

前 言

《机械制造中的传热与热变形基础》是“机械制造工艺、设备及自动化”专业的一门技术基础课。其讲授任务在于使学生获得有关传热与热变形方面的基本知识以及温度场与热变形计算的基本方法。本书是根据1978年4月全国高等学校一机部对口专业座谈会的精神及同年6月一机部大连机制专业教材会议拟定的编写大纲编写的。此外,于1980年7月在福州举办了本教材的讲习讨论会,进行了试讲及进一步的审查。

近年来,“机床-夹具-刀具-工件”工艺系统的热变形,特别是机床的热变形,对零件的精加工与自动化加工的影响,日益引起重视。可以说,为了改善机床性能、提高所加工零件的精度,研究热变形并采取相应措施以减少或消除热变形,是生产技术发展所提出的要求。

本书着重介绍传热与热变形方面的基本知识。其具体内容为:工艺系统的传热与热变形问题概述,传热的基本知识,一维、二维稳定导热系统,有限差分法与有限单元法在求解导热微分方程中的应用,不稳定导热系统,热应力与热变形,量纲分析、相似理论及其应用。

简要叙述工艺系统的传热与热变形问题的目的,在于说明工艺系统热变形问题的起因、影响及其研究的方向,以期使读者了解学好传热与热变形基本理论的重要意义,也使读者对工艺系统热变形问题有一个概括的了解。六十年代中期以后,有限单元法及电子计算机等计算手段的运用,使机床及其构件热性能的研究,如温度场、边值条件、热变形与热平衡时间的研究,大大向前推进。为了介绍有限单元法,必须介绍传热与导热的基本理论,因而专辟一章来介绍传热的基本知识,也介绍了一维、二维稳定导热系统与不稳定导热系统等内容。在某些情况下,有限差分法还是简单适用的,因而将有限差分法与有限单元法一并介绍。为了计算热变形,对热应力的形成与计算也作了适当的介绍。最后介绍量纲分析与相似理论等内容,以扩大处理实际问题的选择能力。

在介绍基本理论与方法时,试图选用工艺系统中经过简化的实例,作为分析与计算的范例,一方面帮助读者通过实例来掌握这些理论与方法,另一方面也希望引起他们运用这些理论和方法去解决实际问题的兴趣,并向他们提供如何将实际问题进行简化的方法,如将三维导热方程简化为二维、一维方程,将尚未完全稳定的系统简化为稳定的系统,将第二、第三类边界条件简化为第一类边界条件等。当然这样简化虽使求解容易,但也带来偏离实际的误差。因而简化方案必须与有关实验或已有的实验成果相对照,偏离的误差越小,简化方案就越接近于实际情况。本书所选用的例题,仅能作为计算举例之用,其结果不宜作为解决实际问题的答案,至多只能作为参考之用。

在采用本书作为教材时,有些内容或某些举例可以不讲。根据教学时数及学生的具体情况,可以突出重点而酌情取舍。为此,本教材分(一)、(二)两册出版。(一)册为本课程的基本内容,可供40小时左右的讲课之用;(二)册内容较深,可作本课程的提高之用。各校可根据自己的情况,斟酌选用。

本书由浙江大学机械制造工艺及自动化教研室梁允奇同志担任主编、高承煜同志参加编写。山东工学院热工教研室裘烈钧同志担任主审、孙云凤同志参加审稿。

在编写过程中,大量引用有关教材和文献的内容,谨在此说明,并对它们的著者表示谢意。在编写期间承蒙山东工学院热工教研室蔡国琰同志于百忙中对我们的初稿进行仔细的审阅,提供了宝贵的建议。北京机床研究所盛伯浩同志、华中工学院张伯霖同志、哈尔滨工业大学侯镇冰同志、山东工学院庄莅之同志提供宝贵的资料,以及我们教研室郑善良同志、陈兆年同志、顾惠瑛同志提供宝贵的意见与帮助,在此表示衷心的感谢。

本课程是一门新课,本书的编写也是一种新的尝试,编者虽然力图在不忽视传热学一般原理的情况下应用数学手段对工艺系统热变形问题进行分析而又不是单纯的讲解数学问题,使数学理论为实际问题服务。然而,由于初次编写此书,水平有限,缺点错误一定不少,尚请读者不吝批评与指正。

编者

1980.3.

基本符号

α —导热系数, $\lambda/c\rho$, 米²/秒

c —比热, 焦/(千克·开)

C —热容量, 焦/开

Q —热量, 焦

λ —导热系数, 瓦/(米·开)

ρ —密度, 千克/米³

v —速度, 米/秒

τ —时间, 秒

Φ —热流量, 瓦

A —截面横断面积, 米²; 换热面积, 米²

q —比热流量, 瓦/米²

V —体积, 米³

t —温度, °C

t_w —壁面温度, °C

t_f —流体温度, °C

$\alpha_{对}$ —对流传热系数, 瓦/(米²·开)

δ —厚度, 米

ν —运动粘度率, μ/ρ , 米²/秒

μ —粘度(动力粘度), 牛·秒/米²

g —重力加速度, 米/秒²

k —传热系数, 瓦/(米²·开)

R —热阻, 开/瓦

\tilde{R} —比面热阻, 米²·开/瓦

Λ —热导, 瓦/开

Λ' —比面热导, 瓦/(米²·开)

目 录

第一章 工艺系统的传热与热变形	
问题概述	1
§ 1-1 引言	1
§ 1-2 工艺系统的热学特性	2
§ 1-3 工艺系统的传热与热变形对 机械加工精度的影响	4
§ 1-4 机床热变形的控制与防止	6
§ 1-5 机床热变形的具体解决方法	8
§ 1-6 本课程的任务	9
第二章 传热的基本知识	10
§ 2-1 传热的基本方式	10
§ 2-2 导热的基本概念	10
§ 2-3 对流、对流放热的基本公 式——牛顿公式	15
§ 2-4 热辐射、热辐射的基本定律、 热辐射换热及换热系数	25
§ 2-5 固体表面的放(换)热	33
§ 2-6 传热过程	36
§ 2-7 热传导的基本原理	41
第三章 一维稳定系统导热	47
§ 3-1 平壁稳定导热与传热	47
§ 3-2 圆筒壁的稳定导热和传热	57
§ 3-3 等截面细长杆(轴)周界放 热的一维导热	66
§ 3-4 端面放热的径向导热	76
§ 3-5 不等截面细长轴的一维导热	82
§ 3-6 相对运动的机械部件之间的 导热	89
第四章 有限单元法在求解导热微 分方程中的应用	100
§ 4-1 平面稳定温度场的有限单元 格式	100
§ 4-2 有限单元法的基本原理及进 行步骤	101
§ 4-3 各类不同温度场的泛函的构成	102
§ 4-4 建立二维平面稳定系统单元 内部温度 t 的近似函数	104
§ 4-5 单元 e 的泛函及对整个平面 求解区间的泛函求极值	106
§ 4-6 第一种边界条件无内热源平 面稳定温度场的求解	112
§ 4-7 解题具体步骤	113
第五章 热变形与热应力	122
§ 5-1 概述	122
§ 5-2 一维热变形(变形位移)与热 应力	126
§ 5-3 简单梁的变温挠度	130
§ 5-4 桁架的力与变形等问题的有限 单元法	134
§ 5-5 弹性力学中平面热变形问题的 有限单元法	152
§ 5-6 平面刚架的有限单元法	176
附表	193
附表 1	193
附表 2	193
附表 3	194
附表 4	195
附表 5	195
附表 6	196
附表 7	197
附表 8	198
附表 9	199
附表 10	200
附表 11	200
附表 12	201
附表 13	202
附录	204
附录一 矩阵代数基础知识	204
附录二 贝塞尔函数	219
附录三 变分原理简介	229

第一章 工艺系统的传热与热变形问题概述

§ 1-1 引言

传热学是研究热的传递过程。一般讲来，只要有温度差（温差）存在，热量总是从高温处向低温处流动，而将热量由高温物体传给低温物体。在自然界里温度差是普遍存在的，因而热的传递是一个很普遍的自然现象〔1〕。

在工程上传热学的应用很广泛，几乎一切工业部门都碰到传热问题。例如动力、冶金、制冷、建筑、机械制造、电工、化工、原子能、航空及宇航等工程领域的生产过程与生产技术都涉及到传热的问题。以机械加工而言，机械加工精度就受“机床-夹具-刀具-工件”工艺系统各环节热变形的影响，尤以精密零件和大型零件的精加工为突出，而工艺系统的热变形，又受着系统各环节的传热问题的支配。

人们对于工艺系统的传热与热变形问题，是逐步认识的。最先为人们所注意的是工件热变形对加工精度的影响。精密零件的重要尺寸在刚加工好时测量出的数值比冷却后再测量的数值要大些，这就是零件冷缩的结果。例如，磨床工人很早就发现这一现象而采取一些有效的措施；如等零件冷却后再进行一次测量而作必要的补充加工，或者在精加工中尽量减少磨削深度以减少发热量，或者将工件磨得稍大些，以便其冷缩后恰好符合尺寸精度的要求。又如刮削（刮研）大件的工人在精刮时往往也采取类似的措施。

随着测量技术的不断发展，人们发现用标准量具在不同室温下测量同一零件的某一尺寸时，也会有数值上的差异，特别是膨胀系数较大的合金（铝、铜合金）零件尤为显著。与此同时，量具也有热变形，因而要求恒温测量。

在自动车床、六角车床的调整法加工中，加工好一批零件的重要尺寸之间也存在尺寸上的差异（尺寸分散）。经过调查研究，除发现其它因素如刀具磨损等会影响尺寸分散之外，刀具的热伸长也具有一定的影响。

至于机床热变形对加工精度的影响则发现较晚。但座标镗床热变形对其定位精度的影响，发现最早，从1933年起瑞士人对座标镗床热变形进行了测量和研究。其它机床（如车、刨、铣、磨床等）热变形的研究还要晚些。直到20~30年之前，精密零件在机床上进行精加工时，其尺寸精度一般依靠操作工人边测量、边调整切（磨）削深度来取得。更为精密的尺寸则再加上一道研磨的工序。因此那时候人们对于机床热变形对加工精度的影响不甚注意。随着宇航技术的发展及电子计算技术在机床行业的应用，一方面某些零件的加工精度逐步提高，另一方面机床自动化不断发展，致使在新生成的精密机床上，操作工人对加工精度的控制逐渐为机床所代替。于是精密机床的传热与热变形对加工精度的影响，便逐渐引起普遍的重视。它在工艺系统的传热与热变形的研究中，占着突出的地位。

近年以来，人们不仅对精密测量要求在恒温条件下进行，而且对精密机床的制造、装配与使用，也要求在恒温室内进行。如何保持恒温，虽不是工艺系统所要研究的问题，但它却是传热学在建筑工程上的应用。

为了研究热变形及恒温问题，不得不研究传热学中的一些基本知识。

§ 1-2 工艺系统的热学特性

工艺系统热变形的产生原因与加工过程中的发热与传热有关，也与周围环境温度的变化有关。

一、工艺系统的热源

引起工艺系统热变形的热源，不外乎下列三大类：

(一) 切削或磨削热

在金属切削过程中，由机械能变为被切削材料的变形能，从而产生大量的热量，产生热量的多少将随被切削材料的性质及切削用量的大小而不同。车削时的发热量 Q 可由下式确定：

$$Q = P_c v \tau \quad \text{焦} \quad (1-1)$$

式中 P_c ——切削过程中的切削力的垂直分力（牛）。它与被切材料的性质、切削深度 t 、走刀量 s 及刀具几何参数有关；

v ——切削速度（米/秒）；

τ ——切削时间（秒）。

若 Q 以千卡计算， P_c 以公斤力计算，则上式改成

$$Q = \frac{P_c v \tau}{427} \quad (1-2)$$

切削所产生的热量主要通过传热分配到工件、刀具和切屑，其分配的百分比与切削速度有关。对于不同加工种类，其切削热的计算与分配各不相同。

在车削过程中，大量的热为切屑所带走（速度越高，百分比越大），传给工件的热量次之，一般在30%以下，而传给刀具的热量又次之，一般不大于5%，高速切削时甚至在1%以下。

对于铣削及刨削加工，传给工件的热量一般在30%以下。对于钻孔和卧式镗孔，因有大量切屑留在孔内，故其传给工件的热量就比车削等为高，在钻孔加工中（特别是垂直钻孔中）传给工件的热量往往在50%以上。

对于铸件加工，一般不用切削液，大量切屑落在机床床身和工作台上，它对床身和工作台热变形的影响也是显而易见的。但大量切屑只有粗加工时才有，而机床热变形对粗加工精度的影响则一般可以忽视。至于精刨、精铣、精镗这类加工，由于走刀量和切削深度均比较小，切屑所携带的热量也比较小，故由切屑所引起的床身、工作台的热变形，是否需要考虑，要看具体情况而定。但在加工中心机床上，零件的粗、精加工往往在同一机床上进行，工作台的热变形的影响，就应予以注意。有的采用冷冻机强制冷却切削区以减少工件与刀具的热变形，从而也部分地解决床身、工作台的热变形问题。

至于磨削，因其传给磨屑的热量较少，大部分热量是传给工件的。据试验分析，传给工件的热量通常在总热量的84%左右，传给磨屑的热量仅占4%，传给砂轮的热量约占12%左右。有时工件磨削区域的温度可达800~1000℃以上，它将使部分工件表面出现烧伤缺陷并使工件产生较大的热变形，从而影响工件的加工精度。

至于研磨这类精密加工，发热量虽小，但也不可忽视，研磨速度往往受热变形的限制而不能选得太大。

(二) 机床运动副的摩擦热和动力源的发热

机床主轴箱内有各种运动副，如主轴及传动轴的滚动轴承（或主轴的滑动轴承）、摩擦离合器、齿轮传动副、制动器、溜板（工作台）与导轨、丝杠与螺母等等。它们的运动件间产生一定的摩擦力（或摩擦转矩）和摩擦热而形成热源。这些热源使箱体的温度升高，箱内润滑油的飞溅带走这些发热点的热量而导致油池的温度升高，它对箱体底部的温升也有影响，由于箱体各点的温升不同，致使箱体产生歪曲的变形。

电动机本身的发热及液压系统（液压泵及液压系统）的发热，成为某些机床部件的热源，如液压系统常为磨床类机床床身的热源。

(三) 辐射与周围环境气温变化等其它外界热源

靠近窗口的机床，常受日光照射的影响，上、下午之间的照射位置不同和照射强度不同，机床的温升和变形也不同。日光照射通常是单面的或局部的，其受到照射的部分与未经照射的部分之间出现温度的差异，就使机床产生与原来形状不同的变形。

大型零件受到日照的影响也会出现各点温升不均和形状改变的现象，例如机床床身在顶面和一侧面受到日照时将会出现顶部凸起和床身扭曲的现象。

取暖设备对机床的影响与日照的影响是大同小异的。

至于周围环境的温度，则随气温及昼夜温度的变化而变化，通过空气对流使机床及工件的温度也发生变化，不仅对机床的精度有一定的影响，而且也影响零件的加工精度。例如，在精滚大直径的斜齿轮时，要经过几昼夜的连续加工，昼夜温差将引起齿轮齿表面的波纹度误差。

以上所述为工艺系统的主要热源，前二者是与切削（磨削）加工有关的热源，称为内部热源；辐射及周围环境变化等外界热源，则为与切削基本无关的热源。它们对于工件、刀具、机床、量具、夹具的变形的影响，各不相同，可以概略地认为：切削（磨削）热对工件、刀具的变形影响较大；粗加工的切削热对夹具的变形有一定的影响；机床运动副的摩擦热及动力源的发热则对机床的变形有较大的影响；周围环境温度的变化及辐射等外界热源对于精密机床、精密零件的加工与测量的影响，较为显著。因此，精密零件的最后加工与测量一般均要求在恒温条件下进行，精密机床一般也要求放在恒温室内。

二、工艺系统的热平衡，机床的热态几何精度

工艺系统中的机床、刀具和工件在加工过程中受着各自热源的影响，通过传热而使它们的温度迅速上升。与此同时，传给它们的热量又分别向它们各自周围的空间散失。当传给它们的热量与由它们散失的热量大致相等时，便达到所谓的热平衡状态，此时它们的各自温升达到某一相对固定的数值（但每个环节上的各点由于其与热源的距离不同而有不同的稳定的温升值），因而它们的热变形也达到一个近于稳定的数值。但工件在切削过程中，随着切削点的移动，热量不断地输入，加热的位置也不断改变，所以在切削终结之前一般难于达到热平衡状态。研究机床、刀具的热平衡具有现时意义。在机床与刀具热平衡状态下加工出来的零件，除工件热变形外，其它热变形所形成的误差，一般为常值，不再变化不定，可以采取一些其它适当的措施予以消除。

机床在热平衡状态下的几何精度称为热态几何精度，达到热平衡状态所花的时间与它所达到的几何精度对精密加工的影响很大。在机床开车之后至达到热平衡这一段时间内，机床

几何精度一直变化不定。从零件加工精度来讲,我们总是希望机床本身的几何精度保持不变,而且在机床开动之后不久便能达到这一不变的精度数值。因此提高精密机床的热态几何精度与减少达到热平衡所花的时间,为目前精密机床制造业的重要研究课题。它们是与机床传热有着密切关系的问题。

§ 1-3 工艺系统的传热与热变形对 机械加工精度的影响

所谓**机械加工精度**,是指零件在加工后所取得的主要表面上的尺寸精度(如直径、长度、孔间距等)、形状精度(如不圆度、不柱度等)、相互位置精度(如不平行度、不垂直度和不同轴度等)和表面光洁度等。

影响这些精度的因素比较多,可以大体上认为表面光洁度与刀具的几何参数、刀具的刃磨质量、切削用量及机床的动态特性(如振动之类)有关;相互位置精度与工件的定位安装及夹具的制造质量有关;尺寸精度及形状精度与工艺系统的原始几何精度及其在加工中几何位置的改变有关,而它们在加工中的几何位置的改变则与工艺系统的受力变形(刚度)与受热变形有关。为了保持零件形状在加工以后的稳定性,还应尽量消除工件内部的应力所引起的变形(各种时效处理)。在精加工中,切削深度与走刀量比较小,切削力一般不大,工艺系统受力变形对加工精度的影响与热变形相比处于次要的地位,如果机床的刚度较大,它的影响可以忽略不计。一般讲来,精加工机床及精密机床的原始精度比较好,精加工中工件的定位安装与夹具的制造质量也具有一定的水平,因此减少机床的热变形,就成为提高机械加工精度的重要手段。据西德阿亨工业大学布鲁明分析,在用现代机床加工零件的制造误差中,机床热变形所引起的误差有时高达50%;英国伯明翰大学皮克林尼克的调查表明,在精密加工中这个比例高达40~70%;日本垣野义昭也有类似的估计。现在讨论工件、刀具及机床热变形对加工精度的影响:

一、工件热变形

各种加工方法对工件的加热情况不同,热变形的状态及其影响也就不同。例如在外圆的车削或磨削中,外圆表面的受热就比较均匀,在平面的铣削或刨削中,工件仅有加工面受热或者单面受热。以车削而言,开始切削时工件温度与车间温度相同,随着切削的进行,温度逐渐升高,直径逐渐膨胀,而待加工部分的直径增量又为尔后的切削所切除,加工終了之后,接近车床主轴箱部分的工件直径要比尾架部分的直径小些。工件冷却之后,这种现象进一步加强而使工件呈现锥度的形状误差。但在磨削时,工作台不断地往返快速运动,工件的受热要比车削均匀,锥度现象就要小得多,然而在工件冷却后将出现尺寸误差。至于平面加工,加工面附近的温度上升很快,远离加工面的区域则温升很小,甚至没有温升。由于上下两面的温差,使工件这两部分的膨胀不均,而致顶面呈现凸起的现象,这个凸起部分是由切削加工形成的,又为切削所切除,在工件冷却之后,工件收缩,反而出现中凹的现象。例如机床床身导轨在导轨磨床上磨削时,便出现这样的现象。当大型床身上下表面的温差为 2.4°C 时,导轨上凸变形可达0.02毫米,加工以后的冷却导轨出现下凹的形状误差0.02毫米。

消除各种形式误差的主要手段是从减少发热量与增加工件的散热能力下手。例如,在外

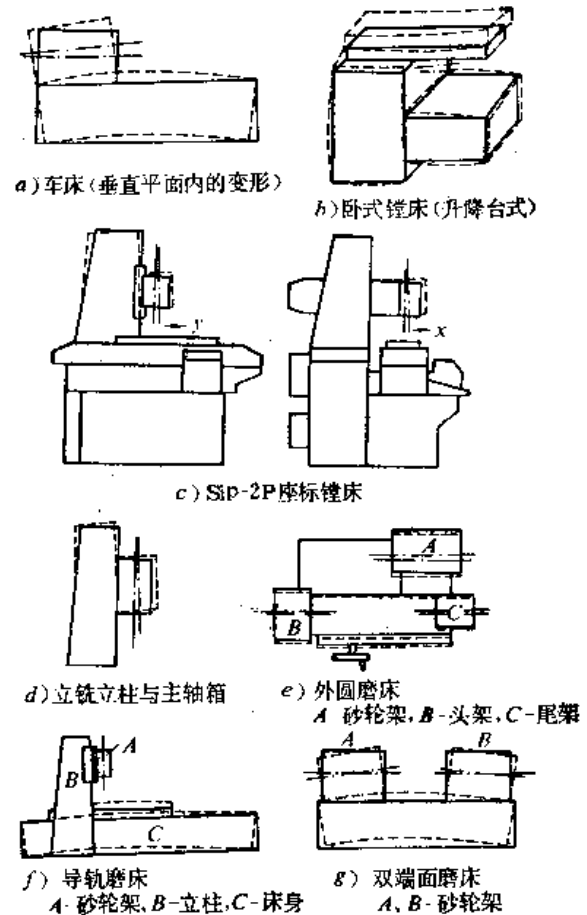
圆的精车中，采用小的切削深度和走刀量以及冷却液；在外圆磨削时喷射大量的冷却液以及在精磨时减小磨削深度和提高工件的线速度；在以碟形砂轮端面干磨床身导轨时，采用较小的磨削深度；在以砂轮周缘磨削床身导轨时，采用大量冷却液；在加工中心机床上进行多面的粗精加工时，采用强制冷却等等。这些措施的使用效果，也是与传热有关的问题。

二、刀具热伸长

刀具在切削过程中，由于切削热的传入而伸长。车刀热伸长对加工直径的影响较大。开始伸长较快，以后逐渐减慢，而在接近于热平衡时达到一个最大值。由于车刀的热容量小，达到热平衡的时间一般在 12~16 分之间。在车削加工中，一般工件的加工时间比较短而且还需进行磨削加工，车刀的热伸长对加工精度的影响可以不予考虑。只有在加工时间长的圆柱体的精车加工中，才应引起重视，因车刀热伸长将会引起工件的锥度而需设法排除。

三、机床热变形

机床在加工过程中，电动机的功率消耗分为机床的空转功率消耗与切削功率消耗两部分。在精加工中，后者的消耗远比前者为小，机床的空转功率消耗为精加工机床的主要热源。因此把机床空运转下的热学特性（温升、热平衡时间、热态几何精度）作为衡量机床质量的重要指标[⊖]。由于机床各部件的体积大，热容量大，各部件的温升一般不高，其达到热平衡时间却比较长。对于车床，最热部位（主轴前轴承）的温升，一般不大于 40℃。磨床温升一般不高于 15~25℃，这两类机床的热平衡时间一般在 4~6 小时之内。由于精密机床制造业，千方百计减少和排除机床的发热量，以减少热变形，这些机床部件的温升进一步下降。某些中小型座标镗床如 Sip-2P，其主轴箱内部的最大温升仅为 2~3℃，其外壳的温升在 2℃ 以下，各点的温差不到 1℃。因而它们的热平衡时间可以控制到 2 小时左右，而大型精密机床的热平衡时间还是比较大，如座标镗床 Sip-8P 横梁的热平衡时间需要 12 小时。在机床达到热平衡以前，机床的几何精度一直变化不定，影响零件的加工精度。例如，外圆磨床在开车以后，砂轮主轴轴承的温升不断提高，砂轮架受热变形，砂轮主轴轴线向前移动，工件主轴与砂轮主轴之间的距离不断减小，



图中符号：实线—原始位置；
虚线—变形位置；
粗中心线—主轴原始位置；
细中心线—变形后主轴位置。

图1-1 各类机床热变形示意图

⊖ 应该指出，温升、热平衡时间及热态几何精度这三个指标，均为一些接近于常量的数据，而不能当作绝对数据来看待，因为达到完全热平衡的时间相当长。从实用意义来讲，当温升（或热变形）达到其最大值95%时，便可视为已达到热平衡的状态。

致使调整好的加工直径变小，且不稳定。在达到热平衡之前所加工的一批工件直径上，出现尺寸上的差异，而且砂轮主轴侧母线和上母线倾斜，使工件产生几何形状误差和螺旋线缺陷（在磨削后的表面上出现明暗相间的螺旋线痕迹）。座标镗床的热变形将导致主轴轴线的热位移和热倾斜而影响它的定位精度和主轴轴线对工作台的垂直度。其它机床也有其各自的变形规律，也要影响它们的加工精度。图 1-1 为各类机床热变形的示意图。于此可以看出机床热变形对加工精度的影响。

精密机床热变形的数值一般并不太大。例如，在外圆磨床上，某些资料介绍，在到达热平衡时，主轴轴线与砂轮轴轴线的距离将缩小 27~28 微米，这个缩小量是在 4~6 小时内形成的，每个零件的磨削时间比较短，如以每小时加工 10 个零件计算，每个零件的尺寸缩小量平均不过 1 微米，似乎微不足道，可是加工一批零件的尺寸分散就很大了，最大直径与最小直径之差可达 54~56 微米，若零件的尺寸为 $\phi 50$ 毫米，其 2 级公差亦不过 17 微米，热变形所引起的最大误差竟为公差的 3 倍以上。这在自动化的外圆磨床上，就不能等闲视之了。又如座标镗床 Sip-2P 的主轴轴线在 2 小时内的热位移仅为 4 微米，就更小了，然而座标镗床所要求的定位精度一般为 5~2 微米。而且机床出厂之后，热平衡所需的时间以及达到热平衡时所产生的变形量，一般是无法改变的，而成为一个先天性的缺陷。虽可先让机床预运转一段时间，等到机床热平衡后再进行零件的精密加工，以进行补救，但也不过是一种消极手段罢了。由此可见，精密机床热变形的危害性是相当严重的，在自动化机床中，问题尤为突出。

§ 1-4 机床热变形的控制与防止

基于上节分析，机床的传热与热变形是工艺系统各环节中较为麻烦的问题。相对来讲，工件、刀具热变形就比较容易对付一些。因此，机床热变形是当前引起普遍重视而成为重点研究的对象。为此，人们提出了许多控制与防止机床热变形的措施，归结起来，可以分成以下几种。

一、减少热源的发热量

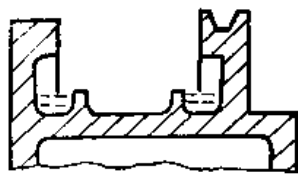
热变形的主要原因是热源的发热，减少热源的发热量是减少热变形重要措施之一。如提高滚动轴承的质量；对于一般传动轴尽量采用小尺寸的轴承；改善主轴轴承及传动轴轴承的润滑条件（如采用低粘度的润滑油及锂基润滑脂润滑或采用油雾润滑）及装配质量，提高齿轮的制造质量（如采用磨齿齿轮）及安装质量；改善机床导轨的摩擦润滑条件（如采用低摩擦系数的导轨材料或采用静压导轨之类）及改善丝杠-螺母的运动条件（如滚动丝杠及滚动螺母）等，以上均为减少热源发热的重要措施。除后面两种为减少直线运动部件的发热措施而外，其它均为减少主轴及主轴箱的发热措施。减少主轴前后轴承的发热量并使两者的发热量接近相等，对减少主轴的热倾斜量有着重要的作用。此外，还有采用直流调速电动机或液压马达作为主驱动装置，进行无级调速，以减少主动箱齿轮副及传动轴与轴承的数目，从而减少主传动箱内的发热量。

二、将热源的部分热量移到构件温升较低的部分以均衡构件的温升

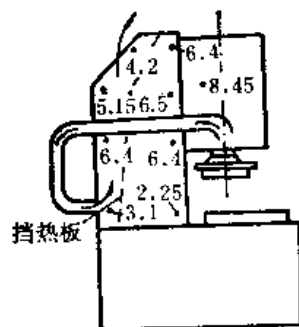
减少构件本身各点的温差，是减少热变形的另一个有效手段。虽然构件在均匀温升的情况下也可能出现翘曲之类的热变形（当构件尺寸不匀称或受到外在约束而不能自由膨胀时），

但一般讲来，构件的弯曲或翘曲的热变形是由构件本身具有不均匀的温升（即点与点间出现温差）引起的。温差愈小，热变形愈小。图 1-2 所示的改进结构便是采用减少构件温差的例子。图 1-2

a 为 M7140 平面磨床床身顶部结构上的改进，在导轨下面添加如图所示的油沟，将床身底部油池内的热油引导到这些油沟内，以均衡床身上下部的温差而减少其变形，其效果比将油池从床身底部移出为好。当油池放在床身底部，床身底部



a)



b)

图 1-2 改变机床构件的受热情况

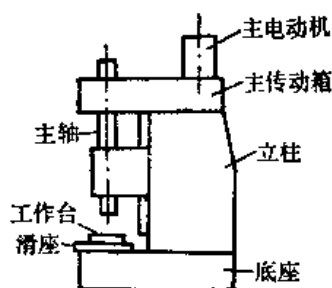
部的温度高于其顶部，床身顶面中部下凹；反之，当油池全部从床身移出，床身顶部因工作台移动的摩擦发热而致其顶部温度高于其底部，床身顶面将出现中部上凸。

在图 1-2 b 中，平面磨床立柱的中空部分安装有挡热板，将由主轴轴承处吸出的热风导入热挡板与立柱后壁之间以加热其后壁，减少立柱前后壁的温差，从而减少立柱向后的倾斜。图中黑点附近的数字代表该处的温升值（ $^{\circ}\text{C}$ ）。

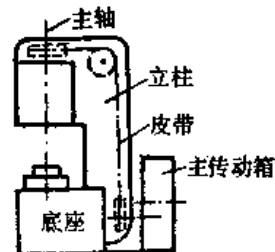
又如将车床床头箱的油池移到床身前脚的底部，不仅减少床头箱的温升和热变形，而且使前脚的温升均匀化，从而减少床身弯曲变形，以致减少主轴轴线对床身导轨的热倾斜量。

三、将热源置于易于散热的位置

将主电动机置于易于散热之处。如图 1-3 a 的座标镗床上将主电动机置于主传动箱的顶部，并使风扇吸出的热风由电动机的顶部吹出，不仅主电动机的热量易于散失，而且主传动箱的散热条件也较好，减少了立柱的受热并使其顶部受热均匀，从而改善立柱的弯曲变形。



a)



b)

图 1-3

图 1-3 b 为一座标镗床的布局示意图，它将主传动箱和主电动机放在机床的外面（立柱背后的单独装置），用皮带将动力传到主轴上，以消除整个主传动系统发热对机床的影响。

四、使机床部件的热变形向不影响精度的方向发展

图 1-4 a 为车床主轴箱与床身导轨连接的一种形式，主轴中心 O 对导轨定位面 1、2 的水平与垂直方向的距离分别为 B 及 H ，其相应的热位移为 ΔB 及 ΔH 而导致主轴中心 O 向右上方偏移，从而导致工件轴线与刀具刃口之间的位置变化，影响工件直径上的变化。若将连接形式改成图 1-4 b 的形式，将中心 O 直接置于水平方向定位面 1 的上方，而致 B 及 ΔB 为零，只有 O 在垂直方向的位移 ΔH ，从而使直径的加工精度大为提高，这是因为车削加工中影响直径误差的主要因素为 ΔB 的缘故。

五、在机床结构设计中采用自动热补偿装置

某双端面磨床曾发生过主轴前端热伸长量超差的问题。其热伸长量达到 0.08 毫米，前轴承

的温升达到 27°C 。针对上述情况采取一些措施，如采用二号润滑脂以减少轴承的发热量，在壳体 2 与前轴承之间增添一个过渡套筒 3（图 1-5），当前轴承发热时过渡套筒向后伸长以补偿主轴 1 向前的热伸长量，取得了较为满意的效果。

六、其它措施

如采用冷冻装置冷却润滑油，再用这种冷却油对齿轮、轴承进行循环冷却以减少传动箱的变形；采用冷风散热装置；在热源与构件之间安装隔热装置等。

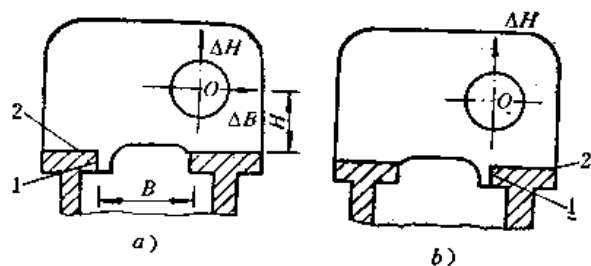


图1-4 车床床头箱的连接形式对主轴轴线热位移的影响

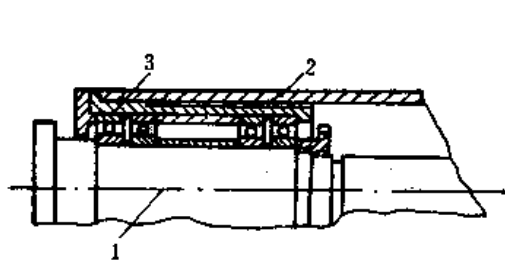


图1-5 主轴部件的结构改进

此外，机床床身的紧固状态，如龙门刨床床身地脚螺钉的紧固状态（某些螺钉的松紧程度），对床身的热变形也有一定的制约作用。

§ 1-5 机床热变形的具体解决方法

一台机床是由若干个构件（如主轴箱、床身、立柱、工作台、升降台等）组合而成，如何把上节控制热变形的定性措施恰当地运用到各个构件以使各构件间的变形起着相互的制约作用而达到预期的精度要求，是设计人员所面临的一个困难问题。最早的方法是通过试验来解决，目前已开始采用计算方法，以期能用定量的计算来解决。

一、试验法

对需要改进的机床进行空运转试验，测出各主要构件或部件的热平衡时间及它们在热平衡后的温度分布（温度场）和它们各自变形状况（如主轴箱的变形、床身的弯曲度、立柱的倾斜量）以及这些变形对机床几何精度如主轴轴线对床身导轨的倾斜度或对工作台的垂直度等的影响。经过分析找出对加工精度有影响的主要构件或部件，再对这些挑出的主要构件或部件进行仔细的分析，找出热源、传热与热变形之间的关系，提出改进措施（如减少热源发热量、将热源的部分热量移到构件温升较低之处、改变热源位置等）作出定性的结论，以进行新的设计。根据新的设计进行试制，再对新制产品进行上述同样的试验，以检验改进的效果。如测定的结果不能满足预期的要求，再修改设计。经过 2~3 次“改设计—试制—试验”循环之后便能基本上取得满意的结果。这是一种直观的、行之有效的方法，普遍地得到应用。

二、计算法

这个方法的第一步和上述方法完全一样，所不同的是在提出定性的改进措施之后，做些定量的计算工作。

根据试验数据，分析各有关构件的热源及传热情况，假定各构件的导热方程与边值条件，

用数值计算法（有限单元法或有限差分法）算出各构件在热平衡时的温度分布和热变形数值（如有可能也算出达到热平衡状态所花的时间）。将计算结果与试验结果进行比较，看其是否一致。如不一致再修改边值条件，甚至修改导热方程，进行重算直至计算结果与试验数据基本接近为止。这样我们就找到了各构件的近似导热方程与边值条件，亦即建立起它们的导热数学模型。然后再改变各构件的设计，假定其热源的发热量（或将其部分热量移置到构件的其它部位），参考前此建立的数学模型算出新构件的温度分布与热变形数值。与此同时也可配合模型试验以检验计算的结果[⊖]。于是建立起来的各构件的导热数学模型就更为可靠了。在此基础上，修改各主要构件的设计，用计算方法算出各构件的热变形并将各构件相互制约的变形结果计算出来，这样算出的综合热变形便为新设计所预期的机床热态几何精度。算出的热态几何精度与机床所要求的热态几何精度进行对比，看其能否满足。如不能满足，再修改设计直至算出的结果能够基本满足设计要求为止。此后再把新设计投产试制。

可以看出，计算法与试验法的主要区别，是计算法以多次“计算—修改”循环代替试验法的多次“改设计—试制—试验”循环。试制的次数大为减少，改进设计的生产费用与生产周期均将大为缩减，其优越性是显而易见的。与此同时，几个改进的设计方案可以同时进行，通过计算以找出一个最佳的方案，进行试制。在上述过程中，在考虑热学特性影响的同时，还可考虑机床动力学特性（动刚度与稳定性）、声学特性（噪声）及经济性等内容，从而使机床最后质量达到各种特性综合平衡的效果。

上述方法，不仅可以用于机床构件的研究与改进，而且可以用于复杂零件和复杂刀具在加工过程中的传热、温度分布与热变形的研究。

§ 1-6 本课程的任务

用定量计算来对机床及其他工艺问题的热变形的分析研究是一件很有意义的工作。但要进行这方面的分析研究，需要进行一系列的理论准备，如传热学的基本知识、稳定与不稳定系统的导热、温度场与热变形的数值计算等等。本课程的任务在于提供上述必要的理论知识。本章介绍的有关工艺系统热变形的基本概况将有助于上述任务的完成。

⊖ 有人用含有铜粉的塑料制造构件的缩小模型，用电炉（或热油）模拟热源的发热量，对模型的温度分布与热变形进行测定并用数值法进行计算，与此同时也对实物进行同样的实测与计算，其结果是相互吻合的^[2]。

第二章 传热的基本知识

§ 2-1 传热的基本方式

在自然界的各种传热现象中，虽然存在着各种不同的传热方式，但根据传热过程的物理本质，热的传递基本方式通常有三种：导热、对流和辐射。例如在切削加工形成切屑的过程中，机械能转变为变形能，同时产生热能。存在于切屑中的这些热能通过导热把一部分热量传给刀具和工件，而其余大部分热量则随着断落的切屑而落到机床床身、工作台（溜板）或积屑盘上去。切屑开始落下时，温度很高，但不久之后因热量在空气中散失，致使切屑温度下降而逐渐接近于室温。工件在加工过程中吸收热量温度逐渐升高，离开机床之后因散热而温度又逐渐下降。如果在切削过程中应用冷却液，把切屑、工件和刀具的热量带走，则温升减慢，而且以后的冷却也加快，这些热量传递都是由导热与对流方式起着主要的作用。又如在冬天阳光下感到温暖，炼钢炉门打开后，人在近旁感到灼热，就是辐射传热的作用。

§ 2-2 导热的基本概念

一、导热

导热又称热传导，是指直接接触的物体各部分热能量交换的现象，如切屑把热量传给刀具、工件、床身、工作台之类。在液体、气体中也有导热现象，但以固体比较显著。一般认为导热是物体各部分没有相对位移的一种传热方式。在不同的介质中，其传热机理不同，在液体和非金属固体介质中，能量的转移主要靠分子运动弹性波的作用（类似于声音的传递）；固体金属则主要依靠自由电子的运动；气体主要依靠分子的不规则运动〔1〕。

温度是物质分子热运动激烈程度的衡量指标。温度愈高，物质分子热运动就愈激烈，其热运动的能量也愈大。高温部分与低温部分分子热运动的程度不同，能量也不同，两者碰撞的结果，热运动能量大的分子就将能量转移给热运动能量小的分子。导热的本质正是由组成物质的分子、原子等粒子不断碰撞而引起能量的转移，在现象上就表现出热量由物体的一部分传递到它的另一部分。由于金属结构中分子动能的传递主要依靠自由电子的运动，它的导热要比分子只能在平衡位置附近振动的非金属固体快得多，液体的结构介于气体、固体之间，分子可作幅度不大的位移，其热量的传递不仅依靠分子的振动，而且还依赖分子间的相互撞击。

一般只有在密实的固体中，才能看到单纯的导热现象。当流体（气体和液体）各处的温度不同时，在发生导热的同时还伴随着对流的现象。只有在流层极薄时，其对流方式可以不予考虑。

二、温度场

导热就是热量从高温处向低温处流动。所以，研究导热必须涉及物体的温度分布。在某一瞬时内，物体各点温度分布情况，称为温度场。它就象电场等一样，是物体中一切点的

温度分布的总称。一般讲来，物体的温度分布是空间坐标和时间的函数，即

$$t = t(x, y, z, \tau) \quad (2-1)$$

式中 x, y, z 为空间直角坐标， τ 为时间坐标。

物体的温度场有两大类。一类是物体内部温度分布与时间无关，而只是位置的函数。这时，物体各点温度不随时间变动，这种温度场称为**稳定温度场**或**定常温度场**。另一类是随时间而改变的温度场，例如在开始机械加工的一段时间内，刀具和机床构件上的温度分布就是不断变化的。这时，温度分布随时间而改变，这种随时间改变的温度场称为**瞬时温度场**，也称**不稳定温度场**或**非定常温度场**。在稳定的温度场内，

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

这时温度分布的表达式简化为

$$t = t(x, y, z) \quad (2-2)$$

当刀具、机床构件达到热平衡状态时，其温度场便为稳定温度场。在特殊情况下，物体温度变化仅局限于一个或二个坐标方向上，称为**一维、二维温度场**。**一维稳定温度场**或称**单向稳定温度场**，其方程具有最简单的形式：

$$t = t(x) \quad (2-3)$$

温度场中同一时刻相同温度各点相连成的曲面称为**等温面**，对于某一截面则成为**等温线**。温度场习惯上就用等温面表示。图 2-1 所示为水冷的燃气轮机叶片的温度场，其上标注不同温度数值的曲线为不同温度的等温面〔4〕。可以看出，在所示的截面内温度是不均匀的，其内兼有 x, y 方向的热量流动 Φ_x, Φ_y ，因而便不是一维导热。如仅在截面内 x, y 二个方向有热量流动而在轴向 z 无热流时，则为**二维导热**；若在轴向 z 也有热流则为**三维导热**。当燃气轮机叶片上温度场（如图所示）不随时间而变时，则其传热为**稳定导热**，其温度场便为**稳定温度场**。当燃气轮机开始起动时叶片传热未达热平衡之前，温度场随时间而变，此时的导热及温度场便是不稳定的。

因为温度不是矢量，所以**温度场不是矢量场而是标量场**。

三、热流线与温度梯度

由于热量总是自发地由高温处向低温处流，而在等温面上各处的温度相同，所以在等温面上便没有热量流动，因而**热量只能沿着等温面的法线方向流动**。试证明如下：

在图 2-2 a 上，设热流量 Φ 的方向与等温面 S 的法线方向成 θ 角，则热流量 Φ 可以分解为法向和切向两个分量 $\Phi_{法}$ 和 $\Phi_{切}$ ，但 S 面上无热流，故 $\Phi_{切} = 0$ ，因而 $\Phi = \Phi_{法}$ ，即热流沿法

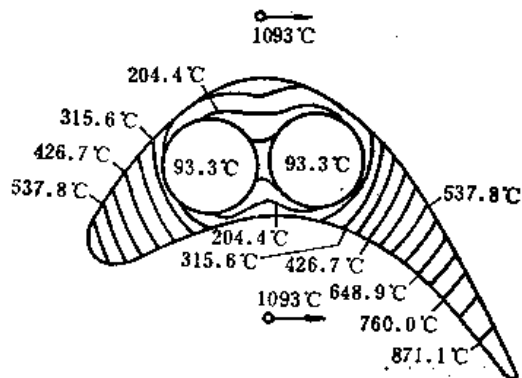


图 2-1 水冷的燃气轮机叶片的温度场

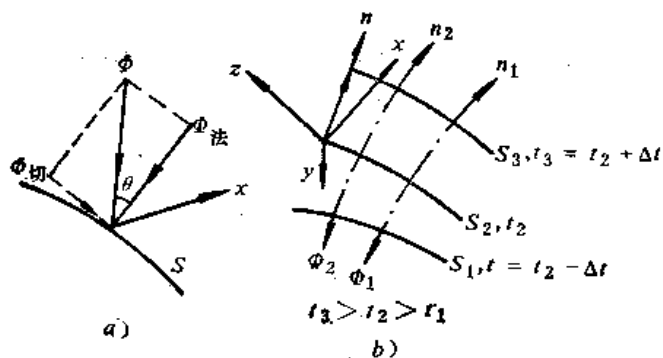


图 2-2

线方向流动。

设 S_1 、 S_2 、 S_3 为物体上的一系列等温面(图 2-2 b)，而 S_1 的温度小于 S_3 ，则热量由 S_3 向 S_1 方向流。其热流的方向既与 S_1 垂直，也与 S_2 、 S_3 垂直，因而与一系列等温面垂直的曲线便为热流线，如图中 ϕ_1 、 ϕ_2 所示。有了温度场之后，便可以很方便地作出它的热流线而显示出其热量流动的状况。图 2-3 b 为内外壁面温度分别为 t_1 、 t_2 的圆筒壁(图 2-3 a)某截面的温度场和热流线图。其中同心圆(实线)为温度场，径向放射线(虚线)为热流线。

温度场中沿单位长度上的最大温度变化率是在等温面的法线方向 n 上，因为相邻两等温面之间以法线方向的距离为最短。通常把温度场任何点的温度沿等温面法线方向 n 上的增加率称为该点的温度梯度 $\text{grad } t \ominus$ 。

$$\text{grad } t = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta n} \right) = \frac{\partial t}{\partial n} \text{ 开/米}$$

温度梯度是一个矢量场。通常把温度增加的方向作温度梯度矢量的正方向，因而热流线的方向与温度梯度的方向相反，如图 2-2 ϕ_1 与 n_1 所示，其中 n_1 、 n_2 为曲面 S 的外法线方向。温度梯度在 x 、 y 、 z 三方向的投影可分别由下式决定：

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}_x t &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, x) = \frac{\partial t}{\partial x} \\ \text{grad}_y t &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, y) = \frac{\partial t}{\partial y} \\ \text{grad}_z t &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, z) = \frac{\partial t}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

四、导热的基本定律——傅里叶定律

前已述及，当物体两部分之间冷热不同(具有温度梯度)时就要产生热量的传递，亦即产生热流。热流的方向总是由高温向低温处流。现在来研究热流流量(热流量)大小的问题。

为了说明问题，假想导热体中存在着两个彼此平行的平面，它们的温度分别为 t_1 和 t_2 ，并在整个平面上是均匀的，两平面之间的距离为 dx ，它们的面积为 A ，如图 2-4 所示。在时间 $d\tau$ 内沿 x 方向通过这一材质均一的固体(介质)的热量 dQ ，与垂直于传热方向 x 的导热面积 A 、沿着传热路线的温度梯度 $\frac{\partial t}{\partial x}$ 及该导热体导热系数 λ 有关，而为三者的相乘积，即单

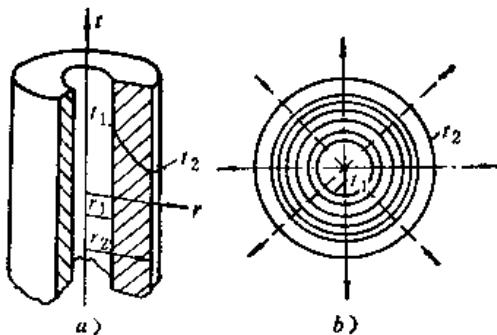


图2-3 内外壁面温度分别为 t_1 、 t_2 的圆筒壁的温度场和热流线图

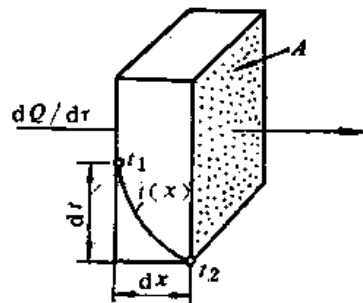


图 2-4

⊖ 一个标量场的梯度是由下列法则作出的：先作一个矢量场，在其每一个点上，矢量的方向是沿对应的等温面法线方向，而它的代数值的大小等于标量函数 t 沿所述法线方向的导数。

位时间内的热流量 $\frac{dQ}{d\tau}$ 为

$$\Phi = \frac{dQ}{d\tau} = -\lambda A \frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{瓦} \quad (2-5)$$

在工程单位中，一个千卡的热量是一千克的纯水在一个物理大气压下温度由 19.5°C 升高到 20.5°C 所需要的热量。 $1\text{千卡/小时} = 1.163\text{瓦}$ 。

这个公式是由法国数学家 J. B. J 傅里叶 (1768—1833) 于 1822 年根据导热现象的丰富经验及热力学第二定律建立起来的，称为傅里叶定律〔4〕。式(2-5)为一维导热定律。

在瞬时导热过程中，温度 t 既随位置改变而改变，也随时间而变化，因而是 x 和 τ 的函数，即 $t(x, \tau)$ 。而在稳定导热过程中， t 仅为 x 的函数 $t(x)$ ，此时 $\frac{dQ}{d\tau} = \frac{Q}{\tau}$ ，于是有

$$\Phi = \frac{Q}{\tau} = -\lambda A \frac{dt}{dx} \quad \text{瓦} \quad (2-6)$$

$t(x)$ 的变化如图 2-4 所示。若 λ 为常值 (一般不为常值)， A 不随 x 而变化，则 $\frac{dt}{dx} =$ 常值，于是 $t(x)$ 为直线。

热流量也可用单位时间、单位截面所通过的热量 q 来表示。我们称 q 为比热流量或热流密度，此时

$$q = \frac{d\Phi}{dA} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{瓦/米}^2 \quad (2-7)$$

或
$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad \text{瓦/米}^2 \quad (2-8)$$

在瞬时热传导中，进入导热体的“微元体”内的热量与离开该“微元体”的热量在任一瞬时内是不相同的。根据热力学第一定律，两者之差用以增加该“微元体”的“内能” E ，此时内能的变化为

$$dE = c\rho V \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \quad (2-9)$$

式中 c ——比热，焦/(千克·开)，它为导热体每千克重量升高 1°C 所需要的热量；

ρ 、 V ——分别为微元体的密度(千克/米³)和体积(米³)。

不言而喻，在稳定的导热中， t 不为 τ 的函数，而有 $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ ，因此 $dE = 0$ ，亦即在稳定的导热中导热体的任一“微元体”内均没有内能的变化。

五、导热系数 λ

导热系数由导热基本定律给出如下的定义：

$$\lambda = -\frac{q}{\frac{\partial t}{\partial n}} \quad \text{瓦/(米·开)} \quad (2-10)$$

它表示物质导热能力的大小。在物理本质上，它就是单位温度梯度作用下物体内产生的热流密度值，其中 $\frac{\partial t}{\partial n}$ 为沿热流线的温度梯度， n 为传热面的法线方向。

工程计算中常用的各种物质的导热系数都是用专门实验测定出来的。其实验方法可参看

有关文献[4]。一些常用物质的导热系数值列在本书的附表1里。不同的物质，导热系数的数值可以极为不同，即使同一物质（特别是建筑材料和隔热材料），导热系数的数值也还与物质的结构、密度、成分、温度、压力和湿度有关。虽然影响导热系数的因素很多，但其主要因素是物质的种类和温度。一般讲来，导热系数数值以金属最大，非金属次之，液体又次之，而气体最小。常温下铜、钢材、水、空气的导热系数分别为384、46.5、0.58及0.023瓦/(米·开)，其相应的千卡/(米·小时·度)值为330、40、0.5和0.02。

金属的导热系数以银为最高，在418瓦/(米·开)以上，这是因为金属的导热主要依靠自由电子的运动，因此导电性能好的金属其导热性能也好。纯金属的导热系数大于合金，而在合金元素中杂质含量愈多，导热系数愈小，这是因为杂质影响了自由电子的能量传递。大多数金属的导热系数随着温度升高而降低，某些金属则有随着温度升高而增大的现象；大多数液体的导热系数（除水和甘油以外）也随着温度升高而减小，水的导热系数要比其它液体高几倍；气体的导热系数则随温度升高而升高[3]，这是因为气体温度升高时，其分子的不规则运动速度加快的缘故。某些黑色金属、双合金和液体的导热系数在低温时有随着温度升高而增加、并在高温时有随温度升高而下降的现象[4]。值得注意的是氢和氦的导热系数要比一般气体高得多（高5~10倍），因此原来空气冷却的发电机，改用氢气冷却后，其冷却效果要好得多。图2-5所示为各种物质的导热系数对温度的依赖关系。从图中可以看出，大多数材料在较大的温度区间内的导热系数，可以采用下列的近似公式进行计算：

$$\lambda = \lambda_0(1 + bt) \tag{2-11}$$

式中 λ_0 ——0°C时的导热系数值；

t ——温度，°C；

b ——常数，由实验确定之。

当导热系数随着温度上升而减小时， b 为负值，如多数金属材料；反之则为正值，如气体、隔热材料。

导热系数小的固体材料有良好的隔热效能。习惯上把导热系数在常温下小于0.23瓦/(米·开)的材料称为隔热材料(或称保温材料)。石棉、矿渣棉、硅藻土、硅石、泡沫塑料、泡沫混凝土和泡沫硅藻土等都是隔热材料的例子。泡沫材料具有很多空隙，其内充满空气，空气的导热系数小，因此泡沫材料的隔热能力比密实的材料要好。但应指出，这些材料必须保持良好的干燥状态，如湿度很高，则因水的导热系数高而使其隔热能力有明显的下降(水的导热系数比空气大20~22倍)。

有些材料，象木材、石墨等，其各向的结构不同，所以导热系数随着导热方向不同而有很大的差别。这些材料称为各向异性材料。对于它们必须指明导热方向才能查得正确的导热系数值。

从式(2-11)，可以看出， λ 不为常数值。因此在式(2-5)~式(2-8)中， λ 不能视为常值，

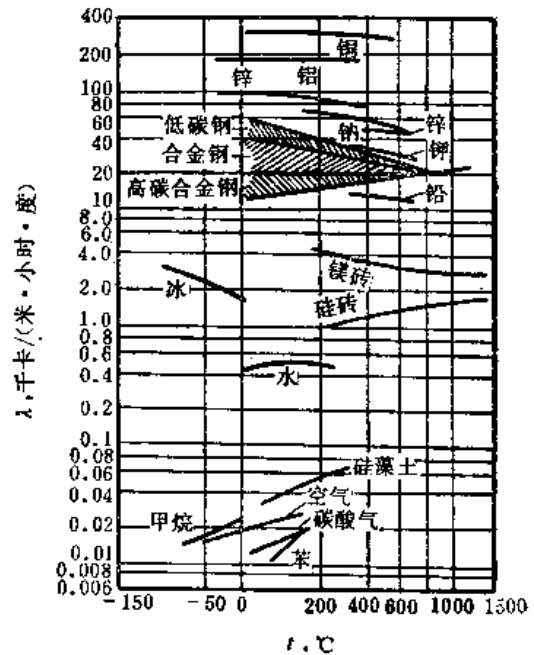


图2-5 导热系数对温度的依赖关系

而为某个局部温度范围 t 的函数 λ_t 。在实际工程计算中，如温度变化不太大，可以采用导热系数在该温度范围内的平均值 $\lambda_{平均}$ ；如与常温相差不大，也可采用附录中的数值。

§ 2-3 对流、对流放热的基本公式——牛顿公式

一、热对流及对流换热

热对流是指流体各部分发生相对位移而引起的热量交换现象。对流现象只出现在流体（气体、液体）中，而且总是伴随着流体本身的导热作用，但就其量的大小来看，流体导热可以略而不计。例如，空气经过暖房器散热片后的吸热而形成热空气，并由它把热量带到房间的其它部分的现象，便是一种热对流现象。机床停车以后，各部分的温度逐步下降，最后达到车间温度的水平，也是一种热对流现象。

液体流过固体壁面而相互产生的换热过程，称为对流换热，简称放热。有些参考书还把壁面将流体加热和流体将壁面加热分别称为放热过程和给热过程。本书为简便计，不加区别，统称放热过程。

由于对流换热的热量转移，不仅依靠流体的导热，而且也要依靠流体流动产生的位移，所以它除了受到导热规律的控制之外，还要受流动规律的支配。影响放热过程的因素很多，它们有流体的流速、密度、比热、粘性系数、导热系数等等。过程取决于多种因素这个特点使得过程比较复杂。

二、对流放热的公式——牛顿公式

放热过程所传递的热量，以下列公式计算：

$$\Phi = \alpha_{\text{外}} A (t_w - t_f) \quad \text{瓦} \quad (2-12)$$

或

$$q = \alpha_{\text{外}} (t_w - t_f) \quad \text{瓦/米}^2 \quad (2-13)$$

式中 A ——换热面积，米²；

$\alpha_{\text{外}}$ ——单位表面对流放热系数，简称对流放热系数，单位为瓦/(米²·开)；

t_w ——固体壁面温度，度；

t_f ——与壁面接近处的稳定的流体温度，度。

这个公式是牛顿于 1702 年提出的称为牛顿公式。

三、对流放热系数 $\alpha_{\text{外}}$ 及其影响因素

从式 (2-12) 可以推导出对流放热系数的定义，它为单位表面、单位时间内、温度差为 1℃ 时的表面对流放热量。放热系数 $\alpha_{\text{外}}$ 与前面所提到的物体固有的物性数据 λ 和 α 不一样，它只是一个与边界放热过程有关的技术数据。另一方面，它没有揭示出影响放热系数的各种因素的具体关系。在某一具体放热过程中，人们往往做出巨大的努力来从理论上和实验上揭示各种因素对放热系数的影响。在机床构件表面上，对流放热系数相差很大，从 2.3 瓦/(米²·开) 到 114 瓦/(米²·开)，若用风扇冷却时，放热系数还大得多。冷却液在钢管内强迫流动时，对流放热系数可达 5000 瓦/(米²·开)。

影响放热系数的主要因素有流动的动力、放热壁面的几何形状及流体的流动状态。除此而外，流体的物性如密度、粘度（动力粘度）、导热系数等也影响放热系数。兹分述于后。

1. 流动的动力特性

按流动动力特性来分，流体的流动可分为受迫流动（亦称强迫对流）和自然流动（亦称

自然对流)两大类。凡受外力影响,例如水泵、通风机作用所发生的流体流动,称为受迫流动。受迫流动的强烈程度取决于压差、流体种类、温度、流道阻力等因素。凡是由流体冷热各部分的密度不同所引起的流动,称为自然流动。自然流动的强烈程度取决于流体的受热情况,随着流体的种类以及过程进行所处空间的大小和壁面位置而不同。在一般情况下,流体作受迫流动放热时,在受迫流动的同时还会附带产生自然对流。但当受迫流动相当强烈时,附加的自然对流的常可略去不计。

2. 放热面的形状

放热面的形状大大影响流体的流动情况。因此必须针对具体情况作具体分析。例如,流体在管外绕流时在管子后侧将会引起涡流(如冷凝器),这和管内流动就有质的区别。

3. 流体流动的状态

早在1883年雷诺用实验方法证明流体的流动存在着两种不同的形式。他把颜料加入流道进行观察:当流速低时颜料在流道中形成一条直线,如图2-6 a所示,这就意味着每条流线或流束之间互不干扰地流动,这种流动称为层流或流线流动。但当流速增加到一定数值以上时,颜料在流道中呈现杂乱无章的分布,如图2-6 c所示,这就意味着流体各质点在垂直于主流方向也有运动,从而使流体质点不规则地互相交织、互相干扰,破坏了流体的分层流动。这种流动称为紊流(亦称湍流)。

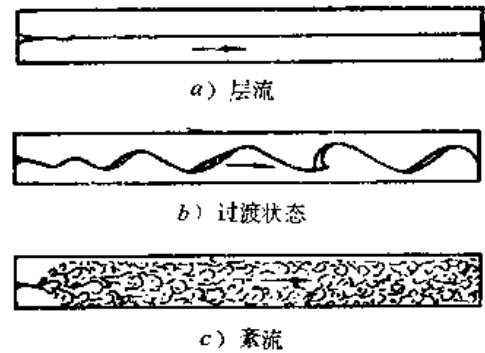


图2-6 流体在流道内流动特性

层流和紊流以临界速度为分界点,低于临界速度时成为层流,高于临界速度时变成紊流。临界速度值取决于流体物性和流道的形状和大小。

层流和紊流因物理机构的不同,反映出不同的热转移规律。因此在研究放热问题时,区分层流和紊流,具有非常重要的意义。层流时热量的转移主要依靠导热。紊流时,则情况不同,现已查明,流体在紊流时只有最贴近壁面的一层流体薄膜(层流薄膜)具有层流性质,如图2-7 a所示。在这薄膜层之外,热量的转移除依靠导热机理外,同时还依靠涡流扰动的对流机理(主要由于流体的超分子部分的振动)。在紊流状态下的传热可以是层流状态下的许多倍。在普通情况下(如水及油等介质中)流体紊流时的放热强度主要取决于层流薄膜的热阻(热阻的意义在后面解释),因为这部分热阻和紊流部分的热阻相比要重要得多。为了弄清这一点还要介绍“热边界层”的概念:在流体流过壁面时,除了接近壁面上产生一流体薄膜即“速度边界层” δ 以外,还有一个“热边界层” δ_t ,如图2-7 b所示。在热边界层内,流体温度从壁温 t_w 逐渐升高,当 δ_t 达到最大值时流体温度 t_f 亦达到最大值,如 δ_t-t_f 曲线所示,在热边界层以外流体的温度均一。在速度边界层内,流体速度亦有类似变化,如 $\delta-v$ 曲线所示。而且速度边界层与热边界层不是一个东西,因为速度边界层是

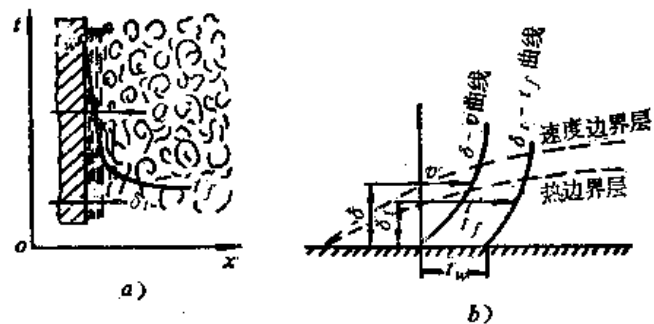


图2-7 流体紊流受热时壁面附近温度变化的特性

在普通情况下(如水及油等介质中)流体紊流时的放热强度主要取决于层流薄膜的热阻(热阻的意义在后面解释),因为这部分热阻和紊流部分的热阻相比要重要得多。为了弄清这一点还要介绍“热边界层”的概念:在流体流过壁面时,除了接近壁面上产生一流体薄膜即“速度边界层” δ 以外,还有一个“热边界层” δ_t ,如图2-7 b所示。在热边界层内,流体温度从壁温 t_w 逐渐升高,当 δ_t 达到最大值时流体温度 t_f 亦达到最大值,如 δ_t-t_f 曲线所示,在热边界层以外流体的温度均一。在速度边界层内,流体速度亦有类似变化,如 $\delta-v$ 曲线所示。而且速度边界层与热边界层不是一个东西,因为速度边界层是

依靠动力变化而产生的；热边界层是依靠热量传递而产生的，这二者有一定的关系，但又不一致。一般来说， $\delta_t < \delta$ ，故最大的温度降就发生在速度边界层内。

由于层流薄膜的传热属于导热传热，根据式(2-7)，其贴近壁面的比热流量为

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=+0}$$

其中 x 以壁面的外表面为起点计算。

根据式(2-12)，表面放热的比热流量为

$$q = \alpha_{\text{外}}(t_w - t_f)$$

上述两式是对同一个热量的两种表达形式，它们的右方必定相等。于是

$$\alpha_{\text{外}}(t_w - t_f) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=+0} \quad (2-14)$$

若薄膜层内的温度梯度在膜厚 δ_t 中是真正均匀一致的，即温度按直线分布，则通过薄膜的比热流量为

$$q = -\lambda \left(\frac{t_f - t_w}{\delta_t} \right) = -\frac{\lambda}{\delta_t} (t_w - t_f) = \alpha_{\text{外}}(t_w - t_f) \quad (2-15)$$

故

$$\alpha_{\text{外}} = \frac{\lambda}{\delta_t} \quad (2-16)$$

式中 λ 、 δ_t ——分别为流体的导热系数及其热边界层厚度。

在式(2-16)中， δ_t 越小， $\alpha_{\text{外}}$ 越大。 δ_t 在自然对流中比强制对流中大。紊流的程度越高， δ_t 越小。因此，放热在很大程度上取决于流体流动的性质。

由于前述影响 $\alpha_{\text{外}}$ 的一些因素无不影响热边界层的厚度 δ_t ，所以要求得 δ_t 相当困难，因而习惯上采用放热系数 $\alpha_{\text{外}}$ 来进行计算，亦即采用式(2-12)的牛顿公式进行放热量的计算〔4〕。

然而不应忘记，放热系数 $\alpha_{\text{外}}$ 是与导热系统和周围介质的温度、物性及流体的动力性质有关的复杂函数。因此，对于许多对流传热现象的研究和 $\alpha_{\text{外}}$ 的确定，就难以用理论分析而借助于实验手段。例如在动力工程、宇航技术等部门的放热，不是温度变化大，就是流体的物性、动力特性和流道形式变化多端，或者兼而有之。在现代的传热学中，人们对于放热系数 $\alpha_{\text{外}}$ 的研究与确定，做了大量的理论与实验的工作。

四、相似原则在对流换热中的应用

对流换热过程是一个复杂的过程，放热系数取决于许多因素，已如前述。要搞清楚它们的影响，必须进行实验研究。在此情况下，如果只能依靠个别实验得到个别情况下的一些零星资料，那么就对过多的因素的每一项进行系统的实验研究，这在实际上是很难办到的，因为这样做就得进行成千上万个的实验。然而在事实上，某些特殊事物与普遍事物之间是具有一定的相互联系的。实验研究中的相似原则，就是要找出这些事物与普遍事物之间存在着相互联系的问题。它指导我们在进行实验研究的时候，应当去发现一个个别实验中所包含的普遍性，以揭示特殊性（个别实验）和普遍性之间的相互联系〔1〕。

（一）准则方程

首先利用量纲分析法，来研究直径为 d 的管道中，受迫流动时的放热系数的关系式〔5〕。

$$\alpha_{\text{外}} = f(v, d, \mu, \lambda, \rho, c_p) = C v^a d^b \mu^c \lambda^d \rho^m c_p^n \quad (2-17)$$

式中 C ——常数；
 v ——轴向的平均速度(米/秒)；
 μ ——粘度(动力粘度)(牛·秒/米²)；
 c_p ——定压比热，焦/(千克·开)。

对于基本量纲用字母 t 代表时间， L 代表长度， M 代表质量， T 代表温度。根据量纲分析，

$$\text{准则数} = \text{变数} - \text{基本量纲}$$

$$\text{即} \quad \text{准则数} = 7 - 4 = 3$$

下面进行量纲计算，

$$\alpha_{\text{对}} = \frac{[L^2 M t^{-2}]}{[L^2][t][T]} = [M t^{-3} T^{-1}]$$

$$v = [L t^{-1}]$$

$$\mu = [L^{-1} M t^{-1}]$$

$$\lambda = \frac{[L^2 M t^{-2}]}{[L t T]} = [L M t^{-3} T^{-1}]$$

$$\rho = [L^{-3} M]$$

$$c_p = \frac{[L^2 M t^{-2}]}{[M][T]} = [L^2 t^{-2} T^{-1}]$$

将以上各值代入式(2-17)，得

$$M t^{-3} T^{-1} = (L t^{-1})^a (L)^b (L^{-1} M t^{-1})^j (L M t^{-3} T^{-1})^i (L^{-3} M)^m (L^2 t^{-2} T^{-1})^n$$

使各单位的系数相等，

$$M: 1 = f + j + m$$

$$t: -3 = -a - f - 3j - 2n$$

$$L: 0 = a + b - f + j - 3m + 2n$$

$$T: -1 = -j - n$$

这一组方程中，有六个变量，线性不相关的方程仅有四个，所以通过上述方程使其中四个指数用其余两个指数来表示：

$$a = m, \quad b = m - 1, \quad f = n - m, \quad j = 1 - n$$

代入式(2-17)，得

$$\alpha_{\text{对}} = C v^m d^{m-1} \mu^{n-m} \lambda^{1-n} \rho^n c_p^n$$

上式两边各乘以 d/λ 整理后成为

$$\frac{\alpha_{\text{对}} d}{\lambda} = C \left(\frac{v \rho d}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n \quad (2-18)$$

$$\text{或} \quad \text{Nu} = C \text{Re}^m \text{Pr}^n = f(\text{Re}, \text{Pr}) \quad (2-19)$$

$$\text{式中} \quad \text{Nu} = \frac{\alpha_{\text{对}} d}{\lambda} \quad (2-20)$$

称为努谢尔特 (Nusselt) 数或称努谢尔特准则，在一般情况下， d 以定型尺寸 L 代替。

$$\text{Re} = \frac{v \rho d}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \quad (2-21)$$

称为雷诺 (Reynolds) 数或称雷诺准则， ν 为运动粘度率，其单位以米²/秒计。

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (2-22)$$

称为普朗特 (Prandtl) 数或称普朗特准则。当式中 μ 以 (公斤力·秒)/米² 计时, 式 (2-22) 的右边应乘以 g , 即

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p g}{\lambda} \quad (2-23)$$

式 (2-20) ~ (2-22) 的右边都是无量纲的物理量集团, 称为相似准则。在上述三式的任一式中, 用基本单位 (量纲) 代入, 均使其量纲为 1, 例如 $\text{Re} = \frac{[Lt^{-1}][L][L^{-3}M]}{[L^{-1}Mt^{-1}]} = 1$, 因而 Nu , Re 及 Pr 均为无量纲的数, 而且它们都有一定的物理意义。

现将式 (2-20) 的分子分母各乘以 ΔT , 得

$$\text{Nu} = \frac{\alpha_{\text{外}} d}{\lambda} = \frac{\alpha_{\text{外}} \Delta T}{\frac{\lambda}{d} \Delta T}$$

分子表示实际单位面积上的强迫对流换热, 分母表示在相同温差下假想静止流体在厚度为 d 时的导热系数。对同一种流体来说, Nu 数大表示对流换热量远大于相当的静止流体厚度为 d 时的导热系数。所以 Nu 数的大小反映了 $\alpha_{\text{外}}$ 的大小。对于不同流体来说, 一定的 Nu 数反映了各种流体 $\alpha_{\text{外}}$ 与 λ 的比值。至于 Re 数及 Pr 数均可用适当方法找出它们的物理意义。

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\mu / \rho}{\lambda / c_p \rho} = \frac{\nu}{\alpha}$$

它是反映流体特性的参数, 运动粘度率 ν 反映流体中分子动量扩散能力的参数, 而导热系数 α 反映分子热扩散能力的参数。所以 Pr 数表示分子动量和热扩散的相对能力。当这两种能力相等时, $\text{Pr} = 1$, 不同流体在不同温度时有不同的值。

$$\text{Re} = \frac{\nu \rho d}{\mu} = \frac{\nu \rho L}{\mu} = \frac{\rho \nu \left(\frac{\nu}{L} \right)}{\mu \left(\frac{\nu}{L} \right) A / AL}$$

其微分形式为

$$\text{Re} = \frac{\rho \nu \left(\frac{d\nu}{dL} \right)}{\mu \left(\frac{d\nu}{dL} \right) dA / dAdL}$$

式中分子代表单位容积流体的惯性力, 分母代表单位容积流体的粘性力, 所以 Re 数表示流体中惯性力与粘性力之比。因此, Re 数反映流体的运动状态。 Re 数大, 惯性力大于粘性力, 出现紊流状态。 Re 愈大, 紊流的紊乱程度愈强烈。 Re 数小, 粘性力起主导作用, 流体因粘性而发生层流。

式 (2-17) 是放热系数与影响放热系数诸因素之间的关系。经过量纲分析得出式 (2-18) 的表达式。由于式 (2-19) 系以准则形式表示出来, 称为本问题的准则方程, 它是本问题的解。凡属同一类物理现象都具有同名的准则, 若同名准则的数值相等, 则这种物理现象就相似。

因此,表示相似现象的准则,就称相似准则。就其作用来说,相似准则可以分成两类,一类完全是由已知条件亦称单值条件的物理量所构成的准则,另一类则还包括问题的待定物理量(即未知量)。已知过程的物理量是决定过程的量,与过程的机理无关。完全由已知条件的量所构成的准则(或相似准则)称为**决定准则**(或称**定型准则**〔6〕),如式(2-18)中的 Re 及 Pr 。至于包括待定量量的准则则称为**被决定准则**(或称**非定型准则**)。用一般数学术语来讲,在准则函数关系中,决定准则就是被决定准则的自变量。

从式(2-17)转化到式(2-18)有何积极意义呢?式(2-17)中有6个自变量($v, d, \mu, \lambda, \rho, c_p$),式(2-15)中自变量的数目由6个减少到两个。在象式(2-17)所表征的物理现象中,如果将6个自变量的每个都从小到大地在10个不同数值条件下进行实验,则实验总次数应为 10^6 次。当自变量减少到2个以后,实验总次减到 10^2 次。于此可见,利用相似原则来指导实验所带来的好处,是何等的巨大!

