{aligned}$$

式中 c_D 为阻力系数, 由图 2-24 查得 $c_D = 0.01$ 。

因为叶根处弦节比 $\sigma_1 = 0.953 > 0.5$, 所以用圆弧叶栅的干涉系数 λ 对 c_L 进行修正。由图 2-26 查得干涉系数 $\lambda = 1.05$, 用 $\lambda c_L = 1.05 \times 1.158 = 1.216$ 代入式 (29) 进行校核:

$$(c_L \sigma)_{\max} = 1.216 \times 0.953 = 1.16 < 1.5$$

故认为满足负荷界限。

14. 列表示出各断面主要参数

量名称及符号	单位	叶根处	平均处	叶顶处
断面直径 D	m	0.354	0.486	0.59
平均轴向速度 v_x	m/s	25.2	25.2	25.2
周速 u	m/s	51.5	70.7	85.65
绝对周向分速度 $v_{\theta 2}$	m/s	25.8	18.78	15.5
绝对进口角 α_1	(°)	0	0	0
绝对出口角 α_2	(°)	45.7	36.7	31.6
相对周向分速度 $w_{\theta 1} = \operatorname{tg}\beta_1 v_x$	m/s	51.4	70.7	85.6
相对周向分速度 $w_{\theta 2} = \operatorname{tg}\beta_2 v_x$	m/s	25.7	51.9	70
相对进口角 β_1	(°)	63.9	70.4	73.6
相对出口角 β_2	(°)	45.6	64.1	70.2
转向角 $\Delta\beta$	(°)	18.3	6.3	3.4
弦节比 σ		0.953	0.621	0.466
弦长 l	m	0.059	0.0528	0.048

15. 叶轮翼形的选定

叶根处:

$$\beta_1 = 63.9^\circ, \Delta\beta = 18.3^\circ, \sigma = 0.953$$

由图 2-19 a 查得: $\sigma = 1.0, c_{i_0} = 1.32; \sigma = 0.75, c_{i_0} = 1.70$, 故当 $\sigma = 0.953$ 时, 弯度 c_{i_0} 为:

$$c_{i_0} = 1.32 + \frac{1.70 - 1.32}{1.0 - 0.75} \times (1.0 - 0.953) = 1.39$$

由图 2-19 b 查得: $\sigma = 1.0, \alpha = 10.6^\circ; \sigma = 0.75, \alpha = 10.1^\circ$, 故当 $\sigma = 0.953$ 时, 攻角 α 为:

$$\alpha = 10.6 - \frac{10.6^\circ - 10.1^\circ}{1.0 - 0.75} \times (1.0 - 0.953) = 10.5^\circ$$

$$\text{安装角 } \beta_A = \beta_1 - \alpha = 63.9^\circ - 10.5^\circ = 53.4^\circ$$

同理, 可得平均半径和叶顶处的弯度 c_{i_0} 、攻角 α 及安装角 β_A 分别为:
平均半径处:

$$c_{l_0} = 0.87, \alpha = 4.8^\circ, \beta_A = 65.6^\circ$$

叶顶处:

$$c_{l_0} = 0.61, \alpha = 2.6^\circ, \beta_A = 71^\circ$$

16. 叶轮翼形坐标尺寸的计算

根据图 2-16 中所示的表, 由式 (31) ~ 式 (33) 计算得到的各断面的翼形坐标尺寸, 如下表所示:

