

第一章 仿生机械学概论

§ 1-1 仿生机械学及研究动向

一、仿生机械学的含义

本世纪 60 年代初期,出现了一门综合性的新兴边缘学科——仿生学,它是生命科学与工程科学技术相互渗透、相互结合而形成的。一般认为,仿生学(bionics)这一名词是由生物学(biology)和电子学(electronics)结合而产生的新名词,实际上它是源出于希腊语中表示生命单位的 bion 一词。

仿生学的研究对象可认为是:研究生命的结构、能量转换和信息流动的过程,并利用电子、机械技术对这些过程进行模拟,从而改善现有的和创造出崭新的现代技术装置。模拟生物的机能与构造、并应用于制造卓越的工程装置的研究历史,虽然可以追溯到古老的年代,但是直到 1948 年维纳(N. Wiener)发表了名为《控制论》的著作,高度概括地提出了在动物和机器中的通信和控制的问题之后,才为仿生学的诞生奠定了基础。

仿生学的研究,在国内外都相当活跃,所研究的课题涉及到广泛的范围,并已获得了许多进展。例如:通过对人脑机制(欲望、感情、睡眠、学习和记忆等)的研究,出现了利用计算机的人类教育系统、学习机、人工神经元、电子“脑”,进而有可能制造与人脑工作能力相同的信息处理系统——人工脑;通过研究生物眼的模型和视觉机制(如人眼、蛙眼、猫眼、鹰眼和蟹眼等),研制人工视网膜、文字读取装置、盲人假眼及应用于机器人的人工眼;通过对生物听觉模型和机制的研究(如人耳、蝙蝠和海豚、鲸鱼等的听觉器官),开发了精密雷达、水中声纳和声音识别装置等;通过声道模型的研制与开发,发展了能够模拟人的发音器官的机器;通过研究有关肌肉收缩的物理化学机制及其在运动神经指挥下的动作机制,研制了人工肌肉、电子假手、机械手、人力放大器、自动机,并在这基础上诞生了所谓控制机体的一门新技术,制造接近人类智能的机械等。不言而喻,今后除了继续进行对基本元件的开发外,将更主要地开展对系统集成技术的研究,以改进现有的技术装置,创造新型的技术系统。

由上可知,仿生学的诞生是建筑在生物科学的进步、以及与电子学的相互渗透的基础上。实际上它是一门涉及广阔领域的综合性的边缘学科,若以电子学为中心来考虑,就构成仿生电子学(bioelectronics),若以机械学为中心来考虑,则构成了仿生机械学(biomechanisms)。

仿生机械从其构词成分来看,它应该是指添加有人类智能的一类机械。为区别起见,可把传统的机械称之为一般机械。表 1.1 列出一一般机械与人类能力的比较,可以看出在物理和机械机能方面,一般机械较为优越,但在智能方面却比人类要显得特别低劣。因此,若把人-机结合起来,就有可能使一般机械进化到仿生机械。于是,可以认为仿生机械应该是既具有像生物运动器官那样精密的构件,又具有优异的智能系统,以便能进行巧妙的控制,执行复杂的动作。

表 1.1 一般机械与人类能力的比较

项 目 种 类	物 理 机 能			机 械 机 能			智 能		
	力	速 度	连续运动	持久性	可靠性	耐久性	通用性	学习能力	综合判断力
一 般 机 械	极小 极大	极小 极大	能	良好	高	好	无 (单能)	没有 或低劣	没有 或低劣
人 类	中等	低速	不能	容易疲劳	有误差 产生	不好	有 (多能、灵活)	高	高

仿生机械学是以力学或机械学作为基础的、综合生物学、医学及工程学的一门边缘学科，它贯串着研究、模拟生物系统的信息处理、运动机能和系统控制，以及在医学(如假肢、辅助装具、医用机械手和机器人等)和工程中的应用(如工业机械手、机器人等)。所以，该学科是把工程技术应用于医学、生物学，又把医学、生物学的知识应用于工程而作为目的的生物医学工程中的一个领域，它包含着对生物现象进行力学研究，对生物的运动、动作进行工程分析，并把这些成果根据社会的要求付之实用化。它的主要研究对象及其相关的领域如表 1.2 所示。

表 1.2 仿生机械学的研究对象及其相关领域

研 究 对 象		相 关 领 域
人 类	形态、机械性质	解剖学、人类学
	运动、血流动力学	生理学
	动作、作业	人体工程
	体育	体育学
	外伤、康复	整形外科、脑外科
	人工脏器	临床医学
动物		动物学
机器人		机械、电子学

从上可知，这门学科是通过机械工程方法论，把广阔范围的有关学科综合的一种边缘科学。

必须指出，上述只是过分强调生物运动器官系统的研究对象。实际上，除了运动器官系统外，还有发音器官、循环器官、消化器官等，如血管床的流体力学、胃和肠的蠕动运动分析等。所以可以预想，这门学科将来的研究对象会更加扩大。

二、仿生机械学的研究动向

虽然这门学科的分类体系目前尚未完全确定，现可从习惯分类把其各个研究动向介绍如

下。

1. 生物材料力学和机械力学

它以骨或软组织(肌肉、皮肤及与交通事故有关的脑组织等)作为对象,通过模型实验方法,测定其应力、变形特性,求出应力分布规律。此外,还可根据骨骼、肌肉系统力学的研究,对骨和肌肉的相互作用等进行分析。目前,已发表了关于脑壳、脊椎骨、骨盆、髋关节、膝关节等许多研究论文。

另外,生物的形态通过亿万年的进化,往往具有最优的评价函数,例如人体骨骼系统具有最少材料、最大强度的构造形态。这些最优评价函数是物质的数量和能量消耗量的函数,所以按这种最优论的观点来学习、模拟建造工程结构系统是很有价值的。

2. 生物流体力学

它主要涉及生物体的循环系统。虽然很早就有人把动脉中的脉动波作为弹性管中的波动传播问题进行处理分析,已有血流动力学的专著出版,但是这部分仍有许多问题未解决,特别是因为它的研究与心血管疾病关系十分密切,所以已成为一门很受关注的学科。

3. 生物运动学

生物的运动十分复杂,因为它与骨骼和肌肉的力学现象、感觉反馈及中枢控制牵连在一起。

虽然各种动物的运动或人体各种器官的运动测定与分析都是重要的基础研究,但是在仿生机械学中,特别重视人体上肢运动及步行姿态的测定与分析,因为人体上肢运动机能非常复杂,而下肢运动分析对动力学研究十分典型。另外,若能从包含有力学问题的综合观点对复杂的动作和作业进行分析,对下述的康复工程研究将有很大帮助。

4. 生物运动能量学

如同生物形态存在最优性一样,节约能量消耗量也被认为是生物中的基本原理之一。从运动能量消耗最优性的观点对生物体的运动形态、结构和功能等进行分析、研究,特别是对有关能量的传递与变换的研究,是很有意义的。

5. 康复工程学

在与仿生机械学有关的康复工程学科中,包括有如动力假肢、电动车椅子、病残者用环境控制系统等。它涉及多种学科与技术,例如对于动力假肢,只有在解决了材料、能源、控制方式、信号反馈与精密机械等各种问题之后才能完成,而且这些装置还要作为一种人-机系统进行评价、实用,所以它们通往实用化的道路是很严格的。

6. 机器人工程学

它是把生物学的知识应用于工程领域的一种典型例子,其目的是为用于工业中的省力化,以及在宇宙、海洋、原子能生产、灾害时等异常环境中帮助人类进行作业。机器人不仅要具有移动功能的人造手足,而且还要有感觉反馈功能及人工智能。目前,关于人造手、步行机械、三维物体或声音的类型识别等的研究都在积极进行。

总而言之,这门学科是涉及广阔领域的一门边缘学科。为此,本书所介绍的内容,主要是涉及仿生机械学中有关机械结构的分析、运动学和动力学分析,以及应用于康复工程、机械手及机器人技术这一部分。

§ 1-2 机器人技术概述

一、机器人的组成

机器人这个名称最早出现于 19 世纪,但是直到本世纪 50 年代后期,机器人才从科学幻想中解放出来,进入了科学技术领域。那时,在市场上出现了两种工业机器人,一种取名为 Unimate (万能自动机械),一种取名为 Versatran (通用搬运机械),并构成为今天机器人发展的基型。

一般说来,可以从两个角度对机器人进行定义。若从工程角度,认为它是属于一种自动机械,具有对环境的通用性和适应性,操作程序易变,且可实现独立的随意的运动。若从仿生学的角度,则认为它是具有近似人类相当部分功能的机械,它能执行与人类似的动作,且具有类似人的某种智能,如记忆、再现、逻辑运算、学习、判断、感知等。

机器人的组成可包括硬件和软件两大部分。从着重于对生物机能模拟的观点,高级机器人的典型硬件结构可用图 1-1 表示。

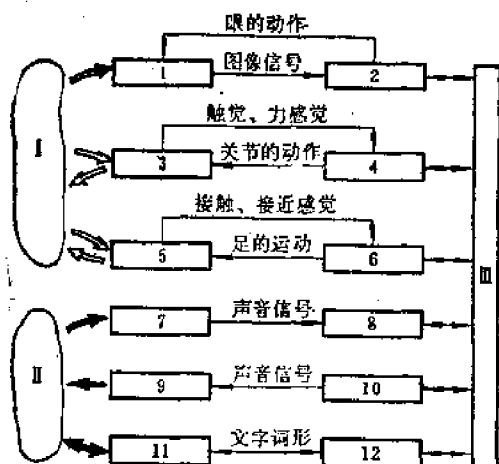


图 1-1 高级机器人的硬件结构

I—外界； II—人类； III—中央计算机；
1—电视摄像机； 2、3—预处理器； 3—机械手；
4、6—控制器； 5—机械足； 7—传声器；
9—扬声器； 10—声音发生控制器； 11—显示器；
12—显示控制器

规律,以及自己的经验等知识,并能自由地运用。

(4) 自然语言处理。指机器人能理解和接受人发出命令的语言系统,并可用这种语言进行对话。

(5) 动作控制。指机器人能按人所给予的任务要求,对机械手、足进行运动控制。

综合上述,可用图 1-2 表示。

二、机器人的发展

从 50 年代开始至今,机器人技术已得到了很大的发展。若按机器人的功能和类型的发展

为了要使机器人能够从事复杂的工作,执行与人相似的一些动作,必须要使它的机构和功能都具有很大的灵活性,即是要有像生物运动器官那种高性能的硬件,而且还要有能对运动器官进行巧妙控制的软件,把硬件和软件很好地配合起来。

机器人的软件,是人工智能研究的主要实际目标,其最根本问题有:

(1) 问题求解(对策)。指机器人能按人事先给定的条件和目标,通过定理证明和启发搜索的方法,制定计划,求解问题。

(2) 环境了解。指机器人能通过各种信息传感器对周围环境进行调查,掌握外界情况,并建立环境模型。

(3) 知识表达。这是人工智能的一个关键问题。指机器人能记忆工作环境的状态和



北林图 A00061446

过程，大体可以把它划分为以下三个时期。

第一代机器人，是使用存储器、程序控制的自动机，也即从60年代初期问世，目前能够在工业部门实用的重复型机器人，常称为工业机器人。它的动作包括示教、存贮、再现和操作四个步序。这种机器人的典型代表就是 Unimate 和 Versatran 两种，它们的系统组成大致如图1-3所示。

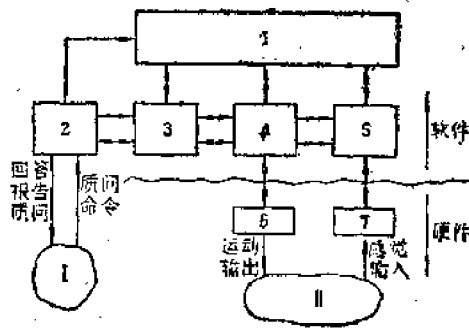


图1-2 高级机器人的软件系统

- I—人； II—环境；
- 1—知识(事实和规则、假说、外界模型)；
- 2—自然语言处理； 3—问题对策；
- 4—运动控制； 5—输入信息分析；
- 6—效果器； 7—感觉器

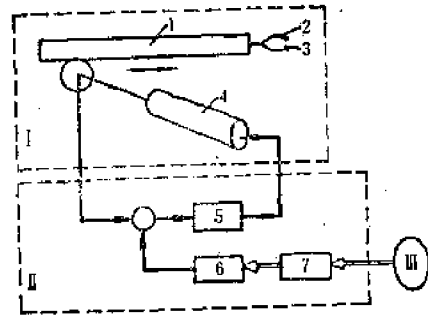


图1-3 工业机器人的系统组成

- I—机械手部； II—控制部； III—人类；
- 1—手臂； 2—手爪； 3—传感器；
- 4—驱动器； 5—控制器； 6—存储器；
- 7—示教器

所以，重复型机器人是通过示教输入操作程序，在存贮装置内存贮(记忆)一系列的操作内容，并利用存贮内容的再现，自动地重复地进行工作的一种通用自动搬运机械。一般认为，或多或少装有检测装置，能够根据检测结果变更工作程序，采用其他相适应动作的机器人，也包括在这一类以内。

这类机器人存在的问题有：

- (1) 传感器与反馈问题。由于它一般没有触觉、力检测及反馈系统，不能用触觉去发现物体放置的位置与姿态，所以不能作出灵巧的动作。
- (2) 视觉问题。由于它没有眼睛，所以不能辨别物体的种类，不能“看出”零件安装位置，也不能进行目测检查。
- (3) 适应能力问题。它只能沿着预先记忆的轨迹运动，不能随环境和作业对象的变化而自动更改作业内容，几乎不能把复杂的装配作业编成程序。
- (4) 运动自由度问题。一般来说，这类机器人的运动自由度较少，手的柔软性差，没有移动脚。

然而，由于这类机器人的最大优点在于能把人从危险、恶劣、单调环境的工作中解放出来，做到工业生产的省力化，所以已得到越来越广泛的应用。

第二代机器人，是指具有某些感觉功能的机器人，属于一种过渡性类型。

第三代机器人，是具有感觉识别又有某些思维功能，并由这些功能控制动作的智能机器人——具有与人类相类似智能的自动机械。它的发展主要开始于70年代，已成为开拓高级自动

化的课题,并着手应用到生产实际中。智能机器人的控制系统构成如图 1-4 所示。

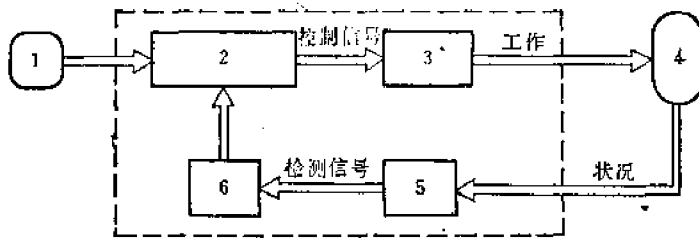


图 1-4 智能机器人的控制系统

- 1—操作人员; 2—指令处理与判断装置;
3—驱动机构; 4—工作对象; 5—传感器;
6—识别装置

智能机器人的研究系统,大致可归纳为下列四种:

(1) 带触觉的系统。这种机器人的多关节机械手上装有触觉和力传感器,可以对不同种类的工件进行装配作业。

(2) 手-眼系统。这种机器人具有位置探索、视觉反馈等功能,能够识别对象,掌握本身周围的情况,使其与工作环境相适应。

(3) 脚-眼系统。这种机器人可根据操作人员的指令,自动识别道路,安排行动计划,具有较大的灵活性。

(4) 人-机对话系统。操作人员向机器人发出语言指令,机器人能通过本身小型电子计算机进行解读,与人对话,然后使各部分进行动作。

另外,还有一种称为操纵型机器人。实际上如从功能方面来看,它与智能机器人较为相似。这种机器人是在操作人员操纵下进行工作的作业装置。在工作进行中,人们不断地给予指令信号,所以不需要存贮编制工作程序的存贮装置。但是它具有随时反馈对象的状态,以使操纵者感知的功能。这种机器人的用途很广,功能也不相同。若从功能的方面进行分类,大致可分为如下四种:

(1) 能力扩大用机器人——用于扩大人的工作能力(放大机)。

(2) 隔离工作机器人——可在人无法生存或不适于生存的环境中进行工作(如原子能生产用机器人)。

(3) 危险工作用机器人——用于危险工作的场所(如火灾、爆炸场所)。

(4) 探查用机器人——用于宇宙和海洋开发。

总之,这种机器人主要用在各种对人有害的环境中作业,它能在操作人员操纵下进行工作,或能按照人的指令在未知环境中从事高水平的作业。一般把前者称为近距离操纵型、后者称为远距离操纵型机器人。

假如说在 60 年代,主要用示教重复型机器人来“放”与“拿”工件。那么到 70 年代,开始用智能机器人进行“寻找”与“发现”对象物。有人认为,今后的 10 年将是机器人发展的 10 年,智能机器人的时代已经到来了。

目前世界上已拥有几万台机器人,其品种和功能有多种多样,应用范围相当广阔,可归纳为:

(1) 危险环境条件作业的替代——原子能生产、宇宙、开发、空间飞行、海洋开发、军事工程(救火等)等领域。

(2) 社会福利——假手、假足、高级作业程序及语言控制的高性能假手、医疗机器人、家用机器人等。

(3) 生产自动化领域——工业机器人、装配、检验、系统管理机器人等。

高级机器人的研究方向,可分为基础学科研究与应用技术研究两个方面。在基础学科的研究中,有的从仿生学的角度对人和动物肢体的运动学和动力学进行研究,使机器人具有类似生物运动的机构;有的从生理学的角度对生物体的视觉、触觉和听觉等脑神经系统进行研究,并作出其物理模型,以便研制机器人的理想信息处理系统;有的采用电子计算机,进行机器人智能信息处理和肢体运动控制的研究等。在应用技术研究方面,主要是为了研制能适合各个领域发展需要的机器人。

从对机器人的研究内容来看,其发展动向主要有以下几个方面:

(1) 重视传感器的研究,以使机器人具有视觉、触觉和听觉等功能。

视觉传感器:

人的眼睛是“感觉之窗”。所以,使机器人具有视觉的研究是人工智能研究的一项重要内容,是智能机器人研究中最重要的一個课题。

对机器人识别眼的功能要求是:眼必须放在控制回路中,能识别运动的物体和形状复杂的物体,能进行实时信息处理。根据使用要求的不同,可分为高级视觉系统的研究和实用的简易视觉装置的研究两种。

高级视觉系统的研究,即研究能够识别一般对象物的眼睛,它主要用电子计算机、电视摄像机等硬件和相应的软件组成,就是用电视摄像管或光导纤维、激光扫描等将原始图像信息通过模/数转换为电子计算机的输入信号,再由电子计算机进行视觉信息处理。这里关键的问题是对物景分析识别方法的研究。

实用的简易视觉装置的研究,即研究用于特定用途的单能眼睛,其功能随着工作对象的不同而不同,例如用来判断对象的有无,或测定工件的位置、或按预定特征进行分类等。这种装置的功能可以用光电元件、电视摄像机等各种比较简单的装置组合来实现,所以设计方便,但是其功能有一定限度,而且为了达到一定要求,还应当对工作环境和工作内容作必要的整修。

触觉传感器:

由于这种感觉信息处理方法简单、速度快,所以也已成为机器人研究中的一个重要内容。触觉传感器的作用有三个:(i)使机器人的运动控制具有适应性;(ii)可对运移的对象进行物理性质测量和识别;(iii)为保护机器人自身和防止危险,感知异常状态。其内容通常包括下列五种:

接触觉——为了感觉是否接触到物体。

压觉——为感知用怎样的力来抓握物体,施行抓握力的控制,也可对对象物进行形状识别。

力觉——主要用于检测物体对机器人的反作用力大小,及施行握力控制。

滑觉——可根据打滑时手指负重的变化,和手指抓握面的微小非线性振动,进行推算是否抓牢物体。

接近感觉——是在碰到对象物或障碍物之前感知,以保护机器人自身或防止危险状态。

必须指出,对于感觉器官部分的研究,要注意开发具有实用性的高级技术,以进一步扩展机器人的功能,这对探索未来机器人的新技术将有重要价值,其典型代表就是关于视-触觉混合控制的双臂机器人技术的研究。

(2) 新型伺服机构的研究

新型伺服机构的重要特征就是把伺服机构和电子计算机控制紧密结合起来。机器人手和足的运动都是非线性的多变量运动系统,而且也是一个具有各种控制组合的多变量系统,所以要求伺服机构具有高度的柔软性。近年来,都采用电子计算机程序来对伺服机构进行控制动作的选择、参量的调整、控制函数的计算及操作量的决定等。此外,考虑到机器人手臂动态控制及设计方法,使其动作高速化、高精度化,也已成为一个重要的研究课题。

(3) 人工智能的研究

人工智能的研究方法主要有两种,一是模拟、研制人脑结构的微观方法,另一是模拟、实现人脑功能的宏观方法。当前正在研究的领域,如上所述,有问题求解系统、知识表达、模式识别及自然语言处理等。

(4) 微型计算机在机器人系统应用的研究

机器人感觉信息的预处理已大多利用微型计算机来进行。由于微处理机及其外围设备的发展,也使得有可能实现对伺服机构的控制。微型计算机的应用,促使机器人的控制向高性能化和智能化发展,形成机器人管理系统。

§ 1-3 康复工程与假肢技术

一、概 述

传统的医学和医疗工程总是把危及人体生命的内科或外科急病作为诊断与治疗的重点。但是,社会上还有成千上万患有无法治疗的功能障碍的残疾人。据联合国卫生组织的估计,全世界残疾人约有 4.5 亿,占总人口的 10%,预计到本世纪末将增加到 6 亿。我国的残疾人数,根据 1987 年首次全国残疾人抽样调查推算约有 5164 万人,其中听力语言残疾约 1770 万人,智力残疾约 1017 万人,肢体残疾约 755 万人,视力残疾约 755 万人,精神残疾约 194 万人,综合残疾约 673 万人。

起先,对患有肢体等骨骼运动系统功能障碍以及视觉、听觉等感觉系统功能障碍的康复,主要是通过疗养和训练等途径来开发自身残存的功能,以促使其自立,谋求回归社会。后来,特别是在第二次世界大战以后,随着控制论的发展,促进了人-机系统的结合,开始了用器械装置来代替补偿人体失去的运动和感觉功能的研究。近些年来,这些研究与超大规模集成电路、半导体传感器等现代机械电子技术相结合,有着很大发展,从而形成了一门新兴的边缘学科——康复工程学。

一般来说,应用工程技术来帮助残疾人代偿已失去的功能,大致可划分为两个范畴:一个是属于系统工程的范畴,它是通过改变或重新建立新的生活环境条件,使有功能障碍的患者得到适应和方便;另一个就是属于康复工程的范畴,它是通过综合应用精密机械、现代控制和信息处理等技术来设计高性能的器械,并确立机器和人之间的信息传递手段,起到代偿功能的作用。特别是由于高级自动化课题中机器人技术的发展,开拓了机器人在康复工程领域中应用

的广阔前景,将给残疾人带来更多的福音。

根据对功能障碍代偿的目的不同,可把代偿器械分为两大类:一类是直接安装于人体上进行代偿失去功能的器械,如各种假肢、辅助装具等;另一类是装设于人体外、且构成独立系统的、起间接代偿功能的器械,如各种环境控制装置、医疗机械手、机器人、移动机械等。但是,不论是哪一种代偿器械,都要使残疾人自身能够进行操作,所以器械的动作指令必须利用残疾人残存的机能。目前,可实际有效地利用的残存机能大致有下列三种:

(1) 人体的机械运动位移。如利用身体某一部分运动所产生的动作位移和某一部位肌肉收缩所产生的膨起位移等,这是一种基本的方法。

(2) 人体的肌肉表面动作电位。肌肉电位是人体的一种生物电,利用这种生物电作为控制信号源已有较大的发展。

(3) 呼气压力、声音信号等。虽然采用声音作为输入信号尚处于开发阶段,但它已成为一种新的发展方向,是研究医疗机器人的一个重要课题。

二、直接代偿的器械

如上所述,这种器械,如假手、假足等,都是直接安装于人体上,用来代偿失去的功能。所以,它们设计的出发点是尽可能地采用与人体一样的形状、功能和动作方式。此外,便于携带也是研制这种器械的一个共同问题。为此,运动自由度的配置、结构的轻量和小型化、以及操作方便、可靠性高,是研制这些器械的主要问题。

对于假手来说,根据空间机构学的分析,为了满足残疾人必要的日常生活动作的要求,全臂假手的自由度,除了手指外,必须有6~7个,即肩部3个、肘部1个、前臂3个自由度。但是,对于这么多的自由度数,是不可能都利用残疾人残存的机能来进行控制,而必须采用独立的控制系统。所以,应用微型计算机控制,已成为全臂电动假手研制的一个主要方向。

图1-5表示日本开发的一种全臂电动假手的研究系统,可以看出该系统包括有声音识别,集成化的数字控制方式的微型电子计算机,精密机械设计,整体机械部分的制造,轻型、高强度材料的开发,小型、轻量微型电动机的研制及电机转数的数字控制方式的开发等跨越广阔领域技术的高度利用。这个系统与工业机器人的差别,在于它是依靠残疾人本身进行人工操作,而且是一边通过本身视觉进行位置感觉反馈,一边控制假手进行动作。

显然,多自由度与轻量化的要求是相互制约的。通常假手动力装置和减速机构部分的重量往往要占重量的50~60%。为此,研制小型、高效、大输出的驱动装置是开发全臂电动假手的一个关键问题。

在控制方式中,能够按照人的意志来控制假手是一种最理想的方案。这时,控制信号源的取出可能有三种途径:(i)直接把人的中枢神经系统中的指令取出来;(ii)把通过运动神经系统的信号取出来;(iii)把运动神经系统的脉冲到达肌肉所产生的肌电位取出来。目前,采用第三种方法的研究,即肌电控制的假手,占着主导地位。

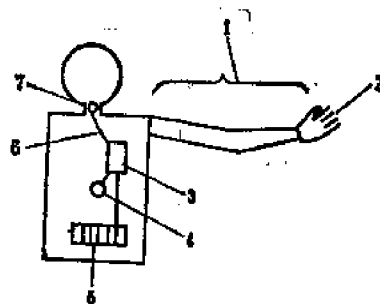


图1-5 全臂电动假手的研究系统

1—7自由度电动假手; 2—手套、臂筒;
3—微型计算机; 4—肌电控制;
5—电源; 6—人臂和假手的运动分析;
7—声音控制

现在,利用前臂残存的颞颥肌上,由于手指屈伸运动所产生的肌电位,来控制具有手指开闭的前臂假手,在实用上已经成功。图 1-6 表示这种假手的一种传动系统和控制电路框图。当假手空载作开闭动作时,电机输入通过行星减速器 1、齿形联轴节 6、双向超越离合器 7 和锥齿轮 3 输出,实现快速传动。而当假手闭合开始捏取物体时,由于负载的作用,使双向超越离合器 7 脱开、单向超越离合器 8 接合,于是电机输入通过行星减速器 1、行星减速器 2、单向超越离合器 8 和锥齿轮 3 输出,实现慢速增力传动。这两种输出的变换,是靠负载的变化而自动进行,所以该假手具有良好的机械性能。

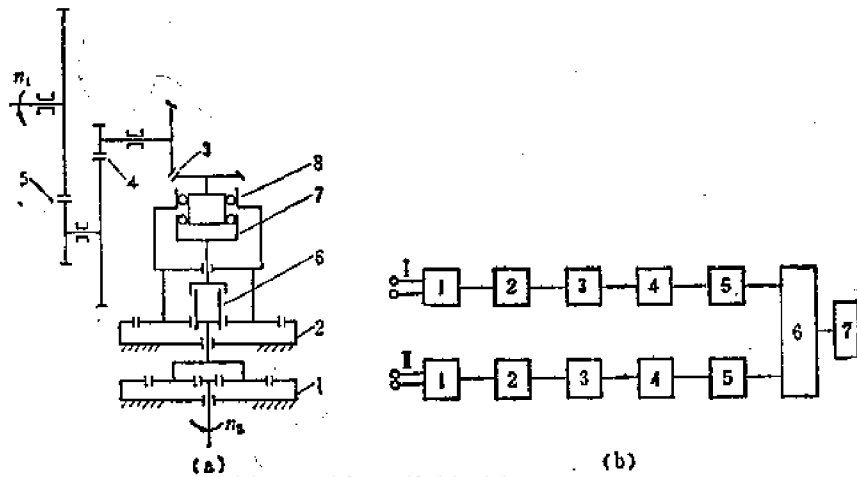


图 1-6 肌电控制前臂假手传动与控制系统

(a) 传动系统; (b) 控制电路

I—伸肌;

II—屈肌

1—电极; 2—放大; 3—整流滤波; 4—阈值电路; 5—欠压保护; 6—电子开关; 7—电动机

肌电控制前臂假手实用化的现状大致如表 1.3 所示。

表 1.3 肌电控制前臂假手实用化的现状

国 名	功 能	控制方式	感 觉	
			种 类	反 馈 方 法
中 国	抓 取	开-关	无	
日 本	抓取、握持	开-关	压 觉	电气刺激
苏 联	抓 取	开-关	无	
西 德	抓 取	开-关	无	
意 大 利	抓 取	开-关 比例切换	压觉、位置觉	机械刺激
澳大利亚	抓 取	开-关 比例切换	无	
加 拿 大	抓 取	开-关	无	
英 国	抓 取	比例切换	压 觉	反馈到系统
美 国	抓 取	开-关	无	

但是,随着假手自由度数的增多,残疾人相对应部位的肌电控制信号源就不能满足。所以尽管已对多自由度动力假手作了多次研究开发,然而可供实用的还很少。在构成多自由度动力假手的控制系统上,最值得注意的是要研制出对使用者不需通过特别学习训练就能操作假手的系统。目前已试验出一种利用残疾人存在的幻肢感觉来进行手部控制的方式,该方式是在残端的适当部位上安装多组电极,则对应于几种不同的幻肢手部的运动,可产生不同的肌电图像,那么通过肌电信号处理及图像识别方法,把这几种图像分离,便可用来进行控制。

总之,由于手部动作的大部分是依靠前臂的肌肉及其肌腱来进行的,所以前臂的肌电中包含着手部动作的大部分信息,可以按照人的意志来控制前臂假手。但是,在全臂假手中情况则不一样,由于实际上可以得到的相应控制信息极少,所以不能采用上述方法。不过有人认为,决定上肢的位置时,上肢和锁骨起着协调作用,可以把上肢看作为锁骨的延伸物,并研究了通过肩部上下、前后和左右方向的动作在有关肌肉上所产生的肌电位,利用来控制手部上下、前后和左右动作方式的方案。

图 1-7 表示一种用电刺激作为选择假手动作类型的定时信号、用肌电开关来控制假手动作方向的多自由度假手(上臂、肩假手)的控制信号系统组成。该方案经临床实践,具有实用价值(日本早稻田大学研制)。

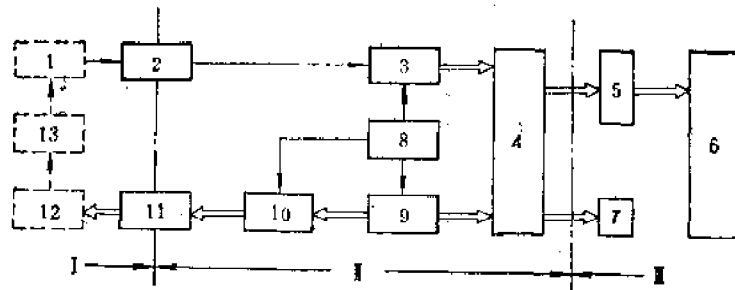


图 1-7 多自由度假手肌电控制信号系统组成

- 1—肌电; 2—表面电极; 3—肌电开关; 4—动作方向决定; 5—假手控制; 6—多自由度假手; 7—监控器;
8—刺激定时控制; 9—动作方向切换; 10、12—电刺激; 11—刺激电极; 13—判断

为了研制出具有实用化的多自由度上臂假手,日本东京电机大学开发了一种简易形电动假手(见图 1-8)。该假手是利用残疾人的上肢残端操作接触传感器的方法来实现手指开闭、腕部旋转和肘部屈伸三种运动,效果良好。这种不按照人的意志控制假手的方式还有其他类型,

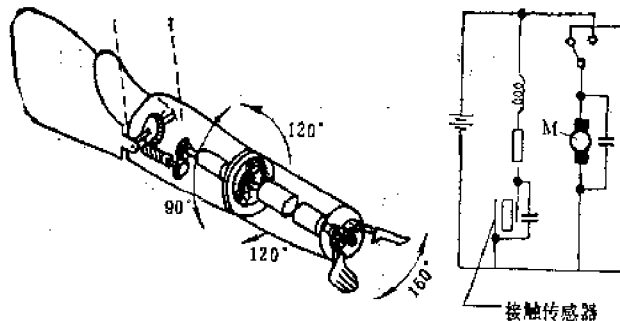


图 1-8 简易形电动假手及电路

可参阅有关文献,这里从略。

研制儿童用假手和成人用多关节假手是假肢发展的一个方向。瑞士与英国已具有制造儿童假手的丰富经验。多关节假手,即所谓适应手,它不仅在外表装饰上,而且在手的抓取自由度上,都完全仿照人的健手进行设计。

人体的感觉反馈自动调节机能非常高级,而以前的假手都采用开环控制方式,只能代替残肢者丧失的机械功能方面,缺乏对恢复感觉功能研究的注意,故使用起来仍不很方便。因此,使假手具有感觉反馈是提高其功能的一个重要的课题。这样,将使假手不仅可以作随意运动,而且可能有反射运动,成为一个较高级的自动调节系统。感觉反馈有机械式和电子式两种,目前比较有前途的一种是采用电刺激的方法,它是把来自压力觉传感器的信号,转换为电脉冲,并使用表面电极对皮肤进行电刺激,从而获得感觉反馈。

除了采用人体肌电作为控制信号外,有的还在进行更高级的脑电控制研究。据资料报道,美国一大学研制成一个由思想支配、可做七种动作的假臂。这种假臂是通过贴置在大脑部位的表面电极所拾取的脑电信号,并传给装在假臂里的微型电子计算机来控制动作的。

总而言之,当前为了研制出具有多运动自由度、并能够符合意志控制的假手,所遇到的主要困难是控制信号的选取和处理,以及结构的轻量化和系统的耐久性等问题。上述利用生物电来操纵机械进行动作,称之为生物电控制,这种控制方式是仿生学研究的一项重要内容,它不仅对康复医学、而且在宇宙开发和国防军事上的应用都有着积极的意义。

假足技术的研究也已引起很大的重视,与假手比较,其主要特点是假足的功能主要用于步行,所以不必要有如假手那样多的自由度,但是其在一瞬间要支持人体全部的重量,要求有充分的稳定性。

目前,假足发展的趋势概括起来具有如下几点:(i)应用积木式系统;(ii)构造轻型化,(iii)佩带舒适和外形美观;(iv)关节结构功能的改进。若从控制的观点来说,现在主要是进行单支假足的研究,它可分两大类:一种是非动力控制的、利用被动的机构(机械的、液压的或气动的)来实现步态的方式,一种是采用动力控制,以达到改善步态、实现上阶梯、爬坡等复

常类型的动作,以达到实现自由步行的目标。

三、间接代偿的器械

当前,由于交通事故、体育故事及工伤事故等引起脊椎损伤而造成四肢瘫痪或行动不自由的患者日益增多,所以间接代偿器械的研究在许多国家中都很重视。

在这项技术中,主要问题是选择操纵方式。由于患有高位截瘫的病人,只能利用一些残存的机能来作为动作指令,所以需要使用一些专门的传感器。可能利用的残存机能的动作及控制方法如表 1.4 所示。

对于这种器械,通常安装使用电动式轮椅车装具,有的还开发了在电动轮椅车上固定有机械手的器具,患者通过头部、颈部的动作,或前额部位的肌电,或眼珠运动,甚至是利用脑电波作为指令来操作,这种研究已在许多国家积极开展。为了给手、足有重度障碍的患者,在日常生活方面提供全面帮助,近年来在国外研究开发了一种称为“环境控制装置”的系统。该装置由传感器、显示器和本体等组成,利用残疾人的身体动作,通过传感器和本体,一边用显示器进行确认,一边操作电视机等连接机器,如图 1-10 所示。

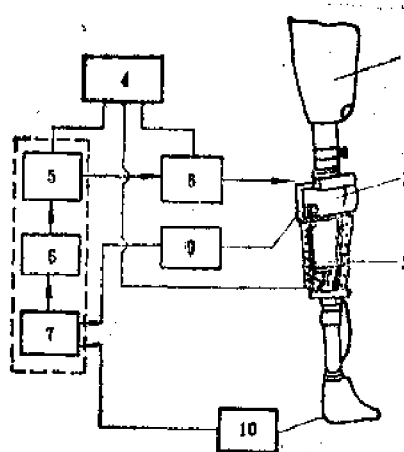


图 1-9 动力假足构成

- 1—吸附式套筒; 2—油压马达; 3—油泵;
4—镍镉电池; 5—数模变换; 6—中央处理机;
7—模数变换; 8—伺服放大; 9—角度传感器;
10—足部传感器

表 1.4 残存机能的动作及控制方法

控制部位	动作内容	适用范围
头部控制	前后、左右屈伸,旋转	可用于 C ₄ ~C ₆ 的脊椎损伤
眼睛控制	眼球运动,角膜、网膜电位	需要与别的控制合用,外观不好
口部控制	嘴唇动作	适用于大范围的残疾人
	舌	同上
	齿	同上
	声音	对脑瘫使用有困难
	呼气、吸气	快速动作难
颈部控制	上下、左右	可用于 C ₄ ~C ₆ 的脊椎损伤
肩部位置控制	肩峰屈伸、上举、向下	适用于大范围的残疾人
臂部控制	上臂旋转、肘屈伸	可用于 C ₇ 患者

续表

控制部位	动作内容	适用范围
手部控制	前后、左右动作	可适用于痉挛性患者
膝部控制	屈伸、下压的内外旋	可用于 C ₅ 患者
足部控制	背、底屈, 内外旋, 内外翻转	可用于 C ₆ 患者

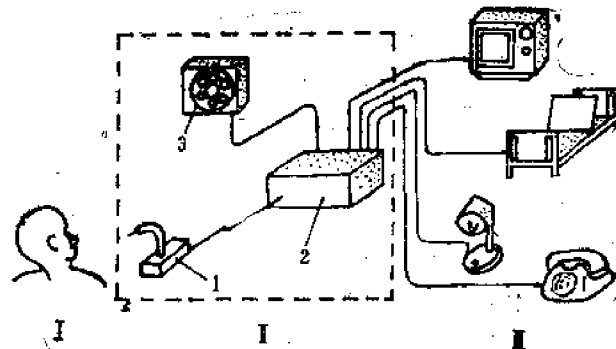


图 1-10 环境控制装置系统

I—患者; II—环境控制装置; III—连接机器;

1—传感器; 2—环境控制装置本体; 3—显示器

有关典型的疾病及适用的传感器列于表 1.5。通常采用最普遍的是呼-吸气压控制的开关控制系统。可是, 由于这种装置受到输入信号数目的限制, 所以在选择控制对象机器时, 必须边作依次循环边作选择, 这样既浪费时间又需对控制对象机器作限制。为了弥补这些缺点, 近年来正在积极开发用声音输入、微型计算机控制的环境控制装置。该系统可按随机抽样选择输入信号, 从而能控制范围广阔的对象机器。目前在国外, 这种用微处理机组成的声音识别装置已由几家公司做成商品, 这些系统都是把特定的说话者离散的声音语句与已事先学习的声音图谱作对照从而进行识别, 识别时作为对照用的声音图谱, 是由预先作三次发音所得的图谱平均化后存贮在随机存取存储器中。正在开发的系统可识别 100 个、甚至是更多的语句。

有关资料表明, 应用这种环境控制装置技术, 可使患者远程操纵电灯、收音机、电视机、机械手, 以及操作电动轮椅车和电动打字机等。把这种控制信息量很少且受感情支配的人和机器联系起来, 为四肢瘫痪患者服务提出了一种新想法和未来方向, 促进了医用护理机器人的研究和发展。

移动机械的开发也已十分活跃, 特别是研制了适用于下肢麻痹、四肢瘫痪、大脑性麻痹、脊椎裂、多发性硬化症、肌营养不良、小儿麻痹症、风湿性疾病、老年病以及不能行走的残疾人的各种型号的轮椅。目前已生产出一种起立轮椅, 该轮椅结构简单, 残疾人无需他人协助, 可由自身的肌力操纵或用外部电力驱动起立机构, 使自己从座位上慢慢地起立或返回到座位上, 能随心所欲地停留在任意高度上, 操作自如。这种轮椅可自行移动, 使残疾人获得更大的自理能力, 扩大了他们的活动范围及寻找职业和重新受训的机会, 而且可帮助他们随时随地进行起立锻炼, 有益于他们的健康。电动轮椅的发展也日益增长, 并趋于多功能化, 例如通过操纵可使轮子转动 90°, 实现轮椅的横向移动; 座位可以自动升降; 座位靠背可以从垂直位置向后倾斜

表 1.5 典型的疾病及适用的传感器

身体动作	传感器	疾 病 名 称							使用上应注意的问题
		颈椎损伤	脑性麻痹		脑血管障害	慢性关节	多发性	肌肉萎缩性	
		()	紧张性四肢麻痹	紧张性手足徐动症	双侧麻痹、假性球麻痹等	风湿症	硬化症	侧索硬化症	
呼吸	呼吸气压	○	○	○	△	○	○	○	口衔部分的材料、形状、卫生、唾液的堵塞
声音	音量	△	-	-	△	△	△	△	周围的声音
舌部	接触	○	-	-	△	△	△	△	卫生管理
眼皮	反射型光电	△	-	-	△	-	-	△	位置、感度的调节 失调感
颊部	接触	△	-	-	○	△	△	○	支持方法
头部	空气压	△	-	-	○	△	△	○	同上
	压力	△	-	-	○	△	△	○	同上
肩、臂	压力	△	△	-	-	-	△	△	同上
	光电	-	-	-	-	-	△	△	位置、感度的调节
肘部	压力	-	△	△	-	△	△	△	支持方法
手、指	压力	-	○	○	-	○	○	△	
	接触	-	△	-	-	○	○	○	
足部	压力	-	-	△	-	-	△	△	支持方法

注：表面 ○—可能性高；△—可能性有；—可能性少。

15°左右等等，从而大大提高了残疾人恢复正常生活的可能性。

此外，随着机器人技术的发展，步行式轮椅也得到了发展。这种轮椅打破了上述轮椅只能跑平地的局限，能在较为复杂的道路上行驶，跨越障碍，会上楼梯，为残疾人在公共场所的活动，提供了更多的便利。据报道，1985年日本研制成一台专为残疾人上楼梯而设计的轮椅。该轮椅为履带式步行装置，通过四只电机驱动，操纵灵活。

人的感觉信息中 80% 要来自眼睛，所以当人双目失明后，对工作和生活都会带来极大的不便。盲人们迫切希望之一是能够辅助他们进行自由、单独的行动，为了解决盲人的行动问题，所采用的辅助手段大致有三种，即是手杖、盲导犬和电子机械装置。迄今为止，利用机器作为辅助步行的装置中，激光手杖和超声波眼镜是比较有效的两种步助器具。众所周知，激光手杖是在盲人手杖上安装有三个不同方向的激光发射器和接受器。接受器把接收到的三个不同方向的返回激光变为三种不同频率的振荡。振动传到盲人手里就能感觉出三个不同方向有

否障碍存在。而超声波眼镜乃与“蝙蝠眼”的原理相似，它能发射和接受超声波，然后传给两耳，使人们判断出声音的方向和远近。由于超声波对不同障碍物的反射是不同的，所以对于经过专门训练的病人，还能使他辨别若干物体的种类。

近年来，英国和美国正在人体进行人工眼的探索研究。它是在人大脑的视觉区中埋藏电极，该电极与人体外的光线接收器相连。当有某种图像光信号时，电极就刺激大脑视觉中枢，从而产生相应图像。但是，目前这种人工眼还只能识别圆、方等简单图形和字母，离开实用还很远。

日本机械技术研究所从1977年开始进行了以盲导犬为目标模型，开发步行引导技术的计划。它是作为超声波眼镜等装置和人工眼的中间阶段的研究，即为解决辅助盲人行动问题的一种过渡手段，这种机械称为盲导犬机器人，如图1-11所示。盲导犬机器人的基本工作原理是通过机器对障碍物识别信息的处理机能来移动机器，而盲人则根据逐次接受到的有关障碍物信息的反馈，在某种程度上选择取舍它并决定自己的行动。这种盲导犬机器人的功能大致包括有三种：(i) 能按照盲人的指令，引导盲人前进、左弯或右弯等动作；(ii) 当检测到有障碍物的场合，能不服从盲人的命令而停车，并通知盲人；(iii) 能进行人-机之间的信息传递，具有位移和速度协调控制功能，当盲人离开对应机器轨迹规定的安全区域时，可通过电刺激来引导盲人。这种技术的研究是应用机器人工程和人一机系统技术进行的为辅助盲人步行的基础研究，目前已成功地进行了静态环境的模拟试验。实际上，这项技术不仅可用作为盲人的步行引导手段，而且可广泛地作为厂内搬运机械移动的引导技术。

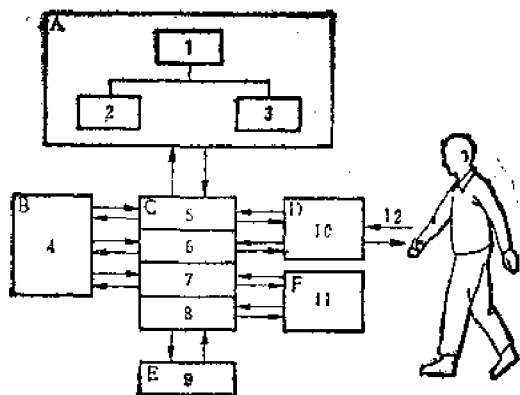


图 1-11 盲导犬机器人系统

A—移动用知识数据区；B—外界传感器系统；C—中枢系统；

D—通信系统；E—效果器系统；F—内部传感器系统；

1—推理机构；2—数据；3—规则；4—环境信息；5—环境信息管理；

6—规划；7—引导；8—操纵；9—移动机构；10—命令理解、引导信息提示；

11—位置、方向、速度；12—超声波

应该指出，上述辅助机器仅仅是与仿生机械学有关的康复工程中的一部分，而且其对象主要限于外表病残者。实际上，康复病残机能的问题，是一个涉及工程、医学、教育、心理及社会学等十分广泛而又复杂的问题，需要各个领域、各个部门的共同协作和相互支持。只有这样，才能创造出各种崭新的机械和器具，为残疾人服务，造福于社会。

第二章 仿生机械的结构分析

§ 2-1 概 述

仿生机械,例如假肢、医用机械手和机器人或工业机械手、机器人等,都是为了代替、补偿或扩大人类手足的机能,所以在仿生机械学中特别重视对人体上肢、下肢结构与机能的分析与研究,以便模拟、研制出高水平的人造手足。

根据人造手足用途的不同,其设计的出发点可以分为下列两种。

一种是从适应作业的形态来考虑、设计具有工作效率最高的机械。虽然,为了实现这种机械的功能,也参考人类的手足,但是所设计的外形和动作形态与人是不相同的,例如,工业机械手、机器人和车轮式智能移动机械等。

另一种是尽可能地采用与人类手足完全一样的外形和动作,以使所设计的人造手足能与使用者(残疾人)在物理上、生理上和精神上融为一体。因此,在设计时不仅要考虑提高其功能,还要力求做到重量轻、使用方便和形状与人手足一样,例如假手、假足等。

一、运动副及自由度

仿生机械的机构与任何机构一样,均由若干构件组成,构件则是通过运动副彼此几何连接,以产生确定的相对运动。这种所连接的两个构件间的所允许的相对运动个数,即称为运动副的自由度 f 。

大家知道,空间自由构件最多具有六个自由度。那么,运动副的自由度数必为 $0 < f < 6$ 。在仿生机械的结构中,常见的运动副如表 2.1 所列。根据运动副引入的约束的数目,可把运动副分为五级,即分别称为 I、II、III、IV、V 级副。

表 2.1 常见的运动副

运 动 副 名 称	表 示 符 号	自 由 度 数	约 束 数
转 动 副	R	1	5
移 动 副	P	1	5
球 面 副	S	3	3
圆 柱 副	C	2	4
螺 旋 副	H	1	5

在人造手足中,由于各运动副中的运动变量都要借助于各个驱动器来实现,而无论是转动的或移动的驱动器又均为一个自由度,所以在人造手足中所采用的运动副类型,实际上只有转动副和移动副两种。

若有两个以上的构件和运动副的组合,就构成为运动链。其中组成一个或多个封闭的系统称为闭式运动链,如果运动链的各构件没有构成首尾封闭的系统,则称为开式运动链。运

动链中独立的可能相对运动的个数,或确定各构件相互位置变化所需独立参数(广义坐标)的个数,称为运动链的自由度数 F 。

对于运动链,如果有一个构件被指定为相对固定件或机架,而且所有的可动构件又均有确定的运动,则这种运动链便成为一个机构。因此,运动链的自由度数也即为机构的自由度数。

为了使机构具有确定的运动,必须使输入参数或输入构件的个数等于机构的自由度数。否则,机构的几何运动将不确定,或者将无法运动,甚至遭到破坏。

从仿生学的角度,以及由于开式运动链具有自由度数较多的特点,所以在机械手、机器人以及假肢中,较多地采用空间开式运动链的机构。

二、空间机构的自由度计算

如前所述,一个自由构件在空间可具有六个自由度。若某一机构具有 n 个运动构件,那么,它们在未用运动副组合之前,应共有 $6n$ 个自由度。但是,当它们通过各种运动副连接起来而组成为机构之后,运动就要受到约束,自由度数也随之减少。自由度减少的数目,取决于运动副的性质,并应等于运动副引入的约束的数目。于是,空间机构的自由度可用下式计算:

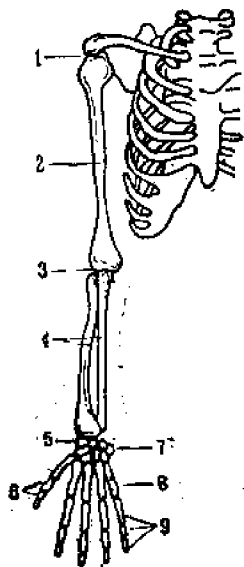
$$F = 6n - \sum_{k=1}^s k p_k \quad (2-1)$$

式中: F 为具有 n 个运动构件机构的自由度, n 为运动构件数, k 为运动副的级别序号(等于运动副引入的约束数), p_k 为相应于 k 级的运动副数目。

必须指出,为了正确地计算机构的自由度数,还应该正确地处理机构中的公共约束、复合铰链、局部自由度和虚约束等问题。

§ 2-2 人体上肢的机构模型

人体上肢骨骼的生理解剖图如图 2-1 所示。由图可知,手臂的运动是靠肩关节、肘关节和腕关节的活动来实现的。



- 1—肩关节;
- 2—肱骨;
- 3—肘关节;
- 4—尺、桡骨;
- 5—腕关节;
- 6—拇指骨;
- 7—腕骨;
- 8—掌骨;
- 9—指骨

图 2-1

人体上肢骨骼构造

肩关节可作前屈和后伸,内旋和外旋、内收和外展,以及环绕等多项运动。由于前屈和后伸与内收和外展在机构学中作为一种动作来处理,所以可认为肩关节具有三个转动自由度。

肘关节可作屈曲和伸展运动。另外,通过尺、桡联合关节的共同运动,可以完成前臂的旋内和旋外动作。所以认为肘关节具有两个转动自由度。

腕关节可作伸展和屈曲(背屈和掌屈),内转和外转动作。所以认为腕关节具有两个转动自由度。

人体手臂各个关节的活动范围列于表 2.2。

手部关节包括腕掌关节、指掌关节和指间关节三部分,运动十分复杂。

从人体解剖生理学也可以知道,人手食指、中指、无名指及小指的结构大致是一样的。掌指关节(MP)属于球窝关节,可作屈伸、收展、环绕等多种

表 2.2 人臂各关节的活动范围

肩内旋、外旋	θ_1	+45°、-90°
肩前屈、后伸	θ_2	+180°、-(40°~60°)
肩环绕(上臂旋转)	θ_3	+90°、-90°
肘屈伸	θ_4	+145°、-5°
前臂旋内、旋外	θ_5	+90°、-90°
腕屈伸	θ_6	+(50°~60°)、-70°

动作,而近端指关节(PIP)和远端指关节(DIP)则属于滑车关节,只可进行屈伸动作。拇指的腕掌关节(CM)为一个鞍状关节,可作屈伸、收展和内外翻转等动作,而掌指关节(MP)和指关节(IP)是属于滑车关节,只能作屈伸运动,其中腕掌关节的内外翻转动作与另两指关节的屈伸运动配合,能够完成复杂的空间运动,常称为拇指的对掌运动。

显然,人的上肢结构十分精细,动作极其精巧,功能非常复杂,而且其运动是由人的中枢神经直接控制的,可以按照人的意志实现各个动作或者协调动作,是一个能完成多种功能的多输入-多输出系统。可以认为,从目前工程可能应用的技术来看,要完全模拟和再现上述各个方面还是无法做到的。

但是,若从工程的观点,把手视作为一个机构;则可认为它是一种由许多连杆构件组成的空间开式运动链,如图 2-2 所示,肱骨 1 与肩部以球面副相连;尺、桡骨 2、3 通过一个 II 级副彼此相连,并分别用转动副和球面副与肱骨 1 相连;手掌简化成为一个构件 4,它与尺、桡骨和五个手指骨均用有能作两个相对转动的 IV 级副相连;各手指指骨间均用转动副彼此相连接。

现应用式(2-1)求图 2-2 所示的整个上肢的自由度。从图可知,

$$n = 19, p_I = 0, p_{II} = 1, p_{III} = 2, p_{IV} = 6, p_V = 11,$$

于是 $F_n = 6 \times 19 - (2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 6 + 5 \times 11) = 27。$

同理可求得手指部分的自由度为

$$F_f = 6 \times 15 - (4 \times 5 + 5 \times 10) = 20。$$

由此可知,人体上肢是自由度最多的一种开式运动链,适应能力很强,而且其中有三分之二左右的自由度则是集中在细小的手指部位,可完成十分灵巧的动作。

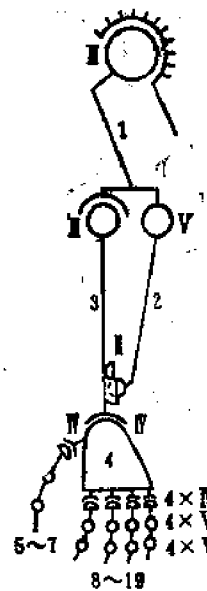


图 2-2 人手机构模型

§ 2-3 拟人假手的机构模型

一、建造拟人全臂假手机构模型的基本原则

如上所述,对于假手来说,在设计时不仅要考虑提高功能,还要力求做到结构轻巧、使用万

便和形状与人手一样等。所以,自由度数的选择及运动副的配置,是研究拟人全臂假手的一个重要问题。

为了从实用的观点出发来建造全臂假手的机构模型,可以考虑采用如下原则:

1. 为了使假手能以空间物体所具有的六个自由度自由地操作,近似地实现人手那样的动作,至少必须确保假手有七个自由度,即肩部三个、肘部与前臂两个、腕部一个和手指部一个。而且,把全臂划分为上臂、前臂和手指三个部分,用空间开式运动链组成的连杆机构来处理,使假手结构近似于人体上肢骨架构造。

2. 所有多自由度的关节运动副,一般都分解为由若干个单自由度的运动副组成,每一个运动副都相应地配有一个动力驱动装置。

根据人手各关节连接的特点,且不考虑各关节处的相对滑移,在假手机构中只采用两种具有一个自由度的转动副,即回转型“R”和摆动型“P”运动副。回转是以连杆轴线为中心旋转的形式,可用来控制连杆端部的姿势,而摆动是以转轴为中心,使连杆轴线回转的形式,连杆端部同时产生位置变化,但是由于结构方面的限制,在实际上传杆轴线是不可能回转 360° 的。

由代数学中的排列与组合理论可知,在 m 个不同元素里,如果每个元素均可重复选取,那么取 n 个元素的所有排列的种数为

$$N = m^n \quad (2-2)$$

式中, m, n 均为自然数。

于是,若把人造手臂的自由度数选取为6,且只采用“R”和“P”这两种形式的转动副,那么可由式(2-2)计算求得其组合形式共有64种,即 $N = 2^6 = 64$ 。

此外,若对自由度数的分配和组成再加下列两条限制,即(i)分别使用“R”型和“P”型运动副各三个来组成六个自由度,(ii)不使用“R”-“R”型的运动副配置形式,则可满足上述诸条件的人造手臂形式仅有如图2-3所示的四种。

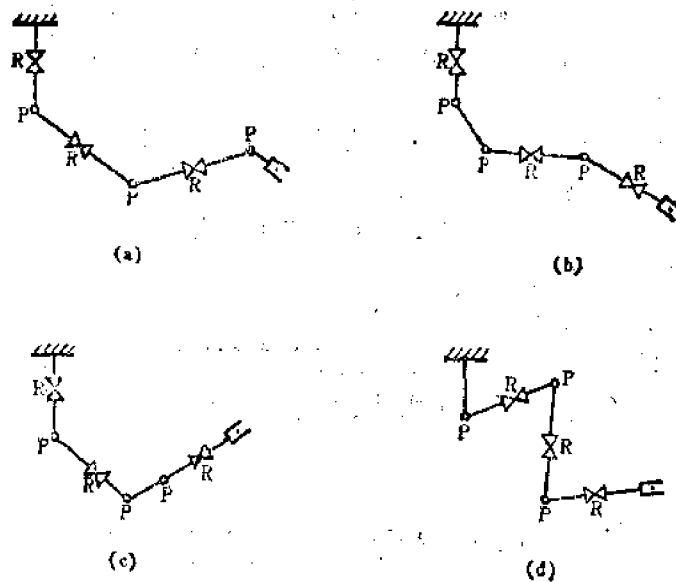


图 2-3 人造手臂机构形式

- (a) R-P-R-P-R-P 型; (b) R-P-P-R-P-R 型;
 (c) R-P-R-P-P-R 型; (d) P-R-P-R-P-R 型

于是,根据上述原则,既考虑实用要求,又尽可能地模拟人体手臂结构,可确定采用一种较理想的人造手臂的机构模型,即 R-P-R-P-R-P 型,如图 2-4 所示。

图 2-5 表示这种人造手臂在 y-z 平面内的动作范围图解。由图可知,其动作范围的最大半径为

$$R_{\max} = l_1 + l_2 + l_3 \quad (2-3)$$

动作范围的最小半径,由图 2-6 可知,可用下列关系式表示为:

$$R_{\min}^2 = l_1^2 + m^2 - 2l_1m \cos \beta$$

因为 $m^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos \theta_3$,

$$\beta = 180^\circ - \theta_3 - \alpha,$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{l_3 \sin \theta_3}{m} \right),$$

从而可得

$$R_{\min} = \left\{ l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos \theta_3 + 2l_1 \sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos \theta_3} \cdot \cos \left(\theta_3 + \sin^{-1} \frac{l_3 \sin \theta_3}{\sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos \theta_3}} \right) \right\}^{1/2} \quad (2-4)$$

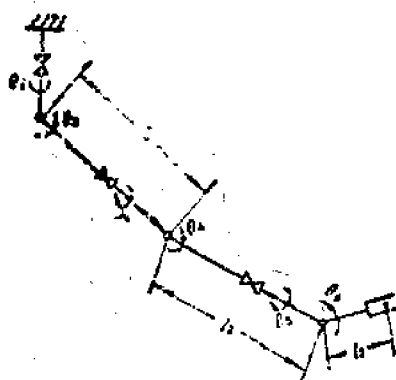


图 2-4 理想的人造手臂的机构模型

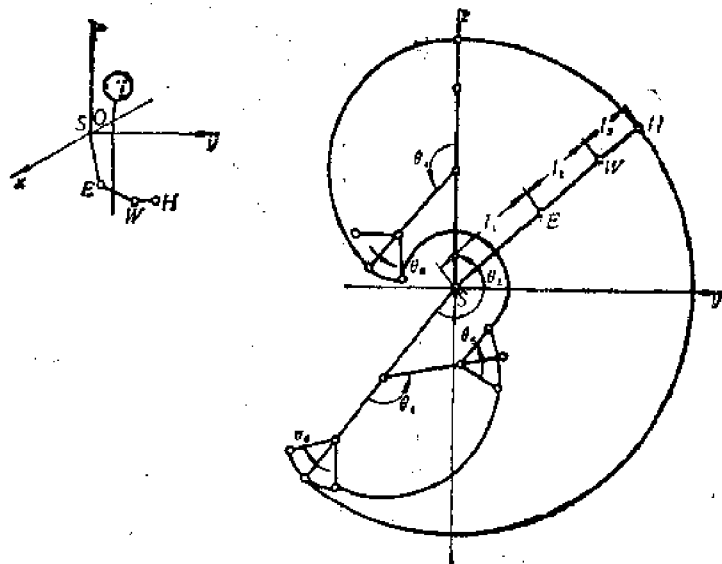


图 2-5 人造手臂的动作范围图解

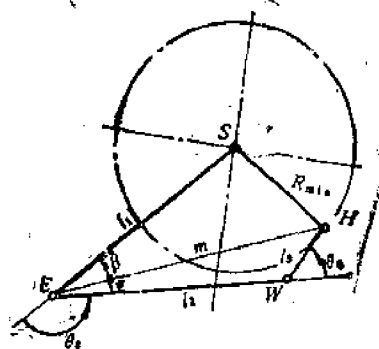


图 2-6 确定人造手臂最小动作半径

二、假手手指机构模型

如上所述,人体上肢约有 27 个自由度,可以认为是一个功能十分完善、具有反馈的闭环伺服机构,然而其中有 20 个自由度却是集中在手指部位,所以上肢的大部分功能是表现在手指灵巧的动作上。

现有的人造手指的结构虽然有多种形式，但是可供实用的手指机构大多还是采用具有1—2个自由度的平面连杆机构，如图2-7所示。

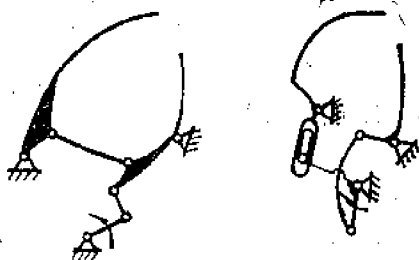


图2-7 人造手指的平面连杆机构

实际上，采用多自由度的开式运动链机构来完全模拟人的手指结构是不可能的。所以，为了使实用的人造手指机构尽可能地做到拟人化，采用具有单自由度的闭式运动链机构来组成多关节手指结构是一种可行的方案。实践表明，采用平面连杆机构和空间连杆机构来分别模拟人手食指和拇指结构，不仅能使假手手指的外形与人手相似，而且可以比较逼真地再现人手的

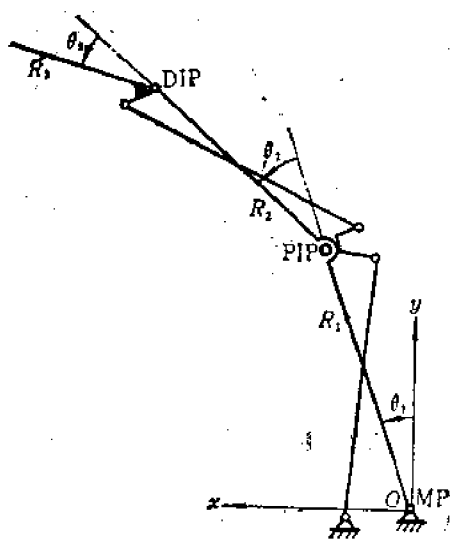


图2-8 食指机构

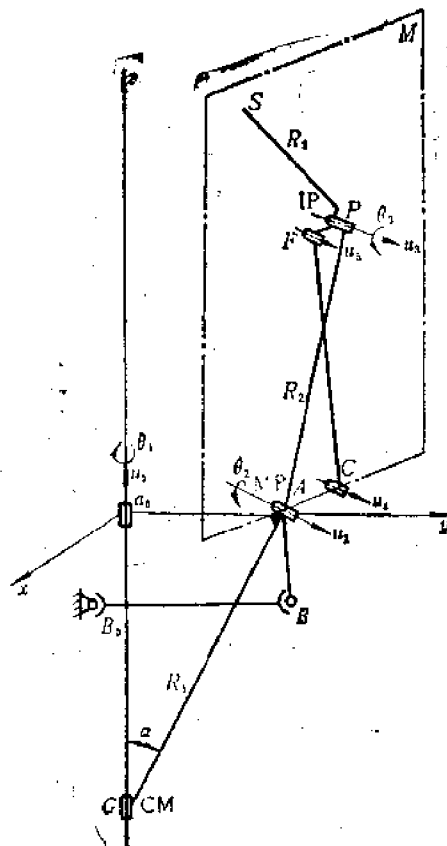


图2-9 拇指机构

基本动作。

拟人食指机构简图如图 2-8 所示。该机构同样可适用于中指、无名指及小指。它是由平面六杆机构组成,其中 R_1, R_2, R_3 分别表示了手指的第一、二、三指节, R_1 为主动杆。

拟人拇指机构考虑到其对掌运动主要由腕掌关节的内外旋转及掌指关节的屈伸运动合成,所以为了实现这一复杂的空间运动,采用一个空间四杆机构(RRSS 型,“R”为转动副,“S”为球面副)及一个平面四杆机构来组合,如图 2-9 所示。其中 R_1, R_2, R_3 分别表示拇指节, R_1 为主动杆。当主动杆 R_1 绕 z 轴旋转 θ 角度,则由连杆带动 R_2 和 R_3 , 分别绕关节轴线 u_2, u_3 相对转动 θ_2, θ_3 角度,从而实现对掌动作。

§ 2-4 机械手机构与抓取误差分析

机械手和机器人是为促进生产过程的无人化和省力化、或代替人在特殊、危险、恶劣环境中进行操作而研制的一种自动机,所以它往往采用自由形的结构。

决定于机械手所具有的自由度数目及其不同组合,其运动图形也不同,但基本上可归纳为如图 2-10 所示的四种运动形式。各运动形式的特性对比列于表 2.3。

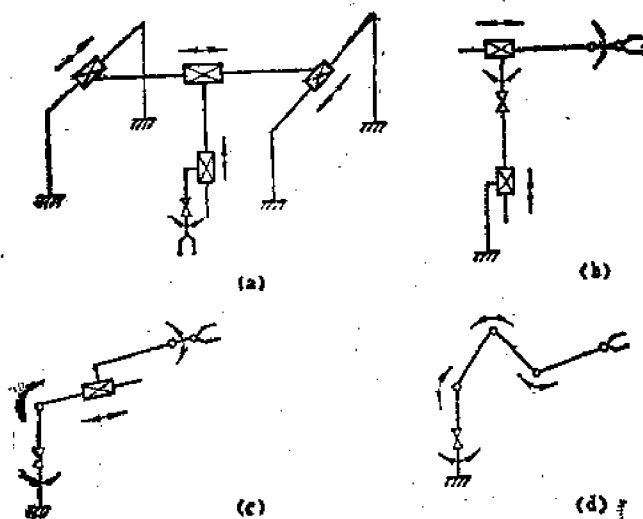


图 2-10 机械手运动形式

(a) 直角坐标式; (b) 圆柱坐标式; (c) 球坐标式; (d) 多关节式

表 2.3 各运动形式的特性对比

运动形式	运动范围图形	所占空间	相对工作范围	直观性	应用情况	备注
直角坐标式	立方体	大	小	强	较多	
圆柱坐标式	圆柱体	较小	较大	较强	多	
球坐标式	球体	小	大	一般	较少	能提取地面上的物体
多关节式	球多球体	最小	最大	差	少	能绕过障碍物进行工作

图 2-11 表示目前世界上实用的两种最基本的工业机器人机构运动简图。若不计手爪开闭

的自由度,它们都具有五个自由度,只不过 Unimate 型采用球坐标型,而 Versatran 型则采用圆柱坐标型。机械手的每一个自由度,都相应地配有一个动力传动装置。

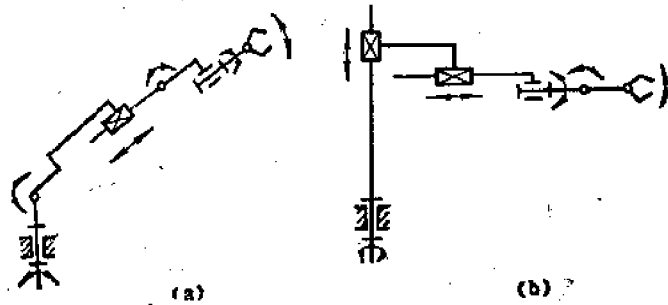


图 2-11 工业机器人机构运动简图:
(a) Unimate 型; (b) Versatran 型

机械手的手部(也称抓取机构或手爪)是直接用来抓取和握持(或吸附)物体、或夹持专用工具(如喷枪、扳手、焊具等)进行操作的部件。和假肢不同,其手部结构形式并不像人手,它的手指形状也不像人的手指。决定于它的使用场合和被抓取物体的形状、尺寸、质量、材质、表面状况等的不同,其手部结构有多种多样,而且大部分的手部结构都是根据特定的物体要求而专门设计的。按照手部抓取物体的原理,通常可把它分为夹持式和吸附式两大类。

夹持式是最常见的一种抓取形式,而夹持式手部按其手指夹持物体时运动不同,又可分为单支点回转型、双支点回转型和平移型三种(图 2-12)。

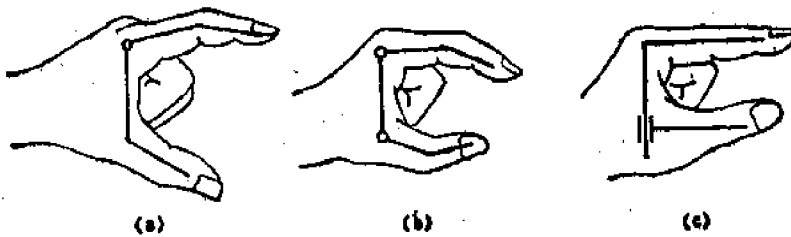


图 2-12 手指运动形式示意图
(a) 单支点回转型; (b) 双支点回转型; (c) 平移型

机械手能否准确地夹持物体,并以一定精度送到指定位置上,不仅取决于机械手的位置精度(由手臂及手腕等运动部件确定),而且也与手指的抓取误差(也称定位误差)的大小有关。例如采用回转型手指抓取不同直径的物体时,手指回转中心与物体轴心位置间的距离,将随被抓取物体的半径变化而改变,因而对手指的抓取误差产生影响。

抓取误差是手指抓取机能的重要指标之一,在设计、选用手指形状尺寸及参数时,必须很好地加以考虑,以使抓取误差控制在较小的范围内。

下面分析几种典型手指的抓取误差。

1. 平移型手指的抓取误差

由于平移型手指是作平行移动,故物体的直径变化不会影响其轴心的位置,即其抓取误差为零。

2. 单支点回转型手指的抓取误差

图 2-13 为单支点回转型手指简图。图中 l_{AB} 为手指长度,即手指的回转支点 A 到 V 形

槽顶点 B 的距离; 2θ 为 V 形槽的夹角; β 为偏转角, 即 V 形槽的角平分线 BC 与手指 AB 间的夹角; R 为物体的半径;

那么, 物体的轴心位置 C 与手指的回转支点 A 之间的距离 X 可由余弦定理求得

$$X = \sqrt{l_{AB}^2 + l_{BC}^2 - 2l_{AB}l_{BC} \cos \beta} \quad (2-5)$$

因为

$$l_{BC} = \frac{R}{\sin \theta}$$

则上式成为

$$X = \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R}{\sin \theta}\right)^2 - 2l_{AB}\left(\frac{R}{\sin \theta}\right) \cos \beta} \quad (2-6)$$

将式(2-6)简化并整理后得

$$\frac{X^2}{(l_{AB} \sin \beta)^2} - \frac{(R - l_{AB} \sin \theta \cos \beta)^2}{(l_{AB} \sin \theta \sin \beta)^2} = 1 \quad (2-7)$$

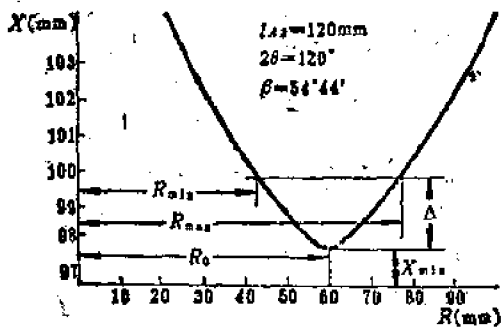


图 2-14 物体半径与抓取误差关系曲线

由图 2-14 可以看出, 当 $R_0 \geq R_{\max} > R_{\min}$ 或 $R_0 \leq R_{\min} < R_{\max}$ 时, 即 R_{\max} 和 R_{\min} 在双曲线对称点 R_0 的同侧时, 其抓取误差为

$$\Delta = \left| \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R_{\max}}{\sin \theta}\right)^2 - 2l_{AB}\left(\frac{R_{\max}}{\sin \theta}\right) \cos \beta} - \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R_{\min}}{\sin \theta}\right)^2 - 2l_{AB}\left(\frac{R_{\min}}{\sin \theta}\right) \cos \beta} \right| \quad (2-9)$$

若 $R_{\min} < R_0 < R_{\max}$, 即 R_{\max} 和 R_{\min} 分别在双曲线对称点 R_0 的两侧时, 抓取误差取 Δ_1 和 Δ_2 中的最大一个, 而 Δ_1 和 Δ_2 可分别利用下式求得

$$\Delta_1 = \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R_{\max}}{\sin \theta}\right)^2 - 2l_{AB}\left(\frac{R_{\max}}{\sin \theta}\right) \cos \beta} - l_{AB} \sin \beta, \quad (2-10)$$

$$\Delta_2 = \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R_{\min}}{\sin \theta}\right)^2 - 2l_{AB}\left(\frac{R_{\min}}{\sin \theta}\right) \cos \beta} - l_{AB} \sin \beta. \quad (2-11)$$

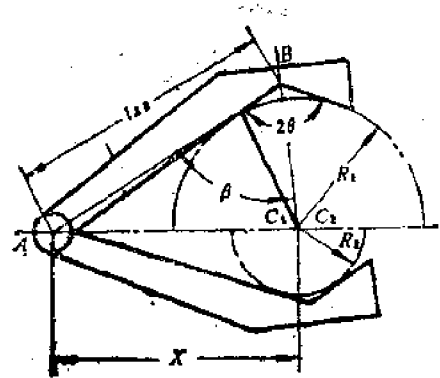


图 2-13 单支点回转型手指

显然, 上式为一个双曲线方程式, X 随 R 变化的关系曲线如图 2-14 所示。

由分析式(2-7)可知, 当 $R = R_0 = l_{AB} \sin \theta \cos \beta$ 时, X 值最小, 且为

$$X_{\min} = l_{AB} \sin \beta. \quad (2-8)$$

同时, X 的变化是以 R_0 为分界, 左右对称的。

当物体的半径由 R_{\max} 变化到 R_{\min} 时, X 值的最大变化量, 即抓取误差, 用符号 Δ 表示。

但是必须指出,在进行手部设计时,往往要求按给定的物体尺寸 R_{\max} 和 R_{\min} 来确定手部的尺寸。此时,为了减小抓取误差,一方面可通过适当加长手指长度 l_{AB} 来达到,另一方面也可通过合理地选择偏转角 β 来进行。

由图 2-14 分析可知,当存在

$$R_0 = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} = R_{cp}$$

时,抓取误差为最小。于是可得最佳偏转角为

$$\beta_c = \cos^{-1} \left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2 l_{AB} \sin \theta} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{R_{cp}}{l_{AB} \sin \theta} \right) \quad (2-12)$$

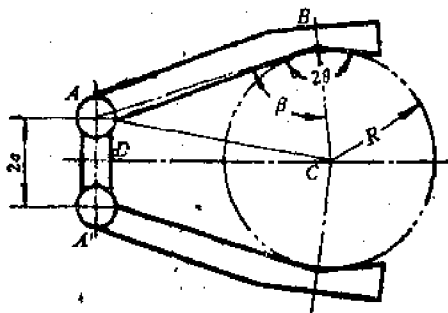


图 2-15 双支点回转型手指

那么,当给定 V 型手指夹角 θ 值,便可求得对应于不同比值 l_{AB}/R_{cp} 时的最佳偏转角 β_c ,从而可求得单支点回转型手指的抓取误差。

3. 双支点回转型手指的抓取误差

双支点回转型手指如图 2-15 所示。图中 l_{AB} 为手指长度; 2θ 为 V 形槽夹角; β 为偏转角; $2a$ 为两回转支点间距。

根据几何关系,物体的轴心位置 C 到手指

两回转支点连线的垂直距离可用下式表示

$$X = \sqrt{l_{AB}^2 + l_{BC}^2 - 2 l_{AB} l_{BC} \cos \beta - a^2} \quad (2-13)$$

因为

$$l_{BC} = \frac{R}{\sin \theta}$$

于是,可把上式改写为

$$X = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} (R - l_{AB} \sin \theta \cos \beta)^2 + (l_{AB}^2 \sin^2 \beta - a^2)} \quad (2-14)$$

或

$$\frac{X^2}{l_{AB}^2 \sin^2 \beta - a^2} - \frac{(R - l_{AB} \sin \theta \cos \beta)^2}{\sin^2 \theta (l_{AB}^2 \sin^2 \beta - a^2)} = 1 \quad (2-15)$$

显然,该方程也为双曲线方程,其曲线形状与图 2-14 类似。于是,如同对单支点回转型手指抓取误差的分析,也可得出下列几点:

(1) 当 $R = R_0 = l_{AB} \sin \theta \cos \beta$ 时, X 值为最小,且为

$$X_{\min} = \sqrt{l_{AB}^2 \sin^2 \beta - a^2} \quad (2-16)$$

X 的变化同样是以 R_0 为分界,左右对称。

(2) 当 $R_0 \leq R_{\min} < R_{\max}$ 或 $R_0 \geq R_{\max} > R_{\min}$ 时,抓取误差为

$$\Delta = \left| \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R_{\max}}{\sin \theta} \right)^2} - 2 l_{AB} \left(\frac{R_{\max}}{\sin \theta} \right) \cos \beta - a^2 \right|$$

$$- \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R_{\min}}{\sin \theta}\right)^2 - 2l_{AB}\left(\frac{R_{\min}}{\sin \theta}\right)\cos \beta - a^2} \quad (2-17)$$

(3) 当 $R_{\min} < R_0 < R_{\max}$ 时, 抓取误差取 Δ_1 和 Δ_2 中的最大者, 其中

$$\Delta_1 = \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R_{\max}}{\sin \theta}\right)^2 - 2l_{AB}\left(\frac{R_{\max}}{\sin \theta}\right)\cos \beta - a^2} - \sqrt{l_{AB}^2 \sin^2 \beta - a^2}, \quad (2-18)$$

$$\Delta_2 = \sqrt{l_{AB}^2 + \left(\frac{R_{\min}}{\sin \theta}\right)^2 - 2l_{AB}\left(\frac{R_{\min}}{\sin \theta}\right)\cos \beta - a^2} - \sqrt{l_{AB}^2 \sin^2 \beta - a^2}. \quad (2-19)$$

(4) 当手指仅抓取 R_1 和 R_2 两种尺寸的物体时, 偏转角 β 按下式计算

$$\beta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{R_1 + R_2}{2l_{AB} \sin \theta}\right), \quad (2-20)$$

其抓取误差为最小。

下面简单介绍设计机械手的几个主要技术参数。

机械手的主要技术参数, 是说明机械手规格和性能的具体指标, 一般包括以下几个方面。

1. 抓取物重

这是指机械手正常动作时所能抓取或搬运的最大物重。它是机械手规格中的主要参数, 对其他参数的设计均有影响, 在设计中应给以重视。

按抓取物重的大小, 可以把机械手大致分为:

微型——抓取物重小于 1 kg;

小型——抓取物重为 1~5 kg;

中型——抓取物重为 5~30 kg;

大型——抓取物重为 30~50 kg;

重型——抓取物重大于 50 kg。

2. 自由度数和坐标形式

机械手的自由度数和坐标形式的选择, 应按机械手现场具体的作业要求而定, 一般具有 4~5 个自由度便可满足。而对于一些专用机械手, 往往只要有 2~3 个自由度就可适应工作要求。

3. 运动速度

运动速度是反映机械手性能的一项重要技术参数, 它与机械手的抓取物重、驱动方式、定位精度和行程距离等有关系。目前, 通用机械手的最大移动速度在 1000 mm/s 左右, 最大回转角速度在 180°/s 左右。而一般采用的移动速度常为 200~300 mm/s 左右, 回转角速度在 50°/s 左右。

4. 运动行程

机械手的运动范围与人工操作时所能达到的空间范围类比大致如下:

小于 0.01 m³ 时, 相当于人工进行微小、精细的操作范围;

处于 0.01~1 m³ 时, 相当于人工坐着的操作范围;

处于 1~10 m³ 时, 相当于人工站着或略有走动的操作范围;

大于 10 m³ 时, 相当于人工巡回的操作范围。

为了使机械手具有一定的通用性, 一般地要求手臂的回转行程范围应大于 180°, 伸缩行

程范围为 500~1000 mm,而高低行程范围在 2000 mm 以内。

5. 位置精度

位置精度也是衡量机械手工作质量的一项重要指标。一般来说,位置精度所指的是重复位置精度。位置精度的高低取决于位置控制方式、以及机械手运动部件本身的精度和刚度,且与抓取物重、运动速度等也有密切关系。目前可达到的位置精度大多为 $\pm 1\sim 0.5$ mm。在装配作业的场所,则要求达到 0.02~0.05 mm。

§ 2-5 步行机构概述

人体下肢的运动是以各关节为轴的运动,而两侧下肢关节共由 62 块骨骼组成。大腿以股关节为轴可作屈伸、回转和内外旋等动作。膝关节主要用来屈伸下腿的,其膝盖骨在膝关节屈伸时可使上下屈伸运动稳定化。足底关节可向足背和足底两侧屈伸,并可作内外转动。人体下肢的各关节运动范围如表 2.4 所列。

表 2.4 人体下肢的各关节运动范围

关节名称	运动名称	运动范围
股 关 节	屈 曲	约 120°
	伸 展	约 30°
	内 外 旋	各约 45°
膝 关 节	屈 曲	约 120°
	伸 展	
足 底 关 节	背 屈	约 45°
	底 屈	约 45°