是不是所有的物理现象均可得到简化的准则方程?可以简化到几个准则?这是有一定限制的。要解答这一问题还需要对相似理论进行进一步的了解。这在本书第八章中将有所阐述。

(二) 无限空间流体自然对流的放热

前已述及,流体自然流动是流体冷热部分的密度不同引起的。当物体的温度较周围流体的温度为高时,物体与流体之间便要产生**换热**。流体受热之后密度变小而上升,其附近的冷的流体就流来补充。这样一个周而复始的过程在物体表面和流体之间就形成环流而构成所谓的**自然对流**。车间工艺系统各环节和房间内的取暖设备的放热,就是空气自由放热的例子。反之,当物体的温度低于周围流体的温度时,情况也是一样,与物体接触的流体因变冷而下降,其附近的热的流体流来补充,也形成对流,只是流体的流动方向相反而已。所谓**无限空间**是指自由运动所涉及的空间很大,因而冷热流体的运动是互不干扰的。

图2-8显示了空气沿热的竖壁或竖管作自然对流的情况。壁的下部的空气流动为层流,而壁的上部空气的流动则为紊流。上、下两部分的放热情况也不相同。下部层流薄膜的厚度自下而上的增加,局部放热系数将沿壁的高度逐渐减少。在过渡到紊流区域的一段上,由于层流薄膜不断被破坏而使其膜厚减薄,因而放热系数逐渐增加。在紊流区域内,附面层很薄,放热系数稳定而成为一常数值。对整个壁面的平均放热系数来讲,如果紊流区域占绝大的比重,它将趋近于这个紊流时的常数值。不过,当壁面的高度不够高时,就不一定出现紊流的现象。

自然对流换热的准则方程,同样可以用量纲分析法求得,其结果有如下的一般形式:

$$Nu = f(Gr, Pr) \quad (2-24)$$

式中 $Gr = \frac{gL^3\beta\Delta t}{\nu^2}$;

$$\Delta t = t_w - t_f;$$

L ——定型尺寸;

β ——流体体积膨胀系数,它为流体绝对温度 T 的倒数,即 $\beta = \frac{1}{T}$ 。

Gr 称为**葛拉晓夫准则**,其物理意义如下:设有一高为 L 的气柱,它的温度比周围气体温度高 $\Delta t^\circ C$,这样在气柱底面积上产生一个压力差,即单位底面积上的浮力为 $\rho g L \beta \Delta t$ 。如果无

压力损失, 且假想气柱上升速度为 v' 米/秒。根据能量不灭定律, 压力势能转为动能,

$$\rho g L \beta \Delta t = \frac{\rho L}{2} (v')^2$$

$$(v')^2 = 2g\beta\Delta t$$

以这一速度运动的气柱, 在其单位面积上产生的粘性力为 $\mu (v'/L)$, 根据上面两式将葛拉晓夫准则略作变化, 即将其分子、分母分别乘以 $\rho^2 (2g\beta\Delta t)$ 及 $(v')^2$, 得:

$$Gr = \frac{g L^3 \beta \Delta t}{\nu^2} = \frac{\rho^2 g L \beta \Delta t (2g\beta\Delta t)}{\nu^2 \rho^2 (v'/L)^2} = 2L \left[\frac{\rho g \beta \Delta t}{\mu (v'/L)} \right]^2$$

即

$$Gr \propto \left(\frac{\text{浮力}}{\text{粘性力}} \right)^2$$

它表征自然对流的动力和阻力之间的对比。Gr 准则的数值愈大, 表示浮力远大于粘性力, 自然对流就愈强烈。

在无限空间自然对流放热的计算中, 推荐以下的准则方程:

对于层流: 竖平壁〔1〕

$$\text{当 } 10^4 \leq (Gr \cdot Pr)_m \leq 10^9, Nu_m = 0.59 (Gr \cdot Pr)_m^{\frac{1}{4}} \quad (2-25)$$

横圆柱

$$\text{当 } 10^5 \leq (Gr \cdot Pr)_m \leq 10^9, Nu_m = 0.53 (Gr \cdot Pr)_m^{\frac{1}{4}} \quad (2-26)$$

对于紊流: 竖平壁〔1〕

$$\text{当 } 10^9 \leq (Gr \cdot Pr)_m \leq 10^{12}, Nu_m = 0.12 (Gr \cdot Pr)_m^{\frac{1}{3}} \quad (2-27)$$

对于横圆柱, 亦可采用式(2-27), 因为横放竖放的线管、板和球, 均可采用同一准则方程 $Nu_m = C (Gr \cdot Pr)_m^a$ 〔6〕

对于水平方向放置的平板 (平均边长为 600 毫米的正方形或矩形), 经过实验得出的准则方程为:

热面朝上:

$$\text{当 } 10^5 < (Gr \cdot Pr)_m < 2 \times 10^7 \text{ (层流)}, Nu_m = 0.54 (Gr \cdot Pr)_m^{\frac{1}{4}} \quad (2-28)$$

$$\text{当 } 2 \times 10^7 < (Gr \cdot Pr)_m < 3 \times 10^{10} \text{ (紊流)}, Nu_m = 0.14 (Gr \cdot Pr)_m^{\frac{1}{3}} \quad (2-29)$$

热面朝下:

$$\text{当 } 3 \times 10^5 < (Gr \cdot Pr)_m < 3 \times 10^{10} \text{ 时}, Nu_m = 0.27 (Gr \cdot Pr)_m^{\frac{1}{4}} \quad (2-30)$$

诸式中采用的定型温度 (或称定性温度) t 为平均温度 $t_m = \frac{1}{2}(t_w + t_f)$, 当流体温度变化不大时用之。定型尺寸 (或称决定尺度) L 在竖平壁时取其高度 H , 在横圆柱时取其直径 d , 在水平放置平板时取板的宽度 (即其较短的一边的边长) b 。这里所讲的定型温度和定型尺寸是指相似准则 (如 Re, Gr, Pr, Nu 等) 中所包含的温度 t 和尺寸 L , 在选定时应根据具体情况而定。

上列的准则方程的实验验证范围为: 介质为空气、水、油类, 但式(2-27)仅限于空气, 压力为 0.035 大气压 ~ 64.3 大气压, 热流方向仅限于对介质的加热, Δt 在 467°C 以下。

例题 1 试计算车床主轴箱的顶面和侧面在自然对流时的平均放热系数 (暂不考虑辐射放热的影响), 假定箱体外壳的平均壁温 $t_w = 30^\circ\text{C}$, 四周空气温度 $t_f = 10^\circ\text{C}$ 。

解

$$t_m = \frac{30 + 10}{2} = 20^\circ\text{C}, \Delta t = 30 - 10 = 20^\circ\text{C}$$

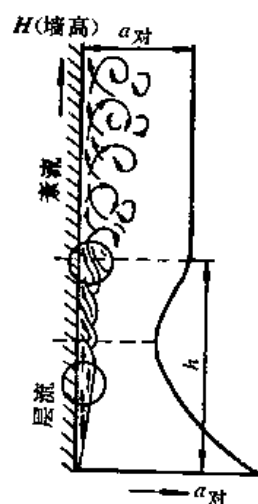


图2-8 空气自然对流时, 放热系数沿竖壁高度而改变的情况及其与运动性质的关系

从附表 2 查出: $\lambda_m = 2.23 \times 10^{-2}$ 千卡/(米·小时·度) = 2.593×10^{-2} 瓦/(米·开)

$$v_m = 15.06 \times 10^{-6} \text{米}^2/\text{秒}$$

$$\text{Pr}_m = 0.703$$

$$\beta_m = \frac{1}{273 + 20} = \frac{1}{293}$$

对于顶面: $b = 0.5$ 米

$$\text{Gr}_m = \frac{g b^3 \beta_m \Delta t}{v_m^2} = \frac{9.81 (0.5)^3 (20)}{293 [(1.506) \times 10^{-5}]^2} = 3.69 \times 10^8$$

$(\text{Gr} \cdot \text{Pr})_m = 3.69 \times 10^8 \times 0.703 = 2.60 \times 10^8$, 故处于紊流状态。

由式(2-29),

$$\text{Nu}_m = 0.14 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})_m^{\frac{1}{3}} = 0.14 (2.60 \times 10^8)^{\frac{1}{3}} = 89.35$$

平均放热系数 α_m 可作如下的计算:

由式(2-20),
$$\text{Nu}_m = \frac{\alpha_m \cdot b}{\lambda_m}$$

$$\alpha_m = \frac{\text{Nu}_m \cdot \lambda_m}{b} = \frac{89.35 \times 2.593 \times 10^{-2}}{0.5} = 4.63 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

对于侧面: $H = 0.5$ 米

$$\text{Gr}_m = \frac{g H^3 \beta_m \Delta t}{v_m^2} = \frac{9.81 (0.5)^3 (20)}{293 (1.506 \times 10^{-5})^2} = 3.69 \times 10^8$$

$$(\text{Gr} \cdot \text{Pr})_m = 3.72 \times 10^8 \times 0.703 = 2.60 \times 10^8 < 10^9 \text{ (层流)}$$

用式(2-25)进行计算:

$$\text{Nu}_m = 0.59 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})_m^{\frac{1}{4}} = 74.92$$

所以
$$\alpha_m = \frac{\text{Nu}_m \cdot \lambda_m}{b} = \frac{74.92 \times 2.593 \times 10^{-2}}{0.5} = 3.89 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

(三) 机床部件自然对流放热的计算

机床受热的情况下, 其温升一般在 $20 \sim 30^\circ\text{C}$ 以下, 壁温一般低于 60°C , 从附表 2 中可以看出, 当壁温在 $0 \sim 60^\circ\text{C}$ 时,

$\text{Pr} = 0.70 \sim 0.696$, 可取 0.7 作为其平均值;

$\lambda = 2.10 \sim 2.49 \times 10^{-2}$ 千卡/(米·小时·度), 可取 2.30×10^{-2} 千卡/(米·小时·度), 即 2.67×10^{-2} 瓦/(米·开) 作为其平均值;

$v = 13.26 \sim 17.97 \times 10^{-6}$ 米²/秒, 其平均值可取 15.63×10^{-6} 米²/秒。因此, 在 $0 \sim 60^\circ\text{C}$ 范围内,

$$(\text{Gr} \cdot \text{Pr})_m = \frac{g L^3 \beta_m \Delta t}{v_m^2} \times 0.7 = \frac{9.81 \times 0.5^3 \times 30 \times 0.7}{(15.63 \times 10^{-6})^2 (273 + 30)} = 3.48 \times 10^8$$

对于箱体侧面, 上述的 $(\text{Gr} \cdot \text{Pr})_m$ 数值属于层流范围, 故式(2-25)可改写为

$$\text{Nu}_m = \frac{\alpha_m H}{\lambda_m} = \frac{\alpha_m H}{2.67 \times 10^{-2}} = 0.59 \left[\frac{g H^3 \Delta t}{303} \cdot \frac{0.7}{(15.63 \times 10^{-6})^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

所以
$$\alpha_m = 0.59 \times 2.67 \times 10^{-2} \left[\left(\frac{\Delta t}{H} \right) \cdot \frac{9.81 \times 0.7 \times 10^{12}}{303 \times 15.63^2} \right]^{\frac{1}{4}} = 1.52 \left(\frac{\Delta t}{H} \right)^{\frac{1}{4}} \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

机床其它构件（如立柱、床身）竖壁的温升还要低得多，亦可用式(2-31)计算其 α_m 。

至于箱体顶面，上述 $(Gr \cdot Pr)_m$ 数值属于紊流范围，故式(2-29)可改为

$$\alpha_m = 0.14 \times 2.67 \times 10^{-2} \left[(\Delta t) \cdot \frac{9.81 \times 0.7}{303(15.63 \times 10^{-6})^2} \right]^{\frac{1}{3}} = 1.7 (\Delta t)^{\frac{1}{3}} \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开}) \quad (2-32)$$

可以看出， α_m 为 $\left(\frac{\Delta t}{H}\right)^{\frac{1}{4}}$ 或 $(\Delta t)^{\frac{1}{3}}$ 的函数，温升 (Δt) 越低，定型尺寸越大， α_m 越小。大型精密机床的大型构件的放热系数比中小型普通机床的构件来得小。

用式(2-31)及式(2-32)计算上例中车床主轴箱侧面及顶面的放热系数，分别得出：

$$\text{对于顶面：} \alpha_m = 1.7 (\Delta t)^{\frac{1}{3}} = 1.7 (20)^{\frac{1}{3}} = 4.61 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

$$\text{对于侧面：} \alpha_m = 1.52 \left(\frac{\Delta t}{H} \right)^{\frac{1}{4}} = 1.52 \left(\frac{20}{0.5} \right)^{\frac{1}{4}} = 3.82 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

它们与用式(2-29)及式(2-25)计算的结果基本接近，因此用式(2-32)及式(2-31)的简化公式比较方便。

对于冷却液油箱及液压系统油箱油侧一面的放热系数则需用式(2-25)或(2-27)进行计算，因其Pr比0.7大得多。

(四) 流体在管道内强迫对流的放热

前已述及，流体的流动可以分为层流与紊流两种。对于不可压缩粘性流体（对于气体，其流速远远小于音速时，亦可当作不可压缩流体来处理），两者的区别取决于雷诺数Re的大小。实验指出，当 $Re < 2320$ 时，流动属于层流状态，此时如果人为的加以扰动，所形成的旋涡不会扩大且能为流体的粘性所克服，因此层流是比较稳定的流动。Re在2320~10000之间的流动为过渡阶段，只有当 $Re > 10^4$ 才能达到完全的紊流。

$$\text{由于} \quad Re = \frac{vd}{\nu}$$

$$\text{所以} \quad v = Re \frac{\nu}{d}$$

由层流转到紊流时的临界速度为

$$v_{\text{临}} = 2320 \frac{\nu}{d} \text{ 米/秒}$$

式中 ν —— 流体的运动粘度率， $\text{米}^2/\text{秒}$ ；

d —— 管道的直径，米。

1. 流体平均速度

应该指出，Re数中的流动速度 v 为平均速度，其值为

$$\bar{v} = \frac{V}{A}$$

式中 V —— 容积流量， $\text{米}^3/\text{秒}$ ；

A —— 管道截面积， 米^2 。

事实上流体在管道内流动时，其速度分布是不均匀的，如图2-9所示，对于层流（图2-9a），在同一截面上的流速是按抛物线规律变化的。其最大流速 v_{max} 与平均流速之比为

$$\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = 0.5$$

对于紊流($Re > 10^4$), 流速分布为正截抛物线的形式, 如图 2-9 b 所示, 靠近壁面处曲线变化很突然, 但其中心部分, 即紊流核心区, 流速变化就比较缓和。比值 $\frac{\bar{v}}{v_{\max}}$ 随 Re 的变化而变化。例如, 当 $Re = 10^4$ 时, $\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = 0.8$; 当 $Re = 10^5$ 时, $\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = 0.9$ 。

上述的流动截面上的速度分布规律, 并不是流体一进入管道就是这样, 而是要在相当一段距离后才形成, 就是说需要有一段入口段长度来让流体的流动得以稳定。流动入口段长度取决于速度边界层的稳定位置。根据实验, 这段长度 Δl : 在层流时为 $0.03dRe$, 而在紊流时为 $40d$ 。

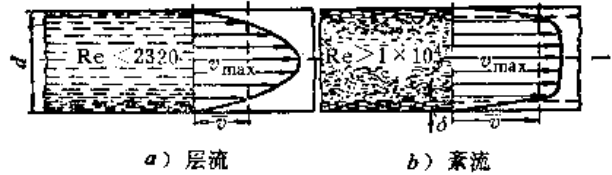


图2-9 管内流动截面上的速度分布

由于在趋向稳定的一段路程内, 流动的性质在变化, 因而放热情况也会有所变化。这就出现一个热稳定过程, 它取决于热边界层的稳定情况, 这个稳定过程所需要的稳定段长度 Δl_m 与许多因素有关, 对于横管, $\Delta l_m = 50d$ 。

2. 流体平均温度

流体在流动过程中由于有热交换, 所以它的温度还沿流动方向而变化。要确定流体的平均温度 t_f , 还必须按长度来取平均值。当进口处流体的平均温度为 t'_f , 出口处为 t''_f , 则最简单的平均温度算法, 可取为

$$t_f = \frac{t'_f + t''_f}{2}$$

即取进、出口的平均温度的算术平均值, 当沿流道全长的流体温度变动不大时, 采用这个方法不致出现很大的误差。

3. 流体在管内紊流时的放热

紊流时, 流体内部的热量传递主要依靠流体本身的扰动混合。由于扰动相当猛烈, 紊流核心的温度分布事实上成为定值, 只有管壁附近的边界层中才能观察到流体温度的显著变化, 此时自由流动的影响, 可以不予考虑。通常用下列公式进行计算^[6]:

$$Nu_f = 0.021 Re_f^{0.8} Pr_f^{0.43} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.26} \quad (2-33)$$

式中有关 f 诸项, 以流体的平均温度 t_f 作为定性温度, Pr_w 的定性温度为壁面平均温度 t_w , 定性尺寸为管道直径 (取内径 d)。

由于气体的 $Pr \approx$ 常数, $Pr_f/Pr_w \approx 1$, 上式可以简化。例如, 对于空气, $Pr \approx 0.7$, 因此

$$Nu_f = 0.018 Re_f^{0.8} \quad (2-34)$$

对于 $\frac{l}{d} < 50$ 的短管, 放热系数要大一些 (对于 $\frac{l}{d} \leq 20$, 放热系数约大 1.1 倍)。

由于流体在弯管内流动时, 流体受离心力的作用。流体的流动将向外壁挤压, 并在截面上产生所谓“二次环流”, 这样就增加了流动的扰动, 而使弯管内的放热系数高于直管内的数值。弯管中的放热可以按上式乘以校正系数 ϵ_n 。对于螺旋管 (即蛇形盘管) 可由下式决定:

$$\epsilon_n = 1 + 1.77 \frac{d}{R}$$

式中 d ——管的直径, 米;
 R ——螺管半径, 米。

对于层流, 由于流速低, 就无需校正了。

4. 流体在管内层流流动时的放热

当 $Re < 2320$ 时, 管内流动为层流, 其放热可用下列准则方程计算:

$$Nu_f = 0.15 Re_f^{0.33} Pr_f^{0.43} Gr_f^{0.1} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.25} \quad (2-35)$$

Gr 数是用来考虑自然对流的影响, 由于流体与管壁温度不同, 会引起自然对流, 这在层流时不能不予考虑。

当 $\frac{l}{d} < 50$ 时, 算出的放热系数 α_n 需加校正 (当 $\frac{l}{d} \approx 20$, 校正系数 $\epsilon_s = 1.13$)。

例题 2 热风管道内的热空气按 $v = 4$ 米/秒流动, 管直径 $d = 250$ 毫米, 长 $l = 12.5$ 米, 如果热空气的平均温度 $t_f = 50^\circ\text{C}$, 试求热空气的放热系数的数值。

解 当 $t_f = 50^\circ\text{C}$, 由附表 2 查出的空气物理参数为

$$\lambda_f = 0.0243 \text{ 千卡} / (\text{米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度}) = 0.0283 \text{ 瓦} / (\text{米} \cdot \text{开})$$

$$v_f = 17.95 \times 10^{-6} \text{ 米}^2 / \text{秒}$$

从而算出

$$Re_f = \frac{vd}{v} = \frac{4 \times 0.25}{17.95 \times 10^{-6}} = 5.57 \times 10^4 > 2320$$

因此, 热空气在管内的流动为紊流状态, 故

$$Nu_f = 0.018 (Re_f)^{0.8} = 0.018 (5.57 \times 10^4)^{0.8} = 112.7$$

从式 (2-20), $\alpha_f = Nu_f \frac{\lambda_f}{d} = 112.7 \times \frac{0.0283}{0.25} = 12.74 \text{ 瓦} / (\text{米}^2 \cdot \text{开})$

$$\frac{l}{d} = \frac{12.5}{0.25} = 50, \alpha_f \text{ 无需修正。}$$

§ 2-4 热辐射、热辐射的基本定律、热辐射 换热及换热系数

热辐射是一种由电磁波来传播能量的现象。它与导热和对流方式有着本质上的不同。它不仅要产生能量的转移, 而且还伴随着能量形式之间的转化, 从热能转化为辐射能, 或者相反地从辐射能转为热能。

一、热辐射

物体中的电子振动或激动的结果, 就会发出一种“光量子”, 它把从物体得到的能量和质量对外发射, 这就是辐射能。电磁波就是辐射能传送的具体形式。电磁波短波部分的波长以微米计。根据它们产生原因的不同, 从 1 微米到 10 米的各种波长的电磁波可区分为 X 光波、紫外线波、可见光波 (光线)、红外线波和无线电波等。对我们最感兴趣的, 是那些被物体接受之后由辐射能又重新转变为热能的射线。在工业上具备这种性质的是波长在 0.8 微米到 40 微米范围内的红外线。我们把这些射线称为热射线, 把它们的传热过程称为热辐射, 对热

辐射来说，温度是物体内部电子激动从而激发出电磁波的基本原因，因而热辐射的强弱主要取决于温度。工业上热辐射的温度范围最高为 2000°C 左右，它与太阳辐射（太阳表面温度为 6000 开）有区别。对太阳辐射而言，0.4~0.8 微米可见射线波长段的辐射占总热辐射的很大比重。

在波动学说中，一个波的性质由两个参数来确定，即它的速度和波长，其关系式为

$$C = v\lambda \quad (2-36)$$

式中 C ——波的传播速度，在真空中 $C = 3 \times 10^{10}$ 微米/秒 ($= 3 \times 10^8$ 米/秒 $= 3 \times 10^5$ 公里/秒)；

v ——每秒中的波动数，或称频率，单位为赫兹（赫）；

λ ——波长，它的单位为微米/秒。

热射线和可见光的本性相同，所以可见光线的投射、反射和折射的规律，对热射线也同样正确。

落在物体上的辐射线，一般来说，总是部分地被吸收，一部分被反射，另一部分透过物体。若被吸收的百分数称为吸收率 a ，被反射的百分数称为反射率 r ，透过的百分数称为穿透率 d ，则

$$a + r + d = 1 \quad (2-37)$$

绝大多数工程材料都不能被热射线穿透。例如金属、耐火材料、砖料和木料等，即使厚度很小，也都不能使热射线穿透。固体和液体实际上对热射线都是不透明体（即 $d = 0$ ）。至于空气（特别是干空气）则可以当作透明体来看待，即其 $d = 1$ 。但当空气混有水蒸汽、碳酸气时，它就变成为半透明的介质。因此，对多数材料，

$$a = 1 - r \quad (2-38)$$

吸收率仅取决于反射率。

如果物体表面非常平整，它的凹凸不平度小于热辐射线的波长，那么反射角就等于投射角，得到所谓有规则反射。例如，在镜面磨削表面上，光洁度为 $\nabla 14$ ，其不平度的平均高度 R_z 与算术平均偏差 R_a 分别为 0.05 微米与 0.01 微米，与热辐射波长 0.8~40 微米相比就很小了，其表面的反射就接近于有规则反射。此时反射率仅取决于投入射线的波长和材料的性质。一般工程材料表面，若用热射线的波长来衡量，都比较粗糙，其表面凹凸不平度大于射线的波长（如取 $\nabla 1$ ，其 R_z 与 R_a 分别为 320、80 微米）。此时投入的热射线便于反射后分散到所有方向，得到漫反射，其反射率不仅取决于投入射线的波长和材料的性质，而且还和表面粗糙度有关。所以可以通过改变光洁度、涂漆、氧化及其它表面处理等方法来改变表面的反射率。

吸收能力强的物体，其吸收率以能够全部吸收落在物体上的热辐射能为极限。这时，吸收率 $a = 1$ 而反射率与穿透率都等于零。这类物体叫做绝对黑体或称黑体。在自然界中绝对黑体是没有的。为了增加吸收率，可在物体表面上涂上一层不光滑的颜料，例如石油煤烟。不过这种涂有石油煤烟物体的吸收率，也只有 90~96%，还不是绝对黑体。为了表达上的明确性，以后凡是属于绝对黑体的一切量，我们都用下角码“0”把它标出来。与黑体相对应的物体，称为白体，它将落在它上面的全部热辐射能都不折不扣地反射出去。在这里，所谓白体、黑体、透明体都是对热射线而言，而不是针对可见光线的。例如玻璃对可见光线为透明体，但对热射线则几乎为不透明体；白色的表面只能反射可见光线，对于热射线白布与

黑布都一样吸热。每单位时间内物体单位面积发射出去的辐射能量，称为物体的辐射力，用 E 表示。它用来度量物体辐射本领的大小。它的单位为瓦/米²。辐射力包括物体发射出的 $\lambda = 0$ 到 $\lambda = \infty$ 的一切波长的总能量。如果令在 λ 至 $\lambda + d\lambda$ 一段波长范围内每单位时间内物体单位面积发射出的能量为 $I_\lambda d\lambda$ ，则 I_λ 就是指定波长 λ 下的辐射能量，称为单色辐射强度，其单位为瓦特/米²。辐射力就是单色辐射强度在波长从 0 到 ∞ 范围内的积分。

由于
$$I_\lambda = \frac{dE}{d\lambda} \quad (2-39)$$

故
$$E = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \quad (2-40)$$

二、热辐射的基本定律

(一) 普朗克定律与维恩定律

普朗克定律揭露在各种不同温度下单色辐射强度按波长分布的规律， $I_\lambda = f(\lambda, T)$ 。绝对黑体的随波长而变化的能量分布规律，由普朗克确定为如下的形式：

$$I_{0,\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \quad (2-41)$$

式中 λ —— 波长，米；

T —— 物体表面的绝对温度，开；

e —— 自然对数的底；

C_1 —— 普朗克定律第一常数，等于 3.74×10^{-16} (瓦·米²)；

C_2 —— 普朗克定律第二常数，等于 1.44×10^{-2} (米·开)。

普朗克定律可以用图来表示。在图 2-10 中，可以看出，当 $\lambda = 0$ 时，辐射强度等于零，随着 λ 的增加辐射强度也增加，在其达到某一数值 λ_m 时辐射强度达到它的最大值，然后又随波长 λ 的增加而逐渐下降，至 $\lambda = \infty$ 时辐射强度又重新下降为零。对绝对黑体来说，单色辐射强度为最大值时的波长 λ_m 和辐射表面的绝对温度 T 的关系，由维恩定律确定为：

$$\lambda_m T = 2.9 \text{ (毫米·开)} \quad (2-42)$$

当 T 增加时， λ_m 减小。因此，单色辐射强度的最大值是随着温度升高而向着波长缩短的一边移动。可以用简单的实验来证明这个定律。如果把一块铁逐渐加热，当绝对温度达 1000 开时，其辐射线中具有波长为 0.6~0.7 微米的可见射线，此时它开始显出暗红色，如温度继续增加，则显出红色带黄，以后逐渐地变为可见光谱内波长更短的颜色，在 1600 开时呈炽白色。从图上也可看出，在技术上应用的温度下，辐射能都集中在 $\lambda = 0.8 \sim 10$ 微米的红外线范围内，可见射线 ($\lambda = 0.4 \sim 0.8$ 微米) 的辐射能可以略而不计 (参看图内左边一块阴影线的面积)。

如果知道对应于最大辐射强度的波长，便可算出辐射表面的温度。例如测得太阳光谱的 $\lambda_m = 0.5$ 微米

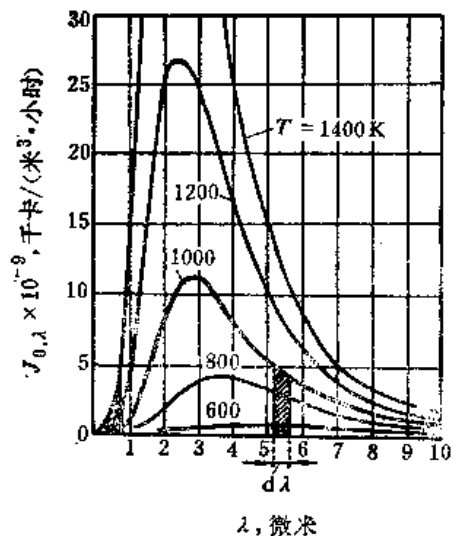


图 2-10

(即 $\lambda_m = 0.5 \times 10^{-8}$ 毫米), 便可推算出太阳表面的温度约为

$$T = \frac{2.9}{0.5 \times 10^{-8}} = 5800 \text{ 开}$$

若将式(2-41)与式(2-42)联合求解, 便可找出最大辐射强度 I_{om} 与绝对温度的关系^[3]:

$$I_{\text{om}} = 1.297 \times 10^{-5} \times T^5 \text{ 瓦/米}^2 = 1.3 \times \left(\frac{T}{10}\right)^5 \text{ 瓦/米}^2 \quad (2-43)$$

高温光学温度计就是根据可见光波的辐射强度随温度迅速增高的原理制成的。

(二) 斯梯芬-波尔次曼定律——辐射四次方定律

绝对黑体每小时每平米所发射的总能量, 即辐射力, 等于〔式(2-40)〕

$$E_0 = \int_0^{\infty} I_{0\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)} \quad (2-44)$$

把上式积分以后, 得到〔7〕

$$E_0 = \frac{6.495 C_1}{C_2^4} T^4 = \sigma_0 T^4 \text{ 瓦/米}^2 \quad (2-45)$$

式中 σ_0 ——绝对黑体的辐射常数, 它等于:

$$\sigma_0 = 5.7 \times 10^{-8} \text{ 瓦/ (米}^2 \cdot \text{开}^4) = 4.9 \times 10^{-8} \text{ 千卡/ (米}^2 \cdot \text{小时} \cdot \text{开}^4)$$

更精确些,

$$\sigma_0 = 569 \times 10^{-8} \text{ 瓦/ (米}^2 \cdot \text{开}^4) = 4.88 \times 10^{-8} \text{ 千卡/ (米}^2 \cdot \text{小时} \cdot \text{开}^4)$$

式(2-45)是辐射计算中极端重要的四次方定律, 亦称斯梯芬-波尔次曼定律。根据这个定律, 黑体的辐射力与其绝对温度的四次方成正比。在计算时, 往往采用下列更便于计算的公式代替式(2-45):

$$E_0 = C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4 \text{ 瓦/米}^2 \quad (2-46)$$

式中 C_0 ——黑体辐射系数, 它等于 $5.7 \text{ 瓦/ (米}^2 \cdot \text{开}^4)$ 或 $4.9 \text{ 千卡/ (米}^2 \cdot \text{小时} \cdot \text{开}^4)$ 。

(三) 基尔霍夫定律

基尔霍夫定律确定物体辐射力与吸收率之间的关系。这个关系可以从两个表面之间的辐射换热的研究得出来。

假设有两个表面: 其中一个(表面 I)是绝对黑体; 另一个(表面 II)是任意物体, 这两个表面的温度、辐射力和吸收率分别为 T_0 、 E_0 、 $\alpha_0 (= 1)$ 和 T 、 E 、 α 。它们被平行的安放着, 并且彼此接近到这样的程度以致一个表面所放射的能量, 都完全落在另一个表面上, 如图 2-11 所示。现在来研究表面 II 能量收支的差额。在单位时间内表面 II 每单位面积所放射的能量为 $E \text{ 瓦/米}^2$, 这部分能量投射到黑体(表面 I)时, 就全部为它所吸收。同时表面 I 也放射能量 $E_0 \text{ 瓦/米}^2$ 。这部分能量落在表面 II 上时, 只有一部分能量即 αE_0 被吸收, 其余部分 $(1 - \alpha)E_0$ 被反射回去, 重新落在表面 I 上并为表面 I 完全吸收掉。因此, 表面 II 辐射换热的差额为

$$q = E - \alpha E_0 \text{ 瓦/米}^2 \quad (2-47)$$

两表面间的辐射换热, 即使在 $T = T_0$ 时也同样在进行着, 此时整个体系处于热平衡状态, 于是 $q = 0$, 在此场合下, 上式变为

$$E = \alpha E_0 \quad \text{或} \quad \frac{E}{\alpha} = E_0$$

把这种关系推广到任何物体，我们得到如下的公式：

$$\frac{E_1}{a_1} = \frac{E_2}{a_2} = \frac{E_3}{a_3} = \dots = E_0 \quad (2-48)$$

这种关系称为**基尔霍夫定律**。它可以表述为：**任何物体的辐射力和吸收率之比值与物体性质无关，而恒等于同温度下绝对黑体的辐射力**。当然不应忘记，基尔霍夫定律仅仅对于平衡的热辐射，才是正确的。各种物体的吸收率永远小于1，所以在任何温度下，各种物体的辐射力以绝对黑体为最大。从基尔霍夫定律，得出

$$a_1 = \frac{E_1}{E_0}, \quad a_2 = \frac{E_2}{E_0}, \quad \dots$$

即 $a \propto E$ (吸收率与辐射力成正比)

因此物体的辐射力愈大，它的吸收率也愈大；如果物体吸收率很小，那末它的辐射力也很小。所以，善于反射的物体就辐射得很少。对于需要保温的表面应力求加强其反射的能力，保温瓶除在内外两层瓶壳之间保持真空状态以减小空气的导热以外，还采用镀银镜的瓶壳表面，就是由于镀过银镜的表面具有强烈的反射能力。

三、辐射换热的计算公式

在研究辐射换热之前，先研究一下实际物体的辐射力。前已述及，实际物体的辐射力总是小于黑体，因而有

$$\frac{E}{E_0} < 1$$

令 $\varepsilon = \frac{E}{E_0}$ (2-49)

它是实际物体的辐射力与同温度下黑体的辐射力之比称为**黑度**。黑度取决于物体的材料、温度和它的表面状态（如粗糙度、氧化程度等），一般用实验方法来确定。工程上常用的材料的黑度列入附表3，它是沿表面的法线方向测得的，这仅仅是一些参考数据，用时需要慎重。对于粗糙的物体可以直接引用，对于磨光的金属必须乘一修正系数1.2，以考虑黑度的方向性变化。

物体的辐射力大，吸收率也大，那么物体的吸收率是否即等于它的黑度？一般讲来，不能这样说。不同材料的单色吸收率 a_λ 随着波长 λ 而变化，不是一个常数；同一材料的 a_λ 也随表面状态及温度而变^[1]。这就使辐射换热的计算大为复杂。但在实用上可以允许近似的简化处理而不引起重大的误差，于是引出了灰体的概念。所谓灰体是指这样一种物理形态的物体，它对各种波长的投入热辐射具有相同的吸收率。绝大多数工程材料在热射线范围内都容许近似地作为灰体系处理。于是，实际物体（灰体）的吸收率就与投入辐射的波长无关而恒等于物体的黑度，即 $a = \varepsilon$ ，将四次方定律的关系代入式(2-49)，可以得到灰体辐射和吸收实用计算公式

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad \text{瓦/米}^2 \quad (2-50)$$

(一) 有效辐射

计算物体之间辐射换热就是要确定物体放射与吸收能量之间的差额。首先研究一个物体

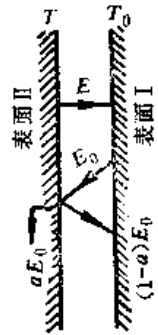


图2-11 平行平面间的辐射换热示意图

(物体1)的收支状况,参看图2-12。如果物体的温度是 T 开,不管它与外界的换热关系如何,它所放射出的能量总可按式(2-50)计算,这个能量 E_1 称为物体本身的辐射。从其它物体射到被研究对象上来的能量 E_2 称为投入辐射,其中一部分 $a_1 E_2$ 被吸收称为吸收辐射,其余部分 $(1-a_1)E_2$ 被反射回去,称为反射辐射。

对于物体1来讲,它的辐射能实际支出为

$$q_1 = E_1 - a_1 E_2 \quad (1)$$

对外面物体来讲,它的收入为物体1本身的辐射与反射能量之和,即 $E_1 + (1-a_1)E_2$,这一部分能量可以从物体外面的仪器测量出来,称为物体的有效辐射 E'_1 ;它的支出为 E_2 ,于是外面物体的热量净收入等于物体1的净支出,而有

$$q_1 = E'_1 - E_2 \quad (2)$$

将(1)(2)两式联立,消去 E_2 ,可得

$$E'_1 = \frac{E_1}{a_1} - \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) q_1 = E_{o,1} - \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) q_1 \quad \text{瓦/米}^2 \quad (2-51)$$

式(2-51)将有效辐射 E' 、吸收率 a_1 与换热量 q_1 联系起来,对计算辐射放热有其特殊方便之处。

(二) 辐射换热的计算公式

我们在下列简化条件之下,来讨论两个物体之间的稳定辐射换热的计算公式。

1. 参与辐射换热的物体均为灰体。
2. 物体之间的气体对热射线是透明的。

先来讨论一个具有典型的课题:空腔内物体与空腔内壁的辐射换热。

在图2-13a所示的简图中,有一凸面物体被放在另一物体的密闭空腔内,现在来求这两个物体的辐射换热量。两个物体表面 A_1 及 A_2 的各处温度分别为 T_1 及 T_2 ,物体的黑度及吸收率相应地为 ϵ_1, a_1 及 ϵ_2, a_2 。

外部物体的有效辐射仅有一部分投射到内部物体上,而其余部分的辐射却投射于其本身的表面上。内部物体因为是凸形的,所以它所放出的辐射全部投射到外部空腔的内壁上。令 $\varphi_{2,1}$ 表示外部物体投射在内部物体上的有效辐射的分额,则 $\varphi_{1,2}$ 为内部物体投射在外部物体上的有效辐射的分额,显然 $\varphi_{1,2} = 1$ 。于是,我们就可以写出下列的换热公式:

$$\Phi_1 = E'_1 A_1 - \varphi_{2,1} E'_2 A_2 \quad (1)$$

式中 Φ_1 为物体1实际放出的热流量。根据式(2-51),写出物体有效辐射的公式:

$$E'_1 A_1 = A_1 E_{o,1} - \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \Phi_1 \quad (2)$$

$$E'_2 A_2 = A_2 E_{o,2} - \left(\frac{1}{a_2} - 1 \right) \Phi_2 \quad (3)$$

在稳定状态下,

$$\Phi_1 = -\Phi_2 \quad (4)$$

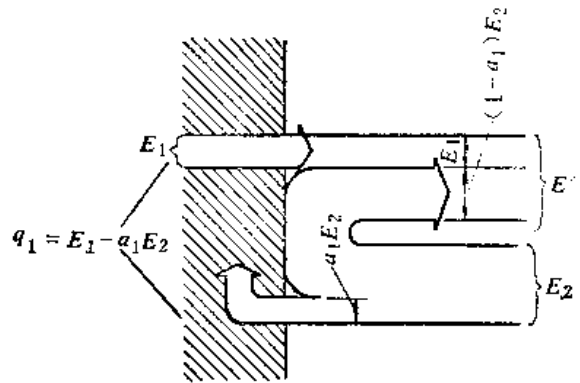


图2-12 有效辐射示意图

将(2)(3)代入(1)并运算后,得到

$$\Phi_1 = \frac{A_1 E_{0,1} - \varphi_{2,1} A_2 E_{0,2}}{1/a_1 + \varphi_{2,1} \left(\frac{1}{a_2} - 1 \right)} \quad \text{瓦} \quad (5)$$

要确定 Φ_1 , 必须先确定 $\varphi_{2,1}$ 的值。 $\varphi_{2,1}$ 是个完全取决于几何因素的因子, 不受温度的约束。式(5)在 $T_1 = T_2$ 的条件下也是成立的。在此情况下, $\Phi = 0$, $E_{0,1} = E_{0,2}$ 。于是公式(5)便为

$$\varphi_{2,1} = -\frac{A_1}{A_2} \quad (6)$$

因此

$$\Phi_1 = \frac{A_1 \times 5.7 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{a_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{a_2} - 1 \right)} \quad \text{瓦} \quad (2-52)$$

式(2-52)对图2-13 b, c也是适用的。从式(2-52)可以进一步推出下列两个具有很大实用意义的简化公式。

(1) 在表面 A_2 比 A_1 大得多, 也就是 $\frac{A_1}{A_2} \approx 0$ 时, 上式简化为

$$\Phi \approx \varepsilon_1 A_1 \times 5.7 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad \text{瓦} \quad (2-53)$$

或 $q_1 = \varepsilon_1 \times 5.7 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad \text{瓦/米}^2 \quad (2-54)$

在车间内, 工艺系统(机床、刀具、工件)的辐射散热和气体管道内热电偶测温的辐射误差也可按上式计算。

(2) 表面积 A_1 与 A_2 相差很小, 极限值 $\frac{A_1}{A_2} = 1$, 式(2-52)简化为

$$\text{式中} \quad q_1 = \varepsilon_* \times 5.7 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad \text{瓦} \quad (2-55)$$

$$\varepsilon_* = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (2-56)$$

称为系统的黑度。

这个公式可以用来计算两块平行壁之间的辐射换热。保温瓶夹层两壁间的辐射换热就是 $\frac{A_1}{A_2} \approx 1$ 的实例。

式(2-54)、(2-55)在形式上是一致的, 只是 ε_1 与 ε_* 不同而已。

例题3 试计算直径为 $d = 50$ 毫米、长为 8 米钢管(在 600°C 氧化后的钢表面), 表面温度为 250°C 的辐射热损失, 假定它处在(1)与管径比很大的砖室内, 壁温 $t_2 = 27^\circ\text{C}$; (2) 0.2×0.2 米² 的砖槽道里, 砖壁温度 $t_2 = 27^\circ\text{C}$ 。

解 由附表3选取:

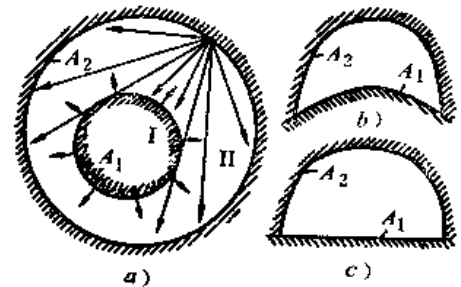


图2-13 空腔内壁与空腔内物体的辐射换热

钢管: $t = 250^\circ\text{C}$ 时 $\epsilon_1 = \alpha_1 = 0.79$

砖壁: $t = 27^\circ\text{C}$ 时 $\epsilon_2 = \alpha_2 = 0.93$

$$T_1 = 273 + t_1 = 523 \text{ 开}$$

$$T_2 = 273 + t_2 = 300 \text{ 开}$$

(1) 热损失由式 (2-53) 得出

$$\begin{aligned} \Phi &= \epsilon_1 A_1 \times 5.7 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \\ &= 0.79 \times \pi (0.05) \times 8 \times 5.7 [(5.23)^4 - (3)^4] = 3775 \text{ 瓦} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi d l}{4 a l} = \frac{\pi \times 0.05}{4 \times 0.2} = 0.196$$

由式 (2-52) 得热损失

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{A_1 \times 5.7 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1 \right)} = \frac{\pi \times 0.05 \times 8 \times 5.7 [5.23^4 - 3^4]}{\frac{1}{0.79} + 0.196 \left(\frac{1}{0.93} - 1 \right)} \\ &= \frac{3775}{1.0117} = 3730 \text{ 瓦} \end{aligned}$$

例题 4 兹有一台精密车床置于恒温室内 (室温为 20°C), 其主轴箱的平均温升为 10°C , 试求箱体表面的单位面积上辐射损失。

解 箱体表面面积与车间面积之比微不足道, 可以采用式 (2-54) 进行计算。

$$\begin{aligned} q &= \frac{\Phi}{A} = \epsilon_1 \times 5.7 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \\ T_1 &= 273 + 20 + 10 = 303 \text{ 开} \\ T_2 &= 273 + 20 = 293 \text{ 开} \end{aligned}$$

对于箱体的涂漆表面, 由附表 3 选取 $\epsilon_1 = 0.91$, 故

$$\begin{aligned} q &= 0.91 \times 5.7 [3.03^4 - 2.93^4] = 0.91 \times 5.7 (84.29 - 73.70) \\ &= 0.91 \times 5.7 \times 10.59 = 54.9 \text{ 瓦/米}^2 \end{aligned}$$

例题 5 液态氧储存在双壁镀银的容器中 (图 2-14), 外壁内表面的温度 $t_{w1} = 20^\circ\text{C}$, 内壁外表面的温度为 $t_{w2} = -183^\circ\text{C}$, 试求每单位面积由于辐射换热而透入容器的热量。镀银壁的吸收率 α 可取为 0.02。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad T_1 &= 273 + 20^\circ = 293 \text{ 开} \\ T_2 &= 273 - 183 = 90 \text{ 开} \end{aligned}$$

由式 (2-55), 单位面积上由于辐射换热而透入容器的热量为

$$\begin{aligned} q &= \frac{5.7 \times \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1} = \frac{5.7 \times [(2.93)^4 - (0.90)^4]}{\frac{1}{0.02} + \frac{1}{0.02} - 1} \\ &= 4.21 \text{ 瓦/米}^2 \end{aligned}$$

四、辐射换热系数 α_{r}

我们所考虑的辐射换热通常多在固体与固体间通过大气或真空中进行。对于工艺系统

(机床-刀具-工件)的辐射换热通常在它们与车间墙壁、屋顶及地面之间进行。因而根据式(2-54), 工艺系统的辐射换热公式可以写成如下的形式:

$$q_{\text{辐}} = \alpha_{\text{辐}}(T_1 - T_2) = \epsilon_1 \times 5.7 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (2-57)$$

故

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{辐}} &= 5.7 \times 10^{-8} \epsilon_1 \left(\frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2} \right) = 5.7 \times 10^{-8} \epsilon_1 (T_1^3 + T_1^2 T_2 + T_1 T_2^2 + T_2^3) \\ &= 5.7 \times 10^{-8} \epsilon_1 [T_1^3 + T_1^2(T_1 - \Delta t) + T_1(T_1 - \Delta t)^2 + (T_1 - \Delta t)^3] \\ &= 5.7 \times 10^{-8} \epsilon_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^3 (4 - 6\theta + 4\theta^2 - \theta^3) \end{aligned} \quad (2-58)$$

式中 T_1 ——工艺系统中有关环节的壁面的绝对温度, 开;

T_2 ——车间壁面、屋面的绝对温度, 可以近似的取用周围大气的绝对温度, 开。

$$\Delta t = T_1 - T_2$$

$$\theta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta t}{T_1}$$

对于机床构件, Δt 一般在 $20 \sim 30^\circ\text{C}$ 以上, t_1 在 60°C 以下, 精密机床还要低得多, θ^2 及 θ^3 可以略去不计, 式(2-58)可以改成

$$\alpha_{\text{辐}} = 5.7 \times 10^{-8} \epsilon_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^3 (4 - 6\theta) \quad (2-59)$$

式(2-59)中的 ϵ_1 改成 $\epsilon_{\text{平}}$, 便可用来计算低温平行壁面的辐射换热, 例如油箱顶面与油面之间的辐射换热。

例题 6 试计算例题 1 车床床头箱体外表面的辐射放热系数。

解 已知 $t_1 = 30^\circ\text{C}$, $t_2 = 10^\circ\text{C}$, $\Delta t = 30 - 10 = 20^\circ\text{C}$,

$$T_1 = 273 + 30 = 303 \text{ 开}, \quad \theta = \frac{20}{303} = 0.066,$$

$$\epsilon_1 = 0.91$$

故

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{辐}} &= 5.7 \times 10^{-8} \times 0.91 \left(\frac{303}{100} \right)^3 (4 - 6 \times 0.066) \\ &= 5.7 \times 0.91 \times 3.03^3 \times 3.604 \times 10^{-2} = 5.21 \text{ 瓦/}(\text{米}^2 \cdot \text{开}) \end{aligned}$$

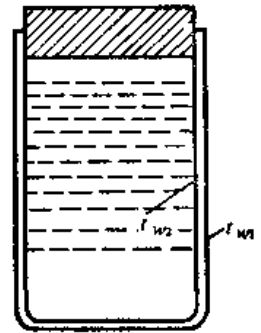


图2-14 液态氧储存容器

§ 2-5 固体表面的放(换)热

一、表面的放(换)热及表面的复合放热、复合放热系数

(一) 表面的放热及表面的复合放热

一般固体表面通常与周围空气、油、水、其它液体或甚至与其它固体表面相接触, 当一个固体表面与其周围的介质出现温差时, 便在其间产生放(或散)热现象, 不仅产生固体与流体间的对流换热, 而且还有辐射换热, 甚至还有固体表面间的导热换热, 其间的情况是相当复杂的。在解决实际工程问题时, 我们应该研究表面的复合放热。

1. 固体与周围空气间的复合放热 $q_{\text{合}}$

固体与周围空气间的放热, 一般由表面对流放热及与周围空气接触的另外表面间的辐射换热所组成。因此

$$q_{\text{合}} = q_{\text{射}} + q_{\text{膜}} \quad (2-60)$$

蒸汽锅炉中燃气对锅炉管壁的放热以及蒸汽散热器中蒸汽管壁对房间的放热，就是这种形式的放热。

2. 固体与接触的液体间的放热，不存在辐射换热，因而它们之间的换热只有对流换热。

3. 固体与固体表面间的换热

通常固体表面与固体表面之间接触是不完整的，每个表面上都存在着一定程度的表面粗糙度（光洁度），而且还存在着一定程度的薄膜油层或氧化层。因此当两个表面接触后，表面之间便存在着薄的空气隙、油层或氧化层。其空气隙的大小又与两个表面间的压力有关，压力越大，接触越好，而其放热就越接近于固体间的导热。当我们在研究固体与固体间的导热时，应该注意这一现象，即要注意到接触热阻。

(二) 复合放热系数 α_s

结合式 (2-60)、(2-57)、(2-58)、(2-13) 等，得出

$$q_{\text{合}} = \alpha_s (t_w - t_f) = \alpha_{\text{射}} (t_w - t_f) + \alpha_{\text{膜}} (t_w - t_f) = (\alpha_{\text{射}} + \alpha_{\text{膜}}) (t_w - t_f) \quad (2-61)$$

所以
$$\alpha_s = \alpha_{\text{射}} + \alpha_{\text{膜}} \quad (2-62)$$

故得固体与周围空气间的复合放热系数为

$$\alpha_s = \alpha_{\text{射}} + \alpha_{\text{膜}}$$

对于机床构件表面的复合放热系数，根据式 (2-31)、(2-32)、(2-59)，得知：

对于水平壁面

$$\alpha_s = 1.7(\Delta t)^{\frac{1}{3}} + 5.7 \times 10^{-2} \varepsilon_w \left(\frac{T_1}{100} \right)^3 \left[4 - 6 \frac{\Delta t}{T_1} \right] \quad \text{瓦/ (米}^2 \cdot \text{开)} \quad (2-63)$$

对于垂直壁面

$$\alpha_s = 1.56 \left(\frac{\Delta t}{H} \right)^{\frac{1}{4}} + 5.7 \times 10^{-2} \varepsilon_w \left(\frac{T_1}{100} \right)^3 \left(4 - \frac{6\Delta t}{T_1} \right) \quad \text{瓦/ (米}^2 \cdot \text{开)} \quad (2-64)$$

式中 T_1 ——固体壁面的绝对温度，开。

二、结合面的传热及其换热系数、接触热阻

(一) 结合面的传热及其换热系数、比面热阻

前面谈到的固体与固体表面间的换热，通常称为结合面的传热，其换热与表面间的介质及其厚度有关，即与介质的导热系数 λ 及其薄膜厚度 δ 有关，从理论上讲，两表面间的换热可用薄膜层的导热来计算。若薄膜层的温度梯度为常数，则它们之间的传热 q 为

$$q = -\frac{\lambda}{\delta} (t_2 - t_1) = \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) = \alpha_{\text{接}} (t_1 - t_2) \quad (2-65)$$

式中 $\alpha_{\text{接}}$ ——结合面间的换热系数。

由此得出

$$\alpha_{\text{接}} = \frac{\lambda}{\delta} \quad (2-66)$$

由于结合面的情况复杂，介质的 λ 及 δ 均不易确定，通常用实验法确定 $\alpha_{\text{接}}$ 的值，工艺系统常用表面间的结合面换热系数值列于附表 4。

对面积为 A 米² 的结合面，其热流量为

$$\Phi = Aq = A\lambda \frac{\Delta t}{\delta} = \frac{A\Delta t}{\frac{\delta}{\lambda}} \quad (2-67)$$

这个关系式与电工学的欧姆定律 $(I = \frac{\Delta E}{R})$ 相类似。Φ 与 I 相当，均为单位时间内的流量，Φ 是热流，I 是电流。Δt 及 ΔE 都是“压头”，分别为温压和电压。 $\frac{1}{A}(\frac{\delta}{\lambda})$ 与电阻相当，称为热阻，以 R 表之，其单位截面上的对应量 $\frac{\delta}{\lambda}$ 称为比面热阻，以 \tilde{R} 表之（为简单起见，本书均用 R、 \tilde{R} 以代替 R 和 \tilde{R} ）。

$$R = \frac{\Delta t}{\Phi} \quad \text{开/瓦}, \quad \tilde{R} = \frac{\Delta t}{q} \quad \text{米}^2 \cdot \text{开/瓦}$$

而有 $R = \frac{1}{A} (\tilde{R})$ 或 $\tilde{R} = AR = \frac{\delta}{\lambda}$

因此，传热面积越大，热阻越小。

在电工学中，电阻的倒数称为电导，因而我们把热阻的倒数称为热导，以 Λ 表之；热导的单位面积对应量称为比面热导，以 k' 表示。

$$\Lambda = \frac{1}{R} \quad \text{瓦/开}, \quad k' = \frac{\Lambda}{A} = \frac{\lambda}{\delta} = \frac{1}{\tilde{R}} \quad \text{瓦/}(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

利用热阻这一概念，便可将欧姆定律的形式运用于传热问题的计算。在今后可以看到其实用的意义。

(二) 比面接触热阻

式 (2-65) 可以写成如下的形式：

$$q = \frac{t_1 - t_2}{1/\alpha_{接}} = \frac{\Delta t}{\tilde{R}_{接}}$$

式中 $1/\alpha_{接}$ 与 \tilde{R} 相当，是一种比面热阻，于是 $\tilde{R}_{接}$ 被称为结合面间的比面接触热阻，亦即比面接触热阻为结合面换热系数的倒数，其单位为 $\text{米}^2 \cdot \text{开/瓦}$ 。

从附表 4 可以算出各种结合面的比面接触热阻，其计算公式为

$$\tilde{R}_{接} = \frac{1}{\alpha_{接}} \quad (2-68)$$

现将光滑铝表面间的比面接触热阻列表于下（表 2-1）：

表 2-1 光滑铝表面间的比面接触热阻

接触面上的压强，牛/米 ²	$\tilde{R}_{接} = \frac{\delta}{\lambda}$ ，米 ² ·开/瓦
0	0.000353
2.6×10^7	0.000016

(三) 比面复合热阻

从式 (2-68) 的类似推理，可以推出，固体表面与周围介质中的复合换热，也存在复合

换热的比面复合热阻 \tilde{R}_h ，其数值也可以用式(2-68)计算，而有

$$\tilde{R}_h = \frac{1}{\alpha_s} \quad (2-69)$$

亦即复合换热的比面复合热阻为复合换热系数的倒数，其单位为 $\text{m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$ 。

§ 2-6 传热过程

一、平整的稳定传热过程

平整传热在日常生活中是经常碰到的，如墙壁、油箱、机床主轴箱体等等的传热。以恒温室为例，夏天外界的气温高于室内，于是外界高温气体的热量通过墙壁传入室内，使室内气温提高；冬天外界气温低于室内，室内高温气体的热量通过墙壁传至室外而散到外界冷空气中。热量的传递主要是沿着壁面的垂直方向进行，它可视为一维传热。恒温室内的温度虽接近于常数，而室外温度则变化不定，昼夜之间差异较大，其传热过程是不稳定的。液压系统中油箱的传热，则近似于一维稳定的传热。主轴箱箱壁在热平衡后的传热是稳定的，但一般不是一维的，除垂直于壁的方向有传热之外，沿着壁的方向也有热量传递。

现在来研究一个最简单的情况——单层平壁一维稳定传热过程。在图2-15上，有一平壁其厚度 δ 远远小于表面的直线尺寸，壁的导热系数为 λ 。壁的一侧与有稳定温度 t_1 的热介质（流体）接触，另一侧与有稳定温度 t_2 的冷介质接触，在壁面附近的边界层中热流体温度 t_1 下降到不变的温度 t_{w1} ，同样另一侧由壁面温度 t_{w2} 下降到较低的稳定温度 t_2 。高温一边为热源，低温一边为热穴。热量由热源向热穴流。在此情况下，设壁的内外两边介质的复合放热系数分别为 α_{s1} 、 α_{s2} 。

首先研究壁内的导热传热，根据式(2-8)，通过墙壁的比热流量 q 为

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda \left(\frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} \right) = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w1} - t_{w2}) = k' (t_{w1} - t_{w2}) \quad (1)$$

式中 $k' = \frac{\lambda}{\delta}$ 为墙壁的比面热导。它代表因导热所产生的单位表面间每温差 1°C 的导热能力。单位为 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，由此导出

$$t_{w2} = t_{w1} - q \frac{\delta}{\lambda} = t_{w1} - \frac{q}{k'} \quad (2)$$

其次讨论壁面与流体之间的换热，根据式(2-61)、(2-62)，可得

$$q = \alpha_{s1} (t_1 - t_{w1}) \quad \text{或} \quad t_{w1} = -\frac{q}{\alpha_{s1}} + t_1 \quad (3)$$

及

$$q = \alpha_{s2} (t_{w2} - t_2) \quad \text{或} \quad t_{w2} = \frac{q}{\alpha_{s2}} + t_2 \quad (4)$$

将(3)(4)代入(2)，化简以后，得

$$t_1 - t_2 = q \left(\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{1}{k'} \right) \quad (5)$$

故

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{1}{k'}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{\delta}{\lambda}} \quad (2-70)$$

二、传热系数

式(2-70)可以写成如下的形式:

$$q = k(t_1 - t_2) \quad (2-71)$$

式中 $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{1}{k'}} \quad \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开}) \quad (2-72)$

称为传热系数。

三、传热温差、局部比面热阻与温降关系

式(2-70)也可利用比面热阻的概念来取得: 由式(2-69), 高温与低温介质的比面热阻 \tilde{R}_1 、 \tilde{R}_2 及内壁比面热阻 \tilde{R}_w 分别为

$$\tilde{R}_1 = \frac{1}{\alpha_{s1}}, \quad \tilde{R}_2 = \frac{1}{\alpha_{s2}}, \quad \tilde{R}_w = \frac{1}{k'} = \frac{\delta}{\lambda}$$

这三个比面热阻在等截面积串联时, 令串联面积均为 A , 则各项局部热阻应为

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_{s1}A}, \quad R_2 = \frac{1}{\alpha_{s2}A}, \quad R_w = \frac{1}{k'A} = \frac{\delta}{\lambda A}$$

故串联后的总热阻 R 应为各项热阻的总和, 即

$$R = R_1 + R_2 + R_w = \frac{1}{\alpha_{s1}A} + \frac{1}{\alpha_{s2}A} + \frac{\delta}{\lambda A} \quad (2-73)$$

上式等号两边均乘以 A , 则可得总比面热阻为

$$\tilde{R} = \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_w = \frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{\delta}{\lambda}$$

而

$$\tilde{R} = \frac{t_1 - t_2}{q}$$

故

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\tilde{R}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{\delta}{\lambda}}$$

可以看出, 在等截面积串联时, 总比面热阻为各比面热阻的总和。又 $\tilde{R} = \frac{1}{k}$, 亦即总比面热阻为传热系数 k 的倒数。

我们称 $\Delta t = t_1 - t_2$ 为传热温差(温压), 其局部温降(与电压降相当)为

$$\Delta t_1 = t_1 - t_{w1}, \quad \Delta t_2 = t_{w2} - t_2, \quad \Delta t_w = t_{w1} - t_{w2}$$

它们相应的局部比面热阻为 \tilde{R}_1 、 \tilde{R}_2 、 \tilde{R}_w , 它们分别为各个放热系数和内壁比面热导的倒数。

局部温降与局部比面热阻的关系为

$$\frac{\Delta t_1}{\tilde{R}_1} = \frac{\Delta t_2}{\tilde{R}_2} = \frac{\Delta t_w}{\tilde{R}_w} = \frac{\Delta t}{\tilde{R}} = q \quad (2-74)$$

因此, 局部温降与局部比面热阻之比等于比热流量(常值), 与电学的欧姆定律的微分形式

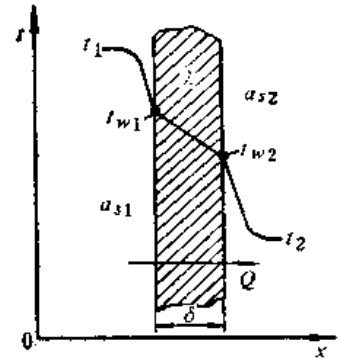


图2-15 单层平壁一维稳定传热

完全相似，从而导出等截面积串联传热过程中各部分的局部温降之比等于其相应的局部比面热阻之比，即

$$\Delta t_1 : \Delta t_2 : \Delta t_w : \Delta t = \tilde{R}_1 : \tilde{R}_2 : \tilde{R}_w : \tilde{R}$$

例题 7 兹有一铁皮油箱（图2-16），壁厚4毫米，内装慢速循环的变压器油，箱的尺寸为长1米、宽0.8米、高0.6米，油面高度0.5米，底面与地面接触，可近似的视为恒温水平平壁。油温为30°C，周围空气温度为10°C。试计算除底面外油箱的散热能力。

解 首先计算侧壁的散热能力

通过侧壁的热阻有三层：油层至内壁面的比面热阻 $\tilde{R}_1 = \frac{1}{\alpha_{s1}}$ ，外壁与周围空气的比面热阻 $\tilde{R}_2 = \frac{1}{\alpha_{s2}}$ ，壁内的比面热阻 $\tilde{R}_w = \frac{\delta}{\lambda}$ 。

\tilde{R}_w 最小， \tilde{R}_2 最大，为了计算 α_{s1} 及 α_{s2} ，采用试凑法（cut and try），假定 $\tilde{R}_w = 0$ ， $\tilde{R}_1 = \frac{\tilde{R}}{5}$ ， $\tilde{R}_2 = \frac{4}{5}\tilde{R}$ 。

传热温差 $\Delta t = 30 - 10 = 20^\circ\text{C}$

$$\text{故} \quad \Delta t_1 = \frac{\Delta t}{5} = 4^\circ\text{C} \quad \Delta t_2 = \frac{4}{5}\Delta t = 16^\circ\text{C}$$

$$t_{w1} = 30 - 4 = 26^\circ\text{C}$$

内壁附面层的平均温度（油膜）

$$t_m = (30 + 26) \times \frac{1}{2} = 28^\circ\text{C}$$

从附表5，对于变压器油：

$$\text{Pr}_m = (298 - 146) \times \frac{8}{20} = 237$$

$$v_m = \left[22.5 - (22.5 - 10.3) \times \frac{8}{20} \right] \times 10^{-8} = 1.76 \times 10^{-8} \quad \text{米}^2/\text{秒}$$

$$\lambda_m = 0.0945 \times 1.163 = 0.11 \quad \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开})$$

一般油类， $\beta \approx (0.5 \sim 0.42) \times 10^{-3}$ ，取 $\beta = 0.5 \times 10^{-3}$

对于铁板， $\varepsilon = 0.79$ ， $\lambda = 39 \text{千卡}/(\text{米}\cdot\text{小时}\cdot\text{度}) = 45.4 \quad \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开})$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad (\text{Gr}\cdot\text{Pr})_m &= \left(\frac{9.81 H^3 \beta \Delta t}{v} \right)_m (\text{Pr})_m = \left(\frac{9.81 \times 0.5^3 \times 0.5 \times 10^{-3} \times 4}{(1.76)^2 \times 10^{-10}} \right) \times 237 \\ &= 1.88 \times 10^9 > 10^9 \text{ (紊流)} \end{aligned}$$

利用式(2-27)及式(2-20)，

$$\alpha_{s1} = \frac{0.12 (\text{Gr}\cdot\text{Pr})^{\frac{1}{3}} \lambda_m}{H} = \frac{0.12 (1.86 \times 10^9)^{\frac{1}{3}} \times 0.11}{0.5}$$

$$= 32.6 \quad \text{瓦}/(\text{米}^2\cdot\text{开})$$

利用式(2-64)，

$$\begin{aligned}\alpha_{s2} &= 1.56 \left(\frac{\Delta t_2}{0.5} \right)^{\frac{1}{2}} + 5.7 \varepsilon_w \times 10^{-2} \left(\frac{T_{w2}}{100} \right)^8 \left(4 - \frac{6\Delta t_2}{T_{w2}} \right) \\ &= 1.56 \left(\frac{16}{0.5} \right)^{\frac{1}{2}} + 5.7 \times 0.79 \times 10^{-2} \left(\frac{273+26}{100} \right)^8 \left(4 - \frac{6 \times 16}{299} \right) \\ &= 3.71 + 4.44 = 8.15 \quad \text{瓦/ (米}^2 \cdot \text{开)} \\ \tilde{R} &= \frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{32.6} + \frac{1}{8.15} + \frac{0.004}{45.4} \\ &= 0.0307 + 0.1226 + 0.00009 = 0.1534 \quad \text{米}^2 \cdot \text{开/瓦}\end{aligned}$$

$$\tilde{R}_1 : \tilde{R}_2 : \tilde{R}_w : \tilde{R} = 0.0307 : 0.1226 : 0.00009 : 0.1534 = 0.200 : 0.799 : 0.0006 : 1$$

故

$$\Delta t_1 = 0.200 \times 20 = 4^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_2 = 0.799 \times 20 = 15.98^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_w = 0.0006 \times 20 = 0.012^\circ\text{C}$$

与原来假定的条件基本相等, α_{s1} 与 α_{s2} 便无需再重新试凑计算了, 如计算结果与假定条件相差较大时, 则 α_{s1} 、 α_{s2} 需要重新计算, 直至基本相符为止。

故

$$k = \frac{1}{\tilde{R}} = \frac{1}{0.1534} = 6.54 \quad \text{瓦/ (米}^2 \cdot \text{开)}$$

$$\text{侧壁总面积 } \Sigma A = (1 \times 0.5 + 0.8 \times 0.5) \times 2 = 1.8 \quad \text{米}^2$$

故

$$\text{侧壁的散热能力} = k \Sigma A \Delta t = 6.54 \times 1.8 \times 20 = 235.4 \quad \text{瓦}$$

现在来研究箱盖顶面的散热能力, 假定它也有三层热阻, 油面对内壁的散热比面热阻 $\tilde{R}'_1 = \frac{1}{\alpha'_{s1}}$, 壁的比面热阻 \tilde{R}_w , 壁到周围空气的比面热阻 $\tilde{R}'_2 = \frac{1}{\alpha'_{s2}}$ 。

由于顶面与侧面相联, 铁板的导热极快而有顶面与侧壁的温度相同之可能, 因而初步假定 $t_{w1} \approx 26^\circ\text{C}$, $\Delta t'_1 \approx 4^\circ\text{C}$, $\Delta t'_2 \approx 16^\circ\text{C}$, 以进行试凑。根据式 (2-63),

$$\begin{aligned}\alpha'_{s2} &= 1.7 (\Delta t'_2)^{\frac{1}{2}} + 5.7 \times 10^{-2} \varepsilon \left(\frac{T_{w2}}{100} \right)^8 \left(4 - \frac{6\Delta t'_2}{T_{w2}} \right) \\ &= 1.7 (16)^{\frac{1}{2}} + 5.7 \times 10^{-2} \times 0.79 \left(\frac{273+26}{100} \right)^8 \left(4 - \frac{6 \times 16}{299} \right) \\ &= 4.28 + 4.44 = 8.72 \quad \text{瓦/ (米}^2 \cdot \text{开)}\end{aligned}$$

对于油面与箱盖内壁之间的放热则需考虑它们之间所形成的横夹层。根据格罗勃(Globe)和特洛普金(Dropkin)的试验研究, 可采用

$$\text{Nu}_m = 0.069 \text{Gr}_m^{1/5} \text{Pr}_m^{0.407}$$

在 $3 \times 10^5 < (\text{GrPr})_m < 7 \times 10^9$ 范围内适用。

根据 $t_m = 28^\circ\text{C}$, 从附表 2 中查出空气的物理参数:

$$\text{Pr}_m = 0.701, \lambda_m = 2.30 \times 10^{-2} \quad \text{千卡/ (米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度)}$$

$$= 2.67 \times 10^{-2} \quad \text{瓦/ (米} \cdot \text{开)}$$

$$v_m = 1.6 \times 10^{-5} \quad \text{米}^2/\text{秒}$$

$$\text{Gr}_m = \frac{g b^3 \beta \Delta t}{v^2} = \frac{9.81 (0.8)^3 (4)}{301 (1.6 \times 10^{-5})^2} = 2.6 \times 10^8$$

$$Nu_m = 0.069(2.6 \times 10^8)^{\frac{1}{3}}(0.701)^{0.407} = 38.1$$

$$\alpha'_{11} = \frac{38.1 \times 2.67 \times 10^{-2}}{0.8} = 1.27 \text{ 瓦/ (米}^2 \cdot \text{开)}$$

故
$$\tilde{R} = \frac{1}{1.27} + \frac{1}{8.72} + 0.00009 = 0.7874 + 0.1146 + 0.00009 = 0.9022 \text{ 米}^2 \cdot \text{开/瓦}$$

故
$$\tilde{R}'_1: \tilde{R}'_2: \tilde{R}'_w = 0.7874:0.1146:0.9022 = 0.8728:0.1270:1$$

因而
$$\Delta t'_1 = 17.46^\circ\text{C}, \Delta t'_2 = 2.54^\circ\text{C}, t_{w1} = 30 - 17.46 = 12.54^\circ\text{C}$$

上述结果与原来的假设相差太大，应予重算。因此假定 $\Delta t'_1 = 17^\circ\text{C}$ ， $\Delta t'_2 = 3^\circ\text{C}$ ， $t_{w1} = 13^\circ\text{C}$ ，以进行第二次试凑。

由于横夹层气体的平均温度为

$$t_m = \frac{30 + 13}{2} = 21.5^\circ\text{C}$$

$$T_m = t_m + 273 = 294.5^\circ\text{C}$$

查表得出

$$(\text{Pr})_m = 0.703$$

$$\lambda_m = 2.24 \times 10^{-2} \text{ 千卡/ (米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度)} = 2.605 \times 10^{-2} \text{ 瓦/ (米} \cdot \text{开)}$$

$$v_m = 15.2 \times 10^{-6} \text{ 米}^2/\text{秒}$$

计算得

$$Gr_m = \frac{9.81(0.8)^3(17)}{294.5(15.2 \times 10^{-6})^2} = 1.255 \times 10^8$$

$$(\text{GrPr})_m = 0.882 \times 10^8 < 7 \times 10^8$$

$$(\text{Nu})_m = 0.069(0.882 \times 10^8)^{\frac{1}{3}}(0.703)^{0.407} = 57.33$$

故得
$$\alpha'_{11} = \frac{57.33 \times 2.605 \times 10^{-2}}{0.8} = 1.867 \text{ 瓦/ (米}^2 \cdot \text{开)}$$

并可算得

$$\begin{aligned} \alpha'_{12} &= 1.7(3)^{\frac{1}{3}} + 5.7 \times 10^{-2} \times 0.79 \left(\frac{273 + 13}{100} \right)^3 \left(4 - \frac{6 \times 3}{286} \right) \\ &= 2.452 + 4.147 = 6.599 \text{ 瓦/ (米}^2 \cdot \text{开)} \end{aligned}$$

故
$$\tilde{R} = \frac{1}{1.867} + \frac{1}{6.599} + 0.00009 = 0.5356 + 0.1515 + 0.00009 = 0.6872 \text{ 米}^2 \cdot \text{开/瓦}$$

$$\Delta t'_1: \Delta t'_2: \Delta t'_w: 20 = 0.5356:0.1515:0.00009:0.6872$$

故得

$$\Delta t'_1 = 15.59^\circ\text{C}$$

$$\Delta t'_2 = 4.41^\circ\text{C}$$

$$\Delta t'_w = 0.0026^\circ\text{C} \approx 0$$

这个结果已与第二次假定的 17°C 及 3°C 相当接近，现在再假定 $\Delta t'_1 = 16^\circ\text{C}$ ， $\Delta t'_2 = 4^\circ\text{C}$ 来进行第三次试凑。

用上述相同方法，计算结果为

$$(Nu)_m = 56, \alpha_{s1} = 1.827, \alpha_{s2} = 6.942$$

$$\Delta t'_1 : \Delta t'_2 : \Delta t'_w : 20 = 0.5473 : 0.1441 : 0.00009 : 0.6914$$

故

$$\Delta t'_1 = 15.83^\circ\text{C}, \Delta t'_2 = 4.17^\circ\text{C}, \Delta t'_w \approx 0$$

这个结果与第三次假定的 16°C 与 4°C 已很接近, 不再进行试凑。

$$\text{通过顶盖的比热流量 } q = \frac{20}{0.6914} = 28.93 \text{ 瓦/米}^2。$$

假定与油不接触的箱壁与箱盖具有相同的比热流量, 则这两个部分的放热面积与散热量分别为:

$$\Sigma A = 1 \times 0.8 + (0.8 + 1) \times 2 \times 0.1 = 1.16 \text{ 米}^2$$

$$\Phi = q (\Sigma A) = 28.93 \times 1.16 = 33.56 \text{ 瓦}$$

于是整个油箱的总的散热量为

$$\Phi_{\text{总}} = 235.4 + 33.56 = 268.96 \text{ 瓦}$$

与油接触部分的侧壁温度为 26°C , 箱盖部分的温度为 14°C 。

不与油接触部分的侧盖温度介乎上述两者之间, 从下到上温度逐步下降。

$$\text{不与油接触部分的散热量占总散热量的份额} = \frac{33.56}{268.96} = 12.48\% \text{ (约为 } 1/8\text{)}。$$

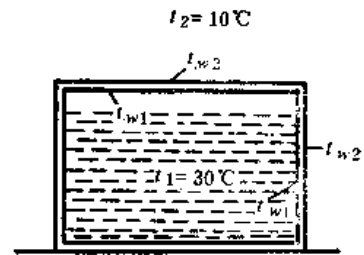


图2-16 油箱散热

§ 2-7 热传导的基本原理

一、普通的导热微分方程及导热系数

热传导理论主要是用来研究导热物体内部的温度场。正如第一章介绍的, 在机械加工工艺系统中有许多问题需要确定其温度场, 因此本节建立的三维系统的瞬时温度场是本书常用的基本方程。

§ 2-2 中曾用傅里叶定律解决一维温度场的问题, 下面用式 (2-5) 及能量守恒定律推导出三维导热普遍的导热微分方程。

图 2-17 为一微元的长方导热体, 其体积为 $dV = dx dy dz$, 假定它将发生的内热为局部温度 t 的函数, 其数量为 q_i 瓦/米³, 并假定它的导热系数为局部温度 t 的函数 λ_t 。

在 x 方向进入微元体表面 $dy dz$ 的热量为 [根据式 (2-5)]

$$dQ_x = -dy dz \left(\lambda_t \frac{\partial t_x}{\partial x} \right) d\tau$$

此时温度梯度以偏微分 $\frac{\partial t_x}{\partial x}$ 表示, 因 t 也是 y 、 z 的函数。

为了确定在 $x + dx$ 方向流出的热量, 令 $F(x, t) = \lambda_t \frac{\partial t_x}{\partial x}$ 并允许 x 增加到 $x + dx$ 。用泰勒级数将 $F(x + dx, t)$ 展开, 并将前二项以后的各项一并略去, 便得

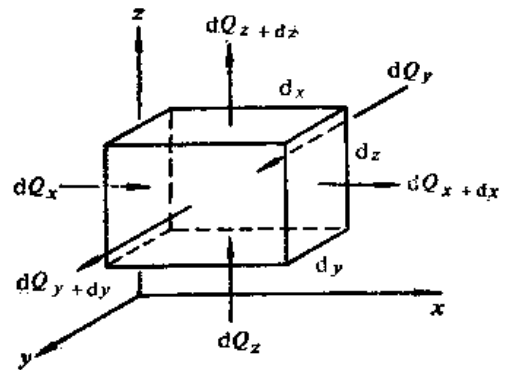


图2-17 微元长方导热体的导热分析

$$F(x+dx, t) = F(x, t) + \frac{\partial F}{\partial x} dx = \lambda_t \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t \frac{\partial t_x}{\partial x} \right) dx$$

于是

$$dQ_{x+dx} = -dydz \left[\lambda_t \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t \frac{\partial t_x}{\partial x} \right) dx \right] d\tau \quad (2-75)$$

用同样的方法, 求出 y 、 z 方向类似的各量:

$$dQ_y, dQ_{y+dy}, dQ_z \text{ 及 } dQ_{z+dz}$$

根据式 (2-9) 微元体内能的总增量为

$$dE = c\rho dV \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau = c\rho dx dy dz \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau$$

而微元体内的总发热量 dQ_{*} (即内热) 为

$$dQ_{*} = q_v^{*} dV d\tau = q_v^{*} dx dy dz d\tau$$

式中 q_v^{*} ——单位体积内的内部发热强度。

根据能量守恒定律, 可以取得如下的平衡方程:

$$dQ_x + dQ_y + dQ_z + dQ_{*} = dQ_{x+dx} + dQ_{y+dy} + dQ_{z+dz} + dE$$

化简以后, 得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_t \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v^{*} = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-76)$$

此为导热的普遍微分方程。其温度场为

$$t = t(x, y, z, \tau)$$

当 λ 为常数, 则式 (2-76) 应改成如下的形式, 亦即其温度场 $t(x, y, z, \tau)$ 应满足下列方程:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v^{*}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-77)$$

式中

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (2-78)$$

它为导热材料的特性常数, 称为导温系数, 有些文献称为热扩散率 (thermal diffusivity), 它表示物体传递热量的快慢, 即传温速度, 其单位为 m^2/s 。

几种特殊情况:

(一) 若系统没有“热源”(内热)或“热穴”(吸热部分称为热穴, 其吸热量为 $-q_v^{*}$), $q_v^{*} = 0$, 其温度场 $t(x, y, z, \tau)$ 应满足下列方程:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-79)$$

或写成

$$\nabla^2 t = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-80)$$

此为傅里叶方程。

(二) 若系统内有“热源”或“热穴”存在而温度是稳定的, 则其温度场为 $t(x, y, z)$, 其温度分布与时间无关, 它应满足下列方程:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v'''}{\lambda} = 0 \quad (2-81)$$

或写成

$$\nabla^2 t + \frac{q_v'''}{\lambda} = 0 \quad (2-82)$$

此为波桑方程。

(三) 若系统温度稳定而没有“热源”或“热穴”时, $q_v''' = 0$, 其温度场 $t(x, y, z)$ 应满足下列方程:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (2-83)$$

或写成

$$\nabla^2 t = 0$$

此为拉普拉斯方程, 或称调和方程。式中 ∇^2 为拉普拉斯运算符号, $\nabla^2 t$ 称为对 t 的拉普拉斯运算符 (或算子)。式 (2-83) 为三维拉普拉斯方程。对于没有“热源”或“热穴”的二维、一维稳定导热系统, 拉普拉斯方程分别为:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (2-84)$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (2-85)$$

以上各式为在均匀介质中导热的基本方程。而式 (2-76) 为其普遍方程。热传导问题就是上述基本方程的求解。

二、导热过程的起始条件和边界 (边值) 条件

因为微分方程是根据一般规律推演出来的, 它代表无数种彼此具有不同特点的导热现象, 要从无数种不同现象中区分出我们所研究的现象, 就必须把有关该现象的一些特点表示成数学形式, 并把它们并入微分方程中。表达这些特点的条件, 总称为单值性条件^[6]。也就是说, 物体的温度分布, 只用式 (2-76)、(2-79)、(2-81) 或 (2-83) 等基本方程还不足以确定, 必须增加下列条件:

单值性条件包括: 几何条件、物理条件、起始条件与边界条件。在已知几何形状与物体的物理性质条件下, 单值条件主要就是起始条件与边界条件。

(一) 起始条件

起始条件或时间条件, 它给出 $\tau = 0$ 时物体内部的温度起始分布规律,

$$t|_{\tau=0} = t(x, y, z) \quad (2-86)$$

而在稳定的导热过程中, 就不需要起始条件了。

(二) 边界条件

边界条件是指物体边界表面与周围介质之间有相互热作用的规律。边界条件可以分为三类:

1. 第一类边界条件是已知在任何瞬时沿物体边界表面的温度分布的情况, 即

$$t_{\text{边}} = t(x, y, z, \tau) \quad (2-87)$$

2. 第二类边界条件是已知物体边界表面上每点的比热流量 (热流密度) $q_{\text{边}}$ 为时间的函

数的情况, 即

$$q_{\text{边}} = q(x, y, z, \tau) \quad (2-88)$$

3. 第三类边界条件是已知周围介质的温度 t_f 及物体边界表面与周围介质之间热交换规律的情况。这类边界条件是指物体冷却或加热过程中物体边界表面与周围介质间的换热规律, 即牛顿定律,

$$q_{\text{边}} = q(\tau) = \alpha_s [t_{\text{边}}(\tau) - t_f] \quad (2-89)$$

按能量守恒定律, 这个热量应该等于在单位时间内以导热方式传到表面的比热流量:

$$q_{\text{边}} = \alpha_s [t_{\text{边}}(\tau) - t_f] = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{\text{边}}$$

式中 n ——物体边界表面的法线 (向物体外为正值)。

通常把这个边界条件写成如下的形式:

$$\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{\text{边}} + \alpha_s [t_{\text{边}}(\tau) - t_f] = 0 \quad (2-90)$$

以上为不稳定导热系统的三种边界条件。当导热系统稳定时, 这三种边界条件为:

$$t_{\text{边}} = f(x, y, z) \quad (2-91)$$

$$q_{\text{边}} = g(x, y, z), \text{ 而有}$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{\text{边}} = h(x, y, z) \quad (2-92)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{\text{边}} + \alpha_s [t_{\text{边}} - t_f] = 0$$

$$\text{或} \quad \left[\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{\alpha_s}{\lambda} t \right]_{\text{边}} = \frac{\alpha_s}{\lambda} t_f = k(x, y, z) \quad (2-93)$$

式中 f, g, h, k 表示仅为 x, y, z 的函数。当 $\frac{\alpha_s}{\lambda} \rightarrow \infty$ (即 α_s 很大, $\alpha_s \rightarrow \infty$, 或 λ 很小, $\lambda \rightarrow 0$), $t_{\text{边}} = t_f$ 。此时第三类边界条件便转化为第一类边界条件了, 其边界点的温度等于周围介质的温度。由于我们往往只知道介质的温度, 所以第三类边界条件具有最大的实际意义。当边界条件确定以后, 边界以内的求解区域的温度分布便完全确定了。

三、导热微分方程的求解

用数学方法求解导热微分方程时, 得到的解答 $t(x, y, z, \tau)$ 或 $t(x, y, z)$, 既应满足某一有关的导热方程〔式(2-76)~(2-85)〕, 也应满足某一特定的起始条件和边界条件〔式(2-86)~(2-93)〕。这个方法称为解析法。实用上遇到的导热问题只有少数能用解析法求得解答。绝大多数的多维导热问题, 解析法十分复杂, 有时甚至无法求解。因此实用上广泛采用导热微分方程的一些近似解法: 有限差分法与有限元法等数值计算法 (见第四章) 以及电热比拟法和水热比拟法等实验模拟法 (参看第八章)。现在还采用模拟电子计算机、专用电子计算机等解不稳定的导热问题。

四、导热微分方程的座标变换

式(2-77)~(2-85)是直角坐标系中的导热方程。工程上也会碰到圆筒、圆柱或球面体的导热问题。把直角坐标系导热方程改换成圆柱、球面坐标系, 将使数学处理过程要方便得多。因此, 我们需要把式(2-77)的直角坐标系统转换成图2-18的圆柱和球面座标系统。

(一) 圆柱座标系统

直角坐标系统与圆柱坐标系统的相互关系 (图 2-18 a) 为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\}$$

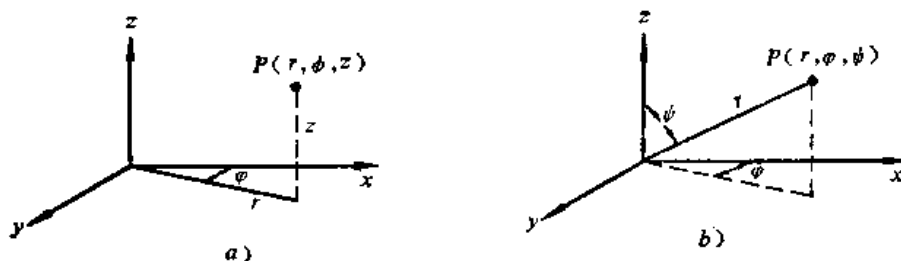


图2-18 圆柱形和球面坐标系统

将直角坐标系的式 (2-77) 转换成圆柱坐标系, 得

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v'''}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-94)$$

式 (2-94) 也可用热平衡方程和傅里叶方程在圆柱形坐标中求得, 如图 2-19 所示。在圆柱坐标 (r, φ, z) 中取一微元体, 其体积为

$$rd\varphi dr dz$$

设微元体由径向导入热量为

$$dQ_r = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} rd\varphi dz d\tau$$

导出热量为

$$dQ_{(r+dr)} = -\lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(t + \frac{\partial t}{\partial r} dr \right) dz (r+dr) d\varphi d\tau (\text{略去高阶项})$$

于是, 在 r 方向微元体净得热量为

$$dQ_r - dQ_{(r+dr)} = \lambda \frac{\partial t}{\partial r} dz dr d\varphi d\tau + \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} dz rd\varphi dr d\tau$$

同理可得在 φ 方向的净热量为

$$dQ_\varphi - dQ_{(\varphi+d\varphi)} = \lambda \frac{\partial^2 t}{r^2 \partial \varphi^2} r dr dz rd\varphi d\tau$$

$$dQ_z - dQ_{(z+dz)} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} r dr d\varphi dz d\tau$$

微元体三个方向净得的热量之和为

$$dQ = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) r dr d\varphi dz d\tau$$

微元体得自内部热源的热量为

$$dQ_v = q_v''' r dr d\varphi dz d\tau$$

微元体得到热量后使其内能总增量为

$$dE = c\rho r dr d\varphi dz \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau$$

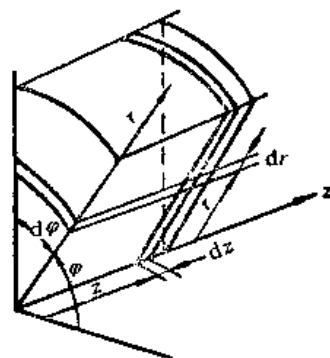


图 2-19

根据能量守恒定律, 可得圆柱坐标具有内部热源的三维导热方程:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_r'''}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

此即式(2-94)圆柱坐标形式, 此时 λ 为常值

若 $q_r''' = 0$, 则上式为

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

此即式(2-79)所转换的圆柱坐标形式。

如果温度场是方位对称的, 即同一半径 r 的各个方位的温度场是相同的, 则在式(2-94)中, $\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0$ 。于是在稳定的、无内热源的圆筒壁导热系统中, 导热的微分方程为

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (2-95)$$

此为 r 、 z 平面的二维导热方程。

如果圆筒壁很长, 沿轴向的导热可以略而不计, 则式(2-95)变成

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0 \quad (2-96)$$

此时温度场的变化, 仅与一个变量 r 有关, 而为求径向热流的一维导热方程, 在工程上很有实用的意义。

(二) 球面坐标

直角坐标与球面坐标的关系如图 2-18 b

$$x = r \sin \psi \cos \varphi$$

$$y = r \sin \psi \sin \varphi$$

$$z = r \cos \psi$$

用以圆柱坐标转换的同样方法, 式(2-79)变成如下的形式:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rt) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-97)$$

或可写成

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial t}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-98)$$

第三章 一维稳定系统导热

§ 3-1 平壁稳定导热与传热

一、单层平壁的导热与传热

让我们来研究厚度 δ 的单层壁，其宽与高的尺寸很大，壁的两侧分别记为 1 及 2（图 3-1）。材料的导热系数 λ 为常数。壁的两侧分别有热介质。假定热的传递方向仅与壁面垂直（ x 方向），侧 1 的介质为热源，侧 2 的介质为热穴，在稳定

情况下， $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ 。由于温度场是一维的，即

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

因此，导热微分方程便成如下的形式〔式 (2-85)〕：

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

常见的边界条件为：

第一类边界条件

$$\left. \begin{aligned} t_{x=0} &= t_1 \\ t_{x=\delta} &= t_2 \end{aligned} \right\} t_1 > t_2$$

第三类边界条件

$$\left[\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{\alpha_s}{\lambda} t \right]_s = \frac{\alpha_s}{\lambda} t_{fs}$$

式中 n 为向物体外的法线方向。

在表面 1， n 与 x 反向： $\left[-\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\alpha_{s1}}{\lambda} t \right]_1 = \frac{\alpha_{s1}}{\lambda} t_{f1}$

在表面 2， n 与 x 同向： $\left[\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\alpha_{s2}}{\lambda} t \right]_2 = \frac{\alpha_{s2}}{\lambda} t_{f2}$

式中 t_{f1} 及 t_{f2} 为分别靠近壁 1 及壁 2 的周围空气温度； α_{s1} 、 α_{s2} 分别为壁 1、壁 2 对介质的放热系数。

式 (2-85) 的通解为

$$t(x) = C_1 x + C_2 \tag{3-1}$$

(一) 当采用第一类边界条件时

$$t_{x=0} = t_1 = C_2$$

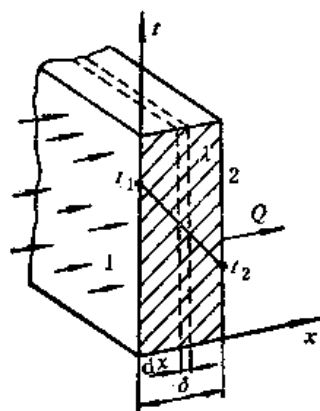


图3-1 单层平壁

$$t_{x=\delta} = t_2 = C_1\delta + C_2 = t_1 + C_1\delta$$

即

$$C_1 = -\frac{t_1 - t_2}{\delta}$$

代入 $t(x)$ 得

$$t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} x \quad (3-2)$$

即

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) \quad (3-3)$$

而温度分布 $t(x)$ 为图上所示 t_1 到 t_2 的直线。

(二) 当采用第三类边界条件时, 由式 (2-90) 得:
在左边界上

$$-\left(\frac{dt}{dx}\right)_1 + \frac{\alpha_{s1}}{\lambda}(t_1 - t_{f1}) = 0$$

即

$$-\left(\frac{dt}{dx}\right)_1 + \frac{\alpha_{s1}}{\lambda} t_1 = \frac{\alpha_{s1}}{\lambda} t_{f1}$$

在右边界上

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_2 + \frac{\alpha_{s2}}{\lambda}(t_2 - t_{f2}) = 0$$

即

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_2 + \frac{\alpha_{s2}}{\lambda} t_2 = \frac{\alpha_{s2}}{\lambda} t_{f2}$$

由于

$$\frac{dt}{dx} = C_1$$

代入边界条件, 得

$$-C_1 + \frac{\alpha_{s1}}{\lambda} t_1 = \frac{\alpha_{s1}}{\lambda} t_{f1}$$

故

$$C_1 = -\frac{\alpha_{s1}}{\lambda} (t_{f1} - t_1)$$

$$C_1 + \frac{\alpha_{s2}}{\lambda} t_2 = \frac{\alpha_{s2}}{\lambda} t_{f2}$$

得

$$\alpha_{s1}(t_{f1} - t_1) = -\alpha_{s2}(t_{f2} - t_2)$$

又

$$t(x)_1 = t(x)_{x=0} = C_2$$

故

$$t(x)_2 = C_1\delta + C_2$$

$$C_1 = -\frac{t_1 - t_2}{\delta} = -\frac{q}{\lambda}$$

而

$$q = \alpha_{s1}(t_{f1} - t_1)$$

故

$$t_1 = t_{f1} - \frac{q}{\alpha_{s1}}$$

即

$$C_2 = t_1 = t_{f1} - \frac{q}{\alpha_{s1}}$$

代入式 (3-1), 得

$$t(x) = t_{f_1} - \frac{q}{\alpha_{s_1}} - \frac{q}{\lambda} x = t_1 - \frac{q}{\lambda} x \quad (3-4)$$

同样可得 $t_2 = t_{f_2} + \frac{q}{\alpha_{s_2}}$, 当 $x = \delta$ 时, $t(x) = t_2$

解式 (3-4) 即得

$$q = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{\frac{1}{\alpha_{s_1}} + \frac{1}{\alpha_{s_2}} + \frac{\delta}{\lambda}} = k(t_{f_1} - t_{f_2}) \quad (3-5)$$

式 (3-5) 与平壁两侧都有热介质 (一冷一热) 完全一致的传热情况, 其中 k 为总传热系数。

例题 1 假定恒温室的壁厚为 350 毫米, 其平均导热系数 $\lambda = 0.7$ 千卡/(米·小时·度) = 0.815 瓦/(米²·开)。室温 $t_{f_2} = 20^\circ\text{C}$, 室外气温 $t_{f_1} = 30^\circ\text{C}$, $\alpha_{s_1} = 8.16$ 瓦/(米²·开), $\alpha_{s_2} = 2.5$ 瓦/(米²·开), 试求 q 、 t_1 、 t_2 及 $t(x)$ 。

解

$$q = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{\frac{1}{\alpha_{s_1}} + \frac{1}{\alpha_{s_2}} + \frac{\delta}{\lambda}} = \frac{30 - 20}{\frac{1}{8.16} + \frac{1}{2.5} + \frac{0.35}{0.815}}$$

$$= \frac{10}{0.952} = 10.51 \text{ 瓦/米}^2$$

$$t_1 = t_{f_1} - \frac{q}{\alpha_{s_1}} = 30 - \frac{10.51}{8.16} = 28.71^\circ\text{C}$$

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_1 - t_2)$$

故

$$t_2 = t_1 - q \frac{\delta}{\lambda} = 28.71 - \frac{10.51 \times 0.35}{0.815} = 24.20^\circ\text{C}$$

$$t_2 = t_{f_2} + q \frac{1}{\alpha_{s_2}} = 20 + 4.20 = 24.20^\circ\text{C} \quad (\text{校核})$$

$$t(x) = 28.71 - 12.88x \quad (0 \leq x \leq 0.35)$$

例题 2 在上例中, 若墙壁的内、外两面的温度分别为 $t_2 = 22^\circ\text{C}$, $t_1 = 28^\circ\text{C}$, 试求 $t(x)$ 。

解 式 (3-2) 为

$$t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} x = 28 - \frac{28 - 22}{0.35} x = 28 - 17.14x$$

$$0 \leq x \leq 0.35$$

从上述两例题中, 可以看出, 当边界条件不同时, $t(x)$ 是不同的, 即其温度场是不同的。

二、多层平壁的导热和传热

由好几层不同材料的平壁叠在一起组成的复合壁叫做多层壁。在工程上常常碰到这类多层壁, 例如机床主轴箱、床身等外壁通常附有石膏涂层的油漆层, 便构成了多层平壁, 房屋

的墙壁由砖层、灰泥和粉刷层等构成多层平壁，锅炉炉墙由耐火砖层、绝热砖层和普通砖层也叠合成一个多层的平壁。现以一个三层的多层平壁为例来进行讨论。假定层与层间的接触分界面接触得很完善，没有产生附加热阻，亦即假定其接触热阻为零，则通过分界接触面也就不发生温度降落。当各层材料的导热系数是常数时，温度分布如图 3-2 所示。若问题的已知量为 t_1, t_4 (t_2, t_3 预先不知道)，相当于第一类边界条件， $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 及 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 也为已知。我们来确定 $q = f(t_1, t_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ 的具体关系。

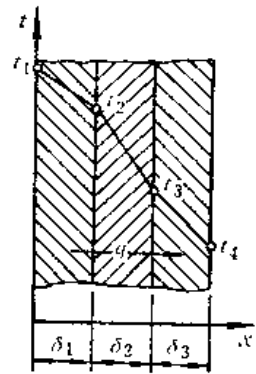


图3 多层平壁

应用比面热阻*概念求解最为方便。根据式 (3-3)，各层比面热阻分别为：

$$\begin{aligned} \frac{t_1 - t_2}{q} &= \frac{\delta_1}{\lambda_1} = \frac{1}{k'_1} \\ \frac{t_2 - t_3}{q} &= \frac{\delta_2}{\lambda_2} = \frac{1}{k'_2} \\ \frac{t_3 - t_4}{q} &= \frac{\delta_3}{\lambda_3} = \frac{1}{k'_3} \end{aligned}$$

三式相加，得

$$\frac{t_1 - t_4}{q} = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{k'_i}$$

故

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\delta_i}{\lambda_i} \right)} = \frac{t_1 - t_4}{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k'_i} \right)} = \frac{t_1 - t_4}{\frac{1}{k'}}$$

对 n 层多层平壁，

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k'_i} \right)} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{1/k'} \tag{3-6}$$

式中 k' ——多层壁的比面热导。而有 $\frac{1}{k'} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k'_i} \right)$ 。

由式 (3-6) 解出比热流量 q 后，便可求出 t_2, t_3, \dots 例如

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 - q \frac{\delta_1}{\lambda_1} \\ t_3 &= t_2 - q \frac{\delta_2}{\lambda_2} = t_1 - q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right) \\ &\dots\dots\dots \\ t_{n+1} &= t_1 - q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots\dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right) \end{aligned} \tag{3-7}$$

