

第一章 绪 论

第一节 工业机器人及其发展

一、工业机器人及其操作机

由于机器人一词带有“人”字，再加上科幻小说和影视作品的宣传，人们往往把机器人想象成为外貌象人的机电装置。但事实并非如此。机器人，特别是工业机器人，与人的外貌毫无相象之处。在国家标准中，工业机器人被定义为：“一种能自动定位控制、可重复编程的、多功能的、多自由度的操作机。它能搬运材料、零件或操持工具，用以完成各种作业。”机器人赖以完成各种作业的机械实体（称作操作机或操作器）被定义为：“具有和人手臂相似的动作功能，可在空间抓放物体或进行其他操作的机械装置。”可见，工业机器人是一机电系统，操作机（器）是它的执行机构，该机构与电子器件密切相关，它的灵活程度和动态性能，直接影响着机器人系统的工作质量。本书的目的，在于阐述对操作机的分析和设计方法，以期对从事工业机器人的设计和应用的专业人员有所裨益。

二、工业机器人的发展和分代

1954年，美国人（George C. Devol）提出了一个关于工业机器人的技术方案，随后注册成为专利。1960年推出了工业机器人的实验样机。1961年推出了定名为“Unimate”（如图1.1所示）的第一台工业机器人，用于模铸生产。与此同时，美国的AMF公司也推出了一台数控自动通用机电装置，商品名为“Versatran”，并

以“Industrial Robot”为商品广告投入市场。随后，工业机器人开始在美国工业生产中得到了大力发展和广泛应用。

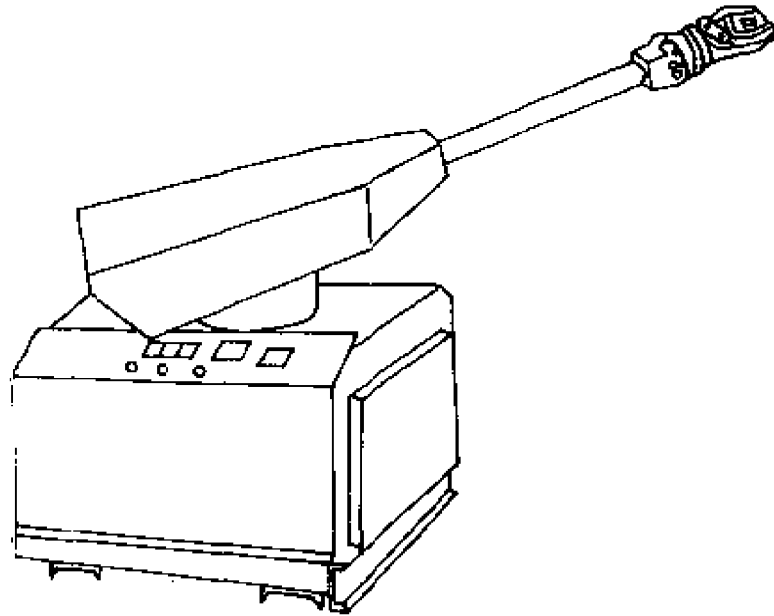


图 1-1 Unimate 工业机器人（在 General Motors 工厂的模铸机使用）

日本的丰田、川崎、安川以及法拿柯等公司，自 1967 年起，开始引进或自主开发工业机器人技术，到 80 年代，工业机器人已在日本工业中被广泛应用。日本现在拥有的机器人台数和制造技术都处于世界领先地位。安川公司的 MOTO MAN 系列机器人的累计生产台数到 1993 年已处于世界首位。该公司还建成了主要由机器人组成的机器人自动装配、测试生产线。为机器人的技术进步做出了贡献。

世界其他国家，诸如瑞典、德国、意大利等，也都在大力发展工业机器人的研究和生产，并已拥有了各自的名牌产品。

我国的机器人技术起步较晚，但经过“七五”攻关，一些自行开发研制的工业机器人，已达到了工业应用水平。

目前大多数工业机器人仍使用 G. C. Devol 提出的示教/再现 (teach-in/playback) 控制方案。该方案的最初形式是：人们用手

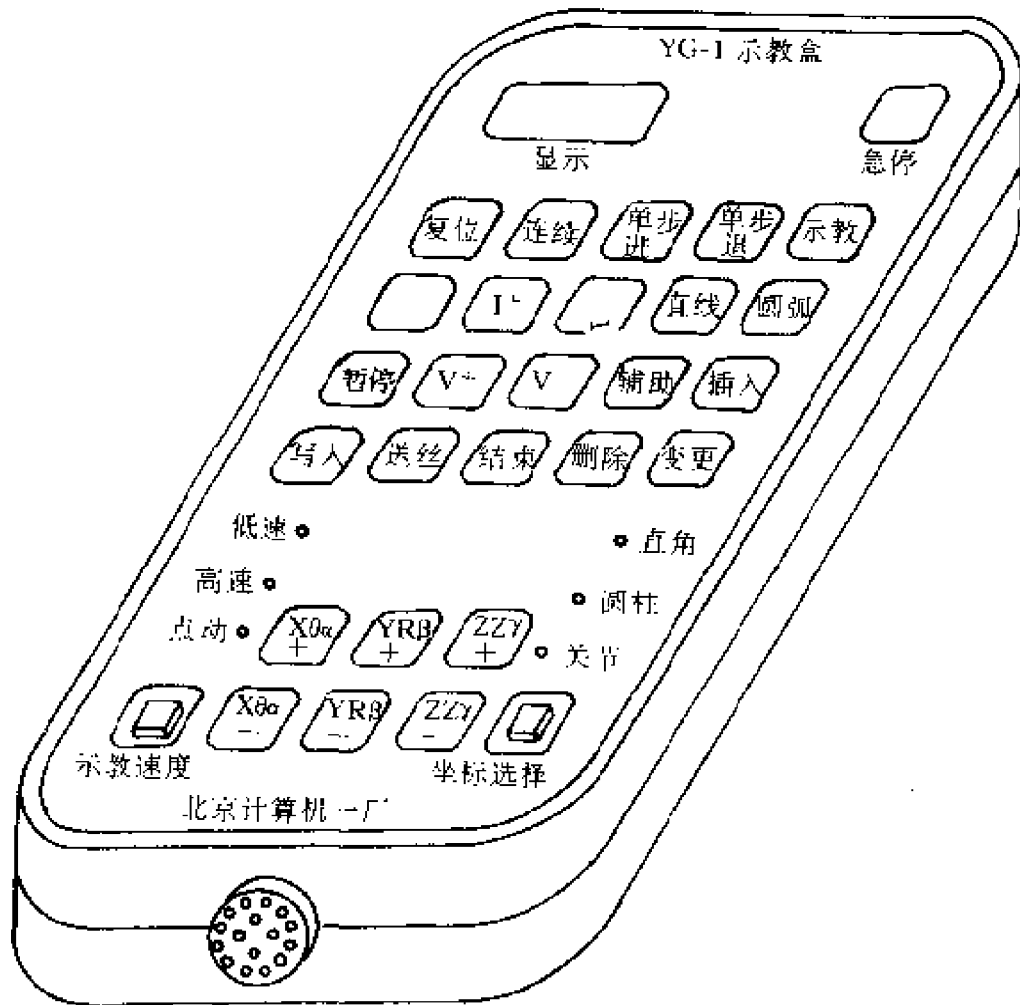


图 1-2 示教盒

抓住机器人的“手”，缓慢地进行“示教”，同时检测并贮存决定“手”的位置、姿态等运动的数据。到工作时，再把这些贮存的数据作为命令去指挥机器人复现已经进行过的示教运动。由于手把手示教比较繁重，目前更多地是采用示教盒进行示教。示教盒是一个如图 1-2 所示的小型操作按钮“盘”，利用不同按钮可手动慢速地操作机器人进行工作并贮存所需要的数据，从而完成示教要求。人们通常将按这种示教/再现方式进行工作而没有感知功能（如力感觉、视觉、听觉等）的机器人称为第一代工业机器人。

随着科学技术的发展，最近出现了带感、视、听等感知功能

的机器人，即第二代机器人。

第三代机器人是人们正在研制的智能化机器人。它不仅具有更发达的感知功能，而且还具有逻辑判断和决策功能，可根据作业要求和环境信息，自行工作。

第二节 工业机器人的组成

工业机器人通常由执行机构、驱动-传动装置、控制系统和智能系统四部分组成（如图 1-3 所示）。这些部分之间的相互作用可

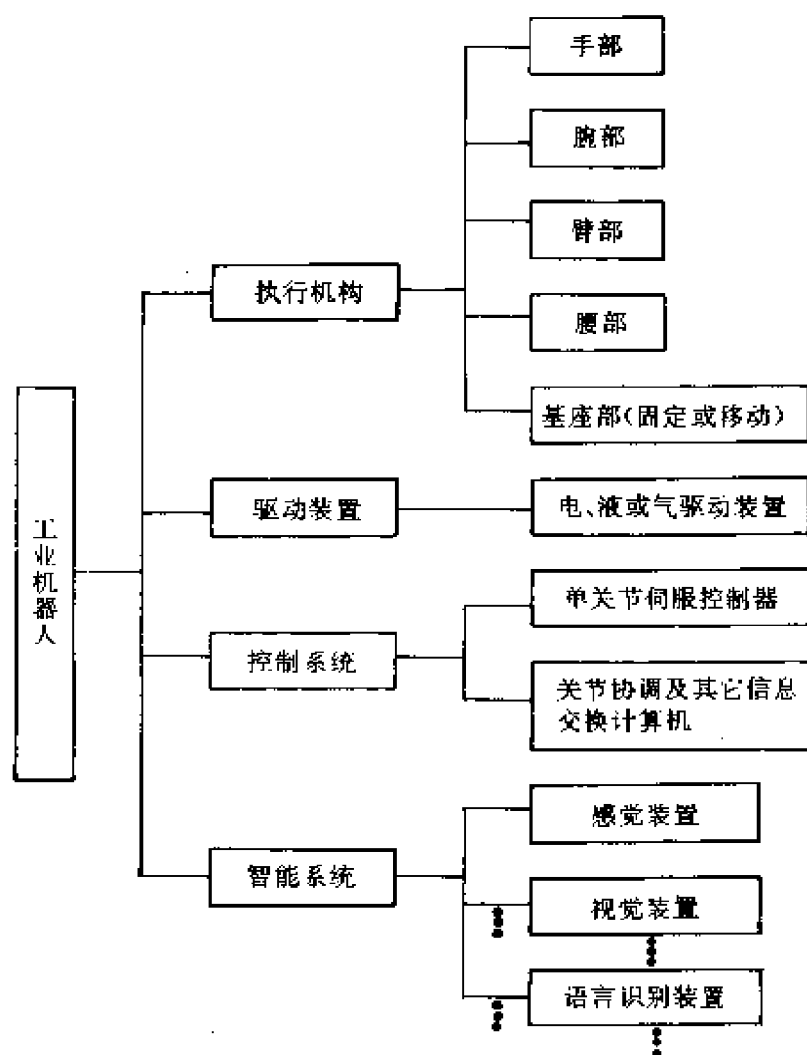


图 1-3 机器人的组成

用图 1-4 所示的方框图表示。

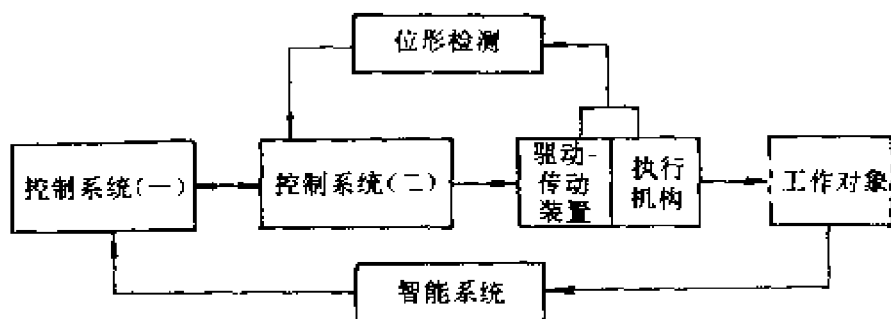


图 1-4 机器人各组成部分之间的关系

一、执行机构

执行机构（也称操作机）是机器人赖以完成工作任务的实体，通常由杆件和关节组成。从功能的角度，执行机构可分为：手部、腕部、臂部、腰部和基座等，如图 1-5 所示。

1. 手 部

手部又称末端执行器，是工业机器人直接进行工作的部分，可以是各种夹持器。有时人们也常把诸如电焊枪、油漆喷头等划作机器人的手部。

2. 腕 部

腕部与手部相连，通常有 3 个自由度，多为轮系结构，主要功用是带动手部完成预定姿态，是操作机中结构最为复杂的部分。

3. 臂 部

臂部用以连接腰部和腕部，通常由两个臂杆（小臂和大臂）组成，用以带动腕部作平面运动。

4. 腰 部

腰部是连接臂和基座的部件，通常是回转部件，腰部的回转运动再加上臂部的平面运动，就能使腕部作空间运动。腰部是执行机构的关键部件，它的制造误差、运动精度和平稳性，对机器

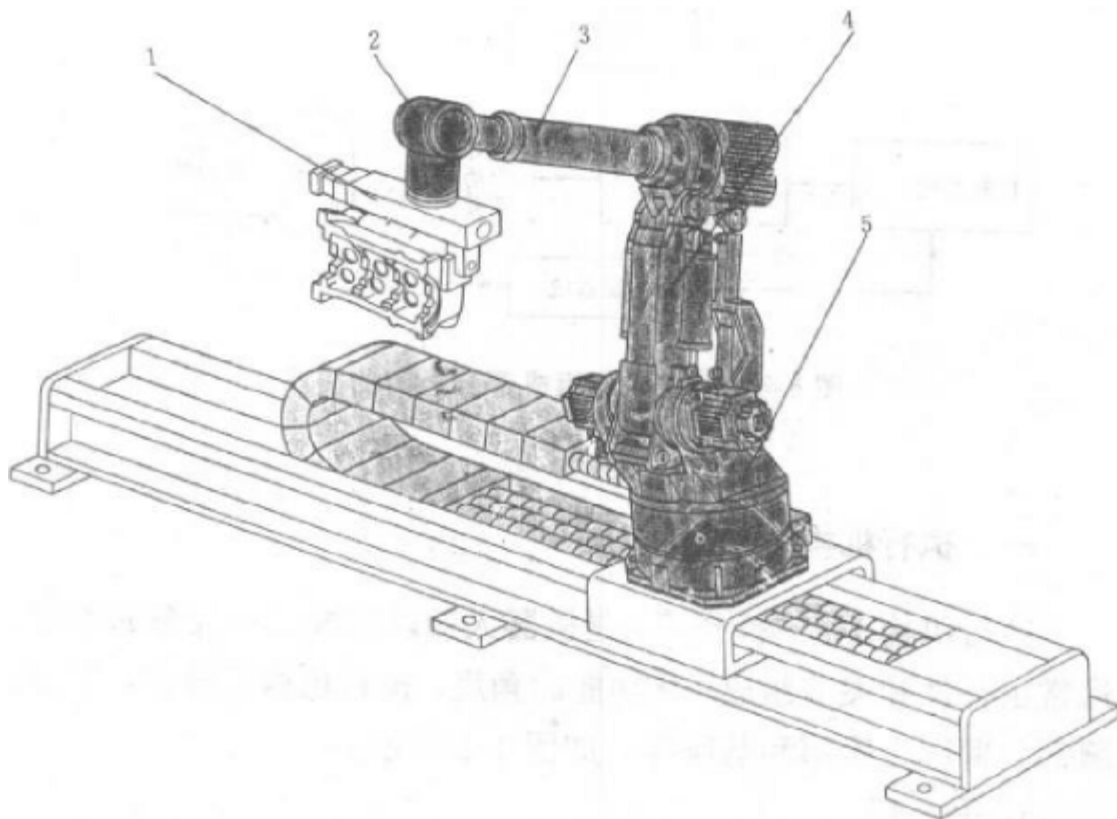


图 1-5 执行机构

1—手部；2—腕部；3—臂部；4—腰部；5—基座

人的定位精度有决定性的影响。

5. 基 座

基座是整个机器人的支持部分，有固定式和移动式两种。该部件必须具有足够的刚度和稳定性。

二、驱动-传动装置

工业机器人的驱动-传动装置包括驱动器和传动机构两个部分，它们通常与执行机构连成一体。传动机构常用的有谐波减速器、滚珠丝杠、链、带以及各种齿轮轮系。驱动器通常有电机（直流伺服电机、步进电机、交流伺服电机）、液动或气动装置，目

前使用最多的是交流伺服电机。

三、控制系统

控制系统一般由控制计算机和伺服控制器组成。前者发出指令协调各关节驱动器之间的运动，同时还要完成编程、示教/再现以及和其他环境状况（传感器信息）、工艺要求、外部相关设备（如电焊机）之间的信息传递和协调工作。后者控制各关节驱动器，使各杆按一定的速度、加速度和位置要求进行运动。图 1-6 是 PUMA 机器人的控制系统框图。该系统由 n 个单片机控制的数字

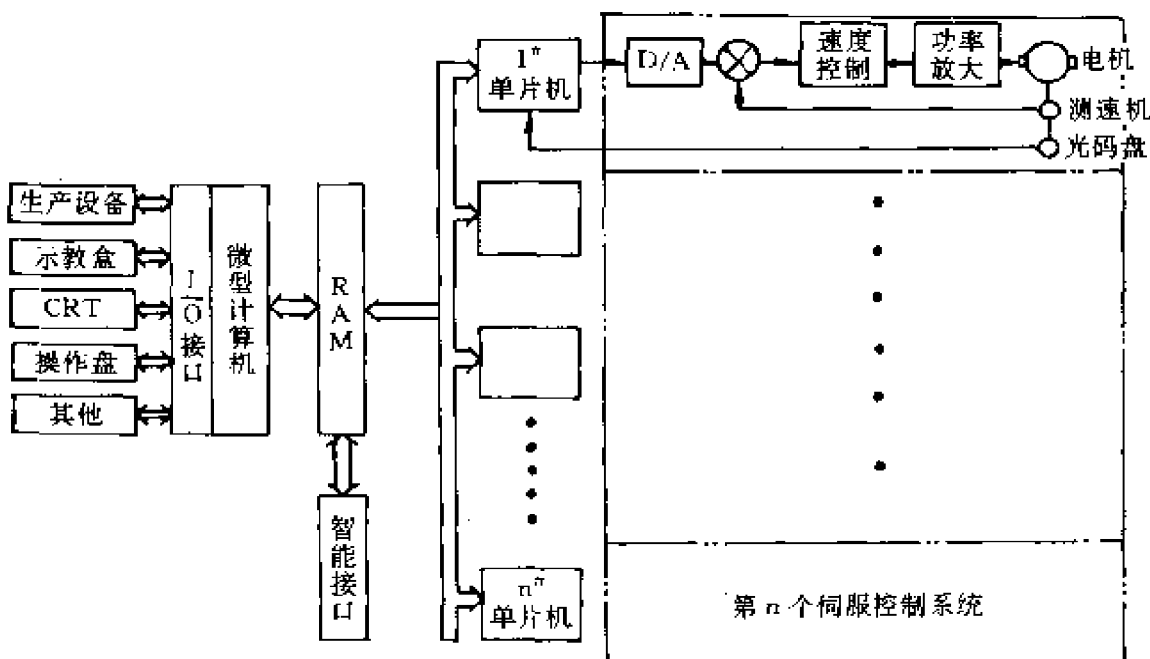


图 1-6 PUMA 机器人控制系统

伺服系统和一台控制计算机组成。图 1-7 是 MOTOMAN 机器人的控制系统 (YASNAC-ERC)。该系统由两部分组成。HIB 是人机接口部分。它有一 CPU，可供人机交换信息，还有 CRT（显示器）、示教盒、键盘。它可和个人计算机连接，又可与车间控制计算机连网。TIB 是轨迹控制部分。它有一运动控制 CPU，可根据

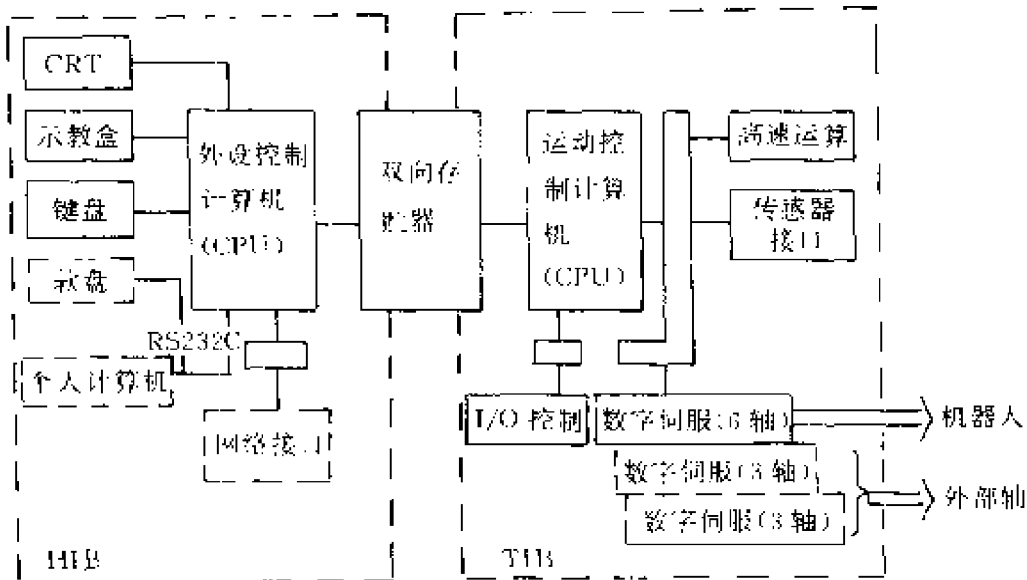


图 1-7 MOTOMAN 机器人的控制系统

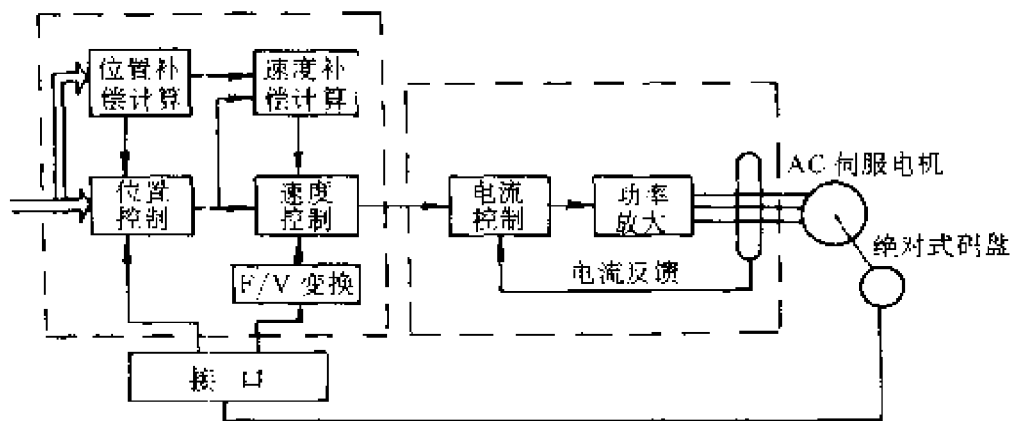


图 1-8 YASNAC-ERC 的数字伺服系统

不同机种进行轨迹规划。该部分可与工作中的各种传感器（如摄像机）相连，有 I/O 控制接口，可以控制该部分的供操作机用的 6 个运动轴（自由度）的数字伺服器以及机器人工作时周边设备的 2×3 个运动轴的数字伺服控制器。HIB 和 TIB 之间有双向存贮器，用以交换信息，存贮数据。图 1-8 是 TIB 部分的数字伺服系

统框图。象 PUMA 一样,该系统也是由一台单片机组成的三闭环位控系统。它采用了软件伺服、交流伺服电机和绝对式光码盘。

四、智能系统

智能系统是目前机器人系统中一个不够完善但发展很快的子系统。它可分为两个部分:感知系统和分析-决策智能系统。前者主要靠硬件(各类传感器)实现,后者主要靠软件(如专家系统)实现。目前已用于商品生产的有六维力感觉传感器(图 1-9)。它可装于机器人的手部,以感知手部 3 个方向的力和 3 个方向的力矩。在装配作业中,这种力感觉是很重要的信息。机器人的控制系统可以根据这一组力感,调整手部位姿,以顺利完成装配作业。在弧焊机器人系统中已运用了焊缝跟踪系统,用以感知焊丝与焊缝之间的偏差。当偏差超过一定值时,控制系统便会自动调整焊丝的位置,使焊接能够顺利地进行。

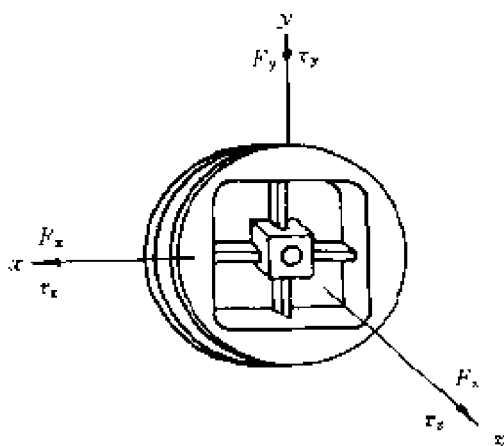


图 1-9 六维力感觉传感器

第三节 机器人操作机的主要类型

工业机器人的操作机属于空间机构,由于结构上的原因运动副通常只用转动副和移动副两类。其中,用转动副相联的关节称作转动关节(记作 R);以移动副相联则称为移动关节(记作 P)。这些关节之中,凡单独驱动的称主动关节,反之称从动关节。单独驱动的主动关节数目称作操作机的自由度数目。一般说来,运动链的自由度和手部运动的自由度在数量上是相等的,如图 1-10 所示的 PUMA 操作机属 6 自由度开链串联型。前 3 个关节(由基

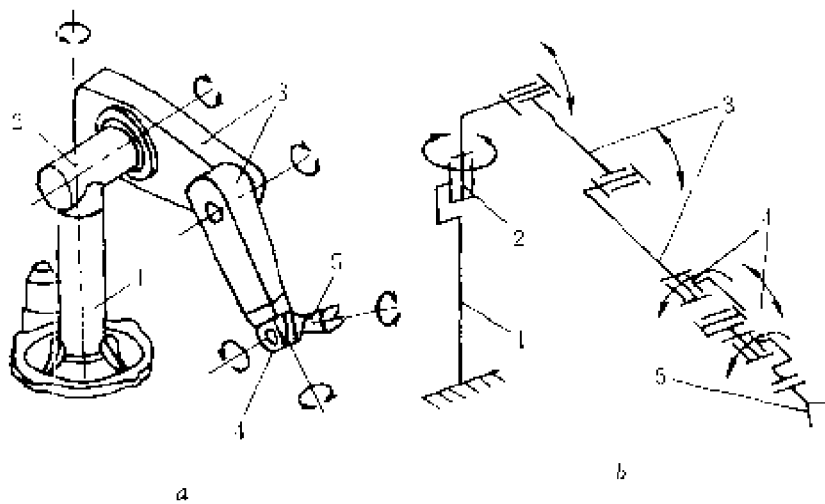


图 1-10 PUMA 操作机

a—立体图；b—机构简图

1—机座；2—腰部；3—臂部；4—腕部；5—手部

座算起，即腰部和臂部）具有 3 个转动自由度，功用是确定手部在空间的位置。所以这 3 个关节和联接他们的臂杆所构成的机构被称作操作机的位置机构。后 3 个关节（腕部）的主要功用是确定手部在空间的姿势，即手部固联坐标系相对于参考坐标系的方向。所以这 3 个关节和联接他们的杆件所构成的机构被称作姿势机构。位置机构可基本确定操作机的空间工作范围，所以前 3 个关节的运动通常称作操作机的主运动。操作机可根据前 3 关节不同的运动组合形式进行分类。

一、直角坐标型操作机

直角坐标型操作机是通过 3 个互相垂直的轴线位移来改变手部的空间位置。其前三关节为移动关节 (PPP)，运动型式如图 1-11 所示。该类操作机易于实现高定位精度，空间轨迹易于求解，但当具有相同的工作空间时，机体所占空间体积较大。

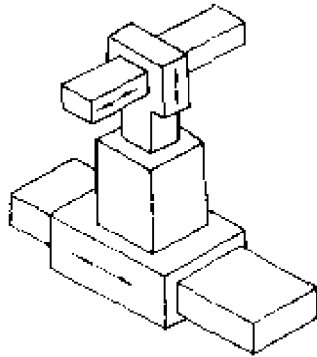


图 1-11 直角坐标型操作机

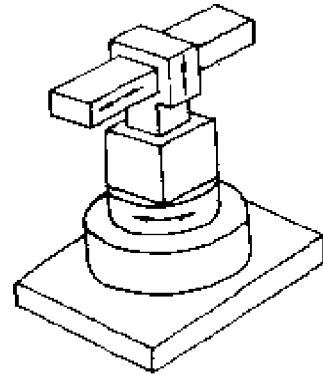


图 1-12 圆柱坐标型操作机

二、圆柱坐标型操作机

圆柱坐标型操作机是通过两个移动一个转动 (PRR) 来实现手部的空间位置变化,如图 1-12 所示。有名的 Versatran 机器人就具有这样的操作机。在相同的工作空间条件下,该种操作机机体所占空间体积要小于直角坐标型操作机。该种操作机结构简单,便于几何计算,通常用于搬运机器人。

三、球坐标型操作机

球坐标型操作机用两个转动和一个移动 (RRP) 来改变手部的空间位置。一般是腰关节可绕 z 轴转动,大臂可在 $z-x$ 平面内俯仰 (转动),小臂可伸缩移动,如图 1-13 所示。著名的 Unimate 机器人就采用这种类型操作机。这种操作机的特点是结构紧凑,所占空间体积小,但目前应用较少。

四、关节型操作机

关节型操作机是模拟人的上臂而构成的。它的前三关节是转动关节 (RRR),腰关节绕 z 轴转动,臂的两个关节绕平行于 y 轴的两轴线转动,如图 1-14 所示。它利用顺序的三次圆弧运动来改

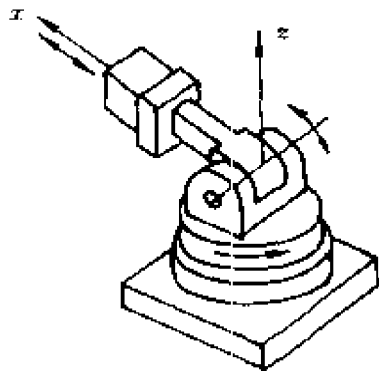


图 1-13 球坐标型操作机

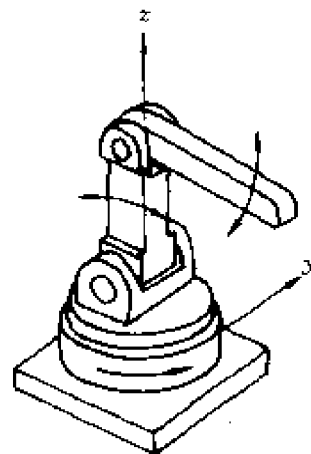


图 1-14 关节型操作机

变“手”的空间位置，其特点是结构紧凑，所占空间体积小，相对的工作空间大，还能绕过基座周围的一些障碍物。这是机器人中使用最多的一种结构形式。PUMA、CINCINNATI T3，MOTOMAN、ABB、KUKA 等名牌机器人都采用这种形式的操作机。

第四节 工业机器人的分类和主要性能指标

一、工业机器人的分类

目前对机器人还没有统一的分类标准。下面简要介绍几种不同的分类方法。

1. 按驱动方式分类

按驱动装置的动力源，机器人可分为以下几种。

(1) 液压式机器人。这种机器人的驱动系统通常由液动机（各种油缸、油马达）、伺服阀、油泵、油箱等组成，这种机器人通常具有很大的抓举能力并且结构紧凑，动作平稳，耐冲击、耐振动，防爆性好，但对制造精度和密封性能要求较高，否则易发生漏油而污染环境。

(2) 气压式机器人。其驱动系统通常由气缸、气阀、气罐和空压机组组成。特点是气源方便，动作迅速，结构简单、造价较低、维修方便，但难于进行速度控制，并因气压不可太高，故抓举能力较小。

(3) 电动式机器人。电力驱动是目前机器人使用的最多的一种驱动方式。其特点是电源方便，响应快，驱动力较大，信号检测、传递、处理方便，可以采用多种灵活的控制方案。驱动电机一般采用交流伺服电机、直流伺服电机和步进电机。由于电机速度高，通常还须采用减速机构（如谐波减速机构、轮系减速机构、滚珠丝杠和多杆机构）。目前也有一些用特制电机直接进行驱动，以简化机构，提高控制精度。

其他还有采用混合驱动的机器人，如液-气混合驱动机器人或电-气混合驱动机器人。

2. 按用途分类

机器人按用途可分为下列几种。

(1) 搬运机器人。这种机器人用途很广，一般只需点位控制，即被搬运零件无严格的运动轨迹要求，只要起始点和终了点位姿准确，如机床用的上下料机器人，工件堆垛机器人等。

(2) 喷涂机器人。这种机器人多用于喷漆生产线，常为手把手示教型，重复位姿精度要求不高，但由于漆雾易燃，以前多采用液压驱动，目前则更多地采用防爆电机或交流伺服电机驱动。

(3) 焊接机器人。这是汽车生产线上使用最多的一类机器人，又可分为点焊和弧焊两类，点焊机器人负荷大，动作快，一般要有6个自由度，但只需实现点位控制。弧焊机器人负荷小，速度低，通常5个自由度即能进行工作，但对运动轨迹要求较严，必须实现连续路径控制，即在运动轨迹的每一点都必须实现预定的位姿要求，目前也大多采用6自由度。

(4) 装配机器人。这类机器人要求有较高的位姿精度，或者手腕应具有较大的柔性。装配机器人目前大多用于电器插件的装配，而如何应用于一些难度较大的装配作业正是人们大力研究的

课题。装配机器人通常要有 6 个自由度，还要求有一定的智能，如力感觉或视觉。有时还要求使用双臂协调动作的机器人或多机器人协调工作。

(5) 其他用途的机器人。如航天用机器人，探海用机器人，以及排险作业机器人等。

3. 按操作机的位置机构类型和自由度数量分类

操作机的位置机构是机器人的重要外形特征，故常用作分类的依据。按这一分类要求，机器人可分为直角坐标型、圆柱坐标型、球坐标型、关节型机器人。

操作机本身的自由度最能反应机器人的作业能力，也是分类的重要依据。按这一分类要求，机器人可分为 4 自由度、5 自由度、6 自由度和 7 自由度机器人。

上述分类结果常以技术要求的形式写在机器人特性表或说明书中，如具有图 1-5 所示操作机（执行机构）的机器人，即为 6 自由度关节式机器人。

4. 其他分类方式

除上述分类方式外，机器人还可按控制方式分为点位控制机器人和连续控制机器人；按负载大小分为重型、中型、小型和微型机器人；按基座型式分为固定式和移动式机器人；按操作机运动链的型式分为开链式、闭链式、局部闭链式机器人等等。

二、主要性能指标及产品样本图

工业机器人的性能指标很多，下面简要介绍一些与操作机的分析和设计关系最为密切的性能指标。

1. 有关负荷方面的性能指标

(1) 与负荷有关的性能指标主要有：额定负荷，即在正常运行条件下施加到机械接口处最大负荷的容许值，其中也包括末端执行器、附件和工件的惯性力；

(2) 限定负荷，即在额定负荷状态所限定的运行条件下使机器人机构部分不发生破坏或不出故障时机械接口处所能承受的最

大负荷；

(3) 最大推力和最大扭矩，即在保证机构不发生损坏的条件下作用到机械接口处的最大推力（不包括惯性力）和最大扭矩。

2. 有关运动方面的性能指标

与运动有关的性能指标主要有：

(1) 自由度，即操作机独立驱动关节数；

(2) 单轴最大工作范围和工作速度；

(3) 合成速度，即各轴的速度分量的合成速度，它常表现为机械接口中心或腕中心的线速度。

3. 有关几何空间方面的性能指标

与几何空间有关的性能指标主要有：

(1) 工作空间，它决定了工作范围，通常以腕点中心在操作机运动时所占有的体积表示，在特性图上，用该空间的主剖面边界以及向基座的正投影的边界两个视图表示；

(2) 灵活度，它表示操作机在工作空间各点抓取物体的灵活程度，可有不同的数量指标，我们认为操作机末杆位姿图最能直观而准确地表示这一特性。所谓末杆位姿图，是末杆在工作空间最大边界的一些转折点（关键点）上的两个极限位置的投影图，如图 2-23 所示。

4. 有关精度方面的性能指标

与精度有关的性能指标主要有位姿精度、距离精度、轨迹精度等。详见〔5〕。其中最重要的而且在产品样本上必须标出的是位置重复精度，即指令位置和从同一方向重复响应 n 次后实到位置不一致的程度。

5. 有关动力源和控制方面的性能指标

与动力源和控制方面有关的性能指标主要有驱动方式（电、液、气）和容量、程序存贮容量、插补方式、编程方式以及分辨率等。其中，分辨率是指操作机各轴可有效反应的最小距离或角度。

6. 产品样本图表

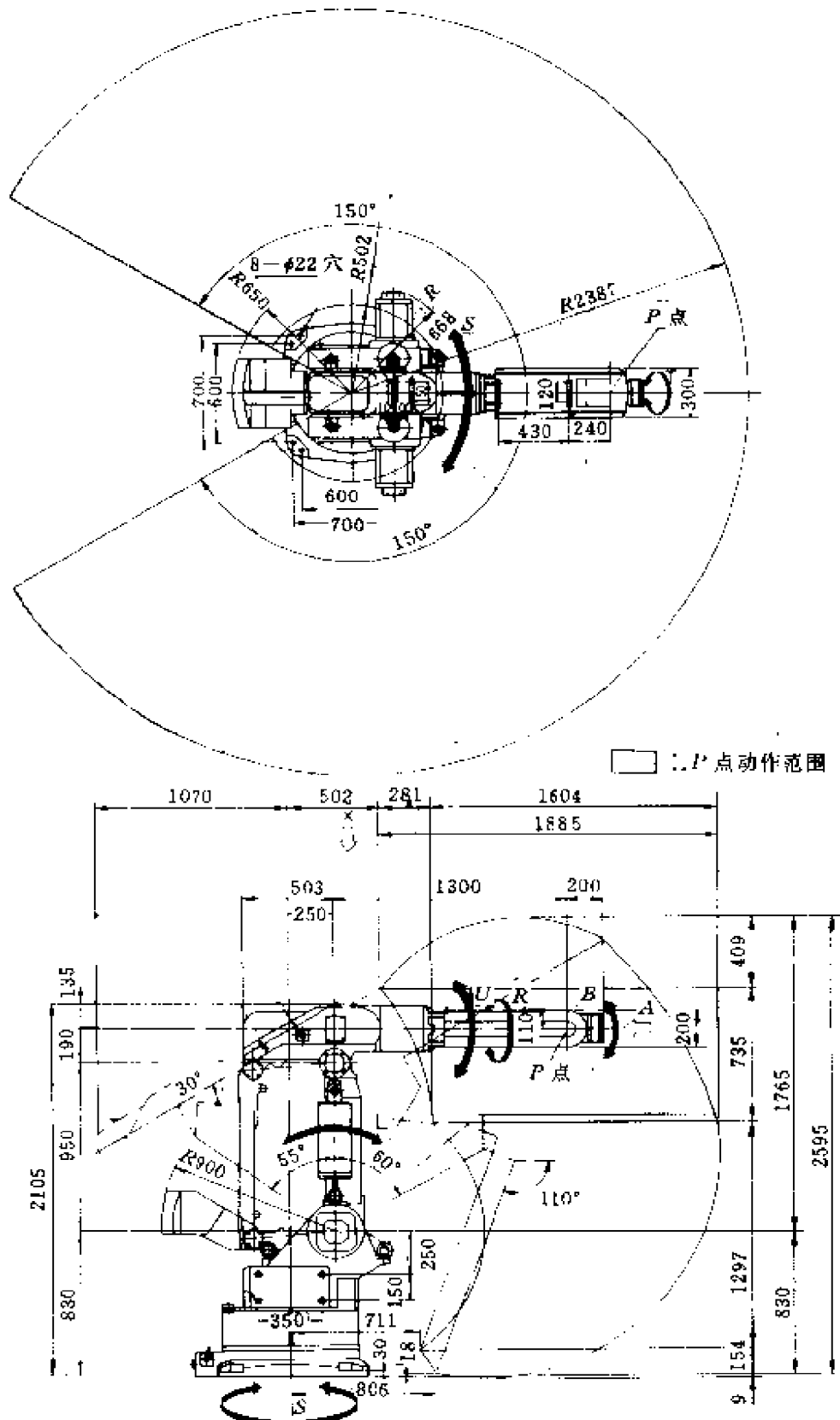


图 1-15 产品样本图①

MOTOMAN-K100S

项目		K100S
动作形态		垂直多关节形
自由度		6
可搬质量		100kg
位置重复精度		±0.5mm
动作范围	S轴(本体旋转)	300°
	L轴(大臂摆动)	115°
	U轴(小臂摆动)	140°
	R轴(腕回转)	380°
	B轴(腕摆动)	260°
	T轴(末杆回转)	700°
最大速度	S轴	1.92rad/s, 110°/s
	L轴	1.92rad/s, 110°/s
	U轴	1.92rad/s, 110°/s
	R轴	2.44rad/s, 140°/s
	B轴	2.44rad/s, 140°/s
	T轴	4.19rad/s, 240°/s
允许扭矩	R轴	588N·m(60kgf·m)
	B轴	588N·m(60kgf·m)
	T轴	353N·m(36kgf·m)
允许惯性扭矩 (GD ² /4)	R轴	37kg·m ²
	B轴	37kg·m ²
	T轴	13.7kg·m ²
本体质量		1800kg
涂装色		桔红
设置	温度	0~+45℃
	湿度	20~80%RH
	振动	0.5G 以下
环境	其他	
电源容量		24kVA

① 取自安川公司产品样本，稍有删减，其中视图采用第三角画法。

产品样本必须列出机器人的主要性能指标。图 1-15 是日本安川公司 MOTOMAN K 系列机器人的产品样本图。

第五节 操作机的设计步骤

操作机是一多自由度组成的高精度空间运动机械，所以必须具有运动的灵活性和准确性，以及动态性能的平稳性。因此，操作机与普通机械设备相比，除满足强度、刚度、可靠性之外，还必须具有轻巧灵活的构形和良好的动态性能，其设计步骤可归纳如表 1-1 所示。

表 1-1 操作机设计过程

序号	步 骤	目的与任务
1	作业分析	列出作业时序表，画出空间工件位姿图
2	方案设计	确定动力源；确定机型、自由度和驱动器容量；确定传动方式和速比；优化“杆长”及各轴的运动范围；确定平衡方式及平衡质量
3	几何分析、运动分析及图形仿真	验证工作空间和灵活度；列写运动方程并进行图形（动画）仿真
4	结构设计	关节及杆件的结构设计；传动配置及其结构设计；“走线”及电器接口设计
5	动特性分析	估算惯性参数；列写刚体动力学方程并进行仿真分析，以验证动力容量和速比的正确性；弹性动力分析以确定其结构固有频率和响应特性
6	施工设计	绘制全套零件图并进行精度分析

必须强调，设计时必须对现有商品机器人的主要类型进行分析以供借鉴。对于重大改进或创新的关键部件应进行模型试验，以期达到预期的效果。

第二章 操作机的几何分析

第一节 确定刚体位姿的矩阵方法

一、位姿矩阵的建立

刚体的位置、姿势可由其上的任一点（称作基准点，通常可选作物体的质心）和过该点的坐标系相对于参考坐标系的相对关系来确定。

设有一物体 A ，选其上的某点 O_A 为基准点。过 O_A 置坐标系（又称标架） S_A ($O_A-x_A y_A z_A$)。再选一参考坐标系 S_0 ($O_0-x_0 y_0 z_0$)，如图 2-1 所示。于是，物体 A 的空间位置和姿势可由向量 p_{0A} ($=O_0 O_A$) 和 S_A 的向量基 i_A, j_A, k_A 相对于 S_0 的关系来确定（或表示），即：