人体双侧下肢的机构模型可如图 2-16 所示。

如前所述,近代的残疾人用的假足,多采用连杆机构组成骨骼型,最多具有四个自由度,如图 2-17 所示。其中膝关节,可由四连杆机构或单铰链机构组成(图 2-18)。

机器人的移动机能,对扩大其作业范围,提高其作业功能,是很有价值的。所以近 10 多年来,人们对机器人的移动机构进行了大量的研究。目前,机器人所采用的移动机构,大致可归纳为两种形式:

一种是在轨道上作限定运动、或以路面某一参考物为基准作自由运动的车轮型;另一种是由空间连杆机构组成的多足型。

1. 车轮型移动机构

车轮型移动机构有遥控式、引导式和自走式三种。

遥控式是由人远距离操纵机器人移动的一种形式,如在处理爆炸物和放射性物质的操作

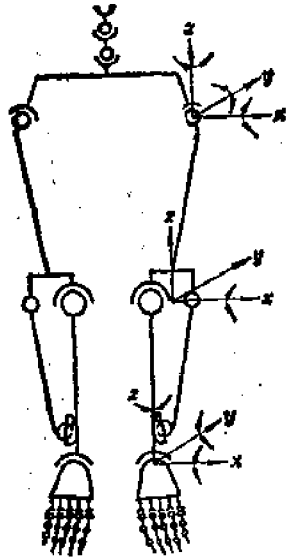


图 2-16 人体下肢机构模型

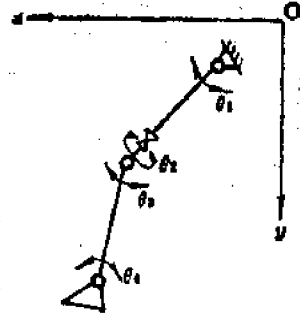


图 2-17 假足机构自由度

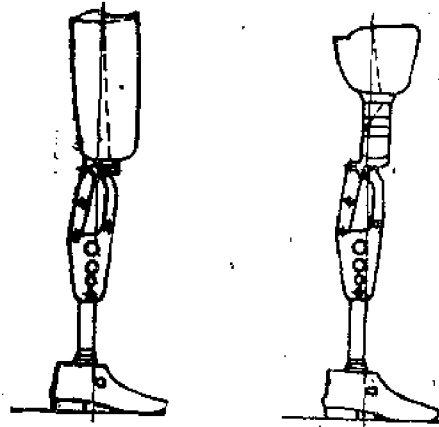


图 2-18 四连杆机构膝关节

中,可采用这种车轮型遥控机器人。

导引式是在设定的轨道上预先设下引导(如电缆、白线条等),使机器人利用视觉装置边检测边沿着引导线移动,如工厂里用的无人运输车便是这种形式之一。

自走式是机器人能以某种方式识别、判断自身的位置,并能在地面上自由移动。前述的盲导犬机器人就是这种形式。

图 2-19 表示一种可升降阶梯的六轮型移动车。

2. 多足型移动机构

多足型移动机构是仿人或动物步行的一种步行机械,可分为两足、四足、六足和八足等,其中以两足机器人步行机械难度最大。为了使步行机械的移动形态类似于生物体,它必须具备

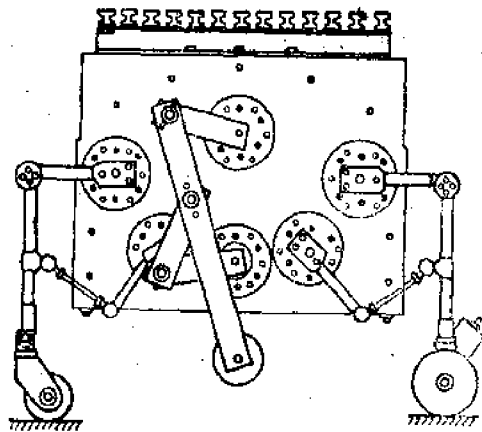


图 2-19 六轮型移动车

有生物体移动时各种姿势的稳定形态和适应环境的能力。

图 2-20 表示一种两足步行机械的连杆机构模型，它是一种多自由度、不稳定的连杆机构。图中连杆 I-II 构成足底面，连杆 III 表示小腿，连杆 IV 表示大腿，连杆 V 表示腰部，连杆 VI 表示躯干。各关节的自由度数：

- I-II 之间趾关节可绕 x 轴转动，具有一个自由度；
- II-III 之间踝关节可绕 x 和 y 轴两个方向转动，有两个自由度；
- III-IV 之间膝关节可绕 x 轴转动，有一个自由度；
- IV-V 之间关节可绕 x, y, z 轴三个方向转动，有三个自由度；
- V-VI 之间关节可绕 x, y 轴两个方向转动，有两个自由度。

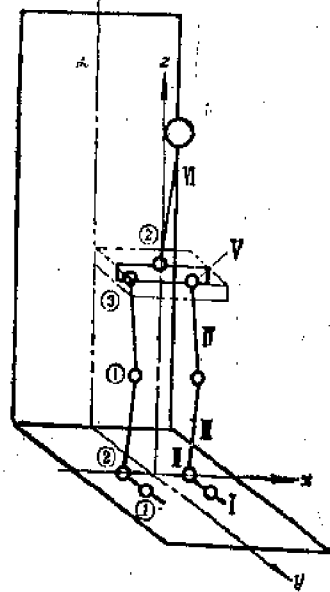


图 2-20 两足步行机的连杆机构模型

所以，该两足步行机械的连杆机构共有 16 个自由度，有可能近似地模拟人体双足步行的机能。

对于两足步行机械来说，一个很重要的问题是：要求所设计的关节结构具有 2~3 个自由度，在任意位置都能自锁，并能保持稳定自由的姿势，甚至在切断动力源的应急情况下，也能保持稳定的姿势。

第三章 仿生机械运动的模拟

§ 3-1 概 述

运动是生物的最主要特性，而且它往往表现着“最优”的状态。运动模拟就是研究生物运动的几何性质，包括运动轨迹和运动规律、速度及加速度等，寻找出其共同的规律，并把它抽象为数学模型，然后根据需要简化为实用的运动模型，从而作为设计仿生机械运动机构的依据。

大家知道，机构是为了产生一定要求的运动。所以机构的运动设计常常是复杂机器设计的第一步。例如，为了进行机器人手臂和两足步行机构及控制的设计，首先必须认真进行人体上肢运动及下肢步行姿态的研究与分析。

运动测定的方法，按照其空间和时间的表现手段不同，可分为好几种，如表 3.1 所列。

表 3.1 运动测定方法的分类及其特点

测 定 方 法	空 间	时 间
电影照相机 电视摄像机	图 像	每 帧 时 间 扫 描 时 间
半导体照相机 测 角 器 加 速 度 计	坐 标 角 度 加 速 度	实 时
光点照相 记时轮转全景照相	轨 迹 图 像	闪 光 时 间 爆 光 时 间
通-断开关	/	实 时

用电影照相机进行照相测定是一种常用的方法，它可以记录到身体各部分空间位置的图像，并能摄取在微小时间内变化的图像，其优点是可直接记录动作的视觉图像，但是要使其定量化需要花费很多的时间和精力。采用电视摄影机的方法，虽然可通过电子计算机将图像处理自动化，但是为了要把多维的图像变换为一维的电信号，往往要受到扫描线数(分辨率)和时间(每秒帧数、快门速度)的限制。为了克服上述问题，可采用半导体照相机进行测定，它可实时直接地获得标点的坐标值，但是其缺点是不能反过来进行图像记录。

除了上述介绍的光学测定方法外，还可采用在身体关节部位上安装电气角度计而直接进行关节角度测定的方法和通过加速度计而进行运动图形测定的方法。这两种方法虽然都是非照相型的接触式测定方法，但是具有不要测定空间、价格较便宜且可实时测定等优点。

作为更简便的测定方法有：在标点处安置灯光，通过在暗室内打开照相机快门而进行照相的光点轨迹法；利用旋转快门或让照明闪光而进行照相的计时轮转全景照相或杠杆式照相镜头照相的方法等。采用这些方法，通过光源的周期性闪光，虽然也能记录到图像的时间信息，但是读取其数据却很烦杂。所以，若仅仅是为了取得时间信息，特别是在步行分析中，大多采用通-断方式的开关作为时间测定的方法。

对步行分析的现状调查表明，采用半导体照相机和电子计算机组合作为运动测定的方法，将会得到不断发展。这种发展倾向也将同样存在于上肢及日常生活动作的测定中。

必须指出，这里所指的运动分析从本质上来说，是以生物体作为对象的，而在康复医学工程领域中是以残疾人作为对象的，所以将会给测定及数据处理带来各种问题。例如，由于肌肉的膨胀及皮肤的收缩将会引起身体表面标点的移位或使测定装置固定产生困难，而且测定行为本身还会受到人的心理、生理变化的影响。为了消除上述标点位置的不确定性带来测定的困难，最好对生物体采用非接触式的测定方法。但是，目前常用的半导体照相机方法还需在身体上安装一组红外发光标点，所以仍处于半非接触式测定的状况。

有关测定数据的处理，可以从应用的两个方面进行考虑，即：

- (1) 对能通过五感检查的现象，要做到客观化、定量化。
- (2) 对不能通过五感检查的现象，要通过分析做到显在化、实现化。

例如，在康复医学工程领域中，前者的主要目的是用于对治疗、手术、训练效果和假肢、装具、轮椅子的适合性两方面进行综合统一的评价，所以希望采用价廉、简便的测定处理方法；后者的目的是为了决定治疗、手术、训练的方针和假肢、装具等的调整、开发而进行分析检查，所以要求具有能对动作进行多方面分析的综合测定功能和高度的数据处理功能的大规模测定处理系统。

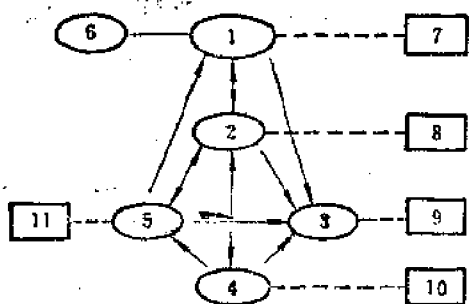


图 3-1 运动分析系统的构成

- 1—记录部； 2—处理部； 3—显示器；
 4—操作部； 5—测定部； 9—其他单位记录部；
 7—融通、公开； 8—可靠、扩展； 9—直观、实时；
 10—简便； 11—非接触、简便、可靠

运动分析系统的构成和注意点如图 3-1 所示。

总而言之，对于运动分析来说有两个课题，一是运动的测定，二是测定结果的分析和应用。对于运动测定来说，近年来正在开发各种非接触式测定方法，但其价格及操作性能都有待进一步研究。而关于测定结果的分析和应用方面，目前随着微型计算机的引入，将更加趋于完善化。

不难明白，实现对人体的各种运动机能的模拟，是一种最高级的仿生模拟。由于人体运动是与骨骼及肌肉的力学现象、感觉反馈、以及

中枢神经控制等牵连在一起，非常复杂，所以只有在科学技术高度发展的近代，对人体运动机能的高级模拟才逐渐成为可能。例如对于动力假肢，特别是多自由度、多功能的假肢，必须在解决了精密机械元件、材料、能源、控制技术及其反馈方式等多种难题之后，才有可能真正达到实用化的要求。实际上在目前，障碍还是很多的。为此，所谓运动模拟，只能是实用的、局部的、近似的模拟。

目前，大多数的仿生机机械只要求能代替人类执行某种作业完成一定的功能，并不需要在结

构上做到完全模拟,例如工业机械手,机器人一般并不要求像人。只有在它构成为人体一部分的装置时,如动力假肢,才不但要求其功能与人类类似,而且要求外形仿真,以适合病人生理、病理及心理的要求。

§ 3-2 运动轨迹模拟与曲线拟合法

运动轨迹模拟是一种最基本的运动模拟。以人手为例,如前所述可把它看作为一种自由度最多的空间连杆机构,动作形态很多,适应环境能力很强,特别是人的手指部位,可进行十分灵巧精细的动作。单就人手的抓取动作来说,就大致有12种不同的抓取形态,可分为“捏持”、“握持”和“夹持”三大类,如图3-2所示。

通过对人手日常生活动作的观察,可以知道手部对其功能起着决定的作用,而其中手指的“握取”(拇指与四指的对向动作)和“抓取”(用拇指、食指和中指等三指的指尖作三点夹持)又是最基本的功能。所以,为了实用目的,往往采用一个自由度的平面连杆机构来模拟手指结构,并近似地再现已知的手指抓取运动轨迹。

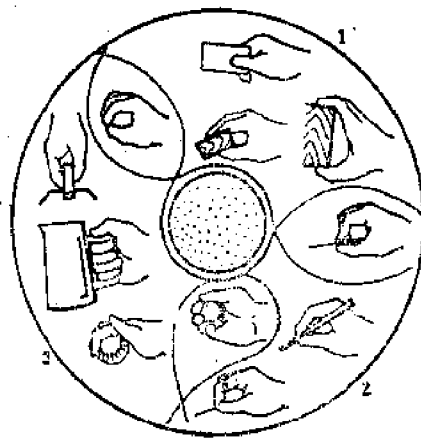


图3-2 人手的抓取动作

下面通过对拟人手手指的研究来介绍一种轨迹模拟的设计方法,当然这种方法不仅适用于手指部分,也可适用于其他生物动作模拟的问题。

为了进行人手运动轨迹的模拟,首先要采用电影照相机或其他测角器及记录装置等测量方法,对正常人手指屈伸运动指端轨迹进行实验测定,从而取得了几组正常人的指端运动轨迹图形。图3-3和3-4表示用16mm电影机对3个实验手指的屈伸运动进行照相所获得的手指两个动作的轨迹。

通过实验测定得出生物体某种运动轨迹曲线或一组数据,常常需要用一个方程或经验公式表示。在实际问题中,两个变量之间的内在关系往往并不是线性关系,而是某种曲线关系,这就需要研究应用数学的方法,对大量的观察数据进行处理,以得出比较符合事物内部规律的数学表达式。一般地说,这种分析可分两步进行,即第一步为确定函数的类型,第二步为求解相关函数中的未知参数。

1. 确定函数的类型

从微积分学的知识可知,任一函数可分段用多项式来逼近。因此在通常的实际问题中,不论变量之间的关系如何,总可以用多项式回归来进行分析和计算。也就是说,通常一种运动轨迹曲线或一组数据,总可以简单近似地用一个几次代数多项式来表示,并使之准确到所要求的精度范围,即

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (3-1)$$

若多项式含有常数的项多于两个时,可以用表差法来决定方程的次数或检验方程的次数。表差法的原理就是说,凡某级表差值近似等于常数时,则此差级即为多项式的次数。其运算步骤为

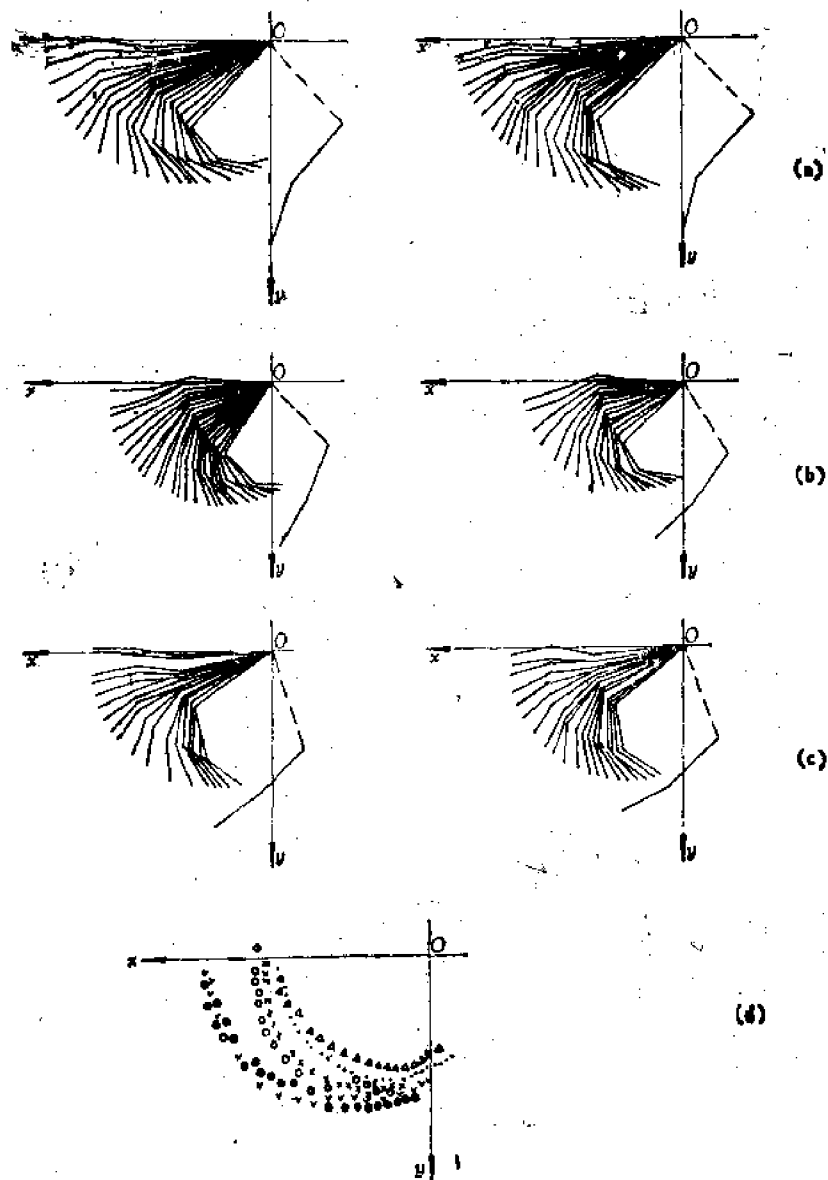


图 3-3. 手指作握取动作时的运动轨迹
 (a) 受试者 A; (b) 受试者 B; (c) 受试者 C;
 (d) 各受试者指端握取轨迹

- (1) 将实验数据画成图形;
- (2) 自图上按定差 Δx 列出 x_i, y_i 的各对应值;
- (3) 据 x, y 的读出值作出差值 $\Delta^1 y$, 而

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= y_2 - y_1, & \Delta y_2 &= y_3 - y_2, \\ \Delta y_3 &= y_4 - y_3, & \dots, \end{aligned}$$

称为第一阶差;

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2, \quad \dots,$$

称为第二阶差;

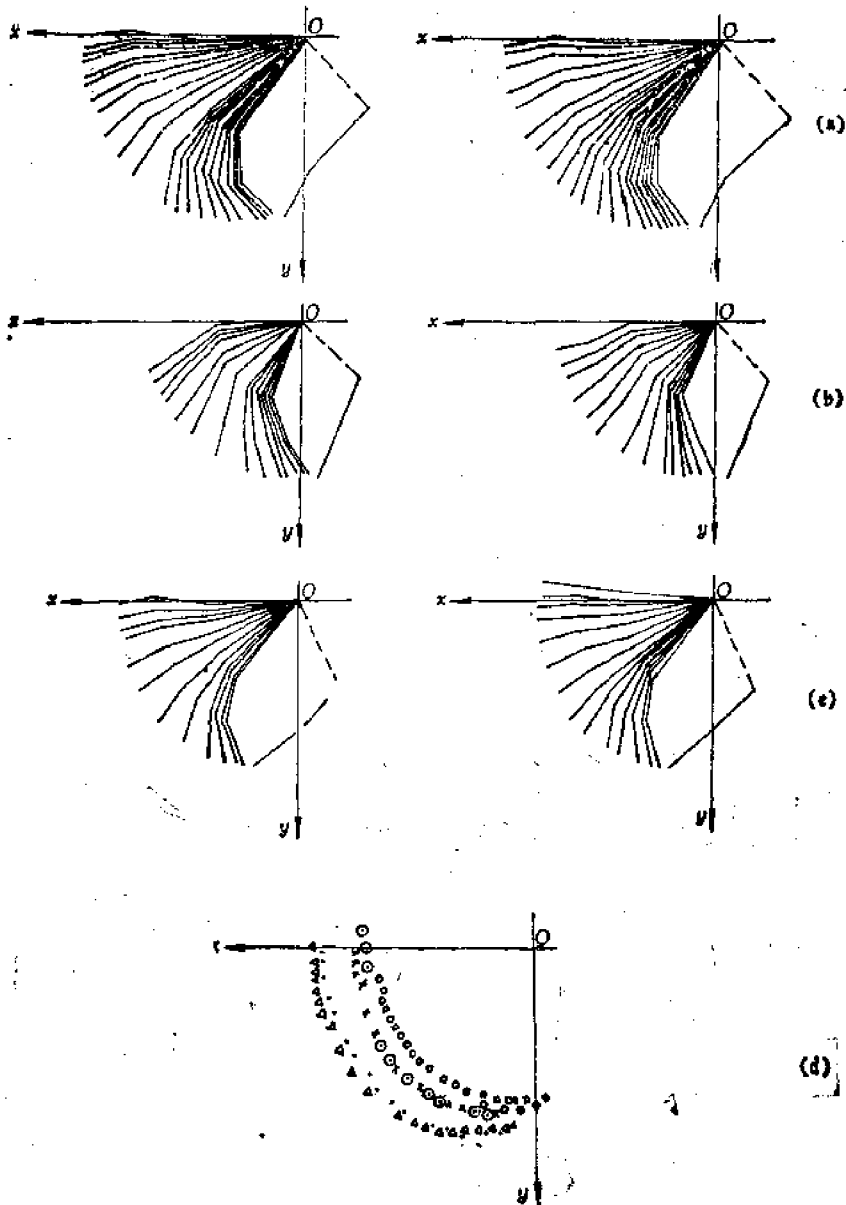


图 3-4 手指作抓取动作时的运动轨迹
 (a) 受试者 A; (b) 受试者 B; (c) 受试者 C;
 (d) 各受试者指端抓取轨迹

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \quad \dots,$$

称为第三阶差;

.....

(4) 确定阶差近似恒等的差级, 则此差级即为方程的次数。

上述原理可用反证法证明如下。

设有下列经验公式,

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

则

$$y + \Delta y = a + b(x + \Delta x) + c(x + \Delta x)^2 + d(x + \Delta x)^3,$$

$$\Delta y = (b\Delta x + c\Delta x^2 + d\Delta x^3) + (2c\Delta x + 3d\Delta x^2)x + (3d\Delta x)x^2.$$

因为 Δx 为常数, 故上式可改写为

$$\Delta y = a' + b'x + c'x^2,$$

式中 a', b', c' 为新的常数。

同理可求得

$$\Delta^2 y = a'' + b''x,$$

$$\Delta^3 y = a'''.$$

上式说明, 若 Δx 为常数, 方程式中的 x 的最高次数为 3 时, 三级的表差值为常数。反之, 若三级表差值为常数时, 则此组实验数据可用三次多项式表示之。

2. 求相关函数中的未知参数

为了确定这个近似多项式, 需要求解式 (3-1) 中的系数值 $a_j (j=0, 1, 2, 3, \dots, m)$, 使多项式 (3-1) 对于给出的数据 (x_i, y_i) 具有较好的拟合。多项式中系数的求解, 往往采用最小二乘法。

设所要求的函数为 $y = \varphi(x)$, 其包含有 $(m+1)$ 个待定系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ 。那么, 由多项式在 x_i 点所算得的值 $\varphi(x_i)$ 与观测的函数值 y_i 之间的误差为

$$V_i = \varphi(x_i) - y_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3-2)$$

根据最小二乘法原理, 在定出一个包含有 $(m+1)$ 个待定系数的函数 $\varphi(x)$ 之后, 所得的误差仍是各个 $(m+1)$ 个系数的函数, 即存在

$$V_i = \varphi(x_i) - y_i = V_i(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (3-3)$$

令各偏差的平方和为

$$S = \sum_{i=1}^n V_i^2 = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - y_i]^2 = S(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (3-4)$$

则函数 S 有最小值的必要条件为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= 0, \\ &\vdots, \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

于是, 可得 $(m+1)$ 个正规方程

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - y_i] \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial a_0} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - y_i] \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial a_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - y_i] \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial a_m} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

上列正规方程组中的每一个方程,都用了 n 个数据构成了 n 项。那么,由这 $(m+1)$ 个方程就可以唯一地确定出 $(m+1)$ 个待定系数 a_j ,把解出的系数值 a_j 代入式 (3-1),便可求出所要求的整理函数。这个方法常称为曲线拟合法。

采用如上所述的曲线拟合法,对图 3-3 和图 3-4 所示的实验数据和曲线进行分析后,可得出手指作握取动作的指端运动轨迹曲线的数学近似表达式为三次多项式,而抓取动作的指端运动轨迹曲线的数学近似表达式为二次多项式。例如,对一组握取动作实验数据进行处理后,可得其指端运动轨迹曲线的函数式为

$$y = f(x) = 55.61 + 1.133x - 1.707 \times 10^{-2}x^2 + 0.22 \times 10^{-4}x^3。$$

同理可用上述方法求得一组指端抓取运动轨迹的函数式为

$$y = g(x) = 18.7688 + 1.35x - 0.0584x^2。$$

计算结果表明,它们与实测值比较是基本符合的。

通过实验研究及其分析结果可以知道,对不同的个体其指端运动轨迹曲线形状大致类似,上述所列的多项式次数也都基本上接近,不同的只是式中的系数项因人而异。但是,可以从中找出规律性,选择一组适用性较广的多项式系数,并作为机构设计的依据。

必须指出,除了采用上述的运动轨迹模拟方法外,还可以采用函数关系模拟方法。特别是对于空间机构的运动模拟,往往采用后者为方便。例如,拇指的运动是属于空间运动(图 2-9),它可采用测角器及光电记录法等测得其作握取动作时各关节弯曲角度变化的一组曲线,如图 3-5 所示。那么,通过曲线拟合法可得出一组用多项式来表示其各关节转角间的近似函数关系为

$$\begin{aligned} \theta_2 = f_2(\theta_1) &= -37.030 \times 10^{-3} + 366.517 \times 10^{-3} \theta_1 \\ &\quad - 8.373 \times 10^{-3} \theta_1^2 + 0.1297 \times 10^{-3} \theta_1^3, \\ \theta_3 = f_3(\theta_2) &= 27.533 \times 10^{-2} + 92.657 \times 10^{-2} \theta_2 \\ &\quad + 10.027 \times 10^{-2} \theta_2^2 - 0.232 \times 10^{-2} \theta_2^3, \end{aligned}$$

该组拇指动作的拟合曲线及平均误差如图 3-6 所示。

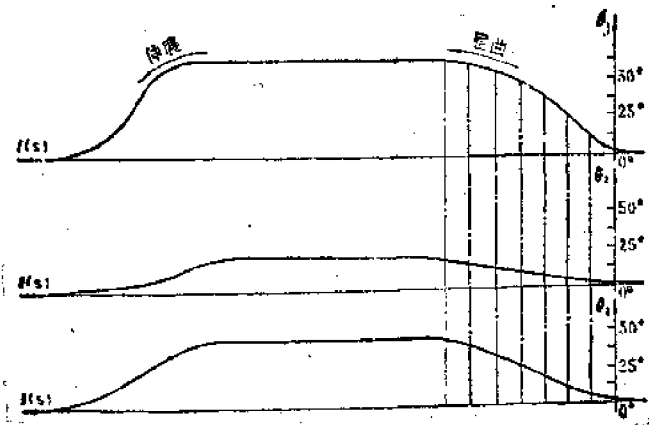


图 3-5 拇指握取动作各关节弯曲角度变化情况

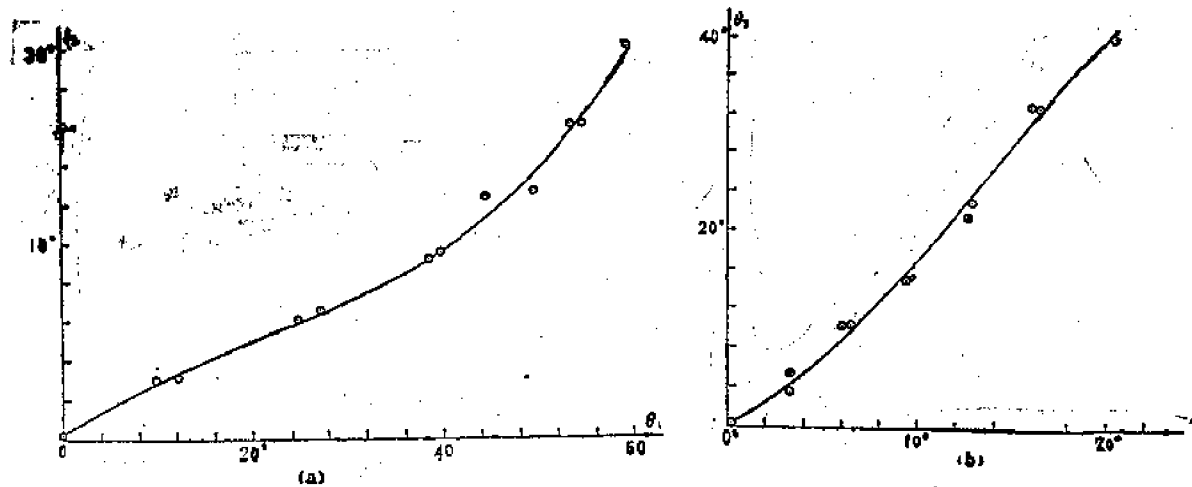


图 3-6 拇指握取动作的拟合曲线及平均误差

(a) 拟合曲线 $\theta_2 = f_2(\theta_1)$, 平均误差 0.271; (b) 拟合曲线 $\theta_3 = f_3(\theta_2)$, 平均误差 0.744

⊙ 测试点 — 拟合曲线

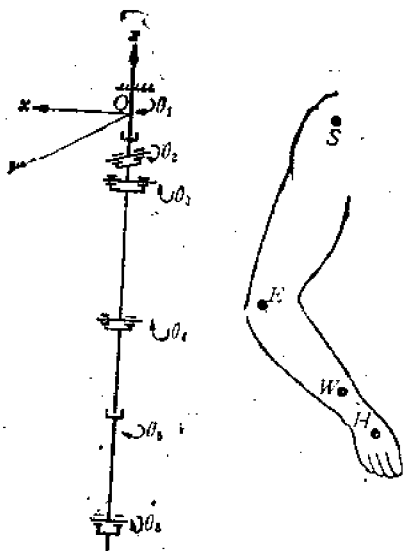


图 3-7 手臂机构模型与坐标系

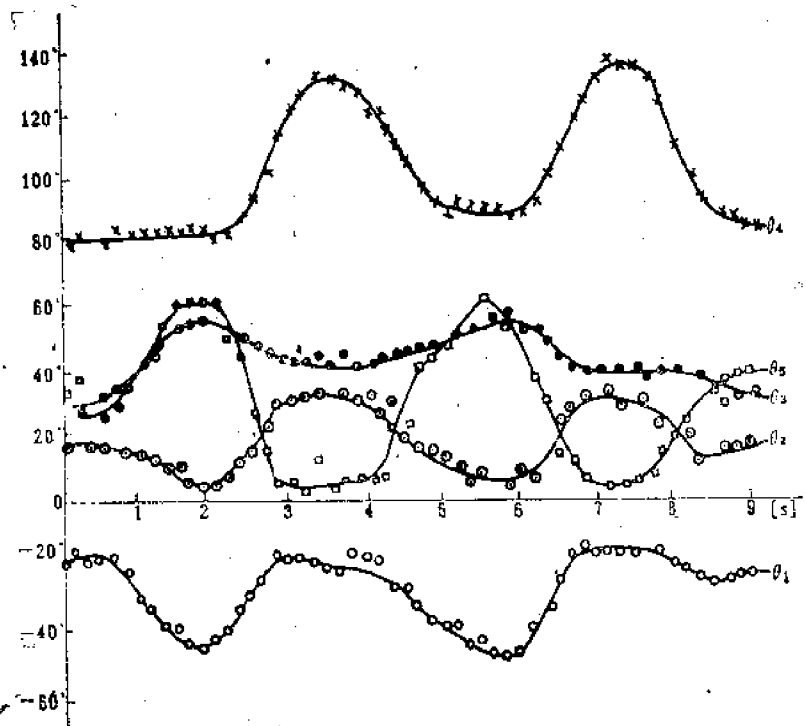


图 3-8 作饮食动作时手臂各关节角度的变化

又如,对于多自由度的全臂拟人假手,为了使它的基本机能与人手动作类似,即其各关节的角度变化协调关系能够模拟人手的动作,就需要对人手的日常生活动作进行测定与分析。以饮食动作为代表,首先要确定手臂机构模型的直角坐标系(图 3-7),然后用空间三面投影照相法同时摄取被试者手臂动作的三向视图,再通过坐标变换及矢量运算,便可由此求得各关节角度的变化关系(也可由测角器直接测得)(图 3-8)。图 3-9 表示对应于肘关节屈曲角度

θ_1 的各关节角度变化的协调图形, 由该图可知, 饮食协调动作过程可分割为 $A-B$, $B-C$, $C-D$ 三个区段, 并可分别用一近似的直线来表示它们之间的函数关系。这样, 可使这种协调动作的控制方法大为简化, 满足实用要求。

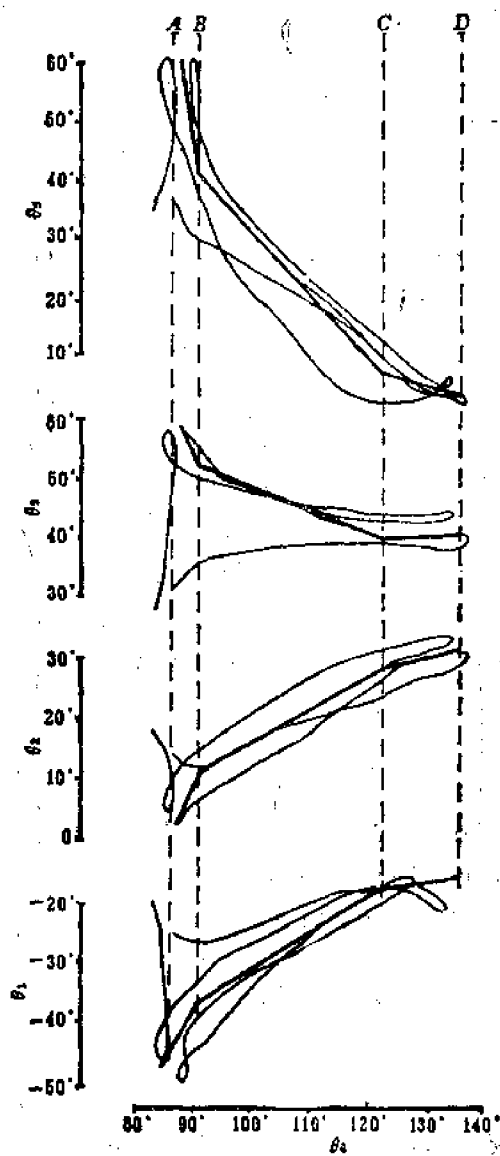


图 3-9 饮食动作时的协调图形

§ 3-3 运动轨迹再现与平方逼近法

通过曲线拟合法求得运动轨迹方程式之后, 仿生机械设计的任务就在于选择适当的机构参数, 以实现给定的轨迹。为了使所设计机构的连杆曲线能逼近于给定的轨迹, 可采用工程上常用的平方逼近法。

如图 3-10 所示, 假手指平面四杆机构连杆端点 C 的位置矢量方程式可用复数形式(参

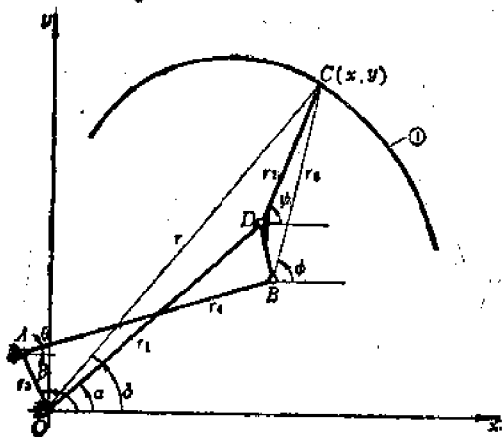


图 3-10 平面四杆机构参数的选择

①—给定轨迹曲线

利用三角恒等式 $\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$ 及 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，可以从方程式 (3-9) 和 (3-10) 中消去未知变量 ψ 和 θ 。那么，经过整理后可得

$$r_1[2r \cos(\delta - \alpha)] + (r_2^2 - r_1^2) = r^2, \quad (3-11)$$

及

$$\begin{aligned} r_3[2r \cos(\beta - \delta)] + r_5[2r \cos(\phi - \delta)] + (r_4^2 - r_3^2 - r_5^2) \\ = r^2 + r_3 r_5 [2 \cos(\beta - \phi)]. \end{aligned} \quad (3-12)$$

令式 (3-11) 中， $K_1 = r_1$ ， $K_2 = r_2^2 - r_1^2$ ；令式 (3-12) 中， $k_1 = r_3$ ， $k_2 = r_5$ ， $k_3 = r_4^2 - r_3^2 - r_5^2$ ， $k_4 = k_1 k_2 = \lambda$ ，并分别代入式 (3-11) 及式 (3-12)，得

$$K_1[2r \cos(\delta - \alpha)] + K_2 = r^2, \quad (3-13)$$

及

$$\begin{aligned} k_1[2r \cos(\beta - \delta)] + k_2[2r \cos(\phi - \delta)] + k_3 \\ = r^2 + k_4[2 \cos(\beta - \phi)]. \end{aligned} \quad (3-14)$$

为了进行机构综合，可先利用式 (3-13) 求解出 r_1 及 r_2 ，然后再通过式 (3-14) 求解出 r_3 ， r_4 及 r_5 。

不难看出，方程式 (3-13) 为一个含有待定系数 K_1 及 K_2 的线性方程式，故可利用最小二乘法来求待定系数 K_1 及 K_2 。

设定

$$D = \sum_{i=1}^n \{K_1[2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)] + K_2 - r_i^2\}^2.$$

那么，为了使其偏差为极小的必要条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial K_1} &= K_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)]^2 + K_2 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n r_i^2 [2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)] = 0, \end{aligned} \quad (3-15)$$

及

$$\frac{\partial D}{\partial K_2} = K_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)] + iK_2 - \sum_{i=1}^n r_i^2 = 0. \quad (3-16)$$

上列两方程组可整理为

$$\begin{aligned} K_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)]^2 + K_2 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)] \\ = \sum_{i=1}^n r_i^2 [2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)], \end{aligned} \quad (3-17)$$

及

$$K_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\delta_i - \alpha_i)] + iK_2 = \sum_{i=1}^n r_i^2. \quad (3-18)$$

从方程组 (3-17) 及 (3-18) 可以看出, 只要在给定轨迹上选取一组点的坐标 $x_i, y_i (i=1, 2, \dots, n)$, 并把它换算成相应的极坐标参数 r_i, δ_i , 那么在给定一组主动杆的转角 α_i 条件下, 便可求解得待定系数 K_1 及 K_2 , 也即可求得机构参数 r_1 及 r_2 。

为了求解机构参数 r_3, r_4 及 r_5 , 要利用方程式 (3-14)。由于方程式 (3-14) 为含有待定系数 k_1, k_2, k_3 及 k_4 的非线性方程, 所以为了使它有解, 需要先进行线性化处理。

设定

$$k_p = L_p + \lambda m_p \quad (p=1, 2, 3). \quad (3-19)$$

把上式代入方程式 (3-14), 并分离 L 与 λ 两部, 便可得下列两个线性方程组

$$L_1 [2r \cos(\beta - \delta)] + L_2 [2r \cos(\phi - \delta)] + L_3 = r^2, \quad (3-20)$$

$$m_1 [2r \cos(\beta - \delta)] + m_2 [2r \cos(\phi - \delta)] + m_3 = 2 \cos(\beta - \phi). \quad (3-21)$$

于是, 可如同求解方程式 (3-13) 一样, 利用最小二乘法来求出上列两方程式中的待定系数 L_p 和 m_p , 从而根据设定 $k_p = L_p + \lambda m_p$, 求解出待定系数 k_p , 最后便可求出机构参数 r_3, r_4 和 r_5 。

为通过式 (3-20) 及利用最小二乘法求待定系数 L_p , 可设定

$$D_1 = \sum_{i=1}^n \{L_1 [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] + L_2 [2r_i \cos(\phi - \delta_i)] + L_3 - r_i^2\}^2, \quad (3-22)$$

并使

$$\frac{\partial D_1}{\partial L_1} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial L_2} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial L_3} = 0.$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial L_1} = L_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)]^2 + L_2 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] [2r_i \cos(\phi - \delta_i)] \\ + L_3 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] - \sum_{i=1}^n r_i^2 [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] = 0, \end{aligned} \quad (3-23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial L_2} = L_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] [2r_i \cos(\phi - \delta_i)] + L_2 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\phi - \delta_i)]^2 \\ + L_3 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\phi - \delta_i)] - \sum_{i=1}^n r_i^2 [2r_i \cos(\phi - \delta_i)] = 0, \end{aligned} \quad (3-24)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial L_3} = L_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] + L_2 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\phi - \delta_i)] + L_3 - \sum_{i=1}^n r_i^2 = 0. \quad (3-25)$$

同样, 为通过式 (3-21) 及利用最小二乘法求待定系数 m_p , 可设定

$$D_2 = \sum_{i=1}^n \{m_1 [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] + m_2 [2r_i \cos(\phi - \delta_i)] + m_3 - [2 \cos(\beta - \phi)]\}^2, \quad (3-26)$$

并使

$$\frac{\partial D_1}{\partial m_1} = 0, \quad \frac{\partial D_2}{\partial m_2} = 0, \quad \frac{\partial D_3}{\partial m_3} = 0.$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial m_1} = & m_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)]^2 + m_2 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)][2r_i \cos(\phi_i - \delta_i)] \\ & + m_3 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] - \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)][2 \cos(\beta - \phi_i)] = 0, \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_2}{\partial m_2} = & m_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)][2r_i \cos(\phi_i - \delta_i)] + m_2 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\phi_i - \delta_i)]^2 \\ & + m_3 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\phi_i - \delta_i)] - \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\phi_i - \delta_i)][2 \cos(\beta - \phi_i)] = 0, \end{aligned} \quad (3-28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_3}{\partial m_3} = & m_1 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\beta - \delta_i)] + m_2 \sum_{i=1}^n [2r_i \cos(\phi_i - \delta_i)] + m_3 \\ & - \sum_{i=1}^n [2 \cos(\beta - \phi_i)] = 0. \end{aligned} \quad (3-29)$$

这样,利用式(3-23)至(3-29)便可求得待定系数 L_p 和 m_p ($p=1,2,3$)。

另外,因为设定 $k_1 k_2 = \lambda$, 而且由式(3-19)可写出

$$k_1 = L_1 + \lambda m_1, \quad k_2 = L_2 + \lambda m_2.$$

那么

$$(L_1 + \lambda m_1)(L_2 + \lambda m_2) = \lambda,$$

即

$$m_1 m_2 \lambda^2 + (L_1 m_2 + L_2 m_1 - 1)\lambda + L_1 L_2 = 0.$$

从而可得

$$\lambda = \frac{-(L_1 m_2 + L_2 m_1 - 1) \pm \sqrt{(L_1 m_2 + L_2 m_1 - 1)^2 - 4(m_1 m_2)(L_1 L_2)}}{2 m_1 m_2}. \quad (3-30)$$

于是,可根据式(3-19)求出两组待定系数 k_1, k_2, k_3, k_4 及 k'_1, k'_2, k'_3, k'_4 。最后也就可求得两组机构参数 r_3, r_4, r_5 和 r'_3, r'_4, r'_5 , 并从中选取一组合适的参数。

实践表明,采用这种工程上常用的平方逼近法,进行多点运动轨迹曲线拟合,能够得到满意的结果。这种方法较简便,特别适用于运动精度要求不太高的场合。若运动精度要求高,则可采用机构最优化的设计方法来确定仿生机械各构件的几何尺寸。

第四章 仿生机机械的优化设计

§ 4-1 概 述

机械优化设计是 60 年代初计算机引入设计领域后迅速发展起来的一种新的设计方法,它的设计原则是最优设计,设计方法是最优化数学方法,设计手段是电子计算机及计算程序。近年来这种设计方法在仿生机机械设计中也获得了应用。优化设计工作一般包括下述三部分内容:

- (1) 将设计问题的物理模型转变成数学模型。确定设计变量,列出目标函数及约束式(等式或不等式);
- (2) 分析模型,选择合适的最优化方法;
- (3) 编制计算程序,用计算机求最优解。

§ 4-2 机械优化设计的基本术语和概念

一、设计变量

机械设计的一个方案均可用一组基本参数的数值表示,其中某些参数是预先已给定的,称为设计常量,而在设计过程中可供选择并最终必须确定的各项独立参数,称为设计变量。设计变量的数目为最优化设计的维数。若有 n 个设计变量,把第 i 个设计变量记为 x_i ,则其全部设计变量可用 n 维向量的形式表示为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)^T. \quad (4-1)$$

二、设计约束

在优化设计中,对设计变量的取值加以某些限制的条件称为设计约束或约束条件,简称约束。这些设计约束可用数学不等式或等式来表示。

不等式约束的形式为

$$\left. \begin{aligned} g_u(X) = g_u(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0, \\ g_u(X) = g_u(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

或

$$(u = 1, 2, \dots, m).$$

等式约束的形式为

$$\left. \begin{aligned} h_v(X) = h_v(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ (v = 1, 2, \dots, p < n). \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

式中, X 为设计变量; m 为不等式约束条件数; p 为等式约束条件数。

三、目标函数

目标函数是以所选的各设计变量为自变量, 所求的性能指标为因变量, 并按一定的关系而建立起来的函数式, 即

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4-4)$$

在一个优化设计中, 若只有一个目标函数, 则称为单目标函数, 否则称为多目标函数。对于后者可以独立地列出几个目标函数式

$$\left. \begin{aligned} f_1(X) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ f_2(X) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ f_q(X) = f_q(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

也可以把几个设计目标综合在一起, 建立一个综合的目标函数表达式, 即

$$f(X) = \sum_{j=1}^q f_j(X) \quad (4-6)$$

q 为最优化设计所追求的目标数目。

四、优化设计的数学模型

优化设计按设计约束的有无可建立两类数学模型, 即约束极小化模型和无约束极小化模型。

对于约束最优化问题

$$\left. \begin{aligned} \min f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ X \in \mathcal{D} \subset E^n, \\ \text{sub. } h_v(X) = 0, v = 1, 2, \dots, p, \\ g_u(X) \leq 0, u = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

对于无约束最优化问题

$$\left. \begin{aligned} \min f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ X \in \mathcal{D} \subset E^n. \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

上述数学模型中, 若目标函数 $f(X)$ 和约束条件 $h_v(X), g_u(X)$ 均是设计变量 X 的线性函数时, 则称其为线性规划问题, 若它们不全为 X 的线性函数时, 则称其为非线性规划问题。机械优化设计问题多属于约束非线性规划问题。

机械优化设计问题的大小依其设计变量和约束条件的多少而定。一般将少于 10 个者纳入小型优化设计问题; 多于 10 个而不超过 50 个者纳入中型优化设计问题; 大型优化设计问题中的设计变量和约束条件多于 50 个。

§ 4-3 优化设计问题的几何解释

一、约束最优解和无约束最优解

求 n 个设计变量在满足约束条件下的目标函数值, 在几何上可想像为在 $n+1$ 维坐标系的约束可行域内, 寻找目标函数最小值的点 $X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$, 并满足

$$\min_{X \in E^n} F(X) = F(X^*),$$

$$g_u(X^*) \geq 0 \quad (u=1, 2, \dots, m),$$

$$h_v(X^*) = 0 \quad (v=1, 2, \dots, p < n).$$

则称 X^* 为最优点, $F(X^*)$ 为最优值。最优点 X^* 和最优值 $F(X^*)$ 组成一个约束最优解。

若当一组设计变量仅使目标函数取最小, 而且无约束条件, 即满足

$$\min_{X \in E^n} F(X) = F(X^*),$$

则称为无约束最优解。

下面以一个二维的非线性最优化问题来说明它的一些几何概念。

例如, 已知目标函数

$$F(X) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4,$$

在满足不等式约束条件

$$g_1(X) = x_1 - x_2 + 2 \geq 0,$$

$$g_2(X) = -x_1 + x_2 - 1 \geq 0,$$

$$g_3(X) = x_1 \geq 0,$$

$$g_4(X) = x_2 \geq 0,$$

下, 求其最优解 X^* 和 $F(X^*)$ 。

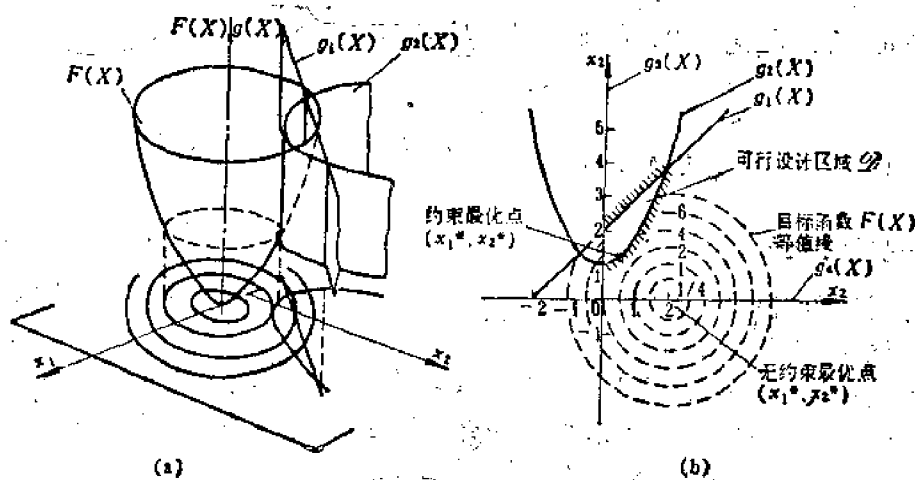


图 4-1 二维非线性最优化问题的几何概念

目标函数和约束函数的立体图及二维最优化问题的平面图由图 4-1 示出。当目标函数 $F(x_1, x_2) = 1/4, 1, \dots$ 时, 即在 (x_1, x_2) 坐标平面内得一系列平面曲线(同心圆)——等值线, 它表示了

目标函数值由里向外逐次增大的变化情况。由约束面,即直线 $g_1(X)=0$ 、 $g_2(X)=0$ 、 $g_3(X)=0$ 和抛物线 $g_4(X)=0$ 形成的阴影线里侧的区域即为可行域。在可行域内,目标函数最小值的点 X^* 即为约束面和等值线的切点: $x_1^*=0.58$, $x_2^*=1.34$, $F(x_1^*, x_2^*)=3.80$ 。这就是约束最优解。其无约束最优解为 $x_1^*=2$, $x_2^*=0$, $F(x_1^*, x_2^*)=0$, 实际上就是目标函数等值线的中心。

n 维约束优化设计可看作 n 个设计变量 x_1, x_2, \dots, x_n 组成一个设计空间,其中每一点代表一个设计方案,此时 n 个设计变量具有确定的值。每一个不等式约束条件在 n 维设计空间内有一个约束超曲面, m 个不等式约束的超曲面在设计空间中划分出一个可行设计区域 \mathcal{D} 。当目标函数取某一定值时,就在 n 维设计空间内构成一个目标函数的等值超曲面,一系列目标函数的等值超曲面可表示出目标函数值的变化规律。最优解就是要在 n 维设计空间的可行域内找到一个点 X^* , 其目标函数值为最小。实际上对于约束最优化问题来说,这一点多半就是目标函数等值超曲面与约束超曲面的一个切点,对于无约束最优化问题,这一点就是目标函数的极值点。

二、局部最优解和全域最优解

在非线性目标函数和约束函数的优化设计问题中,得出一个最优解,还要进一步判断它是局部最优解还是全域最优解。

全域最优解,对于无约束优化问题,是指整个设计空间中目标函数值最小点,特别是当目标函数值为单峰时,这也即其唯一解;对于约束优化问题,则是指整个可行域中目标函数值最小点,也可能是约束线和目标函数等值线的切点。

局部最优解是指局部设计空间或局部可行域中目标函数值极小点。

当目标函数为多峰时,则不仅有约束优化问题可能同时存在全域最优解和局部最优解,而且无约束优化问题也可能同时存在全域最优解和局部最优解。

最优化问题通常都是要求出全域最优解,但是判别一个最优解是全域的最优解还是局部的最优解,有时是很困难的。在工程实践中,常常采用从几个初始点开始搜索的办法,看其结果是否趋于同一个最优解,再根据物理意义进行最终判别。

§ 4-4 机械优化设计的基本方法

一、最优化法类型

求解最优化数学模型可分为四类:

1. 间接法(亦称解析法)

这种方法只适用于目标函数及设计约束有明显的解析式的情况。求解方法是先求出最优的必要条件,得到一组方程或不等式,再求解这组方程或不等式。一般是用求导数的方法或变分方法求出必要条件,通过必要条件将问题简化,因此称为间接法。

2. 直接法

当目标函数较复杂或不能用变量显函数表示时,无法用解析法求必要条件,要用直接搜索的方法经过若干次迭代搜索到最优点。该法常常是根据经验或试验得到的,对于一维搜索问

题主要是应用区间消去法或多项插值法。对于多维搜索问题主要是应用爬山法。

3. 以解析法为基础的数值计算法

这类方法也是一种直接法,但是以梯度法为基础,因此是一种解析与数值计算相结合的方法。

4. 网络最优化方法

此法是以图作为数学模型,称为图模型。然后用图论方法进行搜索最优路径。

最优化方法分类列于表 4.1:

表 4.1

1	解析法(间接法)	无约束 { 古典微分法 古典变分法
		有约束 { 极大值原理 库恩-图克定理
2	数值计算法 (直接法)	区间消去法 { 斐波那西法 黄金分割法(0.618法) 插值法 (一维搜索)
		爬山法 { 坐标轮换法 步长加速法 方向加速法 (多维搜索) 单纯形法及随机搜索法
3	以梯度法为基础的 数值计算方法	无约束梯度法 { 最速下降法 拟牛顿法 共轭梯度法 变尺度法
		有约束梯度法 { 可行方向法 梯度投影法
		化有约束问题 { SUMT 法 为无约束问题 { SWIFT 法 复合形法
4	网络最优化方法	

二、黄金分割法

黄金分割法(0.618法)是一维搜索最优化方法之一,是优化方法中最简单、最基本的方法,也是多维目标函数求优方法的基础。

设在多维目标函数最优化过程中,已确定了搜索方法后,求目标函数 $F^*(X + aS)$ 的极小

值,使

$$f(X^k + a^k S^k) = \min f(X + aS) \quad (4-9)$$

式中, a^k 为第 k 步搜索时的步长。这种沿固定的 S^k 方向求最优步长 a^k , 使 $f(X^k + a^k S^k)$ 值为极小的问题, 也属于一维搜索。

求解一维最优化问题, 第一步是确定搜索区间, 即最优步长 a^k 所在的区间 $[a, b]$, 搜索区间应为单峰区间, 区间内目标函数应只有一个极小值, 第二步是在此区间内求最优步长 a^k , 使目标函数 $f(X + aS)$ 达到极小。

黄金分割法属于应用序列消去原理的直接搜索方法。序列消去原理是在搜索区间内, 选取计算点计算函数值并进行比较, 消去部分区间, 以缩短搜索区间。

黄金分割法的原理如图 4-2 所示, 设目标函数为 $f(X + aS) = f(a)$, 若已找到最优步长 a^k 所在的区间 $[a, b]$, 现求在给定方向 S^k 上的最优步长 a^k 。为此, 首先在区间内取两点 $\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}$, 且使

$$\left. \begin{aligned} a < \alpha_0^{(1)} < \alpha_0^{(2)} < b, \\ \alpha_0^{(2)} &= a + \lambda(b - a), \\ \alpha_0^{(1)} &= a + (1 - \lambda)(b - a) = b - \lambda(b - a), \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

式中, λ 为每次迭代的缩短率。然后计算并比较函数值 $f(\alpha_0^{(1)})$ 、 $f(\alpha_0^{(2)})$ 以及按序列消去原理消去部分区间。

在 $\alpha^{(k)}$ 所在的缩短了的新区间 $[a_1, b_1]$ 内, 以同样的缩短率 λ 再找两点 $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}$, 计算比较 $f(\alpha_1^{(1)})$ 、 $f(\alpha_1^{(2)})$ 后, 再舍去一部分区间从而获得新的搜索区间 $[a_2, b_2]$, 如此继续下去, 其一般式为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^{(1)} &= b_i - \lambda(b_i - a_i), \\ \alpha_i^{(2)} &= a_i + \lambda(b_i - a_i), \\ (i &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

用这种方法可把区间缩小到任意程度, 直至区间长度缩短到规定的精度要求时, 例如 $b_m - a_m \leq \epsilon$ 时, 迭代计算方可停止。

两计算点 $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}$ 在区间中的位置相对边界来说是对称的, 而且在舍去一段以后, 留在新区间的那一个点仍处于新区间内两个计算点之一的地位, 另外黄金分割法还具有每次迭代计算时缩短率为常数的特点, 即如图 4-3 的几何关系有

$$\lambda = \frac{l}{L} = \frac{L-l}{l},$$

由此得

$$l^2 - L(L-l) = 0,$$

$$\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \frac{l}{L} - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0,$$

因此

$$\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618034. \quad (4-12)$$

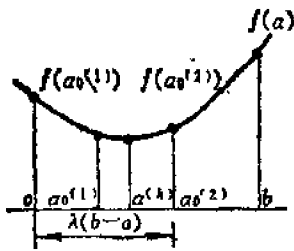


图 4-2 黄金分割法的原理图

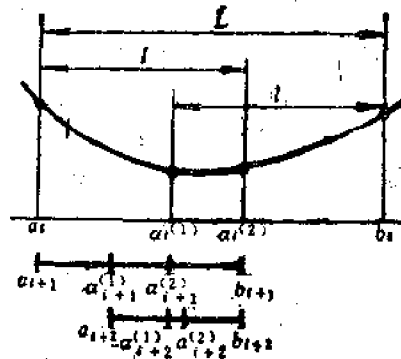


图 4-3 黄金分割法新、旧区间的几何关系

这意味着,只要取 $\lambda = 0.618$, 就可以满足上述几何关系,即可以使前一次计算的函数值留给下次使用,这样除第一次外,每次只再找一个新点就可以了。

黄金分割法迭代计算过程如下。

(1) 根据所要缩短的程度可先确定计算点的个数 n 。

因为用 n 个计算点可把原区间 $[a, b]$ 连续缩短 $n-1$ 次,每次缩短率为 0.618 ,最后区间就缩短为

$$0.618^{(n-1)}(b-a).$$

若给定缩短到规定的精度为 ε , 则

$$0.618^{(n-1)}(b-a) \leq \varepsilon,$$

由此得

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln 0.618} + 1 \quad (4-13)$$

(2) 算法步骤:

如图 4-2 所示,在区间 $[a, b]$ 内取两计算点 $\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}$, 且使

$$\alpha_0^{(2)} = a + 0.618(b-a),$$

(4-14)

$$\alpha_0^{(1)} = a + 0.382(b-a) = b - 0.618(b-a).$$

计算并比较函数值 $f(\alpha_0^{(2)}), f(\alpha_0^{(1)})$, 如果 $f(\alpha_0^{(2)}) > f(\alpha_0^{(1)})$, 则舍去 b 点并取 $[a, \alpha_0^{(2)}]$ 作为新区间 $[a_1, b_1]$, 而 $\alpha_0^{(1)}$ 点则作为新区间 $[a_1, b_1]$ 内的 $\alpha_1^{(2)}$ 点, 新区间内的另一计算点为

$$\alpha_1^{(1)} = a_1 + 0.382(b_1 - a_1),$$

然后计算 $f(\alpha_1^{(1)})$ 并与 $f(\alpha_1^{(2)})$ 相比较, 以决定取舍。

如果 $f(\alpha_0^{(2)}) \leq f(\alpha_0^{(1)})$, 则舍去 a 点并取 $[\alpha_0^{(1)}, b]$ 作为新区间 $[a_1, b_1]$, 而 $\alpha_0^{(2)}$ 点则作为新区间 $[a_1, b_1]$ 内的 $\alpha_1^{(1)}$ 点, 新区间内的另一计算点为

$$\alpha_1^{(2)} = a_1 + 0.618(b_1 - a_1),$$

然后比较 $f(\alpha_1^{(1)}), f(\alpha_1^{(2)})$ 以决定取舍。如此继续作完 n 个点的计算, 达到规定的精度 ε 为止。

三、二次插值法

二次插值法又称为近似抛物法, 是一种利用多项式逼近的近似法。其基本做法是利用若

于点的函数值来构造一个低次插值多项式,以近似地表达原目标函数 $f(X+aS)=f(a)$,并求这个多项式的极值点(极小点)作为原函数极小点的近似值。二次插值是在原目标函数曲线上找出三个插值点作为二次插值多项式 $p(a)$,当在搜索区间内作三次多项式逼近原函数时,则称为三次插值法。这两种方法在原则上是相同的,只是所取的近似函数的次数不同。

设一维目标函数 $f(X+aS)=f(a)$ 的搜索区间 $[a_1, a_3]$ 已确定,如图 4-4 所示,在该区间取三个插值点 $a_1 < a_2 < a_3$,其函数值分别为

$$f(a_1)=f_1, f(a_2)=f_2, f(a_3)=f_3.$$

利用这三点及相应的函数值作二次插值公式

$$p(a) = a + ba + ca^2 \quad (4-15)$$

来逼近原目标函数 $f(a)$ 。显然,在三个插值点处二次插值函数与目标函数应具有相同的函数值,即二次多项式应满足条件:

$$\left. \begin{aligned} p(a_1) &= a + ba_1 + ca_1^2 = f_1, \\ p(a_2) &= a + ba_2 + ca_2^2 = f_2, \\ p(a_3) &= a + ba_3 + ca_3^2 = f_3. \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

对上列多项式求导,并令其为零,可求得近似极小点计算式为

$$a^* = -\frac{b}{2c} \quad (4-17)$$

为了确定这个极小点,应求出 b, c , 它可由式(4-16)方程组求得

$$b = \frac{(a_2^2 - a_3^2)f_1 + (a_3^2 - a_1^2)f_2 + (a_1^2 - a_2^2)f_3}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)},$$

$$c = -\frac{(a_2 - a_3)f_1 + (a_3 - a_1)f_2 + (a_1 - a_2)f_3}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)}.$$

代入式(4-17)便得极值点公式

$$a^* = \frac{1}{2} \frac{(a_3^2 - a_1^2)f_1 + (a_1^2 - a_2^2)f_2 + (a_2^2 - a_3^2)f_3}{(a_2 - a_3)f_1 + (a_3 - a_1)f_2 + (a_1 - a_2)f_3} \quad (4-18)$$

上式求得的为近似最优点。在最小点处须满足

$$\frac{d^2 p(a)}{da^2} > 0. \quad (4-19)$$

为计算方便起见,式(4-18)改写为

$$\text{式中, } \left. \begin{aligned} a^* &= 0.5[a_1 + a_3 - (k_1/k_2)], \\ k_1 &= (f_3 - f_1)/(a_3 - a_1), \\ k_2 &= \left(\frac{f_2 - f_1}{a_2 - a_1} - k_1 \right) / (a_2 - a_3). \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

为简单起见,取 a_1, a_2, a_3 三个插值点等距,即取 $a_1 = 0, a_2 = h, a_3 = 2h, h$ 为试验步长。为了保证最小点在搜索区间 $[a_1, a_3]$ 内,所选取的试验步长 h 应保证有如图 4-4 所示的关系,

$$f_1 > f_2 < f_3.$$

在三个插值点 a_1, a_2, a_3 等距的情况下,方程组(4-16)变成

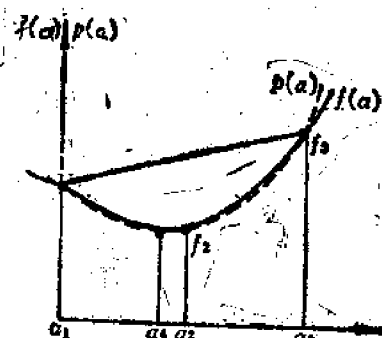


图 4-4 二次插值法原理

$$\left. \begin{aligned} a &= f_1, \\ a + bh + ch^2 &= f_2, \\ a + 2bh + 4ch^2 &= f_3. \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} a &= f_1, \\ b &= \frac{4f_2 - 3f_1 - f_3}{2h}, \\ c &= \frac{f_3 + f_1 - 2f_2}{2h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

代入式(4-17)后得一维搜索的最优化步长为

$$\alpha^* = \frac{4f_2 - 3f_1 - f_3}{4f_2 - 2f_3 - 2f_1} h. \quad (4-23)$$

若 α^* 是极小点,由式(4-19)可知在极小点处要求系数 $c > 0$, 或

$$f_1 + f_3 > 2f_2. \quad (4-24)$$

这就是说 f_2 的值必须低于 f_1 和 f_3 的连线,即搜索区间应是一个两头高中间低的一个单峰区间。

三个插值点等距时的计算公式(4-23)也可改写为

$$\alpha^* = 0.5[\alpha_1 + \alpha_3 - (k_1/k_2)].$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= (f_3 - f_1)h, \\ k_2 &= (f_1 - 2f_2 + f_3), \\ h &= \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (4-25)$$

二次插值法的计算程序框图如图 4-5 所示。框图中 ε 为收敛精度,当不满足时,表明所取的 α^* 值精度不够,必须重新作一次二次插值的计算,直至满足给定的精度为止。

四、共轭梯度法

梯度方向是函数变化率最大的方向,其负梯度方向是函数减小最快的方向,因此若取这个负方向为每步搜索的方向,就可以逐次求得极小值,这个方法通常称为最速下降法或梯度法,但是在极值点附近的收敛速度并不太快,因此通常计算开始阶段采用最速下降法,而在接近极值点时采用共轭梯度法。

共轭梯度法又称旋转梯度法,它具有二次收敛性质,即对于二次正定函数, $X \in E^n$, 最多经过 n 次迭代可搜索到最优点。

对于 n 维非二次目标函数,可将它在极值点附近用泰勒级数展开,且只取到二次项,那么非二次函数在极值点附近的特性都近似于一个二次函数。对于二元二次正定函数来说,在极值点附近,该函数的等高线可近似地视为同心的椭圆族。椭圆族中心就是极值点。同心椭圆族有一个有用的特点,即作任意两根平行线与其椭圆族相切,其两切点的连线必通过椭圆族中心,如图 4-6 所示。如果在极值点附近,于某个搜索方向上已得到了一个切点 $X^{(1)}$,那么,只要得出通过极值点的连线方向,在此方向上寻优,就可以一步直达极值点。问题是如何求出这个

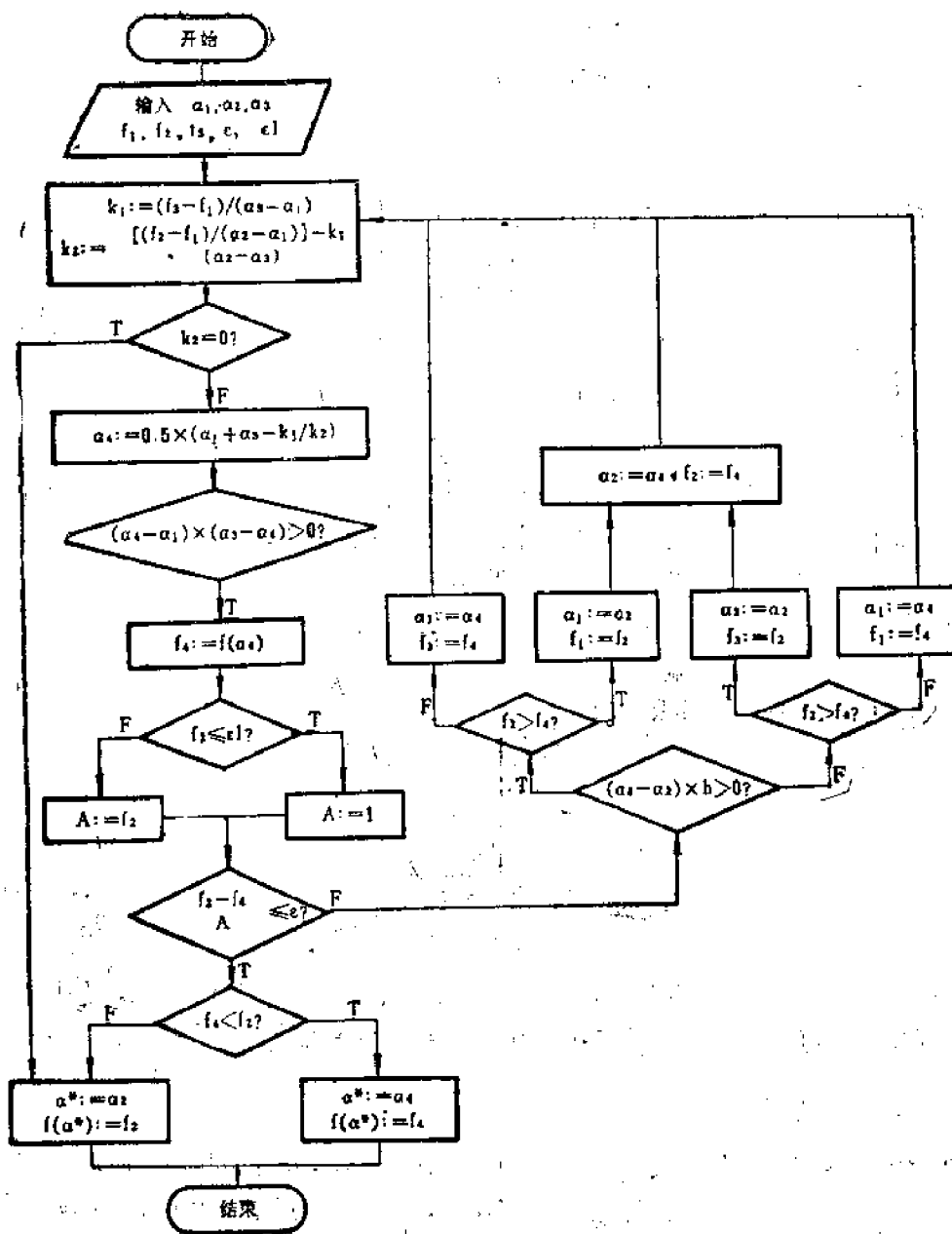


图 4-5 二次插值法的计算程序框图

连线方向及这个方向与前一次搜索方向的关系,这就是下面要讨论的问题。其结论是:这个连线方向就是前一次搜索方向的共轭方向。这种选择共轭方向作为搜索方向的方法就称为共轭梯度法。

设 A 为 $n \times n$ 实对称正定矩阵,如果有两个 n 维向量 P 与 Q 满足

$$P^T A Q = 0, \quad (4-26)$$

则称向量 P 与 Q 对于矩阵 A 共轭。

如果 A 为单位矩阵,则上式成为 $P^T Q = 0$, 表明两个向量的点积为零,则此两向量在几何上是正交的,因此,正交是共轭的一种特例。

为了进一步从几何上来说明共轭方向, 现设 n 元函数 $f(X)$ 在极值点附近可用一个二次函数逼近

$$f(X) = a + b^T X + \frac{1}{2} X^T A X, \quad (4-27)$$

其中 A 为 $n \times n$ 对称正定矩阵。

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = [\nabla f(X)]^T = [b + AX]^T \quad (4-28)$$

对于两个变量的问题, 可以直观地用图形来表示(图 4-6)。设从某点 $X^{(0)}$ 出发以 $P^{(0)}$ 的方向搜索, 使 $f(X)$ 达极小点为 $X^{(1)}$, 则 $X^{(1)}$ 必为该处等高线的切点。此点的梯度方向为等高线的法线方向, 因此

$$[\nabla f(X^{(1)})]^T P^{(0)} = [b + AX^{(1)}]^T P^{(0)} = 0 \quad (4-29)$$

若从另一点 $X^{(0)}$ 出发, 也以 $P^{(0)}$ 方向搜索, 又得一极小点 $X^{(2)}$, 同理也应有

$$[\nabla f(X^{(2)})]^T P^{(0)} = [b + AX^{(2)}]^T P^{(0)} = 0 \quad (4-30)$$

式(4-29)与(4-30)之差为

$$[X^{(1)} - X^{(2)}]^T A P^{(0)} = 0 \quad (4-31)$$

若令 $P^{(1)} = X^{(1)} - X^{(2)}$, 则

$$[P^{(1)}]^T A P^{(0)} = 0 \quad (4-32)$$

这就说明 $P^{(1)}$ 与 $P^{(0)}$ 对 A 是共轭的。而 $P^{(1)}$ 正是 $X^{(1)}$ 与 $X^{(2)}$ 两切点连线方向, 此方向上的极小点即 $f(X)$ 的极小点。可以证明, 对于一个二元的二次函数来说, 只要搜索两个方向 $P^{(0)}$ 及 $P^{(1)}$, 就可以达到极值点。而对于 n 维欧氏空间上非负定的二次函数, 可以通过不超过 n 次的搜索就可以达到极小点。而一般函数在极值点附近时, 都有近似于二次函数的性质, 这就是共轭梯度法的优点所在。

共轭方向是由式(4-32)的二次型来定义的, 因此计算中要用到矩阵 A 。如果已知 A , 则计算共轭方向是容易的。例如当函数为二次函数时, A 为二次项的常系数矩阵。但当函数为非二次时, A 为二阶偏导矩阵(即赫森矩阵), 求解相当麻烦, 尤其当维数很高时更加困难。因此就提出了一个问题: 能否避免矩阵 A 的计算, 比较方便地确定共轭方向呢? 这就是共轭方向生成的问题。下面介绍 F-R (Fletcher-Reeves) 共轭梯度法的迭代公式。

对于 n 元二次的目标函数

$$f(X) = a + b^T X + \frac{1}{2} X^T A X, \quad (4-33)$$

式中, X 为 n 维向量。设 $X^{(0)}$ 为任意给定的起始点; $P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(i)}$ 为 i 次迭代中要寻求的对 A 的共轭方向; $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(i+1)}$ 依次为沿这些方向求得的近似极小点。

于是有

$$G^{(0)} = \nabla f(X^{(0)}) = b + AX^{(0)}, \quad (4-34)$$

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + h^{(i)} P^{(i)}, \quad (4-35)$$

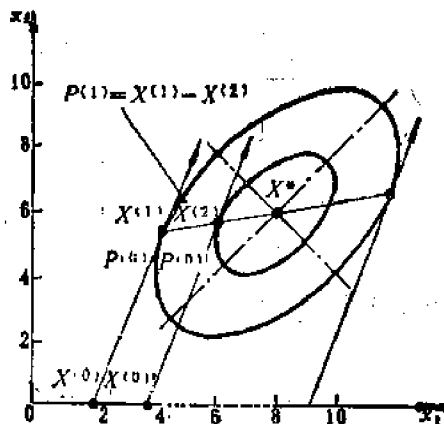


图 4-6 等高线

其中最优化步长 $h^{(i)}$, 满足

$$f(X^{(i+1)}) = f(X^{(i)} + h^{(i)}P^{(i)}) = \min_h f(X^{(i)} + hP^{(i)}). \quad (4-36)$$

同样, 对 $X^{(i+1)}$ 也有

$$G^{(i+1)} = \nabla f(X^{(i+1)}) = b + AX^{(i+1)}. \quad (4-37)$$

将式(4-37)与式(4-34)相减, 并将式(4-35)代入得

$$G^{(i+1)} - G^{(i)} = A(X^{(i+1)} - X^{(i)}) = h^{(i)}AP^{(i)}. \quad (4-38)$$

另外, 根据共轭的定义, 应有

$$[P^{(i)}]^T AP^{(j)} = 0, \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, i \neq j) \quad (4-39)$$

于是, 将式(4-38)代入式(4-39)中, 即得

$$[P^{(i)}]^T (G^{(i+1)} - G^{(i)}) = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, i \neq j). \quad (4-40)$$

在式(4-40)的关系式中, 不显含矩阵 A , 只用到相应各点的梯度, 因此可以不计算矩阵 A 而求出共轭的方向 $P^{(i)}$.