* 比面热阻的概念参看 §2-5。

在每一层壁内的温度分布是直线，但整个多层壁由于各层的 λ 值不同，故其中的温度分布成为一条折线，如图 3-2 所示。

由于经过每层的比热流量都是一样的，因此

$$\lambda_1(\text{grad } t)_1 = \lambda_2(\text{grad } t)_2 = \dots$$

即
$$\frac{(\text{grad } t)_1}{(\text{grad } t)_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \text{ 等等} \quad (3-8)$$

这个公式表明：温度梯度与导热系数成反比。即如要得到较大的温度梯度（例如在使用热绝缘时），则必须用导热系数较小的材料。若多层壁内外两侧的热介质温度 $t_{f,n+1}$ 、 t_{f1} 及放热系数 $\alpha_{s,n+1}$ 、 α_{s1} 为已知（即为第三类边界条件），则

$$\begin{aligned} q &= \frac{t_{f1} - t_{f,n+1}}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s,n+1}} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_i}{\lambda_i} \right)} = \frac{t_{f1} - t_{f,n+1}}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s,n+1}} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k'_i} \right)} \\ &= \frac{t_{f1} - t_{f,n+1}}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s,n+1}} + \frac{1}{k'}} = k(t_{f1} - t_{f,n+1}) \end{aligned} \quad (3-9)$$

式中 $k = \text{总传热系数} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{\alpha_{s,n+1}} + \frac{1}{k'}}$

例题 3 为了使例题 1 的恒温室具有较高的保温能力，将其墙壁改成如下的多层平壁：最外层涂以灰浆（ $\lambda_1 = 0.67$ ， $\delta_1 = 5$ 毫米），第二层为泡沫混凝土（ $\lambda_2 = 0.34$ ， $\delta_2 = 15$ 毫米），第三层砖墙（ $\lambda_3 = 0.70$ ， $\delta_3 = 450$ 毫米），第四层为纤维板（ $\lambda_4 = 0.042$ ， $\delta_4 = 5$ 毫米），最后一层石灰粉刷（ $\delta_5 = 5$ 毫米， $\lambda_5 = 0.6$ ），其中 λ 的单位为 $\text{千卡}/(\text{米}^2 \cdot \text{小时} \cdot \text{度})$ ，其它条件与例题 1 相同。试求（1） q 、 t_1 、 t_6 （内壁温度）；（2）恒温室的外形尺寸为 25 米长 \times 10 米宽 \times 6 米高，假定屋顶的散热能力为墙壁的一倍（即 $q_{\text{顶}} = 2q_{\text{壁}}$ ），地面的散热能力为墙壁的一半（即 $q_{\text{地}} = \frac{1}{2}q_{\text{壁}}$ ），试求这个恒温室整个散热能力（此时为吸热能力）。若冷冻设备的工作效率（连同安全系数）为 0.7，试求维持室温 20°C 的冷冻设备所需要的功率。

解

$$(1) \alpha_{s1} = 8.16 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

$$\alpha_{s,n} = 2.5 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

$$\lambda_1 = 0.67 \times 1.163 \text{ 瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$\lambda_2 = 0.34 \times 1.163 \text{ 瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$\lambda_3 = 0.7 \times 1.163 \text{ 瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$\lambda_4 = 0.042 \times 1.163 \text{ 瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$\lambda_5 = 0.6 \times 1.163 \text{ 瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$t_{f1} = 30^\circ\text{C} \quad t_{f6} = 20^\circ\text{C}$$

$$q = \frac{30 - 20}{\frac{1}{8.16} + \frac{1}{2.5} + \frac{0.005}{0.67 \times 1.163} + \frac{0.015}{0.34 \times 1.163} + \frac{0.45}{0.7 \times 1.163} + \frac{0.005}{0.042 \times 1.163} + \frac{0.005}{0.6 \times 1.163}}$$

$$= \frac{10}{1.229} = 8.135 \text{ 瓦/米}^2$$

$$t_1 = t_{f1} - \frac{q}{\alpha_{s1}} = 30 - \frac{8.135}{8.16} \approx 29.00^\circ\text{C}$$

$$t_s = t_1 - q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{\delta_4}{\lambda_4} + \frac{\delta_5}{\lambda_5} \right) = 29.00 - 8.135 \times 0.7066$$

$$= 23.25^\circ\text{C}$$

校验: $20 + \frac{8.135}{2.5} = 23.25^\circ\text{C}$

(2) 墙壁面积 = $6(25 \times 2 + 10 \times 2) = 420 \text{ 米}^2$

屋顶面积 = $(25 - 0.48) \times (10 - 0.48) = 233.4 \text{ 米}^2$

地面积 = 233.4 米^2

如果略去边角散热的因素, 即得

$$\Phi = q_w A_w + q_{\text{顶}} A_{\text{顶}} + q_{\text{地}} A_{\text{地}}$$

$$= 8.135 \times 420 + 2 \times 8.135 \times 234 + \frac{1}{2} \times 8.135 \times 234 = 8176 \text{ 瓦}$$

故冷冻设备所需的功率 = $\frac{8.176}{0.7} = 11.68 \text{ 千瓦}$, 可取 15 千瓦的电动机。

对于室内墙壁放热系数 α_{s0} 的校核

墙壁温度 $t_s = 23.25^\circ\text{C}$

室内气温 $t_{f0} = 20^\circ\text{C}$

故 热边界层 (附面层) 的平均温度

$$t_m = \frac{20 + 23.25}{2} = 21.63^\circ\text{C}$$

温差 $\Delta t = 3.25^\circ\text{C}$

假定墙壁高度 = 6 米

查附表 2

当

$$t_m = 21.63^\circ\text{C}$$

$$\lambda_m = 2.242 \times 10^{-2} \text{ 千卡/(米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度)} = 2.242 \times 1.163 \text{ 瓦/(米} \cdot \text{开)}$$

$$v_m = 1.5226 \times 10^{-5} \text{ 米}^2/\text{秒}$$

$$\text{Pr}_m = 0.7027$$

$$\text{Gr}_m = \frac{g H^3 \beta \Delta t}{v_m^2} = \frac{9.81 \times (6)^3 \times 3.25}{(273 + 21.77) (1.5226)^2 \times 10^{-10}}$$

$$= \frac{9.81 \times 216 \times 3.25 \times 10^{10}}{294.77 \times 2.319} = 1.008 \times 10^{11}$$

$(\text{CrPr})_m = 1.008 \times 10^{11} \times 0.7027 = 7.08 \times 10^{10}$ 故为紊流

$$Nu_m = 0.12(7.08 \times 10^{10})^{\frac{1}{3}} = 120 \times 4.138 = 496.5$$

因此

$$\alpha_m = \frac{Nu_m \lambda_m}{H} = \frac{496.5 \times 2.242 \times 10^{-2} \times 1.163}{6} = 2.158 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$$

在恒温室内，四周墙壁的温度基本相同，壁与壁间没有辐射换热，因此室内墙壁的放热主要是对流放热，故假定 $\alpha_{s,4}$ 为 $2.5 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$ 是恰当的。

例题 4 假定某恒温室的墙厚为两砖（510 毫米），其 $\lambda = 0.815 \text{ 瓦/(米} \cdot \text{开)}$ ，墙的外面覆盖有 5 厘米厚的绝热层，其 $\lambda = 0.09 \text{ 瓦/(米} \cdot \text{开)}$ ，屋内空气温度 $t_{f1} = 20^\circ\text{C}$ ，墙的内表面的放热系数为 $\alpha_{s,1} = 2.5 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$ ；外面空气温度 $t_{f,2} = 0^\circ\text{C}$ ，被风所吹拂的墙壁外表面的放热系数为 $23 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$ 。试求墙壁的比热流量。①当外表面有绝缘层时；②当外表面无绝缘层时；③当内外两壁面均有绝缘层时。

解

(1) 有绝缘层时

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2.5} + \frac{0.51}{0.815} + \frac{0.05}{0.09} + \frac{1}{23}} = \frac{1}{1.6248} = 0.6155 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$$

$$q = (20 - 0) \times 0.6155 = 12.31 \text{ 瓦/米}^2$$

(2) 无绝缘层时

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2.5} + \frac{0.51}{0.815} + \frac{1}{23}} = \frac{1}{1.096} = 0.935 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$$

$$q = (20 - 0) \times 0.935 = 18.70 \text{ 瓦/米}^2$$

(3) 内外两壁面均有绝缘层时

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2.5} + \frac{0.05}{0.09} + \frac{0.51}{0.815} + \frac{0.05}{0.09} + \frac{1}{23}} = 0.4586 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$$

$$q = (20 - 0) \times 0.4586 = 9.173 \text{ 瓦/米}^2$$

$$t_1 = t_{f1} - \frac{q}{\alpha_{s,1}} = 20 - \frac{9.173}{2.5} = 16.331^\circ\text{C}$$

$$t_2 = t_1 - \frac{q}{\lambda_1/\delta_1} = 16.331 - \frac{9.173 \times 0.05}{0.09} = 11.235^\circ\text{C}$$

$$t_3 = t_2 - q \frac{\delta_2}{\lambda_2} = 11.235 - \frac{9.173 \times 0.51}{0.815} = 5.495^\circ\text{C}$$

$$t_4 = t_3 - q \frac{\delta_3}{\lambda_3} = 5.495 - \frac{9.173 \times 0.05}{0.09} = 0.399^\circ\text{C}$$

校核：

$$t_{f,4} = t_4 - q/\alpha_{s,4} = 0.399 - \frac{9.173}{23} = 0^\circ\text{C}$$

兹将上述温度分布绘于图 3-3 上, 可以看出, 壁内各层的温度分布为直线, 整个平壁构成折线形式的温度分布。

在墙壁无绝缘层时, 其放热能力竟为内外壁均有绝缘层时的一倍以上 ($= \frac{18.70}{9.16} = 2.04$)。由此可见, 在恒温室设计时, 选取适当的绝缘层的重要意义了。

由于空气导热系数 λ 很小, 如墙壁改成双层砖墙, 每层为 25 厘米, 两墙之间留有 10 厘米的空隙, 夹墙中空气 $t_m = 10^\circ\text{C}$, 在 $t = 10^\circ\text{C}$ 时, 干空气的 $\lambda = 0.025 \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开})$, 并将内外两壁面的绝缘层各改为 2.5 厘米, 则其传热系数为

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2.5} + \frac{0.025}{0.09} + \frac{0.25}{0.815} + \frac{0.1}{0.025} + \frac{0.25}{0.815} + \frac{0.025}{0.09} + \frac{1}{23}}$$

$$= 0.178 \text{ 瓦}/(\text{米}^2\cdot\text{开})$$

$$q = 20 \times 0.178 = 3.56 \text{ 瓦}/\text{米}^2$$

它为实心墙而两边带有绝缘层的放热能力的 0.4 倍, 与无绝缘层的砖墙相比, 它仅为其 0.19 倍, 这说明空心墙的绝缘作用是非常明显的, 由于空心墙中的空气并不是很干燥的, 其导热系数要比干空气大些, 并且墙内空气还有一定的对流 (有限空间散热) [6], 因而墙壁的比热流量要比计算值来得大些。虽然如此, 空心墙的绝热能力还是相当高的, 它可以大大减少绝缘层的厚度, 从而可节约绝缘材料的费用。因此, 在恒温室设计中就存在着最佳经济效果设计问题。

三、并联组合壁的导热

机械部件中的平壁, 有时候不仅在厚度上由几种金属所组成, 而且在其长宽方向也可能由几种不同材料所构成, 如图 3-4 所示的大型磨床的一个镶钢平导轨, 就是一个明显的例子。此时钢条与铸铁本体形成串联热阻, 若螺钉与钢条、铸体之间形成很薄的热绝缘层, 则螺钉与钢条、铸铁的复合体形成的整个系统将构成并联的热阻。关于等面积串联系统的总比面热阻, 其计算方法已在前面讲过。对于钢条-铸铁, 其串联比面热阻为

$$\tilde{R}_{\#} = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} = \frac{1}{k'_{\#}}$$

并联热阻的总热阻, 可利用热流量和比热流量的基本方程来计算, 设通过钢条-铸铁的比热流量为 q_1 , 则可得

$$q_1 = \frac{1}{\tilde{R}_{\#}} (t_1 - t_2)$$

螺钉的比面热阻和通过螺钉的比热流量分别为:

$$\tilde{R}_{\#} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{\lambda_{\#}} = \frac{1}{k'_{\#}}$$

$$q_2 = \frac{t_1 - t_2}{\tilde{R}_{\#}}$$

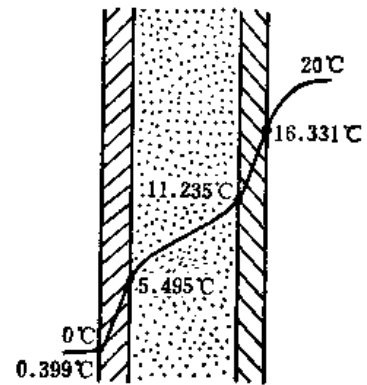


图3-3 多层平壁的温度分布

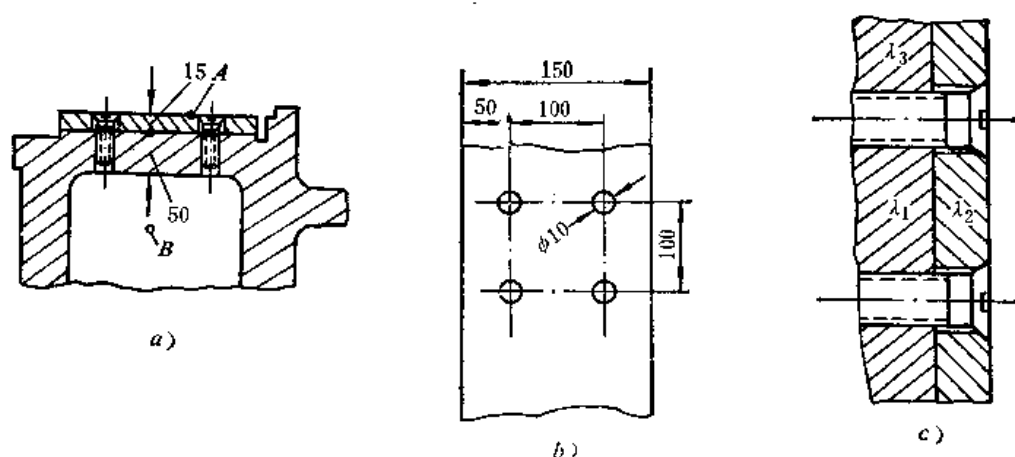


图3-4 大型磨床的镀钢平导轨

故通过串联面积 $A_{\#}$ 的流量为

$$\Phi_1 = q_1 A_{\#}$$

通过螺钉面积 $A_{\#}$ 的热流量为

$$\Phi_2 = q_2 A_{\#}$$

在整个复合系统中，通过面积为 $A = A_{\#} + A_{\#}$ 的热流量应为

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

代入后得

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\tilde{R}_{\#}} A_{\#} + \frac{t_1 - t_2}{\tilde{R}_{\#}} A_{\#} \quad (1)$$

或写成

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{R_{\#}} + \frac{t_1 - t_2}{R_{\#}}$$

式中 $R_{\#}$ 及 $R_{\#}$ 分别为面积 $A_{\#}$ 的热阻及面积为 $A_{\#}$ 的螺钉热阻。

$$R_{\#} = \frac{\tilde{R}_{\#}}{A_{\#}}, \quad R_{\#} = \frac{\tilde{R}_{\#}}{A_{\#}}$$

令面积 $A_{\#}$ 及 $A_{\#}$ 并联以后的总热阻为 R ，则

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{R} \quad (2)$$

比较 Φ 的两个表示式 (1) 及 (2)，即可得

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\#}} + \frac{1}{R_{\#}} \quad (3)$$

由此可见，并联热阻的倒数等于所有各并联热阻倒数的总和，即

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (4)$$

或用热阻的倒数热导来表示

$$\Lambda = \frac{1}{R}$$

则式(4)可写成

$$\Lambda = \sum_i \Lambda_i \quad (5)$$

这就是说, 并联热导等于所有各组成热导的总和。因此

$$\Lambda = \Lambda_{\text{串}} + \Lambda_{\text{螺}}$$

由于

$$\Lambda = A k'$$

$$\Lambda_{\text{串}} = A_{\text{串}} k'_{\text{串}}$$

$$\Lambda_{\text{螺}} = A_{\text{螺}} k'_{\text{螺}}$$

通过简单计算, 可得

$$k' = \frac{A_{\text{串}} k'_{\text{串}}}{A} + \frac{A_{\text{螺}} k'_{\text{螺}}}{A} = \frac{A_{\text{串}}}{A} \frac{1}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} + \frac{A_{\text{螺}}}{A} \frac{\lambda_{\text{螺}}}{\delta_1 + \delta_2} \quad (3-10)$$

式中 A ——一个计算单元的总面积, $A = A_{\text{串}} + A_{\text{螺}}$;

$A_{\text{螺}}$ ——计算单元中螺钉的截面积;

$A_{\text{串}}$ ——计算单元的面积减去 $A_{\text{螺}}$ 。

以图 3-4 为例, 一个计算单元的范围为 100 毫米, 其中有两个螺钉。

若铸件的 $\lambda = 50 \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开})$, 合金淬火钢板的 $\lambda = 18.6 \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开})$, 螺钉(软钢)的 $\lambda = 61.7 \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开})$ 。这样, 计算得:

$$A = 0.1 \times 0.15 = 0.015 \text{米}^2 = 150 \times 10^{-4} \text{米}^2$$

$$A_{\text{螺}} = 2 \left[\pi \left(\frac{0.01}{2} \right)^2 \right] = \frac{\pi}{2} \times 10^{-4} \text{米}^2 = 1.57 \times 10^{-4} \text{米}^2$$

$$A_{\text{串}} = 150 \times 10^{-4} - 1.57 \times 10^{-4} = 148.43 \times 10^{-4} \text{米}^2$$

已知, $\delta_1 = 0.01 \text{米}$, $\delta_2 = 0.05 \text{米}$, $\delta_1 + \delta_2 = 0.06 \text{米}$

$$\lambda_1 = 18.6 \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开}) \quad (\text{合金淬火钢板})$$

$$\lambda_2 = 50 \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开}) \quad (\text{铸件})$$

$$\lambda_{\text{螺}} = 61.7 \text{瓦}/(\text{米}\cdot\text{开}) \quad (\text{软钢})$$

由式(3-10), 可得

$$\begin{aligned} k' &= \frac{148.43}{150} \times \frac{1}{\frac{0.01}{18.6} + \frac{0.05}{50}} + \frac{1.57}{150} \times \frac{61.7}{0.06} \\ &= \frac{148.43}{150(0.00154)} + \frac{1.57 \times 61.7}{9} = 643.6 + 10.76 = 654.4 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开}) \end{aligned}$$

如将螺钉部分的热阻略去不计, 则其比面热导为

$$k' = \frac{1}{\frac{0.01}{18.6} + \frac{0.05}{50}} = 650.4 \approx 650 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

此值比上述数值略小一些(约比它小 0.6%)。因此, 对于这些 λ 值相差不大的并联组合壁, 用串联组合壁来代替时不致产生很大的误差。但当两种材料的 λ 值相差甚大时, 如混凝土与

螺钉，则不能用串联组合壁来代替，因为绝缘材料比面热阻有时比它大3~4倍。

如果考虑钢条与铸件之间具有接触表面换热系数（即接触比面热阻的倒数），其数值取4000瓦/(米²·开)。对于磨削表面与刮削表面，其干接触面的换热系数为2100瓦/(米²·开)，而含油表面的换热系数为6000瓦/(米²·开)，这里取其近似平均值。因此，它的比面热导为

$$\begin{aligned} k' &= \frac{148.43}{150} \times \frac{1}{\frac{1}{4000} + \frac{0.01}{18.6} + \frac{0.05}{50}} + \frac{1.57}{150} \times \frac{61.7}{0.06} \\ &= \frac{148.43}{150 \times (0.00154 + 0.00025)} + 10.76 \\ &= 553.4 + 10.76 = 564.2 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)} \end{aligned}$$

它为前二者的86.4%左右，由于钢条采用螺钉压紧，接合面间存有一定的压力，接合表面的换热系数要比4000瓦/(米²·开)来得大，若为10000瓦/(米²·开)，则 $k' \approx 614$ 瓦/(米²·开)，为前二者的94%左右。

由于螺钉的压紧程度，难于准确确定，在考虑具有接触热阻的情况下，可以取串联壁的计算值的90%，作为整个壁的近似的热导，即

$$k_{\text{壁}}' = 651 \times 0.9 = 585 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$$

例题5 若导轨之长为6米，工作台在导轨上往复运动时，两摩擦运动件之间产生热量，使导轨顶面A比导轨背面介质B的温度高5°C（如图3-4a所示）。导轨背面的放热系数为5瓦/(米²·开)，试求导轨的散热量 Φ 。

解

$$A = 6 \times 0.150 = 0.9 \text{ 米}^2$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s} + \frac{1}{k_{\text{壁}}}} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{585}} = \frac{1}{0.2 + 0.0017} = 4.96 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$$

$$\Phi = k A \Delta t = 4.96 \times 0.9 \times 5 = 22.3 \text{ 瓦}$$

$$\text{铸件背面的温度 } t = 5 - q/k_{\text{壁}} = 5 - \frac{22.3}{0.9 \times 585} = 4.96^\circ\text{C}$$

可以看出，导轨顶面与铸件背面的温差微乎其微，仅为0.04°C而已。因此导轨附近的床身顶部的温度可以近似地取为钢条顶面的温度（或温升），以简化传热的计算，这个方法也可以推广到其它机床构件的传热计算中去。

§ 3-2 圆筒壁的稳定导热和传热

在机械系统的传热问题中，属于圆筒稳定导热的类型很多，如散热管道、锅炉管、冲天炉、空心丝杠、空心深孔钻、换热器等。这里分成散热管道与吸热管道两大类。对于散热管道，管内介质温度高于管外温度，如蒸气管道、冲天炉，热量从管内通过管壁传到管外；而吸热管道，则管外温度高于管内的吸热介质，如锅炉管及导入冷却液的空心丝杠等，热量从管外流向管内。不论是散热管道还是吸热管道，均为圆筒壁导热问题。

一、圆筒壁导热的计算

(一) 单层圆筒壁

前面已经讲过, 圆柱形座标的热传导方程为〔式 (2-94)〕

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_r'''}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

对于稳定的、方位对称的、长度较长的、无内热源的单层圆筒导热, 以径向导热为主, 其长度方向的导热可以略而不计, 故其方程为〔式 (2-96)〕

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0$$

此为一个常微分方程。

令

$$u = \frac{dt}{dr}$$

则

$$\frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{du}{dr}$$

而有

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} u = 0$$

用分离变量法, 得

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}$$

积分以后, 得

$$\ln u = -\ln r + \ln C_1 = \ln \frac{C_1}{r}$$

所以

$$u = \frac{C_1}{r}$$

而有

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

即

$$dt = \frac{C_1 dr}{r}$$

积分以后, $t = C_1 \ln r + C_2$

C_1 及 C_2 是两个积分常数, 可用两个边界条件来确定 (图 3-5)。

$$(1) \quad t|_{r=r_1} = t_1, \quad \text{故 } t_1 = C_1 \ln r_1 + C_2$$

$$(2) \quad t|_{r=r_2} = t_2, \quad \text{故 } t_2 = C_1 \ln r_2 + C_2$$

所以

$$C_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}, \quad C_2 = t_1 - C_1 \ln r_1$$

代入方程的解, 得

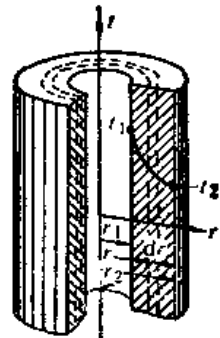


图3-5 单层圆筒壁

$$\begin{aligned}
 t &= C_1 \ln r + C_2 = C_1 \ln r + t_1 - C_1 \ln r_1 = t_1 + C_1 \ln \frac{r}{r_1} \\
 &= t_1 + \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}
 \end{aligned} \tag{3-11}$$

即

$$\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (r_1 \leq r \leq r_2) \tag{3-12}$$

从式 (3-11) 的温度分布 t ，便能算出单位时间内的热流量 Φ 。

$$\Phi = -\lambda A_r \frac{dt}{dr}$$

由式 (3-11) 求导，得

$$\frac{dt}{dr} = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r}$$

故

$$\Phi = -\lambda (2\pi r l) \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r} = \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (2\pi l \lambda) = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) \tag{3-13}$$

式中 l ——圆筒的长度。

若 t_2 大于 t_1 ，则 $t_1 - t_2$ 为负值，这表明热流方向由外筒壁朝向内筒壁。

由于圆筒的内、外壁面积不等，因此计算比面热导时，就有内、外壁面之别。若以筒的外表面为计算面积 ($A_{\text{外}} = 2\pi r_2 l$)， $k'_{\text{外}}$ 为外表面的比面热导，则

$$\Phi = k'_{\text{外}} A_{\text{外}} (t_1 - t_2) = k'_{\text{外}} (2\pi r_2 l) (t_1 - t_2) = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2)$$

所以

$$k'_{\text{外}} = \frac{\lambda}{r_2 \ln \frac{d_2}{d_1}} \tag{3-14}$$

依同理，

$$k'_{\text{内}} = \frac{\lambda}{r_1 \ln \frac{d_2}{d_1}} \tag{3-15}$$

式中 $k'_{\text{内}}$ 为内表面的比面热导。

所以

$$\frac{k'_{\text{外}}}{k'_{\text{内}}} = \frac{r_1}{r_2} \left(\text{或 } k'_{\text{外}} = \frac{k'_{\text{内}} r_{\text{内}}}{r_{\text{外}}} \right) \tag{3-16}$$

此为不同计算表面的比面热导之间的换算关系。

以外表面计算的比热流量为

$$q_{\text{外}} = \frac{\lambda}{r_2 \ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) = k'_{\text{外}} (t_1 - t_2) \quad (3-17)$$

壁内外有冷热介质时，其传热系数 k 为：

$$\text{以内表面计：} \quad k_{\text{内}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{1}{k'_{\text{内}}} + \frac{r_1}{r_2 \alpha_{s2}}} = \frac{1}{\alpha_{s1} + r_1 \left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{r_2 \alpha_{s2}} \right)} \quad (3-18)$$

$$\text{以外表面计：} \quad k_{\text{外}} = \frac{1}{\frac{r_2}{\alpha_{s1} r_1} + \frac{1}{k'_{\text{外}}} + \frac{1}{\alpha_{s2}}} = \frac{1}{\alpha_{s2} + r_2 \left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{r_1 \alpha_{s1}} \right)} \quad (3-19)$$

(二) 多层圆筒壁

一般低温吸热、散热管道的导热虽为单层圆筒壁的导热，但在工程上的换热管道，多为多层的圆筒壁，如附有烟垢、水垢层的锅炉蒸发管，具有保温层的冲天炉，以及保温蒸汽管道，其筒壁均由几种不同材料所构成（图 3-6）。它的导热公式可以从单层圆筒壁的导热公式及热阻原理推导出来，假定不同壁层间的接触热阻可以忽略不计。各层的内外直径及导热系数如图 3-6 所示，并且已知 t_1 和 t_4 （最外和最内层壁面的温度），则

$$q_2 = \frac{\lambda_1}{r_2 \ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad q_4 &= q_2 \frac{r_2}{r_4} = \frac{r_2}{r_4} \left(\frac{\lambda_1}{r_2 \ln \frac{d_2}{d_1}} \right) (t_1 - t_2) = \frac{\lambda_1}{r_4 \ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) \\ &= \frac{t_1 - t_2}{r_4 \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} \right)} \end{aligned}$$

同理

$$q_3 = \frac{\lambda_2}{r_3 \ln \frac{d_3}{d_2}} (t_2 - t_3)$$

而

$$q_4 = q_3 \frac{r_3}{r_4} = \frac{\lambda_2}{r_4 \ln \frac{d_3}{d_2}} (t_2 - t_3) = \frac{t_2 - t_3}{r_4 \left(\frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} \right)}$$

又

$$q_4 = \frac{\lambda_3}{r_4 \ln \frac{d_4}{d_3}} (t_3 - t_4) = \frac{t_3 - t_4}{r_4 \left(\frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right)}$$

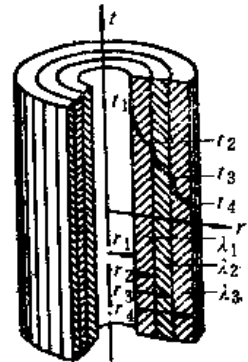


图3-6 多层圆筒壁

但

$$q = k' (t_1 - t_4) = q_4$$

式中 k' —— 多层圆筒壁的总比面热导。

联合 q_4 的计算式, 可得

$$q = q_4 = k' (t_1 - t_4) = \frac{t_1 - t_4}{r_4 \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right)} \quad (3-20)$$

所以 $k' = \frac{1}{r_4 \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right)}$ (取 r_4 处为计算面积时)

对于 n 层多层圆筒壁, 其比热流量 (以最外层表面计算) 为

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{r_{n+1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right)} \quad \text{瓦/米}^2 \quad (3-21)$$

而 $\Phi = q (2\pi r_{n+1} l) = \frac{2\pi l (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right)} \quad \text{瓦} \quad (3-22)$

当多层壁的内外表面有冷、热介质时, 可以同样方法推导出与式 (3-18)、(3-19) 相同的公式。

若从式 (3-20) 算出 q , 则圆筒中间壁的温度 t_2 、 t_3 各为:

$$\left. \begin{aligned} t_2 &= t_1 - \frac{q}{\lambda_1} r_4 \ln \frac{d_2}{d_1} \\ t_3 &= t_4 + \frac{q}{\lambda_3} r_4 \ln \frac{d_4}{d_3} \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

试将式 (3-13) 与式 (3-3) 对比, 若令 $\delta = r_2 - r_1$, 便可以在下列条件下用平壁计算公式代替圆筒壁计算公式,

$$\Phi = A_m \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) = A_2 \frac{\lambda}{r_2 \ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) \quad (3-24)$$

所以 $A_m = \frac{2\pi r_2 - 2\pi r_1}{\ln(2\pi r_2 / 2\pi r_1)} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2 / A_1)}$

式 (3-24) 与平壁导热公式之差别在于面积 A_m 为对数平均值。对于一般薄壁圆筒 (即比值 $\frac{r_2}{r_1} = \frac{A_2}{A_1}$ 较小时), 为简化计算, 可采用算术平均值, 而有 $A_m = \frac{A_2 + A_1}{2}$, 即 $r_m =$

$\frac{r_2 + r_1}{2}$, $d_m = r_2 + r_1$ 。工程上所用管子多数属于 $r_2 / r_1 \ll 2$ 。其误差小于 1%, 此时式 (3-24) 为

$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta} \pi (r_1 + r_2) l (t_1 - t_2) \quad (3-25)$$

同理，可用与式 (3-25) 相应的平壁公式来计算多层圆筒壁的热流量。

由于

$$\Phi = \frac{d_{mi} \pi l (t_i - t_{i+1})}{\frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{\pi l (t_i - t_{i+1})}{\frac{\delta_i}{\lambda_i d_{mi}}}$$

故

$$\Phi = \frac{\pi l (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_i}{\lambda_i} \frac{1}{d_{mi}} \right)} \quad (3-26)$$

一般讲来，当 $\frac{r_{n+1}}{r_1} < 2$ 时，多层圆筒壁的热流量可用下式计算：

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\pi (r_1 + r_{n+1}) l (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_i}{\lambda_i} \right)} = \frac{\pi (r_1 + r_{n+1}) l (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k'_i} \right)} \\ &= \frac{\pi (r_1 + r_{n+1}) l (t_1 - t_{n+1})}{1/k'} \end{aligned} \quad (3-27)$$

式 (3-27) 可与式 (3-6) 相对应，其中 $\pi (r_1 + r_{n+1}) l$ 代表筒壁的平均截面面积。

二、圆筒壁传热的应用举例

(一) 液压系统的冷却

在液压系统中，油箱的油温一般应控制在 $30 \sim 50^\circ\text{C}$ 的范围内，最低不应低于 15°C （油温过低时油泵吸油困难）最高不应高于 60°C （当周围气温高于 38°C 时油温允许达 65°C ，但此时应采用粘度较大的油），油温变化将引起油的粘度的改变，从而引起机床液压进给量的改变（例如，机床液动工作台的速度，就受着油的粘度变化的影响）。

对于一般机床来讲，如油箱设计得当，靠油箱的自然散热，可以满足上述油温控制的要求。但对于精密机床来讲，液压部件的油温及润滑油的油温应严格控制，有时甚至需要恒温，以期保持机床的工作精度。在此情况下，就需对油箱的油温进行控制了。除用风扇吹风或用冷冻机吹冷风之外，也可以在油箱内安排蛇形管冷却器或管式冷却器，以冷水将多余的热量带走。后面的两种冷却器，就联系到圆管导热的应用。根据圆管导热原理和对流散热便可算出冷却器的散热能力。

例题 6 图 3-7 为油箱内一段蛇形管的示意图。若管的内外径为 $d_1 \times d_2 = \phi 19 \times \phi 22$ （紫铜管），蛇形管弯曲半径 $R = 200$ 毫米，管长 $l = 3$ 米，进出口水温为 $t'_i = 20^\circ\text{C}$ ， $t''_i = 22^\circ\text{C}$ 。油温 $t_{油} = 30^\circ\text{C}$ ，油为变压器油，试求系统的散热量及水的用量。

解

(1) 求出管壁与水之间的放热系数 α_*

$$t_* = \frac{t'_* + t''_*}{2} = \frac{20 + 22}{2} = 21^\circ\text{C}$$

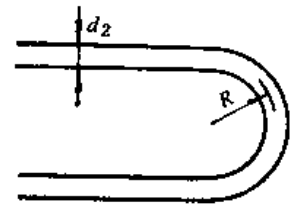


图3-7 蛇形管的一部分

假定管子内壁温度 $t_{w1} = 22.5^\circ\text{C}$, 水的流速 = 0.1 米/秒, 由附表 6 插值查出: 当 $t_w = 21^\circ\text{C}$,

$$\lambda = 0.515 + 0.002 = 0.517 \text{ 千卡}/(\text{米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度}) = 0.601 \text{ 瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$v = (1.006 - 0.022) \times 10^{-6} = 0.984 \times 10^{-6} \text{ 米}^2/\text{秒}$$

$$\beta = (1.82 + 0.14) \times 10^{-4} = 1.96 \times 10^{-4}$$

$$\text{Pr} = 7.02 - 0.15 = 6.87$$

当

$$t = 22.5, \text{Pr} = 6.67$$

$$\Delta t = 22.5 - 21 = 1.5^\circ\text{C}$$

$$\text{Re}_w = \frac{vd}{\nu} = \frac{0.1 \times 0.019}{0.984 \times 10^{-6}} = 1930 < 2320$$

故为层流, 应考虑 Gr 准则,

$$\text{Gr}_w = \frac{\beta g \Delta t d^3}{\nu^2} = \frac{1.96 \times 10^{-4} \times 9.81 \times 1.5 (1.9 \times 10^{-2})^3}{(0.984 \times 10^{-6})^2} = 2.043 \times 10^4$$

$$\text{Nu}_w = 0.15 \text{Re}_w^{0.33} \text{Pr}_w^{0.43} \text{Gr}_w^{0.1} \left(\frac{\text{Pr}_w}{\text{Pr}_w} \right)^{0.25}$$

$$= 0.15 (1940)^{0.33} (6.87)^{0.43} (2.043 \times 10^4)^{0.1} \left(\frac{6.87}{6.65} \right)^{0.25}$$

$$= 11.32$$

最后可得

$$\alpha_w = \frac{\text{Nu}_w \lambda_w}{d} = \frac{11.32 \times 0.601}{0.019} = 358.2 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

由于水在管中的流动为层流, 毋需考虑弯管的校正系数。

(2) 求油的放热系数 $\alpha_{油}$

$$t_m = \frac{1}{2} (30 + 22.5) = 26.25^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 30 - 22.5 = 7.5^\circ\text{C}$$

由附表 5 插值查出: 当 $t_{油} = 26.25^\circ\text{C}$

$$\lambda_{油} = 0.0957 - 0.0004 = 0.0953 \text{ 千卡}/(\text{米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度}) = 0.1108 \text{ 瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$v_{油} = (22.5 - 3.8) \times 10^{-6} = 18.7 \times 10^{-6} \text{ 米}^2/\text{秒}$$

$$\text{Pr}_{油} = 298 - 47.2 = 251$$

$$\beta_{油} = 0.5 \times 10^{-3}$$

$$\text{Gr}_{油} = \frac{\beta g \Delta t d^3}{\nu^2} = \frac{0.5 \times 10^{-3} \times 9.81 \times (2.2 \times 10^{-2})^3 \times 7.5}{(18.7 \times 10^{-6})^2} = 1120$$

$$(\text{GrPr})_{油} = (1120 \times 251) = 2.81 \times 10^5 < 10^6$$

故为层流。

由式 (2-26), 得

$$\text{Nu}_{油} = 0.53 \times (2.81 \times 10^5)^{\frac{1}{4}} = 12.2$$

$$\alpha_{油} = \frac{\text{Nu}_{油} \lambda_{油}}{d} = \frac{12.2 \times 0.1108}{0.022} = 61.46 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

(3) 计算紫铜管的比面热导

$$\lambda_{铜} = 334 \text{ 千卡}/(\text{米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度}) = 388.4 \text{ 瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$k'_外 = \frac{\lambda}{r_2 \ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{388.4}{0.0111 \ln \frac{22}{19}} = 2.407 \times 10^5 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

以管子外表面计算的总传热系数

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{油}} + \frac{1}{k'_外} + \frac{r_2}{r_1 \alpha_{水}}} = \frac{1}{\frac{1}{61.46} + \frac{1}{2.407 \times 10^5} + \frac{22}{19 \times 358.2}}$$

$$= 51.28 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

所以

$$q = k(t_{油} - t_{水}) = 51.28 \times (30 - 21) = 461.5 \text{ 瓦}/\text{米}^2$$

$$\Phi = Aq = 2\pi r_2 l q = \pi(0.022) \times 3 \times 461.5 = 95.68 \text{ 瓦}$$

(4) 校验壁面温度

令

$$\Delta t_1 = t_{w1} - t_{水}, \quad \Delta t_w = t_{w2} - t_{w1}$$

$$\Delta t_2 = t_{油} - t_{w2}, \quad \Delta t = t_{油} - t_{水}$$

则

$$\frac{\Delta t}{\frac{r_2}{r_1 \alpha_{水}}} = \frac{\Delta t_w}{\frac{1}{k'_外}} = \frac{\Delta t_2}{\frac{1}{\alpha_{油}}} = \frac{\Delta t}{k}$$

即

$$\frac{\Delta t_1}{3.76 \times 10^{-3}} = \frac{\Delta t_w}{0.00483 \times 10^{-3}} = \frac{\Delta t_2}{18.92 \times 10^{-3}} = \frac{30 - 21}{22.685 \times 10^{-3}}$$

故

$$t_{w1} = t_{水} + \frac{9 \times 3.71 \times 10^{-3}}{22.685 \times 10^{-3}} = 21 + 1.492 = 22.492^\circ\text{C} \quad (\text{与假定的 } t_{w1} \text{ 基本相符})$$

$$t_{w2} = t_{油} - \frac{9 \times 18.92 \times 10^{-3}}{22.685 \times 10^{-3}} = 30 - 7.506 = 22.494^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_w = \frac{9 \times 0.00495 \times 10^{-3}}{22.904 \times 10^{-3}} = 0.002^\circ\text{C}$$

故

$$\bar{t}_w = 22.493^\circ\text{C}$$

(5) 求水的用量(即流量)

$$Q_{水} = Av = \pi \left(\frac{0.019}{2} \right)^2 \times 0.1 = 2.835 \times 10^{-5} \text{ 米}^3/\text{秒}$$

$$= 2.835 \times 10^{-2} \text{ 升}/\text{秒}$$

(6) 校核水带走的热流量 $\Phi_{水}$, 其计算公式为

$$\Phi_{水} = c\rho Q_{水} \Delta t_{水}$$

对于 $t_{水} = 21^\circ\text{C}$, $c = 0.999 \text{ 千卡}/(\text{公斤} \cdot \text{度}) = 4182.6 \text{ 焦}/(\text{千克} \cdot \text{开})$, $\rho = 997.9 \text{ 千克}/\text{米}^3$ 。

$$\Delta t_{水} = \text{水的平均温升} = \frac{-20 + 22}{2} = 1^\circ\text{C}$$

故

$$\Phi_{水} = c\rho Q_{水} \Delta t_{水} = 4182.6 \times 997.9 \times 2.835 \times 10^{-5} = 118.32 \text{ 瓦}$$

与前面的 $\Phi = 95.68 \text{ 瓦}$ 对比, $\Phi_{水}$ 大了一些, 比 Φ 大 24%。

这说明计算的放热系数比实际的放热系数小了一些。而且主要的影响因素是 $\alpha_{油}$ 小了。因此, 上述计算只能供参考, 须与实验配合修正。

在这里我们只介绍了一种简单的冷却装置并假定油箱内的油没有受迫流动。事实上油箱

的油也有受迫流动,而且为了提高冷却效果,冷却器内的冷、热流体的流动方式也有着不同的形式,放热量(换热量)的计算亦因之而不同。其计算方式在这里就不作详细介绍了,请参看有关资料的换热器计算部分〔1〕、〔6〕。

(二) 空心丝杠的温度校正

机床母丝杠的精度直接影响被加工丝杠的精度。因此母丝杠的精度一般总希望比被加工丝杠的要求精度高一些。在加工长度为2.5米以内的丝杠时,采用多道磨削工序并减小磨削量来减少其发热量,同时调整校正尺来保证其磨削精度。但在加工长度超过3米以上的丝杠时,仅用上述措施就难以达到所需的精度要求,丝杠的加工过程中有热胀现象。钢材的热胀系数约为 $1.1 \times 10^{-5} \text{开}^{-1}$,即当温度升高 1°C 时,一米长的丝杠就要伸长0.01毫米。在磨削过程中,因磨削热的作用致使被磨丝杠的温度比室温为高,而母丝杠因与其螺母的摩擦也略有温升,并且被磨丝杠与母丝杠的温升也不相同,这就使被磨丝杠在加工完成之后因冷却关系而与母丝杠的螺距不相一致了。为了使被磨丝杠与母丝杠在加工时具有相同的温度,有些工厂将母丝杠设计成空心的,中间通入经过控制的恒温油,根据被磨丝杠的温升改变油温以调整母丝杠的温度,以达到较快的校正螺距累积误差或区域误差。上海机床厂的S7450螺丝磨床母丝杠的温度精度可以调节到 $\pm 0.2^\circ\text{C}$ 。

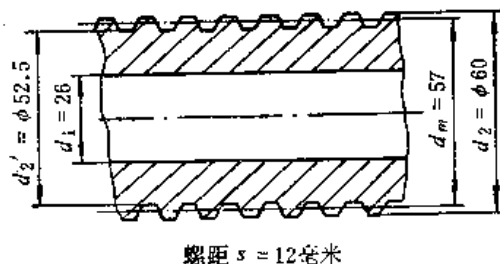


图3-8 空心丝杠

例题7 图3-8为一空心母丝杠的截面图。假定车间温度 $t_f = 20^\circ\text{C}$,中间通过的油的平均油温 $t_m = 25^\circ\text{C}$ 。油与管壁间的放热系数为 $\alpha_m = 580 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$,螺距 $s = 12$ 毫米,光滑圆管外表面对空气的自然放热系数为 $\alpha_n = 8.14 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$, $\lambda_m = 46.5 \text{瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$ 。试求母丝杠的平均温度。

解

丝杠外表面相当于带环肋的圆管壁,其与空气间的放热系数要比光滑表面大些,当以内光滑表面面积为计算基础时,其放热系数为〔1〕〔6〕

$$\alpha'_n = \frac{\alpha_n A_2}{A_1}$$

式中 A_1 、 A_2 分别为一个计算单位(在此为一个螺距 s)中内、外表面的面积,其值为

$$A_1 = 2\pi r_1 s = \pi d_1 s$$

$$A_2 \approx (2\pi r_m \delta) \times 2 + 2\pi r'_2 \frac{s}{2} + 2\pi r_2 \frac{s}{2}$$

$$\approx 2\pi d_m \delta + \frac{s}{2} (d'_2 + d_2) \pi \approx \pi d_m (2\delta + s)$$

$$s = 12, 2\delta = 60 - 52.5 = 7.5, d_1 = 26, d_m = 57$$

故
$$\alpha'_n = \frac{\alpha_n A_2}{A_1} = \frac{8.14 \times 57(7.5 + 12)\pi}{26\pi \times 12} = 29 \text{ 瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

可以看出,放热系数增大了 $\frac{A_2}{A_1}$ 倍,即扩大3.55倍, A_2/A_1 称为肋化系数。

根据式(3-9)的推理及式(3-15),以内表面计算的单位面积上的比热流量为

$$q = \frac{t_{油} - t_{气}}{\frac{1}{\alpha_{油}} + \frac{1}{k'_{杆}} + \frac{1}{\alpha_{气}}} = \frac{25 - 20}{\frac{1}{580} + \frac{0.013}{46.5} \ln\left(\frac{57}{26}\right) + \frac{1}{29}} = 137.6 \text{ W/米}^2$$

$$\Delta t_{油-油} = \frac{q}{\alpha_{油}} = \frac{137.6}{580} = 0.24^\circ\text{C}$$

故

$$t_{w1} = 25 - 0.24 = 24.76^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_{w2-气} = \frac{q}{\alpha'_{气}} = \frac{137.6}{29} = 4.73^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_w = \frac{137.6}{\frac{46.5}{0.013 \ln\left(\frac{57}{26}\right)}} = 0.03^\circ\text{C}$$

$$\left. \begin{aligned} t_{w2} &= t_{w1} - 0.03 = 24.76 - 0.03 = 24.73^\circ\text{C} \\ t_{w2} &= t_{气} + \Delta t_{w2-气} = 20 + 4.73 = 24.73^\circ\text{C} \end{aligned} \right\} \text{两者相符。}$$

或

故母丝杠的平均温度 $\approx \frac{t_{w1} + t_{w2}}{2} = 24.75^\circ\text{C}$ ，它比油温差 0.25°C 左右。

可以看出，要控制母丝杠的平均温度，只要控制进入的油的温度即可，它与油的温度仅相差 0.25°C 而已。这也说明严格控制油的温度的重要意义。

§ 3-3 等截面细长杆(轴)周界放热的一维导热

一、周界放热的一维导热方程及其通解

图 3-9 为一细长的杆，其周界与温度为 t_f 的介质相接触，杆与介质之间存在着表面放热，杆的长度为 L ，截面面积为 A ，周界的边长为 p 。假定杆的横截面内的温度梯度很小可以忽略不计，即在每一个截面内温度是均匀的。在这样的假设条件下，等截面细长杆的温度分布是一维的，即

$$t = t(x)$$

由于热交换是在周界与介质之间进行，杆的内部温度分布不满足式 (2-85) 的导热方程 $\left(\frac{d^2 t}{dx^2} = 0\right)$ ，

因此需要建立符合本情况的新的导热方程。这种导热方程称为变型的导热方程。

让我们来研究微元体 $A dx$ 中的热量平衡。从介质传入微元体的热流量 $\Phi_f = \alpha_s p dx (t_f - t)$ ，由于 $t_x < t_{x+dx}$ ，从微元体的右边传入的热流量 $\Phi_{x+dx} = -\lambda A \frac{d}{dx} \left(t - \frac{dt}{dx} dx \right)$ ，从微元体左边传出的热流量 $\Phi_x = -\lambda A \frac{dt}{dx}$ 。因而得出如下的热平衡方程：

$$\Phi_f + \Phi_{x+dx} - \Phi_x = 0$$

$$\text{即} \quad \alpha_s p dx (t_f - t) + \left[-\lambda A \frac{d}{dx} \left(t - \frac{dt}{dx} dx \right) \right] - \left[-\lambda A \frac{dt}{dx} \right] = 0 \quad (3-28)$$

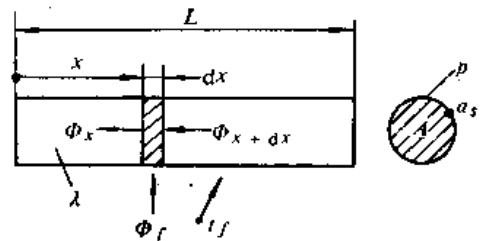


图3-9 等截面细长杆周边放热的一维导热

化简得 $t(x)$ 的微分方程为

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - N^2(t - t_f) = 0 \quad (3-29)$$

式中

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_s p}{\lambda A}} \quad (3-30)$$

而有

$$NL = \sqrt{\frac{\alpha_s p L}{\lambda A/L}} = \sqrt{\frac{\Lambda_s}{\Lambda_i}} \quad (3-31)$$

此时, NL 为一量纲的常数 (即无单位的常数), 其物理意义是周围介质与表面之间的热导 Λ_s 与细长杆内的热导 Λ_i 之比的平方根。

若令 $T = t - t_f$, 则式(3-29)可以写成

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - N^2 T = 0 \quad (3-32)$$

其通解为

$$T = (t - t_f) = C_1 e^{Nx} + C_2 e^{-Nx} \quad (3-33)$$

C_1 及 C_2 是由边界条件所确定的常数。

二、无限长的等截面细长杆

此时的边界条件为:

当 $x = 0, \quad t = t_0$

当 $x \rightarrow \infty, \quad \frac{dt}{dx} = 0$ 同时 $|t(x)| < M$

把第一个边界条件代入, 得

$$T_0 = t_0 - t_f = C_1 + C_2$$

把第二个边界条件代入, 得

$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=\infty} = C_1 N e^{\infty} - C_2 N e^{-\infty} = 0$$

但 $t(x)$ 有界, 故 $C_1 = 0$, 从而得出

$$T_0 = C_2$$

代入式(3-33), 得

$$\frac{T}{T_0} = \frac{t - t_f}{t_0 - t_f} = e^{-Nx} \quad (3-34)$$

三、有限长的等截面细长杆

(一) 车刀的温度分布

图3-10 a 为车刀在工作时的安装情况, 车刀与刀架之间夹有垫片 1~2 块, 用以调节刀尖对工作物轴心线的相对高度。它的传热特点是热量从刀尖进入和从刀体四周及端面传出。而其热源集中于刀尖顶面的某一点 (离刃口 0.6~0.8 毫米), 整个刀头受热不均。车刀的散热条件在悬伸部分与夹持部分也不相同, 悬伸部分暴露于周围空气中纯为对流与辐射放热, 而夹持部分则一面与刀架部分接触, 为结合面放热, 其它三面近似于向空气放热, 而且刀

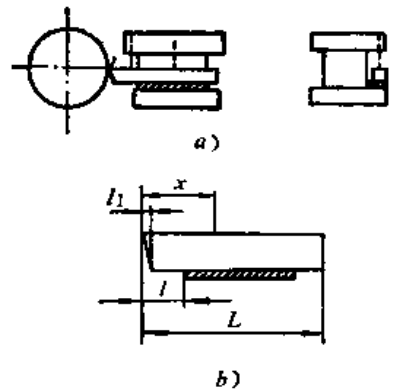


图3-10 车刀的工作及安装

口附近温度极不均匀,用硬质合金切削钢时 ($v = 250 \sim 350$ 米/分) 在离刃口 $0.6 \sim 0.8$ 毫米处的温度在 $850 \sim 1060^\circ\text{C}$ 之间,而离刃口 1.4 毫米的温度亦在 800°C 以上[8],但离开刃口再远一些,温度大大下降了,根据文献[9]的介绍,在各种切削时间内沿车刀长度各点上的温度是不同的,其温度分布曲线如图 3-11 所示。当切削时间为 30 分钟时,车刀温升接近于稳定状态。因此在确定式(3-33)的常数 C_1 、 C_2 时我们对车刀的不同部分采用不同的边界条件。

1. 车刀悬伸部分 ($x = 0 \sim l$ 之间) 温度场的确定

(1) 假定 $x = l_1$ 处刀头截面内的温度已经基本均匀,因而假定切削热传入刀具部分的全部热流量 Φ 通过这个截面传到刀具的以后部分,即

$$\text{当 } x = l_1 \text{ 时, } \quad \Phi = -\lambda A \frac{dt}{dx}$$

(2) 当 $x = l$ 时, $T = T_1$

由第一个边界条件, 得出

$$\begin{aligned} \Phi &= -\lambda A (C_1 N e^{Nl_1} - C_2 N e^{-Nl_1}) \\ &= \lambda AN (C_2 e^{-Nl_1} - C_1 e^{Nl_1}) \end{aligned} \quad (3-35)$$

故

$$C_2 e^{-Nl_1} - C_1 e^{Nl_1} = \frac{\Phi}{\lambda AN} = a \quad (3-36)$$

由第二个边界条件, 得出

$$C_2 e^{-Nl} + C_1 e^{Nl} = T_1 \quad (3-37)$$

式(3-36)、(3-37)联解, 得

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\begin{vmatrix} e^{-Nl_1} & a \\ e^{-Nl} & T_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-Nl_1} & -e^{Nl_1} \\ e^{-Nl} & e^{Nl} \end{vmatrix}} = \frac{T_1 e^{-Nl_1} - a e^{-Nl}}{e^{N(l-l_1)} + e^{-N(l-l_1)}} \\ C_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a & -e^{Nl_1} \\ T_1 & e^{Nl} \end{vmatrix}}{e^{N(l-l_1)} + e^{-N(l-l_1)}} = \frac{a e^{Nl} + T_1 e^{Nl_1}}{e^{N(l-l_1)} + e^{-N(l-l_1)}} \end{aligned}$$

代入式(3-33), 得

$$\begin{aligned} T_1 = T_{\text{基}} &= \frac{T_1 [e^{N(x-l_1)} + e^{-N(x-l_1)}] - a [e^{N(x-l)} - e^{-N(x-l)}]}{e^{N(l-l_1)} + e^{-N(l-l_1)}} \\ &= \frac{T_1 \text{ch}N(x-l_1) - a \text{sh}N(x-l)}{\text{ch}N(l-l_1)} \end{aligned} \quad (3-38)$$

2. 车刀夹持部分 ($x = l \sim L$) 温度场的确定

由于夹持部分的放热系数 α' 大于悬伸部分的 α , 因而夹持部分的 N' 大于悬伸部分的 N ,

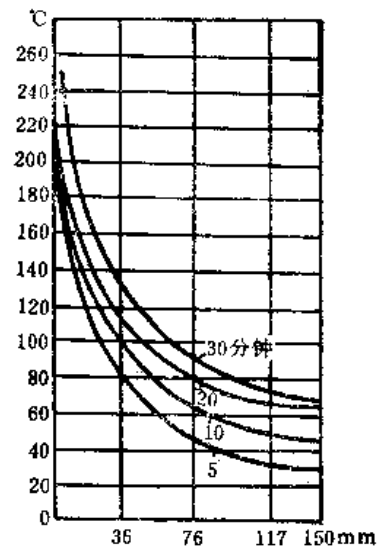


图 3-11

工件材料: 40 钢
刀具材料: T15K8
 $\gamma = -10^\circ$ $\lambda = 0^\circ$ $\alpha = 10^\circ$
 $\epsilon\rho = 35^\circ$ $v = 186$ 米/分
 $t = 2$ mm $s = 0.218$ mm/分

所以在 $x > l$ 的部分, 式(3-33)为

$$T = C_1 e^{N'x} + C_2 e^{-N'x}$$

假定它的边界条件为:

$$(1) \text{ 当 } x = l \text{ 时, } T = T_l$$

$$\text{故 } T_l = C_1 e^{N'l} + C_2 e^{-N'l} \quad (3-39)$$

$$(2)^* \text{ 当 } x = L + \Delta L \text{ 时, } -\frac{dT}{dx} = 0$$

$$\text{故 } -\frac{dT}{dx} \Big|_{L+\Delta L} = N' C_1 e^{N'(L+\Delta L)} - N' C_2 e^{-N'(L+\Delta L)} = 0$$

$$\text{即 } C_1 = C_2 e^{-2N'(L+\Delta L)} = C_2 e^{-2N'L'} \quad (3-40)$$

式中 $L' = L + \Delta L$

$$\Delta L = \frac{A}{p}$$

代入式(3-39), 得

$$T_l = C_2 e^{N'l - 2N'L'} + C_2 e^{-N'l}$$

故

$$C_2 = \frac{T_l e^{N'L'}}{e^{(N'L' - N'l)} + e^{-(N'L' - N'l)}}$$

$$C_1 = \frac{T_l e^{-N'L'}}{e^{(N'L' - N'l)} + e^{-(N'L' - N'l)}}$$

代入(3-33), 当 $x > l$ 时, 得

$$T_{II} = T_{*} = \frac{T_l [e^{N'(x-L')} + e^{-N'(x-L')}]}{e^{N'(L'-l)} + e^{-N'(L'-l)}} = T_l \frac{\text{ch}N'(x-L')}{\text{ch}N'(L'-l)} \quad (3-41)$$

3. 确定 T_l

因为传入车刀的热流量 Φ 等于从悬伸部分及夹持部分散失的热流量之和。

$$\text{所以 } \Phi = p(l-l_1)\alpha_s \bar{T}_I + p(L'-l)\alpha_s' \bar{T}_{II} \quad (3-42)$$

式中 \bar{T}_I 及 \bar{T}_{II} 分别为悬伸部分 I ($l_1 \leq x \leq l$) 与夹持部分 II ($l \leq x \leq L'$) 的平均温升。

也可以使悬伸部分 I 及夹持部分 II 在通过 $x = l$ 截面处的热流量相等, 即

$$\frac{dT_I}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{dT_{II}}{dx} \Big|_{x=l} \quad (3-43)$$

从数学概念讲, 式(3-43)表明曲线 T_I 与曲线 T_{II} 在 $x = l$ 处具有相同的斜率, 亦即在两曲线的公共点上只有一根切线, 这样的曲线称之为光滑连续。连续表示两曲线在接点处具有相同的温度, 光滑表示接点上只有一根切线。不论用式(3-42)还是式(3-43), 都能求得 T_l , 而且用这两个方程所算出的 T_l 都是相同的。因而可以根据具体情况任选一种, 以使运算方便一

* 这是一个假想的边界条件, 用以进行简化的计算^[4]。假设柄端延长一个距离 ΔL 以后, 新的端面便为一个绝热面, 此时由原端面散出的热流量 $\alpha_s A(t_L - t_f)$ 便全部由新增的长为 ΔL 的侧面所放出。这就是等效散热面积原则。根据这个原则, 得出

$$\alpha_s A(t_L - t_f) = \alpha_s p \Delta L (t_L - t_f)$$

故得

$$\Delta L = \frac{A}{p}$$

些。

这里采用平衡方程(3-42)

由式(3-38)

$$\int_{l_1}^l T_1 dx = \int_{l_1}^l \frac{T_1 \operatorname{ch} N(x-l_1) - a \operatorname{sh} N(x-l)}{\operatorname{ch} N(l-l_1)} dx = \bar{T}_1 \int_{l_1}^l dx = (l-l_1) \bar{T}_1$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \bar{T}_1 &= \frac{1}{(l-l_1) \operatorname{ch} N(l-l_1)} \int_{l_1}^l [T_1 \operatorname{ch} N(x-l_1) - a \operatorname{sh} N(x-l)] dx \\ &= \frac{1}{N(l-l_1) \operatorname{ch} N(l-l_1)} [T_1 \operatorname{sh} N(x-l_1) - a \operatorname{ch} N(x-l)]_{l_1}^l \\ &= \frac{1}{N(l-l_1) \operatorname{ch} N(l-l_1)} \{T_1 \operatorname{sh} N(l-l_1) - a[1 - \operatorname{ch} N(l-l_1)]\} \end{aligned} \quad (3-44)$$

由式(3-41)

$$\begin{aligned} \int_l^{L'} T_1 dx &= \int_l^{L'} \frac{T_1 \operatorname{ch} N'(L'-x)}{\operatorname{ch} N'(L'-l)} dx = \left[-\frac{T_1}{N'} \frac{\operatorname{sh} N'(L'-x)}{\operatorname{ch} N'(L'-l)} \right]_l^{L'} \\ &= \frac{T_1 \operatorname{sh} N'(L'-l)}{N' \operatorname{ch} N'(L'-l)} = (L'-l) \bar{T}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \bar{T}_1 &= \frac{T_1 \operatorname{sh} N'(L'-l)}{N'(L'-l) \operatorname{ch} N'(L'-l)} \\ &= \frac{T_1}{N'(L'-l)} \operatorname{th} N'(L'-l) \end{aligned} \quad (3-45)$$

把 \bar{T}_1 及 \bar{T}_1 代入式(3-42)得到

$$\Phi = \frac{p\alpha_s T_1 \operatorname{sh} N(l-l_1) - p\alpha_s [a - a \operatorname{ch} N(l-l_1)]}{N \operatorname{ch} N(l-l_1)} + \frac{p\alpha'_s T_1 \operatorname{sh} N'(L'-l)}{N' \operatorname{ch} N'(L'-l)}$$

$$\text{由于} \quad a = \frac{\Phi}{\lambda A N}, \quad N = \sqrt{\frac{\alpha_s p}{\lambda A}}, \quad N' = \sqrt{\frac{\alpha'_s p}{\lambda A}}$$

$$\text{所以} \quad p\alpha_s = \lambda A N^2, \quad p\alpha'_s = \lambda A (N')^2$$

化简即得

$$T_1 = \frac{\Phi / \operatorname{ch} N(l-l_1)}{\lambda A [N \operatorname{th} N(l-l_1) + N' \operatorname{th} N'(L'-l)]} \quad (3-46)$$

4. 车刀在热稳定后热伸长量的估算

为了要求得刀具在切削过程中热稳定后的伸长量, 我们把 \bar{T}_1 作为刀具悬伸部分的实际平均温度, 于是这部分的热伸长量为

$$\delta_1 = \alpha l \bar{T}_1 \quad (3-47)$$

例题 9 假定刀杆截面为 20×30 毫米², 刀头为硬质合金, 加工钢 40 ($\sigma = 63$ 公斤力/毫米², HB = 180), 切速 $v = 186$ 米/分, 切深 $t = 2$ 毫米, 进给量 $s = 0.218$ 毫米/转, 刀杆长度为 150 毫米, 悬伸长度为 36 毫米, 试求刀杆在稳定传热下的温度分布。

解

(1) 确定 α_s 及 α'_s , N 及 N'

刀具悬伸部分的放热系数受辐射的影响比对流大, 取 $\alpha_s = 17.4$ 瓦/(米²·开)。

刀具夹持部分的放热主要受与刀架结合处的接触放热的影响。根据附表 4，一对干的磨过的铸铁表面之间的 $\alpha_{\text{接}} = 1740 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$ ，当车刀与刀架间具有一块垫片时，它们之间有两对结合表面；若有两块垫片时，则有 3 对结合表面，因而它们之间的总的接触放热系数将分别为一对结合面的 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 。而刀体、垫片及刀架表面均有氧化层，每一对结合面的 $\alpha_{\text{接}}$ 将小于 $1740 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$ 。若取 $\alpha_{\text{接}} = 870 \sim 1160 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$ ，则总的接触放热系数将为 $290 \sim 580 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$ ，试取 $430 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$ 。而其不与刀架接触部分的放热系数要比悬伸部分为小（因其温度低于悬伸部分，辐射放热少了），可取为 $11.6 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$ ，因此夹持部分的放热系数可用下式估算：

$$\alpha'_s = \frac{1}{4}(3 \times 11.6 + 430) = 116.2 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

钢的导热系数 λ 取为 $40 \text{千卡}/(\text{米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度}) = 46.4 \text{瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$

$L = 150$ 毫米， $l = 36$ 毫米， $l_1 = 6$ 毫米，

$$\Delta L = \frac{A}{p} = \frac{0.02 \times 0.03}{2(0.02 + 0.03)} = 0.006 \text{米}$$

故得

$$\alpha_s = 15 \text{千卡}/(\text{米}^2 \cdot \text{小时} \cdot \text{度}) = 17.4 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

$$\alpha'_s = 100 \text{千卡}/(\text{米}^2 \cdot \text{小时} \cdot \text{度}) = 116 \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

$$\lambda = 40 \text{千卡}/(\text{米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度}) = 46.4 \text{瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_s p}{\lambda A}} = \sqrt{\frac{17.4 \times 2(0.02 + 0.03)}{46.4 \times 0.02 \times 0.03}} = 7.906$$

$$N' = \sqrt{\frac{\alpha'_s p}{\lambda A}} = \sqrt{\frac{116 \times 2(0.02 + 0.03)}{46.4 \times 0.02 \times 0.03}} = 20.41$$

$$N(l - l_1) = 7.906 \times 0.030 = 0.23718$$

$$N'(L' - l) = 20.41 \times 0.12 = 2.4492$$

$$Nl = 7.906 \times 0.036 = 0.28462$$

$$Nl_1 = 7.906 \times 0.006 = 0.04744$$

$$N' \Delta L = 20.41 \times 0.006 = 0.12246$$

(2) 确定 ϕ 及 α

传入车刀的切削热可用下式计算（ K 为切削热传入车刀部分的分额）：

$$\phi = P_2 v K \text{瓦}$$

根据“组合机床设计参考图册”图 1-8，

$$P_2 = 120 \times 0.92 \text{公斤力} = 1082.7 \text{牛}$$

根据文献[9]，取 $K = 2.8\%$

故

$$\phi = \frac{1082.7 \times 186 \times 0.028}{60} = 93.98 \text{瓦}$$

$$\alpha = \frac{\phi}{\lambda AN} = \frac{93.98}{46.4 \times 0.02 \times 0.03 \times 7.906} = 426.97^\circ\text{C}$$

(3) 确定 T_1

$$T_1 = \frac{\phi}{\lambda A \operatorname{ch} N(l-l_1)} \cdot \frac{1}{N \operatorname{th} N(l-l_1) + N' \operatorname{th} N'(L'-l)}$$

$$= \frac{93.98}{46.4 \times 0.0006 \times 1.0284 [7.906 \operatorname{th}(0.23718) + 20.41 \operatorname{th}(2.4492)]}$$

$$= \frac{93.98}{46.4 \times 0.0006 \times 1.0284 \times 21.946} = 149.57^\circ\text{C}$$

故

$$\bar{T}_1 = \frac{T_1}{N(l-l_1)} \left\{ \operatorname{th} N(l-l_1) + \frac{a}{T_1} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch} N(l-l_1)} \right] \right\}$$

$$= \frac{149.57}{0.23718} \left\{ 0.2325 + \frac{426.97}{149.57} \left[1 - \frac{1}{1.0284} \right] \right\} = 196.33^\circ\text{C}$$

$$\bar{T}_1' = \frac{T_1 \operatorname{th} N'(L'-l)}{N'(L'-l)} = \frac{149.57 \times 0.9852}{2.4492} = 60.17^\circ\text{C}$$

由于

$$T_1 = \frac{T_1 \operatorname{ch} N(x-l_1) - a \operatorname{sh} N(x-l)}{\operatorname{ch} N(l-l_1)}$$

$$T_1 = \frac{T_1 \operatorname{ch} N'(x-L')}{\operatorname{ch} N'(L'-l)}$$

故

$$T_0 = T_1 \Big|_{x=0} = \frac{T_1 \operatorname{ch} N(-l_1) - a \operatorname{sh} N(-l)}{\operatorname{ch} N(l-l_1)} = \frac{149.57 \times 1.001 + 426.97 \times 0.2884}{1.0284}$$

$$= 265.32^\circ\text{C}$$

$$T_{11} = T_1 \Big|_{x=0.006} = \frac{T_1 \operatorname{ch} N(0) - a \operatorname{sh} N(-0.03)}{\operatorname{ch} N(l-l_1)} = \frac{T_1}{1.0284} + a \operatorname{th} N(l-l_1)$$

$$= \frac{149.57}{1.0284} + 426.97 \times 0.2325 = 244.71^\circ\text{C}$$

$$T_L = T_1 \Big|_{x=L} = \frac{T_1 \operatorname{ch} N' \Delta L}{\operatorname{ch} N'(L'-l)} = \frac{149.57 \operatorname{ch}(0.12246)}{\operatorname{ch}(2.4492)}$$

$$= \frac{149.57 \times 1.007}{5.831} = 25.83^\circ\text{C}$$

现将车刀各点温度的计算结果列表于下:

x (毫米)	0	6	10	20	30	36	46	56	76	96	116	136	150
T_x ($^\circ\text{C}$)	265.32	244.71	231.30	200.07	172.50	149.57	121.17	100.40	68.15	47.43	34.68	27.83	25.83

将上列结果绘到图 3-12 上, 如图中实线所示。为了对比起见, 将图 3-11 的第一条曲线 (相当于车刀热稳定后的试验温升曲线) 复制到图 3-12 上, 如虚线所示。为此, 可得如下的结论:

① 表示刀具悬伸部分温升的两条曲线均近似于直线, 而计算曲线更接近于直线。在式 (3-40) 中,

$$\operatorname{ch} N(x-l_1) \approx 1, \operatorname{sh} N(x-l) \approx N(x-l)$$

故
$$T_1 \approx \frac{T_1 + aN(l-x)}{chN(l-l_1)} \approx (T_1 + aNl) - aNx$$

这是一个 T_1 与 x 成直线关系的方程, 所以悬伸部分有

$$\bar{T}_1 \approx \frac{T_0 + T_1}{2}$$

而且 \bar{T}_1 更接近于 $\frac{T_0 + T_1}{2}$, 此时 $\frac{T_0 + T_1}{2} = 197.14^\circ\text{C}$, $\bar{T}_1 = 196.33^\circ\text{C}$, 两者相差 0.81°C 。

② 刀具伸长部分的计算温升比实验温升约高 5%, 这可能与传入车刀的切削热的分额选取得高一些有关, 也可能与 α 取得低一些有关。

③ 夹持部分的温升曲线, 计算数值与实验数值均与距离 x 不成线性关系, 计算数值比实验数值来得低, x 越大, 差距越大, 这可能与 α' 选取得高一些有关, 也可能与垫片的状态 (片数、质量及长短) 有关。如果把垫片取得短些, 使刀杆尾端不与刀架接触, 而让刀杆传热分三段计算, 结果可能与实验结果相近, 这是需要重新计算并通过进一步的试验来进行验证的。

④ 计算车刀悬伸部分的热伸长 (对于刀杆, 其线胀系数 α 可取 $1.1 \times 10^{-5} \text{开}^{-1}$)

$$\delta_1 = \alpha l \bar{T}_1 = 1.1 \times 10^{-5} \times 36 \times 203.3 = 80.5 \text{ 微米}$$

在文献[9]中对于车刀悬伸部分的热伸长, 曾推荐如下的近似计算公式:

$$\xi = c \frac{L}{A} \sigma (ts)^{0.75} \sqrt{v}$$

其使用范围为 $t \leq 1$ 毫米, $s \leq 0.2$ 毫米/转, $v = 100 \sim 200$ 米/分, c 取 4.5。

我们的切深 t 为 2 毫米, 现在试取切深 $t = 1$ 毫米, 应用这个公式

$$\begin{aligned} \xi &= 4.5 \times \frac{36}{20 \times 30} \times 63 (1 \times 0.218)^{0.75} \sqrt{186} \\ &= \frac{4.5 \times 36 \times 63 \times 13.64}{600 \times 3.14} = 74 \text{ 微米} \end{aligned}$$

若取切深 $t = 2$ 毫米,

$$\xi = 74 \times 1.682 = 124 \text{ 微米}$$

由此可见, 用 $\alpha l \bar{T}_1$ 来计算车刀悬伸部分的热伸长, 还不失为一个可取的方法。

(二) 支承于两轴承之间的轴, 在截面 A 、 B 处的温度 t_1 、 t_2 (图 3-13) 为已知时的温度分布, 首先讨论线性齐次微分方程边界条件的叠加原则。

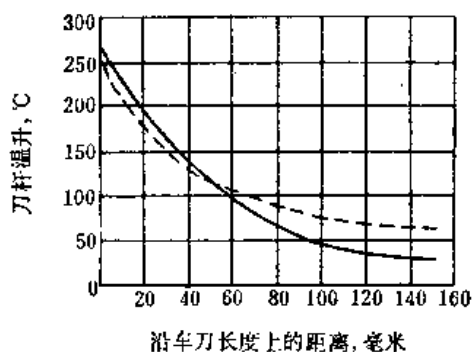


图 3-12

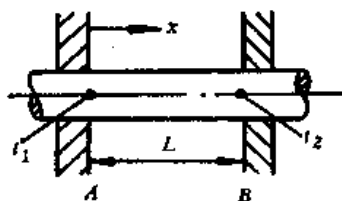


图 3-13

从式(3-33)出发,

$$T = (t - t_f) = C_1 e^{Nx} + C_2 e^{-Nx}$$

其边界条件为:

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } t = t_1$$

$$\text{当 } x = L \text{ 时, } t = t_2$$

代入上式, 得

$$T_1 = C_1 + C_2$$

$$T_2 = C_1 e^{NL} + C_2 e^{-NL}$$

故

$$C_1 = \frac{T_1 e^{-NL} - T_2}{e^{-NL} - e^{NL}}$$

$$C_2 = \frac{T_2 - T_1 e^{NL}}{e^{-NL} - e^{NL}}$$

代入上式, 得

$$T = \frac{T_2 - T_1 e^{-NL}}{e^{NL} - e^{-NL}} e^{Nx} + \frac{T_1 e^{NL} - T_2}{e^{NL} - e^{-NL}} e^{-Nx} = \frac{T_1 \text{sh}N(L-x) + T_2 \text{sh}Nx}{\text{sh}NL} \quad (3-48)$$

这个解答也可以拆成两个部分, 即

$$T_{\text{I}} = \frac{T_1}{e^{NL} - e^{-NL}} [e^{N(L-x)} - e^{-N(L-x)}] = \frac{T_1 \text{sh}N(L-x)}{\text{sh}NL} \quad (3-49)$$

$$T_{\text{II}} = \frac{T_2}{e^{NL} - e^{-NL}} [e^{Nx} - e^{-Nx}] = \frac{T_2 \text{sh}Nx}{\text{sh}NL} \quad (3-50)$$

T_{I} 是边界条件为:

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } t = t_1$$

$$\text{当 } x = L \text{ 时, } t = 0$$

的温度分布。

T_{II} 是边界条件为:

$$\text{当 } x = 0, t = 0$$

$$\text{当 } x = L, t = t_2$$

的温度分布。

这两个边界条件相加, 就是边界条件:

$$\text{当 } x = 0, t = t_1$$

$$\text{当 } x = L, t = t_2$$

由此得出: 在线性齐次微分方程中, 若边界条件可以拆成两组能够叠加的边界条件, 则把由这两组边界条件解出的两个解答叠加以后, 便可得原边界条件的解答, 即

$$T = T_{\text{I}} + T_{\text{II}} = \frac{T_1 \text{sh}N(L-x) + T_2 \text{sh}Nx}{\text{sh}NL}$$

这就是线性齐次微分方程的边界条件叠加原理。

(三) 悬伸轴的温度分布(图3-14)

若在截面 I 的温度为 t_1 , 试求其端面温度 t_2 。

采用与确定车刀夹持部分温度场相同的方法，亦即等效散热面积原则，取其边界条件为：

当 $x = 0$ 时，

$$t = t_f$$

当 $x = L'$ 时，

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dT'}{dx} = 0$$

代入式(3-33)，得出

$$\begin{aligned} T_1 &= C_1 + C_2 \\ C_1 N e^{NL'} - C_2 N e^{-NL'} &= 0 \end{aligned}$$

故

$$C_1 = \frac{T_1 e^{-NL'}}{e^{NL'} + e^{-NL'}}$$

$$C_2 = \frac{T_1 e^{NL'}}{e^{NL'} + e^{-NL'}}$$

再以 C_1 、 C_2 代入式(3-33)，得

$$T = t - t_f = \frac{T_1 [e^{N(x-L')} + e^{-N(x-L')}]}{e^{NL'} + e^{-NL'}} = \frac{T_1 \operatorname{ch} N(x-L')}{\operatorname{ch} NL'} \quad (3-51)$$

式中 $L' = L + \Delta L$ ， $\Delta L = \frac{A}{p} = \frac{r}{2}$

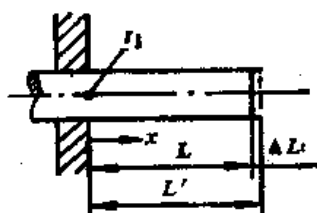


图 3-14

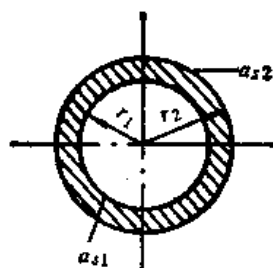


图 3-15

四、有限长的等截面空心轴的温度分布

如果图 3-13, 3-14 为空心轴，其截面如图 3-15 所示，其在微元体 $A dx$ 内的热平衡方程将与式(3-28)相似，而为

$$[(2\pi\alpha_{s1}r_1 + 2\pi\alpha_{s2}r_2)dx(t_f - t)] + \left[-\lambda A \frac{d}{dx} \left(t - \frac{dt}{dx} dx \right) \right] - \left[-\lambda A \frac{dt}{dx} \right] = 0 \quad (3-52)$$

式中 $A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ ，化简得出与式(3-29)及(3-32)相同的方程

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - N^2(t - t_f) = 0$$

及

$$\frac{d^2 T'}{dx^2} - N^2(T') = 0$$

但其中 N 与式(3-30)不同，应为

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_{s1}p_1 + \alpha_{s2}p_2}{\lambda A}} \quad (3-53)$$

因此，对于空心轴，式(3-48)及式(3-51)同样适用，只是 N 与 A 不同而已。

§ 3-4 端面放热的径向导热

一、通解

本系统的特征是其径向尺寸远远大于厚度尺寸,端面是其主要放热表面(与圆筒壁不同)。

假定圆环的内径和外径分别为 r_a 和 r_b (图 3-16) 其在圆环半径 r 处的截面厚度为 $2y_r$, 它随 r 而改变, 即 $y_r = f(r)$ 。其两端面有热量散失, 其放热系数为 α_s , 而且在半径为 r 的环形截面内的温度是均匀一致的, 因而温度仅随 r 而变, 即 $t = t(r)$ 。

让我们来考察微元体积 $\Delta V = 2\pi r dr 2y_r$ 内的热量平衡方程。由于固体的导热而从径向流入 ΔV 内的热流量为 $-\lambda(4\pi r y_r) \frac{dT}{dr}$, 因而传入 ΔV 的净热流量为:

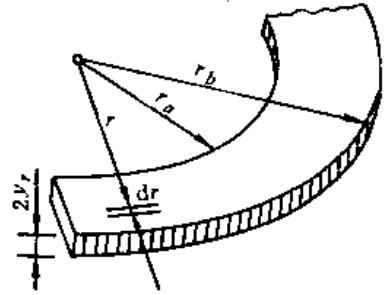


图 3-16

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(4\lambda\pi r y_r \frac{dT}{dr} \right) dr &= 4\pi\lambda \left[y_r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + r \frac{dT}{dr} \frac{dy_r}{dr} \right] dr \\ &= 4\pi\lambda \left[y_r \left(r \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} \right) + r \frac{dT}{dr} \frac{dy_r}{dr} \right] dr \end{aligned}$$

式中 $T = t - t_f$, t_f ——周围介质的温度。

由两端的放热而损失的热量为

$$2\alpha_s(2\pi r)T dr$$

在稳定而无内热源的情况下, 流入 ΔV 的净热量必须从二端面放热中散出去, 即等于损失的热量。

故得到 $T(r)$ 的常微分方程为

$$y_r \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{y_r}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{dy_r}{dr} \frac{dT}{dr} - \frac{\alpha_s}{\lambda} T = 0 \quad (3-54)$$

当截面为厚度不变的长方形时, 厚度 $= 2y_r = 2\delta$, $\frac{dy_r}{dr} = 0$, 则式(3-54)可简化为

$$r^2 \frac{d^2T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} - N^2 r^2 T = 0 \quad (3-55)$$

或

$$r^2 \frac{d^2T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} + N^2 (ir)^2 T = 0 \quad (3-56)$$

式中

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\lambda\delta}}$$

这是以纯虚数变量 iNr 代替实数变量 Nr 的贝塞尔零阶微分方程, 其解为虚数变量的零阶第一类及第二类贝塞尔函数, 即

$$J_0(iNr) \text{ 及 } Y_0(iNr)$$

通常以变形的贝塞尔函数 $I_0(Nr)$ 及 $K_0(Nr)$ 代替它们, 因而式(3-55)的通解为

$$T(r) = C_1 I_0(Nr) + C_2 K_0(Nr) \quad (3-57)$$

式中 C_1 及 C_2 为待定的常数，视边界条件而定，

$I_0(Nr)$ ——变形的零阶第一类贝塞尔函数；

$K_0(Nr)$ ——变形的零阶第二类贝塞尔函数。

$I_0(Nr)$ 、 $K_0(Nr)$ 与 $J_0(iNr)$ 、 $Y_0(iNr)$ 的关系为：

$$I_0(Nr) = J_0(iNr)$$

$$K_0(Nr) = i \frac{\pi}{2} [J_0(iNr) + iY_0(iNr)]$$

作为参考，现将 $J_0(x)$ 、 $Y_0(x)$ 、 $I_0(x)$ 及 $K_0(x)$ 的函数以及 $I_0(x)$ 、 $K_0(x)$ 的微分写在下面：

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots$$

$$Y_0(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \dots$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots$$

$$K_0(x) = - \left[\ln \left(\frac{1}{2} x \right) + C \right] I_0(x) + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \dots$$

$$\frac{dI_0(mx)}{dx} = mI_1(mx)$$

$$\frac{dK_0(mx)}{dx} = -mK_1(mx)$$

$$\frac{d^2I_0(mx)}{dx^2} = m^2 \left\{ I_0(mx) - \frac{I_1(mx)}{mx} \right\}$$

$$\frac{d^2K_0(mx)}{dx^2} = m^2 \left\{ K_0(mx) + \frac{K_1(mx)}{mx} \right\}$$

式中 $C = 0.5772\dots$ ——欧拉常数；

$I_1(x)$ 及 $K_1(x)$ 分别为变形的一阶第一类、第二类贝塞尔函数。关于贝塞尔函数的一般介绍，参看附录二。

二、空心圆板

(一) 外周边上有热量输入、两端面上有热量散失的空心圆板——磨削砂轮

假定砂轮的磨削热从外周边上以稳定的比热流量 q 传入，并假定砂轮内孔壁面的温升接近于零。于是式 (3-57) 的两个边界条件分别为：

$$\text{当 } r = r_a \text{ 时, } T = T_a = 0$$

$$\text{当 } r = r_b \text{ 时, } q_b = + \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_b}$$

将它们代入式 (3-57)，分别得出

$$C_1 I_0(Nr_a) + C_2 K_0(Nr_a) = 0 \quad (3-58)$$

$$q_b = \lambda C_1 N I_1(Nr_b) - \lambda C_2 N K_1(Nr_b) \quad (3-59)$$

联立求解, 得出

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{q_b K_0(Nr_a)}{\lambda N [K_0(Nr_a) I_1(Nr_b) + K_1(Nr_b) I_0(Nr_a)]} \\ C_2 &= \frac{-q_b I_0(Nr_a)}{\lambda N [K_0(Nr_a) I_1(Nr_b) + K_1(Nr_b) I_0(Nr_a)]} \end{aligned} \right\} \quad (3-60)$$

代入式(3-57), 得

$$T(r) = \frac{q_b [K_0(Nr_a) I_0(Nr) - I_0(Nr_a) K_0(Nr)]}{\lambda N [K_0(Nr_a) I_1(Nr_b) + K_1(Nr_b) I_0(Nr_a)]} \quad (3-61)$$

式中 $N = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\lambda \delta}}$

例题10 在平面磨削中, 砂轮外径 $2r_b = 172$ 毫米, 砂轮厚度 $2\delta = 16$ 毫米, 砂轮内径 $2r_a = 30$ 毫米, 砂轮每转的时间为 3×10^{-2} 秒, 砂轮的导热系数 $\lambda = 0.76$ 瓦/(米·开), 砂轮表面的放热系数 $\alpha_s = 77.3$ 瓦/(米²·开)。试求砂轮的径向温度场及砂轮外周边表面的温度。假定砂粒在磨削时其单位表面所吸收的热量为 1.73×10^{-3} 千卡/(毫米²·秒), 其延续磨削时间为 8.605×10^{-5} 秒[10]。

解

砂粒单位表面所吸的热量为

$$1.73 \times 10^{-3} \text{ 千卡/(毫米}^2 \cdot \text{秒)} = 1.73 \times 10^{-3} \times 3600 \times 10^5 \times 1.163 \text{ 瓦/米}^2$$

$$\text{同一砂粒在一秒内实际磨削时间} = \frac{t_{\text{磨}}}{t_{\text{转}}} = \frac{8.605 \times 10^{-5}}{3 \times 10^{-2}} = 2.87 \times 10^{-3} \text{ 秒/秒}$$

故在磨削过程中, 砂轮所吸收的比热流量为

$$q_b = 1.73 \times 10^{-3} \times 3600 \times 10^5 \times 1.163 \times 2.87 \times 10^{-3} = 2.08 \times 10^4 \text{ 瓦/米}^2$$