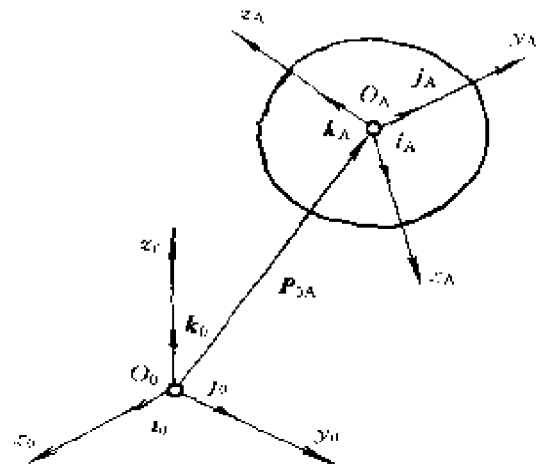


图 2-1 刚体 A 的位姿确定

$$P_{0A}^0 = (O_0 O_A)^0 = \begin{bmatrix} x_{00A} \\ y_{00A} \\ z_{00A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

$$\text{和 } R_A^0 = \begin{bmatrix} i_{Ax0} & j_{Ax0} & k_{Ax0} \\ i_{Ay0} & j_{Ay0} & k_{Ay0} \\ i_{Az0} & j_{Az0} & k_{Az0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos i_A i_0 & \cos j_A i_0 & \cos k_A i_0 \\ \cos i_A j_0 & \cos j_A j_0 & \cos k_A j_0 \\ \cos i_A k_0 & \cos j_A k_0 & \cos k_A k_0 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

式中 $P_{O_A}^0$ —— O_A 点的向径 P_{O_A} 在坐标系 S_0 中的表示, 是 3×1 列阵 (位置列阵);

R_A^0 —— 坐标系 S_A 在坐标系 S_0 中的表示, 是 3×3 方阵 (姿势矩阵)。

式中的 $i_{Ax_0} \dots j_{Ax_0} \dots k_{Ax_0} \dots$ 分别表示 S_A 中的向量基 i_A, j_A, k_A 在 S_0 中沿 $i_0 (x_0), j_0 (y_0), k_0 (z_0)$ 的投影; $\cos i_A i_0 \dots \cos j_A i_0 \dots \cos k_A i_0 \dots$ 分别表示向量基 i_A 与 i_0, j_A 与 i_0, k_A 与 $i_0 \dots$ 等的夹角的余弦。

为了方便起见, 可用 4×4 方阵同时把位置和姿势表示出来, 记作 T_A^0 , 称作位姿矩阵, 即:

$$T_A^0 = \begin{bmatrix} R_A^0 & P_{O_A}^0 \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

二、位姿矩阵的逆阵

1. 姿势矩阵的逆阵

由于姿势矩阵是正交方阵, 所以

$$[R_i^j]^{-1} = [R_i^j]^T = R_i^j$$

即姿势矩阵的逆阵就是它自身的转置。这只要写出用余弦元素表示的 R_i^j 和 R_j^i 进行矩阵相乘得到单位矩阵就可证明。

2. 位姿矩阵的逆阵

由图 2-2 可知:

$$e_i = R_i^j e_j$$

式中 e_i —— S_i 的向量基;

e_j —— S_j 的向量基。

和

$$P_{O_i}^j = R_i^j P_{O_i}^i = - R_i^j P_{O_j}^i$$

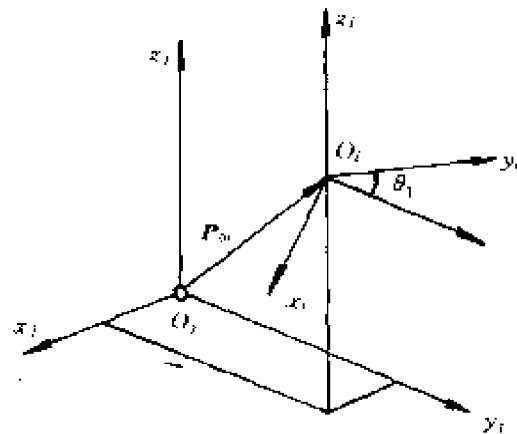


图 2-2 位姿矩阵求逆

而

$$T_j^i = \begin{bmatrix} R_j^i & P_{O_j^i}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_i^j = \begin{bmatrix} R_i^j & P_{O_i^j}^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$[T_j^i]^{-1} = T_i^j = \begin{bmatrix} [R_j^i]^T & -[R_j^i]^T P_{O_j^i}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

当然位姿矩阵的逆阵也可用线性代数中求逆的一般公式求出。

三、多刚体之间的位姿关系及矩阵方程

设空间有如图 2-3 表示的两组刚体： $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n; A_1', A_2',$

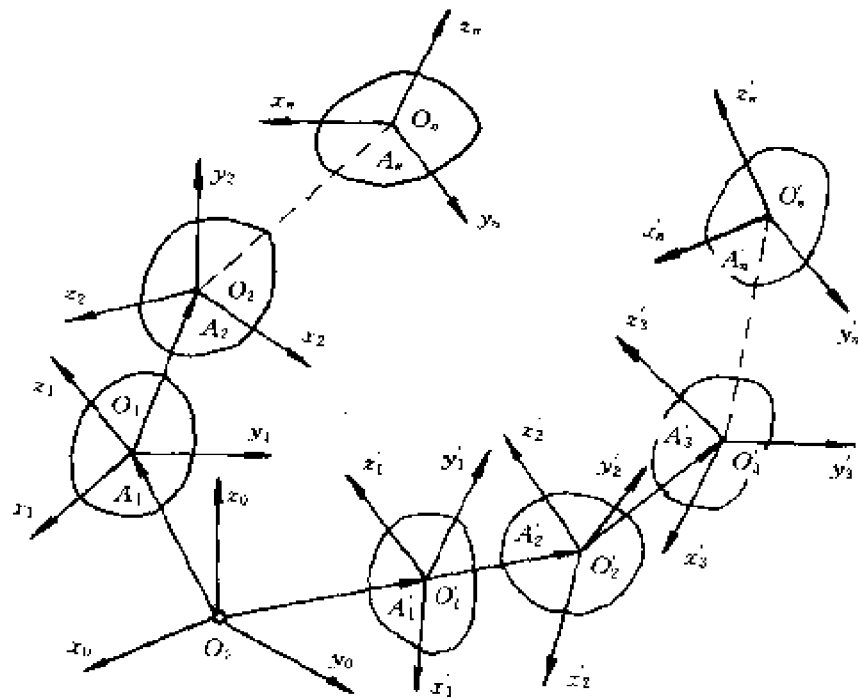


图 2-3 多刚体之间的位姿关系

A_3', \dots, A_n' 。在每一刚体上选一基点 $O_1, \dots, O_n; O_1', \dots, O_n'$ 。过各基点分别置一坐标系 $S_1, \dots, S_n; S_1', \dots, S_n'$ 。再在空间选一参考坐标系 S_0 ，分别求出相互的位姿关系矩阵： $T_1^0, \dots, T_n^{n-1}; T_1'^0, \dots, T_n'^{(n-1)'}$ 。由

于如图 2-3 所示的坐标系间的关系是串接的, 故刚体 A_n 、 A_x 相对于 S_0 的位姿矩阵 T_n^0 、 T_x^0 可按下面的连乘积求得

$$T_n^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 \cdots T_n^{n-1} \quad (2-5a)$$

$$T_x^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 \cdots T_n^{(n-1)'} \quad (2-5b)$$

式 (2-5) 称作位姿矩阵方程式。利用该方程, 可以求出任一未知矩阵。例如, 若 T_2^1 为要求出的未知矩阵, 则由式 (2-5) 可得

$$T_2^1 = [T_n^0]^{-1} T_n^{(n-1)'} [T_n^{(n-1)'}]^{-1} \cdots [T_3^2]^{-1} \quad (2-6)$$

若已知 T_n^0 和 $T_n^{(n-1)'}$, 为了求得刚体 A_x 对于刚体 A_n 的位姿矩阵 T_n^x , 由图 2-3 可得

$$T_n^0 = T_n^x T_n^x$$

所以

$$T_n^x = [T_n^0]^{-1} T_n^0 = [T_n^{(n-1)'}]^{-1} \cdots [T_2^1]^{-1} [T_1^0]^{-1} T_1^0 T_2^1 \cdots T_n^{n-1} \quad (2-7)$$

上式可表示为图 2-4 所示的算图。在该图中, T_n^x 正好等于由尾 $T_n^{(n-1)'}$ 反向到 0, 再由 0 正向到 T_n^{n-1} , T_n^x 就表示为沿上述路径巡回一遍的矩阵连乘形式, 即得公式 (2-7)。

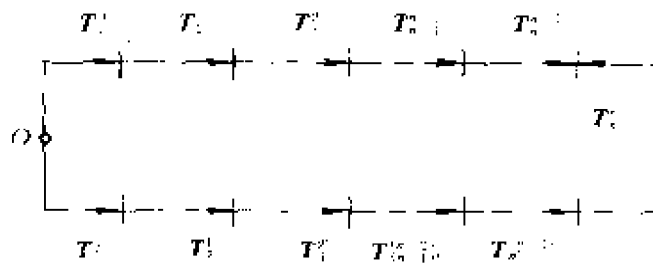


图 2-4 矩阵方程算图

利用图 2-4, 可以求出其中任一环。如 T_2^1 , 由图知, 它正好等于由尾 $T_n^{(n-1)'}$ 反向到 0, 再由 0 正向到 T_n^{n-1} , 再反向到 T_3^2 的尾 (即 T_2^1 的头), 于是得到

$$T_2^1 = [T_1^0]^{-1} T_1^0 \cdots T_n^{(n-1)'} T_n^x [T_n^{(n-1)'}]^{-1} \cdots [T_3^2]^{-1} \quad (2-8)$$

第二节 姿势矩阵的欧拉角表示法

一、用绕流动坐标轴的转角为参数的表示法

如前所述，姿势矩阵是具有 9 个元素的方向余弦矩阵，根据余弦矩阵的性质，它只有 3 个不在同一行或同一列的元素才是独立的，所以可用 3 个参量来表示姿势矩阵。也就是说，物体的姿势只决定于 3 个独立变量，这 3 个独立变量可以取作绕 3 个轴的转角。

如图 2-5，确定物体姿势的标架 S_j 是由与参考坐标系（基础坐标系） S_i 重合的某一坐标系经过三次旋转变换得到的，即：首先绕 z_i 右旋 φ 角，得到标架 S_1 ；再以 S_1 的 x_1 轴为轴，右旋 θ 角得到 S_2 ；最后以 z_2 为轴，右旋 ψ 角得到 S_j 。

令三次旋转变换分别表示为：

$$R_1^i = \text{Rot}(z_i, \varphi), R_2^1 = \text{Rot}(x_1, \theta), R_j^2 = \text{Rot}(z_2, \psi)$$

并把这三次连续变换后得到的姿势矩阵记作： $R_j^i(\varphi, \theta, \psi)$ ，则：

$$R_j^i(\varphi, \theta, \psi) \textcircled{1} = \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

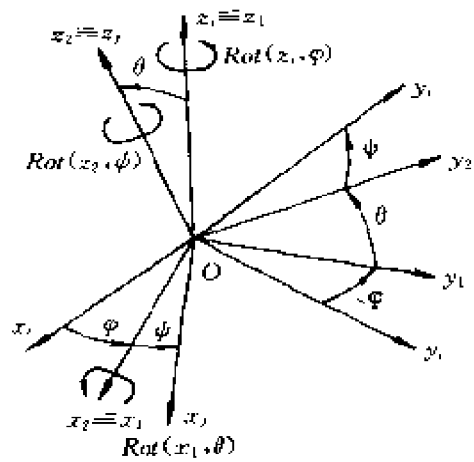


图 2-5 绕动轴三次旋转变换

① 式中为简便起见，将 \cos 简写为 c ， \sin 简写为 s ，后同。

$$= \begin{bmatrix} c\varphi c\psi - s\varphi c\theta s\psi & -c\varphi s\psi - s\varphi c\theta c\psi & s\varphi s\theta \\ s\varphi c\psi + c\varphi c\theta s\psi & -s\varphi s\psi + c\varphi c\theta c\psi & -c\varphi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

式中 φ ——进动角；
 θ ——章动角；
 ψ ——自转角。

式中的 φ 、 θ 、 ψ 统称为欧拉角。

下面我们分析欧拉角与方向余弦之间的关系。为了便于书写，我们仍把一般的旋转变换 R_i^j 记作：

$$R_i^j = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

令 $R_i^j(\varphi, \theta, \psi) = R_i^j$ ，即式 (2-9) 与 (2-10) 两矩阵的对应元素相等，可得

$$(1) \quad -c\varphi s\theta = a_y, \quad s\varphi s\theta = a_x$$

$$\text{所以} \quad \varphi = \text{tg}^{-1} - a_x/a_y \quad (2-11)$$

$$(2) \quad s\theta c\psi = o_z, \quad s\theta s\psi = n_z$$

$$\text{所以} \quad \psi = \text{tg}^{-1} n_z/o_z \quad (2-12)$$

$$(3) \quad s^2\varphi s^2\theta + c^2\varphi s^2\theta = a_x^2 + a_y^2 \text{ 及 } c\theta = a_z$$

$$\text{所以} \quad \theta = \text{tg}^{-1} \pm \sqrt{a_x^2 + a_y^2}/a_z \quad (2-13)$$

二、用绕基础坐标轴的转角为参数的表示法

前面所考虑的三个欧拉角 (φ, θ, ψ) 是绕分属三个不同坐标系的三个坐标轴的右旋角，我们称为动轴欧拉角，它的物理模型可看作是陀螺仪上的框架和陀螺体，两个坐标系固联

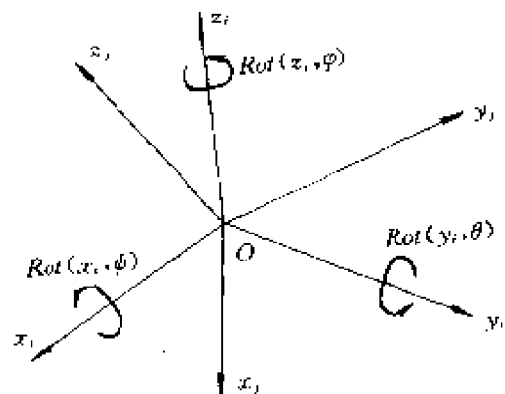


图 2-6 绕定轴三次旋转变换

在框架上，一个坐标系固联在陀螺体上。我们也可用同属基础坐标系的三个坐标轴的右旋角作为确定坐标系 S_i 方位（物体姿势）的“欧拉角”，我们称为“定轴欧拉角”，如图 2-6 所示（未画中间过渡坐标系）。其物理模型可看作是图 2-7 所示航行中的船体，前进方向为 z ，正上方为 x ，侧向为 y ，三者按右手系取正向。根据绕基础坐标轴变换矩阵须左乘的规则，得：

$$\begin{aligned}
 R_i^j &= \text{Rot}(z_i, \varphi) \text{Rot}(y_i, \theta) \text{Rot}(x_i, \psi) \\
 &= \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi \\ s\varphi c\theta & s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} \quad (2-14)
 \end{aligned}$$

仿前可得

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \quad n_y/n_x \quad (2-15)$$

$$\psi = \text{tg}^{-1} \quad o_z/a_z \quad (2-16)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} - n_z / \pm \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad (2-17)$$

式中 φ ——滚转角 (roll);
 θ ——俯仰角 (pitch);
 ψ ——偏摆角 (yaw)。

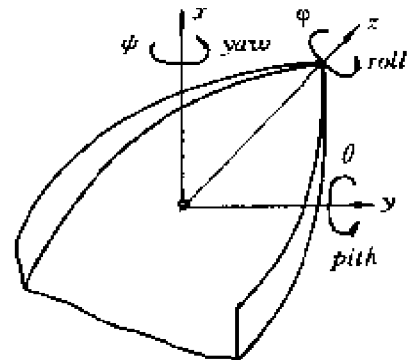


图 2-7 “定轴欧拉角”模型

第三节 操作机两杆间位姿矩阵的建立

一、关于结构参数与关节变量的规定

操作机为多杆系统，两杆间的位姿矩阵是求得操作机手部位姿矩阵的基础。两杆间的位姿矩阵取决于两杆之间的结构参数、运

动形式和运动参数,以及这些参数按不同顺序建立的几何模型。常见模型的有两类:固联坐标系前置和后置。这里只介绍前置模型。

取以回转副联接的两相邻杆件(如图 2-8 所示),其一为 $i-1$

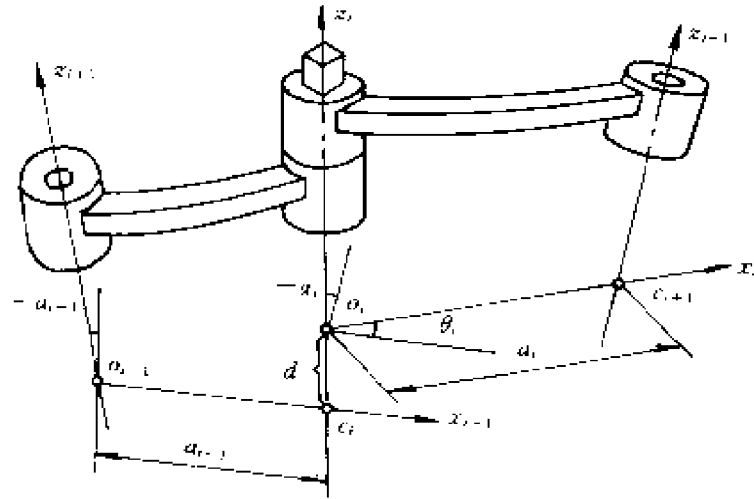


图 2-8 回转副联接的两杆件(坐标系前置)

号杆 (L_{i-1}), 另一为 i 号杆 (L_i)。前者靠近基座, 后者靠近手爪(末端执行器)。联接两连杆的运动副称作关节, 编号是: L_{i-1} 与 L_i 的关节为 i 号关节; L_i 与 L_{i+1} 的关节为 $i+1$ 号关节。连杆 L_i 的固联坐标系 S_i , 有两种设法, 其一是令 S_i 的 z_i 轴置于 i 号关节的旋转轴上, 这时 S_i 的原点 O_i 落在 i 号关节的轴线上, 即坐标系 S_i 置于杆 L_i 的靠近基座的关节上, 故称固联坐标系前置(如图 2-8 所示)。根据这一安排, 我们有以下规定:

设连杆 L_i 的两轴线为 z_i 和 z_{i+1} , 前者为 L_{i-1} 与 L_i 的相对回转轴线, 后者为 L_{i+1} 与 L_i 的回转轴线。如图 2-8 所示。

选两回转轴 z 的公垂线为 x 轴, z_{i-1} 与 z_i 轴的公垂线为 x_{i-1} ; z_i 与 z_{i+1} 的公垂线为 x_i 轴, x_{i-1} 与 z_{i-1} 的交点为杆件 L_{i-1} 固联坐标系 S_{i-1} 的原点 O_{i-1} , x_i 与 z_i 的交点为杆件 L_i 固联坐标系 S_i 的原点 O_i 。两坐标系都按右手系确定 y_{i-1} 、 y_i 轴(见图 2-8)。 z_{i-1} 与 z_i 的交错角为 α_{i-1} , z_i 与 z_{i+1} 的交错角为 α_i , 两者都分别以绕 x_{i-1} 、 x_i 轴右旋为正。 x_{i-1} 与 x_i 的交错角为 θ_i , 以绕 z_i 右旋为正。 x_{i-1} 与 z_i

的交点为 c_i ， c_i 到 O_i 的距离为 d_i ，顺 z_i 轴为正。回转轴（关节轴）公垂距分别记作 a_{i-1} ， a_i （见图 2-8），顺 x_{i-1} 、 x_i 为正。

若两杆以移动副相联，如图 2-9， L_{i-1} 与 L_i 用棱柱销、轴（或借助花键、滑键）相联。图中各符号的意义均与图 2-8 相同。

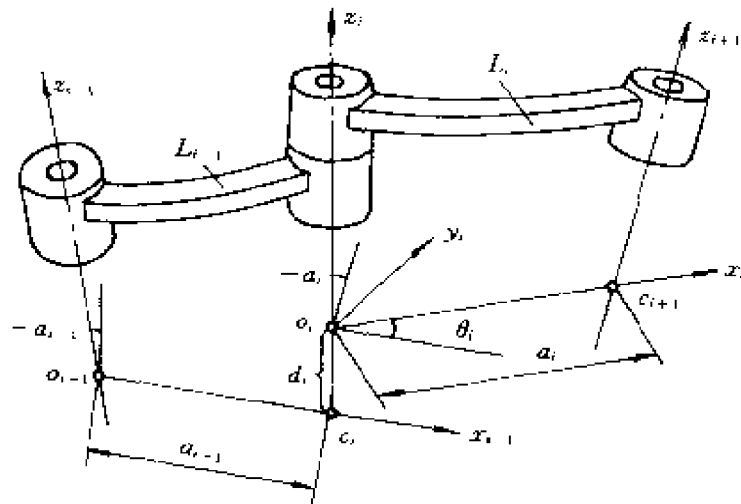


图 2-9 移动副连接的两杆件（坐标系前置）

由图 2-8、2-9 可知， a_{i-1} ， a_i ， d_i ， θ_i 四个参数完全确定了两杆 (L_{i-1} ， L_i) 之间的相对关系。在一般情况下， a_{i-1} 、 a_i 为常量，前者称作杆 L_{i-1} 的扭角，后者称作 L_{i-1} 的杆长。对于回转关节， d_i 为常量，称偏距； θ_i 为变量，称关节转角。对于移动关节， d_i 为变量，称关节位移量； θ_i 为常量，称偏角。上述两类关节各有三个常量，是连杆自身的结构参数；各有一个变量，是两连杆间的运动参数（或位移参数）。

二、确定两杆之间位姿矩阵的方法^[1]

根据上面建立的几何模型，按变换组合得出最终公式。使用时只需根据具体情况定出四个参数值，代入公式即可求得两杆之间的位姿矩阵。

由图 2-8、2-9 可知，杆 L_i 的固联坐标系 S_i 可以认为是相对于

S_{i-1} 先绕 x_{i-1} 转 α_{i-1} 角, 记作 $\text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_{i-1})$; 再沿 x_{i-1} 平移 a_{i-1} , 记作 $\text{Trans}(x_{i-1}, a_{i-1})$; 再沿 z_i 平移 d_i , 记作 $\text{Trans}(z_i, d_i)$; 再绕 z_i 转 θ_i 角, 记作 $\text{Rot}(z_i, \theta_i)$ 。于是 S_i 相对 S_{i-1} 的位姿矩阵, 亦即旋转 (α_{i-1}) — 平移 (a_{i-1}) — 平移 (d_i) — 旋转 (θ_i) , 变换矩阵是:

$$T_i^{i-1} = \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Trans}(x_{i-1}, a_{i-1}) \text{Trans}(z_i, d_i) \text{Rot}(z_i, \theta_i)$$

即

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

若已知 α_{i-1} 、 a_{i-1} 、 d_i 、 θ_i 四个参数, 即可利用式 (2-18) 求出 L_i 相对 L_{i-1} 的位姿矩阵, 亦即标架 S_i 相对标架 S_{i-1} 的变换矩阵 T_i^{i-1} 。

但在使用上述公式时, 必须严格按照图 2-8 (或图 2-9) 所示的规则设立坐标系和关节变量的初始值。

对于移动关节, 取 d_i 为关节变量。

这种确定两杆相对运动的方法, 称作 Denavit—Hartenberg 方法, 简称为 D—H 法。

第四节 操作机位姿方程的正、逆解

末端执行器 (对多数机器人常表现为手爪) 上标架相对于基础坐标系的位姿矩阵 T^0 , 就是操作机的位姿 (运动) 方程。有时为了简化研究, 常略去末杆执行器类型复杂的影响, 以末杆的位姿矩阵 T_n^0 代替 T^0 为研究对象。由位姿矩阵所表示的操作机的位姿 (运动) 方程是以各杆之间的关节变量为变量的方程式。其正解, 即机器人位姿 (运动) 方程 (或运动学) 的正问题, 是已知各杆的结构参数和关节变量, 求末端执行器的空间位置和姿势, 即 T^0 中各元素的值; 逆解则是已知满足某工作要求时末端执行器的

空间位置和姿势 (T^0) 以及各杆的结构参数, 求关节变量。逆解在机器人学中是更为重要和困难的问题, 是对机器人控制的关键, 因为只有使各关节按逆解中所得的值移动 (或转动), 才能使末端执行器达到工作所要求的位置和姿势。

根据操作机的结构类型, 下面分两种情况讨论。

一、开链操作机

1. 位姿正解

设有一开链操作机, 其简图如图 2-10 所示。它实质上是一个

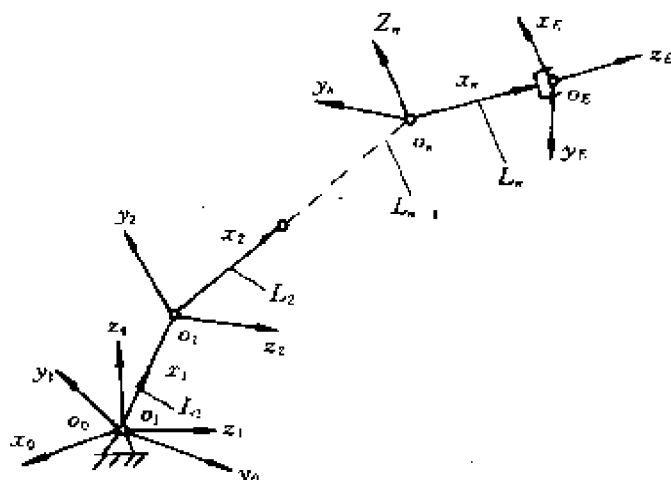


图 2-10 开链操作机简图

用回转副 (因运动副形式不影响解题方法, 故只考虑转动副) 相连的串联多刚体系统, 根据公式 (2-5), 末端执行器上的标架 S_E , 相对于基础标架的位姿矩阵是:

$$T_E^0 = T_1^0 T_2^1 \cdots T_n^{n-1} T_E^n$$

现举例说明如下。

例 2-1 设有图 2-11 所示的三杆平面操作机, 试求 T_E^0 。

解:

(1) 设坐标系。共设 $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 = (S_E)$ 五个坐标系,

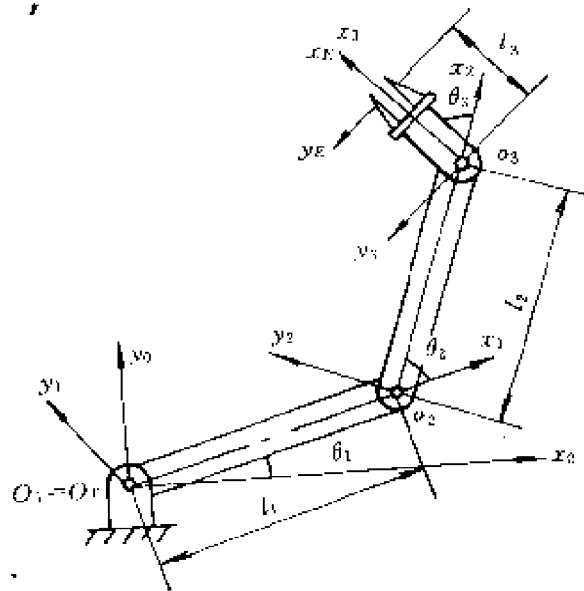


图 2-11 三杆操作机简图

见图 2-11。图中 z_i 轴均指向纸外。

(2) 确定结构参数和关节变量。因操作机为全回转关节，故 d_i 是结构参数， θ_i ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) 为关节变量，如表 2-1 所示。

表 2-1 结构参数和关节变量

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	l_1	0	θ_2
3	0	l_2	0	θ_3
4	0	l_3	0	0

(3) 求两杆间的位姿矩阵 T_i^{i-1} 。根据参数表 (表 2-1) 和公式 (2-18) 得：

$$T_1^0 \textcircled{1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

① 式中 $c_1, s_1, c_{12}, s_{12}, c_{123}, s_{123}$ 分别表示 $\cos\theta_1, \sin\theta_1, \cos(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_1 + \theta_2), \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, 后同。

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$T_e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

(4) 求末端执行器的位姿矩阵。

$$\begin{aligned} T_e^0 &= T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_e^3 \\ &= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & c_{123}l_3 + c_{12}l_2 + c_1l_1 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & s_{123}l_3 + s_{12}l_2 + s_1l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (e)$$

式中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ——关节变量。

(5) 求末杆执行器的位置和姿势。根据公式 (2-3)，该平面操作机末端执行器的姿势和位置分别是：

$$R_E^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (f)$$

$$P_E^0 = \begin{bmatrix} l_3c_{123} + l_2c_{12} - l_1c_1 \\ l_3s_{123} + l_2s_{12} + l_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (g)$$

例 2-2 试求如图 2-12 所示之 PUMA560 机器人的六杆操作机的末杆位姿矩阵。

解：

(1) 设坐标系。自基础到末杆不考虑手爪坐标系的标架分别如图 2-12 所示。注意：在设置坐标系时要考虑使尽可能多的结构参数为零，不必完全按实物的自然结构设置。而且一般情况下在结构简图上无须表示出关节变量。在图 2-12 中， S_0 的原点未设在地基上， $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_6$ 均未画出。

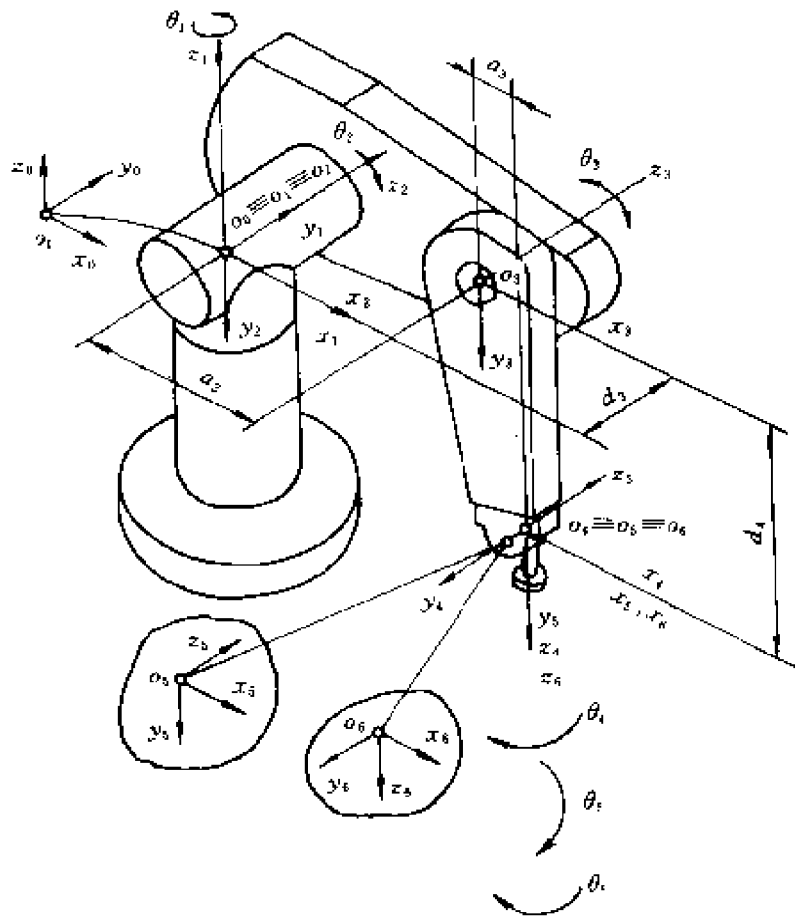


图 2-12 PUMA560 轴测简图

(2) 确定各杆的结构参数与关节变量。各杆的结构参数如图 2-12 所示，各关节变量均为绕 z_i 的转角，分别表示为 $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_6$ 。结构参数和关节变量如表 2-2 所示。

表 2-2 结构参数与关节变量

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

(3) 确定两杆之间的位姿矩阵。将表 2-2 中的参数代入公式 (2-18)，即得：

$$\left. \begin{aligned}
 T_1^0 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_2^1 &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 T_3^2 &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_4^3 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 T_5^4 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_6^5 &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} (a)$$

(4) 求末杆的位姿矩阵 T_6^0 。

$$T_6^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\begin{aligned}
\text{式中 } n_x &= c_1 [c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
n_y &= s_1 [c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
n_z &= -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \\
o_x &= c_1 [c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\
o_y &= s_1 [c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\
o_z &= -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6 \\
a_x &= -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5 \\
a_y &= -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5 \\
a_z &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\
p_x &= c_1 [a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1 \\
p_y &= s_1 [a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_3c_1 \\
p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}
\end{aligned}$$

通过上面的例子可知，在进行开链操作机末端执行器（或末杆）位姿矩阵（运动方程）正解过程中，坐标设置时应注意以下各点：

(1) 使操作机处于操作的零位，由基座开始先设立固定的基础（参考）坐标系 S_0 ，其 z_0 的正向最好与重力加速度反向，原点 O_0 在第一关节轴线上， x_0 位于操作机工作空间的对称平面内；

(2) 尽量使 x_i 与 x_{i-1} 同向， O_i 与 O_{i-1} 在 z_i 方向同“高”，否则关节变量 θ_i （或 d_i ）要加初始值；

(3) 末端执行器坐标架 S_n 的原点 O_n ，最好选在“手”心点上， z_n 的正向指向（或背离）工件。

2. 位姿逆解

位姿逆解法可分为三类：代数法、几何法和数值解法。前两种解法的具体步骤和最终公式，因操作机的具体构形而异，后一种解法是目前人们寻求位姿逆解的通解而得到的方法，由于计算量大，计算时间往往不能满足实时控制的需要，所以这一方法目前只具有理论意义。下面介绍代数法。

为了便于说明，我们设末杆位姿矩阵为 T_6^0 （即 6 杆操作机，且不考虑末端执行器坐标系 S_6 ）：

$$T_6^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 \quad (2-19)$$

并用 q_i 代替 θ_i 或 d_i 表示关节变量 (q_i 称作广义关节变量)。

若已知末杆某一特定的位姿矩阵 T_6^0 ：

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

为了求解 q_1 ，可用 $[T_1^0]^{-1}$ 同时左乘式 (2-19) 的两端，得：

$$[T_1^0]^{-1} T_6^0 = T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 \quad (2-21)$$

根据 T_i^j 中只有 $q_1 \cdots q_i$ ，式 (2-21) 的左端只有 q_1 ，利用两端矩阵的对应元素相等，可得 12 个方程，其中 9 个是独立的，从中总可以用若干方程消去 $q_2 \cdots q_6$ ，从而求得 q_1 ，由此可得出一般的逆推解题步骤如下：

$$\left. \begin{aligned} [T_1^0]^{-1} T_6^0 &= T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 \Rightarrow q_1 \\ [T_2^1]^{-1} [T_1^0]^{-1} T_6^0 &= T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 \Rightarrow q_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ [T_5^4]^{-1} [T_4^3]^{-1} [T_3^2]^{-1} [T_2^1]^{-1} [T_1^0]^{-1} T_6^0 &= T_6^5 \Rightarrow q_5, q_6 \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

注意：通常上述递推并不需要作完，就可利用等号两端矩阵对应元素相等，求出全部的关节变量。

例 2-3 求例 2-2 PUMA560 的位姿逆解。已知 T_6^0 ，如例 2-2 (b) 式。

(1) 求 θ_1

根据 $[T_1^0]^{-1} T_6^0 = T_6^5$ ，由例 2-2 得：

$$[T_1^0]^{-1} T_6^0 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 n_x + s_1 n_y & c_1 o_x + s_1 o_y & c_1 a_x + s_1 a_y & c_1 p_x + s_1 p_y \\ -s_1 n_x + c_1 n_y & -s_1 o_x + c_1 o_y & -s_1 a_x + c_1 a_y & -s_1 p_x + c_1 p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^1 = T_2^1 \cdots T_6^5 = \begin{bmatrix} n_x' & o_x' & a_x' & p_x' \\ n_y' & o_y' & a_y' & p_y' \\ n_z' & o_z' & a_z' & p_z' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{aligned} n_x' &= c_{13} [c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6] - s_{23} s_5 c_6 \\ n_y' &= -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\ n_z' &= -s_{23} [c_4 c_5 c_6 - s_4 c_6] - c_{23} s_5 c_6 \\ o_x' &= -c_{23} [c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6] + s_{23} s_5 s_6 \\ o_y' &= s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \\ o_z' &= s_{23} [c_4 c_5 s_6 + s_6 c_6] + c_{23} s_5 s_6 \\ a_x' &= -c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 \\ a_y' &= s_4 s_5 \\ a_z' &= s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \\ p_x' &= a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23} \\ p_y' &= d_3 \\ p_z' &= -a_3 s_{23} - a_2 s_2 - d_4 c_{23} \end{aligned}$$

因为 $(T_1^0)^{-1} T_6^0 = T_6^1$ (a)

令式 (a) 两端的矩阵的 (2, 4) 元素相等, 得:

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_3 \quad (b)$$

作三角代换:

$$\text{令: } p_x = \rho \cos \varphi, \quad p_y = \rho \sin \varphi$$

$$\text{则: } \rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad \varphi = \text{tg}^{-1} p_y / p_x$$

$$\text{代入 (b) 式: } c_1 s_\varphi - s_1 c_\varphi = d_3 / \rho$$

$$\text{得: } \sin (\varphi - \theta_1) = d_3 / \rho, \quad \cos (\varphi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - d_3^2 / \rho^2}$$

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1} p_y / p_x - \text{tg}^{-1} (d_3 / \pm \sqrt{\rho^2 - d_3^2}) \quad (c)$$

(2) 利用式 (a) 还可求 θ_3

令式 (a) 两侧矩阵的 (1, 4) 及 (3, 4) 元素相等, 得:

$$c_1 p_x + s_1 p_y = a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2$$

$$-p_x = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2$$

将上两式左右平方相加, 再与式 (b) 左右平方相加, 得:

$$a_3 c_3 - d_4 s_3 = k \quad (d)$$

$$k = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2} \quad (e)$$

式 (d) 与式 (b) 相似, 仿之得:

$$\theta_3 = \text{tg}^{-1} a_3 / d_4 - \text{tg}^{-1} k / \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2} \quad (f)$$

(3) 求 θ_2

因为已求出了 θ_3 , 可以利用下式求 θ_2 :

$$[T_3^2]^{-1} [T_2^1]^{-1} [T_1^0]^{-1} T_6^0 = T_1^1 T_5^4 T_6^5 \quad (g)$$

$$\text{式 (g) 左} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & -s_{23} & -a_2 c_3 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

考虑到例 2-2:

$$\text{式 (g) 右} = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & a_3 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令式 (g) 两侧矩阵的 (1, 4), (2, 4) 元素分别相等, 得:

$$c_1 c_{23} p_x + s_1 c_{23} p_y - s_{23} p_z - a_2 c_3 = a_3$$

$$-c_1 s_{23} p_x + s_1 s_{23} p_y - c_{23} p_z + a_2 s_3 = d_4$$

将上两式联立求解 s_{23} , c_{23} , 得:

$$s_{23} = p_z (-a_3 - a_2 c_3) + A(a_2 s_3 - d_4) / (p_z^2 + A^2)$$

$$c_{23} = p_z (a_2 s_3 - d_4) - A(-a_3 - a_2 c_3) / (p_z^2 + A^2)$$

其中 $A = c_1 p_x + s_1 p_y$

$$\begin{aligned} \text{于是: } \theta_{23} &= \frac{p_z (-a_3 - a_2 c_3) + A (a_2 s_3 - d_4)}{p_z (a_2 s_3 - d_4) - A (-a_3 - a_2 c_3)} \\ \because \theta_{23} &= \theta_2 + \theta_3 \\ \therefore \theta_2 &= \theta_{23} - \theta_3 \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{p_z (-a_3 - a_2 c_3) + A (a_2 s_3 - d_4)}{p_z (a_2 s_3 - d_4) - A (-a_3 - a_2 c_3)} \\ &\quad - \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{a_3}{d_4} - \operatorname{tg}^{-1} k / \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2} \right) \end{aligned} \quad (h)$$

(4) 求 θ_4

仍可利用式 (g), 令两侧的 (1, 3) 和 (3, 3) 元素相等, 得:

$$\begin{aligned} a_x c_1 c_{23} + a_y s_1 c_{23} - a_z s_{23} &= -c_4 s_5 \\ -a_x s_1 + a_y c_1 &= s_4 s_5 \end{aligned}$$

因为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 都是已知数, 只要 $s_5 \neq 0$, 即可利用上两式联立解出:

$$\theta_4 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-a_x s_1 + a_y c_1}{-a_x c_1 c_{23} - a_y s_1 c_{23} + a_z s_{23}} \quad (i)$$

注意: 当 $s_5 = 0$ 时, $\theta_5 = 0$, 这时 z_4 与 z_6 轴重合, θ_4 与 θ_6 的转动效果相同, 所以这时可任取 θ_4 , 再算出相应的 θ_6 。

(5) 求 θ_5

利用公式

$$[T_4^3]^{-1} [T_3^2]^{-1} [T_2^1]^{-1} [T_1^0]^{-1} T_6^0 = T_5^4 T_5^3$$

$$\text{即: } [T_4^0]^{-1} T_6^0 = T_5^4 \quad (j)$$

由例 2-2 得: $[T_4^0]^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & -s_{23} c_4 & -a_2 c_3 c_4 + d_3 s_4 - a_3 c_4 \\ -c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4 & -s_1 c_{23} s_4 - c_1 c_4 & s_{23} c_4 & a_2 c_3 s_4 + d_3 c_4 + a_3 s_4 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令式 (j) 两侧的 (1, 3), (3, 3) 元素相等, 得:

$$a_x(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + a_y(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - a_z(s_{23}c_4) = -s_5 \quad (k)$$

$$a_x(-c_1s_{23}) + a_y(-s_1s_{23}) + a_z(-c_{23}) = c_5 \quad (l)$$

于是: $\theta_5 = \text{tg}^{-1} \frac{-s_5}{c_5}$ (m)

式 (m) 中的 s_5, c_5 由 (k)、(l) 两式给出。

(6) 求 θ_6

可由下式求得:

$$[T_5^0]^{-1}T_6^0 = T_6^5 \quad (n)$$

利用例 2-2 中的 $T_1^0, T_2^1 \cdots T_5^4$ 先求出 T_5^0 , 再求出 $[T_5^0]^{-1}$, 并将 T_6^0, T_6^5 一同代入式 (n), 令式 (n) 两侧的 (3, 1) 和 (1, 1) 元素相等, 得:

$$s_6 = -n_x(c_1c_{23}s_4 - s_1c_4) - n_y(s_1c_{23}s_4 + c_1c_4) + n_zs_{23}s_4 \quad (o)$$

$$c_6 = n_x[(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4)c_5 - c_1s_{23}s_5] + n_y[(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4)c_4 - s_1s_{23}s_5] - n_z(s_{23}c_4c_5 + c_{23}s_5) \quad (p)$$