现从 $X^{(0)}$ 点开始进行搜索, 在确定第一个搜索方向 $P^{(0)}$ 时, 因为除了梯度 $G^{(0)}$ 可以直接计算外, 没有其他有用的信息, 因此可取

$$P^{(0)} = -G^{(0)} = -\nabla f(X^{(0)}) = -(b + AX^{(0)}). \quad (4-41)$$

接着沿 $P^{(0)}$ 方向作一维搜索, 求最优步长 $h^{(0)}$, 使

$$f(X^{(1)}) = f(X^{(0)} + h^{(0)}P^{(0)}) = \min_h f(X^{(0)} + hP^{(0)}) \quad (4-42)$$

由此得一新的点 $X^{(1)}$, 并算出 $G^{(1)} = \nabla f(X^{(1)})$. 因为梯度方向与原搜索方向正交, 故 $G^{(1)}$ 正交于 $P^{(0)}$, 从而也和 $G^{(0)}$ 正交, 即

$$[P^{(0)}]^T G^{(1)} = [-G^{(0)}]^T G^{(1)} = 0 \quad (4-43)$$

为在 $G^{(0)}$ 和 $G^{(1)}$ 构成的正交系中寻求共轭方向 $P^{(1)}$, 可令

$$P^{(1)} = -G^{(1)} + \beta^{(0)}P^{(0)}, \quad (4-44)$$

即共轭方向为该次的反梯度方向(最速下降方向)与上次搜索方向的线性组合。这里的关键是选择一个 $\beta^{(0)}$ ——共轭系数, 使 $P^{(1)}$ 与 $P^{(0)}$ 共轭。根据式(4-40)有

$$[P^{(1)}]^T (G^{(1)} - G^{(0)}) = 0,$$

将式(4-44)代入并化简得

$$[G^{(1)} - \beta^{(0)}P^{(0)}]^T (G^{(1)} - G^{(0)}) = 0,$$

$$[G^{(1)}]^T G^{(1)} - \beta^{(0)}[G^{(0)}]^T G^{(0)} = 0,$$

共轭系数 $\beta^{(0)}$ 的计算公式为

$$\beta^{(0)} = [G^{(1)}]^T G^{(1)} / ([G^{(0)}]^T G^{(0)}). \quad (4-45)$$

这里假定 $G^{(0)} \neq 0$, 否则 $X^{(0)}$ 即为极值点, 无须搜索了。通过 $G^{(1)}$ 与 $G^{(0)}$ 即可求出共轭方向 $P^{(1)}$. 沿此 $P^{(1)}$ 方向再进行一维搜索求最优步长 $h^{(1)}$, 得到 $X^{(2)}, \dots$. 如此进行下去, 一般来说有以下的迭代关系式

$$P^{(i+1)} = -G^{(i+1)} + \beta^{(i)}P^{(i)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (4-46)$$

$$\beta^{(i)} = [G^{(i+1)}]^T G^{(i+1)} / ([G^{(i)}]^T G^{(i)}). \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (4-47)$$

所求得的 $P^{(i+1)}$ 即为共轭方向。

按照公式(4-46)和(4-47)确定搜索方向的相应算法就称为 F-R 共轭梯度法。因为它不必计算矩阵 A , 可以简便地用于一般的目标函数, 而且公式结构简单, 仅需存贮三个向量, 占存贮

单元较少,便于计算机迭代计算。其程序框图如图 4-7 所示。

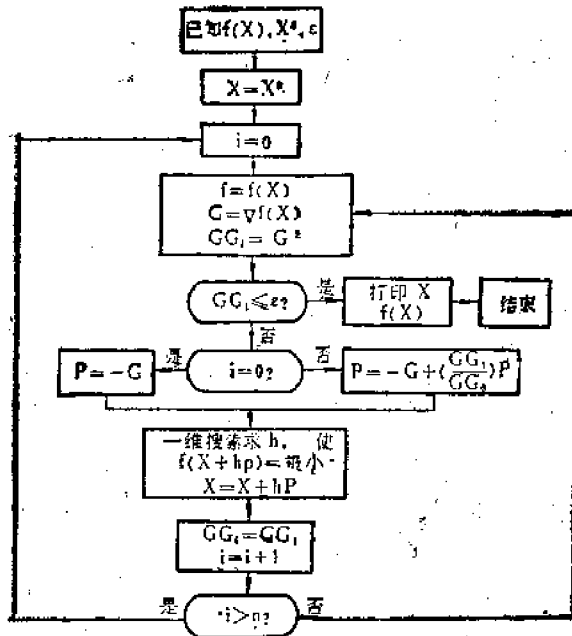


图 4-7 共轭梯度法的程序框图

五.单纯形法

由共轭梯度法可知在寻优过程中都要求计算目标函数的梯度。而在许多实际的非线性规划问题中,目标函数的梯度并不能写出其解析形式,因此只能采用近似算法来计算目标函数的梯度,这样不仅增加了计算工作量,而且会影响寻优的收敛性。单纯形法是一种不必计算目标函数梯度的直接搜索法。它是在一定的图形的顶点上,按一定的规则进行试探性的搜索。这个方法的优点是操作简单,便于在计算机上实现。

单纯形是在一定的空间中的最简单的图形。如二维空间(平面上),单纯形为三角形,其他的图形可分解为若干个三角形的和,它是最基本最简单的图形。在三维空间中,单纯形即四面体。在 n 维空间中的单纯形,就是以 $n+1$ 个顶点组成的图形。若 $n+1$ 个顶点间的距离都相等,则称为正规的单纯形(或正单纯形)。

如果能先算出各顶点的目标函数值并将它们进行比较,从它们之间的大小关系就可以判断函数变化的大致趋势,作为寻求搜索方向的参考。这就是单纯形法的基本思想。

现以二元函数 $f(x_1, x_2)$ 为例说明。取平面上不在同一直线上的三点构成了一个单纯形(图 4-8)。在它的三个顶点 P_G, P_H, P_L , 算出相应的函数值 f_G, f_H 和 f_L , 然后进行比较。若其中 f_H 最大(对于求极小的问题来说,就认为最差), f_G 次小, f_L 最小。则可以设想函数变化的趋势:一般来说,好点在差点的对称点的可能性较大。因此可以去掉 P_H 点,将 P_G 与 P_L 的中点 P_F 和 P_H 连接,在此方向上求使 $P_F P_H = P_F P_R$, 以 P_R 点作为新的计算点,此时 P_R 称为 P_H 关于 P_F 的反射点,这种作法称为反射(图 4-8)。

计算 P_R 的函数值 f_R , 若 $f_R \geq f_G$, 这说明可能前进得太远了。以致 P_R 并不比 P_H 好,因此需要压缩步长,可在 P_H 与 P_R 之间另选新点 P_S 。若 $f_R < f_G$, 则说明情况有了改善,还可以前进得更远一些,即加大步长,在 $P_H P_R$ 的延长线上取一新点 P_R (加大步长的条件有时

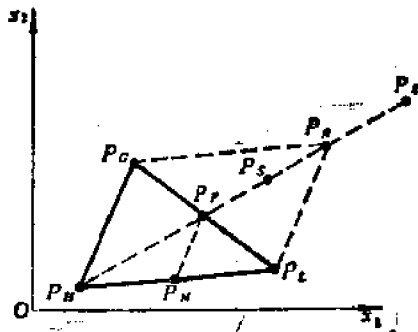


图 4-8 单纯形法示意图

也可用更严格的条件: $f_R < f_L$)。若 P_H 点的函数值 $f_H \leq f_R$, 这时就取 P_H 为新点 P_S , 否则就取 P_R 为新点 P_S 。

总之, 我们可求得一新点 P_S 。若 $f_S < f_G$, 说明情况确有改善, 这时可舍弃原来的 P_H 点, 而以 P_G 、 P_L 、 P_S 三点构成一个新的单纯形。然后重复上述步骤。若 $f_S \geq f_G$, 说明把 P_H 换成 P_S 改善不大, 此时可把原单纯形 $\{P_H P_G P_L\}$ 按一定的比例缩小, 例如边长都缩小一半, 构成新的单纯形 $\{P_M P_R P_L\}$, 这称为

单纯形的收缩。然后重新开始, 重复以前的步骤。直至满足给定的收敛要求为止。

以上的单纯形法是 Nelder 和 Mead 于 1964 年所提出的, 称为单纯形加速法, 因为它与最原始的单纯形法相比能大大加快收敛速度, 因此得到普遍的应用。

对于一般 n 元函数 $f(X)$, 可取 n 维空间中的 $n+1$ 个点, X_0, X_1, \dots, X_n 构成一个初始的单纯形, 这 $n+1$ 个点应使 n 个向量: $X_1 - X_0, X_2 - X_0, \dots, X_n - X_0$ 为线性独立的。否则搜索极小点的范围便局限在一个低维的空间内, 如果极小点正好不在这个空间内, 那就求错了。

单纯形加速法的具体计算方法和步骤如下。

1. 计算函数值

构成原始单纯形(多边形)后, 可计算各顶点的函数值

$$S_i = f(X_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (4-48)$$

比较诸函数值的大小, 选出最好的点 X_L 及最差的点 X_H , 即

$$\left. \begin{aligned} S_L &= f(X_L) = \min S_i \\ S_H &= f(X_H) = \max S_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (4-49)$$

以及除 S_H 之外 n 个函数值中的最差点 X_G , 即

$$S_G = f(X_G) = \max S_i \quad (i = 0, 1, \dots, n, i \neq H) \quad (4-50)$$

2. 求出反射点 X_R

图 4-9 表示二维的情况, 其中 $\{X_0, X_1, X_H\}$ 构成原始单纯形, 而 X_H 为要去掉的点, X_R 为其反射点。由于 X_F 是线段 $X_0 X_1$ 的中点。故有

$$x_{1F} = \frac{1}{2}(x_{10} + x_{11}),$$

$$x_{2F} = \frac{1}{2}(x_{20} + x_{21}),$$

或写成一般的形式为

$$x_{iF} = \frac{1}{2}(x_{i0} + x_{i1}) \quad (i = 1, 2)$$

同样, 由于 X_F 又是线段 $X_H X_R$ 的中点, 故有

$$x_{iF} = \frac{1}{2}(x_{iH} + x_{iR}) \quad (i = 1, 2),$$

$$\frac{x_{iH} + x_{iR}}{2} = \frac{x_{i0} + x_{i1}}{2},$$

因此,得到反射点 X_R 的坐标为

$$x_{iR} = \frac{2(x_{i0} + x_{i1})}{2} - x_{iH} \quad (4-51)$$

对于三维的情况(图 4-10), $\{X_0, X_1, X_2, X_H\}$ 构成一个四面体, 而 X_H 为要去掉的点, X_R 为其反射点, 由于点 X_F 位于除了 X_H 以外的所有顶点的质量中心, 因此有

$$x_{iF} = \frac{1}{3} (x_{i0} + x_{i1} + x_{i2}) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^2 x_{ij} \quad (i=1, 2, 3). \quad (4-52)$$

又因点 X_F 位于 $\overline{X_H X_R}$ 线段的中点, 故有

$$x_{iF} = \frac{1}{2} (x_{iH} + x_{iR}) \quad (i=1, 2, 3). \quad (4-53)$$

于是可得

$$\frac{x_{iH} + x_{iR}}{2} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 x_{ij} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4-54)$$

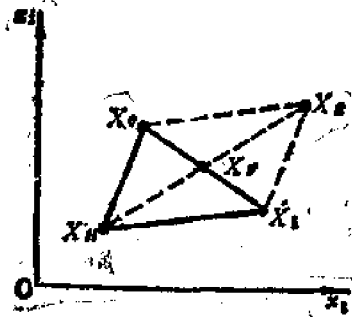


图 4-9 二维的单纯形

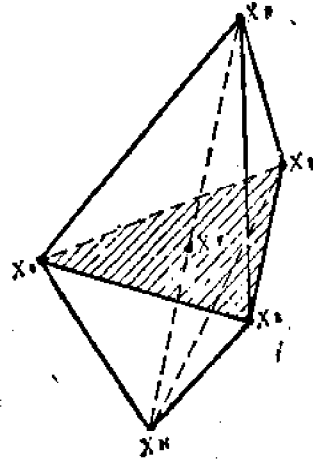


图 4-10 三维空间的单纯形

推而广之, 对于 n 维的情况, 除最差点 X_H 外的 n 个点的质量中心 x_F 点的坐标为

$$x_{iF} = \frac{x_{iH} + x_{iB}}{2} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^n x_{ij} - x_{iH} \right), \quad (4-55)$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

于是可求出反射点 X_R 的坐标为

$$X_{iR} = \frac{2}{n} \left(\sum_{j=0}^n x_{ij} - x_{iH} \right) - x_{iH} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4-56)$$

也可写成为

$$X_R = \frac{2}{n} \left(\sum_{i=0}^n X_i - X_H \right) - X_H. \quad (4-57)$$

也即为

$$X_R = 2 X_F - X_H. \quad (4-58)$$

3. 若 $S_R = f(X_R) \geq S_G$, 则进行步长的压缩

令

$$X_g = (1 - \lambda)X_H + \lambda X_R, \quad (4-59)$$

其中, λ 为给定常数, $0 < \lambda < 1, \lambda \neq 0.5$ 。

计算

$$S_g = f(X_g). \quad (4-60)$$

转向步骤 5。这里要求 $\lambda \neq 0.5$, 是为了避免 $X_g = X_F$, 从而造成搜索空间的降维。

4. 若 $S_R < S_G$, 则进行步长的加大

令

$$X_B = (1 - \mu)X_H + \mu X_R, \quad (4-61)$$

式中, μ 为另一给定的常数, $\mu > 1$ (步长加大的条件也可以换成 $S_R < S_L$, 或 $(1 - \mu)S_H + \mu S_R < S_L$)。

若

$$S_B = f(X_B) < S_R,$$

则令

$$S_S = S_B, X_S = X_B.$$

否则, 令

$$S_S = S_R, X_S = X_R. \quad \text{返回步骤 1.}$$

5. 若 $S_S < S_G$

则把 X_H 舍去, 以 X_S 和其他各 n 个点构成新的单纯形, 重复以上的步骤。否则, 转向步骤 6。

6. 进行单纯形的收缩

令

$$X_i = (X_i + X_L)/2 \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (4-62)$$

然后以 $X_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 为新的单纯形重新开始。

7. 继续上述过程直至

$$\sum_{i=0}^n [f(X_i) - f(X_L)]^2 < \epsilon_1, \quad (4-63)$$

或

$$\left| \frac{f(X_H) - f(X_L)}{f(X_L)} \right| < \epsilon_2 \quad (4-64)$$

为止, 式中 ϵ_1, ϵ_2 为预先给定的充分小的正数。

用计算机进行单纯形加速法的计算时, 其程序框图见图 4-11。

六、SUMT 内点法

惩罚函数法是应用最广泛的一种求解非线性规划问题的数值解法, 它的实质是将有约束的最优化问题通过罚因子的选择变成一系列求惩罚函数的极小值, 从而将问题转化为求解一系列无约束极值问题。惩罚函数法又称序列无约束极小化法, 简称为 SUMT 法, 它包括内点法、外点法和混合法三种。

内点法是求解不等式约束最优化问题的一种十分有效的方法。其特点是将构造的新的无约束目标函数——惩罚函数定义于可行域内, 并在可行域内求惩罚函数的极值点, 即求解无约束问题时的搜索点总是保持在可行域内部。

对于目标函数 $f(X)$ 受约束于 $g_u(X) \leq 0 (u = 1, 2, \dots, m)$ 的最优化问题, 利用内点法求解时, 惩罚函数的一般表达式为

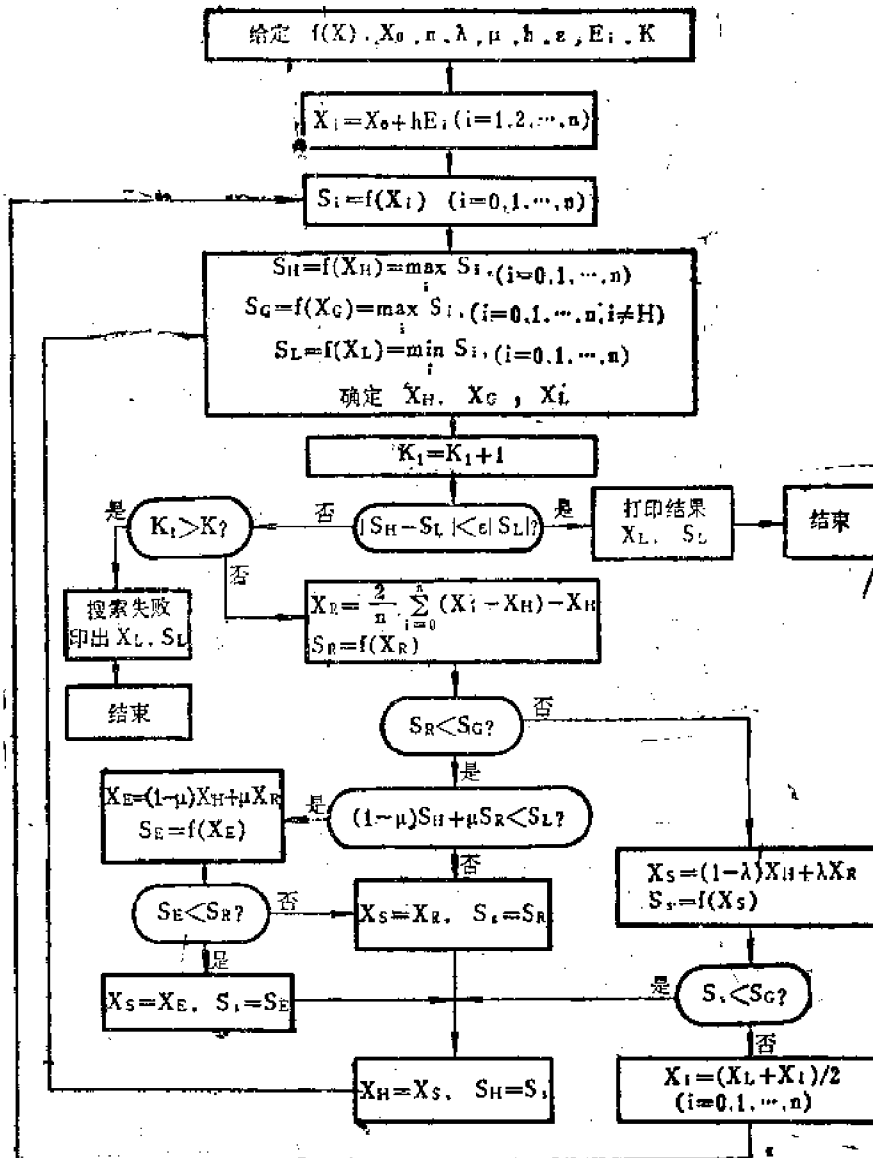


图 4-11 单纯形加速法的程序框图

$$\varphi(X, r^{(k)}) = f(X) - r^{(k)} \sum_{u=1}^m \frac{1}{g_u(X)} \quad (4-65)$$

而对于满足 $g_u(X) \geq 0$ ($u=1, 2, \dots, m$) 的最优化问题, 其惩罚函数一般形式为

$$p(X, r^{(k)}) = f(X) + r^{(k)} \sum_{u=1}^m \frac{1}{g_u(X)} \quad (4-66)$$

式中, $r^{(k)}$ 为惩罚因子, 是递减的正数序列, 即

$$r^{(0)} > r^{(1)} > r^{(2)} > \dots > r^{(k)} > r^{(k+1)} > \dots > 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)} = 0.$$

上述惩罚函数表示式的右边第二项, 称为惩罚项。只要设计点 X 在搜索过程中始终保持为可行点, 则惩罚项必为正值, 而且当设计点 X 由可行域内部远离约束边界处移向边界

($g_u(X) = 0$)时, 则惩罚项的值就要急剧增大并趋向无穷大, 于是惩罚函数 $\varphi(X, r^{(k)})$ 亦随之急剧增大直至无穷大。这时对设计变量起惩罚作用, 使其在迭代过程中始终不会触及约束边界。因此, 第二项使约束边界成为搜索点的一个不能跳出可行域之外的障碍, 所以又称为障碍项或障碍函数, 也有称围墙函数的。

对惩罚函数 $\varphi(X, r^{(k)})$ 求无约束极值时, 其结果将随给定的惩罚因子 $r^{(k)}$ 而异。为了取得约束面上的最优解, 在迭代过程中就要逐渐减小惩罚因子的值, 直至为零, 这样才能迫使 $\varphi(X, r^{(k)})$ 的极值点 $X^*(r^{(k)})$ 收敛到原函数 $f(X)$ 的约束最优点 X^* 。可以把每次迭代所求得的 $\varphi(X, r^{(k)})$ 的无约束极值的最优解 $X^*(r^{(k)})$ 看作是以 $r^{(k)}$ 为参数的一条轨迹, 当取 $r^{(0)} > r^{(1)} > r^{(2)} > \dots > r^{(k)} > r^{(k+1)} > \dots > 0$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)} = 0$ 时, 点列 $\{X^*(r^{(k)})\}$ 就沿着这条轨迹趋于 $f(X)$ 的约束最优点。

因此, 惩罚因子又称为惩罚参数。内点法是随着惩罚系数 $r^{(k)}$ 的递减序列, 使惩罚函数的无约束极值点 $X^*(r^{(k)})$ 从可行域的内部向原目标函数的约束最优点逼近, 直至达到最优点。

惩罚函数法就是以不同的惩罚因子(参数)来构造序列的无约束的新目标函数——惩罚函数, 求这一序列惩罚函数的无约束最优点, 使它逐渐逼近原约束目标函数的最优解的一种最优化方法。而内点法就是将序列惩罚函数定义于可行域之内, 求解探索过程限制在可行域内进行的一种惩罚函数法。

内点法的迭代步骤如下。

- (1) 取初始惩罚因子 $r^{(0)} > 0$, 允许误差 $\epsilon > 0$;
- (2) 在可行域 D 内选取初始点 $X^{(0)}$, 令 $k = 1$;
- (3) 从 $X^{(k-1)}$ 点出发, 用无约束最优方法求解

$$\min_{X \in D} \varphi(X, r^{(k)})$$

的极值点 $X^*(r^{(k)})$;

- (4) 检验迭代终止准则, 如果满足

$$\|X^*(r^{(k)}) - X^*(r^{(k-1)})\| < \epsilon_1 \quad (4-67)$$

和

$$\left| \frac{\varphi(X^*, r^{(k)}) - \varphi(X^*, r^{(k-1)})}{\varphi(X^*, r^{(k-1)})} \right| < \epsilon_2 \quad (4-68)$$

则停止迭代计算, 并以 $X^*(r^{(k)})$ 为原目标函数 $f(X)$ 的约束最优解, 否则转入下一步;

- (5) 取 $r^{(k+1)} = Cr^{(k)}$, $X^{(k)} = X^*(r^{(k)})$, $k = k + 1$, 转向步骤(3)。

内点法的计算程序框图如图 4-12 所示。

七、SUMT 外点法

外点法的特点是将惩罚函数定义于约束可行域之外, 且求解无约束问题的搜索点是从可行域外部逼近原目标函数的约束最优解的。

对于目标函数 $f(X)$ 受约束于 $g_u(X) \leq 0$ ($u = 1, 2, \dots, m$) 的最优化设计问题, 利用外点法求解时, 作为无约束新目标函数的惩罚函数, 其一般表达式为

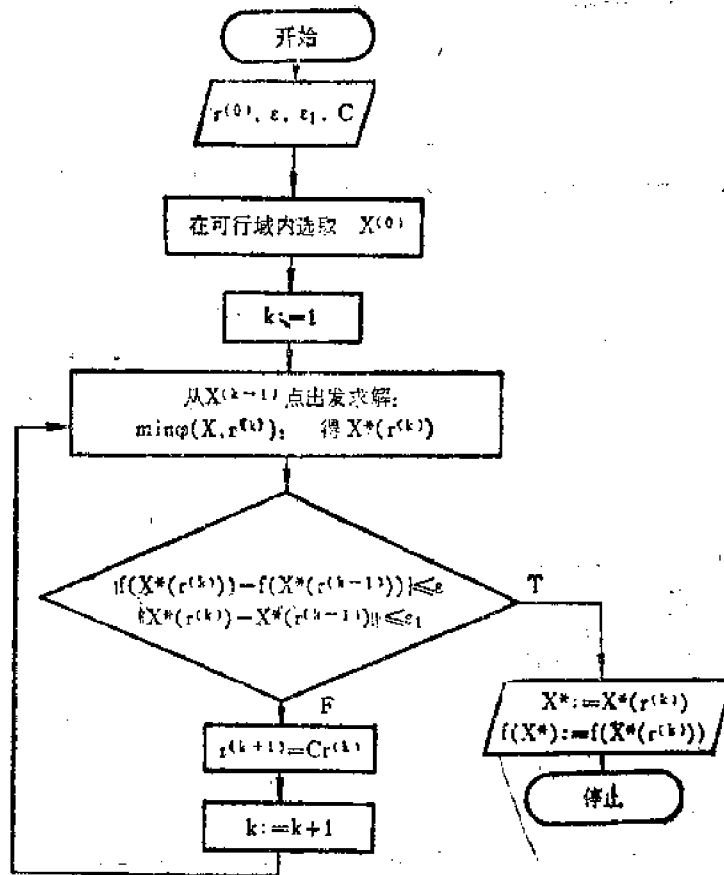


图 4-12 内点法的计算程序框图

$$\varphi(X, M^{(k)}) = f(X) + M^{(k)} \sum_{u=1}^m \left\{ \max[g_u(X), 0] \right\}^a \quad (4-69)$$

式中, 右边第二项为惩罚项。 a 为构造惩罚函数的指数, 其值将影响函数 $\varphi(X, M^{(k)})$ 等值线在约束面处的性质, 一般取 $a=2$; $M^{(k)}$ 为惩罚因子, 是大于零的一个递增数列, 即应满足

$$0 < M^{(0)} < M^{(1)} < M^{(2)} < \dots < M^{(k)} < M^{(k+1)} < \dots, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} M^{(k)} = +\infty.$$

在惩罚项中

$$\max[g_u(X), 0] = \frac{g_u(X) + |g_u(X)|}{2} = \begin{cases} g_u(X) & (\text{当 } g_u(X) > 0 \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } g_u(X) \leq 0 \text{ 时}) \end{cases} \quad (4-70)$$

由此可见, 当搜索点 $X^{(k)}$ 在可行域内时, 惩罚项为零; 若不在可行域内, 则不为零, 且 $M^{(k)}$ 愈大, 则受到的“惩罚”亦愈大。因此要使 $\varphi(X, M^{(k)})$ 极小, 必须迫使式(4-69)中的惩罚项等于零, 亦即要求满足约束条件, 即迫使 $g_u(X) \leq 0$ 。这就保证了在可行域内 $\varphi(X, M^{(k)})$ 和 $f(X)$ 是等价的, 即

$$\varphi(X, M^{(k)}) = \begin{cases} f(X) + M^{(k)} \sum_{u=1}^m [g_u(X)]^2 & (\text{在可行域外}), \\ f(X) & (\text{在可行域内}). \end{cases} \quad (4-71)$$

当约束条件为 $g_u(X) \geq 0$ ($u=1, 2, \dots, m$) 时, 则惩罚函数的一般表达式为

$$\varphi(X, M^{(k)}) = f(X) + M^{(k)} \sum_{u=1}^m \left\{ \min[0, g_u(X)] \right\}^a \quad (4-72)$$

一般取 $a=2$ 。

同样有

$$0 < M^{(0)} < M^{(1)} < M^{(2)} < \dots < M^{(k)} < M^{(k+1)} < \dots \rightarrow +\infty,$$

而在惩罚项中

$$\min [0, g_v(X)] = \frac{g_v(X) - |g_v(X)|}{2} = \begin{cases} g_v(X) & (\text{当 } g_v(X) < 0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } g_v(X) \geq 0 \text{ 时}). \end{cases} \quad (4-73)$$

若约束条件中还包括 $h_v(X) = 0$ ($v = 1, 2, \dots, p$) 的等式约束时, 则在式(4-69)、(4-72)中的右边尚需加进第三项——惩罚项 $M^{(k)} \sum_{v=1}^p [h_v(X)]^2$ 。

对惩罚函数 $\varphi(X, M^{(k)})$ 求无约束极值, 其结果将随给定的惩罚因子 $M^{(k)}$ 的值而异。可以将惩罚函数无约束极值问题的最优解 $X^*(M^{(k)})$ 看作是以 $M^{(k)}$ 为参数的一条轨迹, 当取 $0 < M^{(0)} < M^{(1)} < M^{(2)} < \dots < M^{(k)} < M^{(k+1)} < \dots \rightarrow +\infty$ 时, 点列 $\{X^*(M^{(k)})\}$ 就沿着这条轨迹趋于原目标函数 $f(X)$ 的约束最优解。因此, 外点法是随着惩罚因子(参数) $M^{(k)}$ 的递增序列, 使惩罚函数的无约束极值点 $X^*(M^{(k)})$ 从可行域外部向原目标函数的约束最优点逼近, 直至达到最优点。

外点法的迭代步骤如下。

1. 选择参数

初始惩罚因子 $M^{(0)} > 0$; 允许误差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; 递增系数 C ; 初始点 $X^{(0)}$; 惩罚因子的控制量 R , 当 $M^{(k)} > R$ 时即可判别是否达到收敛精度要求; 令计算次数 $k := 1$ 。

2. 从 $X^{(k-1)}$ 点出发, 用无约束最优化方法求解

$$\min_{X \in E^n} \varphi(X, M^{(k)}), \text{ 得 } X^*(M^{(k)})$$

其中

$$\varphi(X, M^{(k)}) = f(X) + M^{(k)} \sum_{u=1}^m \left\{ \max[g_u(X), 0] \right\}^2.$$

3. 计算 $X^*(M^{(k)})$ 点违反约束的最大量

$$Q = \max\{g_u[X^*(M^{(k)})], u = 1, 2, \dots, m\}.$$

4. 检验迭代终止准则: 如果满足

$$Q = \max\{g_u[X^*(M^{(k)})], u = 1, 2, \dots, m\} \leq \varepsilon_1, \quad (4-74)$$

则可认为 $X^*(M^{(k)})$ 点已接近约束边界, 停止迭代, 否则转入下一步。

5. 检验 $M^{(k)} > R$

若 $M^{(k)} > R$, 再用靠近约束面附近的条件极值点的移动距离作为迭代终止准则来检验, 则当

$$\|X^*(M^{(k-1)}) - X^*(M^{(k)})\| \leq \varepsilon_2 \quad (4-75)$$

时, 停止迭代。

若 $M^{(k)} > R$ 或式(4-75)不成立, 则取

$$M^{(k+1)} = CM^{(k)}, X^{(0)} = X^*(M^{(k)}), k := k + 1, \text{ 并转向步骤 2.}$$

外点法的计算程序框图如图 4-13 所示。

八、混 合 法

混合法是将内点法和外点法的惩罚函数形式结合在一起, 用来求解既有不等式约束又有等式约束条件的最优化问题。

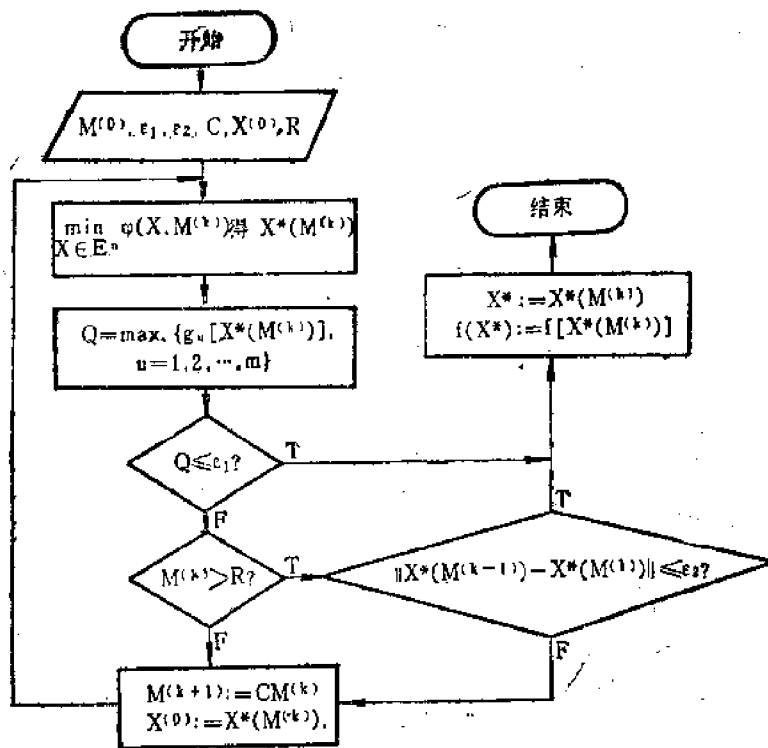


图 4-13 外点法的计算程序框图

例如：求解原目标函数 $f(X)$ 的极小值

$$\begin{aligned} & \min_{X \in E^n} f(X), \\ & \text{s.t. } g_u(X) \leq 0 \quad (u = 1, 2, \dots, m), \\ & \quad h_v(X) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

根据混合法的基本思想，作为新目标函数的惩罚函数，其惩罚项由两部分组成，一部分反映不等式约束的影响并以内点法的构造形式列出。另一部分反映等式约束的影响并以外点法的构造形式列出，即混合法的惩罚函数的一般表达式为

$$\varphi(X, r^{(k)}, M^{(k)}) = f(X) - r^{(k)} \sum_{u=1}^m \frac{1}{g_u(X)} + M^{(k)} \sum_{v=1}^p [h_v(X)]^2. \quad (4-76)$$

即所构造的混合法的惩罚函数，同时含有障碍函数和衰减函数。

根据 Fiacco 等建议的关系式

$$M^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{r^{(k)}}},$$

将惩罚因子统一用 $r^{(k)}$ 表示，则混合法的惩罚函数又可表达为

$$\varphi(X, r^{(k)}) = f(X) - r^{(k)} \sum_{u=1}^m \frac{1}{g_u(X)} + \frac{1}{\sqrt{r^{(k)}}} \sum_{v=1}^p [h_v(X)]^2,$$

$$(r^{(0)} > r^{(1)} > r^{(2)} > \dots > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)} \rightarrow 0) \quad (4-77)$$

当 $f(X)$ 受约束于 $g_u(X) \geq 0$ ($u=1, 2, \dots, m$), $h_v(X) = 0$ ($v=1, 2, \dots, p$) 时, 测混合法其惩罚函数的表达式为

$$\varphi(X, r^{(k)}) = f(X) + r^{(k)} \sum_{u=1}^m \frac{1}{g_u(X)} + \frac{1}{\sqrt{r^{(k)}}} \sum_{v=1}^p [h_v(X)]^2, \\ (r^{(0)} > r^{(1)} > r^{(2)} > \dots > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)} \rightarrow 0) \quad (4-78)$$

混合法的迭代步骤如下:

- (1) 选择初始惩罚因子 $r^{(0)}$ 的值, 在许多 SUMT 程序中, 常取 $r^{(0)} = 1$ 。规定允许误差 $\epsilon > 0$ 。
- (2) 在可行域 \mathcal{D} 内选择一个严格满足所有不等式约束的初始点 $X^{(0)}$ 。
- (3) 求解 $\min \varphi(X, r^{(k)})$, 得 $X^*(r^{(k)})$ 。
- (4) 检验迭代终止准则, 如果满足要求, 则停止迭代, 并以 $X^*(r^{(k)})$ 为原目标函数 $f(X)$ 的约束最优解, 否则转入下一步。
- (5) 取 $r^{(k+1)} = Cr^{(k)}$, $X^{(0)} = X^*(r^{(k)})$, $k := k + 1$, 转向步骤 3。

§ 4-5 仿生机械优化设计实例

肌电假手、骨骼式假腿、步行器、轮椅及其鉴定装置中采用了各种机构。现以图 2-9 所示的仿生拇指机构为例说明最优化设计的应用。

为便于进行拇指机构的优化设计, 可将其拆开为上下两部分, 即 RRSS 空间四杆机构部分和平面四杆机构部分, 并对每一部分单独进行优化, 然后再由优化得出的两组最佳参数组合起来, 构成整个拇指机构。

1. RRSS 机构的优化设计

(1) 确定设计变量

根据统计资料设定成年人拇指的三个指节长度 R_1, R_2, R_3 分别为 60 mm, 45 mm 和 35 mm, 初始外伸角 $\alpha = 30^\circ$, a_0 为坐标系原点, A 点的初始坐标 $a_1(0, 30, 0)$, 关节轴线矢量 u_0 的方向余弦 $(0, 0, 1)$, 矢量 u_2 的方向余弦 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$ 。要求确定 B_0 点坐标 (x_{b0}, y_{b0}, z_{b0}) , 及 B 点的初始坐标 (x_{b1}, y_{b1}, z_{b1}) 。

于是, 设计变量可取为

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (x_{b1}, y_{b0}, z_{b0}, x_{b1}, y_{b1}, z_{b1})^T$$

(2) 建立目标函数

要求拇指下半部分机构运动时, 转角的变化关系 $\theta_2 = F_2(\theta_1)$, 应尽可能地接近测试所得的基本动作特征曲线的关系式 $\theta_2 = f_2(\theta_1)$ 。于是目标函数可采用最大误差极小化形式, 即

$$S_1 = |f_2(\theta_{1i}) - F_2(\theta_{1i})| \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

式中, θ_{1i} 表示 θ_1 在运动范围内均布的 n 个点。

(3) 确定约束方程

约束方程包含边界约束和性能约束两大类。

边界约束为考虑限制 B_0 、 B 两点的位置, 以不使它们超出某个范围引起机构破坏, 可表示为

$$\begin{aligned} g_1(X) &= x_1 < 20; & g_2(X) &= -5 - x_1 < 0; \\ g_3(X) &= x_3 < 0; & g_4(X) &= -50 - x_3 < 0; \\ g_5(X) &= x_4 < 20; & g_6(X) &= 0 - x_4 < 0; \\ g_7(X) &= x_5 < 30; & g_8(X) &= -x_5 < 0; \\ g_9(X) &= x_6 < -20; & g_{10}(X) &= -50 - x_6 < 0. \end{aligned}$$

性能约束考虑为了使拇指上半部分机构处于较好的受力状态, $\overline{BB_0}$ 杆反作用力对 u_2 轴的力矩应越大越好。为此, 对 $\overline{BB_0}$ 杆的方向 λ 要有所约束, 希望它接近于 B 点对 u_2 轴相对速度的方向 v_0 。设

$$\phi = \arcsin(\lambda \cdot v_0).$$

因为 ϕ 值随 θ_1 变化而变化, 而机构要求 ϕ 在工作范围内均应大于 35° , 所以力传递性能约束条件可表示为

$$g_{11}(X) = 35 - \phi(\theta_{11}) < 0.$$

(4) 确定数学模型

拇指下半部分机构优化设计的数学模型可表达为

$$\begin{aligned} \min f(X) &= |f_2(\theta_{11}) - F_2(\theta_{11})|, \\ X &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T, \\ \text{s.t. } g_u(X) &\leq 0 \quad u = 1, 2, \dots, 11. \end{aligned}$$

(5) 优化设计结果

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	e
-2.229	-4.316	-48.326	15.913	15.462	-40.15	0.01

2. 平面四杆机构的优化设计

(1) 确定设计变量

如图2-9所示, R_2 为平面四杆机构的主动杆。以 A 为坐标原点, AC 为 x 轴, P 点坐标为 $(R_2 \cos \angle PAC, R_2 \sin \angle PAC)$, 即 $(45 \cos \angle PAC, 45 \sin \angle PAC)$, F 点坐标为 (x_f, y_f) , C 点坐标为 $(x_c, 0)$ 。 R_2 的初始角为 α , 连杆固定角 $\angle SPF = \beta$ 。于是设计变量可取为

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (\angle PAC, x_f, y_f, x_c, \alpha, \beta)^T.$$

(2) 建立目标函数

要求拇指上半部分机构运动时 $\theta_3 = F_1(\theta_2)$ 的变化应接近测试所得的基本动作特征曲线 $\theta_3 = f(\theta_2)$, 所以可取两者之间的误差作为目标函数, 即

$$S_2 = |f_3(\theta_{2i}) - F_3(\theta_{2i})|,$$

其中 $\theta_{2i}, i = 1, 2, \dots, n$ 是 θ_2 在运动范围内均布的 n 个点。

(3) 确定约束条件

边界约束为

$$\begin{aligned} g_1(X) &= f < \frac{1}{3} R_2; \\ g_2(X) &= -f < 0; \end{aligned}$$

$$g_3(X) = b < 2R_1;$$

$$g_4(X) = -b < 0;$$

$$g_5(X) = x_5 < 180^\circ;$$

$$g_6(X) = -x_5 < 0;$$

$$g_7(X) = x_6 < 180^\circ;$$

$$g_8(X) = -x_6 < 0.$$

性能约束为保持四杆机构交叉状态

$$g_9(X) = x_3 > 0;$$

$$g_{10}(X) = x_2 - 45 \cos x_1 \leq 0.$$

传动角 $\angle PFC$ 在运动范围内必须大于 35° , 即

$$g_{11}(X) = 35 - \angle PFC < 0.$$

(4) 建立数学模型

综合上述分析, 得出拇指上半部分平面机构的优化设计数学模型

$$\min f(X) = S_2(X) = |f_s(\theta_{2i}) - F_s(\theta_{2i})|,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (\angle PAC, x_f, y_f, x_c, \alpha, \beta)^T,$$

$$\text{s.t. } g_u(X) \leq 0, u = 1, 2, \dots, 11.$$

(5) 优化设计结果

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ε
157.098	-42.132	17.918	14.758	159.913	49.365	0.001

第五章 仿生机械运动分析的数学方法

§ 5-1 概 述

一般机构的设计步骤大致可分为:(1) 运动综合,(2) 运动分析,(3) 静力分析,(4) 动力分析,(5) 优化设计。所以,设计仿生机械首先要考虑的就是运动学的问题。

用解析法作机构运动分析的内容,包括有位移分析、速度分析和加速度分析三个方面,但关键问题是建立位移方程式,至于速度分析和加速度分析,则可利用位移方程式对时间求导一次、二次而求解。

机构运动分析的方法很多,但是矢量概念是描述刚体运动的一种基本分析方法。矢量可用极坐标和直角坐标两种坐标系来描述,它们各有特点。在数值分析方法中,也常常把矩阵法与矢量法结合起来使用。用矩阵法研究机构的运动,就是把机构的运动问题抽象为坐标的变换问题。

§ 5-2 复数极矢量法

一、复数极矢量概念

复数极矢量概念常常用于平面连杆机构的运动分析。这种方法是建立在复数的极坐标表示的基础上,即表示为

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (5-1)$$

大家知道,矢量 r 是一个有方向及大小的量

$$r = r\alpha, \quad (5-2)$$

式中: r 是矢量 r 的模; α 是单位矢量,大小为 1,方向与矢量 r 相同。

若把平面改为复平面,取实轴为 x ,虚轴为 y ,则式 (5-2) 可改写为

$$r = r_x + i r_y = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}. \quad (5-3)$$

所以,单位矢量

$$\alpha = e^{i\theta}. \quad (5-4)$$

单位矢量 $e^{i\theta}$ 表示矢量的方向,其中 θ 称为幅角,逆时针为正。由式 (5-4) 可知

当 $\theta = 0^\circ$ 或 2π 的一个整数倍时, $e^{i\theta} = 1$;

当 $\theta = 180^\circ$ 或 π 的一个奇数倍时, $e^{i\theta} = -1$;

当 $\theta = 90^\circ$ 时,记作 $e^{i\theta} = i$;

当 $\theta = 270^\circ$ 或 -90° 时, $e^{i\theta} = -i$ 。

同时,根据上述分析可得出, $i^2 = -1$, 即

$$i = \sqrt{-1},$$

称为单位复数算子。

于是,若在平面上设定一个直角坐标系,横轴上的点代表实数,而纵轴上的点就代表纯虚数,则复数的实数部分与虚数部分的系数就成为代表矢量的分量。所以,复数和平面上的点对应,也即和平面上的矢量一一对应,而复数的绝对值 r 和幅角 θ ,事实上就是点 $P(r_x, r_y)$ 的极坐标。

下面介绍复数极矢量的一些基本运算法则。

1. 单位矢量 $e^{i\phi}$ 乘以矢量 $r e^{i\theta}$ 的积等于

$$e^{i\phi}(r e^{i\theta}) = r e^{i(\phi+\theta)}, \quad (5-5)$$

即矢量 $r = r e^{i\theta}$ 被转动了 ϕ 角。

2. 矢量 $r = r e^{i\theta}$ 乘以单位复数算子 $i = \sqrt{-1}$, 等于矢量沿 θ 角的正方向转动 $\frac{\pi}{2}$ 弧度,即

$$i e^{i\theta} = i(\cos \theta + i \sin \theta) = i \cos \theta - \sin \theta = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}. \quad (5-6)$$

同理

$$i(i e^{i\theta}) = i^2 e^{i\theta} = -e^{i\theta} = e^{i(\theta + \pi)}. \quad (5-7)$$

3. 单位矢量和它的共轭复数的乘积等于 1, 即

$$e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^0 = 1. \quad (5-8)$$

4. 三角恒等式

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned} \quad (5-9)$$

5. 若已知一个点对固定参考原点的位置可用矢量 $r = r e^{i\theta}$ 表示, 则其对时间的一阶导数为

$$\frac{d}{dt}(r e^{i\theta}) = \dot{r} e^{i\theta} + r(e^{i\theta} i \dot{\theta}) = \dot{r} e^{i\theta} + r \dot{\theta} i e^{i\theta}. \quad (5-10)$$

对时间的二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(r e^{i\theta}) &= \ddot{r} e^{i\theta} + \dot{r}(e^{i\theta} i \ddot{\theta}) + (r \ddot{\theta} + \dot{r} \dot{\theta}) i e^{i\theta} + r \dot{\theta}(i e^{i\theta} i \dot{\theta}) \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) e^{i\theta} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) i e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (5-11)$$

从式(5-10)和(5-11)都可看出,速度和加速度的每一复数极矢量均由两部分组成,一是模的大小,二是单位方向矢量。

二、平面机构运动分析的复数极矢量法

下面以单关节人造手指四杆机构为例,用复数法进行该机构的运动分析。

如图 5-1 所示,设已知固定矢径 r_1 , 各连杆长度 r_2 , r_3 和 r_4 , 及主动构件参数 θ_2 , $\dot{\theta}_2$ (常数)。

1. 位移分析

根据矢量闭环方程式可得

$$r_2 e^{i\theta_2} + d e^{i\theta_d} = r_1, \quad (5-12)$$

移项得

$$d e^{i\theta_d} = r_1 - r_2 e^{i\theta_2},$$

两边各乘共轭数

$$(d e^{i\theta_d})(d e^{-i\theta_d}) = (r_1 - r_2 e^{i\theta_2})(r_1 - r_2 e^{-i\theta_2}),$$

得

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2 (e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_2}),$$

或

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta_2}. \quad (5-13)$$

为求得 θ_d , 可将式(5-12)写为三角表达式

$$r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) + d (\cos \theta_d + i \sin \theta_d) = r_1.$$

则其实部和虚部方程式分别为

$$r_2 \cos \theta_2 = r_1 - d \cos \theta_d,$$

$$r_2 \sin \theta_2 = -d \sin \theta_d.$$

于是可得

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_d &= \frac{-r_2 \sin \theta_2}{r_1 - r_2 \cos \theta_2}, \\ \theta_d &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-r_2 \sin \theta_2}{r_1 - r_2 \cos \theta_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5-14)$$

连杆 3 的角位移 θ_3 可通过下列矢量方程式求解:

$$r_3 e^{i\theta_3} = d e^{i\theta_d} + r_4 e^{i\theta_4}, \quad (5-15)$$

移项得

$$r_4 e^{i\theta_4} = r_3 e^{i\theta_3} - d e^{i\theta_d}.$$

将上式两边各乘共轭数为

$$(r_4 e^{i\theta_4})(r_4 e^{-i\theta_4}) = (r_3 e^{i\theta_3} - d e^{i\theta_d})(r_3 e^{-i\theta_3} - d e^{-i\theta_d}),$$

$$r_4^2 = r_3^2 + d^2 - r_3 d (e^{i(\theta_3 - \theta_d)} + e^{-i(\theta_3 - \theta_d)})$$

$$= r_3^2 + d^2 - 2 r_3 d \cos(\theta_3 - \theta_d),$$

从而可得

$$\cos(\theta_3 - \theta_d) = \frac{r_3^2 + d^2 - r_4^2}{2 r_3 d},$$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \left(\frac{r_3^2 + d^2 - r_4^2}{2 r_3 d} \right) + \theta_d,$$

即

$$\theta_3 = \cos^{-1} \left(\frac{r_3^2 + d^2 - r_4^2}{2 r_3 d} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-r_2 \sin \theta_2}{r_1 - r_2 \cos \theta_2} \right). \quad (5-16)$$

输出角 θ_4 可由式(5-15)的虚部求得, 即

$$r_3 \sin \theta_3 = d \sin \theta_d + r_4 \sin \theta_4,$$

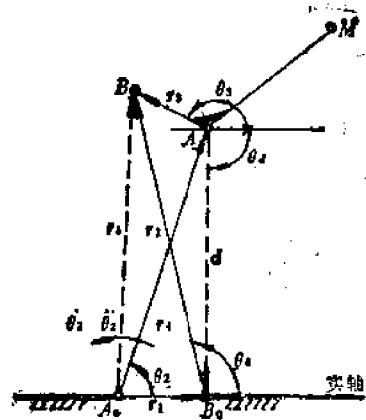


图 5-1 手摇四杆机构

$$\sin \theta_4 = \frac{r_3 \sin \theta_3 - d \sin \theta_2}{r_4},$$

所以得出

$$\theta_4 = \sin^{-1} \left(\frac{r_3 \sin \theta_3 - d \sin \theta_2}{r_4} \right). \quad (5-17)$$

2. 速度分析

采用四连杆的位移矢量方程式

$$\mathbf{r}_b = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = \mathbf{r}_1 + r_4 e^{i\theta_4}. \quad (5-18)$$

现对上式两边求一阶导数,得

$$r_2 \dot{\theta}_2 i e^{i\theta_2} + r_3 \dot{\theta}_3 i e^{i\theta_3} = r_4 \dot{\theta}_4 i e^{i\theta_4}.$$

其实部和虚部方程式分别为

$$-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = -r_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4,$$

$$r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = r_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4.$$

把上式中包括未知量 $\dot{\theta}_3$ 和 $\dot{\theta}_4$ 项移置于等式左边,而把其余已知项均移置至右边得

$$\dot{\theta}_3 (-r_3 \sin \theta_3) + \dot{\theta}_4 (r_4 \sin \theta_4) = r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2,$$

$$\dot{\theta}_3 (r_3 \cos \theta_3) + \dot{\theta}_4 (-r_4 \cos \theta_4) = -r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2.$$

采用行列式求解得

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\begin{vmatrix} r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & -r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & -r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}} = \dot{\theta}_2 \left(\frac{r_2 \sin(\theta_4 - \theta_3)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right). \quad (5-19)$$

同理可得

$$\dot{\theta}_4 = \dot{\theta}_2 \left(\frac{-r_2 \sin(\theta_3 + \theta_4)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \right). \quad (5-20)$$

3. 加速度分析

对位移矢量方程式(5-18)求二阶导数得

$$r_2 \ddot{\theta}_2 (i e^{i\theta_2}) + r_2 \dot{\theta}_2^2 (-e^{i\theta_2}) + r_3 \ddot{\theta}_3 (i e^{i\theta_3}) + r_3 \dot{\theta}_3^2 (-e^{i\theta_3})$$

$$= r_4 \ddot{\theta}_4 (i e^{i\theta_4}) + r_4 \dot{\theta}_4^2 (-e^{i\theta_4}).$$

其实部和虚部方程式为

$$r_2 \ddot{\theta}_2 (-\sin \theta_2) + r_2 \dot{\theta}_2^2 (-\cos \theta_2) + \ddot{\theta}_3 (-r_3 \sin \theta_3) + r_3 \dot{\theta}_3^2 (-\cos \theta_3)$$

$$= \ddot{\theta}_4 (-r_4 \sin \theta_4) + r_4 \dot{\theta}_4^2 (-\cos \theta_4),$$

$$r_2 \ddot{\theta}_2 (\cos \theta_2) + r_2 \dot{\theta}_2^2 (-\sin \theta_2) + \ddot{\theta}_3 (r_3 \cos \theta_3) + r_3 \dot{\theta}_3^2 (-\sin \theta_3)$$

$$= \ddot{\theta}_4 (r_4 \cos \theta_4) + r_4 \dot{\theta}_4^2 (-\sin \theta_4).$$

因为 $\dot{\theta}_2 = \text{常数}$, 故 $\ddot{\theta}_2 = 0$ 。则通过移项和整理上列两式成为

$$\ddot{\theta}_3(-r_3 \sin \theta_3) + \ddot{\theta}_4(r_4 \sin \theta_4) = r_2 \ddot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - r_4 \ddot{\theta}_4^2 \cos \theta_4,$$

$$\ddot{\theta}_3(r_3 \cos \theta_3) + \ddot{\theta}_4(-r_4 \cos \theta_4) = r_2 \ddot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - r_4 \ddot{\theta}_4^2 \sin \theta_4.$$

令

$$r_2 \ddot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - r_4 \ddot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 = A,$$

$$r_2 \ddot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - r_4 \ddot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 = B.$$

于是可求得

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\begin{vmatrix} A & r_4 \sin \theta_4 \\ B & -r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & -r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}} = \frac{-(A \cos \theta_4 + B \sin \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)}, \quad (5-21)$$

及

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{\begin{vmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & A \\ r_3 \cos \theta_3 & -B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & -r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}} = \frac{-(A \cos \theta_3 - B \sin \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}. \quad (5-22)$$

三、空间机构运动分析的复数极矢量法

由上可知,平面矢量可用复数表示。那么,任意一空间矢量能够用复数与另一垂直矢量之和来表示。如图 5-2 所示,空间矢量 r_p 可表示为

$$r_p = (r_p \sin \varphi) e^{i\theta} + j(r_p \cos \varphi) = r_p (e^{i\theta} \sin \varphi + j \cos \varphi). \quad (5-23)$$

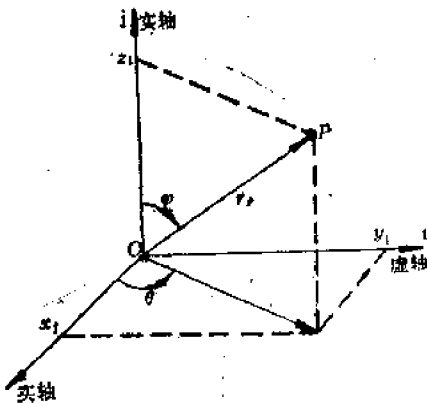


图 5-2 空间矢量的复数表示

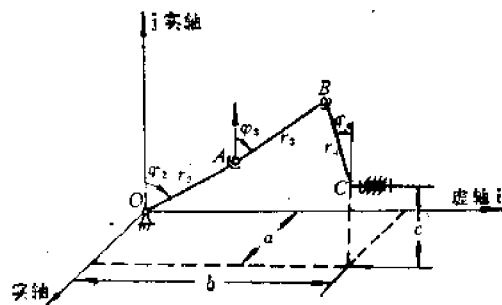


图 5-3 RSSR 机构

若在直角坐标系中,已知矢量 r_p 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) , 那么其夹角 θ 、 φ 及矢量的模 r_p 可用下式表示

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right), \\ \varphi &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{z_1} \right), \\ r_p &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5-24)$$

于是,利用上述原理可以解空间连杆机构运动学问题。

如图 5-3 所示的 RSSR 机构,已知构件尺寸 r_2, r_3, r_4 , 点 C 的坐标 (a, b, c) , 以及主动杆

参数 $\varphi_2, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2$,

现用复数极矢量法对该机构进行运动分析。据矢量闭环方程式可列出

$$\begin{aligned} r_2(e^{i\theta_2} \sin \varphi_2 + j \cos \varphi_2) + r_3(e^{i\theta_3} \sin \varphi_3 + j \cos \varphi_3) \\ = a + ib + jc + r_4(e^{i\theta_4} \sin \varphi_4 + j \cos \varphi_4) \end{aligned}$$

那么,其实部、虚部和 j 部方程式分别为

$$\begin{aligned} r_2 \sin \varphi_2 \cos \theta_2 + r_3 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 &= a + r_4 \sin \varphi_4 \cos \theta_4, \\ r_2 \sin \varphi_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \varphi_3 \sin \theta_3 &= b + r_4 \sin \varphi_4 \sin \theta_4, \\ r_2 \cos \varphi_2 + r_3 \cos \varphi_3 &= c + r_4 \cos \varphi_4. \end{aligned}$$

移项后得

$$\begin{aligned} r_3 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 &= (a - r_2 \sin \varphi_2 \cos \theta_2) + r_4 \sin \varphi_4 \cos \theta_4, \\ r_3 \sin \varphi_3 \sin \theta_3 &= (b - r_2 \sin \varphi_2 \sin \theta_2) + r_4 \sin \varphi_4 \sin \theta_4, \\ r_3 \cos \varphi_3 &= (c - r_2 \cos \varphi_2) + r_4 \cos \varphi_4. \end{aligned}$$

将上列方程平方后相加, 消除 θ_3, φ_3 , 可得

$$\begin{aligned} (a - r_2 \sin \varphi_2 \cos \theta_2)^2 + r_4^2 + 2(a - r_2 \sin \varphi_2 \cos \theta_2)r_4 \sin \varphi_4 \cos \theta_4 \\ + (b - r_2 \sin \varphi_2 \sin \theta_2)^2 + 2(b - r_2 \sin \varphi_2 \sin \theta_2)r_4 \sin \varphi_4 \sin \theta_4 \\ + (c - r_2 \cos \varphi_2)^2 + 2(c - r_2 \cos \varphi_2)r_4 \cos \varphi_4 = r_3^2. \end{aligned}$$

再按 $\sin \varphi_4$ 及 $\cos \varphi_4$ 整理后成为

$$A \sin \varphi_4 + B \cos \varphi_4 = D.$$

若设定 $\theta_4 = 0$, 则上式中的系数为

$$\begin{aligned} A &= (a - r_2 \sin \varphi_2 \cos \theta_2), \\ B &= (c - r_2 \cos \varphi_2), \end{aligned}$$

$$D = \frac{r_3^2 - r_4^2 - (b - r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2)^2 - (a - r_2 \sin \varphi_2 \cos \theta_2)^2 - (c - r_2 \cos \varphi_2)^2}{2r_4}.$$

那么,根据三角公式

$$\sin \varphi_4 = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_4}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi_4}{2}\right)}, \quad \cos \varphi_4 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi_4}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi_4}{2}\right)},$$

可把上述求解 φ_4 的三角方程式化为二次代数方程式, 最后可得

$$\varphi_4 = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{B + D} \right).$$

上式表明, φ_4 有两个可能解, 可按机构运动的连续性来选取其中一个合理的值。

另外, 若把上述矢量闭环方程式分别对时间求导一次、二次, 便可求出从动杆 r_4 的角速度 $\dot{\varphi}_4$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_4$ 。

§ 5-3 直角坐标系矢量法

一、直角坐标系矢量概念

在直角坐标系里, 矢量 \boldsymbol{a} 可表示为

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}. \quad (5-25)$$

式中, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示坐标轴 Ox, Oy, Oz 的正方向上的单位矢量; a_x 为矢量 \boldsymbol{a} 在 x 轴的投影; a_y 为矢量 \boldsymbol{a} 在 y 轴的投影; a_z 为矢量 \boldsymbol{a} 在 z 轴的投影。

这种方法建立在下列几个矢量运算性质的基础上。

1. 两个矢量的标量积——点积

两个矢量的标量积等于两个矢量的模乘夹角的余弦, 可用如下公式表示

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos \theta, \quad (5-26)$$

式中, θ 为矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 间的夹角。

若用矢量的投影表示, 则上式可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned} \quad (5-27)$$

这是因为对于空间的直角坐标系, 单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的标量积存在有

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} &= 1, \\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-28)$$

当矢量 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 相等时, 可得

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a^2,$$

或

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (5-29)$$

即矢量的模等于它的投影的平方和的平方根。

根据式(5-26), 可写出用矢量的投影来表示两个矢量的夹角

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}, \quad (5-30)$$

式中: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$ 。

矢量的方向余弦, 可由下列方法求得。

设矢量 \boldsymbol{a} 分别与三个坐标轴 Ox, Oy, Oz 所构成的方向角为 α, β, γ , 它们的方向余弦分别为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 。那么据矢量的标量积定义及其投影表示, 可得

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i} = a \cos \alpha = a_x,$$

即

同理可得

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (5-31)$$

于是,方向余弦一定适合下列关系式

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (5-32)$$

如果两个矢量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 的方向角分别为 α 、 β 、 γ 及 α' 、 β' 、 γ' , 则两个矢量的夹角计算式(5-30)可改写为

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'. \quad (5-33)$$

那么,两个矢量为垂直的必要且充分条件是

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0. \quad (5-34)$$

此外,标量积还具有下列性质:

(1) 适合于交换律

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (5-35)$$

(2) 满足乘法分配律

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (5-36)$$

(3) 数因子的结合律

$$(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (5-37)$$

2. 两个矢量的矢量积——叉积

根据定义,两个矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的矢量积的模等于

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta. \quad (5-38)$$

该矢量积的矢量 \mathbf{c} 方向垂直于矢量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 所在的平面,并按右手法则使矢量 \mathbf{a} 沿最短途径绕矢量 \mathbf{c} 转至矢量 \mathbf{b} 。

矢量积具有下列几个基本性质:

(1) 两个平行矢量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的矢量积等于零,即

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

(2) 两个互相垂直的矢量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的矢量积,它的模等于 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的模的乘积,即

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab.$$

(3) 矢量积对于因子矢量的对调要改变符号,即

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}). \quad (5-39)$$

因此矢量积不适合交换律。

(4) 矢量积满足分配律,即

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \quad (5-40)$$

(5) 矢量积具有关于数因子的结合律,即

$$(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (5-41)$$

应用上述性质,对于坐标轴上的单位矢量的矢量积,可得出如下关系

$$\left. \begin{aligned} i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j, \\ j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j, \\ i \times i = 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-42)$$

同样,也可用矢量的投影来表示矢量积。设已知两个矢量

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad \text{及} \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

那么可以得到

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}, \quad (5-43)$$

或可用三阶行列式表示为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (5-44)$$

由式(5-43)可知,矢量积的投影为

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \right\} \quad (5-45)$$

及

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}. \quad (5-46)$$

如果两个矢量是互相平行的,那么 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ 。但是,只有当矢量在坐标轴上的三个投影都等于零时,它才等于零。因此存在

$$a_y b_z - a_z b_y = 0, \quad a_z b_x - a_x b_z = 0, \quad a_x b_y - a_y b_x = 0,$$

则可写成

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (5-47)$$

上式说明共线(平行)矢量的对应投影成比例。

若为平面矢量,则由式(5-43)可得

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = k(a_x b_y - a_y b_x). \quad (5-48)$$

3. 三个矢量的乘积

在机构运动分析中,还常用到下列三个矢量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 的各种不同形式的乘积的恒等关系。

(1) 三重矢积

三重矢积等于把中间的矢量乘以其余两矢量的标量积,再减去括弧中剩下的矢量乘以其余两矢量的标量积。即表示为

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (5-49)$$

上述定义可证明如下。设

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}.$$

因此

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

于是

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\ &= (c_x a_z b_x - c_z b_x a_z + c_y b_z a_y - c_y a_z b_y) \mathbf{i} + (c_x a_x b_y - c_x b_x a_y \\ &+ c_z b_y a_x - c_z a_y b_z) \mathbf{j} + (c_y a_y b_x - c_y b_y a_x + c_x b_z a_x - c_x a_z b_x) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5-50)$$

整理后可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &\quad - (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z)(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}), \end{aligned}$$

那么,按标量积定义,上式就可变成

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

于是,式(5-49)得到了证明。

从上式可知,矢量 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 是和 \mathbf{a}, \mathbf{b} 共面且垂直于 \mathbf{c} 的矢量。

同理可得

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (5-51)$$

上式表明 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 是和 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 不同的矢量,因此三重矢积不适合结合律。

(2) 三个矢量的混合积

乘积 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 称为三个矢量的混合积,也可用 (\mathbf{abc}) 或 \mathbf{abc} 来表示。由解析几何学可知,三个矢量的混合积有一个非常重要的几何意义,即它的绝对值表示以这三个矢量为棱边的平面六面体的体积。

按照式(5-27)可写出

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_x(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_x + a_y(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_y + a_z(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_z,$$

并将这等式与式(5-43)、(5-44)及(5-45)比较,便可求得混合积的行列式表示式为

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (5-52)$$

由直接计算容易证明

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (5-53)$$

也就是说,轮换混合积的三个因子,并不改变它的值,而对调两个相邻的因子要改变乘积的符号。

当三个矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 位于同一平面,即为共面矢量,那么因为 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 所表示的矢量必定垂直于 \mathbf{b} 及 \mathbf{c} , 因而垂直于 \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 所在的平面,当然也应当垂直于 \mathbf{a} , 故 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 和 \mathbf{a} 的标量积等于零,即

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0, \text{ 或 } (\mathbf{abc}) = 0,$$

或

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0,$$

此为三个矢量共面的充分和必要条件。

同理可得

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (5-54)$$

4. 矢量的导数

设矢量

$$\mathbf{r}(t) = r\mathbf{a},$$

式中, \mathbf{a} 为矢量 \mathbf{r} 方向的单位矢量。对其求导, 有

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{a} + r \frac{d}{dt}\mathbf{a}. \quad (5-55)$$

中 $\frac{d}{dt}\mathbf{a}$ 为单位矢量的导数, 它说明矢量 \mathbf{r} 方向的变化率。下面讨论其方向与大小。

对于单位矢量, 有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1,$$

双边取导数得

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

即

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0. \quad (5-56)$$

由上式可知, 单位矢量 \mathbf{a} 的导数 $d\mathbf{a}/dt$ 方向与 \mathbf{a} 本身垂直。

若令 $\Delta\theta$ 对应于时间 t 及 $t + \Delta t$ 的两单位矢量 $\mathbf{a}(t)$ 与 $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ 之间的夹角 (图 5-4), 则

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{MN}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \right) \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (5-57)$$

从而可知, 单位矢量 \mathbf{a} 的导数 $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ 的模就是该单位矢量转动的角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ 。

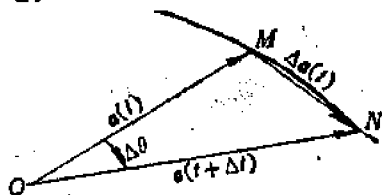


图 5-4 单位矢量的变化

按上面所述的单位矢量的导数的方向与大小，可把式(5-55)所表示的矢量一阶导数改写为

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{a} + r(\dot{\theta} \times \mathbf{a}) = \dot{r}\mathbf{a} + \dot{\theta} \times \mathbf{r}. \quad (5-58)$$

左边的二阶导数可用下面的公式表示

两边各取本身的标量积

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

得

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2.$$

角度 θ_2 可由下式求得

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{r_{1y} - r_{2y}}{r_{1x} - r_{2x}}.$$

为求矢量 \mathbf{r}_3 和 \mathbf{d} 之间的夹角 α , 应用

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{d} + \mathbf{r}_4, \text{ 或 } \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{d},$$

并在两边各取其标量积后可得

$$r_4^2 = r_3^2 + d^2 - 2r_3d \cos \alpha,$$

即为

$$\cos \alpha = \frac{r_3^2 + d^2 - r_4^2}{2r_3d}.$$

于是, 由图 5-5 可知, 可用下式求出转角 θ_3 ,

$$\theta_3 = \theta_2 \pm \alpha.$$

若已知了 θ_2 及 θ_3 值, 就可方便地解出转角 θ_4 。

2. 速度分析

应用式(5-58), 对下列位移方程式进行求导

$$\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4,$$

并考虑到连杆长度不变, 即 $\dot{r} = 0$, 可得

$$\dot{\theta}_2 \times \mathbf{r}_2 + \dot{\theta}_3 \times \mathbf{r}_3 = \dot{\theta}_4 \times \mathbf{r}_4$$

式中, $\dot{\theta} = k\dot{\theta}$ 及 $\mathbf{r} = i r_x + j r_y$ 。

将上列矢量积展开, 并根据式(5-42), 可以写出

$$i(-r_{2y}\dot{\theta}_2) + j(r_{2x}\dot{\theta}_2) + i(-r_{3y}\dot{\theta}_3) + j(r_{3x}\dot{\theta}_3) = i(-r_{4y}\dot{\theta}_4) + j(r_{4x}\dot{\theta}_4).$$

分别取 i 和 j 两部分的恒等式, 并整理为下列两个包含 $\dot{\theta}_3$ 和 $\dot{\theta}_4$ 的线性方程组

$$\dot{\theta}_3(-r_{3y}) + \dot{\theta}_4(r_{4y}) = r_{2y}\dot{\theta}_2,$$

$$\dot{\theta}_3(r_{3x}) + \dot{\theta}_4(-r_{4x}) = -r_{2x}\dot{\theta}_2.$$

于是, 采用行列式可方便解得

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_2 \left(\frac{r_{2x}r_{4y} - r_{2y}r_{4x}}{r_{4x}r_{3y} - r_{3x}r_{4y}} \right),$$

$$\dot{\theta}_4 = \dot{\theta}_2 \left(\frac{r_{2x}r_{3y} - r_{3x}r_{2y}}{r_{4x}r_{3y} - r_{3x}r_{4y}} \right).$$

当每一个角速度为已知时, 则可方便地求出任意位置点的速度。例如, 连杆上 P 点的速度可表示为

$$\dot{P} = \dot{\theta}_2 \times r_2 + \dot{\theta}_3 \times (P - a),$$

式中, $(P - a)$ 为 P 点相对于转轴 a 的位置。

3. 加速度分析

加速度分析可通过对矢量闭环方程式的二次求导来进行。应用式(5-59)可得

$$\ddot{\theta}_2 \times r_2 + \dot{\theta}_2 \times (\dot{\theta}_2 \times r_2) + \ddot{\theta}_3 \times r_3 + \dot{\theta}_3 \times (\dot{\theta}_3 \times r_3) = \ddot{\theta}_4 \times r_4 + \dot{\theta}_4 \times (\dot{\theta}_4 \times r_4),$$

因为上式中, $\dot{\theta} = k\dot{\theta}$, $\ddot{\theta} = k\ddot{\theta}$, $r = ir_x + jr_y$, 于是可将上列矢量积展开, 并根据式(5-42)可分别列出包含 i 和 j 两部分的恒等式

$$i(-r_{2y}\ddot{\theta}_2) + i(-r_{2x}\dot{\theta}_2^2) + i(-r_{3y}\ddot{\theta}_3) + i(-r_{3x}\dot{\theta}_3^2) = i(-r_{4y}\ddot{\theta}_4) + i(-r_{4x}\dot{\theta}_4^2),$$

$$j(r_{2x}\ddot{\theta}_2) + j(-r_{2y}\dot{\theta}_2^2) + j(r_{3x}\ddot{\theta}_3) + j(-r_{3y}\dot{\theta}_3^2) = j(r_{4x}\ddot{\theta}_4) + j(-r_{4y}\dot{\theta}_4^2).$$

上列公式可整理为如下带有未知数 $\ddot{\theta}_3$ 和 $\ddot{\theta}_4$ 的两个线性方程组

$$\ddot{\theta}_3(-r_{3y}) + \ddot{\theta}_4(r_{4y}) = r_{2y}\ddot{\theta}_2 + r_{2x}\dot{\theta}_2^2 + r_{3x}\dot{\theta}_3^2 - r_{4x}\dot{\theta}_4^2 = A,$$

$$\ddot{\theta}_3(r_{3x}) + \ddot{\theta}_4(-r_{4x}) = -r_{2x}\ddot{\theta}_2 + r_{2y}\dot{\theta}_2^2 + r_{3y}\dot{\theta}_3^2 - r_{4y}\dot{\theta}_4^2 = B.$$

因为等式右边的各项均为已知, 所以可用下列行列式求解 $\ddot{\theta}_3$ 及 $\ddot{\theta}_4$.

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\begin{vmatrix} A & r_{4y} \\ B & -r_{4x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_{3y} & r_{4y} \\ r_{3x} & -r_{4x} \end{vmatrix}} = \frac{-(Ar_{4x} + Br_{4y})}{(r_{3y}r_{4x} - r_{3x}r_{4y})},$$

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{\begin{vmatrix} -r_{3y} & A \\ r_{3x} & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_{3y} & r_{4y} \\ r_{3x} & -r_{4x} \end{vmatrix}} = \frac{-(Ar_{3x} + Br_{3y})}{(r_{3y}r_{4x} - r_{3x}r_{4y})}.$$

若把上式与以前所介绍的位移和速度表达式一起编成电子计算机计算程序, 则它们可组成一个完整的四连杆机构运动分析基础。

§ 5-4 坐标变换矩阵法

如上所述, 用矩阵法研究机构的运动, 就是把机构的运动问题抽象为坐标系的变换问题。这时, 除了设置参考坐标系外, 在构件上均需要安置动坐标系, 那么按动坐标系相对于参考坐标系的位置, 即可确定该构件在参考坐标系中的位置。

动坐标系相对于参考坐标系的位置, 可用一个坐标变换矩阵表示。在采用矩阵法作机构运动分析中, 假定: (1) 固定于构件上任意两点之间的距离, 在运动中保持不变; (2) 总位移等于构件的角位移加上线位移; (3) 旋转是不可交换的(图 5-6)。

描述旋转角运动的方法, 通常有下列三种: (1) 绕直角坐标轴的旋转; (2) 欧拉角表示方法; (3) 绕空间任意轴旋转。

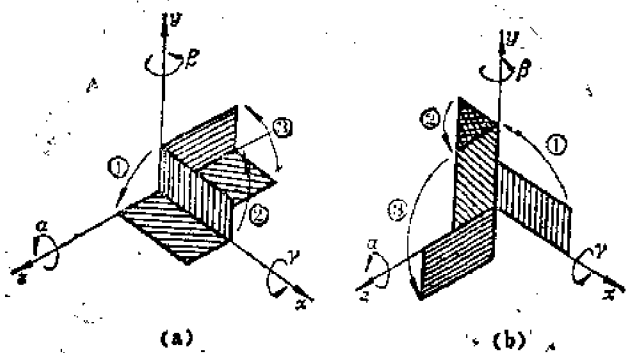


图 5-8 位置与旋转顺序的关系

(a) $y \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$; (b) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow y$

一、平面直角坐标变换矩阵

如图 5-7 所示, 设原直角坐标系 $O_1-x_1y_1$ 经平移与旋转后, 变为新坐标系 $O_2-x_2y_2$ 。旋转角度为 θ 。 x_{02} 、 y_{02} 是用原坐标系来表示的新坐标系的原点坐标。

于是, 平面内一点 M 在两坐标系中的坐标变换有下列关系

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta + x_{02}, \\ y_1 &= x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta + y_{02} \end{aligned} \right\} \quad (5-61)$$

上式可写成矩阵等式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{pmatrix};$$

或

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_{02} \\ \sin \theta & \cos \theta & y_{02} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5-62)$$

即若知道一点在动坐标系中的位置, 便可确定该点在参考坐标系中的位置, 反之亦然。

式(5-62)也可简写为

$$r_1 = C_{12} r_2 + r'_{02}. \quad (5-63)$$

式中, C_{12} 称为由新坐标系变换到原坐标系的平面坐标旋转变换矩阵。

二、空间直角坐标变换矩阵

1. 一般的坐标变换矩阵

如图 5-8 所示, 原坐标系 $O-xyz$ 经过平移加旋转而成为新坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$ 。现研究空间上任意一点 P , 它在原坐标系中的坐标为 $P(x, y, z)$, 在新坐标系中的坐标为 $P(x_1, y_1, z_1)$ 。

那么如上所述, 点 P 在两个坐标系中的坐标变换有下列关系

$$r = Cr_1 + r'_1. \quad (5-64)$$

式中

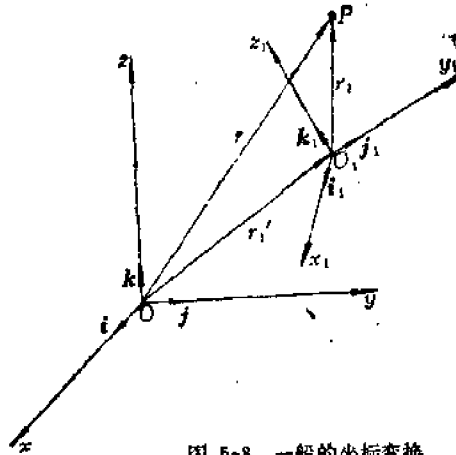


图 5-8 一般的坐标变换

$$r = (x, y, z)^T, r_1 = (x_1, y_1, z_1)^T, r'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)^T.$$

用坐标列阵可把上式改写为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix}, \quad (5-65)$$

式中, C 为空间坐标的旋转坐标变换矩阵, 称为由新坐标系变换到原坐标系的 (3×3) 空间坐标变换矩阵; (x'_1, y'_1, z'_1) 表示坐标原点 O 移至 O_1 时, 沿各轴方向的平移量。

空间坐标的旋转坐标变换矩阵 C 一般式可由式(5-62)类推而表示为

$$C = \begin{pmatrix} i \cdot i_1 & i \cdot j_1 & i \cdot k_1 \\ j \cdot i_1 & j \cdot j_1 & j \cdot k_1 \\ k \cdot i_1 & k \cdot j_1 & k \cdot k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \quad (5-66)$$

或可用表 5.1 列出。

表 5.1 旋转坐标变换矩阵 C 元素表

原 \ 新	x_1	y_1	z_1
x	$c_{11} = \cos(x, x_1)$	$c_{12} = \cos(x, y_1)$	$c_{13} = \cos(x, z_1)$
y	$c_{21} = \cos(y, x_1)$	$c_{22} = \cos(y, y_1)$	$c_{23} = \cos(y, z_1)$
z	$c_{31} = \cos(z, x_1)$	$c_{32} = \cos(z, y_1)$	$c_{33} = \cos(z, z_1)$

于是可以知道, 方阵中的每一元素都是两坐标轴的方向余弦, 故常称 C 为方向余弦矩阵。

把式(5-65)整理后, 可用 (4×4) 矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & C & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5-67)$$

式中, A 为新坐标系变换为原坐标系的 (4×4) 空间坐标变换矩阵。

若考虑有 n 次坐标变换, 则其总的坐标变换矩阵可表示为各次坐标变换矩阵的乘积, 即

$$C_n^1 = C_1 C_2 \cdots C_n, \quad (5-68)$$

$$A_n^1 = A_1 A_2 \cdots A_n. \quad (5-69)$$

必须注意, 矩阵 C 为正交矩阵, 而矩阵 A 不是正交矩阵。

显然, 用原坐标系表示的第 n 个新坐标系原点坐标 (O_n) , 可从上列式中 $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ 时求得的 (x, y, z) 的值表示。

2. 共原点旋转和平移的坐标变换矩阵

若只考虑绕某一坐标轴旋转时, 可分别表示为

$$C_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5-70)$$

式中, C_x 为只绕 x 坐标轴旋转 θ 角的旋转坐标变换矩阵。

$$C_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5-71)$$

式中, C_y 为只绕 y 坐标轴旋转 θ 角的旋转坐标变换矩阵。

$$C_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5-72)$$

式中, C_z 为只绕 z 坐标轴旋转 θ 角的旋转坐标变换矩阵。

或可表示为

$$A_x = \begin{pmatrix} C_x & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \vdots 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (5-73)$$

$$A_y = \begin{pmatrix} C_y & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (5-74)$$

$$A_z = \begin{pmatrix} C_z & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5-75)$$

上列式中, 0 为 0 列阵, 0^T 为其转置矩阵。

若只考虑平移的情况, 当沿 x 坐标轴正向平移 l_x 的坐标变换矩阵 L_x , 可用 (4×4) 矩阵表示为

$$L_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & \vdots & l_x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5-76)$$

式中, U 为 (3×3) 单位矩阵, $l_x = (l_x, 0, 0)^T$ 。

同理可得

$$L_y = \begin{pmatrix} U & \vdots & l_y \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix}, l_y = (0, l_y, 0)^T. \quad (5-77)$$

$$L_z = \begin{pmatrix} U & \vdots & l_z \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix}, l_z = (0, 0, l_z)^T. \quad (5-78)$$

L_y, L_z 分别表示沿 y, z 坐标轴正向平移 l_y, l_z 的坐标变换矩阵。

那么, 具有旋转和平移一般情况下的总的坐标变换矩阵可举例写出如下

$$\begin{aligned} B_x &= A_1 A_2 \dots A_n L_1 A_{n+1} \dots A_n L_2 = A_n^1 L_1 A_n^{n+1} L_2 \\ &= \begin{pmatrix} C_n^1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \vdots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^{n+1} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \vdots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_n^1 & \vdots & C_n^1 l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^{n+1} & \vdots & C_n^{n+1} l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_n^1 C_n^{n+1} & \vdots & C_n^1 C_n^{n+1} l_2 + C_n^1 l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_n^1 & \vdots & C_n^1 l_1 + C_n^1 l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

不难看出, 上列 (4×4) 矩阵第 4 列上三项为表示移动到最终段的坐标原点在原坐标系中的坐标, 即

$$(x'_n, y'_n, z'_n)^T = C_n^1 l_1 + C_n^1 l_2.$$

3. 任意旋转的坐标变换矩阵

这是共原点坐标变换中最一般的情况, 通常采用下列两种表示法。

(1) 用欧拉角表示

设把原直角坐标系 $O-x_1, y_1, z_1$ 绕原点 O 转动到新直角坐标系 $O-x_2, y_2, z_2$, 则新旧坐标轴之间的夹角可用表 5.2 来表示。

表 5.2 新旧坐标轴间的夹角表

夹 角 新坐标轴 原坐 标轴	原坐标轴		
	Ox_1	Oy_1	Oz_1
Ox_2	α_1	β_1	γ_1
Oy_2	α_2	β_2	γ_2
Oz_2	α_3	β_3	γ_3

根据直角坐标系中坐标轴正交的特点, 表 5.2 中九个方向角的余弦适合下列六个关系式

$$\left. \begin{aligned}
 \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1, \\
 \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 &= 1, \\
 \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 &= 1, \\
 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0, \\
 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 &= 0, \\
 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (5-79)$$

为此, 旋转中的九个方向余弦, 实质上只有三个参数是独立的。于是, 可以用依次作三个轴的旋转, 即旋转过三个欧拉角 (θ, α, δ) , 来完成新旧坐标的变换关系。

如图 5-9 所示, 设新旧两个直角坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 、 $O-x_2y_2z_2$ 原点相同, 且都是右手坐标系。取平面 Ox_1y_1 与 Ox_2y_2 的交线的某一方向作为轴 Ox_1 , 使 Ox_1 、 Oz_1 、 Oz_2 成为右手坐标系。

于是, 使第一次旋转为绕 z_1 轴转过角度 θ , 得到坐标系 $O-x_1y_1z_1$, 这时 Ox_1 与 Ox_1 轴重合, Oz_1 仍是 Oz_1 轴。第二次旋转为绕 x_1 轴转动角度 α , 使轴 $z_1(z_1)$ 转到 $z_2(z_2)$ 的方向, 得到坐标系 $O-x_2y_2z_2$, 这时 Ox_2 仍是 Ox_1 轴, Oz_2 是 Oz_1 轴。第三次旋转为绕 $z_2(z_2)$ 轴转过角度 δ , 使 $x_2(x_2)$ 转到 x_1 的方向, 这样便得到新坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 。由此可见, 新坐标系由 θ, α, δ 三个角唯一确定。因而 $O-x_1y_1z_1$ 到 $O-x_2y_2z_2$ 的坐标变换也由 θ, α, δ 唯一确定。这三个角, 就称为欧拉角。

那么, 用三个欧拉角的连续旋转进行坐标变换的方向余弦矩阵, 可由下式得到

$$\begin{aligned}
 C_{ij}^{(\theta, \alpha, \delta)} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \cos \alpha \sin \delta & -\cos \theta \sin \delta - \sin \theta \cos \alpha \cos \delta & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta \cos \delta + \cos \theta \cos \alpha \sin \delta & -\sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \alpha \cos \delta & -\cos \theta \sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \delta & \sin \delta \cos \delta & \cos \alpha \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \quad (5-80)$$

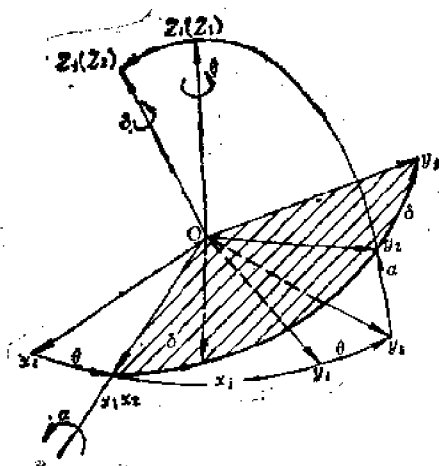


图 5-9 欧拉角表示

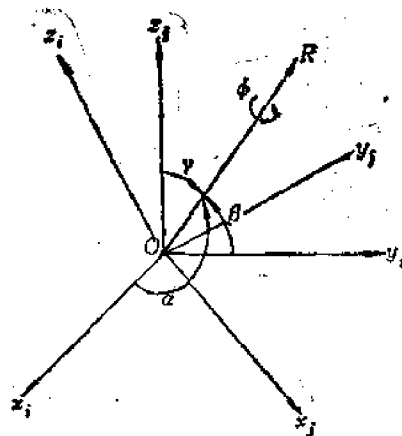


图 6-10 绕任意轴旋转

式中的第一个矩阵为绕两个坐标轴旋转的方向余弦矩阵, 可由下列运算求得

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{(\theta, \alpha)} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5-81)
\end{aligned}$$

(2) 用绕某任意轴的旋转角表示

在图 5-10 中, 新坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 的方向可认为将原坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 绕某任意轴 R 旋转 ϕ 角度而得。该任意轴 R 在原坐标系中具有一定的方向角 α, β, γ 。

为了能应用绕坐标轴旋转的坐标变换矩阵公式来进行这种方向余弦矩阵的推导, 应将绕任意轴旋转的问题变成绕某坐标轴的旋转。为此, 先将原坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 转动至使 z_1 与 R 重合; 接着使坐标系绕这个 R 轴旋转一角度 ϕ ; 然后再将这坐标系按原先转过的角度向反转动, 便可获得新坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 。

那么, 这时的坐标变换方向余弦矩阵, 可用下式写出

$$C_{ij}^{(\phi)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cos \alpha \\ c_{21} & c_{22} & \cos \beta \\ c_{31} & c_{32} & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cos \alpha \\ c_{21} & c_{22} & \cos \beta \\ c_{31} & c_{32} & \cos \gamma \end{pmatrix}^T \quad (5-82)$$

根据方向余弦矩阵正交的性质, 将行列式

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cos \alpha \\ c_{21} & c_{22} & \cos \beta \\ c_{31} & c_{32} & \cos \gamma \end{vmatrix} = 1$$

按第 3 列展开, 并利用直角坐标系中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 关系, 可以得出方向余弦矩阵中每一元素都等于其代数余子式, 即有

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}, \\ \cos \beta &= c_{12}c_{31} - c_{11}c_{32}, \\ \cos \gamma &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (5-83)$$

于是, 将式(5-82)右边矩阵进行运算, 并利用上述关系可得

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{(\phi)} &= \begin{pmatrix} c_{11} \cos \phi + c_{12} \sin \phi & -c_{11} \sin \phi + c_{12} \cos \phi & \cos \alpha \\ c_{21} \cos \phi + c_{22} \sin \phi & -c_{21} \sin \phi + c_{22} \cos \phi & \cos \beta \\ c_{31} \cos \phi + c_{32} \sin \phi & -c_{31} \sin \phi + c_{32} \cos \phi & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (5-84)
\end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos^2 \alpha (1 - \cos \phi) + \cos \phi, \\
a_{12} &= \cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \phi) - \cos \gamma \sin \phi, \\
a_{13} &= \cos \alpha \cos \gamma (1 - \cos \phi) + \cos \beta \sin \phi, \\
a_{21} &= \cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \phi) + \cos \gamma \sin \phi, \\
a_{22} &= \cos^2 \beta (1 - \cos \phi) + \cos \phi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{23} &= \cos \beta \cos \gamma (1 - \cos \phi) - \cos \alpha \sin \phi, \\
 a_{31} &= \cos \gamma \cos \alpha (1 - \cos \phi) - \cos \beta \sin \phi, \\
 a_{32} &= \cos \beta \cos \gamma (1 - \cos \phi) + \cos \alpha \sin \phi, \\
 a_{33} &= \cos^2 \gamma (1 - \cos \phi) + \cos \phi.
 \end{aligned}$$