从式(3-61), 得

$$T(r) = \frac{q_b [K_0(Nr_a) I_0(Nr) - I_0(Nr_a) K_0(Nr)]}{\lambda N [K_0(Nr_a) I_1(Nr_b) + K_1(Nr_b) I_0(Nr_a)]}$$

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\lambda \delta}} = \sqrt{\frac{77.3}{0.76 \times 0.008}} = 112.76$$

$$Nr_a = 112.76 \times 0.015 = 1.69$$

查附表 10、9, 得

$$K_0(Nr_a) = K_0(1.69) = \frac{\pi}{2} \times 0.1065 = 0.167$$

$$I_0(Nr_a) = I_0(1.69) = 1.853$$

$$Nr_b = 112.76 \times 0.008 = 9.697$$

由于 $Nr_b > 6$, 超出附表 9、10 的范围, 改用渐近公式来计算 $I_0(Nr_b)$ 、 $I_1(Nr_b)$ 、 $K_0(Nr_b)$ 及 $K_1(Nr_b)$ 之值。

因为
$$I_n(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x, \quad K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

故
$$I_0(Nr_b) \approx I_1(Nr_b) = \sqrt{\frac{1}{2\pi(9.697)}} e^{9.697} = 2084.2$$

$$K_0(Nr_b) \approx K_1(Nr_b) = \sqrt{\frac{\pi}{2(9.697)}} e^{-9.697} = 0.0000248$$

代入式(3-61), 得

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{242.7}{348.06} [0.167 I_0(Nr) - 1.853 K_0(Nr)] \\ &= 0.1165 I_0(Nr) - 1.292 K_0(Nr) \end{aligned}$$

砂轮外周边表面温度为

$$T(r)|_{r=r_b} = 0.1165 I_0(Nr_b) - 1.292 K_0(Nr_b) = 242.8^\circ\text{C}$$

当 r 增大时, $K_0(Nr)$ 迅速下降, 因而砂轮径向温度场可近似地写成

$$T(r) \approx 0.116 I_0(Nr)$$

(二) 在内边界上有热量输入, 而在两端面及外边界上有热量散失的空心圆板——圆环散热片。

假定在厚度为 2δ 的圆环中, 沿内侧边界 ($r = r_0$) 输入比热流量 q_0 , 而在 $r = r_b$ 的外侧边界的热量散失相当于在外侧面上附加的宽度为 δ 的狭圆环的热量散失, 因而当 $r = r'_b = r_0 + \delta$ 时,

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r'_b} = 0$$

因此, 它的两个边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } r = r_0 \text{ 时,} \\ \text{当 } r = r'_b \text{ 时,} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} q_0 &= -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r=r_0} \\ \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r'_b} &= 0 \end{aligned}$$

将第二个边界条件代入式(3-57), 得

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r'_b} = C_1 N I_1(Nr'_b) - C_2 N K_1(Nr'_b) = 0$$

故

$$C_1 I_1(Nr'_b) = C_2 K_1(Nr'_b)$$

即

$$C_1 = C_2 \cdot \frac{K_1(Nr'_b)}{I_1(Nr'_b)}$$

令

$$C_2 = C I_1(Nr'_b)$$

则

$$C_1 = C K_1(Nr'_b)$$

式中 C ——新的积分常数。

代入式(3-57), 得

$$T = C [K_1(Nr'_b) I_0(Nr) + I_1(Nr'_b) K_0(Nr)] = CP(r) \quad (3-62)$$

式中

$$P(r) = K_1(Nr'_b) I_0(Nr) + I_1(Nr'_b) K_0(Nr) \quad (3-63)$$

$$\frac{dP}{dr} = \{K_1(Nr'_b) I_1(Nr) - I_1(Nr'_b) K_1(Nr)\} N = N^2 r R(r)$$

式中

$$R(r) = -\frac{1}{Nr} \{K_1(Nr'_b) I_1(Nr) - I_1(Nr'_b) K_1(Nr)\} \quad (3-64)$$

在 $r = r_0$ 边界上流入圆环的比热流量为

$$q_a = -\lambda(dT/dr)_{r=r_a} = -\lambda CN^2 r_a R(r_a)$$

由上式求得

$$C = -\frac{q_a}{\lambda N^2 r_a R(r_a)}$$

将C值代入(3-62), 则得

$$T = -\frac{q_a P(r)}{\lambda N^2 r_a R(r_a)} \quad (3-65)$$

此时内边界的温升为

$$T_a = -\frac{q_a P(r_a)}{\lambda N^2 r_a R(r_a)} \quad (3-66)$$

因此

$$\frac{T}{T_a} = \frac{P(r)}{P(r_a)} \quad (3-67)$$

例题11 风冷汽油机的汽缸外径为 120 毫米, 散热片厚度为 1.58 毫米, 高度为 20 毫米, 汽缸与散热片接触处的表面温度为 210°C , 室温为 25°C 。如果取散热片材料导热系数 $\lambda = 22.4$ 千卡/(米·小时·度), 表面放热系数 $\alpha_s = 488$ 千卡/(米²·小时·度), 试求每片散热片的散失热流量 Φ_s 。

解

已知条件 $\lambda = 22.4$ 千卡/(米·小时·度) = 26 瓦/(米·开)

$\alpha_s = 488$ 千卡/(米²·小时·度) = 567.5 瓦/(米²·开)

$r_a = 0.06$ 米

$r_b = 0.06 + 0.02 + 0.00079 = 0.0808$ 米

故

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\lambda \delta}} = \sqrt{\frac{567.5}{26 \times 0.79 \times 10^{-3}}} = 166.1$$

$$Nr_a = 165.8 \times 0.06 = 9.964$$

$$Nr'_b = 165.8 \times 0.0808 = 13.42$$

代入式(3-63), 得

$$P(r_a) = K_1(13.42)I_0(9.964) + I_1(13.42)K_0(9.964)$$

代入式(3-64), 得

$$R(r_a) = \frac{1}{9.964} \{K_1(13.42)I_1(9.964) - I_1(13.42)K_1(9.964)\}$$

当附表 9、10 中所列数值超出时, 利用下列渐近公式:

$$I_n(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x$$

$$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

得到

$$K_n(x)I_n(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sqrt{\frac{1}{2\pi y}} e^y = \frac{1}{2\sqrt{xy}} e^{y-x}$$

故

$$\begin{aligned}
 P(r_a) &= \frac{1}{2\sqrt{13.42 \times 9.964}} [e^{(9.964-13.42)} + e^{(13.42-9.964)}] \\
 &= \frac{1}{2 \times 11.564} [e^{-3.456} + e^{3.456}] = \frac{1}{23.128} [0.032 + 31.69] \\
 &= \frac{31.72}{23.128} = 1.372
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(r_a) &= \frac{1}{9.964} \times \frac{1}{2\sqrt{13.42 \times 9.964}} [e^{(9.964-13.42)} - e^{(13.42-9.964)}] \\
 &= \frac{1}{9.964} \times \frac{(-31.66)}{23.128} = \frac{1}{9.964} (-1.369) = -0.1374
 \end{aligned}$$

代入式(3-66), 得

$$T_a = -\frac{q_a P(r_a)}{\lambda N^2 r_a R(r_a)} = \frac{q_a (1.372)}{\lambda N^2 r_a (0.1374)} = \frac{9.987 q_a}{\lambda N^2 r_a}$$

而

$$T_a = 210^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C} = 185^\circ\text{C}$$

故

$$185 = \frac{q_a \times 9.987}{\lambda N^2 r_a} = \frac{\phi_a \times 9.987}{\lambda N^2 r_a (4\pi r_a \delta)} = \frac{9.987 \phi_a}{\lambda (N r_a)^2 (4\pi \delta)}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \phi_a &= \frac{185 \times (4\pi \delta) \lambda (N r_a)^2}{9.987} \\
 &= \frac{185 \times 4\pi \times 0.79 \times 10^{-3} \times 26 \times (9.964)^2}{9.987} = 475.6 \text{ 瓦}
 \end{aligned}$$

即每片散热片的散热能力为 475.6 瓦。

(三) 内、外周界的温度为 T_a 、 T_b 及两端面接触介质的温度 t_f 为已知的空心圆板。

此时的边界条件为:

$$(1) \text{ 当 } r = r_a, \quad T_a = t_a - t_f$$

$$(2) \text{ 当 } r = r_b, \quad T_b = t_b - t_f$$

代入式(3-57), 得

$$T(r_a) = T_a = C_1 I_0(N r_a) + C_2 K_0(N r_a)$$

$$T(r_b) = T_b = C_1 I_0(N r_b) + C_2 K_0(N r_b)$$

联合求解, 得

$$C_1 = \frac{T_a K_0(N r_b) - T_b K_0(N r_a)}{I_0(N r_a) K_0(N r_b) - I_0(N r_b) K_0(N r_a)}$$

$$C_2 = \frac{T_b I_0(N r_a) - T_a I_0(N r_b)}{I_0(N r_a) K_0(N r_b) - I_0(N r_b) K_0(N r_a)}$$

代入式(3-57), 得

$$T(r) = \frac{[T_a K_0(N r_b) - T_b K_0(N r_a)] I_0(N r) + [T_b I_0(N r_a) - T_a I_0(N r_b)] K_0(N r)}{I_0(N r_a) K_0(N r_b) - I_0(N r_b) K_0(N r_a)} \quad (3-68)$$

将式(3-57)对 r 求导, 得

$$\frac{dT}{dr} = C_1 N I_1(Nr) - C_2 N K_1(Nr)$$

通过外圆环面的热流量为

$$\begin{aligned} \Phi_b &= 4\pi r_b \delta \lambda \left(-\frac{dT}{dr} \right)_{r_b} \\ &= \frac{4\pi r_b \delta \lambda N \{ [T_a K_0(Nr_b) - T_b K_0(Nr_b)] I_1(Nr_b) - [T_b I_0(Nr_a) - T_a I_0(Nr_b)] K_1(Nr_b) \}}{I_0(Nr_a) K_0(Nr_b) - I_0(Nr_b) K_0(Nr_a)} \end{aligned} \quad (3-69)$$

式(3-66)~式(3-69)均可用作轴承的计算。

§ 3-5 不等截面细长轴的一维导热

在 § 3-3 中我们已经讨论了等截面细长轴的一维导热。在机械部件中 绝大部分的轴是不等截面的 (阶梯轴, 锥形轴或成形轴), 因此本节将讨论不等截面轴的一维导热。首先说明: 在等截面轴中的一些假定, 在这里仍旧成立, 即在轴的截面内温度是均匀的, 及周围介质温度沿长度方向是相同的。

一、阶梯轴的一维导热

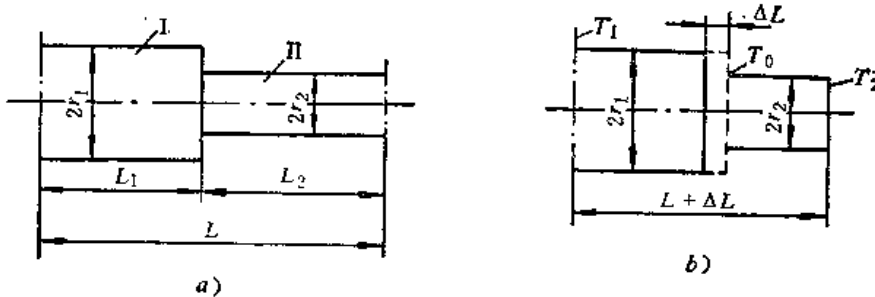


图3-17 阶梯轴

如图 3-17 a 所示, 在给定边界条件下的阶梯轴 (L 长度内), 我们可以分成两段来计算:

即在 $0 \leq x < L_1$ 及 $L_1 < x \leq L$ 两部分, 在每一部分内均可作为等截面计算, 只是截面面积不同而已。因此要计算阶梯轴的温度分布, 仅在于需要确定 $x = L_1$ 这一点的温度, 而在确定这一点的温度时, 必须处理该处的过渡端面的放热问题。

利用等效放热面积原则, 我们把阶梯轴在长度上作如图 3-17 b 的变更, 即在有阶梯处稍作放长, 以使放长部分 ΔL 的周表面积等效于过渡端面的面积。于是 ΔL 便可由下式计算:

$$2\pi\Delta L r_1 = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

故

$$\Delta L = \frac{r_2 + r_1}{2r_1} (r_1 - r_2) \approx \Delta r \quad (3-70)$$

经过这样的变更之后, 过渡的阶梯端面便可当作绝热面, 而使其在交界点处具有相同的温度梯度, 从而为分段计算创造了条件。对于每一段的计算均可利用 § 3-3 等截面细长轴一节导出的公式。

首先求 $L'_1 = L_1 + \Delta L$ 的一段 I, 假定第一段 I 左端的温度为 t_1 , 两段交界处的温度为 t_0 。

这与 § 3-3 三(二)支承于两轴承间的轴的条件相似, 根据式 (3-48) 的结果, 即可写出

$$T_I(x) = \frac{T_0 \operatorname{sh} N_1 x + T_1 \operatorname{sh} N_1 (L'_1 - x)}{\operatorname{sh} N_1 L'_1} \quad (3-71)$$

(x 从 I 段左端算起, $0 \leq x \leq L'_1$)

式中 $N_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1 p_1}{\lambda A_1}} = \sqrt{\frac{\alpha_1 (2\pi r_1)}{\lambda \pi r_1^2}} = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\lambda r_1}}$

对于第二段, 也可写出

$$T_{II}(x) = \frac{T_2 \operatorname{sh} N_2 x + T_0 \operatorname{sh} N_2 (L_2 - x)}{\operatorname{sh} N_2 L_2} \quad (3-72)$$

(x 从 II 段左端算起, $0 \leq x \leq L_2$)

式中 $N_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2 p_2}{\lambda A_2}} = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{\lambda r_2}}$

为了确定 T_0 , 还必须增加一个条件, 在两段交接处的温度梯度相等, 即

$$\left[\frac{dT_I(x)}{dx} \right]_{x=L'_1} = \left[\frac{dT_{II}(x)}{dx} \right]_{x=0}$$

$$\left. \frac{dT_I(x)}{dx} \right|_{x=L'_1} = \frac{T_0 \operatorname{ch} N_1 x - T_1 \operatorname{ch} N_1 (L'_1 - x)}{\operatorname{sh} N_1 L'_1} \cdot N_1 \Big|_{x=L'_1} = \frac{T_0 \operatorname{ch} N_1 L'_1 - T_1}{\operatorname{sh} N_1 L'_1} N_1$$

$$\left. \frac{dT_{II}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{T_2 \operatorname{ch} N_2 x - T_0 \operatorname{ch} N_2 (L_2 - x)}{\operatorname{sh} N_2 L_2} \cdot N_2 \Big|_{x=0} = \frac{T_2 - T_0 \operatorname{ch} N_2 L_2}{\operatorname{sh} N_2 L_2} N_2$$

所以

$$\frac{T_0 N_1 \operatorname{ch} N_1 L'_1 - N_1 T_1}{\operatorname{sh} N_1 L'_1} = \frac{T_2 N_2 - T_0 N_2 \operatorname{ch} N_2 L_2}{\operatorname{sh} N_2 L_2}$$

故

$$T_0 \left[\frac{N_1 \operatorname{ch} N_1 L'_1}{\operatorname{sh} N_1 L'_1} + \frac{N_2 \operatorname{ch} N_2 L_2}{\operatorname{sh} N_2 L_2} \right] = \frac{T_2 N_2}{\operatorname{sh} N_2 L_2} + \frac{T_1 N_1}{\operatorname{sh} N_1 L'_1}$$

而得

$$T_0 = \frac{T_1 N_1 \operatorname{sh} N_2 L_2 + T_2 N_2 \operatorname{sh} N_1 L'_1}{N_1 \operatorname{ch} N_1 L'_1 \operatorname{sh} N_2 L_2 + N_2 \operatorname{ch} N_2 L_2 \operatorname{sh} N_1 L'_1} \quad (3-73)$$

于是便可求得在 $x = L_1$ 处的温度, 它为 $T_I(L_1)$ 、 $T_{II}(0)$ 的平均值, 即

$$T_{L1} = \frac{T_I(L_1) + T_{II}(0)}{2} \quad (3-74)$$

十分明显, 式中 $T_{II}(0) = T_0$ 。

有了式 (3-71), (3-72), (3-73), (3-74) 等式, 阶梯轴的温度分布便可完全确定了。这个温度场在截面突变处是不连续的, 如图 3-18 所示。

二、锥形轴的一维导热

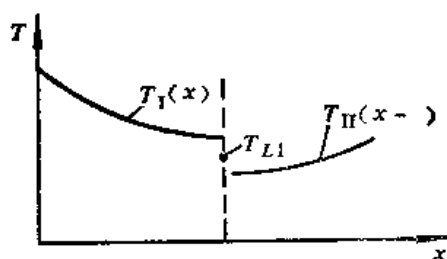


图 3-18

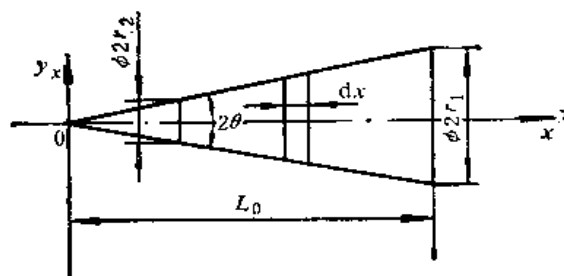


图 3-19

图 3-19 为一锥形轴，取锥形轴两母线的交点 o 为 x 坐标的零点， θ 为锥度角的 $\frac{1}{2}$ ，则锥形轴母线的直线方程为 $y_x = x \operatorname{tg} \theta$ ；考察 $A_x dx$ 微元体部分的热平衡（即 $A_x dx$ 微元体得到的热量在稳定状态时必须从其表面散出去），便得方程式

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda A_x \frac{dT}{dx} \right) dx - \alpha_s \frac{ds_x}{dx} T dx = 0 \quad (3-75)$$

式中 $\frac{d}{dx} \left(\lambda A_x \frac{dT}{dx} \right) dx$ 为 $A_x dx$ 微元体得到的热量；

A_x 为 $A_x dx$ 微元体的截面面积；

$\alpha_s \frac{ds_x}{dx} T dx$ 为 $A_x dx$ 微元体周边表面的散热量；

ds_x 为微元体的周边表面面积。

而
$$\frac{d}{dx} \left(\lambda A_x \frac{dT}{dx} \right) = \lambda A_x \frac{d^2 T}{dx^2} + \lambda \frac{dA_x}{dx} \frac{dT}{dx}$$

代入式 (3-75)，得

$$A_x \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{dA_x}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{ds_x}{dx} \frac{\alpha_s}{\lambda} T = 0 \quad (3-76)$$

在锥度轴的情况下，

$$A_x = \pi y_x^2 = \pi x^2 \operatorname{tg}^2 \theta$$

所以
$$\frac{dA_x}{dx} = 2\pi x \operatorname{tg}^2 \theta$$

而微元体周边母线的长度 $= \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} dx$

所以
$$ds_x = 2\pi y_x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} dx = 2\pi x \operatorname{tg} \theta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} dx$$

所以
$$\frac{ds_x}{dx} = 2\pi x \operatorname{tg} \theta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = 2\pi x \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{2\pi \operatorname{tg}^2 \theta}{r_1} x \sqrt{L_0^2 + r_1^2}$$

代入式 (3-76)，化简即得

$$x^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + 2x \frac{dT}{dx} - \frac{2\alpha_s}{\lambda r_1} \sqrt{L_0^2 + r_1^2} x T = 0 \quad (3-77)$$

为了解式 (3-77)，现在简单介绍一下综合贝塞尔方程：

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [(1 - 2A)x - 2Bx^2] \frac{dy}{dx} + [C^2 D^2 x^{2c} + B^2 x^2 - B(1 - 2A)x + A^2 - C^2 n^2] y = 0 \quad (3-78)$$

式中 n 为贝塞尔方程的阶数。

它的通解为

$$y = x^c C^{2c} [C_1 J_n(Dx^c) + C_2 Y_n(Dx^c)] \quad (3-79)$$

方程 (3-77) 与式 (3-78) 对比，得出：

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{2}, \quad n = 1$$

$$D = 2i \sqrt{\frac{2\alpha_s}{\lambda r_1} \sqrt{L_0^2 + r_1^2}} = 2i \sqrt{G}$$

$$\text{式中 } G = \frac{2\alpha_s}{\lambda r_1} \sqrt{L_0^2 + r_1^2}$$

故式 (3-77) 的通解为

$$T(x) = x^{-\frac{1}{2}} [C_1 J_1(2i\sqrt{Gx}) + C_2 Y_1(2i\sqrt{Gx})]$$

这是虚数变数的贝塞尔函数, 也可写成

$$T(x) = C_3 x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{Gx}) + C_4 x^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{Gx}) \quad (3-80)$$

式中 C_3 、 C_4 是由边界条件确定的积分常数。对于式 (3-80) 为微分方程 (3-77) 的通解, 现证明如下:

不妨先证明其一部分 $T(x) = C_3 x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{Gx})$

$$\text{令 } 2\sqrt{Gx} = z, \quad x^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{2\sqrt{G}}, \quad x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{G}}{z}, \quad x = \frac{z^2}{4G}$$

$$x^2 = \frac{z^4}{16G^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2G}{z}$$

所以

$$T(x) = \frac{2\sqrt{G}C_3}{z} I_1(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT(x)}{dx} &= 2\sqrt{G}C_3 \left[\frac{I_1'(z)}{z} - \frac{I_1(z)}{z^2} \right] \frac{dz}{dx} = 2\sqrt{G}C_3 \left(\frac{2G}{z} \right) \left[\frac{I_1'(z)}{z} - \frac{I_1(z)}{z^2} \right] \\ &= 4G^{3/2}C_3 \left[\frac{I_1'(z)}{z^2} - \frac{I_1(z)}{z^3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2T(x)}{dx^2} &= 4G^{3/2}C_3 \left[\frac{I_1''(z)}{z^2} - \frac{2}{z^3} I_1'(z) - \frac{I_1'(z)}{z^3} + \frac{3I_1(z)}{z^4} \right] \frac{dz}{dx} \\ &= 4G^{3/2}C_3 \left(\frac{2G}{z} \right) \left[\frac{I_1''(z)}{z^2} - \frac{3}{z^3} I_1'(z) + \frac{3}{z^4} I_1(z) \right] \end{aligned}$$

$$\text{所以 } x^2 \frac{d^2T(x)}{dx^2} = 4G^{3/2}C_3 \left(\frac{2G}{z} \right) \left(\frac{z^4}{16G^2} \right) \left[\frac{I_1''(z)}{z^2} - \frac{3}{z^3} I_1'(z) + \frac{3}{z^4} I_1(z) \right]$$

$$= \frac{G^{1/2}C_3}{2z} [z^2 I_1''(z) - 3z I_1'(z) + 3I_1(z)]$$

$$2x \frac{dT(x)}{dx} = 2 \left(\frac{z^2}{4G} \right) (4G^{3/2}C_3) \left[\frac{I_1'(z)}{z^2} - \frac{I_1(z)}{z^3} \right]$$

$$= \frac{G^{1/2}C_3}{2z} [4z I_1'(z) - 4I_1(z)]$$

$$-GxT = -G \left(\frac{z^2}{4G} \right) \left(\frac{2\sqrt{G}C_3}{z} \right) I_1(z) = -\frac{G^{1/2}C_3}{2z} [z^2 I_1(z)]$$

三式相加, 得

$$\begin{aligned}
 & x^2 \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + 2x \frac{dT(x)}{dx} - GxT \\
 &= \frac{G^{\frac{1}{2}} C_3}{2z} [z^2 I_1''(z) - 3z I_1'(z) + 3I_1(z) + 4z I_1'(z) - 4I_1(z) - z^2 I_1(z)] \\
 &= \frac{G^{\frac{1}{2}} C_3}{2z} [z^2 I_1''(z) + z I_1'(z) - (z^2 + 1) I_1(z)]
 \end{aligned}$$

由于 $I_1(z)$ 为上式右侧方括号中为零时所构成的微分方程的解, 故

$$x^2 \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + 2x \frac{dT(x)}{dx} - GxT = 0$$

因而 $T(x) = \frac{2\sqrt{G}C_3}{z} I_1(z) = C_3 x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{Gx})$ 为式 (3-77) 的一个解。依同理, 也

可证明 $T(x) = C_4 x^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{Gx})$ 为式 (3-77) 的另一个解。因此式 (3-77) 的通解为

$$T(x) = C_3 x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{Gx}) + C_4 x^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{Gx})$$

这个结论也可以用下列关系证明之:

由于变形的 n 阶贝塞尔微分方程

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + n^2) y = 0$$

的通解为

$$y = C_1 I_n(z) + C_2 K_n(z), \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

所以 $T(x) = C_3 x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{Gx}) + C_4 x^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{Gx})$ 为式 (3-77) 的通解。用同样方法可以证明式 (3-79) 为综合贝塞尔方程 (3-78) 的通解。

附带提一提, 在以上证明中, 取 $C_3 = 1$, 仍不失其一般性。于是演算中便可以把 C_3 全部去掉而使演算更为简便一些。

图 3-20 为车床尾顶尖的情况。

$$\begin{aligned}
 \text{令} \quad T_1 &= t_1 - t_f \\
 T_0 &= t_0 - t_f
 \end{aligned}$$

式中 t_f —— 介质温度。

顶尖部分的边界条件是:

$$\begin{aligned}
 T(L_1) &= T_1 \\
 T(L_0) &= T_0
 \end{aligned}$$

确定积分常数

从式 (3-80),

$$T_1 = C_3 L_1^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{GL_1}) + C_4 L_1^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{GL_1})$$

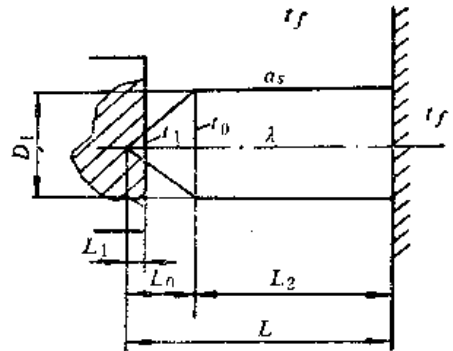


图 3-20

$$T_0 = C_3 L_0^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{GL_0}) + C_4 L_0^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{GL_0})$$

解得

$$C_3 = \frac{T_1 L_1^{\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{GL_0}) - T_0 L_0^{\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{GL_1})}{I_1(2\sqrt{GL_1}) K_1(2\sqrt{GL_0}) - I_1(2\sqrt{GL_0}) K_1(2\sqrt{GL_1})}$$

$$C_4 = \frac{-T_1 L_1^{\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{GL_0}) + T_0 L_0^{\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{GL_1})}{I_1(2\sqrt{GL_1}) K_1(2\sqrt{GL_0}) - I_1(2\sqrt{GL_0}) K_1(2\sqrt{GL_1})}$$

而整个顶尖可分二段：一段为锥形 $L_1 \leq x \leq L_0$ ，另一段为圆柱形 $L_0 \leq x \leq L_2 + L_0$ 。其温度场分别为 $T_A(x)$ 、 $T_B(x)$

$$T_A(x) = C_3 x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{Gx}) + C_4 x^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{Gx}) \quad L_1 \leq x \leq L_0 \quad (3-81)$$

式中 C_3 、 C_4 分别为上述解的常数。

圆柱形部分用式 (3-49)

$$T_B(x) = \frac{T_0 \text{sh}N(L_2 + L_0 - x)}{\text{sh}NL_2} \quad L_0 \leq x \leq L_2 + L_0 \quad (3-82)$$

例题12 图 3-24 的尾顶尖中已知数据为

$$\alpha_s = 7.73 \quad \text{瓦}/(\text{米}^2 \cdot \text{开})$$

$$\lambda = 46.5 \quad \text{瓦}/(\text{米} \cdot \text{开})$$

$$r_1 = \frac{D_1}{2} = \frac{24.051}{2} \text{毫米} = 0.012 \text{米 (莫氏三号锥度大头直径)}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$L_0 = \sqrt{3} r_1 = 0.0208 \text{米}$$

$$L_2 = 40 \text{毫米} = 0.04 \text{米}$$

$$L_1 = 3 \text{毫米} = 0.003 \text{米}$$

试计算其温度场。

解

$$G = \frac{2\alpha_s}{\lambda r_1} \sqrt{L_0^2 + r_1^2} = N^2 \sqrt{L_0^2 + r_1^2} = \frac{2 \times 7.73}{46.5 \times 0.012} \times 0.024 = 0.665 \quad \text{1/米}$$

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_s p}{\lambda A}} = \sqrt{\frac{\alpha_s 2\pi r_1}{\lambda \pi r_1^2}} = \sqrt{\frac{\alpha_s 2}{\lambda r_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 7.73}{46.5 \times 0.012}} = 5.264 \quad \text{1/米}$$

$$2\sqrt{GL_0} = 2\sqrt{0.665 \times 0.0208} = 0.235$$

$$2\sqrt{GL_1} = 2\sqrt{0.665 \times 0.003} = 0.0893$$

查附表 9，得

$$I_1(2\sqrt{GL_0}) = 0.1184, \quad I_0(2\sqrt{GL_0}) = 1.0144,$$

$$I_1(2\sqrt{GL_1}) = 0.0149$$

查附表 10，得

$$K_1(2\sqrt{GL_0}) = 4.17, \quad K_0(2\sqrt{GL_0}) = 1.62,$$

$$K_1(2\sqrt{GL_1}) = 10.36,$$

$$\sqrt{L_1} = \sqrt{0.003} = 0.0548, \quad \sqrt{L_0} = \sqrt{0.0208} = 0.144$$

故

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{T_1 \times 0.0548 \times 4.17 - T_0 \times 0.144 \times 10.36}{0.0449 \times 4.17 - 0.1184 \times 10.36} \\ &= \frac{0.228T_1 - 0.1494T_0}{0.1872 - 1.227} = 1.435T_0 - 0.22T_1 \\ C_4 &= \frac{-T_1 \times 0.0548 \times 0.1184 + T_0 \times 0.144 \times 0.0449}{-1.0398} \\ &= -0.00624T_0 + 0.00622T_1 \end{aligned}$$

故得到

$$\begin{aligned} T_A(x) &= (1.435T_0 - 0.220T_1)x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{0.665x}) \\ &\quad - (0.00624T_0 - 0.00622T_1)x^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{0.665x}) \\ &\quad 0.003 \leq x \leq 0.0208 \text{ (米)} \\ T_B(x) &= \frac{T_0 \text{sh}[5.264(0.0608 - x)]}{\text{sh}(5.264 \times 0.04)} = 4.717T_0 \text{sh}[5.264(0.0608 - x)] \\ &\quad 0.0208 \leq x \leq 0.0608 \text{ (米)} \end{aligned}$$

这里二式中的 T_0 还必须满足

$$\left. \frac{dT_A}{dx} \right|_{x=L_0} = \left. \frac{dT_B}{dx} \right|_{x=L_0}$$

为此必须先求导, 得 \ominus

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} \left[x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{Gx}) \right] \right|_{x=0.0208} &= \left. \frac{\sqrt{Gx} I_0(2\sqrt{Gx}) - I_1(2\sqrt{Gx})}{x^{3/2}} \right|_{x=0.0208} \\ &= 0.264 \\ \left. \frac{d}{dx} \left[x^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{Gx}) \right] \right|_{x=0.0208} &= \left. \frac{\sqrt{Gx} K_0(2\sqrt{Gx}) - K_1(2\sqrt{Gx})}{x^{3/2}} \right|_{x=0.0208} \\ &= -1328.7 \end{aligned}$$

代入 $T_A(x)$, 得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT_A(x)}{dx} \right|_{x=L_0} &= (1.435T_0 - 0.22T_1) \times 0.264 + (0.00624T_0 - 0.00622T_1) \times 1329 \\ &= 8.672T_0 - 8.324T_1 \\ \left. \frac{dT_B(x)}{dx} \right|_{x=L_0} &= 4.717(5.264)(-1)T_0 \text{ch}[5.264(0.0608 - x)] \\ &= -4.717(5.264) \text{ch}(5.264 \times 0.04)T_0 \\ &= -25.38T_0 \end{aligned}$$

两者相等, 得

$$8.672T_0 - 8.324T_1 = -25.38T_0$$

\ominus 利用关系式 (高等数学的理论与习题, P.268)

$$xI_n'(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x)$$

$$xK_n'(x) = xK_{n-1}(x) - nK_n(x)$$

故

$$T_0 = 0.244T_1$$

代入 C_3 及 C_4 , 得

$$C_3 = 1.435 \times 0.244T_1 - 0.22T_1 = 0.130T_1$$

$$C_4 = -(0.00624 \times 0.244T_1) + 0.00622T_1 = 0.0047T_1$$

于是这个顶尖的两段温度场分别为

$$T_a(x) = 0.130T_1 x^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{0.665x}) + 0.0047T_1 x^{-\frac{1}{2}} K_1(2\sqrt{0.665x})$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} T_1 [0.130I_1(1.63\sqrt{x}) + 0.0047K_1(1.63\sqrt{x})]$$

$$0.003 \leq x \leq 0.0208 \text{ (米)}$$

$$T_b(x) = 1.15T_1 \text{sh}[5.26\delta(0.0608 - x)]$$

$$0.0208 \leq x \leq 0.0608 \text{ (米)}$$

§ 3-6 相对运动的机械部件之间的导热

在各种机械部件之间的相对运动中, 最普遍的是旋转运动及直线运动, 如机床平导轨之间是相对直线运动, 轴承与轴之间是旋转运动。两部件之间作相对运动, 不论是干摩擦, 或流体摩擦, 均会使摩擦表面产生热量而形成导热问题。在稳定情况下, 表面间产生的热量与向外传导的热量必须相等, 从而可以计算出摩擦表面的温升及零件体内的温度场, 下面分两种情况来进行讨论。

一、平面相对运动

图 3-21 为二平面作直线相对运动的情况: 若二接触面之间每单位面积、单位时间内产生的比热流量为 q , 而摩擦面间的平均温度为 t 。

根据前面的公式:

$$\left. \begin{aligned} t - t_{1f} &= q_1 \left(\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{L_1}{\lambda_1} \right) \\ t - t_{2f} &= q_2 \left(\frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{L_2}{\lambda_2} \right) \\ q &= q_1 + q_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-83)$$

所以

$$q = \frac{t - t_{1f}}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{L_1}{\lambda_1}} + \frac{t - t_{2f}}{\frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{L_2}{\lambda_2}}$$

如果

$$t_{1f} = t_{2f} = t_f$$

则

$$q = \frac{t - t_f}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{L_1}{\lambda_1}} + \frac{t - t_f}{\frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{L_2}{\lambda_2}}$$

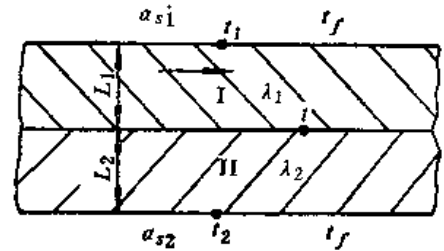


图 3-21

$$T = t - t_f = \frac{q}{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_{s1}} + \frac{L_2}{\lambda_2}} + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{s2}} + \frac{L_2}{\lambda_2}}} \quad (3-84)$$

现在我们来举一个实际例子来进行计算。

例题13 M1432A外圆磨床床身导轨及工作台如图3-22所示，试计算其导轨的温升。

解 计算分下列几步进行：

1. 求出 q

要求出 q 首先要进行消耗功率的分析。工作台在运动时，单位面积导轨面的功率消耗为

$$A = fpv$$

式中 A ——单位面积导轨面的功率消耗；

f ——摩擦系数；

p ——压强；

v ——速度。

在机床导轨设计时，取平均压强为

$$p = 0.26 \text{ 公斤力/厘米}^2 = 2600 \text{ 公斤力/米}^2 = 2.55 \times 10^4 \text{ 牛/米}^2$$

磨床工作台速度为 $6 \text{ 米/分} = 0.1 \text{ 米/秒}$ ，取 $f = 0.1$

所以 $A = 0.1 \times 2.55 \times 10^4 \times 0.1 = 255 \text{ 瓦/米}^2$

故 $q = A = 255 \text{ 瓦/米}^2$

2. 查出导热系数及表面放热系数

铸件的 $\lambda = 50 \text{ 千卡/(米} \cdot \text{小时} \cdot \text{度)} = 58 \text{ 瓦/(米} \cdot \text{开)}$

工作台在空气中运动， $\alpha_{s1} = 37.9 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$

床身在停滞空气中， $\alpha_{s2} = 7.73 \text{ 瓦/(米}^2 \cdot \text{开)}$

3. 根据已知条件代入计算

$$L_1 = 75 \text{ 毫米} = 0.075 \text{ 米}$$

$$L_2 = 30 \text{ 毫米} = 0.03 \text{ 米}$$

$$T = t - t_f = \frac{255}{\frac{1}{\frac{1}{37.9} + \frac{0.075}{58}} + \frac{1}{\frac{1}{7.73} + \frac{0.03}{58}}} = 5.81^\circ\text{C}$$

即导轨面的温升为 5.81°C 。

从这个式子可作如下的讨论：

(1) 降低导轨面的温升主要是减少导轨单位面积的发热量 q ，这主要应降低导轨面压强 p 及改善导轨面之间的摩擦性能而降低摩擦系数 f ，而以降低 f 为主，因为 p 与工作台重量及工件重量有关，一般不能改变。当然从公式中也可以直接看到发热量与运动速度 v 也有很大的关系，但是必须注意到 v 增大时 q 量增大，同时 α_{s1} 也相应增大，故在试验中得到的结果是， v 增大， T 有所增加但不是成正比例增加。因此，降低摩擦系数是减少温升的一个

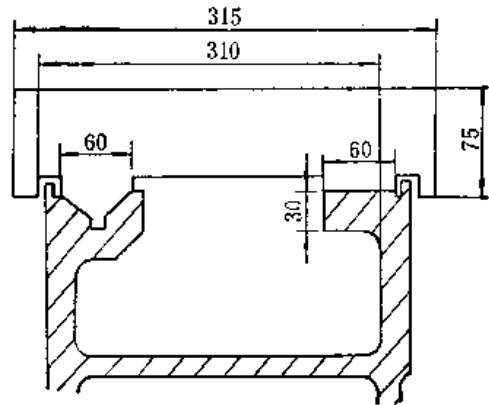


图 3-22

重要措施，静压导轨在这里有它的优越性。

(2) 增大 α_{s1} 及 α_{s2} ，也可降低温升，从计算中可以看到这里的热阻主要是由于表面放热系数而形成的，而铸件的内热阻是微不足道的。

二、圆柱面相对运动

图 3-23 为空心轴与轴承套筒（相当于两个圆筒）作相对旋转运动。

(一) 假定轴与轴承的端面放热作用均可略去不计，并令 t 为摩擦副两表面间的平均温度， L 为两者的长度，根据前面圆筒壁的计算公式，

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{2\pi L(t-t_f)}{\frac{1}{\alpha_{s1}r_1} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\lambda_1}} \\ \Phi_2 &= \frac{2\pi L(t-t_f)}{\frac{1}{\alpha_{s2}r_2} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\lambda_2}} \end{aligned} \right\} \quad (3-85)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$$

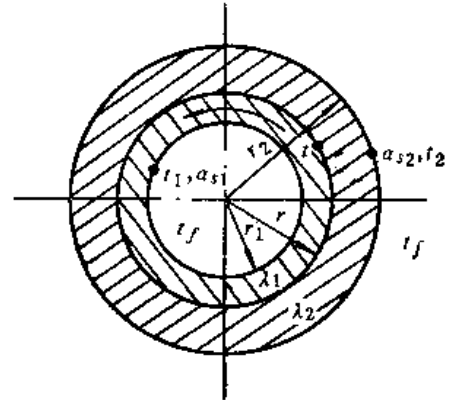


图 3-23

例题 14 已知 $r_1 = 30$ 毫米；
 $r = 50$ 毫米；
 $r_2 = 80$ 毫米；
 $\lambda_1 = 46.5$ 瓦/(米·开)；
 $\lambda_2 = 73.2$ 瓦/(米·开)；
 $L = 200$ 毫米；
 α_{s1} (空心轴内空气流通的情况下) = 37.9 瓦/(米²·开)；
 $\alpha_{s2} = 7.73$ 瓦/(米²·开)；
 径向负荷 $P = 300$ 公斤力。

若 $f = 0.1$ ，转速 $n = 50$ 转/分，试求摩擦区内的平均温升。

解 仍与前题一样先算出摩擦功率。

$$v = 2\pi rn = 2\pi(0.05)(50/60) = 0.262 \text{ 米/秒}$$

$$A = fPv = 0.1 \times 300 \times 0.262 \text{ 公斤力} \cdot \text{米/秒} = 77.01 \text{ 瓦}$$

故

$$\Phi = 77.01 \text{ 瓦}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = 2\pi L(t-t_f) \left[\frac{1}{\frac{1}{\alpha_{s1}r_1} + \frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\lambda_1}} + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{s2}r_2} + \frac{\ln\frac{r_2}{r}}{\lambda_2}} \right] \\ &= 2\pi \times 0.2(t-t_f) \left[\frac{1}{\frac{1}{37.9 \times 0.03} + \frac{\ln\left(\frac{50}{30}\right)}{46.5}} + \frac{1}{\frac{1}{7.73 \times 0.08} + \frac{\ln\left(\frac{80}{50}\right)}{73.2}} \right] \end{aligned}$$

$$= 2.186(t-t_f)$$

所以 $t-t_f = \frac{77.01}{2.186} = 35.23^\circ\text{C}$ (如轴内空气不流动，此温升还要升高)

其由轴与套传出的热量 ϕ_1 及 ϕ_2 分别为:

$$\phi_1 = \frac{0.97}{0.97 + 0.53} \phi = 49.8 \text{ 瓦}$$

$$\phi_2 = \frac{0.53}{0.97 + 0.53} \phi = 27.21 \text{ 瓦}$$

由轴传出的热量约为由套传出的 1.83 倍。

从这个例子的计算也可以看出机械上轴承的温升也主要取决于径向负荷 P 及摩擦系数 f 及空心轴内的空气流动情况。例如, 采用各种动压油膜轴承、静压轴承及滚动轴承等的目的, 均是为了减小摩擦系数, 以减少轴承的发热。

(二) 假定轴为实心轴, 轴承套筒的端面放热作用仍然略去不计, t 及 L 的意义均与前面一样。

此时假定轴沿长度方向的温度梯度为零而由其两端面放热 (即假想轴的端面被截断, 并使之与空气接触), 这样式 (3-85) 的第一个可改写成

$$\phi_1 = 2\alpha_{s1}\pi r^2 (t - t_f)$$

与原来的后两个公式一起就可估算出温升 T 。

例题 15 仍用上面例子的数据, 只是把空心轴改为实心轴, 则得到

$$\begin{aligned} \phi &= 2\pi(t - t_f) \left[\alpha_{s1}r^2 + \frac{0.2}{\frac{1}{7.73 \times 0.08} + \frac{\ln\left(\frac{80}{50}\right)}{73.2}} \right] \\ &= 2\pi(t - t_f)[0.0948 + 0.123] = 2\pi(t - t_f) \times 0.218 = 77.01 \end{aligned}$$

故

$$t - t_f = \frac{77.01}{2\pi \times 0.218} = 56.2^\circ\text{C}$$

因此

$$\phi_1 = \text{由轴传出的热量} = \frac{0.0948 \times 77.01}{0.0948 + 0.123} = 33.52 \text{ 瓦}$$

$$\phi_2 = \text{由套传出的热量} = \frac{0.123 \times 77.01}{0.0948 + 0.123} = 43.49 \text{ 瓦}$$

此时由套传出的热量比轴多, 这是 $t - t_f$ 之所以大大提高的原因。

三、旋转轴及其支承系统的导热问题

(一) 光滑轴及其支承系统的导热问题

图 3-24 为简化的光滑轴及其支承系统。它有两个支承并有两个悬伸部分。每一个支承各有一个轴套及支承轴套的墙壁, 相当于由一个散热圆筒和一个散热空心圆板 (如图 3-24 中的虚线所示) 所组成。假定支承 A 处的轴颈与轴套内表面的均匀温升为 T_a , 支承 B 处的相应温升为 T_b (事实上 T_a 、 T_b 仅为近似的平均值), 轴套的外表面、端面及墙壁两侧面向周围空间放热。

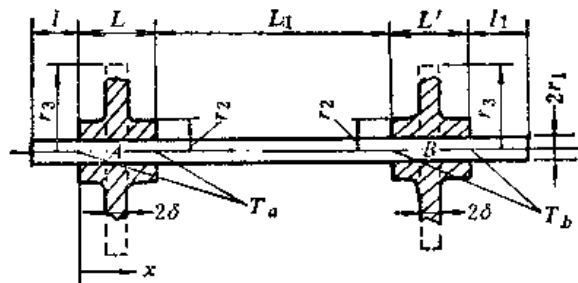


图3-24 光滑轴及其支承系统

兹对这个系统的传热情况 (这里只研究稳定传热) 作如下的分析:

由于热源集中在两个支承 A 、 B 之内，我们分别对 A 、 B 两处的传热情况进行分析。

1. 支承 A 处的散热情况，可以分成三个部分。

(1) 轴承部分的散热

我们假定轴承 A 由散热圆筒及散热空心圆板两个部分所组成，它们的尺寸分别为：

圆筒部分：内外半径分别为 r_1 及 r_2 ，长度为 $L - 2\delta$ 。

空心圆板部分：内外半径分别为 r_1 及 r_2 ，厚度为 2δ 。

1) 圆筒部分的散热量 $\Phi_A^{\text{筒}}$ 可由式 (3-13) 及 (3-19) 得出 (其中 λ 为圆筒的导热系数， α_f 为外表面放热系数)：

$$\Phi_A^{\text{筒}} = \frac{2\pi(L-2\delta)(t-t_f)}{\frac{1}{r_2\alpha_f} + \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{\lambda}} = \frac{2\pi(L-2\delta)T_a}{\frac{1}{r_2\alpha_f} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda}}$$

2) 空心圆板的散热量 $\Phi_A^{\text{板}}$ 可由下式确定之：

利用式 (3-66)

$$T_o = -\frac{q_A^{\text{板}}P(r_o)}{\lambda N^2 r_o R(r_o)} = -\frac{q_A^{\text{板}}P(r_1)}{\lambda N^2 r_1 R(r_1)}$$

式中 $N = \sqrt{\frac{\alpha_f}{\lambda\delta}}$

$P(r_1)$ 及 $R(r_1)$ 分别由式 (3-63) 及 (3-64) 确定。

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \Phi_A^{\text{板}} &= q_A^{\text{板}}(2\pi r_1 \cdot 2\delta) = 4\pi r_1 \delta \left(-\frac{\lambda N^2 r_1 R(r_1)}{P(r_1)} T_a \right) \\ &= -\frac{4\pi\lambda N^2 r_1^2 \delta T_a R(r_1)}{P(r_1)} \end{aligned}$$

(2) 轴在轴承 A 左端截面的散热量 $\Phi_A^{\text{轴}}$

根据式 (3-51)，轴的左端悬伸部分的温度场为

$$T = \frac{T_a \text{ch}N_1(x-l')}{\text{ch}N_1 l'}$$

由于

$$\Phi_A^{\text{轴}} = -\lambda_1 A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}$$

而

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{N_1 \text{sh}N_1(x-l')}{\text{ch}N_1 l'} T_a$$

故

$$\Phi_A^{\text{轴}} = -\lambda_1 (\pi r_1^2) \frac{N_1 \text{sh}N_1(x-l')}{\text{ch}N_1 l'} T_a \Big|_{x=0} = \lambda_1 (\pi r_1^2) N_1 T_a \text{th}(N_1 l')$$

式中 λ_1 —— 轴的导热系数；

$$N_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{s1} p_1}{\lambda_1 A_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha_{s1}}{\lambda_1 r_1}}$$

α_{s1} —— 轴的外表面的放热系数。

(3) 轴在轴承 A 右端截面的散热量 $\Phi_A^{\text{轴}}$

根据式 (3-48)，轴在两轴承中间部分的温度场为

$$T = \frac{T_a \operatorname{sh} N_1 (L_1 - x) + T_b \operatorname{sh} N_1 x}{\operatorname{sh} N_1 L_1}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_b \operatorname{ch} N_1 x - T_a \operatorname{ch} N_1 (L_1 - x)}{\operatorname{sh} N_1 L_1} N_1$$

故
$$\Phi_a^{\text{轴}} = -\lambda_1 A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -\lambda_1 (\pi r_1^2) N_1 \frac{T_b \operatorname{ch} N_1 x - T_a \operatorname{ch} N_1 (L_1 - x)}{\operatorname{sh} N_1 L_1} \Big|_{x=0}$$

$$= \frac{\lambda_1 (\pi r_1^2) N_1}{\operatorname{sh} N_1 L_1} (T_a \operatorname{ch} N_1 L_1 - T_b)$$

由于支承 A 处的散热量由上述四个分量所组成，故支承 A 处的总散热量 Φ_A 为

$$\Phi_A = \Phi_A^{\text{箱}} + \Phi_A^{\text{轴}} + \Phi_A^{\text{油}} + \Phi_A^{\text{环}} = (fpv)_A$$

故
$$(fpv)_A = \frac{2\pi(L-2\delta)T_a}{\frac{1}{r_2\alpha_f} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda}} - \frac{4\pi\lambda N^2 r_1^2 \delta T_a R(r_1)}{P(r_1)} + \lambda_1 (\pi r_1^2) N_1 T_a \operatorname{th}(N_1 L')$$

$$+ \frac{\lambda_1 (\pi r_1^2) N_1}{\operatorname{sh} N_1 L_1} (T_a \operatorname{ch} N_1 L_1 - T_b) \quad (3-86)$$

2. 支承 B 处的散热情况，可用同样方法进行分析。故得

$$(fpv)_B = \frac{2\pi(L'-2\delta)T_b}{\frac{1}{r_2\alpha_f} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda}} - \frac{4\pi\lambda N^2 r_1^2 \delta T_b R(r_1)}{P(r_1)} + \lambda_1 (\pi r_1^2) N_1 T_b \operatorname{th}(N_1 L')$$

$$+ \frac{\lambda_1 (\pi r_1^2)}{\operatorname{sh} N_1 L_1} (T_b \operatorname{ch} N_1 L_1 - T_a) \quad (3-87)$$

将式 (3-86) 及 (3-87) 联立求解，便可求出 T_a 及 T_b ，从而求出轴承及轴的各部分的温度场。

但需指出，在箱体结构中支承轴承座的墙板通常为长方形且与侧壁与底板相连而非一个空心的圆板，用假想的空心圆板进行简化出入较大且 r_2 尺寸如何确定亦存在问题，而且轴在箱体内的散热条件（即其放热系数 α_{s1} ）亦与箱外轴的悬伸部分的散热条件不同，用同一个 α_{s1} 也成问题。因此，用上述方法计算结果仅能用作初步估算之用。

例题 16 在图 3-24 中，假定 $r_1 = 50$ 毫米， $r_2 = 80$ 毫米， $r_3 = 150$ 毫米， $l = l_1 = 100$ 毫米， $L = L' = 100$ 毫米， $L_1 = 500$ 毫米， $\lambda_1 = 46.5$ 瓦/(米·开)， $\lambda = 62.8$ 瓦/(米·开)， $\alpha_{s1} = 38$ 瓦/(米²·开)， $\alpha_f = 8$ 瓦/(米²·开)， $\delta = 10$ 毫米， $f = 0.1$ ，转速 $n = 120$ 转/分， $P = 300$ 公斤力，试求 T_a 、 T_b 及轴与轴承的温度场。

解

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_f}{\lambda \delta}} = \sqrt{\frac{8}{62.8 \times 0.01}} = 3.57 \text{ 米}^{-1}$$

$$N_1 = \sqrt{\frac{2\alpha_{s1}}{\lambda_1 r_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 38}{46.5 \times 0.05}} = 5.72 \text{ 米}^{-1}$$

$$\Phi_A = \Phi_B = fpv = 0.1 \times 300 \times 2\pi(0.05) \left(\frac{120}{60} \right)$$

$$= 18.85 \text{ 公斤力} \cdot \text{米/秒} = 184.9 \text{ 瓦}$$

$$l' = l + \frac{A}{\rho} = l + \frac{r_1}{2} = 0.10 + \frac{0.05}{2} = 0.125 \text{ 米}$$

$$r'_b = r_a + \delta = 0.15 + 0.01 = 0.16 \text{ 米}$$

由式 (3-62)

$$P(r_1) = K_1(Nr'_b)I_0(Nr_1) + I_1(Nr'_b)K_0(Nr_1)$$

$$Nr'_b = 3.57 \times 0.16 = 0.571$$

$$Nr_1 = 3.57 \times 0.05 = 0.1785$$

$$\frac{2}{\pi}K_1(Nr'_b) = 0.8943$$

$$\frac{2}{\pi}K_0(Nr_1) = \frac{2}{\pi}K_0(0.1785) = 1.208$$

$$I_0(Nr_1) = I_0(0.1785) = 1.0084$$

$$I_1(Nr'_b) = I_1(0.571) = 0.2975$$

故

$$P(r_1) = K_1(Nr'_b)I_0(Nr_1) + I_1(Nr'_b)K_0(Nr_1)$$

$$= \frac{\pi}{2}(0.8943)(1.0084) + \frac{\pi}{2}(0.2975)(1.208) = 1.981$$

由式 (3-64)

$$R(r_1) = \frac{1}{Nr_1} \{K_1(Nr'_b)I_1(Nr_1) - I_1(Nr'_b)K_1(Nr_1)\}$$

$$I_1(Nr_1) = I_1(0.1785) = 0.0897$$

$$\frac{2}{\pi}K_1(Nr_1) = \frac{2}{\pi}K_1(0.1785) = 3.7345$$

故

$$R(r_1) = \frac{1}{0.1785} \left\{ \frac{\pi}{2}(0.8943)(0.0897) - \frac{\pi}{2}(0.2975)(3.7345) \right\} = -9.07$$

由于这个系统是左右对称的, $T_a = T_b$, 只需把上述有关数据代入式 (3-86) 或 (3-87), 便可求出 T_a 。

$$\frac{2\pi(L-2\delta)T_a}{\frac{1}{r_2\alpha_f} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda}} = \frac{2\pi(0.1-0.02)T_a}{\frac{1}{0.08 \times 8} + \frac{\ln\left(\frac{0.08}{0.05}\right)}{62.8}} = 0.320166T_a$$

$$-\frac{4\pi\lambda N^2 r_1^2 \delta T_a R(r_1)}{P(r_1)} = -\frac{4\pi(62.8)(0.1785)^2(0.01)(-9.07)}{1.981} T_a = 1.15125T_a$$

$$\lambda_1(\pi r_1^2)N_1 T_a \text{th}(N_1 l') = 46.5\pi(0.05)^2(5.72)T_a \text{th}(5.72 \times 0.125) = 1.28224T_a$$

$$\frac{\lambda_1(\pi r_1^2)N_1}{\text{sh}N_1 L_1} (\text{ch}N_1 L_1 - 1)T_a = \frac{46.5\pi(0.05)^2(5.72)}{\text{sh}(5.72 \times 0.5)} [\text{ch}(5.72 \times 0.5) - 1]T_a = 1.86269T_a$$

将上述有关数据代入式 (3-86), 得

$$0.320166T_a + 1.15125T_a + 1.28224T_a + 1.86269T_a = 4.61635T_a = 184.9$$

故

$$T_a = 40.05^\circ\text{C}$$

各个部分散热量所占份额之比为

$$\begin{aligned}\Phi_a^{\text{轴}}:\Phi_a^{\text{轴}}:\Phi_a^{\text{轴}}:\Phi_a^{\text{轴}} &= 0.32017:1.15125:1.28224:1.86269 \\ &= 6.94\%:24.94\%:27.78\%:40.35\%\end{aligned}$$

可以看出,从轴承部分散出的热量约占 32%,而由墙板散失的热量又占轴承部分散热量的 78%左右。

现在把它们温度场分别列出如下:

轴承圆筒部分的温度场

由式 (3-12), 得

$$\frac{t - t_a}{t_2 - t_a} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

而

$$\Phi_a^{\text{轴}} = \frac{2\pi(L - 2\delta)\lambda}{\ln\frac{r_2}{r_1}}(t_a - t_2)$$

故

$$t - t_a = \frac{(t_2 - t_a)}{\ln(r_2/r_1)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = -\frac{\Phi_a^{\text{轴}} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{2\pi(L - 2\delta)\lambda}$$

$$= -\frac{184.9 \times 0.0694 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{2\pi(0.1 - 0.02)(62.8)} = -0.4065 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

因而

$$T = T_a - 0.4065 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = 40.05 - 0.4065 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

轴承的墙板部分温度场, 由式 (3-67) 得

$$T = \frac{T_a P(r)}{P(r_1)} = \frac{40.05}{1.981} P(r) = 20.22 P(r)$$

在 $r = 0.08$ 米处,

$$P(0.08) = 1.8587, T_{r=0.08} = 37.58^\circ\text{C}$$

在 $r = 0.16$ 米处,

$$P(0.16) = 1.7663, T_{r=0.16} = 35.71^\circ\text{C}$$

轴的悬伸部分温度场为

$$\begin{aligned}T &= \frac{T_a \text{ch}N_1(x - l')}{\text{ch}N_1 l'} = \frac{40.05 \text{ch}[5.72(x - 0.125)]}{\text{ch}(5.72 \times 0.125)} \\ &= 31.62 \text{ch}[5.72(x - 0.125)]\end{aligned}$$

$$(0 \leq x \leq 0.1 \text{ 米})$$

轴在两支承之间部分的温度场为

$$\begin{aligned}T &= \frac{T_a [\text{sh}N_1(L_1 - x) + \text{sh}N_1 x]}{\text{sh}N_1 L_1} = \frac{40.05}{\text{sh}(2.86)} [\text{sh}N_1(0.5 - x) + \text{sh}N_1 x] \\ &= 4.602 \{ \text{sh}[5.72(0.5 - x)] + \text{sh}(5.72 x) \}\end{aligned}$$

$$(0 \leq x \leq 0.5 \text{ 米})$$

当 $x = 0.25$ 米, $T_{0.25} = 18.13^\circ\text{C}$ 。

(二) 阶梯轴及其支承系统的导热问题

图 3-25 为简化的阶梯轴及其支承系统。假定轴承 A、B 处的轴颈及轴承的温升分别为 T'_a 、 T'_b 。阶梯轴两直径交界处小直径一端的温升为 T_0 ，大直径一端的温升为 T'_0 。采用本小节 (一) 中的类似方法，得出

$$\Phi_a = \frac{2\pi(L - 2\delta)T'_a}{\frac{1}{r_2\alpha_f} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda}} - \frac{4\pi\lambda(Nr_1)^2\delta T'_a R(r_1)}{P(r_1)} + \lambda_1\pi r_1^2 N_1 \left[T'_a \text{th}(N_1 l'_1) + \frac{(T'_a \text{ch} N_1 L_1 - T_0)}{\text{sh} N_1 L_1} \right] = (fpv)_a \quad (3-88)$$

$$\Phi_b = \frac{2\pi(L' - 2\delta)T'_b}{\frac{1}{r_4\alpha_f} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{\lambda}} - \frac{4\pi\lambda(Nr_3)^2\delta T'_b R(r_3)}{P(r_3)} + \lambda_1\pi r_3^2 N_2 \left[T'_b \text{th}(N_2 l'_2) + \frac{(T'_b \text{ch} N_2 L_2 - T'_0)}{\text{sh} N_2 L_2} \right] = (fpv)_b \quad (3-89)$$

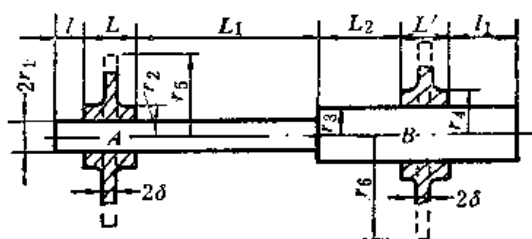


图3-25 阶梯轴及其支承系统

利用不等截面等效放热面积原则，根据式 (3-73) 及式 (3-71) 得出

$$T_0 = \frac{T'_a N_1 \text{sh} N_2 L'_2 + T'_b N_2 \text{sh} N_1 L_1}{N_2 \text{ch} N_2 L'_2 \text{sh} N_1 L_1 + N_1 \text{ch} N_1 L_1 \text{sh} N_2 L'_2} \quad (3-90)$$

$$T'_0 = \frac{T_0 \text{sh} N_2 x + T'_b \text{sh} N_2 (L'_2 - x)}{\text{sh} N_2 L'_2} \Big|_{x=L_2} = \frac{T_0 \text{sh} N_2 L_2 + T'_b \text{sh} N_2 (L'_2 - L_2)}{\text{sh} N_2 L'_2} \quad (3-91)$$

式中 $N = \sqrt{\frac{\alpha_f}{\lambda\delta}}$

$$N_1 = \sqrt{\frac{\alpha_s p_1}{\lambda_1 A_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha_s}{\lambda_1 r_1}}$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{2\alpha_{s1}}{\lambda_1 r_3}}$$

$$l'_1 = l_1 + \frac{r_1}{2}$$

$$l'_2 = l_2 + \frac{r_3}{2}$$

$$L'_2 = L_2 + \Delta r = L_2 + (r_3 - r_1)$$

将式 (3-88)~(3-91) 联列求解，便可求出 T'_a 、 T'_b 、 T_0 及 T'_0 ，从而求出各部分的温度场。

例题17 在图 3-25 的简化阶梯轴系统中, 若 $l_1 = 100$ 毫米, $l = 100$ 毫米, $L = L' = 100$ 毫米, $L_1 = L_2 = 300$ 毫米, $r_1 = 40$ 毫米, $r_2 = 70$ 毫米, $r_3 = 50$ 毫米, $r_4 = 80$ 毫米, $r_5 = 120$ 毫米, $r_6 = 150$ 毫米。 $f_A = f_B = 0.1$, $n = 120$ 转/分, $P_A = 200$ 公斤力, $P_B = 300$ 公斤力, $\delta = 10$ 毫米, λ 、 λ_1 、 α_f 及 α_{s1} 均与例题 16 相同, 试求各部分的温度场。

解

$$N = \sqrt{\frac{\alpha_f}{\lambda \delta}} = \sqrt{\frac{8}{62.8 \times 0.01}} = 3.57 \text{ 米}^{-1}$$

$$N_1 = \sqrt{\frac{2\alpha_{s1}}{\lambda_1 r_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 38}{46.5 \times 0.04}} = 6.39 \text{ 米}^{-1}$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{2\alpha_{s1}}{\lambda_1 r_3}} = \sqrt{\frac{2 \times 38}{46.5 \times 0.05}} = 5.72 \text{ 米}^{-1}$$

$$l'_1 = l_1 + \frac{r_3}{2} = 0.1 + \frac{0.05}{2} = 0.125 \text{ 米}$$

$$l' = l + \frac{r_1}{2} = 0.1 + \frac{0.04}{2} = 0.12 \text{ 米}$$

$$L'_2 = L_2 + (r_3 - r_1) = 0.3 + (0.05 - 0.04) = 0.31 \text{ 米}$$

$$\Phi_A = (fpv)_A = 0.1 \times 200 \times 2\pi(0.04) \left(\frac{120}{60} \right) = 10.05 \text{ 公斤力} \cdot \text{米/秒} = 98.59 \text{ 瓦}$$

$$\Phi_B = (fpv)_B = 0.1 \times 300 \times 2\pi(0.05) \left(\frac{120}{60} \right) = 18.85 \text{ 公斤力} \cdot \text{米/秒} = 184.9 \text{ 瓦}$$

由式 (3-62),

$$P(r_1) = K_1(Nr'_6)I_0(Nr_1) + I_1(Nr'_6)K_0(Nr_1)$$

$$r'_6 = r_6 + \delta = 0.12 + 0.01 = 0.13 \text{ 米}$$

$$Nr'_6 = 3.57 \times 0.13 = 0.4641$$

$$Nr_1 = 3.57 \times 0.04 = 0.1428$$

故 $P(r_1) = K_1(0.4641)I_0(0.1428) + I_1(0.4641)K_0(0.1428)$

$$= \frac{\pi}{2}(1.17562)(1.00571) + \frac{\pi}{2}(0.23855)(1.36139) = 2.3673$$

由式 (3-64),

$$R(r_1) = \frac{1}{Nr_1} \{K_1(Nr'_6)I_1(Nr_1) - I_1(Nr'_6)K_1(Nr_1)\}$$

$$= \frac{1}{0.1428} \{K_1(0.4641)I_1(0.1428) - I_1(0.4641)K_1(0.1428)\}$$

$$= \frac{\pi}{2 \times 0.1428} \{(1.17562)(0.07167) - (0.23855)(4.88756)\} = -11.898$$

对于轴承 B, $r'_6 = r_6 + \delta = 0.15 + 0.01 = 0.16$ 米, $P(r_3)$ 及 $R(r_3)$ 与上例的 $P(r_1)$ 及 $R(r_1)$ 相同, 故得

$$P(r_3) = 1.981$$

$$R(r_3) = -9.07$$

$$\text{th}(N_1 l') = \text{th}(6.39 \times 0.12) = \text{th}(0.7668) = 0.64506$$

$$\text{th}(N_2 l'_1) = \text{th}(5.72 \times 0.125) = \text{th}(0.715) = 0.613803$$

$$\operatorname{ch}N_1L_1 = \operatorname{ch}(6.39 \times 0.3) = \operatorname{ch}(1.917) = 3.47379$$

$$\operatorname{ch}N_2L_2 = \operatorname{ch}(5.72 \times 0.3) = \operatorname{ch}(1.716) = 2.87101$$

$$\operatorname{sh}(N_1L_1) = \operatorname{sh}(1.917) = 3.32674$$

$$\operatorname{sh}(N_2L_2) = \operatorname{sh}(1.716) = 2.69123$$

$$\operatorname{sh}N_2L'_2 = \operatorname{sh}(5.72 \times 0.31) = \operatorname{sh}(1.7732) = 2.85994$$

$$\operatorname{ch}N_2L'_2 = \operatorname{ch}(1.7732) = 3.02973$$

$$\operatorname{sh}N_2(L'_2 - L_2) = \operatorname{sh}(5.72 \times 0.01) = \operatorname{sh}(0.0572) = 0.05723$$

$$\frac{2\pi(L - 2\delta)T_a}{\frac{1}{r_2\alpha_f} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda}} = \frac{2\pi(0.1 - 0.02)T_a}{\frac{1}{0.07 \times 8} + \frac{\ln\left(\frac{0.07}{0.04}\right)}{62.8}} = 0.28009T_a$$

$$\frac{2\pi(L' - 2\delta)T_b}{\frac{1}{r_4\alpha_f} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{\lambda}} = \frac{2\pi(0.1 - 0.02)T_b}{\frac{1}{0.08 \times 8} + \frac{\ln\left(\frac{0.08}{0.05}\right)}{62.8}} = 0.32017T_b$$

$$-\frac{4\pi\lambda N^2 r_1^2 \delta R(r_1)T_a}{P(r_1)} = -\frac{4\pi(62.8)(0.1428)^2(0.01)(-11.898)T_a}{2.3673} = 0.80881T_a$$

$$-\frac{4\pi\lambda N^2 r_3^2 \delta R(r_3)T_b}{P(r_3)} = -\frac{4\pi(62.8)(3.57 \times 0.05)^2(0.01)(-9.07)T_b}{1.981} = 1.15125T_b$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \pi r_1^2 N_1 \left[T_a \operatorname{th}(N_1 L'_1) + \frac{T_a \operatorname{ch}N_1 L_1 - T_b}{\operatorname{sh}N_1 L_1} \right] \\ &= 46.5\pi(0.04)^2(6.39) \left[0.64506T_a + \frac{3.47379T_a - T_b}{3.32674} \right] \\ &= 2.52302T_a - 0.448957T_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \pi r_2^2 N_2 \left[T_b \operatorname{th}(N_2 L'_2) + \frac{T_b \operatorname{ch}N_2 L_2 - T'_b}{\operatorname{sh}N_2 L_2} \right] \\ &= 46.5\pi(0.05)^2(5.72) \left[0.613803T_b + \frac{2.87101 - T'_b}{2.69123} \right] = 3.51077T_b - 0.77623T'_b \end{aligned}$$

将有关数据代入式 (3-88)~(3-91), 得

$$\begin{aligned} \phi_a &= 0.28009T_a + 0.80881T_a + 2.52302T_a - 0.44896T_b \\ &= 3.61192T_a - 0.44896T_b = 98.59 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \phi_b &= 0.32017T_b + 1.15125T_b + 3.51077T_b - 0.77623T'_b \\ &= 4.98219T_b - 0.77623T'_b = 184.9 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} T_b &= \frac{6.39 \times 2.85994T_a + 5.72 \times 3.32674T_b}{5.72 \times 3.02973 \times 3.32674 + 6.39 \times 3.47379 \times 2.85994} \\ &= 0.15086T_a + 0.15709T_b \end{aligned} \quad (3)$$

$$T'_b = \frac{2.69123T_b + 0.05723T_b}{2.85994} = 0.94101T_b + 0.02001T_b \quad (4)$$

将式 (1)、(2)、(3)、(4) 联解, 得出

$$T_a = 28.59^\circ\text{C}, T_b = 38.76^\circ\text{C}, T'_b = 10.40^\circ\text{C}, T'_a = 10.56^\circ\text{C}$$

求出上述温升之后, 便不难求各自的温度场了。

第四章 有限单元法在求解导热 微分方程中的应用

我们在 § 2-7 中已经讲过, 对于大多数比较复杂的多维导热微分方程采用解析法求解比较困难, 甚至无法求出答案, 往往采用一些近似的解法。目前广泛采用的近似算法为在电子计算机配合下的有限单元法和有限差分法。这两种数值算法的共同特点是先把求解区域按一定方法进行离散化, 即把求解区域划分成一定形式的网格, 如图 4-1 所示的有限单元格式。网格的交点称为节点, 它们形成一系列有秩序的离散点而构成一定形式的离散化格式。然后根据所选用方法的基本原理(计算格式或数学模型)分别算出各离散点的近似函数(或温度)值。有限单元法和有限差分法所选用的网格格式和计算格式(数学模型)是各不相同的, 但它们都是用各离散点的近似函数值所形成的线性方程组来代替复杂的多维的微分方程, 从而使复杂的微分方程的求解简化为线性方程组的求解。线性方程组是建立在离散点函数的线性化基础之上的, 即以断续的离散点上近似的线性函数代替求解区内连续的非线性函数。离散点数不宜过少。方程组内的方程数与求解区域内的函数值为未知的离散点的个数相同。这些数值算法的优越性是显而易见的。在本章内, 我们介绍有限单元法的应用。

§ 4-1 平面稳定温度场的有限单元格式

我们把求解的连续区域 $\Omega + \Gamma$ (Ω 为求解区域, Γ 为它的边界) 划分为由有限个互不重叠的单元网格, 通常采用三角形的单元网格, 如图 4-1 所示。但需注意, 不能把一个三角形的顶点取在另一个相邻三角形的边的内点上。因此, 如图 4-2 a 中的划分方式是不允许的, 而应该采用图 4-2 b 中的划分方式。这种划分要遍及整个区域直至边界为止。当边界为曲线时, 可在每一小段上近似地用相应的直线代替, 并取为三角形单元的一边。这样便将连续的区域离散化了。

在有限单元法中, 网格的形状不一定象后面的有限差分法中非直交网格不可, 也不限定非三角形网格不可, 只是通常采用三角形网格而已。三角形的大小和形状也不要求一律, 这就为单元的划分带来了灵活性, 但三角形三边的长短不宜相差过大, 以免影响计算的精度。每个单元的三个顶点均取为节点。单元的数目越多计算精度越高, 计算工作量亦因之而越大。因此, 单元数目的选取是与计算精度的要求及计算工作量息息相关的。

在划分单元的求解区域内将所有的节点及单元分别按一定的顺序从 1 开始进行编号, 节点的编号为没有圆圈的数字, 单元编号为有圆圈的数字(如图 4-1 所示)。采用右手直角坐标系(x 向右为正, y 向上为正, 图 4-3 所示), 其中构成某一三角形单元 e 的三个节点的编号 $i[e]$, $j[e]$ 及 $m[e]$ 按逆时针顺序排列。诸单元的任一节点 l 的座标 (x_l, y_l) 都是计算所需的信息。

为了统一计算格式, 我们在划分单元时规定每个边界单元只有一条边落在边界曲线 Γ 上, 并且在安排信息输入时应将与这一边相对的顶点作为本单元三节点的第一点, 即取为

$i \in e$], 例如在图 4-1 上, 单元①的边 $\overline{12}$ 落在边界上, 则与 $\overline{12}$ 边相对的顶点 9 便应取 $i \in \Gamma$ 点, 余类推。

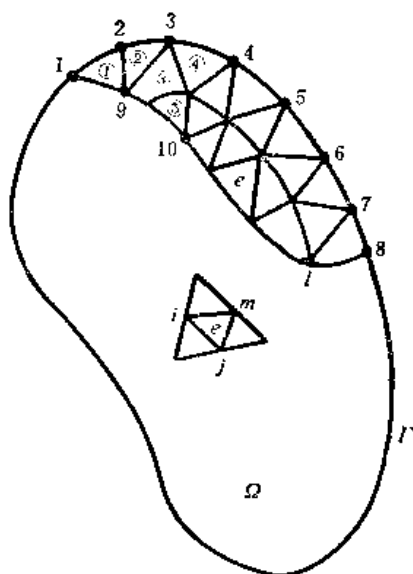


图 4-1

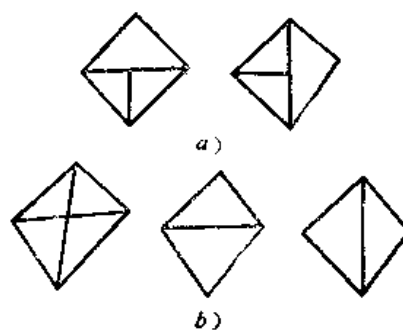


图 4-2

§ 4-2 有限单元法的基本原理及进行步骤

有限单元法的基本原理是泛函取极值问题 (或称变分问题)。一般的导热微分方程均可建立与之相应的泛函 x , 而且使这个泛函取极值 (即使本泛函变分之后, 取 $\delta x = 0$, δx 为泛函 x 的变分) 之后所获得的微分方程 (称为欧拉方程), 就是建立泛函时所依据的原微分方程, 因而泛函取极值所获的解便为原微分方程的解。

为此, 有限单元法的进行步骤如下:

1. 对求解区域进行离散化, 通常建立三角形网格 (也可建立其它形式的网格), 并进行单元与节点的编号。

2. 根据原微分方程及其边界条件建立它们的泛函。所谓泛函是指函数的函数, 亦即其自变量是函数。例如原微分方程中的 t 为 $f(x, y)$, 即 t 为 x, y 的函数, 而由原微分方程及其边界条件所确定的泛函 x 则为 t 的函数, 因而泛函是函数的函数。泛函取极值是变分问题, 有关变分原理及泛函的建立问题参看附录三。泛函 x 的形式与原微分方程及其边界条件密切相关, 原微分方程不同, 泛函不同, 即使原微分方程相同而边界条件不同, 其结果的泛函也不相同。各种不同情况下的泛函形式, 详见下节。

3. 建立单元内部温度 t 的近似函数, 利用单元三个节点的温度值 (t_i, t_j, t_m) 通过线性插值来建立这个函数 t 。

4. 根据求解区内的泛函 (即前面建立的泛函) 建立单元 e 的泛函并把整个区间诸单元的泛函叠加起来求取其极值。最后算出各离散点的近似函数值 (即温度值)。

现将有关内容分述于后。

§ 4-3 各类不同温度场的泛函的构成

根据附录三变分原理简介所介绍的建立泛函的方法, 我们写出下列各类温度场的泛函。

一、一般的导热微分方程所描绘的温度场的泛函

它的微分方程的一般形式为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v'' = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (4-1)$$

其边界条件的一般形式为

$$\left(\lambda_x \frac{\partial t}{\partial x} \cos \alpha + \lambda_y \frac{\partial t}{\partial y} \cos \beta + \lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \cos \gamma \right) + \alpha_s (t - t_f) + q_s'' = 0 \quad (4-2)$$

式 (4-1) 及式 (4-2) 的对应泛函为

$$\begin{aligned} X = & \iiint_V \left[\lambda_x \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 - 2 t \left(q_v'' - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) \right] dV \\ & + \iint_S [\alpha_s t^2 + 2 (q_s'' - \alpha_s t_f) t] dS \end{aligned} \quad (4-3)$$

式中 $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ —— x, y, z 方向的导热系数;

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ —— 边界曲面 S 的外法线 n 的方向余弦;

q_s'' —— 单位周界表面的发热强度;

其它符号同前。

当 $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$, 则式 (4-1) 变成式 (2-77), 式 (4-2) 便为

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha_s (t - t_f) + q_s'' = 0 \quad (4-4)$$

式中 $\frac{\partial t}{\partial n}$ —— 周界外法线方向的温度梯度。

若 $q_s'' = 0$, 则式 (4-4) 变成

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha_s (t - t_f) = 0 \quad (4-5)$$

此即大家所熟知的第三种边界条件。

若三向的导热系数相同, $\alpha_s (t - t_f) = 0$, 则式 (4-2) 为

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + q_s'' = 0 \quad (4-6)$$

此即为第二种边界条件。

二、无内热源稳定温度场的泛函

由于 $q_v'' = 0, \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$, 故式 (4-3) 变成

$$X = \iiint_V \left[\lambda_x \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \iint_S [\alpha_s t^2 + 2 (q_s'' - \alpha_s t_f) t] dS \quad (4-7)$$

三、三向导热系数相同的无内热源稳定温度场

式(4-7)变成

$$\chi = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \iint_S \left[\frac{\alpha_s}{\lambda} t'^2 + \frac{2}{\lambda} (q'_s - \alpha_s t_f) t \right] dS \quad (4-8)$$

其相应的导热微分方程为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

1. 若边界条件为第三种边界条件, 式(4-5)

$$-\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{\alpha_s}{\lambda} (t - t_f) = 0$$

此时 $q'_s = 0$, 故式(4-8)变成

$$\begin{aligned} \chi &= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \iint_S \left[\frac{\alpha_s}{\lambda} t^2 - \frac{2}{\lambda} \alpha_s t_f t \right] dS \\ &= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \iint_S [\sigma t^2 - 2vt] dS \end{aligned} \quad (4-9)$$

式中 $\sigma = \frac{\alpha_s}{\lambda}$, $v = \frac{\alpha_s}{\lambda} t_f$

2. 若边界条件为第二种边界条件, 式(4-6)

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + q'_s = 0$$

此时 $\alpha_s (t - t_f) = 0$, 式(4-8)变成

$$\chi = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \iint_S \frac{2}{\lambda} q'_s t dS \quad (4-10)$$

3. 若边界条件为第一种边界条件: $t|_s = f(x, y, z)$, 其对应的泛函为

$$\chi = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right] dV \quad (4-11)$$

式(4-11)的明显特点是对应于边界上的面积分为零, 即式(4-8)的第二个积分为零, 因为在此种边界条件下, 边界上的温度是固定的, 其变分为零, $\delta(t|_s) = 0$ 。因而在第一种边界条件下, 泛函 χ 中没有与 $t|_s$ 有关的项。

四、二维平面稳定温度场的泛函

1. 第三种边界条件、无内热源温度场

其微分方程为

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (4-12)$$

其边界条件为

$$\left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha_s (t - t_f) \right]_r = 0$$

或可写成

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \sigma t \right) \Big|_r = v$$

式中 $\sigma = \frac{\alpha_s}{\lambda} \geq 0$ ，且至少在一部分边界上 $\sigma > 0$ ；

$$v = \frac{\alpha_s}{\lambda} t_f, \quad t_f \text{ 是周围介质温度。}$$

其相应的泛函为

$$\chi = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma} (\sigma t^2 - 2vt) ds \quad (4-13)$$

2. 第一种边界条件、无内热源温度场的泛函

$$\chi = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4-14)$$

§ 4-4 建立二维平面稳定系统单元内部温度 t 的近似函数

为了计算单元的泛函，必须建立单元内部的温度函数 t 。假定在任一单元 e 的三个节点 i 、 j 、 m （按逆时针顺序排列）上的温度值为 t_i 、 t_j 、 t_m ，三点的座标分别为 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 、 (x_m, y_m) ，如图 4-3 所示，则建立单元内部温度函数 t 的一种较为简单的方法是利用节点上的函数值 (t_i, t_j, t_m) 进行线性插值以使单元 e 内的温度 t 是 x 、 y 的近似线性函数。兹令单元 e 内温度函数 t 为

$$t = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (4-15)$$

式中 常数 α_1 、 α_2 及 α_3 可由节点上的温度值来决定。

将节点座标及其上的温度值代入式 (4-15)，可得如下的联立方程组

$$\begin{aligned} t_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ t_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ t_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \quad (4-16)$$

将式 (4-16) 写成如下的矩阵形式：

$$\{t\}^e = \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (4-17)$$

因此解得，

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \quad (4-18)$$

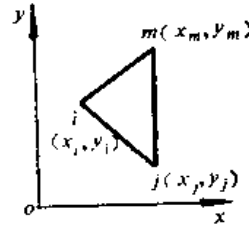


图 4-3

式中 $\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1}$ 为矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

通过计算, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} x_j y_m - x_m y_j & x_m y_i - x_i y_m & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_m & y_m - y_i & y_i - y_j \\ x_m - x_j & x_i - x_m & x_j - x_i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-19)$$

$$\text{故} \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \quad (4-20)$$

$$\text{式中} \quad \left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned} \right\} \text{其余循环定义} \quad (4-21)$$

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i) \quad (4-22)$$

是三角形的面积

$$\text{由于} \quad t = a_1 + a_2 x + a_3 y = [1, x, y] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

这样我们得到单元 e 上的温度插值函数为

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2\Delta_e} [1, x, y] \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta_e} [a_i + b_i x + c_i y, a_j + b_j x + c_j y, a_m + b_m x + c_m y] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4-23)$$

上式也可表达成:

$$t = \frac{1}{2\Delta_e} \sum_{i,j,m} [a_i + b_i x + c_i y] t_i$$

式中 $\sum_{i,j,m}$ 表示对指标轮流作和, 例如

$$\sum_{i,j,m} a_i t_i = a_i t_i + a_j t_j + a_m t_m$$

由于采用的是线性插值, 在任意二相邻的公共边上, 这样构造的插值函数显然是能保持连续而满足相容性条件*的。有了单元 e 的温度插值函数便可建立单元 e 的泛函。

§ 4-5 单元 e 的泛函及对整个平面求解区间的

泛函求极值——第三种边界条件无内热源

平面稳定温度场的求解

我们已经把导温体的求解全区域划分成若干个有限的单元, 因而导温体的泛函可以写成诸单元的泛函之和, 对于式 (4-13) 可以写成

$$\chi = \sum_e \chi^e$$

式中 \sum_e 表示对所有单元求和;

χ^e 为单元 e 上的泛函, 它是

$$\chi^e = \iint_e \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma \cap e} (\sigma t^2 - 2vt) ds \quad (4-24)$$

其中 \iint_e 表示在三角形单元 e 上求面积分; $\int_{\Gamma \cap e}$ 表示在三角形单元与全区域的周界有共同周界部分上积分, $\Gamma \cap e$ 表示 Γ 与 e 的公共部分, 亦即 e 的周界与全区域周界 Γ 交集, \cap 为交集符号。当单元与全区域的周界有共同周界时, 才对此共同周界求线积分; 至于内部单元上, 单元与全区无共同的周界而毋需积分, 因而其此项积分为零。

由式 (4-24) 可以看到: 在一定的单元划分情况下, 泛函 χ^e 完全确定于其节点的温度。因此, χ 的极值条件为 χ 对诸节点温度 t_i 的偏微商各各为零, 即

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial t_i} \right\} = \sum_e \frac{\partial \chi^e}{\partial t_i} = 0 \quad (4-25)$$

式中 $i = 1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, m, \dots, n$, n 为全区域节点的总数。

因此, χ 必须对所有节点温度进行偏微分。

* 相容性条件是指具有公共边的两相邻单元上的函数在公共边上既不嵌入又不裂开而完全相容。

应用式 (4-25) 计算时, 我们先针对一个典型的单元 x^e 求出 $\frac{\partial x^e}{\partial t_i}$, 再把所有单元的这个相应的项相加起来, 然后令相加之和等于零。在典型三角形单元 x^e 中, 其三个顶点为 i, j, m (逆时针方向)。根据式 (4-24), 我们先对其等号右边的第一部分 (面积分部分) 进行计算。

$$\begin{aligned} \text{令} \quad x^e &= \iint_e \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ \frac{\partial x^e}{\partial t_i} &= 2 \iint_e \left[\frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (4-26)$$

由单元 e 上插值函数式 (4-23), 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta_e} [b_i, b_j, b_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \\ \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta_e} [c_i, c_j, c_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-27)$$

很明显式 (4-27) 中偏微商仅是 t_i, t_j, t_m 的函数。再对 t_i 求偏导数, 则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) &= \frac{b_i}{2\Delta_e} \\ \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right) &= \frac{c_i}{2\Delta_e} \end{aligned} \quad (4-28)$$