上两式含有的 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$ 已由前面相应的公式求得, 故:

$$\theta_6 = \text{tg}^{-1} \frac{s_6}{c_6} \quad (q)$$

式中 s_6, c_6 由 (o)、(p) 两式求得。

至此已求出了全部的关节变量, 即求得位姿矩阵 T_6^0 的逆解。

由求得的 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ 各式中可以看出, 只有 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 三式中有 p_x, p_y, p_z , 故它们确定了末杆标架原点 O_6 的空间位置。 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ 三式中有 n_x, n_y, \dots , 所以它们确定了末杆标架的姿势 (或称方位)。由此可以得出: 当六关节操作机后三关节轴线交于一点时, 前、后三个关节具有不同的功用。前三关节连同它的杆件, 称作位置机构; 后三关节连同它的杆件, 称作姿势机构。

由该例可知, 求逆解:

(1) 方法: 等号两端的矩阵中对应元素相等;

(2) 步骤: 利用矩阵方程进行递推, 每递推一次可解一个或多个的变量公式;

(3) 技巧：利用三角方程进行置换。

(4) 问题：解题过程中有增根，故要根据操作机构形的可能性，选用合适的最终公式。

3. 关于关节角 (θ) 的多解 (多值) 问题

用代数法和几何法进行位姿逆解时，关节角的解都是多解 (多值的) 的。如用几何法，这种多值可以方便地由解图直接判定。如图 2-13，为达到目标点，操作机的上臂 (杆 2) 和下臂 (杆 3) 可有两种位形关系。对于下臂，还可由图所示的在基座右面，转到基座的左面。这样，到达目标点，就可有 4 种不同的位形。

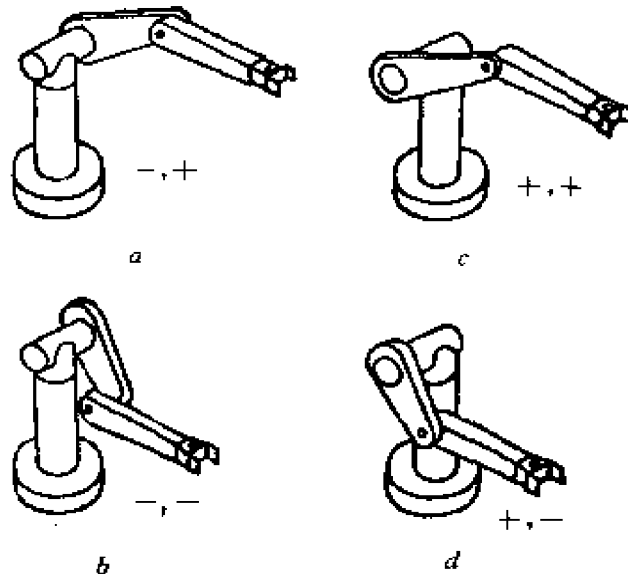


图 2-13 PUMA 型操作机的不同位形

a—臂左，肘上；b—臂右，肘上；c—臂左，肘下；d—臂右，肘下

相应于这 4 组位形可得 4 组 θ_1 和 θ_2 的组合解，即 $\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$, $\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$, $\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$, $\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$ 。再考虑到 θ_3 ，就可得到 8 组解的组合。如何在算式中区别 θ_i 的两个解 (θ_i, θ_i)，以及如何把 $\theta_1, \theta_1; \theta_2, \theta_2 \dots \theta_i, \theta_i \dots$ 进行搭配，就成了逆解和位置控制的重要问题。文献 [4] 提出了一种解决该问题的标识符号法，即根据连杆坐标系，定出一组标识符号，每一符号正、负有两个值，将它们代入到关节变

量的计算公式中，即可得出相应于不同位形的计算值。

对于下臂，由图 2-13 可知，相对基座，可有两种位形，即处于基座的右方和左方，据此即可对下臂（杆 2）给出标识符 ARM，当臂在右时，ARM 取“+”值，当臂在左时，ARM 取“-”值。

对于上臂和下臂的相对位形，可有“肘在上”（即关节 3 在上）和“肘在下”（关节 3 在下）两种位形，标识符取为 ELB。“肘在上”，ELB 取“+”值；“肘在下”，ELB 取“-”值。

这样一来，对于图 2-13 所示的 4 种情况，标识符的组合值是：

臂在右，肘在上，ARM-ELB \Rightarrow +, +;

臂在右，肘在下，ARM-ELB \Rightarrow +, -;

臂在左，肘在上，ARM-ELB \Rightarrow -, +;

臂在左，肘在下，ARM-ELB \Rightarrow -, -。

对于 θ_1 ，由臂在左或在右，可得两个解算图，如图 2-14。可以看出，图 2-14a 相当于臂右置，即 ARM \Rightarrow +, 这时， $\theta_1 = \varphi + \alpha$ ；图 2-14b 相当于臂左置，ARM \Rightarrow -, 这时， $\theta_1 = \theta'_1 = \varphi - \alpha$ 。

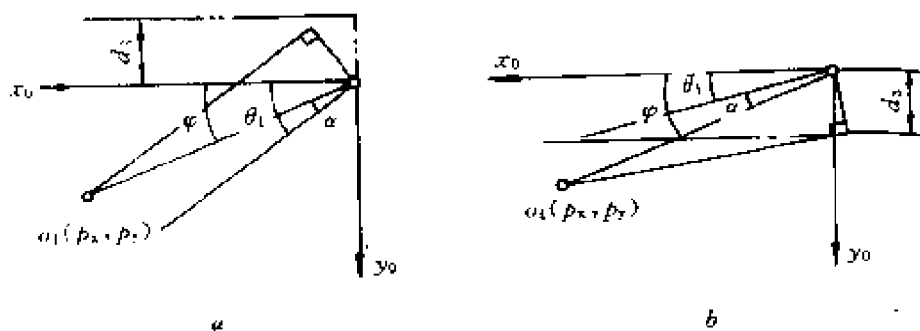


图 2-14 θ_1 的解算图

于是例 2-3 中的公式 c，可以写作：

$$\theta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{p_y}{p_x} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{ARM} \cdot d_3}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}}$$

式中 ARM——臂标识符，在右取“+”，在左取“-”；

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{p_y}{p_x} = \varphi, \quad \operatorname{tg}^{-1} \frac{d_3}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}} = \alpha$$

这样，就解决了相应于不同位形时关节角的取值问题。至于关节角间的搭配，由使用者根据工作需要和场地等情况预先作出安排。

关于这一方法更详尽的讨论，请参考文献 [4]。在该文献中，还给出了用局部投影法（即对不同关节取不同的投影方向，该方向为相应关节轴的反向）求解关节变量的几何法。

二、带有闭链的操作机

当操作机具有局部闭链机构或关节之间运动传递有诱发现象时，将不能直接使用前面所介绍的建立位姿矩阵的方法。因为这时，决定末端执行器位姿的主要杆件之间的相对转角（关节角）中，有些是被间接驱动的。有些关节运动时，另一些关节会由于结构上的原因产生附加运动。所以在求解时，必须先分析运动特点，找出直接决定末端位姿的关节角，把它们分离出来，组成等价的开链机构，然后再进行求解。有时为了控制驱动电机，还必须找出电机转角方程式。下面以 YG-1 型机器人为例，加以说明。

例 2-4 设有如图 2-15 所示的五自由度全旋转关节的机器人，试求其位姿正逆解，并求出电机转角方程式。

解：

(1) 运动分析。由图 2-15 可知，腰部旋转（即 S 轴旋转）是由 400W 的直流伺服电动机 3 通过谐波减速器 4 减速后带动回转壳 5 绕竖轴旋转的。

下臂倾动（即 L 轴旋转）是由 400W 的直流伺服电机 1 带动滚珠丝杠 12，再由丝杠带动下臂杆 10 上的凸耳 11 驱动下臂杆前后倾动。

上臂俯仰（即 U 轴旋转）是由 400W 的直流伺服电机 1 带动另一滚珠丝杠 14，再由滚珠丝杠带动平行四边形机构的主动杆摆动，借助于该四边形机构的拉杆 15 迫使上臂杆 19 以下臂杆上端

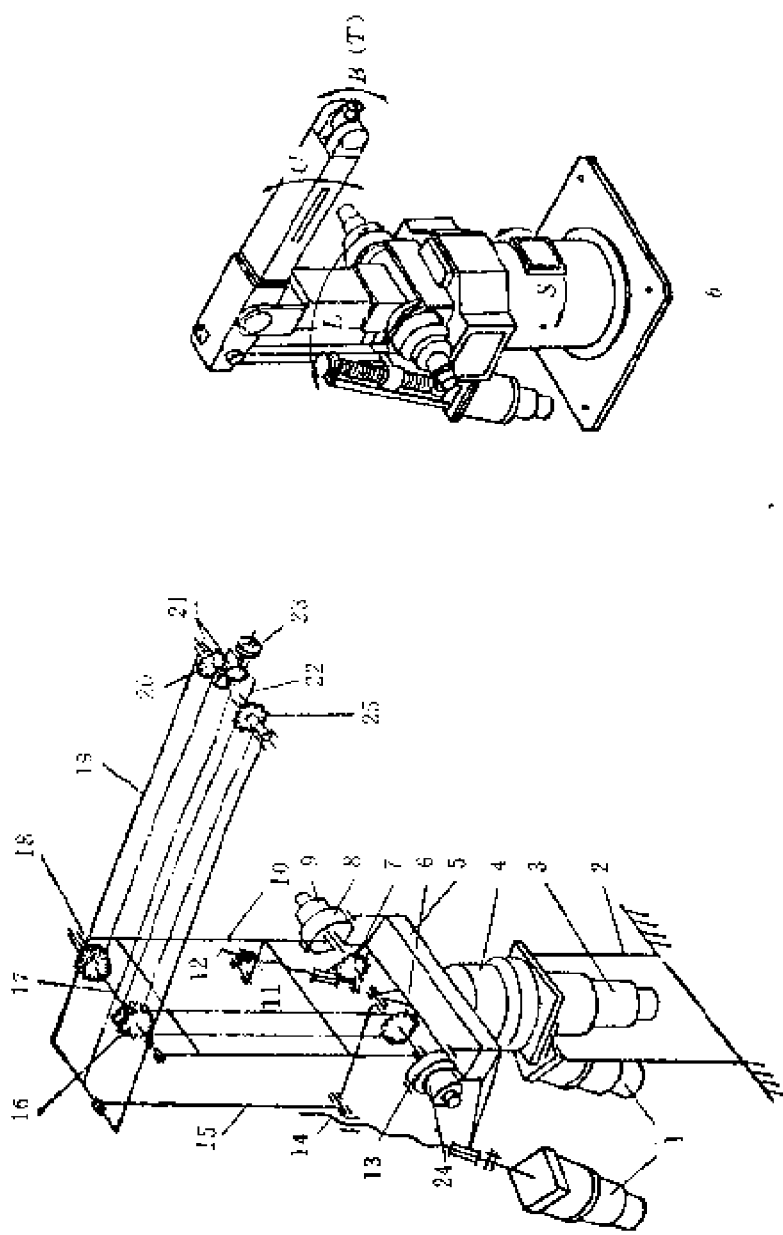


图 2-15 YG-1 型机器人操作机

a—机构简图；b—立体图

- 1—电机；2—机座；3—电机；4—谐波减速器；5—回转壳；6—链轮 I；7—链轮 I；8—谐波减速器；9—电机；10—下臂杆；11—凸耳；12—丝杠；13—谐波减速器；14—丝杠；15—拉杆；16—双联链轮 I；17—轴轴；18—双联链轮 I；19—上臂杆；20—链轮；21—锥齿轮；22—腕壳；23—手部法兰；24—电机；25—链轮

的销轴 17 为支撑作上下俯仰运动。

腕摆运动（即 B 轴旋转）是由 200W 的直流伺服电机 24，通过谐波减速器 13 带动下臂杆内的链条运动，再通过下臂杆上面销轴上的一个双联链轮 16 带动上臂杆内的链条转动，从而带动与腕壳固联在一起的链轮 25，驱使腕壳 22 上下摆动。

手部回转（即 T 轴旋转）也是使用 200W 的另一直流伺服电机 9 通过谐波减速器 8，带动下臂杆内的另一链条运动，再通过下臂杆上面销轴上的另一双联链轮 18 带动上臂杆内的另一链条，并带动腕壳内的链轮 20，该链轮与大锥齿轮 21 同轴固联，再带动小锥齿轮轴，最后带动手部固结法兰 23 旋转。

必须指出，由于使用了上述传动机构，故当下臂倾动时，不影响上臂的取向（姿态），上下臂一起运动或单独运动时不影响手部固结法兰的姿态，也就是手部姿态不变。又由于腕部采用差动轮系，故当腕摆动时，还会诱发手部回转。只有当腕部两链轮同向同转速时（即两者无相对运动时），手部才不发生诱导运动。

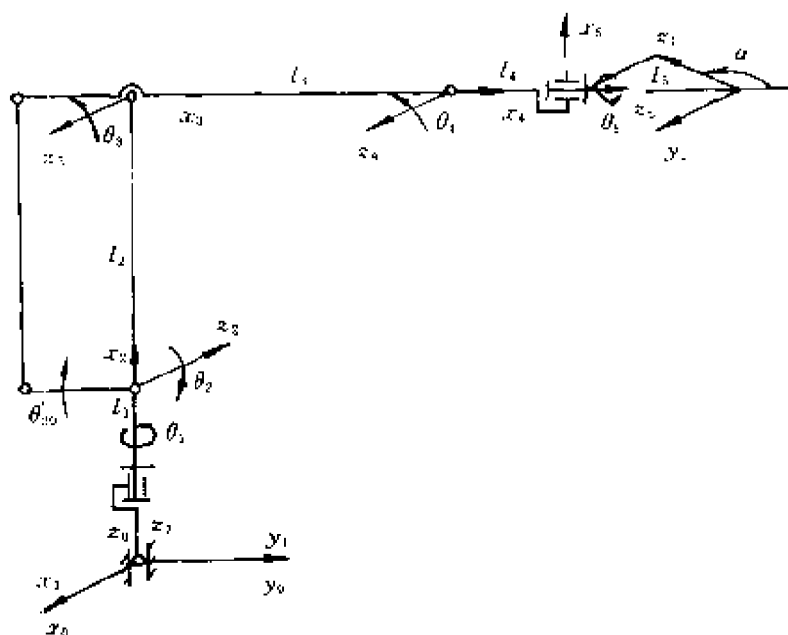


图 2-16 关节运动简图

根据上面的运动分析，可得如图 2-16 所示的关节运动简图。图中， $\theta_1 \sim \theta_5$ 为关节角； θ_2 为驱动角，其他驱动角 $\theta'_1, \theta'_3, \theta'_4, \theta'_5$ 没有画出。

(2) 确定关节角与驱动角之间关系。图 2-17 表示该操作机的 3 个位形。图 a 表示零位 ($\theta_1 \sim \theta_5 = 0$) 位形；图 b 表示当 $\theta_2 \neq 0$ 时的某个中间位形；图 c 表示 $\theta_2 \neq 0, \theta_3 \neq 0$ 时的另一个中间位形。后两位形的实现是由平行四杆机构和等速比双链条传动所决定的。我们约定，用 θ_i 表示关节角， θ'_i 表示驱动角。由图可以看出， θ_3 决定于 θ_2 和 θ'_3 ； θ_4 决定于 θ_3 和 θ'_4 。由于 T、B 之间是差动轮系，所

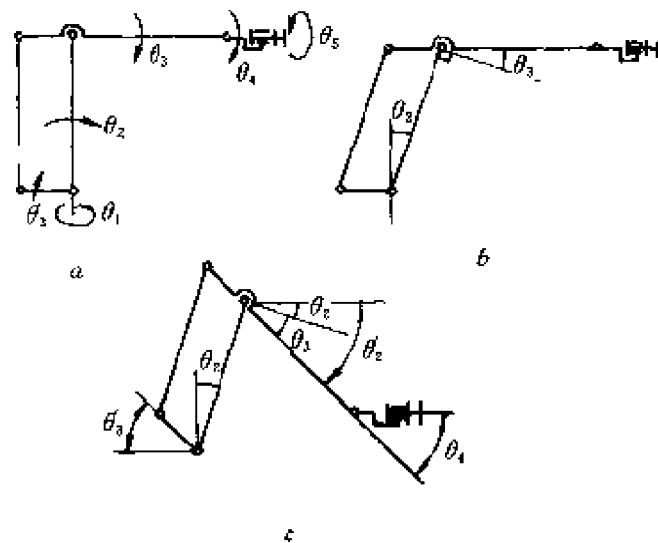


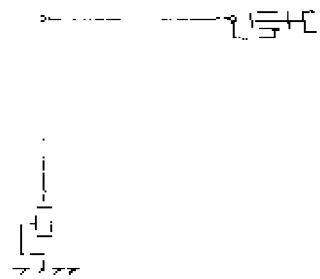
图 2-17 三位位形图

a—零位；b—中位 (1)；c—中位 (2)

以 θ_5 又决定于 θ_4 和 θ'_5 。于是得关节角与驱动角的关系如下：

$$\begin{cases} \theta_5 = \theta_5 + i\theta'_5 \\ \theta_4 = \theta_4 - \theta'_4 \\ \theta_3 = \theta_3 - \theta'_3 \\ \theta_2 = \theta_2 \\ \theta_1 = \theta_1 \end{cases}$$

(3) 求等效开链机构及其正逆解。由该操作机的运动分析可知，末端执行器的位姿完全由主要杆件之间的关节角 $\theta_1 \sim \theta_5$ 所决定，所以可画出它的等价开链机构（如图 2-18 所示），并求其位姿正逆解。



a 求位姿正解

设坐标系且求两杆间的位姿矩阵。图 2-18 等效开链机构共设 $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 (=S_5)$ 六个坐标系，见图 (2-16)，由于所设的 x_i 轴与关节轴线重合，利用公式 (2-18) (参数表略) 即得：

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{T}_1^0 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{T}_2^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{T}_3^2 &= \begin{bmatrix} s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_2 \\ c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{T}_4^3 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & l_3 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} (a)$$

$$\begin{aligned}
 T_5^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & l_4 \\ c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 T_e^5 &= \begin{bmatrix} ca & 0 & sa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sa & 0 & ca & l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{b}$$

求末杆执行器的位姿矩阵 T_e^0 。

$$T_e^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_e^5 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{c}$$

式中

$$\begin{aligned}
 n_x &= [s\theta_5 c\theta_1 + s\theta_1 c\theta_5 s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)]ca + s\theta_1 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)sa \\
 n_y &= [s\theta_5 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_5 s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)]ca - c\theta_1 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)sa \\
 n_z &= c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)c\theta_5 ca - s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)sa \\
 o_x &= c\theta_1 c\theta_5 - s\theta_1 s\theta_5 s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) \\
 o_y &= s\theta_1 c\theta_5 + c\theta_1 s\theta_5 s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) \\
 o_z &= -s\theta_5 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) \\
 a_x &= [s\theta_5 c\theta_1 + s\theta_1 c\theta_5 s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)]sa - s\theta_1 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)ca \\
 a_y &= [s\theta_5 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_5 s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)]sa + c\theta_1 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)ca \\
 a_z &= c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)c\theta_5 sa + s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)ca \\
 p_x &= -[l_4 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + l_3 c(\theta_3 - \theta_2) + l_2 s\theta_2]s\theta_1 - l_5 s\theta_1 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) \\
 p_y &= [l_4 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + l_3 c(\theta_3 - \theta_2) + l_2 s\theta_2]c\theta_1 + l_5 c\theta_1 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) \\
 p_z &= (l_4 + l_5)s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + l_3 s(\theta_3 - \theta_2) + l_2 c\theta_2 + l_1
 \end{aligned}$$

b 求位姿逆解

由末端执行器的位姿矩阵 (c) 可得:

$$T_1^0 = (T_e^0)^{-1} T_e^0 \tag{d}$$

由于

$$(T_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即:

$$T_e^1 = (T_1^0)^{-1}T_e^0 = \begin{bmatrix} n_x c\theta_1 + n_y s\theta_1 & o_x c\theta_1 + o_y s\theta_1 \\ -n_x s\theta_1 + n_y c\theta_1 & -o_x s\theta_1 + o_y c\theta_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_x c\theta_1 + a_y s\theta_1 & p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 \\ -a_x s\theta_1 + a_y c\theta_1 & -p_x s\theta_1 + p_y c\theta_1 \\ a_z & p_z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

式中 $n_x, n_y, n_z, \dots, p_x, p_y, p_z$ 同式 (c)。
令

$$T_e^1 = T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_e^5$$

$$= \begin{bmatrix} n_x' & o_x' & a_x' & p_x' \\ n_y' & o_y' & a_y' & p_y' \\ n_z' & o_z' & a_z' & p_z' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (f)$$

式中 $n_x' = s\theta_5 ca$

$$n_y' = -sac(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) - cac\theta_5 s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$$

$$n_z' = -sas(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + cac\theta_5 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$$

$$o_x' = c\theta_5$$

$$o_y' = s\theta_5 s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$$

$$o_z' = -s\theta_5 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$$

$$a_x' = s\theta_5 sa$$

$$a_y' = cac(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) - c\theta_5 sas(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$$

$$a_x' = ca_s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + c\theta_5 sa_c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$$

$$p_x' = 0$$

$$p_y' = (l_4 + l_5)c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + l_3c(\theta_3 - \theta_2) + l_2s\theta_2$$

$$p_z' = (l_4 + l_5)s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + l_3s(\theta_3 - \theta_2) + l_2c\theta_2 + l_1$$

求 θ_1 :

令式 (e) 和 (f) 中 (1, 4) 元素相等得:

$$p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 = 0$$

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1}(-p_x/p_y)$$

求 θ_5 :

令式 (e) 和 (f) 中 (1, 3) 元素对应相等得:

$$a_x c\theta_1 + a_y s\theta_1 = s\theta_5 sa$$

$$s\theta_5 = \frac{a_x c\theta_1 + a_y s\theta_1}{sa}$$

$$\theta_{51} = \text{tg}^{-1}(s\theta_1 / \sqrt{1 - s^2\theta_1})$$

$$\theta_{52} = \text{tg}^{-1}(-s\theta_1 / \sqrt{1 - s^2\theta_1})$$

求 θ_2 :

令式 (e) 和 (f) 中 (2, 3), (3, 3) 元素对应相等得:

$$\begin{cases} ca_c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) - c\theta_5 sa_s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) = -s\theta_1 a_x + c\theta_1 a_y \\ ca_s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + c\theta_5 sac(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) = a_x \end{cases}$$

由上二式解得:

当 $a \neq 0$ 时

$$\begin{cases} c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) = \frac{a_x sac\theta_5 + (c\theta_1 a_y - s\theta_1 a_x)ca}{c^2 a + s^2 ac^2 \theta_5} \\ s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) = \frac{a_x - sac\theta_5 c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)}{ca} \end{cases}$$

当 $a = 0$ 时

$$\begin{cases} c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) = c\theta_1 a_y - s\theta_1 a_x \\ s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) = a_x \end{cases}$$

令 (e) 和 (f) 中 (1, 4), (3, 4) 元素对应相等得:

$$\begin{cases} [- (l_4 + l_5) c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + l_3 c(\theta_3 - \theta_2) + l_2 s \theta_2] s \theta_1 = p_x \\ (l_4 + l_5) s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) + l_3 s(\theta_3 - \theta_2) + l_2 c \theta_2 + l_1 = p_y \end{cases}$$

由上两式解得：

$$\begin{cases} A - l_2 s \theta_2 = l_3 c(\theta_3 - \theta_2) \\ B - l_2 c \theta_2 = l_3 s(\theta_3 - \theta_2) \end{cases} \quad (g)$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad A &= \frac{p_x}{s \theta_1} - (l_4 + l_5) c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) \\ B &= p_y - (l_4 + l_5) s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) - l_1 \end{aligned}$$

$$\text{解得} \quad A s \theta_2 + B c \theta_2 = C$$

$$C = \frac{(A^2 + B^2 + l_2^2 - l_3^2)}{2l_2}$$

$$\text{则} \quad \theta_{21} = \text{tg}^{-1} (d / \sqrt{1-d^2}) - \text{tg}^{-1} (B/A)$$

$$\theta_{22} = \text{tg}^{-1} (-d / \sqrt{1-d^2}) - \text{tg}^{-1} (B/A)$$

$$\text{其中} \quad d = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

由于解得的 θ_2 有两个，故产生两组 $c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$ 和 $s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$ 的值，从而得到两组 A 、 B 值，所以最后得到的 θ_2 实际有 4 个解。

求 θ_3 、 θ_4 。

由式 (g) 解得：

$$\theta_3 = \text{tg}^{-1} [(B - l_2 c \theta_2) / (A - l_3 s \theta_2)] + \theta_2$$

由式 $c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$ 及 $s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)$ 代表的函数可得

$$\theta_4 = \text{tg}^{-1} [s(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2) / c(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2)] - \theta_3 + \theta_2$$

同样地， θ_3 、 θ_4 也有 4 组解。

至此，我们便得到了关节角 $\theta_1 \sim \theta_5$ 的全部解析解。

(4) 求驱动角的正逆解。将位姿正、逆解公式中的关节角 θ_i 用 θ_i' 按如下方程代入，即得关于驱动角的正、逆解。

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1 \\ \theta_2 = \theta_2 \\ \theta_3 = \theta_3 + \theta_2 \\ \theta_4 = \theta_4 + \theta_3 \\ \theta_5 = \theta_5 - i\theta_4 \end{cases}$$

(5) 求电机角的正、逆解。在求得驱动角 (θ_i) 的正、逆解之后, 还需进一步解出电机转角 (用 φ 表示) 的正逆解, 才能进行运动控制。当电机通过减速器连接到关节轴上时, φ 和 θ_i 之间为简单的速比关系; 而当电机与关节轴之间通过丝杠传动时, 它们之间的关系就比较复杂, 现讨论如下^[15]。

a. θ_1 与 φ_1 的变换。由于电机 1 通过减速器直接连到关节轴 1 上, 所以这一变换是简单的线性变换。

$$\theta_1 = k_1 \varphi_1 + \theta_{i0}$$

式中 k_1 ——比例系数; k_1 可看作两转角之比;

θ_{i0} ——驱动转角预置值。

b. θ_2 与 φ_2 的变换。如图 2-19 所示。DC 为丝杠长, 它由电机控制。

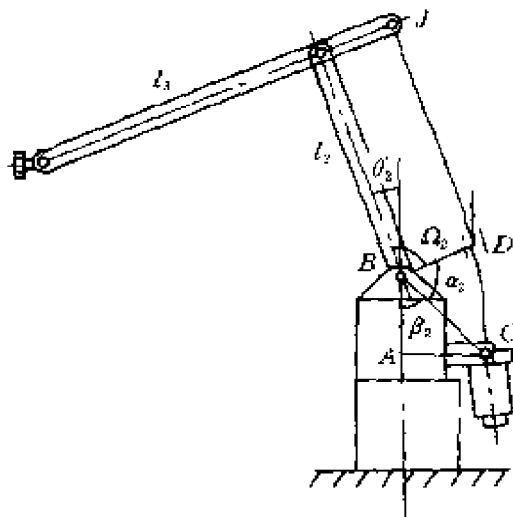


图 2-19 θ_2 归算图

$$DC = k_2 \varphi_2 + \theta_{20}$$

式中 k_2 ——可看作丝杠的导程。

$$\alpha_2 = \cos^{-1} \frac{DC^2 - BC^2 - BD^2}{-2BC \cdot BD}$$

$$\beta_2 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{AC}{AB} \right)$$

$$\theta_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \Omega_2 - 180^\circ$$

$$= \text{tg}^{-1} \left(\frac{AC}{AB} \right) + \cos^{-1} \left(\frac{(k_2 \varphi_2 + \theta_{20})^2 - BC^2 - BD^2}{-2BC \cdot BD} \right) + \Omega_2 - 180^\circ$$

c. θ_3 与 φ_3 的变换。如图 2-20 所示, HG 为丝杠长, 由电机控制。

$$HG = k_3 \varphi_3 + \theta_{30}$$

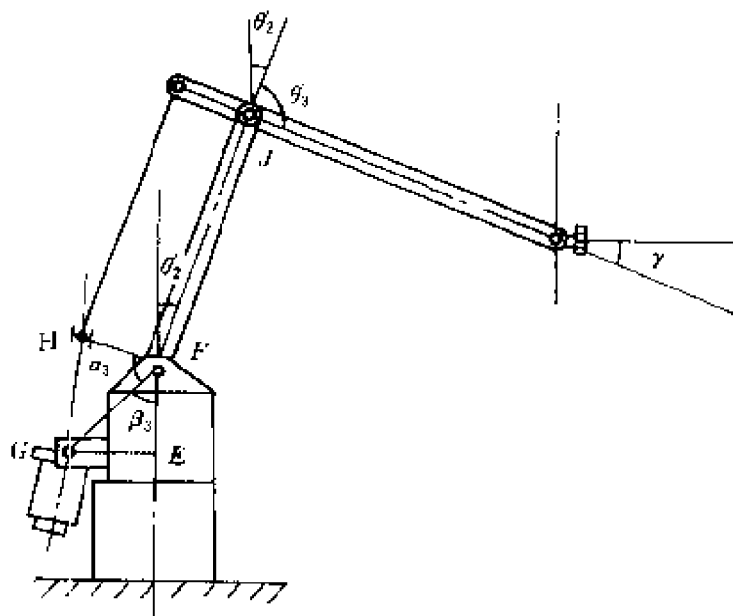


图 2-20 θ_3 , θ_4 归算图

式中 k_3 ——可看作丝杠的导程。

$$\alpha_3 = \cos^{-1} \left(\frac{HG^2 - GF^2 - HF^2}{-2GF \cdot HF} \right)$$

$$\beta_3 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{GE}{FE} \right)$$

$$\theta_3 = \alpha_3 + \beta_3 - \theta_2$$

$$= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{GE}{FE} \right) + \cos^{-1} \left(\frac{(k_3\psi_3 + \theta_{30})^2 - GF^2 - HF^2}{-2GF \cdot HF} \right) - \theta_2$$

d. θ_4 与 ψ_4 的变换。如图 2-20 所示，根据角度之间的关系，可推导出：

$$r = \theta_2 + \theta_3 - 90^\circ$$

$$\theta_4 = -k_4\psi_4 + \theta_{40} + \theta_2 + \theta_3 - 90^\circ$$

e. θ_5 与 ψ_5 的变换。电机 5 通过减速器直接连到关节轴 5 上。

$$\theta_5 = -k_5\psi_5 + \theta_{50}$$

由以上诸式即可推导出计算 ψ_i 的方程式：

$$\psi_1 = \frac{1}{k_1} (\theta_1 - \theta_{10})$$

$$\psi_2 = \frac{1}{k_2} \left(\sqrt{-2BC \cdot BD \cos(\theta_2 - \Omega_2 - \operatorname{tg}^{-1} \frac{AC}{AB} + 180^\circ) + BC^2 + BD^2} - \theta_{20} \right)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{k_3} \left(\sqrt{-2GF \cdot HF \cos(\theta_2 + \theta_3 - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{GE}{FG} \right) + GF^2 + HF^2 - \theta_{30})} \right)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{k_4} (-90^\circ + \theta_{40} + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4)$$

$$\psi_5 = \frac{1}{k_5} (\theta_{50} - \theta_5)$$

上式即为关于电机转角的逆解方程。正解方程不赘述。

第五节 工作空间和末杆位姿图

一、工作空间

工作空间在机器人学中是一个重要的研究领域^[1]。但在实用中，我们可以简化这一问题，把工作空间看作是机器人操作机正常运行时，手腕参考点 P_w （如定位机构的轴线正交，取交点为参考点）在空间的活动范围，或者说该点可达位置在空间所占有的体积，记作 $W(P_w)$ ，在特性表上用投影图表示（如图 1-15 所

示)。

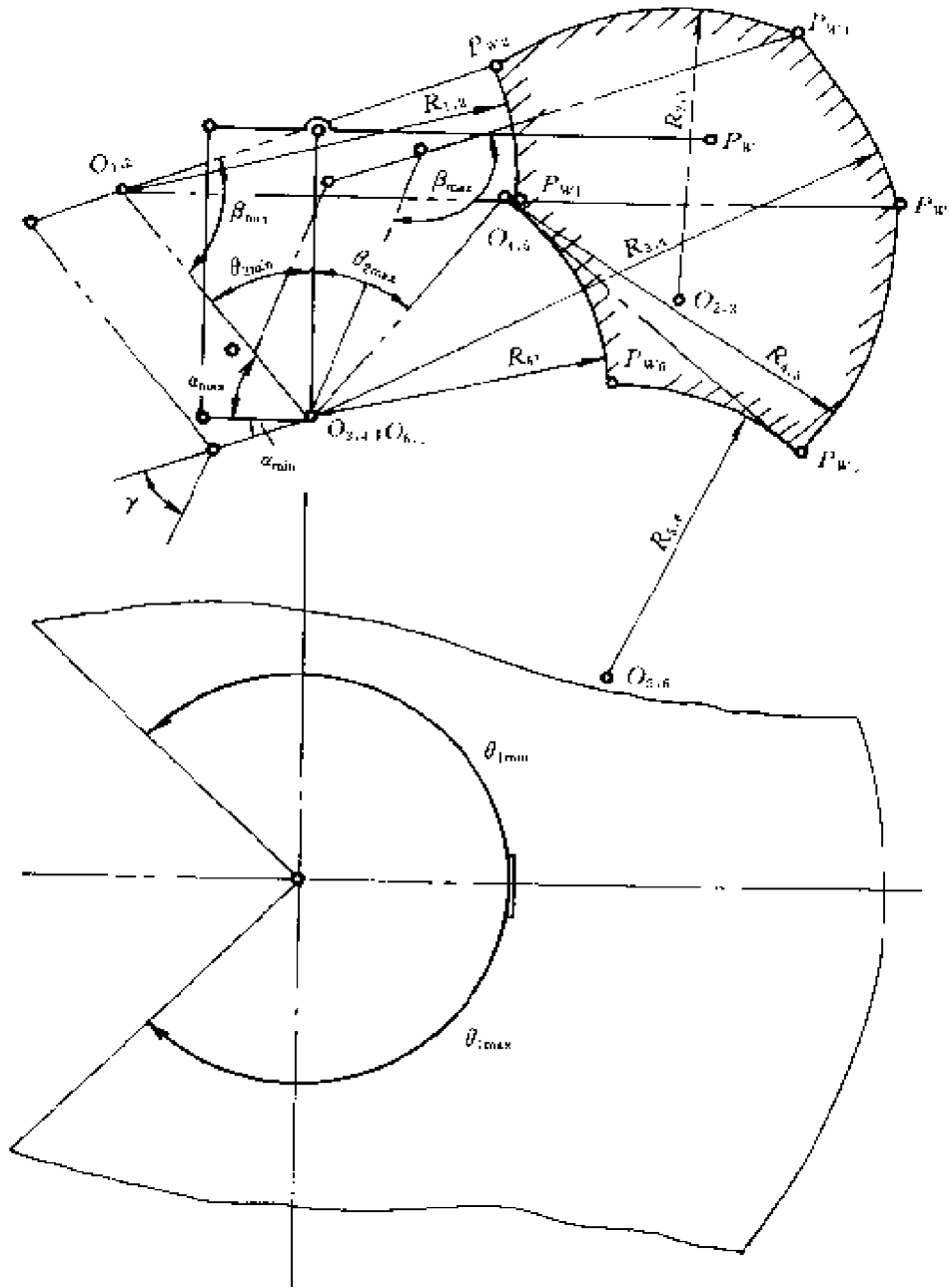


图 2-21 工作空间

机器人国家标准规定了工作空间的作图方法，现以 YG-1 为例介绍具体作图方法。

1. 结构限制分析

杆 2 的结构限制是 $-40^\circ \leq \theta_2 \leq 40^\circ$ 。

杆 3 的位置受 β 角和 α 角双重限制: $50^\circ \leq \beta \leq 130^\circ$, $-20^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$ 。

由杆 2 和杆 3 决定的平面绕 z 轴旋转的结构限制是 $-135^\circ \leq \theta_1 \leq 135^\circ$ 。

2. 画工作空间 W (P_w) 的主剖面 (XOZ 剖面)

首先确定初始点, 取 $\theta_2 = -40^\circ$ 、 $\theta_3 = 0^\circ$ (即 $\beta = 50^\circ$) 时手腕点 P_{w1} 为初始点。然后分段作图:

(1) 使 $\theta_2 = -40^\circ$ 不变, 将杆 3 向上, 当 $\alpha = -20^\circ$ 时得点 P_{w2} , 其间圆弧 $\widehat{P_{w1}P_{w2}}$ 的圆心为 $O_{1,2}$;

(2) 使 $\alpha = -20^\circ$ 不变, 将杆 2 前摆到 $\beta = 130^\circ$ 得 P_{w3} , P_w 的轨迹是以 $O_{2,3}$ 为中心的圆弧 $\widehat{P_{w2}P_{w3}}$;

(3) 使 $\beta = 130^\circ$ 不变, 即杆 2 与杆 3 刚性固定, 同时向前转动到 $\theta_2 = 40^\circ$, 得 P_{w4} , P_w 的轨迹是以 $O_{3,4}$ 为中心的圆弧 $\widehat{P_{w3}P_{w4}}$;

(4) 使 $\theta_2 = 40^\circ$ 不变, 杆 3 下转到 $\alpha = 40^\circ$ 得 P_{w5} , P_w 的轨迹是以 $O_{4,5}$ 为心的圆弧 $\widehat{P_{w4}P_{w5}}$;

(5) 使 $\alpha = 40^\circ$ 不变, 杆 2 后摆, 杆 3 必然下摆使 $\theta_2 = 0$ (与 z 重合), $\beta = 40^\circ$, 得 P_{w6} , P_w 的轨迹是以 $O_{5,6}$ 为心的圆弧 $\widehat{P_{w5}P_{w6}}$;

(6) 使 $\beta = 40^\circ$ 不变, 杆 2 后摆到 $\theta_2 = -40^\circ$ 得 P_{w1} , P_w 的轨迹是以 $O_{6,1}$ 为心的圆弧 $\widehat{P_{w6}P_{w1}}$;

可以看出, 这是一种固定一个限制角的作图方法。图形作出后, 还可根据作图过程写出各区段的曲线方程。

3. 画 W (P_w) 的俯视 (在 XOY 面上) 外形图

该图是主剖面图形绕 z 轴由 $\theta_1 = -135^\circ$ 转到 $\theta_1 = 135^\circ$ 时所形成的局部环形旋转体的外形。

二、灵活性、灵活度和末杆位姿图

灵活性是指操作机末端执行器的参考点 P 。(通常不是腕点) 在工作空间内某一位置时,末端执行器可能取得的姿势的多少。显然,末端执行器可取得的姿势越多,操作机的灵活性越好。

灵活度是灵活性的定量表示。目前最通用的灵活度表示方法是立体角法^[21]和主截面灵活度组合(详见第五章第一节)。但这两种表示法只是在灵活空间(即末端执行器工作点 P 所形成的最小工作空间)才有恒值。所以,为了消除末端执行器长度的影响,只研究操作机的固有几何性质。我们

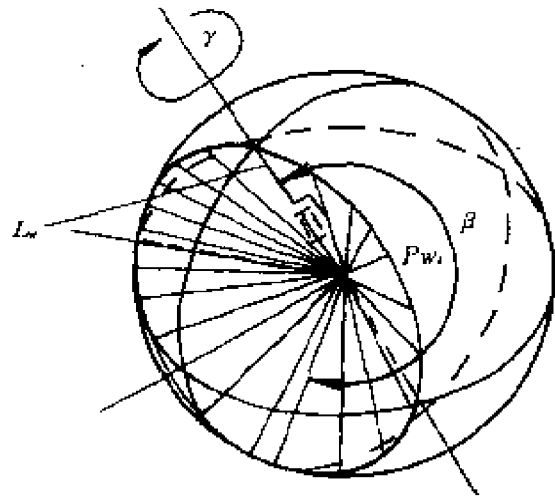


图 2-22 末杆位姿球

认为,采用末杆位姿图来表示灵活度更为有效,而且直观形象。绝大多数的商用机器人的末杆都能绕自身的轴线 z_n 旋转 360° 或 360° 以上,所以,灵活性完全决定于末杆在工作空间 $W(P_w)$ 中任一点的姿势取向的多少。姿势取向越多,则灵活性越高,灵活度越大。若将末杆的基准点取作 P_w (腕点),则在任一个 P_w 处,末杆 L_n 的集合都形成部分球体或整个球体。该球体的半径是 L_n (如图 2-22),称作末杆姿态球。可以看出,该集合形成的部分球体越接近整球体,末杆就越灵活。如果用两个互相垂直的过球心的剖面将姿态球剖开,可得两个扇面。扇面的扇角大小,就表示了末杆的灵活性能。

末杆位姿图就是上述两扇面连同 $W(P_w)$ 的两投影图(如图 2-23)。该图用末杆基准点(通常是腕点 P_w)为参考点的工作空间表示末杆在空间的位置;用末杆在工作空间各关键点上的两垂直的姿态球剖面表示末杆的灵活性能。图 2-23 是五自由度操作机

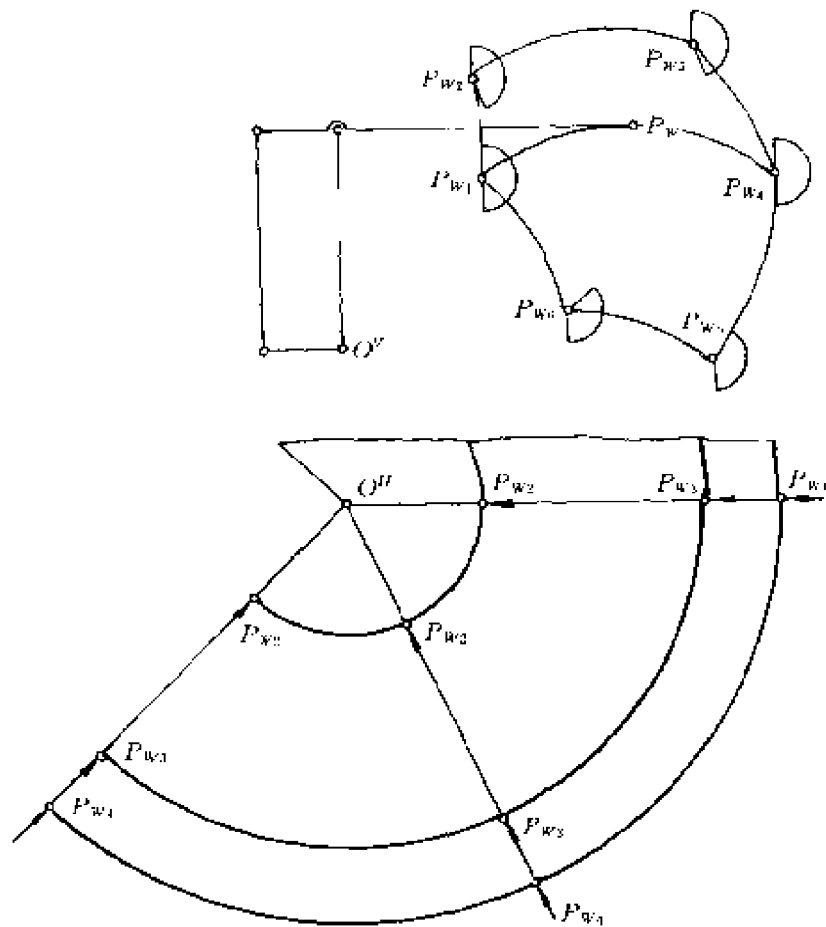


图 2-23 YG-1 的末杆位姿图

(姿态机构两自由度)的末杆位姿图。它的主视图(正面 XOZ 投影)是基准点 P_w 的工作空间主截面,再在 6 个关键点(转折点上)画出末杆姿态球的主截面扇形。在俯视图(只画了一半)中,相应的姿态球水平截面只是一条线,其投影均为过 O'' 的射线。可以看出,由于该操作机的姿态机构只有两自由度,故末杆在任一点的姿态集是一扇形而不是部分球体,所以该操作机的灵活性很差。由图还可看出,点 4 和点 1 具有相同的最大的灵活性;点 6 由于扇形角最小,所以灵活性也最小。就整个工作空间来说,末杆在正截面上过 P_{w1} 、 P_w 、 P_{w4} 的圆弧所形成的曲面上最灵活。