叶 根 处 $l = 59\text{mm}, c_{l_0} = 1.39$				平 均 半 径 处 $l = 52.8\text{mm}, c_{l_0} = 0.39$				叶 顶 处 $l = 48\text{mm}, c_{l_0} = 0.61$			
x_u	y_u	x_L	y_L	x_u	y_u	x_L	y_L	x_u	y_u	x_L	y_L
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.06	0.60	0.53	-0.19	0.12	0.50	0.41	-0.26	0.15	0.43	0.23	-0.29
0.18	0.77	0.70	-0.20	0.27	0.64	0.52	-0.31	0.26	0.54	0.46	-0.33
0.44	1.06	1.04	-0.18	0.48	0.84	0.84	-0.34	0.48	0.71	0.72	-0.39
1.13	1.62	1.82	-0.10	1.11	1.24	1.53	-0.37	1.07	1.02	1.33	-0.47
2.55	2.52	3.35	0.07	2.41	1.87	2.87	-0.38	2.25	1.50	2.55	-0.47
4.01	3.24	4.84	0.23	3.72	2.37	4.20	-0.38	3.45	1.88	3.75	-0.41
5.48	3.86	6.32	0.38	5.03	2.86	5.53	-0.37	4.65	2.21	4.95	-0.9
8.44	4.88	9.26	0.64	7.68	3.50	8.16	-0.34	7.05	2.74	7.35	-0.7
11.43	5.68	12.17	0.85	10.35	4.05	10.77	-0.31	9.47	3.15	9.73	-0.2
14.43	6.31	15.07	1.03	13.62	4.47	13.38	-0.27	11.88	3.47	12.12	-0.6
17.44	6.78	17.96	1.19	15.69	4.79	15.99	-0.22	14.31	3.71	14.49	-0.8
20.45	7.12	20.85	1.33	18.37	5.02	18.59	-0.18	16.73	3.87	16.87	-0.8
23.47	7.34	23.73	1.45	21.04	5.15	21.20	-0.12	19.15	3.97	19.25	-0.3
26.49	7.42	26.61	1.56	23.72	5.19	23.80	-0.05	21.58	3.99	21.62	-0.7
29.50	7.36	29.50	1.68	26.40	5.13	26.40	0.05	24.00	3.92	24.00	-0.69
32.51	7.16	32.39	1.82	29.07	4.96	29.01	0.18	26.42	3.78	26.38	-0.57
35.51	6.84	35.29	1.95	31.74	4.70	31.62	0.33	28.84	3.56	28.76	-0.42
38.50	6.39	38.20	2.06	34.41	4.36	34.23	0.48	31.25	3.27	31.15	-0.26
41.48	5.90	41.12	2.07	37.08	4.00	36.86	0.56	33.66	3.00	33.54	-0.14
44.45	5.31	44.05	2.03	39.71	3.53	39.49	0.63	36.07	2.65	35.93	-0.03
47.41	4.61	46.99	1.92	42.30	3.08	42.12	0.66	38.47	2.27	38.33	0.09
50.35	3.81	49.95	1.71	45.00	2.53	44.76	0.63	40.87	1.85	40.73	0.12
53.29	2.89	52.91	1.35	47.63	1.92	47.41	0.51	43.27	1.40	43.13	0.11
56.22	1.83	55.88	0.76	50.26	1.23	50.06	0.25	45.66	0.91	45.54	0.01
59.00	0.443	59.00	-0.443	52.80	0.396	52.80	-0.396	48.00	0.36	48.00	-0.36
重心坐标 $\begin{cases} x_G = 23.13 \\ y_G = 3.367 \end{cases}$				重心坐标 $\begin{cases} x_G = 20.70 \\ y_G = 1.929 \end{cases}$				重心坐标 $\begin{cases} x_G = 18.82 \\ y_G = 1.202 \end{cases}$			
前缘半径 0.405				前缘半径 0.363				前缘半径 0.330			

17. 导叶的选定

导叶采用圆弧叶形, 其叶片数与叶轮叶片数互为质数, 取叶片数为 19, 弦长 59mm。各断面节弦比为:

$$\text{叶顶处: } (t/l)_t = \pi D_t / (z l) = 3.14 \times 0.59 / (19 \times 0.059) = 1.65$$

$$\text{平均半径处: } (t/l)_m = 3.14 \times 0.486 / (19 \times 0.059) = 1.36$$

$$\text{叶根处: } (t/l)_h = 3.14 \times 0.354 / (19 \times 0.059) = 0.992$$

导叶出口若无预旋, 则 $\alpha_2 = 0$, 于是可得安装角 β_A 和中心角 θ 为:

叶顶处:

$$\beta_{A0} = \alpha_1 / 2 = 31.6^\circ / 2 = 15.8^\circ$$

$$\theta = \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 = 31.6^\circ$$

由图 2-28 查得角超过系数 $\mu = 0.41$, 则有:

$$\theta_c = \theta / \mu = 31.6^\circ / 0.41 = 77^\circ$$

从强度考虑取导叶厚度 $y_t = 5\text{mm}$, 对安装角 β_{A0} 的修正为:

$$\begin{aligned} \Delta\beta_A &= 21 \times \left(\frac{l}{t}\right)^2 \times \left(\frac{y_t}{l}\right) \sin 2\beta_{A0} \\ &= 21 \times \left(\frac{1}{1.65}\right)^2 \times \left(\frac{5}{59}\right) \sin(2 \times 15.8^\circ) = 0.34^\circ \end{aligned}$$

故可得安装角 β_A 为:

$$\beta_A = \beta_{A0} - \Delta\beta_A = 15.8^\circ - 0.34^\circ = 15.46^\circ$$

同理, 可得平均半径处和叶根处的中心角和安装角为:

平均半径处: $\theta_c = 76.5^\circ, \beta_A = 17.78^\circ$

叶根处: $\theta_c = 80.2^\circ, \beta_A = 21.5^\circ$

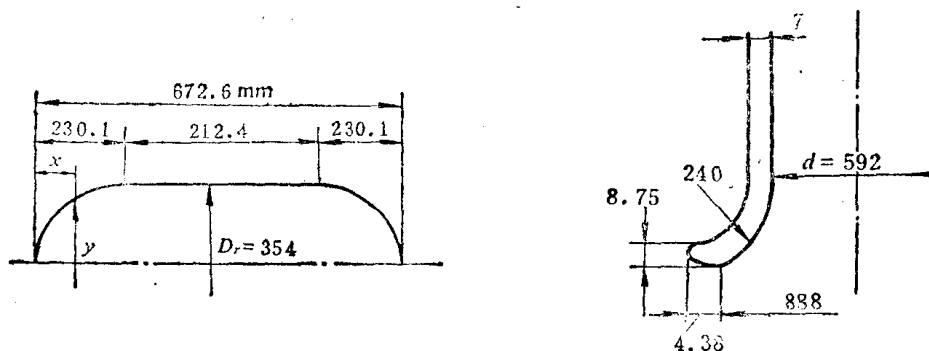
将计算结果列表如下:

	叶根处	平均半径	叶顶处
节弦比	0.992	1.36	1.65
几何安装角 $\beta_A / (^\circ)$	21.5	17.78	15.46
角超过系数 μ	0.57	0.48	0.41
进口角 $\alpha_1 / (^\circ)$	45.7	36.7	31.6
出口角 $\alpha_2 / (^\circ)$	0	0	0
叶片中心角 $\theta_c / (^\circ)$	80.2	76.5	77

18. 进口段的设计

轮毂和喇叭口的形状和尺寸, 由表 2 计算结果如下表和下图所示:

x/mm	7.19	14.37	28.78	57.5	115.05	172.57	230.1
y/mm	87.72	123.19	171.37	234.17	306.56	342.74	354



19. 轴功率和电动机功率的确定

轴功率为:

$$P = \frac{PQ}{1000 \eta} = \frac{1039 \times 265 / 60}{1000 \times 0.854} \text{ kW} = 5.37 \text{ kW}$$

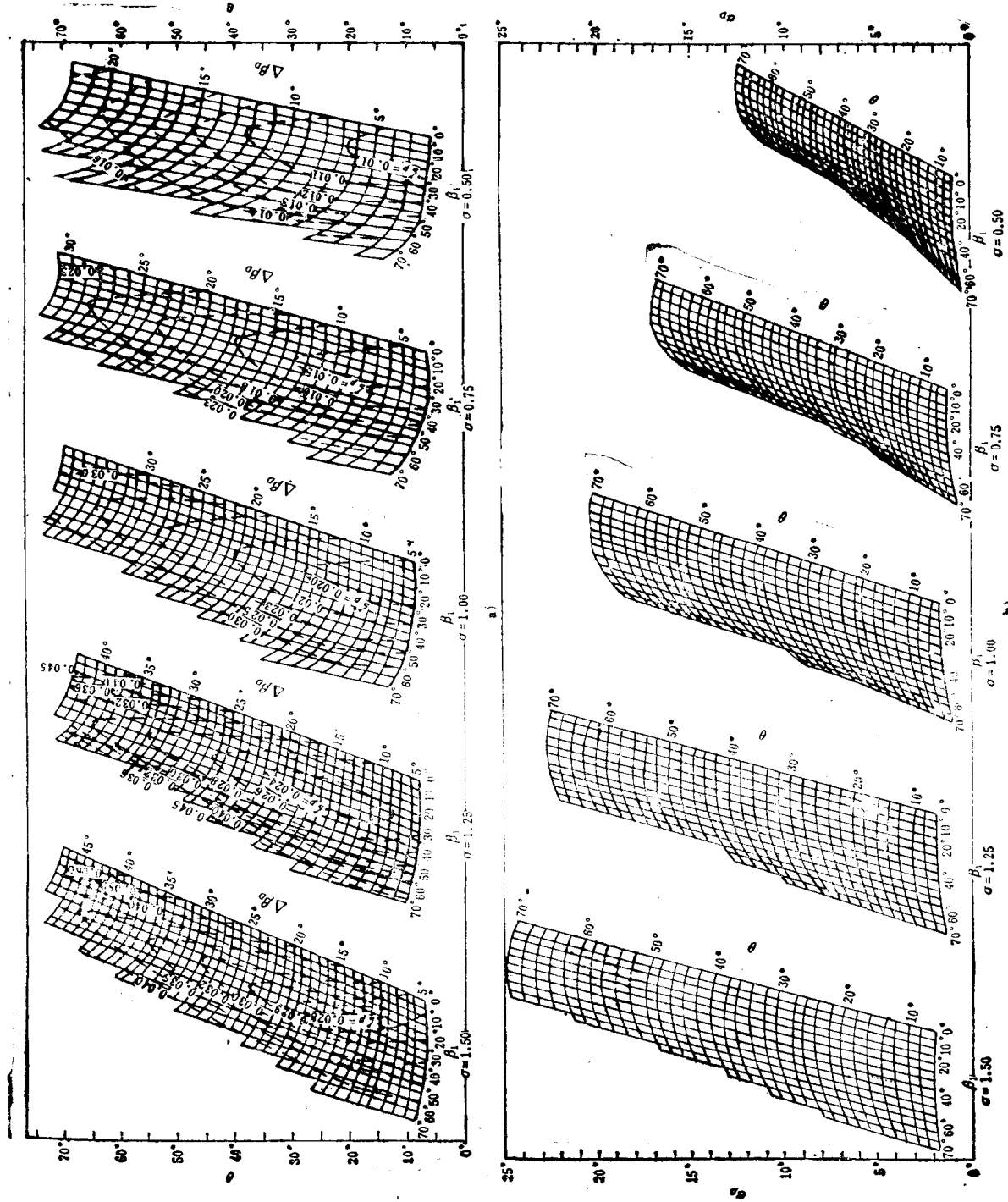
如果取电机容量安全系数 $A = 1.15$, $\eta_m = 0.99$ 则电动机功率为:

$$P_m = \frac{AP}{\eta_m} = \frac{1.15 \times 5.37}{0.99} \text{ kW} = 6.24 \text{ kW}$$

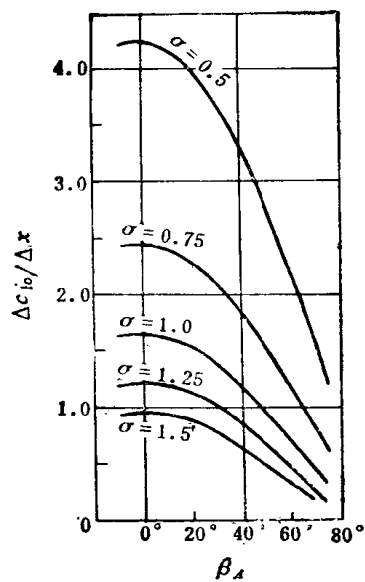
选用 7kW 的电动机即可。

20. 确定零部件材料及校核轴的临界转速 略。

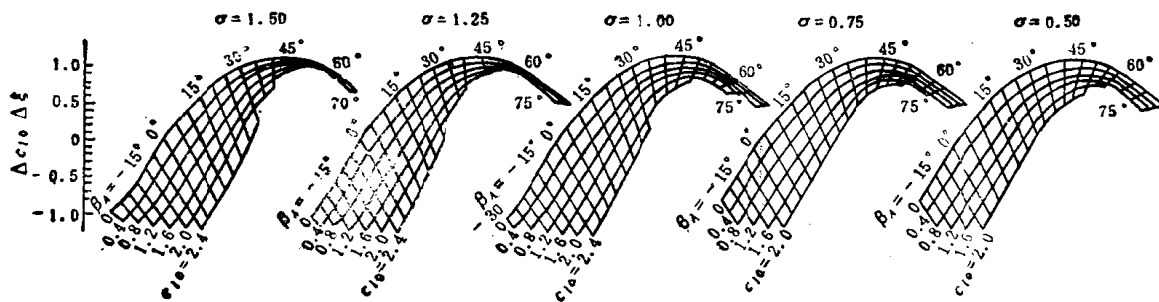
附录3 设计用参考图线



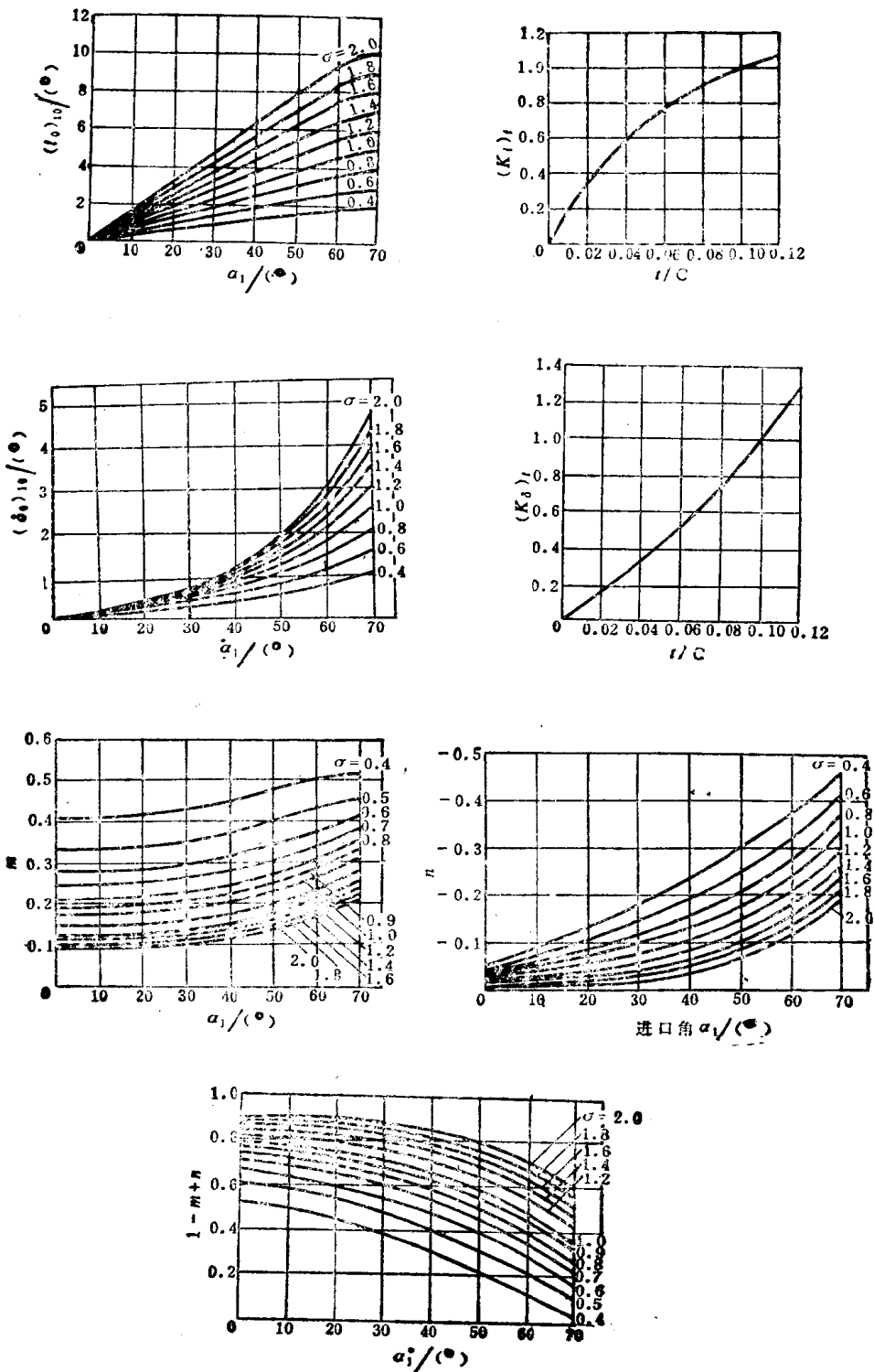
附录3-1 圆弧叶栅弯度中心角与设计攻角的选定
 a) 弯度中心角 b) 设计攻角