三、方向余弦矩阵的求导

为应用于速度和加速度分析, 需要求解方向余弦矩阵的一阶导数 \dot{C}_{ij} 和二阶导数 \ddot{C}_{ij} , 其关系式可通过下列方法推导出。

设从坐标系 i 转至 j 的方向余弦矩阵为 C_{ij} 。若有绕 x_i, y_i, z_i 三坐标轴的微量转动 $\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \theta$, 则必有一增量 ΔC_{ij} 。于是可写出

$$\begin{aligned}
 C_{ij} + \Delta C_{ij} &= C_{ij} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Delta \alpha \\ 0 & \Delta \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\Delta \theta & 0 \\ \Delta \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\approx C_{ij} \begin{pmatrix} 1 & -\Delta \theta & \Delta \beta \\ \Delta \theta & 1 & -\Delta \alpha \\ -\Delta \beta & \Delta \alpha & 1 \end{pmatrix} = C_{ij} + C_{ij} \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \theta & \Delta \beta \\ \Delta \theta & 0 & -\Delta \alpha \\ -\Delta \beta & \Delta \alpha & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

由此可得 C_{ij} 对时间的一阶导数关系式为

$$\dot{C}_{ij} = C_{ij} \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\beta} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\alpha} \\ -\dot{\beta} & \dot{\alpha} & 0 \end{pmatrix} = C_{ij} W_{ji}, \quad (5-85)$$

同理, 若有先绕 x_i, y_i, z_i 三坐标轴的微量转动 $\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \theta$, 则可推得如下关系式

$$\begin{aligned}
 \Delta C_{ij} + C_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Delta \alpha \\ 0 & \Delta \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\Delta \theta & 0 \\ \Delta \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_{ij} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \theta & \Delta \beta \\ \Delta \theta & 0 & -\Delta \alpha \\ -\Delta \beta & \Delta \alpha & 0 \end{pmatrix} C_{ij} + C_{ij}.
 \end{aligned}$$

于是有

$$\dot{C}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\beta} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\alpha} \\ -\dot{\beta} & \dot{\alpha} & 0 \end{pmatrix} C_{ij} = W_{ji} C_{ij} \quad (5-85')$$

由上述 \dot{C}_{ij} 的两个表达式可得下列关系

$$C_{ij} W_{ji} = W_{ji} C_{ij}$$

或为

$$C_{ij} W_{ji} C_{ji} = W_{ji} \quad (5-86)$$

该式说明角速度在不同坐标系中表示的反对称矩阵 W_{ji} 和 W_{ji} 之间存在一定的关系。

方向余弦矩阵的二阶导数关系式可将式(5-85)和(5-85')再对时间求导一次而得

$$\begin{aligned}\ddot{C}_{ij} &= \dot{C}_{ij} \dot{W}_{ji} + \dot{C}_{ij} \dot{W}_{ji} \\ &= \dot{C}_{ij} \dot{e}_{ji} + \dot{C}_{ij} W_{ji} \dot{W}_{ji} = \dot{C}_{ij} (\dot{e}_{ji} + W_{ji}^2)_{ij},\end{aligned}\quad (5-87)$$

及

$$\ddot{C}_{ij} = \dot{W}_{ji}^T \dot{C}_{ij} + W_{ji} \dot{C}_{ij} = (\dot{e}_{ji} + W_{ji}^2)_i C_{ij}.\quad (5-87')$$

§ 5-5 旋转变换张量法

旋转变换张量法是建立在将物体相对于坐标系移动的基础上,它常比坐标变换矩阵法容易理解。

一、旋转变换张量(旋转矩阵)

1. 旋转变换张量的定义

设空间矢量 R 绕矢量 w 正方向逆时针旋转一个 θ 角,可得到矢量 R' ,它们之间的关系可表示为

$$R' = E^{w\theta}(R).\quad (5-88)$$

式中,符号 $E^{w\theta}$ 为表示绕 w 轴逆时针转过一个 θ 角的一种运算符号,并称为旋转变换张量。

于是,把矢量 R 用括弧括起来,并前置一个运算符号 $E^{w\theta}$ 就表示对矢量 R 施行这种运算。这种形式称之为 $E^{w\theta}$ 和 R 的“括积”。

2. 张量的性质

(1) 若 $R' = E^{w\theta}(R)$, 则

$$R = E^{w(-\theta)}(R').$$

(2) 把矢量 R 乘以标量 m 倍之后旋转,等于矢量 R 旋转之后再乘以标量 m 倍,即有

$$E^{w\theta}(mR) = mE^{w\theta}(R).\quad (5-89)$$

(3) 把矢量 A 和矢量 B 之和后旋转,等于分别将这些矢量旋转以后之和,即

$$E^{w\theta}(A+B) = E^{w\theta}(A) + E^{w\theta}(B).\quad (5-90)$$

性质(2)和(3)表示了旋转运算的线性。对于具有这样线性的矢量称之为张量。为此,把这种运算符号称为旋转变换张量。

3. 围绕主轴的旋转

取右手直角坐标系 x, y, z , 它们的方向单位矢量分别为 i, j, k 。围绕这坐标系三根主轴的旋转为 $E^{i\theta}, E^{j\theta}, E^{k\theta}$, 图 5-11 表示绕 k 轴的旋转 $E^{k\theta}$ 。

(1) 将矢量围绕该矢量本身旋转,其值不会变化,即

$$E^{k\theta}(k) = k.\quad (5-91)$$

(2) 将 i 及 j 绕 k 旋转一个 θ 角后,由图 5-11 可知,分别有

$$E^{k\theta}(i) = i \cos \theta + j \sin \theta,\quad (5-92)$$

$$E^{20}(j) = j \cos \theta - i \sin \theta. \quad (5-93)$$

(3) 将一般矢量 $R(x, y, z)$, 绕 k 旋转一个 θ 角后, 则根据式(5-89)和(5-90), 可写出

$$\begin{aligned} R' &= E^{20}(R) = E^{20}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= x(\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta) + y(\mathbf{j} \cos \theta - \mathbf{i} \sin \theta) + z\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i}(x \cos \theta - y \sin \theta) + \mathbf{j}(x \sin \theta + y \cos \theta) + \mathbf{k}z. \end{aligned} \quad (5-94)$$

上式可用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (5-95)$$

或可简写为

$$R' = E^{20}R, \quad (5-96)$$

式中

$$E^{20} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5-97)$$

同理可求得如下表达式

$$E^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5-98)$$

$$E^{01} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5-99)$$

4. 绕任意轴的旋转

下面求绕任意轴旋转的 E^{20} 。

设任意轴单位矢量为 w , 该矢量可认为是绕三根主轴方向的单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 中的任意一个旋转而得。即若取 \mathbf{k} 为基准, 先将单位矢量 \mathbf{k} 绕 \mathbf{j} 旋转一个 α 角, 然后再绕 \mathbf{k} 本身旋转一个 β 角, 便可得到空间任意方向的单位矢量 w 的表达式为

$$w = E^{20}(E^{10}(\mathbf{k})). \quad (5-100)$$

设 w 的直角坐标分量, 即 w 的方向余弦为 (λ, μ, ν) , 那么利用式(5-97)和(5-99), 可把上式改写为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5-101)$$

此式给出了 (λ, μ, ν) 与 α, β 角的关系。

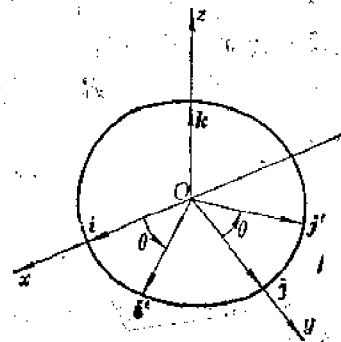


图 5-11 旋转变换张量 E^{20}

为了能应用绕三根主轴的旋转变换张量来求绕任意轴旋转的 $E^{w\theta}$ 的值,可先将矢量 w 旋转返回到与 k 轴重合,接着使所得到的矢量绕 k 旋转一个 θ 角,然后再把它按原先转过的角度反向转动,于是可写出

$$R' = E^{w\theta}(R) = E^{k\theta}(E^{j\alpha}(E^{k\theta}(E^{j(-\alpha)}(E^{k(-\theta)}(R))))), \quad (5-102)$$

或为

$$E^{w\theta}(R) = E^{k\theta} \cdot E^{j\alpha} \cdot E^{k\theta} \cdot E^{j(-\alpha)} \cdot E^{k(-\theta)}(R)$$

即

$$E^{w\theta} = E^{k\theta} \cdot E^{j\alpha} \cdot E^{k\theta} \cdot E^{j(-\alpha)} \cdot E^{k(-\theta)}. \quad (5-103)$$

将式(5-97)和(5-99)代入上式并进行矩阵积的运算,然后再把式(5-101)的关系代入上述运算的结果,经整理最后得到旋转变换张量的一般表达式为

$$E^{w\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta + \lambda^2(1 - \cos \theta) & \lambda\mu(1 - \cos \theta) - \nu \sin \theta & \nu\lambda(1 - \cos \theta) + \mu \sin \theta \\ \lambda\mu(1 - \cos \theta) + \nu \sin \theta & \cos \theta + \mu^2(1 - \cos \theta) & \mu\nu(1 - \cos \theta) - \lambda \sin \theta \\ \nu\lambda(1 - \cos \theta) - \mu \sin \theta & \mu\nu(1 - \cos \theta) + \lambda \sin \theta & \cos \theta + \nu^2(1 - \cos^2 \theta) \end{pmatrix}. \quad (5-104)$$

上式也可分解成为下列表达式

$$E^{w\theta} = J_1 + J_2 \cos \theta + J_3 \sin \theta, \quad (5-105)$$

式中, J_1, J_2, J_3 分别为下列矩阵

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \nu\lambda \\ \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu \\ \nu\lambda & \mu\nu & \nu^2 \end{pmatrix}, \quad (5-106)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & -\lambda\mu & -\nu\lambda \\ -\lambda\mu & 1 - \mu^2 & -\mu\nu \\ -\nu\lambda & -\mu\nu & 1 - \nu^2 \end{pmatrix}, \quad (5-107)$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (5-108)$$

J_1, J_2, J_3 分别称为第一分量运算张量、第二分量运算张量及第三分量运算张量。当需要特别表明有关 w 分量的场合,则要把轴的单位矢量的符号标上,如 J_1^w, J_2^w, J_3^w 。

二、旋转变换张量运算公式

1. 交换法则

括号积或矩阵积不适合交换法则。改变旋转顺序,一般可以得到不同的矢量。

例如,若设把矢量 $R(x, y, z)$ 先绕 j 轴旋转一个 α 角,然后再绕 k 轴旋转一个 β 角所得到的矢量为 R_1 ,则有

$$R_1 = E^{k\beta}(E^{j\alpha}(R)) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x \cos \alpha + z \sin \alpha) \cos \beta - y \sin \beta \\ (x \cos \alpha + z \sin \alpha) \sin \beta + y \cos \beta \\ -x \sin \alpha + z \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (5-109)$$

另外,若设把矢量 $\mathbf{R}(x, y, z)$ 先绕 k 轴旋转一个 β 角, 然后再绕 j 轴旋转一个 α 角所得到的矢量为 \mathbf{R}_2 , 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 = E^{j\alpha}(E^{k\beta}(\mathbf{R})) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x \cos \beta - y \sin \beta) \cos \alpha + z \sin \alpha \\ x \sin \beta + y \cos \beta \\ -(x \cos \beta - y \sin \beta) \sin \alpha + z \cos \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5-110)$$

显然,这两种结果是不同的,即

$$E^{k\beta}(E^{j\alpha}(\mathbf{R})) \neq E^{j\alpha}(E^{k\beta}(\mathbf{R})). \quad (5-111)$$

对于包含着分量运算张量的运算中,也存在有

$$\left. \begin{aligned} J_1^{w_1}(E^{w_2}(\mathbf{R})) &\neq E^{w_2}(J_1^{w_1}(\mathbf{R})), \\ J_1^{w_1}(J_1^{w_2}(\mathbf{R})) &\neq J_1^{w_1}(J_1^{w_2}(\mathbf{R})). \end{aligned} \right\} \quad (5-112)$$

但是,对于继续绕同一根轴旋转的场合,则不但适合交换法则,而且可以允许把旋转角加起来进行运算。

2. 逆矩阵

旋转变换张量行列式的值等于 1, 即

$$|E^{w\theta}| = 1. \quad (5-113)$$

当把矢量 \mathbf{R} 绕矢量 w 逆时针旋转一个 θ 角而得到的矢量 \mathbf{R}' 时,则把矢量 \mathbf{R}' 绕 w 旋转一个 $(-\theta)$ 角便成为原来的矢量 \mathbf{R} 。即有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}' &= E^{w\theta}(\mathbf{R}), \\ \mathbf{R} &= E^{w(-\theta)}(\mathbf{R}'). \end{aligned} \right\} \quad (5-114)$$

若用 $(E^{w\theta})^{-1}$ 表示矩阵 $E^{w\theta}$ 的逆矩阵, 于是

$$(E^{w\theta})^{-1} = E^{w(-\theta)}. \quad (5-115)$$

此外, $E^{w\theta}$ 的转置矩阵 $(E^{w\theta})^T$ 也与 $E^{w\theta}$ 的逆矩阵相等, 即

$$(E^{w\theta})^T = (E^{w\theta})^{-1} = E^{w(-\theta)}. \quad (5-116)$$

分量运算张量行列式的值总等于零, 即

$$|J_1| = |J_2| = |J_3| = 0. \quad (5-117)$$

所以, 它的逆矩阵不存在。

3. 分量的乘积

分量乘积的基本公式为

$$\left. \begin{aligned} J_1 \cdot J_1 &= J_1, \quad J_1 \cdot J_2 = 0, \quad J_1 \cdot J_3 = 0, \\ J_2 \cdot J_1 &= 0, \quad J_2 \cdot J_2 = J_2, \quad J_2 \cdot J_3 = J_3, \\ J_3 \cdot J_1 &= 0, \quad J_3 \cdot J_2 = J_3, \quad J_3 \cdot J_3 = -J_2. \end{aligned} \right\} \quad (5-118)$$

4. 旋转矢量的标量积和矢量积

设矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 作同样的旋转,若取它们的旋转变换张量为 E ,旋转之后该两矢量的长度保持不变。由于该两矢量的夹角 ϕ 也不变,所以下式成立

$$E(\mathbf{A}) \cdot E(\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (5-119)$$

即说明作同样旋转的两矢量的标量积等于原来两矢量的标量积。

同理,矢量 \mathbf{A} 和矢量 \mathbf{B} 的矢量积可表示为

$$E(\mathbf{A}) \times E(\mathbf{B}) = E(\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (5-120)$$

即说明作同样旋转的两个矢量的矢量积等于原来两矢量的矢量积作同样的旋转。

三、旋转变换张量的微分

1. 一次微分

设旋转矢量 $\mathbf{R}' = E^{w\theta}(\mathbf{R})$ 是时间 t 的函数,则其一次微分为

$$\dot{\mathbf{R}}' = \frac{d\mathbf{R}'}{dt} = \dot{E}^{w\theta}(\mathbf{R}) + E^{w\theta}(\dot{\mathbf{R}}). \quad (5-121)$$

下面讨论 $\dot{E}^{w\theta}$ 的计算式。

利用式(5-105)可求得它对时间 t 的一次微分为

$$\dot{E}^{w\theta} = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 \cos \theta + \dot{J}_3 \sin \theta + \dot{\theta}(-J_2 \sin \theta + J_3 \cos \theta). \quad (5-122)$$

设矢量 \mathbf{R} 旋转至 \mathbf{R}' 期间, ω 的方向 (λ, μ, ν) 没有变化,而 J_1, J_2, J_3 又都只是方向余弦 λ, μ, ν 的函数,则存在

$$\dot{J}_1 = \dot{J}_2 = \dot{J}_3 = 0.$$

于是,式(5-122)成为

$$\dot{E}^{w\theta} = \dot{\theta}(-J_2 \sin \theta + J_3 \cos \theta). \quad (5-123)$$

另外,利用式(5-118)可写出

$$J_3 E^{w\theta} = J_3(J_1 + J_2 \cos \theta + J_3 \sin \theta) = J_3 \cos \theta - J_2 \sin \theta. \quad (5-124)$$

那么,比较上列两式可得

$$\dot{E}^{w\theta} = \dot{\theta} J_3 E^{w\theta}. \quad (5-125)$$

将式(5-125)代入式(5-121),便可给出 \mathbf{R}' 的一次微分式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}' &= \dot{E}^{w\theta}(\mathbf{R}) + E^{w\theta}(\dot{\mathbf{R}}) = \dot{\theta} J_3 E^{w\theta}(\mathbf{R}) + E^{w\theta}(\dot{\mathbf{R}}) \\ &= E^{w\theta}[\dot{\theta} J_3(\mathbf{R}) + \dot{\mathbf{R}}]. \end{aligned} \quad (5-126)$$

由上式不难看出,等式右边的第一项为表示由于矢量的旋转所产生的旋转方向的变分,而第二项则表示由于矢量的长度变化所产生的长度方向的变分。一般来说,矢量的变化是由方向变化和长度变化组成,若旋转矢量 \mathbf{R} 为长度不变的矢量,则其一次微分为

$$\dot{\mathbf{R}}' = E^{w\theta}[\dot{\theta} J_3(\mathbf{R})]. \quad (5-127)$$

2. 二次微分

若把式(5-121)对 t 再作一次微分,则成为

$$\ddot{\mathbf{R}}' = \frac{d^2 \mathbf{R}'}{dt^2} = \ddot{E}^{w\theta}(\mathbf{R}) + 2\dot{E}^{w\theta}(\dot{\mathbf{R}}) + E^{w\theta}(\ddot{\mathbf{R}}). \quad (5-128)$$

另外,把式(5-125)也对 t 再作一次微分,并利用式(5-118)得

$$\begin{aligned}\ddot{E}^{\omega\theta} &= \ddot{\theta}J_3E^{\omega\theta} + \dot{\theta}J_3\dot{E}^{\omega\theta} = \ddot{\theta}J_3E^{\omega\theta} + (\dot{\theta})^2J_3J_3E^{\omega\theta} \\ &= \ddot{\theta}J_3E^{\omega\theta} - (\dot{\theta})^2J_2E^{\omega\theta}.\end{aligned}\quad (5-129)$$

于是,可把式(5-128)改写为

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}}' &= \ddot{\theta}J_3E^{\omega\theta}(\mathbf{R}) - (\dot{\theta})^2J_2E^{\omega\theta}(\mathbf{R}) + 2\dot{\theta}J_3E^{\omega\theta}(\dot{\mathbf{R}}) + E^{\omega\theta}(\ddot{\mathbf{R}}) \\ &= E^{\omega\theta}[\ddot{\theta}J_3(\mathbf{R}) - (\dot{\theta})^2J_2(\mathbf{R}) + 2\dot{\theta}J_3(\dot{\mathbf{R}}) + \ddot{\mathbf{R}}].\end{aligned}\quad (5-130)$$

上列等式右边的第一项为表示由于旋转角速度的变化而引起的切向加速度,第二项表示由于旋转而产生的向心加速度,第三项表示哥氏加速度,第四项表示矢量长度变化而引起的加速度。

§ 5-6 对偶数矩阵法

空间一点的位置可通过矢量来描述。但是矢量是一个具有方向和模的量,它可以在其本身的方向线上任意移动而不改变其矢量值。所以,用这样的矢量是不能全面地描述空间某一有向直线的位置。下面介绍一种利用旋量来描述空间一直线位置的方法,而单位旋量是用对偶数来表示的。

一、对偶数及对偶角

1. 对偶数

设 \hat{a} 为对偶数,它由一对有序的实数 a 和 a^* 两部分组成,可表示为

$$\hat{a} = a + \epsilon a^*.\quad (5-131)$$

式中, a 称为对偶数的实数部分; a^* 称为对偶数的对偶部分; ϵ 为对偶标记 (称为 Clifford 标符),其定义为 $\epsilon \neq 0$, 而 $\epsilon^2 = \epsilon^3 = \dots = 0$ 。

式(5-131)又可写成

$$\hat{a} = a + \epsilon a^* = a \left(1 + \epsilon \frac{a^*}{a} \right) = a(1 + \epsilon P_a).\quad (5-132)$$

式中, $P_a = a^*/a$ 称为对偶数的参数。

显然,在一般情况下, $P_a \neq 0$, 这时的 \hat{a} 称为真对偶数; 当 $P_a = 0$, 则 $\hat{a} = a$, 即为实数; 当 $P_a = \infty$, 则 $\hat{a} = \epsilon a^*$, \hat{a} 为一个绝对偶数。

对偶数的运算法则与复数的运算法则类似。例如,设有两个对偶数

$$\hat{a} = a + \epsilon a^*, \quad \hat{b} = b + \epsilon b^*,$$

则

- (1) 当 $a = b, a^* = b^*$ 时, $\hat{a} = \hat{b}$;
- (2) $\hat{a} \pm \hat{b} = (a + b) \pm \epsilon(a^* + b^*)$;
- (3) $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a} = ab + \epsilon(a^*b + ab^*)$;

$$(4) \frac{\widehat{a}}{\widehat{b}} = \frac{a}{b} + \varepsilon \left(\frac{a^*}{b} - \frac{ab^*}{b^2} \right);$$

(5) 当 $\widehat{a} = a + \varepsilon a^*$, 则函数 $f(\widehat{a}) = f(a + \varepsilon a^*)$. 若 $f(a)$ 可导, 则按泰勒级数展开, 且利用 $\varepsilon^2 = 0$ 的性质, 可得

$$f(\widehat{a}) = f(a) + \varepsilon a^* \frac{df(a)}{da}.$$

2. 对偶角

对于空间两直线的相对位置, 若用对偶角来表示是很方便的。设空间有两直线 A 和 B , 它们都具有一定的方向, 且一定可以作出它们之间的唯一公垂线——该两直线间的最短距离, 设以记号 θ^* 表示。这两直线间的投影角以 θ 表示。这样, 对偶角 $\widehat{\theta}$ 可定义为

$$\widehat{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*. \quad (5-133)$$

由上式可知, 若两直线在空间既不平行又不相交, 则它们之间的对偶角为真对偶角; 若两直线在空间相交, 即 $\theta^* = 0$, 则它们之间的对偶角只有实部; 若两直线相互平行, 则它们之间的对偶角为纯对偶角。

利用对偶角的运算法则(5), 可求得如下对偶角的三角函数表达式

$$\left. \begin{aligned} \sin \widehat{\theta} &= \sin \theta + \varepsilon \theta^* \cos \theta, \\ \cos \widehat{\theta} &= \cos \theta - \varepsilon \theta^* \sin \theta, \\ \cos^2 \widehat{\theta} + \sin^2 \widehat{\theta} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5-134)$$

上述表明, 所有三角恒等式对于对偶角都是有效的。

二、旋 量

为要确定空间某一有向直线的位置, 引入旋量的概念。

1. 单位旋量的定义

单位旋量是附着在某一轴线上的单位矢量, 它的模等于 1, 但它不仅是一个有方向的量, 而且还规定了它的位置。因此, 单位旋量是可以决定空间某一轴线位置的单位矢量, 也就是说, 空间某一轴线是与单位旋量相当的。

2. 用对偶数来表示单位旋量

设空间有一直线, 其上有一单位旋量 \widehat{u} , 该直线在空间的位置, 可以通过任意选择的参考点 (坐标原点) O 来加以描述。如图 5-12 所示, 在直线上任选一点 P , 参考点 O 到 P 点的矢量为 r , 于是利用对偶数的关系, 可把相对于参考点 O 的单位旋量 \widehat{u}_0 表示为

$$\widehat{u}_0 = u + \varepsilon u_0. \quad (5-135)$$

式(5-135)中实数部分 u 是通过参考点 O 与直线相平行的单位矢量, 其大小 $|u| = 1$, 它表示这个单位矢量的方向, 与参考点的位置无关。对偶部分 u_0 , 它规定了直线相对于参考点 O 的位置。 u_0 的大小为

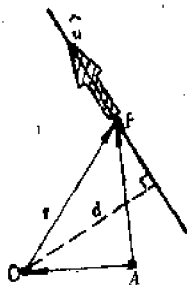


图 5-12 用对偶数表示单位旋量

$$|\mathbf{u}_0| = |\mathbf{r} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{u}| \sin \theta. \quad (5-136)$$

式中, θ 是 \mathbf{r} 与 \mathbf{u} 之间的夹角。 \mathbf{u}_0 也可写成

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{d} \times \mathbf{u}. \quad (5-137)$$

式中, \mathbf{d} 是自参考点 O 到该直线的垂直距离。因为

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u}_0 = \mathbf{u} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{u}) = \mathbf{d}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}),$$

于是可得

$$\mathbf{d} = \mathbf{u} \times \mathbf{u}_0. \quad (5-138)$$

另外, 从式(5-137)可知, \mathbf{u}_0 的方向是垂直于 \mathbf{d} 和 \mathbf{u} 所决定的平面, 所以 \mathbf{u}_0 也必定垂直于 \mathbf{u} 。因此, 单位旋量中的实部和共轭部是互成 90° 的。

3. 单位旋量的性质

如图 5-12 中, 相对于参考点 O 的单位旋量 \hat{u}_0 可表示为

$$\hat{u}_0 = \mathbf{u} + \epsilon \mathbf{u}_0.$$

现若将参考点移到 A 点, 则根据定义可写出相对于 A 点的单位旋量 \hat{u}_A 为

$$\hat{u}_A = \mathbf{u} + \epsilon \mathbf{u}_A. \quad (5-139)$$

利用式(5-136)可写出 $\mathbf{u}_A = \overline{AP} \times \mathbf{u}$, 又由图可知 $\overline{AP} = \overline{AO} + \mathbf{r}$, 因此

$$\mathbf{u}_A = \overline{AP} \times \mathbf{u} = (\overline{AO} + \mathbf{r}) \times \mathbf{u} = \overline{AO} \times \mathbf{u} + \mathbf{u}_0,$$

代入式(5-139)可得

$$\hat{u}_A = \mathbf{u} + \epsilon (\overline{AO} \times \mathbf{u} + \mathbf{u}_0) = \hat{u}_0 + \epsilon (\overline{AO} \times \mathbf{u}). \quad (5-140)$$

上式说明单位旋量具有其实部与参考点的选取无关、而对偶部随参考点的变化而变化的性质。

4. 单位旋量的代数运算

设有两个单位旋量 \hat{a} 和 \hat{b} , 它们之间的垂直距离为 θ^* , 投影角为 θ 。其对偶角为 $\hat{\theta} = \theta + \epsilon \theta^*$ 。若这两个旋量相交, 显然其对偶部分 $\hat{\theta}^*$ 等于零。

对于这两个单位旋量, 其标量积和矢量积分别为

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} \cdot \hat{b} &= \hat{b} \cdot \hat{a} = \cos \hat{\theta}, \\ \hat{a} \times \hat{b} &= -(\hat{b} \times \hat{a}) = \hat{s}(\sin \hat{\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (5-141)$$

式中, \hat{s} 是一个同时垂直于 \hat{a} 和 \hat{b} 、且具有 $\hat{a} \times \hat{b}$ 方向的单位旋量。于是由式(5-141)可得

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} \cdot \hat{s} &= 0, \\ \hat{b} \cdot \hat{s} &= 0. \end{aligned} \right.$$

这说明, 若两个单位旋量的标量积等于零, 则它们必定垂直相交。

三、坐标变换

1. 旋量在坐标系上的表示

如图 5-13 所示, 设有一相对于参考点 O 的单位旋量 \hat{u}_0 , 利用对偶数关系可表示为

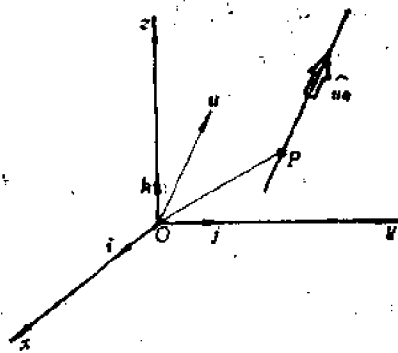


图 5-13 旋量在坐标系上的表示

$$\hat{u}_0 = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{pmatrix} \quad (5-142)$$

式中, $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ 分别为 \hat{u}_0 和 i, j, k 轴间的对偶角方向余弦。

由于 \hat{u}_0 是单位旋量, 所以

$$\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + \hat{u}_3^2 = 1. \quad (5-143)$$

又根据对偶数的定义, 有

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= u_1 + \varepsilon u_1^0, \\ \hat{u}_2 &= u_2 + \varepsilon(2u_1 u_1^0), \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \hat{u}_3 &= u_3 + \varepsilon(2u_2 u_2^0), \\ \hat{u}_3 &= u_3 + \varepsilon(2u_3 u_3^0). \end{aligned}$$

把它们代入式(5-143), 得

$$\left. \begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1, \\ u_1 u_1^0 + u_2 u_2^0 + u_3 u_3^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-144)$$

可以明白, 用式(5-142)对偶矩阵来表达空间一直线时, 由于其六个参数间存在着式(5-144)的关系, 因此实际上只需要四个独立变量。

2. 坐标变换的对偶数矩阵法

设有两个坐标系 $O-x_1 y_1 z_1$ 及 $O'-x_2 y_2 z_2$, 把坐标系 O 及 O' 上的坐标轴分别看作是 通过 O 及 O' 的一根轴线。那么, 单位旋量 \hat{u} 在坐标系 I 上可表示为

$$\hat{u}_0 = (\hat{u}_{11}, \hat{u}_{21}, \hat{u}_{31})^T.$$

同样, \hat{u} 在坐标系 II 上可表示为

$$\hat{u}_0 = (\hat{u}_{12}, \hat{u}_{22}, \hat{u}_{32})^T.$$

于是, 根据坐标变换的基本概念, 上述由坐标系 I 到坐标系 II 的变换关系式可写成

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}_{12} \\ \widehat{u}_{22} \\ \widehat{u}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & \widehat{a}_3 \\ \widehat{b}_1 & \widehat{b}_2 & \widehat{b}_3 \\ \widehat{c}_1 & \widehat{c}_2 & \widehat{c}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}_{11} \\ \widehat{u}_{21} \\ \widehat{u}_{31} \end{pmatrix} = \widehat{A} \begin{pmatrix} \widehat{u}_{11} \\ \widehat{u}_{21} \\ \widehat{u}_{31} \end{pmatrix}. \quad (5-145)$$

式中, $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3$ 分别为 \widehat{i}_2 与 x_1, y_1, z_1 轴间的对偶角方向余弦; $\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \widehat{b}_3$ 分别为 \widehat{j}_2 与 x_1, y_1, z_1 轴间的对偶角方向余弦; $\widehat{c}_1, \widehat{c}_2, \widehat{c}_3$ 分别为 \widehat{k}_2 与 x_1, y_1, z_1 轴间的对偶角方向余弦。 \widehat{A} 称为对偶数矩阵。可以证明 \widehat{A} 是正交矩阵, 即

$$\begin{aligned} \widehat{a}_1^2 + \widehat{a}_2^2 + \widehat{a}_3^2 &= 1, & \widehat{a}_1 \widehat{b}_1 + \widehat{a}_2 \widehat{b}_2 + \widehat{a}_3 \widehat{b}_3 &= 0, \\ \widehat{b}_1^2 + \widehat{b}_2^2 + \widehat{b}_3^2 &= 1, & \widehat{b}_1 \widehat{c}_1 + \widehat{b}_2 \widehat{c}_2 + \widehat{b}_3 \widehat{c}_3 &= 0, \\ \widehat{c}_1^2 + \widehat{c}_2^2 + \widehat{c}_3^2 &= 1, & \widehat{c}_1 \widehat{a}_1 + \widehat{c}_2 \widehat{a}_2 + \widehat{c}_3 \widehat{a}_3 &= 0. \end{aligned}$$

所以, \widehat{A} 中的九个对偶角方向余弦只有三个是独立的。

从式(5-145)可知, 当采用旋量矩阵来进行坐标变换时, 只要把一般的坐标变换关系式中的各元素换写成为对偶数就可以了。至于它们的逆变换, 也是如此。例如, 若有 $x_2 = Ax_1$, 则可方便地写出

$$\widehat{x}_2 = \widehat{A} \widehat{x}_1 \quad \text{及} \quad \widehat{x}_1 = \widehat{A}^T \widehat{x}_2.$$

3. 基本旋量矩阵

任何的坐标变换, 均可看作由绕三根固定轴线 x, y, z 的转动和沿这三根轴线的移动所组成。

如图 5-14 所示, 原坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$ 沿 x_1 轴移动距离 ϕ^* , 且绕 x_1 轴转动 ϕ 角而成为新坐标系 $O_2-x_2y_2z_2$ 。则根据对偶角的关系, 它们之间的坐标变换矩阵为

$$\widehat{\phi}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{pmatrix}. \quad (5-146)$$

式中, $\widehat{\phi}$ 为对偶角且 $\widehat{\phi} = \phi + \varepsilon\phi^*$ 。将式(5-134)代入上式, 则

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{pmatrix} + \varepsilon\phi^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\phi & c\phi \\ 0 & -c\phi & -s\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{pmatrix} \left[\mathbf{I} + \varepsilon\phi^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \phi_x (\mathbf{I} + \varepsilon\phi^* P_x). \end{aligned} \quad (5-147)$$

式中, 矩阵

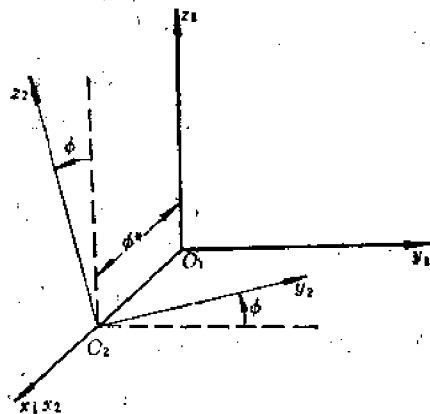


图 5-14 基本旋转矩阵

$$\phi_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{pmatrix}$$

表示仅绕 x 轴转动 ϕ 角, 矩阵 $(I + e\phi^*P_x)$ 表示仅沿 x 轴移动 ϕ^* 距离, 其中 I 为单位矩阵, 矩阵 P_x 为

$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

同理, 可推导出当坐标系绕 y 轴转动 θ 角, 且沿 y 轴移动 θ^* 距离时的坐标变换矩阵为

$$\hat{\theta}_y = \begin{pmatrix} \widehat{c\theta} & 0 & -\widehat{s\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \widehat{s\theta} & 0 & \widehat{c\theta} \end{pmatrix} = \theta_y (I + e\theta^*P_y). \quad (5-148)$$

式中,

$$\theta_y = \begin{pmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix}, \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

及当坐标系绕 z 轴转动 ψ 角, 且沿 z 轴移动 ψ^* 距离时的坐标变换矩阵为

$$\hat{\psi}_z = \begin{pmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \psi_z (I + e\psi^*P_z). \quad (5-149)$$

式中,

$$\psi_z = \begin{pmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

上列三个基本旋量矩阵表达式中, $c\phi$ 、 $s\phi$ 、 $c\theta$ 、 $s\theta$ 、 $c\psi$ 、 $s\psi$ 等符号分别表示 $\cos \phi$ 、 $\sin \phi$ 、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\cos \psi$ 、 $\sin \psi$ 等。

显然, 刚体的任何运动均可由上述三个基本旋量矩阵组成。若坐标系分别沿 x 、 y 、 z 轴移动 ϕ^* 、 θ^* 、 ψ^* 时, 则

$$\begin{aligned} \hat{A} &= (I + e\phi^*P_x)(I + e\theta^*P_y)(I + e\psi^*P_z) \\ &= I + e(\phi^*P_x + \theta^*P_y + \psi^*P_z) \end{aligned} \quad (5-150)$$

四、用对偶数矩阵进行空间机构的运动分析

现以图 5-15 所示的 RCCC 机构为例, 介绍用对偶矩阵进行空间机构运动分析的方法。

图中 A 为转动副, B 、 C 、 D 均为圆柱副, 该机构的四个运动副轴线是不平行也不相交的。当此四个运动副的轴线均为平行或相交于一点时, 该机构便成为平面四杆机构或球面四杆机构。因此, 对这机构进行分析研究是具有普遍意义的。

如图所示, 转动轴 A 的轴线 \hat{s}_1 为输入轴, 圆柱副 D 的轴线 \hat{s}_4 为输出轴, 这两轴线均为固定的。四杆的位置均用单位线矢量 \mathbf{a}_{12} 、 \mathbf{a}_{23} 、 \mathbf{a}_{34} 、 \mathbf{a}_{41} 表示。于是, 在任何瞬时, 该机构的位置

可用下列八个对偶角全面地表述出来

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}_{12} &= \alpha_{12} + \varepsilon s_{12}, & \hat{\theta}_1 &= \theta_1 + \varepsilon s_{11}, \\ \hat{\alpha}_{23} &= \alpha_{23} + \varepsilon s_{23}, & \hat{\theta}_2 &= \theta_2 + \varepsilon s_{21}, \\ \hat{\alpha}_{34} &= \alpha_{34} + \varepsilon s_{34}, & \hat{\theta}_3 &= \theta_3 + \varepsilon s_{31}, \\ \hat{\alpha}_{41} &= \alpha_{41} + \varepsilon s_{41}, & \hat{\theta}_4 &= \theta_4 + \varepsilon s_{41}. \end{aligned} \right\} \quad (5-151)$$

对于某一瞬时,此机构的位置是确定的,各运动副轴线间的对偶角(两轴线间的垂直距离和它们的投影角)均是定值,因此式(5-151)中仅有七个参数($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, s_2, s_3, s_4$)是变量,其中 θ_1 是输入转角, θ_4 和 s_4 是输出转角和输出轴位置。

为对该机构进行位移分析,可用对偶数矩阵写出自C点开始的闭环方程式为

$$\hat{\theta}_2 \hat{\alpha}_{23} \hat{\theta}_3 \hat{\alpha}_{34} \hat{\theta}_4 \hat{\alpha}_{41} \hat{\theta}_1 \hat{\alpha}_{12} = I. \quad (5-152)$$

式中

$$\hat{\theta}_j = \begin{pmatrix} c\hat{\theta}_j & s\hat{\theta}_j & 0 \\ -s\hat{\theta}_j & c\hat{\theta}_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (j=1,2,3,4)$$

它表示绕k轴的转动,

$$\hat{\alpha}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\hat{\alpha}_{ij} & s\hat{\alpha}_{ij} \\ 0 & -s\hat{\alpha}_{ij} & c\hat{\alpha}_{ij} \end{pmatrix}, \quad (i,j=12,23,34,41)$$

它表示绕i轴的转动。 $c\hat{\theta}, s\hat{\theta}, c\hat{\alpha}, s\hat{\alpha}$ 分别代表 $\cos \theta, \sin \theta, \cos \alpha, \sin \alpha$ 。

式(5-152)可改写为

$$\hat{\alpha}_{12} \hat{\theta}_1 \hat{\alpha}_{41} \hat{\theta}_4 \hat{\alpha}_{34} = (\hat{\theta}_3 \hat{\alpha}_{23} \hat{\theta}_2)^T,$$

或简写成

$$\hat{C} = \hat{D}. \quad (5-153)$$

它们的元素分别以 $c_{ij}, d_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 表示。

将上述对偶数矩阵进行运算整理后,可求得它们的每个元素表达式如下

$$\begin{aligned} c_{11} &= c\hat{\theta}_1 c\hat{\theta}_4 - c\hat{\alpha}_{41} s\hat{\theta}_1 s\hat{\theta}_4, \\ c_{12} &= c\hat{\alpha}_{34} (c\hat{\theta}_1 s\hat{\theta}_4 + c\hat{\alpha}_{43} s\hat{\theta}_1 c\hat{\theta}_4) - s\hat{\alpha}_{34} (c\hat{\alpha}_{41} s\hat{\alpha}_{12} + s\hat{\alpha}_{41} c\hat{\alpha}_{12} c\hat{\theta}_1), \\ c_{13} &= s\hat{\alpha}_{34} (c\hat{\theta}_1 s\hat{\theta}_4 + c\hat{\alpha}_{41} s\hat{\theta}_1 c\hat{\theta}_4) + c\hat{\alpha}_{34} s\hat{\alpha}_{41} s\hat{\theta}_1, \\ c_{21} &= -c\hat{\alpha}_{12} s\hat{\theta}_1 c\hat{\theta}_4 + s\hat{\theta}_4 (s\hat{\alpha}_{41} s\hat{\alpha}_{12} - c\hat{\alpha}_{41} c\hat{\alpha}_{12} c\hat{\theta}_1), \\ c_{22} &= -c\hat{\alpha}_{34} [s\hat{\alpha}_{12} s\hat{\theta}_1 s\hat{\theta}_4 - c\hat{\theta}_4 (s\hat{\alpha}_{41} c\hat{\alpha}_{12} + c\hat{\alpha}_{41} s\hat{\alpha}_{12} c\hat{\theta}_1)] - s\hat{\alpha}_{34} (c\hat{\alpha}_{41} s\hat{\alpha}_{12} + s\hat{\alpha}_{41} c\hat{\alpha}_{12} c\hat{\theta}_1), \\ c_{23} &= -s\hat{\alpha}_{34} [s\hat{\alpha}_{12} s\hat{\theta}_1 s\hat{\theta}_4 + (s\hat{\alpha}_{41} s\hat{\alpha}_{12} - c\hat{\alpha}_{41} c\hat{\alpha}_{12} c\hat{\theta}_1) c\hat{\theta}_4] + c\hat{\alpha}_{34} (c\hat{\alpha}_{41} s\hat{\alpha}_{12} + s\hat{\alpha}_{41} c\hat{\alpha}_{12} c\hat{\theta}_1), \end{aligned}$$

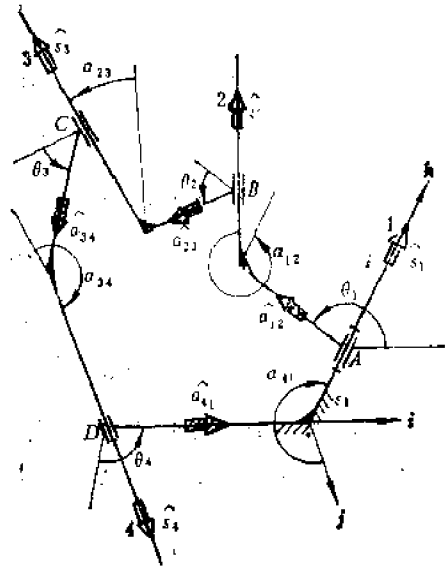


图 5-15 RCCC 机构

$$\begin{aligned}
c_{31} &= \hat{s}\alpha_{12}\hat{s}\hat{\theta}_1\hat{c}\hat{\theta}_4 + \hat{s}\hat{\theta}_4(\hat{s}\alpha_{41}\hat{s}\alpha_{12} - \hat{c}\alpha_{41}\hat{c}\alpha_{12}\hat{c}\hat{\theta}_1), \\
c_{32} &= \hat{c}\alpha_{34}[\hat{s}\alpha_{12}\hat{s}\hat{\theta}_1\hat{s}\hat{\theta}_4 - (\hat{s}\alpha_{41}\hat{c}\alpha_{12} + \hat{c}\alpha_{41}\hat{s}\alpha_{12}\hat{c}\hat{\theta}_1)] - \hat{s}\alpha_{34}(\hat{c}\alpha_{41}\hat{c}\alpha_{12} - \hat{s}\alpha_{41}\hat{s}\alpha_{12}\hat{c}\hat{\theta}_1), \\
c_{33} &= \hat{s}\alpha_{34}[\hat{s}\alpha_{12}\hat{s}\hat{\theta}_1\hat{s}\hat{\theta}_4 - \hat{c}\hat{\theta}_4(\hat{s}\alpha_{41}\hat{c}\alpha_{12} + \hat{c}\alpha_{41}\hat{s}\alpha_{12}\hat{c}\hat{\theta}_1)] - \hat{c}\alpha_{34}(\hat{c}\alpha_{41}\hat{c}\alpha_{12} - \hat{s}\alpha_{41}\hat{s}\alpha_{12}\hat{c}\hat{\theta}_1), \\
d_{11} &= \hat{c}\hat{\theta}_2\hat{c}\hat{\theta}_3 - \hat{c}\alpha_{23}\hat{s}\hat{\theta}_2\hat{s}\hat{\theta}_3, & d_{12} &= -\hat{c}\hat{\theta}_2\hat{s}\hat{\theta}_3 + \hat{s}\hat{\theta}_2\hat{c}\hat{\theta}_3\hat{c}\alpha_{43}, \\
d_{13} &= \hat{s}\alpha_{23}\hat{c}\hat{\theta}_{22}, & d_{21} &= \hat{s}\hat{\theta}_2\hat{c}\hat{\theta}_3 + \hat{c}\alpha_{23}\hat{c}\hat{\theta}_2\hat{s}\hat{\theta}_3, \\
d_{22} &= -\hat{s}\hat{\theta}_2\hat{s}\hat{\theta}_3 - \hat{c}\hat{\theta}_2\hat{c}\hat{\theta}_3\hat{c}\alpha_{23}, & d_{23} &= -\hat{s}\alpha_{23}\hat{c}\hat{\theta}_2, \\
d_{31} &= \hat{s}\alpha_{23}\hat{s}\hat{\theta}_3, & d_{32} &= \hat{s}\alpha_{23}\hat{c}\hat{\theta}_2, & d_{33} &= \hat{c}\alpha_{23}.
\end{aligned}$$

根据矩阵运算法则，对偶数矩阵 \hat{C} 和 \hat{D} 的各元素应各各相等。所以，由 $c_{33} = d_{33}$ ，可求得 θ_1 和 θ_4 的关系；由 $c_{13} = d_{13}$ 及 $c_{23} = d_{23}$ ，可求得 θ_2 ；再由 $c_{31} = d_{31}$ 及 $c_{21} = d_{21}$ ，可求得 θ_3 。

第六章 多关节机械手的运动分析

§ 6-1 作复杂相对运动的点的运动分析

在仿生机械中,大都采用空间多关节连杆机构,所以它的运动是属于构件系作复杂的相对运动。本节先就点的运动进行分析。

一、点的位置、速度和加速度

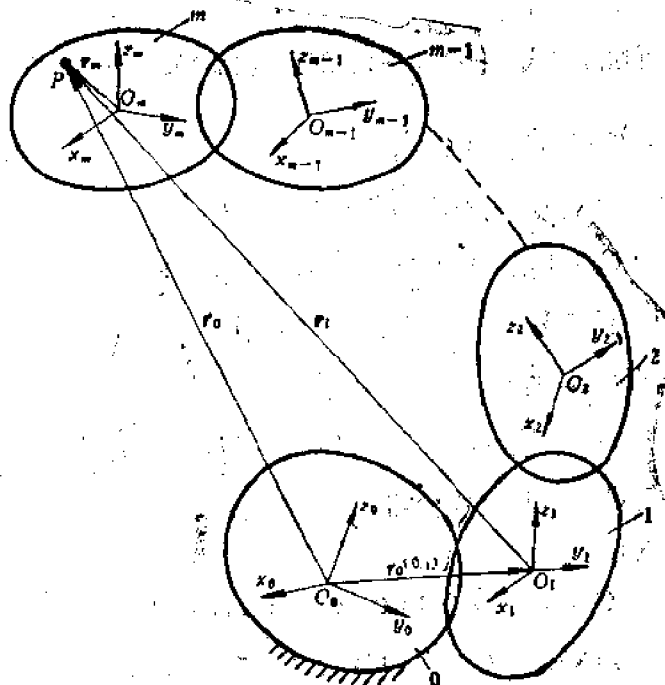


图 6-1 复杂相对运动

如图 6-1 所示,设有 $0, 1, 2, \dots, m$ 个坐标系作复杂的相对运动,其中坐标系 0 取为固定参考坐标系,各坐标系原点在上一相邻坐标系中的坐标列阵分别为 $r_0^{(0)}, r_1^{(0)}, \dots, r_{m-1}^{(0)}$, 每相邻坐标系的坐标变换矩阵分别为 $C_{01}, C_{12}, \dots, C_{m-1,m}$, P 点与坐标系 m 相连,该点在各坐标系中的坐标列阵分别为 r_0, r_1, \dots, r_m 。

在作复杂相对运动的坐标系中,点的位置关系式可利用一般的坐标变换关系式 (5-64) 进行逐个递推而求得

$$\begin{aligned} r_0 &= r_0^{(0)} + C_{01}r_1 \\ &= r_0^{(0)} + C_{01}[r_1^{(0)} + C_{12}r_2] \\ &= r_0^{(0)} + C_{01}r_1^{(0)} + C_{01}C_{12}[r_2^{(0)} + C_{23}r_3] \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 &= r_0^{(0)} + C_{01} r_1^{(0)} + C_{01} C_{12} r_2^{(0)} + \dots + C_{01} C_{12} \dots C_{m-2, m-1} [r_{m-1}^{(0)} \\
 &\quad + C_{m-1, m} r_m], \\
 r_0 &= r_0^{(0)} + C_{01} r_1^{(0)} + C_{01} C_{12} r_2^{(0)} + \dots \\
 &\quad + C_{01} C_{12} \dots C_{m-2, m-1} r_{m-1}^{(0)} + C_{01} C_{12} \dots C_{m-2, m-1} C_{m-1, m} r_m. \quad (6-1)
 \end{aligned}$$

同样,也可利用式(5-67),通过(4×4)空间坐标变换矩阵的连乘来推导,得

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} r_0 \\ 1 \end{pmatrix} &= A_{01} A_{12} \dots A_{m-1, m} \begin{pmatrix} r_m \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C_{01} & r_0^{(0)} \\ 000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{12} & r_1^{(0)} \\ 000 & 1 \end{pmatrix} \dots \\
 &\quad \begin{pmatrix} C_{m-1, m} & r_{m-1}^{(0)} \\ 000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_m \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6-2)
 \end{aligned}$$

点的绝对速度关系式可通过将式(6-1)对时间求导一次而得。利用式(5-85)可写出下列关系

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \dot{r}_0 = \dot{r}_0^{(0)} + \dot{C}_{01} r_1 + C_{01} \dot{r}_1 \\
 &= \dot{r}_0^{(0)} + C_{01} W_{10} r_1 + \dot{C}_{01} [r_1^{(0)} + C_{12} r_2 + C_{12} \dot{r}_2] \\
 &= \dot{r}_0^{(0)} + C_{01} [W_{10} r_1 + \dot{r}_1^{(0)}] + C_{01} C_{12} [W_{21} r_2 + \dot{r}_2] \\
 &= \dot{r}_0^{(0)} + C_{01} [W_{01} r_1 + \dot{r}_1^{(0)}] + C_{01} C_{12} [W_{21} r_2 + \dot{r}_2^{(0)} \\
 &\quad + \dot{C}_{23} r_3 + C_{23} \dot{r}_3] \\
 &= \dot{r}_0^{(0)} + C_{01} [W_{10} r_1 + \dot{r}_1^{(0)}] + C_{01} C_{12} [W_{21} r_2 + \dot{r}_2^{(0)}] \\
 &\quad + C_{01} C_{12} C_{23} [W_{32} r_3 + \dot{r}_3] \\
 &\quad \vdots \\
 &= \dot{r}_0^{(0)} + C_{01} [W_{10} r_1 + \dot{r}_1^{(0)}] + C_{01} C_{12} [W_{21} r_2 + \dot{r}_2^{(0)}] \\
 &\quad + \dots + C_{01} C_{12} \dots C_{m-2, m-1} [W_{m-1, m-2} r_{m-1} + \dot{r}_{m-1}^{(0)}] \\
 &\quad + C_{01} C_{12} \dots C_{m-2, m-1} C_{m-1, m} [W_{m, m-1} r_m + \dot{r}_m]. \quad (6-3)
 \end{aligned}$$

同样,也可利用式(6-2)对时间求导,得出以(4×4)矩阵来计算点的绝对速度关系式如下

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} v_0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{r}_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dot{A}_{01} A_{12} \dots A_{m-1, m} \begin{pmatrix} r_m \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad + A_{01} A_{12} \dots A_{m-1, m} \begin{pmatrix} \dot{r}_m \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + A_{01} A_{12} \dots \dot{A}_{m-1, m} \begin{pmatrix} r_m \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad + A_{01} A_{12} \dots A_{m-1, m} \begin{pmatrix} \dot{r}_m \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6-4)
 \end{aligned}$$

点的绝对加速度关系式可利用式(5-85)、(5-87),并对式(6-1)求导两次而得如下

$$a_0 = \dot{v}_0 = \ddot{r}_0 = \ddot{r}_0^{(0)} + C_{01} [(e_{10} + W_{10}^2) r_1] + 2 C_{01} (W_{10} \dot{r}_1) + C_{01} \ddot{r}_1.$$

因为

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= \ddot{r}_1^{(O_2)} + C_{12}[(\epsilon_{21} + W_{21}^2)_2 r_2] + 2C_{12}(W_{21} \dot{r}_2) + C_{12} \ddot{r}_2, \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{r}_2^{(O_3)} + C_{23}[(\epsilon_{32} + W_{32}^2)_3 r_3] + 2C_{23}(W_{32} \dot{r}_3) + C_{23} \ddot{r}_3, \\ &\vdots \\ \ddot{r}_{m-2} &= \ddot{r}_{m-2}^{(O_{m-1})} + C_{m-2, m-1}[(\epsilon_{m-1, m-2} + W_{m-1, m-2}^2)_{m-1} r_{m-1}] \\ &\quad + 2C_{m-2, m-1}(W_{m-1, m-2} \dot{r}_{m-1}) + C_{m-2, m-1} \ddot{r}_{m-1}, \\ \ddot{r}_{m-1} &= \ddot{r}_{m-1}^{(O_m)} + C_{m-1, m}[(\epsilon_{m, m-1} + W_{m, m-1}^2)_m r_m] + 2C_{m-1, m}(W_{m, m-1} \dot{r}_m) \\ &\quad + C_{m-1, m} \ddot{r}_m. \end{aligned}$$

将这些关系式依次代入上式,并经过整理后成为

$$\begin{aligned} a_0 = \ddot{r}_0 &= \ddot{r}_0^{(O_1)} + C_{01}[\ddot{r}_1^{(O_2)} + (\epsilon_{10} + W_{10}^2)_1 r_1 + 2W_{10} \dot{r}_1] \\ &\quad + C_{01}C_{12}[\ddot{r}_2^{(O_3)} + (\epsilon_{21} + W_{21}^2)_2 r_2 + 2W_{21} \dot{r}_2] \\ &\quad + C_{01}C_{12}C_{23}[\ddot{r}_3^{(O_4)} + (\epsilon_{32} + W_{32}^2)_3 r_3 + 2W_{32} \dot{r}_3] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + C_{01}C_{12}C_{23} \dots C_{m-2, m-1}[\ddot{r}_{m-1}^{(O_m)} + (\epsilon_{m-1, m-2} + W_{m-1, m-2}^2)_{m-1} r_{m-1} \\ &\quad + 2W_{m-1, m-2} \dot{r}_{m-1}] \\ &\quad + C_{01}C_{12}C_{23} \dots C_{m-2, m-1}C_{m-1, m}[(\epsilon_{m, m-1} + W_{m, m-1}^2)_m r_m + 2W_{m, m-1} \dot{r}_m + \ddot{r}_m]. \end{aligned} \quad (6-5)$$

在式(6-3)及(6-5)中,如令 $r_m = \dot{r}_m = 0$,则可得一系列构件依次作相对运动时,构件 m 上 P 点的速度和加速度关系式。

在式(6-1)~(6-5)中,如令 $r_0^{(O_1)} = r_1^{(O_2)} = \dots = r_{m-1}^{(O_m)} = 0$ 及 $\dot{r}_m = \ddot{r}_m = 0$,则得构件系统绕定点作复杂相对转动时的运动方程式。例如,这时构件 m 上 P 点的位置关系式为

$$r_0 = C_{01}C_{12}C_{23} \dots C_{m-1, m} r_m = C_{0m} r_m \quad (6-6)$$

式中

$$C_{0m} = C_{01}C_{12}C_{23} \dots C_{m-1, m} \quad (6-7)$$

二、角速度和角加速度

为了求解构件 m 对参考坐标系 O 的角速度关系式,可将式(6-7)对时间求导一次得

$$\dot{C}_{0m} = \dot{C}_{01}C_{12} \dots C_{m-1, m} + C_{01}\dot{C}_{12} \dots C_{m-1, m} + \dots + C_{01}C_{12} \dots \dot{C}_{m-1, m}.$$

利用式(5-85)关系,上式成为

$$\begin{aligned} C_{0m}W_{m0m} &= C_{01}W_{101}C_{12} \dots C_{m-1, m} \\ &\quad + C_{01}C_{12}W_{21}C_{23} \dots C_{m-1, m} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + C_{01}C_{12} \dots C_{m-1, m}W_{m, m-1}. \end{aligned}$$

将上列等式两边各右乘以矩阵 C_{m0} , 并利用式 (5-86) 的关系可写出

$$C_{0m}W_{m0}C_{m0} = W_{10}C_{01}C_{12}\cdots C_{m-1,m}C_{m0} + W_{21}C_{01}C_{12}\cdots C_{m-1,m}C_{m0} + \cdots + W_{m,m-1}C_{01}C_{12}\cdots C_{m-1,m}C_{m0}$$

于是, 可得角速度矩阵关系式如下

$$W_{m0} = W_{10} + W_{21} + \cdots + W_{m,m-1} \quad (6-8)$$

那么, 在坐标系 0 中构件 m 的绝对角速度列阵, 可由上式直接写出为

$$\omega_{m0} = \omega_{10} + \omega_{21} + \cdots + \omega_{m,m-1}$$

由于不同坐标系中列阵 ω_i 及 ω_j 的变换具有下列关系, 即

$$\omega_i = C_{ij}\omega_j \quad \text{及} \quad \omega_j = C_{ji}\omega_i$$

所以, 又可将角速度列阵改写为如下易于运算的形式

$$\omega_{m0} = \omega_{10} + C_{01}\omega_{21} + \cdots + C_{0,m-1}\omega_{m,m-1} \quad (6-9)$$

对于在坐标系 0 中, 构件 m 对坐标系 0 的角加速度列阵, 可由将式 (6-9) 对时间求导一次而求得

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{m0} &= \dot{\omega}_{10} + \dot{C}_{01}\omega_{21} + \dot{C}_{01}\omega_{21} + \cdots \\ &+ \dot{C}_{0,m-1}\omega_{m,m-1} + \dot{C}_{0,m-1}\omega_{m,m-1} \end{aligned}$$

即为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m0} &= \varepsilon_{10} + C_{01}(\varepsilon_{21} + W_{10}\omega_{21}) + \cdots \\ &+ C_{0,m-1}(\varepsilon_{m,m-1} + W_{m-1,0}\omega_{m,m-1}) \end{aligned} \quad (6-10)$$

§ 6-2 用坐标变换矩阵法进行机械手的运动分析

机械手的运动分析包括位置分析、速度分析和加速度分析, 而直接位置问题的求解则是最基本的和必须首先解决的问题。

所谓机械手直接位置问题的求解, 是指当机械手各个关节在驱动器作用下运动时, 给定各个运动副中的运动参数, 需要求出机械手末端手部所处的相应位置和姿态。

由于机械手的运动是属于构件系作复杂的相对运动, 为此可以引用式 (6-1) 或式 (6-2) 来确定末端手部的位置和姿态。

一、坐标系的选定

为了研究机械手的运动, 在它的各个构件上均需固结有相应的直角坐标系。

坐标系的选择, 通常是先选定各个 z 轴, 对含有轴线的运动副, 如转动副、移动副等, z 轴应取得与运动副轴线相重合, 其指向则可自由选定。 x 轴则取与每两个相邻 z 轴的公垂线重合, 即沿该两轴的最短距离线。至于 y 轴, 一般省略不画, 因为确定了 z 轴和 x 轴, y 轴就可按右手法则算出, 如图 6-2 所示。

在图 6-2 中, 设 $O_0-x_0y_0z_0$ 为参考坐标系, $O_n-x_ny_nz_n$ 为末端手爪坐标系, 其 z_n 轴一般取与手爪的对称轴线 a 一致, x_n 轴应取得与 z_{n-1} 、 z_n 两轴线垂直, 即沿着相邻两个 z 轴的公垂线, 但在图示两个 z 轴相重合的情况下, 还可考虑将 x_n 轴取得与手爪开口平面的法线 b 相平行。 $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ 及 $O_i-x_iy_iz_i$ 为两邻两个构件的坐标系, 它们是按上述原则选定的。如图所示, 该两

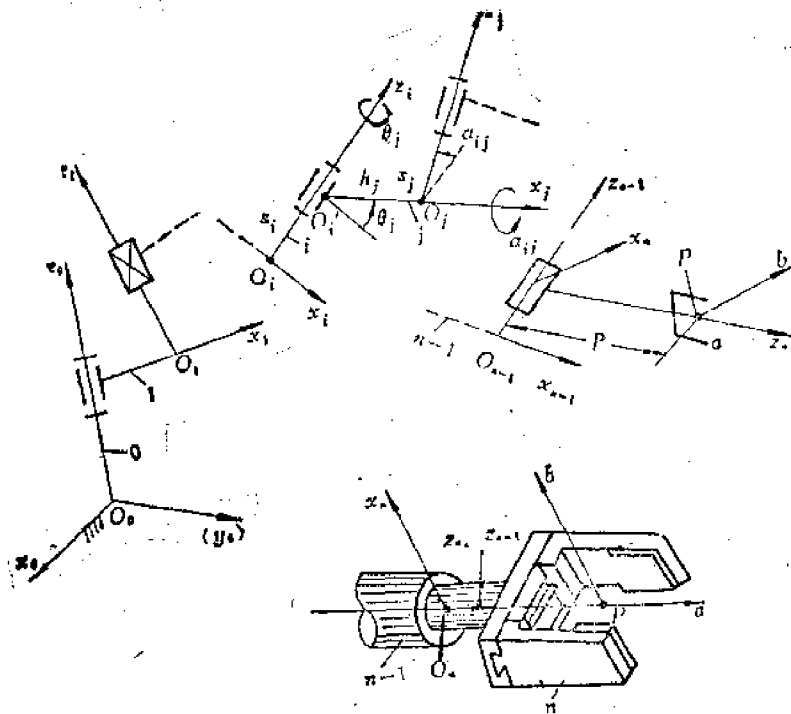


图6-2 机械手坐标系

个坐标系之间有下列四个参数：

s_i ——沿 z_i 轴表示 x_i 轴与 x_j 轴之间的偏距，规定沿 z_i 轴正向取为正；

θ_j ——表示绕 z_i 轴从轴 x_i 量至 x_j 的转角，取逆时针转向为正；

h_j ——沿 x_j 轴表示 z_i 轴与 z_j 之间的垂直距离，规定沿 x_j 轴正向取为正；

α_{ij} ——表示绕 x_j 轴从轴 z_i 量至 z_j 的转角，取逆时针转向为正。

于是，新坐标系 $O_j-x_jy_jz_j$ 可设想由原坐标系 $O_i-x_iy_iz_i$ 先沿 z_i 轴的正方向平移一段距离 s_i ，接着在 O'_i 点进行共原点的坐标轴转动（参数为 θ_j 和 α_{ij} ），使它的方位与新坐标系 $O_j-x_jy_jz_j$ 的方位一致，最后把它再沿 x_j 轴正方向平移一段距离 h_j 而达到图示的位置。

按上述所设定的参数和变换原则，相邻两坐标的 (4×4) 坐标变换矩阵的一般形式可表达如下

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} C_{ij} & \vdots & l \\ \dots & \dots & \dots \\ 0^T & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad (6-11)$$

因为

$$C_{ij} = C_{ij}^1 C_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{ij} & -\sin \alpha_{ij} \\ 0 & \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \cos \alpha_{ij} & \sin \theta_j \sin \alpha_{ij} \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \cos \alpha_{ij} & -\cos \theta_j \sin \alpha_{ij} \\ 0 & \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{pmatrix},$$

$$l = (h_j \cos \theta_j, h_j \sin \theta_j, s_i)^T,$$

于是可得

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \cos \alpha_{ij} & \sin \theta_j \sin \alpha_{ij} & h_j \cos \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \cos \alpha_{ij} & -\cos \theta_j \sin \alpha_{ij} & h_j \sin \theta_j \\ 0 & \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= A(s_i, h_j, \theta_j, \alpha_{ij}). \quad (6-12)$$

此式常称为 Hartenberg-Denavit 矩阵, 它对用于平面和空间机构的运动分析都是很方便的。

二、手部位置和姿态的矩阵方程式

在图 6-2 中, 设以手爪形心 P 点坐标来表示机械手末端手部的位罝, 它在坐标系 $O_n-x_n y_n z_n$ 中的坐标列阵为 $P_n = (0, 0, P)^T$, 而在参考坐标系中的坐标列阵为 $P_0 = (x, y, z)^T$; 末端手部的姿态(方向)以手爪的两正交矢量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的方向余弦表示, 它们在坐标系 $O_n-x_n y_n z_n$ 中的方向余弦分别为 $(0, 0, 1)^T$ 和 $(1, 0, 0)^T$, 而在参考坐标系中的方向余弦分别为 $(l, m, n)^T$ 和 $(u, v, w)^T$ 。

于是, 由式 (6-2) 可以写出确定末端手爪的位置和姿态的矩阵方程式为

$$\begin{pmatrix} x & l & u \\ y & m & v \\ z & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{0n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= A_{01} A_{12} \cdots A_{ij} \cdots A_{k-1, k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6-13)$$

式中, A_{ij} 为 (4×4) 空间坐标变换矩阵, 其一般表达式可见式 (6-11)。

下面举两个例子进行运动分析。

例 1. 具有六个转动副的机械手(图 6-3)。

设已知机械手的结构参数为

$$l_{AB} = s_0, \quad l_{BC} = h_2, \quad l_{CD} = s_3, \quad l_{DP} = P,$$

$$\alpha_{01} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = \alpha_{45} = 90^\circ, \quad \alpha_{12} = \alpha_{56} = 0^\circ,$$

并且给定各运动副中的转角参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ 。

要求确定手爪在固定坐标系 $A(O)-x_0 y_0 z_0$ 中的位置和姿态, 也即确定手爪形心 P 点的坐标 (x, y, z) 及描述其姿态的两正交矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的方向的余弦 (l, m, n) 和 (u, v, w) 。

该机械手手爪位置和姿态的矩阵方程式为

$$\begin{pmatrix} x & l & u \\ y & m & v \\ z & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{01} A_{12} A_{23} A_{34} A_{45} A_{56} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6-14)$$

其各相邻构件的 (4×4) 坐标变换矩阵为

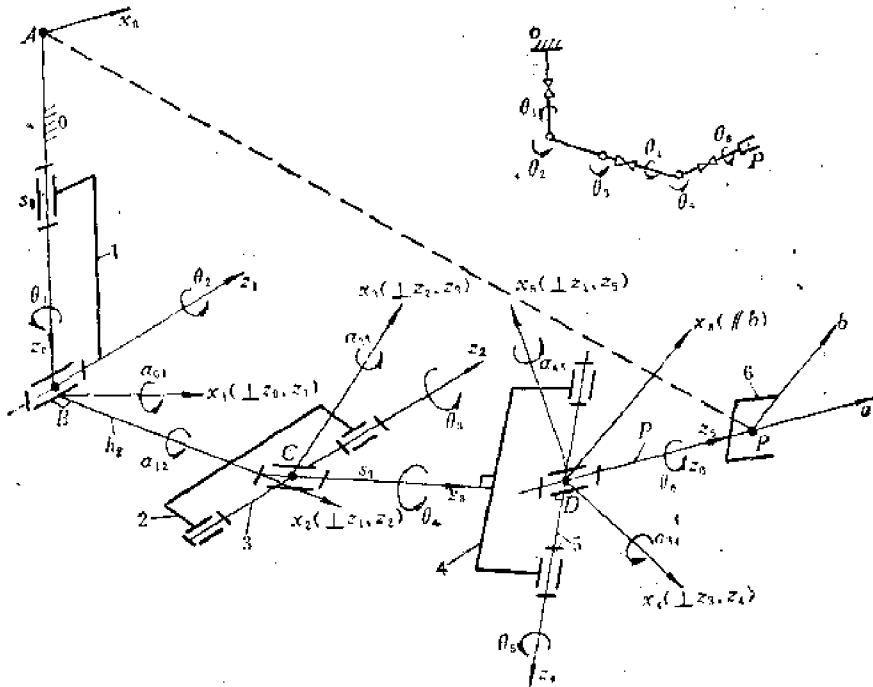


图 6-3 具有六个转动副的机械手

$$\begin{aligned}
 A_{01} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & h_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & h_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 A_{23} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & -\cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_{34} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & -\cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 A_{45} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_{56} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

那么,利用上述关系式(6-14)进行矩阵连乘运算后成为

$$\begin{pmatrix} x & l & u \\ y & m & v \\ z & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6-15)$$

式中

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos \theta_6 \cos \theta_5 \cos \theta_4 \cos \theta_3 \cos \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos \theta_6 \cos \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_1 \\
 &\quad + \cos \theta_6 \sin \theta_5 \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin \theta_6 \sin \theta_4 \cos \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \sin \theta_6 \cos \theta_4 \sin \theta_1; \\
 a_{12} &= -\sin \theta_6 \cos \theta_5 \cos \theta_4 \cos \theta_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \sin \theta_6 \cos \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_1 - \sin \theta_6 \sin \theta_5 \cos \theta_1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin\theta(\theta_2 + \theta_3) + \cos\theta_0 \sin\theta_4 \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos\theta_0 \cos\theta_4 \sin\theta_1; \\
a_{13} &= \sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 - \cos\theta_5 \cos\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3); \\
a_{14} &= s_3 \cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + h_2 \cos\theta_2 \cos\theta_1; \\
a_{21} &= \cos\theta_5 \cos\theta_5 \cos\theta_4 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos\theta_5 \cos\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1 \\
& \quad + \cos\theta_5 \sin\theta_5 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_1; \\
a_{22} &= -\sin\theta_5 \cos\theta_5 \cos\theta_4 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_5 \cos\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1 \\
& \quad - \sin\theta_5 \sin\theta_5 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + \cos\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_1; \\
a_{23} &= \sin\theta_5 \cos\theta_4 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1 - \cos\theta_5 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3); \\
a_{24} &= s_3 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + h_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1; \\
a_{31} &= \cos\theta_5 \cos\theta_5 \cos\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) - \cos\theta_5 \sin\theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3); \\
a_{32} &= -\sin\theta_5 \cos\theta_5 \cos\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin\theta_5 \sin\theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos\theta_5 \sin\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3); \\
a_{33} &= \sin\theta_5 \cos\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + \cos\theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3); \\
a_{34} &= -s_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + h_2 \sin\theta_2 + s_0; \\
a_{41} &= 0; \\
a_{42} &= 0; \\
a_{43} &= 0; \\
a_{44} &= 1.
\end{aligned}$$

于是,可求得:

$$\begin{aligned}
x &= Pa_{13} + a_{14} = [P \sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + (s_3 - P \cos\theta_5) \sin(\theta_2 + \theta_3) + h_2 \cos\theta_2] \cos\theta_1 \\
& \quad + P \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1; \\
y &= Pa_{23} + a_{24} = [P \sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + (s_3 - P \cos\theta_5) \sin(\theta_2 + \theta_3) + h_2 \cos\theta_2] \sin\theta_1 \\
& \quad - P \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1; \\
z &= Pa_{33} + a_{34} = P \sin\theta_5 \cos\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) - (s_3 - P \cos\theta_5) \cos(\theta_2 + \theta_3) + h_2 \sin\theta_2 + s_0.
\end{aligned} \tag{6-16}$$

$$\begin{aligned}
l &= a_{13} = [\sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \cos\theta_1 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1; \\
m &= a_{23} = [\sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \sin\theta_1 - \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1; \\
n &= a_{33} = \sin\theta_5 \cos\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + \cos\theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3). \\
u &= a_{11} = [(\cos\theta_5 \cos\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4) \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos\theta_5 \sin\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \cos\theta_1 \\
& \quad + (\cos\theta_5 \cos\theta_5 \sin\theta_4 - \sin\theta_5 \cos\theta_4) \sin\theta_1; \\
v &= a_{21} = [(\cos\theta_5 \cos\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4) \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos\theta_5 \sin\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \sin\theta_1 \\
& \quad - (\cos\theta_5 \cos\theta_5 \sin\theta_4 - \sin\theta_5 \cos\theta_4) \cos\theta_1; \\
w &= a_{31} = (\cos\theta_5 \cos\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4) \sin(\theta_2 + \theta_3) - \cos\theta_5 \sin\theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3).
\end{aligned} \tag{6-17}$$

例 2. Unimate 型工业机器人(图 6-4)。

设已知机械手的结构参数为

$$\begin{aligned}
l_{AB} &= s_0, & l_{BC} &= h_2, & l_{DP} &= P, \\
\alpha_{01} &= \alpha_{12} = \alpha_{34} = \alpha_{45} = 90^\circ, & \alpha_{23} &= \theta_3 = 0^\circ,
\end{aligned}$$

并且给定各运动副中的运动参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_5$ 及 s_2 五个。

要求确定手爪在固定坐标系 $A(O)-x_0 y_0 z_0$ 中的位置和姿态。

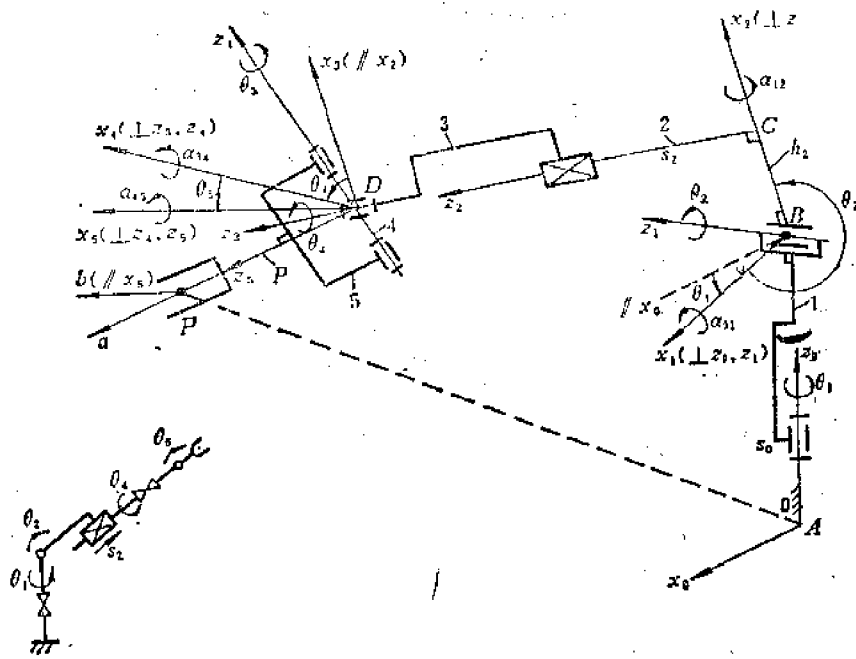


图 6-4 Unimate 型工业机器人

如上所述,可写出确定该机械手手爪位置及姿态的矩阵方程式为

$$\begin{pmatrix} x & l & u \\ y & m & v \\ z & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{01} A_{12} A_{23} A_{34} A_{45} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-19)$$

根据图 6-4 所示机械手的结构和运动参数,可按式 (6-12) 写出各相邻构件的 (4×4) 坐标变换矩阵为

$$A_{01} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & h_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & h_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} \cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & -\cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{45} = \begin{pmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将这些坐标变换矩阵代入式 (6-19), 并进行连乘运算可得

$$\begin{pmatrix} x & l & u \\ y & m & v \\ z & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6-20)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_4 \cos \theta_5 + \sin \theta_1 \sin \theta_4 \cos \theta_5 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_5; \\ a_{12} &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_4 - \sin \theta_1 \cos \theta_4; \\ a_{13} &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + \sin \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_5 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_5; \\ a_{14} &= s_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + h_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2; \\ a_{21} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_4 \cos \theta_5 - \cos \theta_1 \sin \theta_4 \cos \theta_5 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_5; \\ a_{22} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_4 + \cos \theta_1 \cos \theta_4; \\ a_{23} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - \cos \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_5 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_5; \\ a_{24} &= s_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + h_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2; \\ a_{31} &= \sin \theta_2 \cos \theta_4 \cos \theta_5 - \cos \theta_2 \sin \theta_5; \\ a_{32} &= \sin \theta_2 \sin \theta_4; \\ a_{33} &= \sin \theta_2 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + \cos \theta_2 \cos \theta_5; \\ a_{34} &= -s_2 \cos \theta_2 + h_2 \sin \theta_2 + s_0; \\ a_{41} &= 0; \\ a_{42} &= 0; \\ a_{43} &= 0; \\ a_{44} &= 1. \end{aligned}$$

于是,可求出:

$$\begin{aligned} x &= Pa_{13} + a_{14} = [P(\sin \theta_5 \cos \theta_4 \cos \theta_2 - \cos \theta_5 \sin \theta_2) + s_2 \sin \theta_2 + h_2 \cos \theta_2] \cos \theta_1 \\ &\quad + P \sin \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_1; \\ y &= Pa_{23} + a_{24} = [P(\sin \theta_5 \cos \theta_4 \cos \theta_2 - \cos \theta_5 \sin \theta_2) + s_2 \sin \theta_2 + h_2 \cos \theta_2] \sin \theta_1 \\ &\quad - P \sin \theta_5 \sin \theta_4 \cos \theta_1; \\ z &= Pa_{33} + a_{34} = P(\sin \theta_5 \cos \theta_4 \sin \theta_2 + \cos \theta_5 \cos \theta_2) - s_2 \cos \theta_2 + h_2 \sin \theta_2 + s_0. \end{aligned} \quad (6-21)$$

$$\begin{aligned} l &= a_{13} = (\sin \theta_5 \cos \theta_4 \cos \theta_2 - \cos \theta_5 \sin \theta_2) \cos \theta_1 + \sin \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_1; \\ m &= a_{23} = (\sin \theta_5 \cos \theta_4 \cos \theta_2 - \cos \theta_5 \sin \theta_2) \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \sin \theta_4 \cos \theta_1; \\ n &= a_{33} = \sin \theta_5 \cos \theta_4 \sin \theta_2 + \cos \theta_5 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (6-22)$$

$$\begin{aligned} u &= a_{11} = (\cos \theta_5 \cos \theta_4 \cos \theta_2 + \sin \theta_5 \sin \theta_2) \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_1; \\ v &= a_{21} = (\cos \theta_5 \cos \theta_4 \cos \theta_2 + \sin \theta_5 \sin \theta_2) \sin \theta_1 - \cos \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_1; \\ w &= a_{31} = \cos \theta_5 \cos \theta_4 \sin \theta_2 - \sin \theta_5 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (6-23)$$

三、运动速度和加速度分析

在研究机械手的动力学和速度控制中,除进行位置分析外,还要进行机械手速度和加速度分析。

如果已知机械手各运动副中运动参数对时间的变化规律,则手爪对固定坐标系的绝对速度,可通过将式(6-13)对时间求一阶导数而得,即

$$\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{l} & \dot{u} \\ \dot{y} & \dot{m} & \dot{v} \\ \dot{z} & \dot{n} & \dot{w} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\dot{A}_{01} \cdots A_{1j} \cdots A_{n-1,n} + \cdots + \dot{A}_{01} \cdots \dot{A}_{1j} \cdots A_{n-1,n} + \cdots + A_{01} \cdots A_{1j} \cdots \dot{A}_{n-1,n}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-24)$$

式中 \dot{A}_{1j} 可由式 (6-12) 对时间求导一次得出, 即

$$\dot{A}_{1j} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_j \sin \theta_j & -\dot{\theta}_j \cos \theta_j \cos \alpha_{1j} & \dot{\theta}_j \cos \theta_j \sin \alpha_{1j} & -h_j \dot{\theta}_j \sin \theta_j \\ \dot{\theta}_j \cos \theta_j & -\dot{\theta}_j \sin \theta_j \cos \alpha_{1j} & \dot{\theta}_j \sin \theta_j \sin \alpha_{1j} & h_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j \\ 0 & 0 & 0 & \dot{s}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-25)$$

为了便于对手爪的绝对速度进行一般计算, 也可采用先将式 (6-13) 展开, 然后再对时间进行求导。设手爪的绝对运动参数(指 x, y, z, l, m, n 等 m 个)用 x_j 表示, 各运动副中的相对运动参数(指转角 θ 和距离 s 等 n 个)用 q_i 表示, 则将式 (6-13) 展开所得的非线性方程组可简记为

$$x_j = f_j(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad j = 1, 2, \dots, m, m \leq n. \quad (6-26)$$

将上式对时间求导一次得下列线性方程组

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (6-27)$$

如用矩阵形式表示则成为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad (6-28)$$

或

$$\dot{x} = J \dot{q}. \quad (6-29)$$

式中, 矩阵 J 称为雅可比矩阵。

显然, 利用式 (6-28) 或 (6-29) 来求手爪的绝对速度应与按式 (6-24) 算出的结果相同。

关于加速度分析, 可将速度对时间再求导一次获而得。

§ 6-3 用三维向量和 (3×3) 矩阵进行机械手位置及姿态分析

一、手爪位置的计算

采用图 6-5 所示的机械手作为计算实例。由图可知, 其关节转角 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 的转动轴线

是正交于肩部 S 一点, 且其关节转角 θ_5, θ_6 和 θ_7 的转动轴线也正交于腕部 W 一点。所以, 实际表明用三维向量及 (3×3) 旋转坐标变换矩阵来进行计算要比上节所述的矩阵法简明。

设定下列符号(图 6-6):

P_E, P_W, P_H 分别表示以肩部 S 为原点的肘部 E 、腕部 W 及手爪 H 的位置向量;

C_E, C_W, C_H 分别表示固定在肘位置 E 、腕位置 W 及手爪位置 H 的运动坐标系对应于肩部固定参考坐标系的坐标变换矩阵;

l_1, l_2, l_3 分别表示向量 $\overline{SE}, \overline{EW}, \overline{WH}$ 。

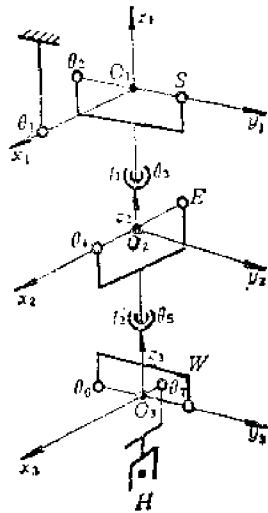


图 6-5 七个自由度人臂形机械手

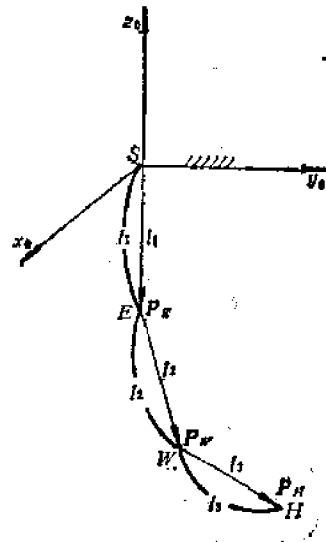


图 6-6 设定符号

那么, 由图 6-6 可得出下列各式

$$\left. \begin{aligned} P_E &= l_1, \\ P_W &= l_1 + l_2 = P_E + l_2, \\ P_H &= l_1 + l_2 + l_3 = P_W + l_3. \end{aligned} \right\} \quad (6-30)$$