非常明显,末杆位姿图虽比工作空间图只多了一些“扇形”和

线段，但却在操作机几何方面给出了更多更重要的信息。

末杆位姿图可用画法几何的方法求得，其基本思路是：首先在与腕坐标系（通常是 S_4 ）平行的投影体系中作出末杆姿态体的投影图；然后再用投影变换的方法求出末杆姿态体在末杆位姿图中的投影；最后再用求截交线的方法即可求得末杆位姿图中的“扇形”投影。现用实例说明如下。

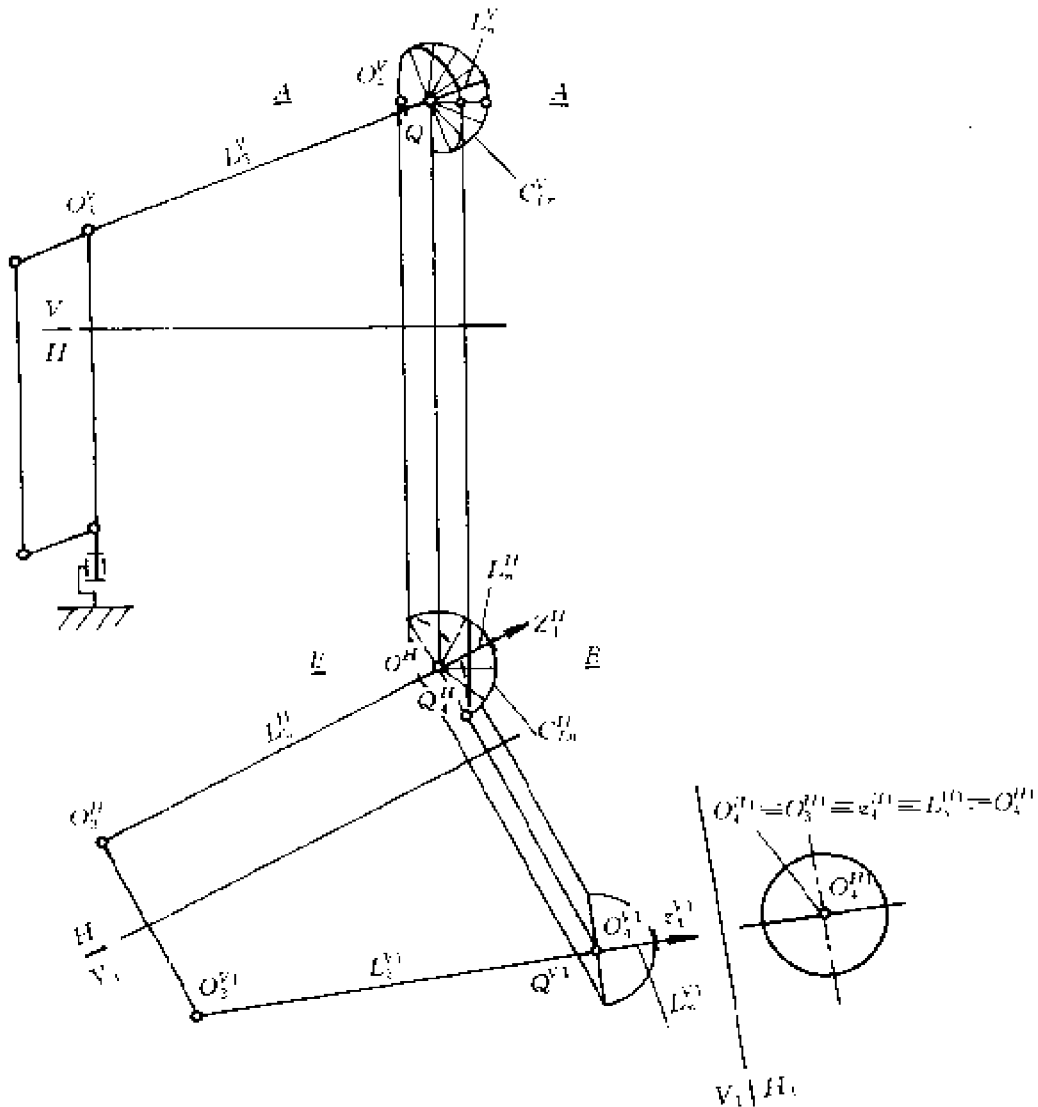


图 2-24 确定末杆位姿图的几何法

例 2-5 求图 2-24 主视图中粗线所示 6 自由度操作机在工作

空间中任一点 Q 的末杆位姿图。已知后三关节（姿态机构）轴线正交于 $O_4 \equiv O_5 \equiv O_6$ ， $\theta_4 = 0^\circ \sim 360^\circ$ ， $\theta_5 = -90^\circ \sim 90^\circ$ ， $\theta_6 = 360^\circ$ 。

解：

(1) 画出操作机当腕点 P_w 在 Q 位置 ($Q \equiv O_4$) 时的位形图，根据结构特点所求位形简图（如图 2-24 中的粗实线所示）。

(2) 利用换面法（两次）求出与 S_4 的坐标面平行的两投影体系 (V_1-H_1) 中的两投影。图 2-24 中， z_4 在 V_1 面投影为平行线 ($z_4^{V_1} \perp \frac{V_1}{H_1}$)；在 H_1 中， z_4 投影积聚成点 z_4^H 。由于 $\theta_4 = 0^\circ \sim 360^\circ$ ， $\theta_5 = -90^\circ \sim 90^\circ$ ，所以末杆位姿体为半球体，两投影即 $L_n^{V_1}$ ， $L_n^{H_1}$ 。

(3) 将该姿态体的投影反回到原来的主 (V) 俯 ($1-1$) 两视图中，得以 P_w^V ， P_w^H 为心的半球的投影 L_n^V ， L_n^H 。

(4) 求出姿态体的沿垂截面的主视图 $C_{L_n}^V$ 和水平截面的水平投影 $D_{L_n}^H$ 。

至此我们求出了点 Q 处的末杆位姿图。用相同的方法可求得工作空间关键点的末杆位姿图，最后连同工作空间的边界线一起得出末杆位姿图。当手腕具有不同结构时，末杆位姿图的求解详见文献 [22]。

第三章 速度分析和力分析

第一节 速度、加速度分析及雅可比矩阵

一、杆件之间的速度分析

在操作机中，设两相邻杆件 L_{i-1} 和 L_i ，以旋转关节相联接

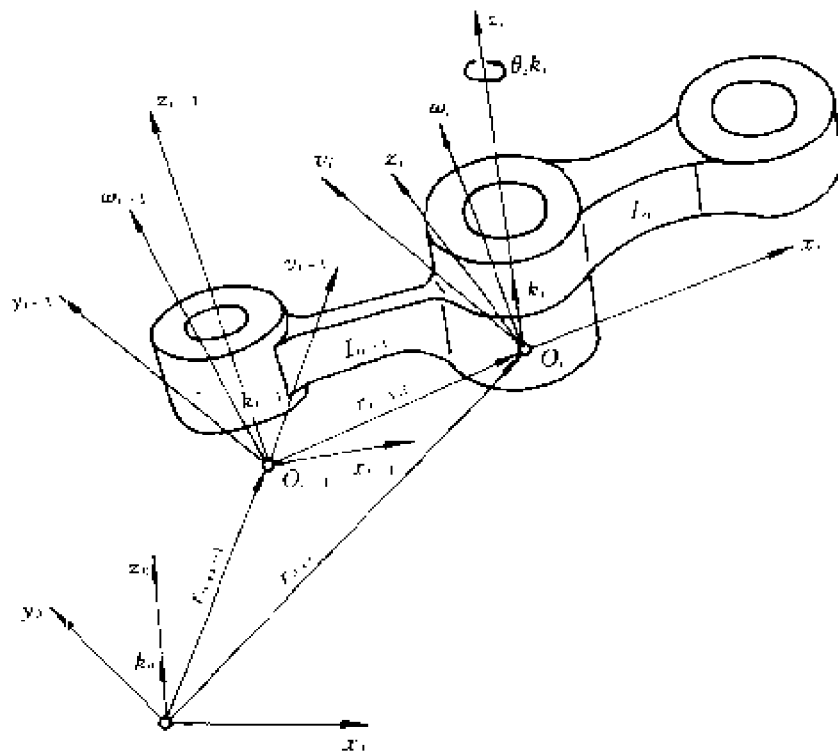


图 3-1 连杆间的速度关系

(图 3-1), 已知杆 L_{i-1} 以速度 v_{i-1} 移动, 并以 ω_{i-1} 角速度转动, 而杆

L_i 在关节驱动力矩的作用下绕关节轴 z_i 相对于 L_{i-1} 以角速度 $\dot{\theta}_i k_i$ 旋转, 于是对杆 L_i 来说, 固联标架 S_i 原点相对于基础坐标系的线速度 v_i 和杆 L_i 的角速度 ω_i 分别是:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i k_i \quad (3-1)$$

$$v_i = v_{i-1} + \omega_{i-1} \times r_{i-1,i} \quad (3-2)$$

操作机通常可以认为是一个多杆系统, 为便于计算, 还可以把某杆的速度和角速度表示在该杆自身的坐标系中。仍用以前用过的上角标记号, 则:

$$\omega_i^i = \omega_{i-1}^i + \dot{\theta}_i k_i^i = R_{i-1}^i \omega_{i-1}^{i-1} + \dot{\theta}_i k_i^i \quad (3-3)$$

$$v_i^i = R_{i-1}^i (v_{i-1}^{i-1} + \omega_{i-1}^{i-1} \times r_{i-1,i}^{i-1}) \quad (3-4)$$

如果关节 J_i 是移动关节, 则杆 L_i 相对于 L_{i-1} 不是转动, 而是沿 z_i 以速率 d_i 移动, 这时:

$$\omega_i = \omega_{i-1} \quad (3-5)$$

$$v_i = v_{i-1} + d_i k_i \quad (3-6)$$

或

$$\omega_i^i = R_{i-1}^i \omega_{i-1}^{i-1} \quad (3-7)$$

$$v_i^i = R_{i-1}^i v_{i-1}^{i-1} + d_i k_i^i \quad (3-8)$$

为了方便, 今后可用 r_i 代替 $r_{i-1,i}$, 即由 O_{i-1} 到 O_i 的位置向量。

例 3-1 求如图 3-2 所示 2R 操作机中 S_3 的角速度和速度, 并把它们表示在 S_0 中。结构尺寸和关节转角均表示在图上。

解:

(1) 设坐标系, 求旋转变换矩阵 R 。

坐标系的设立如图 3-2 所示, 所有 z 轴均指向纸外。由图可以很方便的求出:

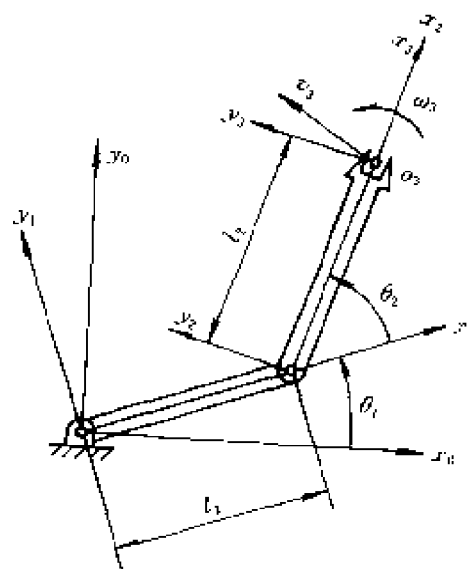


图 3-2 两杆操作机

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_3^2 = [l] \quad (a)$$

式中 $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$, 下同。

(2) 求各杆的速度和角速度。

1) 由于 S_0 为固定坐标系, 故

$$\boldsymbol{\omega}_0^0 = 0, \quad \mathbf{v}_0^0 = 0$$

2) 对于杆 1, $i = 1, \mathbf{R}_0^1 = [\mathbf{R}_1^0]^T$

$$\boldsymbol{\omega}_1^1 = \mathbf{R}_0^1 \boldsymbol{\omega}_0^0 + \dot{\theta}_1 \mathbf{k}_1^1 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1]^T \quad (b)$$

$$\mathbf{v}_1^1 = \mathbf{R}_0^1 [\mathbf{v}_0^0 + \boldsymbol{\omega}_0^0 \times \mathbf{r}_0^0] = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (c)$$

3) 对于杆 2, $i = 2, \mathbf{R}_1^2 = [\mathbf{R}_2^1]^T$

$$\boldsymbol{\omega}_2^2 = \mathbf{R}_1^2(\boldsymbol{\omega}_1^1) + \dot{\theta}_2 \mathbf{k}_2^2$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^T \quad (d)$$

$\mathbf{v}_2^2 = \mathbf{R}_1^2(\mathbf{v}_1^1 + \boldsymbol{\omega}_1^1 \times \mathbf{r}_1^1)$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 l_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & s_2 & \dot{\theta}_1 \\ l_1 & c_2 & \dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (e) \end{aligned}$$

4) 对于标架 $S_3, i = 3, \mathbf{R}_2^3 = [\mathbf{R}_3^2]^{-1} = [l]$

$$\boldsymbol{\omega}_3^3 = \mathbf{R}_2^3 \boldsymbol{\omega}_2^2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{k}_3^3 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^T \quad (f)$$

$$\mathbf{v}_3^3 = \mathbf{R}_2^3(\mathbf{v}_2^2 + \boldsymbol{\omega}_2^2 \times \mathbf{r}_2^2)$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (g)$$

(3) 求表示在 S_0 的 ω_3, v_3

$$\omega_3^0 = R_1^0 R_2^1 R_3^2 \omega_3^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (h)$$

$$v_3^0 = R_1^0 R_2^1 R_3^2 v_3^3 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$R_3^0 = R_1^0 R_2^1 R_3^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}$$

二、雅可比矩阵

由例 3-1 知两杆平面操作机的 ω_3^0 和 v_3^0 由式 (h) 和 (i) 表示，当 v_3^0 和 ω_3^0 用 S_0 中的分量表示时有：

$$\begin{aligned} v_3^0 &= [v_{3x}^0 \quad v_{3y}^0 \quad v_{3z}^0]^T \\ \omega_3^0 &= [\omega_{3x}^0 \quad \omega_{3y}^0 \quad \omega_{3z}^0]^T \end{aligned}$$

当我们不特别注意序号而只关心 S_0 是固定坐标系时，上角标“0”可以略去。

这样把例 3-1 中 (h) (i) 两式可以写成如下的形式：

$$\begin{bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \\ \omega_{3x} \\ \omega_{3y} \\ \omega_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

或写成：

$$\begin{bmatrix} v_3^0 \\ \omega_3^0 \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

由上式可以看出， S_3 在直角坐标系 S_0 中的速度与关节变量速率之间借助于某一矩阵联系起来。下面将会看到，该矩阵的系数是由偏数组成的，所以我们把这一矩阵称做操作机的雅可比矩阵，并记作 $[J]$ ，或简记为 J 。它是操作机机构学研究中非常重要的矩阵。下面我们讨论一般情况。

设操作机具有 n 个连杆， n 个关节变量 q 。这些变量可以是旋转变量 θ ，也可以是移动变量 d ，称广义坐标。因操作机是定常的（非时变的）完整系统，所以末端执行器的标架 S_e 的原点线速度和转动角速度，总可以在基础坐标系 S_0 中表示为：

$$v_e = v_{e1}\dot{q}_1 + v_{e2}\dot{q}_2 + \cdots v_{er}\dot{q}_r + \cdots v_{en}\dot{q}_n \quad (3-9)$$

$$\omega_e = \omega_{e1}\dot{q}_1 + \omega_{e2}\dot{q}_2 + \cdots \omega_{er}\dot{q}_r + \cdots \omega_{en}\dot{q}_n \quad (3-10)$$

式中 \dot{q}_r ——广义速率（既可是角速率也可是线速率）；

v_{er} ——相对于 \dot{q}_r 的偏速度；

ω_{er} ——相对于 \dot{q}_r 的偏角速度。

这样一来，对于一般的六杆六关节的操作机，可得到如下的一般方程式：

$$\begin{bmatrix} v_{ex} \\ v_{ey} \\ v_{ez} \\ \omega_{ex} \\ \omega_{ey} \\ \omega_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

简记作：

$$\dot{X} = J\dot{q}$$

式中 \dot{X} ——直角坐标空间速度列阵；

\dot{q} ——关节空间速率列阵；

J —— 6×6 方阵, 称作雅可比矩阵。

关于雅可比矩阵的元素可简记为

$$J_{ir} = e_{ei} \cdot v_{er} \quad (i = 1, 2, 3, r = 1, \dots, n) \quad (3-12a)$$

$$J_{ir} = e_{e(i-3)} \cdot \omega_{er} \quad (i = 4, 5, 6, r = 1, \dots, n) \quad (3-12b)$$

式中 v_{er} —— S_e 原点 O_{er} 相对于 \dot{q}_r 的偏速度;

ω_{er} —— S_e 相对于 \dot{q}_r 的偏角速度;

e_{ei} —— 表示 S_e 标架的单位向量基, 即

$$e_{e1} = i_e, e_{e2} = j_e, e_{e3} = k_e$$

式 (3-12a) 和 (3-12b) 分别表示偏线速度和偏角速度在 S_e 坐标轴上的分量。

前面的论述都是针对 S_e 相对于固定标架 S_0 进行运动的, 如果不是 S_e , 而是操作机中任一杆的 S_i 相对于固定标架 S_0 进行运

动, 只要满足 $v_i = \sum_{r=1}^n v_{ir} \dot{q}_r$ 和 $\omega_i = \sum_{r=1}^n \omega_{ir} \dot{q}_r$, 上式都是适用的。

三、杆件之间的加速度分析

对速度向量求导, 即可得加速度公式。

1. 角加速度

将式 (3-1) 求导, 注意到向量 k_i 还随坐标系 S_{i-1} 以角速度 ω_{i-1}

转动, 考虑到 $\dot{k} = \frac{dk}{dt} = \omega_{i-1} \times k_i$, 得到:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \frac{d\omega_i}{dt} = \dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i k_i + \theta_i \dot{k}_i \\ &= \dot{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i k_i + \theta_i (\omega_{i-1} \times k_i) \end{aligned} \quad (3-13)$$

仿式 (3-3), 即将 ϵ_i 表示在 S_i 中, 有:

$$\epsilon_i^i = R_{i-1}^i \omega_{i-1}^{i-1} + \dot{\theta}_i k_i^i + \theta_i (R_{i-1}^i \omega_{i-1}^{i-1} \times k_i^i) \quad (3-14)$$

2. 线加速度

仿前, 由式 (3-2) 得:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i = \dot{v}_{i-1} + \dot{\omega}_{i-1} \times r_{i-1} + \omega_{i-1} \times \dot{r}_{i-1} \\ &= \dot{v}_{i-1} + \dot{\omega}_{i-1} \times r_{i-1} + \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times r_{i-1}) \end{aligned} \quad (3-15)$$

当强调 a_i 表示在 S_i 中时, 有:

$$a_i^i = R_{i-1}^i [v_{i-1}^i + \dot{\omega}_{i-1}^i \times r_{i-1}^i + \omega_{i-1}^i \times (\omega_{i-1}^i \times r_{i-1}^i)] \quad (3-16)$$

必须注意, 线速度和线加速度与角速度、角加速度不同, 对于刚体来说, 其上各点都是不同的, 式 (3-2) (3-4) 和式 (3-6) (3-8) 都是对杆 L_i 上的固联标架 S_i 的原点 O_i 而言的, 为了求得 L_i 中点 C 的 v_{ci} 和 a_{ci} (见图 3-3), 必须增加由于 L_i 转动 (ω_i) 而引起的点 C 处的线速度和线加速度分量, 这时有:

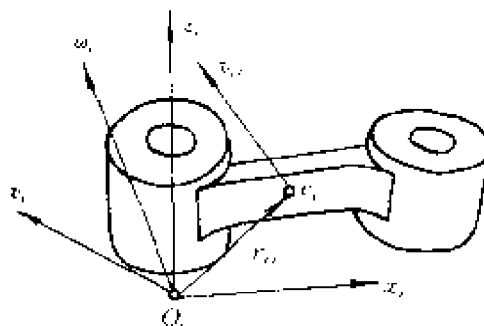


图 3-3 连杆的线速度分布

$$v_{ci} = v_i + \omega_i \times r_{ci}$$

或

$$v_{ci}^i = v_i^i + \omega_i^i \times r_{ci}^i$$

$$a_{ci} = a_i + \dot{\omega}_i \times r_{ci} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{ci}) \quad (3-17)$$

或

$$a_{ci}^i = a_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{ci}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{ci}^i) \quad (3-18)$$

如果 J_i 是移动关节, 则

$$\epsilon_i^i = R_{i-1}^i \epsilon_{i-1}^{i-1} \quad (3-19)$$

$$a_i^i = R_{i-1}^i a_{i-1}^{i-1} + \dot{d}_i k_i^i + \dot{d}_i (R_{i-1}^i \omega_{i-1}^{i-1} \times k_i^i) \quad (3-20)$$

例 3-2 求例 3-1 中 S_3 的角加速度和线加速度, 并表示在 S_0 中。

解:

(1) 利用例 3-1 的结果可得 R_1^0, R_2^1, R_2^1 及 $\omega_0^0, \omega_1^1, \omega_2^2, v_0^0, v_1^1, v_2^2$ 。

(2) 求表示在各杆固联坐标系中的角加速度 ϵ_i^i 及线加速度 a_i^i 。

1) 对基座: $i=0$

$$\epsilon_0^0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T, a_0^0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (a)$$

2) 对杆 L_1 , $i=1$

$$\begin{aligned}\epsilon_0^1 &= R_0^1 \omega_0^0 + \dot{\theta}_1 k_1^1 + \theta_1 (R_0^1 \omega_0^0 \times k_1^1) \\ &= [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1]^T\end{aligned}\quad (b)$$

$$\begin{aligned}a_1^1 &= R_0^1 [\dot{v}_0^0 + \omega_0^0 \times r_{0,1} + \omega_0^0 \times (\omega_0^0 \times r_{0,1})] \\ &= [0 \quad 0 \quad 0]^T\end{aligned}\quad (c)$$

3) 对杆 L_2 , $i=2$

$$\begin{aligned}\epsilon_2^2 &= R_1^2 \omega_1^1 + \dot{\theta}_2 k_2^2 + \theta_2 (R_1^2 \omega_1^1 \times k_2^2) \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & s_1 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \theta_2 \left[\begin{bmatrix} c_2 & s_1 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^T\end{aligned}\quad (d)$$

$$\begin{aligned}a_2^2 &= R_1^2 (\dot{v}_1^1 + \omega_1^1 \times r_{1,2} + \omega_1^1 \times (\omega_1^1 \times r_{1,2})) \\ &= R_1^2 \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1(\dot{\theta}_1)^2 \\ +l_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -c\theta_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 + s\theta_2 l_1 \dot{\theta}_1 \\ s\theta_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 + c\theta_2 l_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (e)$$

4) 对 S_3 , 即 $i=3$ (仿前, 过程从略)

$$\epsilon_3^3 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^T \quad (f)$$

$$a_3^3 = \begin{bmatrix} -c\theta_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 + s\theta_2 l_1 \dot{\theta}_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ s\theta_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 + c\theta_2 l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (g)$$

(3) 将 ϵ_3^3 , a_3^3 表示在 S_0 中, 即求 ϵ_3^0 与 a_3^0 , 为此须求 R_3^0 :

$$R_3^0 = R_1^0 R_2^1 R_3^2 = \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2) & -s(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ s(\theta_1 + \theta_2) & c(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (h)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_3^0 &= R_3^0 \epsilon_3^3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (i)$$

$$a_3^0 = R_3^0 a_3^3 = \begin{bmatrix} c_{12} [-c_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 + s_2 l_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] \\ -s_{12} [s_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 + c_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] \\ s_{12} [-c_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 + s_2 l_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] \\ + c_{12} [s_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 + c_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j)$$

第二节 静力分析

在操作机中，任取两连杆 L_i , L_{i+1} ，如图 3-4。设在杆 L_{i+1} 上作用在点 O_{i+1} 有力矩 M_{i+1} 和力 F_{i+1} ；在杆 L_i 上作用有自重 G_i （过质心 C_i ）； r_i 和 r_{ci} 分别为由 O_i 到 O_{i+1} 和 C_i 的向径 r_i （或记为 $r_{i,i+1}$ ）和 r_{ci} （或记为 $r_{i,c}$ ）。

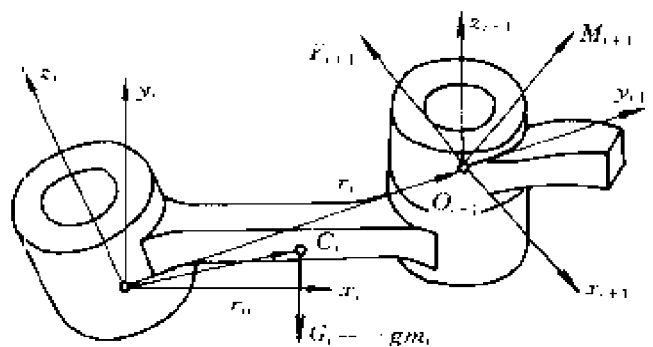


图 3-4 杆件之间的静力传递

按静力学方法，把这些力、力矩简化到 S_i (L_i 的固联坐标系

$O_i(x_i, y_i, z_i)$), 可得:

$$\begin{cases} F_i = F_{i+1} + G_i \\ M_i = M_{i+1} + r_i \times F_{i+1} + r_{ci} \times G_i \end{cases} \quad (3-21)$$

当必须指明 F 和 M 的描述坐标系时, 则得:

$$\begin{cases} F_i^i = R_{i+1}^i F_{i+1}^{i+1} + R_0^i G_i^0 \\ M_i^i = R_{i+1}^i M_{i+1}^{i+1} + r_i^i \times R_{i+1}^i F_{i+1}^{i+1} + r_{ci}^i \times R_0^i G_i^0 \end{cases} \quad (3-22)$$

式中 $G_i^0 = -m_i g$ (m_i 为杆 L_i 的质量)。

求出 F_i 和 M_i 在 z_i 轴上的分量, 就得到了关节力和扭矩, 它们就是在忽略摩擦之后, 驱动器为使操作机保持静力平衡所应提供的关节力或关节力矩, 记作 τ_i (因其只是 z 轴方向的分量, 可不用向量标记), 其大小为:

$$\tau_i = \begin{cases} k_i F_i & (\text{对移动关节}) \\ k_i M_i & (\text{对转动关节}) \end{cases} \quad (3-23)$$

当忽略掉杆件自重 G_i 时, 式 (3-22) 可简记为:

$$\begin{bmatrix} F_i^i \\ M_i^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i+1}^i & 0 \\ r_i^i \times R_{i+1}^i & R_{i+1}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i+1}^{i+1} \\ M_{i+1}^{i+1} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

若以 τ_{i0} 表示不计重力的关节力或力矩值, 对于转动关节则有:

$$\tau_i = \tau_{i0} + k_i \cdot \sum_{j=i}^n (r_{i,cj} \times G_j) \quad (3-25)$$

式中 $r_{i,cj}$ —— 是自 O_i 到杆 L_j 的质心 C_j 的向径。

例 3-3 求两杆操作机 (图 3-5) 的静关节力矩 (坐标系与结构尺寸如图)。

解:

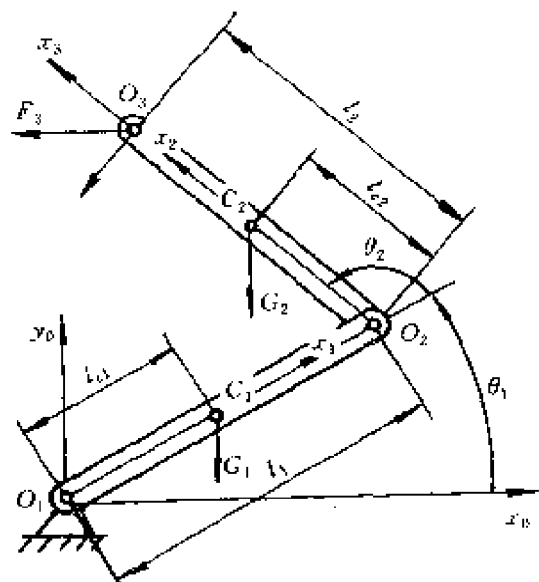


图 3-5 平面操作机静力分析

设已知：

$$F_3^3 = [F_{3x}^3, F_{3y}^3, 0]^T$$

则

$$F_2^2 = R_3^2 F_3^3 = [F_{3x}^3 \quad F_{3y}^3 \quad 0]^T$$

$$M_2^2 = r_2^2 \times F_2^2 + r_{c2}^2 \times R_0^2(-m_2 g)$$

$$= \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{3x}^3 \\ F_{3y}^3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -gm_2 s_{12} \\ -gm_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 F_{3y}^3 - l_{c2} gm_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = k_2^2 \cdot M_2^2 = l_2 F_{3y}^3 - l_{c2} gm_2 c_{12} \quad (a)$$

$$F_1^1 = R_2^1 F_2^2 = \begin{bmatrix} c_2 F_{3x}^3 - s_2 F_{3y}^3 \\ s_2 F_{3x}^3 + c_2 F_{3y}^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1^1 = R_2^1 M_2^2 + r_1^1 \times F_1^1 + r_{c1}^1 \times G_1^1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 F_{3y}^3 - l_{c2} gm_2 c_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_2 F_{3x}^3 - s_2 F_{3y}^3 \\ s_2 F_{3x}^3 + c_2 F_{3y}^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -m_1 g s_1 \\ -m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{3y}^3 (l_2 + l_1 c_2) + l_1 s_2 F_{3x}^3 - (l_{c2} m_2 g c_{12} + l_{c1} m_1 g c_1) \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = k_1^1 \cdot M_1^1$$

$$= F_{3y}^3 (l_2 + l_1 c_2) + l_1 s_2 F_{3x}^3 - (l_{c2} m_2 g c_{12} + l_{c1} m_1 g c_1) \quad (b)$$

当略去重力力矩时，有：

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_2 + l_1 c_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{3x}^3 \\ F_{3y}^3 \end{bmatrix} \quad (c)$$

第三节 动力分析

一、惯性参数计算公式

1. 质量 M

对于具有 n 个质点 $P_1 \cdots P_n$ 的质点系 s , 有:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (3-26)$$

对于均质规则物体则有:

$$M = \int_V \rho dv \quad (3-27)$$

式中 m_i —— 质点 P_i 的质量;

ρ —— 质量密度。

2. 质心及质心位置

对于质点系 s , 存在唯一的一点 C , 使得由 C 到各质点 P_i 的向径 r_i 与各点质量 m_i 之积满足:

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i = 0$$

则 C 称为 s 的质心。对于均质规则物体, 则有:

$$\int_V \rho r_i dv = 0$$

对于质点系 s 有一参考坐标系 S_0 , 用 P_i 表示原点 O 到各质点的向径, P_c 表示原点到质心 C 的向径。则有:

$$P_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i P_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3-28a)$$

对于均质规则物体, 可得

$$\mathbf{P}_c = \frac{\int_v \rho \mathbf{P}_i dv}{\int_v \rho dv} \quad (3-28b)$$

为了便于使用，我们将式 (3-28a) 和 (3-28b) 写成分量形式：

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{cases} \quad (3-29)$$

$$\begin{cases} x_c = \int_v \rho (\mathbf{P}_i)_x dv / \rho dv \\ y_c = \int_v \rho (\mathbf{P}_i)_y dv / \rho dv \\ z_c = \int_v \rho (\mathbf{P}_i)_z dv / \rho dv \end{cases} \quad (3-30)$$

式中 $(\mathbf{P}_i)_x$, $(\mathbf{P}_i)_y$, $(\mathbf{P}_i)_z$ ——向量 \mathbf{P}_i 在 x , y , z 轴上的分量。

3. 惯量张量

转动惯量 转动惯量是用以度量刚体转动时惯性大小的量。当绕定轴（如 z 轴）转动时，其值 I_z 是：

$$I_z = \sum r_i^2 \Delta m_i \quad (3-31)$$

对于均质刚体：

$$I_z = \int_M r_i^2 dm = \int_v \rho r^2 dv \quad (3-32)$$

式中 r_i —— Δm （或 dm ）距 z 轴的平均距离（或 dm 距 z 的距离）。

惯量张量 设刚体绕固定点 O 转动，它的瞬时角速度为 ω ，刚体对 O 点的动量矩 \mathbf{G} 是：

$$\mathbf{G} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v} \quad (3-33)$$

由于 $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ ，利用三向量的向量积公式：

$$\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\omega - (\mathbf{r} \cdot \omega)\mathbf{r}$$

可将式 (3-33) 展开归化成：

$$G = [\Sigma(m_i r_i^2)]\omega - \Sigma[m_i(r_i \cdot \omega)r_i] \quad (3-34)$$

对于刚体可过点 O 取两坐标系，参考系 S_0 和固联于刚体上随刚体运动的坐标系 S (如图 3-6)。设 r_i 和 ω 在 S 中的分量分别表示为：

$$\begin{aligned} r_i &= x_i i + y_i j + z_i k \\ \omega &= \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k \end{aligned}$$

将上两式代入式 (3-34)，

可得 G 在 x 轴上的分量为：

$$\begin{aligned} G_x &= \omega_x \Sigma[m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)] - \Sigma[m_i(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)x_i] \\ &= \Sigma[m_i(y_i^2 + z_i^2)]\omega_x - \Sigma(m_i x_i y_i)\omega_y - \Sigma(m_i x_i z_i)\omega_z \end{aligned}$$

同理可得 G_y, G_z ，借助矩阵工具，得：

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma[m_i(y_i^2 + z_i^2)] & -\Sigma(m_i x_i y_i) & -\Sigma(m_i x_i z_i) \\ -\Sigma(m_i x_i y_i) & \Sigma m_i(z_i^2 + x_i^2) & -\Sigma(m_i y_i z_i) \\ -\Sigma(m_i x_i z_i) & -\Sigma m_i y_i z_i & \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

简记为：

$$G = I\omega \quad (3-36)$$

其中 I 称作刚体的惯量矩阵，因为这一矩阵符合将向量线性变换成向量的张量定义，所以它实质上是一个在三维变换中的二阶张量，故 I 通常称作刚体的惯量张量。

对于均质连续的规则刚体，求和号可换成积分号。取：

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \Sigma m_i(y_i^2 + z_i^2) = \int (y^2 + z^2)dm \\ I_{yy} &= \Sigma m_i(z_i^2 + x_i^2) = \int (z^2 + x^2)dm \\ I_{zz} &= \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2)dm \end{aligned} \right\} \quad (3-37a)$$

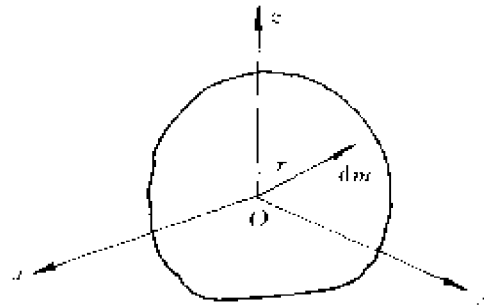


图 3-6 刚体绕定点转动

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} = \Sigma(m_i x_i y_i) &= \int xy dm \\ I_{yz} = I_{zy} = \Sigma(m_i y_i z_i) &= \int yz dm \\ I_{zx} = I_{xz} = \Sigma(m_i z_i x_i) &= \int zx dm \end{aligned} \right\} \quad (3-37b)$$

则刚体的惯量张量表示为：

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

惯量张量的平行移轴定理 设刚体在过其质心的坐标系 S_c 中的惯量张量如式 (3-38) 所示。坐标系 S' 是经过平移 $r_{O,O'} = [x_c \ y_c \ z_c]^T$ 而得到的新坐标系，则刚体在坐标系 S' 的惯量张量 I' 可由下式表示

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} M(z_c^2 + y_c^2) & -Mx_c y_c & -Mx_c z_c \\ -Mx_c y_c & M(y_c^2 + x_c^2) & -My_c z_c \\ -Mx_c z_c & -My_c z_c & M(x_c^2 + z_c^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-39)$$

式中 M ——刚体的质量。

惯量张量的坐标轴旋转计算公式 设刚体在过其质心的坐标系 S_c 中的惯量张量如式 (3-28) 所示，坐标系 S' 是经过旋转变换 R^c 而得到的新坐标系。根据张量的旋转变换法则，刚体的惯量张量在 S' 中表示为：

$$\mathbf{I}' = [\mathbf{R}^c]^T \mathbf{I} [\mathbf{R}^c] \quad (3-40)$$

写成分量形式则是：

$$\left. \begin{aligned} I'_{xx} &= [\mathbf{n}^c]^T \mathbf{I} [\mathbf{n}^c] \\ I'_{yy} &= [\mathbf{o}^c]^T \mathbf{I} [\mathbf{o}^c] \\ I'_{zz} &= [\mathbf{a}^c]^T \mathbf{I} [\mathbf{a}^c] \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

式中 \mathbf{n}^c 、 \mathbf{o}^c 、 \mathbf{a}^c 分别是 R^c 中的三个列向量，即 $R^c = [\mathbf{n}^c \ \mathbf{o}^c$

$a^2]$ 。

惯性主轴 由矩阵理论可知, 当 I 是 3×3 实对称矩阵时, 总存在有一个正交变换 R , 使得 I 在 S 坐标系中成为:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3-42)$$

我们知道, I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} (其中至少有两个互不相等) 是该矩阵的特征根。由此即可求出与之相对应的三个互相正交的特征向量, 以它们作为坐标系 S (即 $O-xyz$ 系) 的基向量 i 、 j 、 k , 则该坐标系的坐标轴称作刚体的惯性主轴。

一般说来, 过质心的三个刚体的对称正交平面的三条交线 (正交) 就是刚体的三个惯性主轴。把这三条轴线选作某坐标系的坐标轴, 则刚体在该坐标系的惯量张量有式 (3-42) 所示的最简形式。

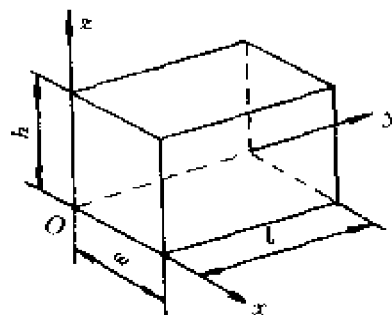


图 3-7 均质矩形体

例 3-4 求图 3-7 所示均质 6 面体相对于所设坐标系 S 的惯量张量。

解:

$$\text{令 } dm = \rho dx dy dz$$

(1) 求轴转动惯量

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_M (y^2 + z^2) dm \\ &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \left(\frac{hl^3w}{3} + \frac{h^3lw}{3} \right) \rho \\ &= \frac{M}{3} (l^2 + h^2) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\text{同理} \quad I_{yy} = \frac{M}{3} (w^2 + h^2), I_{zz} = \frac{M}{3} (l^2 + w^2)$$

式中 M ——六面体总质量 ($M = \rho h l w$)。

(2) 求惯量积

$$I_{xy} = \int_M xy dm = \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy \rho dx dy dz = \frac{M}{4} wl$$

同理 $I_{xz} = \frac{M}{4} hw, I_{yz} = \frac{M}{4} hl$ (b)

(3) 求惯量张量

将 $I_{xx} \cdots I_{xy} \cdots$ 代入式 (3-38) 得:

$$I = \begin{bmatrix} \frac{M}{3}(l^2 + h^2) & -\frac{M}{4}wl & -\frac{M}{4}hw \\ -\frac{M}{4}wl & \frac{M}{3}(w^2 + h^2) & -\frac{M}{4}hl \\ -\frac{M}{4}hw & -\frac{M}{4}hl & \frac{M}{3}(l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (c)$$

若将 S_c 的原点 O_c 置于质心上, 且 x_c, y_c, z_c 分别平行于 x, y, z , 根据平行移轴定理, 有:

$$x_c = -\frac{w}{2}, y_c = -\frac{l}{2}, z_c = -\frac{h}{2}$$

$$I_{xz} = I_{zxc} + M(x_c^2 + y_c^2)$$

于是 $I_{zxc} = I_{xz} - M(x_c^2 + y_c^2) = \frac{M}{12}(l^2 + w^2)$

同理 $I_{yxc} = \frac{M}{12}(w^2 + h^2), I_{xyc} = \frac{M}{12}(l^2 + h^2)$

$$I_{xyc} = I_{xy} - Mx_c y_c = \frac{M}{4}wl - \frac{M}{4}wl = 0$$

同理 $I_{xzc} = I_{yzc} = 0$

于是

$$I_c = \begin{bmatrix} \frac{M}{12}(l^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}(w^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12}(l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (d)$$

例 3-5 设有均质薄板, 过质心 C 有两固联坐标系 (如图 3-

8)。已知该薄板在 S 坐标系中的惯量矩阵 I ：

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

求在 S' 中的惯量矩阵。

解：

(1) 求 S' 相对 S 的变换矩阵

由图 3-8 可知，旋转变换矩阵是：

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (a)$$

(2) 计算 I'

利用式 (3-40) 有

$$I' = R^T I R$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

展开后得：

$$\left. \begin{aligned} I_{x'x'} &= I_{xx}\cos^2\theta + I_{yy}\sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ I_{y'y'} &= I_{xx}\sin^2\theta + I_{yy}\cos^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ I_{x'y'} &= (I_{xx} - I_{yy})\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

二、基于牛顿-欧拉方程的动力学算法

基于牛顿-欧拉方程的动力学算法是以理论力学的两个最基本的方程——牛顿方程和欧拉方程为出发点，结合操作机的速度和加速度分析而得出的一种操作机动力学算法。它常以递推的形式出现，具有较高的计算速度，但形成最终的动力学完整方程（闭合解）却比较麻烦。它的特点之一是要计算关节之间的约束力，所以在用于含闭链的操作机动力学计算时比较困难。但也正由于该法可算出关节处的约束力，从而为操作机机构设计提供力分析的原始条件。这也是该法的一大优点。为了方便读者，我们在这里简要给出刚体的牛顿-欧拉方程。

牛顿动力学方程有如下形式：

$$F = ma = d(mv)/dt \quad (3-43)$$

式中 a 、 v ——具有质量为 m 的刚体的质心加速度和速度。

写成分量形式则是：

$$\begin{cases} F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} \\ F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} \\ F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} \end{cases} \quad (3-44)$$

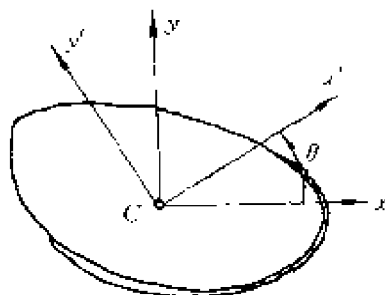


图 3-8 均质薄板及固联坐标系

欧拉动力学方程是对绕定点转动的刚体给出的。人们知道，刚体绕定点转动时对该点的动量矩 J 是

$$J = \sum_{i=1}^n (r_i \times m_i v_i) = I\omega$$

式中 r_i 、 m_i 、 v_i ——组成刚体的质点 P_i 的向径、质量和速度；

ω ——刚体绕定点的角速度；

I ——刚体的惯量张量。

应用动量矩定理（对于刚体的固联坐标系 I 为常数）有：

$$M = \frac{dJ}{dt} = \dot{J} + \omega \times J = I\dot{\omega} + \omega \times I\omega \quad (3-45)$$

式中 M ——外力对于定点的合力矩，或称主矩。

写成分量形式，且设固联坐标轴是刚体的惯性主轴，由于这时 $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ ，则

$$\begin{cases} M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z \\ M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x \\ M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y \end{cases} \quad (3-46)$$