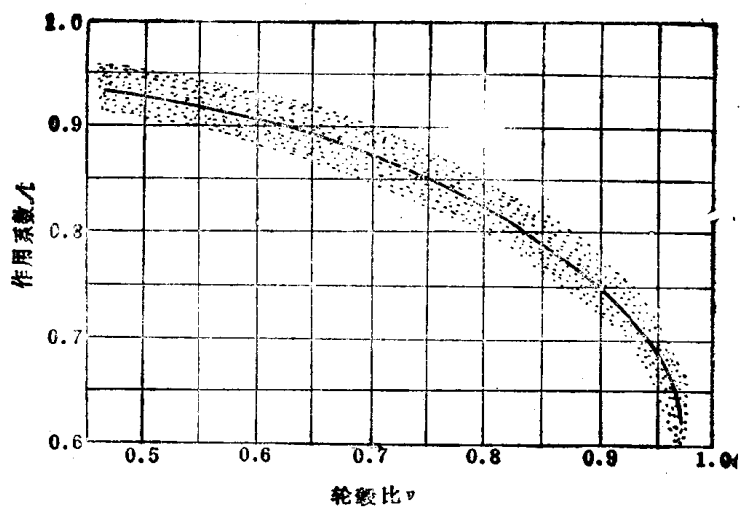
附录3-2 流面倾斜时设计弯度的修正图线



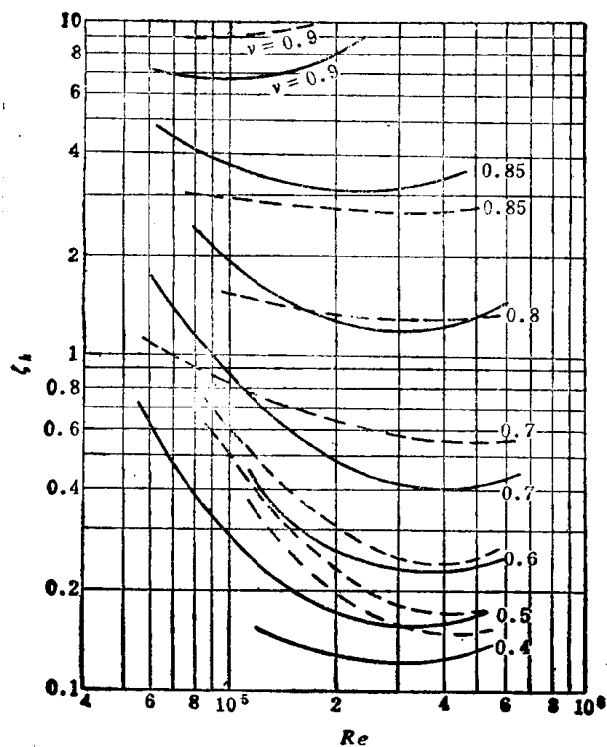
附录3-3 轴向速度变化时设计弯度的修正图线



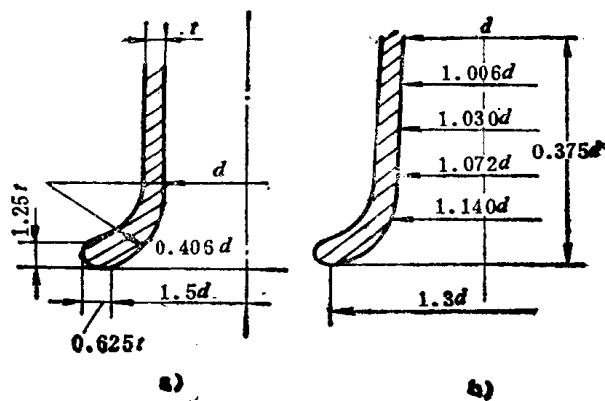
附录3-4 利布莱因的叶栅选定图线



附录3-5 作用系数与轮毅比的关系



附录3-6 损失系数 ζ_k 与雷诺数 Re 的关系



附录3-7 喇叭口的标准尺寸

参 考 文 献

- [1] Wu Chung-Hua, A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-, Radial-, and Mixed-Flow Types, Trans. ASME Nov. 1952
- [2] Ch. Hirsch and G. Warzee, A FEM for Through-Flow Calculations in Turbomachines, Trans. ASME 98-3 Ser. I, 1976
- [3] Laskaris, T. E., Finite-Element Analysis of Three-Dimensional Potential Flow in Turbomachines, AIAA J., Vol. 16, No. 7, 1978
- [4] Ch. Hirsch and G. Warzee, An Integrated Quasi-3D Finite Element Calculation Program for Turbomachinery Flows, ASME EP, Vol. 101, No. 1, 1979
- [5] 朱伯芳:《有限单元法原理与应用》, 水利电力出版社, 1979
- [6] 李嘉珩:《有限单元法及程序实例》, 人民铁道出版社, 1979
- [7] 复旦大学数学系:《有限元素法选讲》, 科学出版社, 1976
- [8] T. J. Chung:《流体动力学的有限元分析》, 电力工业出版社, 1980
- [9] J. J. 康纳, C. A. 勃莱皮埃:《流体流动的有限元法》, 科学出版社, 1981
- [10] 张惠民:《叶轮机械中的三元流理论及其应用》, 国防工业出版社, 1984
- [11] 章本照:《流体力学中的有限元方法》, 机械工业出版社, 1986
- [12] [美] NASA SP36, 秦鹏译:《轴流式压气机气动设计》, 国防工业出版社, 1975