由一般的坐标变换关系可以写出

$$l_1 = C_{x1} C_{y2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 \end{pmatrix} = C_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 \end{pmatrix}, \quad (6-31)$$

$$l_2 = C_{x1} C_{y2} C_{z3} C_{x4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{pmatrix} = C_W \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{pmatrix}, \quad (6-32)$$

$$l_3 = C_{x1} C_{y2} C_{z3} C_{x4} C_{z5} C_{y6} C_{x7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_3 \end{pmatrix}$$

$$= C_W C_{e5} C_{y\theta} C_{x7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_3 \end{pmatrix} = C_H \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_3 \end{pmatrix} \quad (6-33)$$

上列式中, C_{x1} 、 C_{y2} 、 C_{z3} 、... 分别表示绕 x 轴旋转 θ_1 角、绕 y 轴旋转 θ_2 角、绕 z 轴旋转 θ_3 角、... 的坐标变换矩阵。

把只绕 x 、 y 、 z 各坐标轴旋转的基本坐标变换矩阵式 (5-70)~(5-72) 代入上列各式, 便可求得坐标变换矩阵 C_E 、 C_W 、 C_H 的实际计算式如下

$$C_E = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 & -s_1 c_2 \\ -c_1 s_2 & s_1 & c_1 c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad (6-34)$$

$$C_W = \begin{pmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 c_4 + s_2 s_4 \\ s_1 s_2 c_3 + c_1 s_3 & -s_1 s_2 s_3 c_4 + c_1 c_3 c_4 - s_1 c_2 s_4 \\ -c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3 & c_1 s_2 s_3 c_4 + s_1 c_3 c_4 + c_1 c_2 s_4 \\ c_2 s_3 s_4 + s_2 c_4 & \\ s_1 s_2 s_3 s_4 - c_1 c_3 s_4 - s_1 c_2 c_4 & \\ -c_1 s_2 s_3 s_4 - s_1 c_3 s_4 + c_1 c_2 c_4 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix} \quad (6-35)$$

$$C_H = \begin{pmatrix} c_2 c_3 c_5 c_6 + (-c_2 s_3 c_4 + s_2 s_4) s_5 c_6 - (c_2 s_3 s_4 + s_2 c_4) s_6 \\ (s_1 s_2 c_3 + c_1 s_3) c_5 c_6 + (-s_1 s_2 s_3 c_4 + c_1 c_3 c_4 - s_1 c_2 s_4) s_6 c_6 \\ - (s_1 s_2 s_3 s_4 - c_1 c_3 s_4 - s_1 c_2 c_4) s_6 \\ (-c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3) c_5 c_6 + (c_1 s_2 s_3 s_4 + s_1 c_3 c_4 + c_1 c_2 s_4) s_6 c_6 \\ - (-c_1 s_2 s_3 s_4 - s_1 c_3 s_4 + c_1 c_2 c_4) s_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & c_2 c_3 (c_5 s_6 s_7 - s_5 c_7) + (-c_2 s_3 c_4 + s_2 s_4) (s_5 s_6 s_7 + c_5 c_7) + (c_2 s_3 s_4 + s_2 c_4) c_6 s_7 \\ & (s_1 s_2 c_3 + c_1 s_3) (c_5 s_6 s_7 - s_5 c_7) + (-s_1 s_2 s_3 c_4 + c_1 c_3 c_4 - s_1 c_2 s_4) \cdot \\ & (s_5 s_6 s_7 + c_5 c_7) + (s_1 s_2 s_3 s_4 - c_1 c_3 s_4 - s_1 c_2 c_4) c_6 s_7 \\ & (-c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3) (c_5 s_6 s_7 - s_5 c_7) + (c_1 s_2 s_3 s_4 + s_1 c_3 c_4 + c_1 c_2 s_4) \cdot \\ & (s_5 s_6 s_7 + c_5 c_7) + (-c_1 s_2 s_3 s_4 - s_1 c_3 s_4 + c_1 c_2 c_4) c_6 s_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_2 c_3 (c_5 s_6 c_7 + s_5 s_7) + (-c_2 s_3 c_4 + s_2 s_4) (s_5 s_6 c_7 - c_5 s_7) + (c_2 s_3 s_4 + s_2 c_4) \cdot \\ & c_6 c_7 (s_1 s_2 c_3 + c_1 s_3) (c_5 s_6 c_7 + s_5 s_7) + (-s_1 s_2 s_3 c_4 + c_1 c_3 c_4 - s_1 c_2 s_4) \cdot \\ & (s_5 s_6 c_7 - c_5 s_7) + (s_1 s_2 s_3 s_4 - c_1 c_3 s_4 - s_1 c_2 c_4) c_6 c_7 \\ & (-c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3) (c_5 s_6 c_7 + s_5 s_7) + (c_1 s_2 s_3 s_4 + s_1 c_3 c_4 + c_1 c_2 s_4) \cdot \\ & (s_5 s_6 c_7 - c_5 s_7) + (-c_1 s_2 s_3 s_4 - s_1 c_3 s_4 + c_1 c_2 c_4) c_6 c_7 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (6-36)$$

上列各式中, c_1 、 s_1 、 c_2 、 s_2 等分别表示 $\cos \theta_1$ 、 $\sin \theta_1$ 、 $\cos \theta_2$ 、 $\sin \theta_2$ 等。

于是, 根据上列各式, 肘部 E 、腕部 W 和手爪 H 在固定参考坐标系 (x_0, y_0, z_0) 中的位置向量 P_E 、 P_W 、 P_H 的坐标可用下列各式表示

$$P_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = -l_1 \begin{pmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{pmatrix}, \quad (6-37)$$

$$P_W = \begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \end{pmatrix} = -l_1 \begin{pmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{pmatrix} - l_2 \begin{pmatrix} w_{13} \\ w_{23} \\ w_{33} \end{pmatrix}, \quad (6-38)$$

$$P_H = \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = -l_1 \begin{pmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{pmatrix} - l_2 \begin{pmatrix} w_{13} \\ w_{23} \\ w_{33} \end{pmatrix} - l_3 \begin{pmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} \end{pmatrix}, \quad (6-39)$$

二、手爪姿态的计算

1. 用方向余弦表示的方法

如图 6-7 所示, 研究按照已知固定在手爪上的坐标系的各坐标轴的方向来确定手爪姿态的方法。

设手爪坐标系的各轴为 x_H, y_H, z_H , 它们对固定坐标系的 x_0, y_0, z_0 各轴所形成的方向余弦分别取为 $(l_{H1}, m_{H1}, n_{H1}), (l_{H2}, m_{H2}, n_{H2}), (l_{H3}, m_{H3}, n_{H3})$ 。

那么, 由旋转坐标变换关系可写出

$$\begin{pmatrix} l_{H1} \\ m_{H1} \\ n_{H1} \end{pmatrix} = C_H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix}, \quad (6-40)$$

$$\begin{pmatrix} l_{H2} \\ m_{H2} \\ n_{H2} \end{pmatrix} = C_H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \end{pmatrix}, \quad (6-41)$$

$$\begin{pmatrix} l_{H3} \\ m_{H3} \\ n_{H3} \end{pmatrix} = C_H \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} \end{pmatrix} \quad (6-42)$$

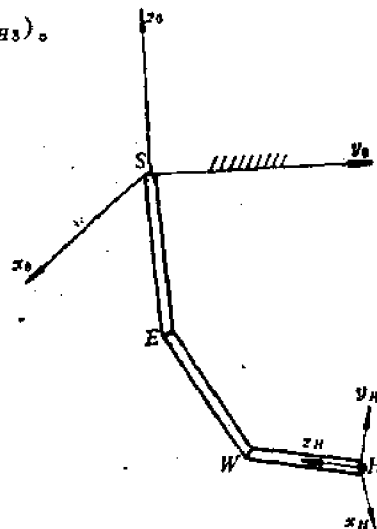


图 6-7 用方向余弦表示手爪姿态

因此, 可把手爪的姿态用下列矩阵表示

$$D = \begin{pmatrix} l_{H1} & l_{H2} & l_{H3} \\ m_{H1} & m_{H2} & m_{H3} \\ n_{H1} & n_{H2} & n_{H3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = C_H. \quad (6-43)$$

由式 (6-43) 可知, 若用方向余弦来表示手爪的姿态时, 它的矩阵与手爪位置的坐标变换矩阵具有相同的形式。所以, 在已求得矩阵 C_H 的情况下, 就可以简便地确定出手爪的姿态。

2. 用手爪方向角表示的方法

为了直观地了解手爪的姿态, 可采用图 6-8 所示那样的 α, β, γ 三个角度, 即称为手爪方向角。

这样, 图 6-8 所示的手爪现时位置姿态可以认为是由初始状态 (0) 转动 $\frac{\pi}{2}$ 角度, 并把它置于水平位置 (i) 的状态 (机械手的右侧) 之后, 再绕水平转动 α 角度 (处于 (ii) 的状态), 接着把它

朝水平向下的方向转动 β 角度, 最后再绕手爪本身转动 γ 角度而形成的状态(即为 (iii) 的状态)。根据上述构成原则, 那么手爪从初始状态转动到现时位置姿态的总坐标变换矩阵可表示为

$$\begin{aligned}
 & C_z\left(-\frac{\pi}{2}\right) C_x\left(\frac{\pi}{2}\right) C_y(\alpha) C_z(-\beta) C_x(-\gamma) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & s_\beta \\ 0 & -s_\beta & c_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} s_\alpha c_\gamma - c_\alpha s_\beta s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha s_\beta c_\gamma & c_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma + s_\alpha s_\beta c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma & s_\beta \end{pmatrix} \quad (6-44)
 \end{aligned}$$

式中, s_α, c_α 等分别表示 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 等。

但是, 从另一方面来说, 图 6-8 所示的手爪现时位置姿态, 在实际上是从同样的初始状态 (0), 通过驱动各个关节的转动 ($\theta_1 \sim \theta_n$, 当有 n 个转动机构时) 而实现的。所以, 式 (6-44) 所示的总坐标变换矩阵, 应该是和由 $\theta_1 \sim \theta_n$ 所形成的总坐标变换矩阵相同, 即

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} s_\alpha c_\gamma - c_\alpha s_\beta s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha s_\beta c_\gamma & c_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma + s_\alpha s_\beta c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma & s_\beta \end{pmatrix} \\
 &= C_1 C_2 \cdots C_n = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (6-45)
 \end{aligned}$$

于是由上式可得出

$$\left. \begin{aligned} c_\alpha c_\beta &= c_{13}, & -s_\alpha c_\beta &= c_{23}, & s_\beta &= c_{33}, \\ -c_\beta s_\gamma &= c_{31}, & c_\beta c_\gamma &= c_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (6-46)$$

从而, 求得手爪方向角为

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-c_{23}}{c_{13}}\right), \quad \beta = \sin^{-1}(c_{33}), \quad \gamma = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-c_{31}}{c_{32}}\right) \quad (6-47)$$

式 (6-47) 可适用于各种形式的多关节机械手。所以, 对于图 6-5 所示的人臂形机械手的情况, 只要把式中的 $c_{13}, c_{23}, c_{33}, c_{31}, c_{32}$ 等分别以式 (6-36) 中的 $h_{13}, h_{23}, h_{33}, h_{31}, h_{32}$ 等代之, 即可照样使用。

§ 6-4 用旋转张量法进行机械手的位置及姿态分析

一、机械手的矢量环表示

如图 6-9 所示, 取机械手的固定支座上或地面上的适当点为 O , 当从这点到夹持点 P 的

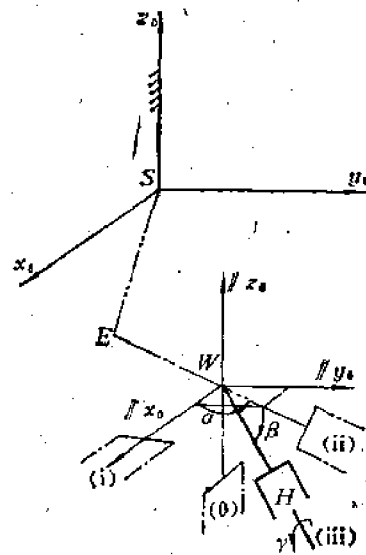


图 6-8 用手爪方向角表示手爪姿态

矢量为 P 时, 则该矢量 P 可以用表示机械手臂部的各矢量 R_1, R_2, \dots, G^* 之和来表示, 即

$$P = R_1 + R_2 + \dots + G^* \quad (6-48)$$

为进行这种运算, 设定如下标记和法则:

1. 取固定在地面上的右手正交坐标系 xyz, i, j, k 为其各坐标轴的单位矢量。一般, 取垂直向上方向为 k 轴, 当机械手处于垂直状态时, 取机械手的前方为 i 轴。机械手的各臂部尽可能地放置在三根坐标轴中的任一根上, 并把这种状态作为初始状态。

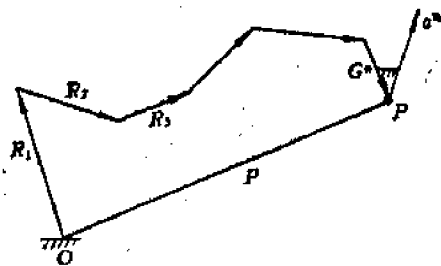


图 6-9 机械手的矢量环表示

而且, 把在初始状态中, 所有的旋转轴及平移方向均与 i, j, k 中的任一根轴相一致的机械手称为正交系机械手。实际上, 大部分的机械手都是属于正交系类型。

2. 矢量从靠近固定点 O 处开始依次记上下标 $1, 2, 3, \dots$ 。
3. 长度不变的矢量用 C 表示, 而有变化的矢量用 L 表示。
4. 机械手夹持工件时, 夹持中心的点称为夹持点。从腕部到夹持点的矢量称为夹持矢量, 以 G 表示。

被夹持工件的姿态用姿态矢量 a^* 来表示。对于一般矢量 a 满足

$$E^{a^*}(a) = a,$$

而对于姿态矢量 a^* 具有性质

$$E^{a^*}(a^*) \neq a^* \quad (6-49)$$

夹持矢量 G 在手爪夹持工件之后就没有变化, 并且与工件姿态矢量 a^* 刚性结合成一体进行运动。虽然若把夹持矢量 G 绕其矢量本身旋转, G 本身的值不变, 但是已固定在其前头的 a^* 的值却有变化。因此, 也可把夹持矢量 G 认为是姿态矢量 G^* 。

5. 在初始状态, 对于分别与 i, j, k 方向一致的矢量, 分别写上标记 i, j, k 。
6. 旋转按照旋转变换张量来表示。

图 6-10 表示用上述法则标记的 Unimate 2600 型工业机械手。该机械手具有 $\theta_1, \theta_2, L, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ 六个自由度。

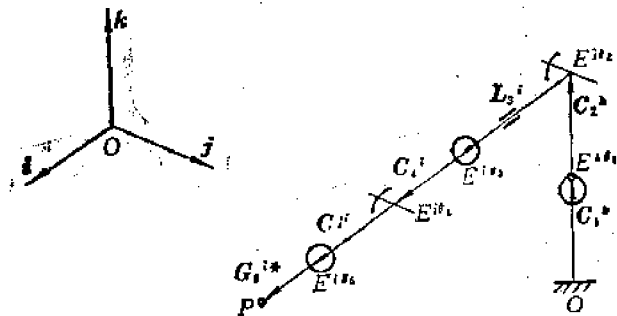


图 6-10 用矢量图表示的工业机械手

二、机械手的特性方程式

对于具有如图 6-10 所示初始状态的机械手, 若给各轴以一定的位移, 那么在给出位移之后的夹持点的位置矢量 P 可用下式表示

$$P = C_1^* + E^{k\theta_1}(C_2^* + E^{j\theta_2}(L_3^* + E^{i\theta_3}(C_4^* + E^{j\theta_4}(C_5^* + E^{i\theta_5}(G_6^*)))))) \quad (6-50)$$

上式即称为该机械手的特性方程式。这个方程式表达了这种机械手机构学的性质。

将上式展开,并考虑到旋转变换张量的性质,可得

$$\begin{aligned} P = & (C_1^k + C_2^k) + E^{k\theta_1} E^{j\theta_1} (L_2^k + C_1^k) + E^{k\theta_1} E^{j\theta_1} E^{i\theta_1} E^{h\theta_1} (C_2^k) \\ & + E^{k\theta_1} E^{j\theta_1} E^{i\theta_1} E^{h\theta_1} E^{g\theta_1} (G_1^{k*}). \end{aligned} \quad (6-51)$$

式中, G_1^{k*} 为姿态矢量。

若以 α^* 表示被夹持工件的姿态, α_0^* 为其初始值,则可写出

$$P + \alpha^* = C_1^k + E^{k\theta_1} (C_2^k + E^{j\theta_1} (L_2^k + E^{i\theta_1} (C_1^k + E^{h\theta_1} (C_2^k + E^{g\theta_1} (G_1^{k*} + \alpha_0^*))))). \quad (6-52)$$

把上式展开,并与式(6-51)相比较,得

$$\alpha^* = E^{k\theta_1} E^{j\theta_1} E^{i\theta_1} E^{h\theta_1} E^{g\theta_1} (\alpha_0^*) = E(\alpha_0^*), \quad (6-53)$$

式中, E 为 (3×3) 矩阵,是给定姿态变换的矩阵。

三、位置姿态的变换

1. 变换矩阵

设用位置矢量 P 表示的点 P , 使其围绕通过坐标原点的轴 w 逆时针转过一个 θ 角后,再把它平移一个 ΔP 位移,则新的点位置矢量 P' 为

$$P' = E^{w\theta}(P) + \Delta P, \quad (6-54)$$

该关系式可用矩阵表示如下

$$\begin{pmatrix} P' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{w\theta} & \Delta P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6-55)$$

若刚性地固结在位置矢量 P' 上的工件姿态用两个矢量 α' 与 b' 表示,它们的初始值分别为 α 与 b ,则有

$$\alpha' = E^{w\theta}(\alpha), \quad b' = E^{w\theta}(b). \quad (6-56)$$

那么,位置矢量的变换关系可写成如下形式

$$\begin{pmatrix} P' & \alpha' & b' \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{w\theta} & \Delta P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & \alpha & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6-57)$$

或简写为

$$P'^{**} = M(P^{**}). \quad (6-58)$$

式中,

$$M = \begin{pmatrix} E^{w\theta} & \Delta P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{**} = \begin{pmatrix} P & \alpha & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然,在原位置姿态矩阵上给以变换 M , 就是新的位置姿态矩阵。

2. 机械手特性方程式的一般形式

设具有 m 个转动关节的机械手,其特性方程式一般可写成

$$P = C_1 + E^{w_1\theta_1} (C_2 + E^{w_2\theta_2} (\dots (C_m + E^{w_m\theta_m} (G^*)) \dots)). \quad (6-59)$$

若在这种机械手上,工件姿态矢量为 α 与 b , 其初始值为 α_0 及 b_0 , 那么上述关系式可用下列矩阵积形式表示为

$$\begin{pmatrix} P & \alpha & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{w_1\theta_1} & C_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{w_2\theta_2} & C_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} E^{w_m\theta_m} & C_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & \alpha_0 & b_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E^{i\theta_i} & C_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_i & a_i & b_i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6-60)$$

式中, $i=1, 2, \dots, m$ 。

上式也可写为

$$P^{**} = M_1 M_2 \dots M_m (G^{**}). \quad (6-61)$$

于是,由上式可知,若给出机械手各轴的位移,就能求出夹持点的位置姿态,称此为机械手位置姿态的分析解。

四、位置姿态分析计算举例

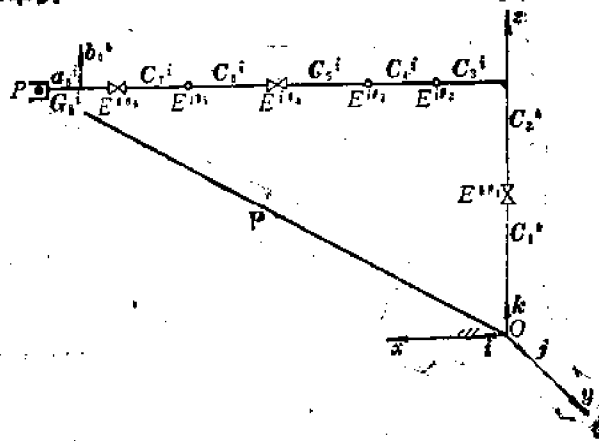


图 6-11 具有六个转动关节的机械手

现以图 6-11 所示的具有六个转动关节的机械手为例进行位置姿态分析计算。

该图示机械手的位置矢量方程式为

$$P = C_1^k + E^{k\theta_1}(C_2^k + C_3^k + E^{j\theta_2}(C_4^k + E^{i\theta_3}(C_5^k + E^{i\theta_4}(C_6^k + E^{i\theta_5}(G_6^k)))))). \quad (6-62)$$

将上式整理后可写成

$$P = (C_1^k + C_2^k) + E^{k\theta_1}(C_3^k) + E^{k\theta_1}E^{j\theta_2}(C_4^k) + E^{k\theta_1}E^{j\theta_2}E^{i\theta_3}(C_5^k + C_6^k) + E^{k\theta_1}E^{j\theta_2}E^{i\theta_3}E^{i\theta_4}E^{i\theta_5}(C_6^k + G_6^k). \quad (6-63)$$

令

$$T_{1-2} = C_1^k + C_2^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = E^{k\theta_1}(C_3^k) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \cos \theta_1 \\ c_3 \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$R_4 = E^{k\theta_1}E^{j\theta_2}(C_4^k) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ c_4 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ -c_4 \sin \theta_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 R_{5-6} &= E^{k\theta_1} E^{j\theta_2} E^{i\theta_3} (C_5^i + C_6^i) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_5 + c_6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (c_5 + c_6) \cos \theta_1 (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) \\ (c_5 + c_6) \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) \\ -(c_5 + c_6) (\sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{7-8} &= E^{k\theta_4} E^{j\theta_5} E^{i\theta_6} E^{i\theta_7} E^{j\theta_8} (C_7^i + G_8^i) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{pmatrix} \\
 &\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 \\ 0 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_7 + G_8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (c_7 + G_8) [\cos \theta_1 \cos \theta_3 (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) - \sin \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 (\cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 \cos \theta_3)] \\ (c_7 + G_8) [\sin \theta_1 \cos \theta_3 (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) + \cos \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ -\sin \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 (\cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 \cos \theta_3)] \\ (c_7 + G_8) [-\cos \theta_5 (\sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3) - \cos \theta_4 \sin \theta_5 (-\sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3)] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

于是

$$P = R_{1-2} + R_3 + R_4 + R_{5-6} + R_{7-8} \quad (6-64)$$

而工件的姿态矢量分别为

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{a} &= E^{k\theta_1} E^{j\theta_2} E^{i\theta_3} E^{i\theta_4} E^{j\theta_5} (\mathbf{a}_0^i), \\
 \mathbf{b} &= E^{k\theta_1} E^{j\theta_2} E^{i\theta_3} E^{i\theta_4} E^{j\theta_5} E^{k\theta_6} (\mathbf{b}_0^k). \end{aligned} \right\} \quad (6-65)$$

§ 6-5 拟人手指机构的运动分析

手指机构的运动分析,是指主动杆(驱动关节)作等速运动时,机构的位移、速度和加速度的情况。

从位移分析中,可以检验优化后的手指机构是否在规定的范围内运动,并达到预期的效果。而速度和加速度分析,可以为进一步研究手指机构的动力学提供有用的数据。

拟人手指机构的模型如图 2-8 及图 2-9 所示。下面采用矩阵法来计算当主动杆(驱动关节)作等速运动时,手指各关节的相对转角、角速度和角加速度,以及各关节点及指端的位移、速度和加速度。

一、食指机构的运动分析

食指机构(图 2-8)是一个平面六杆机构,它可以看作由两种基本单元机构——刚体机构与二连杆机构组成。若把这两种基本单元机构的运动分析编成子程序,并借助于电子计算机

反覆调用运算,那么食指机构的运动分析,就可以比较容易地得到解决。

1. 刚体机构子程序

该子程序的功能为已知刚体的几何参数与运动参数,求刚体上任一点的位置、速度和加速度。

如图 6-12 所示,已知杆件 R, S 长度,点 P_1 坐标,速度 \dot{P}_1 , 加速度 \ddot{P}_1 , 夹角 ϕ , 主动杆转角 θ 、转速 $\dot{\theta}$ 、加速度 $\ddot{\theta}$ 。求点 P_2, P_3 的坐标,速度 \dot{P}_3 及加速度 \ddot{P}_3 。

由图可知

$$P_2 = (P_{2x}, P_{2y}) = (P_{1x} + R \cos \theta, P_{1y} + R \sin \theta), \quad (6-66)$$

$$P_3 = (P_{3x}, P_{3y}) = (P_{1x} + S \cos(\theta + \phi), P_{1y} + S \sin(\theta + \phi)). \quad (6-67)$$

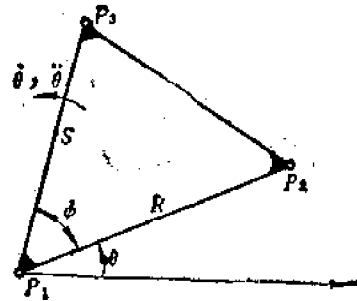


图 6-12 刚体机构

利用式(5-58)及(5-59), 可得

$$\dot{P}_3 = \dot{P}_1 + \dot{\theta} \times (P_3 - P_1), \quad (6-68)$$

$$\ddot{P}_3 = \ddot{P}_1 + \ddot{\theta} \times (P_3 - P_1) + \dot{\theta} \times [\dot{\theta} \times (P_3 - P_1)]. \quad (6-69)$$

2. 二连杆机构子程序

该子程序的功能为解决二连杆的位置、速度和加速度的问题。

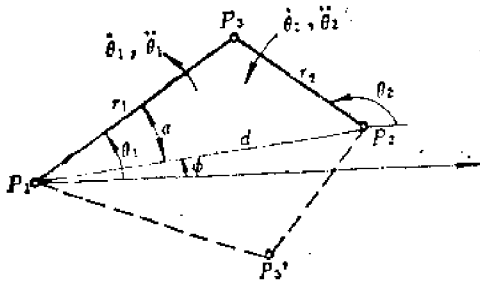


图 6-13 二连杆机构

如图 6-13 所示,已知点 P_1 坐标, 速度 \dot{P}_1 , 加速度 \ddot{P}_1 , 点 P_2 坐标, 速度 \dot{P}_2 , 加速度 \ddot{P}_2 及长度 r_1, r_2 。求点 P_3 坐标, 速度 \dot{P}_3 , 加速度 \ddot{P}_3 , 转角 θ_1 , 角速度 $\dot{\theta}_1$, 角加速度 $\ddot{\theta}_1$, 转角 θ_2 , 角速度 $\dot{\theta}_2$, 角加速度 $\ddot{\theta}_2$ 。

求位置问题可调用下列子程序:

$$(1) \quad d^2 = (P_{2x} - P_{1x})^2 + (P_{2y} - P_{1y})^2. \quad (6-70)$$

(2) 检查二连杆的存在性。当

$$d > r_1 + r_2 \quad (6-71)$$

或

$$d < |r_1 - r_2| \quad (6-72)$$

时,二连杆机构就不存在。

$$(3) \quad \phi = \arctg\left(\frac{P_{2y} - P_{1y}}{P_{2x} - P_{1x}}\right). \quad (6-73)$$

$$(4) \quad \alpha = \arccos\left(\frac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2r_1 d}\right). \quad (6-74)$$

$$(5) \quad \theta_1 = \phi \pm \alpha. \quad (6-25)$$

式中,正负号根据初始位置确定。

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} P_{3x} &= P_{1x} + r_1 \cos \theta_1, \\ P_{3y} &= P_{1y} + r_1 \sin \theta_1. \end{aligned} \right\} \quad (6-76)$$

$$(7) \quad \theta_2 = \arctg \left(\frac{P_{3y} - P_{2y}}{P_{3x} - P_{2x}} \right). \quad (6-77)$$

求速度问题可调用下列子程序:

因为

$$\dot{P}_3 = \dot{P}_1 + \dot{\theta}_1 \times (P_3 - P_1) = \dot{P}_2 + \dot{\theta}_2 \times (P_3 - P_2), \quad (6-78)$$

利用式(5-45)可写出其 i 和 j 两部恒等式如下

$$\dot{P}_{1x} - (P_{3y} - P_{1y})\dot{\theta}_1 = \dot{P}_{2x} - (P_{3y} - P_{2y})\dot{\theta}_2, \quad (6-79)$$

$$\dot{P}_{1y} + (P_{3x} - P_{1x})\dot{\theta}_1 = \dot{P}_{2y} + (P_{3x} - P_{2x})\dot{\theta}_2. \quad (6-80)$$

将式(6-79)移项得

$$\dot{\theta}_2 = \frac{(\dot{P}_{2x} - \dot{P}_{1x}) + \dot{\theta}_1(P_{3y} - P_{1y})}{(P_{3y} - P_{2y})}. \quad (6-81)$$

而将式(6-80)移项得

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-(\dot{P}_{2y} - \dot{P}_{1y}) + \dot{\theta}_1(P_{3x} - P_{1x})}{(P_{3x} - P_{2x})}. \quad (6-82)$$

那么,将式(6-82)代入式(6-81),并整理后可得

$$\dot{\theta}_1 = - \left[\frac{(\dot{P}_{2x} - \dot{P}_{1x})(P_{3x} - P_{2x}) + (\dot{P}_{2y} - \dot{P}_{1y})(P_{3y} - P_{2y})}{(P_{3y} - P_{1y})(P_{3x} - P_{2x}) - (P_{3x} - P_{1x})(P_{3y} - P_{2y})} \right]. \quad (6-83)$$

同理可导出下列关系式

$$\dot{\theta}_2 = - \left[\frac{(\dot{P}_{2x} - \dot{P}_{1x})(P_{3x} - P_{1x}) + (\dot{P}_{2y} - \dot{P}_{1y})(P_{3y} - P_{1y})}{(P_{3y} - P_{1y})(P_{3x} - P_{2x}) - (P_{3x} - P_{1x})(P_{3y} - P_{2y})} \right]. \quad (6-84)$$

于是,便可利用式(6-78)求出 P_3 点的速度 \dot{P}_3 。

加速度分析可调用下列子程序:

因为

$$\begin{aligned} \ddot{P}_3 &= \ddot{P}_1 + \ddot{\theta}_1 \times (P_3 - P_1) + \dot{\theta}_1 \times [\dot{\theta}_1 \times (P_3 - P_1)] \\ &= \ddot{P}_2 + \ddot{\theta}_2 \times (P_3 - P_2) + \dot{\theta}_2 \times [\dot{\theta}_2 \times (P_3 - P_2)]. \end{aligned} \quad (6-85)$$

如同求解角速度关系式一样,可导出下列关系式

$$\dot{\theta}_1 = - \left[\frac{E(P_{3x} - P_{2x}) + F(P_{3y} - P_{2y})}{(P_{3y} - P_{1y})(P_{3x} - P_{2x}) - (P_{3y} - P_{2y})(P_{3x} - P_{1x})} \right], \quad (6-86)$$

及

$$\dot{\theta}_2 = - \left[\frac{F(P_{3y} - P_{1y}) + E(P_{3x} - P_{1x})}{(P_{3y} - P_{1y})(P_{3x} - P_{2x}) - (P_{3y} - P_{2y})(P_{3x} - P_{1x})} \right] \quad (6-87)$$

式中,

$$E = (\ddot{P}_{2x} - \ddot{P}_{1x}) + \dot{\theta}_1^2 (P_{3x} - P_{1x}) - \dot{\theta}_2^2 (P_{3x} - P_{2x}),$$

$$F = (\ddot{P}_{2y} - \ddot{P}_{1y}) + \dot{\theta}_1^2 (P_{3y} - P_{1y}) - \dot{\theta}_2^2 (P_{3y} - P_{2y}).$$

于是,便可利用式(6-85)求出 P_3 点的加速度 \ddot{P}_3 。

食指机构运动分析简图和计算框图如图 6-14 所示。

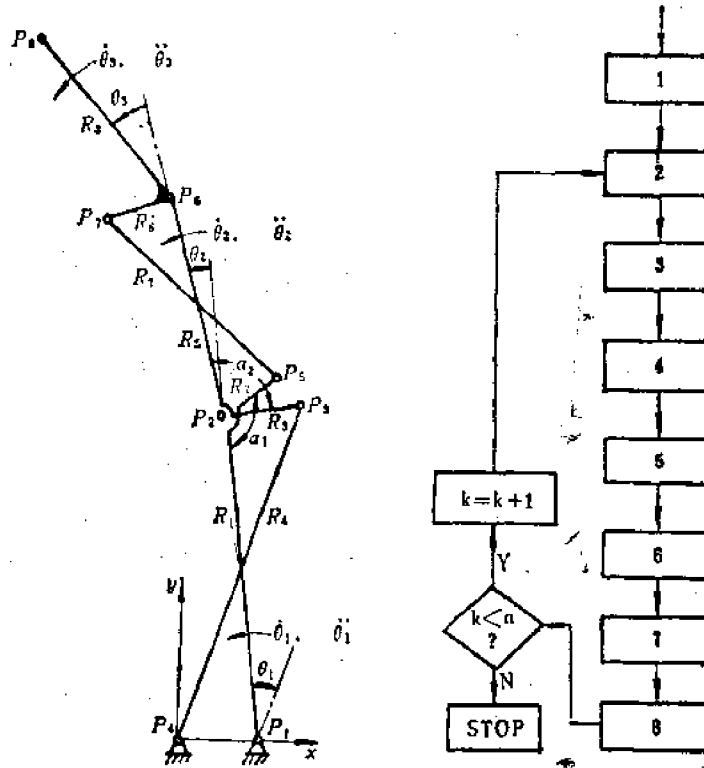


图 6-14 手指机构运动分析简图和计算框图

1—输入数据 $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8$ 等长度, P_1, P_4 点坐标, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 固定角, $\dot{P}_1 = \dot{P}_4 = 0, \ddot{P}_1 = \ddot{P}_4 = \ddot{\theta}_1 = 0, \phi_{10}, \Delta\theta_1, n, \theta_1$; 2— $\phi_1 = \phi_{10} + k\Delta\theta, k=1, 2, \dots, n$; 3—调用刚体机构子程序, 以 R_1, R_2 为刚体, 求 $P_2, \dot{P}_2, \ddot{P}_2, P_5, \dot{P}_5, \ddot{P}_5$; 4—调用二连杆机构子程序, 以 R_3, R_4 为二连杆, 求 $P_3, \dot{P}_3, \ddot{P}_3, \theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2$; 5—调用刚体机构子程序, 以 R_5, R_6 为刚体, 求 $P_6, \dot{P}_6, \ddot{P}_6$; 6—调用二连杆机构子程序, 以 R_6, R_7 为二连杆, 求 $P_7, \dot{P}_7, \ddot{P}_7, \theta_3, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3$; 7—调用刚体机构子程序, 以 R_8, R_9 为刚体, 求 $P_8, \dot{P}_8, \ddot{P}_8$; 8—打印输出 $\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2, \theta_3, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3, P_2, \dot{P}_2, \ddot{P}_2, P_6, \dot{P}_6, \ddot{P}_6, P_8, \dot{P}_8, \ddot{P}_8$ 。

二、拇指机构的运动分析

如图 2-9 所示, 拇指机构是一个复合的空间机构, 它的运动分析可分解为下半部分的 RRSS 空间机构和上半部分的平面四杆机构来进行。

1. 旋转矩阵及其微分

为了对 RRSS 空间机构进行运动分析, 要采用旋转矩阵及其微分的概念。

空间矢量绕任意轴 u 旋转 θ 角度的旋转矩阵的一般表达式如式 (5-84) 或式 (5-104) 所

示,即可写成

$$R_{\theta,u} = \begin{pmatrix} u_x^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & u_x u_y(1-\cos\theta) - u_z \sin\theta & u_x u_z(1-\cos\theta) + u_y \sin\theta \\ u_x u_y(1-\cos\theta) + u_z \sin\theta & u_y^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & u_y u_z(1-\cos\theta) - u_x \sin\theta \\ u_x u_z(1-\cos\theta) - u_y \sin\theta & u_y u_z(1-\cos\theta) + u_x \sin\theta & u_z^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (6-88)$$

或可改写为

$$R_{\theta,u} = -P_u P_u \cos\theta + P_u \sin\theta + Q_u, \quad (6-89)$$

式中:

$$P_u = \begin{pmatrix} 0 & -u_x & u_y \\ u_x & 0 & -u_z \\ -u_y & u_z & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_u = \begin{pmatrix} u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_x u_y & u_y^2 & u_y u_z \\ u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 \end{pmatrix},$$

$$-P_u P_u = (I - Q_u), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

空间角速度矩阵如式(5-85)中所示,也可通过下列关系式导出。

因为

$$\dot{R} = \dot{\theta} \times R,$$

则由式(5-44)可写出

$$\dot{\theta} \times R = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{\theta}_x & \dot{\theta}_y & \dot{\theta}_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_x & \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_x & 0 & -\dot{\theta}_z \\ -\dot{\theta}_y & \dot{\theta}_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = W_{\dot{\theta},u} R,$$

即得出

$$R = W_{\dot{\theta},u} R. \quad (6-90)$$

式中, $W_{\dot{\theta},u}$ 称为空间角速度矩阵,即

$$W_{\dot{\theta},u} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_x & \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_x & 0 & -\dot{\theta}_z \\ -\dot{\theta}_y & \dot{\theta}_z & 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -u_x & u_y \\ u_x & 0 & -u_z \\ -u_y & u_z & 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} P_u. \quad (6-91)$$

空间角加速度矩阵可通过下列关系式导出。

由于

$$\dot{R} = \dot{\theta} \times R,$$

那么

$$\ddot{R} = \ddot{\theta} \times R + \dot{\theta} \times \dot{R} = \ddot{\theta} \times R + \dot{\theta} \times (\dot{\theta} \times R),$$

又

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} u, \quad \text{及} \quad \ddot{\theta} = \ddot{\theta} u + \dot{\theta} \dot{u},$$

代入上式得

$$\dot{\bar{R}} = (\dot{\theta}\mathbf{u} + \dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}) \times \mathbf{R} + \theta^2(\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{R})) = \dot{\theta}(\mathbf{u} \times \mathbf{R}) + \dot{\theta}(\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{R}) + \theta^2(\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{R})).$$

因为

$$\mathbf{u} \times \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -u_x & u_y \\ u_x & 0 & -u_z \\ -u_y & u_z & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R} = P_u \mathbf{R},$$

$$\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{u}_x & \dot{u}_y \\ \dot{u}_x & 0 & -\dot{u}_z \\ -\dot{u}_y & \dot{u}_z & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R} = \dot{P}_u \mathbf{R},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{R}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ \begin{vmatrix} u_y & u_x \\ R_y & R_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ R_x & R_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ R_x & R_y \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -u_x & u_y \\ u_x & 0 & -u_z \\ -u_y & u_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_y R_z - u_x R_y \\ u_x R_z - u_z R_x \\ u_x R_y - u_y R_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -u_x & u_y \\ u_x & 0 & -u_z \\ -u_y & u_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -u_x & u_y \\ u_x & 0 & -u_z \\ -u_y & u_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = P_u P_u \mathbf{R}. \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{R}} &= \dot{\theta} P_u \mathbf{R} + \dot{\theta} \dot{P}_u \mathbf{R} + \theta^2 P_u P_u \mathbf{R} \\ &= (\dot{\theta} P_u + \dot{\theta} \dot{P}_u + \theta^2 P_u P_u) \mathbf{R} = \dot{W}_{\theta, \dot{\theta}, \theta^2} \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (6-92)$$

式中, $\dot{W}_{\theta, \dot{\theta}, \theta^2}$ 称为空间角加速度矩阵。

2. RRSS 空间机构部分的运动分析

如图 6-15 所示, 已知转轴矢量 \mathbf{u}_0 、 \mathbf{u}_{01} 的方向, 点 a_0 、 b_0 、 a_1 、 b_1 及 P_1 坐标, 刚体 $\overline{a_0 a_1 c}$ 绕 \mathbf{u}_0 轴的转角 θ_1 , 角速度 $\dot{\theta}_1$, 而角加速度 $\ddot{\theta}_1 = 0$ 。求 a_1 、 P_1 点运动时, 各点的位置、速度和加速度 \mathbf{a} 、 $\dot{\mathbf{a}}$ 、 $\ddot{\mathbf{a}}$ 、 \mathbf{P} 、 $\dot{\mathbf{P}}$ 、 $\ddot{\mathbf{P}}$, 以及 R_2 杆绕 \mathbf{u}_0 轴相对转角 θ_2 , 角速度 $\dot{\theta}_2$, 和角加速度 $\ddot{\theta}_2$ 。

(1) 位移分析

由旋转矩阵概念可以写出

$$\mathbf{a} = R_{\theta_1, \mathbf{u}_0}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + \mathbf{a}_0, \quad (6-93)$$

$$\mathbf{b}' = R_{\theta_2, \mathbf{u}_0}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_0) + \mathbf{a}_0, \quad (6-94)$$

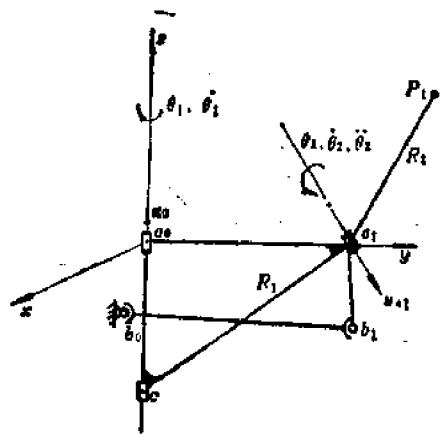


图 6-15 RRSS 空间机构

$$u_a = R_{\theta_1, u_1} u_{a_1}, \quad (6-95)$$

$$b = R_{\theta_1, u_1} (b' - a) + a, \quad (6-96)$$

上列各式中 R_{θ_1, u_1} 均为空间旋转矩阵, 如式 (6-88) 或式 (6-89) 所示。

根据杆件长度保持不变的约束条件, 有

$$(b - b_0)^T (b - b_0) = (b_1 - b_0)^T (b_1 - b_0), \quad (6-97)$$

将式 (6-93)~(6-96) 代入上式, 经整理后可得

$$E \cos \theta_2 + F \sin \theta_2 + G = 0, \quad (6-98)$$

式中

$$E = (a - b_0)^T [(I - Q_{u_1})(b' - a)],$$

$$F = (a - b_0)^T [P_{u_1}(b' - a)],$$

$$G = (a - b_0)^T [Q_{u_1}(b' - a)] + 1/2[(b' - a)^T (b' - a) + (a - b_0)^T (a - b_0) - (b_1 - b_0)^T (b_1 - b_0)].$$

利用半角定理, 可由式 (6-98) 解得

$$\theta_2 = 2 \arctg \frac{-F \pm \sqrt{E^2 + F^2 - G^2}}{G - E} \quad (6-99)$$

式中正负号由初始状态确定。

于是, 连杆 R_1 上任意点 P 的位移可由下式计算

$$P = R_{\theta_1, u_1} (P' - a) + a, \quad (6-100)$$

式中,

$$P' = R_{\theta_1, u_1} (P_1 - a_0) + a_0, \quad (6-101)$$

(2) 速度分析

对式 (6-97) 求导一次, 可得速度约束条件

$$(\dot{b})^T (b - b_0) = 0, \quad (6-102)$$

又因为

$$\dot{b}' = W_{u_1} (b - a), \quad (6-103)$$

$$\dot{b} = W_{\dot{\theta}_1, u_1} (b - a) + \dot{b}', \quad (6-104)$$

上列式中, $W_{\dot{\theta}_1, u_1}$ 均为空间角速度矩阵, 如式 (6-91) 所示。

于是可得

$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1 \frac{(b - b_0)^T [P_{u_1}(b - a)]}{(b - b_0)^T [P_{u_1}(b - a)]}. \quad (6-105)$$

那么, a 点速度为

$$\dot{a} = W_{\dot{\theta}_1, u_1} (a_1 - a_0), \quad (6-106)$$

P 点速度为

$$\dot{P} = \dot{\theta}_2 P_{u_1} (P - a) + \dot{P}', \quad (6-107)$$

式中,

$$\dot{P}' = \dot{\theta}_1 P_{u_1} (P - a_0). \quad (6-108)$$

(3) 加速度分析

对式(6-102)再求导一次,便得到加速度约束条件

$$(\ddot{\mathbf{b}})^T(\mathbf{b}-\mathbf{b}_0) + (\dot{\mathbf{b}})^T(\dot{\mathbf{b}}) = 0, \quad (6-109)$$

$$\ddot{\mathbf{b}} = \ddot{\mathbf{b}}' + \ddot{\mathbf{b}}_r + \ddot{\mathbf{b}}_{o_0} \quad (6-110)$$

上式中

$$\ddot{\mathbf{b}}' = \dot{W}_{\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, u_0}(\mathbf{b}-\mathbf{a}_0),$$

$$\ddot{\mathbf{b}}_r = \dot{W}_{\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, u_0}(\mathbf{b}-\mathbf{a}),$$

$$\ddot{\mathbf{b}}_{o_0} = 2W_{\dot{\theta}_1, u_0}[W_{\theta_1, u_0}(\mathbf{b}-\mathbf{a})].$$

将式(6-110)代入式(6-109),整理后可得

$$\ddot{\theta}_2 = - \left(\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{b}_0)^T[\ddot{\mathbf{b}}' + (\dot{\theta}_2^2 P_{u_0} P_{u_0}) (\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \ddot{\mathbf{b}}_r]}{(\mathbf{b}-\mathbf{b}_0)^T[P_{u_0}(\mathbf{b}-\mathbf{a})]} + (\dot{\mathbf{b}})^T\dot{\mathbf{b}} \right), \quad (6-111)$$

那么, a 点加速度为

$$\ddot{\mathbf{a}} = \dot{W}_{\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, u_0}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0), \quad (6-112)$$

P 点加速度为

$$\ddot{\mathbf{P}} = \ddot{\mathbf{P}}' + \ddot{\mathbf{P}}_r + \ddot{\mathbf{P}}_{o_0}, \quad (6-113)$$

式中,

$$\ddot{\mathbf{P}}' = \dot{W}_{\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, u_0}(\mathbf{P}-\mathbf{a}_0)$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_r = \dot{W}_{\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, u_0}(\mathbf{P}-\mathbf{a}),$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_{o_0} = 2W_{\dot{\theta}_1, u_0}[W_{\theta_1, u_0}(\mathbf{P}-\mathbf{a})].$$

上列各式中 $\dot{W}_{\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, u_0}$ 均为空间角加速度矩阵,如式(6-92)中所示。

3. 平面四杆机构部分的运动分析

如图 6-16 所示,该四杆机构相对于 ac 杆(即第一指节 R_1)的运动,乃是平面运动。于是,如同食指机构的运动分析,若已知 R_2, R_3, R_4, R_5 长度, β, α 固定角,及 R_2 相对 u_a 关节轴的 $\theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2, a, c$ 两点的相对坐标,那么可利用单元机构的运动分析,来求解指端 S 点的相对位置 S , 相对速度 \dot{S} , 相对加速度 \ddot{S} , 以及 R_3 相对转角的 $\theta_3, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3$ 。

若令 $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{c}} = 0$ 及 $\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{c}} = 0$, 则调用刚体机构子程序,以 R_2 为定轴转动,可求出 P 点的相对位置 \mathbf{P}_r , 相对速度 $\dot{\mathbf{P}}_r$, 相对加速度 $\ddot{\mathbf{P}}_r$; 接着调用二连杆机构子程序,以 R_4 、

R_5 为二连杆,可求出 R_3 的相对转角 $\theta_3, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3$; 然后再调用刚体机构子程序,以 R_3, R_4 为刚

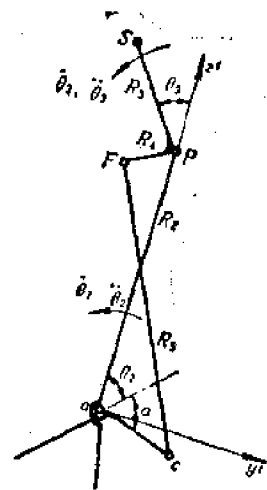


图 6-16 平面四杆机构

体作运动分析,便可求出 S 点的相对位置 S_r 、相对速度 \dot{S}_r 、相对加速度 \ddot{S}_r 。

4. 总体运动分析

为了求 S 点在总体空间坐标系中的相对位置 S'_r 、相对速度 \dot{S}'_r 及相对加速度 \ddot{S}'_r , 可调用下列坐标变换子程序, 即

$$\left. \begin{aligned} S &= S'_r = TS_r + a, \\ \dot{S}'_r &= T\dot{S}_r, \\ \ddot{S}'_r &= T\ddot{S}_r. \end{aligned} \right\} \quad (6-114)$$

式中, 旋转坐标变换矩阵 T 为

$$T = R_{a_1, u_1} \begin{pmatrix} \cos(x, x') & \cos(x, y') & \cos(x, z') \\ \cos(y, x') & \cos(y, y') & \cos(y, z') \\ \cos(z, x') & \cos(z, y') & \cos(z, z') \end{pmatrix}. \quad (6-115)$$

相对坐标系 $(x'y'z')$ 在初始位置时, 取 a_1 点为坐标原点, u_1 轴为 x' 轴, $\overline{a_1 P_1}$ 轴为 z' 轴, 而 y' 轴的方向则由 x', z' 轴按右手法则确定。

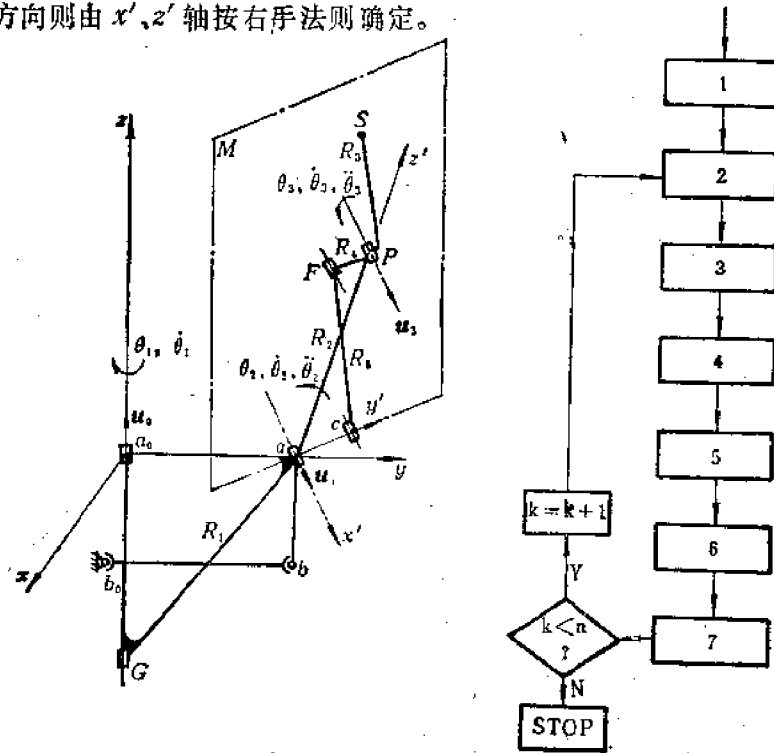


图 6-17 拇指机构运动分析简图及计算框图

- 1—输入数据 u_0, u_1 矢量, $a_0, a_1, b_0, b_1, P_1, S_1$ 坐标, R_2, R_3, R_4, R_5 长度, β, α 固定角, $\dot{\theta}_1, \Delta\theta, n$; 2— $\theta_1 = k\Delta\theta, k=0.1, 2, \dots, n$; 3—调用 RRSS 子程序, 求出 $a, \dot{a}, \ddot{a}, P, \dot{P}, \ddot{P}$, 相对转角 $\theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2$; 4—调用四杆机构子程序求出指端 S 在相对坐标的运动 $S_r, \dot{S}_r, \ddot{S}_r$, 相对转角 $\theta_3, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3$; 5—调用坐标变换子程序, 求出在总体坐标中指端的 $S'_r, \dot{S}'_r, \ddot{S}'_r$; 6—求指端 S 点的运动 S, \dot{S}, \ddot{S} ; 7—打印输出 $\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2, \theta_3, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3, a, \dot{a}, \ddot{a}, P, \dot{P}, \ddot{P}, S, \dot{S}, \ddot{S}$ 。

于是, S 点的绝对速度 \dot{S} , 绝对加速度 \ddot{S} , 可由下列关系式确定

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \dot{S}'_r + W_{\dot{q}_i, \dot{q}_j, u_0}(S - a_0), \\ \ddot{S} &= \ddot{S}'_r + \ddot{S}_c + \ddot{S}_{c_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6-116)$$

式中:

$$\begin{aligned} \ddot{S}_c &= \dot{W}_{\dot{q}_i, \dot{q}_j, u_0}(S - a_0), \\ \ddot{S}_{c_0} &= 2W_{\dot{q}_i, \dot{q}_j, u_0} \dot{S}'_r = 2W_{\dot{q}_i, \dot{q}_j, u_0} T \dot{S}'_r. \end{aligned}$$

拇指机构运动分析简图及计算框图如图 6-17 所示。

§ 6-6 运动位置误差计算概述

如将机械手看作为一个系统, 则组成该系统的各个环节由于制造工艺等因素, 不可避免地与实际设计有偏而产生误差。从误差理论与传递情况分析, 整个机械手系统的误差与各环节间的误差存在着函数关系, 因此研究机械手的运动位置误差, 也就可归结为其函数误差的研究。

如同 § 6-2 所述, 设机械手手部的各空间位置参数用 x_j 表示, 各运动副中的相对运动参数用 q_i 表示, 各构件的长度尺寸用 L_k 表示, 则机械手位置姿态矩阵方程式展开所得的非线性方程组, 可用一多元函数表示, 即

$$x_j = F_j(q_1, q_2, \dots, q_n, L_1, L_2, \dots, L_k). \quad (6-117)$$

那么, 机械手整个系统的误差 Δx_j , 可极近似地按下式求得, 即

$$\begin{aligned} \Delta x_j &= \frac{\partial F_j}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial F_j}{\partial q_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial q_n} \Delta q_n + \frac{\partial F_j}{\partial L_1} \Delta L_1 \\ &\quad + \frac{\partial F_j}{\partial L_2} \Delta L_2 + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial L_k} \Delta L_k, \end{aligned} \quad (6-118)$$

式中, $\frac{\partial F_j}{\partial q_i}$, $\frac{\partial F_j}{\partial L_k}$ 为各误差的传递系数, Δq_i , ΔL_k 为各环节的运动参数误差与构件长度尺寸制造工艺等误差。

今以图 6-5 所示的人臂形机械手为例, 若只考虑各构件长度尺寸制造工艺误差的影响, 则该机械手手部 H 点的空间位置坐标误差列阵可由式 (6-39) 求得为

$$\begin{pmatrix} \Delta x_H \\ \Delta y_H \\ \Delta z_H \end{pmatrix} = -\Delta l_1 \begin{pmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{pmatrix} - \Delta l_2 \begin{pmatrix} w_{13} \\ w_{23} \\ w_{33} \end{pmatrix} - \Delta l_3 \begin{pmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} \end{pmatrix}. \quad (6-119)$$

第七章 多关节机械手运动控制算法的研究

§ 7-1 概 述

仿生机械,特别是机器人、机械手及多功能假手等,是在相当多的部分上具有类似人的功能的一种自动机器。所以,要使它代替人去从事某种作业,运动机能是一个很重要的因素。

机械手的运动控制基本上可归纳为三种类别,即位置控制、速度控制和力控制,而位置控制是手臂运动控制的一种最基本的控制方式。位置控制是考虑如何使手爪从现时位置移动到目标位置,比较简单的是一种点位控制,进一步的是轨迹控制。一个好的轨迹控制应该同时包含位置与姿态的控制,而且所执行的实际轨迹也应该是连续而光滑的。

当机械手手爪按工作要求沿一定路线运动时,若给定手部对机架的一系列位置和姿态,则需要求出各运动副中运动参数的所有可能解,以便选择控制方案,从而使手部实现预定路线的运动。也就是说,这是指在机械手的操作控制中,要求解决如何使手部达到预定目标的问题。

§ 7-2 位置控制参数求解的一般方法

位置控制参数的求解,也称作为间接位置问题的求解。

一、位置控制参数求解的方法

从式(6-13)可知,空间坐标变换矩阵的连乘运算将得出一组多变量三角函数方程式。所以,位置控制参数的求解成为求解非线性方程组的数学问题。由于非线性方程组在消去变量的过程中,代数方程式的次数将升高,而出现多组解,使求解十分复杂和困难。

因此,为了使求解非线性方程组的过程中,避免产生过高地升高求解代数方程式的次数,应研究如何建立仅包含一个或不多于两个待求运动控制参数的关系式,即建立易于求解运动控制参数的关系式。

关于机械手位置控制参数的求解方法,大致有如下两种。

(1) 直接利用机构运动链中的已知点或已知向量,列出可单独或联立解不多于三个位置控制参数的关系式,从而分步解出待求的位置控制参数。

(2) 当给定手部相对于机架的位置和姿态,则在手爪和机架之间引进相应的假想运动副,把开式运动链机构转变成闭式运动链机构,从而引用有关空间连杆机构的位移分析公式来求解位置控制参数。

必须指出,在这两种方法中,都要应用机构运动的等同性条件来建立关系式。所谓机构运

动的相对等同性就是说,尽管机构各个构件运动各不相同,但总受到某些几何约束而具有运动的相对等同性。机构运动的相对等同性表现形式有常见的投影形式、向量形式和矩阵形式的封闭方程式,以及有关几何等同关系式等,具体运用见下列例解。

二、具有六个转动副的机械手位置控制参数的求解

同样以图 6-3 所示的具有六个转动副的机械手为例。

设已知在固定参考坐标系 $A(0) - x_0 y_0 z_0$ 中,手爪形心 P 点的坐标为 (x, y, z) 及两正交姿态向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的方向余弦为 (l, m, n) 和 (u, v, w) 。要求解出机械手六个转动副中的位置控制参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ 。

1. 求解转角 θ_1 值

由图 6-3 可知,向量 \overline{BD} 总是垂直于坐标轴 z_1 ,所以该两矢量的标量积等于零,即它们在坐标轴上同名投影的乘积的代数和为零。于是,可利用已知点 B 列出如下关系式

$$(x_D - x_B)\cos(x_0, z_1) + (y_D - y_B)\cos(y_0, z_1) + (z_D - z_B)\cos(z_0, z_1) = 0. \quad (7-1)$$

式中, D, B 两点在固定参考坐标系中的坐标为:

$$\begin{aligned} x_D &= x - lP, & y_D &= y - mP, & z_D &= z - nP, \\ x_B &= 0, & y_B &= 0, & z_B &= s_0. \end{aligned}$$

另外,利用手部的位置和姿态的矩阵方程式,可写出 z_1 轴在固定参考坐标系中的方向余弦为

$$\begin{pmatrix} \cos(x_0, z_1) \\ \cos(y_0, z_1) \\ \cos(z_0, z_1) \\ 0 \end{pmatrix} = A_{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是式(7-1)可改写为

$$(x - lP)\sin \theta_1 + (y - mP)(-\cos \theta_1) + (z - nP - s_0) \cdot 0 = 0$$

从而可得求解转角 θ_1 的公式,为

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{y - mP}{x - lP} \right). \quad (7-2)$$

这里 θ_1 可有两个解。

2. 求解转角 θ_2 值

为了建立只包含转角 θ_1 与 θ_2 位置控制参数的关系式,可采取 C, D 两点间距离等同关系所表示的运动等同性条件写出

$$(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2 = s_1^2. \quad (7-3)$$

式中, x_D, y_D, z_D 如上所述为已知,而 C 点在固定参考坐标系中的坐标可通过下列关系求出。

由图 6-3 可知,存在有向量封闭方程式

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

其坐标矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_0 \end{pmatrix} + C_{01} C_{12} \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha_{01} = 90^\circ$, 所以式中

$$C_{01} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{01} & -\sin \alpha_{01} \\ 0 & \sin \alpha_{01} & \cos \alpha_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

而

$$C_{12} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从而可得

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ h_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ h_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ h_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ s_0 + h_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}.$$

将 C, D 两点坐标代入式(7-3), 并经整理化简后得

$$\begin{aligned} & (z - nP - s_0) \sin \theta_2 + [(x - lP) \cos \theta_1 + (y - mP) \sin \theta_1] \cos \theta_2 \\ & = \frac{h_2}{2} + \frac{1}{2h_2} [(x - lP)^2 + (y - mP)^2 + (z - nP - s_0)^2 - s_3^2], \end{aligned}$$

或写成为如下求解 θ_2 的三角方程式

$$A \sin \theta_2 + B \cos \theta_2 = C,$$

式中, $A = z - nP - s_0$,

$$B = (x - lP) \cos \theta_1 + (y - mP) \sin \theta_1,$$

$$C = \frac{h_2}{2} + \frac{1}{2h_2} [(x - lP)^2 + (y - mP)^2 + (z - nP - s_0)^2 - s_3^2].$$

根据三角

$$\sin \theta_2 = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}, \quad \cos \theta_2 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}.$$

令 $X = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$, 则

$$\sin \theta_2 = \frac{2X}{1+X^2}, \quad \cos \theta_2 = \frac{1-X^2}{1+X^2}.$$

于是上述求解 θ_2 的三角方程式可化为下列二次代数方程式

$$(B+C)X^2 - 2AX - (B-C) = 0,$$

其根为

$$X = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B+C}.$$

最后可求得

$$\theta_2 = 2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B + C}, \quad (7-4)$$

这里, 对应于每个 θ_1 , 可有两个 θ_2 的解。

3. 求解转角 θ_3 值

为了求解转角 θ_3 , 还是利用已知 B 、 D 两点间距离等同关系所表示的运动等同性条件。

若把机械手看作为假想的封闭链, 并从 B 、 D 两点把机构拆开为两个开式分链, 即假想连架链 1-0-6, 和浮动链 2-3-4 两部分。那么, 按照已知两点距离等同的运动等同性条件, B 、 D 两点的距离, 无论从连架链, 或是从浮动链进行计算, 都应该等同一致。

对于连架链来说, B 、 D 两点在固定参考坐标系中的坐标关系为

$$(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2 = \overline{BD}^2。$$

式中,

$$\begin{aligned} x_D &= x - lP, & y_D &= y - mP, & z_D &= z - nP, \\ x_B &= 0, & y_B &= 0, & z_B &= s_0。 \end{aligned}$$

而对于浮动链来说, B 、 D 两点在以坐标系(2)为参考坐标系中的坐标关系为

$$(x_{D_1} - x_{B_1})^2 + (y_{D_1} - y_{B_1})^2 + (z_{D_1} - z_{B_1})^2 = \overline{BD}^2。$$

式中,

$$x_{B_1} = -h_2, \quad y_{B_1} = 0, \quad z_{B_1} = 0。$$

D 点在参考坐标系(2)中的坐标, 可通过研究坐标系(2)——(3)的变换关系写出

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{D_1} \\ y_{D_1} \\ z_{D_1} \end{pmatrix} &= C_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{23} & -\sin \alpha_{23} \\ 0 & \sin \alpha_{23} & \cos \alpha_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_3 \sin \theta_3 \\ -s_3 \cos \theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}。 \end{aligned}$$

于是可写出距离等同关系式为

$$\begin{aligned} (x_{D_1} - x_{B_1})^2 + (y_{D_1} - y_{B_1})^2 + (z_{D_1} - z_{B_1})^2 \\ = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2。 \end{aligned} \quad (7-5)$$

把各坐标代入上式成为

$$(s_3 \sin \theta_3 + h_2)^2 + (-s_3 \cos \theta_3)^2 = (x - lP)^2 + (y - mP)^2 + (z - nP - s_0)^2,$$

于是可求得

$$\theta_3 = \sin^{-1} \left[\frac{(x - lP)^2 + (y - mP)^2 + (z - nP - s_0)^2 - s_3^2 - h_2^2}{2 s_3 h_2} \right]。 \quad (7-6)$$

这里, 转角 θ_3 有两个可能解。

4. 求解转角 θ_4 值

对于所给定的机械手机构, 不论处于什么样的工作状态, 在 D 点的坐标轴 z_4 与 z_3 总是正交的, 即该两轴线夹角的方向余弦为

$$\cos(z_4, z_5) = 0。$$

由解析几何学知道, 上式可写成为

$$\cos(z_4, z_5) = \begin{pmatrix} \cos(x_0, z_4) \\ \cos(y_0, z_4) \\ \cos(z_0, z_4) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos(x_0, z_5) \\ \cos(y_0, z_5) \\ \cos(z_0, z_5) \end{pmatrix} = 0。 \quad (7-7)$$

根据给定已知

$$(\cos(x_0, z_5), \cos(y_0, z_5), \cos(z_0, z_5)) = (l, m, n),$$

而由坐标变换关系可写出

$$\begin{pmatrix} \cos(x_0, z_4) \\ \cos(y_0, z_4) \\ \cos(z_0, z_4) \end{pmatrix} = C_{01}C_{12}C_{23}C_{34} \begin{pmatrix} \cos(x_4, z_4) \\ \cos(y_4, z_4) \\ \cos(z_4, z_4) \end{pmatrix} = C_{01}C_{12}C_{23}C_{34} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

那么, 将上列关系式代入式(7-7), 可得

$$(0, 0, 1)C_{43}C_{32}C_{21}C_{10} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0。$$

把式(6-14)中有关方向余弦矩阵代入上式, 并经运算整理后可得

$$(\sin\theta_4, -\cos\theta_4, 0) \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = 0,$$

即

$$L \sin\theta_4 - M \cos\theta_4 = 0。$$

式中,

$$\begin{aligned} L &= \cos\theta_2(\cos\theta_2(l \cos\theta_1 + m \sin\theta_1) + n \sin\theta_2) \\ &\quad + \sin\theta_2(-\sin\theta_2(l \cos\theta_1 + m \sin\theta_1) + n \cos\theta_2), \\ M &= l \sin\theta_1 - m \cos\theta_1, \\ N &= \sin\theta_3(\cos\theta_2(l \cos\theta_1 + m \sin\theta_1) + n \sin\theta_2) \\ &\quad + \cos\theta_3(\sin\theta_2(l \cos\theta_1 + m \sin\theta_1) - n \cos\theta_2)。 \end{aligned}$$

于是, 可求得转角 θ_4 公式为

$$\theta_4 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{M}{L}\right)。 \quad (7-8)$$

这里, 对应于一组 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 值, θ_4 可有两个解。

5. 求解转角 θ_5 值

设将假想封闭链沿轴线 z_3 与 z_5 拆开为连架链和浮动链两部分。那么, 可据所拆开两轴线夹角的方向余弦 $\cos(z_3, z_5)$ 的等同性条件来建立求解转角 θ_5 值的方程式。

若从假想连架链 6-0-1-2-3 进行计算, 对于固定参考坐标系(0)来说有

$$\cos(z_3, z_5) = \begin{pmatrix} \cos(x_0, z_3) \\ \cos(y_0, z_3) \\ \cos(z_0, z_3) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos(x_0, z_5) \\ \cos(y_0, z_5) \\ \cos(z_0, z_5) \end{pmatrix}。$$

因为

$$\begin{pmatrix} \cos(x_0, z_3) \\ \cos(y_0, z_3) \\ \cos(z_0, z_3) \end{pmatrix} = C_{01} C_{12} C_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} \cos(x_0, z_5) \\ \cos(y_0, z_5) \\ \cos(z_0, z_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix},$$

所以上式成为

$$\cos(z_3, z_5) = (0, 0, 1) C_{32} C_{21} C_{10} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}. \quad (7-9)$$

另外,从浮动链 4-5 进行计算,对于参考坐标系(5)来说,又有

$$\cos(z_3, z_5) = \begin{pmatrix} \cos(x_5, z_3) \\ \cos(y_5, z_3) \\ \cos(z_5, z_3) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos(x_5, z_5) \\ \cos(y_5, z_5) \\ \cos(z_5, z_5) \end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{pmatrix} \cos(x_5, z_3) \\ \cos(y_5, z_3) \\ \cos(z_5, z_3) \end{pmatrix} = C_{54} C_{43} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\cos(z_3, z_5) = (0, 0, 1) C_{34} C_{45} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7-10)$$

于是,由式(7-9)和式(7-10)可写出下列有关两轴线夹角的方向余弦等同关系式为

$$(0, 0, 1) C_{32} C_{21} C_{10} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = (0, 0, 1) C_{34} C_{45} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7-11)$$

由上述求解转角 θ_4 值的讨论中知道

$$C_{32} C_{21} C_{10} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix},$$

而且,式(7-11)中

$$(0, 0, 1) C_{34} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} \cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & 0 & -\cos \theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0),$$

$$C_{45} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 \\ \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 可把式(7-11)改写成

$$(0, 0, 1) \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} \sin \theta_5 \\ -\cos \theta_5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

或

$$N = -\cos \theta_5,$$

即

$$\theta_5 = \cos^{-1}(N), \quad (7-12)$$

式中,

$$N = \sin \theta_3 (\cos \theta_2 (l \cos \theta_1 + m \sin \theta_1) + n \sin \theta_2) \\ + \cos \theta_3 (\sin \theta_2 (l \cos \theta_1 + m \sin \theta_1) - n \cos \theta_2).$$

这里, 对应于一组 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 值, θ_5 可有两个解。

6. 求解转角 θ_5 值

可根据已知向量等同条件列出求解位置控制参数方程式。由于转角 θ_5 与轴 x_5 的方位有关, 故考虑坐标轴 x_5 的方向余弦等同条件。

设以坐标系(5)为参考坐标系, 则用该参考坐标系表示的 x_5 轴线的方向余弦为

$$\begin{pmatrix} \cos(x_5, x_5) \\ \cos(y_5, x_5) \\ \cos(z_5, x_5) \end{pmatrix} = C_{55} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面, 若以坐标系(0)为参考坐标系, 并考虑到轴线 x_5 与矢量 b 方向一致, 则有

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = C_{01} C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} \begin{pmatrix} \cos(x_5, x_5) \\ \cos(y_5, x_5) \\ \cos(z_5, x_5) \end{pmatrix}.$$

于是, 可写出下列方向余弦等同关系式

$$C_{55} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_{54} C_{43} C_{32} C_{21} C_{10} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (7-13)$$

设

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = C_{32} C_{21} C_{10} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

那么, 式(7-13)成为

$$C_{55} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_{54} C_{43} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}.$$

式中, U, V, W 与 u, v, w 的关系和前面所推的 L, M, N 与 l, m, n 的关系完全相同。所以, 只要把上述 L, M, N 表达式中的 l, m, n 换以 u, v, w , 即得 U, V, W 表达式。

利用式(6-14)中的有关方向余弦矩阵, 将上式进一步展开, 可得

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_5 \\ \sin \theta_5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (U \cos \theta_4 + V \sin \theta_4) \cos \theta_5 + W \sin \theta_5 \\ U \sin \theta_4 - V \cos \theta_4 \\ (U \cos \theta_4 + V \sin \theta_4) \sin \theta_5 - W \cos \theta_5 \end{pmatrix},$$

于是求得

$$\theta_5 = \text{tg}^{-1} \frac{U \sin \theta_4 - V \cos \theta_4}{(U \cos \theta_4 + V \sin \theta_4) \cos \theta_5 + W \sin \theta_5}, \quad (7-14)$$

及

$$\theta_5 = \text{tg}^{-1} \frac{W}{U \cos \theta_4 + V \sin \theta_4}. \quad (7-15)$$

由式(7-14)可知,对应于一组 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 值,转角 θ_6 只有一个可能解。

通过对上述机械手位置控制参数的求解分析可以看出,当机械手手爪的位置和姿态给定时,各运动副中的位置控制参数将出现多组可能的求解答案。这种多解关系若用图线表示,形如树状,故俗称为树状解,如图7-1所示。图中记号 \odot 代表手爪的已知位置和姿态,由该点出发最后共叉出八个分支,即说明要使所述的手爪实现给定的位置和姿态,同一机械手可有八种控制方案的选择问题,这也就是要涉及到最优控制方案的研究。

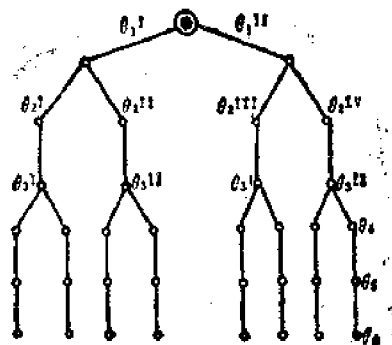


图 7-1 具有六个转动副机械手位置控制参数问题的树状解

三、拟人多关节假手位置控制参数的求解

设所研究的假手机构模型如图7-2所示。

图中, (x_0, y_0, z_0) 为固定参考坐标系, (x_e, y_e, z_e) 为手部形心 C 坐标系。 O, E, W, C 分别表示肩、肘、腕和手部位置。手部坐标系的 x_e, y_e, z_e 轴对固定参考坐标系的方向余弦分别为 $(l_1, l_2, l_3), (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3)$ 。手部形心 C 点对固定参考坐标系的坐标为 (x, y, z) 。相邻各坐标系间的参数列于表7.1。

表 7.1 相邻各坐标系间的参数

相邻坐标	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
θ	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
α	90°	90°	90°	-90°	90°	-90°
s	0	0	L_1	0	L_2	0
a	0	0	0	0	0	0

把表7.1的参数分别代入式(6-12),可得相应各坐标变换矩阵为

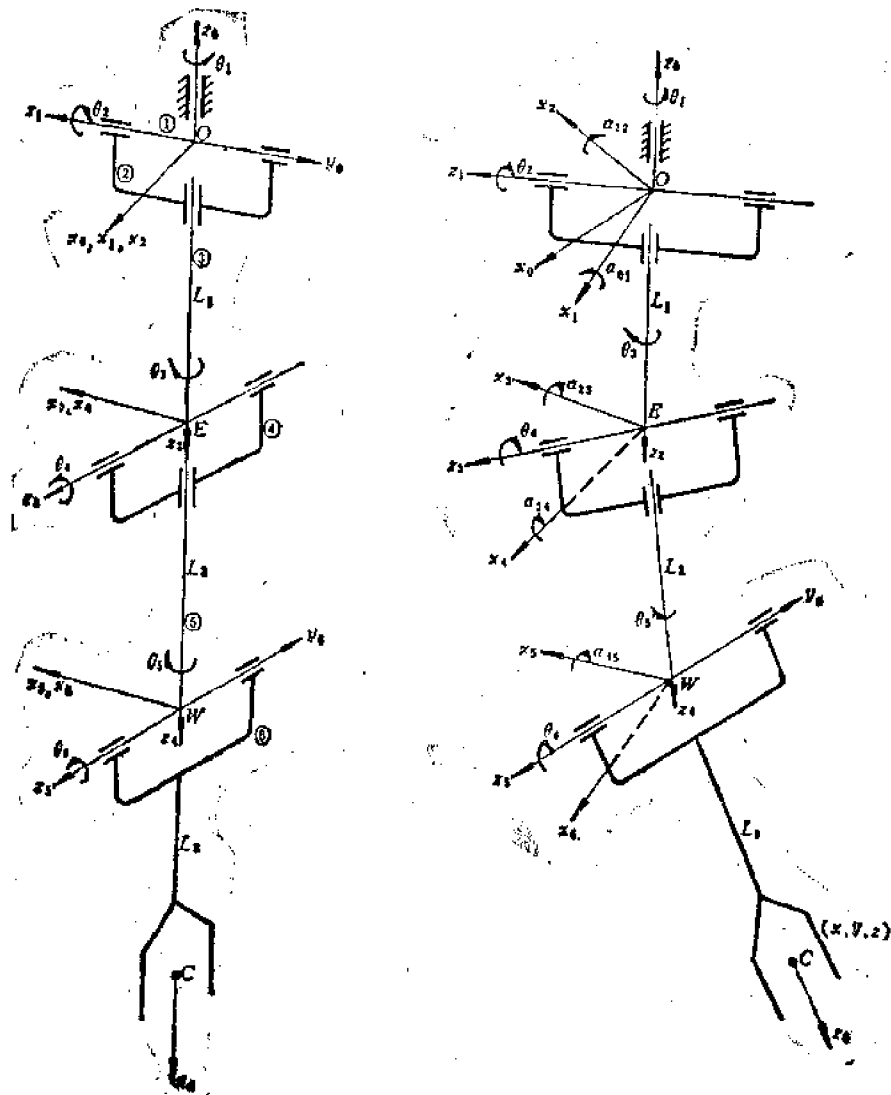


图 7-2 拟人多关节假手的关节构造及坐标系

L_1 —上臂长(340 mm); L_2 —前臂长(240 mm); L_3 —手掌长(手腕到掌心 130 mm)

各关节运动范围: $\theta_1 = 0^\circ \sim -180^\circ$; $\theta_2 = 0^\circ \sim 180^\circ$; $\theta_3 = \pm 90^\circ$; $\theta_4 = 0^\circ \sim 150^\circ$; $\theta_5 = \pm 90^\circ$; $\theta_6 = \pm 90^\circ$

$$A_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ C_{23} & 0 & & \\ & L_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & 0 \\ c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7-16)$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ C_{34} & 0 & & \\ & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{45} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ C_{45} & 0 & & \\ & L_2' & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{56} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ C_{56} & 0 & & \\ & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_6 & 0 & -s\theta_6 & 0 \\ s\theta_6 & 0 & c\theta_6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

式中, $c\theta$ 、 $s\theta$ 分别表示 $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ 。

如同上例,下面通过对机构运动的等同性条件的分析来建立易于求解运动参数的关系式,推导出一套作为该假手位置控制参数(各关节转角)的求解公式。

1. 求解转角 θ_1 、 θ_2

按假手肘部 E 点坐标等同性条件可写出

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \\ 1 \end{pmatrix} = A_{01}A_{12} \begin{pmatrix} x_{E_1} \\ y_{E_1} \\ z_{E_1} \\ 1 \end{pmatrix} = A_{01}A_{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7-17)$$

式中, x_E 为 E 点在 (x_2, y_2, z_2) 坐标系中的坐标,余类推。

将式(7-16)中的相应坐标变换矩阵代入上式,经演算后得

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 c\theta_1 s\theta_2 \\ L_1 s\theta_1 s\theta_2 \\ -L_1 c\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是求得

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y_E}{x_E}\right), \quad (7-18)$$

及

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{-z_E}{L_1}\right). \quad (7-19)$$

肘部 E 点的坐标值可通过下列关系导出。

当手部形心 C 点位置确定时, 有下列方程组

$$\begin{aligned}x_E^2 + y_E^2 + z_E^2 &= L_1^2, \\(x_E - x_W)^2 + (y_E - y_W)^2 + (z_E - z_W)^2 &= L_2^2, \\(x_E - x)m_1 + (y_E - y)m_2 + (z_E - z)m_3 &= 0.\end{aligned}$$

因为腕部 W 点的坐标可表示为

$$\begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - L_3 n_1 \\ y - L_3 n_2 \\ z - L_3 n_3 \end{pmatrix},$$

将其代入上述方程组得

$$\begin{aligned}x_E^2 + y_E^2 + z_E^2 &= L_1^2, \\(x_E - x + L_3 n_1)^2 + (y_E - y + L_3 n_2)^2 + (z_E - z + L_3 n_3)^2 &= L_2^2, \\(x_E - x)m_1 + (y_E - y)m_2 + (z_E - z)m_3 &= 0.\end{aligned}$$

令 $L_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$, 并代入上式得

$$\begin{aligned}(x - L_3 n_1)x_E + (y - L_3 n_2)y_E + (z - L_3 n_3)z_E \\= \frac{1}{2}(L_1^2 + L_3^2 + L_0^2 - L_2^2) - L_3(n_1 x + n_2 y + n_3 z),\end{aligned}$$

$$m_1 x_E + m_2 y_E + m_3 z_E = m_1 x + m_2 y + m_3 z,$$

或分别改写为

$$\begin{aligned}(x - L_3 n_1)x_E + (z - L_3 n_3)z_E &= \alpha, \\m_1 x_E + m_3 z_E &= \beta.\end{aligned}$$

式中,

$$\alpha = \frac{1}{2}(L_1^2 + L_3^2 + L_0^2 - L_2^2) - L_3(n_1 x + n_2 y + n_3 z) - (y - L_3 n_2)y_E,$$

$$\beta = m_1 x + m_2 y + m_3 z - m_2 y_E.$$

运用克莱姆法则解上列方程组, 设

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x - L_3 n_1 & z - L_3 n_3 \\ m_1 & m_3 \end{vmatrix} &= m_3 x - m_1 z + L_3(m_1 n_3 - m_3 n_1), \\ \Delta x_E &= \begin{vmatrix} \alpha & z - L_3 n_3 \\ \beta & m_3 \end{vmatrix} = m_3 \alpha - (z - L_3 n_3) \beta, \\ \Delta z_E &= \begin{vmatrix} x - L_3 n_1 & \alpha \\ m_1 & \beta \end{vmatrix} = \beta(x - L_3 n_1) - \alpha m_1,\end{aligned}$$

于是可得

$$x_E = \frac{\Delta x_E}{\Delta} = A + B y_E, \quad (7-20)$$

$$z_E = \frac{\Delta z_E}{\Delta} = C + D y_E. \quad (7-21)$$

式中,

$$A = \frac{\frac{m_2}{2}(L_1^2 + L_3^2 + L_0^2 - L_2^2) - L_3 m_3 (n_1 x + n_2 y + n_3 z) - (m_1 x + m_2 y + m_3 z)(z - L_3 n_3)}{m_3 x - m_1 z + L_3 (m_1 n_3 - m_3 n_1)},$$

$$B = \frac{m_2 z - m_3 y + L_3 (m_3 n_2 - m_2 n_3)}{m_3 x - m_1 z + L_3 (m_1 n_3 - m_3 n_1)},$$

$$C = \frac{(m_1 x + m_2 y + m_3 z)(x - L_3 n_1) + L_3 m_1 (n_1 x + n_2 y + n_3 z) - \frac{m_1}{2}(L_1^2 + L_3^2 + L_0^2 - L_2^2)}{m_3 x - m_1 z + L_3 (m_1 n_3 - m_3 n_1)},$$

$$D = \frac{m_1 y - m_2 x + L_3 (m_2 n_1 - m_1 n_2)}{m_3 x - m_1 z + L_3 (m_1 n_3 - m_3 n_1)}.$$