1. 引例

取操作机中任一连杆 L_i ，其受力图如图 3-9 所示。设该杆在力、力矩和重力作用下作一般运动，即质心 C_i 以 v_{ci} 移动，整个连杆又绕 C_i 以 ω_i 角速度转动，并伴随以线加速度 $a_{ci} = \dot{v}_{ci}$ 、角加速度

$\epsilon = \dot{\omega}$ 的运动。根据达伦贝尔原理，牛顿-欧拉方程分别变为：

$$\begin{cases} F_{i-1,i} - F_{i,i+1} + m_i g - m_i \dot{v}_{ci} = 0 \\ M_{i-1,i} - M_{i,i+1} + r_{i,ci} \times F_{i-1,i} - \\ \quad r_{i+1,ci} \times F_{i,i+1} - I_i \dot{\omega}_i - \omega_i \times I_i \omega_i = 0 \end{cases} \quad (3-47)$$

若自操作机的末杆算起，当已知 $F_{i,i+1}$ 、 $M_{i,i+1}$ ，即可逐次求得关节的约束力和约束力矩。现仍以图 3-2 所示的平面二杆操作机为例，说明操作手动力学计算，以及公式中所得各项的物理意义。为了简便，取 $F_3 = 0$ ，并已知 I_1 、 I_2 。

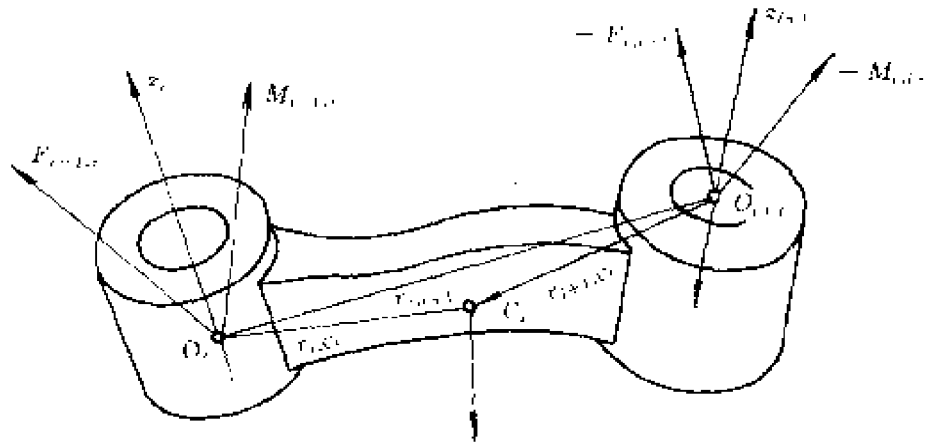


图 3-9 连杆受力图

将式 (3-47) 用于二杆操作机的末杆 L_2 ，即 $i=2$ ，则得：

$$\begin{cases} F_{1,2} + m_2 g - m_2 \dot{v}_{c2} = 0 \\ M_{1,2} + r_{2,c2} \times F_{1,2} - I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_2 \times (I_2 \omega_2) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

对于杆 L_1 ， $i=1$ ，则得：

$$\begin{cases} F_{0,1} - F_{1,2} + m_1 g + m_1 \dot{v}_{c1} = 0 \\ M_{0,1} - M_{1,2} - r_{2,c1} \times F_{1,2} + r_{1,c1} \times F_{0,1} - I_1 \dot{\omega}_1 \\ \quad - \omega_1 \times (I_1 \omega_1) = 0 \end{cases} \quad (b)$$

当求出角速度、角加速度和质心加速度之后，即可由式 (a) 到式 (b) 逐次求出各关节的约束力和约束力矩。

前已求出:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1]^T, \dot{\omega}_1 = [0 \quad 0 \quad \ddot{\theta}_1]^T \\ \omega_2 &= [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^T, \dot{\omega}_2 = [0 \quad 0 \quad \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2]^T \\ v_{c1} &= \begin{bmatrix} -l_{c1} \dot{\theta}_1 & s_1 \\ l_{c1} \dot{\theta}_1 & c_1 \\ 0 & \end{bmatrix} \\ v_{c2} &= \begin{bmatrix} -[l_1 s_1 + l_{c2} s_{12}] \dot{\theta}_1 - l_{c2} s_{12} \dot{\theta}_2 \\ [l_1 c_1 + l_{c2} c_{12}] \dot{\theta}_1 + l_{c2} c_{12} \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

对 v_{c1} 、 v_{c2} 求导, 得

$$\begin{aligned}\dot{v}_{c1} &= \begin{bmatrix} -l_{c1} (s_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1^2) \\ l_{c1} (c_1 \ddot{\theta}_1 - s_1 \dot{\theta}_1^2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{v}_{c2} &= \begin{bmatrix} -[l_1 s_1 + l_{c2} s_{12}] \ddot{\theta}_1 - l_{c2} s_{12} \ddot{\theta}_2 - l_1 c_1 \dot{\theta}_1^2 \\ \quad - l_{c2} c_{12} \dot{\theta}_1^2 - 2l_{c2} c_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - l_{c2} c_{12} \dot{\theta}_2^2 \\ [l_1 c_1 + l_{c2} c_{12}] \ddot{\theta}_1 + l_{c2} c_{12} \ddot{\theta}_2 - l_1 s_1 \dot{\theta}_1^2 - l_{c2} s_{12} \dot{\theta}_1^2 \\ \quad - 2l_{c2} s_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - l_{c2} s_{12} \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

对于杆 L_2 ($i=2$), 根据式 (a)

$$\begin{aligned}F_{1,2} &= -m_2 \mathbf{g} + m_2 \dot{v}_{c2} \\ &= m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} -[l_1 s_1 + l_{c2} s_{12}] \ddot{\theta}_1 - l_{c2} s_{12} \ddot{\theta}_2 - l_1 c_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -l_{c2} c_{12} \dot{\theta}_1^2 - 2l_{c2} c_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - l_{c2} c_{12} \dot{\theta}_2^2 \\ [l_1 c_1 + l_{c2} c_{12}] \ddot{\theta}_1 + l_{c2} c_{12} \ddot{\theta}_2 - l_1 s_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -l_{c2} s_{12} \dot{\theta}_1^2 - 2l_{c2} s_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - l_{c2} s_{12} \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{1,2} &= -\mathbf{r}_{2,c2} \times (-m_2 \mathbf{g} + m_2 \dot{v}_{c2}) + I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \times (I_2 \omega_2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{c2} c_{12} m_2 g + m_2 [(l_1 l_{c2} c_2 + l_{c2}^2) \ddot{\theta}_1 + l_{c2}^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_1^2] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$+ I_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

对于杆 L_1 ($i=1$), 由式 (b) 得:

$$\begin{aligned} F_{0,1} &= F_{1,2} - m_1 g + m_2 \dot{v}_{C_1} \\ &= F_{1,2} - m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} -l_{C_1}(s_1 \dot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1^2) \\ l_{C_1}(c_1 \dot{\theta}_1 + s_1 \dot{\theta}_1^2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} M_{0,1} &= M_{1,2} + r_{2,C_1} \times F_{1,2} - r_{1,C_1} \times F_{0,1} + I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_1 \times (I_1 \omega_1) \\ &= M_{1,2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_{C_1}^2 \dot{\theta}_1 + m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1 + l_1 l_{C_2} c_2 \dot{\theta}_1 \\ \quad + l_1 l_{C_2} c_2 \dot{\theta}_2 - l_1 l_{C_2} s_2 \dot{\theta}_1^2 \\ - 2l_1 l_{C_2} s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - l_1 l_{C_2} s_2 \dot{\theta}_2^2 \\ \quad + m_1 l_{C_1} c_1 g + m_2 l_1 c_1 g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (f)$$

由于

$$\tau_1 = k_1 \cdot M_{0,1}, \tau_2 = k_2 \cdot M_{1,2}$$

我们可以求得不计摩擦的关节驱动力矩;

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [m_1 l_{C_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{C_2} c_2 + m_2 l_{C_2}^2 + I_1 + I_2] \dot{\theta}_1 \\ &\quad + (m_2 l_1 l_{C_2} c_2 + I_2 + m_2 l_{C_2}^2) \dot{\theta}_2 \\ &\quad - m_2 l_1 l_{C_2} s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 l_{C_2} s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ &\quad + m_1 l_{C_1} c_1 g + m_2 (l_1 c_1 g + l_{C_2} c_{12} g) \end{aligned} \quad (g)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= m_2 (l_1 l_{C_2} c_2 + l_{C_2}^2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_{C_2}^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_{C_2} s_2 \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad - l_{C_2} c_{12} m_2 g + I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (h)$$

将 τ_1, τ_2 写成如下之形式:

$$\begin{cases} \tau_1 = H_{11} \dot{\theta}_1 + H_{12} \dot{\theta}_2 + h_{122} \dot{\theta}_2^2 + 2h_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + G_1 \\ \tau_2 = H_{22} \dot{\theta}_2 + H_{21} \dot{\theta}_1 + h_{211} \dot{\theta}_1^2 + G_2 \end{cases} \quad (j)$$

式中 $H_{11} = m_1 l_{C_1}^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2l_1 l_{C_2} c_2) + I_2$

$$H_{22} = m_2 l_{C_2}^2 + I_2$$

$$H_{12} = H_{21} = m_2 l_1 l_{C_2} c_2 + m_2 l_{C_2}^2 + I_2$$

$$h_{112} = h_{122} = -h_{211} = -m_2 l_1 l_{C_2} s_2$$

$$G_1 = m_1 l_{C_1} g c_1 + m_2 g (l_{C_2} c_{12} + l_1 c_1)$$

$$G_2 = m_2 l_{C_2} g c_{12}$$

2. 动力学方程及其各项的物理意义

由式 (j) 可得操作机动力学方程的如下规范形式:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i \quad (3-48)$$

今后我们将以式 (3-48) 为讨论操作机动力学的基础, 现将其中各项的物理意义分述如下。

惯性力矩 ($H_{ij} \ddot{q}_j$) 惯性力矩是由线加速度或角加速度引起的, 分为两类:

(1) 自加速惯性力矩 ($i=j$), 是由于连杆 L_i 自身的加速度 $\ddot{q}_{j=i}$ 而引起作用在自身转动轴上的惯性力矩。如 τ_1 中的 $H_{11} \ddot{\theta}_1$:

$$H_{11} \ddot{\theta}_1 = (m_1 l_{C_1}^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2l_1 l_{C_2} c_2) + I_2) \ddot{\theta}_1$$

其中, $m_1 l_{C_1}^2 \ddot{\theta}_1 = (m_1 l_{C_1} \ddot{\theta}_1) l_{C_1}$ 为杆 L_1 质心 C_1 加速度 ($l_{C_1} \ddot{\theta}_1$) 引起的作用在过 O_1 的关节轴 (以下称关节轴 J_1) 的惯性力矩; $I_1 \ddot{\theta}_1$ 为杆 L_1 (具有转动惯量 I_1) 因加速度 ($\ddot{\theta}_1$) 而引起的对 J_1 的惯性力矩; $m_2 (l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2l_1 l_{C_2} c_2) \ddot{\theta}_1$ 为由 $\ddot{\theta}_1$ 而使杆 L_2 的质心 C_2 产生加速度 ($\sqrt{l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2l_1 l_{C_2} c_2} \ddot{\theta}_1$) 时, 作用在 J_1 的惯性力矩, 参看图 3-10; $I_2 \ddot{\theta}_1$ 为杆 L_2 (具有 I_2) 因 $\ddot{\theta}_1$ 而引起的对 J_1 的惯性力矩。

在 τ_2 中:

$$H_{22} \ddot{\theta}_2 = (m_2 l_{C_2}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2$$

(不详述)

(2) 耦合惯性力矩 ($i \neq j$) 在 τ_1 和 τ_2 中分别是:

$$H_{12} \ddot{\theta}_2 = [m_2 (l_{C_2}^2 + l_{C_2} l_1 c_2) + I_2] \ddot{\theta}_2$$

$$H_{21} \ddot{\theta}_1 = [m_2 (l_{C_2}^2 - l_{C_2} l_1 c_2) + I_2] \ddot{\theta}_1$$

在 $M_{12} \ddot{\theta}_2$ 中, $m_2 (l_{C_2} - l_1 c_2) l_{C_2} \ddot{\theta}_2$ 是由 $\ddot{\theta}_2$ 使杆 L_2 在 C_2 产生线加速度 ($l_{C_2} \ddot{\theta}_2$) 而引起的绕 J_1 的惯性力矩 (图 3-11); $I_2 \ddot{\theta}_2$ 是由杆 L_2 (具有 I_2) 由角加速度 ($\ddot{\theta}_2$) 而引起的作用在 J_1 上的惯性力矩。

关于 $H_{21} \ddot{\theta}_1$ 中各项的意义请读者自己分析。

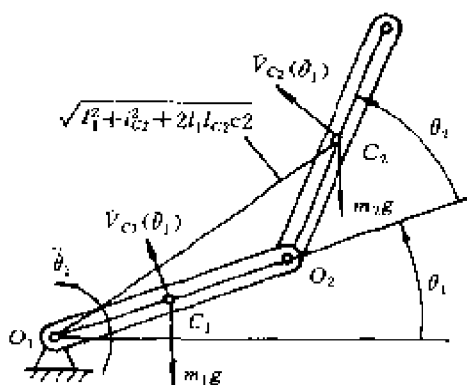


图 3-10 加速度示意图

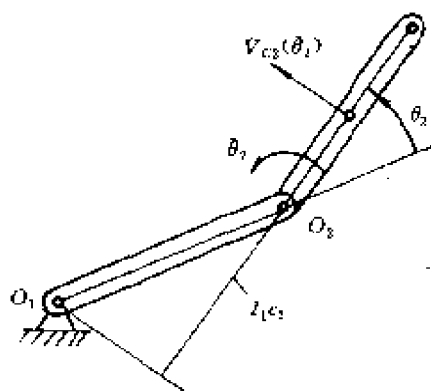


图 3-11 加速度示意图

当 $\theta_2=0$ 时, $H_{12}\ddot{\theta}_2$ 、 $H_{21}\ddot{\theta}_1$ 的物理意义更加明显。这时

$$H_{12}\ddot{\theta}_2 = I_2\ddot{\theta}_2 + m_2l_{C2}\ddot{\theta}_2(l_1 + l_{C2})$$

$$H_{21}\ddot{\theta}_1 = I_2\ddot{\theta}_1 + m_2(l_1 + l_{C2})\ddot{\theta}_1l_{C2}$$

离心惯性力矩 ($h_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = h_{ij}\dot{q}_j^2$) 离心惯性力矩都是耦合的, 因为离心力对自己的旋转轴是不产生力矩的。由式 (j) 知, 在 τ_1 、 τ_2 中的离心力矩分别是

$$h_{122}\theta_2^2 = -m_2l_1l_{C2}s_2\theta_2^2$$

$$h_{211}\theta_1^2 = m_2l_1l_{C2}s_2\theta_1^2$$

其中, $m_2l_1l_{C2}s_2\theta_2^2$ 是由杆 L_2 的角速度 (θ_2) 而引起的 C_2 处的向心加速度 ($l_{C2}\theta_2^2$) 作用在 J_1 上的惯性力矩 (如图 3-12)。对于 $m_2l_1l_{C2}s_2\theta_1^2$, 请读者自己分析。

哥氏惯性力矩 ($h_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$) 我们知道, 在转动坐标系 (设转速为 ω) 中有质点作相对运动 (相对速度为 v') 时, 将产生哥氏加速度。对于二杆操作机, 第二杆在跟随第一杆转动的同时, 又作相对于第一杆的运动 (在质心 C_2 处, 有 $v' = \omega_2l_{C2}$), 所以在第二杆质心 C_2 产生哥氏加速度 (a_C), 由理论力学知,

$$a_C = 2\omega \times v'$$

对于我们的二杆操作机在 C_2 产生的哥氏加速度如图 3-13 所示，可以表示为：

$$a_c = 2\omega_1 \times v'_1 = 2\dot{\theta}_1 l_{C_2} \dot{\theta}_2 \frac{a_c}{|a_c|}$$

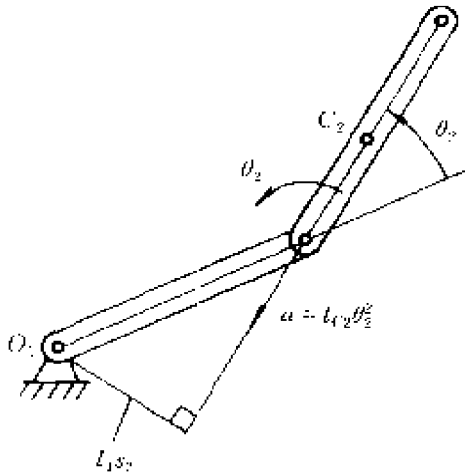


图 3-12 离心加速度示意图

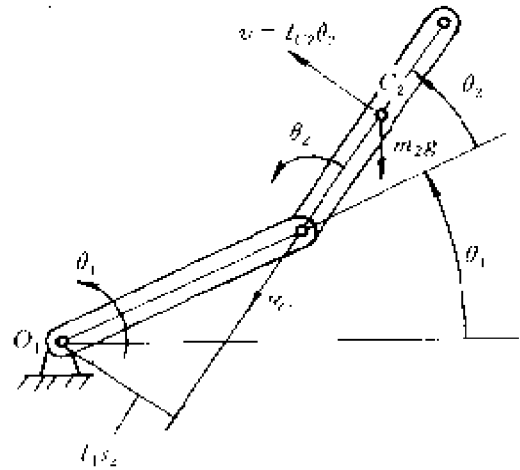


图 3-13 哥氏加速度示意图

故对 J_2 (过 O_2 的关节轴) 不产生哥氏惯性力矩，但对 J_1 却产生哥氏惯性力矩，在 τ_1 中表现为：

$$h_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = -2m_2 l_1 l_{C_2} s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

重力矩 (G_1) 由式 (j) 知，在 τ_1 和 τ_2 中，由重力所产生的力矩分别为：

$$G_1 = m_1 g l_{C_1} c_1 + m_2 g l_1 c_1 + m_2 g l_{C_2} c_{12}$$

$$G_2 = m_2 g l_{C_2} c_{12}$$

各项的意义请读者自己分析。

3. 递推算法

Luh, Walker 和 Paul 在 1980 年提出了递推的牛顿-欧拉方程算法，从而大大加快了操作机动力学的计算机计算。该法是由基座前推，即向末杆递推，逐次求出各杆的角速度、角加速度和质心加速度，再由末杆的末关节向第一关节（与基座相联）后推，从

而求出各关节力矩（或力）。全旋转关节的具体公式如下。

(1) 速度和惯性力（力矩）前推：

$$\omega_i = R_{i-1}^i \omega_{i-1}^i + \dot{\theta}_i k_i^i \quad (3-49a)$$

$$\dot{\omega}_i = R_{i-1}^i \dot{\omega}_{i-1}^i + R_{i-1}^i \omega_{i-1}^i \times \dot{\theta}_i k_i^i + \ddot{\theta}_i k_i^i \quad (3-49b)$$

$$v_i = R_{i-1}^i (v_{i-1}^i + \omega_{i-1}^i \times r_{i-1,i}^i) \quad (3-49c)$$

$$\dot{v}_i = R_{i-1}^i (\dot{\omega}_{i-1}^i \times r_{i-1,i}^i + \omega_{i-1}^i \times (\omega_{i-1}^i \times r_{i-1,i}^i) + \dot{v}_{i-1}^i) \quad (3-49d)$$

$$v_{i,\alpha} = v_i + \omega_i \times r_{i,\alpha}^i \quad (3-49e)$$

$$\dot{v}_{i,\alpha} = \dot{\omega}_i \times r_{i,\alpha}^i + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,\alpha}^i) + \dot{v}_i \quad (3-49f)$$

$$f_i = m_i \dot{v}_{i,\alpha} \quad (3-49g)$$

$$N_i = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i) \quad (3-49h)$$

(2) 约束力和关节力矩后推：

$$F_i = R_{i+1}^i F_{i+1}^i + F_i \quad (3-49i)$$

$$M_i = N_i + R_{i+1}^i M_{i+1}^i + r_{i,\alpha}^i \times f_i + r_{i,\alpha+1}^i R_{i+1}^i F_{i+1}^i \quad (3-49j)$$

$$\tau_i = k_i \cdot M_i \quad (3-49k)$$

为了考虑重力力矩，可对整个操作手附加一个与重力加速度相反的加速度（ $-g$ ）。即在 z_0 向上时，取：

$$\dot{v}_0^0 = [0 \quad 0 \quad -g]^T$$

关于存在移动关节时的递推公式，请读者自己导出，或参阅 [1]。

三、基于拉格朗日方程的动力学算法

上面介绍的动力学算法，特别适用于操作机的设计计算。因为它不但可求出各主动关节的驱动力（对转动关节即为力矩），而且还可求出关节中各杆件间的作用力（约束反力）。但在进行动力学分析时，目的在于求得操作机的动力学方程时，就不需要求出关节中的约束反力，所以上述算法就显得有些累赘。目前公诸于市的动力学算法有好多种，常见的还有拉格朗日方程法，凯恩方程法，广义达伦贝尔方程法。这里简单介绍一种最常用的基于拉

格朗日方程的操作机动力学算法。

1. 拉格朗日方程

拉格朗日方程是建立在力学系统的动能和势能函数基础上的。对于定常的力学系统，该方程可表示为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3-50)$$

式中 L ——拉氏函数，与能量有下列关系：

$$L = T - U$$

T ——系统动能；

U ——系统势能；

q_i ——系统的广义坐标；

\dot{q}_i ——系统的广义速率；

Q_i ——作用在系统上的广义主动力（可以是力，也可以是力矩）。

2. 基于拉格朗日方程的操作机动力学算法

操作机的动能 T 操作机的每一构件，可以看作是作一般运动的刚体，其动能由移动和转动两部分动能组成，即：

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \quad (3-51)$$

对整个操作机则有

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad (3-52)$$

在运动分析中，我们知道

$$\dot{X} = J\dot{q}$$

可以得出：

$$\begin{bmatrix} v_{ci} \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_L^i \\ J_A^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

式中 $J_L^i = [J_{L1}^i J_{L2}^i \cdots J_{L_i}^i O_{L_{i+1}} \cdots O_{L_n}]$ ， $J_A^i = [J_{A1}^i J_{A2}^i \cdots J_{A_i}^i O_{A_{i+1}} \cdots O_{A_n}]$ 是相应 v_{ci} 和 ω_i 的雅可比矩阵元素，故当下标大于 i 时，即由 $i+1$ 到 n 时，由于关节变量 q_{i+1} 到 q_n 对杆 L_i 的质心速度 v_{ci} 和角速

度 ω_i 不产生作用，取相应的雅可比矩阵元素为零。

将式 (3-53) 展开，即得：

$$\begin{aligned} v_{ci} &= J_{L1}^i \dot{q}_1 + J_{L2}^i \dot{q}_2 + \cdots + J_{Lk}^i \dot{q}_k \\ \omega_i &= J_{A1}^i \dot{q}_1 + J_{A2}^i \dot{q}_2 + \cdots + J_{Ak}^i \dot{q}_k \end{aligned}$$

于是动能表达式 (3-52) 变为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i \dot{q}^T J_{L_i}^T J_{L_i} \dot{q} + \dot{q}^T J_{A_i}^T I_i J_{A_i} \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} \quad (3-54)$$

式中 $H = \sum_{i=1}^n (m_i J_{L_i}^T J_{L_i} + J_{A_i}^T I_i J_{A_i})$ 定义为操作机的总惯性张量，是 $n \times n$ 方阵。

若用 H_{ij} 表示 H 的 i 行 j 列元素则有

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3-55)$$

式中 H_{ij} —— $q_1 \cdots q_n$ 的函数。

操作机的势能 U 以基础坐标零点为相对零点， g (重力加速度) 为 3×1 列向量，则操作机的总势能是各杆质心向量 $r_{o,ci}$ 的函数，写成矩阵形式，得：

$$U = \sum_{i=1}^n m_i g^T r_{o,ci} \quad (3-56)$$

操作机的广义主动力 (或称广义力) 操作机的非保守力有关节力矩：

$$\tau = [\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n]^T$$

末端执行器参考点 P_e 处的外力 F_{ext} ：

$$F_{ext} = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T$$

F_{ext} 、 τ 对操作机的总虚功为

$$\delta W = \tau^T \delta q + F_{ext}^T \delta p = (\tau + J^T F_{ext})^T \delta q \quad (3-57)$$

式中 J 是相对于末端执行器的雅可比矩阵。

由式 (3-50) 定义的 Q_i 有：

$$\delta W_1 = Q_1^T \delta q \quad (3-58)$$

对操作机来说，式 (3-58) 就应是 (3-57)，即

$$Q_1 = \tau + J^T F_{ext}, \text{ 故 } Q_{11} = \tau_1, Q_{21} = \tau_2$$

操作机的拉格朗日方程

$$(1) \text{ 求 } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_j \quad (3-59)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{dH_{ij}}{dt} \dot{q}_j \quad (3-60)$$

$$\frac{dH_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (3-61)$$

$$(2) \text{ 求 } \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3-62)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{o,cj} \right) = \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{o,cj}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \mathbf{J}_{Li}^j = \mathbf{G}_i \quad (3-63)$$

将式 (3-59) ~ (3-63) 代入拉格朗日方程 (3-50), 得:

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i = Q_{ij} \quad (3-64)$$

式中

$$h_{ijk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}$$

$$G_i = \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \mathbf{J}_{Li}^j$$

式 (3-64) 与动力学规范方程 (3-48) 相同。

操作机的动力学算法, 是机器人学的一个重要研究领域, 是机器控制的理论基础。为了加快计算速度, 以达到实时控制, 出现了很多种算法。但对操作机的设计来说, 上述两种算法乃是最基本的方法。

第四章 掘作机的驱动-传动系统

在系统中，驱动器通过联轴器带动传动装置（一般为减速器），再通过关节轴带动杆件运动。为了进行位置和速度控制，驱动系统中还包括位置和速度检测元件。检测元件类型很多，但都要求有合适的精度、连接方式以及有利于控制的输出方式。对于伺服电机，检测元件常与电机直接相联；对于液压驱动，则常通过联轴器或销轴与被驱动的杆件相联。

二、驱动器的主要类型和优缺点

1. 电动驱动器

电动驱动器是目前使用的最广泛的驱动器。它的能源简单，速度变化范围大，效率高，速度和位置精度都很高，但它们多与减速装置相联，直接驱动比较困难。

电动驱动器又可分为直流（DC）、交流（AC）伺服电机驱动和步进电机驱动。后者多为开环控制，控制简单但功率不大，多用于低精度小功率机器人系统。直流伺服电机有很多优点，但它的电刷易磨损，且易形成火花。随着技术的进步，近年来交流伺服电机正逐渐取代直流伺服电机而成为机器人的主要驱动器。

2. 液压驱动器

液压驱动的主要优点是功率大，结构简单，可省去减速装置，能直接与被驱动的杆件相连，响应快，伺服驱动具有较高的精度，但需要增设液压源，而且易产生液体泄漏，故液压驱动目前多用于特大功率的机器人系统。

3. 气动驱动器

气动驱动器的能源、结构都比较简单，但与液压驱动器相比，同体积条件下功率较小（因压力低），而且速度不易控制，所以多用于精度不高的点位控制系统。

三、驱动器的选择

驱动器的选择可分两步进行。

1. 选型

驱动器的选择应以作业要求、生产环境为先决条件，以价格高低、技术水平为评价标准。一般说来，目前负荷为 1960N 以下的多用电动驱动器（值得注意的，日本安川公司已于 1993 年推出了全电动负荷为 3920N 的关节型机器人）。只须点位控制且功率较小者多采用气动驱动器。负荷较大或机器人周围已有液压源的情况下，可采用液压驱动器。对于驱动器来说，最重要的是要求起动力矩大，调速范围宽，惯量小，尺寸小，同时还要有性能好的与之配套的数字控制系统。

2. 选容量

由于机器人经常工作在加、减速状态，所以在选择驱动器容量时既要考虑到与额定速度运行相对应的额定功率，又要考虑到加速功率。又由于机器人的各关节处于不同位形时有不同的负载力矩，所以必须用最不利位形时的最大动力矩进行校核。下面以电动驱动器为例加以说明。

(1) 计算负载的额定功率和加速功率。对某一关节来说，额定负载，既包括作用于操作机末杆机械接口处的额定负载，又包括该关节所驱动的所有杆件的自重。额定功率 P_{j0} 和加速功率 $P_{j\alpha}$ 可用下式求得。

$$P_{j0} = \frac{T_{j0} \cdot n_{j0}}{9550\eta} \quad \text{kW} \quad (4-1)$$

$$P_{j\alpha} = \frac{GD_j^2 \cdot n_{j0}^2}{3577 \times 10^3 t_\alpha} \quad \text{kW} \quad (4-2)$$

式中 T_{j0} ——推算至关节处的当量扭矩， $\text{N} \cdot \text{m}$ ；

GD^2 ——推算至关节处的当量飞轮力矩， $\text{N} \cdot \text{m}$ ，且与转动惯量有以下关系：

$$GD^2 = 4J$$

J ——转动惯量；

n_{j0} ——关节处的转速， r/min ；

t_α ——加速时间， s 。

(2) 确定电机的额定功率 P_{m0} 。 P_{m0} 可按下列下式确定：

$$P_{mc} \geq (1 \sim 2)(P_{jd} + P_{ja}) \quad (4-3)$$

(3) 校核电机的最大力矩 T_{mmax} 。 T_{mmax} 可按下式确定：

$$T_{mmax} \geq T_{j0max} + T_{jamax} \quad (4-4)$$

式中 T_{j0max} 、 T_{jamax} ——关节处最大额定力矩和最大加速力矩，即在操作机处于最不利位形时的额定力矩和加速力矩。

一般伺服电机还要求折算到电机轴上的负载飞轮力矩 GD_j^2/i^2 (i 为减速比) 小于某一定值，即 $GD_j^2/i^2 \leq [GD^2]$ ($[GD^2]$ 是容许飞轮力矩)。有时，对应于最不利位形时的 $T_{j0max} + T_{jamax}$ 太大，就必须增设平衡装置以适当降低 T_{mmax} 。

四、联轴器、传动机构及速比选择

1. 联轴器

联轴器主要用于联接驱动器和减速器或滚动螺旋等减速部件。其要求是结构紧凑，重量轻，惯量小，刚度大，能吸收两轴之间的制造和安装误差所引起的径向位置和角度的微小偏移。最常用的是高性能的各类万向联轴器。图 4-2 为两种联轴器示意图。

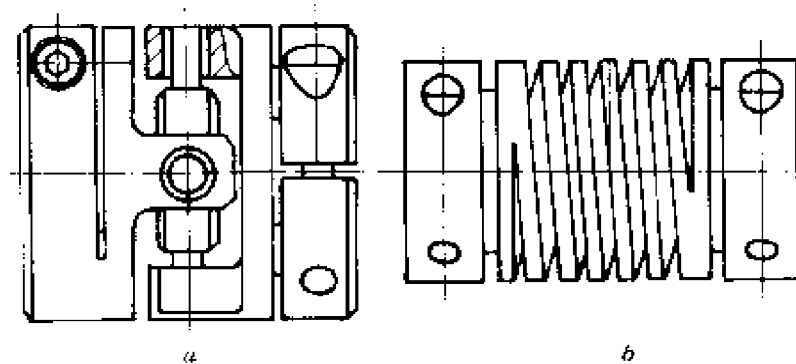


图 4-2 联轴器

a—十字架型；b—螺旋型

其中螺旋型联轴器用的最多。近年来，随着制造和安装技术的进

步，出现了带压紧环靠摩擦联结的刚性或半刚性联轴器，如图 4-3 所示。

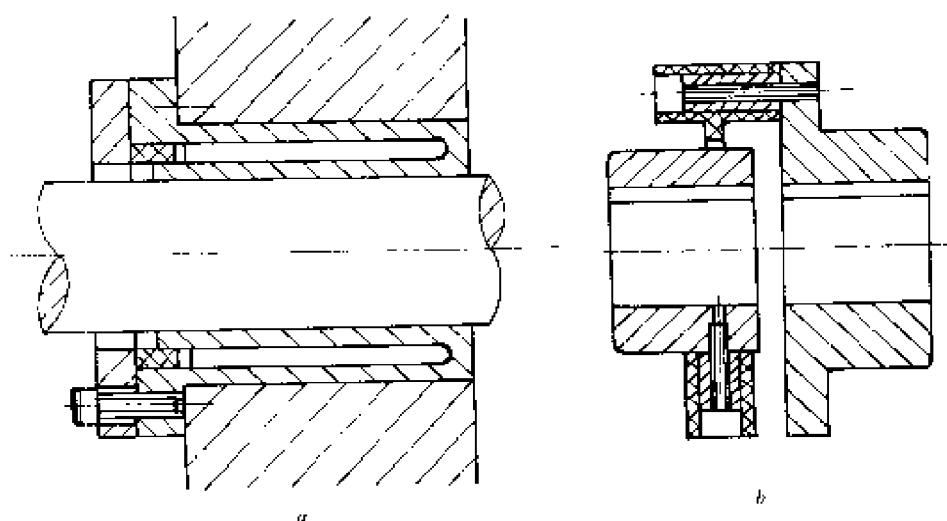


图 4-3 联轴器

a—刚性；*b*—半刚性

联轴器的选用原则与一般机械设计相同，分析时可将其视为刚体。


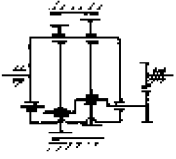
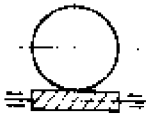

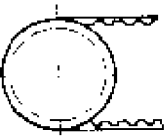
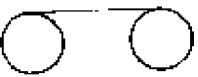
2. 常用于操作机的传动机构

机器人几乎使用了目前出现的绝大多数传动机构，其中最常用的如表 4-1 所示。表中所列的谐波传动、RV 摆线针轮行星传动和滚动螺旋传动将另行介绍。这里须特别注意的是齿轮传动、蜗轮传动和齿轮齿条传动的消除间隙问题，否则回差很大，达不到应有的转角精度要求。对于链传动、齿形带传动、钢带传动和钢绳传动，还必须考虑张紧问题，否则会产生很大的回差。


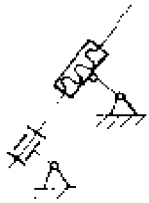


表 4-1 传动机构

序号	类别	原理简图	特点	轴间距	应用场合
1	齿轮传动		响应快，扭矩大，刚性好，可实现旋转方向的改变和复合传动	不大	腰、腕关节

续表 4-1

序号	类别	原理简图	特点	轴间距	应用场合
2	谐波传动		大速比, 同轴线, 响应快, 体积小, 重量轻, 回差小, 转矩大	零	所有关节
3	摆线针轮行星传动 (RV)		大速比, 同轴线, 响应快, 刚度好, 体积小, 回差小, 转矩大	零	前三关节, 特别是腰关节
4	蜗轮传动		大速比, 交错轴, 体积小, 回差小, 响应小, 刚度好, 转矩大效率低, 发热大	交错不大	腰关节, 手爪机构
5	链传动		速比小, 扭矩大, 刚度与张紧装置有关	大	腕关节 (驱动器后置)
6	齿形带传动		速比小, 转矩小, 刚性差, 无间隙	大	各关节的一级传动
7	钢带传动		速比小, 转矩小, 刚性与张紧装置有关, 无间隙	大	腕关节 (驱动器后置)

续表 4-1

序号	类别	原理简图	特点	轴间距	应用场合
8	钢绳传动		速比小, 无间隙	特大	腕关节, 手爪机构
9	连杆及摇块传动		回差小, 刚性好, 扭矩中等, 可保持特殊位形, 速比不匀	大	腕关节, 臂关节(驱动器后置)
10	滚动螺旋传动		效率高, 精度好, 刚度好, 无回差, 可实现运动方式改变, “速比”大	零	直动关节, 摇块传动
11	齿轮齿条传动		效率高, 精度好, 刚度好, 可实现运动方式变化	交错	直动关节, 手爪机构

3. 传动机构的基本要求

传动机构有以下几项基本要求:

(1) 结构紧凑, 即具有相同的传动功率和传动比时体积最小, 重量最轻;

(2) 传动刚度大, 即由驱动器的出轴到杆件的转轴在相同的扭矩时角度变形要小, 这样可以提高整机的固有频率, 并大大减轻整机的低频振动;

(3) 回差要小, 即由正转到反转时空行程要小, 这样可以得

到较高的位置控制精度；

(4) 寿命长、价格低。

4. 速比选择

选择速比 i 的目的是实现驱动器与负载之间的速度和力矩的匹配。选择方法有两种。

(1) 按额定速度选择，这是常速工作机构经常采用的方法，即

$$i = n_{m0}/n_{j0} \quad (4-5)$$

式中 n_{m0} 、 n_{j0} —— 驱动器和关节轴的额定转速。

(2) 按最大加速度选择。由于操作机经常工作在加、减速状态，故可取加速度最大作为速比选择的根据，这样可以得到最短的升速时间。为此有如下平衡方程：

$$\eta iT_m - T_j = (\eta i^2 J_m + J_j) \dot{\omega}_j$$

即

$$\dot{\omega}_j = (\eta iT_m - T_j) / (\eta i^2 J_m + J_j)$$

令 $\frac{d\dot{\omega}_j}{di} = 0$ ，可得最大加速度 $\dot{\omega}_j$ 条件下的速比 i ，即：

$$i = \frac{T_j}{\eta T_m} \pm \sqrt{\left(\frac{T_j}{\eta T_m}\right)^2 + \frac{J_j}{\eta J_m}} = \frac{T_j}{\eta T_m} \pm \sqrt{\left(\frac{T_j}{\eta T_m}\right)^2 + \frac{GD_j^2}{\eta GD_m^2}} \quad (4-6)$$

式中 η —— 效率；

T_m 、 T_j —— 驱动器、关节轴处的转矩；

J_m 、 J_j —— 驱动器、关节轴处负载的转动惯量；

GD_m^2 、 GD_j^2 —— 驱动器、关节轴处负载的飞轮力矩。

五、位移检测元件（装置）

机器人的驱动系统采用的是高精度无超调的位置控制系统，用以检测实际位移（线位移和角位移），在大多数情况下还兼作位移反馈的检测元件。位移检测元件主要有两类：一类为电位计，其输入为转角或线位移；输出为变化的电压值；另一类为编码器，其输入也为转角或线位移，输出为冲脉数。其他诸如旋转变压器等

在机器人中用的不多。位置检测元件的主要性能指标之一是分辨率，即每一个（或若干个）输出单位（电压量或脉冲数）所对应的位移量，如每单位脉冲对应的角位移（分或秒）。

1. 电位计

电位计（也叫电位器）通常采用绕线或导电塑料电阻元件。输入为带动其动臂运动的直线位移或角位移（转角），当电位计的两个固定端接上某一电压 V 时，其动臂将输出与位移成线性或某一非线性规律变化的电压 $e(t)$ 。其等效电路如图 4-4 所示。当输入 $\theta(t)$ 与输出 $e(t)$ 呈线性规律变化时，有

$$e(t) = k\theta(t) \quad (4-7)$$

式中 k ——比例常数，对于 n 圈电位计， $k = V / (2\pi n)$ 。

目前普通级电位计的标准阻值偏差为 $\pm 5\% \sim \pm 10\%$ ，特殊级电位计的阻值偏差为 $\pm 1\%$ 。阻值的线性度在 $\pm 0.25\% \sim \pm 0.5\%$ 之间。

电位计通常与关节轴（转轴或直动轴）相联。

2. 编码器

编码器是目前用途最广的光电位移检测元件。旋转型编码器用以检测角位移，称作码盘；直线型编码器用于检测线位移，称作光栅尺。编码器又可分绝对型和增量型两类。现以码盘为例加以说明。

图 4-5 为码盘（光电编码器）的结构原理图。码盘中，发光二极管发出的光线通过中间转盘的透光缝为光敏元件接收，转变为电脉冲信号，从而检测角度值。码盘可根据转盘的透光规律分作两种类型。

图 4-6a 是一种绝对式码盘的透光规律原理图。该码盘自圆心向外共有 4 个光道，每一道又有透光（白色）和不透光（黑色）两个部分。0 对应于 4 道都是透光（白色）部位，相当于二进制

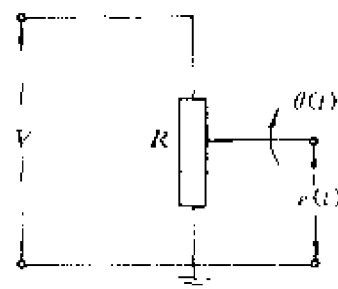


图 4-4 电位器等效电路

“0000”；1 对应于 3 道透光，第四道不透光，相当于二进制“0001”；2 对应于 1、2、4 道透光，3 道不透光，相当于“0010”。依此类推，4 个光道可得 16 个二进制码 (2^4)。可以看出，在整个转盘上相应于每一固定角度，就有一个四位二进制码与之对应。如果有 10 个光道，则每 0.36° ($2^{-10} \times 360^\circ$) 就有一个十位二进制码与之对应。光道越多，每转对应的二进制码就

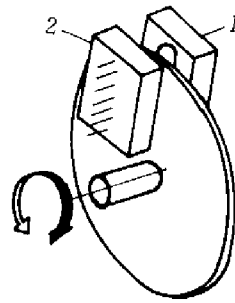


图 4-5 光电编码器结构示意图
1—发光二极管组；2—光敏二极管组

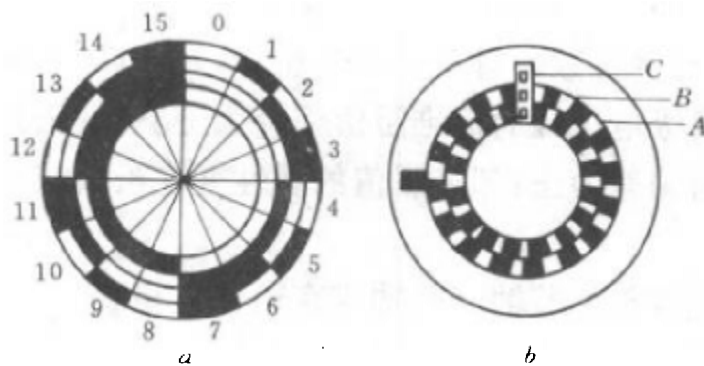


图 4-6 光电编码器透光规律原理图
a—绝对式；b—增量式

越多，分度就越细。目前实用的码盘，光道大都在 10 道以上。按这种透光规律制出的码盘，由于其固定角度对应于固定的二进制码，所以称作绝对式码盘。图 4-6a 只是该类码盘的一种透光规律，还可采用循环码或二进制补码的透光规律。

图 4-6b 是相对式码盘的透光规律。该码盘共有 3 个光道，A、B 两个光道黑白缝数量相等，每转一转均产生相同数量的电脉冲。可以看出，每一脉冲增量相应于一定的角位移增量，所以称增量

式码盘。A、B 两个光道虽黑白缝相等，但相位相差 90° ，所以脉冲波形如图 4-7 所示。可以看出，如果正转（图 4-7a），A 道的脉冲信号超前于 B 90° ；如果反转（图 4-7b），A 落后于 B 90° 。这样，用两道同数量的相差 90° 相位的透光缝，就解决了判断码盘的正反转问题。光道 C 只有一个透光缝，每转只发出一个脉冲信号，用作表示转数增量。