- [13] 乐志成、吕文灿:《轴流式压缩机》, 机械工业出版社, 1980
- [14] 刘高联、王甲升:《叶轮机械气体动力学基础》, 机械工业出版社, 1980
- [15] 刘高联:《任意旋成面叶栅气动正命题的广义变分原理、变分原理与互偶极值原理》, “力学学报”, 4期, 1979
- [16] 吕文灿:《风机三元流动理论与设计》, 华中工学院出版社, 1986
- [17] 吴宝仁:《透平机械叶栅流场的有限元分析》, “动力工程”, 5期, 1985
- [18] 何灌明、刘钧朴:《任意旋成面叶栅正命题有限元分析》, “动力工程”, 2期, 1981
- [19] 陈月林等:《离心式压气机任意旋成面正命题变分有限元解》, “上海机械学院学报”, 4期, 1984
- [20] 刘钧朴、何灌明:《应用有限元法求解平面叶栅绕流问题》, “汽轮机”, 1期, 1980
- [21] 翁泽民:《在半测地坐标下用有限元法对任意透平叶栅气动性能的计算》, “西安交通大学学报”, Vol. 15, No. 5, 1981
- [22] M. H. Vavra, Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines, Robert E. Krieger Publishing Company, 1974
- [23] 生井, 井上, 鎌田, 田代: NACA65系統圧縮機翼列カーペット線図の改善と拡張, ターボ機械, 2卷5号, 1974
- [24] 生井, 井上, 金子: 円弧翼翼列の設計法, ターボ機械, 2卷2号, 1974
- [25] 井上, 生井, 鎌田, 田代: 流面傾斜及び軸流速度変化のある軸流羽根車の翼列選定法, 日本機械学会論文集(B編), 45卷389号, (昭54-1)
- [26] 清华大学工程力学系潘文全:《流体力学基础》, 机械工业出版社, 1980
- [27] 村田暹, 三宅裕: ターボ機械流体力学序説(1)~(12), 機械の研究, 19卷1~12号, 1967
- [28] M. Inoue, T. Ikui, Y. Kamada, M. Tashiro, A quasi Three-Dimensional Design of Diagonal Flow Impellers By Use of Cascade Data, Proc. of 10th Symp. IAHR, Tokyo, Vol. 1 (1980-9)
- [29] 生井武文: 軸流機械における空気力学的諸問題, 日本機械学会誌, 70卷579号, 1967