代入式 (4-26) 并积分之, 得

$$\frac{\partial x^e}{\partial t_i} = 2 \iint_e \left[\frac{1}{2\Delta_e} [b_i, b_j, b_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \frac{b_i}{2\Delta_e} + \frac{1}{2\Delta_e} [c_i, c_j, c_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \frac{c_i}{2\Delta_e} \right] dx dy$$

由于被积函数中所有各量均不随座标而变, 可以当作常数来看, 而 $\iint_e dx dy$ 为三角形面积 Δ_e , 故得

$$\frac{\partial x^e}{\partial t_i} = \frac{b_i}{2\Delta_e} [b_i, b_j, b_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} + \frac{c_i}{2\Delta_e} [c_i, c_j, c_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix}$$

因而得出

$$\frac{\partial x^e}{\partial t_i} = \frac{1}{2\Delta_e} [b_i b_i + c_i c_i, b_i b_j + c_i c_j, b_i b_m + c_i c_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix}$$

同理可得

$$\frac{\partial x^e}{\partial t_j} = \frac{1}{2\Delta_e} [b_i b_j + c_i c_j, b_j b_j + c_j c_j, b_j b_m + c_j c_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \quad (4-29)$$

$$\frac{\partial \chi_{\lambda}^e}{\partial t_m} = \frac{1}{2\Delta_e} [b_i b_m + c_i c_m, b_j b_m + c_j c_m, b_m b_m + c_m c_m] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix}$$

式(4-29)中三个式子,可以合并成下列矩阵的形式:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi_{\lambda}^e}{\partial t_i} \\ \frac{\partial \chi_{\lambda}^e}{\partial t_j} \\ \frac{\partial \chi_{\lambda}^e}{\partial t_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ii} & h_{ij} & h_{im} \\ h_{ji} & h_{jj} & h_{jm} \\ h_{mi} & h_{mj} & h_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} = [h_{\lambda}]^e \{t\}^e \quad (4-30)$$

式中 $[h_{\lambda}]^e$ ——与单元座标有关的矩阵;
 $\{t\}^e$ ——单元节点温度的列向量;

$$h_{rs} = \frac{1}{2\Delta_e} (b_r b_s + c_r c_s) \quad (r = i, j, m; s = i, j, m) \quad (4-31)$$

再计算式(4-24)中的第二部分(线积分部分)。

$$\text{令} \quad \chi_s^e = \int_{\Gamma \cap e} (\sigma t^2 - 2vt) ds \quad (4-32)$$

在前面我们已经规定:每一个边界单元,只能有一条边落在边界上,与这一边界相对的顶点规定为 i 。设该边的边界条件有关公式中的 σ 及 v 值用其平均值来代替,并分别记为 σ_i 及 v_i (其含义为 i 对边上的 σ 及 v 的平均值)。

对于上述用线性插值方法建立起来的插值函数 t , 式(4-23), 其在 \overline{jm} 边上之值,自然也是在 t_j 与 t_m 间线性变化的。如果以 β 表示 \overline{jm} 边上的变动参数,而且对应于 j 点, $\beta = 0$, 对应于 m 点, $\beta = 1$, 则在 \overline{jm} 边上,此插值函数 t 可写为:

$$t = (1 - \beta)t_j + \beta t_m \quad (0 \leq \beta \leq 1) \quad (4-33)$$

很明显,这个式子表示 t 在 \overline{jm} 边界上的变化是线性的,并满足当 $\beta = 0$ 时, $t = t_j$ 及当 $\beta = 1$ 时, $t = t_m$ 的要求。

若记 \overline{jm} 边(即 i 的对边)的长度为 s_i , 则

$$s_i = \sqrt{(x_j - x_m)^2 + (y_j - y_m)^2} = \sqrt{b_i^2 + c_i^2} \quad (4-34)$$

那么,易知参数

$$\beta = \frac{s}{s_i} \quad (4-35)$$

式中 s 是 \overline{jm} 边上以 j 点算起的弧长参数。把式(4-33)、式(4-35)代入式(4-32)并整理,这样 χ_s^e 就可写成:

$$\begin{aligned} \chi_s^e = s_i \int_0^1 \{ & \sigma_i [(1 - \beta)t_j + \beta t_m]^2 \\ & - 2v_i [(1 - \beta)t_j + \beta t_m] \} d\beta \end{aligned} \quad (4-36)$$

从而可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_s^e}{\partial t_i} &= 0 \\ \frac{\partial X_s^e}{\partial t_j} &= s_i \int_0^1 2\{\sigma_i(1-\beta)[(1-\beta)t_j + \beta t_m] - v_i(1-\beta)\} d\beta \\ &= \frac{2\sigma_i s_i}{3} t_j + \frac{\sigma_i s_i}{3} t_m - v_i s_i \\ \frac{\partial X_s^e}{\partial t_m} &= s_i \int_0^1 2\{\sigma_i \beta [(1-\beta)t_j + \beta t_m] - v_i \beta\} d\beta \\ &= \frac{\sigma_i s_i}{3} t_j + \frac{2\sigma_i s_i}{3} t_m - v_i s_i \end{aligned} \quad (4-37)$$

式 (4-37) 中的三式可以合并成矩阵方程:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_s^e}{\partial t_i} \\ \frac{\partial X_s^e}{\partial t_j} \\ \frac{\partial X_s^e}{\partial t_m} \end{pmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_i s_i}{3} & \frac{\sigma_i s_i}{6} \\ 0 & \frac{\sigma_i s_i}{6} & \frac{\sigma_i s_i}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v_i s_i \\ v_i s_i \end{pmatrix} = [h_s]^e \{t\}^e - \{p\}^e \quad (4-38)$$

式中 $\{p\}$ ——与周边介质温度有关的列向量;
 $[h_s]$ ——与 s_i 有关的矩阵。

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^e}{\partial t_i} &= \frac{\partial X_A^e}{\partial t_i} + \frac{\partial X_s^e}{\partial t_i} \\ \frac{\partial X^e}{\partial t_j} &= \frac{\partial X_A^e}{\partial t_j} + \frac{\partial X_s^e}{\partial t_j} \\ \frac{\partial X^e}{\partial t_m} &= \frac{\partial X_A^e}{\partial t_m} + \frac{\partial X_s^e}{\partial t_m} \end{aligned} \quad (4-39)$$

写成矩阵方程为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X^e}{\partial t_i} \\ \frac{\partial X^e}{\partial t_j} \\ \frac{\partial X^e}{\partial t_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_A^e}{\partial t_i} \\ \frac{\partial X_A^e}{\partial t_j} \\ \frac{\partial X_A^e}{\partial t_m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial X_s^e}{\partial t_i} \\ \frac{\partial X_s^e}{\partial t_j} \\ \frac{\partial X_s^e}{\partial t_m} \end{pmatrix} \quad (4-40)$$

将式 (4-30)、(4-38) 代入式 (4-40) 得,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X^e}{\partial t_i} \\ \frac{\partial X^e}{\partial t_j} \\ \frac{\partial X^e}{\partial t_m} \end{pmatrix} = [h_A]^e \{t\}^e + [h_s]^e \{t\}^e - \{p\}^e$$

$$= \begin{bmatrix} h_{ii} & h_{ij} & h_{im} \\ h_{ji} & h_{jj} + \frac{2\sigma_j s_j}{3} & h_{jm} + \frac{\sigma_j s_j}{3} \\ h_{mi} & h_{mj} + \frac{\sigma_j s_j}{3} & h_{mm} + \frac{2\sigma_j s_j}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ v_j s_j \\ v_j s_j \end{Bmatrix} \quad (4-41)$$

若 e 是内部单元则 $s_i = 0$ ，故对内部单元来讲

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial X^e}{\partial t_i} \\ \frac{\partial X^e}{\partial t_j} \\ \frac{\partial X^e}{\partial t_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ii} & h_{ij} & h_{im} \\ h_{ji} & h_{jj} & h_{jm} \\ h_{mi} & h_{mj} & h_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_m \end{Bmatrix} \quad (4-30)$$

前已述及， x 的极值条件为式 (4-25)，即

$$\left\{ \frac{\partial X}{\partial t_i} \right\} = \sum_e \frac{\partial X^e}{\partial t_i} = 0$$

为了计算 x 的极值，必须先把式 (4-25) 中的有关量分别填到求解全区域的相应地址（节点序号）上，再逐一叠加起来。为此，进行以下的工作：

把 $[h_{ij}]^e$ 扩大为 $[\tilde{h}_{ij}]^e$ ，即

$$[\tilde{h}_{ij}]^e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 1, & 2, & \dots, & i, & \dots, & j, & \dots, & m, & \dots, & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right. \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array} \quad (4-42)$$

$[\tilde{h}_{ij}]^e$ 为 n 阶方阵，其地址按全区域的节点序号安排，3 阶方阵 $[h_{ij}]^e$ 中九个元素分别在 n 阶方阵中按相应的地址落户。在新方阵的外上方写出一行地址，按节点 1、2、……、 n 的次序排列，并在此方阵的右外方写出一列地址，也按 1、2、……、 n 排列， $[h_{ij}]^e$ 中的 9 个元素就很容易地在 $[\tilde{h}_{ij}]^e$ 中落户了，例如，当某单元的节点 i 、 j 、 m 在 n 节点中的序号为 3、6、7 时，则 h_{ii} 填在 h_{33} 的位置， h_{ij} 填在 h_{36} 的位置，余类推。这样， h_{ii} 、 h_{ij} 、 h_{mm} 相当于 n 阶方阵的对角线上某三个元素，而原来的 $[h_{ij}]^e$ 中其它元素在 $[\tilde{h}_{ij}]^e$ 中亦各占一个新的相应的位置。

§ 4-6 第一种边界条件无内热源平面稳定

温度场的求解

这个温度场的泛函如式 (4-14) 所示, 它与式 (4-13) 相比没有第二个积分部分, 亦即 $\chi' = 0$, 因而 $[h_s]^e$ 及 $\{p\}^e$ 均不存在。因此, 式 (4-50) 改成

$$[h_A]\{t\} = 0 \quad (4-52)$$

$$\text{式中 } [h_A] = \sum_e [\tilde{h}_A]^e \quad (4-53)$$

但应注意, 式 (4-52) 的 $\{t\}$ 中的温度有两种, 一为内节点温度 t_i , 另一为边界节点温度 t_s 。由于 t_s 为未知值, 它是可以变分的, 因而在式 (4-25) 中的每一个 $\frac{\partial \chi_s^e}{\partial t_s}$ 并不等于零, 只有所有单元的 $\frac{\partial \chi_s^e}{\partial t_s}$ 之和才等于零。而在边界节点上的温度 t_s 为已知值, 当式 (4-27) 的 t_i 、 t_j 、 t_m 中有一个为 t_s 时, 其 $\frac{\partial}{\partial t_s} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)$ 及 $\frac{\partial}{\partial t_s} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)$ 均为零, 致使式 (4-29) 内与 $\frac{\partial \chi_s^e}{\partial t_s}$ 有关的公式中的 1×3 阶矩阵内诸元素均为零, 即此矩阵变成 $[0 \ 0 \ 0]$, 因而使式 (4-30) 的 3×3 阶矩阵内与 t_s 有关的一行元素均为零。例如, 当 i 为边界节点时, $[h_A]^e$ 中与 i 行有关的元素 h_{ii} 、 h_{ij} 、 h_{im} 均为零。同理, 如果 j 也是一个边界节点, 则 h_{ji} 、 h_{jj} 及 h_{jm} 亦均为零 (即若有两点为边界节点则其中两行均为零)。这样, 由 $[h_A]^e$ 扩大而形成的 $[\tilde{h}_A]^e$ 中, 对应于每一个边界节点的那一行也全部为零。因此在热刚度方阵 $[h_A] = \sum_e [\tilde{h}_A]^e$ 中, 这一行也一定全部为零。也就是说, $[h_A]$ 中对应于边界节点的行全部为零。这样, 式 (4-52) 所表达的线性方程的数目, 就总是等于内节点的数目, 也就是 $\{t\}$ 向量中未知温度的个数等于线性方程的数目。

如果我们在节点编号时, 把 n_0 个内节点的温度取为 t_1, t_2, \dots, t_{n_0} 等 n_0 个未知数, 即将内节点的序号从 1 开始算起, 而将其余的边界节点的序号从 $n_0 + 1$ 算起, 它们的温度 $t_{n_0+1}, t_{n_0+2}, \dots, t_n$ 取为已知值, 于是在矩阵中, $n_0 + 1$ 以后各行均全部为零。在这样编号的情况下, 式 (4-52) 可改写为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial t_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \chi}{\partial t_{n_0}} \end{pmatrix} = [h_A]_{n_0 \times n} \{t\} = 0 \quad (4-54)$$

我们用 $[h_A]_{n_0 \times n}$ 以区别于方阵 $[h_A]_n$, $[h_A]_{n_0 \times n}$ 是把方阵 $[h_A]_n$ 中的第 $n_0 + 1$ 行以后诸行均作为零而划去之后的长方矩阵, 此长方矩阵的行数为 n_0 而列数为 n , 由于内节点的数目为 n_0 , 故外节点的数目为 $(n - n_0)$ 。

同时式 (4-53) 可改写成

$$[h_A]_{n_0 \times n} = \sum_e [\tilde{h}_A]_{n_0 \times n}^e \quad (4-55)$$

式中 $[\tilde{h}_A]_{n_0 \times n}^e$ 表示把 $[h_A]^e$ 扩大为 $n_0 \times n$ 阶矩阵, 即式 (4-53) 中对应于边界节点的行 ($n_0 + 1$ 行起以后的诸行) 均为零。例如某单元 e 的 j 及 m 均为边界节点时, 则 $[\tilde{h}_A]_{n_0 \times n}^e$ 没有 j 及 m 行, 即

$$[\tilde{h}_A]_{n_0 \times n}^e = \begin{matrix} & 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & m & \cdots & n \\ \left[\begin{array}{cccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & h_{ii} & \cdots & h_{ij} & \cdots & h_{jm} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right] & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n_0 \end{matrix} \end{matrix} \quad n_0 \times n \text{ 阶矩阵} \quad (4-56)$$

因为 j , m 行在 $n_0 + 1$ 行起以后故全为零, 而不列入到式 (4-56) 的矩阵中去。

这样, 便将使计算简化。不过应当注意: 内节点的序号必须从 1 编起, 依次编到 n_0 而边界节点 (外节点) 的序号从 $n_0 + 1$ 编起, 于是从 $n_0 + 1$ 起各行才能全等于零。

由于 $\{t\}$ 为 $n \times 1$ 的列阵, 它可以拆成 $n_0 \times 1$ 及 $(n - n_0) \times 1$ 的矩阵各一块, 即

$$[t_1 t_2 \cdots t_{n_0}]^T$$

及

$$[t_{n_0+1} t_{n_0+2} \cdots t_n]^T$$

而 $[h_A]_{n_0 \times n}$ 也拆成相应的两块, 分别为 $[h_A]_{n_0}$ 及 $[h_A]_{n_0 \times (n - n_0)}$, 于是式 (4-54) 改写成:

$$[h_A]_{n_0 \times n} \{t\} = [h_A]_{n_0} [t_1 t_2 \cdots t_{n_0}]^T + [h_A]_{n_0 \times (n - n_0)} [t_{n_0+1} \cdots t_n]^T = 0$$

从而得出

$$[h_A]_{n_0} [t_1 t_2 \cdots t_{n_0}]^T = -[h_A]_{n_0 \times (n - n_0)} [t_{n_0+1} t_{n_0+2} \cdots t_n]^T \quad (4-57)$$

这样, 便得到一个 n_0 元的线性方程组, 从而解出 $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{n_0}$ 之值。

§ 4-7 解题具体步骤

根据以上叙述, 应用有限单元法求解平面稳定温度场的具体步骤大致如下。

第一步 将求解区域划分成许多三角形单元 (三角形网格)。任选一个直角坐标系 (通常取 x 轴向右 y 轴向上为正的系), 编写各节点的顺序号码 (从内节点编起)、单元号码并定出所有单元上各节点的座标值, 即 $(x_i, y_i)^e, (x_j, y_j)^e, (x_m, y_m)^e$ 等。由于单元的划分具有一定的灵活性, 三角形大小和形状并不强求一致。在温度变动较大的部分把单元分得小些、密些, 在温度变动不大的部分就把单元分得大些、疏些。疏密的程度取决于计算精度的要求。

第二步 根据节点座标值用式 (4-21)、(4-22) 算出各单元相邻节点上的座标差值 ($b_i, c_i, b_j, c_j, b_m, c_m$) 及三角形面积 Δ_0 。再由求解区域的导热系数 λ 、边界的表面换热系数 α_0 及周围介质温度 t_f 算出 σ, ν 和 σ_i, ν_i 。根据式 (4-30)、(4-31)、(4-34) 及 (4-38) 算出各单元的 $[h_A]^e, [h_s]^e$ 及 $\{p\}^e$ 。如果是第一种边界条件, 则不必计算 $[h_s]^e$ 及 $\{p\}^e$ 。

第三步 根据式 (4-42)、(4-43)、(4-44) 及 (4-45) 把扩大的贡献矩阵 $[\tilde{h}_A]^e, [\tilde{h}_s]^e, \{\tilde{p}\}^e$ 及 $\{\tilde{f}\}^e$ 写出来。如果是第一种边界条件只需把 $[h_A]^e$ 扩大为 $[\tilde{h}_A]_{n_0 \times n_0}^e$ 。

第四步 利用式 (4-50) 或 (4-57) 的近似方程组, 将有关数据代入便能算出各节点温度的近似值。

在具体解题时, 可利用标准程序或自编程序用电子计算机进行运算, 也可用手工列表计算, 但以采用电子计算机为佳。

例题 1 设有一个摆线转子泵偏心套, 其内外径分别为 80 及 100 毫米, 偏心 e 为 4 毫米, 如图 4-4 所示。若内外表面的温度分别 35°C 和 30°C , 试用有限单元法计算其最薄处的温度分布。

解 为了说明计算方法, 我们仅划分成数量较少的单元 (在套的上半部仅分成 44 个单元), 并将问题进一步简化: 令单元⑫、⑬以节点 11 和 7 的连接线分界 (即以四边形的 11-7 实线对角线分界而不用它的另一虚线对角线分界), 于是求解区域便缩小成由两直线 8-4 和 11-7 所限制的区间。其中共有 12 个单元和 11 个节点, 其中内节点仅有三个, 编号为 1、2、

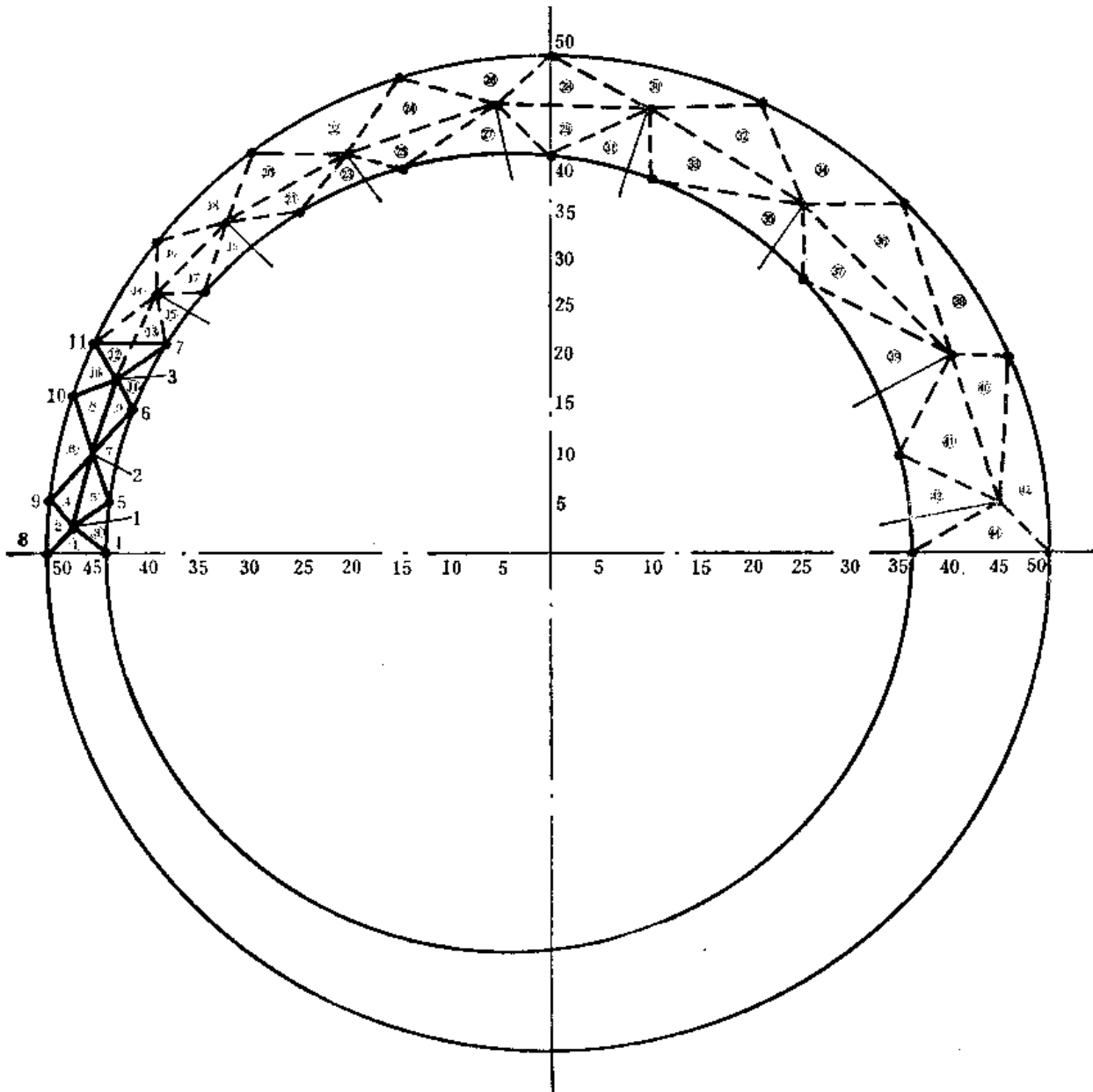


图 4-4

3. 计算区域以外的单元（以虚线表示）一律不加考虑，如图 4-4 所示。于是在式 (4-57) 中 $n_0 = 3$, $n = 11$ 。兹将列表法的计算过程分述如下：

(1) 12 个三角形单元各顶点的座标值抄录于表 4-1 第 1 列。顶点座标均在座标纸上读出，取整数值，题中规定是第一种边值条件，故不必计算 $[h_i]^e$ 及 $\{p\}^e$ 。

(2) 计算各单元的 $[h_i]^e$ ，先算第 (1) 单元。

1) 用公式 (4-21) 算出各相邻节点的座标差值：

$$\begin{array}{r} y_i \quad y_m \quad y_j \\ - y_m \quad y_i \quad y_j \\ \hline b_i \quad b_j \quad b_m \\ x_m \quad x_i \quad x_j \\ - x_j \quad x_m \quad x_i \\ \hline c_i \quad c_j \quad c_m \end{array}$$

把第①单元的座标值代入，得：

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 2 \\ - 0 \quad 2 \quad 0 \\ \hline (b_i, b_j, b_m) = 0, -2, 2, \end{array} \quad \begin{array}{r} -44 \quad -48 \quad -50 \\ - -50 \quad -44 \quad -48 \\ \hline (c_i, c_j, c_m) = 6 \quad -4 \quad -2) \end{array}$$

分别填入表 4-1 第 2、第 3 列。

2) 由公式 (4-22)，算出

$$\Delta_e = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i) = \frac{1}{2} [(0)(-4) - (-2)(6)] = 6$$

填入表 4-1 第 7 列。

3) 利用式 (4-31) 把公式 (4-30) 中的矩阵 $[h]^e$ 改写成如下的形式：

$$\begin{bmatrix} h_{ii} & h_{ij} & h_{im} \\ h_{ji} & h_{jj} & h_{jm} \\ h_{mi} & h_{mj} & h_{mm} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_m \end{Bmatrix} [b_i, b_j, b_m] + \frac{1}{2\Delta_e} \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_m \end{Bmatrix} [c_i, c_j, c_m]$$

先计算

$$\begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_m \end{Bmatrix} [b_i, b_j, b_m] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{Bmatrix} [0, -2, 2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

填入表 4-1 第 4 列。再计算

$$\begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_m \end{Bmatrix} [c_i, c_j, c_m] = \begin{Bmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{Bmatrix} [6, -4, -2] = \begin{bmatrix} 36 & -24 & -12 \\ -24 & 16 & 8 \\ -12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

填入表 4-1 第 5 列。

4) 把 4、5 列相加填入表 4-1 第 6 列并以 2 倍第 7 列之值除之，则得

$$\frac{1}{2(7)} [④ + ⑤] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 36 & -24 & -12 \\ -24 & 20 & 4 \\ -12 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

表4-1 例题1的

单元号	(1)	(2)	(3)	(4)
	$x_i \quad x_j \quad x_m$ $y_i \quad y_j \quad y_m$ 节点序号	$y_j \quad y_m \quad y_i$ $-y_m \quad y_i \quad y_j$ $b_i \quad b_j \quad b_m$	$x_m \quad x_i \quad x_j$ $-x_j \quad x_m \quad x_i$ $c_i \quad c_j \quad c_m$	$\begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_m \end{Bmatrix} [b_i, b_j, b_m]$
①	-48-50-44 +2 0 0 1 8 4	0 0 2 0 2 0 0 -2 2	-44-48-50 -50-44-48 6 -4 -2	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{Bmatrix} [0, -2, 2] = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{Bmatrix}$
②	-48-50-50 2 5 0 1 9 8	5 0 2 0 2 5 +5 -2 -3	-50-48-50 -50-50-48 0 2 -2	$\begin{Bmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{Bmatrix} [+5, -2, -3] = \begin{Bmatrix} 25 & -10 & -15 \\ -10 & 4 & 6 \\ -15 & 6 & 9 \end{Bmatrix}$
③	-48-44-44 2 0 5 1 4 5	0 5 2 5 2 0 -5 3 2	-44-48-44 -44-44-48 0 -1 4	$\begin{Bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} [-5, 3, 2] = \begin{Bmatrix} 25 & -15 & -10 \\ -15 & 9 & 6 \\ -10 & 6 & 4 \end{Bmatrix}$
④	-48-45-50 2 10 5 1 2 9	10 5 2 5 2 10 5 3 -8	-50-48-45 -45-50-48 -5 2 3	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{Bmatrix} [5, 3, -8] = \begin{Bmatrix} 25 & 15 & -40 \\ 15 & 9 & -24 \\ -10 & -24 & 64 \end{Bmatrix}$
⑤	-48-44-45 2 5 10 1 5 2	5 10 2 10 2 5 -5 8 -3	-45-48-44 -44-45-48 -1 -3 4	$\begin{Bmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{Bmatrix} [-5, 8, -3] = \begin{Bmatrix} 25 & -40 & 15 \\ -40 & 64 & -24 \\ 15 & -24 & 9 \end{Bmatrix}$
⑥	-45-49-50 10 12 5 2 10 9	12 5 10 5 10 12 7 -5 -2	-50-45-49 -49-50-45 -1 5 -4	$\begin{Bmatrix} 7 \\ -5 \\ -2 \end{Bmatrix} [7, -5, -2] = \begin{Bmatrix} 49 & -35 & -14 \\ -35 & 25 & 10 \\ -14 & 10 & 4 \end{Bmatrix}$
⑦	-45-44-42 10 5 12 2 5 6	5 12 10 12 10 5 -7 2 5	-42-45-44 -44-42-45 2 -3 1	$\begin{Bmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix} [-7, 2, 5] = \begin{Bmatrix} 49 & -14 & -35 \\ -14 & 4 & 10 \\ -35 & 10 & 25 \end{Bmatrix}$
⑧	-45-43-49 10 17 12 2 3 10	17 12 10 12 10 17 5 2 -7	-49-45-43 -43-49-45 -6 4 2	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{Bmatrix} [5, 2, -7] = \begin{Bmatrix} 25 & 10 & -35 \\ 10 & 4 & -14 \\ -35 & -14 & 49 \end{Bmatrix}$
⑨	-45-42-43 10 12 17 2 6 3	12 17 10 17 10 12 -5 7 -2	-43-45-42 -42-43-45 -1 -2 3	$\begin{Bmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{Bmatrix} [-5, 7, -2] = \begin{Bmatrix} 25 & -35 & 10 \\ -35 & 49 & -14 \\ 10 & -14 & 4 \end{Bmatrix}$
⑩	-43-46-49 17 20 12 3 11 10	20 12 17 12 17 20 8 -5 -3	-49-43-46 -46-49-43 -3 6 -3	$\begin{Bmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{Bmatrix} [8, -5, -3] = \begin{Bmatrix} 64 & -40 & -24 \\ -40 & 25 & 15 \\ -24 & 15 & 9 \end{Bmatrix}$
⑪	-43-42-39 17 12 20 3 6 7	12 20 17 20 17 12 -8 3 5	-39-43-42 -42-39-43 3 -4 1	$\begin{Bmatrix} -8 \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix} [-8, 3, 5] = \begin{Bmatrix} 64 & -24 & -40 \\ -24 & 9 & 15 \\ -40 & 15 & 25 \end{Bmatrix}$
⑫	-43-39-46 17 20 20 3 7 11	20 20 17 20 17 20 0 3 -3	-46-43-39 -39-46-43 -7 3 4	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{Bmatrix} [0, 3, -3] = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -9 & 9 \end{Bmatrix}$

12个单元计算表

(5)	(6)	(7)
$\begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_m \end{Bmatrix} [c_i, c_j, c_m]$	(4) + (5)	$\Delta_c = \frac{1}{2} [b_i c_j - b_j c_i]$
$\begin{Bmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{Bmatrix} [6, -4, -2] = \begin{Bmatrix} 36-24-12 \\ -24 \ 16 \ 8 \\ -12 \ 8 \ 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 36-24-12 \\ -24 \ 20 \ 4 \\ -12 \ 4 \ 8 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [0(-4) - (-2)6] = 6$
$\begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{Bmatrix} [0, 2, -2] = \begin{Bmatrix} 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 4 \ -4 \\ 0 \ -4 \ 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 25-10-15 \\ -10 \ 8 \ 2 \\ -15 \ 2 \ 13 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(5)(2) - (-2)(0)] = 5$
$\begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{Bmatrix} [0, -4, 4] = \begin{Bmatrix} 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 16 \ -16 \\ 0 \ -16 \ 16 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 25-15-10 \\ -15 \ 25 \ -10 \\ -10 \ -10 \ 20 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(-5)(-4) - (3)(0)] = 10$
$\begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} [-5, 2, 3] = \begin{Bmatrix} 25-10-15 \\ -10 \ 4 \ 6 \\ -15 \ 6 \ 9 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 50 \ 5 \ -55 \\ 5 \ 13 \ -18 \\ -55 \ -18 \ 73 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(5)(2) - (3)(-5)] = 12.5$
$\begin{Bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{Bmatrix} [-1, -3, 4] = \begin{Bmatrix} 1 \ 3 \ -4 \\ 3 \ 9 \ -12 \\ -4 \ -12 \ 16 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 26-37 \ 11 \\ -37 \ 73 \ -36 \\ 11 \ -36 \ 25 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(-5)(-3) - (8)(-1)] = 11.5$
$\begin{Bmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{Bmatrix} [-1, 5, -4] = \begin{Bmatrix} 1 \ -5 \ 4 \\ -5 \ 25 \ 20 \\ 4 \ -20 \ 16 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 50 \ -40 \ -10 \\ -40 \ 50 \ -10 \\ -10 \ -10 \ 20 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(7)(5) - (-5)(-1)] = 15$
$\begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} [2, -3, 1] = \begin{Bmatrix} 4 \ -6 \ 2 \\ -6 \ 9 \ -3 \\ 2 \ -3 \ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 53 \ -20 \ -33 \\ -20 \ 13 \ 7 \\ -33 \ 7 \ 26 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(-7)(-3) - (2)(2)] = 8.5$
$\begin{Bmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} [-6, 4, 2] = \begin{Bmatrix} 36-24-12 \\ -24 \ 16 \ 8 \\ -12 \ 8 \ 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 61 \ -14 \ -47 \\ -14 \ 20 \ -6 \\ -47 \ 6 \ 53 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(5)(4) - (2)(-6)] = 16$
$\begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix} [-1, -2, 3] = \begin{Bmatrix} 1 \ 2 \ -3 \\ 2 \ 4 \ -6 \\ -3 \ -6 \ 9 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 26-33 \ 7 \\ -33 \ 53 \ -20 \\ 7 \ -20 \ 13 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(-5)(-2) - (7)(-1)] = 8.5$
$\begin{Bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{Bmatrix} [-3, 6, -3] = \begin{Bmatrix} 9 \ -18 \ 9 \\ -18 \ 36 \ -18 \\ 9 \ -18 \ 9 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 73 \ -58 \ -15 \\ -58 \ 61 \ -3 \\ -15 \ -3 \ 18 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(8)(6) - (-5)(-3)] = 16.5$
$\begin{Bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{Bmatrix} [3, -4, 1] = \begin{Bmatrix} 9 \ -12 \ 3 \\ -12 \ 16 \ -4 \\ 3 \ -4 \ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 73 \ -36 \ -37 \\ -36 \ 25 \ 11 \\ -37 \ 11 \ 26 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(-8)(-4) - (3)(3)] = 11.5$
$\begin{Bmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} [-7, 3, 4] = \begin{Bmatrix} 49 \ -21 \ -28 \\ -21 \ 9 \ 12 \\ -28 \ 12 \ 16 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 49 \ -21 \ -28 \\ -21 \ 18 \ 3 \\ -28 \ 3 \ 25 \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{2} [(0)(3) - (3)(-7)] = 10.5$

(8)		$[\bar{h}_s]_{n_0 \times n_0}^e$					
单元号	$[h_s]^e \{t\}^e$						
		1	2	3	4	5	6
①	$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 36 & -24 & -12 \\ -24 & 20 & 4 \\ -12 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	3	0	0	-1	0	0
②	$\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 25 & -10 & -15 \\ -10 & 8 & 2 \\ -15 & 2 & 13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	2.5	0	0	0	0	0
③	$\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 25 & -15 & -10 \\ -15 & 25 & -10 \\ -10 & -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	1.25	0	0	-0.75	-0.50	0
④	$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} 50 & 5 & -55 \\ 5 & 13 & -18 \\ -55 & -18 & 73 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	2	0.2	0	0	0	0
⑤	$\frac{1}{23} \begin{bmatrix} 26 & -37 & 11 \\ -37 & 73 & -36 \\ 11 & -36 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	1.130	0.478	0	0	-1.609	0
⑥	$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 50 & -40 & -10 \\ -40 & 50 & -10 \\ -10 & -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	0	0	0	0	0	0
⑦	$\frac{1}{17} \begin{bmatrix} 53 & -20 & -33 \\ -20 & 13 & 7 \\ -33 & 7 & 26 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	0	0	0	0	0	0
⑧	$\frac{1}{32} \begin{bmatrix} 61 & -14 & -47 \\ -14 & 20 & -6 \\ -47 & -6 & 53 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	0	0	0	0	0	0
⑨	$\frac{1}{17} \begin{bmatrix} 26 & -33 & 7 \\ -33 & 53 & -20 \\ 7 & -20 & 13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	0	0	0	0	0	0
⑩	$\frac{1}{33} \begin{bmatrix} 73 & -58 & -15 \\ -58 & 61 & -3 \\ -15 & -3 & 18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	0	0	0	0	0	0
⑪	$\frac{1}{23} \begin{bmatrix} 73 & -36 & -37 \\ -36 & 25 & 11 \\ -37 & 11 & 26 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	0	0	0	0	0	0
⑫	$\frac{1}{21} \begin{bmatrix} 49 & -21 & -28 \\ -21 & 9 & 12 \\ -28 & 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$	0	0	0	0	0	0

$$[\bar{h}_s]_{n_0 \times n_0} = \sum_e [\bar{h}_s]^e_{n_0 \times n_0} = \begin{bmatrix} 9.880 & 0.678 & 0 & -1.750 & -2.109 & 0 & 0 & -3.500 & -3.200 \\ 0.678 & 9.827 & -0.026 & 0 & -2.741 & -3.882 & 0 & 0 & -1.053 \\ 0 & -0.026 & 9.109 & 0 & 0 & -2.741 & -2.609 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(续)

(9)					(10)
[$n \times n = 3 \times 11$]					备 注
7	8	9	10	11	
0	-2	0	0	0	本单元无点(2)、点(3)而仅有点(1)对应于 <i>i</i> 点,故此矩阵只有第一行,第二、第三行两行均为零
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	-1.5	-1	0	0	本单元无点(2)、点(3)而仅有点(1)对应于 <i>i</i> 点,故此矩阵只有第一行,第二、第三行两行均为零
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	本单元无点(2)、点(3)而仅有点(1)对应于 <i>i</i> 点,故此矩阵只有第一行,第二、第三行两行均为零
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	-2.20	0	0	本单元无点(3)对应于 <i>m</i> 点,而有点(1)、(2),故第三行为零
0	0	-0.72	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	本单元无点(3)对应于 <i>m</i> 点,而有点(1)、(2),故第三行为零
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	本单元仅有点(2),对应于 <i>i</i> 点,第一、三行全部为零
0	0	-0.333	-1.333	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	本单元仅有点(2),对应于 <i>i</i> 点,第一、三行全部为零
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	本单元无点(1)对应于 <i>i</i> 点,故第一行为零
0	0	0	-1.469	0	
0	0	0	-0.188	0	
0	0	0	0	0	本单元无点(1)对应于 <i>i</i> 点,故第一行为零
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	本单元仅有点(3)对应于 <i>m</i> 点,故第一、二两行为零
0	0	0	0	0	
0	0	0	-0.455	-1.758	
0	0	0	0	0	本单元仅有点(3)对应于 <i>m</i> 点,故第一、二两行为零
0	0	0	0	0	
-1.609	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	本单元仅有点(3)对应于 <i>m</i> 点,故第一、二两行为零
0	0	0	0	0	
-1	0	0	0	-1.333	

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.802 & 0 \\ -0.643 & -3.091 \end{bmatrix}$$

填入表 4-1 第 8 列。

从而得到

$$[h_{11}]^e \{t\}^e = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 36 & -24 & -12 \\ -24 & 20 & 4 \\ -12 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_8 \\ t_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_8 \\ t_4 \end{Bmatrix}$$

(3) 根据式 (4-56) 扩大后的 $[h_{11}]_{10 \times 10}^e$ 为

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

填入表 4-1 第 9 列。

此时扩大后的矩阵仅有三行，且点 1 为内节点而对应于本单元的 i ，故第一行保留，但本单元中无点 2、点 3，故第二、第三两行为零。至于 j 及 m 的对应点为点 8、点 4，它们均为边界点，故第 8、第 4 两行为零；而且从点 4 至点 11 均为边界点，故从第 4 行起均不必写出。运用同样方法算出其余单元的有关数据并把它们填到表 4-1 的有关位置上。

(4) 根据式 (4-55)，计算 $[h_{11}]_{3 \times 3}^e$ ，得出

$$[h_{11}]_{3 \times 3}^e$$

$$= \begin{bmatrix} 9.880 & 0.678 & 0 & -1.750 & -2.109 & 0 & 0 & -3.500 & -3.200 & 0 & 0 \\ 0.678 & 9.827 & -0.026 & 0 & -2.741 & -3.882 & 0 & 0 & -1.053 & -2.802 & 0 \\ 0 & -0.026 & 9.109 & 0 & 0 & -2.741 & -2.609 & 0 & 0 & -0.643 & -3.091 \end{bmatrix}$$

根据式 (4-57)，得出

$$\begin{bmatrix} 9.880 & 0.678 & 0 \\ 0.678 & 9.827 & -0.026 \\ 0 & -0.026 & 9.109 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} -1.750 & -2.109 & 0 & 0 & -3.500 & -3.200 & 0 & 0 \\ 0 & -2.741 & -3.882 & 0 & 0 & -1.053 & -2.802 & 0 \\ 0 & 0 & -2.741 & -2.609 & 0 & 0 & -0.643 & -3.091 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_4 \\ t_5 \\ \vdots \\ t_{10} \\ t_{11} \end{Bmatrix}$$

记外表面温度 t_0 为零，则内表面温度 $t_i = 35 - 30 = 5^\circ\text{C}$ ，于是便得 $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = t_i = 5^\circ\text{C}$ ， $t_8 = t_9 = t_{10} = t_{11} = t_0 = 0^\circ\text{C}$ ，将它们代入以上的矩阵方程，将其计算整理后得出

$$\left. \begin{aligned} 9.880t_1 + 0.678t_2 &= 19.295 \\ 0.678t_1 + 9.827t_2 - 0.026t_3 &= 33.115 \\ -0.026t_2 + 9.109t_3 &= 26.750 \end{aligned} \right\}$$

用追赶法求解，得出

$$\left. \begin{aligned} t_3 &= 2.937 + 0.00285t_2 \\ t_2 &= 3.378 - 0.069t_1 \\ 9.833t_1 &= 17.005 \end{aligned} \right\}$$

故 $t_1 = 1.729^\circ\text{C}$, $t_2 = 3.259^\circ\text{C}$, $t_3 = 2.946^\circ\text{C}$

因此，各点的实际温度分别为 31.729°C 、 33.259°C 及 32.946°C 。

应该指出，在上述计算中我们仅取 12 个单元这一局部来代替偏心套的整体，虽使手工列表计算易于进行，但计算结果的可靠性是有问题的。合理的办法是根据对称原理取套的上半部分成较多的单元来进行计算，不过这就非用电子计算机不可了。

第五章 热变形与热应力

§ 5-1 概 述

当弹性体的温度有所改变时，它的各个微小部分将随着温度的升高或降低而趋于膨胀或收缩。但是，弹性体往往因受外在的约束以及体内各部分之间的相互约束，这种膨胀或收缩便不能自由的发生。于是在产生热变形的同时，还会伴随着产生热应力，即所谓变温应力。一定的变温在某种约束条件下导致一定的相应的变温位移（热变形）及变温应力（热应力）。

为了讨论热变形及热应力，首先对热膨胀、热应变及热应力作一个扼要的介绍，并说明三者之间的相互关系。

一、热膨胀及热应变

假设边长为 L 的各向同性的立方体，因均匀受热而膨胀，其长、宽、高将产生同样的热伸长量。这种应变状态没有剪应变而仅有纵向应变。因为是各向同性的，各向的线膨胀系数 α'_t 是相同的，所以其每边的伸长量 ΔL 均可表达为

$$\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} \alpha'_t L dt = L \int_{t_1}^{t_2} \alpha'_t dt \quad (5-1)$$

式中 ΔL ——立方体每边的伸长量；

L ——立方体每边的长度；

t_1, t_2 ——初始温度及终结温度；

α'_t ——随温度而改变的线膨胀系数。

在通常的计算中，由于 α'_t 虽随温度而变化，但一般变化不大，若温度的变量 $(t_2 - t_1)$ 不是过大，则可认为 α'_t 是一个常数而取其变温范围内的平均值 α_t 。因此，式 (5-1) 可以写成

$$\Delta L = \alpha_t L \int_{t_1}^{t_2} dt = \alpha_t L (t_2 - t_1) \quad (5-2)$$

从这个式子，可以看到，长为 L 、直径为 d 的圆棒，初始温度为 t_1 ，受热后变为 t_2 ，这时长度的伸长量 ΔL 为

$$\Delta L = \alpha_t (t_2 - t_1) L \quad (5-3)$$

直径的增长量为

$$\Delta d = \alpha_t (t_2 - t_1) d$$

于是长度方向上的应变 ϵ_L 为

$$\epsilon_L = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\alpha_t (t_2 - t_1) L}{L} = \alpha_t (t_2 - t_1)$$

直径方向上的应变 ϵ_d 为

$$\epsilon_d = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\alpha_t (t_2 - t_1) d}{d} = \alpha_t (t_2 - t_1)$$

所以，温度由 t_1 升为 t_2 时，各方向的热应变为

$$\varepsilon = \alpha_t(t_2 - t_1) = \alpha_t t \quad (5-4)$$

式中

$$t = t_2 - t_1, \quad (5-5)$$

它为变温，在全长各点上 t 均相同；

α_t 为平均线膨胀系数。

这里把几种材料的 α_t 的平均值列于下表：

材 料	α_t [开] $^{-1} \times 10^{-6}$	材 料	α_t [开] $^{-1} \times 10^{-6}$
钢	11~12.5	铜锡合金	18.3
镍铬耐热合金	13~14	铈	39.7
铜	16.5	银	19.7
硬 铝	22.6	混 凝 土	14
铸 铁	10~11		

二、热应力

若物体的所有纤维皆能自由膨胀或收缩，则温度变化不产生任何应力。然而，在一连续体内，这样的膨胀或收缩通常不能自由地进行，因而物体内部产生了应力。另外加在物体上的，阻碍膨胀或收缩的外加约束，也使物体产生应力。这些应力都称之为热应力。

(一) 细长杆在全约束条件下的均匀变温热应力

令此杆内产生热应力为 σ_t ，它是简单的正应力，温升时为压缩应力，温降时为拉伸应力。根据材料力学，若杆的长度为 L ，由于在长度方向的均布应力 σ 所引起的伸长量为

$$\Delta L = \frac{\sigma L}{E} \quad (5-6)$$

式中 E ——弹性模量。

若此杆完全被约束住，以致其长度不变，且又不弯曲或屈曲，在此情况下而有变温 $(t_2 - t_1)$ ，则由式 (5-2) 得到的变温伸长量应与由式 (5-6) 得出的应力伸长量相抵销，即

$$\Delta L_t + \Delta L_\sigma = 0$$

代入后得

$$\alpha_t L(t_2 - t_1) + \frac{\sigma L}{E} = 0 \quad (5-7)$$

因此，当完全被约束时，杆中产生的热应力为

$$\sigma = -\alpha_t E(t_2 - t_1) \quad (5-8)$$

式中负号表明热膨胀导致压应力以抵销杆的热伸长。

(二) 细长杆在部分约束条件下的均匀变温应力

若一杆的膨胀或收缩只是部分地被约束，则式 (5-8) 可写成

$$\sigma = -K \alpha_t E(t_2 - t_1) \quad (5-9)$$

式中 K 表示约束系数。

在这些式子中， E 和 α_t 实际上与温度有关： E 随温度升高而缓慢地减小，而 α_t 通常随温度升高而缓慢地增大。 E 还依赖于材料的应力应变曲线——当应力值在应力应变曲线的塑性部分时， E 值迅速减小。在通常计算中，我们采用 E 和 α_t 的近似的常数值，也就是在材料力学中所常用的数值。

简单地说,当某物体温度变化时,由于它和不能自由伸缩的其它物体之间或物体内部各部分之间相互约束而产生的应力称为热应力。

为了说明全约束与部分约束,现举一个一维的均匀变温热变形作为例子。

例题 1 一根 400 毫米长的轴,在加工键槽时,二端无间隙也无预压力地安装在万能铣床的头尾架之间(图5-1)。

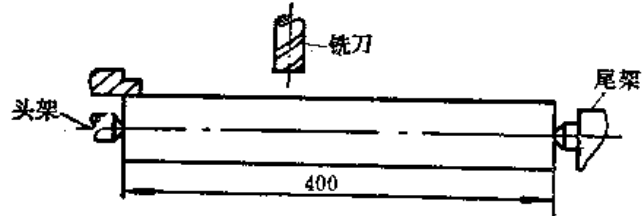


图 5-1

(1) 当铣削键槽时,工件温升 30°C 。假设工作台的温升为零,并且头尾架的刚度很大,当工件膨胀时不变形。试求工件中的变温应力。(2) 假设头尾架

在受到工件膨胀而致二者之间的距离增大了 0.145 毫米,问杆内的应力为多少?(3) 若头尾架的轴向合成刚度为 2000 公斤力/毫米,则杆内应力为多少?

解 取 $\alpha_t = 12.5 \times 10^{-6} / \text{开}$

$$E = 2.04 \times 10^9 \text{ 公斤力/厘米}^2 = 20 \times 10^{10} \text{ 牛/米}^2$$

(1) 利用式 (5-8),

$$\begin{aligned} \sigma &= -\alpha_t E (t_2 - t_1) = -12.5 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{10} \times 30 \\ &= -75 \times 10^5 \text{ 牛/米}^2 \end{aligned}$$

负号代表压应力。若工件直径为 30 毫米,则头尾架将受的轴向力为

$$P = \pi \left(\frac{0.03}{2} \right)^2 \times (-75 \times 10^5) = -5.30 \times 10^4 \text{ 牛 (负值表示压力)}$$

(2) 由于头尾架对工件不是完全约束,设头尾架之间的距离增长量为 ΔL , 则式(5-8)左边不应为零而为 ΔL , 故改写为

$$\alpha_t L (t_2 - t_1) + \frac{\sigma L}{E} = \Delta L \quad (5-10)$$

代入后得

$$12.5 \times 10^{-6} \times 0.4 \times (30 - 0) + \frac{0.4 \sigma}{20 \times 10^{10}} = 0.000145 \text{ 米}$$

故得

$$\sigma = \frac{0.000145 \times 20 \times 10^{10} - 12.5 \times 0.4 \times 30 \times 20 \times 10^4}{0.4} = -2.50 \times 10^5 \text{ 牛/米}^2$$

$$K = \frac{-2.50 \times 10^5}{-75 \times 10^5} = 0.033$$

头尾架受的轴向力为

$$P = \left(\frac{0.03}{2} \right)^2 \pi \times (-2.50 \times 10^5) = -1.77 \times 10^4 \text{ 牛}$$

头尾架合成的轴向刚度为

$$j = \frac{1.77 \times 10^4}{0.145} = 1.22 \times 10^4 \text{ 牛/毫米}$$

(3) 若头尾架合成轴向刚度为 2000 公斤力/毫米 ($= 2000 \times 9.807 \times 10^3 \text{ 牛/米}$), 根据下列

方程组

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 L(t_2 - t_1) + \frac{\sigma L}{E} &= \Delta L \\ \Delta L &= -\frac{P}{j} \\ P &= A\sigma \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

式中 P —— 轴向力;

A —— 轴的横截面积;

j —— 头尾架的合成轴向刚度。

得出下列方程

$$\alpha_1 L(t_2 - t_1) + \frac{\sigma L}{E} = -\frac{A\sigma}{j} \quad (5-12)$$

故得

$$\sigma = \frac{-\alpha_1 L(t_2 - t_1)}{\frac{L}{E} + \frac{A}{j}} = -\frac{12.5 \times 10^{-6} \times 0.4 \times (30 - 0)}{\frac{0.4}{20 \times 10^{10}} + \frac{\pi (0.015)^2}{9.807 \times 2000 \times 10^3}}$$

$$= -3.94 \times 10^6 \text{ 牛/米}^2$$

$$K = \frac{-3.94 \times 10^6}{-75 \times 10^6} = 0.0526$$

轴的实际伸长量, 亦即头尾之间距离的增长量为

$$\Delta L = -\frac{P}{j} = -\frac{(-3.94 \times 10^6)(\pi)(0.015)^2}{9.807 \times 2000 \times 10^3} = 0.000142 \text{ 米}$$

从上述例子可以看到, 热变形问题的解法步骤是:

- (1) 计算自由膨胀的伸缩量, 即 $\alpha_1 L(t_2 - t_1)$;
- (2) 根据约束情况确定实际的伸缩量即 ΔL ;
- (3) 两伸缩量的差值等于应力补偿的伸缩量, 即

$$\alpha_1 L(t_2 - t_1) - \Delta L = -\frac{\sigma L}{E} \quad (5-13)$$

从式 (5-10) 或式 (5-13) 可以明显地看到, 解热变形问题中, 变温 ($t_2 - t_1$)、变形量 ΔL (实际伸缩量) 与应力 σ (或轴向力 P) 是相互依赖的。这就是说: 在一定的变温时, 只有在某种约束下形成一定的变形, 才在物体中产生一定的变温应力。在上述例题中, 若轴的两端无约束, 则轴的伸长量为

$$\alpha_1 L(t_2 - t_1) = 12.5 \times 10^{-6} \times 40 \times (30 - 0) = 0.015 \text{ 厘米} = 0.15 \text{ 毫米}$$

而在这种情况下轴内的应力为零。

也有这样的情况, 轴的两端不是给定伸长量的约束条件, 而是给定轴向力 P 。在这种情况下, 式 (5-13) 可写成如下形式:

$$\alpha_1 L(t_2 - t_1) + \frac{PL}{AE} = \Delta L \quad (5-14)$$

等式左边均为给定值，故可求得实际伸长量。

例题 2 当上例的同一根轴在铣键槽及热处理后再安装在外圆磨床的头尾架两顶尖之间进行磨削。大家知道，外圆磨床的顶尖是弹性顶尖，它的轴向压紧力可以调节。如果把轴向压紧力调节成 100 公斤力，工件在磨削时的温升为 20°C 。试求它在磨削时的热伸长量。

解 利用式 (5-14)

$$\begin{aligned}\Delta L &= \alpha_t L(t_2 - t_1) + \frac{PL}{AE} \\ &= 12.5 \times 10^{-6} \times 40 \times (20 - 0) + \frac{-980.7 \times 40}{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 20 \times 10^6} \\ &= 0.0097 \text{ 厘米} = 0.097 \text{ 毫米}\end{aligned}$$

这两个例题都提出与前相同的论断：只有在某种边界限制下给其一定的变形（位移）或外力，才能使轴在变温时产生轴内应力、应变以及轴内各点的变形（或位移）。变温、变形、应力是三者相互依赖的。全约束的情况下（应力最大），变形为零；无约束条件下（均匀变温自由膨胀），应力为零。这仅仅是三者相互依赖的两个特例。

§ 5-2 一维热变形（变形位移）与热应力

设弹性体在前后两个瞬时的温度分别为 t_1 及 t_2 ，则弹性体的变温由式 (5-5) 定义为

$$t = t_2 - t_1$$

在一维问题中，不均匀变温时 t 为 x 的函数。

当弹性体内各点的微小长度不受任何约束时，则将由于变温 t 的作用而导致正应变的形成，其表示式由式 (5-4) 来确定，即

$$\epsilon_x = \alpha_t t$$

式中 α_t ——平均线膨胀系数；

t ——变温；

ϵ_x —— x 方向相应的应变。

但是，当弹性体受到外在的约束及体内各部分之间的相互约束时，上述应变便不能自由发生而将伴随着变温应力的生成。后者又将按照物理方程引起应变。将式 (5-10) 的等号前后均以 L 除之，即得

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha_t t$$

由于 $\frac{\Delta L}{L}$ 即为 x 方向的总的应变，于是总的应变 ϵ_x 便为：

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha_t t \quad (5-15)$$

在简单的等截面轴向力的拉伸与压缩中（如图 5-2 所示） σ_x 在每一个截面内均为常数，即

$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

式中 A ——杆件横截面积;

P ——轴向力。

把式 (5-15) 对 x 求导则得

$$\frac{d\varepsilon_x}{dx} = \alpha_t \frac{dt}{dx} \quad (5-16)$$

从弹性力学知道

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (5-17)$$

式中 u ——表示 x 方向的位移。

将式 (5-17) 代入式 (5-16), 得到

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \alpha_t \frac{dt}{dx} \quad (5-18)$$

这就是等截面杆一维变温位移的微分方程。

从这个微分方程中可以看到: 对于一维变温位移问题 (或对于某些可以简化成一维变温位移的问题), 只要知道在这个方向上的温度分布或温度梯度, 及两个边界条件, 就能解出在这一方向上各点的变温位移及变温应力。



图 5-2

这个方程的解法, 当然也有分析解法和数值解法, 即一般的常微分方程的分析解法及根据具体条件应用各种不同方法的数值近似解。现在用分析解法。

把式 (5-15) 中的 ε_x 用 $\frac{du}{dx}$ 来代替, 则得到

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha_t t \quad (5-19)$$

积分得

$$u = \int \frac{\sigma_x}{E} dx + \int \alpha_t t dx + C \quad (5-20)$$

如果从式 (5-18) 来求解, 则得到

$$\frac{du}{dx} = \alpha_t t + C_1$$

积分得

$$u = \int \alpha_t t dx + \int C_1 dx + C_2 = \int \alpha_t t dx + C_1 x + C_2 \quad (5-21)$$

在一维的简单拉伸 (或压缩) 时 $\frac{\sigma_x}{E}$ 是常数, 对照式 (5-19) 及 (5-21), 式 (5-21) 中的 C_1 相当于式 (5-19) 中的 $\frac{\sigma_x}{E}$ 。

因此, 在等截面杆件简单的拉伸及压缩应力的情况下

$$\sigma_x = C_1 E \quad (5-22)$$

前面已经讲到, 一维的无热源稳定导热方程是

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (5-23)$$

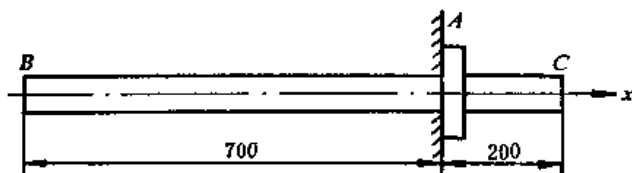
这个方程的通解是

$$t = k_1 x + k_2 \quad (5-24)$$

k_1 及 k_2 是根据 t 或 $\frac{dt}{dx}$ 边界条件决定的两个常数。把式 (5-24) 代入式 (5-21) 可得到

$$u = \alpha_t \int (k_1 x + k_2) dx + C_1 x + C_2 = \frac{\alpha_t k_1}{2} x^2 + \alpha_t k_2 x + C_1 x + C_2 \quad (5-25)$$

例题3 一根机床主轴全长 900 毫米, A 点的轴向位置固定 (如图 5-3 所示)。 A 点的温升 $t_A = 35^\circ\text{C}$, B 点的温升 $t_B = 25^\circ\text{C}$, C 点的温升 $t_C = 5^\circ\text{C}$, 求 B 及 C 两点的轴向变温位移量。



取 A 为 x 坐标的原点

图 5-3

解 对于这样一根轴, 我们可以分成二段来简化计算, 一段是 AB , 另一段是 AC ,

这样划分以后两段的温度梯度在 A 点上是不一样的, 因为此时在 A 点的热源作为外热源来处理而导致 A 点处的温度梯度的不连续性。这一简化与实际的温度分布是稍有差异的, 但是对于计算 B 、 C 二点的轴向位移, 则影响不大。

让我们先来求 B 点的位移。在求位移之前, 应先求 AB 段的温度分布。根据式 (5-24) 及 $t_A = 35^\circ\text{C}$, $t_B = 25^\circ\text{C}$ 的边界条件得出: $k_2 = 35$, $k_1 = \frac{1}{70}$ 。于是得出 AB 段的温度分布方程为

$$t_{AB} = \frac{1}{70} x + 35$$

然后根据方程 (5-25) 求 u :

$$u = \frac{\alpha_t k_1}{2} x^2 + \alpha_t k_2 x + C_1 x + C_2$$

把已知数值代入即得

$$u = \frac{\alpha_t}{2 \times 70} x^2 + 35\alpha_t x + C_1 x + C_2$$

若 B 端是自由端, $\frac{\sigma_x}{E} = 0$, $C_1 = 0$

由式 (5-25), 得

在 $x = 0$ 处,

$$u_A = 0, \text{ 所以 } C_2 = 0$$

这样得到 AB 段的位移方程式为

$$u = \frac{\alpha_t}{140} x^2 + 35\alpha_t x$$

对于主轴材料, 其线膨胀系数取

$$\alpha_t = 1.1 \times 10^{-5} / \text{开}$$

在 B 点 (即在 $x = -700$ 毫米处)

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{1.1 \times 10^{-5}}{140} \times (-700)^2 + 35 \times 1.1 \times 10^{-5} \times (-700) \\ &= -0.231 \text{ 毫米} = -231 \text{ 微米} \end{aligned}$$

负值的意义即是向后位移 231 微米。

现在用大家熟悉的热伸长公式 $\Delta L = \alpha_t L \Delta t$ (当温度为线性变化时 Δt 可取平均温度值) 来计算:

$$u = \Delta L = 1.1 \times 10^{-5} \times 700 \times \frac{25 + 35}{2} = 0.231 \text{ 毫米}$$

这一数值与上述的计算结果完全相同。

再来求 C 点的位移, 依同理, AC 段的温度分布方程是

$$t_{x,c} = \frac{-3}{20}x + 35$$

此方程所符合的边值条件为: 当 $x = 0$, $t_A = 35^\circ\text{C}$; 当 $x = 200$, $t_c = 5^\circ\text{C}$ 。

代入方程 (5-25), 得

$$u = \frac{\alpha_t}{2} \left(-\frac{3}{20} \right) x^2 + 35\alpha_t x + C_1 x + C_2$$

同样, 由于在 $x = 0$ 处, $u = 0$ 及 $\sigma_x = 0$ 这二个条件, 得出 $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ 。

故
$$u = -\frac{3}{40}\alpha_t x^2 + 35\alpha_t x = -\frac{3}{40}(1.1 \times 10^{-5})x^2 + 35 \times 1.1 \times 10^{-5}x$$

在 C 点, $x = 200$, 故得

$$\begin{aligned} u_c &= -\frac{3}{40} \times 1.1 \times 10^{-5} \times (200)^2 + 35 \times 1.1 \times 10^{-5} \times 200 \\ &= 0.044 \text{ 毫米} = 44 \text{ 微米} \end{aligned}$$

若 B 端不是自由端, 而只允许作 50 微米的向后位移, 则 AB 温度分布方程中的 C_1 可由下式决定:

因为
$$u = \frac{\alpha_t}{140}x^2 + 35\alpha_t x + C_1 x \quad (\text{因 } u_A = 0, \text{ 故 } C_2 = 0)$$

所以
$$\begin{aligned} -0.05 &= \frac{1}{140}(1.1 \times 10^{-5}) \times (-700)^2 \\ &\quad + 35 \times 1.1 \times 10^{-5} \times (-700) + C_1 \times (-700) \end{aligned}$$

故得
$$C_1 = -2.586 \times 10^{-4}$$

根据式 (5-22), 取
$$E = 20 \times 10^4 \text{ 牛/毫米}^2$$

求得
$$\sigma_x = -2.586 \times 10^{-4} \times 20 \times 10^4 = -51.72 \text{ 牛/毫米}^2 \quad (\text{负值表示压缩应力})$$

若 B 端也与 A 点一样, 固定而不能作轴向位移, 则

$$0 = \frac{1}{140}(1.1 \times 10^{-5}) \times (-700)^2 + 35 \times 1.1 \times 10^{-5} \times (-700) + C_1 \times (-700)$$

故得
$$C_1 = -3.3 \times 10^{-4}$$

求得
$$\sigma_x = -3.3 \times 10^{-4} \times 20 \times 10^4 = -66 \text{ 牛/毫米}^2$$

现在用通常大家熟知的、在两端全约束情况下的热应力公式来计算。两端全约束 (二端

固定) 情况下的热应力公式为

$$\sigma_x = -E\alpha_t(t_2 - t_1) = -E\alpha_t\Delta t$$

当温度为线性变化时, Δt 可取平均温变。

把上题的已知值代入, 得到

$$\sigma_x = -20 \times 10^4 \times 1.1 \times 10^{-5} \times 30 = -66 \text{ 牛/毫米}^2$$

$$\left(\Delta t = \frac{35 + 25}{2} = 30 \right)$$

这个结果与上述方法所得的结果完全相同。

从上述例子可以看到下列几点:

(1) 用解析法求变温位移时, 首先应求出温度分布函数 $t(x)$ 。

(2) 如果温度分布函数是 x 的线性函数, 则在一端固定另一端自由状态下 (即无轴向应力情况下) 的自由端位移可以用下式表达:

$$u = \alpha_t L \Delta t \quad (5-26)$$

式中 u ——自由端对固定端的位移;

L ——自由端距固定端的距离;

Δt ——平均变温。

(3) 如果温度分布函数是 x 的线性函数, 两端固定时的应力可用下式表达:

$$\sigma_x = -E\alpha_t\Delta t \quad (5-27)$$

(4) 当一端固定另一端为半约束状态时, 可以分成两种情况: 其一是知道一端对固定端的位移量, 求其轴向应力, 如本例题所示; 另一是已知轴向应力, 求一端对固定端的位移, 例如在本例题中, 若 AB 部分受有轴向应力 $\sigma_x = -40$ 牛/毫米², 则 B 端的位移可用下式求得:

$$u = \frac{\alpha_t}{140} x^2 + 35\alpha_t x + C_1 x \quad (5-28)$$

其中 C_1 由式 (5-22) 定之, 即

$$C_1 = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{40}{20 \times 10^4} = -2 \times 10^{-4}$$

代入式 (5-28), 得

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha_t}{140} x^2 + 35\alpha_t x + (-2 \times 10^{-4}) x \\ &= 1.1 \times 10^{-5} \left[\left(\frac{-700}{140} \right) + 35 \right] (-700) - 2 \times 10^{-4} (-700) \\ &= -9.1 \times 10^{-2} \text{ 毫米 (向后)} \end{aligned}$$

§ 5-3 简单梁的变温挠度

非约束梁在均匀变温下的长度增长值由式 (5-26) 计算, 即

$$u = \Delta L = \alpha_t L \Delta t$$

式中 ΔL 代表长度的增长值。非约束梁的均匀变温将不会使梁中产生任何应力, 这种梁当然不会产生任何横向挠度。

但是，如果温度沿梁的高度不是常数，梁的状态则完全不同。例如假设有一简单梁，在处于均匀温度 t_0 时原来是直的。然后其顶面温度变为 t_1 ，底面温度变为 t_2 ，其相应的温升（温变）分别为 T_1 及 T_2 。如果假定梁顶与梁底之间的温度变化为线性，则梁的平均温升 $T_{平均}$ ($= \frac{T_1 + T_2}{2}$) 将发生于一半高度处，梁顶与梁底的温升差 $\Delta T (= T_2 - T_1)$ 将引起梁的轴线弯曲，即产生横向挠度，如图 5-4 所示。

为了研究此横向挠度取长度为 dx 的单元来讨论。此单元的顶部和底部长度的变化分别为 $\alpha_1 T_1 dx$ 和 $\alpha_2 T_2 dx$ 。若 $T_2 > T_1$ ，则单元两侧边将彼此相对旋转而成 $d\phi$ 角，如图 5-4 所示。按图示的几何关系可得到如下的方程：

$$hd\phi = \alpha_2 T_2 dx - \alpha_1 T_1 dx = \alpha_1 (T_2 - T_1) dx \quad (5-29)$$

或
$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\alpha_1}{h} (T_2 - T_1)$$

式中 h —— 梁的高度。

我们在材料力学中已经知道，在温度差 $(T_2 - T_1)$ 不大时，梁的挠度很小。 $\frac{d\phi}{dx}$ 代表梁的挠度曲线的曲率，从而导出挠度曲线的微分方程。

由于
$$\phi = \frac{dv}{dx}$$

故
$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{\alpha_1 (T_2 - T_1)}{h} \quad (5-30)$$

此方程的负号是为了保持与材料力学中的正负号规则。

对照材料力学公式

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M}{EI}$$

式中 v —— 梁的挠度；

M —— 弯矩，当 M 使梁弯曲向上时， M 取正号；

E —— 弹性模数；

I —— 梁的横截面惯性矩。

因此，可以把 $\frac{\alpha_1}{h} (T_2 - T_1)$ 看作相当于 M/EI 。于是，我们便可以应用材料力学对于弯矩效应的方法来解此方程，亦即可以连续地积分此方程以得到 v 及 $\frac{dv}{dx}$ 。然后应用边值条件去求其积分常数，或者，利用力矩-面积法的定理。此时全部用 $-\frac{\alpha_1}{h} (T_2 - T_1)$ 来代替 M/EI 。

假定 $\frac{\alpha_1 (T_2 - T_1)}{h}$ 在全长范围内是一个定值，即

$$\frac{\alpha_1 (T_2 - T_1)}{h} = k$$

则

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - k$$

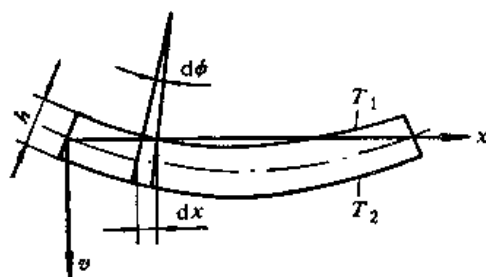


图5-4 梁的温度挠曲

积分后, 得

$$\frac{dv}{dx} = -kx + C_1$$

$$v = -\frac{kx^2}{2} + C_1x + C_2$$

根据边值条件

当 $x = 0$, $v = 0$; 当 $x = l$, $v = 0$

故得

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{kl}{2}$$

代入后, 得

$$v = -\frac{\alpha_l(T_2 - T_1)x(x-l)}{2h} \quad (5-31)$$

中间平面的最大挠度值为

$$v_{\max} = v_{x=l/2} = \frac{\alpha_l(T_2 - T_1)l^2}{8h} \quad (5-32)$$

例题 4 假定平面磨床工作台在冷却液及导轨摩擦热的影响下其台顶面温度高于台底面的温度, 并假定其温度场的近似方程为

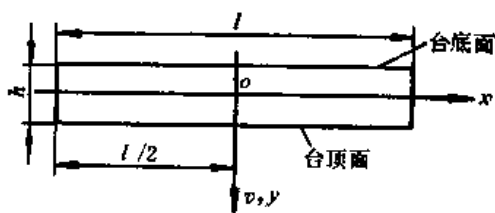
$$T = t - t_0 = (ay + b) \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right] \quad (5-33)$$

式中 T —— 某点的温升;

t_0 —— 室温;

a, b —— 常数;

l —— 工作台长度。



$x-y$ 坐标用于温度场的计算
 $x-v$ 坐标用于挠度曲线的计算

图5-5 工作台的坐标系统

其坐标系统如图 5-5 所示, 为了与图 5-4 坐标方向相对应, 将工作台底翻上安放, 求工作台的挠度曲线及工作台中心 o 的挠度和顶面中点的最大位移。

解 从已知的温度场出发, 工作台的底面及顶面温升分别为

$$T_{\text{底}} = \left(-\frac{ah}{2} + b \right) \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right]$$

$$T_{\text{顶}} = \left(\frac{ah}{2} + b \right) \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right]$$

故

$$T_{\text{顶}} - T_{\text{底}} = ah \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right]$$

将其代入式 (5-30), 得

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -a\alpha_l \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right]$$

通过二次积分得到

$$v = a\alpha_l \left[\frac{x^4}{12} - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \right] + C_1x + C_2$$

边值条件为:

$$\text{当 } x = \pm \frac{l}{2}, \quad v = 0$$

$$\text{当 } x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0$$

由于

$$\frac{dv}{dx} = a\alpha_l \left[\frac{x^3}{3} - \left(\frac{l}{2}\right)^2 x \right] + C_1$$

故

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{5a\alpha_l l^4}{192}$$

故得

$$v = a\alpha_l \left[\frac{x^4}{12} - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left(\frac{x^2}{2}\right) \right] + \frac{5a\alpha_l l^4}{192} \quad (5-34)$$

当 $x = 0$, 中点 o 的挠度为

$$v_{\max} = \frac{5a\alpha_l l^4}{192}$$

工作台面中点的最大位移 δ_{\max} , 应在中心 o 挠度上再加上台面中间横截面的线膨胀升高量 δ 。

在计算中间横截面的线膨胀升高量时, 取工作台中心 o 点的平均温升 $T'_{\text{平均}}$ (此时, $x = 0, y = 0$), 而有

$$T'_{\text{平均}} = b \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

故得

$$\delta = \alpha_l h T'_{\text{平均}} = \alpha_l h b \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

因此,

$$\delta_{\max} = v_{\max} + \delta = \frac{5a\alpha_l l^4}{192} + \alpha_l h b \left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad (5-35)$$

如果 $l = 1000$ 毫米, $h = 100$ 毫米, 顶面中点的最高温升 $= 8.5^\circ\text{C}$, 底面中点的相应温升 $= 7.5^\circ\text{C}$, 则可得出

$$8.5 = \left(\frac{ah}{2} + b\right) \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$7.5 = \left(-\frac{ah}{2} + b\right) \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

故得

$$b = \frac{8}{25} \times 10^{-4}, \quad a = \frac{1}{250} \times 10^{-8}$$

取

$$\alpha_l = 1.1 \times 10^{-5}$$

代入式 (5-35), 得

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= \frac{5}{192} \times \frac{1}{250} \times 10^{-8} \times 1.1 \times 10^{-5} \times (1000)^4 + 1.1 \times 10^{-5} (100) \left(\frac{8}{25} \times 10^{-4}\right) \left(\frac{1000}{2}\right)^2 \\ &= 0.020 \text{ 毫米} \end{aligned}$$

这是一个相当可观的数值, 此时工作台的平均温升不过 8°C , 其上下两面之温差仅为 1°C 。因此应该尽量减少平面磨床工作台的温升及上、下面间的温度梯度。当工作台上、下两

面没有温差，其均匀变温为 8°C 时，工作台顶面中点升高量为

$$\delta_{\max} = \alpha_l h \Delta T = 1.1 \times 10^{-5} \times 100 \times 8 = 8.8 \times 10^{-3} \text{ 毫米}$$

与上述结果对比，台面中点升高量削减了将近一半。于此可见，控制工作台上、下两面温升的意义。

§ 5-4 桁架的力与变形等问题的有限单元法

在第四章中我们已经介绍了用有限单元法求温度场的方法——对求解区域进行离散化，找出导热方程的泛函，建立单元 e 的泛函并把诸单元的泛函叠加起来求极值，以得到诸离散点的近似温度值。

也可用同样的方法，建立解决弹性体中力（或应力）与变形等问题的有限单元法——首先找出与求解函数有关的泛函，并且证明使这个泛函求极值所得的解就是本问题求解函数的正确解。在此基础上，通过离散化和建立单元泛函等过程，以解出弹性体中的力（或应力）和变形（位移）等问题的近似解。以后可以看出，在解决弹性体的力和变形问题时，通常取位移作为求解函数。因此称这种有限单元法为位移型有限单元法。

一、桁架的力和变形关系

让我们先来研究一个简单的例子。

在图 5-6 a 上，有一个三个杆件组成的三角桁架，其节点为 1, 2, 3, 4，在节点 1 处作用有向下载荷 \bar{Q} 。现将各杆件以及节点 1 假想地分割开，画出如图 5-6 b 的分离体图。设各杆件的轴力（轴向力）为 P_{13} 、 P_{12} 、 P_{14} ，伸长量为 δ_{13} 、 δ_{12} 、 δ_{14} ，节点 1 在 x 方向上的位移为 u_1 ，其它各节点 2, 3, 4 上的位移为零。这时候，按照图 5-6 b 就能写出平衡方程

$$P_{12} + P_{13} \cos \alpha + P_{14} \cos \alpha = \bar{Q} \tag{5-36}$$

同时由于对称关系，

$$P_{13} = P_{14} \tag{5-37}$$

故上式可以改写为

$$P_{12} + 2P_{13} \cos \alpha = \bar{Q} \tag{5-38}$$

这里有两个未知轴力 P_{12} 及 P_{13} ，但平衡方程只有一个，故属于超静定结构，其超静定次数为 $2 - 1 = 1$ 。因此不考虑变形，就无法解这个问题^[18]。

考虑到各杆件的伸长量与节点位移的关系，又可写出

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12} &= u_1 \\ \delta_{13} &= u_1 \cos \alpha \\ \delta_{13} &= \delta_{14} \end{aligned} \right\} \tag{5-39}$$

从式 (5-39) 中前二式消去 u_1 得

$$\delta_{13} - \delta_{12} \cos \alpha = 0 \tag{5-40}$$

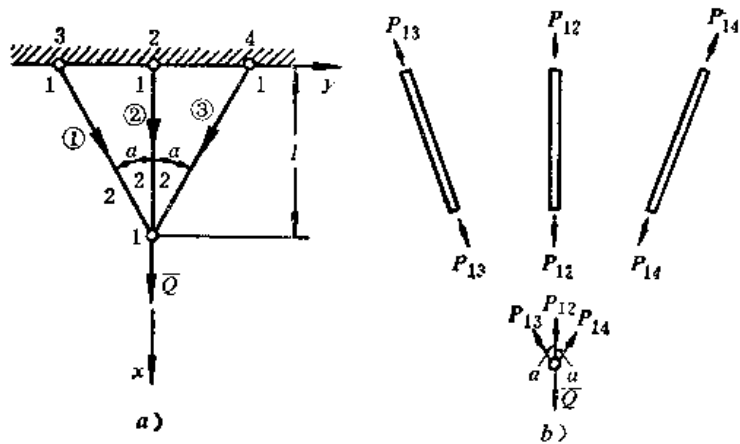


图 5-6

式(5-40)是杆件的伸长量 δ_{12} 和 δ_{13} 所应满足的几何条件,称为变形谐调条件。它表示这个三角架仅产生对称于 x 轴的变形,而在节点1处三个杆件彼此不会分开。

有了谐调条件,还必须建立杆件轴力与伸长量之间的关系。如果将问题限于弹性范围以内,则可给出杆件轴力与伸长量的关系为

$$\left. \begin{aligned} P_{12} &= \frac{A_0 E}{l_{12}} \delta_{12} \\ P_{13} &= \frac{A_0 E}{l_{13}} \delta_{13} \end{aligned} \right\} \quad (5-41)$$

式中 A_0 ——杆件的横截面面积(为简单起见,设三个杆件的横截面面积相等);

E ——弹性模量;

l_{12}, l_{13} ——各杆变形前长度。

$$\left. \begin{aligned} l_{12} &= l_{13} \cos \alpha \\ l_{13} &= l_{14} \end{aligned} \right\} \quad (5-42)$$

上面推导出来的(5-38), (5-39)和(5-41),是关于六个未知量 P_{12} 、 P_{13} 、 δ_{12} 、 δ_{13} 、 δ_{14} 、 u_1 的六个方程。

兹用位移法求出其解答

位移法是以节点位移 u_1 作为未知量。由式(5-39)和(5-41)消去 δ_{12} 和 δ_{13} 就得到

$$\left. \begin{aligned} P_{12} &= \frac{A_0 E}{l_{12}} u_1 \\ P_{13} &= \frac{A_0 E u_1}{l_{12}} \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-43)$$

把式(5-43)代入平衡方程(5-38)则得

$$\frac{A_0 E}{l_{12}} u_1 + 2 \frac{A_0 E u_1}{l_{12}} \cos^3 \alpha = \bar{Q} \quad (5-44)$$

即

$$u_1 = \frac{\bar{Q} l_{12}}{A_0 E (1 + 2 \cos^3 \alpha)} \quad (5-45)$$

将式(5-45)代回式(5-39)及(5-43)就可确定 δ_{12} 、 δ_{13} 和 P_{12} 、 P_{13} 。

它们分别为:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12} = u_1 &= \frac{\bar{Q} l_{12}}{A_0 E (1 + 2 \cos^3 \alpha)} \\ \delta_{13} = u_1 \cos \alpha &= \frac{\bar{Q} l_{12} \cos \alpha}{A_0 E (1 + 2 \cos^3 \alpha)} \quad (= \delta_{14}) \\ P_{12} &= \frac{A_0 E}{l_{12}} \delta_{12} = \frac{\bar{Q}}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)} \\ P_{13} &= \frac{A_0 E}{l_{13}} \delta_{13} = \frac{\bar{Q} l_{12} \cos \alpha}{l_{13} (1 + 2 \cos^3 \alpha)} = \frac{\bar{Q} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (5-46)$$

二、变形能和余能[⊖]

通过上面的例子，我们来介绍两个有用的概念：**变形能**和**余能**。假定图 5-2 所示的直杆受有轴力 P ，则 P 与伸长量 δ 之间的关系一般为

$$P = P(\delta) \quad (5-47)$$

即轴力为伸长量的函数。

或者反过来，用逆函数，可以写成

$$\delta = \delta(P) \quad (5-48)$$

即伸长量为轴力的函数。

这里定义下列两个量：

$$U(\delta) = \int_0^{\delta} P(\delta) d\delta \quad (5-49)$$

$$U^*(P) = \int_0^P \delta(P) dP \quad (5-50)$$

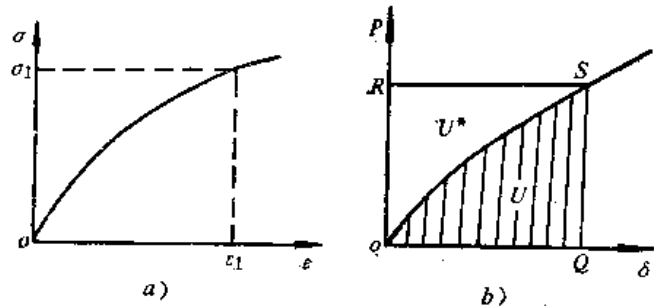


图 5-7

显然，这样定义的 U 和 U^* 具有以下性质：

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = P \quad (5-51)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial P} = \delta \quad (5-52)$$

我们称 U 为**变形能**，亦称“**应变能**”；称 U^* 为**余能**，亦称“**应力能**”，这是因为 U 的自变量是 δ ，而 U^* 的自变量是 P 。

与式 (5-49) 相对应的材料单位体积的变形能（应变能）为

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon \quad (5-53)$$

式 (5-53) 中的积分代表图 5-7 a 中应力-应变曲线下面的面积。

故

$$U = \int u dV \quad (5-54)$$

式中 dV 为体积单元，该积分是对杆的整个体积来进行的。因此， U 为结构的总变形能。

与式 (5-50) 相对应的单位体积内的余能（应力能）为

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \epsilon d\sigma \quad (5-55)$$

式 (5-55) 中的积分表示图 5-7 a 中应力-应变曲线与应力轴之间的面积，故结构的总余能为

$$U^* = \int u^* dV \quad (5-56)$$

当直杆产生弹性变形时，式 (5-51) 和 (5-52) 分别为

$$P = \frac{A_0 E'}{l} \delta \quad (5-57)$$

[⊖] 详见材料力学[美]S. 铁摩辛柯著，胡人礼译，科学出版社，1978。

$$\delta = \frac{l}{A_0 E} P \quad (5-58)$$

因此式 (5-49) 和 (5-50) 分别为

$$U = \frac{A_0 E}{2 l} \delta^2 = \frac{1}{2} P \delta \quad (5-59)$$

$$U^* = \frac{l}{2 A_0 E} P^2 = \frac{1}{2} P \delta \quad (5-60)$$

在此情况下, U 和 U^* 是相等的 (它们均等于 $\frac{1}{2} P \delta$), 它的物理意义, 都是杆中储存的变形能。但在非线性应力-应变曲线的情况下, 荷载-变形关系如图 5-7 b 所示, 它的关系具有与应力-应变曲线相同的一般形式。但应指出, 由式 (5-49) 定义的 U (面积 $\circ QRS$) 与按式 (5-50) 定义的 U^* (面积 $\circ RST$) 并不相等。在这种意义下, U^* 称为余能。它不像 U 有明显的物理含义, 即变形能; 而 U^* 却没有明显的物理含义, 但是我们从图中可以看出, 在矩形 $\circ QSR$ 面积里, U 和 U^* 是互补的, 即

$$U + U^* = \text{矩形 } \circ QSR \text{ 的面积} = P \delta$$

从上面所列出的公式, 可以看到, U 和 U^* 是二个不同的标量函数, 与初等力学中学过的万有引力的位能函数具有同样的性质, 它们与座标轴的取法无关。 U 代表弹性体的变形能, 它是各变形量 (或位移量, 如上述的 δ 、 u 等) 的函数。 U^* 称为余能, 它是力与有关变形量 (或位移量) 的乘积减去变形能所余下的能量 (即 $U^* = P \delta - U$), 故称余能。特别要重复提到的是: 表达 U 函数的自变量为 δ , 而表达 U^* 函数中自变量为 P 。在弹性系统中有了这两个函数, 就能导出若干定理和原理: 虚功原理, 最小位能原理, 余虚功原理, 最小余能原理等。从这些原理, 就可利用变分原理解弹性力学中的有关问题。弹性力学中位移型有限单元法的基础是虚功原理或最小位能原理。而应力型 (力型) 有限单元法的基础是余虚功原理或最小余能原理^[18]。

为了利用变分原理求解图 5-6 所研究过的三角架问题, 首先应求得相应的泛函 (参看 § 4-3)。因此, 我们来介绍最小位能原理。

三、最小位能原理

为了写出最小位能原理, 先写出图 5-6 各杆件的变形能 U , 其中杆件的伸长量利用式 (5-40) 的变形协调条件, 以节点 1 的位移 u_1 来表示, 根据式 (5-59) 得出

$$U_{12} = \frac{1}{2} \frac{A_0 E}{l_{12}} \delta_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{A_0 E}{l_{12}} u_1^2 \quad (5-61)$$

$$\begin{aligned} U_{13} &= \frac{1}{2} \frac{A_0 E}{l_{13}} \delta_{13}^2 = \frac{1}{2} \frac{A_0 E}{(l_{12}/\cos \alpha)} (u_1 \cos \alpha)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{A_0 E u_1^2}{l_{12}} \cos^3 \alpha \end{aligned} \quad (5-62)$$

$$U_{14} = U_{13} \quad (5-63)$$

式中 α —— 杆件 l_{12} 与 l_{13} 之间的夹角。

所以整个三角桁架的变形能为

$$U_{12} + U_{13} + U_{14}$$

此外，外力 \bar{Q} 的位能可由 \bar{Q} 乘以 \bar{Q} 作用方向上的位移并加上负号得出。即外力的位能为

$$-\bar{Q}u_1$$

这个三角桁架的总位能，就是全部杆件的以节点位移的函数来表示的变形能与外力的位能之和，即总位能 J 应为

$$\begin{aligned} J &= U_{12} + U_{13} + U_{14} - \bar{Q}u_1 = \left(\frac{1}{2} \frac{A_0 E}{l_{12}} + 2 \times \frac{1}{2} \frac{A_0 E}{l_{12}} \cos^2 \alpha \right) u_1^2 - \bar{Q}u_1 \\ &= \frac{A_0 E}{2l_{12}} (1 + 2 \cos^2 \alpha) u_1^2 - \bar{Q}u_1 \end{aligned} \quad (5-64)$$