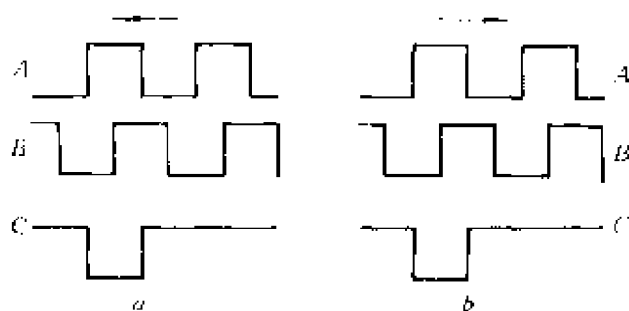


图 4-7 增量型码盘输出信号

a—正转 b—反转

这两种码盘的共同优点是无触点，无磨损，小惯量，可以高速旋转。此外，绝对式码盘有确定的零位，无需进行原点复归，但价格较贵，而相对式码盘则无绝对零位，故必须进行原点复归操作，但价格便宜。目前这两类码盘都大量用于工业机器人的关节角度测量，但绝对式码盘随着微电子技术的发展，价格正在降低，已愈来愈多的被厂家采用。

第二节 谐波传动

一、工作原理及常见的两种型式

谐波传动是利用一个构件的可控制的弹性变形来实现机械运动的传递。谐波传动通常由三个基本构件（俗称三大件）组成（如图 4-8 所示），包括一个有内齿的刚轮，一个工作时可产生径向弹性变形并带有外齿的柔轮和一个装在柔轮内部、呈椭圆形、外

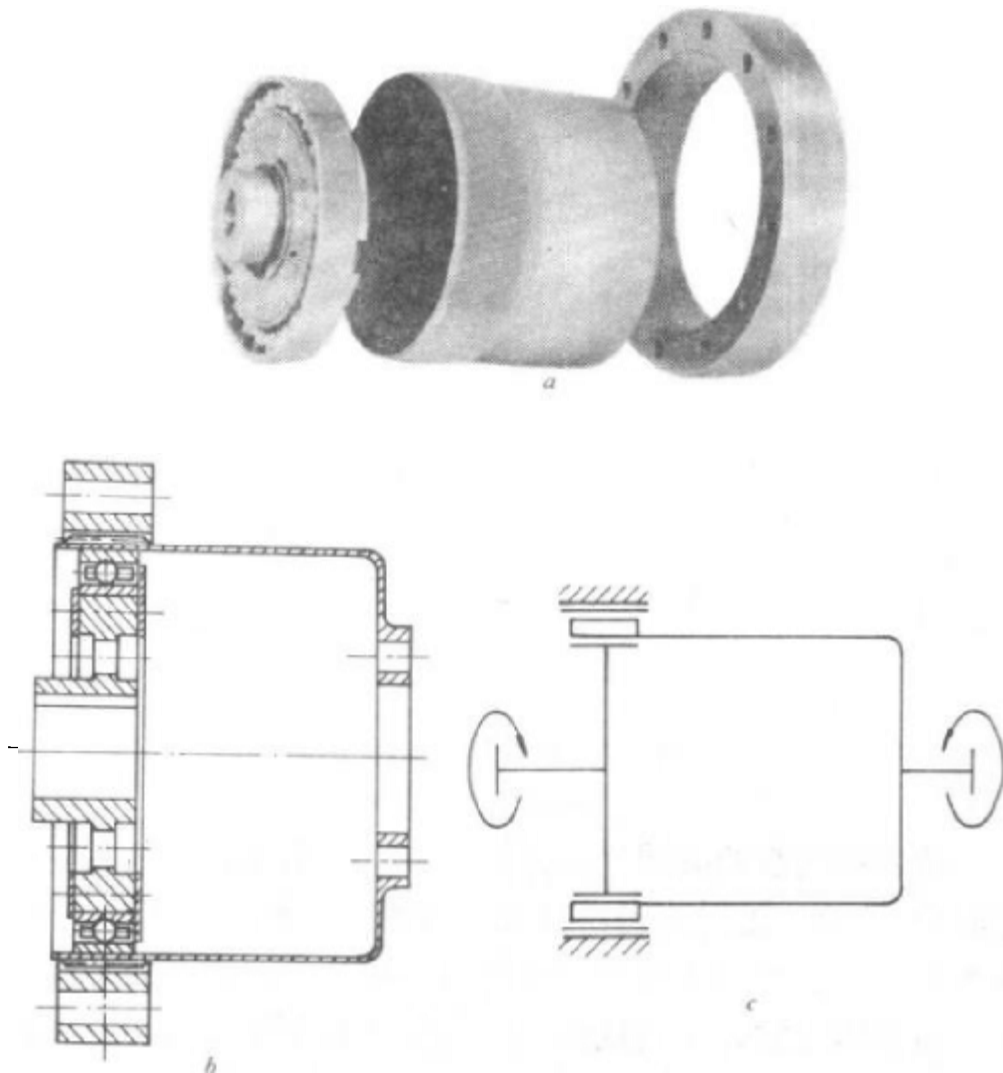


图 4-8 谐波传动
 a—直观图；b—结构图；c—机构简图

圈带有滚动轴承的波发生器。柔轮的外齿 Z_g 少于刚轮的内齿 Z_b 。在波发生器转动时，相应于长轴方向的柔轮外齿正好完全啮入刚轮的内齿；在短轴方向，则外齿全脱开内齿。当刚轮固定，波发生器转动时，柔轮的外齿将依次啮入和啮出刚轮的内齿，柔轮齿圈上的任一点的径向位移将呈近似于余弦波形的变化，所以这种传动称作谐波传动。

可以看出，由于 $Z_g < Z_b$ ，故当波发生器转过一周 (360°) 时，

柔轮相对于刚轮则反方向转过 $\Delta Z/Z_g$ 周 ($\Delta Z = Z_b - Z_g$)。如果波发生器与主动轴 (如电机) 相联, 柔轮与从动轴相连, 在刚轮固定时, 就可得到减速比为 $i = -\Delta Z/Z_g$ 的减速传动, 由于 ΔZ 很小 (通常为 2, 4), 故 i 很大, 一般为 50~300, 减速效果可与少齿行星传动相媲美。

若柔轮固定, 刚轮主动, 则波发生器可得到 $i = Z_b/\Delta Z$ 的同向增速运动。同样, 若刚轮固定, 柔轮主动, 波发生器也可得到增速运动。但增速运动常需一个最小的转动力矩。这一转矩与构件之间的摩擦以及三大件和轮齿的几何参数有关。只有参数适当, 且很好地跑合之后才能降低这一转矩。对于手把手示教的机器人, 必须充分注意这一特性, 如果最小的反力距太大, 就很难实现手把手示教。

图 4-9 为另一种常用的扁平式谐波传动机构。该机构有两个刚轮, 一个固定, 一个输出; 柔轮呈环形, 外齿较长; 输入仍为波发生器。可将此种类型的谐波传动看作是两级传动。第一级为刚轮 B_1 固定, 柔轮输出, 波发生器输入; 第二级为刚轮 B_2 输出, 共用柔轮和波发生器。设第一级的齿数分别为 Z_{b1} 、 Z_{g1} , 第二级为 Z_{b2} 、 Z_{g2} , 商品传动装置多取 $Z_{g1} = Z_{g2} = Z_{b2}$, 所以它的传动比仍为 $i = -(Z_{b1} - Z_{g1})/Z_g$ 。这可想象成仍是一级刚轮固定柔轮输出的传动, 只是输出部分用“花键”连接了输出“钢套”而已。这种传动形式的最大优点是大大缩小了谐波传动的轴间长度, 在操作机中多用于后三关节组成结构极为紧凑的腕结构。

上面的讨论只限于谐波传动的三大件, 它相当于齿轮传动中的一对带轴的齿轮, 在商品化生产中, 还有用三大件制成的各类减速器, 有单级、双级; 卧式、立式等, 供设计者选用。

二、谐波传动的主要特点

与一般齿轮传动相比, 谐波传动有如下主要特点。

(1) 传动比大, 单级传动比可为 50~300, 双级传动比可达 2×10^5 。

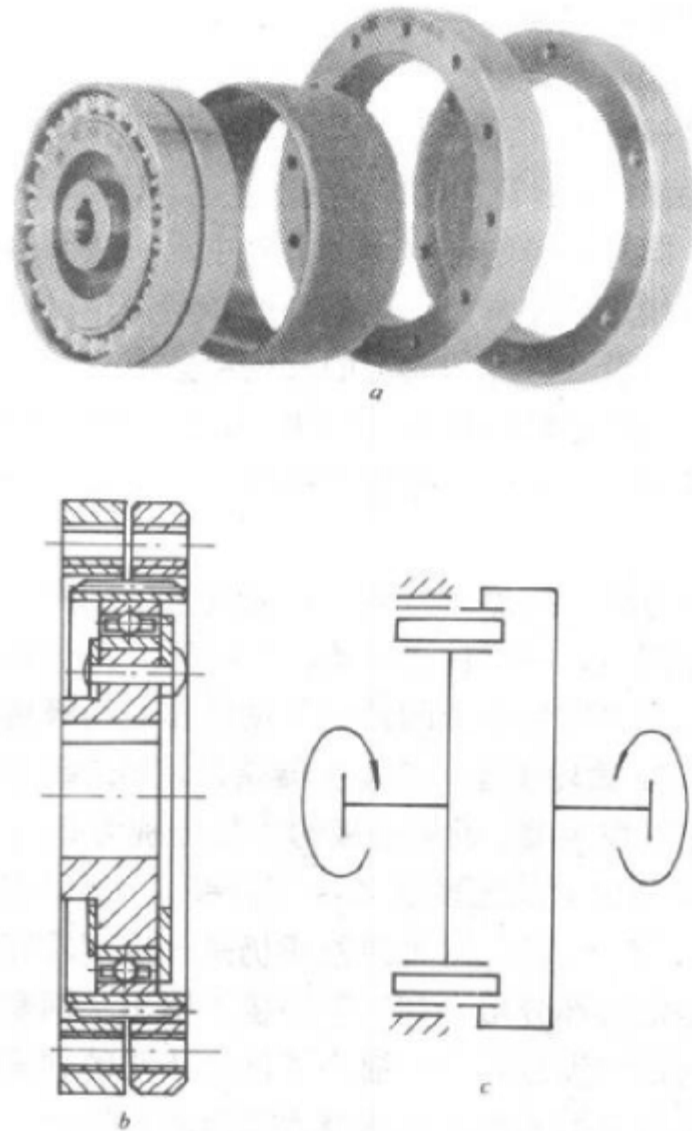


图 4-9 扁平式谐波传动
a—直观图；*b*—结构图；*c*—机构简图

(2) 传动平稳，承载能力高。在传动时同时参与啮合的齿数多，故传动平稳，承载能力高，传递单位扭矩的体积和重量小。在相同的工作条件下，体积可减小 20~50%。

(3) 齿面磨损小而均匀，传动效率高。若正确选择啮合参数，则齿面的相对滑动速度很低，因此磨损小、效率高。当结构合理，

润滑良好时，对 $i=100$ 的传动，效率 η 可达 0.85；对 $i=75$ 的传动，效率 η 可达 0.92。传动效率随着扭矩的增加而增加。而当传递的扭矩比额定值小 20% 时，效率很快降低。

(4) 传动精度高。在制造精度相同的情况下，谐波传动的精度可比普通齿轮传动高一级。若齿面经过很好的研磨，则谐波齿轮传动的传动精度要比普通齿轮传动高 4 倍。

(5) 回差小。精密谐波传动的回差一般可小于 $3' \sim 1'$ ，甚至可以实现无回差传动。

(6) 可以通过密封壁传递运动。当采用长杯式柔轮固定传动时，可实现向密封箱内传递运动，这是其他传动机构很难实现的。

(7) 谐波传动不能获得中间输出，并且杯式柔轮刚度较低。

三、谐波传动的选择

1. 谐波传动的技术数据

商品化的谐波传动装置有两种类型，即三大件和由三大件装配而成的减速器。对操作机来说，最常选用的是三大件，然后根据结构配置于各转动关节，这样可以构造出结构十分紧凑的传动系统。对三大件来说（对减速器也适用）通常有两种技术数据：运动、力和精度方面的数据和尺寸方面的数据，这些数据都可在有关产品样本中查得，或向厂家索取。下面简要介绍几个与谐波传动有关的技术数据。

(1) 平均负载转矩 T_v 、平均转速 n_v 和当量转矩 T_{eq} 。对经常处于起动、等速和减速运动的机器人操作机来说，其典型的转矩-时间和速度-时间关系曲线如图 4-10 所示， T_v 、 n_v 、 T_{eq} 的计算如下：

$$T_v = \sqrt[3]{\frac{n_1 t_1 T_1^3 + n_2 t_2 T_2^3 + n_3 t_3 T_3^3 + \dots}{n_1 t_1 + n_2 t_2 + n_3 t_3 + \dots}} \quad \text{N} \cdot \text{m} \quad (4-8)$$

$$n_v = \frac{n_1 t_1 + n_2 t_2 + n_3 t_3 + \dots}{t_1 + t_2 + t_3} \quad 1/\text{s} \quad (4-9)$$

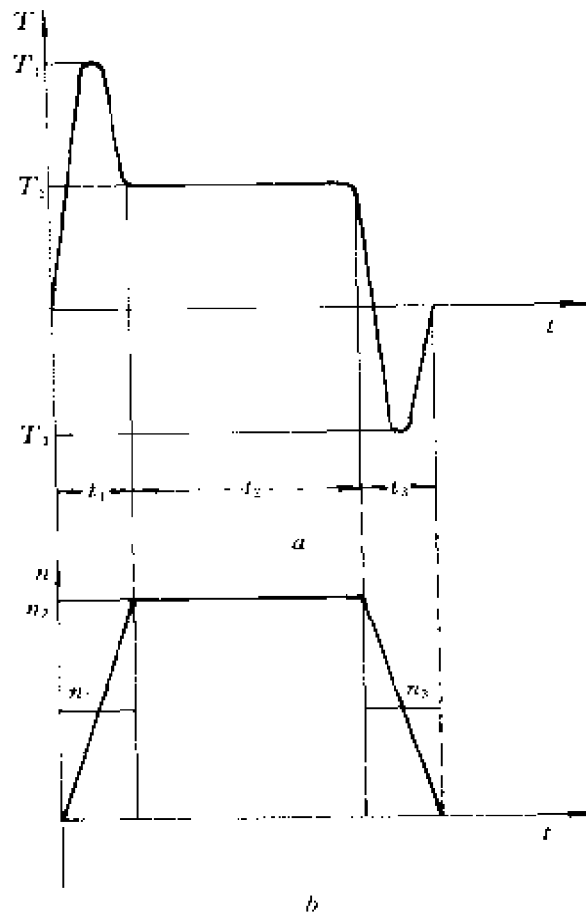


图 4-10 转矩、转速与时间的关系曲线
 a—转矩-时间；b—转速-时间

$$T_{ec} = T_v \cdot \sqrt[3]{\frac{n_v}{n_r}} \quad \text{N} \cdot \text{m} \quad (4-10)$$

式中 n_r ——某一额定转速。

(2) 飞轮力矩和刚性。对操作机来说，这两项技术数据非常重要，因为操作机的关节运动经常处于加减速的动态运动过程中。产品目录通常给出入轴（波发生器）处的 GD^2 值。如果需要计算，可取波发生器的 GD^2 值，因为柔轮速度很慢，其影响可以忽略不计。

谐波减速器的刚性可用图 4-11 表示。由图 4-11a 可知，刚度曲线是一迟滞回线。产品样本用图 4-11b 的形式给出分段的刚度

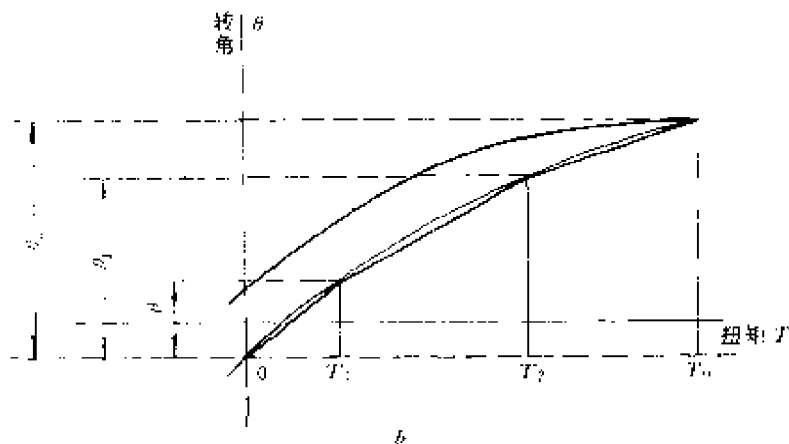
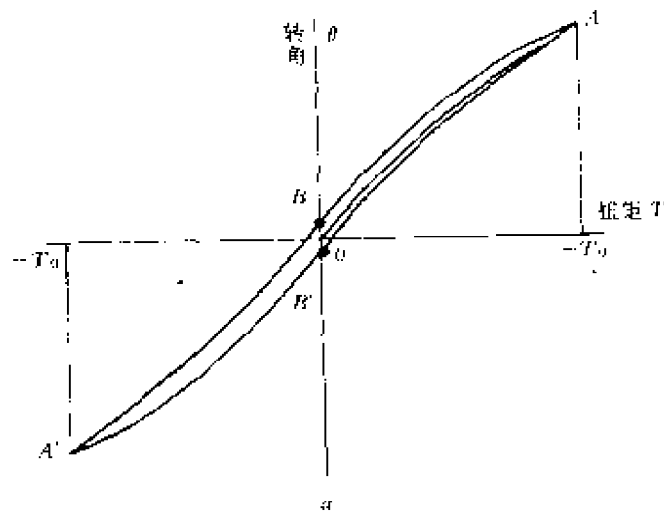


图 4-11 角度-扭矩曲线

a—实测曲线；b—简化曲线

K_1, K_2, K_3 。其中， $K_1 = T_1 / \theta_1$ ； $K_2 = \frac{T_2 - T_1}{\theta_2 - \theta_1}$ ； $K_3 = \frac{T_0 - T_2}{\theta_0 - \theta_2}$ 。在作动力学计算时，也可取平均值，或取 K_2 。

(3) 回差。回差又称空回，它不仅影响操作机的位置精度，而且对控制的过渡过程也有很大影响。回差应尽可能小一些，但过小会影响效率，同时价格也大大提高，一般回差取 $3' \sim 1'$ ，对于后三关节，也可取 $6' \sim 3'$ 。

2. 谐波传动的选择

谐波传动的选择分以下几个步骤：

(1) 确定结构形式（杯形柔轮还是环形柔轮）和速比。

(2) 绘制扭矩-时间，转速-时间曲线图，并计算 T_v 、 n_v 、 T_{eq} 。

(3) 在满足 $i_0 \approx i$ ， $T_{v0} \geq T_v$ ， $n_{v0} \geq n_v$ 的条件下根据样本确定型号（其中 i_0 、 T_{v0} 、 n_{v0} 为样本值）。

(4) 校核 T_{eq} ，即在 n_r 条件下 $T_{nr} \geq T_{eq}$ （其中 T_{nr} 是样本中对应 n_r 的扭矩）。

若产品样本未给出 T_{v0} 、 n_{v0} ，可用 $T_{nr} \geq T_{eq}$ 来选择谐波传动型号。

第三节 RV 摆线针轮传动

一、工作原理和速比计算

RV 摆线针轮传动装置，是由一级行星轮系再串联一级摆线针轮减速器组合而成的（如图 4-12 所示）。它有一个输入轴，通过轴上的齿轮 1，带动周向分布的 2~3 个行星轮 2，每个行星轮联接一个双向偏心轴，后者再带动两个径向对置的 RV 摆线齿轮 3 在有内齿为圆柱销的固定壳体上滚动，摆线轮 3 再通过周向分布的 2~3 个非圆柱销轴带动盘式输出轴转动。它的速比 i 大于普通摆线针轮减速器。 i 的算式为

$$i = \frac{\frac{Z_2}{Z_1} + \frac{Z_4 - Z_3}{Z_4}}{\frac{Z_4 - Z_3}{Z_4}} = \frac{Z_4 \frac{Z_2}{Z_1} + (Z_4 - Z_3)}{Z_4 - Z_3}$$

当 $Z_4 - Z_3 = 1$ 时

$$i = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} Z_4 \quad (4-11)$$

二、主要特点

与谐波传动相比，RV 摆线针轮传动除了具有相同的速比大、

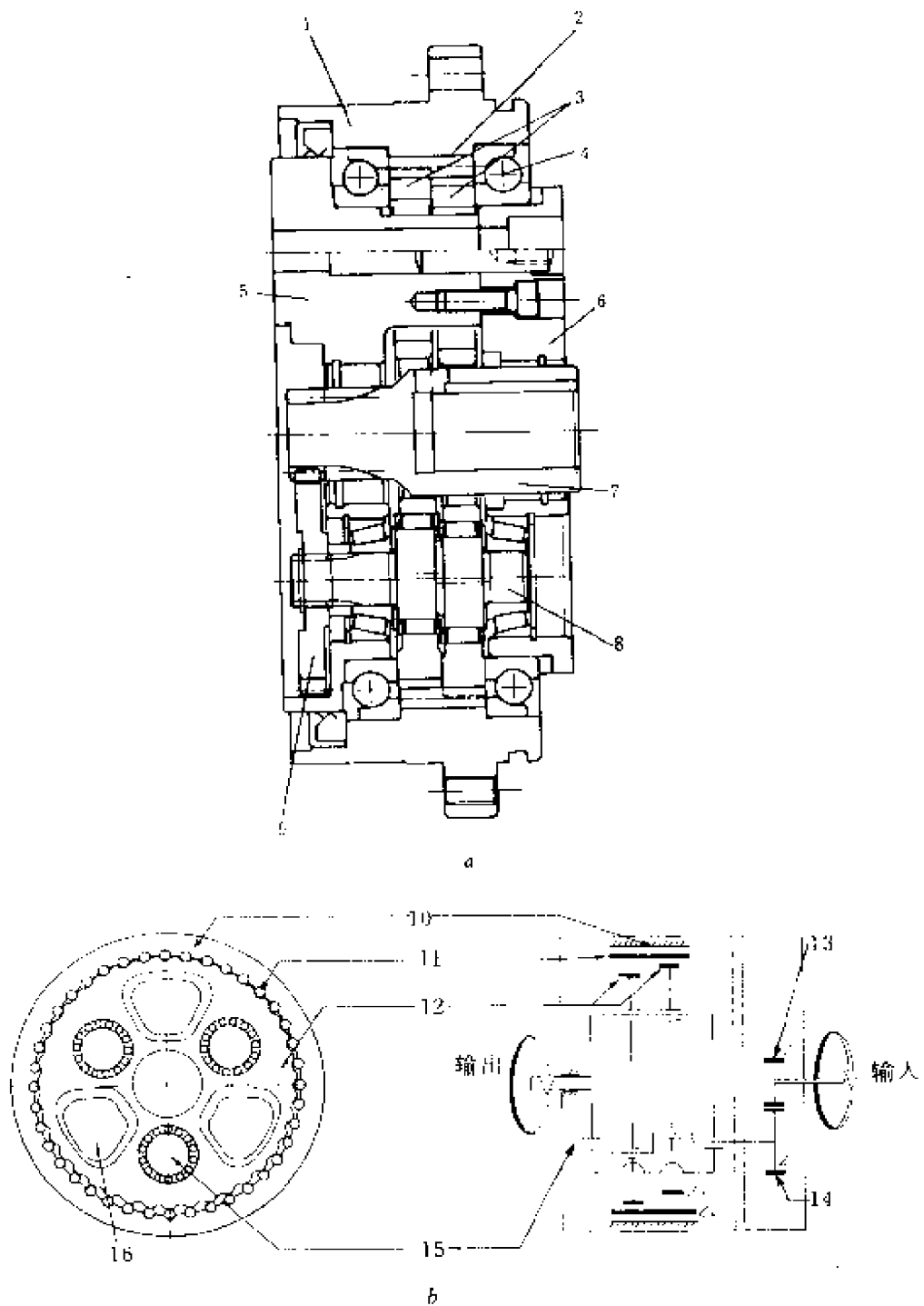


图 4-12 RV 摆线针轮减速器

a—结构图；b—原理图

1—壳体；2—销；3—RV 齿轮；4—主轴承；5—轴；6—螺栓端盖；7—输入齿轮；8—曲柄轴；9—行星齿轮；10—壳体；11—圆柱箱；12—RV 齿轮 (3)；13—太阳轮 (1)；14—行星轮；15—偏心轮；16—非圆柱销

同轴线传动、结构紧凑、效率高等特点外，最显著的特点是刚性好、 GD^2 小。以日本生产并用于机器人的谐波传动装置（三大件）与 RV 传动装置相比，在相同的输出转矩、转速和减速比条件下，两者的体积几乎相等，但后者的传动刚度要大 2~6 倍，折合到输入轴上， GD^2 要小一个数量级以上，但重量却增加了 1~3 倍。整机重量大而输入轴的飞轮力矩 GD^2 却特别小的原因是由于 RV 传动装置增加了一级行星传动，使得输入轴和齿轮 1 可以作成一个小质量不大的圆柱体，而后面的转动件，虽然质量很大，但经过一级减速，使折合到输入轴上的 GD^2 变得很小。由于高刚度，小 GD^2 和比较大的重量，使该减速器特别适用于操作机上的第一级旋转关节（腰关节），这时大的自重是坐落在底座上的，高刚度和小 GD^2 就充分发挥了作用。高刚度可以大大提高整机的固有频率，降低振动；小 GD^2 则在频繁加、减速的运动过程中可以提高响应速度并降低能量消耗。

三、RV 摆线针轮减速器的选择

RV 摆线针轮减速器的选择基本上与谐波传动相同，只是平均转矩 T_v 和转速 n_v 的计算略有区别：

$$T_v = \sqrt[10/3]{\frac{t_1 n_1 T_1^{10/3} + t_2 n_2 T_2^{10/3} + t_3 n_3 T_3^{10/3} + \dots}{t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 + \dots}} \quad \text{N} \cdot \text{m} \quad (4-12)$$

$$n_v = \frac{t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 + \dots}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots} \quad \text{1/s} \quad (4-13)$$

产品性能表给出的技术数据项目会因厂家的不同而有所差异，选择时应根据生产厂的选择说明和例题进行比较。此外，在订货时必须对回差（空回）数据加以限制，在一般操作机精度条件下，回差应限制在 3' 以下。

第四节 滚动螺旋传动^[10]

一、工作原理及结构形式

滚动螺旋传动是在具有螺旋槽的丝杠与螺母之间放入适当的滚珠，使丝杠与螺母之间由滑动摩擦变为滚动摩擦的一种螺旋传动，如图 4-13 所示。螺旋槽的正截面常有两种形式：单圆弧式和双圆弧式（图 4-14）。两种滚道的接触角均为 45° ，单圆弧滚道用

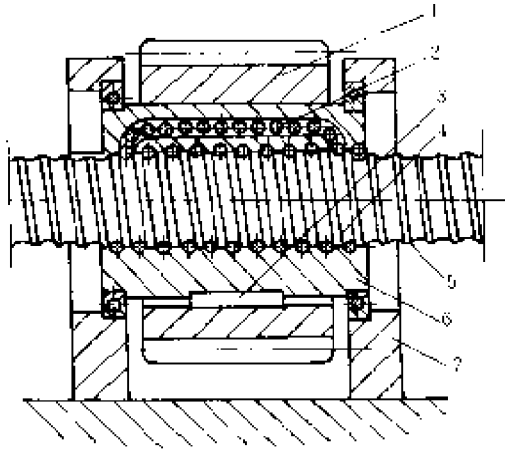


图 4-13 滚动螺旋传动

1—齿轮；2—返回装置；3—键；
4—滚珠；5—丝杠；6—螺母；7—座

于一般工作环境；双圆弧滚道用于灰尘多的环境，污物进入滚道后会被卷入槽底，再被润滑油冲去。为了降低接触应力，滚道半径 R 几乎接近滚珠半径 r ， $r/R=0.9\sim 0.97$ 。滚珠在工作过程中顺螺旋槽（滚道）滚动，故必须设置滚珠的返回通道，才能循环使用。返回通道有内循环和外循环两种，如图 4-15 所示。内循环是在螺母体内返回，外循环最常见的是插管式。

为了消除回差（空回），螺母分成两段，以垫片、双螺母或齿

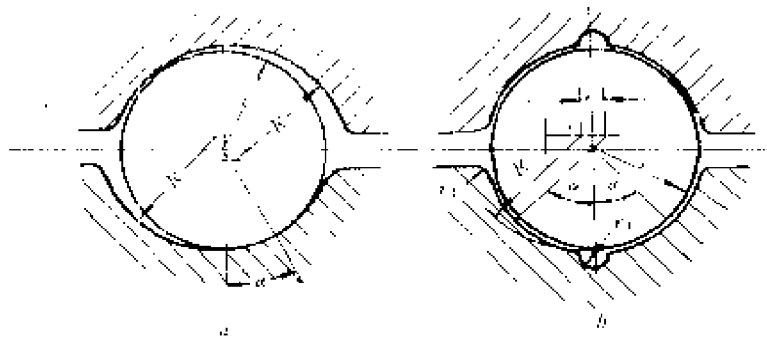


图 4-14 滚道形式

a—单圆弧；b—双圆弧

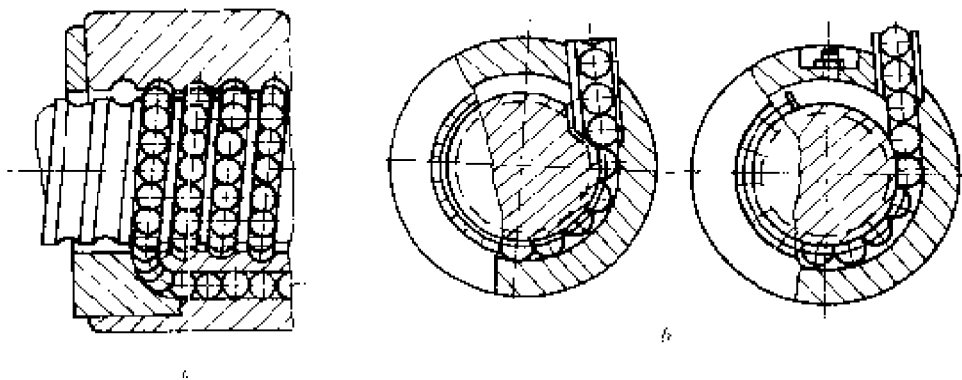


图 4-15 滚珠返回方式

a—内循环；b—插管式外循环

差调整两段螺母的相对轴向位置,从而消除间隙和施加预紧力,使得在有额定轴向负荷时也能使回差为零。图 4-16 为三种消隙方式,其中用的最多的是双螺母式,而齿差式最为可靠。

螺母与丝杠的材料一般为 GCr15、GCr9 等,硬度在 HRC60±2 左右。螺母内各圈滚珠所承受的载荷是不同的。第 1 圈滚珠约承受轴向载荷的 30~45%;第 5 圈以后几乎为零。为了使滚珠回返通畅,一列(即一条螺纹线)滚珠数不多于 150 个,且圈数不超

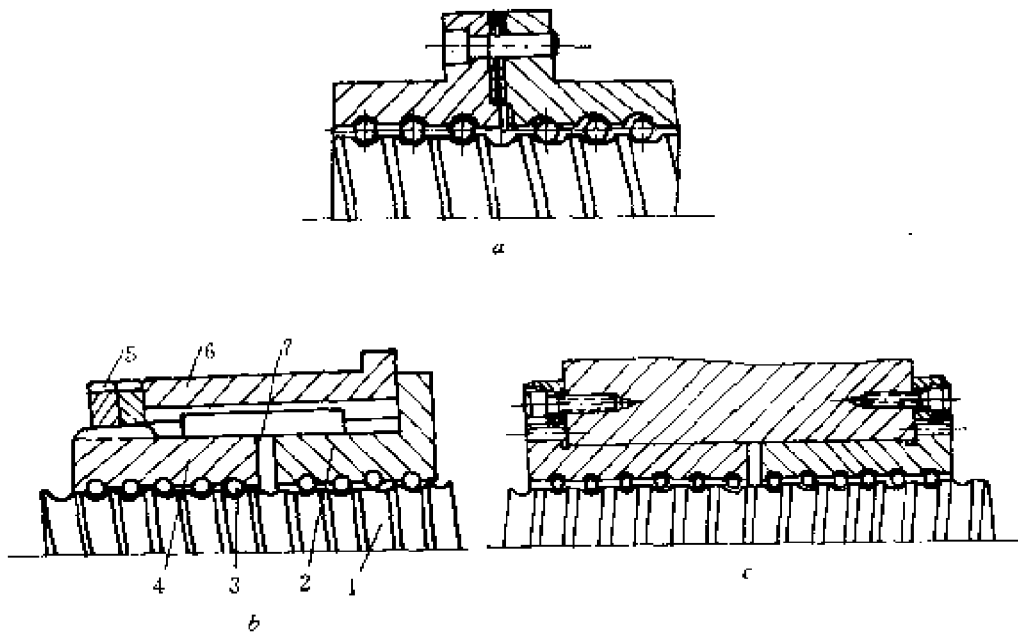


图 4-16 间隙和预紧力调整

a—垫片式；*b*—双螺母式；*c*—齿差式

1—丝杠；2—右螺母；3—滚珠；4—左螺母；5—圆螺母；6—套筒；7—键

过 3、5，否则应改双列或多列结构。

二、主要特点

滚动螺旋传动主要有以下一些特点。

(1) 摩擦小、效率高。一般情况下，滚动螺旋传动的效率在 90% 以上。在同样的负荷下，驱动扭矩较滑动螺旋传动减少 $2/3 \sim 3/4$ 。滚动螺旋传动的逆传动效率也很高，接近于正传动效率，故可作为直线运动变旋转运动的传动装置。也正是这一原因，该种传动不能自锁，必须有防止逆转的制动或自锁机构才能安全地用于有自重下降的场合。

(2) 灵敏度高，传动平稳。由于是滚动摩擦，动、静摩擦系数相差极小，无论是静止，还是高、低速传动，摩擦扭矩几乎不变，故灵敏度高、传动平稳。

(3) 磨损少、寿命长。滚珠螺旋副中的主要零件均经热处理，并有很高的表面光洁度，再加上滚动摩擦的磨损很小，因而有良好的耐磨性。

(4) 可消除轴向间隙，提高轴向刚度。由于该种传动效率高，预紧后仍能轻快地工作，所以可以通过预紧完全消除间隙，使反向时无空行程，并可通过预紧施加一定的预应力来提高传动刚度。

滚动螺旋传动最怕落入灰尘、铁屑、砂粒。通常，螺母两端必须密封，丝杠的外露部分必须用“风箱”套或钢带卷套加以密封。

三、承载能力和选择

滚动螺旋副的工作情况与滚动轴承相似，所以它的承载能力也用额定动载荷 C 和额定静载荷 C_0 来表示，它的定义、计算和选用方法和滚动轴承基本相同。滚动螺旋副的尺寸规格一般按额定动载荷或额定静载荷选定。对于细长而又承受压缩载荷的滚动丝杠，需作压杆稳定性校核；对转速高支承距离大的滚动丝杠，需作临界转速核算。

1. 按额定动载荷选用

额定动载荷 C (N) 是指一批相同规格的滚动螺旋副经过运转 10^6 转后 90% 的滚珠或螺纹滚道表面不产生疲劳损伤 (点蚀) 时的轴向载荷。不同规格滚动螺旋副的额定动载荷值可自产品样本查得。

实际应用中，由于要求的总运转时间 (寿命)、转速、载荷性质等与得到额定动载荷值时进行试验的条件不尽相同，因此必须根据已知条件，按下式折算成与之相当的额定动载荷值 C_i ，而且计算获得的 C_i 值应不大于额定动载荷值 C 。

$$C_i = \frac{f_h \cdot f_d \cdot f_H}{f_n} P_d \quad (4-14)$$

式中 f_h ——寿命系数， f_h 与 L_h 有以下关系：

$$f_s = \left(\frac{L_{ch}}{500} \right)^{\frac{1}{3}}$$

L_{ch} ——预期寿命，对于机器人，取 $L_b = 1500h$

f_d ——载荷性质系数，一般为 1~1.5，弧焊机器人取偏小值，搬运机器人取偏大值；

f_H ——动载荷硬度影响系数，当滚珠和滚道硬度 HRC 不小于 58 时，取 $f_H = 1$ ；

f_n ——转速系数，与 n_d 有以下关系：

$$f_n = \left(\frac{33.3}{n_d} \right)^{\frac{1}{6}}$$

n_d ——给定转速，根据机器人 $P-t$ 、 $n-t$ 图 (图 4-17)， n_d 可用下式计算：

$$n_d = \frac{n_1 t_1 + n_2 t_2 + n_3 t_3 + \dots}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots} \quad (4-15)$$

P_c ——当量轴向载荷，可按下式计算：

$$P_d = \sqrt[3]{\frac{P_1^3 n_1 t_1 + P_2^3 n_2 t_2 + P_3^3 n_3 t_3 + \dots}{n_1 t_1 + n_2 t_2 + n_3 t_3 + \dots}} \quad (4-16)$$

2. 按额定静载荷选用

额定静载荷 C_0 是指滚动螺旋副在静止状态下承受最大接触应力的滚珠和滚道接触面的塑性变形量之和为滚珠直径万分之一的轴向载荷。该值可通过产品样本获得。

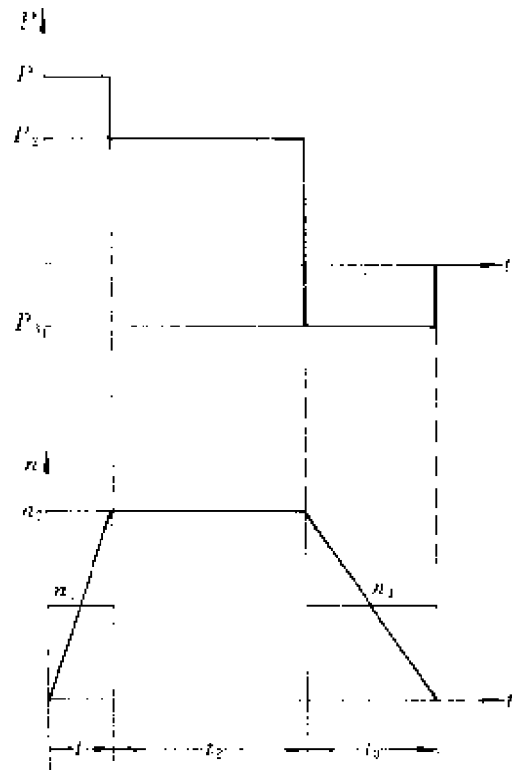


图 4-17 机器人 $P-t$ 、 $n-t$ 图

如果丝杠（或螺母）的转速小于 10r/min，可按静载荷选择。计算静载荷 C_{0j} 应小于或等于 C_0 。

$$C_{0j} = f_d f'_H P_{\max} \quad (4-17)$$

式中 f_d —— 载荷性质系数，同式（4-14）；

f'_H —— 静载荷硬度影响系数，当滚珠与滚道硬度 HRC 不小于 58 时，取 $f'_H = 1$ 。

第五节 驱动-传动系统的动态特性

驱动-传动系统是驱动器和传动装置两子系统的合成。下面分别讨论其动态特性。

一、电驱动器的动态特性^[4]

电动操作机的每个主动关节都有伺服电机驱动。现以直流永磁电机为例进行讨论。该类电机的特点是：

（1）力矩-功率比高，平滑，低速运转，力矩-速度特性是线性的，时间常数小；

（2）采用永磁磁场和直流供电，能以最小的输入功率提供最大的力矩；

（3）电机电感很小，电气时间常数很低。

图 4-18 是该类电机的等效电路及速度控制方框图。

图 4-18 中各符号分别表示：

U_a —— 电枢电压，V；

L_a —— 电枢电感，H；

R_a —— 电枢电阻， Ω ；

i_a —— 电枢电流，A；

e_b —— 反电势，V，与电机转速成正比；

τ_T —— 电机输出扭矩，即加到传动装置联轴器上的扭矩，N·m；

θ_m —— 电机轴的转角，rad；

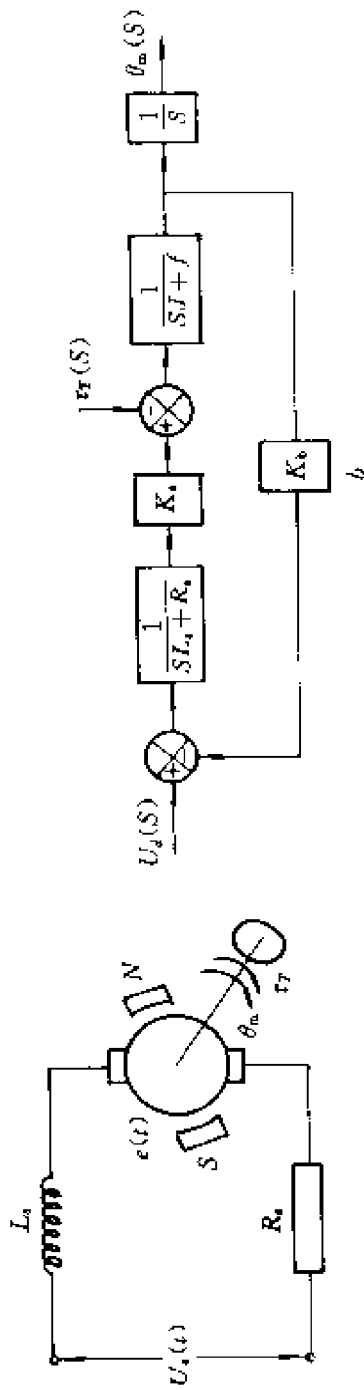


图 4-18 直流电机等效电路及速度控制方框图

a —等效电路图; b —速度反馈方框图

J ——电机转子的惯性矩, $\text{kg} \cdot \text{m}^2$;

f ——电机自身正比于转速的粘滞摩擦系数;

$U_d(S)$ ——给定电压的拉氏变换;

$\theta_m(S)$ ——电机转角的拉氏变换;

K_a ——电机力矩比例常数, $\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}$;

K_b ——速度系数, $\text{V} \cdot \text{s}/\text{rad}$ 。

由图 4-18 可得电机电压 $U_d(S)$ 与转角位移 $\theta_m(S)$ 之间的关系:

$$\theta_m(S) = \frac{K_a U_d(S) - \tau_T(S)(SL_a + R_a)}{S[S^2 J L_a + S(L_a f + R_a) + R_a f + K_b K_a]} \quad (4-18)$$

考虑到 L_a 很小, 可以略去。

若采用 PID 调节, 则位置反馈控制系统框图如图 4-19 所示。

由图 4-19 可得以下关系式:

$$\{[(\theta_d(S) - \theta_m(S)(K_P + SK_D + \frac{K_I}{S}) - K_b S \theta_m(S))]$$

$$\frac{K_a}{R_a} - \tau_T(S)\} \frac{1}{SJ + f} = S \theta_m(S)$$

由上式变换得:

$$\begin{aligned} \theta_m(S) \{S^2 R_a J + S(R_a f + K_b K_a) + K_a(K_P + SK_D + \frac{K_I}{S})\} / R_a \\ = \theta_d(S) \frac{K_a}{R_a} (K_P + SK_D + \frac{K_I}{S}) - \tau_T(S) \end{aligned} \quad (4-19)$$

式中 K_P ——比例 (P) 调节器增益系数;

K_D ——微分 (D) 调节器增益系数;

K_I ——积分 (I) 调节器增益系数。

如果只采用比例 (P) 调节, 或微分 (D)、积分 (I) 调节的作用太弱, 与 P 调节相比可以略去, 则式 (4-19) 可以变为:

$$\begin{aligned} \theta_m(S) \frac{S^2 R_a J + S(R_a f + K_b K_a) + K_a K_P}{R_a} \\ = \theta_d(S) K_P \frac{K_a}{R_a} - \tau_T(S) \end{aligned} \quad (4-20)$$