又因为

$$x_E^2 + y_E^2 + z_E^2 = L_1^2,$$

则可得

$$(A + B y_E)^2 + y_E^2 + (C + D y_E)^2 = L_1^2,$$

将上式展开整理并记为

$$E y_E^2 + F y_E + G = 0,$$

解得

$$y_E = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4EG}}{2E}. \quad (7-22)$$

式中,

$$E = B^2 + D^2 + 1,$$

$$F = 2(AB + CD),$$

$$G = A^2 + C^2 - L_1^2.$$

于是,肘部的三个坐标值(x_E, y_E, z_E)均可求出。

2. 求解转角 θ_4

由图 7-2 可以看出,对 $\triangle OEW$ 来说存在有

$$\overline{OW}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{EW}^2 - 2\overline{OE} \cdot \overline{EW} \cos \angle OEW,$$

即

$$x_W^2 + y_W^2 + z_W^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1 L_2 \cos \angle OEW.$$

因为

$$\angle OEW = \pi - \widehat{\angle(z_2, z_4)},$$

式中, $\widehat{\angle(z_2, z_4)}$ 表示 z_2 轴正向与 z_4 轴正向之间的夹角。

于是可写出

$$\cos \angle OEW = \cos[\pi - \widehat{\angle(z_2, z_4)}] = -\cos \widehat{\angle(z_2, z_4)}$$

$$x_W^2 + y_W^2 + z_W^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \widehat{\angle(z_2, z_4)}. \quad (7-23)$$

又对坐标系(x_2, y_2, z_2)来说,有

$$\begin{aligned}\cos \angle(z_2, z_4) &= (C_{23} \ C_{34} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, 1) C_{43} \ C_{32} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos \theta_4,\end{aligned}$$

代入式(7-23)后便可求得

$$\theta_4 = \cos^{-1} \left(\frac{x_W^2 + y_W^2 + z_W^2 - (L_1^2 + L_2^2)}{2 L_1 L_2} \right). \quad (7-24)$$

3. 求解转角 θ_3

按腕部 W 点坐标等同性条件可写出

$$\begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \\ 1 \end{pmatrix} = A_{01} A_{12} A_{23} A_{34} \begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7-25)$$

或改写为

$$A_{10} \begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \\ 1 \end{pmatrix} = A_{11} A_{23} A_{34} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7-26)$$

对上式进行矩阵演算后成为

$$\begin{pmatrix} x_W c \theta_1 + y_W s \theta_1 \\ z_W \\ x_W s \theta_1 - y_W c \theta_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 c \theta_2 s \theta_3 s \theta_4 + L_2 s \theta_2 c \theta_4 + L_1 s \theta_2 \\ L_2 s \theta_2 s \theta_3 s \theta_4 - L_2 c \theta_2 c \theta_4 - L_1 c \theta_2 \\ -L_2 c \theta_3 s \theta_4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是求得

$$\theta_3 = \sin^{-1} \left(\frac{z_W + L_2 c \theta_2 c \theta_4 + L_1 c \theta_2}{L_2 s \theta_2 s \theta_4} \right). \quad (7-27)$$

4. 求解转角 θ_5, θ_6

按 x_6 轴在总坐标系中方向余弦的等同性条件可写出

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = C_{01} C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} C_{56} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7-28)$$

移项得

$$C_{43} C_{32} C_{21} C_{10} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = C_{45} C_{56} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7-29)$$

通过矩阵运算, 上式成为

$$\begin{pmatrix} (l_1 c\theta_1 + l_2 s\theta_1)(s\theta_2 s\theta_4 - c\theta_2 s\theta_3 c\theta_4) - l_3(s\theta_2 s\theta_3 c\theta_4 + c\theta_2 s\theta_4) + c\theta_3 c\theta_4(l_1 s\theta_1 - l_2 c\theta_1) \\ -c\theta_2 c\theta_3(l_1 c\theta_1 + l_2 s\theta_1) - l_3 s\theta_2 c\theta_3 - s\theta_3(l_1 s\theta_1 - l_2 c\theta_1) \\ (l_1 c\theta_1 + l_2 s\theta_1)(c\theta_2 s\theta_3 s\theta_4 + s\theta_2 c\theta_4) + l_3(s\theta_2 s\theta_3 s\theta_4 - c\theta_2 c\theta_4) - c\theta_3 s\theta_4(l_1 s\theta_1 - l_2 c\theta_1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c\theta_5 c\theta_6 \\ s\theta_5 c\theta_6 \\ s\theta_6 \end{pmatrix}$$

于是由上式两边第三行相等求得

$$\theta_6 = \sin^{-1}[(l_1 c\theta_1 + l_2 s\theta_1)(c\theta_2 s\theta_3 s\theta_4 + s\theta_2 c\theta_4) + l_3(s\theta_2 s\theta_3 s\theta_4 - c\theta_2 c\theta_4) - c\theta_3 s\theta_4(l_1 s\theta_1 - l_2 c\theta_1)] \quad (7-30)$$

及由上式两边第一、二行相等求得

$$\theta_5 = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{-l\theta_2 c\theta_3(l_1 c\theta_1 + l_2 s\theta_1) - l_3 s\theta_2 c\theta_3 - s\theta_3(l_1 s\theta_1 - l_2 c\theta_1)}{(l_1 c\theta_1 + l_2 s\theta_1)(s\theta_2 s\theta_4 - c\theta_2 s\theta_3 c\theta_4) - l_3(s\theta_2 s\theta_3 c\theta_4 + c\theta_2 s\theta_4) + c\theta_3 c\theta_4(l_1 s\theta_1 - l_2 c\theta_1)} \right] \quad (7-31)$$

求解假手臂各关节运动参数 $\theta_1 \sim \theta_6$ 的计算程序框图如图 7-3 所示。表 7.2 是任取空间几点利用上述程序计算的结果举例。

表 7.2 计算结果举例

位置 姿势 矩阵	$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & x \\ l_2 & m_2 & n_2 & y \\ l_3 & m_3 & n_3 & z \end{pmatrix}$	各关节相应转角(度)					
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
$\begin{pmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -565.8854 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & -100.0 \end{pmatrix}$	-126.4318	72.8953	1.6652	84.8053	-17.1830	-47.9230	
$\begin{pmatrix} -0.98 & 0.0 & 0.199 & 146.4102 \\ -0.199 & 0.0 & -0.98 & -546.4102 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & -80.0 \end{pmatrix}$	-110.4301	78.3910	1.0464	85.6839	-13.6483	-53.6524	
$\begin{pmatrix} -0.95 & 0.0 & 0.3122 & 232.8427 \\ -0.3122 & 0.0 & -0.95 & -489.8980 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & -60.0 \end{pmatrix}$	-92.6927	79.8357	0.7777	85.6700	-10.1936	-64.7140	
$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.0 & 0.6 & 400.0 \\ -0.6 & 0.0 & -0.8 & 400.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & -40.0 \end{pmatrix}$	-78.9997	83.2436	0.3729	86.8549	-6.7665	-80.9632	
$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.0 & 0.8 & 448.7884 \\ -0.8 & 0.0 & -0.6 & -344.3675 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & -20.0 \end{pmatrix}$	-74.2914	86.6277	0.1343	87.7209	-3.3749	-50.2954	
$\begin{pmatrix} -0.4 & 0.0 & 0.9165 & 489.8980 \\ -0.9165 & 0.0 & -0.4 & -232.8427 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$	-68.4036	89.9999	0.0000	87.5537	0.0000	-42.7277	
$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.0 & 0.9539 & 522.6252 \\ -0.9539 & 0.0 & -0.3 & -216.4784 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & 20.0 \end{pmatrix}$	-59.9944	93.3722	-0.1810	86.9308	3.3771	-44.3872	
$\begin{pmatrix} -0.2 & 0.0 & 0.9798 & 545.4102 \\ -0.9798 & 0.0 & -0.2 & -146.4102 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & 40.0 \end{pmatrix}$	-52.5904	96.7563	-0.3263	87.2475	6.7641	-46.1749	
$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 585.5854 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & 80.0 \end{pmatrix}$	-36.5272	103.6089	-1.0175	85.8045	13.6462	-49.1558	

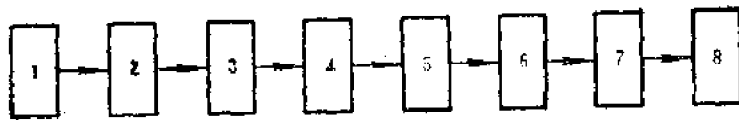


图 7-3 计算程序框图

1—开始；2—读入手部位置姿态矩阵、读入手臂长度；3—判别该点是否在工作范围内；
4—判别该点、该姿态是否有解；5—计算腕部坐标；6—计算肘部坐标；
7—计算 θ_i ($i=1\sim6$)；8—停止

§ 7-3 简易位置控制算法——空间单元法

如上所述，空间坐标变换矩阵的连乘运算将得出一组多变量三角函数方程式。所以，为了决定多关节机械手臂的位置和姿态，即求出作为目标值的各关节转动角度，需要求解非线性方程组的数学问题。因此，用电子计算机演算要花费相当多的时间，往往使实时控制产生困难。

有关采用电子计算机对多关节机械手进行实时控制的实验研究很多，下面介绍一种可用于实际控制的决定多关节假手关节角度的简易位置控制算法——空间单元法。

一、空间单元法的基本思想

空间单元法的基本思想是将假手的作业空间按一定精度要求划分成若干立方体单元，对应于假手手部在这些单元格子点位置上时的各关节转动角度，需采用上述坐标变换矩阵的概念预先进行计算，并把其计算结果存入计算机内。在实行实时控制时，手部运动到目标点位置上的各关节角度，可利用包围该点的立方体的八个顶点(格子点)所相应的各关节转角，并通过空间线段的定比分割原理进行实时插补，迅速求出。

设取图 7-4 中的 P_0 点为手部的移动目标点。包围该点的单元体的八个格子点为 M_0, M_1, \dots, M_7 。单元体的边长取为一个单位。 P_0 点对该单元体原点 M_0 的坐标为 (m_1, m_2, m_3) 。若如图那样取点 N_1, N_2, \dots, N_6 ，那么从

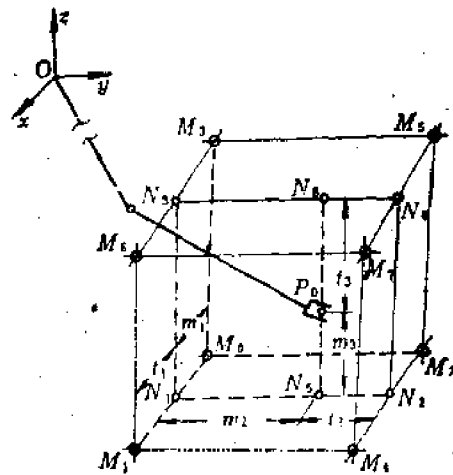


图 7-4 手部作业空间的分割单元

假手参考坐标系原点 O (肩部) 到 N_1, N_2, \dots, N_6 各点的向量 N_1, N_2, \dots, N_6 ，是含有各关节转动角度并以它作为元素的，而且可用各格子点向量 M_0, M_1, \dots 近似表示如下。

据空间解析几何有向线段定比分割原理可写出

$$\overline{M_1 N_1} = N_1 - M_1 = t_1 (M_0 - M_1),$$

移项得

$$N_1 \approx t_1 M_0 - t_1 M_1 + M_1 = t_1 M_0 + (1 - t_1) M_1 = t_1 M_0 + m_1 M_1.$$

同理可得

$$\begin{aligned} N_2 &\approx t_1 M_2 - m_1 M_4, & N_3 &\approx t_3 M_3 + m_1 M_6, \\ N_4 &\approx t_1 M_5 + m_1 M_7, & N_6 &\approx t_2 N_1 + m_2 N_3, \\ N_8 &\approx t_2 N_5 + m_2 N_4. \end{aligned}$$

以及

$$P_0 \approx t_3 N_5 + m_3 N_6.$$

于是可得下列关系式

$$\begin{aligned} P_0 = &t_1 t_2 t_3 M_0 + m_1 t_2 t_3 M_1 + t_1 m_2 t_3 M_2 + t_1 t_2 m_3 M_3 \\ &+ m_1 m_2 t_3 M_4 + t_1 m_2 m_3 M_5 + m_1 t_2 m_3 M_6 + m_1 m_2 m_3 M_7. \end{aligned} \quad (7-32)$$

式中, $t_i = 1 - m_i$, $0 \leq m_i \leq 1$, $0 \leq t_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3$)。

因为式(7-32)中各向量均含有各关节转角并以它作为元素,而且 P_0 位置也是由这些关节转角决定的,所以该式可用来表示目标点 P_0 处的假手各关节转角的计算式。

从式(7-32)可以看出,该式只有简单的数值四则运算,要比上节所介绍的需涉及到非线性方程求解、含有复杂的根式运算、三角函数与反三角函数等运算远为简单,计算时间明显缩短,从而能够实现实时计算,满足对假手进行实时位置控制的要求。

为了深入具体地讨论空间单元法,用该法就上节所介绍的六个自由度假手作了各种情况下的模拟计算。为讨论方便起见,在假手整个移动过程中,选取手部始终保持水平向前的一种姿势。当空间单元边长 $D = 50.0$ mm 时,任取空间十个位置,分别用空间单元法——近似解、与矩阵法间接位置求解——精确解两种方法进行了计算。计算结果表明:

- (1) 空间单元法在手部姿态上带来的偏差是非常小的,反映在手部动坐标轴 x_0 、 y_0 、 z_0 的方向余弦上的偏差一般不大于 1%,还原成角度偏差即为不超过 0.2° 。
- (2) 空间单元法在手部位置上的偏差,在整个移动过程中各个位置上是不相同的,而且在 x 、 y 、 z 三个方向上大小也是不同的。但是,偏差是有一定范围的。

二、空间单元法计算误差分布规律探讨

为了进一步研究空间单元法简化计算带来的偏差,分单元边长固定和单元边长变化进行各种典型情况的计算,以寻求误差分布规律。

1. 单元边长固定的情况

取单元边长 $D = 50.0$ mm 固定不变。具体做法是在假手作业空间中,按各种典型情况分别定出起始点 A 和终点 B ,并按路程最短方式作出两点间直线位移曲线,再沿此位移曲线按要求的步长划分若干中间点,最后就依次由 A 运动到 B ,完成整个移动过程。为了进行对比,对每一路线都分别采用间接位置求解和空间单元法进行计算,并用直接位置求解法还原。

图 7-5 所示为单元边长 $D = 50.0$ mm 条件下的一种计算误差分布规律典型曲线图。

经过大量的计算可以看出,对所研究的全臂假手,当空间单元边长固定为 $D = 50.0$ mm 时,空间单元法的计算误差存在大致有如下规律。

- (1) 在整个假手作业范围内,计算误差大小与手部所处的位置有关。当手部位于作业范围的边缘部分时,误差相对大一些,而在非边缘部分时,误差相对小一点。这种差别,在手臂取作业范围上下两边缘,即 z 轴方向坐标绝对值较大时,比较明显。
- (2) 一般情况下, z 轴方向的误差远比 x 、 y 轴方向的误差要小。
- (3) x 、 y 轴方向的误差一般不大于 2.5 mm, z 轴方向的误差一般不大于 1.0 mm。

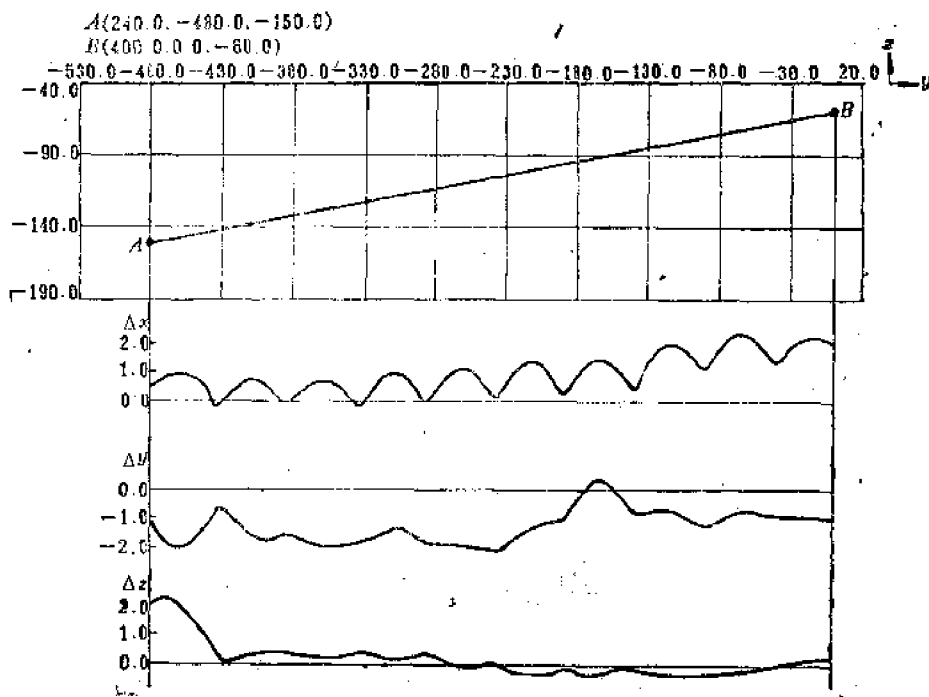


图 7-5 计算误差分布规律
(单元边长 $D=50.0\text{ mm}$)

2. 单元边长不同的情况

由于空间单元法是通过划分空间单元，并利用空间线段的定比分割原理来求解目标点相应关节转角的，所以，它的计算精度与所取的空间单元边长大小自然有密切的关系。

为了讨论计算精度与单元边长的关系，取三种边长为： $D_1=50.0\text{ mm}$ 、 $D_2=37.5\text{ mm}$ 、 $D_3=25\text{ mm}$ ，其边长比为 $D_2:D_1=3:4$ ， $D_3:D_1=1:2$ ，并用这三种不同大小的单元对同一位移路线进行比较计算，以观察误差变化的情况。具体计算步骤与单元边长固定的情况相同。

图 7-6 所示为上述三种不同单元边长的一种典型的误差比较图形。

通过大量计算可以看出，计算误差与边长有如下关系。

(1) 空间单元法的计算误差与所取单元边长有密切关系，随着边长的缩短，误差迅速减小。如

$$D=50.0\text{ mm 时, } x \text{ 轴方向误差} \leq 2.5\text{ mm,}$$

$$D=37.5\text{ mm 时, } x \text{ 轴方向误差} \leq 1.2\text{ mm,}$$

$$D=25.0\text{ mm 时, } x \text{ 轴方向误差} \leq 0.5\text{ mm.}$$

(2) 随着单元边长的减小，误差的波动情况也趋平缓。

(3) 随着单元边长的减小，误差趋于单边性，如当 $D=25.0\text{ mm}$ 时， Δx 基本上呈正值， Δy 呈负值， Δz 则趋于零。

(4) 不同大小的空间单元具有相应不同的计算精度。

综上所述，大量的计算表明，空间单元法能有效地避免繁复的间接位置求解，简化计算程序；且可按不同用途划分相应精度大小的空间单元，使之具有适当的计算精度。所以，它是一

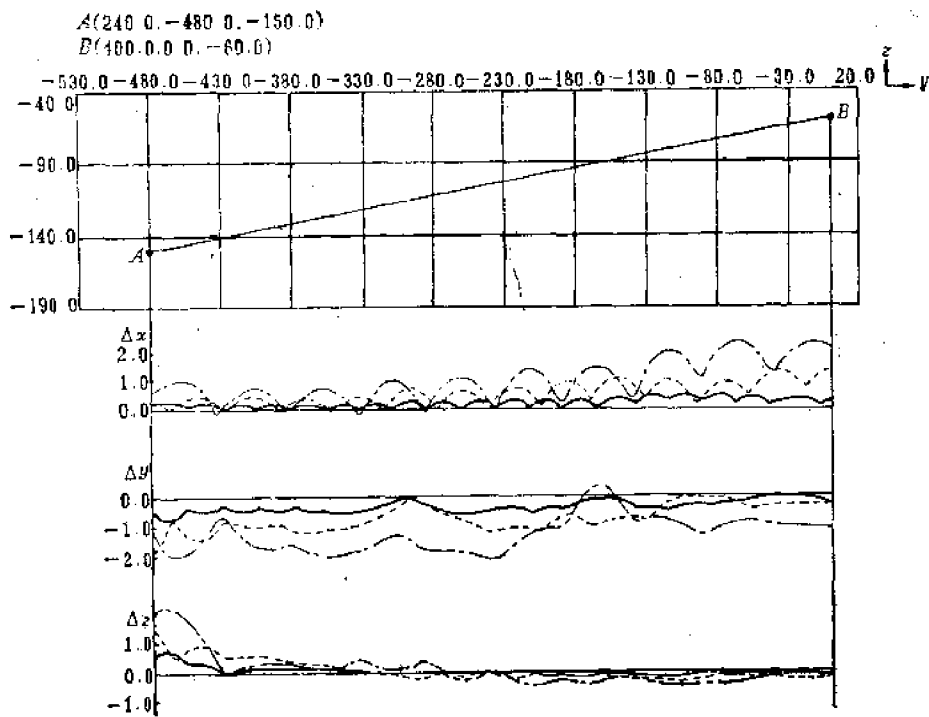


图 7-6 三种不同单元边长的一种典型误差比较

点划线 - · - · - 为 $D_1=50.0$ mm

虚线 - - - - - 为 $D_2=37.5$ mm

实线 ———— 为 $D_3=25.0$ mm

种适合微计算机实时控制的简易算法,特别是当假手功能日益完善,自由度不断增多,从而使间接位置求解更加困难时,空间单元法的优点会更加显著。

必须指出,只有当机械手臂足够长,而格子点间距取得足够小的情况下,上述近似式的计算误差才较小。据研究介绍,当臂长为 1500 mm、格子点间距取为 100 mm 时,与精确计算值比较,最大误差为 5%。

§ 7-4 运动轨迹控制算法

上面讨论了位置控制问题,它是研究如何使机械手手爪从现时位置移动到目标位置。但是,在许多实际操作中(如电弧焊、端茶杯等),不仅要求手爪能够准确地达到目标位置,而且还对它整个运动轨迹及姿态都有一定的要求。对于这种情况,采用简单的点位控制是不能满足的。因此,提出了研究轨迹控制的问题。

手臂运动轨迹控制应该是同时包括手爪位置和姿态的控制,并且所执行的实际轨迹也应该是连续且光滑的曲线。轨迹控制算法的研究有多种,如线性插补方法、逼近法等。

一、计算目标轨迹

以图 7-7 为例来研究把拿着物体的机械手臂从起点 A 移动到终点 E 的方法。

由图可知,为了避免机械手在运动途中与周围物体(如台座)相碰,必须预先设计好手爪有

代表性的运动轨迹图形,接着将该轨迹分割成若干区段,并选取中间分割点为途中目标点,后通过计算机控制使机械手依次自动地经由这些途中点而到达最终目标点。但是,对于多关节机械手来说要用计算机来求解对应途中点的各关节角度需要花费相当多的时间,所以有必要尽可能地减少途中点的选取数量。具体说来,对图 7-7 所示的情况,其计算步骤如下。

(1) 按作业对象和要求,设置安全的轨迹和途中点,如为了避免机械手与底座相碰,在起点附近取向上拿点,而在最终目标点附近取下降点,并把手爪的运动轨迹成为连结 $ABCD$ 各点的平滑曲线。

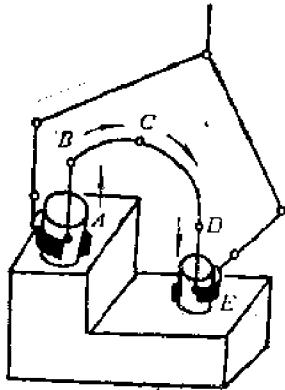


图 7-7 目标轨迹的形成

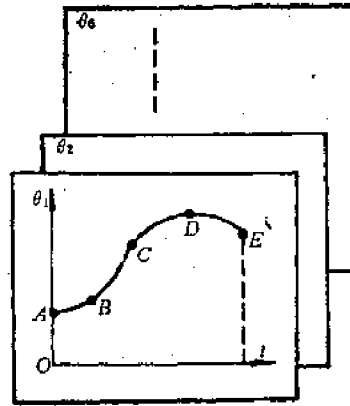


图 7-8 关节角度随时间而变化的曲线

(2) 根据上述已知点,借助于机械手位置控制参数求解矩阵法,求出对应这些点的各关节角度的偏移量,并绘出各关节转动角度随时间而变化的关系曲线,即 $\theta_i = f(t)$ 曲线图。若机械手具有六个关节($i=6$),那么可得六张表示各关节转动角度和时间的关系曲线图,如图 7-8 所示。

(3) 用时间 t 的高次多项式来分段拟合通过这些点的曲线,建立 $\theta_i = f(t)$ 的函数表达式,多项式的系数可根据机械手在各曲线区段运动的起始条件(如点 A 和 E 处的速度和加速度等于零)和连续性条件确定。

(4) 最后,以这样所求得的曲线作为目标轨迹,并使机械手各关节的伺服机构按上述要求动作,从而实现平滑过渡。

总而言之,为了沿着计算出来的轨迹曲线驱动机械手臂,采用了把计算轨迹曲线作为目标值的伺服机构。也就是说,这种机械手的控制方法,主要是把手臂关节的位置信号与目标值作比较,再把这个误差信号进行反馈的位置控制伺服系统。

二、轨迹控制的逐渐逼近法

设机械手手爪的绝对运动参数(指 x, y, z 及 l, m, n 等)用 x_j 表示,各关节运动副的运动控制变量用 q_n 表示。那么,它们之间的关系可用下列 j 个非线性方程组表示为

$$x_j = F_j[q_n(t)]. \quad (7-33)$$

反之,若上列函数的反函数存在,控制变量 q_n 能够用绝对运动参数 x_j 的显函数表示,则有

$$q_n(t) = G_n[x_j(t)]. \quad (7-34)$$

显然,这个问题就是要求在已知初始与目标形相(包括位置与姿态)的前提下,来导出具有

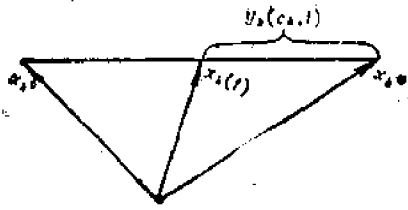


图 7-9 直线运动轨迹控制

那么,根据初始条件可得

$$y_k(c_k, 0) = x_k^* - x_k^0 \quad (7-36)$$

另一方面,满足到达目标位置的条件为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_k(c_k, t) = 0 \quad (7-37)$$

式(7-35)可改写为

$$x_k^* - x_k(t) = y_k(c_k, t) = c_k \mu_k(t) = \delta x_k(t) \quad (7-38)$$

显然,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\delta x_k(t) \rightarrow 0$ 。

上式中 $\mu_k(t)$ 是由实际控制要求提出的,是时间 t 的三个相互独立的设定函数,且必须满足条件

$$\text{当} \quad \left. \begin{array}{l} t = 0, \quad \mu_k(0) = 1, \\ t = \infty, \quad \mu_k(\infty) = 0. \end{array} \right\} \quad (7-39)$$

属于这一类的设定函数有如 $\mu_k(t) = \frac{1}{1+t}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^3}$ 等。

因此,当 $t = 0$ 时,存在

$$\delta x_k(0) = x_k^* - x_k(0) = c_k \quad (7-40)$$

此式说明 c_k 在几何上的意义为表示目标位置向量与初始位置向量之差。

于是,机械手将按照式(7-38)所表示的位置关系进行逐渐逼近法控制。

下面讨论运动控制变量的求解。

设以矩阵 D_j 表示机械手手爪目标形相 x_j^* 与当前形相 $x_j(t)$ 之差,那么

$$x_j^* - D_j = F_j[q_n(t)], \quad (7-41)$$

及

$$q_n(t) = G_n[x_j(t)] = G_n[x_j^* - D_j] \quad (7-42)$$

另外,

$$q_n(t) = q_n(0) + \delta q_n(t), \quad (7-43)$$

式中, $q_n(0)$ 为对应于手爪初始形相的各关节运动参数控制量,且为已知; $\delta q_n(t)$ 为从初始形相达到当前形相时的运动参数控制增量。

于是,式(7-41)可改写为

$$x_j^* - D_j = F_j[q_n(0) + \delta q_n(t)]. \quad (7-44)$$

若把上式右边按泰勒级数展开,可得如下近似式

$$F_j[q_n(0) + \delta q_n(t)] \approx F_j[q_n(0)] + J[q_n(0)]\delta q_n(t), \quad (7-45)$$

式中,

$$J[q_n(0)] = \left(\frac{\partial F_j}{\partial q_n} \right)_{q_n=q_n(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_j}{\partial q_1} & \frac{\partial F_j}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial F_j}{\partial q_n} \end{pmatrix}_{q_n=q_n(0)} \quad (7-46)$$

称之为 $(j \times n)$ 雅可比矩阵。

若有逆阵存在,则由式(7-44)、(7-45)可写出

$$\delta q_n(t) = \bar{J}[x_j(0)][x_j^* - F_j[q_n(0)] - D_j], \quad (7-47)$$

式中,

$$\bar{J}[x_j(0)] = \left(\frac{\partial G_n}{\partial x_i} \right)_{x_i=x_i(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial x_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{x_i=x_i(0)} \quad (7-48)$$

称为 $(n \times j)$ 雅可比矩阵。

将式(7-47)进行一系列变换及整理后可得

$$\left. \begin{aligned} \delta q_n(t) &= \bar{J}[x_j(0)] u(t) \delta x_j, \\ q_n(t) &= q_n(0) + \delta q_n(t), \\ \delta q_n(t + \Delta t) &= \bar{J}[x_j(t)] u(t + \Delta t) \delta x_j(t), \\ q_n(t + \Delta t) &= q_n(t) + \delta q_n(t + \Delta t). \end{aligned} \right\} \quad (7-49)$$

式中, $u(t)$ 为 $(j \times j)$ 的对角线矩阵,与设定函数 $\mu_k(t)$ 有关; δx_j 为 $(j \times 1)$ 列阵,与手爪的形相有关。

显然,上式即为使机械手手爪到达当前形相 $x_j(t)$ 时所需要的各运动控制变量的变化值。这样,经过多次重复,手爪的形相就可逐渐逼近目标形相,直至达到所要求的偏差范围。

§7-5 反馈补偿法

一、反馈补偿法原理

反馈补偿法和逐渐逼近法一样,它的实质是利用计算机数值求解机械手的几何模型来实现位置控制参数求解的。所以,只要将机械手的结构参数和手部的运动规律输入计算机,它就能按一定的程序自动计算并输出所需要的广义坐标的变化规律。由于这样,这些算法具有计算速度快、精度高及通用性大等优点。

假定机械手手部的位姿 $r(t)$ 和广义坐标 $q(t)$ 之间存在着下列显性关系

$$r(t) = F[q(t)]. \quad (7-50)$$

则将该式对时间 t 求导可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}(t) &= \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q}(t), \\ \ddot{r}(t) &= \frac{\partial F}{\partial q} \ddot{q}(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q}^2(t). \end{aligned} \right\} \quad (7-51)$$

由上可知, 尽管 $r(t)$ 和 $q(t)$ 之间的关系是一个多元三角函数方程组, 但在 q, r 和 \dot{q}, \dot{r} 已知的情况下, \ddot{q} 和 \ddot{r} 之间存在着线性关系, 这就可能使位置控制参数求解问题变得较为简单。

若记矩阵 $\frac{\partial F}{\partial q}$ 为 J (雅可比矩阵), $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q}$ 为 K , 则上式可改写为

$$\ddot{q} = J^{-1} (\ddot{r} - K \dot{q}) = J^{-1} (\ddot{r} - K J^{-1} \dot{r}). \quad (7-52)$$

那么, 采用数值积分法, 便可求得 $\dot{q}(t)$ 和 $q(t)$, 并可用下列近似公式求得

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}(t + \Delta t) &= \dot{q}(t) + \ddot{q}(t) \Delta t, \\ q(t + \Delta t) &= q(t) + \dot{q}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{q}(t) \Delta t^2. \end{aligned} \right\} \quad (7-53)$$

于是, 若已知 $\dot{r}(t)$ 和初始值 $r(t_0), q(t_0)$ 和 $\dot{r}(t_0), \dot{q}(t_0)$, 则通过式(7-52) 可求得 t_0 时刻的 $\ddot{q}(t_0)$, 再利用式(7-53)进行积分, 便可求得 $t_0 + \Delta t$ 时刻的 $\dot{r}(t_0 + \Delta t), \dot{q}(t_0 + \Delta t)$ 和 $r(t_0 + \Delta t), q(t_0 + \Delta t)$ 。如此递推下去, 就能实现整个位置控制参数问题的求解。

但是, 由于式(7-53)是近似的, 故由所算得的 q 和 \dot{q} 反过来求得的 r 和 \dot{r} , 与所设定的值之间必存在有偏差 δr 和 $\delta \dot{r}$ 。为消除这些误差, 可在上述算法中加入一个反馈补偿算法, 即从偏差 δr 和 $\delta \dot{r}$ 来确定所需要的补偿值 δq 和 $\delta \dot{q}$, 以满足一定的精度要求。

若对式(7-50)和(7-51)全微分一次, 得

$$\left. \begin{aligned} \delta r &= \frac{\partial F}{\partial q} \delta q = J \delta q, \\ \delta \dot{r} &= J \delta \dot{q} + \left(\frac{\partial J}{\partial q} \dot{q} \right) \delta q = J \delta \dot{q} + K \delta q. \end{aligned} \right\} \quad (7-54)$$

于是, 可得到如下补偿公式

$$\begin{pmatrix} \delta q \\ \delta \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ -J^{-1} K J^{-1} & J^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \dot{r} \end{pmatrix}. \quad (7-55)$$

若记

$$Q = (q, \dot{q})^T, \quad R = (r, \dot{r})^T, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ -J^{-1} K J^{-1} & J^{-1} \end{pmatrix}, \quad (7-56)$$

从而可得如下迭代公式

$$\varphi(Q) = Q + \delta Q = Q + P^{-1} \delta R. \quad (7-57)$$

反馈补偿算法的原理如图 7-10 所示。整个算法的框图如图 7-11 所示。

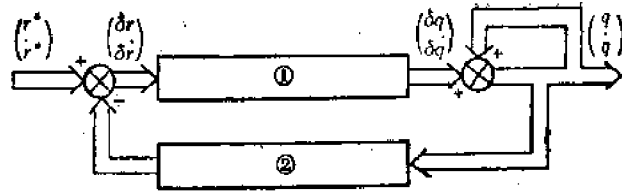


图 7-10 反馈补偿算法原理图

1—用补偿公式由 δr 、 $\delta \dot{r}$ 计算 δq 、 $\delta \dot{q}$ ；2—直接位置求解，由 q 、 \dot{q} 计算 r 、 \dot{r}

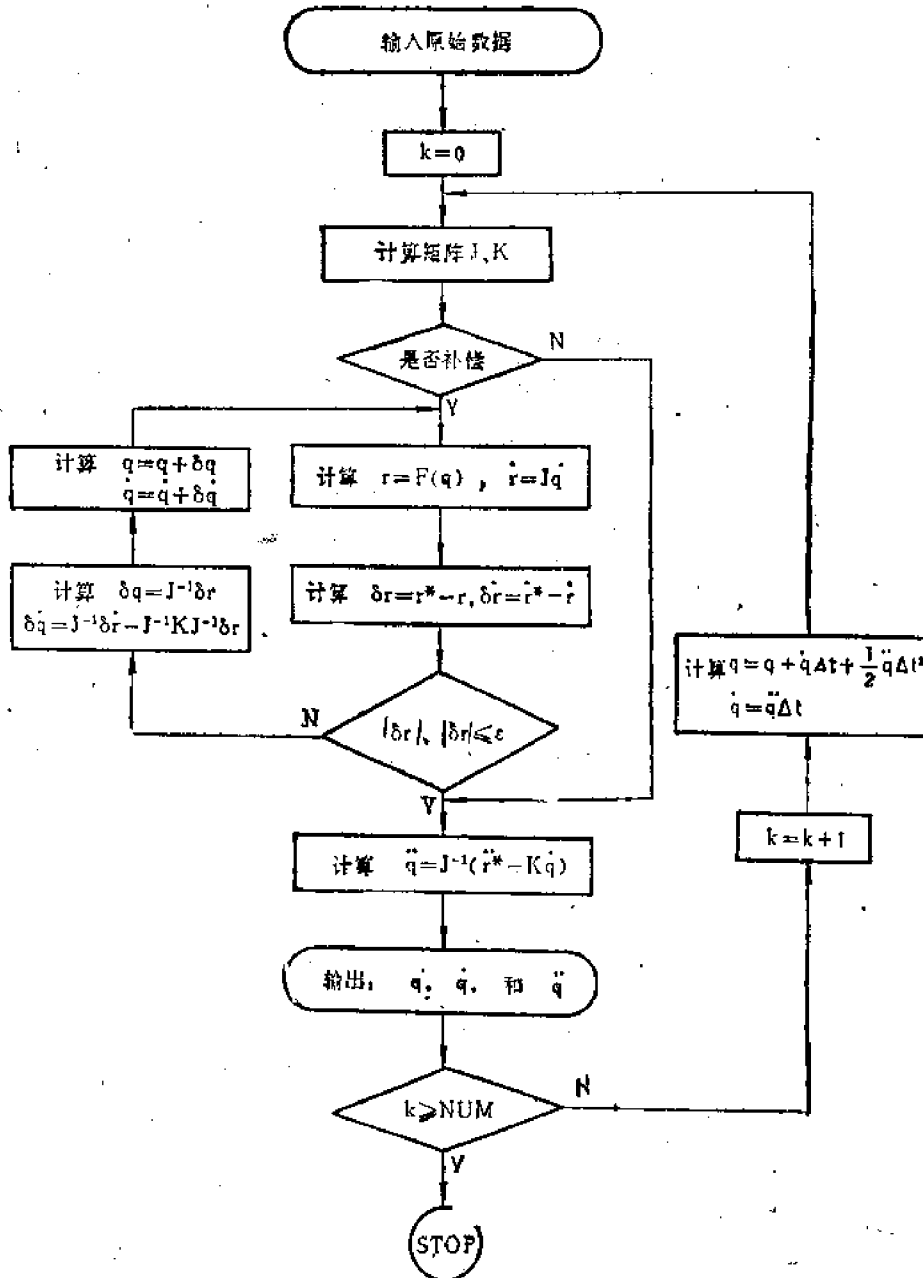


图 7-11 具有反馈补偿算法的程序框图

图中输入原始数据包含要求跟踪的 r^* 、 \dot{r}^* 、 \ddot{r}^* ，初值 q_0 、 \dot{q}_0 ，
采样周期 Δt ，点数 NUM，要求精度 ϵ ，机构构形参数等

二、J、K 矩阵的计算方法

由上可知,计算机自动求解位置控制参数问题的关键是计算机自动计算矩阵 J 和 K 。下面就六个自由度机械手的一组外部变量来讨论一下矩阵 J 和 K 的计算方法。

设机械手手部绕绝对坐标系三根轴的转动角速度为 $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0$, 手部在任一时刻与绝对坐标系原点重合的那一点的速度在绝对坐标系三根轴上的投影为 $\dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0$, 则此六个量就构成机械手的一组外部变量, 并记为 $\dot{r}^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0)$ 。

很容易由参考文献 [24] 得到验证, 机械手手部的变换矩阵的导数 \dot{T}_6 与外部变量 \dot{r}^0 及广义坐标 \dot{q} 之间存在着下述关系:

$$\dot{T}_6 = \sum_{k=1}^6 \Theta_k T_6 \dot{r}_k^0 = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial T_6}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (7-58)$$

式中, \dot{r}_k^0 为矢量 \dot{r}^0 的第 k 个元素; \dot{q}_i 为第 i 个关节的广义速度; Θ_k 为投射矩阵, 它的具体形式如下

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Theta_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Theta_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Theta_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Theta_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Theta_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7-59)$$

利用投射矩阵的正交性

$$\text{tr}_k(\Theta_k \Theta_k^T) = \begin{cases} 1/\delta_j, & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}, \quad \delta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & j=1,2,3 \\ 1 & j=4,5,6 \end{cases} \quad (7-60)$$

可对式(7-58)进行如下变换:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \text{tr}(\Theta_k \Theta_k^T) \dot{r}_k^0 &= \text{tr}(\dot{T}_6 T_6^{-1} \Theta_k^T) \\ &= \sum_{i=1}^6 \text{tr}\left(\frac{\partial T_6}{\partial q_i} T_6^{-1} \Theta_k^T\right) \dot{q}_i \end{aligned}$$

于是得

$$\dot{r}_j^0 = \delta_j \sum_{i=1}^6 \text{tr}\left(\frac{\partial T_6}{\partial q_i} T_6^{-1} \Theta_j^T\right) \dot{q}_i \quad (7-61)$$

将上式写成矩阵形式为

$$\dot{r}^0 = J \dot{q} \quad (7-62)$$

显然,上式中的六阶方阵

$$J = (J_{ij})_{6 \times 6} = \left[\delta_j \operatorname{tr} \left(\frac{\partial T_0}{\partial q_i} T_0^{-1} \Theta_j^T \right) \right], \quad (7-63)$$

即为所要求的雅可比矩阵计算式。

另外, 对于外部变量 \dot{r}^0 , 可以得到矩阵 $K \equiv 0$, 现证明如下。

假定第 $i-1$ 和第 i 个构件之间的 Hartenberg-Denavit 变换矩阵为 A_i , 它只与广义坐标 q_i 有关, 于是有

$$\frac{\partial T_0}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} (T_0 A_1 \cdots A_6) = T_0 A_1 \cdots \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \cdots A_6 \quad (1 \leq i \leq 6)$$

及

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_k \partial q_i} &= T_0 A_1 \cdots \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \cdots \frac{\partial A_k}{\partial q_k} \cdots A_6 \\ &= \frac{\partial T_0}{\partial q_i} T_0^{-1} \frac{\partial T_0}{\partial q_k} \quad (1 \leq k \leq 6). \end{aligned} \quad (7-64)$$

式中, T_0 为基座相对于绝对坐标系的变换矩阵。

另外, J 矩阵中的任一元素 J_{ij} 对某一广义坐标 q_k 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{ij}}{\partial q_k} &= \delta_j \operatorname{tr} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial T_0}{\partial q_i} T_0^{-1} \Theta_j^T \right) \right] \\ &= \delta_j \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial q_k \partial q_i} T_0^{-1} + \frac{\partial T_0}{\partial q_i} \frac{\partial T_0^{-1}}{\partial q_k} \right) \Theta_j^T \right]. \end{aligned}$$

那么, 将式(7-64)代入上式, 可得

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial q_k} = \delta_j \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial T_0}{\partial q_i} T_0^{-1} \frac{\partial T_0}{\partial q_k} T_0^{-1} + \frac{\partial T_0}{\partial q_i} \left(-T_0^{-1} \frac{\partial T_0}{\partial q_k} T_0^{-1} \right) \right) \Theta_j^T \right] \equiv 0$$

即得到证明

$$K = \frac{\partial J}{\partial q} \dot{q} \equiv 0. \quad (7-65)$$

对于采用其他形式的外部变量, 可利用它们与外部变量 \dot{r}^0 之间的变换关系推导出它们的 J, K 矩阵计算式。

三、反馈补偿法的收敛性

由文献[17]可知, 若方程 $x = \varphi(x)$ 的根为 x^* , 且 $\varphi'(x)$ 在 x^* 的邻近连续, $|\varphi'(x^*)| < 1$, 则迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在 x^* 的邻近具有局部收敛性; 又若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x^* 的邻近连续, 且 $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ 及 $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$, 则该迭代过程在点 x^* 的邻近是 p 阶收敛的。

对于反馈补偿算法, 迭代函数为式(7-57)所示, 即

$$\varphi(Q) = Q + P^{-1} \delta R.$$

注意到

$$\delta r = r^* - F(q), \quad \delta \dot{r} = \dot{r}^* - J \dot{q}, \quad (7-66)$$

则有

$$\frac{\partial \delta R}{\partial Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta r}{\partial q} & \frac{\partial \delta \dot{r}}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\partial \delta \dot{r}}{\partial q} & \frac{\partial \delta r}{\partial \dot{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F}{\partial q} & 0 \\ -\frac{\partial J}{\partial q} \dot{q} & -J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ -K & -J \end{pmatrix} = -P. \quad (7-67)$$

另外, 将式(7-57)对 Q 求导, 并把上式代入, 可得

$$\frac{\partial \varphi(Q)}{\partial Q} = I + \frac{\partial P^{-1}}{\partial Q} \delta R + P^{-1} \frac{\partial \delta R}{\partial Q} = \frac{\partial P^{-1}}{\partial Q} \delta R. \quad (7-68)$$

式中, I 为单位矩阵。

因为 $\delta R|_{q=q_0} = 0$, 于是由上式证得

$$\frac{\partial \varphi(Q^*)}{\partial Q} = 0. \quad (7-69)$$

同理可证得

$$\frac{\partial^2 \varphi(Q^*)}{\partial^2 Q} \neq 0. \quad (7-70)$$

那么, 可以得出结论: 反馈补偿算法具有二阶局部收敛性。

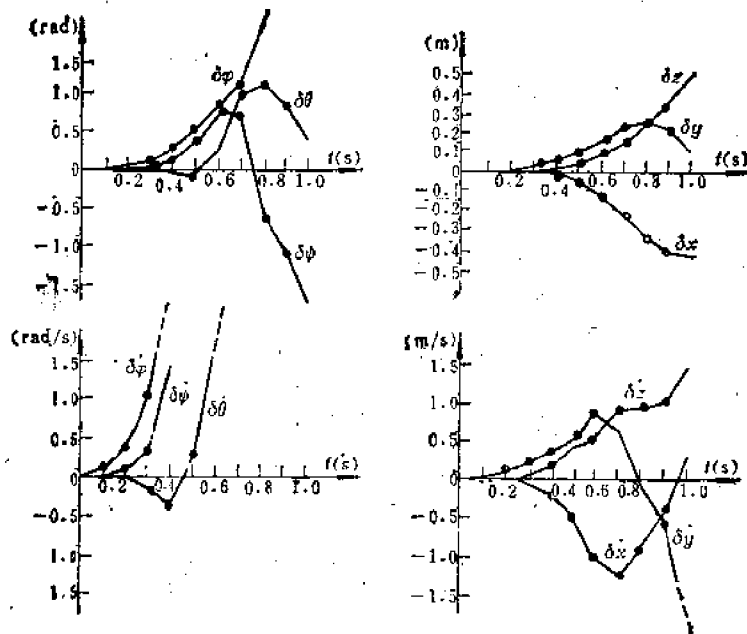
实际表明, 这种算法具有收敛速度快的优点, 但它存在下列缺点。

(1) 由于该算法只具有局部收敛性, 所以对初始点的选取限制较严。如果所选的初始点不在收敛域内, 则迭代过程就会发散;

(2) 迭代过程中需要计算雅可比矩阵的逆, 这不仅增加了计算量, 特别是当雅可比矩阵奇异时, 迭代过程就无法继续进行下去,

(3) 只适用于自由度 $n \leq 6$ 的机械手。

图 7-12 分别表示用带补偿和不带补偿的算法, 对一种具有六个自由度机械手的位置控制参数问题求解所对应的误差曲线。可以看到, 无反馈补偿时, 误差会不断积累, 导致错误的结果; 而采用了反馈补偿后, 误差始终限制在所要求的精度范围内。图中 (x, y, z) 和 (ψ, θ, φ) 为机械手手部的位坐标和欧拉角(即一组外部变量)。



(a)

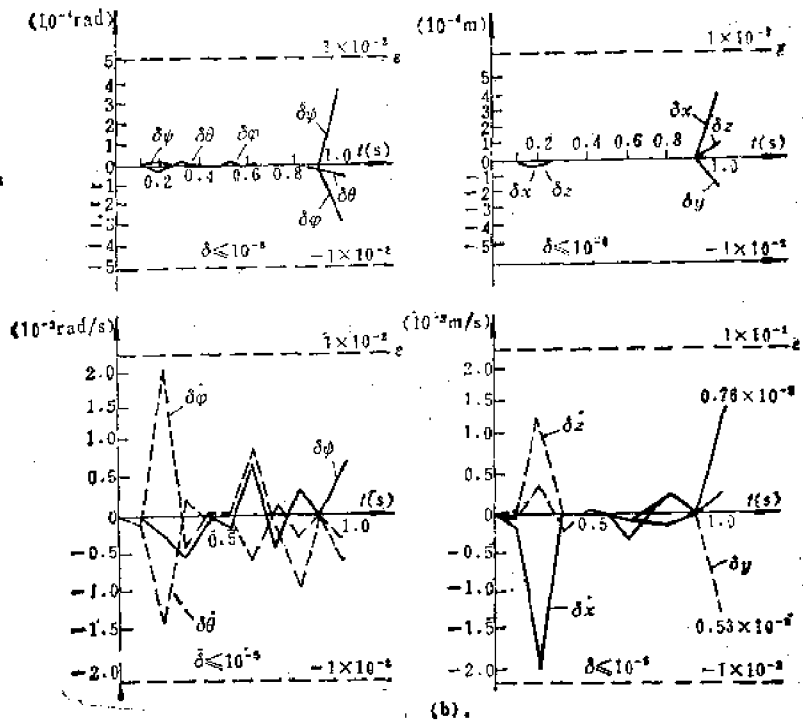


图 7-12 有补偿和无补偿时位置控制参数求解的误差曲线的比较

(a) 无补偿时的误差曲线; (b) 有补偿时的误差曲线

ϵ —要求精度范围; δ —横轴上的点误差

§ 7-6 最优化方法

由上节可知,求解位置控制参数问题,实际上就是求满足方程 $\delta R = 0$ 的值 Q^* 。如选取如下形式的目标函数

$$f(Q) = \delta R^T \delta R = (r^* - F(q))^T (r^* - F(q)) + (\dot{r}^* - J\dot{q})^T (\dot{r}^* - J\dot{q}), \quad (7-71)$$

则 Q^* 就是使上述目标函数最小的极小点。于是,位置控制参数求解就转化为求 $f(Q)$ 的极小点问题。下面讨论三种求解的最优化方法。

一、最速下降法

最速下降法的迭代公式为

$$\left. \begin{aligned} Q_{k+1} &= Q_k + \omega_k p_k = Q_k - \omega_k \nabla f(Q_k), \\ \omega_k &= \min_{\omega} f[Q_k - \omega \nabla f(Q_k)]. \end{aligned} \right\} \quad (7-72)$$

式中, ω 为步长, ω_k 为最优步长, $p_k = -\nabla f(Q_k)$ 为最速下降方向, $\nabla f(Q_k)$ 为目标函数 $f(Q)$ 的梯度。

利用式(7-67)可写出

$$\frac{\partial f(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q} (\delta R^T \delta R) = 2 \left(\frac{\partial \delta R}{\partial Q} \right)^T \delta R$$

$$= 2(-P)^T \delta R = -2 P^T \delta R, \quad (7-73)$$

所以,最速下降方向为

$$p_k = 2 P_k^T \delta R_k. \quad (7-74)$$

求最优步长实际上是一个一维搜索问题。解一维最优问题的方法很多,这里仅以 Newton-Raphson 法作一简单的讨论。

将 $Q = Q_k + \omega p_k$ 代入 $f(Q)$ 式中可得

$$\varphi(\omega) = f(Q_k + \omega p_k) = \delta R^T \delta R|_{Q=Q_k+\omega p_k}, \quad (7-75)$$

显然,函数 $\varphi(\omega)$ 是 ω 的一元函数。

用 Newton-Raphson 法求使 $\varphi(\omega)$ 最小的 ω 值的迭代公式为

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \varphi'(\omega_k) / \varphi''(\omega_k), \quad (7-76)$$

其中 $\varphi'(\omega)$ 和 $\varphi''(\omega)$ 可以通过下列关系计算:

$$\varphi'(\omega) = \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)^T \frac{dQ}{d\omega}, \quad (7-77)$$

用式(7-73)代入,并注意到 $dQ/d\omega = p_k$, 则上式成为

$$\varphi'(\omega) = -2 \delta R^T P p_k = -2 p_k^T P^T \delta R. \quad (7-78)$$

若将上式再对 ω 求导一次,并注意到 p_k 与 ω 无关,则有

$$\begin{aligned} \varphi''(\omega) &= -2 \left(\frac{dP^T}{d\omega} \delta R + P^T \frac{d\delta R}{d\omega} \right) \\ &= -2 p_k^T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial Q} \frac{dQ}{d\omega} \right)^T \delta R + P^T \left(\frac{\partial \delta R}{\partial Q} \frac{dQ}{d\omega} \right) \right] \\ &= -2 p_k^T \left(p_k^T \frac{\partial P^T}{\partial Q} \delta R - P^T P p_k \right) \\ &= 2 p_k^T P^T P p_k - 2 p_k^T p_k^T \frac{\partial P^T}{\partial Q} \delta R. \end{aligned} \quad (7-79)$$

式中, $\frac{\partial P^T}{\partial Q}$ 的计算非常繁琐,但是由于 p_k 是 δR_k 的同阶无穷小,所以当 $\delta R \rightarrow 0$ 时,式(7-79)

中的第一项是 δR 二阶无穷小,而第二项是 δR 的三阶无穷小。若略去第二项,则上式可近似地成为

$$\varphi''(\omega) \approx 2 p_k^T P^T P p_k = 2 (P p_k)^T (P p_k). \quad (7-80)$$

于是,将式(7-78)和(7-80)代入式(7-76)可得如下迭代公式

$$\omega = \omega + \frac{\delta R^T P p_k}{(P p_k)^T (P p_k)} = \omega + \frac{(P p_k)^T \delta R}{(P p_k)^T (P p_k)}. \quad (7-81)$$

若取初值 $\omega_0 = 0$, 则 ω_1 为

$$\omega_1 = \frac{p_k^T P^T \delta R}{(P p_k)^T (P p_k)} = \frac{p_k^T p_k}{2 p_k^T P^T P p_k}. \quad (7-82)$$

由上可知,要求得最优步长,一般需迭代好几次,而每迭代一次,都必须重新计算 δR 和 P (即 J 和 K 矩阵),这样就会使计算量大大增加。为此,可将 ω_1 作为最优步长的估计值,从而得到的算法框图如图 7-13 所示。

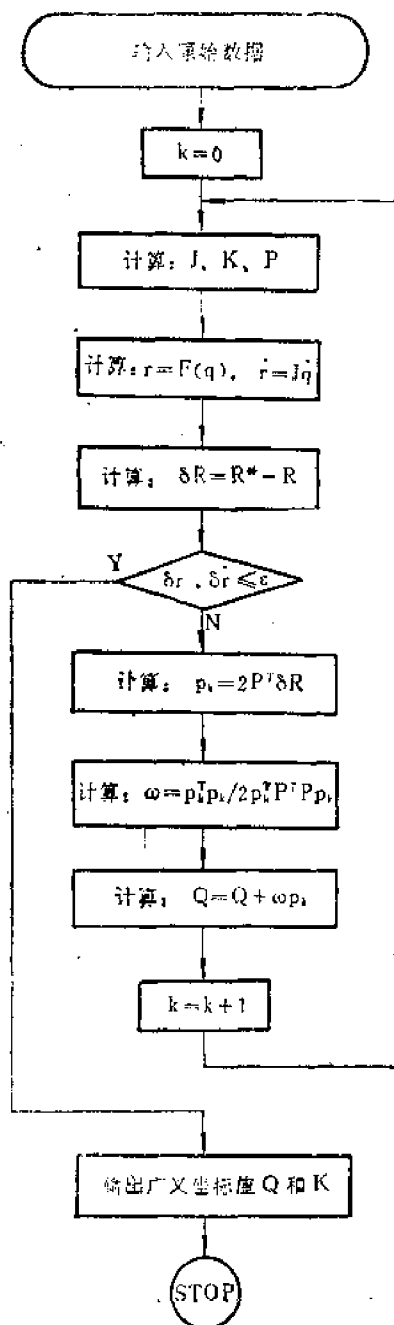


图 7-13 最速下降法程序框图

输入原始数据包含:机构构形,要求精度 ϵ ,
机械手手部位置 R^* , 设定初值 Q^0

($i=1, 2, \dots, N-6$)。于是此时的位置控制参数问题可表示成

$$\left. \begin{aligned} \min & f(Q) = \delta R^T \delta R, \quad Q \in D^N, \\ \text{s.t.} & g_i(Q) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-6. \end{aligned} \right\} \quad (7-84)$$

求解这样一个带约束的最优化问题的方法很多,最简单的方法是罚函数法。罚函数的形式可构造如下

上述算法的收敛性在不少文献中都有过证明,只要 $f(Q)$ 的二阶偏导数连续,初始值 Q_0 适当,则算法必定收敛,且具有线性收敛速度。

最速下降法计算简单,避开了雅可比矩阵的求逆,收敛范围大,初始点容易选择,当雅可比矩阵奇异时,只要 $(Pp_k)^T(Pp_k) \neq 0$,则迭代过程可以照常进行下去。但是这种算法收敛速度较慢,尤其在接近最优点时。另外,在上述算法推导过程中,曾作了一些近似,这对收敛速度也有一些影响。

二、共轭方向法

共轭方向法的迭代公式为

$$\left. \begin{aligned} Q_{k+1} &= Q_k + \omega_k p_k, \\ p_k &= -\nabla f(Q_k) + \frac{\|\nabla f(Q_k)\|^2}{\|\nabla f(Q_{k-1})\|^2} p_{k-1}, \\ p_0 &= -\nabla f(Q_0), \\ \omega_k &= \min_{\omega \geq 0} f(Q_k + \omega p_k). \end{aligned} \right\} \quad (7-83)$$

这个算法与最速下降法的唯一区别在于下降方向 p_k 中增加了一项修正项,从而使算法的收敛速度大为提高。上式中的各个量的计算公式及整个算法的计算步骤,均与最速下降法一样,故不再赘述。

共轭方向法具有最速下降法的所有优点,且具有超线性收敛速度。有关它的收敛性的证明,可参阅有关文献。

三、有约束的最优化方法

上述的几种算法只适用于广义坐标无约束的情形。但有时,广义坐标具有某些约束,尤其是对具有多余自由度的机械手,在求解位置控制参数问题时,必须对广义坐标加上一定的约束,否则将得不到确定的解。约束的数目应等于多余自由度的数目。

设机械手具有 $N > 6$ 个自由度,则求解位置控制参数问题时,需加 $(N-6)$ 个约束条件 $g_i(Q) \geq 0$

$$\begin{aligned}\varphi(Q, u) &= f(Q) + \mu \sum_{i=1}^{N-6} [\min(0, g_i(Q))]^2 \\ &= f(Q) + \mu \sum_{i=1}^{N-6} [g_i(Q)]^2 u_i [g_i(Q)]_1.\end{aligned}\quad (7-85)$$

式中, u_i 为单位阶跃函数, 即

$$u_i [g_i(Q)] = \begin{cases} 1 & g_i(Q) < 0, \\ 0 & g_i(Q) \geq 0. \end{cases} \quad (7-86)$$

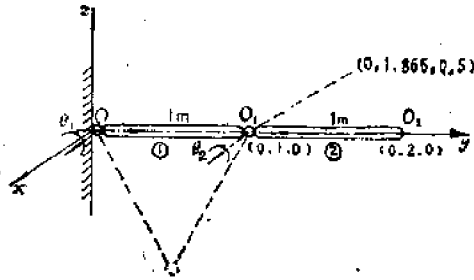


图 7-14 两自由度机构

参数 μ 为惩罚因子, 只要 μ 取得足够大, 就能求解得满足约束条件的近似最优解。

求解式 (7-85) 所示增广目标函数的最优解, 可以采用前述的任一种无约束最优化方法, 具体的计算公式取决于约束 $g_i(Q)$ 的形式。

四、计算举例

取如图 7-14 所示的两自由度机构为例。该机构是由两根各长一米的连杆和两个相互平行的铰链组成。假定机构末端的位置为 $y^* = 1$, $z^* = 0$, 求此时对应的广义坐标的值 θ_1^* 和 θ_2^* 。

若取初值 $\theta_1^0 = 0$, $\theta_2^0 = \frac{\pi}{6} = 0.524(\text{rad})$, 并分别调用反馈补偿法、最速下降法和共轭方向法等三种算法程序进行位置控制参数求解, 其部分结果列于表 7.3 中。

表 7.3 三种计算结果比较

算 法		迭代次数	0	1	2	3	4
(1)	反馈补偿法	$\theta_1(\text{rad})$	0.0000	-2.000	-0.835	1.079	-0.882
		$\theta_2(\text{rad})$	0.524	3.752	3.831	2.613	3.908
(2)	最速下降法	$\theta_1(\text{rad})$	0.000	-0.134	-0.276	-0.356	-0.763
		$\theta_2(\text{rad})$	0.524	0.524	0.594	1.024	1.377
(3)	共轭方向法	$\theta_1(\text{rad})$	0.000	-0.134	-0.276	-0.810	-0.970
		$\theta_2(\text{rad})$	0.524	0.524	0.594	1.263	1.859

将上述结果与精确值 $\theta_1^* = -\frac{\pi}{3} = -1.047(\text{rad})$, $\theta_2^* = \frac{2\pi}{3} = 2.094(\text{rad})$ 相比较, 可以得到结论: 由于初始点取得离 θ_1^* , θ_2^* 较远, 故算法(1)收敛得较慢, 但算法(2)、(3)仍能以较快的速度收敛, 而且算法(3)在接近最优点时收敛速度仍然很快。若初始点取得离 θ_1^* 和 θ_2^* 较近, 则算法(1)的收速度最快, 算法(3)其次, 算法(2)则收敛得最慢。

总而言之, 反馈补偿具有收敛速度快的优点。最优化方法的收敛速度虽不及反馈补偿法, 但它有着许多反馈补偿算法所不具备的优点, 如收敛范围大, 初始点易取, 可以避开对雅可比

矩阵求逆,使计算量大为减少,并消除了雅可比矩阵奇异对迭代过程的影响,能用于具有多余自由度机械手的位置控制参数求解问题等。总之,最优化方法可为机械手位置控制参数求解开辟一条新的途径。

§ 7-7 速度控制法

对机械手进行速度控制,就是要求按照已给定手爪绝对运动速度参数的变化规律,求解手臂各关节运动副中相对运动参数的变化规律。

如图 7-15 所示, $O_1-x_1y_1z_1$ 为固定在机械手肩部的参考坐标系, $O_n-x_ny_nz_n$ 为固定在手爪形心 P 的坐标系,其原点线速度向量为 v ,角速度向量为 ω 。向量 v 和 ω 可分别沿手爪坐标系的三个坐标轴分解为三个速度向量元素。那么,若以 \dot{s} 表示在手爪坐标系上的包含有上述六个元素的向量,则可写出

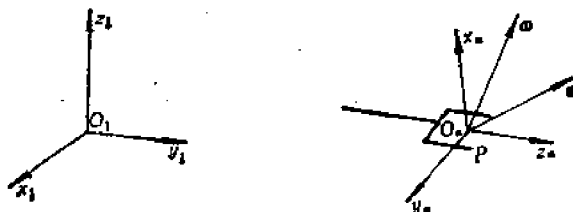


图 7-15 手爪坐标和 v 、 ω 向量

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} v \\ \dots \\ \omega \end{pmatrix} \quad (7-87)$$

另外,以向量 θ 、 $\dot{\theta}$ 分别表示各关节的转角和角速度。

于是,向量 \dot{s} 和 $\dot{\theta}$ 具有下列关系式

$$\dot{s} = J(\theta) \dot{\theta} \quad (7-88)$$

式中, $J(\theta)$ 为雅可比矩阵。

由上式可得

$$\dot{\theta} = J^{-1}(\theta) \dot{s} \quad (7-89)$$

于是,可以看出,若已知矩阵 $J(\theta)$,便可求得所需要的输入量 $\dot{\theta}$ 向量。

下面讨论矩阵 $J(\theta)$ 的计算方法。

取图 7-16 所示的机械手坐标系,机械手的关节数为六个。设仅仅由机械手第 j 个关节以

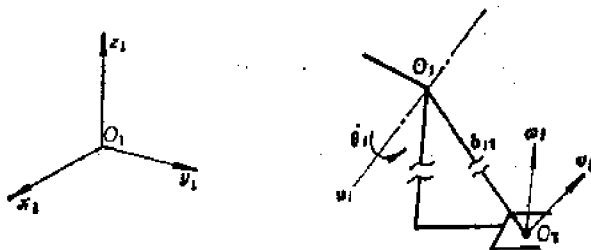


图 7-16 $J(\theta)$ 的计算法

角速度 $\dot{\theta}_j$ 绕本身轴线旋转时, 在手爪坐标原点 O_j 引起的线速度向量和角速度向量分别取为 v_j 和 ω_j 。若其他关节的角速度为零, 则可得下列关系式

$$v_j = (u_j \times b_{j7}) \dot{\theta}_j, \quad (7-90)$$

$$\omega_j = u_j \dot{\theta}_j. \quad (7-91)$$

式中, $\dot{\theta}_j$ 表示角速度大小, u_j 表示机械手第 j 个关节角速度 $\dot{\theta}_j$ 旋转方向的单位向量, b_{j7} 表示从第 j 个关节 O_j 到手爪形心坐标原点 O_7 的距离向量。

式(7-90)和(7-91)的速度向量 v_j 和 ω_j 是以机械手肩部坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$ 为固定参考坐标系表示的。而由式(7-88)可知, 需要写出沿手爪坐标系表示的速度向量 \dot{s} 。为此, 若取把手爪坐标系(7)变换到肩部参考坐标系(1)的(3×3)旋转坐标变换矩阵为 C_{17} , 且存在 $C_{17}^{-1} = C_{17}^T$, 则可通过下式写出沿手爪坐标系表示的速度向量为

$$\dot{s} = C_{17}^T \begin{pmatrix} v_j \\ \dots \\ \omega_j \end{pmatrix}, \quad (j=1, 2, \dots, 6). \quad (7-92)$$

显然, 上式中的各元素为表示机械手一个关节 j 以某个速度 $\dot{\theta}_j$ 旋转时, 沿手爪坐标系表示发生的手爪运动速度向量成分。

对于图 7-16 所示的情况, 若机械手各关节均以一定的角速度旋转时, 那么沿手爪坐标系表示发生的手爪运动速度向量可由下式表示

$$\dot{s} = C_{17}^T \begin{pmatrix} v_j \\ \omega_j \end{pmatrix} = C_{17}^T \begin{pmatrix} u_1 \times b_{17} & u_2 \times b_{27} & \dots & u_6 \times b_{67} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dots \\ \dot{\theta}_6 \end{pmatrix}. \quad (7-93)$$

比较式(7-88)和(7-93), 便可求得如下计算矩阵 $J(\theta)$ 的关系式

$$J(\theta) = C_{17}^T \begin{pmatrix} u_1 \times b_{17} & u_2 \times b_{27} & \dots & u_6 \times b_{67} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_6 \end{pmatrix}. \quad (7-94)$$

显然, 只要求出上式的逆矩阵 $J^{-1}(\theta)$, 并代入式(7-89), 便可决定能够使得手爪按照所要求的运动速度向量(大小和方向)动作的各关节轴的转动速度。

上面介绍了沿用手爪坐标系给出速度指令时, 对各轴的转动速度进行计算的方法。下面叙述关于把上述方法用于位置控制的问题。

取在现时位置中, 从固定在机械手肩部坐标系(1)的原点到手爪坐标系(7)的原点的位置向量为 $b_{17}(\theta_i)$, 从坐标系(7)变换到坐标系(1)的坐标变换矩阵为 $C_{17}(\theta_i)$, 而且这些量是已知的。另外, 把在目标位置中的这两个量取为 $b_{17}(\theta_f)$ 和 $C_{17}(\theta_f)$, 而这些量是根据被抓取物体的位置和方向等决定。

若设机械手手爪从现时位置移动到目标位置的时间为 T , 则上述各量之间具有下列关系式

$$v = \frac{[C_{17}(\theta)]^T [b_{17}(\theta_f) - b_{17}(\theta_i)]}{T}. \quad (7-95)$$

式中, v 为表示在手爪坐标系的线速度向量。由上式可知, 只要逐次算出从 b_{17} 起初位置开始

的移位，并用手爪坐标系表示出来，就能够算出向量 \boldsymbol{v} 。因而，利用式(7-89)也能够算出向量 $\dot{\theta}$ 。

那么，各关节的相对运动参数向量 θ ，可根据读取的现时值，通过下式求得

$$\theta = \theta_1 + \int_0^t \dot{\theta} dt. \quad (7-96)$$

第八章 仿生机械动力学问题

在动力学的研究中,一般包括着两个基本问题,一个是已知机构的运动规律,求作用力;另一个是已知作用力,求机构的运动规律。通常把这两个问题,分别称为动力学的第一类问题和第二类问题。

构成机构动力学的数学模型方法有很多,但基本类别有:(1) 根据牛顿-欧拉方程式;(2) 根据拉格朗日方程式;(3) 根据达朗培尔的虚功原理。

本章就仿生机械动力学分析的基本关系作一些介绍。

§ 8-1 分析力学概述

分析力学的出发点是虚位移原理。把虚位移原理与达朗培尔原理结合起来,便可得出非常有名的拉格朗日方程式。

虚位移原理表明,具有理想约束的质点系统,在某一位置上处于平衡的必要与充分条件为:所有作用于系统上的主动力,在该位置的任何虚位移中所作的元功之和等于零,即

$$\sum \delta A_F = 0,$$

或

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (8-1)$$

式中, i 为质点个数。

设该系统有 s 个约束方程,因而有 $3n - s = k$ 个自由度和广义坐标。则质点的坐标可写成为这些广义坐标的函数,即

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_k), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_k), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_k). \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8-2)$$

式中, q_1, q_2, \dots, q_k 为广义坐标(独立参数)。

于是,各质点的虚位移也可用下列变分表示之

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j, \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8-3)$$

那么,将式(8-3)代入式(8-1),可得出以广义坐标表示的质点系统的平衡条件为

$$\sum \delta A_F = \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^n F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0,$$

或可写为

$$\sum \delta A_F = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j = 0. \quad (8-4)$$

式中, Q_j 为与广义坐标相对应的广义力, δq_j 为广义位移。

由上式可知, 欲使质点系统平衡的必要与充分条件为所有与广义坐标相对应的广义力都等于零, 即

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k). \quad (8-5)$$

将达朗培尔原理与虚位移原理相结合, 便可得出如下动力学普遍方程式

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i = 0. \quad (8-6)$$

通常, 在动力学普遍方程式中所包含的系统内各个质点的坐标的变分不全是独立的, 在解方程时还需联立一系列表示几何约束的方程组。所以, 实际上用该方程来解决复杂系统的动力学问题并不方便。

拉格朗日从这个不包含约束力的动力学普遍方程出发, 采用广义坐标形式, 导出了拉格朗日方程式, 现介绍如下。

因为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j,$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

那么, 式(8-6)可改写为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k \left[Q_j - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0,$$

即

$$Q_j - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k).$$

又

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right).$$

为对上式作进一步变换,利用下列两个关系式

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

代入上式得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T \quad (j=1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

式中, T 为质点系统的动能。

于是,最后可得以广义坐标表示的动力学普遍方程——拉格朗日方程式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, k). \quad (8-8)$$

因为动能 T 可表示为

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

且在一般情况下, $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ 是 \dot{q} 的线性函数,即

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \\ \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t}. \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, n)$$

于是可得出

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k; t).$$

显然,拉格朗日方程式是一组以广义坐标为变量、以及这些变量对时间 t 的导数所组成的二阶微分方程。而且可以看出,该方程中不再包含系统的约束力,方程的数目不再决定于质点的数目,而是等于系统广义坐标的数目,也即是系统的自由度数目。

那么,通过解微分方程,就可得到决定系统运动规律的运动方程式,即

$$q_j = q_j(t), (j=1, 2, \dots, k).$$

下面讨论两种特殊情况。

(1) 绕定轴转动的情况

如当刚体绕定轴 z 转动时,具有一个自由度。以转动角度 θ 为广义坐标,则动能公式为

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2.$$

那么

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J \dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

另外, 对应于 θ 的广义力即为刚体上主动力对于转轴的主矩 L_z 。于是, 将上述关系代入拉格朗日方程式得

$$\frac{d}{dt}(J \dot{\theta}) = L_z,$$

即

$$J \ddot{\theta} = L_z. \quad (8-9)$$

(2) 当主动力具有势函数时的情况

设有一空间, 质点在这空间内的任何位置都受到确定的力的作用, 则这空间就称为力场。例如, 在地面附近的空间是重力的力场。

由于力场的力 \mathbf{F} 仅与质点所在的位置有关, 则其在坐标轴上的投影 F_x, F_y, F_z 是质点坐标 (x, y, z) 的单值连续函数, 即

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(x, y, z), \\ F_y &= F_y(x, y, z), \\ F_z &= F_z(x, y, z). \end{aligned}$$

当质点 m 在一个力场内运动, 则必受到力场的力 \mathbf{F} 的作用。如果力 \mathbf{F} 的功仅由质点运动的最初与最后位置所决定, 而与质点运动轨迹的形状无关, 则此力场称为势力场, 而力则称为有势力或势力(如重力、弹性力、万有引力等)。由于质点在势力场中的机械能保持不变(符合能量守恒定律), 所以势力场又称保守力场, 势力又称保守力。

若作用在质点系的主动力为保守力, 则质点系具有势能。该势能也可用广义坐标的函数来表示, 即

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

由于势力所作的元功等于势能函数的全微分冠以负号, 即

$$\Delta A = -dV.$$

而且

$$\begin{aligned} \Delta A &= F_x dx + F_y dy + F_z dz, \\ dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz, \end{aligned}$$

比较上列两式可得

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

则广义力为

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \\
 &= -\frac{\partial V}{\partial q_j}, (j=1, 2, \dots, k). \quad (8-10)
 \end{aligned}$$

于是,这时的拉格朗日方程成为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} T = -\frac{\partial V}{\partial q_j},$$

或

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) &= 0. \quad (8-11) \\
 (j=1, 2, \dots, k)
 \end{aligned}$$

设以函数 L 定义为质点系统的动能与势能函数之差,即

$$L = T - V. \quad (8-12)$$

显然在一般情况下也存在

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k; t),$$

函数 L 称为拉格朗日函数或动势。

因为,势能函数与广义速度无关,即

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

则

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

于是,在势力场中,当系统上的主动力具有势函数时的拉格朗日方程式可用拉格朗日函数表示为

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= 0. \quad (8-13) \\
 (j=1, 2, \dots, k)
 \end{aligned}$$

由此可见,拉格朗日方程的数目等于质点系统的自由度的数目。在这个情况下,列出质点系统的运动微分方程,归结为写出系统的拉格朗日函数。

§ 8-2 机构运动规律求解的等效转化法

研究在各种已知外力作用下的运动问题可有多种分析方法,等效构件法是它的一种比较普遍适用的方法。

一、运动方程式

按照动能定理,机构中所有外力做功的总和应等于机构动能的增量,即可表示为

$$\Delta W = \Delta T. \quad (8-14)$$

如对于作转动的等效构件,设作用在该构件上的等效驱动力矩和等效阻力矩分别为 M_2^* 和 M_1^* ,该构件由转角 ϕ_1 运动至 ϕ_2 时,相应的等效转动惯量由 J_1^* 变为 J_2^* ,角速度由 ω_1 变为 ω_2 。于是,按式(8-14)可写出用等效转动构件表示机构运动的能量方程式为

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_2^* d\phi - \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_1^* d\phi - \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_c^* d\phi \\ &= \frac{1}{2} J_2^* \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1^* \omega_1^2. \end{aligned} \quad (8-15)$$

若等效力矩 M_2^* 和 M_1^* 均非转角 ϕ 的函数,则为了求解的方便,可将上式改写为如下微分形式的运动方程式

$$M^* d\phi = (M_2^* - M_1^*) d\phi = d\left(\frac{1}{2} J^* \omega^2\right).$$

因为

$$\omega \frac{d\omega}{d\phi} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d\omega}{d\phi} = \frac{d\omega}{dt},$$

则上式可写为

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{2} J^* \omega^2 \right) = \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ^*}{d\phi} + \frac{J^*}{2} 2\omega \frac{d\omega}{d\phi} \\ &= \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ^*}{d\phi} + J^* \frac{d\omega}{dt}. \end{aligned} \quad (8-16)$$

式(8-16)即为用等效转动构件表示机构运动的力矩方程式。

如取移动件为研究机构运动的等效构件,则机构运动的能量方程式为

$$\Delta W = \int_{s_1}^{s_2} F^* ds = \int_{s_1}^{s_2} F_2^* ds - \int_{s_1}^{s_2} F_1^* ds = \frac{1}{2} m_2^* v_2^2 - \frac{1}{2} m_1^* v_1^2. \quad (8-17)$$

式中, F_2^* 、 F_1^* 分别表示所有驱动力和所有阻力的等效力, m_1^* 、 m_2^* 分别表示与等效移动构件位置 s_1 、 s_2 相对应的等效质量, v_1 、 v_2 分别表示等效构件对应于位置 s_1 、 s_2 时的速度。

同上所述,可将式(8-17)改写为如下微分形式的运动方程式

$$F^* ds = (F_2^* - F_1^*) ds = d\left(\frac{1}{2} m^* v^2\right).$$

因为

$$v \frac{dv}{ds} = \frac{ds}{dt} \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt},$$

则上式可写为

$$\begin{aligned}
 F^* &= F_a^* - F_c^* = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} m^* v^2 \right) = \frac{v^2}{2} \frac{dm^*}{ds} + \frac{m^*}{2} 2v \frac{dv}{ds} \\
 &= \frac{v^2}{2} \frac{dm^*}{ds} + m^* \frac{dv}{dt}
 \end{aligned} \tag{8-18}$$

另外,根据相对运动的动力学基本方程式可写出

$$m^* \frac{dv}{dt} = F^* + F_{2^*}^* + F_{3^*}^*$$

式中, $F_{2^*}^*$ 为等效牵连惯性力, $F_{3^*}^*$ 为等效哥氏惯性力。对于作移动的构件 $F_{3^*}^* = 0$ 。

由上述式(8-15)~(8-18)可知,空间机构在各种已知力作用下的运动方程式与平面机构的完全一样。所以,只要按空间机构的特点,求出等效力矩、等效力、等效转动惯量和等效质量等,便可用一般机械原理中所述等效构件运动方程式的数值积分法或解析法,解出等效构件的真实运动,从而去确定构件中其他构件和其他点的运动。

二、等效力矩的等效力

在单自由度的空间机构中,作用于各构件上所有外力或外力矩在某一瞬时的功率的总和 $\sum_{i=1}^n P_i$ 应与等效力矩或等效力在同一瞬时的功率 $M^* \omega$ 或 $F^* v$ 相等。因此,其等效力矩 M^* 或等效力 F^* 可由下列公式求得

$$\left. \begin{aligned}
 M^* &= \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{\omega} \\
 F^* &= \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{v}
 \end{aligned} \right\} \tag{8-19}$$

设作用在机构构件 i 上的外力和外力矩分别为 F_i 和 M_i ($i=1, 2, \dots, n$), 它们在固定参考坐标系中的分量相应为 $(F_i)_{x_0}, (F_i)_{y_0}, (F_i)_{z_0}$ 及 $(M_i)_{x_0}, (M_i)_{y_0}, (M_i)_{z_0}$; 构件 i 的绝对角速度为 ω_i , 它在固定参考坐标系中的分量为 $(\omega_i)_{x_0}, (\omega_i)_{y_0}, (\omega_i)_{z_0}$; 力 F_i 的作用点的速度为 v_i , 它在固定参考坐标系中的分量为 $(v_i)_{x_0}, (v_i)_{y_0}, (v_i)_{z_0}$ 。于是由式(8-19)可以写出

$$\begin{aligned}
 M^* &= \sum_{i=1}^n \left[F_i \frac{v_i}{\omega} \cos(F_i, v_i) + M_i \frac{\omega_i}{\omega} \cos(M_i, \omega_i) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[(F_i)_{x_0} \frac{(v_i)_{x_0}}{\omega} + (F_i)_{y_0} \frac{(v_i)_{y_0}}{\omega} + (F_i)_{z_0} \frac{(v_i)_{z_0}}{\omega} \right. \\
 &\quad \left. + (M_i)_{x_0} \frac{(\omega_i)_{x_0}}{\omega} + (M_i)_{y_0} \frac{(\omega_i)_{y_0}}{\omega} + (M_i)_{z_0} \frac{(\omega_i)_{z_0}}{\omega} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ F_i \left[\frac{(v_i)_{x_0}}{\omega} \cos(F_i, x_0) + \frac{(v_i)_{y_0}}{\omega} \cos(F_i, y_0) + \frac{(v_i)_{z_0}}{\omega} \cos(F_i, z_0) \right] \right. \\
 &\quad \left. + M_i \left[\frac{(\omega_i)_{x_0}}{\omega} \cos(M_i, x_0) + \frac{(\omega_i)_{y_0}}{\omega} \cos(M_i, y_0) + \frac{(\omega_i)_{z_0}}{\omega} \cos(M_i, z_0) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{8-20}$$

$$\begin{aligned}
F_i^* &= \sum_{i=1}^n \left[F_i \frac{v_i}{v} \cos(F_i, v_i) + M_i \frac{\omega_i}{v} \cos(M_i, \omega_i) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[(F_i)_{x_0} \frac{(v_i)_{x_0}}{v} + (F_i)_{y_0} \frac{(v_i)_{y_0}}{v} + (F_i)_{z_0} \frac{(v_i)_{z_0}}{v} \right. \\
&\quad \left. + (M_i)_{x_0} \frac{(\omega_i)_{x_0}}{v} + (M_i)_{y_0} \frac{(\omega_i)_{y_0}}{v} + (M_i)_{z_0} \frac{(\omega_i)_{z_0}}{v} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ F_i \left[\frac{(v_i)_{x_0}}{v} \cos(F_i, x_0) + \frac{(v_i)_{y_0}}{v} \cos(F_i, y_0) + \frac{(v_i)_{z_0}}{v} \cos(F_i, z_0) \right] \right. \\
&\quad \left. + M_i \left[\frac{(\omega_i)_{x_0}}{v} \cos(M_i, x_0) + \frac{(\omega_i)_{y_0}}{v} \cos(M_i, y_0) + \frac{(\omega_i)_{z_0}}{v} \cos(M_i, z_0) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{8-21}$$