J 是 u_1 的函数，亦就是节点位移函数 u 的泛函，由于其它各节点 2, 3, 4 上的位移为零，故这里仅是节点 1 在 x 方向上的位移 u_1 （由于对称在 y 方向的位移为零）的函数。

最小位能原理认为，使 J 为最小值的 u_1 就是正确解。

J 关于 u_1 的极值条件是

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} = \frac{A_0 E}{l_{12}} (1 + 2 \cos^2 \alpha) u_1 - \bar{Q}$$

从此式可直接得出

$$u_1 = \frac{\bar{Q}l_{12}}{A_0 E (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (5-65)$$

它与式 (5-45) 结果相同。

因此， J 为极值时，就是 u_1 的正确解。在利用最小位能原理求解 u_1 时，关键之点是先应找到一个泛函 J ，即弹性体在外力作用下的位能函数（对于位移型有限元法以各节点位移的函数来表示）。这个泛函为极值时的位移 u_1 ，就是所求的正确解。据此原理，让我们来讨论桁架的位移型有限单元法。

四、位移型有限单元法

我们在第四章中已经看到，有限单元法是先整体离散化，写出每个单元的泛函，各个单元泛函的总和即为整体泛函。因而有限单元法的基础是求出每一个单元的泛函。对于三角桁架来说，最简便的办法，是将每一个杆件作为一个单元，此单元只能受轴向力，而在杆件的长度方向产生变形。



图 5-8



图 5-9

以长度 l 、横截面积 A_0 等截面直杆为一单元，标注为 $\textcircled{\times}$ ，它受轴向拉力 P 的作用，如图 5-8 所示。图上座标系统取 \underline{x} 、 \underline{y} ，所用符号在 x 、 y 之下加了一横，表示它是单元座标系或局部座标系，以区别于图 5-6 所示的 x 、 y 整体座标系。与此同时，在单元座标系的各个物理量，如 $\underline{\epsilon}_x$ 、 \underline{u} 、 \underline{P} 、…等，均在下面加一横而成为 $\underline{\epsilon}_x$ 、 \underline{u} 、 \underline{P} 、…等。

设杆的伸长量为 $\underline{\delta}$ ，取杆的长度方向为 \underline{x} 轴，则 \underline{x} 轴方向的应变 $\underline{\epsilon}_x$ 为

$$\underline{\varepsilon}_x = \frac{\delta}{l}$$

根据式 (5-54), 弹性变形能为

$$\begin{aligned} U &= \int u dV = \frac{1}{2} \iiint \sigma_x \varepsilon_x d x d y d z \\ &= \frac{1}{2} \iiint E \varepsilon_x^2 d x d y d z = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 A_0 l = \frac{1}{2} E \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 A_0 l \\ &= \frac{1}{2} E \left(\frac{A_0}{l} \right) \delta^2 \end{aligned} \quad (5-66)$$

$$\underline{P} = \frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{EA_0}{l} \delta \quad (5-67)$$

在位移型有限单元中, 用图 5-9 所示的情况来表明它的特征。设两端的编号为 1、2, 两端的位移为 \underline{u}_1 与 \underline{u}_2 , 端点力为 \underline{F}_{x1} 及 \underline{F}_{x2} , 于是有

$$\underline{\delta} = \underline{u}_2 - \underline{u}_1 \quad (5-68)$$

利用式 (5-68), 则式 (5-66) 可以写成

$$U = \frac{1}{2} \frac{EA_0}{l} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1)^2 \quad (5-69)$$

因此, 单元②的位能函数为 \underline{U} 与外力的位能之和, 即

$$J^e = \frac{1}{2} \frac{EA_0}{l} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1)^2 - \underline{F}_{x1} \underline{u}_1 - \underline{F}_{x2} \underline{u}_2 \quad (5-70)$$

通过使单元泛函 J^e 的偏导数为零, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J^e}{\partial \underline{u}_1} &= 0 \\ \frac{\partial J^e}{\partial \underline{u}_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-71)$$

就能得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \underline{u}_1} - \underline{F}_{x1} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \underline{u}_2} - \underline{F}_{x2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-72)$$

因此, 现定义节点力 \underline{F}_{x1} , \underline{F}_{x2} 如下:

$$\left. \begin{aligned} \underline{F}_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{u}_1} \\ \underline{F}_{x2} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{u}_2} \end{aligned} \right\} \quad (5-73)$$

对比式 (5-72)、(5-73), 可以看出, \underline{F}_{x1} 及 \underline{F}_{x2} 是在最小单元位能情况下所应具有的杆件端点力。通过计算得到

$$\left. \begin{aligned} \underline{F}_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{u}_1} = -\frac{EA_0}{l}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) = -\underline{P} \\ \underline{F}_{x2} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{u}_2} = \frac{EA_0}{l}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) = \underline{P} \end{aligned} \right\} \quad (5-74)$$

如上式所示， \underline{F}_{x1} 与 \underline{F}_{x2} 分别是 1，2 两端的轴力，它们都以 x 轴的正向为正。因此可将式 (5-74) 写成以下的矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_{x1} \\ \underline{F}_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA_0}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (5-75)$$

或简写成

$$\{F\}^e = \{k\}^e \{\delta\}^e \quad (5-76)$$

这里

$$\begin{aligned} \{F\}^e &= \begin{Bmatrix} \underline{F}_{x1} \\ \underline{F}_{x2} \end{Bmatrix} \\ \{k\}^e &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \{\delta\}^e &= \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

我们称 $\{F\}^e$ 为单元节点的力向量， $\{k\}^e$ 为单元刚度矩阵， $\{\delta\}^e$ 为单元位移向量。

以上是杆轴与 x 轴一致，仅 x 轴方向有位移的情况。现在来研究图 5-10 所示三维空间中的杆。此时 x、y、z 为整体坐标系，与前面的局部坐标系 x、y、z 有别。设杆在以 1 到 2 为正向时的方向为 x，其方向角为 α ， β ， γ ，其方向余弦为 $\cos \alpha$ ， $\cos \beta$ ， $\cos \gamma$ ，并设 1，2 两端的位移在 x，y，z 轴方向上的分量分别为 \underline{u}_1 ， \underline{v}_1 ， \underline{w}_1 ， \underline{u}_2 ， \underline{v}_2 ， \underline{w}_2 ⊖，则杆的受力伸长量 δ_0 （即 x 方向的 δ ）为

$$\delta_0 = (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \cos \alpha + (\underline{v}_2 - \underline{v}_1) \cos \beta + (\underline{w}_2 - \underline{w}_1) \cos \gamma \quad (5-77)$$

如用式 (5-77) 表示 δ_0 ，则杆的变形能仍用式 (5-59) 计算，即

$$U = \frac{1}{2} \frac{EA_0}{l} \delta_0^2$$

根据式 (5-73) 的类似原理，把这里的端点力定义为

$$\left. \begin{aligned} F_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{u}_1}, & F_{y1} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{v}_1}, & F_{z1} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{w}_1} \\ F_{x2} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{u}_2}, & F_{y2} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{v}_2}, & F_{z2} &= \frac{\partial U}{\partial \underline{w}_2} \end{aligned} \right\} \quad (5-78)$$

⊖ \underline{u}_1 与 \underline{u}_1 有区别， \underline{u}_1 表示 u 方向为 x 方向，即整体坐标的 x 轴的方向，而节点编码则为单元节点编码。 \underline{u}_1 表示其中的 u 及 1 均为局部坐标及单元节点编码。其余类似。这个概念很重要，不应混淆，以免发生计算上的错误。

$$\begin{aligned} \text{故 } F_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial u_1} = -\frac{EA_0}{l} [(u_2 - u_1) \cos \alpha + (v_2 - v_1) \cos \beta + (w_2 - w_1) \cos \gamma] \cos \alpha \\ &= \frac{EA_0}{l} [u_1 \cos^2 \alpha + v_1 \cos \beta \cos \alpha + w_1 \cos \gamma \cos \alpha - u_2 \cos^2 \alpha \\ &\quad - v_2 \cos \beta \cos \alpha - w_2 \cos \gamma \cos \alpha] \end{aligned}$$

余类推

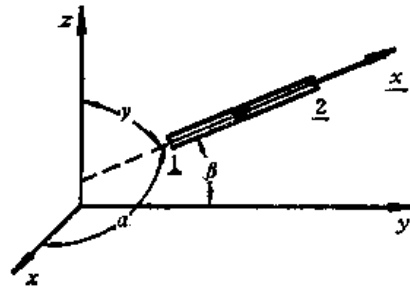


图 5-10

通过计算可以导出

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (5-79)$$

式中

$$\{F\}^e = [F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}]^T$$

$$\{\delta\}^e = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2]^T$$

$$[k]^e = \frac{EA_0}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & & & & & \\ & \text{对称} & & & & \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & & & & \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \gamma & \cos^2 \alpha & & \\ & & & & \text{对称} & \\ -\cos \alpha \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \\ -\cos \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \cos \alpha & -\cos^2 \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (5-80)$$

$[k]^e$ 是对称矩阵，所有对称部分均没有写出。请注意，在用矩阵方程表示时，式(5-79)与(5-76)具有同样形式。

同样，如果杆的轴力（以拉伸为正）为 P 时，则有

$$\left. \begin{aligned} F_{x1} &= -P \cos \alpha & F_{y1} &= -P \cos \beta & F_{z1} &= -P \cos \gamma \\ F_{x2} &= P \cos \alpha & F_{y2} &= P \cos \beta & F_{z2} &= P \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (5-81)$$

式(5-79)，也可写成分块形式：

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} [k_{11}]^e & [k_{12}]^e \\ [k_{21}]^e & [k_{22}]^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix}^e \quad (5-82)$$

式中 $\{F_1\}^e = [F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}]^T$

$\{F_2\}^e = [F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}]^T$

$\{\delta_1\}^e = [u_1, v_1, w_1]^T$

$\{\delta_2\}^e = [u_2, v_2, w_2]^T$

$[k_{11}]^e - \{F_1\}^e$ 及 $\{\delta_1\}^e$ 之间的子刚度矩阵

$[k_{12}]^e - \{F_1\}^e$ 及 $\{\delta_2\}^e$ 之间的子刚度矩阵

$\{k_{21}\}^e - \{F_2\}^e$ 及 $\{\delta_1\}^e$ 之间的子刚度矩阵

$\{k_{22}\}^e - \{F_2\}^e$ 及 $\{\delta_2\}^e$ 之间的子刚度矩阵

用位移型有限单元法解题时，首先用单元刚度矩阵 $[k]^e$ 将各杆件的变形特性写成式(5-82)的形式，然后用最小位能原理将各单元的位能函数 J^e 加起来求取总位能函数 J 的极值，亦即

$$J = \sum_e J^e = \sum_{e=1}^n U^e - \sum_{i=1}^m F_i u_i \quad (5-83)$$

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial u_i} \right\} = \sum_{e=1}^n \frac{\partial U^e}{\partial u_i} - \sum_{i=1}^m F_i = 0 \quad (5-84)$$

式中 n —— 整体所划分的单元数；

m —— 整个节点数（按整体编码）。

事实上，式(5-79)及(5-82)就是从 $F_i = \frac{\partial U^e}{\partial u_i}$ 导出的。

利用式(5-84)便可解出各节点的位移量，但在求解之前还需计算整体刚度矩阵并确定整个系统的支承条件及外力荷载。前者相当于 § 4-5 中由 $[k_{ij}]^e \rightarrow [\tilde{k}_{ij}]^e \rightarrow [k_{ij}]$ 的过程，后者则为确定节点位移所必需。兹分述之。

五、整体刚度矩阵

(一) 整个刚度矩阵的分块形式

结合图 5-6 的三角桁架进行整体分析，以建立整体刚度矩阵。首先建立公共坐标系，如图 5-6 所示的 x, y 坐标系。因此对于每一个具体杆件来讲，均有其各自的方向余弦，例如杆件 13 的方向角 α, β, γ 依次为 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 。而且杆件的方向决定单元刚度矩阵中 1、2 二个端点的位置（从 1 至 2），例如杆件 13 的方向为 31，其中节点 3 相当于端点 1，节点 1 相当于端点 2，余类推。

图 5-6 中的三角桁架有四个节点 1、2、3、4，共有 8 个节点位移分量和 8 个节点力分量。当由桁架的节点位移 $\{\delta\}$ 求桁架节点力 $\{F\}$ 时，利用式(5-84)可写成如下的转换关系

$$\{F\} = \sum_{e=1}^n \frac{\partial U^e}{\partial u_i} = [K]\{\delta\} \quad (5-85)$$

其中的转换矩阵 $[K]$ 称作整体刚度矩阵，对图 5-6 的情况 $[K]$ 是 8×8 阶矩阵。

前边我们曾把单元刚度矩阵 $[k]^e$ 写成分块形式。仿此，式(5-85)也可写成分块形式如下：

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} \quad (5-86)$$

式中 $\{\delta_i\}$ 及 $\{F_i\}$ 是二阶子向量 $[u_i \quad v_i]^T$ 及 $[F_{x_i} \quad F_{y_i}]^T$, $[K_{ij}]$ 是 2×2 阶子矩阵, $i = 1, 2, 3, 4$, 是节点的总码。

(二) 刚度矩阵集成法的原则

求整个刚度矩阵 $[K]$ 时, 仍用第四章介绍的类似的计算步骤。

第一步 由式 (5-80) 得出单元刚度矩阵 $[k]^e$ 并写成分块形式, 然后扩大成单元的贡献矩阵 $[K]^e$, 相当于第四章中由 $[k_{ij}]^e$ 扩大到 $[\tilde{k}_{ij}]^e$, 使每一个分块在贡献矩阵中占据它所应有的位置。

第二步 将各单元的 $[K]^e$ 叠加, 得出整个刚度矩阵 $[K]$, 并写成分块形式。

这里需要作两点说明:

首先, 节点编码有两个系统, 其一为节点的总码, 如图 5-6 三角桁架中的节点统一编码 1、2、3、4。另一为节点局部码, 它在单元中使用, 如图 5-9 所示。每个杆件均编 1、2 两个端点, 1 为始端, 2 为末端, 用箭头标出杆件由始端到末端的方向。它是每个单元采用的局部坐标 x 的正方向。

其次, 要注意矩阵 $[k]^e$ 、 $[K]^e$ 、 $[K]$ 中子块的排列方式:

单元刚度矩阵 $[k]^e$ ——子块按单元局部码排列。

扩大后的单元贡献矩阵 $[K]^e$, 子块排列方式与 $[K]$ 相同, 即按节点总码安排子块。

整体刚度矩阵 $[K]$ ——子块按节点总码排列, 下面按照 $[k]^e \rightarrow [K]^e \rightarrow [K]$ 的次序, 说明具体作法。

第一步把 $[k]^e$ 扩大成 $[K]^e$ 。这一步的关键是子块“搬家”。即把 $[k]^e$ 中按局部码排列的子块“搬家”, 以变成 $[K]^e$ 中按总码排列的子块。

以单元①为例, 局部码 1、2 对应于总码 3、1, 按这个对应关系搬家后, 可得出单元①的贡献矩阵 $[K]^{\text{①}}$ 如下 (其中只写出非零子块):

根据图 5-6, x 方向向下为正, 故杆的方向为由 3 到 1, 因而将 2 放在对应于 1 的位置, 1 放在对应于 3 的位置, 从而得出如下的贡献矩阵 $[K]^{\text{①}}$:

$$[K]^{\text{①}} = \begin{array}{c} \text{总码} \rightarrow \\ \downarrow \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} [k_{22}]^{\text{①}} & 0 & [k_{21}]^{\text{①}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [k_{12}]^{\text{①}} & 0 & [k_{11}]^{\text{①}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \underline{2} \\ \underline{1} \\ \uparrow \\ \leftarrow \text{局部码} \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underline{2} & \underline{1} \end{array} \end{array}$$

用同样方法可得出 $[K]^{\text{②}}$ 及 $[K]^{\text{③}}$ 如下:

$$[K]^{\text{②}} = \begin{array}{c} \text{总码} \rightarrow \\ \downarrow \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} [k_{22}]^{\text{②}} & [k_{21}]^{\text{②}} & 0 & 0 \\ [k_{12}]^{\text{②}} & [k_{11}]^{\text{②}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \underline{2} \\ \underline{1} \\ \uparrow \\ \leftarrow \text{局部码} \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underline{2} & \underline{1} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{总码} \rightarrow \\
 \downarrow \\
 [K]^{(e)} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
 \left[\begin{array}{cccc} [k_{22}]^{(e)} & 0 & 0 & [k_{21}]^{(e)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [k_{12}]^{(e)} & 0 & 0 & [k_{11}]^{(e)} \end{array} \right] \begin{array}{c} \underline{2} \\ \\ \\ \underline{1} \end{array} \\
 \begin{array}{cc} \underline{2} & \underline{1} \end{array} \text{局部码}
 \end{array}$$

其中零处为零子块。

第二步由 $[K]^{(e)}$ 求 $[K]$

根据矩阵叠加原理：

$$[K] = [K]^{(1)} + [K]^{(2)} + [K]^{(3)} = \sum_{e=1}^3 [K]^{(e)}$$

可得出整体刚度矩阵 $[K]$ 如下：

$$\begin{array}{c}
 \text{总码} \rightarrow \\
 \downarrow \\
 [K] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
 \left[\begin{array}{cccc} [k_{22}]^{(1)} + [k_{22}]^{(2)} + [k_{22}]^{(3)} & [k_{21}]^{(1)} & [k_{21}]^{(1)} & [k_{21}]^{(1)} \\ [k_{12}]^{(1)} & [k_{11}]^{(1)} & 0 & 0 \\ [k_{12}]^{(1)} & 0 & [k_{11}]^{(1)} & 0 \\ [k_{12}]^{(1)} & 0 & 0 & [k_{11}]^{(1)} \end{array} \right] \begin{array}{ccc} \text{单元} & \text{单元} & \text{单元} \\ \text{①} & \text{②} & \text{③} \\ \begin{array}{ccc} \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} \\ & \underline{1} & \\ \underline{1} & & \\ & & \underline{1} \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \text{单元} \text{①} & \begin{array}{cc} \underline{2} & \underline{1} \end{array} \\ \text{单元} \text{②} & \begin{array}{cc} \underline{2} & \underline{1} \end{array} \\ \text{单元} \text{③} & \begin{array}{cc} \underline{2} & \underline{1} \end{array} \end{array} \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \text{局部码} \end{array} \right\} \text{(5-87)}
 \end{array}$$

以上就是用刚度集成法求整体刚度的基本原则。

六、支承条件及外力荷载

(一) 支承条件的必要性

从式 (5-85) 得出整个刚度矩阵 $[K]$ 以及 $\{F\}$ 与 $\{\delta\}$ 之间的矩阵方程

$$[K]\{\delta\} = \{F\}$$

应用上式解题时，还必须确定支承条件，为了说明引入支承条件的必要性，我们先看一个例子。

假设图 5-11 a 上的三角桁架没有任何支承，也就是说，它是一个悬空结构。在其各节点上所承受的已知荷载 $\{P\}$ ，用列阵表示为

$$\{P\} = [X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4]^T$$

这时节点力 $\{F\}$ 显然等于已知节点荷载 $\{P\}$ 。

故

$$\{P\} = \{F\}$$

因此, 式 (5-85) 可以写成

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (5-88)$$

但是由于 $[K]$ 是奇异方阵 (没有逆阵的方阵)*, 因此由式 (5-88) 无法解出结点位移。这个结论是显然的, 因为这是一个悬空结构, 整个结构在平面中可以自由地进行两个方向的平移和旋转 (亦即它有三个自由度) 而致节点无固定的位移。

更详细地说, 还可以分为以下两种情况:

1. 如果荷载 $\{P\}$ 本身不是平衡力系, 则这个悬空结构显然无法维持平衡, 因此在静力学中无法求出它的内力和位移。

2. 如果荷载 $\{P\}$ 本身是平衡力系, 则这个悬空结构虽然可以维持平衡, 但位移 $\{\delta\}$ 仍然无法确定。

因此, 为了使问题成为可解, 必须人为地设置足够数量的支承以控制平面运动中的三个自由度及连杆系统内部的若干自由度。换言之, 只有系统的全部自由度受到支承条件约束以后, 才能出现固定的节点位移。实际结构中通常有三个或三个以上的支承。

(二) 对于支承条件及外力荷载的处理

仍以图 5-11 的三角桁架为例, 应在解题时根据具体支承条件对式 (5-88) 作下列两方面的改变:

1. 一方面在支承处引入支承条件, 即在 $\{\delta\}$ 中令有关分量为支承条件所规定的已知值, 例如, 若 2、3、4 三点是固定的支承 (如图 5-11 b 所示), 则取该支承有关的位移量为零, 亦即 $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$

2. 另一方面在无支承处把 $\{F\}$ 中的有关分量换成 $\{P\}$ 中的有关分量, 亦即将无支承的节点 1 上的 F_1 换成外力荷载 P_1 (如图 5-11 b)。

于是就可以把式 (5-86) 改写成

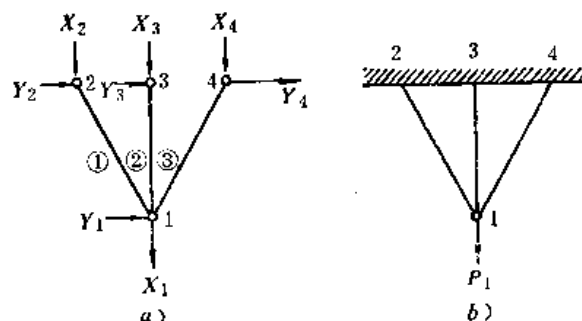


图 5-11

* 理论和实践均证明, 任何一个位移模式, 均应反映两种位移 (即由两种位移所构成): 一种是由于单元本身的刚体位移所引起的节点位移; 另一种是由于单元本身产生应变所引起的节点位移。前一种位移没有单元本身的应变, 节点与节点间没有相对位移, 是不会导致节点力的, 后一种位移才会导致节点力的形成。根据式 (5-79),

$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$

$$\text{而} \quad \{\delta\} = \{\delta_I\} + \{\delta_{II}\}$$

式中 $\{\delta_I\}$ —— 刚体位移所引起的节点位移;

$\{\delta_{II}\}$ —— 导致节点力的节点位移。

$$\text{故} \quad \{F\} = [K]\{\delta_I\} + [K]\{\delta_{II}\}$$

$$\text{而} \quad [K]\{\delta_I\} = 0$$

$$\text{故} \quad \{F\} = [K]\{\delta_{II}\}$$

由于 $\{\delta_I\}$ 是任意的刚体位移所引起的节点位移, 它是非零向量, 只有 $[K]$ 为奇异方阵才会使 $[K]\{\delta_I\} = 0$ 有非零解。

同理 $[K]$ 当然也为奇异方阵。

这里只从物理概念来说明, 至于数学上的严格证明比较繁, 故不作详述。

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} \quad (5-89)$$

这样，我们就能从第 1 个子矩阵方程

$$[K_{11}]\{\delta_1\} = \{P_1\} \quad (5-90)$$

解出 $\{\delta_1\}$ 中的 u_1, v_1 值。这里也看出了把整体刚度矩阵写成分块形式的实用意义，因为式 (5-90) 是建立在分块形式的基础之上的。

例题 5 计算图 5-12 三角桁架中节点 1 的位移。

解

1. 原始数据及编码参看图 5-12

$$l^{\text{①}} = 100 \text{ 毫米} = 10 \text{ 厘米}$$

$$A_0 = 10 \times 10 \text{ 毫米}^2 = 1 \text{ 厘米}^2$$

$$E = 20 \times 10^5 \text{ 牛/厘米}^2$$

$$Q = 500 \text{ 公斤力} = 4903 \text{ 牛}$$

①、②、③，三杆的方向如图所示。

兹将三个杆方向余弦计算如下：

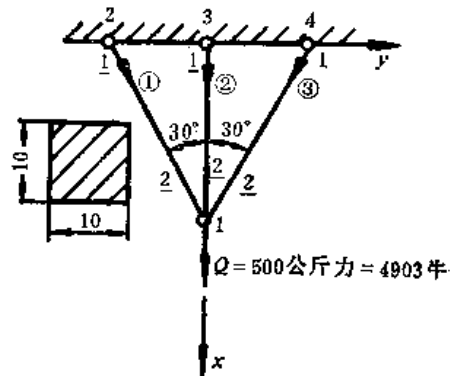


图5-12 三角桁架

	α	$\cos \alpha$	β	$\cos \beta$	γ	$\cos \gamma$
①	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	60°	$\frac{1}{2}$	90°	0
②	0°	1	90°	0	90°	0
③	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	120°	$-\frac{1}{2}$	90°	0

2. 求单元刚度矩阵，因为是平面问题故 $[k]^e$ 成 4×4 阶的矩阵，根据式 (5-80) 得

$$[k]^e = \frac{EA_0}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \dots & \dots \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \cos \beta & -\cos^2 \beta & \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

把各单元的方向余弦代入，

$$[k]^{\text{①}} = \frac{EA_0}{l^{\text{①}}/\cos \alpha} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \dots & \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

$$= \frac{EA_0}{l^{\circledast}} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \vdots & \vdots \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \vdots & \vdots \\ \hline \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{对称} \\ \text{2} \\ \hline \text{1} \\ \text{2} \quad \text{1} \end{matrix}$$

$$[k]^{\circledast} = \frac{EA_0}{l^{\circledast}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{对称} \\ \text{2} \\ \hline \text{1} \\ \text{2} \quad \text{1} \end{matrix}$$

$$[k]^s = \frac{EA_0}{l^{\circledast}/\cos\alpha} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \vdots & \vdots \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \vdots & \vdots \\ \hline -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{对称} \\ \text{2} \\ \hline \text{1} \\ \text{2} \quad \text{1} \end{matrix}$$

$$= \frac{EA_0}{l^{\circledast}} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \vdots & \vdots \\ -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \vdots & \vdots \\ \hline -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{对称} \\ \text{2} \\ \hline \text{1} \\ \text{2} \quad \text{1} \end{matrix}$$

3. 形成整体刚度矩阵
根据式 (5-87), 得出

$$[K] = \frac{EA_0}{l^{\circledast}} \begin{bmatrix} \frac{4+3\sqrt{3}}{4} & 0 & -1 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & & & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & & \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & & & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & & & & & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & & & & & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

4. 引入支承条件

$$\{\delta_2\} = \{\delta_3\} = \{\delta_4\} = 0$$

从式 (5-90) 的子矩阵方程, 得出

$$\frac{EA_0}{l^{\circledast}} \begin{bmatrix} \frac{4+3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \{P_1\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix}$$

故

$$\frac{EA_0}{l^{\circledast}} \cdot \frac{4+3\sqrt{3}}{4} u_1 = X_1$$

$$\frac{EA_0}{l^{\circledast}} \frac{\sqrt{3}}{4} v_1 = Y_1$$

5. 解上列方程组, 求得节点 1 的位移

$$u_1 = \frac{l^{\circledast}}{EA_0} \frac{4}{4+3\sqrt{3}} X_1$$

$$v_1 = \frac{l^{\circledast}}{EA_0} \frac{4}{\sqrt{3}} Y_1$$

已知
故得

$$X_1 = 4903 \text{ 牛}, Y_1 = 0, l^{\circledast} = 10 \text{ 厘米}$$

$$u_1 = \frac{10}{20 \times 10^6 \times 1} \times \frac{4}{4 + 3\sqrt{3}} \times 4903 = 1.066 \times 10^{-4} \text{ 厘米}$$

根据式 (5-65)

$$u_1 = \frac{l_{12}\bar{Q}}{EA_0(1 + 2\cos^2 \alpha)} = \frac{10 \times 4903}{20 \times 10^6 \times 1 \times \left[1 + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]} = 1.066 \times 10^{-4} \text{ 厘米}$$

可以看出, 用这两种方法计算所得的结果是相同的。

七、变温位移、变温等效节点荷载

以上我们通过实例讨论了桁架的受力变形并用位移型有限单元法求出节点位移, 现在来讨论由于桁架中各杆件的温度变化所引起的节点位移。

仍先求一个杆件的变形能, 杆件在变温时的总伸长量为

$$\delta_{\Sigma} = \delta_0 + \delta_r \quad (5-91)$$

式中 δ_0 ——受力伸长量;

δ_r ——温升伸长量。

在三维空间中, 一个单元杆件的总伸长量可以表达为

$$\delta_{\Sigma} = (u_2 - u_1) \cos \alpha + (v_2 - v_1) \cos \beta + (\omega_2 - \omega_1) \cos \gamma \quad (5-92)$$

其中 u_1 、 v_1 、 ω_1 及 u_2 、 v_2 、 ω_2 为单元杆件两端的总位移的各个分量。而变温伸长量可表达为

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= \alpha_r T l \\ \delta_{r_x} &= \alpha_r T l \cos \alpha \\ \delta_{r_y} &= \alpha_r T l \cos \beta \\ \delta_{r_z} &= \alpha_r T l \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (5-93)$$

式中 α_r ——材料的线热胀系数。

所以

$$\begin{aligned} \delta_0 &= (u_2 - u_1) \cos \alpha + (v_2 - v_1) \cos \beta + (\omega_2 - \omega_1) \cos \gamma - \alpha_r T l \\ &= (u_2 - u_1 - \alpha_r T l \cos \alpha) \cos \alpha + (v_2 - v_1 - \alpha_r T l \cos \beta) \cos \beta \\ &\quad + (\omega_2 - \omega_1 - \alpha_r T l \cos \gamma) \cos \gamma \end{aligned} \quad (5-94)$$

仍用公式 (5-66), 得

$$U = \frac{1}{2} \frac{A_0 E}{l} \delta_0^2 \quad (5-95)$$

节点力为:

$$\begin{aligned} F_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial u_1} & F_{y1} &= \frac{\partial U}{\partial v_1} & F_{z1} &= \frac{\partial U}{\partial \omega_1} \\ F_{x2} &= \frac{\partial U}{\partial u_2} & F_{y2} &= \frac{\partial U}{\partial v_2} & F_{z2} &= \frac{\partial U}{\partial \omega_2} \end{aligned}$$

通过计算, 可得

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EA_0}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & & & & & \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \text{对称} & & & \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \gamma & \cos^2 \alpha & & \\ -\cos \alpha \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \text{对称} \\ -\cos \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \cos \gamma & -\cos^2 \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 + \alpha_1 T \cos \alpha \\ v_1 + \alpha_1 T \cos \beta \\ w_1 + \alpha_1 T \cos \gamma \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

上式可以写成

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e + [k]^e \begin{Bmatrix} \alpha_1 T \cos \alpha \\ \alpha_1 T \cos \beta \\ \alpha_1 T \cos \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5-96}$$

移项后，上式成为

$$\{F\}^e - [k]^e \begin{Bmatrix} \alpha_1 T \cos \alpha \\ \alpha_1 T \cos \beta \\ \alpha_1 T \cos \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [k]^e \{\delta\}^e \tag{5-97}$$

利用式 (5-80)，通过计算，可得

$$\begin{aligned} -[k]^e \begin{Bmatrix} \alpha_1 T \cos \alpha \\ \alpha_1 T \cos \beta \\ \alpha_1 T \cos \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= -EA_0 T \alpha_1 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \\ -\cos \alpha \\ -\cos \beta \\ -\cos \gamma \end{Bmatrix} \\ &= -EA_0 T \alpha_1 \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \\ -\cos \alpha \\ -\cos \beta \\ -\cos \gamma \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{5-98}$$

记 $\{P_i\}^e$ 为单元变温等效荷载, 并令

$$\{P_i\}^e = -EA_0 T \alpha_i \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \\ -\cos \alpha \\ -\cos \beta \\ -\cos \gamma \end{Bmatrix} = EA_0 T \alpha_i \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\cos \beta \\ -\cos \gamma \\ \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_{1i}\}^e \\ \{P_{2i}\}^e \end{Bmatrix} \quad (5-99)$$

其中 $\{P_{1i}\}^e$ (或 $[X_{1i} Y_{1i}]^e$) 为端点 1 的变温等效荷载;

$\{P_{2i}\}^e$ (或 $[X_{2i} Y_{2i}]^e$) 为端点 2 的变温等效荷载。

于是式 (5-97) 可写成

$$\{F\}^e + \{P_i\}^e = \{k\}^e \{\delta\}^e \quad (5-100)$$

仍和前面一样, 为了建立与外力荷载的平衡, 必须求出整体刚度矩阵, 但是此时的整体矩阵方程将成为

$$[K]\{\delta\} = \{F\} + \{P_i\} \quad (5-101)$$

和前面式 (5-85) 对照, 就是等号右边多了 $\{P_i\}$ 一项。这一项称为整体等效变温荷载, 因此在求解变温条件下的结点位移时, 只要在原有的节点荷载上, 加以等效变温荷载, 便得到节点总荷载, 于是就能采用前面的方法, 求得节点位移。

例题 6 仍以前面的三角桁架作为实例。假定杆件①温升为 30°C , 杆件②、③温度不变, 节点荷载 $\bar{Q} = 0$, 并且假定支承条件不变, 即 $\{\delta_2\} = \{\delta_3\} = \{\delta_4\} = 0$, 如图 5-13 所示。

解 子矩阵方程仍为

$$\frac{EA_0}{l^{\text{②}}} \begin{bmatrix} \frac{4 + 3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \{P_i\}$$

但是这里 $\{P_i\} = \{P_{1i}\} + \{P_{1i}\}^{\text{①}} + \{P_{1i}\}^{\text{②}} + \{P_{1i}\}^{\text{③}}$

式中 $\{P_{1i}\}$ ——节点 1 的总荷载;

$\{P_{1i}\}^{\text{①}}$ ——单元①对节点 1 的等效变温荷载;

$\{P_{1i}\}^{\text{②}}$ ——单元②对节点 1 的等效变温荷载;

$\{P_{1i}\}^{\text{③}}$ ——单元③对节点 1 的等效变温荷载。

在本例中

因为

$$\bar{Q} = 0$$

故

$$\{P_{1i}\} = 0$$

$$\{P_{1i}\}^{\text{①}} = \{P_{1i}\}^{\text{②}} = EA_0 T \alpha_i \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{Bmatrix}^{\text{①}}$$

而

$$T^{\text{②}} = 0, \text{ 故 } \{P_{1i}\}^{\text{②}} = 0$$

$$T^{\text{③}} = 0, \text{ 故 } \{P_{1i}\}^{\text{③}} = 0$$

各单元的等效荷载集成原理和单元刚度集成原理相同, 也应先“搬家”然后相应项叠加。代入上式, 得

$$\frac{EA_0}{l^2} \begin{bmatrix} \frac{4+3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = EA_0 T \alpha_1 \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{Bmatrix} \textcircled{1}$$

故

$$\begin{bmatrix} \frac{4+3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = T l^2 \alpha_1 \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{4}{4+3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} T l^2 \alpha_1 = \frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \times 30 \times 10 \times 1.1 \times 10^{-5}$$

$$= 1.242 \times 10^{-3} \text{ 厘米}$$

$$v_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} T l^2 \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 30 \times 10 \times 1.1 \times 10^{-5} = 3.810 \times 10^{-3} \text{ 厘米}$$

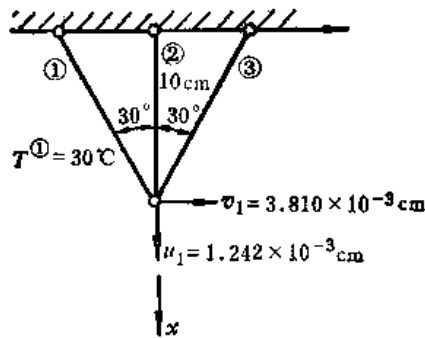


图 5-13

可以看出，变温位移是相当可观的，即使仅仅由于杆件①有 30°C 温升，在 x 方向的位移 u_1 也比 500 公斤力荷载所产生的垂直位移（其值仅为 1.066×10^{-3} 厘米）为大。这种连杆结构的变温位移，在测量仪器的设计及应用中值得引起重视。

§ 5-5 弹性力学中平面热变形问题的

有限单元法

一、基本概念

（一）弹性力学与结构力学的区别

结构力学的研究对象是杆件结构。杆件的几何特征是长度比横截面尺寸大得多。杆件的变形特征是其横截面在变形后仍保持平面。计算杆件的变形，一般采用保持平面的假设。对于杆件的热变形，也是这样。从而使计算工作大为简化。如在 § 5-3 及 § 5-4 的各个例题中，杆件的截面高度 h 小于跨度 l 的 $\frac{1}{4}$ ，计算时采用了结构力学的方法来计算节点的变温位移。

弹性力学的研究对象是非杆件结构，在这里保持平面的假设不再适用。因此，研究这类物体的热变形问题，不能采用 § 5-3 及 § 5-4 所介绍的结构力学方法，而必须采用弹性力学方法。

(二) 弹性力学平面问题的两种类型

弹性力学可分为空间问题和平面问题。严格地说，任何弹性体总是处于空间受力状态，因而任何实际问题都是空间问题。但在某些情况下，空间问题可以近似地作为平面问题处理。

弹性力学平面问题有两种类型：

1. 平面应力问题

例如机械构件中的平板的特点是它的厚度相对于广度（长度及宽度）来讲是很小的，当其荷载是与平板的平面平行而且沿厚度方向是均匀分布时，就可以认为它的沿厚度方向的应力分量等于零而只有平行于平面方向的应力。这种问题称为平面应力问题。

2. 平面形变问题

例如图 5-14 所示的长厚壁圆筒，其圆筒的长度比直径大得多，当其荷载都与 oxy 平面平行而且沿 z 轴（长度）均匀分布时，就可以认为它的沿 z 轴方向的位移分量等于零，而只有 x 、 y 方向的位移分量。这种问题称为平面位移问题，习惯上常常称为平面形变问题^[16]（或称平面变形问题^[17]）。

上述两类问题有许多共同特点，合称为弹性力学平面问题。

(三) 弹性力学问题的离散化

弹性力学问题有限单元法的解题思路与前几节的解题思路是基本一致的，它们都是把结构看作是由有限个单元组成的体系。但是它们之间有一点不同：在连杆机构体系中，人们很自然地将其中的有限个杆件看作有限个单元；而在弹性体中需要人为地把它划分成有限个单元。在弹性力学平面问题中，常用的单元是三角形单元。我们在第四章中用有限单元法求解温度场时，也曾采用三角形单元。因此，在图 5-15 所示的薄板（平面应力问题）中采用三角形单元，而在图 5-14 所示的厚壁圆筒（平面形变问题）中，也将同样采用三角形单元。

在平面问题中，所有的节点都取铰接。在节点位移或其某一分量可以不计之处，就在节点处安置一个铰支座，如图 5-15 中的 A 点（其位移为零）；或连杆支座，如图 5-15 中的 B 点（其竖向位移分量为零）。每一个单元所受的荷载，都按静力等效原则移置（分解）到节点上，成为节点荷载。具体的移置办法见后。

用有限单元法解弹性力学问题，须对弹性力学的某些基本概念和基本方程有所了解，所以先把弹性力学的基本方程作一简介，以便引用。

二、弹性力学的基本方程

(一) 位移与应变之间的几何方程

物体在平面之间的变形状态有两种描述形式：一是给出各点的位移 u 和 v 。二是给出各点微小矩形单元的应变 ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ_{xy} 。其中 ϵ_x 和 ϵ_y 分别表示沿 x 方向和 y 方向的线应变， γ_{xy} 表示剪应变（角应变）。

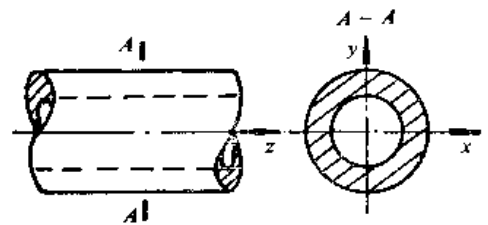


图 5-14

现在推导位移和应变之间的几何关系，图 5-16 的 $ABCD$ 表示变形前物体内的一个微小矩形单元，它的边长为 dx 和 dy 。现在分别考虑由于水平位移 u 和竖向位移 v 所引起的应变。

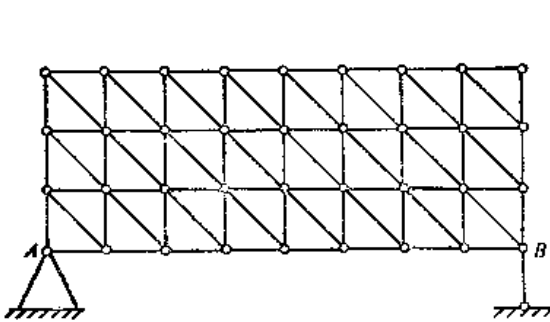


图5-15 薄板单元的划分

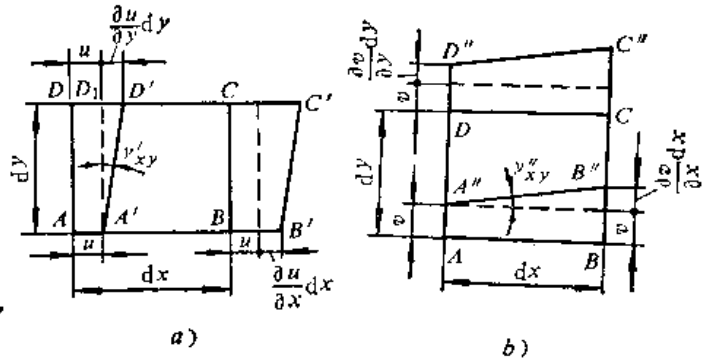


图 5-16

图 5-16 a 中，我们只考虑水平位移 u 。矩形单元 $ABCD$ 在形变后的新位置为 $A'B'C'D'$ 。由于 u 是逐点变化的， u 是坐标 x 和 y 的函数。偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示 u 沿 x 方向的变化率， $\frac{\partial u}{\partial y}$ 表示沿 y 方向的变化率。

设 A 点的水平位移为 u 。

由 A 到 B ，坐标 x 的增量为 dx ，故 u 的增量为 $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ ，因而 B 点的水平位移为 $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ 。

由 A 到 D ，坐标 y 的增量为 dy ，故 u 的增量为 $\frac{\partial u}{\partial y} dy$ ，因而 D 点的水平位移 $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ 。

由图 5-16 a，可以看到三个应变分量如下：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon'_y &= 0 \\ \gamma'_{xy} &= \frac{D_1D' - A'D_1}{A'D_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

同理，由图 5-16 b，可求得竖向位移 v 所引起的应变分量：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_x &= 0 \\ \epsilon'_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

将以上两项应变进行叠加，即得到平面的总应变如下：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (5-102)$$

式(5-102)就是由平面位移求应变的几何方程。

(二) 应变应力之间的物理方程(或称弹性方程), 弹性矩阵。

本节讨论应变与应力的物理方程。先讨论平面应力问题, 然后讨论空间问题和平面应变问题。

1. 平面应力问题的物理方程

在平面应力问题中, 矩形单元上的应力分量如图5-17所示。

在以 x 轴为法线的截面上, 作用应力分量为正应力 σ_x 和剪应力 τ_{xy} 。

在以 y 轴为法线的截面上, 作用的应力分量为正应力 σ_y 和剪应力 τ_{yx} 。

剪应力 τ 有两个脚标: 第一个脚标表示作用面的法线方向, 第二个脚标表示应力的方向。由剪应力互等定律*, 可知 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 因此共有三个独立的应力分量, 它们组成应力向量如下:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5-103)$$

应力的正负号规定如下:

正面(其外法线与座标轴正方向一致的面)上的应力, 其方向与座标轴方向一致的为正。

反面(其外法线方向与座标轴负方向一致的面)上的应力, 其方向与座标轴负方向一致时为正。

对于正应力 σ 来讲, 上述规定就是“以拉为正, 以压为负”。

在平面应力问题中, 由应力求应变的物理方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5-104)$$

式中 μ 为泊松系数, E 为弹性模量, G 为剪切弹性模量。

由上式解出应力, 可得出由应变求应力的物理方程为

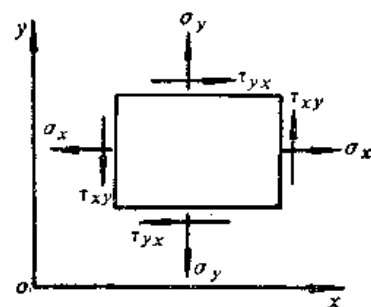


图 5-17

* 关于剪应力互等定律的证明请参看有关弹性力学教材。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\mu\epsilon_x + \epsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5-105)$$

或写成

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (5-106)$$

其中

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{Bmatrix} \quad (5-107)$$

[D]称为弹性矩阵。它是一个对称矩阵(对称方阵),它的元素与弹性模量E及泊松系数(或泊桑比)μ有关。

2. 空间问题的弹性方程、弹性矩阵

在空间问题,我们从弹性体中截取一个六面体,其中有三对平面,分别以三个座标轴垂直,如图5-18。每个面上有三个应力分量:一个正应力,两个剪应力,分别与三个座标轴平行。图中所示为三个正面上的九个应力分量,其中有三个正应力,六个剪应力。六个剪应力中实际上只有三个独立的应力分量,因为它们之间有下列的剪应力互等关系:

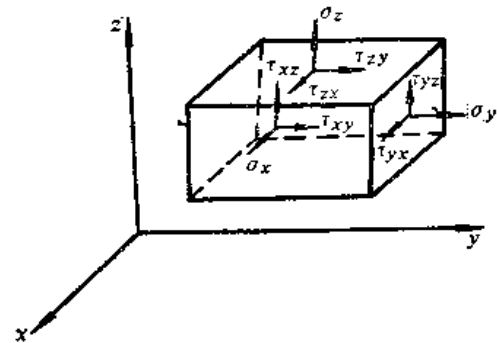


图 5-18

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

因此,空间应力状态共有六个独立的应力分量;与此相应,空间变形状态也共有六个应变分量。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5-108)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5-109)$$

其中 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 是沿 x, y, z 三个方向的线应变; $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 是三个角应变 (剪应变), 例如 γ_{xy} 表示 x, y 方向两线段之间的角应变。

在空间问题中, 应力与应变之间的物理方程, 可仿照式 (5-104) 写出如下:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x + \sigma_y - \mu\sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y + \sigma_z) \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx} \end{cases} \quad (5-110)$$

依同理, 可以写出

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (5-111)$$

或写成

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

其中

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (5-112)$$

称为弹性矩阵（对称方阵），它取决于 μ 及 E 。

3. 平面变形问题的物理方程、弹性矩阵

有了空间问题的弹性方程，就能导出平面变形问题的弹性方程，只要令空间问题中的六个应变分量中的三个 ϵ_z 、 γ_{yz} 、 γ_{xz} 都等于零。

由于 $\gamma_{yz} = 0$ ， $\gamma_{xz} = 0$ ，故由式(5-110)的后二式得出

$$\tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0$$

由 $\epsilon_z = 0$ ，故由式(5-110)的第三式得

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (5-113)$$

由此看出，在六个应力分量中，只有三个应力分量才是独立的应力分量。

为了求出应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 和应变 ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ_{xy} 之间的关系，可利用式(5-110)中的第一、二、四式并将式(5-113)代入即得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} = \frac{2 \left(1 + \frac{\mu}{1-\mu} \right)}{\frac{E}{1-\mu^2}} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5-114)$$

式(5-114)就是平面变形问题的方程。

将两类平面问题的弹性方程(5-104)和(5-114)加以比较。如果在式(5-104)中，

$$\left. \begin{aligned} &\text{把 } E \text{ 换成 } \frac{E}{1-\mu^2} \\ &\text{把 } \mu \text{ 换成 } \frac{\mu}{1-\mu} \end{aligned} \right\} \quad (5-115)$$

就得出式(5-114)。

由此看出，两类平面问题可以按照同样的方式进行分析。只要利用转换关系式 (5-115) 就可将平面应力问题的方程转换成平面变形问题的方程。例如平面形变问题的弹性方程仍可写成

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

其中的弹性矩阵 $[D]$ 则可由式 (5-107) 并利用关系 (5-115) 转换成如下的形式：

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (5-116)$$

三、弹性力学中平面问题的有限单元法

前面已经提到，用有限元法来解弹性力学平面问题应先划分单元，将薄板假想地分割成许多有限大小的三角形集合体，如图 5-15 所示。在这里，每一个三角形与三角桁架（或销接连杆系）中的每一根杆件相对应，即每一个三角形为一个单元。

（一）单元分析的步骤

现在对弹性力学平面问题的三角形单元进行分析，以建立单元刚度矩阵。

图 5-19 所示为一个三角形单元。和第四章一样，三个角点的编码顺序也是按逆时针方向而为 i, j, m 。角点坐标分别为 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ 。

在弹性力学平面问题中，每个角点有两个位移分量，因此，一个三角形单元总共有六个自由度： $u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m$ ，如图 5-19 a 所示。节点 i 的位移向量可写成

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (5-117)$$

因此，三角形单元的角点位移向量 $\{\delta\}^e$ 可写成

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \\ \{\delta_m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \dots \\ u_j \\ v_j \\ \dots \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5-118)$$

在位移法中，我们以三角形三个角点的六个角点位移分量作为基本未知量。

与基本未知量相对应的物理量是加于三个角点上外力的六个角点力分量，如图 5-19 b 所

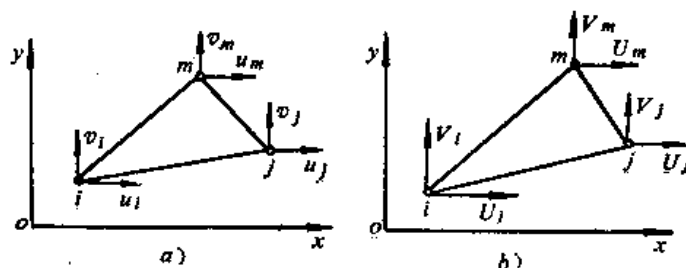


图 5-19

示。

角点力向量可写成

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_j\} \\ \{F_m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} \quad (5-119)$$

单元分析的主要任务是推导基本未知量 $\{\delta\}^e$ 与其对应量 $\{F\}^e$ 之间的转换关系, 即

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (5-120)$$

其中的转换矩阵 $[k]^e$ 称为单元刚度矩阵, 它是 6×6 阶矩阵。

(二) 位移函数 (位移模式) 的建立及解答的收敛性

为了便于求解, 现在对三角形单元进行弹性力学分析。在分析中, 每一单元被当做是一个连续的、均匀的、完全弹性的各向同性体。

从弹性力学的基本方程 (5-102) ~ (5-107) 看到, 如果弹性体的位移分量是给定座标的函数, 就可以用几何方程 (5-102) 求得形变分量, 从而用物理方程 (5-106) 求得应力分量。但是如果仅仅知道弹性体中某几点 (例如节点) 的位移分量的数值, 是不能直接求得形变分量和应力分量的。因此, 为了用节点位移表示形变和应力, 首先必须建立一个位移模式, 也就是假定位移分量为座标的某种函数。当然, 这些函数在上述几个点 (例如节点) 的数值, 应当等于这几个点的位移分量的数值, 同时还应满足解答的收敛性。

下面分几步进行讨论。

1. 建立位移模式

建立位移模式时, 最简便的作法是把 u 、 v 表示为座标 x 、 y 的线性函数, 即采用多项式的模式。

考虑到三角形单元总共有六个自由度, 内部任一点的位移 u 、 v 是由六个角点位移分量完全确定的, 因此在位移模式中应当含有六个任意位移参数 α_1 、 α_2 、…… α_6 。

这样可以把任一点的位移表示为

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (5-121)$$

式 (5-121) 是两个一次多项式, 正好含有六个位移参数, 这就是我们建立的位移模式。以后将证明这种位移模式是满足解答收敛性条件的。

由于位移假设为座标的线性函数, 位移模式非常简单, 这样就使问题大为简化。

本来, 对整个弹性体来讲, 内部各点的位移变化情况是很复杂的, 不可能用一个简单的线性函数来描绘。现在采用分割的办法, 把整个弹性体分割成细小的单元。由于单元很小, 在一个单元局部范围内, 内部各点的变化情况就有可能用简单的线性插值函数来近似地描绘了。这种“化整为零, 化繁为简”的分析方法, 应该说是有限单元法的精华。

位移模式 (5-121) 可写成矩阵形式如下:

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (5-122)$$

或简写为

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (5-123)$$

式(5-123)就是三角形单元任意点位移 $\{\delta(x, y)\}$ 与位移参数 $\{\alpha\}$ 之间的转换式。

2. 角点位移 $\{\delta\}$ 与位移参数 $\{\alpha\}$ 之间的转换式

先讨论角点水平位移 u_i, u_j, u_m 与位移参数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之间的转换式。为此,将式(5-121)中的第一式中的 (x, y) 分别用角点座标 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ 代入即得方程组

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \right\} \quad (5-124)$$

把 u_i, u_j, u_m 当作已知量,便可由这方程组解出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。如用行列式表示,则为

$$\alpha_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad \alpha_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \alpha_3 = \frac{|A_3|}{|A|} \quad (5-125)$$

其中

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}, & |A_1| &= \begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix} \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix}, & |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix} \end{aligned}$$

这四个行列式可写成

$$\left. \begin{aligned} |A| &= 2\Delta \\ |A_1| &= u_i a_i + u_j a_j + u_m a_m \\ |A_2| &= u_i b_i + u_j b_j + u_m b_m \\ |A_3| &= u_i c_i + u_j c_j + u_m c_m \end{aligned} \right\} \quad (5-126)$$

其中 Δ 是三角形单元的面积。

$$\Delta = \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_m + x_m y_i) - \frac{1}{2}(x_j y_i + x_m y_j + x_i y_m) \quad (5-127)$$

三组常数 a, b, c 都是与直角座标有关的常数,可由下列轮换式得出:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned} \right\} \quad (5-128)$$

其中记号 i, j, m 表示将式 (5-128) 中的 i, j, m 进行轮换后可以得出另外两组 a, b, c 的公式。

将式 (5-126) 代入式 (5-125), 得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2\Delta} (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \end{aligned} \right\} \quad (5-129)$$

式 (5-129) 就是由 u_i, u_j, u_m 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的转换式。依同法, 可以得出由 v_i, v_j, v_m 求 $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ 的转换公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{1}{2\Delta} (a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m) \\ \alpha_5 &= \frac{1}{2\Delta} (b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) \\ \alpha_6 &= \frac{1}{2\Delta} (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) \end{aligned} \right\} \quad (5-130)$$

将式 (5-129) 和 (5-130) 综合起来, 可得

$$\{\alpha\} = [A]\{\delta\}^e \quad (5-131)$$

其中

$$[A] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{bmatrix} \quad (5-132)$$

式 (5-131) 就是由角点位移 $\{\delta\}^e$ 求位移参数 $\{\alpha\}$ 的转换式。

3. 由角点位移 $\{\delta\}^e$ 求三角形单元任意点位移 $\{\delta(x, y)\}$ 的转换式, 形态矩阵将式 (5-131) 代入式 (5-123), 得

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]\{\delta\}^e \quad (5-133)$$

式中 $[f(x, y)]$ 为 2×6 阶矩阵, 可由式 (5-122) 得出; $[A]$ 由式 (5-132) 得出。代入后即得

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i(x, y) & 0 & \vdots & N_j(x, y) & 0 & \vdots & N_m(x, y) & 0 \\ 0 & N_i(x, y) & \vdots & 0 & N_j(x, y) & \vdots & 0 & N_m(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5-134)$$

式中 N_i, N_j, N_m 为 $[f(x, y)]$ 及 $[A]$ 相乘而得的 2×6 阶矩阵的相应元素, 可由下列轮换公式得出:

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (i, j, m) \quad (5-135)$$

式 (5-134) 也可简写成

$$\{\delta(x, y)\} = [N(x, y)]\{\delta\}^* \quad (5-136)$$

由式 (5-134) 可看出, 当 $u_i = 1$ 或 $v_i = 1$, 而其它角点位移分量为零时, 则 $u(x, y) = N_i(x, y)$ 或 $v(x, y) = N_i(x, y)$ 。所以函数 $N_i(x, y)$ 表示当角点 i 发生单位位移时在单元任意点上产生的位移分布形态。函数 $N_i(x, y)$ 和 $N_m(x, y)$ 也有同样的性质。因此, $N_i(x, y), N_j(x, y), N_m(x, y)$ 称为位移的形态函数, 它们都是座标的线性函数, 矩阵 $[N(x, y)]$ 称为形态矩阵。

4. 解答的收敛性

选择位移模式时, 应当保证有限单元法解答的收敛性, 即当网格逐渐加密时, 有限单元法的解答应当收敛于问题的正确解答。

为了保证解答的收敛性, 选用的位移模式应当满足下列两方面的条件:

- (1) 单元的刚体位移状态, 应当包含在位移模式中。
- (2) 位移模式应当保证相邻单元在公共边界处的位移连续性。

其中条件 (1) 是收敛的必要条件, 条件 (1) 和 (2) 是其充分条件。

式 (5-121) 所示的位移模式是能满足上述两个条件的。兹分述如下:

1) 它能反映单元的刚体运动和常量应变, 为了便于说明, 把式 (5-121) 改写成

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x - \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} y + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_6 y + \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} x + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} x \end{aligned} \right\} \quad (5-137)$$

设单元仅产生刚体位移, 其原点的水平位移 (x 方向) 为 u_0 , 原点的竖向 (y 方向) 位移为 v_0 , 绕 z 轴转角为 ω_0 (转角 ω_0 以逆时针方向为正), 则单元任意一点 (x, y) 的位移为

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_0 - \omega_0 y \\ v(x, y) &= v_0 + \omega_0 x \end{aligned} \right\} \quad (5-138)$$

同时, 将位移模式代入几何方程式 (5-102) 可得

$$\varepsilon_x = \alpha_2, \quad \varepsilon_y = \alpha_6, \quad \gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5 \quad (5-139)$$

它们反映了常量的正应变和剪应变。

式 (5-139) 代入式 (5-137), 得

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \varepsilon_x x - \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} y + \gamma_{xy} \frac{y}{2} \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \varepsilon_y y + \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} x + \gamma_{xy} \frac{x}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5-140)$$

当单元仅有刚体位移而无应变 (即 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$), 则得

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 - \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} x \end{aligned} \right\}$$

与式 (5-138) 对比, 得出

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \alpha_1 \\ v_0 &= \alpha_4 \\ \omega_0 &= \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5-141)$$

容易看到, 6 个参数 α_1 到 α_6 , 反映了三个刚体位移 (u_0, v_0, ω_0) 及三个常量应变 ($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$)。

将式 (5-141) 代入式 (5-140), 则得

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = u_0 + \epsilon_x x - \omega_0 y + \frac{\gamma_{xy}}{2} y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y = v_0 + \epsilon_y y + \omega_0 y + \frac{\gamma_{xy}}{2} x \end{aligned} \right\} \quad (5-142)$$

因此, 式 (5-142) 为既有刚体位移, 又有正应变和剪应变的三角形单元任一点的位移方程。

由此知道, 条件 (1) 已经得到满足。

2) 线性位移模式有一个特性: 单元中的一条直线在位移后仍是一条直线。而且在一条直线上的位移是按线性变化的。如图 5-20 所示, 任意两个相邻的单元①, ②。它们在 i 节点的位移相同, j 节点的位移也相同 (m 点的位移和 p 的位移一般并不相同)。现在, 由于式 (5-121) 所示的位移分量在每个单元中都是坐标的线性函数, 在公共边界 $\bar{i}j$ 上当然也是按线性变化的, 所示上述两个线性单元在 $\bar{i}j$ 上的任意一点都将具有相同的位移。这就保证了相邻之间位移的连续性——各个单元在受力之后既不互相脱离也不互相嵌入, 而代替原来连续弹性体的那个离散结构物则仍然保持为连续弹性体。这就说明了条件 (2) 是满足的。附带指出, 在每一个单元的内部, 位移也是连续的, 因为式 (5-121) 只包含多项式, 而多项式总是单值连续函数〔16〕。

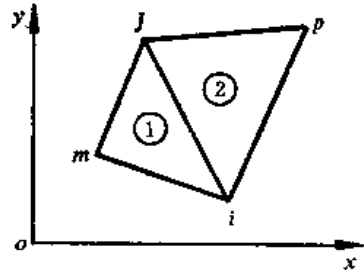


图 5-20

(三) 由角点位移求应变、应力和角点力——单元刚度矩阵

1. 由角点位移求应变

先由角点位移求三角形单元任意点的位移, 由式 (5-134), 得

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= N_i(x, y)u_i + N_j(x, y)u_j + N_m(x, y)u_m \\ v(x, y) &= N_i(x, y)v_i + N_j(x, y)v_j + N_m(x, y)v_m \end{aligned} \right\} \quad (5-143)$$

其中 N_i, N_j, N_m 由式 (5-135) 给出, 并可求出它的偏导数如下:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2\Delta}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2\Delta} \quad \overleftarrow{\begin{matrix} i, j, m \\ \rightarrow \end{matrix}} \quad (5-144)$$

再由位移求应变。将式 (5-143) 代入几何方程

(5-102) 并利用式 (5-144) 即得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m \\ &\quad + b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) \end{aligned} \right\} \quad (5-145)$$

如用矩阵表示则为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5-146)$$

或简写成

$$\{\varepsilon\}^e = [B]^e \{\delta\}^e \quad (5-147)$$

其中

$$[B]^e = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (5-148)$$

式 (5-147) 就是由角点位移 $\{\delta\}^e$ 求应变 $\{\varepsilon\}^e$ 的变换式, 其转换矩阵 $[B]^e$ 叫做几何矩阵 (与几何方程相对应), 它的元素是与三角形单元的几何性质有关的常量。

由式 (5-145) 看出, 单元各点的应变分量都是常量, 这是由于采用了线性位移模式的缘故。这种单元叫做常应变三角形单元。当然相邻单元具有不同的应变。

2. 由应变求应力

由应变求应力的转换采用式 (5-106)。

$$\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e$$

其转换矩阵 $[D]$ 称为弹性矩阵。

对于平面应力问题, $[D]$ 由式 (5-107) 给出。

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

对于平面变形问题, $[D]$ 由式 (5-116) 给出。

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

应力也可用角点位移来表达, 把式(5-147)代入式(5-106)即得

$$\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e = [D][B]^e\{\delta\}^e \quad (5-149)$$

3. 由应力、应变求角点力

仍和 § 5-4 一样, 先找出三角形单元的位能函数(即变形功), 利用最小位能原理对位能函数求角点位移的偏导数, 便得角点力。

三角形单元变形功为〔18〕

$$U = \frac{1}{2} \iint_e (\{\sigma\}^e)^T \{\varepsilon\}^e t dx dy$$

利用式(5-149)、(5-147)可将 U 改写成

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint_e ([D]\{\varepsilon\}^e)^T \{\varepsilon\}^e t dx dy = \frac{1}{2} \iint_e (\{\varepsilon\}^e)^T [D]^T [B]\{\delta\}^e t dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_e (\{\delta\}^e)^T ([B]^e)^T [D][B]^e \{\delta\}^e t dx dy \end{aligned}$$

式中 t 为板厚, 积分在三角形 e 整个面积上进行。在三角形单元及线性模式情况下 e 的节点座标在 e 的范围内为已定值, 与节点有关的量 $\{\delta\}^e$ 、 $[B]^e$ 可视为与 x 、 y 无关的常量, $[D]$ 亦与 x 、 y 无关, 故得

$$U = \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T ([B]^e)^T [D][B]^e \{\delta\}^e t \Delta = \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T [k]^e \{\delta\}^e \quad (5-150)$$

式中 Δ 为三角形面积,

$$[k]^e = ([B]^e)^T [D][B]^e t \Delta = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{61} & k_{62} & \dots & k_{66} \end{bmatrix} \quad (5-151)$$

由于角点力为 $U_i = \frac{\partial U}{\partial u_i}$, $V_i = \frac{\partial U}{\partial v_i}$, $U_j = \frac{\partial U}{\partial u_j}$, $V_j = \frac{\partial U}{\partial v_j}$, $U_m = \frac{\partial U}{\partial u_m}$, $V_m = \frac{\partial U}{\partial v_m}$, 必须先

将式(5-150)的右边三个矩阵的乘积求出, 然后再对它分别进行偏微分, 计算结果得出

$$\begin{aligned} \{F\}^e &= \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{61} & k_{62} & \dots & k_{66} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}^e \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{61} \\ k_{12} & k_{22} & \dots & k_{62} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{16} & k_{26} & \dots & k_{66} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (5-152) \end{aligned}$$

$[k]^e$ 是三角形单元的刚度矩阵 (或称该单元的劲度矩阵^[16])。

有了单元刚度矩阵, 就可用前节中的刚度集成原理, 求出整体刚度矩阵。再结合引入的支承条件及无支承处的外荷载, 就能解出各节点的位移, 从而可求出各单元的应力。

(四) 荷载向节点的移置, 荷载列阵

为了简化每个单元的受力情况, 将该单元所受的每个荷载都向节点移置 (分解) 而成为节点荷载。这种移置必须按照静力等效原则来进行, 因为这样才能使由于移置后而引起的误差是局部的, 不影响整体的应力。对于变形体, 包括弹性体在内, 所谓静力等效, 是指原荷载与节点荷载在任何虚位移上的虚功都相等^[16]。在一定的位移模式之下, 这样移置的结果是唯一的, 而且总能符合通常所理解的, 对刚体而言的静力等效原则, 即, 原荷载与节点荷载在任一轴上的投影之和相等, 对任一轴的力矩也相等。

例如, 设有均质、等厚度三角形单元 ijm (图 5-21 a) 受有重力荷载 W , 作用在单元重心, 也就是三角形 ijm 的形心。根据理论力学, 有 $\overline{mb} = \overline{bj}$ 及 $\overline{bc} = \frac{1}{3}\overline{bi}$ 。现在来求出应当移置到各节点的荷载。

首先来求出应当移置到节点 i 的铅直荷载 Y_i 。为了使计算虚功的工作最简单, 假想该单元发生这样的虚位移: 节点 i 只沿 Y_i 的方向移动一个单位, 而且其余二个节点都不移动。这就相当于在 j 点和 m 点安置了铰支座, 并在 i 点安置了水平连杆支座, 而容许 i 点有铅直方向的位移, 如图 5-21 a 所示。假定采用式 (5-121) 的线性位移模式。由于 mi 边上各点的位移按线性变化, 而 m 点和 i 点的位移都等于零, 所以在边界 \overline{im} 上任一点的位移都等于零。又由于 \overline{bi} 线上各点的铅直位移也按线性变化在 b 点位移等于零, 在 i 点位移为 1, 所以 c 点位移为 $\frac{\overline{bc}}{\overline{bi}} = \frac{1}{3}$ 。按静力等效原则, 荷载 W 的虚功应当等于 Y_i 的虚功 (其余的节点荷载都没有沿其作用方向的位移, 它们不做功), 因而令等效节点荷载 Y_i 与 W 的方向相同。于是有 $W \times \frac{1}{3} = Y_i \times 1$, 从而得出 $Y_i = \frac{W}{3}$ 。用同样方法可以得出

$$Y_j = \frac{W}{3}, Y_m = \frac{W}{3}$$

同理得出

$$X_i = 0, X_j = 0, X_m = 0$$

因此, 由于单元 ijm 所受的重力 W , 应当移置到三个节点的荷载, 可由荷载列阵表示为

$$\{P\}^e = [X_i Y_i X_j Y_j X_m Y_m]^T = \frac{W}{3} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T \quad (5-153)$$

又例如设单元 ij 边上受有沿 x 方向的荷载 F , 其作用点距 i 及 j 的距离分别为 l_i 及 l_j (图 5-21 b), 通过上述类似分析, 可得移置到各节点的荷载应为

$$X_i = \frac{l_j}{l} F$$

$$X_j = -\frac{l_i}{l} F$$

$$X_m = Y_i = Y_j = Y_m = 0$$

式中 $i = l_i + l_j = \overline{ij}$ 。

相应的荷载列阵为

$$\{P\}^e = F \begin{bmatrix} \frac{l_j}{l} & 0 & -\frac{l_i}{l} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5-154)$$

如果 ij 边上受有沿 x 方向的按三角形分布的荷载, 它在 i 点的集度为 q (图 5-21 c)。若单元厚度为 t , 则有

$$F = \frac{qtl}{2}, \quad \frac{l_j}{l} = \frac{2}{3}, \quad \frac{l_i}{l} = \frac{1}{3}$$

代入即得

$$\{P\}^e = \frac{qtl}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5-155)$$

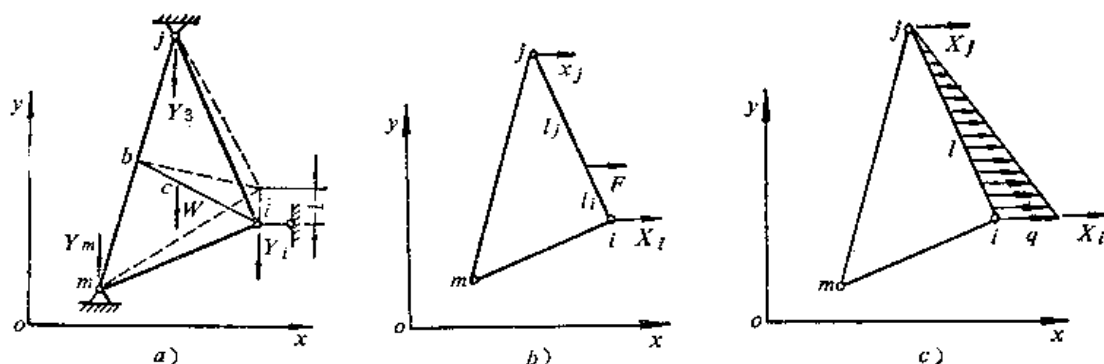


图 5-21

(五) 变温的等效结点荷载

设弹性体在前后两个瞬时的温度分别为 T_1 及 T_2 , 则弹性体的变温为 $T = T_2 - T_1$ 。在平面问题中, T_1 及 T_2 都是 x 、 y 的函数, 因而变温也是 x 、 y 的函数。

由于变温, 弹性体内各点的微小长度, 如果不受任何约束, 将发生正应变 $\alpha_i T$, 其中 α_i 是线热胀系数。在各向同性体中, 此项正应变在所有各个方向都相同, 因为并不伴随着剪应变。据此, 就有 $\epsilon_x = \epsilon_y = \alpha_i T$ 而 $\gamma_{xy} = 0$, 但是由于弹性体所受的外在约束以及体内各部分之间相互约束, 上述形变并不能自由发生, 而将引起变温应力。这个应力又将按照物理方程引起形变。于是在平面应力问题中得到总的形变分量为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} + \alpha_i T \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E} + \alpha_i T \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5-156)$$

在前面所述的那种简单三角形中, 应力分量和形变分量都是常量。因此, 上列各式中的 T 就不能取为位置坐标的函数, 而必须取该单元变温 $T(x, y)$ 的某种平均值。最简单办法取算术平均值, 也就是取

$$\bar{T} = \frac{1}{\Delta} \iint_{\Delta} T(x, y) dx dy$$

可以证明, 对于线性变温模式, 即当 $T(x, y)$ 为 x, y 的线性函数时, 由上式可得

$$\bar{T} = \frac{1}{3}(T_i + T_j + T_m) \quad (5-157)$$

其中 T_i, T_j, T_m 分别为该单元在三个角点 i, j, m 处的变温。对于非线性变温模式仍然可以近似地应用这一公式。

将式(5-156)中的 T 改为 \bar{T} 并进行移项, 得

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \alpha_i \bar{T} &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \epsilon_y - \alpha_i \bar{T} &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} - 0 &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (5-158)$$

与平面应力问题的物理方程(5-104)对比, 在这里代替 $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$ 的是 $\epsilon_x - \alpha_i \bar{T}, \epsilon_y - \alpha_i \bar{T}, \gamma_{xy} - 0$, 也就是说代替矩阵 $\{\epsilon\}$ 的是 $\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}$, 其中

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha_i \bar{T} \\ \alpha_i \bar{T} \\ 0 \end{Bmatrix} = \alpha_i \bar{T} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_i}{3}(T_i + T_j + T_m) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-159)$$

于是式(5-106)中的 $\{\epsilon\}$ 应以 $\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}$ 代替, 因而式(5-149)改为

$$\{\sigma\}^e = [D](\{\epsilon\}^e - \{\epsilon_0\}^e) = [D][B]^e \{\delta\}^e - [D]\{\epsilon_0\}^e \quad (5-160)$$

式(5-160)中的第二项没有 $[B]^e$ 这一项, 是由于 T 不为位置坐标的函数。由此可以得到, 代替 $[B]^e \{\delta\}^e$ 的应当是 $[B]^e \{\delta\}^e - \{\epsilon_0\}^e$ 。从而可以导出, 代替式(5-151)的应当是

$$\{F\}^e = ([B]^e)^T [D] [B]^e \{\delta\}^e t\Delta - ([B]^e)^T [D] \{\epsilon_0\}^e t\Delta$$

即是

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e - ([B]^e)^T [D] \{\epsilon_0\}^e t\Delta \quad (5-161)$$

此式右边的第二项, 是以前所没有的。它是由于考虑变温影响而多出来的节点力, 可以写成

$$\{P_i\}^e = ([B]^e)^T [D] \{\epsilon_0\}^e t\Delta \quad (5-162)$$

我们称 $\{P_i\}^e$ 为变温等效节点荷载。将式(5-148)、(5-107)及(5-159)代入式(5-162), 就得到变温等效节点荷载公式

$$\{P_i\}^e = \begin{Bmatrix} X_{ii} \\ Y_{ii} \\ X_{ij} \\ Y_{ij} \\ X_{im} \\ Y_{im} \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_i (T_i + T_j + T_m) Et}{6(1-\mu)} \begin{Bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_m \\ c_m \end{Bmatrix} \quad (5-163)$$

注意, 这里 $X_{ii}, Y_{ii}, X_{ij}, Y_{ij}, X_{im}, Y_{im}$, 是分别施于节点 i, j, m 的。由于环绕节点 i 的所有各个单元一般均有变温, 所以相应每个单元的变温影响, 都应在节点 i 施加 X_{ii}

及 Y_i , 故也应按照前述等效荷载集成原理进行叠加, 而得到整体等效荷载向量, 从而可以得到如式(5-101)相同的整体矩阵方程

$$[K]\{\delta\} = \{F\} + \{P_i\}$$

对于平面形变问题, 用同样方法可以导出相应的变温等效节点荷载公式^[16]

$$\begin{aligned} \{P_i\}^* &= \frac{(1+\mu)\alpha_i(T_i+T_j+T_m)\frac{E}{1-\mu^2}t}{6\left(1-\frac{\mu}{1-\mu}\right)} \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha_i(T_i+T_j+T_m)Et}{6(1-2\mu)} \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5-164)$$

(六) 解题步骤及简例

在应用有限单元法求解变温平面问题时, 具体工作步骤大致如下:

1. 将计算对象划分成许多单元(通常的是三角单元), 也就是画成三角网格。三角形的大小和形状并不要求一律。变温较大之处, 网格可以取得密些, 反之则可以取得疏些。但每个三角形单元的三边长度不宜相差过大。

任选一个直角坐标系, 取 x 向右 y 向上为正。定出所有各节点的坐标值, 即 x_i, y_i, x_j, y_j , 等等。

2. 根据节点坐标值、用公式(5-127)算出各个单元的面积 Δ , 用公式(5-128)算出相邻节点的坐标差值, 也就是各个单元的 $b_i, c_i, b_j, c_j, b_m, c_m$ 等数值。再由这些数值, 以及弹性常数 E 及 μ , 算出各单元的刚度矩阵 $[k]^*$ 中各元素的数值——对于平面应力问题, 用公式(5-107)及(5-148), 对于平面形变问题, 用公式(5-116)及(5-148)。

3. 按照公式(5-152), 将节点力用节点位移表示。

4. 将各单元所受的荷载, 包括体力和面力以及可能有的集中荷载, 按静力等效原则移置到节点上, 并算出变温等效节点荷载, 对于平面应力问题按公式(5-163); 对于平面形变问题按公式(5-164)。把体力、面力和集中力的等效节点荷载与变温等效节点荷载叠加而得单元的节点荷载 X_i, Y_i 等等。

5. 按矩阵集成法的原理, 求出整体刚度矩阵及整体节点荷载列阵, 得出如公式(5-101)形式的节点位移与节点荷载的关系式。

6. 然后根据具体支承情况, 求解各未知的节点位移。从而可以根据有关公式计算各单元的应力分量。

例题 7 图5-22 a 所示为一长方形平板, 长为 $4a$, 阔为 $2a$, 求在变温以后的各点的变形(变温位移), 设变温函数为

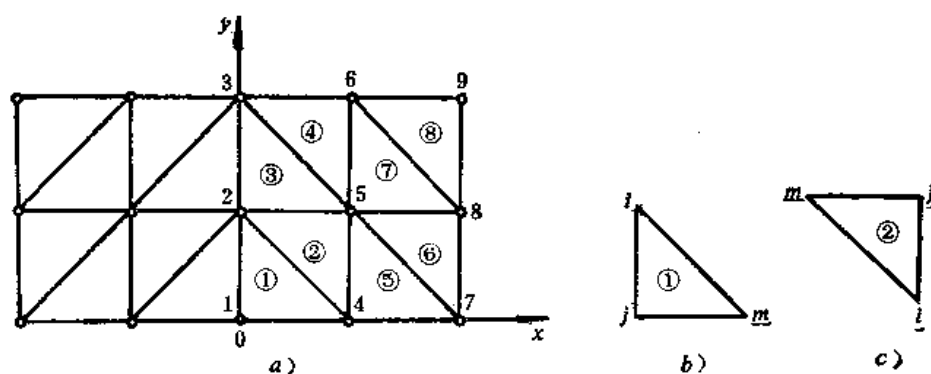


图 5-22

$$T = t - t_0 = 3 \left(\frac{y}{a} \right) ^\circ\text{C}$$

坐标原点取在下边界的中点。

解 用有限单元法。

(1) 单元划分如图所示, 把整个平板划分为 16 个等腰直角三角形, 每个三角形的直角腰为 a 。由于变温时对 y 轴是对称的, 故仅需分析右半边的 8 个单元, 而左半边各节点的位移则取右半边各节点的位移的对称值。因此, 仅对编号为①、②、……⑧的 8 个单元进行分析。8 个单元中的节点数 $N = 9$, 即图中所示的 1、2、……9, 它们是整体节点编号。单元①、②各节点的局部编码如图 5-22 b、c 所示。

(2) 各个单元面积均为

$$\Delta = \frac{1}{2} a^2$$

单元①中的相邻节点的坐标差值为

$$\begin{pmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} y_j - y_m \\ x_m - x_j \\ y_m - y_i \\ x_i - x_m \\ y_i - y_j \\ x_j - x_i \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \\ -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

单元②中的相邻结点的坐标差值为

$$\begin{pmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \\ a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其余的单元③、⑤、⑦与单元①相同; ④、⑥、⑧与②相同。

然后可计算各单元的刚度矩阵 $[k]^e$, 为了简单起见, 取 $\mu = 0$ 。这样对于平面应力问题

及平面形变问题是相同的。先计算单元①、③、⑤及⑦。它们弹性矩阵为

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B]^{\textcircled{1}} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故得

$$[S]^{\textcircled{1}} = [D][B] = \frac{E}{2a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & -2 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & -2 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k]^{\textcircled{1}} = [B]^T [D] [B] t \Delta$$

$$= \frac{Et}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & -2 & \vdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \vdots & 3 & 1 & \vdots & -2 & -1 \\ -1 & -2 & \vdots & 1 & 3 & \vdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同法可以算得单元②、④、⑥及⑧的 $[D]$ 、 $[S]^{\circledast}$ 及 $[k]^{\circledast}$ ，其结果为

$$[D] = [D]^{\textcircled{1}}$$

$$[B]^{\textcircled{2}} = -[B]^{\textcircled{1}}$$

所以

$$[S]^{\textcircled{2}} = [D][B]^{\textcircled{2}} = -[S]^{\textcircled{1}}$$

$$[k]^{\textcircled{2}} = ([B]^{\textcircled{2}})^T [D] [B]^{\textcircled{2}} = [k]^{\textcircled{1}}$$

故得每一个单元的刚度矩阵均为

$$[k]^{\circledast} = \frac{Et}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & -2 & \vdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \vdots & 3 & 1 & \vdots & -2 & -1 \\ -1 & -2 & \vdots & 1 & 3 & \vdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{Et}{4} \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] & [k_{im}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] & [k_{jm}] \\ [k_{mi}] & [k_{mi}] & [k_{mm}] \end{bmatrix}$$

式中 t 为薄板的厚度。

(3) 各单元的节点力与节点位移的关系式

$$\frac{Et}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix}$$

(4) 求出单元的等效变温节点荷载

对于单元①、③、⑤及⑦，它们的等效变温节点荷载为

$$\{P_i\}^{\text{①}} = \begin{Bmatrix} X_{ti} \\ Y_{ti} \\ X_{tj} \\ Y_{tj} \\ X_{tm} \\ Y_{tm} \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_i t (T_i + T_j + T_m) E}{6(1-\mu)} \begin{Bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_m \\ c_m \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_i t \bar{T}^{\text{①}} E a}{2(1-\mu)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_i t E \bar{T}^{\text{①}} a}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

如图 5-23 a 所示。

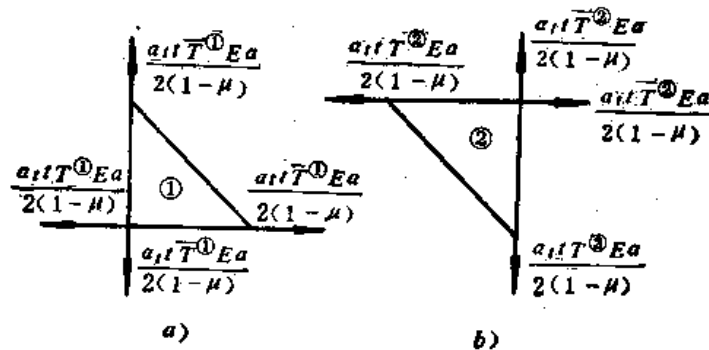


图 5-23

对于单元②、④、⑥及⑧，它们的等效变温节点荷载为

$$\{P_i\}^{\text{②}} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_m \\ Y_m \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_i t (T_i + T_j + T_m) E}{6(1-\mu)} \begin{Bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_m \\ c_m \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_i t E \bar{T}^{\text{②}} a}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

如图 5-23 b 所示。

各单元的平均变温计算如下：

$$\bar{T}^{\text{①}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{a} (a + 0 + 0) = 1^\circ\text{C}$$

$$\bar{T}^{\text{②}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{a} (a + a + 0) = 2^\circ\text{C}$$

$$\bar{T}^{\text{③}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{a} (2a + a + a) = 4^{\circ}\text{C}$$

$$\bar{T}^{\text{④}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{a} (2a + 2a + a) = 5^{\circ}\text{C}$$

$$\bar{T}^{\text{⑤}} = \bar{T}^{\text{③}} = 1^{\circ}\text{C}$$

$$\bar{T}^{\text{⑥}} = \bar{T}^{\text{④}} = 2^{\circ}\text{C}$$

$$\bar{T}^{\text{⑦}} = \bar{T}^{\text{③}} = 4^{\circ}\text{C}$$

$$\bar{T}^{\text{⑧}} = \bar{T}^{\text{④}} = 5^{\circ}\text{C}$$

(5) 按矩阵集成法法则, 求解整体刚度矩阵及整体荷载列阵, 并建立整体节点位移与节点力之间的平衡方程, 即

$$[K]\{\delta\} = \{F\}$$

通过计算, 得*

$$\frac{Et}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 12 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -4 & 2 & 12 & -1 & -4 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ & & & & & & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 & & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ \dots \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \\ u_9 \\ v_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ \dots \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_6 \\ \dots \\ U_7 \\ V_7 \\ U_8 \\ V_8 \\ U_9 \\ V_9 \end{Bmatrix}$$

这里没有其它荷载, 在不计体积力的情况下, 整体荷载列阵只有等效变温荷载列阵 $\{P_i\}$ 。

$$\begin{aligned} \{P\} &= \{P_i\} = [X_{1i}, Y_{1i}, X_{2i}, Y_{2i}, X_{3i}, Y_{3i}, X_{4i}, Y_{4i}, X_{5i}, Y_{5i}, X_{6i}, Y_{6i}, X_{7i}, Y_{7i}, X_{8i}, Y_{8i}, X_{9i}, Y_{9i}]^T \\ &= \frac{\alpha_i t E a}{2} [-1, -1, -6, -3, -5, 4, 0, -3, 0, -6, 0, 9, 1-2, 6-3, 5, 5]^T \end{aligned}$$

(6) 根据具体支承情况, 将已知支承条件代入整体节点位移与节点力的平衡方程。图5-24为假定的支承情况。这使平板节点分成“有支承节点”与“无支承节点”两种。

1) 有支承节点

若其部分位移为给定值, 如图5-24的 $u_1 = 0, v_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$, 则把它们代入位移列阵 $\{\delta\}$ 的相应项中后, 其相应的节点力将是未知的。