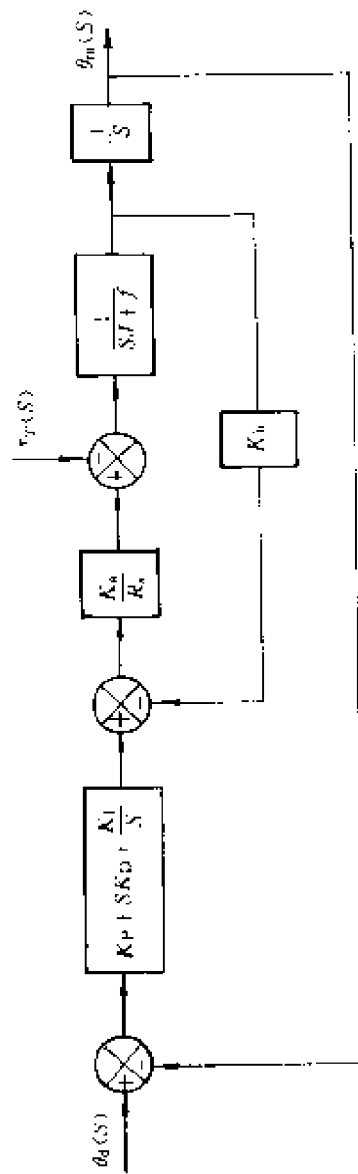


图 4-19 单关节操作位置反馈控制

令 $K_p K_s / R_s = K$ ，则有：

$$\theta_m(S) [S^2 J + (f + K)S + K] = \theta_d(S) K - \tau_T(S) \quad (4-21)$$

其动力学方程，表示在时域则是：

$$J\ddot{\theta}_m + (K + f)\dot{\theta}_m + K\theta_m = K\theta_d - \tau_T = \tau_{m0} \quad (4-22)$$

由该方程可以看出：

(1) 当给出给定转角 θ_d 之后，电机即在控制系统的作用下产生一扭矩 $\tau_m = K\theta_d$ ，其中一大部分 (τ_T) 用于驱动传动机构及与其相联的各类杆件；另一部分 (τ_{m0}) 则用于驱动电机自身的转子。

(2) 电机转子在 $\tau_{m0} = K\theta_d - \tau_T$ 的作用下，有一稳态转角 $\theta_m = \tau_{m0}/K$ ，并在 θ_m 处形成一个二阶运动的动态过程。

(3) 该动态运动过程的规律，完全决定于：

$$J\ddot{\theta}_m + (K + f)\dot{\theta}_m + K\theta_m = 0 \quad (4-23)$$

一般情况下，这是一个衰减振动，其固有频率为

$$\omega_0 = \sqrt{K/J} \quad (4-24)$$

阻尼系数为

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{K + f}{J} \sqrt{\frac{J}{K}} = \frac{1}{2} \frac{K + f}{\sqrt{JK}} \quad (4-25)$$

如果考虑到 I 、 D 调节的影响，则系统的动态特性将是比较复杂的，请参阅 [4]。

二、液压驱动器的动态特性^[3]

1962年出现的第一台工业机器人就是采用液压驱动的。由于液压驱动结构简单（省去了各种减速传动装置），便于控制，在机器人发展的最初年代里，液压驱动系统得到了广泛的应用。后来，由于随着直、交流伺服系统的迅猛发展，才使液压驱动系统在工业机器人中处于次要地位。但目前液压驱动在大负荷的操作机以及喷涂作业用机器人中仍占有较大的比例。

工业机器人用液压驱动系统有点位程序控制和电-液伺服控制两大类。前者多用于简单的搬运机器人或某些专用机器人中；

后者用于既要点位控制又要连续轨迹控制功能的机器人，特别是大负荷 ($\geq 5000\text{N}$) 机器人。图 4-20 为一种简单的四通滑阀控制的电-液伺服驱动系统原理图。由图可知，位置误差 e 经增益系数为 K_1 的放大器放大，用以产生驱动四通滑阀（又称四边阀）的力使滑阀移动（变量为 x ），再驱动油缸中的活塞运动（变量为 y ），从而驱动负载按某一运动规律运动（变量为 θ_m ）。图示外力还包括粘滞阻尼。

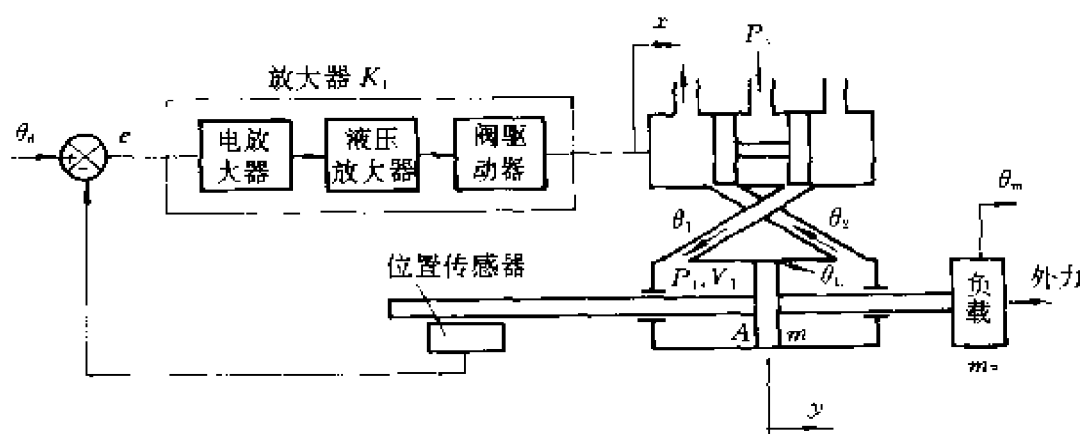


图 4-20 电-液伺服驱动系统结构图

根据液压传动理论，四通阀的输出流量分别为：

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Kx \sqrt{P_s - P_1} \\ Q_2 &= -Kx \sqrt{P_2} \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

式中 P_s —— 液压源压力；
 P_1 、 P_2 —— 油缸两腔的压力；
 x —— 滑阀的输入位移。

令 q_1 、 q_2 、 p_1 、 p_2 和 x 分别表示在 Q_1 、 Q_2 、 p_1 、 p_2 和 X 条件下某一稳态位置变量，可得滑阀液流的运动方程：

$$q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial X} \Big|_{P_1} x + \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \Big|_X p_1 = c_1 x - c_2 p_1 \quad (4-27)$$

$$q_2 = \left. \frac{\partial Q_2}{\partial X} \right|_{P_2} x + \left. \frac{\partial Q_2}{\partial P_2} \right|_X p_2 = -c_1 X - c_2 p_2 \quad (4-28)$$

式中 c_1 ——流量增益或灵敏度；

c_2 ——液流压力系数。

如图 4-20 所示， P_1 、 V_1 分别表示油缸左腔的压力和体积； P_2 、 V_2 表示右腔的压力和体积。根据功能守恒原理，油缸左腔的压力和体积有如下的表达式：

$$P_1 Q_1 = P_2 Q_L + \frac{dT}{dt} \quad (4-29)$$

式中 Q_L ——油缸左腔向右腔的泄漏；

T ——油缸左腔所贮存的能量 ($T = P_1 V_1$)。

于是：

$$\frac{dT}{dt} = V_1 \frac{dP_1}{dt} + P_1 \frac{dV_1}{dt} \quad (4-30)$$

令 B 表示流体容积的弹性模数，则：

$$Q_1 = Q_L + \frac{V_1}{B} \frac{dP_1}{dt} + \frac{dV_1}{dt}$$

因为 $V_1 = AY$ (A 为活塞有效面积； Y 为活塞位移)，代入式 (4-30)，得：

$$Q_1 = Q_L + \frac{V_1}{B} \frac{dP_1}{dt} + A \frac{dY}{dt} \quad (4-31)$$

同理可得：

$$Q_2 = -Q_L + \frac{V_2}{B} \frac{dP_2}{dt} - A \frac{dY}{dt} \quad (4-32)$$

油缸油流的运动方程是：

$$q_1 = q_L + \frac{V_1}{B} \dot{p}_1 + A \dot{y} \quad (4-33)$$

$$q_2 = -q_L + \frac{V_2}{B} \dot{p}_2 - A \dot{y} \quad (4-34)$$

式中 q_L ——漏损流量，并与 L_m 有以下关系：

$$q_L = -L_m(p_1 - p_2)$$

L_m ——漏损系数。

在油流的推动下，活塞和负载的运动方程为：

$$(p_1 - p_2)A = (m + m_p)\ddot{y} + b\dot{y}$$

式中 m 、 m_p ——活塞和负载的质量；

b ——粘滞摩擦系数。

由图 4-20 知， $\theta_m = y$ ，所以 $\dot{y} = \dot{\theta}_m$ ， $\ddot{y} = \ddot{\theta}_m$ ，上式变为：

$$(p_1 - p_2)A = (m + m_p)\ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m \quad (4-35)$$

联合求解上述各式，可得：

$$\theta_m(S) = \frac{ABK\sqrt{2P_s}/V(m + m_p)}{S\{S^2 + S[(c_2 + 2L_m)B/V + b/(m + m_p)] + (B/V(m + m_p)(b(c_2 + 2L_m) + 2A^2))\}} + \theta_x(S)$$

其传递函数是：

$$\frac{\theta_m(S)}{X(S)} = \frac{\omega_n^2}{\tau_1 S(S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2)} = G_1(S) \quad (4-36)$$

式中 ω_n ——自振角频率；

τ_1 ——时间常数；

ξ ——阻尼系数。

$$\omega_n = \frac{2B(A^2 + b(c_2 + 2L_m))}{V(m + m_p)}$$

$$\tau_1 = \frac{2A}{K\sqrt{2P_s}}$$

$$\xi = \frac{B(c_2 + 2L_m)(m + m_p) + bV}{A\sqrt{8B(m + m_p)V}}$$

当反馈系数为 1 时，图 4-20 可简化为如图 4-21 所示的结构框图：

其运动方程是：

$$\begin{aligned} \theta_m &= \frac{K_1 G_1(S)}{1 + K_1 G_1(S)} \theta_d \\ &= \frac{K_1 \omega_n^2}{k_1 \omega_n^2 + \tau_1 S(S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2)} \end{aligned}$$

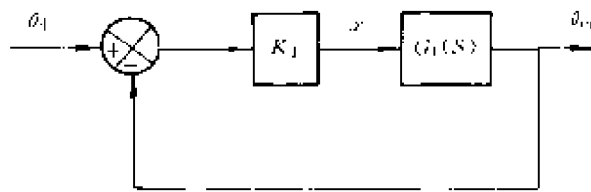


图 4-21 液压伺服系统框图

$$= \frac{\omega_c^2}{\tau_1 S^3 + 2\xi_c \tau_2 \omega_c S^2 + \tau_2 \omega_c^2 S + \omega_c^2} \quad (4-37)$$

式中 $\omega_c = K_1 \omega_n$;

$$\xi_c = \xi \sqrt{K_1};$$

$$\tau_2 = \tau_1 / K_1。$$

由式 (4-37) 可知, 电液伺服传动系统 (如图 4-20) 是一个三阶系统, 但可看作为一个一阶系统和一个二阶系统串联组成, 这样以便于对系统进行分析研究。

三、传动系统的构成及其简化

机器人某个关节的传动机构在最一般的情况下可能包括谐波减速器、齿轮副、联轴器、轴、链及链轮等传动件。为了便于叙述, 我们可以先假设一个包括多传动形式的传动链, 并对其进行分析建模。图 4-22 所示的传动系统由联轴器 (与电机相连)、轴 I ~ IV、谐波减速器 H、齿轮副 G、链传动 C 等构成。如果把各个零件的变形都加以考虑, 动力学方程将十分复杂, 况且各构件的刚度又相差很大。所以, 为了在较好精度下简化计算, 我们作如下假定:

- (1) 轴的质量简化到其两端的联接件上, 或者忽略不计;
- (2) 齿轮副为刚性;

(3) 谐波减速器的扭转变形只发生在柔轮上, 柔轮的惯性参数折算到波发生器上;

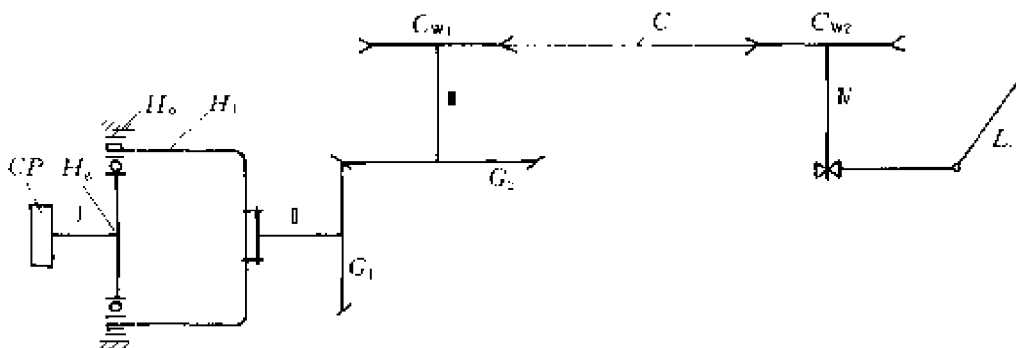


图 4-22 传动系统

(4) 链轮为刚性，变形只发生在链条上，链条的质量简化到链轮上。

上述假定具有普遍的参考价值。

四、传动系统的“单元”分析

这里的“单元”是借用词，即把传动系统分成几部分，分析其力学和运动学关系。

图 4-22 可以简化为计算简图，如图 4-23 所示。

图 4-23 中各符号的含义如下：

τ_T, τ_{T0} ——联轴器的输入和输出扭矩；

θ_T, θ_{T0} ——联轴器的输入和输出转角， $\theta_T = \theta_{T0}$ ；

K_1, K_2, K_3, K_4 ——轴 I、II、III、IV 的扭转刚度；

K_H ——谐波减速器柔轮的刚度，可令其等于谐波减速器产品说明书给出的刚度；

K_c ——链条的刚度（拉伸刚度）；

I_{CP}, I_{C1}, I_{C2} ——联轴器及两个链轮的惯量；

I_H, I_G ——谐波和齿轮折合到输入轴上的转动惯量；

$\theta_H, \theta_{H0}, \theta_G, \theta_{G0}, \theta_{C1}, \theta_{C10}, \theta_{C2}, \theta_{C20}$ ——谐波传动、齿轮传动、链轮 1、链轮 2 的输入、输出转角，其中 $\theta_H = i_H \theta_{H20}$ ， $\theta_G = i_G \theta_{G0}$ ，

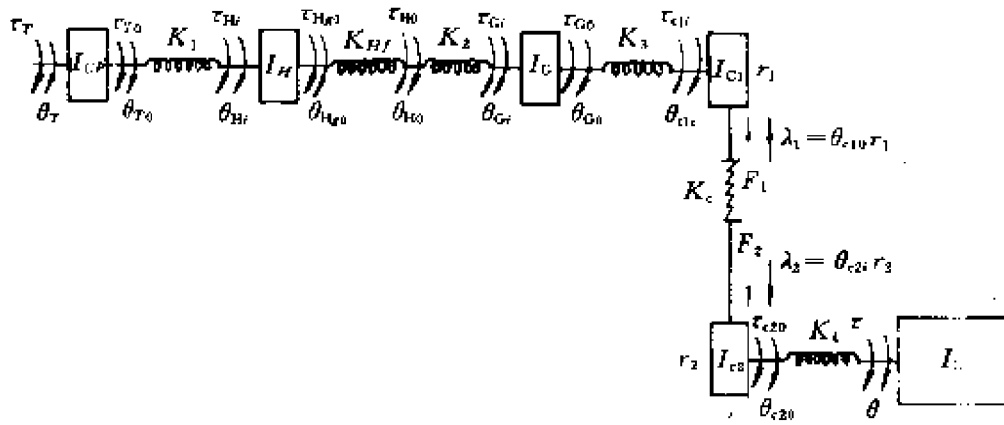


图 4-23 传动系统单元分析简图

$\theta_{C1} = i_c \theta_{C2}$, $\theta_{C2} = i_c \theta_{C20}$, θ_{H0} 为波发生器的输出转角, i_G 、 i_H 、 i_C 分别为齿轮转动、谐波传动以及链传动的传动比;

θ ——关节轴的转角;

τ_H 、 τ_{H0} 、 τ_G 、 τ_{G0} 、 τ_{C1} 、 τ_{C20} ——谐波减速器、齿轮传动、链轮传动的输入、输出扭矩, $\tau_{H0} = \tau_G$, $\tau_{G0} = \tau_{C1}$;

τ_{H0} ——波发生器的输出扭矩, $\tau_{H0} = \tau_G$;

τ ——关节轴驱动扭矩, $\tau = \tau_{C20}$;

F_1 、 F_2 ——链传动紧边张力, $F_1 = F_2$;

r_1 、 r_2 ——链轮 1、2 的半径, $r_1 = r_2 / i_C$;

λ_1 、 λ_2 ——链轮 1、2 的输出、输入长度, $\lambda_1 = \lambda_2$ 。

根据弹簧两端力相等原理及刚体轮盘输入、输出角位移相等原理, 图 4-23 可改为图 4-24。

图中 K_e 为 K_{HF} 与 K_2 的串联当量刚度, $K_e = \frac{K_{HF} K_2}{K_{HF} + K_2}$ 。其他符号含义同图 4-23。

由图 4-24 分别对 I_{CP} 、 I_H 、 I_G 、 I_{C1} 、 I_{C2} 等取力矩平衡方程:

$$\tau_T = I_{CP} \ddot{\theta}_T + C_1 (\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_H) + K_1 (\theta_T - \theta_H) \quad (4-38a)$$

$$K_1 (\theta_T - \theta_H) + C_1 (\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_H) = I_H \ddot{\theta}_H + \frac{1}{i_H} K_e \left(\frac{1}{i_H} \dot{\theta}_H - \dot{\theta}_G \right)$$

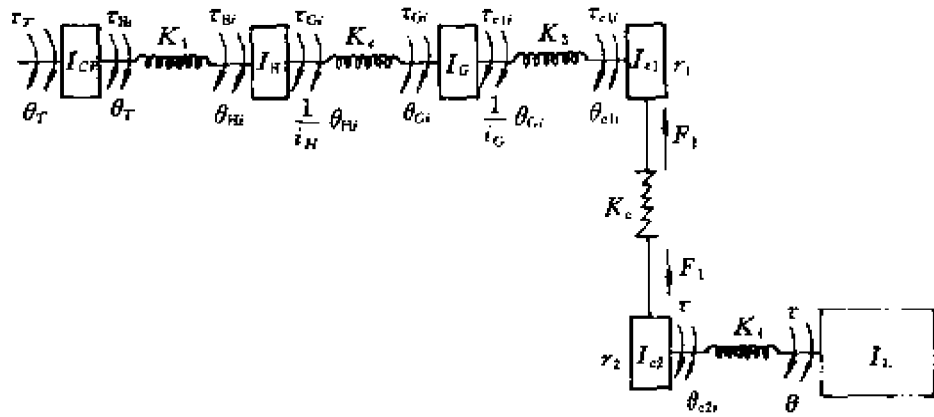


图 4-24 简化后的传动系统计算简图

$$+ \frac{1}{i_H} C_c \left(\frac{1}{i_H} \theta_{H1} - \theta_{G1} \right) \quad (4-38b)$$

$$K_c \left(\frac{1}{i_H} \theta_{H1} - \theta_{G1} \right) + C_c \left(\frac{1}{i_H} \theta_{H1} - \theta_{G1} \right) = I_G \ddot{\theta}_{G1} + \frac{1}{i_G} K_3 \left(\frac{1}{i_G} \theta_{G1} - \theta_{C21} \right) + \frac{1}{i_G} C_3 \left(\frac{1}{i_G} \theta_{G1} - \theta_{C21} \right) \quad (4-38c)$$

$$K_3 \left(\frac{1}{i_G} \theta_{G1} - \theta_{C21} \right) + C_3 \left(\frac{1}{i_G} \theta_{G1} - \theta_{C21} \right) = I_{C1} \ddot{\theta}_{C21} + r_1 K_c \left(\theta_{C21} \cdot r_1 - \theta_{C22} \cdot r_2 \right) + r_1 C_c \left(\theta_{C21} \cdot r_1 - \theta_{C22} \cdot r_2 \right) \quad (4-38d)$$

$$r_2 K_c \left(\theta_{C21} \cdot r_1 - \theta_{C22} \cdot r_2 \right) + r_2 C_c \left(\theta_{C21} \cdot r_1 - \theta_{C22} \cdot r_2 \right) = I_{C2} \ddot{\theta}_{C22} + K_4 \left(\theta_{C22} - \theta \right) + C_4 \left(\theta_{C22} - \theta \right) \quad (4-38e)$$

$$\tau = K_4 \left(\theta_{C22} - \theta \right) + C_4 \left(\theta_{C22} - \theta \right) \quad (4-38f)$$

实际上，式 (4-38) a、b、c、d、e 各式就是把系统分作联轴器单元、谐波传动单元、齿轮传动单元、链传动单元等的“单元”分析。由图 4-22 可以清楚地看出，该系统是一个多自由度的扭转振动系统。

五、传动系统动力学方程

将式 (4-38) 展开，写成矩阵形式，即得到该系统的动力学方

程：

$$[M_t]\{\ddot{\theta}_t\} + [C_t]\{\dot{\theta}_t\} + [K_t]\{\theta_t\} = \{Q_t\} \quad (4-39)$$

式中 $[M_t]$ ——质（惯）量矩阵，见式（4-40）；

$[C_t]$ ——阻尼矩阵，见式（4-41）；

$[K_t]$ ——刚度矩阵，见式（4-42）；

$\{Q_t\}$ ——力（力矩）向量， $\{Q_t\} = \{\tau_T 0 0 0 0 \tau\}^T$ ；

$\{\theta_t\}$ ——位移（线位移或角位移）， $\{\theta_t\} = \{\theta_T \theta_H \theta_G \theta_{C1} \theta_{C2} \theta\}$ ， $\{\dot{\theta}_t\}$ 、 $\{\ddot{\theta}_t\}$ 分别是 $\{\theta_t\}$ 的二阶、一阶导数。

$$[M_t] = \text{diag}[I_{CP} \quad I_H \quad I_G \quad I_{C1} \quad I_{C2} \quad 0] \quad (4-40)$$

$$[C_t] = \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & C_1 + C_e/i_H & -C_e/i_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_e/i_H & C_e + C_3/i_G & -C_3/i_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3/i_G & C_3 + r_1^2 C_e & -r_1 r_2 C_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_1 r_2 C_e & r_2^2 C_e + C_4 & -C_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_4 & C_4 \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

$$[K_t] = \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 & & & & \\ -K_1 & K_1 + K_e/i_H & -K_e/i_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_e/i_H & K_e + K_3/i_G & -K_3/i_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3/i_G & K_3 + r_1^2 K_e & -r_1 r_2 K_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_1 r_2 K_e & r_2^2 K_e + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

有了方程（4-39），即可求出传动系统的固有频率等动态特性参数及响应曲线。

六、驱动-传动系统的动态方程式

将方程 (4-22) 与 (4-39) 联立, 即得驱动-传动系统的运动微分方程, 即动态方程:

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\theta}_m + (K + f)\dot{\theta}_m + K\theta_m &= K\theta_d - \tau_T \\ [M_T]\{\ddot{\theta}_i\} + [C_T]\{\dot{\theta}_i\} + [K_T]\{\theta_i\} &= \{Q_i\} \end{aligned} \right\} \quad (4-43)$$

式中 $\theta_m = \theta_T$, 即电机的输出转角, 也就是传动系统的输入转角, τ_T 为传动系统的输入扭矩。

θ_d 可以看作是系统的刚体位移。在作离散化计算时, 可把一系列的 $\theta_{d1}, \theta_{d2}, \theta_{d3} \dots \theta_{di}$ 当作电机的输出转角, 即对应于 $\theta_{T1} = \theta_{d1}, \theta_{T2} = \theta_{d2} \dots \theta_{Ti} = \theta_{di}$ 时的瞬时结构的固结角。在每一瞬时 (T_i), 式 (4-33) 中的第一个方程取 $\theta_d = 0$, 即电机正好按前一瞬时的“输入”转角 θ_{di} 移动了 $\Delta\theta_{Ti}$ ($\Delta\theta_{Ti} = \theta_{di} - \theta_{di-1}$) 后被固结在 θ_{Ti} , 这时, 考虑到方程 (4-38a), 得:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_T + (K + f)\dot{\theta}_T + K\theta_T + I_{CP}\ddot{\theta}_T + C_1(\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_H) \\ - K_1(\theta_T - \theta_H) = 0 \end{aligned} \quad (4-44)$$

将方程 (4-44) 替代方程 (4-38a), 并与 (4-38 b~f) 联立, 即得用矩阵形式表示的驱动-传动系统动力学方程 (为了与式 4-39 加以区分, 改换下标 i 为 T):

$$[M_T]\{\ddot{\theta}_T\} + [C_T]\{\dot{\theta}_T\} + [K_T]\{\theta_T\} = \{Q_i\} \quad (4-45)$$

上式中:

$$[M_T] = \text{diag}[I_m + I_{CP} \quad I_H \quad I_G \quad I_{c1} \quad I_{c2} \quad 0] \quad (4-46)$$

$$[Q_T] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tau]$$

$[C_T]$ 和 $[K_T]$ 的第一行分别改作:

$$[C_T]_{(1 \times 6)} = [C + (K + f) \quad -C_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4-47)$$

$$[K_T]_{(1 \times 6)} = [K + K_1 \quad -K_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4-48)$$

其他各行列元素均与式 (4-49)、(4-42) 相同, 即得 $[C_T]$ 和 $[K_T]$ 。

至此, 我们就得到了驱动-传动系统的二阶运动微分方程。它就是该系统动态分析与综合的数学模型。

必须注意，式(4-22)是式(4-19)略去微分(D)调节和积分(I)调节之后的简化方程。通常操作机的各关节的控制规律都不是单一的比例调节，所以由方程(4-19)如何得出二阶形式的方程(4-22)还必须由控制理论解决。

七、实例分析

图4-25为一台5自由度、旋转关节全电动弧焊机器人示意图。该机器人腰部(关节 J_1)的回转速度高，惯性大，且在工作过程中常因大、小臂的运动而使惯性具有时变特征。现以该机器人腰关节为例进行驱动-传动系统的动态性能分析，以说明前述理论。

1. 建立方程

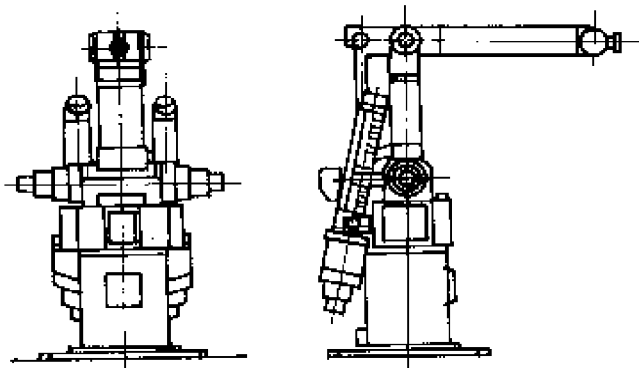


图 4-25 5 自由度机器人

图4-25所示的机器人腰部由直流电机通过谐波减速器驱动。为了简化分析，根据结构特点作如下假定：

(1) 谐波减速器的变形集中在柔轮上，并忽略电机轴的变形和谐波减速器与机体之间的联接变形；

(2) 忽略柔轮及其与本体之间联接件的惯量，将波发生器的惯量折算到电机转子上；

(3) 腕部各关节(即第4、第5关节)固定不动，简化成一集

中质量,大、小臂等看作是刚性构件,运动时只影响机体的转动惯量。

在以上假设的基础上,可将驱动-传动系统简化为如图 4-26 所示的运动模型。

基于同样的原因,我们假定电机的控制系统为只有比例调节的位置反馈控制,其框图如图 4-27 所示。

根据 (4-22) 式,可写出电机转子的动力学方程:

$$I_m \ddot{\theta}_m + C_m \dot{\theta}_m + K_m \theta_m = K_m \theta_d - \tau_T \quad (a)$$

其中:

$$C_m = \frac{K_a K_b}{R_a} + f, K_m = \frac{K_a K_p}{R_a}$$

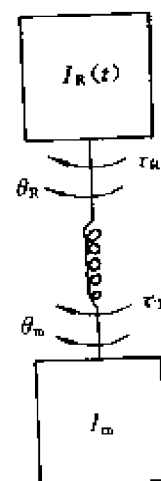


图 4-26 腰关节简化模型

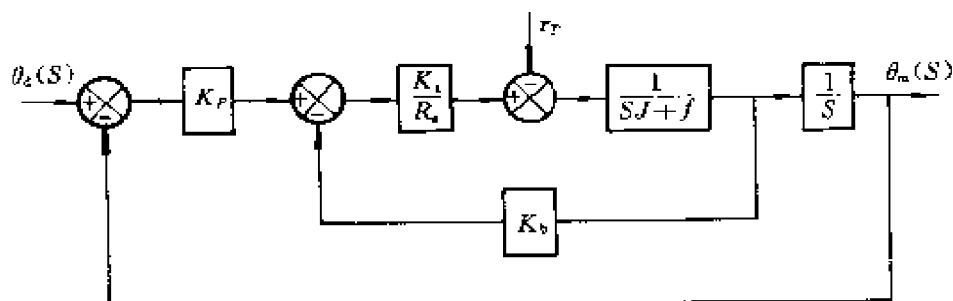


图 4-27 控制框图

式中 θ_m ——电机转子的转角;

θ_d ——控制输入转角;

I_m ——电机转子和波发生器的转动惯量和;

τ_T ——电机的输出力矩。

本体运动部分的动力学方程是:

$$I_R \ddot{\theta}_R = \tau_R + F \quad (b)$$

式中 I_R ——本体转动部分相对其回转轴的转动惯量,随末端位

置的变化而变化，是时变参数；

θ_R ——本体转角（即 θ_1 ）；

τ_R ——本体的驱动力矩；

F ——作用在本体上的外力。

$$\tau_R = K_H(\theta_m/i - \theta_R) + C_H(\dot{\theta}_m/i - \dot{\theta}_R) = i\tau_T \quad (c)$$

式中 K_H ——柔轮的刚度系数；

C_H ——阻尼系数；

i ——谐波减速器的速比。

把 (c) 分别代入 (a)、(b)，并将 (a)、(b) 联立写成矩阵形式：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_m + \frac{C_H}{i^2} & -\frac{C_H}{i} \\ -\frac{C_H}{i} & C_H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_m \\ \theta_R \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_m + \frac{K_H}{i^2} & -\frac{K_H}{i} \\ -\frac{K_H}{i} & K_H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_m \\ \theta_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_m \theta_d \\ F \end{Bmatrix} \quad (d) \end{aligned}$$

方程 (d) 中的广义坐标 θ_m 、 θ_R 是公称转角和因弹性变形而产生的转角之和。公称运动的参数通过机器人运动学和动力学求得。要研究系统的动态性能，就要建立以弹性转角为广义坐标的动力学方程。

令 $\theta_d = 0$ ， $\theta_m = \theta_m^e + \theta_m^c$ ， $\theta_R = \theta_R^e + \theta_R^c$ ，代入方程 (d)，得到以弹性转角 θ_m^e 、 θ_R^e 为广义坐标的方程：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_m^e \\ \dot{\theta}_R^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_m + \frac{C_H}{i^2} & -\frac{C_H}{i} \\ -\frac{C_H}{i} & C_H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_m^e \\ \theta_R^e \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_m + \frac{K_H}{i^2} & -\frac{K_H}{i} \\ -\frac{K_H}{i} & K_H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_m^e \\ \theta_R^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_m \dot{\theta}_m^c \\ F - I_R \dot{\theta}_R^c \end{Bmatrix} \quad (e) \end{aligned}$$

式中 θ_m ——电机转子的公称转角；

θ'_m ——电机转子的“弹性”转角；

θ_R ——本体的公称转角；

θ'_R ——本体的弹性转角。

2. 计算参数

从有关资料可以查得：

$$I_m = 5.56 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$C_m = f + \frac{K_a K_b}{R_a} = 0.142 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad} \quad (\text{其中 } f = 0.29 \text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{r}/\text{min}, K_a = 0.672 \text{N} \cdot \text{m}/\text{A}, K_b = 69.1 \text{mV} \cdot \text{r}/\text{min}, R_a = 3.06 \Omega)$$

$$K_m = \frac{K_p K_a}{R_a} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad} \quad (\text{其中 } K_p \text{ 取作 } 230 \text{V}/\text{rad})$$

$$C_H = 76.2 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$$

$$K_H = 1.27 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$$

$$i = 100$$

I_R 是下臂、上臂转角 θ_2 、 θ_3 的函数。在如图 4-28 所示的坐标系中，根据公式 (3-40) 可得 I_R 表达式：

$$\begin{aligned} I_R = & I_{1y} + I_{2x} \sin^2 \theta_2 + I_{2z} \cos^2 \theta_2 + (l_{2c} \sin \theta_2)^2 m_2 + I_{3x} \sin^2 (\theta_2 + \theta_3) \\ & + I_{3y} \cos^2 (\theta_2 + \theta_3) + [l_{3c} \cos (\theta_2 + \theta_3) - l_2 \sin \theta_2]^2 m_3 + I_{4,5x} \\ & \sin^2 (\theta_2 + \theta_3) + I_{4,5y} \cos^2 (\theta_2 + \theta_3) + [l_{4,5c} \cos (\theta_2 + \theta_3) - \\ & l_2 \sin \theta_2]^2 m_{4,5} + I_{6x} \sin^2 (\theta_2 + \theta_3) + I_{6z} \cos^2 (\theta_2 + \theta_3) + [l_{6c} \\ & \cos (\theta_2 + \theta_3)]^2 m_6 + I_{7x} \sin^2 \theta_2 + I_{7z} \cos^2 \theta_2 + [l_{7c} \cos (\theta_2 + \theta_3) \\ & + l_6 \sin \theta_2]^2 m_7 \end{aligned} \quad (f)$$

式中 I_{ix} 、 I_{iz} ——第 i 杆绕过质心 C_i 平行于 x_0 、 y_0 轴的坐标轴的转动惯量；

m_i ——第 i 杆的质量；

l_{ic} ——第 i 杆质心位置坐标；

l_i ——第 i 杆杆长。

各杆的动力学参数见表 4-2。

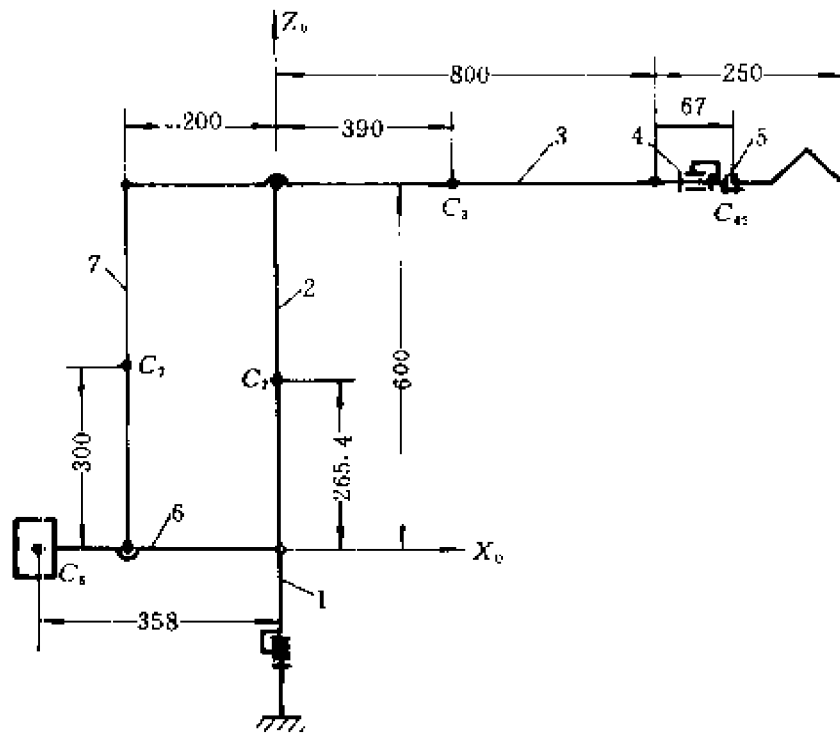


图 4-28 杆件重心位置简图

1—转壳；2—下臂；3—上臂；4—手腕；5—末杆；6—曲柄；7—拉杆

表 4-2 杆件的动力学参数

参 数	杆 号					
	1	2	3	4、5	6	7
I_x, kgm^2	/	1.215	0.202	1.86×10^{-3}	0.075	0.369
I_z, kgm^2	7.719	0.377	4.77	2.1×10^{-3}	0.61	0.013
m, kg	228	35	38	5.15	31.5	10.4
l, m	/	0.6	0.8	0.25	200	200
l_c, m	/	0.265	0.39	0.867	0.358	0.3

3. 求解方程

方程 (e) 是变系数二阶微分方程组。目前求解变系数方程通常采用离散化处理。即：将机器人的总行程分成 n 段，每段所用的时间为 Δt ($\Delta t = \frac{T}{n}$)， T 为总运动时间。先求出经每一 Δt 时刻后末端的位置坐标，再求解运动反解得 θ_2 、 θ_3 以及 $\dot{\theta}_R$ 、 $\dot{\theta}_m$ 。将 θ_2 、 θ_3 代入 (f) 式求得对应时刻的 I_R 。将 $\dot{\theta}_R$ 、 $\dot{\theta}_m$ 、 I_R 代入方程 (e) 得该时刻的动力学方程。这样处理就将变系数方程的求解问题转换成了常系数微分方程的求解问题。

假定末端的轨迹是 $x = z_0$ 平面内的半圆 (图 4-29)，圆心在 O' (x_0', O, z_0)，半径为 R ，起点为 $(x_0' - R, O, z_0)$ ，终点为 $(x_0' + R, O, z_0)$ 。末端速度如图 4-30 所示。时刻 t 末端的坐标 (P_x, P_y, P_z) 为：

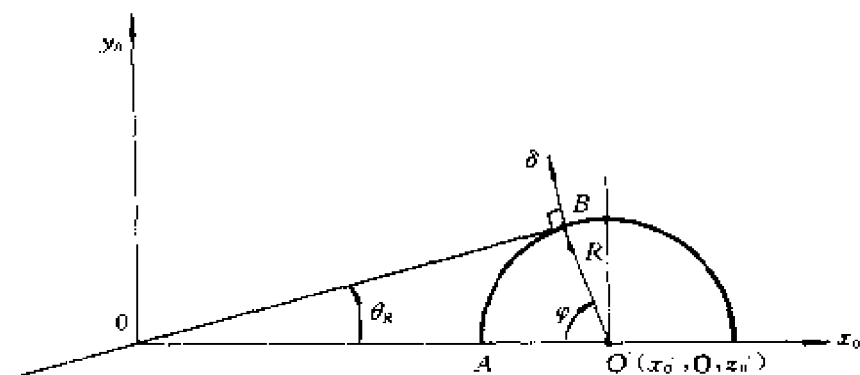


图 4-29 末端轨迹

$$\begin{cases} P_x = x_0' - R \cos \varphi \\ P_y = R \sin \varphi \\ P_z = z_0 \end{cases} \quad (g)$$

$\varphi = \widehat{AB}/R$ ， \widehat{AB} 为时刻 t 末端走过的弧长。

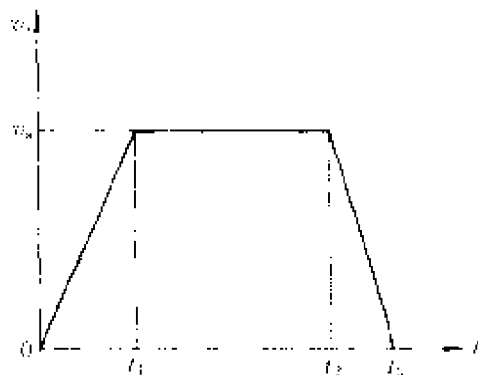


图 4-30 末端速度 (以弧长计)

$$\widehat{AB} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{s1} t^2 & (t \leq t_1) \\ \frac{1}{2} a_{s1} t_1^2 + v_{s0}(t - t_1) & (t_1 < t \leq t_2) \\ \frac{1}{2} a_{s1} t_1^2 + v_{s0}(t - t_1) - \frac{1}{2} a_{s2} (t - t_2)^2 & (t_2 < t \leq t_3) \end{cases} \quad (h)$$

a_{s1} 、 a_{s2} 是加速过程 $0 \sim t_1$ 和减速过程 $t_2 \sim t_3$ 的加速度值, (沿弧长计算), $a_{s1} = \frac{v_{s0}}{t_1}$, $a_{s2} = v_{s0} / (t_3 - t_2)$ 。

求得末端坐标后, 求解运动学反解, 得:

$$\theta_R = \theta_1 = \text{tg}^{-1} \frac{P_y}{P_x} \quad (-135^\circ \leq \theta_1 \leq 135^\circ) \quad (i)$$

$$\theta_3 = \text{tg}^{-1} \frac{\sin \theta_3}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_3}} \quad (-40^\circ \leq \theta_3 \leq 40^\circ) \quad (j)$$

$$\sin \theta_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - (l_3 + l_{45})^2}{2l_2(l_3 + l_{45})}$$

$$\theta_2 = \text{tg}^{-1}$$

$$\frac{P_z(l_3 + l_{45}) \cos \theta_3 - [l_2 + (l_3 + l_{45}) \sin \theta_3] (P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1)}{(l_3 + l_{45}) (P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1) \cos \theta_3 + P_z [l_2 + (l_3 + l_{45}) \sin \theta_3]}$$

$$(-40^\circ \leq \theta_2 \leq 20^\circ) \quad (k)$$

求 θ_R 可采用两种方法。一是用 θ_R 的表达式直接求导：

$$\theta_R = \frac{(P_x \dot{P}_y - \dot{P}_x P_y) \cos^2 \theta_1}{P_x^2} \quad (l)$$

$$\dot{\theta}_R = \frac{(P_x \ddot{P}_y - \ddot{P}_x P_y) \cos^2 \theta_1 - (P_x \dot{P}_y - \dot{P}_x P_y) \sin 2\theta_1 \times \dot{\theta}_R - 2P_x \dot{P}_x \dot{\theta}_R}{P_x^2} \quad (m)$$

这种方法精确直观，但计算比较繁。另一种方法是将轨迹离散化，求得 t_i 时刻的 $\theta_R(t_i)$ 和 $\dot{\theta}_R(t_i)$ 为：