- 〔30〕 生井武文, 準三次元理論による軸流送風機と圧縮機の設計法, 日本機械学会誌, 80巻706号, 1977
- 〔31〕 I. Ariga, A. Ookita, S. Masuda, The Effect of Inlet Distortion on The Performance Characteristics of A Centrifugal Compressor and Remarks for Future Works, Proc. of The 2ND China-Japan Joint Conference on Fluid Machinery, 1987
- 〔32〕 八田桂三編集, 気体機械ハンドブック, 1969
- 〔33〕 鎌田, 田代, 生井, 井上, 直線翼列資料による軸流羽根車の準三次元設計, 第1報 設計法及び準三次元効果に対する補正線図, ターボ機械, 9巻4号, 1981
- 〔34〕 生井, 井上, 鎌田, 田代, 翼厚比の変化が二次元翼列性能に及ぼす影響, 日本機械学会論文集(第2部), 42巻362号, 1976
- 〔35〕 平山直道, 流体力学, 1970
- 〔36〕 ターボ機械の低流量域特性に関する調査分科会, ターボ機械の低流量域特性に関する調査報告書, 日本機械学会誌, 67巻568号, 1966
- 〔37〕 井上雅弘, 軸流圧縮機動翼列の流れ(その1、内部流動に現れる諸現象), ガスタービン学会誌, 10巻40号, 1983
- 〔38〕 井上雅弘, 軸流圧縮機動翼列の流れ(その2 流動解析モデル), ガスタービン学会誌, 10巻41号, 1983
- 〔39〕 古屋善正, 流体力学, 1973
- 〔40〕 日本機械学会基準, 模型によるファン・ブロウの性能試験及び検査方法, JSME, S005, 1984
- 〔41〕 大橋秀雄, 流体機械, 1976
- 〔42〕 B. ECK, FANS, 1973
- 〔43〕 吴克启, 蔡兆林, 利用美国NACA叶栅资料的轴流通风机设计, 流体工程, №11, 1984
- 〔44〕 吴克启, 蔡兆林, 区颖达, 斜流通风机的准三元设计法, 工程热物理论文集, Vol. 7, №2, 1986
- 〔45〕 吴克启, 蔡兆林, 区颖达, 翼形斜流叶轮的叶形修正方法, 华中工学院学报, Vol. 15, №4, 1987
- 〔46〕 蔡兆林, 吴克启, 区颖达, 斜流叶轮的工程设计法, 流体工程, №10, 1986
- 〔47〕 吴克启, 区颖达, 蔡兆林, 钟原, 准三元斜流叶轮的回转流面设计法, №3, 1986
- 〔48〕 吴克启, 蔡兆林, 区颖达, 圆弧形斜流叶轮的准三元设计法与翼形斜流叶轮的比较, 工程热物理论文集, 科学出版社, 1988
- 〔49〕 К. П. Селезнев, Ю. Б. Галеркин, Центробежные Компрессоры, Л.: Машиностроение, 1982
- 〔50〕 В. Ф. Рис, Центробежные Компрессорные Машины, Л.: Машиностроение, 1981
- 〔51〕 Г. Н. Дев, Проектирование Проточной Части Центробежных Компрессоров, Л.: Машиностроение, 1980
- 〔52〕 O. E. Balje, Turbomachines—A Guide to Design, Selection and Theory, John Wiley & Sons, 1981
- 〔53〕 RC-60斜流ターボ機械の準三元設計と性能予測調査研究分科会研究成果報告書, 日本機械学会, 1984
- 〔54〕 S. M. Yahya, Turbines Compressors and Fans, Tata Mcgraw-Hill Publishing Company Limited, 1983