2) 无支承节点

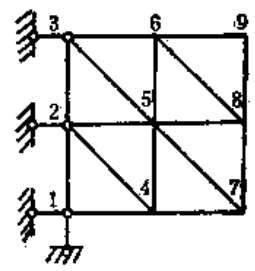


图 5-24

* 算出的矩阵为9阶方阵, 其转置矩阵与原矩阵相同, 可以用这个原理来初步核算矩阵中的各个元素是否算错。读者可试用一下。

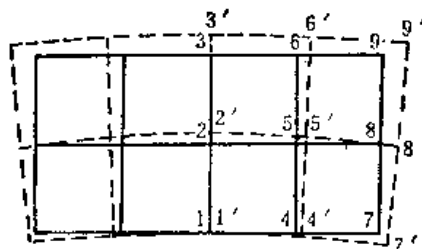
它们的节点力必须与节点荷载相等。故将已知的节点荷载代入节点力列阵相应的位置后，其相应的节点位移则是未知量，此时共有 14 个未知的节点位移。为了求解这 14 个未知位移量，就需要建立一个包含 14 个线性方程的方程组。此时将上列平衡方程中划去与 u_1 、 v_1 、 u_2 及 u_3 有关的行和列，即划去第一、第二、第三、第五行与相应的第一、第二、第三、第五列，得出如下的新的平衡方程，亦即新的 14 个线性方程的方程组。

$$\frac{Et}{4} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 12 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -4 & 2 & 12 & -1 & -4 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 6 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \\ u_9 \\ v_9 \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_i t E a}{2} \begin{Bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \\ -3 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

按总体选主元素消去法*解得的结果为

$$\begin{aligned} v_2 &= 1.576\alpha_i a, & v_3 &= 6.014\alpha_i a, \\ u_4 &= 1.572\alpha_i a, & v_4 &= -0.542\alpha_i a, \\ u_5 &= 3.016\alpha_i a, & v_5 &= 0.992\alpha_i a, \\ u_6 &= 4.398\alpha_i a, & v_6 &= 5.508\alpha_i a, \\ u_7 &= 3.052\alpha_i a, & v_7 &= -2.662\alpha_i a, \\ u_8 &= 6.010\alpha_i a, & v_8 &= -1.002\alpha_i a, \\ u_9 &= 8.930\alpha_i a, & v_9 &= 3.526\alpha_i a, \end{aligned}$$

根据上述计算的节点位移数值绘出图 5-25 的平板变形示意图，如虚线所示，变形后的右半边节点位移为 $1'$ 、 $2'$ 、 $3'$ 、 $4'$ 、 $5'$ 、 $6'$ 、 $7'$ 、 $8'$ 、 $9'$ 。为了比较起见，平板变形前的位置绘于图 5-25 的实线位置上。可以看出，变形后平板的形状略呈扇形，这是符合平板上下两边



实线代表平板变形前的形状，其右半边节点为 1、2、3、4、5、6、7、8、9；
虚线代表平板变形后的形状，其右半边节点为 1'、2'、3'、4'、5'、6'、7'、8'、9'。

图 5-25 平板变形前后的形状

* 把方程组中绝对值最大的系数叫做主元素，主元素消去法参看武汉大学数学系数学专业编，《线性代数》，P. P. 51~54。

具有温差、且沿 y 方向的温差按线性规律变化时所形成的变形情况的，参看《机械制造工艺科学基础》(索科罗夫斯基著)图 157 及 275~276 页的说明。

§ 5-6 平面刚架的有限单元法

一、局部坐标系中的单元刚度矩阵

对于平面刚架，它的有限单元法也和 § 5-4 的桁架一样，先进行单元分析。把整体刚架分成若干个基本杆件，以每一杆件作为一个单元。例如在图 5-26 所示的结构中，刚架分成三个杆件。其节点编码也有总码与局部码之分。单元分析的任务是建立杆端的位移与力之间的关系式。但应注意，在不同的联接形式(刚性联接与简销联接)中两端点的力向量与位移向量是不同的，前者每个端点有三个力向量与三个位移向量，而后者则仅有二个力向量与位移向量。现将刚性联接的位移型有限单元法介绍如下：

(一) 局部坐标系与单元刚度矩阵

图 5-27 为平面刚架中的单元②，其杆长为 l ，截面面积为 A ，截面惯性矩为 J ，弹性模量为 E 。

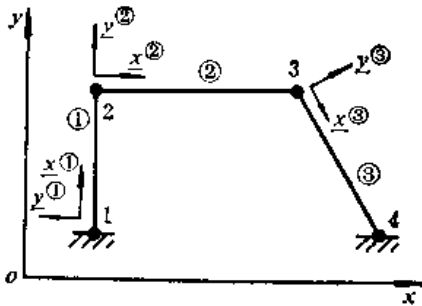


图 5-26

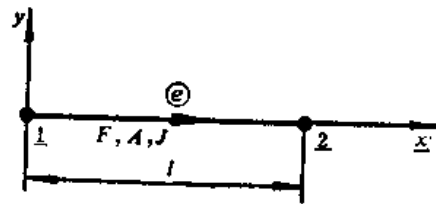


图 5-27

单元的两个端点采用局部编码 1 和 2。由点 1 到点 2 的方向规定为杆轴的正方向，在图中用箭头标明。

计算时，采用与图 5-8 相同的直角坐标系 (x, y) ，杆轴正方向取为 x 轴的正方向。

在局部坐标系中，单元刚架的每个端点有三个位移分量(图5-28 a)

$$\underline{\delta}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\delta}_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

同时每个端点也有三个力的分量(图5-28 b)

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}, \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

其中 u 是轴向位移， U 是轴向力；

v 是横向位移， V 是剪力；

θ 是角位移， M 是弯矩。

在销接结构中，没有端点弯矩 M_1 、 M_2 ，因而没有端点角位移 θ_1 、 θ_2 。同时也没有 V_1 、

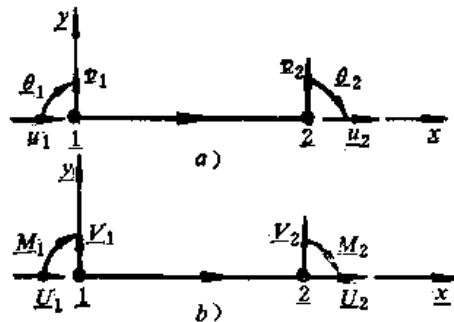


图 5-28

\underline{V}_2 , \underline{v}_1 和 \underline{v}_2 。 \underline{M} 、 $\underline{\theta}$ 均以顺时针方向为正方向。

图中所示方向规定为正方向。

每个单元在两端共有六个节点位移分量和六个杆端力分量

$$\{\underline{\delta}\}^e = \begin{Bmatrix} \{\underline{\delta}_1\} \\ \{\underline{\delta}_2\} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{v}_1 \\ \underline{\theta}_1 \\ \dots \\ \underline{u}_2 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{\theta}_2 \end{Bmatrix}^e$$

$$\{\underline{F}\}^e = \begin{Bmatrix} \{\underline{F}_1\} \\ \{\underline{F}_2\} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{V}_1 \\ \underline{M}_1 \\ \dots \\ \underline{U}_2 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{M}_2 \end{Bmatrix}^e$$

现在讨论它们之间的线性关系。

杆端力 $\{\underline{F}\}^e$ 与节点位移 $\{\underline{\delta}\}^e$ 之间的关系式可表示为^[17]

$$\{\underline{F}\}^e = [\underline{k}]^e \{\underline{\delta}\}^e \quad (5-165)$$

其中 $[\underline{k}]^e$ 是一个 6×6 阶矩阵，称为局部坐标系中的单元刚度矩阵。

式(5-165)的展开式为

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{V}_1 \\ \underline{M}_1 \\ \dots \\ \underline{U}_2 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{M}_2 \end{Bmatrix}^e = \begin{matrix} \begin{matrix} (\underline{u}_1=1) \\ \downarrow \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \end{matrix} \\ \dots \\ \begin{matrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{matrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{v}_1 \\ \underline{\theta}_1 \\ \dots \\ \underline{u}_2 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{\theta}_2 \end{Bmatrix}^e \quad (5-166)$$

式(5-166)中的 6×6 阶矩阵，就是单元刚度矩阵 $[\underline{k}]^e$ ，其证明如下。

(二) 单元刚度矩阵 $[\underline{k}]^e$ 的推导

式(5-166)的 $[k]^e$ 中各元素的物理意义为：每个元素代表由于单位节点位移所引起的杆端力。例如第1行第1列元素 k_{11}^e （即元素 $\frac{EA}{l}$ ）代表当第一个位移分量 $\underline{u}_1 = 1$ 时所引起的第1行中的节点力 \underline{U}_1 ，第4行第1列元素 k_{41}^e （即元素 $-\frac{EA}{l}$ ）代表当 $\underline{u}_1 = 1$ 时所引起的第4行中的节点力 \underline{U}_2 ，余类推。

知道了 $[k]^e$ 的每个元素的物理意义之后，便可对 $[k]^e$ 的各项进行推导了。

在进行推导之前，将图5-28 a 的变形按下列6种情况来安排(图5-29)：

1. 第一种情况(图5-29 a)：

$$\underline{u}_1 = 1, \underline{u}_2 = \underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_2 = 0$$

因为

$$E \frac{\underline{u}_1}{l} = -\frac{\underline{U}_1}{A}$$

故

$$\underline{U}_1 = \frac{AE}{l} \underline{u}_1 = \frac{AE}{l}$$

而

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 0$$

故得

$$\underline{U}_2 = -\underline{U}_1 = -\frac{AE}{l}$$

由于

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_2 = 0$$

故

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_2 = \underline{M}_1 = \underline{M}_2 = 0$$

2. 第二种情况(图5-29 b)：

$$\underline{v}_1 = 1, \underline{v}_2 = \underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_2 = 0$$

根据材料力学，

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EJ} \int M dx = \frac{1}{EJ} \int (\underline{V}_1 x + \underline{M}_1) dx \\ &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \underline{V}_1 x^2 + \underline{M}_1 x \right) + A \end{aligned}$$

因当

$$x = 0, \theta = -\underline{\theta}_1 = 0$$

故

$$A = 0$$

又当

$$x = l, \theta = -\underline{\theta}_2 = 0$$

故

$$M_1 = \frac{-V_1}{2} l$$

而

$$\begin{aligned} v &= \int \theta dx = \frac{1}{EJ} \int \left(\frac{1}{2} \underline{V}_1 x^2 + \underline{M}_1 x \right) dx \\ &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} \underline{V}_1 x^3 + \frac{1}{2} \underline{M}_1 x^2 \right) + B \end{aligned}$$

因为 当

$$x = 0, v = \underline{v}_1 = 1$$

故

$$B = 1$$

故

$$v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} \underline{V}_1 x^3 + \frac{1}{2} \underline{M}_1 x^2 \right) + 1 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} \underline{V}_1 x^3 - \frac{1}{4} \underline{V}_1 x^2 l \right) + 1$$

又当

$$x = l, \quad v = \underline{v}_2 = 0$$

故

$$\frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} \underline{V}_1 l^3 - \frac{1}{4} \underline{M}_1 l^2 \right) + 1 = 0$$

得

$$\underline{V}_1 = \frac{12EJ}{l^3}, \quad \underline{M}_1 = -\frac{6EJ}{l^2}$$

因为

$$\Sigma \underline{M}_2 = \frac{12EJ}{l^2} l - \frac{6EJ}{l^2} + \underline{M}_2 = 0$$

故

$$\underline{M}_2 = -\frac{6EJ}{l^2}$$

而

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 = 0$$

故

$$\underline{V}_2 = -\underline{V}_1 = -\frac{12EJ}{l^3}$$

又

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = 0$$

3. 第三种情况(图 5-29 c);

$$\underline{\theta}_1 = 1, \quad \underline{\theta}_2 = \underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{v}_1 = \underline{v}_2 = 0$$

由于

$$\theta = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \underline{V}_1 x^2 + \underline{M}_1 x \right) + A$$

$$v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} \underline{V}_1 x^3 + \frac{1}{2} \underline{M}_1 x^2 \right) + Ax + B$$

而当

$$x = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = -\underline{\theta}_1 = -1 \quad (\text{在 } v-x \text{ 曲线上, } \theta = \frac{dv}{dx} \text{ 的方向与 } \underline{\theta}_1 \text{ 相反})$$

故

$$A = -1$$

又当

$$x = l, \quad \theta = -\underline{\theta}_2 = 0$$

故

$$\frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \underline{V}_1 l^2 + \underline{M}_1 l \right) = 1$$

当

$$x = 0, \quad v = \underline{v}_1 = 0$$

故

$$B = 0$$

当

$$x = l, \quad v = \underline{v}_2 = 0$$

$$\frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} \underline{V}_1 l^3 + \frac{1}{2} \underline{M}_1 l^2 \right) - l = 0$$

故得

$$\underline{V}_1 = -\frac{6EJ}{l^2}$$

$$\underline{M}_1 = \frac{4EJ}{l}$$

$$\underline{V}_2 = -\underline{V}_1 = \frac{6EJ}{l^2}$$

$$\underline{M}_2 = \frac{2EJ}{l}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = 0$$

依同理，分别算出第四、第五、第六种情况的端点力 \underline{U}_1 、 \underline{U}_2 、 \underline{V}_1 、 \underline{V}_2 、 \underline{M}_1 和 \underline{M}_2 ，如图 5-29 d、5-29 e 及 5-29 f 所示。

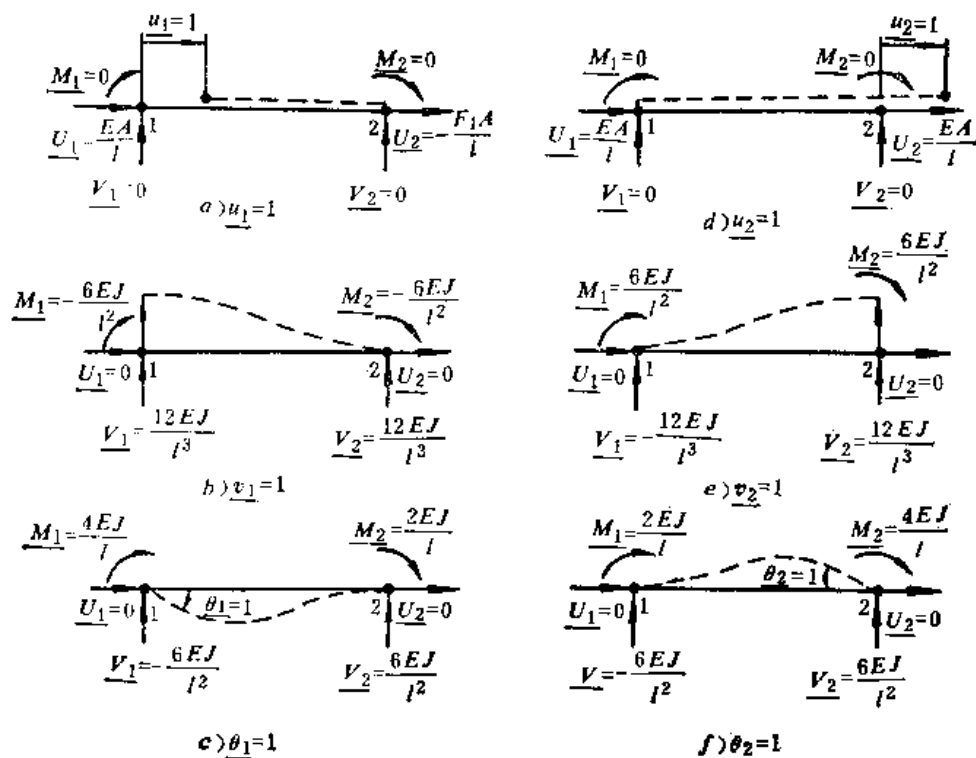


图 5-29

兹将计算结果列表于下：

	由于 $\underline{u}_1 = 1$	由于 $\underline{v}_1 = 1$	由于 $\underline{\theta}_1 = 1$	由于 $\underline{u}_2 = 1$	由于 $\underline{v}_2 = 1$	由于 $\underline{\theta}_2 = 1$
引	\underline{U}_1	$\frac{EA}{l}$	0	0	$-\frac{EA}{l}$	0
起	\underline{V}_1	0	$\frac{12EJ}{l^3}$	0	$-\frac{12EJ}{l^3}$	$-\frac{6EJ}{l^2}$
的	\underline{M}_1	0	$-\frac{6EJ}{l^2}$	0	$\frac{6EJ}{l^2}$	$\frac{2EJ}{l}$
杆	\underline{U}_2	$-\frac{EA}{l}$	0	0	$\frac{EA}{l}$	0
端	\underline{V}_2	0	$-\frac{12EJ}{l^3}$	0	$\frac{12EJ}{l^3}$	$\frac{6EJ}{l^2}$
力	\underline{M}_2	0	$-\frac{6EJ}{l^2}$	0	$\frac{6EJ}{l^2}$	$\frac{4EJ}{l}$

表中六组杆端力实际上就是式 (5-166) 的矩阵 $[k]^e$ 中的各列元素。

二、公共坐标系中的单元刚度矩阵

在刚架中，各杆件的方向不尽相同，如图 5-26 所示的①、②、③三个杆件的方向就各不相同，因而各自采用的局部坐标系的方向亦不同。因此，乃有坐标转换的必要。

(一) 坐标转换

图5-30 a 中杆件①的杆端1在局部坐标系中的三个分量为 \underline{U}_1 , \underline{V}_1 , \underline{M}_1 。

而同一杆件①的杆端1在其公共坐标系中的三个分量为 U_1 , V_1 , M_1 , 如图5-30 b 所示。

从图5-30 b 可以导出 U_1, V_1, M_1 与 $\underline{U}_1, \underline{V}_1, \underline{M}_1$ 之间的关系

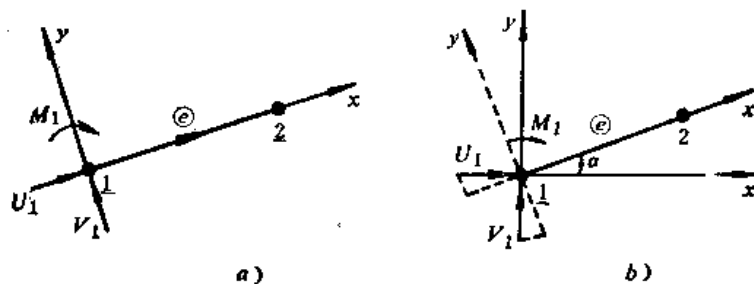


图 5-30

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= U_1 \cos \alpha + V_1 \sin \alpha \\ \underline{V}_1 &= -U_1 \sin \alpha + V_1 \cos \alpha \\ \underline{M}_1 &= M_1 \end{aligned} \right\} \quad (5-167)$$

同理

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= U_2 \cos \alpha + V_2 \sin \alpha \\ \underline{V}_2 &= -U_2 \sin \alpha + V_2 \cos \alpha \\ \underline{M}_2 &= M_2 \end{aligned} \right\}$$

上面两组方程可以合并成如下的矩阵方程:

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{V}_1 \\ \underline{M}_1 \\ \dots \\ \underline{U}_2 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & \vdots & & & \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ & & & & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \dots \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

或简写为 $\{F\}^e = [T]\{F\}^g \quad (5-168)$

其中 $[T]$ 为单元①的坐标转置矩阵。

可以证明

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

即 $[T]$ 的逆阵等于它的转置矩阵 $[T]^T$ 。

因此, 式(5-168)的逆转换式可写成

$$\{F\}^g = [T]^T \{F\}^e \quad (5-169)$$

同理

$$\{\delta\}^e = [T]\{\delta\}^g \quad (5-170)$$

$$\{\delta\}^g = [T]^T \{\delta\}^e \quad (5-171)$$

其中 $[\delta]^e$ 及 $[\delta]^g$ 为局部和公共坐标系中的端点位移。

(二) 单元刚度矩阵的坐标转换

将式(5-165)及式(5-170)代入式(5-169), 即得

$$\{F\}^e = [T]^T \{F\}^* = [T]^T [k] \{ \delta \}^* = [T]^T [k] [T] \{ \delta \}^e$$

$$\text{而故} \quad \{F\}^e = [k] \{ \delta \}^e \quad (5-172)$$

$$[k] = [T]^T [k] [T] \quad (5-173)$$

上述就是在两种坐标系中的单元刚度矩阵 $[k]^*$ 及 $[k]^e$ 之间的转换关系。

(三) 单元刚度矩阵的特性

1. $[k]^*$ 及 $[k]^e$ 是对称矩阵, 即

$$k_{ij}^* = k_{ji}^*, \quad k_{ij}^e = k_{ji}^e$$

这就是弹性结构的普遍定理(反力互等定理)。

2. $[k]^*$ 或 $[k]^e$ 是奇导矩阵, 即它们构成的行列式为零, 亦即

$$|[k]^*| = 0, \quad |[k]^e| = 0$$

从式(5-166)的 $[k]^*$ 中, 可以很容易算出 $|[k]^e| = 0$ (将第四行各元素加到第一行各元素之后, 即得第一行各元素为零的新行列式, 因而这个行列式为零)。

从这个性质, 得知 $[k]^*$ 不存在逆矩阵。

这就表明: 当端点位移确定之后, 可以根据式(5-165)或式(5-166)算出端点的杆端力 $\{F\}^e$, 但当杆端力 $\{F\}^e$ 确定之后却不能导出端点位移的唯一解(因无逆阵存在)。这个特性的物理意义是明显的, 由于图5-27的杆件两端根本没有支承, 因而有可以出现任意的刚体位移之可能。

3. $[k]^*$ 或 $[k]^e$ 分块性质

它们可以分成如式(5-166)中的四块。

三、整体刚度矩阵

(一) 整体刚度矩阵的分块形式

在整体分析中, 一律采用公共坐标系。

建立整体刚度矩阵时暂不引入支承条件。

由刚架的节点位移 $\{ \delta \}$ 求刚架的节点力 $\{F\}$ 时, 转换关系可写成

$$\{F\} = [K] \{ \delta \} \quad (5-174)$$

其中的转换矩阵 $[K]$ 称作整体刚度矩阵, 如图5-26所示的刚架, 在总体编码中有四个节点(1、2、3、4), 故上式可展开写成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \delta_1 \} \\ \{ \delta_2 \} \\ \{ \delta_3 \} \\ \{ \delta_4 \} \end{Bmatrix} \quad (5-175)$$

其中 $\{ \delta_i \}$ 和 $\{F_i\}$ 是三阶子向量 $[u_i, v_i, \theta_i]^T$ 及 $[U_i, V_i, M_i]^T$, $[K_{ij}]$ 是 3×3 阶子矩阵, $[K_{ij}]$ 表示 j 点位移 $\{ \delta_j \}$ 与 i 点节点力 $\{F_i\}$ 之间的转换矩阵。

(二) 刚度集成法的原理

求整体刚度矩阵 $[K]$ 时, 与§5-4节中的方法相同, 故计算步骤仍可归纳如下:

第一步求出单元刚度矩阵 $[k]^*$ 并扩大为单元的贡献矩阵 $[K]^e$ 。

第二步将各单元的 $[K]^e$ 叠加得出整体刚度矩阵 $[K]$ 。

(三) 整体刚度矩阵的特性

为了讨论方便,先介绍几个名词。

1. 主子块和副子块

在矩阵对角线上的子块称作主子块,不在对角线上的子块称作副子块。

2. 相关节点

节点 i 的相关节点是指 i 本身以及相交于 i 点的各杆的远端节点。注意这里包括本身节点 i 在内。

3. 相关单元

与节点 i 的相关单元称作结点 i 的相关单元。联结节点 i 和 j 的单元,称作节点 i 、 j 的相关单元。

下面指出整体刚度矩阵的一些特性:

(1) 对称性;

(2) 奇异性;

(3) 非零子块的分布情况。

一个矩阵中如果存在大量的零元素,这种矩阵称为稀疏矩阵。

一般说来,如果节点 i 与 j 是相关节点,则在矩阵 $[K]$ 中的对应子块 $[K_{ij}]$ 是非零子块。反之如果 i 与 j 不是相关节点则对应子块 $[K_{ij}]$ 是零子块。

4. 非零子块集成规则

整体刚度矩阵 $[K]$ 中的非零子块,是由相关单元的单元刚度矩阵 $[k]^e$ 中的子块集成的。具体说来可分两种情形:

第一, $[K]$ 中的主子块 $[K_{ii}]$ 等于结点 i 的相关单元的对应单元主子块的总和。

第二, $[K]$ 中的非零副子块 $[K_{ij}]$ 等于结点 i 、 j 的相关单元的单元副子块。

以上结论,可参看式(5-87)中各子块与相关单元子块的关系。

四、非节点荷载的处理——荷载向节点的移置

刚架在非节点荷载的计算,基本思路是:在各杆件两端点上加上约束,即在端节点上加上与荷载相应的假想的支承,以求各固端的内力。

然后将固端内力的方向反过来,进行集成即得出等效节点荷载,具体作法如下:

(一) 在局部坐标系中求单元②的固端内力 $\{F_0\}^e$,此时 $\{F_0\}^e$ 是在各端点上加上约束(支承)的假设下取得的。

$$\{F_0\}^e = \begin{Bmatrix} \{F_{01}\} \\ \{F_{02}\} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} U_{01} \\ V_{01} \\ M_{01} \\ U_{02} \\ V_{02} \\ M_{02} \end{Bmatrix} \quad (5-176)$$

其中的子向量 $\{F_{01}\}^e$ 和 $\{F_{02}\}^e$ 分别为单元②在端点1和2的固定内力。

现根据材料力学,将三种典型荷载的固端内力写出如下(只写出非零的内力分量):

部分均布荷载, 图 5-31 a:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{V}_{01} &= -\frac{Gc}{2} \left(2 - 2\frac{c^2}{l^2} + \frac{c^3}{l^3} \right) \\ \underline{V}_{02} &= -Gc - \underline{V}_{01} \\ \underline{M}_{01} &= \frac{Gc^2}{12} \left(6 - 8\frac{c}{l} + 3\frac{c^2}{l^2} \right) \\ \underline{M}_{02} &= \frac{Gc^3}{12l} \left(4 - 3\frac{c}{l} \right) \end{aligned} \right. \quad (5-177)$$

垂直集中荷载, 图 5-31 b:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{V}_{01} &= -G(l+2c)d^2/l^3 \\ \underline{V}_{02} &= -G(l+2d)c^2/l^3 \\ \underline{M}_{01} &= Gcd^2/l^2 \\ \underline{M}_{02} &= -Gc^2d/l^2 \end{aligned} \right. \quad (5-178)$$

平行集中荷载, 图 5-31 c:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{U}_{01} &= -Gd/l \\ \underline{U}_{02} &= -Gc/l \end{aligned} \right. \quad (5-179)$$

荷载的正方向如图 5-31 中所示。垂直荷载以沿 y 轴方向为正, 平行荷载以沿 x 轴方向为正。

式(5-176)~(5-179)的固端内力是该端的假想支承对单元的约束力, 而这个支承实际上是不存在的, 它的影响应该消除。因而应在端节点上加上外力荷载 $\{P_0\}^e$ 以消除 $\{F_0\}^e$ 的作用。十分明显, $\{P_0\}^e$ 的大小应等于 $\{F_0\}^e$ 而方向相反, 即 $\{P_0\}^e = -\{F_0\}^e$ 。因此, 单元②的等效节点荷载为 $\{P_0\}^e$ 。

(二) 求在公共坐标系中单元②的等效节点荷载 $\{P_0\}^e$

将单元②的等效节点荷载 $\{P_0\}^e$ 按照式(5-169)进行坐标转换以取得 $\{P_0\}^e$, 从而得到在公共坐标系中单元②的等效节点荷载

$$\{P_0\}^e = [T]^T \{P_0\}^e = -[T]^T \{F_0\}^e \quad (5-180)$$

(三) 求整个刚架的非节点荷载的等效节点荷载 $\{P_0\}$

整个刚架的等效节点荷载 $\{P_0\}$ 是由各个单元对它的贡献组成的。因此应对每个单元②的等效节点荷载 $\{P_0\}^e$ 加以集成。在集成过程中, 仍可采用“边搬家, 边累加”的办法即把 $\{P_0\}^e$ 中的两个子向量 $\{P_{01}\}^e$ 和 $\{P_{02}\}^e$ 按照节点局部码与总码的对应关系进行搬家, 并累加到 $\{P_0\}$ 中去。最后即得到整个刚架的非节点荷载的等效点荷载 $\{P_0\}$ 。

例题 8 有一台双头的钻床, 其横梁及立柱, 由二条槽铁焊接而成, 长度与截面尺寸以及 E 、 A 、 J 之值分别如图 5-32 所示。横梁在切削时受二个向上的切削力 G_1 及 G_2 , 并在切削过程中由于主轴箱的温升, 使横梁平均温升 10°C , 假定横梁与立柱的联接为刚性联接,

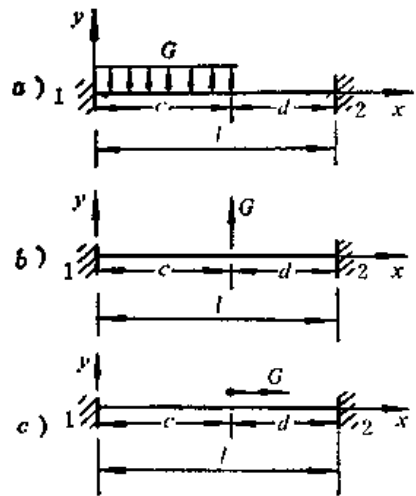


图 5-31

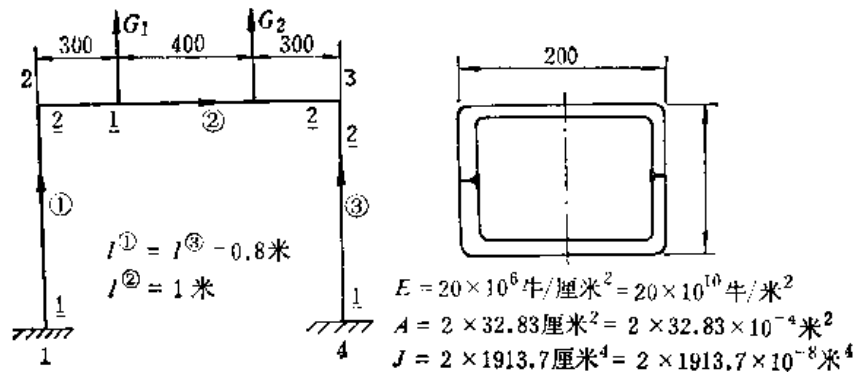


图 5-32

试求由于切削力及横梁的变温，而引起横梁两端的位移。

解

1. 求在局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\{k\}^e$

图 5-32 中用箭头标明各单元采用的局部坐标 x 的方向。

由于单元①③的尺寸相同故 $\{k\}^{\text{①}} = \{k\}^{\text{③}}$ 对于单元①, ③, 其中有关数据计算如下:

$$\frac{EA}{l} = \frac{20 \times 10^{10} \times 2 \times 32.83 \times 10^{-4}}{0.8} = 2 \times 820.8 \times 10^6 \text{ 牛/米}$$

$$\frac{4EJ}{l} = \frac{4 \times 20 \times 10^{10} \times 2 \times 1913.7 \times 10^{-8}}{0.8} = 2 \times 19.14 \times 10^6 \text{ 牛} \cdot \text{米}$$

$$\frac{6EJ}{l^2} = \frac{6 \times 20 \times 10^{10} \times 2 \times 1913.7 \times 10^{-8}}{(0.8)^2} = 2 \times 35.88 \times 10^6 \text{ 牛}$$

$$\frac{12EJ}{l^3} = \frac{12 \times 20 \times 10^{10} \times 2 \times 1913.7 \times 10^{-8}}{(0.8)^3} = 2 \times 89.70 \times 10^6 \text{ 牛/米}$$

故得单元①, ③的局部刚度矩阵如下:

$$[\underline{k}]^{\text{①}} = [\underline{k}]^{\text{③}} = 2 \times 10^6 \times \begin{bmatrix} 820.8 & 0 & 0 & \vdots & -820.8 & 0 & 0 \\ 0 & 89.70 & -35.88 & \vdots & 0 & -89.70 & -35.88 \\ 0 & -35.88 & 19.14 & \vdots & 0 & 35.88 & 9.57 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -820.8 & 0 & 0 & \vdots & 820.8 & 0 & 0 \\ 0 & -89.70 & 35.88 & \vdots & 0 & 89.70 & 35.88 \\ 0 & -35.88 & 9.57 & \vdots & 0 & 35.88 & 19.14 \end{bmatrix}$$

对于单元②, 其有关数据为

$$\frac{EA}{l} = \frac{20 \times 10^{10} \times 2 \times 32.83 \times 10^{-4}}{1} = 2 \times 656.6 \times 10^6 \text{ 牛/米}$$

$$\frac{4EJ}{l} = \frac{4 \times 20 \times 10^{10} \times 2 \times 1913.7 \times 10^{-8}}{1} = 2 \times 15.31 \times 10^6 \text{ 牛} \cdot \text{米}$$

$$\frac{6EJ}{l^2} = \frac{6 \times 20 \times 10^{10} \times 2 \times 1913.7 \times 10^{-8}}{1^2} = 2 \times 22.96 \times 10^6 \text{ 牛}$$

$$\frac{12EJ}{l^3} = \frac{12 \times 20 \times 10^{10} \times 2 \times 1913.7 \times 10^{-8}}{1^3} = 2 \times 45.93 \times 10^6 \text{ 牛/米}$$

故得单元②的局部刚度矩阵如下:

$$[k]^{(2)} = 2 \times 10^8 \times \begin{bmatrix} 656.6 & 0 & 0 & \cdots & -656.6 & 0 & 0 \\ 0 & 45.93 & -22.96 & \cdots & 0 & -45.93 & -22.96 \\ 0 & -22.96 & 15.31 & \cdots & 0 & 22.96 & 7.65 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -656.6 & 0 & 0 & \cdots & 656.6 & 0 & 0 \\ 0 & -45.93 & 22.96 & \cdots & 0 & 45.93 & 22.96 \\ 0 & -22.96 & 7.65 & \cdots & 0 & 22.96 & 15.31 \end{bmatrix}$$

2. 求单元②的坐标转换矩阵 $[T]^*$

由式(5-168)求单元①、③的 $[T]^{(1)}$ 及 $[T]^{(3)}$ 。

由于 $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1$
故得

$$[T]^{(1)} = [T]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于单元②: $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = 0$

故得 $[T]^{(2)} = [I]$

3. 求在公共坐标系中的单元刚度矩阵 $[k]^*$

由式(5-173)求出:

单元①及③的 $[k]^{(1)}$ 及 $[k]^{(3)}$ 为

$$[k]^{(1)} = [k]^{(3)} = [T]^T [k]^{(0)} [T]$$

$$= 2 \times 10^8 \times \begin{bmatrix} 89.70 & 0 & 35.88 & \cdots & -89.70 & 0 & 35.88 \\ 0 & 820.8 & 0 & \cdots & 0 & -820.8 & 0 \\ 35.88 & 0 & 19.14 & \cdots & -35.88 & 0 & 9.57 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -89.70 & 0 & -35.88 & \cdots & 89.70 & 0 & -35.88 \\ 0 & -820.8 & 0 & \cdots & 0 & 820.8 & 0 \\ 35.88 & 0 & 9.57 & \cdots & -35.88 & 0 & 19.14 \end{bmatrix}$$

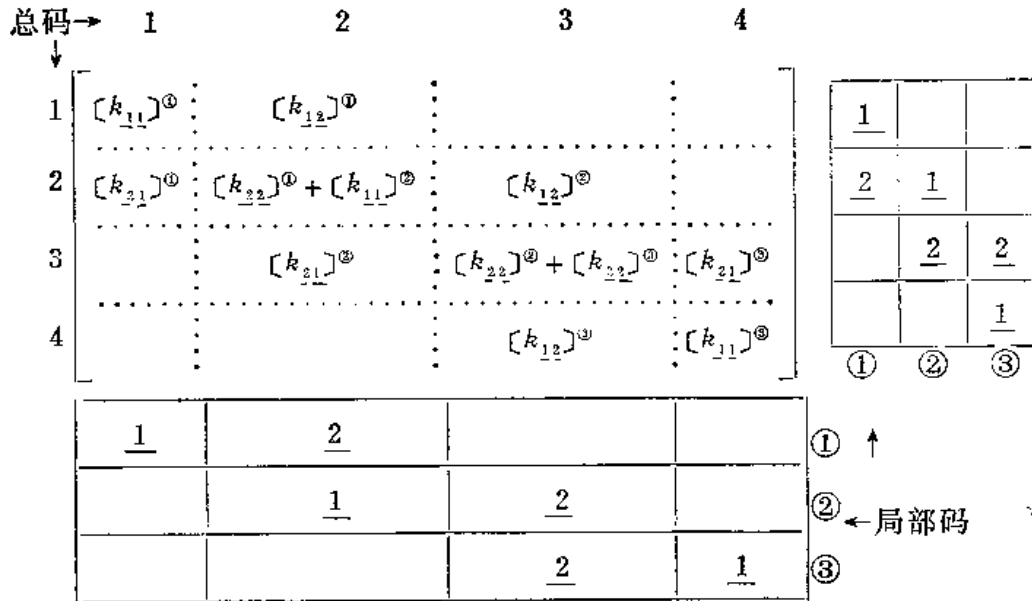
$$= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^{(1)}$$

单元②的 $[k]^{(2)}$ 为

$$[k]^{(2)} = [I][k]^{(0)}[I] = [k]^{(0)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^{(2)}$$

4. 求整体刚度矩阵 $[K]$

将有关数据代入下列分块矩阵, 便得整体刚度矩阵 $[K]$:



5. 求等效变温荷载

在三向空间等效变温荷载由式 (5-99) 确定。

$$\{P_i\}^e = EAT\alpha_i \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\cos \beta \\ -\cos \gamma \\ \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

在平面坐标系中, $\gamma = 90^\circ$, 故平面问题中的等效变温荷载为

$$\{P_i\}^e = EAT\alpha_i \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}^e$$

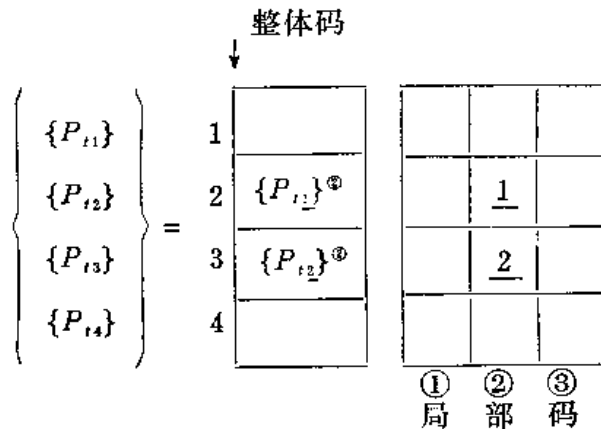
$$\text{式中 } \{P_i\}^e = \begin{Bmatrix} \{P_{i1}\} \\ \{P_{i2}\} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} U_{i1} \\ V_{i1} \\ U_{i2} \\ V_{i2} \end{Bmatrix}^e$$

对于单元②, $\alpha = 0$ 故等效变温荷载为

$$\{P_i\}^{\text{②}} = \begin{Bmatrix} -EAT\alpha_i \\ 0 \\ EAT\alpha_i \\ 0 \end{Bmatrix}^e$$

从单元等效变温荷载向量, 求整体等效变温荷载向量的方法, 与上述从单元刚度矩阵集成为整体刚度矩阵的方法相同。即先把单元等效变温荷载向量“搬家”, 使局部与整体码相

对应，扩大成为单元贡献向量，然后叠加而成整体变温荷载向量。



如上表所列 $\{P_{1i}\}^{\text{②}}$ 就是第②单元的等效变温荷载贡献给整体荷载向量的 $\{P_{12}\}$ 子向量，所以把 $\{P_{1i}\}^{\text{②}}$ 填入 $\{P_{12}\}$ 的位置。这就是单元等效向量的集成原理。由于本例中只有杆件②有变温，故上式即为最后的 $\{P\}$ 。

6. 求非节点荷载的等效节点荷载

在单元②上，有两个主轴箱分布，如图 5-33 所示，为计算简单起见采用集中荷载 G_1 及 G_2 以代替两个主轴箱的荷载。

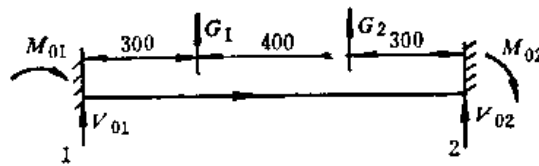


图 5-33

利用式 (5-178)，

对于 G_1 ，有

$$\underline{V}_{01} = \frac{-G_1(1.000 + 2 \times 0.300)(0.700)^2}{(1.000)^3} = -0.784G_1 \text{ 牛}$$

$$\underline{V}_{02} = \frac{-G_1(1.000 + 2 \times 0.700)(0.300)^2}{(1.000)^3} = -0.216G_1 \text{ 牛}$$

$$\underline{M}_{01} = +G_1 \frac{0.300 \times (0.700)^2}{(1.000)^2} = +0.147G_1 \text{ 牛} \cdot \text{米}$$

$$\underline{M}_{02} = -G_1 \frac{(0.300)^2 \times (0.700)}{(1.000)^2} = -0.063G_1 \text{ 牛} \cdot \text{米}$$

同样对于 G_2 ，有

$$\underline{V}_{01} = -0.216G_2 \text{ 牛}$$

$$\underline{V}_{02} = -0.784G_2 \text{ 牛}$$

$$\underline{M}_{01} = +0.063G_2 \text{ 牛} \cdot \text{米}$$

$$\underline{M}_{02} = -0.147G_2 \text{ 牛} \cdot \text{米}$$

叠加后得

$$\{\underline{F}_0\}^{\textcircled{2}} = \begin{Bmatrix} \underline{U}_{01} \\ \underline{V}_{01} \\ \underline{M}_{01} \\ \underline{U}_{02} \\ \underline{V}_{02} \\ \underline{M}_{02} \end{Bmatrix}^{\textcircled{2}} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.784G_1 + 0.216G_2 \\ -0.147G_1 - 0.063G_2 \\ 0 \\ 0.216G_1 + 0.784G_2 \\ 0.063G_1 + 0.147G_2 \end{Bmatrix}^{\textcircled{2}}$$

在公共坐标系中的单元②的等效节点荷载为

$$\{P_0\}^{\textcircled{2}} = -[T]^{\textcircled{2}T} \{\underline{F}_0\}^{\textcircled{2}}$$

对于单元②, $[T]' = [I]$

故得

$$\{P_0\}^{\textcircled{2}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.784G_1 + 0.216G_2 \\ -0.147G_1 - 0.063G_2 \\ \dots \\ 0 \\ 0.216G_1 + 0.784G_2 \\ 0.063G_1 + 0.0147G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_{01}\}^{\textcircled{2}} \\ \{P_{02}\}^{\textcircled{2}} \end{Bmatrix}$$

由于只有杆件②有非节点荷载, 整个刚架的等效节点荷载为

$$\{P_0\} = \begin{Bmatrix} \{P_{01}\} \\ \{P_{02}\} \\ \{P_{03}\} \\ \{P_{04}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P_{01}\}^{\textcircled{2}} \\ \{P_{02}\}^{\textcircled{2}} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

7. 求出总节点荷载

$$\{P\} = \{P_i\} + \{P_0\} + \{P_a\}$$

式中 $\{P_i\}$ 为节点荷载。

代入得

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_{a1}\} \\ \{P_{i2}\} + \{P_{02}\} + \{P_{a2}\} \\ \{P_{i3}\} + \{P_{03}\} + \{P_{a3}\} \\ \{P_{a4}\} \end{Bmatrix}$$

8. 按式 (5-86) 写出节点位移 $\{\delta\}$ 与总节点荷载 $\{P\}$ 的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} [k_{11}]^{\textcircled{1}} & [k_{12}]^{\textcircled{1}} & \cdot & \cdot \\ [k_{21}]^{\textcircled{1}} & [k_{22}]^{\textcircled{1}} + [k_{11}]^{\textcircled{2}} & [k_{12}]^{\textcircled{2}} & \cdot \\ \cdot & [k_{21}]^{\textcircled{2}} & [k_{22}]^{\textcircled{2}} + [k_{22}]^{\textcircled{3}} & [k_{21}]^{\textcircled{3}} \\ \cdot & \cdot & [k_{12}]^{\textcircled{3}} & [k_{11}]^{\textcircled{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \{P_3\} \\ \{P_4\} \end{Bmatrix}$$

式中 \cdot 代表零子块;

$$\{P_1\} = \{P_{a1}\};$$

$$\{P_2\} = \{P_{12}\} + \{P_{o2}\} + \{P_{a2}\};$$

$$\{P_3\} = \{P_{13}\} + \{P_{o3}\} + \{P_{a3}\};$$

$$\{P_4\} = \{P_{a4}\}.$$

9. 引入支承条件及已知节点荷载

根据支承条件: $\{\delta_1\} = 0$, $\{\delta_4\} = 0$

根据荷载情况:

$$\{P_{a2}\} = 0, \quad \{P_{a3}\} = 0$$

$$\{P_{12}\} = \{P_{11}\}^{\oplus} = \begin{Bmatrix} -EAT\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{P_{13}\} = \{P_{12}\}^{\oplus} = \begin{Bmatrix} EAT\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{P_{o2}\} = \{P_{o1}\}^{\oplus} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.784G_1 + 0.216G_2 \\ -0.147G_1 - 0.063G_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{P_{o3}\} = \{P_{o2}\}^{\oplus} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.216G_1 - 0.784G_2 \\ 0.063G_1 + 0.147G_2 \end{Bmatrix}$$

10. 改写节点位移与总节点荷载的矩阵方程, 列出根据已知节点荷载求解未知节点位移的子块方程

根据支承条件, 建立以下的子块方程:

由于给与的支承条件为 $\{\delta_1\} = \{\delta_4\} = 0$, 因而与 $\{\delta_2\}$ 及 $\{\delta_3\}$ 有关的子块方程为

$$[K_{22}]\{\delta_2\} + [K_{23}]\{\delta_3\} = \{P_2\}$$

$$[K_{32}]\{\delta_2\} + [K_{33}]\{\delta_3\} = \{P_3\}$$

可写成

$$\begin{Bmatrix} [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{32}] & [K_{33}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

11. 解出节点 2 及节点 3 的位移量 $\{\delta_2\}$ 及 $\{\delta_3\}$

将有关的已知值代入, 得

$$\begin{aligned} [K_{22}] &= [k_{22}]^{\oplus} + [k_{11}]^{\oplus} = \begin{bmatrix} 89.70 & 0 & -35.88 \\ 0 & 820.8 & 0 \\ -35.88 & 0 & 19.14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 656.6 & 0 & 0 \\ 0 & 45.93 & -22.96 \\ 0 & -22.96 & 15.31 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 746.3 & 0 & -35.88 \\ 0 & 866.7 & -22.96 \\ -35.88 & -22.96 & 34.45 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{33}] &= [k_{22}]^{\text{②}} + [k_{22}]^{\text{③}} = \begin{bmatrix} 656.6 & 0 & 0 \\ 0 & 45.88 & 22.96 \\ 0 & 22.96 & 15.31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 89.70 & 0 & -35.88 \\ 0 & 820.8 & 0 \\ -35.88 & 0 & 19.14 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 746.3 & 0 & -35.88 \\ 0 & 866.7 & 22.96 \\ -35.88 & 22.96 & 34.45 \end{bmatrix} \\
[K_{23}] &= [k_{12}]^{\text{②}} = \begin{bmatrix} -656.6 & 0 & 0 \\ 0 & -45.93 & -22.96 \\ 0 & 22.96 & 7.66 \end{bmatrix} \\
[K_{32}] &= [k_{21}]^{\text{②}} = \begin{bmatrix} -656.6 & 0 & 0 \\ 0 & -45.93 & 22.96 \\ 0 & -22.96 & 7.66 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
2 \times 10^5 \times \begin{bmatrix} 746 & 0 & -36 & -657 & 0 & 0 \\ 0 & 867 & -23 & 0 & -46 & -23 \\ -36 & -23 & 34 & 0 & 23 & 7.7 \\ -657 & 0 & 0 & 746 & 0 & -36 \\ 0 & -46 & 23 & 0 & 867 & 23 \\ 0 & -23 & 7.7 & -36 & 23 & 34 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} -EAT\alpha_1 \\ 0.784G_1 + 0.216G_2 \\ -(0.147G_1 + 0.063G_2) \\ EAT\alpha_1 \\ 0.216G_1 + 0.784G_2 \\ 0.063G_1 + 0.147G_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

如果 $G_1 = G_2 = G$, 则由于对称得知

$$v_2 = v_3, \quad u_3 = -u_2, \quad \theta_3 = -\theta_2$$

故得

$$v_2 = v_3 = \frac{10^{-6} G}{1642}$$

$$u_2 = - \frac{EAT\alpha_1 + \frac{36 \times 0.21 G}{26.3}}{2 \left(1403 - \frac{36 \times 36}{26.3} \right)} \times 10^{-6}$$

$$u_3 = -u_2 = \frac{EAT\alpha_1 + \frac{36 \times 0.21 G}{26.3}}{2 \left(1403 - \frac{36 \times 36}{26.3} \right)} \times 10^{-6}$$

$$\theta_2 = \frac{36u_2 - \frac{1}{2} \times 0.21G \times 10^{-6}}{26.3}$$

$$\theta_3 = -\theta_2 = \frac{-36u_2 + \frac{1}{2} \times 0.21G \times 10^{-6}}{26.3}$$

(1) 如果 $T = 10^\circ\text{C}$, $G = 0$ (即在不切削时)

则得

$$v_2 = v_3 = 0$$

$$u_2 = \frac{-EAT\alpha_t}{\left(1403 - \frac{36 \times 36}{26.3}\right)} \times \frac{10^{-6}}{2} = -\frac{20 \times 10^{10} \times 2 \times 32.83 \times 10^{-4} \times 10 \times 11 \times 10^{-6}}{\left(1403 - \frac{36 \times 36}{26.3}\right) \times 2} \times 10^{-6}$$

$$= -5.34 \times 10^{-5} \text{ 米} = -5.34 \times 10^{-2} \text{ 毫米}$$

$$\theta_2 = \frac{-5.34 \times 10^{-5} \times 36}{26.3} = -7.31 \times 10^{-5} \text{ 弧度} = -15.1 \text{ 角度秒}$$

(2) 如果每一个主轴头各钻一个四孔的法兰盘, 每个孔径为 $\phi 8.3$ 毫米, 钻削速度 $v_{\text{切}} = 13.3$ 米/分, 进给量 $s_{\text{进}} = 0.13$ 毫米/转, 材料硬度 $\text{HB} = 220$ 则每个钻头的轴向力为

$$P = 2.6Ds^{0.8}\text{HB}^{0.6} = 2.6 \times 8.3 \times (0.13)^{0.8} (220)^{0.6}$$

$$= 2.6 \times 8.3 \times 0.1955 \times 25.44 = 107.3 \text{ 公斤力} = 1052.3 \text{ 牛}$$

故

$$G_1 = G_2 = G = 4 \times 107.3 \text{ 公斤} = 429.2 \text{ 公斤力} = 4209.2 \text{ 牛}$$

于是得出

$$v_2 = v_3 = \frac{4209.2 \times 10^{-6}}{1642} = 0.256 \times 10^{-5} \text{ 米}$$

$$u_2 = -\frac{20 \times 10^{10} \times 2 \times 32.83 \times 10 \times 11 \times 10^{-6} + \frac{36 \times 0.21 \times 4209.2}{26.3}}{2 \left(1403 - \frac{36 \times 36}{26.3}\right)} \times 10^{-6}$$

$$= -5.38 \times 10^{-5} \text{ 米 (前面为 } -5.34 \times 10^{-5} \text{ 米)}$$

$$\theta_2 = \frac{36u_2 - \frac{10^{-6}}{2} \times 0.21G}{26.3} = \frac{36(-5.38 \times 10^{-5}) - \frac{0.21}{2} \times 4209.2 \times 10^{-6}}{26.3}$$

$$= -9.02 \times 10^{-5} \text{ 弧度 (前面为 } -7.31 \times 10^{-5} \text{ 弧度)}$$

从上述两种情况对比, 可以看出切削力的影响远比变温的影响来得小。对于 u_2 来讲, 它的影响几乎微不足道; 对于转角的影响切削力所占的分额仅为

$$\frac{9.02 - 7.31}{9.02} = 19.2\%$$

而变温所占的分额则占 80.8%。

因此, 可以看出, 机床热变形占总变形的分额是相当可观的, 应予重视。

附表

附表1 各种不同材料的比重量、导热系数、比热和导温系数

材 料 名 称	ρ 公斤 米 ³	t °C	λ 千卡 米·小时·度	c 千卡 公斤·度	$a \times 10^3$ 米 ² 小时
金 属					
铝	2670	0	175.0	0.22	328.0
黄铜	8600	0	73.5	0.090	95.0
铜(紫铜)	8800	0	330.0	0.11	412.0
镍	9000	20	50.0	0.054	50.5
银	10500	0	394	0.056	670.0
钢	7900	20	39.0	0.11	45.0
铸铁(生铁)	7220	20	54	0.12	62.5
隔 热 材 料					
石棉板	770	30	0.10	0.195	0.712
85%的苔土粉(索维利特, 使用温限450°C)	216	100	0.085	—	—
硅藻土	300	150	0.06	—	—
超细玻璃棉(使用温限450°C)	6~18	—	0.028~0.03	—	—
软木板	190	30	0.036	0.45	0.42
纤维板	240	20	0.042	—	—
建 筑 材 料 及 其 他 材 料					
土(干的)	1500	—	0.119	0.44	0.18
橡胶制品	1200	0	0.14	0.33	0.362
云母	290	—	0.5	0.21	82.0
水泥	1900	30	0.26	0.27	0.506
混凝土	2300	20	1.10	0.27	1.77
大理石	2700	90	1.12	0.10	4.15
灰泥(灰浆粉刷)	1680	20	0.67	—	—
焦炭粉	449	100	0.164	0.29	0.126
矿物毛	200	50	0.04	0.22	0.91
砂(干的)	1500	20	0.28	0.19	0.985
玻璃	2500	20	0.64	0.16	1.6
地沥青	2110	20	0.60	0.50	0.57

附表2 在大气压力 $B=760$ “毫米汞柱”时干空气的物理参数

$t, ^\circ\text{C}$	ρ 公斤 米 ³	c_p 千卡 公斤·度	$\lambda \times 10^2$ 千卡 米·小时·度	$a \times 10^2$ 米 ² 小时	$\mu \times 10^6$ 公斤·秒 米 ²	$\nu \times 10^6$ 米 ² 秒	Pr
-50	1.584	0.242	1.75	4.57	1.49	9.23	0.728
-40	1.515	0.242	1.82	4.96	1.55	10.04	0.728
-30	1.453	0.242	1.89	5.37	1.60	10.80	0.723
-20	1.395	0.241	1.96	5.83	1.65	11.79	0.716
-10	1.342	0.241	2.03	6.28	1.70	12.43	0.712
0	1.293	0.240	2.10	6.77	1.75	13.28	0.707
10	1.247	0.240	2.16	7.22	1.80	14.16	0.705
20	1.205	0.240	2.23	7.71	1.85	15.06	0.703
30	1.165	0.240	2.30	8.23	1.90	16.00	0.701
40	1.128	0.240	2.37	8.75	1.95	16.96	0.699

(续)

$t, ^\circ\text{C}$	ρ 公斤 米 ³	c_p 千卡 公斤·度	$\lambda \times 10^2$	$\alpha \times 10^2$	$\mu \times 10^6$	$\nu \times 10^8$	Pr
			千卡 米·小时·度	米 ² 小时	公斤·秒 米 ²	米 ² 秒	
50	1.093	0.240	2.43	9.26	2.00	17.95	0.698
60	1.060	0.240	2.49	9.79	2.05	18.97	0.696
70	1.029	0.241	2.55	10.28	2.10	20.02	0.694
80	1.000	0.241	2.62	10.87	2.15	21.09	0.692
90	0.972	0.241	2.69	11.48	2.19	22.10	0.690
100	0.946	0.241	2.76	12.11	2.23	23.13	0.688
120	0.898	0.241	2.87	13.26	2.33	25.45	0.686
140	0.854	0.242	3.00	14.52	2.42	27.80	0.684
160	0.815	0.243	3.13	15.80	2.50	30.09	0.682
180	0.779	0.244	3.25	17.10	2.58	32.49	0.681
200	0.746	0.245	3.38	18.49	2.65	34.85	0.680
250	0.674	0.248	3.67	21.96	2.79	40.61	0.677
300	0.615	0.250	3.96	25.76	3.03	48.33	0.674
350	0.566	0.253	4.22	29.47	3.20	55.46	0.676
400	0.524	0.255	4.48	33.52	3.37	63.09	0.678
500	0.456	0.261	4.94	41.51	3.69	79.38	0.687
600	0.404	0.266	5.35	49.78	3.99	96.89	0.699
700	0.362	0.271	5.77	58.82	4.26	115.4	0.706
800	0.329	0.276	6.17	67.95	4.52	134.8	0.713
900	0.301	0.280	6.56	77.84	4.76	155.1	0.717
1000	0.277	0.283	6.94	88.53	5.00	177.1	0.719
1100	0.257	0.286	7.31	99.45	5.22	199.3	0.722
1200	0.231	0.289	7.87	113.94	5.45	223.7	0.724

附表3 工程材料的黑度 (法线方向辐射)

材 料 名 称	$t, ^\circ\text{C}$	ϵ
辗压后光亮的铝	170~500	0.039~0.05
严重氧化的铝	93~506	0.20~0.31
高度磨光的黄铜	245.0~355	0.028~0.031
无光泽的黄铜板	50~350	0.22
在600°C氧化后的黄铜	200~600	0.61~0.59
精密磨光的电解铜	80	0.018
表面刮光的铜	20	0.070
氧化的铜	130	0.76
长期受热, 表面盖有厚氧化层的铜板	25	0.78
在600°C氧化后的铜	200~600	0.57~0.87
磨光的铬	40~1090	0.08~0.36
磨光的铁	425~1020	0.144~0.377
在600°C时氧化后的铸铁	200~600	0.64~0.78
在600°C时氧化后的钢	200~600	0.79
磨光的钢铸件	770~1040	0.52~0.56
纯汞	0~100	0.090~0.12
磨光的电镀过的镍	25	0.045

(续)

材 料 名 称	$t, ^\circ\text{C}$	ϵ
镍铬线, 光亮的	50~1000	0.65~0.79
铂丝	25~1230	0.036~0.192
经过磨光的纯银	225~625	0.020~0.032
在400°C时氧化后的银	400	0.11
镀锌铁皮	25	0.23~0.28
石棉纸	40~370	0.93~0.94
红砖, 表面粗糙, 但还无大不平整处	20	0.93
硅砖, 表面粗糙	100	0.8~0.85
耐火砖	1000	0.75
碳丝	1040~1405	0.525
碳黑与水玻璃涂料层	98~225	0.96~0.95
玻璃, 光滑的表面	22~90	0.94
散热器涂料, 白色, 奶油色, 转白色	100	0.84, 0.79, 0.77
无光泽的黑油漆与各种不同颜色的油质涂料	75~145	0.91~0.96
瓷器, 上过釉的	22	0.924

注: 表中温度及黑度都有两个数字时, 彼此间的次序是对应的, 中间温度的黑度可以内插求取。

附表4 工艺系统常用表面间的接合面换热系数值

接合面的加工方法	磨 对 磨		磨 对 刮		刮 对 刮	
	干	油	干	油	干	油
接合面的换热系数 α 值, 千卡/米 ² ·小时·度	1500	2200	1800	5200	2200	3700

注: 金属材料是生铁, 刮削至20~25点/(25毫米)²

附表5 几种液体的物理参数 (在饱和线上的数值)

液体名称	t 度	ρ 公斤 米 ³	λ 千卡 米·小时·度	c 千卡 公斤·度	$a \times 10^4$ 米 ² 小时	$\nu \times 10^6$ 米 ² 秒	Pr
氢	-30	678	0.49	1.060	6.71	0.354	1.89
	-20	665	0.49	1.080	6.71	0.304	1.62
	-10	652	0.48	1.093	6.74	0.263	1.39
	0	638	0.47	1.104	6.68	0.235	1.27
	+10	624.7	0.445	1.119	6.40	0.209	1.18
	+20	610.3	0.43	1.240	6.26	0.183	1.09
柴油	20	908.4	0.110	0.439	3.41	620	8000
	40	895.5	0.108	0.456	3.94	135	1840
	60	882.4	0.107	0.473	4.45	45	630
	80	870	0.106	0.490	4.92	20	290
	100	857	0.105	0.507	5.41	10.8	162
变压器油	0	892.5	0.0966	0.370	2.93	70.5	866
	20	880.3	0.0951	0.398	2.72	22.5	298
	40	868.2	0.0937	0.427	2.53	10.3	146
	60	856.0	0.0922	0.455	2.37	5.78	87.8
	80	843.9	0.0908	0.484	2.22	3.66	59.3
	100	831.8	0.0893	0.512	2.10	2.56	43.9

附表 6 在一个大气压或饱和线上水的物理参数

t 度	P	ρ'	i'	c_p	$\lambda \times 10^2$	$\alpha \times 10^4$	$\mu \times 10^6$	$\nu \times 10^8$	$\beta \times 10^4$	$\sigma \times 10^4$	Pr
	公斤 厘米 ²	公斤 米 ³	千卡 公斤	千卡 公斤·度	千卡 米·小时·度	米 ² 小时	公斤·秒 米 ²	米 ² 秒	1 度	公斤 米	
0	1.00	999.9	0	1.006	47.4	4.71	182.3	1.789	-0.63	77.1	13.67
5	1.00	999.8	5.03	1.004	48.4	4.80	157.8	1.547	+0.11	76.4	11.61
10	1.00	999.7	10.04	1.001	49.4	4.94	133.1	1.306	0.70	75.6	9.52
15	1.00	999.0	15.04	1.00	50.5	5.00	117.5	1.136	1.30	74.9	8.30
20	1.00	998.2	20.04	0.999	51.5	5.16	102.4	1.006	1.82	74.1	7.02
25	1.00	996.9	25.03	0.998	52.3	5.20	90.8	0.895	2.52	73.4	6.28
30	1.00	995.7	30.02	0.998	53.1	5.35	81.7	0.805	3.21	72.6	5.42
35	1.00	994.0	35.02	0.998	53.8	5.40	73.7	0.723	3.60	71.8	4.90
40	1.00	992.2	40.01	0.998	54.5	5.51	66.6	0.659	3.87	71.0	4.31
45	1.00	990.1	45.00	0.998	55.1	5.55	61.0	0.602	4.20	70.0	3.93
50	1.00	988.1	49.99	0.998	55.7	5.65	56.0	0.556	4.49	69.0	3.54
55	1.00	985.6	54.99	0.998	56.2	5.70	51.7	0.516	4.8	68.0	3.28
60	1.00	983.2	59.98	0.999	56.7	5.78	47.9	0.478	5.11	67.5	2.98
65	1.00	980.5	64.98	0.999	57.1	5.80	44.3	0.445	5.4	66.6	2.78
70	1.00	977.8	69.98	1.000	57.4	5.85	40.7	0.415	5.70	65.6	2.55
75	1.00	974.8	74.99	1.001	57.7	5.90	38.5	0.393	6.0	64.7	2.40
80	1.00	971.8	80.00	1.002	58.0	5.96	36.2	0.365	6.32	63.8	2.21
85	1.00	968.6	85.02	1.004	58.3	5.99	33.8	0.348	6.6	62.9	2.09
90	1.00	965.3	90.04	1.005	58.5	6.03	32.1	0.326	6.95	61.9	1.95
95	1.00	961.8	95.07	1.007	58.6	6.05	30.3	0.309	7.22	61.0	1.85
100	1.03	958.4	100.10	1.008	58.7	6.08	28.8	0.295	7.52	60.0	1.75
110	1.46	951.0	110.19	1.011	58.9	6.13	26.4	0.272	8.08	58.0	1.60
120	2.03	943.1	120.3	1.015	59.0	6.16	24.2	0.252	8.64	55.9	1.47
130	2.75	934.8	130.5	1.019	59.0	6.19	22.2	0.233	9.19	53.9	1.36
140	3.69	926.1	140.7	1.024	58.9	6.21	20.5	0.217	9.72	51.7	1.26
150	4.85	917.0	151.0	1.030	58.8	6.22	19.0	0.203	10.3	49.6	1.17
160	6.30	907.4	161.3	1.038	58.7	6.23	17.7	0.191	10.7	47.5	1.10
170	8.08	897.3	171.8	1.046	58.4	6.22	16.6	0.181	11.3	45.2	1.05
180	10.23	886.9	182.3	1.055	58.0	6.20	15.6	0.173	11.9	43.1	1.00
190	12.80	876.0	192.9	1.065	57.6	6.17	14.7	0.165	12.6	40.8	0.96
200	15.86	863.0	203.6	1.076	57.0	6.14	13.9	0.158	13.3	38.4	0.93
220	23.66	840.3	225.4	1.102	55.5	5.99	12.7	0.148	14.8	33.8	0.89
240	34.14	813.6	247.8	1.136	54.0	5.84	11.7	0.141	16.8	29.1	0.87
260	47.87	784.0	271.1	1.182	52.0	5.61	10.8	0.135	19.7	24.2	0.87
280	65.46	750.7	295.4	1.249	49.4	5.27	10.0	0.131	23.7	19.5	0.90
300	87.61	712.5	321.2	1.370	46.4	4.75	9.3	0.128	29.2	14.7	0.97

附表7 零阶及一阶第一类贝塞尔函数 $J_0(u)$ 及 $J_1(u)$

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
0.0	1.0000	0.0000	6.0	0.1506	-0.2767
0.1	0.9975	0.0499	6.1	0.1773	-0.2559
0.2	0.9900	0.0995	6.2	0.2017	-0.2329
0.3	0.9776	0.1483	6.3	0.2238	-0.2081
0.4	0.9604	0.1960	6.4	0.2433	-0.1816
0.5	0.9385	0.2423	6.5	0.2601	-0.1538
0.6	0.9120	0.2867	6.6	0.2740	-0.1250
0.7	0.8812	0.3290	6.7	0.2851	-0.0953
0.8	0.8463	0.3688	6.8	0.2931	-0.0652
0.9	0.8075	0.4059	6.9	0.2981	-0.0349
1.0	0.7652	0.4400	7.0	0.3001	-0.0047
1.1	0.7196	0.4709	7.1	0.2991	0.0252
1.2	0.6711	0.4983	7.2	0.2951	0.0543
1.3	0.6201	0.5220	7.3	0.2882	0.0826
1.4	0.5669	0.5419	7.4	0.2786	0.1096
1.5	0.5118	0.5579	7.5	0.2663	0.1352
1.6	0.4554	0.5699	7.6	0.2516	0.1592
1.7	0.3980	0.5778	7.7	0.2346	0.1813
1.8	0.3400	0.5815	7.8	0.2154	0.2014
1.9	0.2818	0.5812	7.9	0.1944	0.2192
2.0	0.2239	0.5767	8.0	0.1716	0.2346
2.1	0.1666	0.5683	8.1	0.1475	0.2476
2.2	0.1104	0.5560	8.2	0.1222	0.2580
2.3	0.0555	0.5399	8.3	0.0960	0.2657
2.4	0.0025	0.5202	8.4	0.0682	0.2703
2.5	-0.0484	0.4971	8.5	0.0419	0.2731
2.6	-0.0968	0.4708	8.6	0.0146	0.2728
2.7	-0.1424	0.4416	8.7	-0.0125	0.2697
2.8	-0.1850	0.4097	8.8	-0.0392	0.2641
2.9	-0.2243	0.3754	8.9	-0.0652	0.2559
3.0	-0.2600	0.3391	9.0	-0.0903	0.2453
3.1	-0.2921	0.3009	9.1	-0.1142	0.2324
3.2	-0.3202	0.2613	9.2	-0.1368	0.2174
3.3	-0.3443	0.2207	9.3	-0.1577	0.2004
3.4	-0.3643	0.1792	9.4	-0.1768	0.1816
3.5	-0.3801	0.1374	9.5	-0.1939	0.1613
3.6	-0.3918	0.0955	9.6	-0.2090	0.1395
3.7	-0.3992	0.0538	9.7	-0.2218	0.1166
3.8	-0.4026	0.0128	9.8	-0.2323	0.0928
3.9	-0.4018	-0.0272	9.9	-0.2403	0.0684
4.0	-0.3971	-0.0660	10.0	-0.2459	0.0435
4.1	-0.3887	-0.1033	10.1	-0.2490	0.0184
4.2	-0.3766	-0.1386	10.2	-0.2496	-0.0066
4.3	-0.3610	-0.1719	10.3	-0.2477	-0.0313
4.4	-0.3423	-0.2028	10.4	-0.2434	-0.0555
4.5	-0.3205	-0.2311	10.5	-0.2366	-0.0788
4.6	-0.2961	-0.2566	10.6	-0.2276	-0.1012
4.7	-0.2693	-0.2791	10.7	-0.2164	-0.1224
4.8	-0.2404	-0.2985	10.8	-0.2032	-0.1422
4.9	-0.2097	-0.3147	10.9	-0.1881	-0.1604
5.0	-0.1776	-0.3276	11.0	-0.1712	-0.1768
5.1	-0.1443	-0.3371	11.1	-0.1528	-0.1913
5.2	-0.1103	-0.3432	11.2	-0.1330	-0.2038
5.3	-0.0758	-0.3460	11.3	-0.1121	-0.2143
5.4	-0.0412	-0.3453	11.4	-0.0902	-0.2224
5.5	-0.0068	-0.3414	11.5	-0.0677	-0.2284
5.6	0.0270	-0.3343	11.6	-0.0446	-0.2320
5.7	0.0599	-0.3241	11.7	-0.0213	-0.2333
5.8	0.0917	-0.3110	11.8	0.0020	-0.2323
5.9	0.1220	-0.2951	11.9	0.0250	-0.2290

(续)

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
12.0	0.0477	-0.2234	13.5	0.2150	0.0380
12.1	0.0697	-0.2158	13.6	0.2101	0.0590
12.2	0.0908	-0.2060	13.7	0.2032	0.0791
12.3	0.1108	-0.1943	13.8	0.1943	0.0984
12.4	0.1296	-0.1807	13.9	0.1836	0.1165
12.5	0.1469	-0.1655	14.0	0.1711	0.1334
12.6	0.1626	-0.1487	14.1	0.1570	0.1488
12.7	0.1766	-0.1307	14.2	0.1414	0.1626
12.8	0.1887	-0.1114	14.3	0.1245	0.1747
12.9	0.1988	-0.0912	14.4	0.1065	0.1850
13.0	0.2069	-0.0703	14.5	0.0875	0.1934
13.1	0.2129	-0.0488	14.6	0.0679	0.1998
13.2	0.2167	-0.0271	14.7	0.0476	0.2043
13.3	0.2183	-0.0052	14.8	0.0271	0.2066
13.4	0.2177	0.0166	14.9	0.0064	0.2069
			15.0	-0.0142	0.2051

附表8 零阶及一阶第二类贝塞尔函数 $Y_0(u)$ 及 $Y_1(u)$

u	$Y_0(u)$	$Y_1(u)$	u	$Y_0(u)$	$Y_1(u)$
0.0	$-\infty$	$-\infty$	3.5	0.1890	0.4102
0.1	-1.5342	-6.4590	3.6	0.1477	0.4154
0.2	-1.0811	-3.3238	3.7	0.1061	0.4167
0.3	-0.8073	-2.2931	3.8	0.0645	0.4141
0.4	-0.6060	-1.7809	3.9	0.0234	0.4078
0.5	-0.4445	-1.4715	4.0	-0.0169	0.3979
0.6	-0.3085	-1.2604	4.1	-0.0561	0.3846
0.7	-0.1907	-1.1032	4.2	-0.0938	0.3680
0.8	-0.0868	-0.9781	4.3	-0.1296	0.3484
0.9	0.0056	-0.8731	4.4	-0.1633	0.3260
1.0	0.0883	-0.7812	4.5	-0.1947	0.3010
1.1	0.1622	-0.6981	4.6	-0.2235	0.2737
1.2	0.2281	-0.6211	4.7	-0.2494	0.2445
1.3	0.2865	-0.5485	4.8	-0.2723	0.2136
1.4	0.3379	-0.4791	4.9	-0.2921	0.1812
1.5	0.3824	-0.4123	5.0	-0.3085	0.1479
1.6	0.4204	-0.3476	5.1	-0.3216	0.1137
1.7	0.4520	-0.2847	5.2	-0.3312	0.0792
1.8	0.4774	-0.2237	5.3	-0.3374	0.0445
1.9	0.4968	-0.1644	5.4	-0.3402	0.0101
2.0	0.5104	-0.1070	5.5	-0.3395	-0.0238
2.1	0.5183	-0.0517	5.6	-0.3354	-0.0568
2.2	0.5208	0.0015	5.7	-0.3282	-0.0887
2.3	0.5181	0.0523	5.8	-0.3177	-0.1192
2.4	0.5104	0.1005	5.9	-0.3044	-0.1481
2.5	0.4981	0.1459	6.0	-0.2882	-0.1750
2.6	0.4813	0.1884	6.1	-0.2694	-0.1998
2.7	0.4605	0.2276	6.2	-0.2483	-0.2223
2.8	0.4359	0.2635	6.3	-0.2251	-0.2422
2.9	0.4079	0.2959	6.4	-0.2000	-0.2596
3.0	0.3768	0.3247	6.5	-0.1732	-0.2741
3.1	0.3431	0.3496	6.6	-0.1452	-0.2857
3.2	0.3070	0.3707	6.7	-0.1162	-0.2945
3.3	0.2691	0.3878	6.8	-0.0864	-0.3002
3.4	0.2296	0.4010	6.9	-0.0562	-0.3029

(续)

u	$Y_0(u)$	$Y_1(u)$	u	$Y_0(u)$	$Y_1(u)$
7.0	-0.0260	-0.3027	11.0	-0.1638	0.1637
7.1	0.0042	-0.2995	11.1	-0.1843	0.1446
7.2	0.0338	-0.2934	11.2	-0.1977	0.1243
7.3	0.0628	-0.2846	11.3	-0.2091	0.1029
7.4	0.0907	-0.2731	11.4	-0.2183	0.0807
7.5	0.1173	-0.2591	11.5	-0.2252	0.0579
7.6	0.1424	-0.2428	11.6	-0.2299	0.0348
7.7	0.1658	-0.2243	11.7	-0.2322	0.0114
7.8	0.1872	-0.2039	11.8	-0.2322	-0.0118
7.9	0.2065	-0.1817	11.9	-0.2298	-0.0347
8.0	0.2235	-0.1581	12.0	-0.2252	-0.0571
8.1	0.2381	-0.1332	12.1	-0.2184	-0.0787
8.2	0.2501	-0.1072	12.2	-0.2095	-0.0994
8.3	0.2595	-0.0806	12.3	-0.1986	-0.1190
8.4	0.2662	-0.0535	12.4	-0.1858	-0.1371
8.5	0.2702	-0.0262	12.5	-0.1712	-0.1538
8.6	0.2715	0.0011	12.6	-0.1551	-0.1689
8.7	0.2700	0.0280	12.7	-0.1375	-0.1821
8.8	0.2659	0.0544	12.8	-0.1187	-0.1935
8.9	0.2592	0.0799	12.9	-0.0989	-0.2028
9.0	0.2499	0.1043	13.0	-0.0782	-0.2101
9.1	0.2383	0.1275	13.1	-0.0569	-0.2152
9.2	0.2245	0.1491	13.2	-0.0352	-0.2182
9.3	0.2086	0.1691	13.3	-0.0134	-0.2190
9.4	0.1907	0.1871	13.4	0.0085	-0.2176
9.5	0.1712	0.2032	13.5	0.0301	-0.2140
9.6	0.1502	0.2171	13.6	0.0512	-0.2084
9.7	0.1279	0.2287	13.7	0.0717	-0.2007
9.8	0.1045	0.2379	13.8	0.0913	-0.1912
9.9	0.0804	0.2447	13.9	0.1099	-0.1798
10.0	0.0557	0.2490	14.0	0.1272	-0.1666
10.1	0.0307	0.2508	14.1	0.1431	-0.1520
10.2	0.0056	0.2502	14.2	0.1575	-0.1359
10.3	-0.0193	0.2471	14.3	0.1703	-0.1186
10.4	-0.0437	0.2416	14.4	0.1812	-0.1003
10.5	-0.0675	0.2337	14.5	0.1903	-0.0810
10.6	-0.0904	0.2236	14.6	0.1974	-0.0612
10.7	-0.1122	0.2114	14.7	0.2025	-0.0408
10.8	-0.1326	0.1973	14.8	0.2056	-0.0202
10.9	-0.1516	0.1813	14.9	0.2066	0.0005

附表9 零阶同一阶第一类变型(虚宗量)贝塞尔函数 $I_0(u)$ 及 $I_1(u)$

u	$I_0(u)$	$I_1(u)$	u	$I_0(u)$	$I_1(u)$
0.0	1.0000	0.0000	1.5	1.6467	0.9817
0.1	1.0025	0.0501	1.6	1.7500	1.0848
0.2	1.0100	0.1005	1.7	1.8640	1.1963
0.3	1.0226	0.1517	1.8	1.9896	1.3172
0.4	1.0404	0.2040	1.9	2.1277	1.4482
0.5	1.0635	0.2579	2.0	2.280	1.591
0.6	1.0920	0.3137	2.1	2.446	1.746
0.7	1.1263	0.3791	2.2	2.629	1.914
0.8	1.1665	0.4329	2.3	2.830	2.098
0.9	1.2130	0.4971	2.4	3.049	2.298
1.0	1.2661	0.5652	2.5	3.290	2.517
1.1	1.3262	0.6375	2.6	3.553	2.755
1.2	1.3937	0.7147	2.7	3.842	3.016
1.3	1.4693	0.7973	2.8	4.157	3.301
1.4	1.5534	0.8861	2.9	4.503	3.613

(续)

u	$I_0(u)$	$I_1(u)$	u	$I_0(u)$	$I_1(u)$
3.0	4.881	3.953	4.5	17.48	15.39
3.1	5.294	4.326	4.6	19.09	16.86
3.2	5.747	4.734	4.7	20.86	18.48
3.3	6.243	5.181	4.8	22.79	20.25
3.4	6.785	5.670	4.9	24.91	22.20
3.5	7.378	6.206	5.0	27.24	24.34
3.6	8.028	6.793	5.1	29.79	26.68
3.7	8.739	7.436	5.2	32.58	29.25
3.8	9.517	8.140	5.3	35.65	32.08
3.9	10.369	8.913	5.4	39.01	35.18
4.0	11.30	9.76	5.5	42.70	38.59
4.1	12.32	10.69	5.6	46.74	42.33
4.2	13.44	11.71	5.7	51.17	46.44
4.3	14.67	12.82	5.8	56.04	50.95
4.4	16.01	14.05	5.9	61.38	55.90

附表10 零阶及一阶变型(虚宗量)第二类贝塞尔函数 $K_0(u)$ 及 $K_1(u)$

u	$\frac{2}{\pi}K_0(u)$	$\frac{2}{\pi}K_1(u)$	u	$\frac{2}{\pi}K_0(u)$	$\frac{2}{\pi}K_1(u)$
0.0	∞	∞	2.0	0.072	0.089
0.1	1.545	6.270	2.1	0.064	0.078
0.2	1.116	3.040	2.2	0.057	0.069
0.3	0.874	1.946	2.3	0.050	0.060
0.4	0.710	1.391	2.4	0.045	0.053
0.5	0.588	1.054	2.5	0.040	0.047
0.6	0.495	0.829	2.6	0.035	0.042
0.7	0.420	0.669	2.7	0.031	0.037
0.8	0.360	0.549	2.8	0.028	0.032
0.9	0.310	0.456	2.9	0.025	0.029
1.0	0.268	0.383	3.0	0.022	0.026
1.1	0.233	0.324	3.1	0.020	0.023
1.2	0.203	0.277	3.2	0.018	0.020
1.3	0.177	0.237	3.3	0.016	0.018
1.4	0.155	0.204	3.4	0.014	0.016
1.5	0.136	0.177	3.5	0.012	0.014
1.6	0.120	0.153	3.6	0.011	0.013
1.7	0.105	0.133	3.7	0.010	0.011
1.8	0.093	0.116	3.8	0.009	0.010
1.9	0.082	0.102	3.9	0.008	0.009

附表11 $J_m(M_n) = 0$ 时 M_n 的前五个根的数值

m	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0	2.4048	5.5201	8.5637	11.7915	14.9309
1	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
2	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960	17.9598
3	6.3802	9.7619	13.0152	16.2235	19.4094
4	7.5883	11.0647	14.3725	17.6160	20.8269

附表12 $P(F_0)$ 的数值

F_0	$P(F_0)$	F_0	$P(F_0)$	F_0	$P(F_0)$
0.020	1.00090	0.260	0.69903	0.500	0.37078
0.024	0.99999	0.264	0.66256	0.504	0.36714
0.028	0.99996	0.268	0.65614	0.508	0.36353
0.032	0.99984	0.272	0.64978	0.512	0.35996
0.036	0.99961	0.276	0.64347	0.516	0.35643
0.040	0.99919	0.280	0.63722	0.520	0.35293
0.044	0.99850	0.284	0.63103	0.524	0.34946
0.048	0.99750	0.288	0.62489	0.528	0.34603
0.052	0.99614	0.292	0.61881	0.532	0.34263
0.056	0.99439	0.296	0.61278	0.536	0.33927
0.060	0.99222	0.300	0.60680	0.540	0.33593
0.064	0.98962	0.304	0.60088	0.544	0.33264
0.068	0.98661	0.308	0.59502	0.548	0.32937
0.072	0.98318	0.312	0.58921	0.552	0.32613
0.076	0.97936	0.316	0.58346	0.556	0.32293
0.080	0.97516	0.320	0.57776	0.560	0.31976
0.084	0.97061	0.324	0.57211	0.564	0.31662
0.088	0.96572	0.328	0.56651	0.568	0.31351
0.092	0.96052	0.332	0.56097	0.572	0.31043
0.096	0.95504	0.336	0.55548	0.576	0.30738
0.100	0.94930	0.340	0.55004	0.580	0.30436
0.104	0.94333	0.344	0.54466	0.584	0.30138
0.108	0.93715	0.348	0.53932	0.588	0.29841
0.112	0.93078	0.352	0.53404	0.592	0.29548
0.116	0.92424	0.356	0.52881	0.596	0.29258
0.120	0.91755	0.360	0.52363	0.600	0.28971
0.124	0.91072	0.364	0.51850	0.604	0.28686
0.128	0.90378	0.368	0.51342	0.608	0.28405
0.132	0.89675	0.372	0.50838	0.612	0.28126
0.136	0.88963	0.376	0.50340	0.616	0.27850
0.140	0.88244	0.380	0.49846	0.620	0.27576
0.144	0.87519	0.384	0.49357	0.624	0.27305
0.148	0.86788	0.388	0.48873	0.628	0.27037
0.152	0.86055	0.392	0.48394	0.632	0.26772
0.156	0.85318	0.396	0.47919	0.636	0.26509
0.160	0.84580	0.400	0.47449	0.640	0.26248
0.164	0.83840	0.404	0.46983	0.644	0.25990
0.168	0.83100	0.408	0.46522	0.648	0.25735
0.172	0.82360	0.412	0.46066	0.652	0.25482
0.176	0.81622	0.416	0.45614	0.656	0.25232
0.180	0.80884	0.420	0.45166	0.660	0.24984
0.184	0.80148	0.424	0.44723	0.664	0.24739
0.188	0.79414	0.428	0.44284	0.668	0.24496
0.192	0.78684	0.432	0.43849	0.672	0.24256
0.196	0.77956	0.436	0.43419	0.676	0.24017
0.200	0.77231	0.440	0.42992	0.680	0.23781
0.204	0.76510	0.444	0.42570	0.684	0.23548
0.208	0.75793	0.448	0.42152	0.688	0.23317
0.212	0.75080	0.452	0.41738	0.692	0.23088
0.216	0.74372	0.456	0.41329	0.696	0.22861
0.220	0.73668	0.460	0.40923	0.700	0.22636
0.224	0.72968	0.464	0.40521	0.704	0.22414
0.228	0.72274	0.468	0.40124	0.708	0.22194
0.232	0.71584	0.472	0.39729	0.712	0.21976
0.236	0.70900	0.476	0.39339	0.716	0.21760
0.240	0.70220	0.480	0.38953	0.720	0.21546
0.244	0.69546	0.484	0.38571	0.724	0.21335
0.248	0.68877	0.488	0.38192	0.728	0.21125
0.252	0.68214	0.492	0.37817	0.732	0.20918
0.256	0.67555	0.496	0.37446	0.736	0.20712

(续)