上列各式中,力和力矩对固定参考坐标系的方向余弦,可由力和力矩对所在构件动坐标系的方向余弦通过坐标变换求出:

$$\left. \begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos(F_i, x_0) \\ \cos(F_i, y_0) \\ \cos(F_i, z_0) \end{pmatrix} &= C_{0i} \begin{pmatrix} \cos(F_i, x_i) \\ \cos(F_i, y_i) \\ \cos(F_i, z_i) \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \cos(M_i, x_0) \\ \cos(M_i, y_0) \\ \cos(M_i, z_0) \end{pmatrix} &= C_{0i} \begin{pmatrix} \cos(M_i, x_i) \\ \cos(M_i, y_i) \\ \cos(M_i, z_i) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \right\} \tag{8-22}$$

至于各速度比 $(v_i)_{x_0}/\omega$ 、 $(\omega_i)_{x_0}/\omega$ 、 \dots 或 $(v_i)_{z_0}/v$ 、 $(\omega_i)_{z_0}/v$ 、 \dots , 在单自由度的空间机构中,仅决定于机构中各构件的位置,而与机构的真实速度大小无关。因此,在选定等效构件之后,可简单地假定 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 或 $v = 1 \text{ m/s}$, 从而求出机构的各个广义速度(独立的运动参数),以及受外力矩作用的构件的绝对角速度和各外力作用点的绝对速度,然后便可由式(8-20)或(8-21)中的适当公式计算出等效力矩或等效力。

三、等效转动惯量和等效质量

空间机构中各运动构件动能的总和 $\sum_{i=1}^n T_i$ 与等效转动构件或等效移动构件的动能 $\frac{1}{2} J^* \omega^2$ 或 $\frac{1}{2} m^* v^2$ 相等。于是,等效转动惯量 J^* 或等效质量 m^* 可用下式计算

$$J^* = \frac{2 \sum_{i=1}^n T_i}{\omega^2}, \quad m^* = \frac{2 \sum_{i=1}^n T_i}{v^2}. \tag{8-23}$$

由于任何空间机构构件的运动均可看作为随质心的移动和绕质心的转动所合成,为此构件 i 的动能可写成为

$$T_i = \frac{1}{2} v_{s_i} (m_i v_{s_i}) + \frac{1}{2} (\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}) J_i \begin{pmatrix} \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{pmatrix} \quad (8-24)$$

式中: v_{s_i} 为构件 i 质心 s_i 的绝对速度, m_i 为构件 i 的质量, $\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}$ 为构件 i 的绝对角速度在该构件动坐标系中的分量, J_i 为构件 i 对以质心 s_i 为原点, 且平行于构件动坐标系的某坐标系的转动惯量矩阵。

转动惯量矩阵可表示为

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{x_i} & -J_{x_i y_i} & -J_{x_i z_i} \\ -J_{y_i x_i} & J_{y_i} & -J_{y_i z_i} \\ -J_{z_i x_i} & -J_{z_i y_i} & J_{z_i} \end{pmatrix} \quad (8-25)$$

式中: $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}$ 为构件 i 的主转动惯量, $J_{x_i y_i}, J_{y_i z_i}, J_{z_i x_i}$ 为构件 i 的离心转动惯量。上式推导可参阅式(8-32)~(8-34)。

于是, 将式(8-25)代入式(8-24), 可得求构件 i 动能的一般公式为

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} m_i v_{s_i}^2 + \frac{1}{2} (\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}) \begin{pmatrix} J_{x_i} & -J_{x_i y_i} & -J_{x_i z_i} \\ -J_{y_i x_i} & J_{y_i} & -J_{y_i z_i} \\ -J_{z_i x_i} & -J_{z_i y_i} & J_{z_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m_i v_{s_i}^2 + \frac{1}{2} (\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}) \begin{pmatrix} J_{x_i} \omega_{x_i} - J_{x_i y_i} \omega_{y_i} - J_{x_i z_i} \omega_{z_i} \\ -J_{y_i x_i} \omega_{x_i} + J_{y_i} \omega_{y_i} - J_{y_i z_i} \omega_{z_i} \\ -J_{z_i x_i} \omega_{x_i} - J_{z_i y_i} \omega_{y_i} + J_{z_i} \omega_{z_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (m_i v_{s_i}^2 + J_{x_i} \omega_{x_i}^2 + J_{y_i} \omega_{y_i}^2 + J_{z_i} \omega_{z_i}^2) \\ &\quad - (J_{x_i y_i} \omega_{x_i} \omega_{y_i} + J_{y_i z_i} \omega_{y_i} \omega_{z_i} + J_{z_i x_i} \omega_{z_i} \omega_{x_i}) \end{aligned} \quad (8-26)$$

上式中构件 i 的绝对角速度在该构件动坐标系中的分量, 可利用式(6-9), 并由下式计算

$$\begin{aligned} \omega_{1i} &= C_{1i} \omega_{10} = C_{1i} (\omega_{10x} + C_{01} \omega_{21} + \dots + C_{0, i-1} \omega_{i, i-1}) \\ &= C_{1i} \omega_{10x} + C_{1i} \omega_{21} + \dots + C_{1, i-1} \omega_{i, i-1} \end{aligned} \quad (8-27)$$

那么, 将式(8-26)代入式(8-23)可得

$$\begin{aligned} J^* &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[m_i \left(\frac{v_{s_i}}{\omega} \right)^2 + J_{x_i} \left(\frac{\omega_{x_i}}{\omega} \right)^2 + J_{y_i} \left(\frac{\omega_{y_i}}{\omega} \right)^2 + J_{z_i} \left(\frac{\omega_{z_i}}{\omega} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[J_{x_i y_i} \left(\frac{\omega_{x_i}}{\omega} \right) \left(\frac{\omega_{y_i}}{\omega} \right) + J_{y_i z_i} \left(\frac{\omega_{y_i}}{\omega} \right) \left(\frac{\omega_{z_i}}{\omega} \right) + J_{z_i x_i} \left(\frac{\omega_{z_i}}{\omega} \right) \left(\frac{\omega_{x_i}}{\omega} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (8-28)$$

$$\begin{aligned} m^* &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[m_i \left(\frac{v_{s_i}}{v} \right)^2 + J_{x_i} \left(\frac{\omega_{x_i}}{v} \right)^2 + J_{y_i} \left(\frac{\omega_{y_i}}{v} \right)^2 + J_{z_i} \left(\frac{\omega_{z_i}}{v} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[J_{x_i y_i} \left(\frac{\omega_{x_i}}{v} \right) \left(\frac{\omega_{y_i}}{v} \right) + J_{y_i z_i} \left(\frac{\omega_{y_i}}{v} \right) \left(\frac{\omega_{z_i}}{v} \right) + J_{z_i x_i} \left(\frac{\omega_{z_i}}{v} \right) \left(\frac{\omega_{x_i}}{v} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (8-29)$$

由于离心转动惯量属于代数数量, 所以对有对称面的构件 i , 其三个离心转动惯量中必有

两个为零。如当对称面为 z, x_i 时, $J_{x_i y_i} = J_{y_i z_i} = 0$; 当对称面为 x_i, y_i 时, $J_{y_i z_i} = J_{z_i x_i} = 0$; 当对称面为 y_i, z_i 时, $J_{z_i x_i} = J_{x_i y_i} = 0$ 。若构件 i 的动坐标轴取得平行于惯性主轴, 则三个离心转动惯量均为零。这样, 将使等效转动惯量或等效质量的计算得到许多简化。

在一般空间机构中, 各构件的质量和转动惯量均为常值, 而各种速比又决定于机构中各构件的位置, 所以等效转动惯量和等效质量为机构等效构件位置的函数。

四、构件惯性力的确定

由理论力学可知, 构件 i 作空间运动时的惯性力系, 可简化为一个通过质心 s 的惯性力主向量 F_s 和一个惯性力偶矩 M_s 。

构件的惯性力主向量的大小等于构件的质量与构件质心绝对加速度向量的乘积, 方向与加速度方向相反, 所以它在固定坐标系中的分量可写为

$$\left. \begin{aligned} (F_s)_{x_0} &= -m(a_s)_{x_0} \\ (F_s)_{y_0} &= -m(a_s)_{y_0} \\ (F_s)_{z_0} &= -m(a_s)_{z_0} \end{aligned} \right\} \quad (8-30)$$

如在与构件 i 相连的动坐标系 i 中表示构件的惯性力主向量, 则可应用方向余弦矩阵 C_{i0} 进行坐标变换求得, 即

$$\begin{pmatrix} (F_s)_{x_i} \\ (F_s)_{y_i} \\ (F_s)_{z_i} \end{pmatrix} = C_{i0} \begin{pmatrix} (F_s)_{x_0} \\ (F_s)_{y_0} \\ (F_s)_{z_0} \end{pmatrix} \quad (8-31)$$

显然, 当构件绕通过本身质心的固定轴转动时, 惯性力主向量始终为零。

根据动量矩定理可知, 构件的惯性力偶矩是由构件绕质心转动的动量矩对时间的导数而定。

在动坐标系 i 中表示构件对质心的动量矩为

$$H_i = \sum m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \sum m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)),$$

利用三重矢积公式(5-49), 上式可写为

$$H_i = \sum m_i [\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})]. \quad (8-32)$$

因为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}. \end{aligned}$$

把它们代入式(8-32), 可得动量矩在动坐标系 i 中的分量为

$$\begin{aligned} H_{x_i} &= \sum m_i [\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] \\ &= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i \\ &= \omega_x J_{z_i} - \omega_y J_{z_i y_i} - \omega_z J_{z_i x_i}, \\ H_{y_i} &= \sum m_i [\omega_y (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - y_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] \\ &= \omega_y \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_x \sum m_i y_i x_i - \omega_z \sum m_i y_i z_i \\ &= -\omega_x J_{y_i z_i} + \omega_y J_{y_i} - \omega_z J_{y_i x_i}, \\ H_{z_i} &= \sum m_i [\omega_z (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - z_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] \\ &= \omega_z \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - \omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_y \sum m_i z_i y_i \\ &= -\omega_x J_{z_i x_i} - \omega_y J_{z_i y_i} + \omega_z J_{z_i}. \end{aligned} \quad (8-33)$$

上式也可用动量矩列阵表示为

$$H_i = \begin{pmatrix} H_{x_i} \\ H_{y_i} \\ H_{z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{x_i} & -J_{x_i y_i} & -J_{x_i z_i} \\ -J_{y_i x_i} & J_{y_i} & -J_{y_i z_i} \\ -J_{z_i x_i} & -J_{z_i y_i} & J_{z_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{pmatrix} = J_i \begin{pmatrix} \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{pmatrix} \quad (8-34)$$

式中, J_i 即为式(8-25)所示的转动惯量矩阵。

于是, 利用坐标变换矩阵, 可写出在固定坐标系中表示构件 i 对质心的动量矩列阵为

$$H_o = C_{oi} H_i \quad (8-35)$$

那么, 将式(8-35)对时间求导一次, 便可求得在固定坐标系中表示的构件 i 惯性力偶矩列阵为

$$M_{o_i} = -\frac{d}{dt} H_o = -(C_{oi} \dot{H}_i + \dot{C}_{oi} H_i) \quad (8-36)$$

及在动坐标系 i 中表示构件惯性力偶矩列阵为

$$M_{oi} = C_{io} M_{o_i} = -(\dot{H}_i + C_{io} \dot{C}_{oi} H_i) \quad (8-37)$$

利用式(5-85)及式(8-34), 可将上式改写成

$$\begin{aligned} M_{oi} &= -(\dot{H}_i + W_{io_i} H_i) \\ &= -(J_i \dot{\omega}_{io_i} + W_{io_i} J_i \omega_{io_i}) \end{aligned} \quad (8-38)$$

对上式进行矩阵连乘运算可得

$$\begin{aligned} M_{oi} &= -\left(\begin{pmatrix} J_{x_i} & -J_{x_i y_i} & -J_{x_i z_i} \\ -J_{y_i x_i} & J_{y_i} & -J_{y_i z_i} \\ -J_{z_i x_i} & -J_{z_i y_i} & J_{z_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_{x_i} \\ \dot{e}_{y_i} \\ \dot{e}_{z_i} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{x_i} & \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} & 0 & -\omega_{z_i} \\ -\omega_{y_i} & \omega_{z_i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{x_i} & -J_{x_i y_i} & -J_{x_i z_i} \\ -J_{y_i x_i} & J_{y_i} & -J_{y_i z_i} \\ -J_{z_i x_i} & -J_{z_i y_i} & J_{z_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{pmatrix} \right) \\ &= -\left(\begin{pmatrix} J_{x_i} \dot{e}_{x_i} - J_{x_i y_i} \dot{e}_{y_i} - J_{x_i z_i} \dot{e}_{z_i} \\ -J_{y_i x_i} \dot{e}_{x_i} + J_{y_i} \dot{e}_{y_i} + J_{y_i z_i} \dot{e}_{z_i} \\ -J_{z_i x_i} \dot{e}_{x_i} - J_{z_i y_i} \dot{e}_{y_i} + J_{z_i} \dot{e}_{z_i} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} -\omega_{x_i}(-J_{y_i x_i} \omega_{x_i} + J_{y_i} \omega_{y_i} - J_{y_i z_i} \omega_{z_i}) + \omega_{y_i}(-J_{x_i z_i} \omega_{x_i} - J_{z_i y_i} \omega_{y_i} + J_{z_i} \omega_{z_i}) \\ \omega_{z_i}(J_{x_i} \omega_{x_i} - J_{x_i y_i} \omega_{y_i} - J_{x_i z_i} \omega_{z_i}) - \omega_{z_i}(-J_{z_i x_i} \omega_{x_i} - J_{z_i y_i} \omega_{y_i} + J_{z_i} \omega_{z_i}) \\ -\omega_{y_i}(J_{x_i} \omega_{x_i} - J_{x_i y_i} \omega_{y_i} - J_{x_i z_i} \omega_{z_i}) + \omega_{z_i}(-J_{y_i x_i} \omega_{x_i} + J_{y_i} \omega_{y_i} - J_{y_i z_i} \omega_{z_i}) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} (M_{oi})_{x_i} &= -J_{x_i} \dot{e}_{x_i} + (J_{y_i} - J_{z_i}) \omega_{y_i} \omega_{z_i} + J_{x_i y_i} (\dot{e}_{y_i} - \omega_{x_i} \omega_{z_i}) \\ &\quad + J_{x_i z_i} (\dot{e}_{z_i} + \omega_{x_i} \omega_{y_i}) + J_{y_i z_i} (\omega_{y_i}^2 - \omega_{z_i}^2), \\ (M_{oi})_{y_i} &= -J_{y_i} \dot{e}_{y_i} + (J_{z_i} - J_{x_i}) \omega_{z_i} \omega_{x_i} + J_{y_i z_i} (\dot{e}_{z_i} - \omega_{y_i} \omega_{x_i}) \\ &\quad + J_{y_i x_i} (\dot{e}_{x_i} + \omega_{y_i} \omega_{z_i}) + J_{z_i x_i} (\omega_{z_i}^2 - \omega_{x_i}^2), \\ (M_{oi})_{z_i} &= -J_{z_i} \dot{e}_{z_i} + (J_{x_i} - J_{y_i}) \omega_{x_i} \omega_{y_i} + J_{z_i x_i} (\dot{e}_{x_i} - \omega_{z_i} \omega_{y_i}) \\ &\quad + J_{z_i y_i} (\dot{e}_{y_i} + \omega_{z_i} \omega_{x_i}) + J_{x_i y_i} (\omega_{x_i}^2 - \omega_{y_i}^2). \end{aligned} \quad (8-39)$$

上列式中, $\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}$ 及 $\dot{e}_{x_i}, \dot{e}_{y_i}, \dot{e}_{z_i}$ 为构件 i 的绝对角速度和角加速度在动坐标系 i 中的分量。

那么, 利用坐标变换关系可以求出构件 i 的惯性力偶矩在固定坐标系中的列阵为

$$M_{j,i} = C_{ij} M_{i,i}$$

(8-40)

§ 8-3 用欧拉角描述拟人机构动力学的数学模型

一、概 述

用欧拉角描述拟人机构动力学的方法,就是在对固定坐标系定义刚体构件的位置时,采用一组角度,该角度即为经典力学中有名的欧拉角 (θ, ψ, ϕ) 。为方便编制机构系统的数学模型,采用图 8-1 所示的坐标系和如下的定义及符号(图 8-2)。

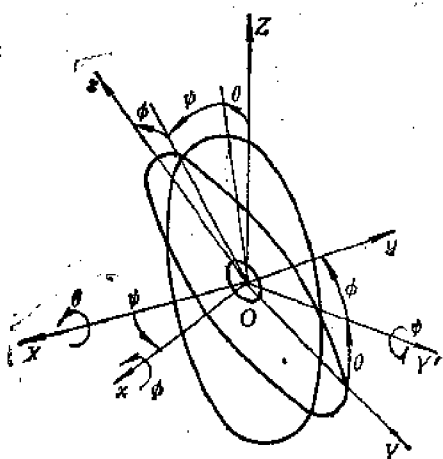


图 8-1 欧拉角的定义

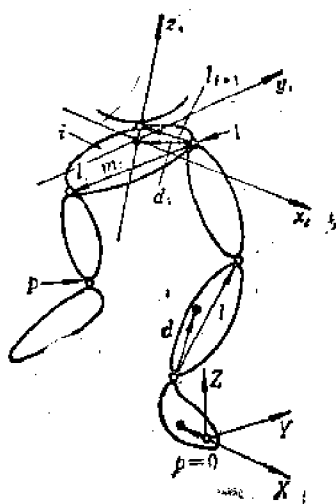


图 8-2 运动链的主要符号

- (1) 构件有 n 个, 即 $i = 1, 2, \dots, n$;
- (2) 构件之间用球窝型关节连接, 而且是简单的单链连接方式;
- (3) 各构件的动坐标系 (x, y, z) 原点取在质心上, 方向任意选择;
- (4) 设构件 i 的质量为 m_i , 惯性张量为 J_i , 第一关节和质心之间的距离为 d_i 。各构件的第一关节定义为离固定点最近的那个关节;
- (5) 由于各构件为简单连接, 所以关节数等于构件数(包括固定支撑点关节), 并记为 $p = 0, 1, 2, \dots$;
- (6) 各构件的第一关节到其他关节之间的距离, 用距离矢量 l_j 表示, $j = 1, 2, 3, \dots, m, j$ 与 i 无关, 在一个构件中可以有一个、两个以上或没有这个矢量;
- (7) 各构件的位置与姿态, 用对固定点的质心位置和欧拉角表示。欧拉角 (θ, ψ, ϕ) 定义为动坐标系 (x, y, z) 相对于固定坐标系的转动, 而质心的位置是由位于所求构件与固定点之间的所有构件的姿态决定。

为了能用同一数学模型来处理各种各样的机构模型, 考虑采用如下三种结构矩阵:

- (1) 矩阵 e_{ip} 。它表示各构件 d_i 对关节力矩的影响, 当构件 i 绕关节 p 产生力矩时, 取矩阵元素 $e_{ip} = 1$, 否则 $e_{ip} = 0$;

(2) 矩阵 δ_{ijp} 。它表示矢量 \mathbf{l}_j 是否与由构件 i 产生的绕关节 p 的力矩有关, 当矢量 \mathbf{l}_j 位于关节 p 和构件 i 的第一关节的连线上时, 取矩阵元素 $\delta_{ijp} = 1$, 否则 $\delta_{ijp} = 0$;

(3) 矩阵 γ_{ij} 。它表示构件与矢量 \mathbf{l}_j 的关系, 当矢量 \mathbf{l}_j 位于构件 i 上时, 取矩阵元素 $\gamma_{ij} = 1$, 否则 $\gamma_{ij} = 0$ 。

绕关节 p 的力矩, 设定用相对于如下的坐标系表达: 该坐标系的坐标轴是根据对固定在 p 点所连结的两个构件上的坐标系的方向余弦来定义。设在关节 p 点所连结的两个构件分别以 $(p, 1)$ 和 $(p, 2)$ 表示, 则该坐标系的第一轴乃根据与第一构件坐标系之间的方向余弦为 $(l, m, n)_{p,1}$ 给出, 第二轴乃根据与第二构件坐标系之间的方向余弦为 $(l, m, n)_{p,2}$ 给出, 第三轴则定义为与上述两根轴线正交。各构件的动坐标系 (x, y, z) 原点取在该构件的质心上。

二、构件的旋转运动

为了描述构件的旋转运动, 采用图 8-1 所示的坐标系及欧拉角 (θ, ψ, ϕ) 。

1. 坐标变换

为了把固定坐标系的分量 (X, Y, Z) 变换为固结在构件上的动坐标系的分量 (x, y, z) , 可利用下列关系式给出。

根据定义

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ &= \phi \psi \theta \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8-41)$$

由于 ϕ, ψ, θ 均为正交矩阵, 于是可得

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \theta^T \psi^T \phi^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (8-42)$$

2. 构件的角速度

构件的角速度可用欧拉角的时间微分表示如下

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \phi \psi \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8-43)$$

式中, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 为分别绕动坐标系各轴旋转的角速度分量。若把 ϕ, ψ 矩阵代入上式, 并进行矩阵运算, 可得

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\theta} + 0 + \dot{\phi} \\ \sin \psi \sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \dot{\psi} + 0 \\ \sin \psi \cos \phi \dot{\theta} - \sin \phi \dot{\psi} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 1 \\ \sin \psi \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \psi \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}. \quad (8-44)$$

式中, 变换矩阵 Π 为

$$\Pi = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 1 \\ \sin \psi \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \psi \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (8-45)$$

3. 角速度的时间变化率

角速度的时间变化率,即角加速度为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \Pi \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \Pi \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \cos \psi & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \psi \sin \phi + \dot{\phi} \sin \psi \cos \phi & -\dot{\phi} \sin \phi & 0 \\ \dot{\psi} \cos \psi \cos \phi - \dot{\phi} \sin \psi \sin \phi & -\dot{\phi} \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \Pi \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi \\ -\sin \phi & \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \phi \\ -\cos \phi & -\sin \psi \sin \phi & \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \Pi \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \Pi \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + \Pi_1 \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8-46)$$

式中, 矩阵 Π_1 为

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi \\ -\sin \phi & \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \phi \\ -\cos \phi & -\sin \psi \sin \phi & \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (8-47)$$

4. 外力矩

引起构件转动的外力矩,可用绕 x, y, z 轴的分量表示。由于外力矩与构件的角动量矩有关,所以首先要求角动量矩矩阵。

如式(8-34)所示,动量矩在动坐标系中的分量列阵为

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (8-48)$$

式中, 矩阵 J 称为惯性张量,即转动惯量矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (8-49)$$

那么,据动量矩定理可知,作用外力的主矩,等于动量矩对时间的导数,即

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{dH_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dH_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dH_z}{dt} \mathbf{k} + H_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + H_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + H_z \frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

因为

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k},$$

则

$$H_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + H_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + H_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}$$

$$= (H_x \omega_y - H_y \omega_x) \mathbf{i} + (H_x \omega_z - H_z \omega_x) \mathbf{j} + (H_y \omega_z - H_z \omega_y) \mathbf{k}$$

于是,可得外力矩在动坐标系中的分量列阵为

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dH_x}{dt} \\ \frac{dH_y}{dt} \\ \frac{dH_z}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - H_y \omega_x + H_x \omega_y \\ H_x \omega_z + 0 - H_z \omega_x \\ -H_x \omega_y + H_y \omega_x + 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - \omega_x & \omega_y \\ \omega_x & 0 & -\omega_z \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} + \boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (8-50)$$

将式(8-48)代入上式得

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} J \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \boldsymbol{\omega} J \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

因为动坐标系固定在构件*i*上,所以*J*的元素在动坐标上是常数,则

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \boldsymbol{\omega} J \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

将上式进一步展开后,可得

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + J_1 \begin{pmatrix} \omega_x^2 \\ \omega_y^2 \\ \omega_z^2 \end{pmatrix} + J_2 \begin{pmatrix} \omega_x \omega_y \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_y \omega_z \end{pmatrix} \quad (8-51)$$

式中,惯性矩阵*J*₁、*J*₂定义如下

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -J_{xy} & J_{yz} \\ J_{xy} & 0 & -J_{zx} \\ -J_{yz} & J_{zx} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} J_{xx} - J_{yy} & J_{yz} & -J_{xz} \\ -J_{zy} & J_{xx} - J_{zz} & J_{xy} \\ J_{zz} & -J_{yy} & J_{yy} - J_{zz} \end{pmatrix} \quad (8-52)$$

为了把外力矩表示为欧拉角的关系式,把角速度的二次项作如下变换

$$\begin{pmatrix} \omega_x^2 \\ \omega_y^2 \\ \omega_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \Pi \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} (\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}) \Pi^T$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos \psi & \dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \\ (\sin \psi \sin \phi & \dot{\theta} + \cos \phi \dot{\psi})^2 \\ (\sin \psi \cos \phi & \dot{\theta} - \sin \phi \dot{\psi})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & 0 & 1 \\ \sin^2 \psi \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 \\ \sin^2 \psi \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 2 \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 2 \sin \psi \sin \phi \cos \phi \\ 0 & 0 & -2 \sin \psi \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix} = \Pi_2 \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix} + \Pi_3 \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (8-53)$$

式中, 矩阵 Π_2, Π_3 为

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & 0 & 1 \\ \sin^2 \psi \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 \\ \sin^2 \psi \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 2 \sin \psi \sin \phi \cos \phi \\ 0 & 0 & -2 \sin \psi \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \quad (8-54)$$

同样可写出

$$\begin{pmatrix} \omega_y \omega_x \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_z \omega_y \end{pmatrix} = \Pi_4 \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix} + \Pi_5 \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (8-55)$$

式中, 矩阵 Π_4, Π_5 为

$$\Pi_4 = \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \sin \phi \cos \phi & -\sin \phi \cos \phi & 0 \\ \sin \psi \cos \psi \cos \phi & 0 & 0 \\ \sin \psi \cos \psi \sin \phi & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Pi_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ -\sin \phi & \sin \psi \cos \phi & -\cos \psi \sin \phi \\ \cos \phi & \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix} \quad (8-56)$$

将上列有关各式代入式(8-51), 可得如下的外力矩计算式

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = J \Pi \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + (J_1 \Pi_2 + J_2 \Pi_4) \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix} + (J \Pi_1 + J_1 \Pi_3 + J_2 \Pi_5) \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (8-57)$$

以上所求的外力矩分量, 都是相对于动坐标系表达的。那么, 通过如下的逆变换, 就可得到相对于固定坐标系 (X, Y, Z) 的分量为

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \theta^T \psi^T \phi^T \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (8-58)$$

于是, 将式(8-57)代入上式, 便可得外力矩的最终算式为

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_i = D_i \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_i + E_i \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_i + F_i \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_i \quad (8-59)$$

式中, 下标 i 表明该力矩是与构件 i 的转动有关。变换矩阵 D_i, E_i, F_i 决定于欧拉角及构件的惯性性质, 并由下列公式定义

$$\left. \begin{aligned} D &= \theta^T \psi^T \phi^T J \Pi, \\ E &= \theta^T \psi^T \phi^T (J_1 \Pi_2 + J_2 \Pi_4), \\ F &= \theta^T \psi^T \phi^T (J \Pi_1 + J_1 \Pi_3 + J_2 \Pi_5). \end{aligned} \right\} \quad (8-60)$$

当动坐标系与构件的惯性主轴方向一致时,矩阵 J_1 为零矩阵, 矩阵 J_2, J_3 都变成对角矩阵。

三、构件的线运动

1. 位置表示

当研究构件的线运动时, 质心的位置可以考虑用距离 l 和 d 的组合来表示。

距离 l 为从构件的第一关节指向同构件其他关节的矢量 l 的长度。各构件具有 l 的个数可为零或适当值。其下标 j ($j=1, 2, \dots, m$) 与构件的下标无关。

距离 d 为从构件第一关节指向同构件质心的矢量 d 的长度。所以构件 i 的距离 d 只有一种, 并记为 d_i ($i=1, 2, \dots, n$)。

显然, 矢量 l, d 的分量用动坐标系 (x, y, z) 表示, 不随时间变化; 而若相对于固定坐标系 (X, Y, Z) 表示, 由于它与欧拉角的大小有关, 所以将随时间而变化。

要把这些分量从动坐标系变换到固定坐标系, 可通过下列公式进行计算

$$\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \theta^T \psi^T \phi^T \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \quad (8-61)$$

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \theta^T \psi^T \phi^T \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \quad (8-62)$$

2. 加速度

用固定坐标系 (X, Y, Z) 表示的矢量 l 的分量对时间的二阶微分, 可通过下列关系求得, 即

$$\begin{pmatrix} \ddot{l}_x \\ \ddot{l}_y \\ \ddot{l}_z \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\theta^T \psi^T \phi^T \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \right) \quad (8-63)$$

因为, 一阶微分为

$$\begin{pmatrix} \dot{l}_x \\ \dot{l}_y \\ \dot{l}_z \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \left(\theta^T \psi^T \phi^T \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{d\theta^T}{dt} \psi^T \phi^T + \theta^T \frac{d\psi^T}{dt} \phi^T + \theta^T \psi^T \frac{d\phi^T}{dt} \right) \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} \ddot{l}_x \\ \ddot{l}_y \\ \ddot{l}_z \end{pmatrix} = \left(\frac{d^2\theta^T}{dt^2} \psi^T \phi^T + \frac{d\theta^T}{dt} \frac{d\psi^T}{dt} \phi^T + \frac{d\theta^T}{dt} \psi^T \frac{d\phi^T}{dt} + \frac{d\theta^T}{dt} \frac{d\psi^T}{dt} \phi^T + \theta^T \frac{d^2\psi^T}{dt^2} \phi^T + \theta^T \frac{d\psi^T}{dt} \frac{d\phi^T}{dt} \right) \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{d\theta^T}{dt} \psi^T \frac{d\phi^T}{dt} + \theta^T \frac{d\psi^T}{dt} \frac{d\phi^T}{dt} + \theta^T \psi^T \frac{d^2\phi^T}{dt^2} \Big) \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}. \quad (8-64)$$

考虑到

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\theta^T}{dt} = \frac{d\theta^T}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^T \dot{\theta} = \theta_1^T \dot{\theta},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta^T}{dt^2} &= \frac{d^2\theta^T}{d\theta^2} \dot{\theta} \dot{\theta} + \frac{d\theta^T}{d\theta} \ddot{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}^T \dot{\theta}^2 + \theta_1^T \ddot{\theta} \\ &= \theta_2^T \dot{\theta}^2 + \theta_1^T \ddot{\theta}, \end{aligned}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\psi^T}{dt} = \frac{d\psi^T}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin \psi & 0 & -\cos \psi \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \psi & 0 & -\sin \psi \end{pmatrix}^T \dot{\psi} = \psi_1^T \dot{\psi},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi^T}{dt^2} &= \frac{d^2\psi^T}{d\psi^2} \dot{\psi}^2 + \frac{d\psi^T}{d\psi} \ddot{\psi} = \begin{pmatrix} -\cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & -\cos \psi \end{pmatrix}^T \dot{\psi}^2 + \psi_1^T \ddot{\psi} \\ &= \psi_2^T \dot{\psi}^2 + \psi_1^T \ddot{\psi}, \end{aligned}$$

及

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\phi^T}{dt} = \frac{d\phi^T}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix}^T \dot{\phi} = \phi_1^T \dot{\phi},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi^T}{dt^2} &= \frac{d^2\phi^T}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 + \frac{d\phi^T}{d\phi} \ddot{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}^T \dot{\phi}^2 + \phi_1^T \ddot{\phi} \\ &= \phi_2^T \dot{\phi}^2 + \phi_1^T \ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (8-65)$$

于是,式(8-64)可改写为

$$\begin{pmatrix} \dot{l}_x \\ \dot{l}_y \\ \dot{l}_z \end{pmatrix} = (\theta_1^T \psi^T \phi^T \dot{\theta} + \theta_2^T \psi_1^T \phi^T \dot{\psi} + \theta_1^T \psi^T \phi_1^T \dot{\phi} + \theta_2^T \psi_1^T \phi^T \dot{\theta}^2 + \theta_1^T \psi_2^T \phi^T \dot{\psi}^2 + \theta_1^T \psi^T \phi_2^T \dot{\phi}^2)$$

$$+ 2\theta_1^T \psi_1^T \phi_1^T \dot{\psi} \dot{\phi} + 2\theta_2^T \psi_2^T \phi_2^T \dot{\phi} \dot{\theta} + 2\theta_3^T \psi_3^T \phi_3^T \dot{\theta} \dot{\psi} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}, \quad (8-66)$$

或

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{l}_x \\ \dot{l}_y \\ \dot{l}_z \end{pmatrix} &= A_{11} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \ddot{\theta} + A_{12} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \ddot{\psi} + A_{13} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \ddot{\phi} + B_{11} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \dot{\theta}^2 + B_{12} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \dot{\psi}^2 \\ &+ B_{13} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \dot{\phi}^2 + C_{11} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} + C_{12} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \dot{\phi} \dot{\theta} + C_{13} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \dot{\theta} \dot{\psi} \end{aligned}$$

$$= (A_{11} : A_{12} : A_{13}) \begin{pmatrix} l_x & \vdots & \vdots \\ l_y & 0 & 0 \\ l_z & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & l_x & 0 \\ & l_y & 0 \\ & l_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & l_x \\ & 0 & l_y \\ & 0 & l_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + (B_{11} : B_{12} : B_{13}) \begin{pmatrix} l_x & \vdots & \vdots \\ l_y & 0 & 0 \\ l_z & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & l_x & 0 \\ & l_y & 0 \\ & l_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & l_x \\ & 0 & l_y \\ & 0 & l_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}$$

$$+ (C_{11} : C_{12} : C_{13}) \begin{pmatrix} l_x & \vdots & \vdots \\ l_y & 0 & 0 \\ l_z & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & l_x & 0 \\ & l_y & 0 \\ & l_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & l_x \\ & 0 & l_y \\ & 0 & l_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix} = A A \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + B A \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix} + C A \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

(8-67)

式中,有关矩阵定义如下:

$$\left. \begin{aligned} A &= (\theta_1^T \psi_1^T \phi_1^T : \theta_2^T \psi_2^T \phi_2^T : \theta_3^T \psi_3^T \phi_3^T), \\ B &= (\theta_1^T \psi_1^T \phi_1^T : \theta_2^T \psi_2^T \phi_2^T : \theta_3^T \psi_3^T \phi_3^T), \\ C &= (2\theta_1^T \psi_1^T \phi_1^T : 2\theta_2^T \psi_2^T \phi_2^T : 2\theta_3^T \psi_3^T \phi_3^T). \end{aligned} \right\} \quad (8-68)$$

$$A = \begin{pmatrix} l_x & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_y & 0 & \vdots & 0 \\ l_z & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline & l_x & \vdots & \vdots \\ 0 & l_y & \vdots & 0 \\ & l_z & \vdots & \vdots \\ \hline & \vdots & l_x & \vdots \\ 0 & 0 & l_y & \vdots \\ & \vdots & l_z & \vdots \end{pmatrix}. \quad (8-69)$$

如同上述一样，用固定坐标系 (X, Y, Z) 表示的矢量 \mathbf{d} 对时间的二阶微分，可由下式写出

$$\begin{pmatrix} \ddot{d}_x \\ \ddot{d}_y \\ \ddot{d}_z \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\theta^T \psi^T \phi^T \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \right),$$

通过变换，其结果也可表示为

$$\begin{pmatrix} \ddot{d}_x \\ \ddot{d}_y \\ \ddot{d}_z \end{pmatrix} = A\Delta \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + B\Delta \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix} + C\Delta \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (8-70)$$

式中，矩阵 A, B, C 如式(8-68)所示，矩阵 Δ 为

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_x & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_y & 0 & \vdots & 0 \\ d_z & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline & d_x & \vdots & \vdots \\ 0 & d_y & \vdots & 0 \\ & d_z & \vdots & \vdots \\ \hline & \vdots & d_x & \vdots \\ 0 & 0 & d_y & \vdots \\ & \vdots & d_z & \vdots \end{pmatrix}. \quad (8-71)$$

必须指出，上述矩阵 A, B, C ，都是具有长度 l_i 的构件 i 的欧拉角 (θ, ψ, ϕ) 的函数，因而若有必要，可把式(8-67)及式(8-71)添加下标 i 。

3. 构件 i 的质心位置和加速度

设构件 i 的质心到计算力矩的关节 b 之间的距离为 $(X, Y, Z)_{i,b}$ 。这个距离等于从构件 i 的第一关节到关节 b 之间的所有长度 l 之和，再加上该构件 i 的距离 d 。若利用结构矩阵 ε, δ ，则可用下式表示

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{i,b} = \varepsilon_{i,r} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}_{j,b}. \quad (8-72)$$

如上所述,式中结构矩阵的各元素定义如下,即

$$\varepsilon_{ip} = \begin{cases} 1 & (\text{当构件 } i \text{ 对绕关节 } p \text{ 的力矩有关时}); \\ 0 & (\text{除上述情况以外时}). \end{cases}$$

$$\delta_{ijp} = \begin{cases} 1 & (\text{当长度 } l_j \text{ 位于从关节 } p \text{ 到构件 } i \text{ 的第一关节正向连线上时}); \\ 0 & (\text{除上述情况以外时}). \end{cases}$$

当支撑点被固定在空间内,则常把它取作为 $p=0$ 的关节。为此,考虑到通常 $\varepsilon_{i0}=1$, 则从固定支撑点到构件 i 的质心距离,可直接根据上式写出如下

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{i0} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}_i + \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}_{i0} \quad (8-73)$$

那么,只要把上式微分,便可求得构件 i 的质心加速度全分量为

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \ddot{d}_x \\ \ddot{d}_y \\ \ddot{d}_z \end{pmatrix}_i + \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} \begin{pmatrix} \ddot{l}_x \\ \ddot{l}_y \\ \ddot{l}_z \end{pmatrix}_i \quad (8-74)$$

把式(8-67)和(8-70)代入上式可得

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i = A_i \Delta_i \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_i + B_i \Delta_i \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_i + C_i \Delta_i \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_i$$

$$+ \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} A_j \Delta_j \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_j + \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} B_j \Delta_j \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_j + \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} C_j \Delta_j \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_j \quad (8-75)$$

如上所述,构件序号 i 与距离 l 序号 j 无关。为列出与构件序号 i 有关的对序号 j 的和式,可利用结构矩阵 γ , 该矩阵各元素定义按前面所述为

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当长度 } l_j \text{ 位于构件 } i \text{ 上时}); \\ 0 & (\text{除上述情况以外时}). \end{cases}$$

于是,下列变换成立

$$A_j \Delta_j \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{kj} A_k \Delta_k \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k,$$

$$B_j \Delta_j \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{kj} B_k \Delta_k \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k,$$

$$C_j \Delta_j \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{kj} C_k \Delta_k \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_k.$$

若将上述关系式代入式(8-75), 便可得如下实用的公式

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i &= A_i \Delta_i \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_i + B_i \Delta_i \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_i + C_i \Delta_i \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_i + \sum_{j=1}^m \delta_{i,j_0} \sum_{k=1}^n \gamma_{k,j} A_k \Delta_j \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k \\
&+ \sum_{j=1}^m \delta_{i,j_0} \sum_{k=1}^n \gamma_{k,j} B_k \Delta_j \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k + \sum_{j=1}^m \delta_{i,j_0} \sum_{k=1}^n \gamma_{k,j} C_k \Delta_j \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_{k_0}
\end{aligned} \quad (8-76)$$

4. 对关节 p 的力矩

构件 i 的线加速度与关节 p 的力矩关系式为

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{ip} = m_i \begin{pmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix}_{ip} \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}_i \quad (8-77)$$

式中，距离 X, Y, Z 由式(8-72)确定，加速度 $\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}$ 由式(8-76)确定。

把上式中与力矩的力臂有关的矩阵定义为力矩的臂矩阵，并简记为

$$X_{ip} = \begin{pmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix}_{ip} = e_{ip} \begin{pmatrix} 0 & -d_x & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^m \delta_{i,j_0} \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix}_j \quad (8-78)$$

于是，式(8-77)成为

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{ip} &= m_i X_{ip} A_i \Delta_i \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_i + m_i X_{ip} B_i \Delta_i \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_i + m_i X_{ip} C_i \Delta_i \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_i \\
&+ m_i X_{ip} \sum_{j=1}^m \delta_{i,j_0} \sum_{k=1}^n \gamma_{k,j} A_k \Delta_j \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k + m_i X_{ip} \sum_{j=1}^m \delta_{i,j_0} \sum_{k=1}^n \gamma_{k,j} B_k \Delta_j \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k \\
&+ m_i X_{ip} \sum_{j=1}^m \delta_{i,j_0} \sum_{k=1}^n \gamma_{k,j} C_k \Delta_j \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_{k_0}
\end{aligned} \quad (8-79)$$

上式可用于计算为任意构件 i 的线运动所必需的绕关节 p 的力矩。

四、关节处的总力矩

绕关节 p 所需的总力矩，等于下列三部分力矩之和，即

- (1) 构件作旋转加速度运动所需的力矩；
- (2) 构件作线加速度运动所需的力矩；
- (3) 克服重力所需要的力矩。

因为构件 i 的重力所产生的绕关节 p 的力矩可表示为

$$-m_i X_{ip} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix},$$

那么,绕关节 p 所需的总力矩等于

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_p = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{ip} + \sum_{i=1}^n e_{ip} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_i + \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}. \quad (8-80)$$

把式(8-59)、(8-79)代入上式,则成为如下计算式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_p &= \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} \sum_{k=1}^m \gamma_{kj} A_k A_j \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k + \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} A_i \Delta_i \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_i \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} \sum_{k=1}^m \gamma_{kj} B_k A_j \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k + \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} B_i \Delta_i \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_i \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} \sum_{k=1}^m \gamma_{kj} C_k A_j \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_k + \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} C_i \Delta_i \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_i \\ &+ \sum_{i=1}^n e_{ip} D_i \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_i + \sum_{i=1}^n e_{ip} E_i \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_i + \sum_{i=1}^n e_{ip} F_i \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_i + \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8-81)$$

若改变上式中和的计算顺序,并引入下列变量

$$S_{ip} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij0} m_i X_{ip}, \quad (8-82)$$

而且,把第2、4、6、7、8、9等六项中取和所用的变量 i 改写为 k ,则绕关节 p 所需的力矩可表达如下

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_p &= \sum_{k=1}^m (m_k X_{kp} A_k \Delta_k + \sum_{j=1}^m \gamma_{kj} S_{ip} A_k A_j + e_{kp} D_k) \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k \\ &+ \sum_{k=1}^m (m_k X_{kp} B_k \Delta_k + \sum_{j=1}^m \gamma_{kj} S_{ip} B_k A_j + e_{kp} E_k) \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k \\ &+ \sum_{k=1}^m (m_k X_{kp} C_k \Delta_k + \sum_{j=1}^m \gamma_{kj} S_{ip} C_k A_j + e_{kp} F_k) \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_k \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (8-83)$$

关节力矩除了用上述固定坐标系(X, Y, Z)表达外,按需要也可用其他坐标系表达。下面讨论用“关节坐标系”表达的情况。

所谓关节坐标系,就是它的两根坐标轴分别固定在连接于关节的两个构件上,而第三根坐标轴按与这两根坐标轴正交而定。为此,这个新的坐标系不一定是正交坐标系。关节坐标系如图 8-3 所示。

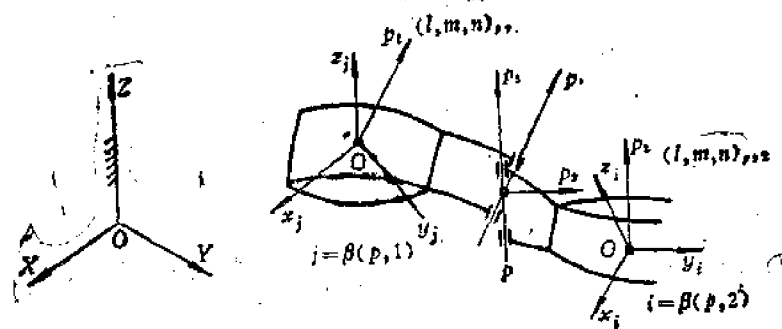


图 8-3 关节 p 点坐标系

设在关节 p 处的两根坐标轴起始位置对各自的动坐标系的方向余弦分别为 $(l, m, n)_{p,1}$ 、 $(l, m, n)_{p,2}$ 。则它们对应于固定坐标系(X, Y, Z)的方向余弦,可按下列变换进行计算

$$\left. \begin{aligned} (l, m, n)_{p,1}(\phi \ \psi \ \theta)_{\beta(p,1)} &= (a_{11}, a_{12}, a_{13})_{p_1} \\ (l, m, n)_{p,2}(\phi \ \psi \ \theta)_{\beta(p,2)} &= (a_{21}, a_{22}, a_{23})_{p_2} \end{aligned} \right\} \quad (8-84)$$

式中, $\beta(p,1)$ 、 $\beta(p,2)$ 分别标记用关节 p 所连接的两个构件 1、2。

那么,第三轴 p_3 在固定坐标系(X, Y, Z)中的方向余弦 (a_{31}, a_{32}, a_{33}) , 可根据正交条件由下列关系求出:

因为向量 p_1 可表示为

$$p_1 = a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k,$$

向量 p_2 可表示为

$$p_2 = a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k.$$

则

$$p_3 = p_1 \times p_2 = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})i + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})j + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})k.$$

于是得到

$$\begin{aligned} (a_{31}, a_{32}, a_{33}) &= \left(\frac{|p_1 \times p_2|_x}{|p_1 \times p_2|}, \frac{|p_1 \times p_2|_y}{|p_1 \times p_2|}, \frac{|p_1 \times p_2|_z}{|p_1 \times p_2|} \right) \\ &= a[(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}), (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}), (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})]. \end{aligned} \quad (8-85)$$

式中,

$$a = \frac{1}{\sqrt{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}}.$$

若将上述三轴的方向余弦 α_i 用矩阵表示, 并记为

$$a_p = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

那么, 可用下式把固定坐标系中绕关节转动的力矩变换到关节坐标系上的力矩

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = a_p^{-1} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \quad (8-86)$$

为了使式(8-86)简化, 设定

$$\left. \begin{aligned} AA_{pk} &= a_p^{-1} (m_k X_{kp} A_k \Delta_k + \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} S_{jp} A_k A_j + \varepsilon_{kp} D_k), \\ BB_{pk} &= a_p^{-1} (m_k X_{kp} B_k \Delta_k + \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} S_{jp} B_k A_j + \varepsilon_{kp} E_k), \\ CC_{pk} &= a_p^{-1} (m_k X_{kp} C_k \Delta_k + \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} S_{jp} C_k A_j + \varepsilon_{kp} F_k), \\ G_p &= a_p^{-1} \sum_{i=1}^n m_i X_{ip} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}_{p0}. \end{aligned} \right\} \quad (8-87)$$

于是, 上式可写成为

$$M_p = \sum_{k=1}^n AA_{pk} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k + \sum_{k=1}^n BB_{pk} \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k + \sum_{k=1}^n CC_{pk} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_k + G_{p0}. \quad (8-88)$$

那么, 对所有关节 p 的力矩方程式, 可简写为

$$\begin{pmatrix} \dots \\ M_p \\ \dots \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \dots \\ AA_{pk} \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k + \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \dots \\ BB_{pk} \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k + \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \dots \\ CC_{pk} \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \dots \\ G_p \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (8-89)$$

上式也可用矩阵展开的形式而不用和的形式来表达。例如当 $p=0, 1, \dots, n-1$ 及 $k=1, 2, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{k=1}^n AA_{0k} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k + \sum_{k=1}^n BB_{0k} \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k + \dots, \\ M_1 &= \sum_{k=1}^n AA_{1k} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}_k + \sum_{k=1}^n BB_{1k} \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}_k + \dots, \\ &\vdots \\ M_p &= \dots + \dots. \end{aligned}$$

且设定

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} AA_{01} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_1 + AA_{02} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_2 + \dots + AA_{0n} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_n \\ AA_{11} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_1 + AA_{12} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_2 + \dots + AA_{1n} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_n \\ \vdots \\ AA_{n-1,1} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_1 + AA_{n-1,2} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_2 + \dots + AA_{n-1,n} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} AA_{01} & AA_{02} \dots & AA_{0n} \\ AA_{11} & AA_{12} \dots & AA_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ AA_{n-1,1} & AA_{n-1,2} \dots & AA_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_1 \\ \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_2 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}^2 \\ \bar{\psi}^2 \\ \bar{\phi}^2 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} BB_{01} & BB_{02} & \dots & BB_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ BB_{n-1,1} & BB_{n-1,2} & \dots & BB_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}^2 \\ \bar{\psi}^2 \\ \bar{\phi}^2 \end{pmatrix}_1 \\ \begin{pmatrix} \bar{\theta}^2 \\ \bar{\psi}^2 \\ \bar{\phi}^2 \end{pmatrix}_2 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \bar{\theta}^2 \\ \bar{\psi}^2 \\ \bar{\phi}^2 \end{pmatrix}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi} \bar{\phi} \\ \bar{\phi} \bar{\theta} \\ \bar{\theta} \bar{\psi} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} CC_{01} & CC_{02} & \dots & CC_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CC_{n-1,1} & CC_{n-1,2} & \dots & CC_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi} \bar{\phi} \\ \bar{\phi} \bar{\theta} \\ \bar{\theta} \bar{\psi} \end{pmatrix}_1 \\ \begin{pmatrix} \bar{\psi} \bar{\phi} \\ \bar{\phi} \bar{\theta} \\ \bar{\theta} \bar{\psi} \end{pmatrix}_2 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \bar{\psi} \bar{\phi} \\ \bar{\phi} \bar{\theta} \\ \bar{\theta} \bar{\psi} \end{pmatrix}_n \end{pmatrix}$$

这样,可把式(8-89)改写如下

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dots \\ M_p \\ \dots \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ AA_{pk} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi}_k \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ BB_{pk} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \ddot{\theta}^2 \\ \ddot{\psi}^2 \\ \ddot{\phi}_k^2 \\ \dots \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ CC_{pk} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dot{\psi}\dot{\phi} \\ \dot{\phi}\dot{\theta} \\ \dot{\theta}\dot{\psi}_k \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ G_p \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (8-90) \end{aligned}$$

于是,在给定构件运动的情况下,利用式(8-90)可方便地求出绕关节的力矩。

五、运动方程式

设

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ AA_{pk} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = A, \quad \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ BB_{pk} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = B, \quad \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ CC_{pk} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = C,$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi}_k \\ \dots \end{pmatrix} = \ddot{S}, \quad \begin{pmatrix} \dots \\ \ddot{\theta}^2 \\ \ddot{\psi}^2 \\ \ddot{\phi}_k^2 \\ \dots \end{pmatrix} = \ddot{S}^2, \quad \begin{pmatrix} \dots \\ \dot{\psi}\dot{\phi} \\ \dot{\phi}\dot{\theta} \\ \dot{\theta}\dot{\psi}_k \\ \dots \end{pmatrix} = \dot{S}\dot{S},$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ M_p \\ \dots \end{pmatrix} = Q, \quad \begin{pmatrix} \dots \\ G_p \\ \dots \end{pmatrix} = G$$

则力矩公式(8-90)可简化如下

$$Q = A\ddot{S} + B\ddot{S}^2 + C\dot{S}\dot{S} + G. \quad (8-91)$$

显然,若系统的运动为已知时,即系统的动力状态具有确定的形式,那么只要把已知值代入状态变量 \dot{S} 中,就可简单地用代数法计算出未知的广义驱动力 Q 。这是一种最简单的情况。

若驱动力为已知的情况,那么式(8-91)中的广义加速度可表达为

$$\ddot{S} = A^{-1}(Q - B\ddot{S}^2 - C\dot{S}\dot{S} - G). \quad (8-92)$$

这样,先假定 \dot{S} 和 \ddot{S} 的初始条件,然后对上式进行数值积分,就可求出未知的运动。

当上述两种类型混合出现时——综合型,即运动和驱动力部分为已知的情况,可把运动和驱动力分离为已知部分 \dot{S}_1, Q_1 和未知部分 \dot{S}_2, Q_2 。

设分离变换矩阵为 P, R , 使下列关系成立

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_z \end{pmatrix} \mathcal{U} &= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \dots \\ \mathcal{U}_z \end{pmatrix}, \\ (R_0 : R_z) \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_0 \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_z \end{pmatrix} &= \mathbf{F}_0 \end{aligned} \right\} \quad (8-93)$$

则式(8-91)可改写成

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \dots \\ \mathcal{U}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_z \end{pmatrix} A(R_0 : R_z) \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_0 \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_z \end{pmatrix} (B\dot{\mathbf{E}}^2 + C\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}} + G). \quad (8-94)$$

因为

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_z \end{pmatrix} A(R_0 : R_z) = \begin{pmatrix} P_0 A R_0 : P_0 A R_z \\ \dots \\ P_z A R_0 : P_z A R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{00} : A_{0z} \\ \dots \\ A_{z0} : A_{zz} \end{pmatrix},$$

代入上式可得

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \dots \\ \mathcal{U}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{00} : A_{0z} \\ \dots \\ A_{z0} : A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_0 \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_z \end{pmatrix} (B\dot{\mathbf{E}}^2 + C\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}} + G). \quad (8-95)$$

将上式移项成为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \dots \\ \mathcal{U}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{00} : A_{0z} \\ \dots \\ A_{z0} : A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_0 \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 - A_{00}\ddot{\mathbf{E}}_0 - A_{0z}\ddot{\mathbf{E}}_z \\ \dots \\ \mathcal{U}_z - A_{z0}\ddot{\mathbf{E}}_0 - A_{zz}\ddot{\mathbf{E}}_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 : -A_{0z} \\ \dots \\ I : -A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_z \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -I : A_{00} \\ \dots \\ 0 : A_{z0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_z \end{pmatrix} (B\dot{\mathbf{E}}^2 + C\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}} + G), \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 : -A_{0z} \\ \dots \\ I : -A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_z \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I : A_{00} \\ \dots \\ 0 : A_{z0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_z \end{pmatrix} (B\dot{\mathbf{E}}^2 + C\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}} + G).$$

于是,最后可得求解未知量 \mathcal{U}_z 和 $\ddot{\mathbf{E}}_z$ 的算式为

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_z \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 : -A_{0z} \\ \dots \\ -I : A_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} -I : A_{00} \\ \dots \\ 0 : A_{z0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{E}}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_z \end{pmatrix} (B\dot{\mathbf{E}}^2 + C\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}} + G) \right). \quad (8-96)$$

§ 8-4 用拉格朗日方程描述假手机构动力学研究

一、概 述

如前所述,建立能动机构动力学的数学模型方法有几种基本类别,其中,拉格朗日方程是

一组以广义坐标为变量,以及这些变量对时间 t 的导数所组成的二阶微分方程式,由于该方程中只包含与主动力相应的广义力,不包含任何约束力,而且方程的数目等于系统广义坐标的数目,所以使用起来较方便。

若主动力中部分为有势力,另一部分不是有势力,在此情况下,可得出如下形式的拉格朗日方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= Q, \\ \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} &= Q. \end{aligned} \right\} \quad (8-97)$$

式中, L 为系统的动能与势能之差,称为拉格朗日函数, T 为系统的动能, V 为系统的势能, q 为广义坐标, Q 为与非有势力相对应的广义力。

图 8-4 表示一种假手的简化系统(初始状态),该系统属正交坐标类型,它的位置和姿态的特性方程式可用旋转变换张量表示。

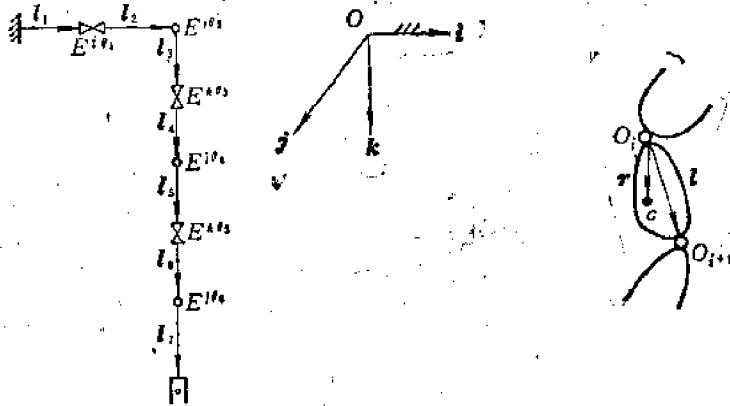


图 8-4 假手的简化系统

设在第 i 个构件上建立坐标系 $O_i - x_i, y_i, z_i$, 其原点位于第 i 个关节, 则有

$$\begin{aligned} r_i^0 &= l_0^0 + E^{10} (l_1^0 + E^{20} (l_2^0 + \dots + E^{i0} r_i^i)) \\ &= r_{i-1}^0 + E_{i-1}^{i0} (l_{i-1}^0 - r_{i-1}^0) + E_{i-1}^{i0} r_i^i. \end{aligned} \quad (8-98)$$

式中, l_i^0 为 i 构件的长度矢量, 从 i 关节指向 $(i+1)$ 关节; r_i^i 为 i 构件的质心位置矢量, 从 i 关节指向质心 C_i ; r_i^i 为 i 构件坐标系中的矢量在 j 坐标系中的变换; $E^{x_i 0}$ 为旋转变换张量, 其中 x 为 i, j , 或 k 三个单位正交矢量之一, x_i 表示 i 关节转轴的单位矢量。 $E_{i-1}^{i0} = E^{x_{i-1} 0} \cdot E^{x_i 0} \cdot \dots \cdot E^{x_{i0} 0}$, 其中

$$\begin{aligned} E^{i0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad E^{j0} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ E^{k0} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8-99)$$

二、拟人假手机构的运动方程式

为了用拉格朗日方程来建立假手机构的运动方程式——动力学模型，需要分别对系统的动能和势能进行计算，现分述如下。

1. 系统的动能

空间机构系统的动能 T 包括构件质心的动能 T_1 (假想全部质量都集中在质心) 和构件绕定轴转动的动能 T_2 两部分，即

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_i^0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i (\omega_i^0)^2 \quad (8-100)$$

因为，对于稳定构件系统，存在

$$\dot{\mathbf{r}}_i^0 = \frac{\partial \mathbf{r}_i^0}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i^0}{\partial \theta_n} \dot{\theta}_n = \frac{\partial \mathbf{r}_i^0}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (8-101)$$

$$(\dot{\mathbf{r}}_i^0)^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i^0}{\partial \theta} \dot{\theta} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i^0}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) = (\dot{\theta})^T \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i^0}{\partial \theta} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i^0}{\partial \theta} \right) \right] \dot{\theta} = (\dot{\theta})^T u_i \dot{\theta} \quad (8-102)$$

另外，各构件转动角速度之间的关系可表示为

$$\begin{aligned} \omega_i^0 &= \omega_{i-1}^0 + \dot{\theta}_i \mathbf{x}_i^0 = \omega_{i-1}^0 + \dot{\theta}_i E_{i-1}^T \mathbf{x}_i^0 = \dot{\theta}_1 E_{11}^T \mathbf{x}_1^0 + \dot{\theta}_2 E_{22}^T \mathbf{x}_2^0 + \dots + \dot{\theta}_i E_{ii}^T \mathbf{x}_i^0 \\ &= (E_{i1} \mathbf{x}_1^0, \dots, E_{ii} \mathbf{x}_i^0, 0, \dots, 0) \dot{\theta} = E_i \dot{\theta} \end{aligned} \quad (8-103)$$

$$(\omega_i^0)^2 = (E_i \dot{\theta})^T (E_i \dot{\theta}) = (\dot{\theta})^T E_i^T E_i \dot{\theta} = (\dot{\theta})^T w_i \dot{\theta} \quad (8-104)$$

于是，系统动能的表达式可写成

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\theta})^T u_i \dot{\theta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i (\dot{\theta})^T w_i \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\theta})^T (U + W) \dot{\theta} \end{aligned} \quad (8-105)$$

式中，

$$U = \sum_{i=1}^n m_i u_i, \quad W = \sum_{i=1}^n J_i w_i$$

2. 系统的势能

系统的势能计算式为

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^n -m_i g z_i^0 = - \sum_{i=1}^n m_i g (k_i^0 r_i^0) \\ &= - \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^0 \right) k_i^0 g \end{aligned} \quad (8-106)$$

3. 运动方程式的建立

由上述可得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (U + W) \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (U+W) \ddot{\theta} + \left(\frac{\partial(U+W)}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) \dot{\theta}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 \left(\frac{\partial(U+W)}{\partial \theta} \right) \dot{\theta}, \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= - \sum_{i=1}^n m_i g k_i^0 \frac{\partial r_i^0}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (8-107)$$

考虑到假手的运动速度很小，故可略去包含二阶微量项 $\dot{\theta} \ddot{\theta}$ ，并假定各关节运动副中的阻尼大小与广义速度 $\dot{\theta}$ 成正比，方向与 $\dot{\theta}$ 相反，即与非有势力相应的广义力可表示为

$$Q = F - \xi \dot{\theta}, \quad (8-108)$$

式中， F 为外加驱动力， ξ 为阻尼系数。

于是，将上列各式代入拉格朗日方程，便可得与广义坐标 θ 相对应的运动方程式，也即是与广义坐标 θ 相应的动力平衡方程式

$$(U+W) \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^n m_i g k_i^0 \frac{\partial r_i^0}{\partial \theta} = F - \xi \dot{\theta}. \quad (8-109)$$

三、运动方程式的计算机算法

从上述可知，求解运动方程式的关键是计算矩阵 U 、 W 和 $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ ，而它们又取决于矩阵 $\frac{\partial r_i}{\partial \theta}$ 和 E_i 。为此，本节将讨论利用计算机计算矩阵 U 、 W 和 $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ 的算式。

由式(8-98)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i^0}{\partial \theta_k} &= \frac{\partial r_{i-1}^0}{\partial \theta_k} + \frac{\partial E_{i,i-1}^{z0}}{\partial \theta_k} (l_{i-1}^0 - r_{i-1}^0) + \frac{\partial E_{i,i}^{z0}}{\partial \theta_k} r_i^0 \\ &= \frac{\partial r_{i-1}^0}{\partial \theta_k} + U_{i-1,k} (l_{i-1}^0 - r_{i-1}^0) + U_{i,k} r_i^0, \\ \frac{\partial r_0^0}{\partial \theta_k} &= 0, \quad \frac{\partial r_1^0}{\partial \theta_k} = U_{1,1} r_1^0, \quad \frac{\partial r_i^0}{\partial \theta_k} = 0 (k > i). \end{aligned} \quad (8-110)$$

根据式(8-99)可求得

$$\frac{\partial E^{z0}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} E^{z0} = \Delta^z E^{z0}.$$

同理可得

$$\frac{\partial E^{y0}}{\partial \theta} = \Delta^y E^{y0}, \quad \frac{\partial E^{x0}}{\partial \theta} = \Delta^x E^{x0}.$$

于是可写出

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{i,i}^{z0}}{\partial \theta_k} &= E^{z0} E^{z0} \dots E^{z0} \Delta^z E^{z0} \dots E^{z0} = U_{i,k} (k < i), \\ U_{i+1,k} &= \begin{cases} U_{i,k} E^{z0} (k \leq i), \\ E_{1,1}^{z0} \Delta^z E^{z0} \dots (k = i+1), \\ 0 \quad (k > i+1). \end{cases} \end{aligned} \quad (8-111)$$

此外，还具有下列关系式

$$E_{1,i+1}^{z0} = E_{1,i}^{z0} E^{z0}. \quad (8-112)$$

显然，式(8-110)、(8-111)及(8-112)构成了一组递推算法，从而可编写出求解运动方程式——动力学问题的计算机算法。其计算程序框图如图 8-5 所示。

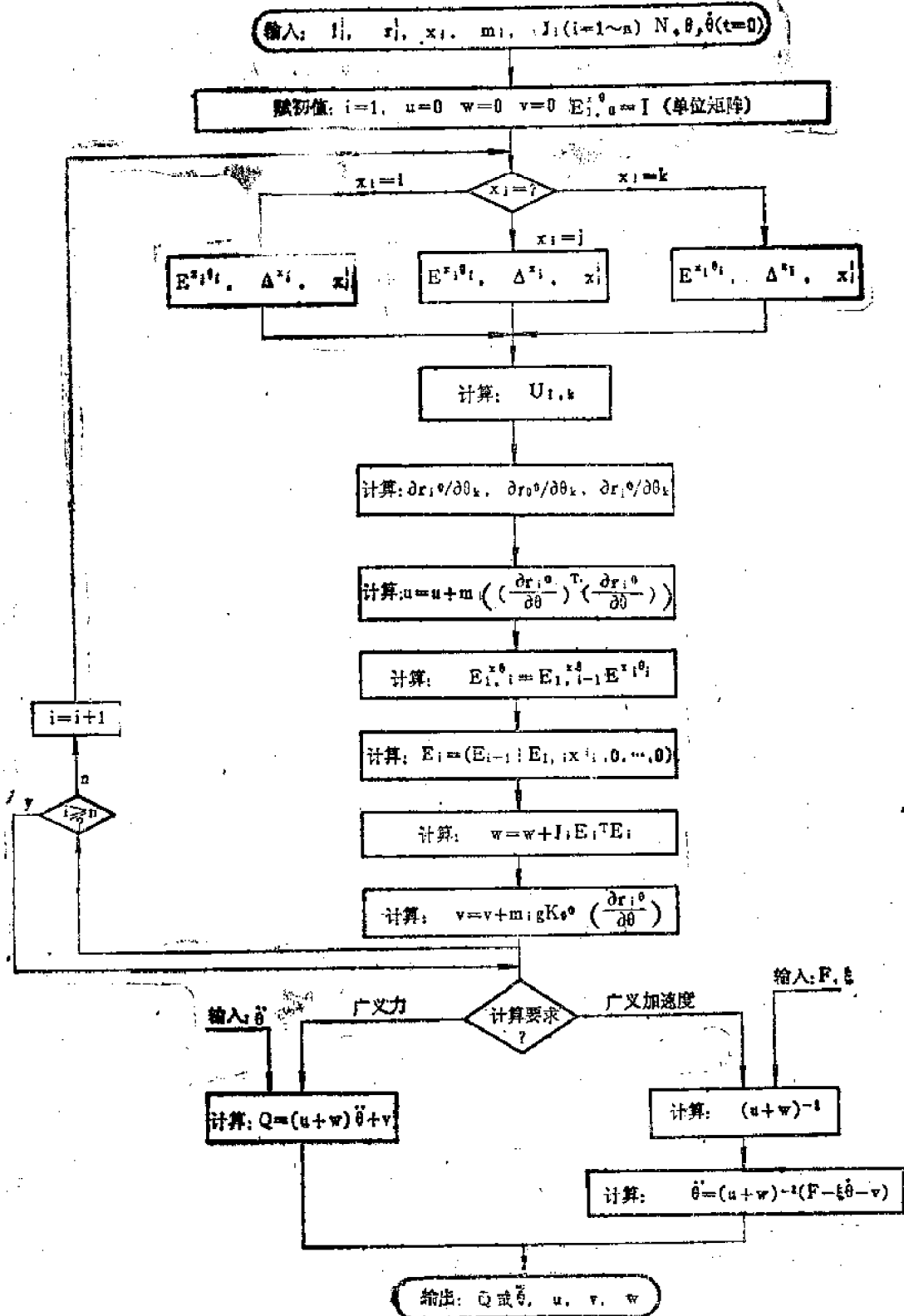


图 8-5 程序框图

图 8-5 中, 当 $x_i = i$ 时, 取

$$E^{x_i, \theta_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}, \quad \Delta^{x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_i^1 = (1, 0, 0),$$

当 $x_i = j$ 时, 取

$$E^{x_i, \theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 & \sin \theta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i \end{pmatrix}, \quad \Delta^{x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_i^1 = (0, 1, 0),$$

当 $x_i = k$ 时, 取

$$E^{x_i, \theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta^{x_i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_i^1 = (0, 0, 1).$$

$U_{i,k}$ 的计算式, 可由式(8-111)直接写出为

$$U_{i,k} = \begin{cases} U_{i-1,k} E^{x_i, \theta_i}, & k \leq i-1 \\ E_{i,i-1}^x \Delta^{x_i} E^{x_i, \theta_i}, & k = i \end{cases}$$

另外, $\partial r_i^0 / \partial \theta_k$, $\partial r_i^0 / \partial \theta_k$ 和 $\partial r_i^0 / \partial \theta_k$ 可利用式(8-110)进行计算。

现把上述程序算法的有关使用说明如下。

1. 程序算法的功能

该程序算法是根据拉格朗日方程并应用旋转变换张量来建立拟人多关节假手的动力学模型的。它具有下列功能:

(1) 计算惯性矩阵 $(U+W)$ 和重力矩阵 V , 从而可写出假手的动力学方程

$$(U+W) \ddot{\theta} + V = Q.$$

(2) 根据动力学方程, 在广义坐标的加速度已知的情況下, 计算广义力 Q

$$Q = (U+W) \ddot{\theta} + V.$$

(3) 根据动力学方程, 在广义力 Q 已知的情況下, 计算广义坐标的加速度 $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = (U+W)^{-1}(Q-V).$$

2. 程序算法的计算对象

能应用此程序算法来建立动力学模型的假手必需满足下列条件:

- (1) 假手的自由度必须小于、等于 6;
- (2) 假手的关节必须是由转动副构成;
- (3) 假手相邻两关节的转动轴轴线必须是相互垂直;
- (4) 假手的运动速度较慢。

3. 程序算法的输入数据

在确定假手结构参数之前, 必须先建立假手的构件坐标系。该程序算法要求假手的基座坐标系的 z 轴必须是铅垂向下, 各构件坐标系固定在各构件上, 且在初始位置时, 构件坐标系三根轴的方向必须与基座坐标系三轴的方向完全一致, 而其中的一根轴必须与转动轴轴线的方向一致, 该轴的单位矢量记为 x , 第 i 个物体坐标系的原点应位于第 $(i-1)$ 个关节上。

各输入参数的说明:

N ——假手的自由度数($N \leq 6$)。

x ——转动轴的单位矢量。 $x=i$ 时, x 轴为转动轴; $x=j$ 时, y 轴为转动轴; $x=k$ 时, z 轴为转动轴。

l ——构件的长度矢量。第 i 个构件的长度矢量的方向为从第 i 个构件坐标系的原点(第 $i-1$ 个关节)指向第 $(i+1)$ 个构件坐标系的原点(第 i 个关节), 长度为这两点间的距离。

r ——构件质心的位置矢量。第 i 个构件的质心位置矢量的方向为从第 i 个构件坐标系的原点指向该构件的质心, 大小为这两点间的距离。

m ——构件的质量。

J ——构件绕质心的转动惯量。

θ ——关节的转角(广义坐标)。

$\ddot{\theta}$ ——广义坐标的加速度(角加速度)。

Q ——关节中的广义力或力矩。

第九章 仿生机体的应用举例

本章是在第一章概论的基础上,进一步介绍仿生机体在机器人工程和康复医学工程领域中的若干应用,简要地叙述这些装置中所采用的控制方式及有关设计问题。

§ 9-1 工业机器人

一、重复型机器人

如前所述,机器人是把生物学的知识应用于工程领域的一种代表例子。根据控制性能,可把机器人分为重复型机器人、智能机器人和操纵型机器人三类。

一般说来,重复型机器人和智能机器人在进行工作之前,都必须经过示教或给予指令。下面主要介绍重复型机器人的存贮方式、示教及再现的过程。

示教是指使机器人记忆规定的动作。机器人是一种自动机械,但是示教这一步却非要依靠人不可。示教方式的简单与否,可用来衡量机器人的自动化水平。

存贮是指在必要的期限内保存示教的信息。重复型机器人需要存贮的信息有各种形式,如顺序信息、位置信息和时间信息等。

再现是根据工作需要将存贮的信息读出,向执行机构发出具体指令。

要使重复型机器人进行工作,必须给定动作的种类和内容、各动作的配合方式、时限及顺序,即对机器人进行示教,使之存贮、再现并依此进行操作。有的场合还要求给定数量,如到达地点的位置或角度。此外,速度、握力等也应考虑在内。但是必须指出,重要的是位置(或角度)和时限。

1. 存贮方式

(1) 分类

重复型机器人至少需要有存贮三种信息的存贮装置。这些信息是:顺序信息、位置信息和时间信息。它们的性质不同,而且所需要的存贮容量也差别很大。

的顺序转鼓。这种方法所用的装置很简单,但变更顺序步的时限比较麻烦。

在图 9-1 中,表示美国 AMF 公司的 Versatran 机器人臂的点位控制系统,它用电位计作位置存贮装置。臂的每个运动轴上有六个位置存贮电位计。这种位置分离方式的优点是各轴可以任意组合,因而可用数量很少的位置存贮装置给定很多个位置坐标。

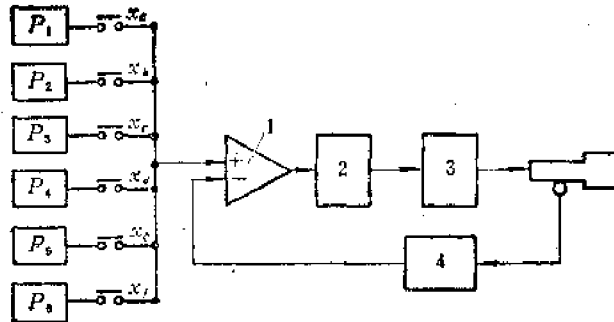


图 9-1 点位控制系统

1—伺服放大器; 2—伺服阀; 3—油缸; 4—检测器:(电位计)

(ii) 时间分离方式

在这种方式中,只将时间信息分开存贮,其他信息即顺序信息和位置信息都存贮在一起。这时,位置信息和单元动作的组合就是按工作顺序存贮,不必另外再存贮各顺序步和顺序。

作为这种具体实例是美国 Unimation 公司 Unimate 机器人的臂和手腕的控制。它的位置信息和顺序信息全都存贮在磁鼓内。各轴都装有光电编码器,通过它将各轴的实际运动变换为数字信号,依次存贮在磁鼓中。时间信息是在磁鼓之外另设的给定时间的定时器内存贮,但定时器启动用的计时脉冲则在磁鼓内存贮。等待时间及步进都要用伺服机构附属的重合信号检测电路,对位置的规定值和实际值进行比较。只有臂和腕的实际位置与规定值完全一致以后,全重合信号检测电路才发出输出信号,通过读出控制电路使磁鼓向下一地址前进。各轴的伺服机构方框图如图 9-2 所示。

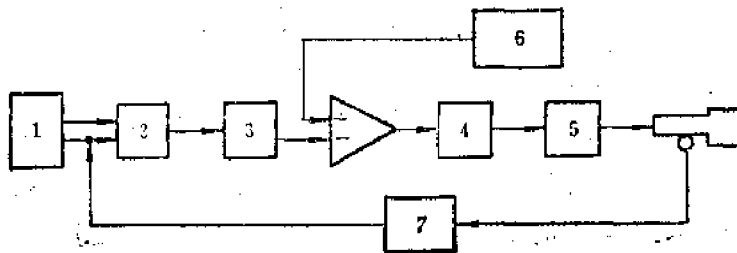


图 9-2 数字-模拟伺服机构

1—磁鼓; 2—数值比较; 3—D/A 变换;
4—伺服阀; 5—液压缸; 6—示教箱(按钮);
7—编码器(A/D变换)

(iii) 位置-时间分离方式

这种方式中,位置信息、时间信息、顺序信息和其他信息,都是用单独的存贮装置存贮。因此,可以选用与各种信息性质相适应的存贮装置,然后以简单的形式将全部存贮装置集中在一

起。采用这种存贮装置使用效率高,又有以容量较小的存贮装置存贮复杂工作程序的优点,它的缺点是示教工作比较麻烦。

这种方式应用有如日本不二越的 Uniman 机器人的控制方式。位置信息存贮装置是电位计,每轴装六个;时间信息存贮装置是用多个定时器;顺序信息用纸带存贮,因而程序是固定的,但可以根据工作内容准备数种纸带,通过更换纸带实现多种作业。它的总体结构(方框图)如图 9-3 所示。

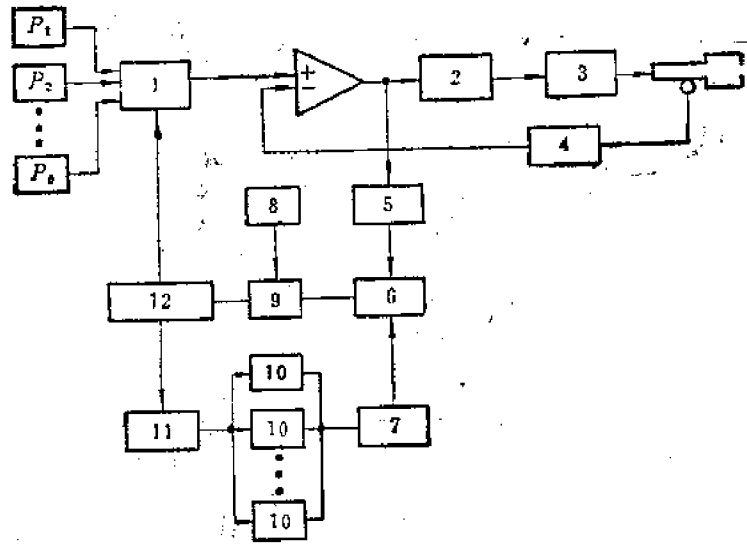


图 9-3 位置-时间分离方式构成

- 1、7、11—切换电路; 2—伺服阀; 3—液压缸;
 4—电位计; 5—零检测电路; 6—步进电路;
 8—纸带; 9—读带器; 10—定时器;
 12—逻辑判断电路

(3) 集中存贮方式

对于某些操作的顺序、位置、时限、速度等信息,本来是同时发出的,所以可将这些信息全部存贮在一个存贮装置中。这种方式称为集中存贮方式,一般也叫做连续轨迹控制方式。这种方式不仅是把各种信息集中起来存贮,而且是将某种操作或某个动作在空间的连续路径按经过的时间顺序如实地存贮起来。

这种存贮方式能够贮存再现时存贮容量很大的操作,如连续轨迹作业,这时再现的硬设备简单,工作速度可任意变换。但对程序作部分修改,就有困难,示教时要有熟练工操作。

按存贮信号的种类。可把这种方式分为三种,即模拟方式、数字方式和模拟-数字混合方式。

(i) 模拟方式

模拟方式是将各种信息变换为电压的振幅、相位或脉冲宽度进行存贮。由检测器检测到的信号,即是代表位移量。以相位调制方式存贮时,用旋转变压器作检测器,因为旋转变压器输出电压的相位与位置变化量成比例地变化,所以在存贮装置的各个通道,将基准电压波形和

各轴旋转变压器输出电压波形存贮起来。若以振幅调制方式存贮时,用电位计、自整角机、旋转变压器等作检测器,把随位置变化的交流或直流电压的振幅存贮起来。当以脉冲宽度调制方式存贮时,检测器用旋转变压器,它是把相位差由相位差-脉冲宽度变换器(即模-数变换器)变换为脉冲宽度存贮起来。

(ii) 数字方式

数字方式是一种处理离散值信号的方式。位置检测器用电位计,通过模拟-数字变换器把模拟量电压值变换为数字量存贮,为采用计算机控制创造条件。

(iii) 模拟-数字混合方式

为充分发挥模拟方式和数字方式两者的长处,检测、存贮部分采用数字方式,通过模-数变换器来实现;驱动部分用模拟方式,通过数-模变换器来达到。

集中存贮方式控制方框图如图 9-4 所示。

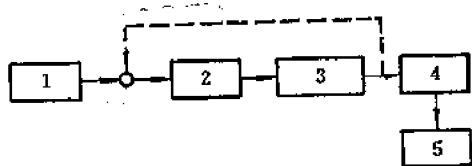


图 9-4 控制方框图

- 1—操纵柄; 2—放大; 3—驱动(模拟);
4—数字检测; 5—存贮

集中存贮方式需要的存贮容量很大,这种方式的存贮装置采用磁带,磁带分为数条磁道,可以原原本本地存贮信号波形,模拟信号或数字信号均可存贮。若采用磁鼓作存贮装置,它有很多磁道,主要用于数字信号存贮。

集中存贮方式应用实例有美国 AMF 公司的 Versatran、日本不二越的 Uniman 机器人等。如 Versatran 机器人,其位置检测器采用旋转变压器,相位调制;存贮信号为模拟方式,脉冲宽度调制;存贮装置为磁带。其存贮方式如图 9-5 所示。

集中存贮方式应用实例有美国 AMF 公司的 Versatran、日本不二越的 Uniman 机器人等。如 Versatran 机器人,其位置检测器采用旋转变压器,相位调制;存贮信号为模拟方式,脉冲宽度调制;存贮装置为磁带。其存贮方式如图 9-5 所示。

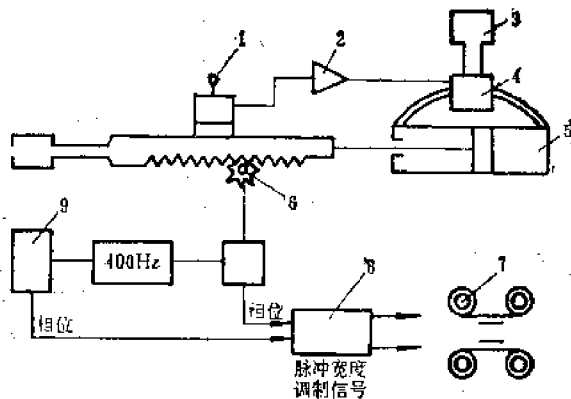


图 9-5 Versatran 机器人的构成图

- 1—操纵柄; 2—伺服放大器; 3—泵;
4—伺服阀; 5—液压缸; 6—旋转变压器;
7—磁带; 8—模-数变换; 9—基准旋转变压器

2. 示教方式

(1) 分类

示教是人使机器人按程序单顺序,将它的臂和手爪移到给定的位置,使存贮器记忆下以数据(或模拟)信息表示的位置。

如将机器人的整个作业分成为各顺序步,给出各步内单元动作的内容,如位置、时间等,并按作业顺序将这些信息记忆到存贮装置内,这就完成了整个工作循环的示教工作。

如上所述,存贮方式有分离存贮和集中存贮。同样地,若把位置信息、时间信息和顺序信息分开示教,称为分离示教方式;与此对应,若按给定顺序进行示教时,把位置信息、时间信息也放在一起示教,则称为集中示教方式。