- 〔55〕 西安交通大学透平压缩机教研室, 《离心式压缩机原理》, 机械工业出版社, 1980
- 〔56〕 吴克启, 区颖达, 蔡兆林, 钟原, 高负荷圆弧形斜流风机的特性, 湖北省工程热物理论文集, C1-002, 1987
- 〔57〕 S. L. Dixon, Fluid Mechanics Thermodynamics of Turbomachinery, Pergamon Press, 1978
- 〔58〕 吴克启, 蔡兆林, 准三元斜流叶轮的子午流面设计法, 流体工程, №6, 1985



- [59] 井上, 森, 子午面 ます影響, 日本機械学会 論文集 (第2部), 40巻338号 (昭49-10)
- [60] 原田幸夫, 流体力学・水力学演習, 槇書店, 第2版発行 (昭和54年)
- [61] 妹尾泰利, 内部流れと流体機械, 養賢堂, 第10版発行 (昭和56年)
- [62] 生井, 井上: 粘性流体の力学, 理工学社, 第1版第3刷発行, 1980
- [63] D. Stanitz: Two-Dimensional Compressible Flow in Conical Mixed-Flow Compressors, NACA, No 1774, 1948
- [64] 村田, 三宅, 小川, 板東: 遠心羽根車の軸対称流れ理論, 日本機械学会論文集 (B編), 47巻417号 (昭56-5)
- [65] 酒井, 渡部: 混流羽根車のすべり係数に関する研究, 日本機械学会 論文集 (第2部), 33巻249号 (昭42-5)
- [66] 井上, 吳克启: 翼列資料による斜流羽根車の翼素選定法, 日本機械学会論文集 (B編), 51巻472号 (昭60-12)
- [67] R. A. Novak: Streamline Curvature Computing Procedures for Fluid-Flow Problems, Trans. ASME, Ser. A, 89-4, 1967
- [68] S. Lieblein: Loss and Stall Analysis of Compressor Cascades, Trans. ASME, Ser. D, 81-3, 1959
- [69] T. Katsanis: Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution in a Turbomachine, Trans. ASME, Ser. A, 1966
- [70] T. Katsanis: Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution in the Meridional Plane of a Turbomachine, NACA, TN. D-2546, 1964
- [71] T. Katsanis: Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution on a Blade to Blade Surface in Turbomachine, NACA, TN. D-2809, 1965
- [72] H. Schlichting: Berechnung der Reibungslosen Inkompressiblen Strömung für ein Vorgegebenes Ebenes Schaufelgitter, VDI-Forschungsheft 447, 1955
- [73] RC-50大形ターボ性能予測調査研究分科会研究成果報告書, 日本機械学会, 1980
- [74] S. Lieblein: Experimental Flow in Two-Dimensional Cascades, Chap. 6 in NACA RM E56B03a, 1958