F_0	$P(F_0)$	F_0	$P(F_0)$	F_0	$P(F_0)$
0.740	0.20509	1.000	0.1030	2.000	0.0092
0.744	0.20307	1.020	0.1028	2.080	0.0075
0.748	0.20108	1.040	0.0978	2.160	0.0062
0.752	0.19910	1.060	0.0931	2.240	0.0051
0.756	0.19715	1.080	0.0886	2.320	0.0042
0.760	0.19521	1.100	0.0844	2.400	0.0034
0.764	0.19330	1.120	0.0803	2.480	0.0028
0.768	0.19140	1.140	0.0764	2.560	0.0023
0.772	0.18952	1.160	0.0728	2.640	0.0019
0.776	0.18766	1.180	0.0693	2.720	0.0016
0.780	0.18581	1.200	0.0659	2.800	0.0013
0.784	0.18399	1.240	0.0597	2.880	0.0010
0.788	0.18218	1.280	0.0541	2.960	0.0009
0.792	0.18039	1.320	0.0490	3.040	0.0007
0.796	0.17862	1.360	0.0444	3.120	0.0006
0.800	0.1769	1.400	0.0402	3.200	0.0005
0.820	0.1694	1.440	0.0365	3.280	0.0004
0.840	0.1602	1.480	0.0330	3.360	0.0003
0.860	0.1525	1.520	0.0299	3.440	0.0003
0.880	0.1452	1.560	0.0271	3.520	0.0002
0.900	0.1382	1.600	0.0246	3.600	0.0002
0.920	0.1315	1.680	0.0202	3.680	0.0001
0.940	0.1252	1.760	0.0166	3.760	0.0001
0.960	0.1192	1.840	0.0136	3.840	0.0001
0.980	0.1134	1.920	0.0112	4.000	0.0001

附表13 $M_n \text{tg} M_n = C$ 的前五个 M_n 数值

C	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0.000	0.0000	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664
0.002	0.0447	3.1422	6.2835	9.4250	12.5665
0.004	0.0632	3.1429	6.2838	9.4252	12.5667
0.006	0.0774	3.1435	6.2841	9.4254	12.5668
0.008	0.0893	3.1441	6.2845	9.4256	12.5670
0.010	0.0998	3.1448	6.2848	9.4258	12.5672
0.020	0.1410	3.1479	6.2864	9.4269	12.5680
0.040	0.1987	3.1543	6.2895	9.4290	12.5696
0.060	0.2425	3.1606	6.2927	9.4311	12.5711
0.080	0.2791	3.1668	6.2959	9.4333	12.5727
0.100	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354	12.5743
0.200	0.4328	3.2039	6.3148	9.4459	12.5823
0.300	0.5218	3.2341	6.3305	9.4565	12.5902
0.400	0.5932	3.2636	6.3461	9.4670	12.5981
0.500	0.6533	3.2923	6.3616	9.4775	12.6060
0.600	0.7051	3.3204	6.3770	9.4979	12.6139
0.700	0.7506	3.3477	6.3923	9.4983	12.6218
0.800	0.7910	3.3744	6.4074	9.5087	12.6296
0.900	0.8274	3.4003	6.4224	9.5190	12.6375
1.000	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293	12.6453
1.500	0.9882	3.5422	6.5097	9.5801	12.6841
2.000	1.0769	3.6436	6.5783	9.6296	12.7226

(续)

C	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
3.000	1.1925	3.8088	6.7040	9.7240	12.7963
4.000	1.2646	3.9352	6.8140	9.8119	12.8678
5.000	1.3138	4.0336	6.9096	9.8928	12.9552
6.000	1.3496	4.1116	6.9924	9.9667	12.9988
7.000	1.3766	4.1746	7.0640	10.0339	13.0584
8.000	1.3978	4.2264	7.1263	10.0949	13.1111
9.000	1.4149	4.2694	7.1806	10.1502	13.1660
10.000	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003	13.2142
15.000	1.4729	4.4255	7.3959	10.3898	13.4078
20.000	1.4961	4.4915	7.4954	10.5117	13.5420
30.000	1.5202	4.5615	7.6057	10.6543	13.7085
40.000	1.5325	4.5979	7.6647	10.7334	13.8048
50.000	1.5400	4.6202	7.7012	10.7832	13.8666
100.000	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871	13.9981

附录一 矩阵代数基础知识

§ 附1-1 行列式的概念

所谓一个“ n 阶行列式”，是由 n 个横行、 n 个竖列的 n^2 个数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 按照一定规则运算而得的一个数，记为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{附1-1})$$

这 n^2 个数 a_{ij} 称为该行列式的元素，它的前一个角码 i 表示它所在的行数，后一个角码 j 表示它所在的列数。

一个 1 阶行列式，定义为它的唯一元素本身，即

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}$$

一个 2 阶行列式，定义为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{附1-2})$$

即，该行列式中的右上角元素与右下角元素的乘积，减去其余二元素的乘积。

对于 3 阶及更高阶的行列式，可以按归纳的方法加以定义。为此，须首先介绍所谓代数余子式的概念。在 n 阶的行列式 (附 1-1) 中，舍去第 i 行及第 j 列中所有的元素，剩下的元素所构成的 $n-1$ 阶行列式乘以 $(-1)^{i+j}$ ，称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{附1-3})$$

现在，设有 3 阶行列式 $|A|$ ，它的第一行中 3 个元素是 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{13} ，并设 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{13} 是相应的代数余子式，则该 3 阶行列式定义为

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j}$$

这样，我们就用 2 阶行列式定义了 3 阶行列式。依此类推，可以把一个 n 阶行列式 $|A|$ 定义为

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j} \quad (\text{附1-4})$$

这就不但给出了 n 阶行列式的定义，同时也提供了计算 n 阶行列式的所谓降阶法——把 n 阶行列式用 $n-1$ 阶行列式表示，从而用 $n-2$ 阶行列式表示。依此类推，最后可用 2 阶行列式表示，再进行直接计算。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

式 (附1-4) 称为“行列式按第一行元素展开”。事实上，行列式的任一行中各元素与相应的代数余子式乘积之和，就等于该行列式，而且行列式的任一列中各元素与相应的代数余子式乘积之和，也等于该行列式。这就是说：

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$
(附1-5)

其中前一式表示行列式的“按第 i 行展开”，后一式表示行列式的“按第 j 列展开”。当然，不论如何展开，所得的行列式数值都是一样的。

对于高阶行列式直接应用上述展开的方法来计算，一般是非常繁的。利用行列式的下述性质，可以简化计算：把行列式的某一行（或列）乘以同一个数，加到另一行（或列）上去，行列式不变。例如，对于行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

把第三行乘以 -2 ，加到第一行上去，得到

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

再把第一行乘以 -1 及 -2 ，分别加到第二行及第三行上去，得到

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -21 + 5 = -16$$

应该指出，在上述运算中只能把被乘的行加到另一行上去，却不能把另一行加到被乘的行上来。例如，原四阶行列式的第三行应保持不变，而把第三行乘以 -2 加到第一行上去，

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -46$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 69$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -115$$

从而得

$$x_1 = \frac{-46}{-23} = 2, \quad x_2 = \frac{69}{-23} = -3, \quad x_3 = \frac{-115}{-23} = 5$$

§ 附1-2 矩阵的概念, 矩阵的加减及数乘

所谓一个 $m \times n$ 阶的矩阵, 是由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 构成的一个 m 个横行、 n 个竖列的矩形数表, 记为

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{附1-8})$$

表中的 mn 个数 a_{ij} 称为该矩阵的元素。有时, 为了强调矩阵 $[A]$ 是 $m \times n$ 阶的, 也把它记为 $[A]_{m \times n}$ 。注意: 矩阵 $[A]$ 与行列式 $|A|$, 虽然记法很相近, 但意义却完全不同而且符号毕竟不同——矩阵 $[A]$ 根本不象行列式 $|A|$ 那样代表一个数, 而只是一些数构成的一个表格。

当一个矩阵的行数与列数相等时, 即当 $m = n$ 时, 这个矩阵就称为 n 阶方阵, 记为

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

在上表中, 由 a_{11} 到 a_{nn} 联成的直线, 称为该方程的主对角线。为明确起见, n 阶方阵有时也记为 $[A]_n$ 。一个 1 阶方阵, 定义为它的唯一元素本身, 即

$$[a] = a$$

一个 $1 \times n$ 阶的矩阵, $[a] = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, 也称为行阵或行向量。一个 $n \times 1$ 阶的矩阵

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (\text{附1-9})$$

也称为列阵或列向量，以波纹括号作为它的特别标记。

一个 $m \times n$ 阶矩阵 $[A]$ 的所谓转置矩阵，是把 $[A]$ 的行与列互换位置（保持其行与列的次序不变）而得到的 $n \times m$ 阶矩阵，记为 $[A]^T$ 。设矩阵 $[A]$ 如式（附 1-8）所示，则

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

根据转置矩阵的定义和记号，为了节省篇幅，可以把列阵（附 1-9）改记为

$$\{a\} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$$

一个方阵，如果它的对称于主对角线的元素都两两相等，即 $a_{ij} = a_{ji}$ ，则称为对称方阵。显然，对称方阵具有性质

$$[A] = [A]^T$$

对于对称方阵，可以利用它的对称性来简化运算，最明显的是：如果已知它的主对角线上的元素，以及主对角线“左下”或“右上”三角形中的元素，整个方阵成为已知，就不必再计算其余的元素。

一个方阵，如果它只是在主对角线上有非零元素，而以外的元素都是零，则称为对角线方阵，表示为

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

一个对角线方阵，如果它的主对角线上的元素都是 1，则称为单位阵或么阵，记为 $[I]$ ，或用 $[I]_n$ 标明它是 n 阶的单位阵，即

$$[I] = [I]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

一个 $m \times n$ 阶矩阵，如果它的元素都是零，就称为 $m \times n$ 阶的零矩阵，记为 $[0]$ 或 $[0]_{m \times n}$ ，即

$$[0] = [0]_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

一个方阵，如果它的主对角线以上或以下的所有元素均为零，则分别称为下三角阵或上三角阵，记为 $[L]$ 或 $[U]$ 。

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, [U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

前面已经指出, 矩阵并不代表一个数值, 而只是一些数构成的表格, 因此, 矩阵的运算, 与数的运算不一定相同, 只能在规定的法则之下进行。在下面和以后的几节中, 将简单介绍矩阵运算的一些基本法则, 并着重指出矩阵运算与数值运算相异之处。

要讨论矩阵的运算, 首先要说明什么叫矩阵的相等: 如果两个 $m \times n$ 阶的矩阵 $[A]$ 与 $[B]$ 的元素分别为 a_{ij} 与 b_{ij} , 而

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

则称两个矩阵相等, 记为

$$[A] = [B]$$

不同阶的矩阵是谈不上什么相等的。

如果三个 $m \times n$ 阶的矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[C]$ 的元素分别为 a_{ij} 、 b_{ij} 、 c_{ij} , 而

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}, \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

则矩阵 $[C]$ 称为矩阵 $[A]$ 与矩阵 $[B]$ 的和或差, 记为

$$[A] \pm [B] = [C]$$

这是矩阵加减的法则。不同阶的矩阵是谈不上什么加减的。

所谓矩阵的数乘, 就是用一个数 λ 去乘某矩阵 $[A]$ 的所有各个元素。数 λ 与矩阵 $[A]$ 的乘积记为 $\lambda[A]$ 或 $[A]\lambda$ 。设矩阵 $[A]$ 如 (附 1-8) 所示, 则

$$\lambda[A] = [A]\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{附1-10})$$

根据上面关于矩阵的加减及数乘的法则, 极易导出:

- (1) $[A] + [B] = [B] + [A]$ 。这表示矩阵的加法的交换律。
- (2) $[A] + (-[B]) = [A] - [B]$, $[A] + (-[A]) = [0]$ 。
- (3) $-([A] + [B]) = -[A] - [B]$ 。
- (4) $([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C])$ 。这表示矩阵加法的结合律。
- (5) $[A] \pm [0] = [A]$ 。这说明, 零矩阵在矩阵加减法中与数零在数的加减法中起类似的作用。
- (6) $\lambda(\mu[A]) = \mu(\lambda[A]) = \lambda\mu[A]$ 。这表示矩阵数乘的交换律。
- (7) $(\lambda + \mu)[A] = \lambda[A] + \mu[A]$ 。
- (8) $\lambda([A] + [B]) = \lambda[A] + \lambda[B]$ 。本式及上式表示矩阵数乘的分配律。

§ 附1-3 矩阵的乘法

设有一个 $m \times n$ 阶的矩阵 $[A]$ 和一个 $n \times p$ 阶的矩阵 $[B]$, 其中

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

并且另有一个 $m \times p$ 阶的矩阵

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

而

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}, \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p) \quad (\text{附1-11})$$

即, $[C]$ 中第 i 行第 j 列的元素等于 $[A]$ 中第 i 行与 $[B]$ 中第 j 列的对应元素乘积之和, 则矩阵 $[C]$ 称为矩阵 $[A]$ 与 $[B]$ 的乘积, 按先 $[A]$ 后 $[B]$ 的次序记为

$$[A][B] = [C]$$

或者更明确些记为

$$[A]_{m \times n} [B]_{n \times p} = [C]_{m \times p}$$

例如

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \lambda_1 + \beta_1 \mu_1 & \alpha_1 \lambda_2 + \beta_1 \mu_2 & \alpha_1 \lambda_3 + \beta_1 \mu_3 \\ \alpha_2 \lambda_1 + \beta_2 \mu_1 & \alpha_2 \lambda_2 + \beta_2 \mu_2 & \alpha_2 \lambda_3 + \beta_2 \mu_3 \\ \alpha_3 \lambda_1 + \beta_3 \mu_1 & \alpha_3 \lambda_2 + \beta_3 \mu_2 & \alpha_3 \lambda_3 + \beta_3 \mu_3 \end{bmatrix}$$

关于矩阵的乘法, 不难证明它具有下列性质:

(1) $\lambda([A][B]) = (\lambda[A])[B] = [A](\lambda[B])$ 。

(2) $([A][B])[C] = [A]([B][C])$ 。这表示矩阵乘法的结合律。

(3) $([A] + [B])[C] = [A][C] + [B][C]$, $[C]([A] + [B]) = [C][A] + [C][B]$ 。本式及上式表示矩阵乘法的分配律。

(4) $[A][I] = [A]$, $[I][B] = [B]$ 。这里的 $[I]$ 是单位阵。 $[A]$ 和 $[B]$ 不必一定是方阵, 但 $[A]$ 的列数必须等于 $[I]$ 的阶数, $[B]$ 的行数也必须等于 $[I]$ 的阶数。由上式可见, 单位阵 $[I]$ 在矩阵乘法中所起的作用, 相似于数 “1” 在数的乘法中所起的作用。

(5) $([A][B])^T = [B]^T [A]^T$, 即, 两矩阵的乘积的转置矩阵, 等于两矩阵分别转置以后的乘积, 但须逆其次序。这是矩阵乘积的一个逆序法则。

下列三个性质是矩阵运算与数的运算相异之处, 要注意。

(6) 关于矩阵的乘法, 交换律一般不成立, 也就是, $[A][B]$ 一般并不等于 $[B][A]$ 。

例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

虽然两式的左边是同样的两个矩阵相乘, 但由于相乘的次序不同, 乘积就不相同。

(7) 由等式 $[A][B]=[0]$, 一般不能断言必有 $[A]=[0]$ 或者 $[B]=[0]$ 。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

虽然乘积是零矩阵, 但相乘的两个矩阵都不是零矩阵。

(8) 由等式 $[A][B]=[A][C]$, 一般不能断言 $[B]=[C]$ 。例如

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [A][C] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

虽然 $[A][B]=[A][C]$, 但 $[B] \neq [C]$ 。

(9) 为了便于在有限单元法中导出几个需要用到的公式, 我们提出如下的一个定理, 并给出证明:

设有 $m \times n$ 阶矩阵 $[A]$ 及两个 $n \times p$ 阶的矩阵 $[B]$ 与 $[C]$, 而当 $[A]$ 的元素 a_{ij} 取任意数值时, 等式

$$[A][B]=[A][C] \quad (1)$$

都成立, 则可断定 $[B]=[C]$ 。

证明: 命

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix}$$

根据矩阵 $[A]$ 的任意性, 首先, 在 $[A]$ 中取 $a_{11} = \lambda_1$, 其余的元素为零, 由式 (1) 得

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_1 c_{12} & \cdots & \lambda_1 c_{1p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

从而得

$$\lambda_1 b_{11} = \lambda_1 c_{11}, \lambda_1 b_{12} = \lambda_1 c_{12}, \cdots, \lambda_1 b_{1p} = \lambda_1 c_{1p}$$

即

$$b_{11} = c_{11}, b_{12} = c_{12}, b_{1p} = c_{1p}$$

可见 $[B]$ 中第一行的各元素与 $[C]$ 中第一行的各元素两两相等。其次, 在 $[A]$ 中取 $a_{12} = \lambda_2$, 其余的元素为零, 同样可见 $[B]$ 中第二行的各元素与 $[C]$ 中第二行的各元素也两两相等。依此, 可见 $[B]$ 中任一行的元素与 $[C]$ 中相应行的元素都两两相等。于是可见, $[B]$ 中

所有的元素与〔C〕中所有的相应元素都两两相等，也就是矩阵〔B〕与矩阵〔C〕相等。

注意：在这里，〔B〕与〔C〕的相等，是基于〔A〕的任意性。如果〔A〕并不是任意的（它的元素并不能任意取值），就不能断言〔B〕=〔C〕，如前所述。

§ 附1-4 逆阵的概念

设矩阵〔A〕是一个 n 阶方阵。如果存在另一个 n 阶方阵〔B〕，使得

$$〔A〕〔B〕=〔B〕〔A〕=〔I〕 \quad (\text{附1-12})$$

其中〔I〕=〔I〕，是 n 阶单位阵，则称〔B〕是〔A〕的逆阵，记为

$$〔B〕=〔A〕^{-1} \quad (\text{附1-13})$$

现在来说明，如何求出一个方阵的逆阵。设方阵〔A〕的对应行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} 。我们作出一个同阶的新的方阵〔A〕*，它的第 j 行第 i 列的元素等于 A_{ij} ，即

$$〔A〕^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{附1-14})$$

则方阵〔A〕*称为方阵〔A〕的伴随方阵。由矩阵相乘的法则和行列式的性质（附1-5）与（附1-6），可见

$$\begin{aligned} 〔A〕〔A〕^* &= 〔A〕^*〔A〕 = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} \\ &= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|〔I〕 \end{aligned} \quad (\text{附1-15})$$

如果行列式 $|A| \neq 0$ ，则将上式乘以 $1/|A|$ 后可得

$$〔A〕 \frac{〔A〕^*}{|A|} = \frac{〔A〕^*}{|A|} 〔A〕 = 〔I〕$$

从而由（附1-12）及（附1-13）得出

$$〔A〕^{-1} = 〔A〕^* / |A| \quad (\text{附1-16})$$

如果 $|A| = 0$ ，就不存在 $〔A〕^{-1}$ ，而〔A〕称为奇异方阵。此后我们将限于对非奇异方阵谈逆阵。

关于逆阵，不难证明有如下的性质：

(1) $(〔A〕^{-1})^{-1} = 〔A〕$ 。

(2) $(〔A〕^{-1})^T = (〔A〕^T)^{-1}$ 。

(3) $([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}$, 即, 两个方阵的乘积的逆阵, 等于这两个方阵的逆阵的乘积, 但须逆其次序。这是矩阵乘积的又一个逆序法则。

§ 附1-5 分块矩阵

对于任何一个矩阵 $[A]$, 都可以用一些纵线和横线把它划成小块。这样划为小块的矩阵称为分块矩阵, 而分划出来的那些低阶矩阵称为矩阵 $[A]$ 的子矩阵或子块。由于纵横线划得不同, 同一个矩阵可以划成不同的分块矩阵, 例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \dots$$

矩阵 $[A]$ 的分块一般可以表示为

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & \dots & [A_{1n}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] & \dots & [A_{2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [A_{m1}] & [A_{m2}] & \dots & [A_{mn}] \end{bmatrix} \quad (\text{附1-17})$$

显然, 同一行的子矩阵, 例如 $[A_{11}]$, $[A_{12}]$, \dots , $[A_{1n}]$, 将具有相同的行数; 同一列的子矩阵, 例如 $[A_{11}]$, $[A_{21}]$, \dots , $[A_{m1}]$, 将具有相同的列数。

关于分块矩阵的运算, 不难证明有下列性质:

(1) 用数 λ 乘一个分块矩阵, 等于用 λ 乘其每个子矩阵而得的矩阵, 即

$$\lambda \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & \dots & [A_{1n}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] & \dots & [A_{2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [A_{m1}] & [A_{m2}] & \dots & [A_{mn}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda [A_{11}] & \lambda [A_{12}] & \dots & \lambda [A_{1n}] \\ \lambda [A_{21}] & \lambda [A_{22}] & \dots & \lambda [A_{2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda [A_{m1}] & \lambda [A_{m2}] & \dots & \lambda [A_{mn}] \end{bmatrix} \quad (\text{附1-18})$$

(2) 设矩阵 $[A]$ 如式(附1-17)所示, 并有分块矩阵

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] & \dots & [B_{1n}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] & \dots & [B_{2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [B_{m1}] & [B_{m2}] & \dots & [B_{mn}] \end{bmatrix} \quad (\text{附1-19})$$

而且对应的子矩阵 $[A_{ij}]$ 与 $[B_{ij}]$ 都具有相同的行数与列数, 则 $[A] \pm [B]$ 等于把各个对应的子矩阵相加、减而得的矩阵, 即

$$[A] \pm [B] = \begin{bmatrix} [A_{11}] \pm [B_{11}] & [A_{12}] \pm [B_{12}] & \cdots & [A_{1n}] \pm [B_{1n}] \\ [A_{21}] \pm [B_{21}] & [A_{22}] \pm [B_{22}] & \cdots & [A_{2n}] \pm [B_{2n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [A_{m1}] \pm [B_{m1}] & [A_{m2}] \pm [B_{m2}] & \cdots & [A_{mn}] \pm [B_{mn}] \end{bmatrix} \quad (\text{附1-20})$$

(3) 设矩阵[A]如式(附1-17)所示, 并另有分块矩阵

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] & \cdots & [B_{1p}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] & \cdots & [B_{2p}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [B_{n1}] & [B_{n2}] & \cdots & [B_{np}] \end{bmatrix} \quad (\text{附1-21})$$

其中子矩阵[A_{ij}]的列数等于子矩阵[B_{ji}]的行数, 则

$$[A][B] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] & \cdots & [C_{1p}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] & \cdots & [C_{2p}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [C_{m1}] & [C_{m2}] & \cdots & [C_{mp}] \end{bmatrix} \quad (\text{附1-22})$$

其中 $[C_{ik}] = \sum_{j=1}^n [A_{ij}][B_{jk}]$

例如, 设有两个分块矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{31} & b_{32} & \vdots & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix}$$

则

$$[A][B] = \begin{bmatrix} [A_{11}][B_{11}] + [A_{12}][B_{21}] & [A_{11}][B_{12}] + [A_{12}][B_{22}] \\ [A_{21}][B_{11}] + [A_{22}][B_{21}] & [A_{21}][B_{12}] + [A_{22}][B_{22}] \end{bmatrix}$$

又例如, 设有两个分块矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ \dots\dots\dots \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{11}] \\ [B_{21}] \end{bmatrix}$$

则

$$[A][B] = \begin{bmatrix} [A_{11}][B_{11}] + [A_{12}][B_{21}] \\ [A_{21}][B_{11}] + [A_{22}][B_{21}] \end{bmatrix}$$

§ 附1-6 矩阵的导数与积分

设矩阵 $[A]$ 的元素为某一自变量 t 的函数, 即

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots\dots\dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots\dots\dots a_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots\dots\dots a_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{附1-23})$$

则矩阵 $[A]$ 对于自变量 t 的导数定义为

$$\frac{d}{dt}[A] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) & \dots\dots\dots \frac{d}{dt}a_{1n}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & \dots\dots\dots \frac{d}{dt}a_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}a_{m1}(t) & \frac{d}{dt}a_{m2}(t) & \dots\dots\dots \frac{d}{dt}a_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{附1-24})$$

简单地说, 求矩阵的导数, 就是求该矩阵的所有各个元素的导数。

设矩阵 $[A]$ 如式(附1-23)式所示, 则矩阵 $[A]$ 对于自变量 t 的积分定义为

$$\int [A] dt = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t) dt & \int a_{12}(t) dt & \dots\dots\dots \int a_{1n}(t) dt \\ \int a_{21}(t) dt & \int a_{22}(t) dt & \dots\dots\dots \int a_{2n}(t) dt \\ \dots\dots\dots \\ \int a_{m1}(t) dt & \int a_{m2}(t) dt & \dots\dots\dots \int a_{mn}(t) dt \end{bmatrix} \quad (\text{附1-25})$$

简单地说, 求矩阵的积分, 就是求该矩阵的所有各个元素的积分。

上述定义可以推广到通常遇到的各种积分, 包括多重积分, 线积分, 面积分, 体积分等等。例如, 设

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{bmatrix}$$

则

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b [A] dx dy = \begin{bmatrix} \int_{-a}^a \int_{-b}^b a_{11}(x, y) dx dy & \int_{-a}^a \int_{-b}^b a_{12}(x, y) dx dy \\ \int_{-a}^a \int_{-b}^b a_{21}(x, y) dx dy & \int_{-a}^a \int_{-b}^b a_{22}(x, y) dx dy \end{bmatrix} \quad (\text{附1-26})$$

如果矩阵[A]是表示成为n个矩阵的乘积，而这n个矩阵的元素都是某一自变量的函数，则须先将乘积求出，然后再求这个乘积的各个元素的导数或积分，不可先进行求导或积分，然后再求乘积。例如，设[A]=[B][C]，则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[A] &= \frac{d}{dt}([B][C]) \neq \left(\frac{d}{dt}[B]\right)\left(\frac{d}{dt}[C]\right) \\ \int [A] dt &= \int ([B][C]) dt \neq \left(\int [B] dt\right)\left(\int [C] dt\right) \end{aligned}$$

如果矩阵[A]是表示成为n个矩阵的乘积，而这n个矩阵中间有的与自变量无关，则可将那些与自变量无关的矩阵提到求导号或积分号之外，但须注意次序不可颠倒。例如，设[A]=[B][C]，其中[B]的元素是自变量t的函数，而[C]与t无关，则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[A] &= \frac{d}{dt}([B][C]) = \left(\frac{d}{dt}[B]\right)[C] \neq [C]\left(\frac{d}{dt}[B]\right) \\ \int [A] dt &= \int ([B][C]) dt = \left(\int [B] dt\right)[C] \neq [C]\left(\int [B] dt\right) \end{aligned}$$

§ 附1-7 线性方程组的乔列斯基解法

在弹性力学问题的有限单元法中，求解线性方程组最方便、最常用的方法，是乔列斯基解法。现将该解法简单介绍如下。

线性方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

可以简写为矩阵形式如

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2)$$

其中

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

有在去 17

$$\begin{aligned}\{x\} &= [x_1 \quad x_2 \cdots x_n]^T \\ \{b\} &= [b_1 \quad b_2 \cdots b_n]^T\end{aligned}$$

为了求解 $\{x\}$ ，先将系数非奇异方阵 $[A]$ 三角化——将该方阵表示成为一个下三角阵和一个上三角阵的乘积，用公式表示，就是

$$[A] = [L][U] \quad (3)$$

而求出 $[L]$ 及 $[U]$ 。为此，试写出式(3)的全部，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

由矩阵的乘法可见，为了满足上式，可以取如下的 l_{ij} 及 u_{ij} ：

$$u_{jj} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad (j \leq i) \quad (4)$$

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) / l_{ii} \quad (j > i)$$

现在，将式(3)代入式(2)，得到

$$[L][U]\{x\} = \{b\}$$

再令

$$[U]\{x\} = \{y\} \quad (5)$$

其中

$$\{y\} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$$

则有

$$[L]\{y\} = \{b\} \quad (6)$$

因为式(6)中的 $[L]$ 是下三角阵，式(6)是一个下三角方程组，所以只须由上而下地逐步代入，即可依次求得 y_1, y_2, \cdots, y_n ，也就是求得了 $\{y\}$ 。将 $\{y\}$ 代入式(5)后，又因为式(5)中的 $[U]$ 是上三角阵，式(5)是一个上三角方程组，所以只须由下而上地逐步代入，即可依次求得 x_1, x_2, \cdots, x_n ，也就是求得了 $\{x\}$ 。

在弹性力学问题的有限单元法中，线性方程组的系数方阵 $[A]$ 大都是对称的，这时，可将它进一步分解为

$$[A] = [L][L_0][L]^T \quad (7)$$

其中 $[L]$ 为下三角阵， $[L_0]$ 为与 $[L]$ 有关的对角线方阵：

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad [L_0] = \begin{bmatrix} 1/l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/l_{nn} \end{bmatrix}$$

由式(7)可得计算 $[L]$ 中各元素的公式

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}/l_{kk} \quad (j \leq i) \quad (8)$$

于是, 只须由上而下、由左至右, 先逐行、再逐个地进行计算, 即可由式(8)算出全部的 l_{ij} , 亦即求得了 $[L]$, 从而求得 $[L_0]$ 及 $[L]^T$ 。

现在, 将式(7)代入式(2), 得

$$[L][L_0][L]^T\{x\} = \{b\}$$

再令

$$[L_0][L]^T\{x\} = \{y\} \quad (9)$$

则有

$$[L]\{y\} = \{b\} \quad (10)$$

由于方程(10)是下三角方程组, 因而可以通过由下而上的逐步代入, 依次求得 y_i :

$$y_i = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k \right) / l_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

由于方程(9)是上三角方程组, 因而可以通过由下而上的逐步代入, 依次求得 x_i :

$$x_i = y_i - \left(\sum_{k=i+1}^n l_{ki}x_k \right) / l_{ii} \quad (i = n, n-1, \dots, 2, 1)$$

附录二 贝塞尔函数

§ 附2-1 贝塞尔微分方程

微分方程

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (n \geq 0) \quad (\text{附2-1})$$

称为 n 阶贝塞尔微分方程。它的特解称为贝塞尔函数。式 (附2-1) 的通解为

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (\text{附2-2})$$

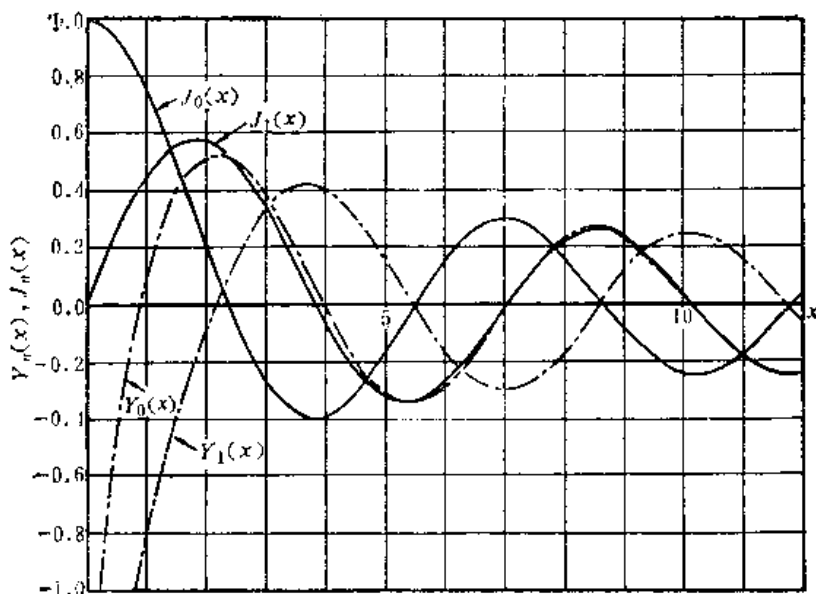
解 $J_n(x)$ 称为 n 阶第一类贝塞尔函数, 它在 $x \rightarrow 0$ 时具有有限的极限, 如图附2-1所示; 解 $Y_n(x)$ 称为 n 阶第二类贝塞尔函数或称牛曼函数, 它在 $x \rightarrow 0$ 时没有有限的极限 (即无界), 如图附2-1所示。

若把式 (附2-1) 中独立变数 x 换成 λx (λ 是一常数), 就导出方程

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{附2-3})$$

此方程的通解为

$$y = C_1 J_n(\lambda x) + C_2 Y_n(\lambda x) \quad (\text{附2-4})$$



附图2-1 零阶和一阶第一类和第二类贝塞尔函数

§ 附2-2 第一类贝塞尔函数

用广义幂级数方法解贝塞尔方程

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

假定解的形式为

$$y = \sum_{c=0}^{\infty} a_c x^{k+c} \quad (a_0 \neq 0) \quad (\text{附2-5})$$

由于 x^k 的指数 k 没有定, 我们自然可以假定第一项的系数 a_0 不等于零。

因此, 从式 (附 2-5) 对 x 求导, 得出

$$y' = \sum_{c=0}^{\infty} (k+c) a_c x^{k+c-1} \quad (1)$$

$$y'' = \sum_{c=0}^{\infty} (k+c)(k+c-1) a_c x^{k+c-2} \quad (2)$$

把式 (1) 及 (2) 代入式 (附 2-1), 化简后可得

$$\begin{aligned} & (k^2 - n^2) a_0 x^k + [(k+1)^2 - n^2] a_1 x^{k+1} \\ & + \sum_{c=2}^{\infty} \{[(k+c)^2 - n^2] a_c + a_{c-2}\} x^{k+c} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

上式 (3) 对所有的 x 均是正确的, 故必须有

$$(k^2 - n^2) a_0 = 0 \quad (4)$$

由于

$$a_0 \neq 0$$

故得

$$k = \pm n \quad (5)$$

又

$$[(k+1)^2 - n^2] a_1 = 0 \quad (6)$$

及

$$[(k+c)^2 - n^2] a_c + a_{c-2} = 0 \quad (c = 2, 3, 4, \dots) \quad (7)$$

或

$$a_c = -\frac{a_{c-2}}{(k+c)^2 - n^2} \quad (c \geq 2) \quad (8)$$

因为 $k^2 = n^2$, a_1 必须为零才能满足式 (6), 下面让我们分两种情况来讨论。

情况 1

$$k = n; \quad a_0 \neq 0; \quad a_1 = 0$$

这里从递推公式, 得

$$a_c = -\frac{a_{c-2}}{(n+c)^2 - n^2} = -\frac{a_{c-2}}{c(2n+c)} \quad (c \geq 2) \quad (9)$$

当 $c = 2$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)} = -\frac{a_0}{2^2 \times 1(n+1)} \quad (10)$$

当 $c = 4$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2n+4)} = -\frac{a_0}{2^4 \times 2!(n+1)(n+2)} \quad (11)$$

当 $c = 6$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2n+6)} = -\frac{a_0}{2^6 \times 3!(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (12)$$

因此, 令 $c = 2j$ 时, 系数的通式为

$$a_{2j} = (-1)^j \frac{a_0}{2^{2j} j! (n+1)(n+2)\dots(n+j)} \quad (13)$$

式中 $j = 0, 1, 2, \dots$

如果采用 Γ 函数, 则系数的通式可简写成

$$a_{2j} = (-1)^j \frac{\Gamma(n+1)a_0}{2^{2j} j! \Gamma(n+j+1)} \quad (\text{附2-6})$$

这里因为

$$\begin{aligned} & (n+1)(n+2)\dots(n+j) \\ &= (n+j)(n+j-1)\dots(n+2)(n+1) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(n+1)} \end{aligned}$$

如果我们取 a_0 为

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \quad (14)$$

则将式 (14)、(附 2-6) 代入式 (附 2-5) 后, 便得 $k = n$ 时的一个特解

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j}}{j! \Gamma(n+j+1)} \quad (n \geq 0) \quad (\text{附2-7})$$

称之为 n 阶第一类贝塞尔函数。

情况 2

$$k = -n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_1 = 0$$

在这种情况下, 可把情况 1 中的 n 用 $-n$ 代替, 即得情况 2 下的另一特解为

$$J_{-n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n}}{j! \Gamma(-n+j+1)} \quad (n \geq 0) \quad (\text{附2-8})$$

因为 Γ 函数是从阶乘推广后得到的函数 (即推广到非正整数的情况)。我们知道阶乘是

$$n! = n(n-1)\dots 2 \times 1 = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt \quad (n \text{ 为整数}) \quad (15)$$

注意到, $0! = 1$ 及如果 n 为负整数, $n! = \pm\infty$ 。 Γ 函数的一般定义为

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \quad (\text{对于任何 } p > 0) \quad (16)$$

令 $p = n+1$ 则得到

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt \quad (17)$$

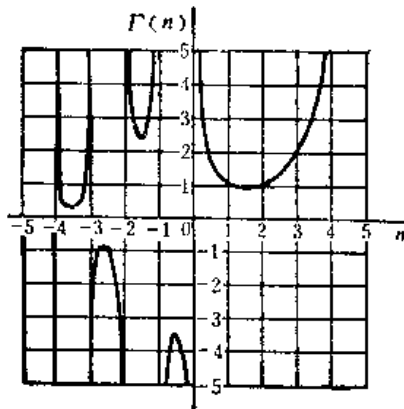
对于式 (17) 进行分部积分, 可得

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n \Gamma(n) \quad (18)$$

这就是 Γ 函数的递推公式^[21]。

若 n 是正整数, 则 $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1) = 1$ 。特别有当 $n = 0$ 时, 贝塞尔 0 阶函数为

$$J_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \quad (\text{附2-9})$$



n	Γ(n)	n	Γ(n)
1.00	1.0000	1.60	0.8935
1.10	0.9514	1.70	0.9086
1.20	0.9182	1.80	0.9314
1.30	0.8975	1.90	0.9618
1.40	0.8873	2.00	1.0000
1.50	0.8862		

图附2-2 Γ函数

故 n 为正整数时, 由式 (附 2-7) 及式 (附 2-8) 可得

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}}{j!(n+j)!} \quad (\text{附2-10})$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n}}{j!(j-n)!} \quad (\text{附2-11})$$

由于对于 p 为负值时, $p! = \pm \infty$, 故 $J_{-n}(x)$ 中 $j < n$ 各项均为零。因此 $J_{-n}(x)$ 可以从 $j = n$ 的一项写起, 故得

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n}}{j!(j-n)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{(m+n)! m!} \\ &= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!} = (-1)^n J_n(x) \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $m = j - n$, 故当 n 为整数时, $J_n(x)$ 及 $J_{-n}(x)$ 是线性相关的, 因而 $J_{-n}(x)$ 在 n 为整数时不是另一个特解。

而若 n 不是整数, $J_n(x)$ 和 $J_{-n}(x)$ 是线性无关的, 这时 $J_{-n}(x)$ 才是另一个特解, 因而式 (附 2-1) 的通解为

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \quad n \neq 0, 1, 2, \dots \quad (\text{附2-12})$$

§ 附2-3 第二类贝塞尔函数

前面已经证明: 若 $n \neq 0, 1, 2, \dots$, 则贝塞尔方程的通解可写成式 (附 2-12)

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

用 E, F 来代表常数 A, B , 令

$$\left. \begin{aligned} A &= E + \frac{F \cos n\pi}{\sin n\pi} \\ B &= -\frac{F}{\sin n\pi} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

则式 (附 2-12) 就可改写成

$$y = EJ_n(x) + F \left[\frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \right] \quad (2)$$

注意, 若 n 不是整数, 我们定义第二类贝塞尔函数为

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \quad (n \neq 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{附2-13})$$

当 n 是整数时, 表达式

$$\frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

变成 $\frac{0}{0}$ 型的不定式。这是因为当 n 是整数时, 我们有

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

这个不定式可用洛比达法则计算, 即

$$\lim_{p \rightarrow n} \left[\frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \right] \quad (\text{附2-14})$$

概括起来, 第二类贝塞尔函数为

$$Y_n(x) = \begin{cases} \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n \neq 0, 1, 2, 3 \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} & n = 0, 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

对 $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ 时, 上式通过计算, 可得 $Y_n(x)$ 的下列级数展开式:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{x}{2} + r \right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\Phi(k) + \Phi(n+k)] \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \end{aligned} \quad (\text{附2-15})$$

其中 $r = 0.5772156 \dots$ 是欧拉常数, 而

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$$

$$\Phi(0) = 0$$

§ 附2-4 变型 (或虚宗量) 贝塞尔函数

往往在一些边值问题中出现下列微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (\text{附2-16})$$

或写成

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2) y = 0 \quad (\text{附2-17})$$

其中 x 是实数, 很容易看出, 如果令 $z = ix$, 则方程 (附2-17) 化为自变数 z 的贝塞尔方程, 即

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{附2-18})$$

因此, 当 n 不是整数时, 方程 (附2-18) 的两个线性无关的特解为 $J_{\pm n}(ix)$ 。由于这个缘故, 方程 (附2-17) 常称为变型 (或虚宗量) 贝塞尔方程

为了使变型贝塞尔方程的解是实数 (设 x 为实数), 定义一个新的函数 $I_n(x)$, 它为

$$I_n(x) = (i)^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i/2} J_n(ix) \quad (\text{附2-19})$$

其级数表达式为

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{\Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (\text{附2-20})$$

通常称 $I_n(x)$ 为 n 阶第一类变型 (虚宗量) 贝塞尔函数。

若 n 是整数时, 则

$$I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = i^n [(-1)^n J_n(ix)] = i^{-n} J_n(ix)$$

故

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

若 n 不是整数时, $I_n(x)$ 和 $I_{-n}(x)$ 是线性无关的。 n 阶第二类变型 (虚宗量) 贝塞尔函数的定义为

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} \right] & n \neq 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi} \right] & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{附2-21})$$

故变型贝塞尔微分方程 (附2-17)

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2) y = 0$$

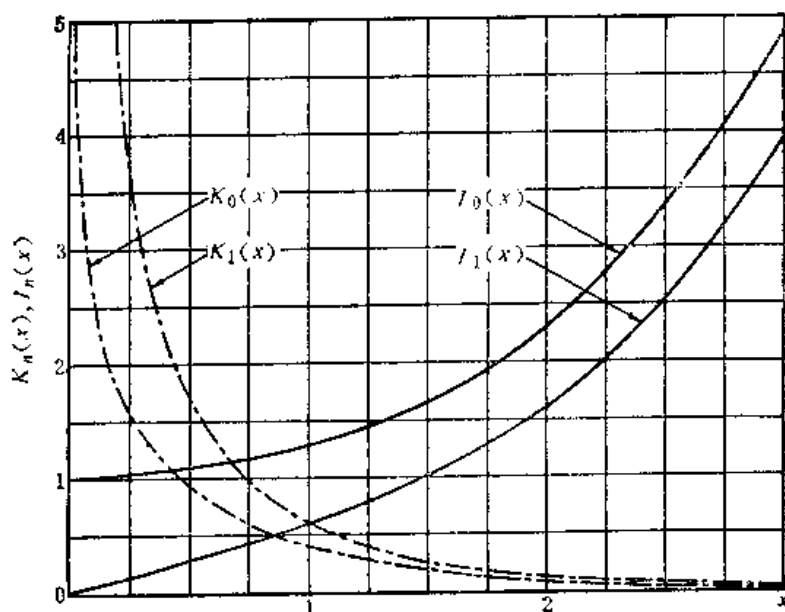
的通解为

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) \quad (\text{附2-22})$$

或若 $n \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ 则

$$y = AI_n(x) + BI_{-n}(x) \quad (\text{附2-23})$$

$I_n(x)$ 与 $K_n(x)$ 不存在实的零点, 所以它们的图形不是振荡型曲线, 这一点与 $J_n(x)$ 及 $Y_n(x)$ 不同。参看图附2-1及附2-3。



图附2-3 零阶与一阶变型(虚宗量)第一类与第二类贝塞尔函数

§ 附2-5 递推公式

下列递推公式对所有的 n 都是适用的:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \\
 (2) \quad & J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \\
 (3) \quad & xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \\
 (4) \quad & xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \\
 (5) \quad & \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \\
 (6) \quad & \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{aligned}} \right\} \text{(附2-24)}$$

更一般地, 对于任意正整数 p 成立

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \frac{d^p}{(x dx)^p} \left[\frac{J_n(x)}{x^n} \right] = (-1)^p \frac{J_{p+n}(x)}{x^{p+n}} \\
 (8) \quad & \frac{d^p}{(x dx)^p} [x^n J_n(x)] = x^{n-p} J_{n-p}(x)
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (7) \\ (8) \end{aligned}} \right\} \text{(附2-25)}$$

注意: 上面的 (3) 和 (4) 分别等价于 (5) 和 (6); (3) 和 (4) 相减及相加即能导出 (1) 和 (2); (7) 和 (8) 分别与 (5) 和 (6) 相对应。

此外, 特别地有

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad \text{(附2-26)}$$

$$\frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = xJ_0(x) \quad \text{(附2-27)}$$

因为

$$J_0(0) = 1, \quad J_1(0) = 0$$

故由上面二式推出:

$$\int_0^x J_1(x) dx = 1 - J_0(x) \quad (\text{附2-28})$$

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x) \quad (\text{附2-29})$$

函数 $Y_n(x)$ 满足完全同样的结果, 只要在上述递推公式中用 $Y_n(x)$ 去代替 $J_n(x)$ 就可以了。

变型 (或虚宗量) 贝塞尔函数, 也有一系列的递推公式, 对于所有 n 均适用, 它们是:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & I_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x) \\ (2) \quad & I'_n(x) = \frac{1}{2} [I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)] \\ (3) \quad & x I'_n(x) = n I_n(x) + x I_{n+1}(x) \\ (4) \quad & x I'_n(x) = x I_{n-1}(x) - n I_n(x) \\ (5) \quad & \frac{d}{dx} [x^{-n} I_n(x)] = x^{-n} I_{n+1}(x) \\ (6) \quad & -\frac{d}{dx} [x^n I_n(x)] = x^n I_{n-1}(x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附2-30})$$

更一般地, 对于任意正整数 p 成立着

$$\left. \begin{aligned} (7) \quad & \frac{d^p}{(x dx)^p} \left[\frac{I_n(x)}{x^n} \right] = \frac{I_{n+p}(x)}{x^{n+p}} \\ (8) \quad & \frac{d^p}{(x dx)^p} [x^n I_n(x)] = x^{n-p} I_{n-p}(x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附2-31})$$

特别地, 当 n 为整数时,

$$I'_0(x) = I_1(x) \quad (\text{附2-32})$$

函数 $K_n(x)$ 满足完全同样的结果, 只要在上述公式中用 $K_n(x)$ 去代替 $I_n(x)$ 就可以了。

§ 附2-6 贝塞尔函数的渐近公式

当 x 很小及很大时, 用级数求贝塞尔函数比较麻烦, 因而有采用渐近公式之必要。兹分述之。

一、当 n 为整数, $x \rightarrow 0$ 时

$$\left. \begin{aligned} J_n(0) &= 1 \\ J_n(0) &= 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附2-33})$$

$$\left. \begin{aligned} Y_0(x) &\approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} \\ Y_n(x) &\approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附2-34})$$

$$\left. \begin{aligned} I_0(0) &= 1 \\ I_n(0) &= 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附2-35})$$

$$\left. \begin{aligned} K_0(x) &\approx -1 \ln \frac{x}{2} \\ K_n(x) &\approx \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附2-36})$$

二、对于任何 n 阶贝塞尔函数或变型贝塞尔函数，当 $x \rightarrow \infty$ 时

$$\left. \begin{aligned} J_n(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_n(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附2-37})$$

由式 (附2-37) 可以看到，当 x 为实数时， $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 具有振荡特性，其振幅与 \sqrt{x} 成反比。

$$\left. \begin{aligned} I_n(x) &\approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \\ K_n(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{附2-38})$$

从式 (附2-38)， $I_n(x)$ 和 $K_n(x)$ 无振荡特性。

§ 附2-7 贝塞尔函数的零点

可以证明，若 n 是任一实数， $J_n(x) = 0$ 有无数个实根。当根的数值增大时，每相邻两根之差趋向 π ，即 $J_n(x)$ 几乎是以 2π 为周期的周期函数。这可以从渐近公式 (附2-37) 可以看出。还可以证明 $J_n(0) = 0$ 的根位于 $J_{n-1}(x) = 0$ 和 $J_{n+1}(x) = 0$ 的根之间。对 $Y_n(x)$ 也有类似的结论。

§ 附2-8 贝塞尔函数的正交性

若 λ 和 μ 是两个不同的常数，我们可以证明：

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = \frac{\mu J_n(\lambda) J_n'(\mu) - \lambda J_n(\mu) J_n'(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} \quad (1)$$

而

$$\int_0^1 x J_n^2(\lambda x) dx = \frac{1}{2} \left[J_n'^2(\lambda) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right) J_n^2(\lambda) \right] \quad (2)$$

由 (1) 我们看到，若 λ 和 μ 是方程

$$R J_n(x) + S x J_n'(x) = 0 \quad (\text{附2-39})$$

的任何两个不同的根 (这里 R, S 是常数)，则

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = 0 \quad (\text{附2-40})$$

它表明函数 $\sqrt{x} J_n(\lambda x)$ 和 $\sqrt{x} J_n(\mu x)$ 在 $(0, 1)$ 是正交的。注意作为式 (附2-39) 的特殊情形，我们看到， λ 和 μ 可以是 $J_n(x) = 0$ 或 $J_n'(x) = 0$ 的任何两个不同的根。我们也可以说， $J_n(\lambda x)$ 和 $J_n(\mu x)$ 是关于权函数 x 正交的。

§ 附2-9 贝塞尔函数的级数

正如傅里叶级数的情形那样, 我们可以证明, 若 $f(x)$ 满足狄克雷条件*, 则 $f(x)$ 在区间 $0 < x < 1$ 的每一个连续点存在一个如下的贝塞尔函数级数展开式:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + \cdots \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x) \end{aligned} \quad (\text{附2-41})$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ 是式 (附2-39) 在 $\frac{R}{S} \geq 0$ 和 $S \neq 0$ 时的正根, 而系数为

$$A_p = \frac{2 \lambda_p^2}{\left(\lambda_p^2 - n^2 + \frac{R^2}{S^2} \right) J_n^2(\lambda_p)} \int_0^1 x J_n(\lambda_p x) f(x) dx \quad (\text{附2-42})$$

在任一间断点, 式 (附2-41) 右边的级数收敛于

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \quad (\text{附2-43})$$

它可用来代替式 (附2-41) 的左边。

在 $S = 0$ 时, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ 是 $J_n(x) = 0$ 的正根, 则

$$A_p = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_p)} \int_0^1 x J_n(\lambda_p x) f(x) dx \quad (\text{附2-44})^{**}$$

若 $R = 0$ 和 $n = 0$, 级数 (附2-41) 从常数项

$$A_1 = 2 \int_0^1 x f(x) dx \quad (\text{附2-45})$$

开始。

§ 附2-10 可化为贝塞尔方程的微分方程

在数学物理中, 有许多微分方程可以化为贝塞尔方程, 例如锥形轴的一维导热方程 (3-77) 等。我们也可以反过来从贝塞尔方程出发, 通过自变数和因变数的变换, 得到各种可化为贝塞尔的微分方程。例如从 n 阶贝塞尔方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

作自变数的变换, 令

$$x = Dz^c \quad (\text{附2-46})$$

得

* 狄克雷条件 (1) $g(\xi)$ 在 $(-L, L)$ 内除了有限个点外有定义而且是单值; (2) $g(\xi)$ 在 $(-L, L)$ 外是周期函数具有周期 $2L$; (3) $g(\xi)$ 在 $(-L, L)$ 内分段连续。

通过自变量变换, 令 $x = \frac{\xi}{L}$ 则 $f(x) = g(Lx)$ 在 $(-1, 1)$ 区间内符合狄克雷条件。

** 式 (附2-44) 的推导参看高等数学的理论与习题 P 265。

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (D^2 C^2 z^{2c} - n^2 C^2) y = 0 \quad (\text{附2-47})$$

此方程式的通解当然为

$$y = C_1 J_n(Dz^c) + C_2 Y_n(Dz^c) \quad (\text{附2-48})$$

式中 C_1 及 C_2 为积分常数。式 (附2-3) 及 (附2-4) 就是这种形式的变换。再作因变数的变换, 令

$$y(z) = z^{-A} u(z) \quad (\text{附2-49})$$

得

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (1 - 2A) z \frac{du}{dz} + [D^2 C^2 z^{2c} + (A^2 - n^2 C^2)] u = 0 \quad (\text{附2-50})$$

它的通解为

$$u(z) = C_1 z^A J_n(Dz^c) + C_2 z^A Y_n(Dz^c) \quad (\text{附2-51})$$

C_1 及 C_2 是积分常数。

如果对方程 (附2-50) 再作一次因变数的变换, 令

$$u(z) = e^{-Bz} v(z) \quad (\text{附2-52})$$

则可得微分方程

$$z^2 \frac{d^2 v}{dz^2} + [(1 - 2A)z - 2Bz^2] \frac{dv}{dz} + [z^2 B^2 - (1 - 2A)Bz + D^2 C^2 z^{2c} + A^2 - n^2 C^2] v = 0 \quad (\text{附2-53})$$

此方程即为 (3-78), 此式的通解应为

$$v = z^A e^{Bz} [C_1 J_n(Dz^c) + C_2 Y_n(Dz^c)] \quad (\text{附2-54})$$

此即式 (3-79)。

有关数据见附表 7-10。

附录三 变分原理简介

有限单元法需用到变分法及力学方面的能量原理，下面简单介绍一下这些基础知识。

为了便于理解，我们把后面最小位能原理中的一些问题先在这里提一提。

小位移弹性原理中介绍，外力对处于平衡状态下的弹性体所做的功，储存在弹性体中而形成内力位能（应变能）。

由于体力和面力所做的外力功为

$$W = \int_V (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dV + \int_{S_0} (\bar{X}_f u + \bar{Y}_f v + \bar{Z}_f w) dS$$

式中 \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} 表示体力分量；

\bar{X}_f , \bar{Y}_f , \bar{Z}_f 表示面力分量；

u , v , w 表示 x , y , z 三个方向的位移；

S_0 表示在非约束边界上由面力所给定的表面部分，因为约束力在其所约束的方向是没有位移的，所以约束边界上的约束力是不做功的。

若外力功转化为储存于弹性体内的应变能为 $A(u, v, w)$ ，则弹性体变形时系统包含的总位能为

$$U = A - W = \int_V [A(u, v, w) - (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w)] dV - \int_{S_0} (\bar{X}_f u + \bar{Y}_f v + \bar{Z}_f w) dS$$

可见，总的位能 U 是位移 u , v , w 的函数，而位移又是 x , y , z 的函数，所以 U 是一个函数的函数，叫做泛函。

从能量原理考虑，弹性体受外力后，在可能的位移函数中使总位能最小的那组变形函数是正确的变形函数。也就是说，总位能 U 取极值的条件， $\delta U = 0$ ，给出真实位移，这就是最小位能原理。从变分原理来考虑，弹性体受外力后，可以具有多组不同的 u , v , w 值，以使泛函 U 得出多种的值，但其中总会有一组 u , v , w 使泛函 U 取最小值。因此，就变分原理讲，使泛函取极值的这一组 u , v , w ，即是满足边界条件的正确解。

§ 附5-1 变分法简介

一、变分法问题

设有函数族 $y(x)$ ，它的每一个函数值都有一个因变量 J 与之对应，则因变量 J 叫做依赖于函数 $y(x)$ 的泛函，记为 $J = J[y(x)]$ 。由于 $y(x)$ 是 x 的函数而 $J[y(x)]$ 又是 $y(x)$ 的函数。所谓泛函，是指函数的函数，因此 $J[y(x)]$ 是 $y(x)$ 的泛函。

变分问题是研究泛函的极值问题，它的解法类似于函数求极大极小值的方法，即变分在泛函研究中所起的作用和微分在函数研究中所起的作用相似。

变分的最简单例子之一，是求两点间曲线族的最短曲线问题，现说明如下：

我们可考察在连接一平面上两定点的所有曲线中求最短曲线的问题。在图附 3-1 中，给定 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 两点，设连接这两点的任意曲线族为

$$y = y(x) \quad (\text{附 3-1})$$

于是，这一曲线的长度

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (\text{附 3-2})$$

式中 $y' = \frac{dy}{dx}$ 。

连接 P_1 、 P_2 两点的曲线有无数条，并有与它一一对应的 L 值。问题是要在这样无数条的曲线中求出使 L 是最小的一条。这可用变分法求解。

在变分问题中，对于函数 $y(x)$ 的连续性有一定的要求，例如，在本例中求两点间曲线的最小长度时，要求 $y(x)$ 有连续二阶导数（这样的函数称为 C_2 类函数）。若把满足给定的连续性与边界条件的函数称为容许函数，则变分问题就是在容许函数中求出使给定的泛函最小值时的特定函数。

上述问题可进一步概括为：求使泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (\text{附 3-3})$$

在边界条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (\text{附 3-4})$$

下为最小值时的函数。设正确的解为 $y(x)$ ， $\tilde{y}(x)$ 为 $y(x)$ 邻近的任意容许函数，而有

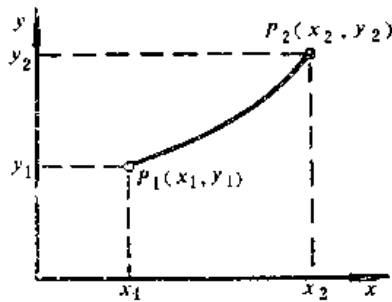
$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \ominus \quad (\text{附 3-5})$$

式中 ε 是一个微小参数； $\eta(x)$ 是满足

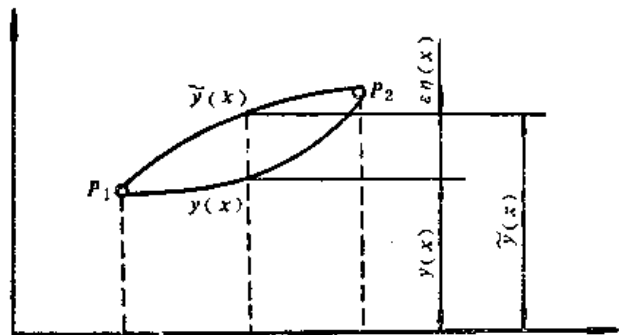
$$\eta(x_1) = 0, \quad \eta(x_2) = 0 \quad (\text{附 3-6})$$

的任意函数，如图附 3-2 所示。兹令

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (\text{附 3-7})$$



图附 3-1



图附 3-2

⊖ $\varepsilon \eta(x)$ 是指函数 $y(x)$ 的自变量 x 在一个固定值时的一个微小变化。这里 $\eta(x)$ ， $\eta'(x)$ 以后简称为 η ， η' ， $y(x)$ 、 $y'(x)$ 以后简称为 y 、 y' 。

根据泰勒级数展开, 有

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx &= \int_{x_1}^{x_2} F[x, y + \varepsilon\eta(x), y' + \varepsilon\eta'(x)] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon\eta' \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2!} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\varepsilon\eta)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \varepsilon^2 \eta \eta' \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\varepsilon\eta')^2 \right] dx + \dots \end{aligned}$$

于是可得

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2!} \delta^2 J + \frac{1}{3!} \delta^3 J + \dots \quad (\text{附 3-8})$$

$$\text{式中 } \delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon\eta' \right) dx, \quad (\text{附 3-9})$$

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\varepsilon\eta)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \varepsilon^2 \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\varepsilon\eta')^2 \right] dx, \quad (\text{附 3-10})$$

.....

即 δJ 、 $\delta^2 J$ 、 $\delta^3 J$ …… \ominus 是关于 ε 的一次、二次、三次、……齐次式。 δJ 、 $\delta^2 J$ 、 $\delta^3 J$ ……称为一阶变分、二阶变分、三阶变分……。根据前面分析, J 的极值的必要条件为

$$\delta J = 0$$

亦即式 (附 3-9) 等于零。

对式 (附 3-9) 的右部进行分部积分 (即对 $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon\eta' dx$ 进行分部积分), 得

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \varepsilon\eta dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon\eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon\eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon\eta \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \varepsilon\eta dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{附 3-11})$$

$$\text{由于 } \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon\eta \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{\partial F}{\partial y'} \left[\varepsilon\eta(x_2) - \varepsilon\eta(x_1) \right] = 0$$

又因 $\varepsilon\eta(x)$ 是任意函数, 故得 $\delta J = 0$ 的必要条件为 \ominus

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{附 3-12})$$

式 (附 3-12) 称为欧拉方程。

因此, 求泛函 $J(y)$ 的极值可归结为在边界条件式 (附 3-4) 的条件下解微分方程 (附 3-12) 的问题。

\ominus δJ 、 $\delta^2 J$ 、 $\delta^3 J$ 中的 δ 是变分符号, J 是泛函 $J[y(x)]$ 的简写。

\ominus 此处的 $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$ 是在 $y(x)$ 、 $\tilde{y}(x)$ 的两端点固定在 P_1 、 P_2 点上求得的, 这种变分问题称为“不动边界”的变分问题。

为了判定这样得到的解是否合适的问题, 还需解决这个解是否能使 $J[y]$ 为极小的问题。在微分学中, 判断函数为极小值的条件是函数的一阶导数等于零, 二阶导数大于零。若二阶导数小于零, 则函数的极值为极大值。因此, 在变分问题中, 使泛函 $J[y]$ 为极小值的条件除应有 $\delta J = 0$ 之外, 还应有 $\delta^2 J > 0$ 。即任意 $\varepsilon \eta(x)$ 的情况下, 由 $\delta^2 J > 0$ 时所得的解 $y = y(x)$ 才能满足 $J[y]$ 为极小值的条件。

在变分法计算中, 通常将 $\varepsilon \eta(x)$ 记作 $\delta y(x)$, $\varepsilon \eta'(x)$ 记作 $\delta y'(x)$, 于是式 (附 3-9)、(附 3-10) 可写成

$$\left. \begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \\ \delta^2 J &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} (\delta y) (\delta y') + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\delta y')^2 \right] dx \end{aligned} \right\} \text{(附 3-13)}$$

让我们回过头来讨论开头提出的“求两点间曲线族的最短曲线问题”。对于这个问题, 有

$$F = \sqrt{1 + (y')^2}$$

所以使长度 L 取极值的欧拉方程为 $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$

由于 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$, 故欧拉方程改写为

$$-\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = 0 \quad \text{(附 3-14)}$$

式 (附 3-14) 的通解为

$$y = C_1 x + C_2 \quad \text{(附 3-15)}$$

式中 C_1 、 C_2 为任意常数。利用边界条件 (附 3-4) 定出 C_1 、 C_2 , 则有

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{(附 3-16)}$$

即其解为连接 P_1 、 P_2 两点的直线。而由

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} [1 + (y')^2]^{-\frac{3}{2}} (\delta y')^2 dx > 0 \quad \text{(附 3-17)}$$

可知这时的 J 为极小数。

从这个简单的例子可以看到:

(一) 在阐明变分法时, 引进泛函的概念比较方便。泛函是指一个量, 它的值依赖于一个或者几个函数。如上例中两点间任意曲线的长度 L 为曲线方程 $y(x)$ 的函数, 即 L 之值依赖于整个“变量函数” $y(x)$, 因此是 $y(x)$ 的泛函。应当注意泛函和函数两概念不同之处: 函数所表示的数值是因变量的数值与自变量的数值的对应关系, 而泛函所表示的则是因变量与某个或某几个函数的对应关系。换句话说, 泛函的定义域是函数组成的一个集合或者“空间”, 而不是坐标空间的一个区域。

(二) 变分法的基本问题是关于泛函的极值问题。例如两点间最短距离的曲线可以通过变分法求泛函 L 的极值而得到为连接二点的直线。

(三) 泛函极值的必要条件是欧拉方程

例如, 使泛函

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x; y, y') dx$$

在边界条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

下的欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

在边值条件下解欧拉方程所得的函数, 就是泛函 $J[y]$ 为极值时的函数 $y(x)$, 在本例中, 它就是两点之间的直线方程。

二、几个自变数的情形。重积分所表示的泛函的极值问题

以二元函数 $u(x, y)$ 的泛函

$$J[u] = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \quad (\text{附3-18})$$

为例, 来讨论重积分所表示的泛函的极值问题。式中 $F(x, y, u, u_x, u_y)$ 是给定函数, 它在一定区域内对于属量 x, y, u, u_x, u_y 是连续的, 并有连续二阶导数。 $u(x, y)$ 是积分区域 Ω 中的 C_2 类函数, 在 Ω 的边界 Γ 上取给定值。

$$u(x, y)|_{\Gamma} = u_0(x, y) \quad (\text{附3-19})$$

亦即为第一类边界条件。

我们的问题是要找出 $u(x, y)$ 能使 $J[u]$ 取极值的必要条件, 亦即找出一个在使泛函取极值的条件下的 $u(x, y)$ 。根据前面的叙述, 泛函的极值条件是欧拉方程。现在用与前面不同的另一个方法来建立欧拉方程。取任一与 $u(x, y)$ 接近的比较函数

$$u^*(x, y) = u(x, y) + \alpha \eta(x, y) \quad (\text{附3-20})$$

式中 $u(x, y)$ 为使 $J[u]$ 取极值的函数; α 是小参数; $\eta(x, y)$ 是区域中边界固定的任意的 C_2 类函数。在边界上,

$$\eta(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{附3-21})$$

这样选取的比较函数 $u^*(x, y)$ 显然是与所求函数 $u(x, y)$ 相邻的 C_2 类函数, 而且在边界 Γ 上与 $u(x, y)$ 相等。

对于比较函数 u^* ,

$$\begin{aligned} J[u^*] &= \iint_{\Omega} F(x, y, u^*, u_x^*, u_y^*) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} F(x, y, u + \alpha \eta, u_x + \alpha \eta_x, u_y + \alpha \eta_y) dx dy = \phi(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{附3-22})$$

当 $\alpha = 0$, $u^* = u$, 因而

$$J[u^*]|_{\alpha=0} = J[u] = \phi(0)$$

故 $J[u]$ 取极值的条件为 $\left. \frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$, 由此得[⊖]

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \left. \frac{dJ[u^*]}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{\partial F}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (F_u \eta + F_{u_x} \eta_x + F_{u_y} \eta_y) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[F_u - \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y}) \right] \eta dx dy + \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x} \eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y} \eta) \right] dx dy = 0 \end{aligned}$$

利用平面格林公式[⊖], 把最后一个面积分化为线积分:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x} \eta) + \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y} \eta) \right] dx dy = \int_{\Gamma} -F_{u_y} \eta dx + F_{u_x} \eta dy \quad (\text{附3-23})$$

注意到条件 (附 3-21), 容易看到这个积分之值为零, 因而得

$$\iint_{\Omega} \left[F_u - \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y}) \right] \eta(x, y) dx dy = 0 \quad (\text{附3-24})$$

由于 $\eta(x, y)$ 在 Ω 内是任意的, 故得

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y}) = 0 \quad (\text{附3-25})$$

方程 (附 3-25) 就是 $u(x, y)$ 使式 (附 3-18) 的泛函 $J[u]$ 取极值的必要条件。解此方程便可找出 $u(x, y)$ 。这是一个关于 $u(x, y)$ 的二阶偏微分方程, 也称泛函 (附 3-18) 在边界条件 (附 3-19) 下的欧拉方程。对照式 (附 3-12), 可以看出两者的联系。

三、最小位能原理

基于以上分析, 用变分法在解决边值问题时的两个步骤是:

(一) 把一个 (或一组) 微分方程的边值问题设法和一个泛函的极值问题联系起来, 使

⊖ 其中

$$\frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x} \eta) = \eta \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x}) + F_{u_x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

所以

$$F_{u_x} \eta_x = \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x} \eta) - \eta \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x})$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y} \eta) = \eta \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y}) + F_{u_y} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$F_{u_y} \eta_y = \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y} \eta) - \eta \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y})$$

代入即得 $\phi'(0)$ 中等式后的二个相加项。

⊖ 简明数学手册 P 3~193。

原来的方程成为这个泛函的欧拉方程。

(二) 求出使泛函取值的函数。由于这函数必满足欧拉方程, 所以它也就是原方程的解。

所以在变分法求解边值问题时, 首先是找到一个对应于原方程的泛函。至于怎样求出使泛函取极值的函数, 那是有限元素法需解决的问题。

下面用小位移弹性体的位能函数来说明最小位能原理。

小位移弹性体的位能函数 $U(u, v, w)$ 是一个泛函 \ominus , 它是

$$U(u, v, w) = \iiint_V [A(u, v, w) - (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w)] dx dy dz - \iint_{S_\sigma} (\bar{X}_j u + \bar{Y}_j v + \bar{Z}_j w) dS \quad (\text{附3-26})$$

式中 A 是单位体积的变形能函数。

$$A = \frac{1}{2} \{ \varepsilon \}^T \{ \sigma \} = \frac{1}{2} \{ \varepsilon \}^T [D] \{ \varepsilon \} \quad (\text{附3-27})$$

$$\{ \varepsilon \} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \quad (\text{附3-28})$$

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \mu & 1 & & & & \\ 1-\mu & \mu & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (\text{附3-29})$$

对称

矩阵 $[D]$ 是 (6×6) 的对称正定矩阵 \ominus , 在弹性力学中称为弹性矩阵, 因为它完全取决于弹性常数 E 和泊松比 μ 。

形变分量与位移分量之间有一定的几何关系。如果我们只考虑微小的形变和位移, 不计它们的二次幂和更高次幂, 则此种关系可表示成为

\ominus 参看本附录开始的介绍。

\ominus 所谓正定矩阵的意思是: 只要 $\{ \varepsilon \}$ 不为零, $\{ \varepsilon \}$ 的二次型 $\{ \varepsilon \}^T [D] \{ \varepsilon \}$ 总是正值。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{附3-30})$$

代入表达式 (附 3-28), 六个几何方程可以用一个矩阵方阵来表示。

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}^T \quad (\text{附3-31})$$

与泛函 $U(u, v, w)$ 相对应的原方程为平衡方程^[18]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \overline{X} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \overline{Y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \overline{Z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{附3-32})$$

式中 $\overline{X} \overline{Y} \overline{Z} \ominus$ 为给定的单位体积的体积力。

至于解平衡方程的边界条件, 从边界条件来看, 物体的表面 S 分为两个部分: 外力给定的部分 S_o 及位移给定部分 S_u 。当然, $S = S_o + S_u$ 。设 S_o 上给定的单位面积外力在 x, y, z 轴方向上的分量为 $\overline{X}_f, \overline{Y}_f, \overline{Z}_f$, 则 S_o 上力的边界条件为

$$\text{在 } S_o \text{ 上,} \quad X_f = \overline{X}_f, \quad Y_f = \overline{Y}_f, \quad Z_f = \overline{Z}_f \quad (\text{附3-33})$$

$$\left. \begin{aligned} X_f &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n \\ Y_f &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z_f &= \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (\text{附3-34})$$

而 (l, m, n) 是 S_o 上外法线的方向余弦。也就是说, 设外法线为 f , 则

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(x, f) \\ m &= \cos(y, f) \\ n &= \cos(z, f) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附3-35})$$

与此相应, 设 S_u 上给定的位移在 x, y, z 方向上的分量为 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, 则 S_u 上的几何边界条件为

⊖ 符号上面加一横表示该值是给定位。

在 S_v 上, $u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w}$ (附 3-36)

现在来研究式 (附 3-26), 假定式中 u, v, w 为满足 S_v 上几何边界条件的任意单值连续函数, 则满足这种条件的函数称为容许函数。这样的容许函数有无数组, 泛函 U 对于各组不同的容许函数将有不同的值。对于给定一组容许函数 (u, v, w) , 式 (附 3-26) 右边第一项表示弹性体对应于这一位移的总变形能, 第二项与第三项分别表示体积力的位能与 S_v 上表面力的位能。用泛函 U 可将最小位能原理叙述如下:

在满足 S_v 上的几何边界条件 (附 3-36) 的所有容许位移分量函数 u, v, w 中, 正确的解使 U 为最小。

(证明) 设正确的解的位移分量为 u, v, w , 与其邻近的任意容许位移分量为 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$, 并把它们的 U 分别写成 $U(u, v, w)$ 与 $U(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 。按泰勒级数展开, 可得

$$\begin{aligned} U(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) &= U(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w) \\ &= U(u, v, w) + \delta U + \frac{1}{2!} \delta^2 U + \dots \end{aligned} \quad (\text{附 3-37})$$

这里的 $\delta U, \delta^2 U, \dots$ 分别为一阶变分、二阶变分、……, 它们分别由 $\delta u, \delta v, \delta w$ (或它们的导数) 的一次项与二次项所组成 \ominus 。

由式 (附 3-26), 用式 (附 3-9) 的计算方法, 得

$$\delta U = \iiint_V [\delta A - (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w)] dx dy dz - \iint_{S_\sigma} (\bar{X}_l \delta u + \bar{Y}_l \delta v + \bar{Z}_l \delta w) dS \quad (\text{附 3-38})$$

由式 (附 3-27), 得

$$A = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}$$

而 $[D]$ 为只与 E, μ 有关的常量, 可令 $\{\varepsilon\}^T = F_1, \{\varepsilon\} = F_2$,

$$\text{则} \quad A = \frac{1}{2} F_1 [D] F_2$$

故

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial F_1} \delta F_1 + \frac{\partial A}{\partial F_2} \delta F_2 = \frac{1}{2} \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} + \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\delta \varepsilon\}$$

由于 $[D]$ 的对称性, 所以

$$\frac{1}{2} [\{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}]^T = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\delta \varepsilon\} = \frac{1}{2} \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}$$

$$\text{故} \quad \delta A = \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \quad (\text{附 3-39})$$

由于

$$[D] \{\varepsilon\} = \{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \delta A &= \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} = [\delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \varepsilon_z \quad \delta \gamma_{xy} \quad \delta \gamma_{yz} \quad \delta \gamma_{zx}] \{\sigma\} \\ &= \{\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}\} \\ &= \sigma_x \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial \delta v}{\partial y} \right) + \sigma_z \left(\frac{\partial \delta w}{\partial z} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \tau_{yz} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{附 3-40})$$

\ominus 参看式 (附 3-9) 及 (附 3-10), 它们的计算与这两个式子相类似。

代入式(附3-38), 得

$$\begin{aligned} \delta U = & \iiint_V \left[\sigma_x \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial \delta v}{\partial y} \right) + \sigma_z \left(\frac{\partial \delta w}{\partial z} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \tau_{yz} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right) - (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) \right] dx dy dz \\ & - \iint_{S_0} (\bar{X}_f \delta u + \bar{Y}_f \delta v + \bar{Z}_f \delta w) dS \end{aligned} \quad (\text{附3-41})$$

利用在表面 S 上的几何关系式(18):

$$dy dz = l dS, \quad dz dx = m dS, \quad dx dy = n dS$$

式(附3-40)右边第一项通过分部积分可写成

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy dz &= \iint_S \sigma_x \delta u dy dz - \iiint_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dx dy dz \\ &= \iint_S \sigma_x l \delta u dS - \iiint_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dx dy dz \end{aligned}$$

其他各项也可通过同样方法处理。

由于在 S_u 上, $\delta u = \delta v = \delta w = 0$ [对式(附3-36)进行变分便得]。式(附3-40)最后变成

$$\begin{aligned} \delta U = & - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} \right) \delta v \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \bar{Z} \right) \delta w \right] dx dy dz \\ & + \iint_{S_0} [(\bar{X}_f - \bar{X}_f) \delta u + (\bar{Y}_f - \bar{Y}_f) \delta v + (\bar{Z}_f - \bar{Z}_f) \delta w] dS \end{aligned} \quad (\text{附3-42})$$

式中 X_f 、 Y_f 及 Z_f 见式(附3-34)。

利用平衡方程(附3-32)及 S_0 上的边界条件(附3-33), 上式中每一项的被积函数均为零, 故得

$$\delta U = 0$$

利用式(附3-39)来计算 $\delta^2 U$, 得

$$\begin{aligned} \delta^2 A &= \frac{\partial}{\partial \{\varepsilon\}} (\delta A) \delta \{\varepsilon\} = \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\delta \varepsilon\} = A(\delta u, \delta v, \delta w) \\ & \frac{\partial^2 (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w)}{\partial u^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w)}{\partial u \partial v} = 0 \end{aligned}$$

故

$$\delta^2 U = \iiint_V A(\delta u, \delta v, \delta w) dx dy dz \quad (\text{附3-43})$$

由于 A 为变形能的正定二次型, $\{\delta\epsilon\}^T [D] \{\delta\epsilon\}$ 总是正值, 所以

$$\delta^2 U \geq 0 \quad (\text{附 3-44})$$

因此, 由式 (附 3-37) 得到

$$U(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \geq U(u, v, w) \quad (\text{附 3-45})$$

在上述证明中, 对 δu 、 δv 及 δw 的大小没有任何限制, 所以 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 可以是任意的容许函数, 亦即为满足 S 上几何边界条件的任意单值连续函数。因此, 式 (附 3-45) 意味着最小位能原理, 亦即正确的解 u 、 v 及 w 使位能的值为最小。

§ 附 5-2 边值问题和对应泛函的极值问题

我们以有源稳定导热方程 (泊松方程)

$$\nabla^2 u + q''/\lambda = \nabla^2 u + f = 0 \quad (\text{附 3-46})$$

的边值问题为例, 来说明如何把微分方程的边值问题化为泛函的极值问题。

首先考虑第一种齐次边界条件 $u|_S = 0$ 的情形, 其中 S 是问题的区域 G 的边界。将表达式

$$-(\nabla^2 u + f) \ominus$$

乘以 u , 在 G 上求积分, 得泛函

$$J_1[u] = - \iiint_G (u \nabla^2 u + fu) dG \quad (\text{附 3-47})$$

利用格林第一公式 $\oiint_S (u \nabla v) \cdot d\vec{S} = \iiint_G (\nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v) dG$, 得

$$\begin{aligned} & \iiint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dG \\ &= \oiint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_G u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) dG \end{aligned}$$

如果 $v = u$, 则得

$$- \iiint_G u \nabla^2 u dG = \iiint_G (\nabla u)^2 dG - \oiint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (\text{附 3-48})$$

式中 $\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u$

$$(\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

将式 (附 3-48) 代入式 (附 3-47), 即得

⊖ 此式即为

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q''/\lambda \right) \text{的简写。}$$

$$\text{式中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad f = f(x, y, z) = q''/\lambda.$$

$$J_1[u] = - \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \iiint_G [(\nabla u)^2 - fu] dG = \iiint_G [(\nabla u)^2 - fu] dG \quad (\text{附3-49})$$

因为按照边界条件, 上式右边的第一项沿边界积分等于零。

求泛函 $J_1[u]$ 的变分, 并考虑到在边界上 u 为定值, 故 $\delta u|_s = 0$, 因而有

$$\delta J_1[u] = \iiint_G [2 \nabla u \delta \nabla u - f \delta u] dG = \iiint_G [2 \nabla u \cdot \nabla \delta u - f \delta u] dG$$

以 δu 代 u , ∇u 代 ∇v 代入格林第一公式, 得

$$\oint_S (\delta u \nabla u) \cdot d\vec{S} = \iiint_G (\nabla \delta u \cdot \nabla u + \delta u \nabla^2 u) dG$$

从而得出

$$\iiint_G \nabla u \cdot \nabla \delta u dG = \oint_S (\delta u \nabla u) \cdot d\vec{S} - \iiint_G \delta u \nabla^2 u dG$$

代入上式, 得

$$\delta J_1[u] = 2 \oint_S (\nabla u \delta u) dS - \iiint_G (2 \nabla^2 u + f) \delta u dG = - \iiint_G (2 \nabla^2 u + f) \delta u dG \quad (\text{附3-50})$$

由泛函极值条件 $\delta J_1[u] = 0$, 得相应欧拉方程为

$$2 \nabla^2 u + f = 0 \quad (\text{附3-51})$$

这还不是方程 (附3-46), 故 $J_1[u]$ 还不是所要的泛函。但可将式 (附3-50) 改写成

$$\delta J_1[u] = - 2 \iiint_G (\nabla^2 u + f) \delta u dG + \iiint_G f \delta u dG$$

则有

$$\delta \{ J_1[u] - \iiint_G f u dG \} = - 2 \iiint_G (\nabla^2 u + f) \delta u dG \quad (\text{附3-52})$$

可见如果考虑一个新的泛函为

$$J[u] = J_1[u] - \iiint_G f u dG = \iiint_G [(\nabla u)^2 - 2 f u] dG \quad (\text{附3-53})$$

则在原定的边界条件 $U|_s = 0$ 的情况下, 相应的欧拉方程为 $\nabla^2 u + f = 0$, 它就是原边值问题的方程 (附3-46)。

对于非齐次边界条件

$$u|_s = g$$

其中 g 是 S 上的给定函数。由于在边界上仍有 $\delta u = 0$, 故 $\delta J[u] = 0$, 仍导致式 (附3-46)。因此, 式 (附3-53) 仍为有源稳定导热方程的第一边值问题相应的泛函, 不论它的边界条件是齐次的, 还是非齐次的。

对于第二、三种边值问题, 求泛函相应的步骤大致相同, 但这时式 (附3-49) 的第一个的边界积分一般不为零。相应泛函的形式也就比较复杂, 它包括有边界上的积分。

设边界条件为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right]_s = g \quad (\text{附3-54})$$

$h = 0$ 时是第二种边界条件, $h \neq 0$ 时是第三种边界条件。利用式 (附 3-53) 的泛函, 令 $J_2[u]$ 为

$$J_2[u] = \iiint_G [(\nabla u)^2 - 2fu] dG$$

在条件 (附 3-54) 之下,

$$\begin{aligned} \delta J_2[u] &= 2 \iiint_G [\nabla u \nabla \cdot \delta u - f \delta u] dG \\ &= 2 \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \delta u dS - 2 \iiint_G (\nabla^2 u + f) \delta u dG \\ &= 2 \iint_S (g - hu) \delta u dS - 2 \iiint_G (\nabla^2 u + f) \delta u dG \\ &= \delta \left[\iint_S (2gu - hu^2) dS \right] - 2 \iiint_G (\nabla^2 u + f) \delta u dG \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \delta \left\{ J_2[u] - 2 \iint_S g u dS + \iint_S h u^2 dS \right\} = -2 \iiint_G (\nabla^2 u + f) \delta u dG$$

可见在边界条件 (附 3-54) 下, 与方程 (附 3-46) 相应的泛函是

$$\begin{aligned} J[u] &= J_2[u] - 2 \iint_S g u dS + \iint_S h u^2 dS \\ &= \iiint_G [(\nabla u)^2 - 2fu] dG + \iint_S (h u^2 - 2gu) dS \end{aligned} \quad (\text{附 3-55})$$

或者将表达式 $-(\nabla^2 u + 2f)$ 及 $-g$ 分别乘以 u 并分别进行 G 及 S 上的积分, 便得泛函

$$J[u] = - \iiint_G [u \nabla^2 u + 2fu] dG - \iint_S g u dS \quad (\text{附 3-56})$$

利用格林第一公式将上式转化并把式 (附 3-54) 的边界条件代入, 便可将式 (附 3-56) 转化成式 (附 3-55)。

因此, 在构造有源稳定导热问题的泛函时, 可以采用式 (附 3-56) 的形式, 即它由体积分和面积分两个部分组成, 其体积分部分的被积函数为由原泊松方程改成表达式 $-(\nabla^2 u + 2f)$ 之后乘以 u , 而面积分部分的被积函数则为边界函数 g 乘以 $-u$, 此时它的欧拉方程便为原来的泊松方程。当为不稳定导热问题时, 仍可用同样的泛函, 只需把 f 项换成 $\left(f - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)$ 即可。当导热为无源时, $f = 0$, 当为第一类边界条件时, $g = 0$ 。第四章中各类导热问题的泛函, 均可用上述原则予以证明。

参 考 文 献

- [1] 传热学, 杨世铭编, 人民教育出版社, 1978。
- [2] 关于机床热变形的研究(1)~(4), 《精密机械》(日), 1972, №3、№7; 1973, №2; 1974 №12。
- [3] 传热学基础, 铸造专业联编教材讨论稿。
- [4] Conduction Heat Transfer, P. J. Schneider, 1955。
- [5] 热应力, B. E. 盖脱伍德著, 科学出版社, 1964。
- [6] 传热学, 同济大学热工教研组编, 中国工业出版社, 1961。
- [7] 传热学, 杨世铭、陈大燮编, 中国工业出版社, 1961。
- [8] すくい面摩托特性の检讨, 北川武扬等, 《精密机械》(日), 1976, №12。
- [9] 机械制造工艺科学基础, 索科罗夫斯基著, 机械工业出版社, 1958。
- [10] 在平面磨削中砂轮温度的测定, 《精密机械》(日), 1976, №12。
- [11] 组合机床设计第二册, 液压部分(第七章 7-1 油箱), 大连组合机床研究所编, 机械工业出版社。
- [12] 热传导理论, A. B. Лыков著, 裘烈钧、丁履德译, 高教出版社, 1955。
- [13] 微分方程及其数值解, 复旦大学编, 上海人民出版社, 1975。
- [14] Analysis of the thermal behavior of a machine tool table using the finite element method, Annals of CIRP, Vol.25/1, 1976。
- [15] Sip-8P型座标镗床热变形试验报告, 机床研究所等。
- [16] 弹性力学问题的有限单元法(修订本), 华东水利学院编, 水利电力出版社, 1978。
- [17] 有限元法概论, 龙驭球编, 人民教育出版社, 1979。
- [18] 能量原理, 尹泽勇、江伯南译, 中国建筑工业出版社, 1977。
- [19] 差分方程, 穆鸿基译, 上海科学出版社。
- [20] 热应力, (日) 竹内洋一郎著, 科学出版社, 1977。
- [21] 数学物理方程与特殊函数, 南京工学院数学教研组编, 人民教育出版社, 1979。