如果按示教过程的操作方法来分,则当操作人员示教时,直接手把手地对机器人示教,称为直接示教方式;若用人的语言或变为数值后一次示教,称为间接示教方式。

(2) 集中示教方式与分离示教方式

集中示教方式:在示教动作内容和顺序时,同时示教位置和时间信息具体数值的方式,称为集中示教。这种方式用操纵柄直接示教。操作人员用操作柄按给定的顺序示教动作内容,这时有关位置和时间的具体数值便也自动地进行了示教。如美国的 Versatran 机器人连续轨迹控制、日本的 Uniman 机器人的示教就属于这种方式。

分离示教方式:在分离示教分式中,要示教顺序信息,并单独地示教位置和时间信息。现将各种信息的示教方法说明如下。

(i) 顺序信息

① 用工具给定的方式。可用凸轮给定顺序信息,一旦给定后就固定不变。

② 手动给定方式。可用插销板给定顺序信息。

③ 半自动给定方式。可用穿孔带或卡片给定顺序信息。

④ 自动给定方式。可用磁鼓、磁芯给定顺序信息。

(ii) 位置信息

① 用工具给定的方式。可用机械停档定位示教位置信息。定位后,不能变更。

② 手动给定方式。可用在机器人上固定的档块或用电位计示教位置信息。程序容易变更。

③ 自动给定位置信息。可用磁鼓等示教。

(iii) 时间信息

① 固定给定方式。它是按各步进信号的发信顺序依次给定的方式。若在转鼓定时器上示教时间信息,要修改时间长短有一定困难。

② 可变手动给定方式。可用若干个时间继电器为每个顺序独立示教时间信息。各顺序步时间长短易于修改。

③ 自动给定方式。可用计数式定时器。

(3) 直接示教方式与间接示教方式

在集中示教和分离示教的位置信息中,若是一面看着机器人手臂的移动,一面给定电位计的数值或用档块给定位置,就称为直接示教。在间接示教中,动作内容和顺序的示教也属于这种情况,就是在插销板上插入插销或制备穿孔带。示教时间信息的具体数值时,则是将插销装入转鼓定时器,或整定时间继电器。

下面对用操纵柄示教的具体问题作讨论。

大家知道,操作人员向机器人示教时,可以一边用眼睛核实位置、时间、速度等信息和顺序信息,使之符合工艺要求,一边进行示教。但是,在一般情况下示教,操作人员无法感受对控制对象施加的力的大小,需要在机器人配上双向伺服机构。图 9-6 表示在机上操作的方式,图示

为考虑机器人上的一个轴,其中 A_1, A_2 为放大器增益, J_1, J_2 为惯性矩, D_1, D_2 为制动力矩, 下角数码 1 代表示教侧, 2 代表负荷侧。若操作人员处在与机器人分离的位置进行示教, 则称为在机外操作方式, 它又可分为位置控制和速度控制两种方式。位置控制方式是采用主从式操作机的双向伺服系统, 如图 9-7 所示。速度控制方式, 如图 9-8 所示。如采用上述这些伺服系统, 那么操作人员就可以在示教过程中感受力的大小。

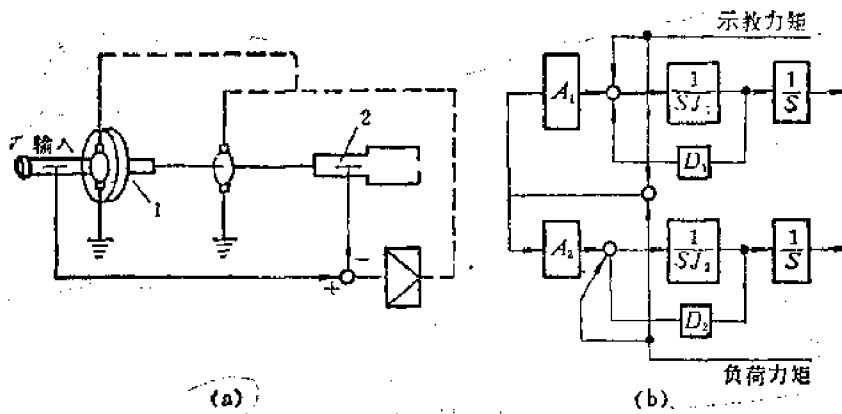


图 9-6 机上操作方式
(a) 构成图; (b) 方框图;
1—电动机定子; 2—力矩检测器

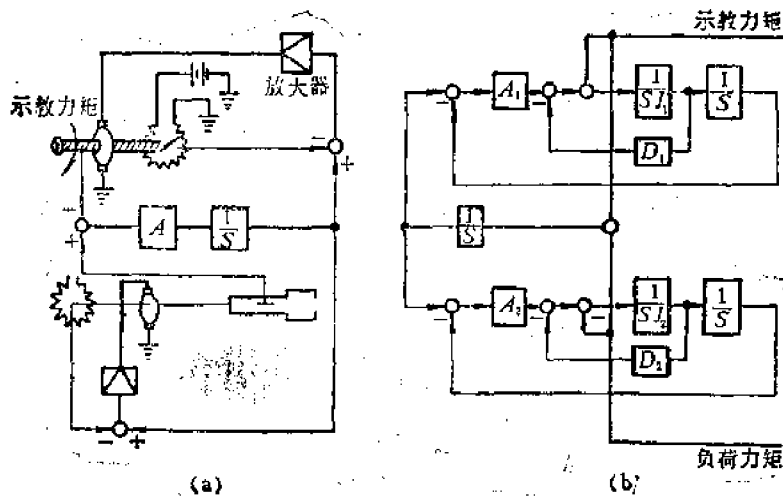


图 9-7 机外操作方式(位置控制)
(a) 构成图; (b) 方框图

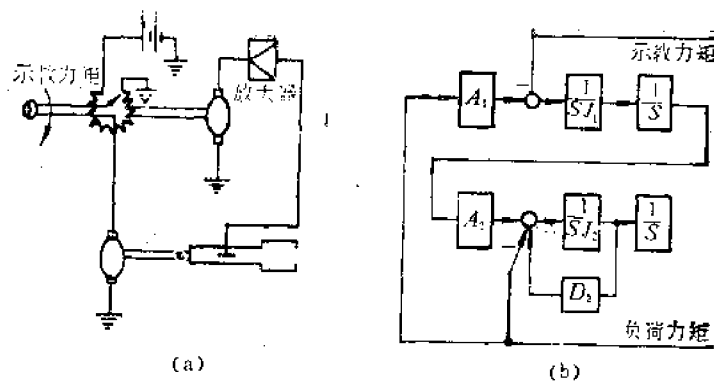


图 9-8 机外操作方式(速度控制)

(a) 构成图; (b) 方框图

3. 再现方式

(1) 分类

再现方式是指重复型机器人进行重复作业时,以怎样的顺序读出作业内容。

对于采用集中存贮方式的场合,只要将示教内容原封不动地存贮和再现就可以,因此再现是易于实现的。问题是对于分离存贮方式的再现方式,情况要复杂得多。若按顺序信息对再现顺序方式进行分类,可分为顺序保持不变的固定顺序再现方式和再现顺序可变的顺序再现方式两种。

固定顺序再现方式可用于同一作业内容重复进行的单纯重复型机器人,这种方式也是易于实现的。

可变顺序再现方式是机器人本身在工作中检测工作对象或环境的物理量,并据此对工作对象的情况作出判断,使再现顺序进行组合变更。下面就这种再现方式作讨论。

(2) 可变顺序再现方式

可变顺序再现方式又可分为程序切换方式和随机存取方式。程序切换方式是准备数种程序,根据比较判别后,转向某种程序,以再现示教动作,这种方式也并不麻烦。随机存取方式是根据工作对象的情况,自动编制程序,因此必须使用电子计算机进行随机控制处理。

(i) 传感器

在可变顺序再现方式中,必须检测工作对象或环境的物理量,为此需要采用一些变换装置,如触觉、视觉等。

① 触觉传感器

对于对象的触觉信号相适应功能的方法可有下列几种:

用开关信号控制。它是根据与对象是否发生接触的判断来感受物体是否存在,用手爪对于工作对象状态的感受来切换程序,使用开关信号或连续输出信号,按照事先存贮的程序来修正手爪与工作对象的位置。

用压觉信号控制。它是用连续输出信号控制把持力和握力,减轻对工作对象的冲击,跟踪运动对象,使机器人作抓取动作。

用滑动信号控制。它是用来检测握着的物体的滑动状态,以防止滑掉脱落。如可采用变位计。

② 视觉传感器

这种传感器的特点是可以无接触地感测工作对象的状况。虽然，根据摄取的图像抽出工作对象的特征，具有智能的作用，超出了适应性重复型机器人功能的范围。但是，若能选出特定独立图像的功能，例如从颜色上分出涂有某种色的物体的功能，还是属于适应性重复型机器人范围。

③ 其他传感器

例如有能辨别人声音的“听觉器”，能辨别气、液性质的“化学传感器”，能辨别电流、磁场等的“电气传感器”等。

(ii) 程序切换方式

按程序切换的方法又可分为程序选择方式、程序跳越方式和子程序方式三种。

① 程序选择方式

这种方式是在示教时预先示教数种程序，再现时则利用简单的传感器进行切换，实际上应用的大部采用这种方式。分离存贮固定顺序的装置也可以方便地用逻辑电路和程序切换电路改为这种切换方式。如图 9-9(a) 所示

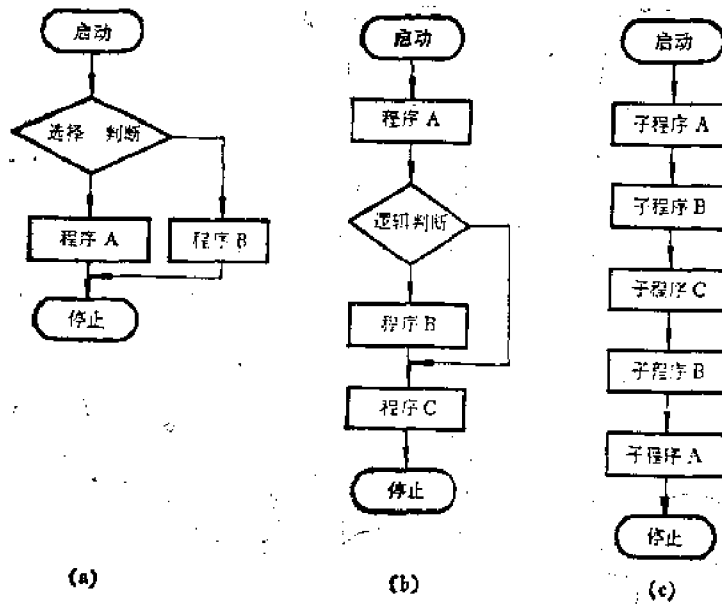


图 9-9 流程图

(a) 程序选择方式; (b) 程序跳越方式; (c) 子程序方式

② 程序跳越方式

这种方式是在再现时执行重复作业程序中间，根据触觉传感器等获得程序切换信号，跳过几个单元动作。如在装箱之类的作业中，可以每一工作循环变更一部分作业内容等。它的流程图如图 9-9(b) 所示。

③ 子程序方式

它是将一连串单元动作作为子程序集中起来，并存贮这些子程序顺序，如图 9-9(c) 所示。

(iii) 随机存取方式

这种方式是单元动作全部都有地址，机器人本身可以根据检测到的信号来切换地址顺序。这时需要采用数字电子计算机，除用作存贮顺序信息以及位置、时间、时限信息外，还可以存贮作为模拟信息的连续速度信息、握力和压力等的感觉信息。

这样，随机存取方式既能存贮多种模拟信息，又能运用数字电子计算机的计算能力，利用两点间路径的直线插补或圆弧插补，从而可以进行极为细致的动作。例如日本东京计器公司的工业机器人，采用这种方式能判别对象的尺寸和重量，如果工作对象太大、太重，可以将臂缩短，采取所谓“缩腰”动作来拿起工作对象。它根据判别的结果，可以在两种程序中进行选择，方框图如图 9-10 所示。

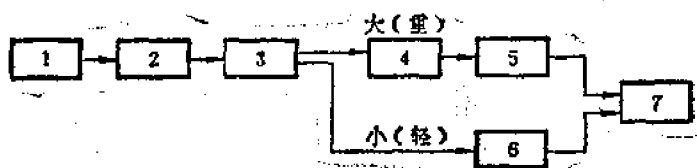


图 9-10 适应性重复型机器人工作控制方框图

1—开始； 2—抓取对象； 3—判别(大小、轻重)；
4—缩腰动作； 5—程序 A； 6—程序 B； 7—结束

二、感觉信号反馈控制

为了提高机器人手臂的功能，充分发挥伺服机构的性能，很有必要采用各种感觉信号反馈的控制方式。

如前所述，用于机器人的人工感觉有触觉、压觉、滑觉以及力觉等。对于作为人工感觉的传感器的要求是：(1)能够检测出在某个区域中的力；(2)能够检测出作用于某个方向的力；(3)体积小、重量轻。

用作为人工感觉的大多数传感器的工作原理是将机械力转换为电信号，而且可以认为是属于接触式传感器或接近开关之类的组件。

1. 具有触觉的手爪控制

为了实现具有触觉反馈的控制，可通过在手爪各部位装上触觉传感器(如压敏元件、微型开关等)，并将这些元件的输出信号送往电子计算机，使之进行逻辑判断。所以，这种控制的基本问题是探索和检测哪个触觉有否输出(开关是否闭合)。

若在手爪上装有几个“开-关”触点，则根据触点的接触状态，既可知道手爪的状态，又可确定下一步的控制动作。图 9-11 表示机械手在某个区域内连续地探索物体的一种方法。机械手作横向探索，并且仅以单位量前进进行探索。在探索中，一旦机械手的手爪碰到物体，于是就有触觉输出，同时使机械手的探索中止，并转向抓取物体的控制。

当机械手抓取物体时，手爪和物体的位置关系是很重要的。如图 9-12(a)所示，物体碰到手爪左边时，手爪必须按箭头 R_1 所示的方向纠正位置；而当像图 9-12(b) 那样抓取物体时，也必须按箭头 R_2 所示的方向纠正姿态，以使物体与手爪之间刚好保持平行关系，这样手爪就可以正确地抓取物体。

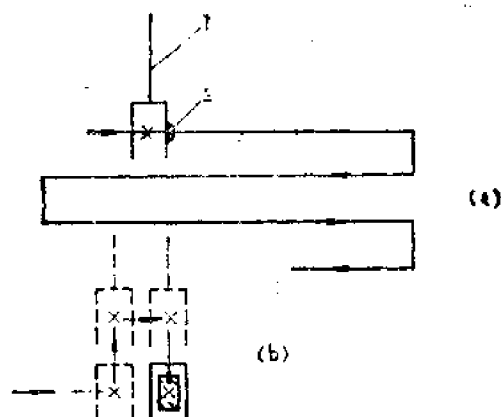


图 9-11 探索和抓取物体
(a) 探索物体; (b) 抓取物体的控制;
1—机械手; 2—传感器

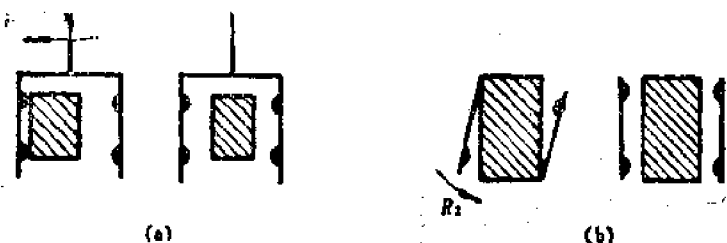


图 9-12 手爪的动作纠正
(a) 手爪的位置纠正; (b) 手爪的姿态纠正

利用触觉反馈除了有可能检测物体所安放的位置外,还可能检测手爪与物体之间的接触状态,以及判断物体的形状,充当视觉使用。

2. 具有压觉的手爪控制

利用触觉控制时,手爪与物体之间的关系可以认为是静态的形式,而当手爪操作物体时,这两者之间的关系应作为动态的形式考虑。例如,在需要抓住柔软的或易碎的物体时,希望有一个不致于使物体滑落的最小握力。为了实现这种动态关系的握力控制,引进了利用压觉和滑觉反馈的控制方式。

仿照人手抓取物体的动作,可以把机械手的抓取动作分为三种,即

(1) 硬抓取——是以手爪可能产生的最大力来夹住物体的状态。它适用于需要牢固地抓取物体的场合。

(2) 软抓取——是为适应物体的性质或要求,而以适当的力夹住物体的形式。它是介于硬抓取与零抓取之间的一种状态。

(3) 零抓取——是在不施加力的情况下夹住物体的形式。常用于检测物体的位置、形状的场所。

显然,为了实现软抓取和零抓取,手爪的握力控制是十分重要的。图 9-13 表示一种握力控制系统,其手爪机构是采用直流马达驱动,在手爪没接触物体之前,它以一定的速度接近物

体,一旦接触物体以后,就构成了握力反馈闭环系统。若控制系统设定不同的内部参数,采取不同的运算方式,就能实现各种不同的抓取状态,从而可以达到以一定的柔性对待物体。

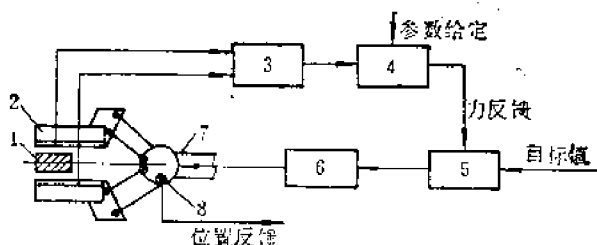


图 9-13 握力控制系统

- 1—物体; 2—手爪; 3—传感器信号放大器;
4—状态调节器; 5—比较器; 6—功率放大器;
7—电动机; 8—电位计

滑觉的检测方法有下列两种:

- (1) 检测当手爪与物体之间产生滑动时的振动;
- (2) 检测当手爪与物体之间产生滑动时的相对位移。这种方法由于与物体的性质无关,检测较为可靠,故常用于有强烈机械噪音的场合。

通常,滑觉是与压觉一同使用,以分别用来检测与手爪和物体接触面相平行及垂直方向的力。图 9-14(a) 表示带有滑动控制器的控制系统,其滑觉传感器的结构如图 9-14(b) 所示。它是用固定磁头来检测随物体滑动而转动的滚子的旋转位移。当物体对手爪滑动时,滚子就跟着旋转,每旋转一个单位角度时就发出一个脉冲信号,按照脉冲的到达数,使握力逐级增加,一旦滑动停止,便保持这时的握力。

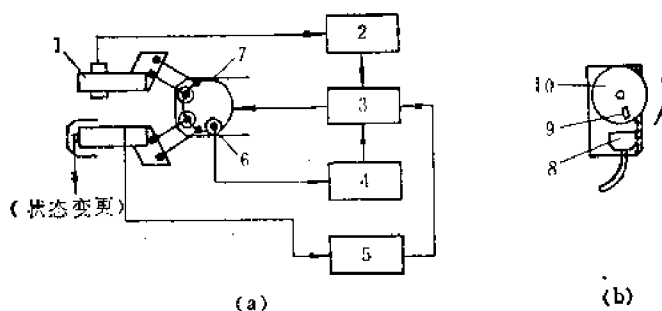


图 9-14 带有滑觉的控制系统

(a) 控制系统 (b) 滑觉传感器

- 1—手爪; 2—滑动控制器; 3—驱动电路;
4—位置、速度控制器; 5—握力控制器; 6—电位计;
7—伺服马达; 8—磁头; 9—磁铁;
10—滚子

3. 具有力感觉反馈的控制

双向伺服系统可采用位置伺服偏差,而不需要特别的力检测装置,就能得到简单的力的信息,所以它是一种既简单而又有效的具有力感觉反馈的控制方式。

下面讨论双向伺服系统给力传递机能的原理。一般说来，模拟伺服机构如图9-15所示，而且近似地认为伺服马达的力矩-速度特性呈线性关系。

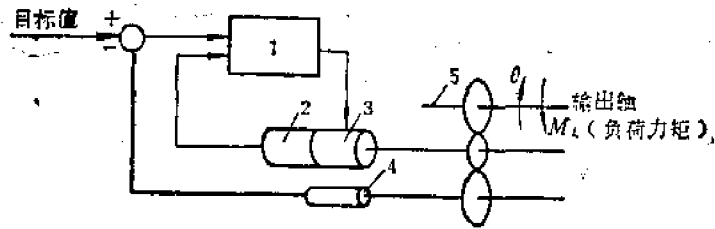


图 9-15 模拟伺服机构

1—伺服放大器； 2—速度发电机； 3—伺服马达；
4—电位计； 5—输出轴

设伺服马达的外加电压为 V (V)，伺服机构的输出轴与马达轴的角位移分别为 θ 和 θ_m ，且 $\theta_m = i\theta$ ， i 为齿轮传动比，其角速度分别为 ω 和 ω_m ，则伺服马达的生成力矩 M_m (kg·cm) 可由下式计算

$$M_m = k_m V - k \omega_m \quad (9-1)$$

式中， k_m 为伺服马达的制动力矩系数 (kg·cm/V)， k 为力矩减少系数 (kg·cm·s/rad)。

若取负荷力矩为 M_L (kg·cm)，则马达轴和输出轴的力矩平衡方程式可分别写出为

$$J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + Pr = M_m, \quad (9-2)$$

及

$$J_L \frac{d^2 \theta}{dt^2} + M_L = iPr. \quad (9-3)$$

式中： J_m 为马达轴的换算惯性矩 (kg·cm·s²)， J_L 为负荷惯性矩 (kg·cm·s²)， P 为作用于各个齿轮上的切向力 (kg)， r 为齿轮的节圆半径 (cm)。

如果马达的外加电压 V 等于偏差电压与速度发电机电压之差，则下式成立

$$V = k_a k_p (\theta_i - \theta) - k_s k_r \frac{d\theta_m}{dt}. \quad (9-4)$$

式中， k_a 为放大器的增益， k_p 为电位计的输出电压系数 (v/rad)， k_s 为速度发电机的输出电压系数 (V·s/rad)， θ_i 为位置目标值。

于是，根据上述诸式可得运动方程式

$$J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K_v \frac{d\theta}{dt} + K_s \theta = K_s \theta_i - M_L. \quad (9-5)$$

式中， $J_0 = i^2 J_m + J_L$ ， $K_v = i^2 (k_s + k_m k_a k_r)$ ， $K_s = i k_m k_a k_p$ 。

若把上式的两边作拉普拉斯变换，则成为

$$(J_0 s^2 + K_v s + K_s) \theta(s) = K_s \theta_i(s) - M_L(s). \quad (9-6)$$

若把 $\theta_i(s)$ 、 $M_L(s)$ 看作为输入，则位置偏差 $e(s) = k_p (\theta_i(s) - \theta(s))$ 成为

$$e(s) = k_p \frac{J_0 s^2 + K_v s}{J_0 s^2 + K_v s + K_s} \theta_i(s) + k_p \frac{1}{J_0 s^2 + K_v s + K_s} M_L(s). \quad (9-7)$$

在式(9-7)中,当 $M_L=0$,并对 θ_1 施加阶跃输入时,或当 $\theta_1=0$,并对 M_L 给定阶跃输入时,可以知道它们的响应如图9-16所示。由图可以看出,对于位置偏差信号来说,当经过足够长的时间之后目标值输入的影响就消失了,而只剩下了负荷力矩的影响。因此,根据最终值定理,即对位置目标值和负荷力矩整定之后,则有

$$e = \frac{1}{ik_m k_s} M_L \quad (9-8)$$

由此可知,稳定偏差大致与负荷力矩成比例。

于是,当采用伺服机构时,通过测定稳定偏差值就能够方便地检测出负荷力矩的大小。

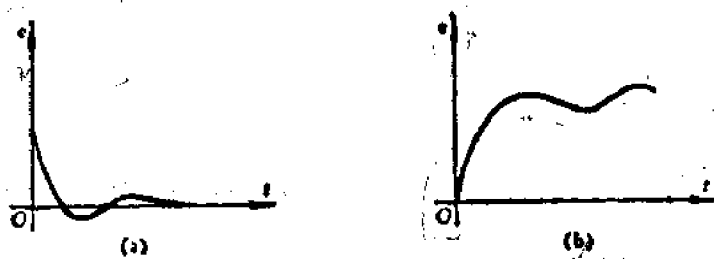


图9-16 阶跃响应

(a) $M_L=0, \theta_r=1/S$

(b) $\theta_r=0, M_L=1/S$

三、操纵型机器人

早期的操纵型机器人是采用单向控制的,也即是当工作人员操作主动部分,其位置信号被送至从动部分,以控制从动部分跟随主动部分动作。由于这种主从系统,不能把加在从动部分机械手上的力反馈给工作人员,所以无法进行复杂的作业。

后来,对应用于核反应堆内的主从操纵型机器人研制了一种双向伺服控制系统。在该系统的主动部分也能够某种程度上感受到加在从动部分上的力。由于这样引进了力感觉或力控制的概念,构成了机器人控制技术的显著发展,使机器人进行作业的范围大大扩大。

1. 双向伺服系统

具有力传递机能的双向伺服系统,通常可分为三种基本形式,即:对称型双向伺服系统,力回送型双向伺服系统;力反馈型双向伺服系统。

对称型如图9-17(a)所示。这种形式是把主动部分和从动部分的轴位置偏差 $(\theta_1 - \theta_2)$ 引导到各部分的位置调节器中。它的从动部分和通常的位置伺服一样,在 θ_2 与 θ_1 一致时给出力矩。而对于主动部分,当 θ_1 还比 θ_2 大时,即有偏差时,就在主动部分产生与偏差成比例的抑制 θ_1 的力矩,以使之与 θ_2 相一致。若对这个系统的从动部分加上负载力矩 M_L ,为了平衡这个负荷,就在从动部分的位置伺服系统产生了与 M_L 成正比的偏差,于是在主动部分也形成抑制其转动的动力矩,此力矩大小是与这个偏差成比例。总之,若在这个系统的从动部分加上负荷,就会形成返回到主动部分并与该负荷成比例的反作用力。由于这种形式只采用伺服偏差,不需要特别的力矩检测装置,所以是一种最简单的系统。但是,如果机械手的自重和摩擦力都较大,则将不会很好动作,故它不适用于重负荷的动力机械手。

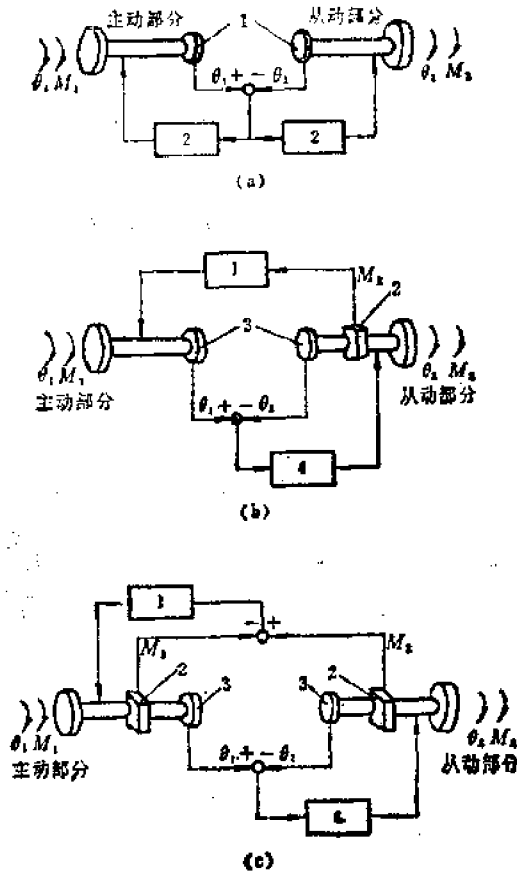


图 9-17 双向伺服系统的基本形式

- (a) 对称型 1—位置检测器; 2—位置调节器;
 (b) 力回送型 1—力矩传送器; 3—力矩检测器;
 3—位置检测器; 4—位置调节器;
 (c) 力反馈型 1—力矩调节器; 2—力矩检测器;
 3—位置检测器; 4—位置调节器

图 9-17(b) 表示力回送形, 其从动部分的伺服系统和一般的位置伺服系统完全一样, 而主动部分和从动部分是用转矩传送器和位置调节器连接起来, 还采用适当的检测器检测其从动部分需要的力矩值并传送到主动部分。这种形式能够适用于重负荷的动力机械手。但是, 由于该系统在动作开始时, 通过检测器把从动部分的惯性力全部检测出来并送到主动部分, 所以在从动部分重量大的情况, 即使是无负荷时, 也存在有操作重的缺点。

从感觉传递这一点来看, 力反馈型(图 9-17(c)) 是性能更好的一种形式, 由于它采用主动部分和从动部分的力矩差这样小的力进行传送, 所以当无负荷操作时, 在主动部分完全不感受到上述那样惯性力造成的反力, 操作容易。

2. 机器人系统

由操作者操纵的隔离式主从机器人系统如图 9-18 所示。在这种情况下, 操作者一方面靠本身的视觉监视对象物, 另一方面通过感觉反馈来进行操纵。

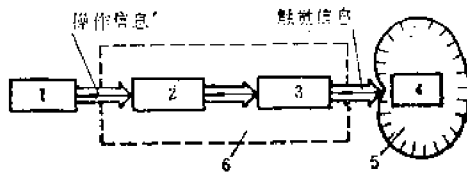


图 9-18 由操作者操作机器人的系统

1—操作者；2—主动部分；3—从动部分；4—对象物；5—环境；6—机械手

对于远距离遥控的机器人，为了解决主动部分与从动部分距离遥远而产生控制信号的时间滞后，及操作者不能直接监视对象物等问题，就必须把系统的主动部分换成电子计算机，并把主动部分与从动部分的关系存贮到计算机内，用电子计算机来操纵机械手。该系统如图 9-19 所示。

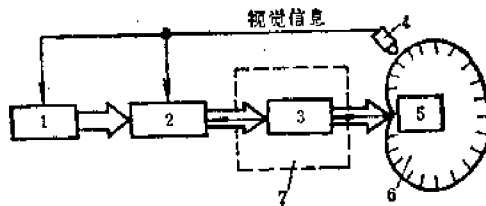


图 9-19 在操作者与机器人之间介入电子计算机的系统

1—操作者；2—电子计算机；3—从动部分；
4—摄像机；5—对象物；6—环境；7—机械手

图 9-20 所示的是作为研究目标的一种机器人系统。该系统使用电子计算机，并以它作为中枢。为了使机器人能按照操作者所给定的指令自律地决定自己的行动，它必须能够了解自己所处的环境，具有图像处理和识别物体的能力，能够制定计划、作出解决问题的判断，以及具有处理自然语言的能力等，也就是说要求机器人具备必需的信息传感器和一些软件结构。

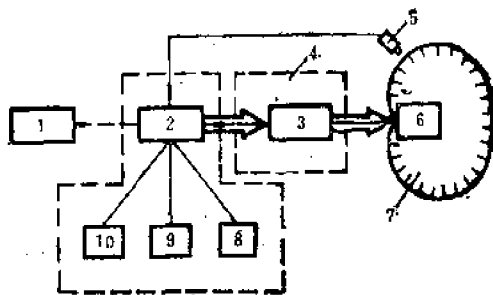


图 9-20 机器人系统

1—操作者；2—电子计算机；3—从动部分；4—机械手；5—摄像机；
6—对象物；7—环境；8—识别；9—模仿；10—问题求解

3. 系统用的软件

如前所述，机器人从接受操作者所给定的指令，直至自律地执行动作的全部过程，都是按存贮在电子计算机内的程序来执行的。所以，机器人的“智能度”完全取决于电子计算机软件

结构的功能。

机器人的软件,从指令的解释到执行有许多级。下面叙述一下有关各级的特点。

(1) 问题解析

对机器人的指令,一般借助于键盘输入。这时的指令是用预先组成的语言来表现,且把该输入依次变换为可能执行的形式。通过计算机的内部语言对输入的指令进行编译,并把它送往下一级的计划过程。

(2) 策略计划级

在问题求解的阶段,是决定使用哪一个子任务的过程,而在计划时,则是确定使各个子任务怎样执行的过程。例如在子任务“Go To POSITION(3)”中,指令“Go To”可认为是机器人执行的各种方法,若对于沿平面移动的机器人,当地面是平坦的且没有任何障碍物,则机器人就以最大的速度前进到终点,而实际上存在有障碍物,则机器人就必须根据来自传感器的信息而行动。

(3) 策略执行级

策略程序的使用关系到一个子任务的执行。例如,作为执行“Go To”指令的程序可有下列三种方法,即(i)识别已知的障碍物,并考虑到障碍物的最短路线的应用;(ii)通过迷路的能力的应用;(iii)使之任意行动的方法。

(4) 控制级

由机器人执行程序得到的机器人执行用的数据,是通过电子计算机的存贮器,并被存入到控制寄存器中。也即是说,根据机器人的执行程序所产生的数据,依次被送入寄存器,再由寄存器通过D/A变换送到电子计算机的外设,而成为控制机器的输入。

另外,该级还控制外部传感器输入和中断信号。

机器人的软件必须作成各种性质的语言。一般来说,由键盘来的输入部分,因为有指令顺序,所以应该使用能作语言解析的字符串处理语言。而策略计划是使用表处理语言。典型的这种表处理语言有LISP,机器人用的问题应答系统、问题求解系统就应用着这种语言。

还有,对于机器人的移动或手臂关节的控制来说,由于包含有所设定的坐标系的坐标变换等的问题,往往要进行代数计算和三角函数运算,所以要使用过程语言。通常,对于这些计算使用FORTRAN语言。

在机器人的控制级中,为了使电子计算机直接控制机器人的控制机器,使用了汇编语言。此外,当用FORTRAN书写的子过程的运算时间增长时,也有采用汇编语言以谋求得到高速化。

但是必须注意,用FORTRAN书写的程序是不能与用LISP书写的程序直接结合的。为了有效地利用各种语言以构成具有特征的机器人系统软件,需要通过规定共同存贮范围,并引进控制它们的分时监控器,这样就可以交替地把别的程序作为子程序调出来使用。

§9-2 动力假手

一、概 述

人手操作对象物的主要机能,用工程的观点大致可概括为机械功能、感觉(反馈)功能和控

制功能三个方面,在其协调配合下,可以在一定的空间内给出任意一点的位置和方向,依靠感觉系统(主要是触觉和视觉)对对象物加以识别,通过中枢神经系统的知觉、判断并控制完成预期的动作。

对应于上肢切断部位,假手的种类不同,其机能也不相同。一般可分为肩假手、上臂假手、前臂假手和手假手等。通常,把用作装饰目的的假手称为装饰假手,把以残肢者残存肌肉群或其他健全骨骼肌作为力源,通过绳索牵引等方法来开闭无外部动力源的假手,称为能动假手,而把利用外部动力源来驱动的假手,称为动力假手。

为了更好地满足残肢者对假手使用的要求,本世纪 50 年代以来,动力假手得到了较大的发展,其主要特点是:(1)增加了假手的自由度,提高了假手的功能;(2)将动力源与信号源分离,从而大大减轻了残肢者操作时的生理负担;(3)外形和功能更接近于人手。

假手构成装着者人体的一部分,成为一种典型的人-机系统。该系统包括三个部分:(1)假手的控制信号;(2)假手的结构件(包括动力源、作动器等);(3)假手的人工感觉及向人体的反馈,如图 9-21 所示。所以,在设计动力假手时,除了有必要考虑工程的设计方法外,还有必要考虑假手装着者的生理和心理的接受、以及社会的认可。根据这些综合的观点,可把动力假手设计上的问题要点归纳为下列几个方面。

(1) 有关动作机能设定的问题,换言之,即自由度的问题;(2) 假手的结构和机构的问题;(3) 关于假手的材料问题;(4) 容重和输出的问题;(5) 假手控制系统的问题;(6) 外观上的问题;(7) 安全性的问题;(8) 可靠性的问题。

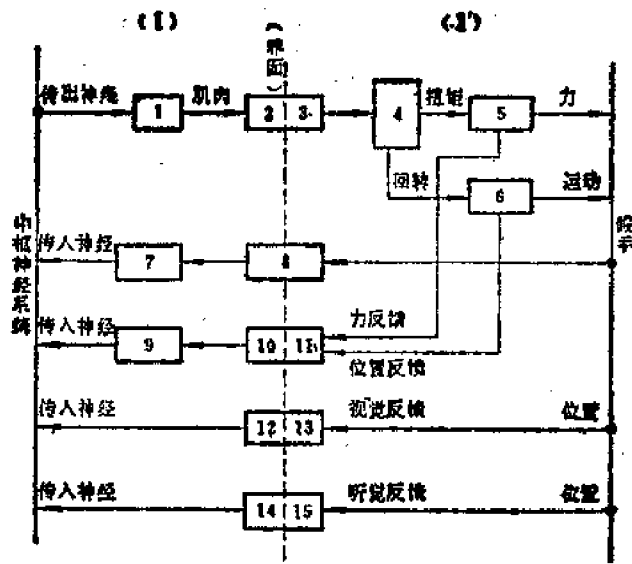


图 9-21 人和假手的关系示意图

- (I) 人体; (II) 假手; 1—肌肉; 2—皮肤; 3—电极;
 4—假肢控制系统; 5—力传感器; 6—角度传感器; 7—固有接受器; 8—残肢端肢体;
 9—皮肤传感器; 10—皮肤; 11—刺激通道; 12—眼; 13—位置;
 14—耳; 15—杂音源

1. 有关动作机能设定的问题

动力假手的机能,虽然是指可能处理日常生活的机能,但是由于日常生活的运动机能范围很广,所以只能考虑采用具有某些特定种类的动作,并把这些运动机能类型化。例如,根据国外资料介绍,通过对先天性上肢缺损的儿童进行机能实验结果可以知道:

能够用电动假手进行的动作有:① 拿、移、搭积木;② 用一只假手在桌上拿、移东西。

有困难但是可能做的动作有:① 写字;② 拿、移书本;③ 翻书;④ 拧水龙头;⑤ 用杯子斟水喝;⑥ 用特殊的叉子饮食。

完全不能做的动作有:① 穿脱衣服;② 盥洗动作;③ 开、闭门(把手式);④ 用剪子。

从以上的结果可以判断,假手要处理的动作机能是很不相同的,而且使用频率也差别很大。为此,在实际上没有必要使假手具有处理上述各种动作机能的自由度,也即只要具有某些程度机能就可以。所谓某些程度机能,就是指机能限定的假手形态。虽然这些机能可通过手臂运动分析来进行设定,但是由于研究资料尚不完整,所以还只能是属于某种程度经验的判断。

2. 假手的结构和机构的问题

因为假手是要作为人手的代替物,所以在设计时,要考虑使它的结构与人手接近。大家知道,人体的构造是以骨骼为中心,在其上附着有进行颞颥作用的直动式软体传动机构(骨骼肌),外围再用皮肤覆盖的骨架式结构。目前,虽然正在尝试用气压为动力源的橡胶人造肌肉方式进行骨架式动力假手的开发,但是它在控制方面还存在有许多问题。根据假手控制的实用性,电动假手的驱动器必须采用直流微型马达。这种假手的构造是由直流马达、传动机构及其支架、以及外围的壳体组成,不可能是骨架式结构。但是,若在这种假手壳体的周围蒙上聚氨酯类材料做成的套子,则看上去就可能与人手的骨骼近似。在机构方面,若考虑与人手的骨骼近似,可设想采用空间的连杆机构模型。手指端点的运动轨迹,若用某种函数表示,也能够通过空间连杆机构来再现的。但是,为了使假手机构与人的骨骼肌有等同的柔软性,使两者更进一步地近似,开发新型的驱动器是一个关键问题。

3. 关于假手的材料问题

人体组织是生物体特有的有机组织,但是对于目前的技术来说,还不能制造出可作为包括假肢在内的广义人工脏器的结构材料,为此,只能使用金属材料及有机材料。特别是为了必须考虑容重问题,实际上所能使用的金属材料品种也是有限制的。在设计假手时,为了尽可能地减轻容重,必须在接近材料弹性极限状态下进行使用。但是,对于非铁金属等材料,有关动态弹性极限的设计资料还不完整。所以,在假手的结构上,目前还不可避免地存在着机械容重大的问题。

3. 容重和输出问题

人的(双)臂重约为本身体重的12.6%,若从这点出发,全臂假手的重可为4~5 kg左右。但是,人臂的各关节是以悬挂在支点(肩关节)的力矩为最小而进行协调运动的。而对于假手装着者来说,情况就不一样,除非是在截肢后不久,否则将会由于手臂的质量感觉退化,即使是装上同样质量的假手,也会感到负担。显然,影响电动假手容重的主要因素是结构材料、马达及减速机构。目前对这些方面所采取的对策有:在结构材料方面,用镁合金(相对密度为1.81)代替原来的铝合金(相对密度为2.70)、用玻璃纤维强化塑料代替原来的聚氯乙烯并进行极限设计;在马达方面,使用输出对容量比大的空心电枢马达,特别是为了减轻容重,用钕钴系强磁铁(7200 G)代替永久磁铁,以提高单位容重的输出;在减速机构方面,支架材料改用镁合金

板,并对齿轮和轴的固定给予十分的注意,以使它们具有足够的强度。

5. 假手控制系统的问题

对于补偿人体失去的机能的动力假手,若能通过中枢神经系统和适当的反馈,进行与正常肢体等效的控制,那是很理想的。作为这种接口的手段,研究了以肌电信号作为假手的输入信号,并通过机械振动或电气刺激,把皮肤感觉作为媒介反馈给中枢神经系统的方式,其中部分已达到了实用化的要求。但是,随着截肢部位的提高,目前可作为输入信号的数量就变少了,而且对多自由度的皮肤感觉反馈的识别也产生困难。为此,对于多自由度假手系统,有必要采用把中枢神经系统机能的一部分附属在假手系统内的形态,也即是使在假手系统内具有反馈的机能,并能把某种运动类型以简单的记忆装置进行信息处理,从而实现对假手控制的形态。

6. 外观上的问题

设计假手时,要考虑外观,即考虑装着假手患者的心理问题及社会接受的要求是有必要的。在这里,手部的外观是很重要的。至于对外观和机能两方面哪一个作优先考虑,尚待进一步研究。

7. 安全性的问题

对于安全性,实际上包含有假手的本体在某种环境状态中使用是否安全,及残疾者在使用假手时能否安全这两个方面。对于前者,若在假手本体蒙上兼作装饰用的聚氨酯类等材料做成的套子,则其机械部件就不会与环境直接接触。另外,对于长时间使用的场合,其实也并不要求做到充分使用的耐磨性。而对于后者,随着输出力矩的增加,存在着害怕假手成为凶器的可能。特别是对于用记忆某种动作进行再现控制的场合,要考虑即使由于干扰而误动作,假手仍能继续保持原来的运动。在这种情况下,还需要采用某种方法使假手紧急停止动作。作为紧急停止的信息,也有必要从中枢神经系统取得联机化。总之,随着假手本体变得复杂,需要事先考虑好解决电气系统和机械系统安全性的相应措施。

8. 可靠性的问题

归根结底,为了安全地、正确地使用假手,必须解决假手的可靠性问题。因为使用者对假手的信任是一个不可缺少的问题,这也是今后工程学、心理学的研究课题。

二、肌电信号及其处理

50年代以来,肌电信号开始作为控制信号应用于假肢及机器人的控制方面。

肌电信号通常受下述因素影响:(1)肌肉的类型、功能和状况(包括疲劳);(2)位于肌肉和电极之间的组织、骨骼和皮肤的特性;(3)电极材料、表面结构、几何形状和间隔;(4)电极相对于肌肉的位置。

用人体生物电来控制假肢,关键在于肌电信号的检出与不同动作肌电信号的分离。

1. 肌电信号的检出

人体生物电的检出,必须依靠感受器——电极作引导。由于人体生物电中,肌电比较微弱,因此引导肌电的电极选择关系甚大。最通常使用的是成对放置在皮肤表面的诱导电极(表面电极)。使用表面电极来检出生物电信号,有以下突出优点:(1)对信号源产生的干扰较小;(2)无创伤;(3)使用简便,能募集和检出相关肌肉的肌电脉冲累积信号(EMG),对控制用肌电信号的检出很切实用。

电极的尺寸、形状、材料、工艺等,对检出肌电的性能都有影响。电极通常用银片制成,也

有使用金、铅等材料。形状一般为圆形,直径约在7~10 mm,大的也有达15 mm的。

电极的固定位置应选在有关肌肉腹部的皮肤上,最好是放在它的运动点上。所谓运动点就是使用一定强度和持续时间的电流,刺激肌肉或支配该肌肉的神经时,所用的电流最小且最易引起兴奋的部位。成对的两个电极一般布置在肌肉纵向间隔2~3 cm的位置上。

肌电控制假手用的电极,是固定在前臂套筒相应肌肉位置的内壁上,引出导线宜选用低噪声优质电缆线,以尽量减少外来干扰信号(主要是50 Hz市电)的干扰。

2. 肌电信号的分离与处理

肌电信号在信号处理技术范畴内属随机信号。通常采用时间域内观察和描记肌电信号的测试方法,如采用示波器、肌电图仪和多道生理记录仪等,所观察和直接记录的是肌电的幅值(峰峰值)随时间而变化的关系。但是,由于肌电信号包含频率成分多,而采用时域描记分辨率低,用以作频率特性分析还要花费大量的时间和精力,精确性也不高,因而随着电子计算机技术的发展,近年来已应用了频域内描记和处理肌电信号的方法。运用快速傅里叶变换(FFT)原理设计成的多功能信号处理机(FFT实时分析仪)的出现,为频域内研究肌电信号提供了较好的手段。

频域内描述和处理肌电信号的特点是:它能表示信号的内容、成分、结构、能量分布等情况,它的识别能力强、灵敏和精确(数字处理)。往往在时域上不易分辨的许多复杂信号,由于在频域范围包含丰富的特征,较易显现其规律。

通过对正常人受试者前臂有关肌肉的肌电测试和统计结果,可以从幅值谱图的比较中看出:不同肌肉部位的肌电信号,其频率、幅值在数值范围上有区别,在频谱功率的分布上也各有特征,其肌电频率特性曲线形状各不相同。这对肌电信号的分离并用于控制非常有利。据此情况,有可能根据需要选取合适的不同肌肉进行控制。

采用时域描记的肌电图,不论是对健康人或残肢者,只要选取一对相宜的颞颥肌,其肌电也呈颞颥(即肌电幅值大小有较明显差异),即可实现对其肌电进行分离。这情况对单自由度肌电控制假手基本上均可满足,并能在设计电路时予以实现。

3. 肌电信号的幅频特性

根据统计资料,肌电信号一般具有以下典型特征:(1)信号是交流电压,它与肌肉产生的力大致成比例(在幅值上);(2)频域通常在0~1000 Hz之间,频谱功率最大的频带(主要成分)随肌肉而定,通常在30~300 Hz之间。就一般选用的一对颞颥肌——伸肌和屈肌而言,功率(或幅值)最大的频带一般在10~200 Hz之间,300 Hz以上显著减弱。

对于健康人,肌电幅度的峰峰值可达1~3 mV,产生中等强度紧张的健壮肌肉的典型信号振幅大小一般为100 μ V。对于残肢者,在未经训练情况下,大多也可在50 μ V以上,经意识控制动作训练,肌电信号普遍可以得到增强,其幅值范围大多可恢复到100 μ V以上,甚至达几百微伏或接近于健康的情况不等,个体差异很大。采用目前使用的肌电信号放大器(生物电放大器),对通频带加以限制,肌电的平均峰峰值一般也可达到100 μ V以上。所以,绝大多数前臂截肢者,都可使用肌电控制假手。

三、肌电假手的控制系统

由表面电极引导出来的仅达微伏级的微弱肌电信号,如果不经过适当的处理和放大,是无法驱动假手的。为了最终实现肌电对假手的控制,就要求控制系统具有以下性能:(1)灵敏

度高；(2) 抗干扰能力强；(3) 能量消耗少；(4) 体积小、质量轻；(5) 使用方便。

灵敏度是指使肌电假手动作所需最小平均肌电信号峰峰值。灵敏度宜选取适当。灵敏度过高，则易受噪声和各种干扰的影响，容易使假手发生误动作；灵敏度过低，不仅会限制假手的使用范围(肌电信号微弱者不能使用)，而且使用起来费力。通常所指的灵敏度高，即要求肌电信号微弱的残肢者也可能使用肌电控制假手的状态。目前，国内外通常以 $50\mu\text{V}\sim 100\mu\text{V}$ 肌电信号输入控制电路，能正常实现对假手的控制为准。

要求灵敏度高，相应地放大倍数要很大，一般达数千至上万倍。在肌电由信号源(人体)引出、传输和高倍率放大过程中，严重问题是外来电场的强大干扰，其中主要是 50Hz 市电(工频)的干扰。干扰信号会使肌电信号失真，甚至将它淹没，以致无法用于控制。由于生物电信号频带宽度通常较低，故一般均选用具有良好低频响应的直流放大器作为前置放大。在肌电控制假手的控制电路中，通常采用双端输入的差动放大器作为前置放大级，通过提高共模抑制比，来抑制共模干扰信号放大。

肌电信号的分离，一般最终需借助于电路，以实现控制信号的类型分离。虽然方法很多，但它们的原理大多应用统计类型识别技术(即将多通道输入的 EMG，按特征划分成不同的可鉴别区域)和电子线路的阈值关系，来实现对应于手的各种动作的肌电类型的分离。

肌电假手的控制电路有多种形式，主要有：开关控制电路、逻辑门电路及计算机控制等。

开关控制电路借助于电子元件，对电路自动实现开或关，以达到自动控制的目的。早期的开关控制电路是采用继电器构成有触点电路开关，后来由于三极管成为较理想的无触点电路开关，所以目前的肌电假手的控制电路中，基本上采用三极管作电子开关。这种控制电路是最简单实用的控制电路，如图 1-6(b)所示，它是一种幅度控制，即以肌电信号一定幅度作为阈值的。例如，若假手机构在无控制信号驱动时自动处于常闭状态(假手指闭合)，当假手装着者用伸开运动意志控制假手动作时，伸肌肌电信号超过一定的阈值，于是电子开关闭合，可充电电池向微型电机供电，驱动假手机构使假手指张开。同样地，当控制屈肌肌电信号发放并超过

目前,在这类假手中,有可能达到实用化的最高形式为三自由度前臂假手。这种假手最早于1969年由日本早稻田大学开始研制。它是采用通过伴随着截肢者对截断后失去部位所持有的幻肢随意运动,而在前臂残端的六块肌肉群(即尺侧腕伸肌、指总伸肌、桡侧腕伸肌、旋前圆肌、尺侧腕屈肌和指深屈肌)所产生的肌电位作为控制信号源。还有,它将这许多通道的肌电信号,对应于各种动作,组成肌电脉冲调制波的模式图,并利用微型电子计算机来识别,以分别控制假手完成各种不同的动作。该假手可实现手指开闭、腕部屈伸和前臂旋转三个动作,还可进行旋外与掌屈、旋内与背屈两个协调控制,采用电动液压式驱动,其用微型电子计算机组成的控制电路图如图9-22所示。该假手于1975年通过截肢者临床试验表明所持有的功能是有用的,但由于成本及小型化等问题而没有做到实用化。

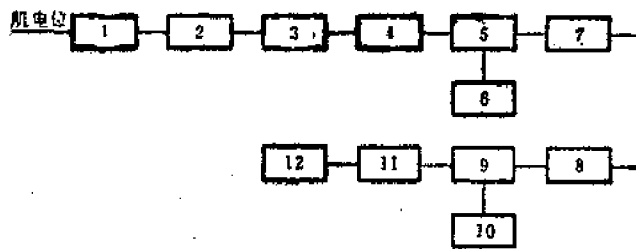


图 9-22 日本早稻田肌电液压手

- 1—电极; 2—放大器; 3—双 T 滤波器; 4—比较器;
 5—门电路; 6—脉冲振荡器; 7—计数器; 8—I/O;
 9—中央处理机; 10—随机存取存储器; 11—寄存器; 12—驱动马达

在有关取出控制信号的研究中,还有各种方法,例如有采用多通道的 EMG、并按其整形平滑后的波形组合图谱作为控制信号的方法,和把EMG脉冲化并由其脉冲数形成图谱作为控制信号的方法。此外,还有试验用一个通道的 EMG 来取出控制信号的方法,在这种方法中又有试用取出EMG频率成分的方法和采用自回归模型的方法。日本神奈川综合康复中心于1980年发表了采用肌电的频率和振幅成分控制多自由度前臂假手的模拟实验结果,如表9.1所示。

表 9.1 多自由度前臂假手的模拟实验

EMG 通道数	方式1	方式2
	2	3
EMG 取出部位	① 尺侧腕屈肌 ② 指总伸肌或桡侧腕长伸肌	① 尺侧腕屈肌 ② 指总伸肌或桡侧腕长伸肌 ③ 旋前圆肌
带通滤波器的中心频率 f_c	40, 100, 160, 360 Hz	70, 160, 360 Hz
可能的动作	六种动作(腕屈、腕伸、旋前、旋后、握持、张开)和静止状态	同左 而且可能做连续动作
般动作所需要的时间	0.8 s	同左

在我国,由上海交通大学主办的上海假肢科研协作组于1981年也研制成功了三个自由度肌电控制前臂假手样机。该假手以两路颌颞肌电信号,经过高低阈值比较、分离组成三个自由度六个动作信号,用数字逻辑电路进行控制,其控制系统框图如图9-23所示。

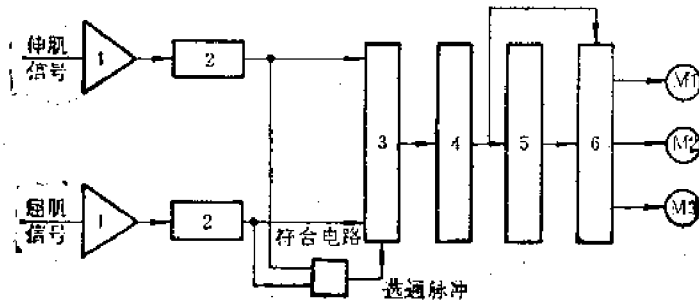


图 9-23 控制系统框图

- 1—放大; 2—阈值鉴别器; 3—信号延时锁定;
4—译码电路; 5—信号识别; 6—驱动电路

但是,目前在国内外已真正成为实用化的多自由度前臂假手是采用两个自由度的型式,其手指开闭动作由残端的肌电信号实行开关控制,而腕部旋转动作则是由残端带动微动开关控制的。该假手的控制原理简图如图9-24所示。

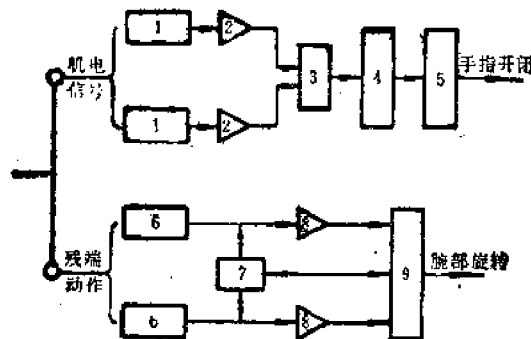


图 9-24 两自由度前臂假手控制简图

- 1—信号检出; 2—放大; 3—比较; 4—组合逻辑;
5—驱动; 6—电子接触开关; 7—互锁; 8—功率放大;
9—驱动

2. 上臂动力假手

对于上臂假手来说,肘关节的动作是一个关键的功能。若没有肘关节的动作,就不可能有手部的必要动作。所以,要求上臂假手至少必须具有三个自由度,即肘关节屈伸、腕关节旋转和手指开闭等动作。实际上,要在上臂残端选取对应于这三个动作的肌电信号是相当困难的,且操作可靠性差。

日本的一些大学曾于70年代对多自由度上臂假手的控制信号及位置反馈方式进行了许多实验研究。一种控制信号的系统组成已示于图1-7。

在我国对于上臂电动假手的研究也已有多年的历史。上海生理研究所于1981年研制成一种用肌电切换方式控制的三自由度上臂假手,其控制电路原理如图9-25所示。该假手的控

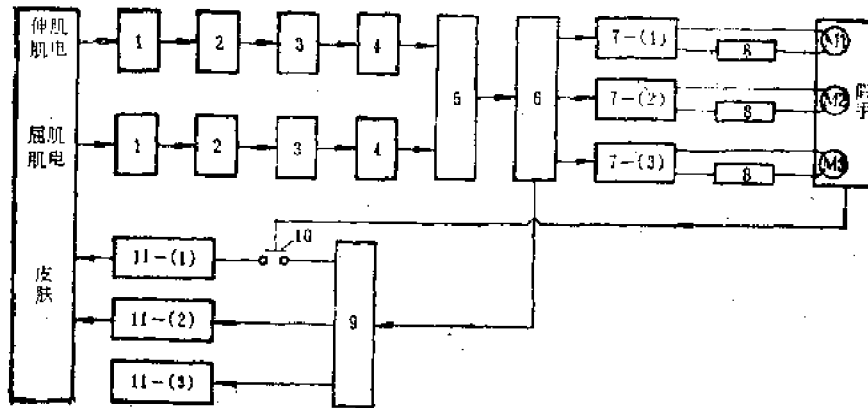


图 9-25 三自由度肌电控制上臂假手

- 1—电极； 2—放大器； 3—检波积分； 4—阈值鉴别；
 5—逻辑电路； 6—电子切换开关； 7—控制电路； 8—过流保护；
 9—振动刺激器； 10—微动开关； 11—振动子

制方式是采用上臂的两路肌电信号、并按一定的阈值组成四种编码(11,01,10,00)。手指闭合、腕部旋前、肘部屈曲都由屈肌信号(10)控制，而手指张开、腕部旋后、肘部伸展则由伸肌信号(01)控制。编码(11)作为切换信号。为了让截肢者知道电路切换顺序，在其胸部安装了三个振动刺激器。当电路切换到肘部屈伸控制时，左面振动器发出信号；切换到腕部旋转时，右面振动器发出信号；切换到手指开闭控制时，左、右两个振动器都不动作；当手指握紧或抓到物体时，中间振动器发出信号。

近几年来，为了提高上臂电动假手的使用可靠性和实用性，简易形上臂电动假手的研究开发受到了注目。图 1-8 所示的一种改进型简易电动假手，是 1981 年日本东京电机大学等共同研制成功的，经残肢者日常生活动作(ADL)评价的结果表明(如表 9.2 所示)，该假手的实用效果还是好的。

表 9.2 ADL 评价

动作	无假手	装着简易型电动假手	备注
穿脱衣服	8.3%	0%	由别人护理
洗脸	22.2%	77.8%	
饮食	0%	79.2%	
一般动作	22.2%	73.6%	门开关等
桌面动作	33.3%	62.5%	记录、写字
卫生动作	33.3%	44.4%	厕所
合计	17.1%	59.3%	

上海交通大学也开发了一种使用上臂截肢者残端的机械运动,来操作安装在上臂套筒内的两个接触开关,从而实现对上臂假手三个自由度控制的方式。实用表明,该方式结构简单、操作方便、可靠性高、实用效果好。

3. 全臂动力假手

为了使全臂假手能以空间物体所具有的六个自由度自由地操作,近似地实现人手那样的动作,必须确保假手至少有七个自由度,即肩部3个、肘部1个、前臂2个、手部1个。

全臂假手实用化必须具备的条件是很苛刻的,一般认为应做到:

- (1) 臂重要轻,要求不大于2 kg;
- (2) 具有能执行与人臂相似动作的自由度,除上述臂部需要的六个自由度外,手指应有五个自由度;
- (3) 做到与人臂相同的外形和动作动态;
- (4) 能按人的自然意志进行控制;
- (5) 使用方便,故障少。

由于上述原因,尽管一些国家对全臂假手的开发做了许多工作,经过10多年的努力,克服了技术的难点,但迄今仍处于实验室阶段,要作为实际应用还很困难。

§9-3 医用机器人

一、医疗领域的机器人化

现代医疗技术是建筑在科学技术发展的基础上,它的主要支柱是药学、分子生物学(或称生物技术)及医学工程。其中医学工程与许多学科、技术有着密切的联系。特别是近几年来,由于机械学、传感技术及微处理机的组合而形成的电子机械系统的发展,使得高效率的能量、信息的传递、处理、变换和保存成了可能,迎来了电子机械学(mechatronics—The technology of microprocessor controlled machines)的急剧发展,即电子机械技术占主导地位的时代。由于这样,电子机械学的导入,有力地促进了生物医学工程的进步和医疗福利机器向着高度化发展,推动了医疗领域的自动化、机器人化。

电子机械技术的主要特点是使机械控制电子化,即能给予机械以程序机能、学习机能、诊断机能等多种功能,使得机械程序化、智能化,医用机器人就是它的一种典型代表,它对医疗作业的省力化、自动化、高精度化有着重要的意义。

从现在的观点来看,医用机器人大致可分为三类,即

- (1) 对残疾人、病人、护理人员个别进行援助的机器人;
- (2) 对诊断、治疗、检查等医疗业务进行辅助用的机器人;
- (3) 用于医学研究工作的研究用机器人。

具体来说,医疗领域的机器人化可列举如表9.3所示。

表 9.3 医疗领域的机器人化举例

自动化、机器人化的内容	作业对象	作业内容
医用仪器制造	物 体	与工业用机器人相同
药品检查	药 品	片剂、盒剂的外部检查、质量差、次药品的校核
检查物的检查机器系统	检 查 物	自动生化分析装置、血球计数器、自动化检查室及紧急检查机器人
医用数据信号处理	信 息	心电图、心音图、呼吸曲线、呼吸音、脑电波等的自动分析装置
医用图像处理	信 息	计算机断层摄影装置、超声波诊断装置、白血球分类装置、癌细胞诊断装置、染色体分析装置、立体图像摄影剖视
生物体检查机器	人 体	乳癌触诊器、自动身長体重计、自动血压计、精神分析机器人
生物体检查系统	人体信息	自动化综合健康门诊系统、自动监视装置
生物体监视机器系统	人体信息	心电图、血压、体温、血液等的监视、计算机监控装置
治疗机器系统	人体信息	放射线治疗计划、人工脏器、体内情况自动化监控、内窥镜机械手、显微手术机械手、医疗用遥控操作手、患者鼓励用机器人
医院内物品搬运	物 品 人	上下阶梯搬运车、升降机、患者移动用机器人
医院内业务	物品信息人	受理机器人、调剂机器人、给食机器人、清扫机器人、检温用机器人、护士机器人、清拭机器人、护理机器人、医院自动化
与医疗信息有关	信 息	自动门诊机、口述式医疗记录机、医生会诊机器人、自动诊断装置、家庭医疗、交谈机器人
与医学教育有关	信 息 人	各种病态模拟、精神病机器人、急救复活手术训练用患者机器人、麻醉训练用机器人、计算机辅助教育及教师机器人

续表

自动化、机器人化的内容	作业对象	作业内容
与福利机器有关	人	<p>手足型： 各种肌电假手、具有知觉的轻型能动假手、可步行及上下阶梯的动力假足、装于麻痹肢体的外骨骼型动力辅助器</p>
		<p>搬运、移动型： 患者升降机、抱起机器人、搬入机器人、移送、转送系统、机动升降器</p>
		<p>感觉代行型： 人工眼、视觉代行装置、障害物认识装置、盲导犬机器人、声音打字机、文字声音翻译机、点字翻译机器人、人工内耳、人工中耳、谈唇会话补助装置、声音手语翻译机</p>
		<p>康复训练教师型： 声音分析·发声训练机、步行分析·训练机、肌力教练设备、步行训练装置</p>
		<p>生活援助、作业辅助型 清拭机器人、多功能床、防止褥疮及按摩机器人、卧床不起患者室内援助用机器人、环境控制装置、四肢麻痹患者用机械手系统、对话机器人、与作业机械的接口</p>

二、医用机器人的特点

医用机器人同工业用机器人的比较列于表 9.4。

表 9.4 医用机器人同工业用机器人的比较

项 目	医 用 机 器 人	工 业 用 机 器 人
操作对象	物体、信息、人	物体、信息
作业目的	检查、治疗、教育、服务	生产、检查、其他
作业环境	医院、街道、家庭 非特定的多种场所	工 厂 一定的场所
作业内容	<p>多样性</p> <p>按照随时要求进行作业</p> <p>多层移动型</p> <p>要有适应能力</p>	<p>定型性</p> <p>多为往复动作</p> <p>多层固定型</p> <p>能决定位置</p>

续表

项 目	医用机器人	工业用机器人
使 用 者	不特定的多数的一般人	特定的专门人
安全对象	涉及广阔的范围	在限定的范围内

从上表可以看出：

(1) 医用机器人的作业对象是残疾人、人体的内部及生物体等，所以仅仅用工程技术人员原来的经验是不够的，需要综合工、医、生、药、农等各个学科领域的研究课题进行开发；

(2) 医用机器人的业务内容及实施场所是很不同的，特别是直接以人作为操作对象的机器人，其性能必须满足对状况变化的适应性、作业的柔软性、对危险的安全性、以及对人体和精神的适应性等。但是，要满足这些性能往往是困难的。

(3) 由于上述原因，医用机器人应该既是高度的精密机械，又是具有微处理机、能按照微处理机的阶层构造控制该机械进行识别、判断和行动的综合性精密电子机械系统。

所以，在设计医用机器人时，必须采取下列几个约束条件：(1) 尽量的小型；(2) 尽可能的轻巧；(3) 尽量做到运转平稳、噪音小；(4) 使用操作简单；(5) 不易损坏、寿命长；(6) 能量消耗少。

为了满足上述要求，在技术上往往需要采用下列几个对策：(1) 采用电气马达作为驱动器；(2) 具备从视觉开始的各种必要的传感器的闭环形式；(3) 作为输入方式，除了采用接触开关、关节棒等机械方式外，还要有如声音等高级方式；(4) 体积小、容量轻，而可搬物体的质量要尽可能地大；(5) 具有移动机构。

三、医用机器人发展的必要条件

如前所述，机器人可以认为是一种具有类似人动作、机能的装置。它与一般的自动机械有着明显的差异，不仅是能单纯地作信息处理，而是应该具有执行某种作业的机能。它的构成要素如图 9-26 所示。

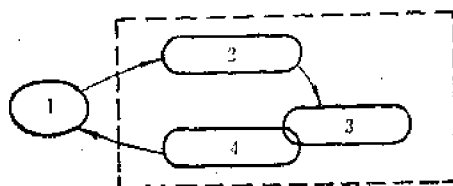


图 9-26 机器人的构成要素

1—作业对象； 2—识别判断； 3—控制机构； 4—结构本体

由上图可知，医用机器人的基本技术包含有：

(1) 控制技术。即以微电子技术、动力电子技术、控制方式等构成的微处理机应用为中心的硬件、软件技术；

(2) 传感器应用技术。它是与单纯物理量的多变量输入和图像识别相关连的信号感觉系统技术；

(3) 驱动器技术。包括马达、变换器及与它们相结合的伺服技术(如电气、油压、气压及化学反应动力等)；

(4) 信息输入和输出技术。具有示波器、液晶显示等的显示和由声音等输入、输出等组成的人-机接口技术；

(5) 机构。含有机器本体的构成、设计、最优化及新材料等。

于是可以明白，根据医用机器人的使用目的，它必须是小型化的装置。而为了实现小型化，首先必须使执行动作的机械运动部件的构造小型化、高精度化。所以，开发新型的材料、通过最优化设计研制高功能、高精度的机构，是十分必要。

另外，为了使机器人的运动部分按照需要进行动作，必须进行微型传感器的开发。该传感器既要能正确地检测物理、化学或机械的生物体信息，又能把其结果作为输出信号传递给机械运动装置。其中，对具有能输入视觉信息、又能通过处理进行输出功能的传感器的开发，也很重要。

目前，对于构成医用机器人的各大要素中，新型驱动器和传感器能够得到飞跃的发展，是人们正在迫切地期待的一个重要问题。必须指出，其中微处理机是最进步的要素，可以说它是医用机器人的中枢部分，而软件则是医用机器人设计开发的关键。因为软件的质量将影响着机械系统的优劣，影响其机能的发挥。可以确信，随着机器人技术的发展，软件将占据着主要的地位，也就是说机器人机械系统的软件化、智能化将得到很大的提高，从而使医用机器人具有灵活地应用知识、学习、推论、诊断及适应等多种功能。

四、医用机器人举例

下面以卧床患者日常生活护理机器人为例介绍医用机器人的一种构成系统。

因各种疾病、交通事故和体育事故而致残的长期卧床患者已日渐增多，而照顾和护理他们的生活，是一项繁重的工作，要花费很大的精力。为了减轻护理人员的负担，使患者能根据自己的意志进行简单的日常生活护理，日本东京大学等从1978年起开始对长期卧床患者日常生活护理机器人进行研制。该装置的外形如图9-27所示，主要由机械手、贮藏库与搬运车、控制装置和通讯装置等组成。

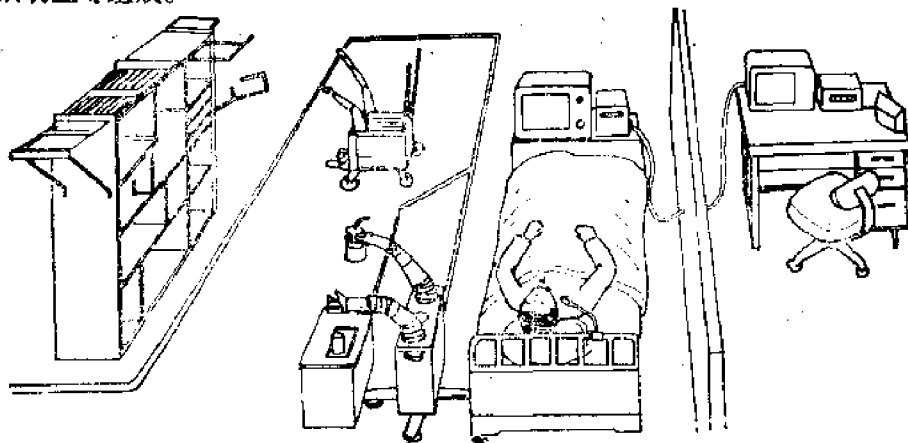


图 9-27 卧床患者日常生活护理机器人

1. 机械手

该机械手结构如图 9-28 所示,各部尺寸见表 9.5。

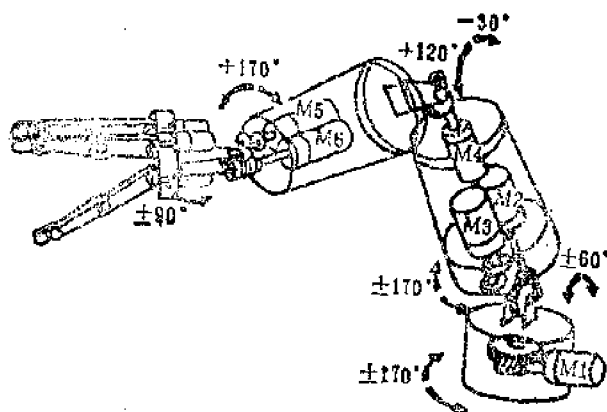


图 9-23 机械手的电机布置与运动范围

表 9.5 机械手的规格

部 位	基 部	上 臂	前 臂	指 掌	全 长
长度(mm)	115	295	280	186	856
质量(kg)	2.38	1.82	1.16	0.57	5.93

机械手的握持部分由三根手指构成,关节部位的屈曲、旋转有 6 个自由度。整个机械手共有 9 个自由度。驱动器采用空心电枢直流电动机,光电轴式编码器和减速齿轮装置分别安装在电机两端。电机空载转速为 4700~13550 r/min。虽然通过蜗杆传动减速,但位置精度仍然很好。主体的主要结构采用炭素纤维材料,以尽量减轻容重。

机械手的控制方式见图 9-29 所示框图。它由指令部分、控制部分、驱动部分和电机组成。

组成控制部分的有 Z-80 A 微处理机(同步信号 4 MHz, 8 位并列处理方式),只读存储器 EP-ROM 2532 (4 K × 8) 4 个(16 K 字节),随机存取存储器动态 RAM 4116 (16 K × 1) 8 个(16 K 字节),输入输出 I/O 及译码部分等。

电机驱动部分包括单片微型电子计算机 MCS-8039 六台,只读存储器 EP-ROM 2716 六个,译码部以及来自编码器的反馈信号的输入部分等。MCS-8039 的组成有单片的 8 位 CPU,随机存取存储器 RAM 和输入输出 I/O。使用一个 5 V 电源,全部命令用 1 或 2 机器循环处理(1 机器循环处理为 1.36 μs),存储器有 2 K × 8 ROM (外部程序存储器)、128 × 8 RAM 和 27 I/O 系列。

电机的控制使用 8039 机器软件。因为 1 台 MCS-8039 可同时控制 4 台电机,所以驱动部可同时并列控制 24 台电机,由此也完全能够控制具有 9 个自由度的一对机械手的 18 台电机。

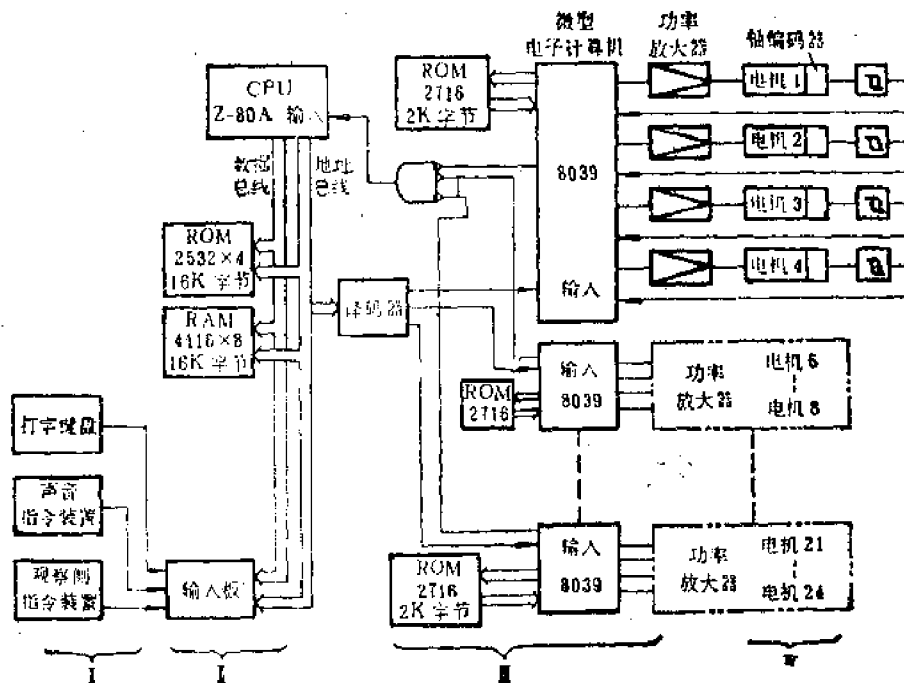


图 9-29 控制装置的方框图

I—指令装置；II—控制部；III—电机驱动部；IV—电机

控制机械手在空间的方向和位置,采用了 §7-3 所介绍的空间单元法,沿 x 、 y 、 z 坐标轴方向,每隔 10 cm 确定基准空间格子点,并根据这些格子点来表示手腕的位置坐标。手腕自坐标原点移动到基准格子点上所需要的驱动各电机的脉冲数,是预先贮存在固定的存贮器的系列表中,于是根据这个表格就可求出对应指令位置的各电机的脉冲数。手腕从现时位置运动时所必要的脉冲数,可通过设置标明各电机现在位置的位置寄存器,实现对运动到达点的相对脉冲数的计算。对应于 x 、 y 、 z 轴各方向的动作精度分别为 1 cm。

为了协调各电机之间的动作,使机械手整体作某种动态运动,需要按照 DDA(动态数据分析)方式,对手腕目标位置进行脉冲分配的计算并使之动作。在这种情况下,对任一通道(电机)进行计算时,必须使所有的通道在其动作结束时同时到达目标位置。

为了适应各种患者的状况,有必要准备几种指令装置形式。在该装置中,设置了打字键盘、音频、光度瞄准及接触传感器四种指令装置,患者可使用其中的任意一种指令装置。

打字键盘是由 0~9、A~F 的 16 键组构成。

音频传感器可从安装在喉部或嘴前部的微型测音计检测出声带振动。它可以识别先规格化的高低和音调变化的发声类型,并以此作为输入信息。

光度瞄准器带有小形方位传感器和电子倾斜计,当患者头部动作时,它可检测出其水平方向的旋转和上下方向的倾斜。由这些装置可自动地计算出目标点的坐标值,从而使手腕以协

阔的动作实现到达目标点的运动。

接触开关利用 CMOS 的高输入阻抗和在人体上引起的电源噪音进行工作,它具有在使用中不必用力的优点。

2. 贮藏库和搬运车

贮藏库和搬运车配备在患者卧房内。每天早晨,家属或护理人员把患者在一天中必需的生活用品存放入库以后,患者就可以通过中央综合控制系统的显示装置(电视画面),并按照所给与的指令,自行选择物品。

3. 中央综合控制装置

患者可根据所看到的中央综合控制装置的电视画面,选择想要进行的动作,并构成指令。指令如前所述,已准备了患者使用的任一种形式。图 9-30 表示其联系的方框图。

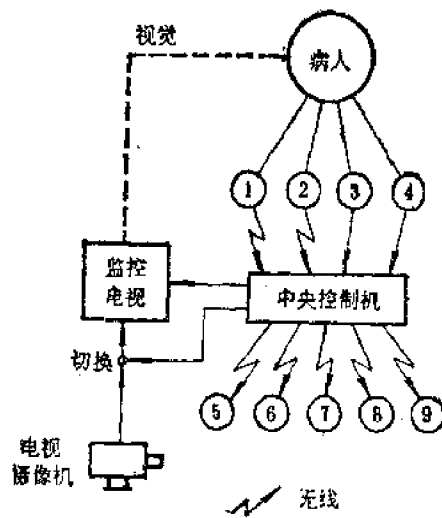


图 9-30 中央综合控制系统的各控制部分及其关系

1—音频控制; 2—光度瞄准控制; 3—娱乐手柄; 4—接触开关;
5—搬运车; 6—机械手; 7—电动窗帘; 8—电动门; 9—整理棚

4. 通讯装置

通讯装置的输入是通过旋律的方式。例如可用 3 音节来准备 104 的编码及用 4 音节来准备 405 的编码,旋律编码如表 9.6 所示。这种用识别音的相对高低和长短的方式的优点是:操纵简单,输入方便,一般约 10 分钟就可学会使用。所以,无论患者是否说话困难,也无论用什么语言,都可使用这种通讯装置。该装置可根据需要输出日语、英语或德语。

该装置的输入部分采用 Z-80 作为 CPU,存储器采用 PROM (2K 字节)及 RAM(1K 字节)以识别输入的旋律。输出部分同样采用 Z-80 作为 CPU,存储器以 PROM(2K 字节)及 RAM(1K 字节)作控制用、PROM (16K 字节×8)作数据处理用。输出用的声音信息用每秒 4K 字节存贮。由于通过直接进行输入输出,且音质采用压缩非线性 DPCM (动态规划对策)方式,所以该装置有很好的品质。

表 9.6 声音旋律编码的举例

No.	图 形	显示	声音输出	No.	图 形	显示	声音输出	No.	图 形	显示	声音输出
1		15	请一会儿来	14		57	是想喝什么吗?	26		D8	像是有点热
2		25	不是	15		B7	请开门	27		78	晚安
3		35	是	16		E7	请关门	28		98	是想上厕所吗?
4		13	请擦身	17		5B	对不起	29		B8	请点灯
5		23	请梳头	18		6B	请开电视机	30		E8	请息灯
6		33	请刷牙	19		DB	请关电视机	31		5A	请拿报纸来
7		14	您早	20		7B	请开收音机	32		6A	请拿书来
8		24	您好	21		9B	请熄灯	33		DA	请拿杂志来
9		34	晚上好	22		BB	请拉开窗帘	34		7A	像是伤风了
10		5D	是想吃什么吗?	23		EB	请关窗帘	35		9A	想要翻身吗?
11		9D	请让吃药	24		58	请帮助	36		BA	是否有点不舒服?
12		BD	请开窗	25		68	像是有点冷				
13		ED	请关窗								

○短的发音 ◯长的发音

参 考 文 献

- [1] L.M.Lin, *Application of Robotics to Rehabilitation Engineering—The Development of Biomechanism Study*, China-Japan 3rd. ISBMRE'87 Nov. Shanghai.
- [2] 张启先:《空间机构分析与综合》,机械工业出版社,1984。
- [3] 天津大学工业机械手设计基础编写组:《工业机械手设计基础》,天津科学技术出版社,1980。
- [4] L.M.Lin etc., *Study of an Anthropomorphic Robot Hand*, 15th International Symposium On Industrial Robots, Tokyo, Japan, Sept. 1985.
- [5] 陈立周:《机械优化设计》,上海科学技术出版社,1981。
- [6] 蔡宣三:《最优化与最优控制》,清华大学出版社,1982。
- [7] 刘惟信、孟嗣宗:《机械最优化设计》,清华大学出版社,1986。
- [8] 范鸣玉、张莹:《最优化技术基础》,清华大学出版社,1982。
- [9] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组:《高等代数》,人民教育出版社,1978。
- [10] H. A. 高里德凡:《矢量概论》,高等教育出版社,1960。
- [11] 杨基厚:《机构运动学与动力学》,机械工业出版社,1987。
- [12] C.H.Sub, C.W. Radcliffe: *Kinematics and Mechanisms Design*, U.S.A. 1978.
- [13] 牧野洋:《自动机械机构学》,东京日刊工业新闻社,1976。
- [14] 王介心、林良明:《四杆机构用于假肢设计的研究》,机械设计与研究,(3) 1986。
- [15] 王焕、林良明:《拟人多关节假手位置控制参量算法的研究》,《上海交通大学学报》,(3) 1983。
- [16] 吴俊、林良明:《计算机自动求解机械手间接位置的研究》,机械设计与研究,(6) 1987。
- [17] 李庆扬等:《数值分析》,华中工学院出版社,1982。
- [18] P.Paul., *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*, U.S.A. MIT, 1981.
- [19] A.Wisner, R.Chattergy, *Introduction to Nonlinear Optimization*, New York. Noth-Holland Pub. Co., 1978.
- [20] 汪家铨:《分析力学》,高等教育出版社,1983。
- [21] 王光远:《应用分析动力学》,人民教育出版社,1981。
- [22] D.T. 格林伍德:《经典力学》,科学出版社,1982。
- [23] 吴镇:《理论力学》,上海交通出版社,1983。
- [24] E.P.Popov, 《操作机器人动力学与方法》,机械工业出版社,1983。
- [25] M. 伍科布拉托维奇:《步行机构和动力型假肢》,科学出版社,1983。
- [26] 吴报鑫等:《可用于残肢者的前臂假手控制系统》,医疗器械(5) 1981。
- [27] 林良明译:《卧床患者日常生活护理装置》,医疗器械,(3) 1982。