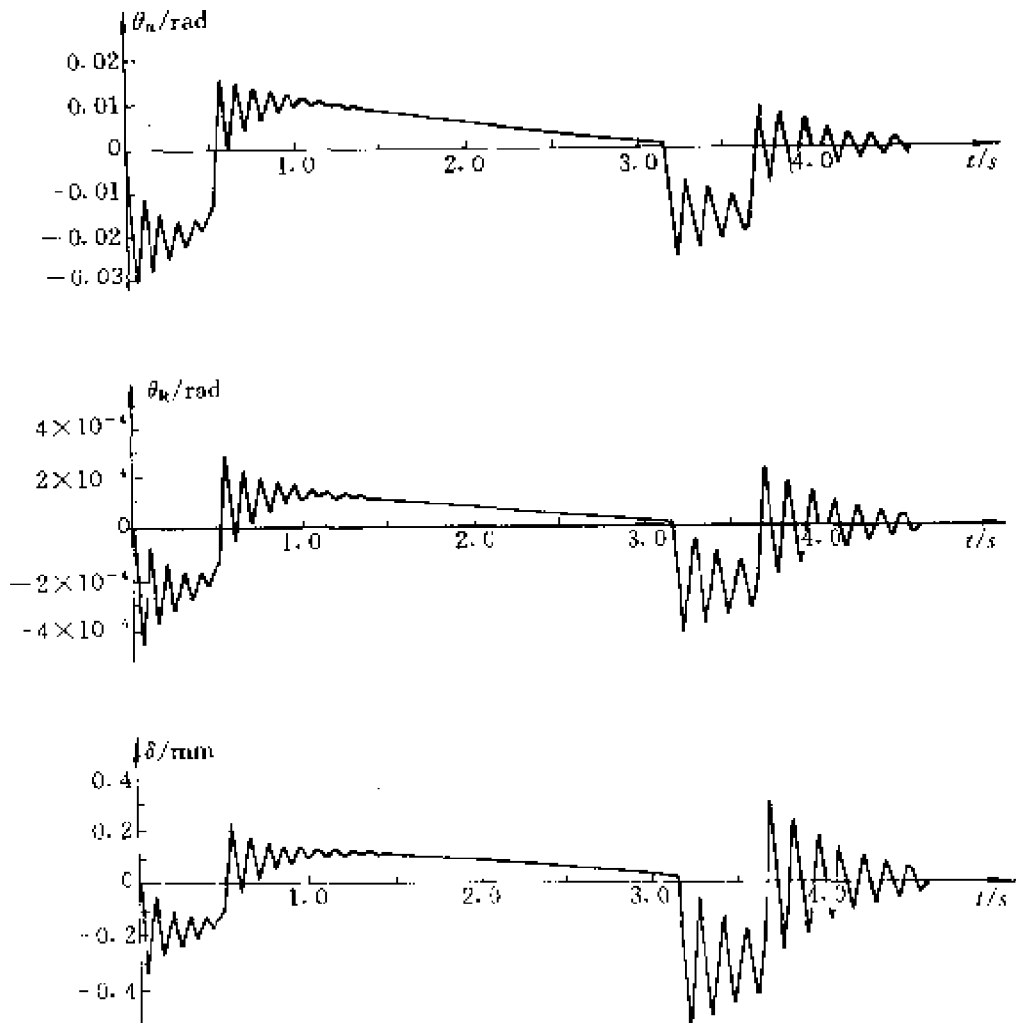


图 4-31 响应曲线

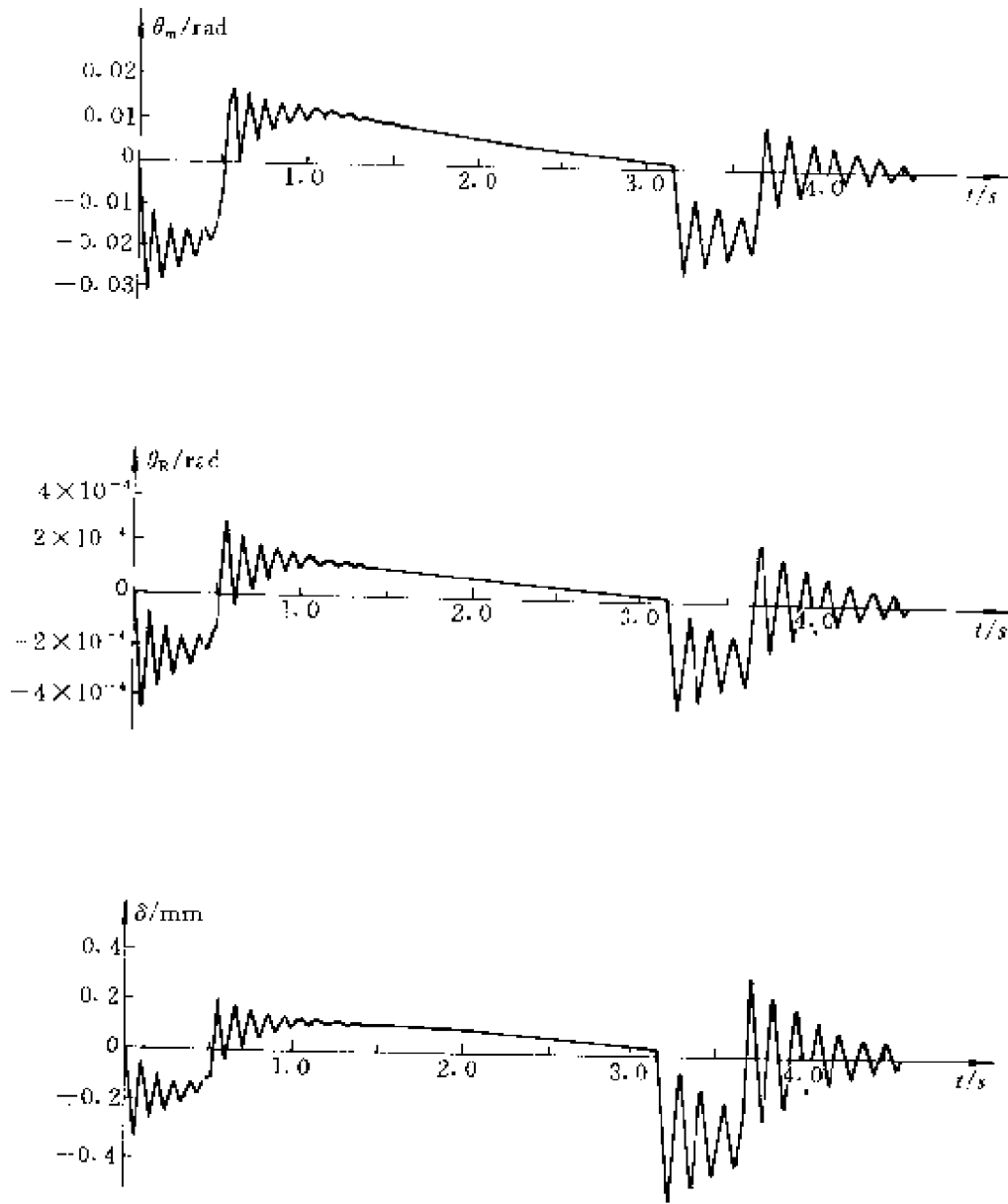


图 4-32 响应曲线 ($K_H \times 2$)

$$\theta_R(t_i) = \frac{\theta_R(t_i) - \theta_R(t_{i-1})}{\Delta t} \quad (n)$$

$$\theta_R = \frac{\theta_R(t_i) - \theta_R(t_{i-1})}{\Delta t} \quad (o)$$

这种方法计算简便。只要 Δt 取得合适，既能保证一定的精度，又

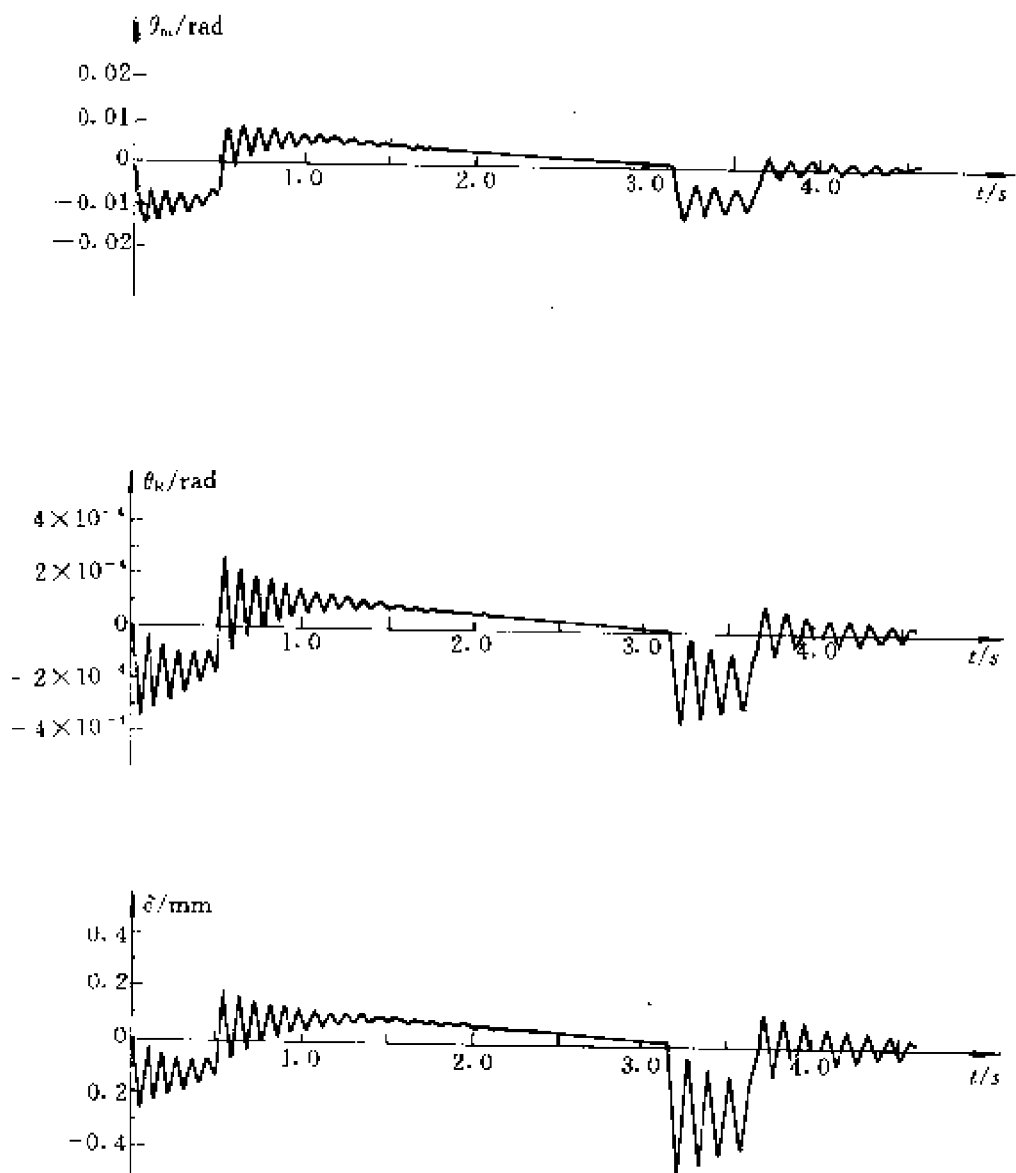


图 4-33 响应曲线 ($K_p \times 2$)

能提高计算速度。

求出 θ_R 后就可求得 θ_m 为：

$$\theta_m = i\theta_R \quad (p)$$

取 $v_{s0} = 0.3\text{m/s}$, $t_1 = 0.5\text{s}$, $t_2 = 3.14\text{s}$, $t_3 = 3.64\text{s}$, $x_0' = 1.05\text{m}$, $y_0' = 0.0\text{m}$, $z_0' = 0.6\text{m}$, $R = 0.3\text{m}$, 代入以上各式, 求得零位时系

统的固有频率为：

$$f_1 = 10\text{Hz}; f_2 = 20\text{Hz}$$

θ_m 和 θ_R 的响应及末端位置误差 δ （垂直于大、小臂所在的平面， $\Delta x_0 = \delta \cdot \sin\theta_R$ 、 $\Delta y_0 = \delta \cdot \cos\theta_R$ ）如图 4-31 所示。图 4-32、图 4-33 表示 K_H 、 K_P 各加大一倍时的响应曲线。

4. 讨论

(1) 振动发生在加速度有突变的起始点 ($t=0$)、加速度终止点 ($t=t_1=0.5\text{s}$)，制动开始点 ($t=t_2=3.14\text{s}$) 和终点 ($t=t_3=3.64\text{s}$)，而且在运动终止以后，振动还要延续一段时间；

(2) 由 $\delta-t$ 图可以看出，起点振幅较小，终点振幅较大，这是由端点距转动轴的距离不同造成的；

(3) 在末端的匀速 v_{s0} 运动时， δ 仍为变量。这是因为相应于 v_{s0} ， θ_R 仍存在的缘故，并且端点距转轴的距离也是变化的；

(4) 比较图 4-31 与图 4-32、图 4-33 可知，加大谐波减速器的刚度系数 K_H ，曲线的幅值变化不大；但加大 K_P 值，曲线的幅值却明显减小，这说明，对于这一特定系统， K_H 已足够大，故其变化的影响相对较小，而 K_P 却是对该系统的动态特性影响较大的参数；

(5) 要提高系统的动态性能，不仅要提高机构部分的刚性，同时还要提高控制系统的“刚度”；

(6) 在机器人运动过程中，为了防止振动和冲击，应保证加速度的连续性。

第五章 手腕与末端执行器

第一节 概 述

手腕是操作机的小臂（上臂）和末端执行器（手爪）之间的联接部件。其功用是利用自身的活动度确定被末端执行器夹持物体的空间姿态，也可以说是确定末端执行器的姿态。故手腕也称作机器人的姿态机构。对一般商用机器人，末杆（即与末端执行器相联接的杆）都有独立驱动的自转功能，若该杆再能在空间取任意方位，那么与之相联的末端执行器就可在空间取任意姿态，即达到完全灵活的境地。对于任一杆件的姿态（即方向），可用两个方位角确定，如图 5-1 所示。

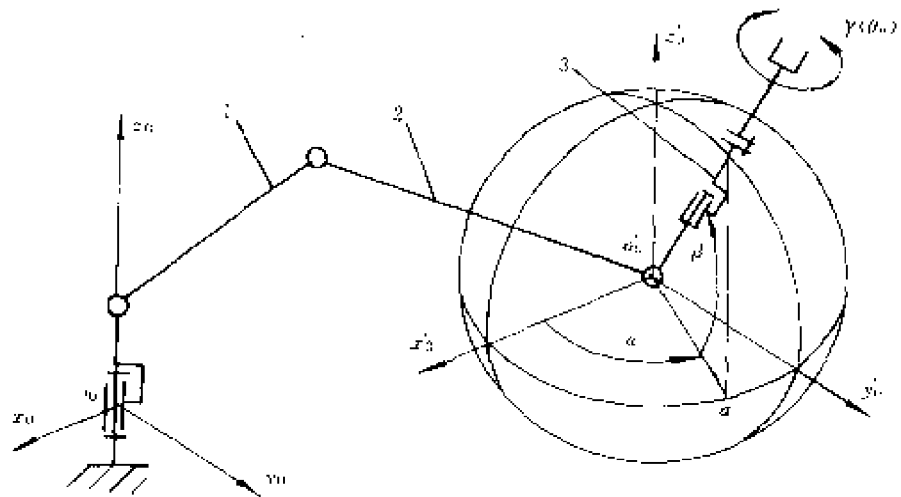


图 5-1 末杆姿态示意图

1—大臂；2—小臂；3—末杆 (L_n)

在图 5-1 中，末杆 L_n 的图示姿态可以看作是由处于 x_0' 方向的原始位置先绕 z_0' 在 $x_0'o_0'y_0'$ 平面内转 α 角，然后在 ao_0' 与 z_0' 组成的垂直平面内再向上转 β 角得到的。可见是由 α 、 β 两角决定了末杆的方向（姿态）。从理论上讲，如果 $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ， $0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ$ ，则 L_n 在空间可取任意方向。如果 L_n 的自转角 γ （即 θ_n ）也满足 $0^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$ ，我们就说该操作机具有最大的灵活度，即可自任意方向抓取物体并可把抓取的物体在空间摆成任意姿态。为了定量的说明操作机抓取和摆放物体的灵活程度，我们定义组合灵活度（dex）为：

$$\text{dex} = \frac{\alpha}{360^\circ} + \frac{\beta}{360^\circ} + \frac{\gamma}{360^\circ} = \times \times \% + \times \times \% + \times \times \% \quad (5-1)$$

上式取“加”的形式，但一般不进行加法运算，因为分开更能表示机构的特点。

腕结构最重要的评价指标就是 dex 值。若为 3 个百分之百，该手腕就是最灵活的手腕。一般说来， α 、 β 的最大值取 360° ，而 γ 值可取得更大一些，如果拧螺钉，最好 γ 无上限。

腕结构是操作机中最复杂的结构，而且因传动系统互相干挠，更增加了腕结构的设计难度。腕部的设计要求是：重量轻，dex 的组合值必须满足工作要求并留有一定的裕量（约 5%~10%），传动系统结构简单并有利于小臂对整机的静力平衡。

末端执行器，俗称手爪，多为形形色色的夹持器，一般可以开合或吸放。电焊、喷涂等用途的机器人，其末端执行器即为焊钳和喷具。

第二节 手腕

一、单自由度手腕

SCARA 水平关节装配机器人多采用单自由度手腕，如图 5-2

所示。

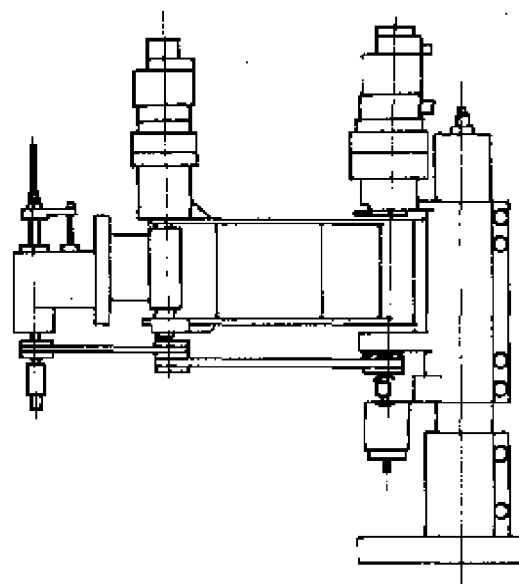


图 5-2 SCARA 机器人

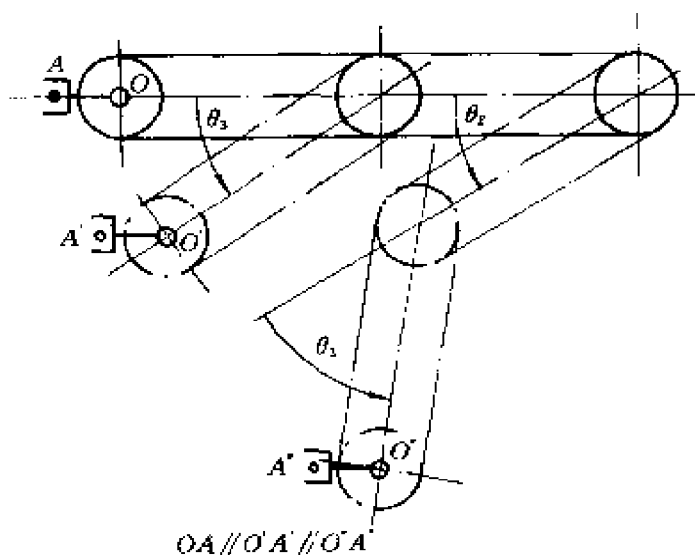


图 5-3 末端执行器水平方位示意图

该类机器人操作机的手腕只有绕垂直轴的一个旋转自由度。为了减轻操作机的悬臂重量，手腕的驱动电机固结在机架上。手腕转动的目的在于调整装配件的方位。由于传动为两级等径轮齿

形带，所以大、小臂的转动不影响末端执行器的水平方位（如图 5-3 所示），而该方位的调整完全取决于腕转动的驱动电机，这是该种传动方式的主要优点，特别适合于电子线路板的插件作业。也有将驱动器直接装在作上下运动的插杆上的，这时确定末端执行器方位的角度 γ （以机座坐标系为基准）将是大、小臂转角 θ_2 、 θ_3 以及腕转角 θ_4 之和，即：

$$\gamma = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \quad (5-1)$$

二、两自由度手腕

1. 常见结构

两自由度手腕有如图 5-4、图 5-5 所示的两种结构。

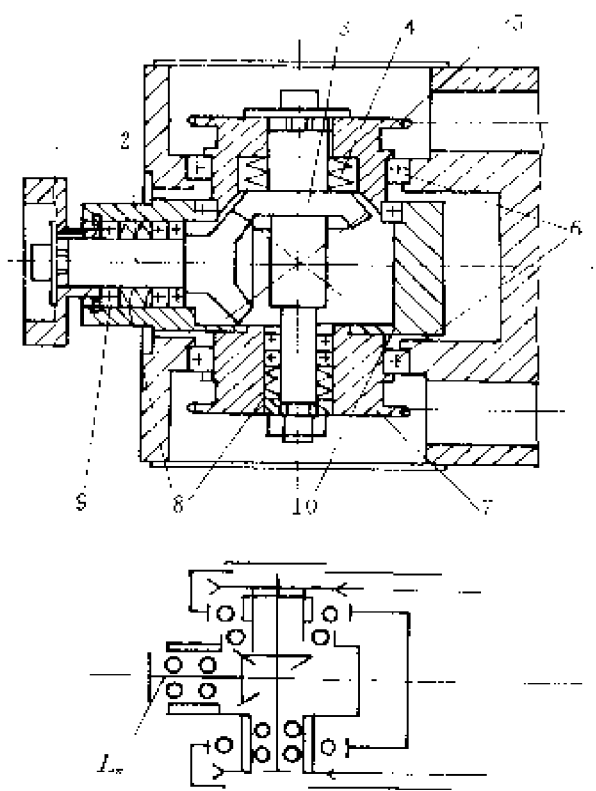


图 5-4 汇交式两自由度手腕

- 1—法兰；2—锥齿轮轴；3—锥齿轮；8、4—弹簧；
5、7—链轮；6、9—轴承；10—转壳

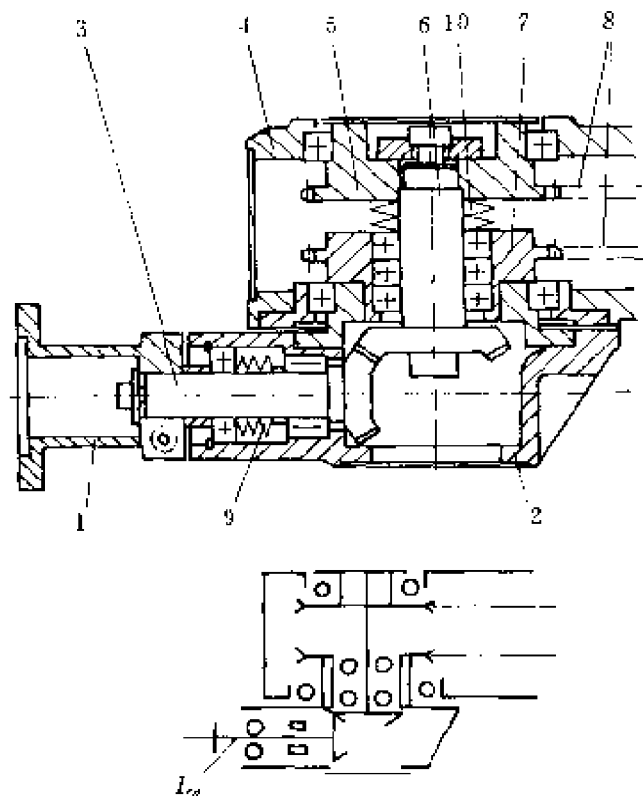


图 5-5 偏置式两自由度手腕

1—法兰；2—转壳；3、6—轴-齿轮；4—小臂，
5、7—链轮；8—链；9、10—弹簧

图中链轮 5 由后置的驱动器带动，与锥齿轮 3 相联，通过齿轮副带动末杆自转 (γ)；链轮 7 与壳体 10 相联，由后置的驱动器带动，使末杆摆动 (β)，从而形成两个自由度。偏汇交式两自由度手腕的末杆与小臂中线重合，两个链轮对称的分配在两边；偏置式两自由度手腕的末杆偏置在小臂中线的一边。两者的末杆 L_n 都能绕自身的轴线旋转 360° 以上，即 $\gamma \geq 360^\circ$ 。但两者末杆的摆动，也就是 L_n 杆相对小臂 L_3 的转动，却相差很大。现以 $\beta^{(3)}$ 表示末杆相对于 L_3 的摆角（上标 3 表示对杆 L_3 ）。对于汇交式，由于结构限制， $\beta^{(3)} \leq 200^\circ$ ；对于偏置式， $\beta^{(3)} \geq 360^\circ$ 。这也就是说两种腕结构的灵活度 dex 的组合值相差很大。对于汇交结构， $dex_{\text{正}} = 0 + 80^{(3)}\% + 100\%$ ；对于偏置结构， $dex_{\text{偏}} = 0 + 100^{(3)}\% + 100\%$ 。偏

置结构的另一优点是腕部结构紧凑，小臂横向尺寸较小（薄）。

两自由度的另两种结构如图 5-6、图 5-7 所示。图 5-6 是将谐波减速器置于腕部，驱动器通过齿形带带动谐波，或经锥齿轮再带动谐波使末杆 L_n 获得 β 、 γ 两自由度运动。图 5-7 则是将驱动电机和谐波减速器连成一体，放于偏置的腕壳中直接带动 L_n 完成 γ 角转动， β 角则是由链传动完成的。图 5-6、5-7 分别属汇交和偏置两种类型。

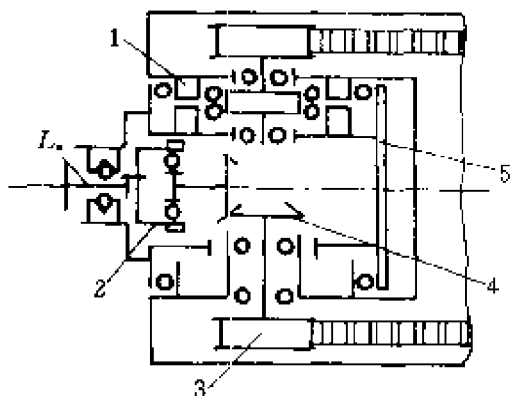


图 5-6 谐波前置汇交手腕
1—扁平谐波；2—杯式谐波；3—齿形带轮；4—锥齿轮；5—腕壳

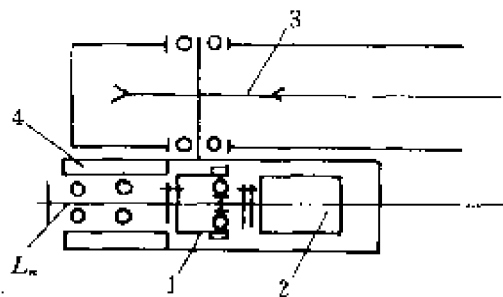


图 5-7 电机前置偏置手腕
1—谐波减速器；2—马达；3—链轮；4—腕壳

2. 末端执行器的姿态问题

对两自由度手腕来说，末杆不能在空间取全方位姿态，只能在一个平面内或呈扇形或呈圆周。所以当末端执行器在主轴线与末杆轴线重合安装时（如图 5-8），最多只能在一个平面内取“全方位”，这就削弱了末端执行器的灵活度。所以一般两自由度手腕可采用如图 5-9 所示的安装方法，使手爪既可取得平行安装时的 dex 值，又可借助于末杆 L_n 的自转（ γ ），对于工作点 P 来说，取半顶角为 ψ 的圆锥面所确定的姿态。再考虑到末杆的摆动（ β ），对于 P 点来说，当 $\beta^{(3)} = 180^\circ$ 时，末端执行器可取图 5-9a 所示球块 SR 的所有直径线方向去接近 P 点，抓取物体。这就大大增加了手爪的 dex 值。正是由于这种原因，两自由度手腕的弧焊机器人的焊丝都是按图 5-9a 所示的方式安装的。我们称 ψ 为姿态预置角。

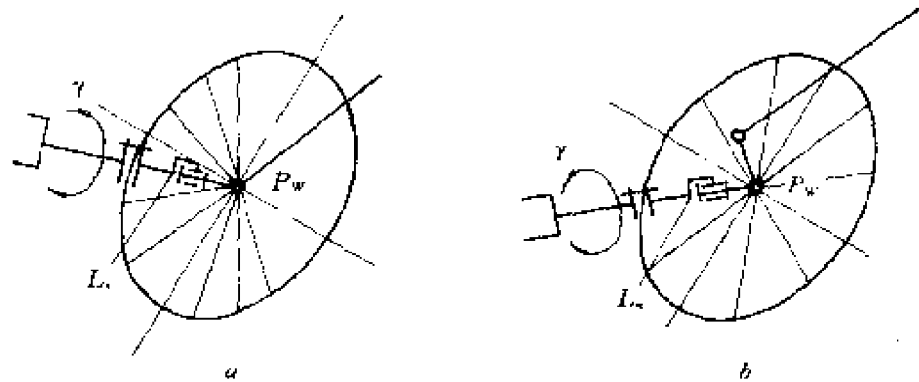


图 5-8 末端执行器的姿态
a—交汇式；b—偏置式

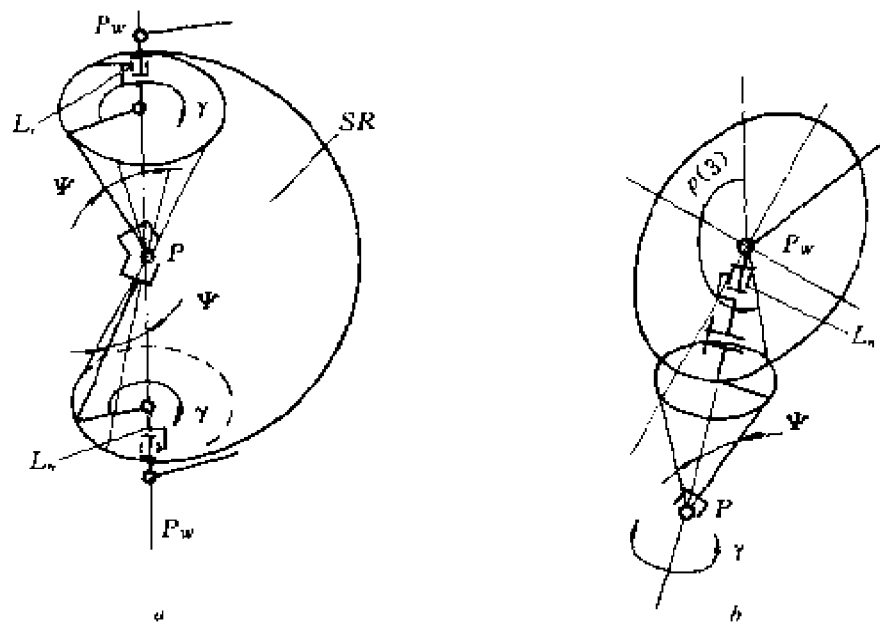


图 5-9 末端执行器的姿态
a—工作状态 (P 固定) 原理示意图；b—机动状态 (P_w 固定) 原理示意图

若 $\psi = 0^\circ$ ，则手爪只能取某一平面内的方位；如果 $\psi = 90^\circ$ ，则手爪可取整个球体半径的方位。

3. 末杆转角 γ (θ_n) 的计算

除前置驱动器 (图 5-7) 外，其他两自由度手腕都用差动轮系

传动（图 5-10），故 γ 与两输入转角 θ_n 、 θ_{n-1} 之间的关系是：

$$\gamma = \frac{Z_b}{Z_a}(\theta_n - \theta_{n-1}) \quad (5-2)$$

式中 Z_a ——轮 a 的齿数；
 Z_b ——轮 b 的齿数。

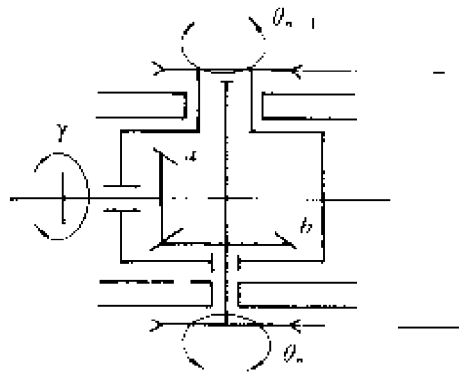


图 5-10 差动轮系

这里的输入转角 θ_n 、 θ_{n-1} 是关节 n 和 $n-1$ 的驱动器传递到腕部时的角度。如果腕部有减速器，计算时要考虑减速器的速比。

4. 诱导运动

由式 (5-2) 知， γ 角不仅与末杆驱动器的转角 θ_n 有关，而且与末杆的前一杆 L_{n-1} 的驱动转角 θ_{n-1} 有关，即 θ_{n-1} 的运动能引起 θ_n 的变化。我们把某一杆件因另一杆件的被驱动而引起的运动，称作诱导运动。即 θ_{n-1} 对末杆 L_n 产生诱导运动。

再看腕的摆角，它相对于小臂的角度值表示为 $\beta^{(3)}$ ($=\theta_4$)。在采用后置式（电机固定于腰部杆件 L_1 上）等径链轮传动时，大、小臂的转角 θ_3 、 θ_4 的变化也对 $\beta^{(3)}$ 产生诱导运动。由图 5-11 可以看出，当关节 $n-1$ ($=4$) 的驱动器锁定（也就是主动链轮 1 不转时）， θ_3 、 θ_2 的变化也改变着末杆相对于杆 L_3 的相对角度 $\beta^{(3)}$ （注意：在图示条件下相对于基座坐标的 $\beta^{(0)}$ 值不变）。也就是当 θ_2 、 θ_3 的改变使杆 3 处于倾斜位置时，由于等径链轮的作用，末杆仍处于原来的水平位置（即 $\beta^{(0)}=0$ ），但它相对于杆 L_3 却由 0 变成了

$\beta^{(3)}$, 即 θ_2 、 θ_3 对 $\beta^{(3)}$ 产生诱导运动。

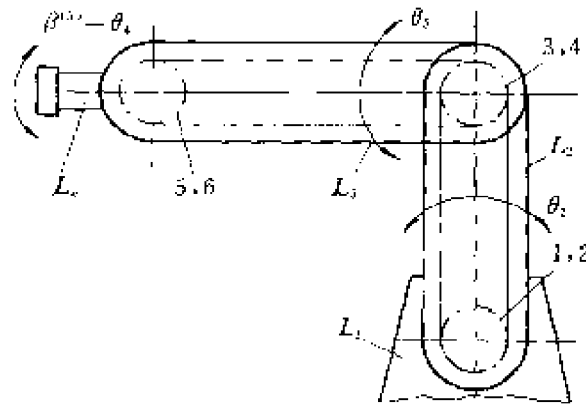


图 5-11 手腕传动示意图

1、2—主动链轮；3~6—从动链轮

在进行机器人运动学计算时，必须考虑诱导运动。

三、三自由度手腕

1. 结构形式

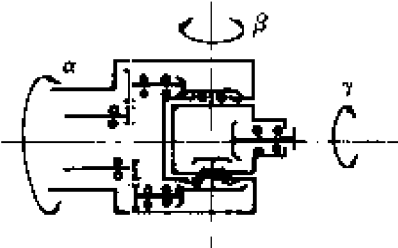
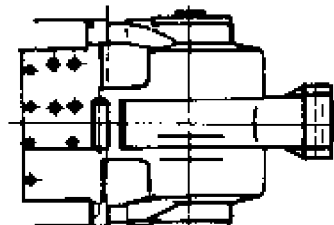
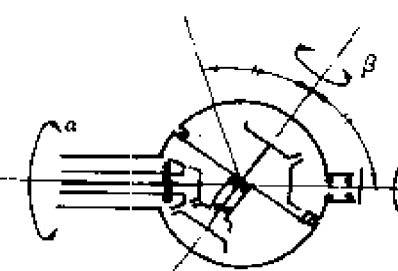
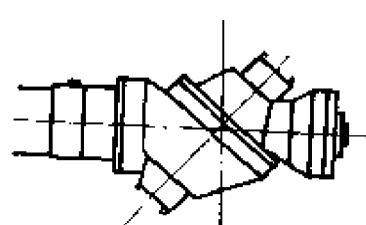
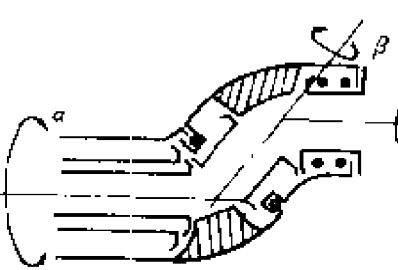
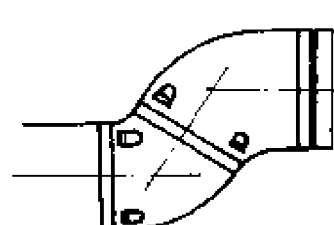
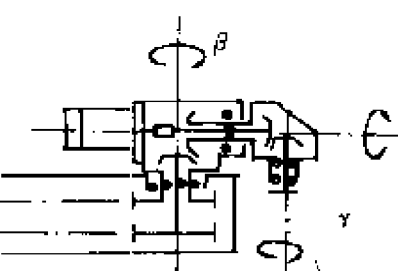
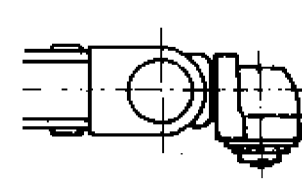
三自由度手腕的结构形式繁多。根据文献 [7]，三自由度手腕的主要形式如表 5-1 所示。

三自由度手腕是在两自由度手腕的基础上加一个整个手腕相对于小臂的转动自由度（用角度参数 α 表示）而形成的。当不考虑结构限制，即 α 、 β 、 γ 都能在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围取值，末端执行器的灵活度 $dex = 100\% + 100\% + 100\%$ ，也就是说具有百分之百的灵活

表 5-1 三自由度手腕的典型形式

序号	机构简图	应用
1	<p>偏交型</p>	

续表 5-1

序号	机构简图	应用
2	 <p style="text-align: center;">汇交型</p>	
3	 <p style="text-align: center;">球形汇交型</p>	
4	 <p style="text-align: center;">中空偏交型</p>	
5	 <p style="text-align: center;">回形偏交型</p>	

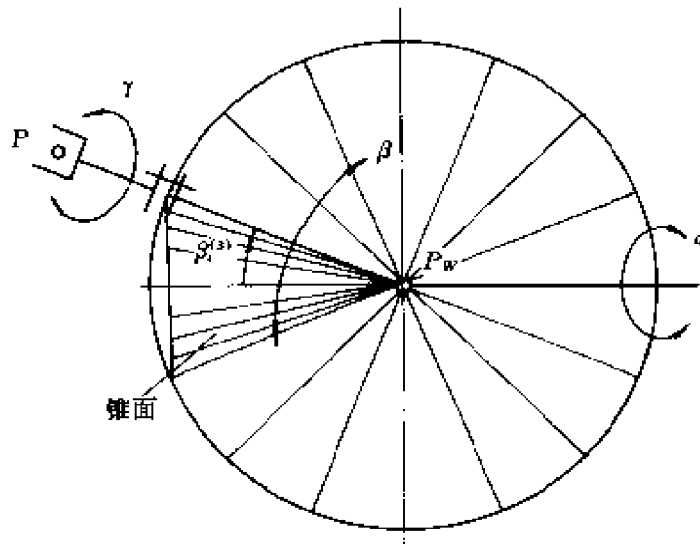


图 5-12 末杆方位图

度。由图 5-12 可以看出，当末杆 L_n 与小臂的夹角 $\beta^{(3)}$ 取 $\beta_1^{(3)}$ 、 $\beta_2^{(3)}$ 、 \dots 、 $\beta_i^{(3)}$ 、 \dots 时，由于腕转动 $\alpha \leq 360^\circ$ ，相应于任意一个 $\beta_i^{(3)}$ ，末杆就形成一个锥面，锥面素线就是 L_n 可取的方位。一系列锥面（对应于一系列的 $\beta^{(3)}$ ）形成一个球体（ $\beta_i^{(3)}$ 为 $0^\circ \sim 360^\circ$ ），末杆即可将整个球体的半径线取作自己的方位，再加上末杆绕自身轴线的转动，所以手爪可在空间获得任意姿势。这就是说手爪可自任意方向接进物体，也可将物体转到任意姿势。所以三自由度手腕是“万向”型手腕，可以完成两自由度手腕很多无法完成的作业。近年来，大多数关节型机器人都采用了三自由度手腕。图 5-13 和图 5-14 是两个三自由度手腕的详细结构图。图 5-13 是汇交手腕（或称正交手腕），即 α 、 β 、 γ 的旋转轴线汇交于一点 P_w 。由图可以看出，电机（1）经锥齿轮副（3、4）和齿型带传动（9、10、13），再经锥齿轮副（5、6）和杯式谐波减速器 16 带动法兰（17，机械接口）转动，完成末杆（法兰）的 γ 运动。电机 2 经锥齿轮副（7、8）和齿型带传动（11、12、14），通过扁平型谐波减速器（15）带动腕壳摆动，完成末杆的 β 运动。整个手腕又由置于小臂后部的电机（图中未画），经过谐波传动，带动小臂作绕自身轴线

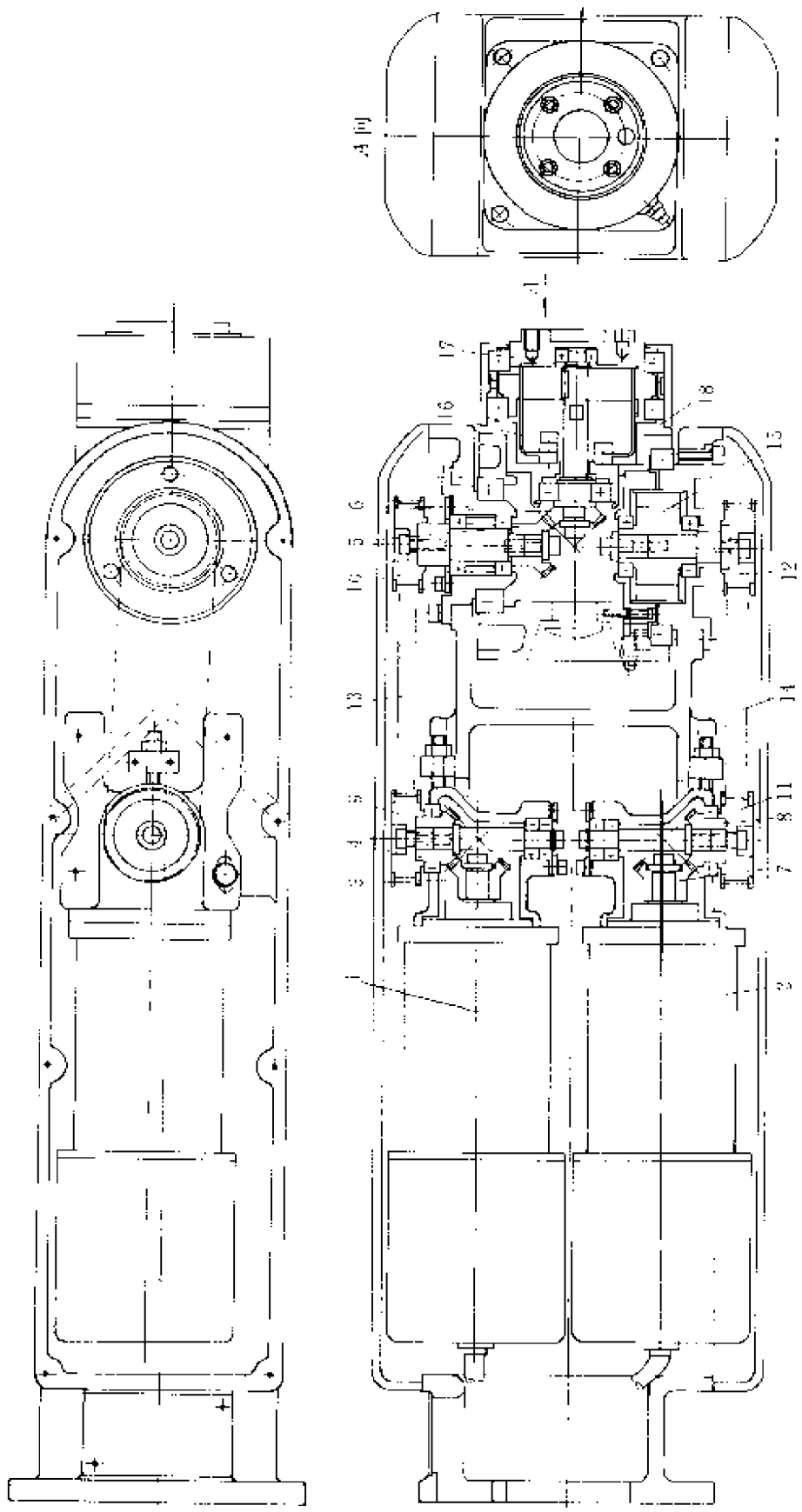


图 5-13 汇 (正) 交式手腕

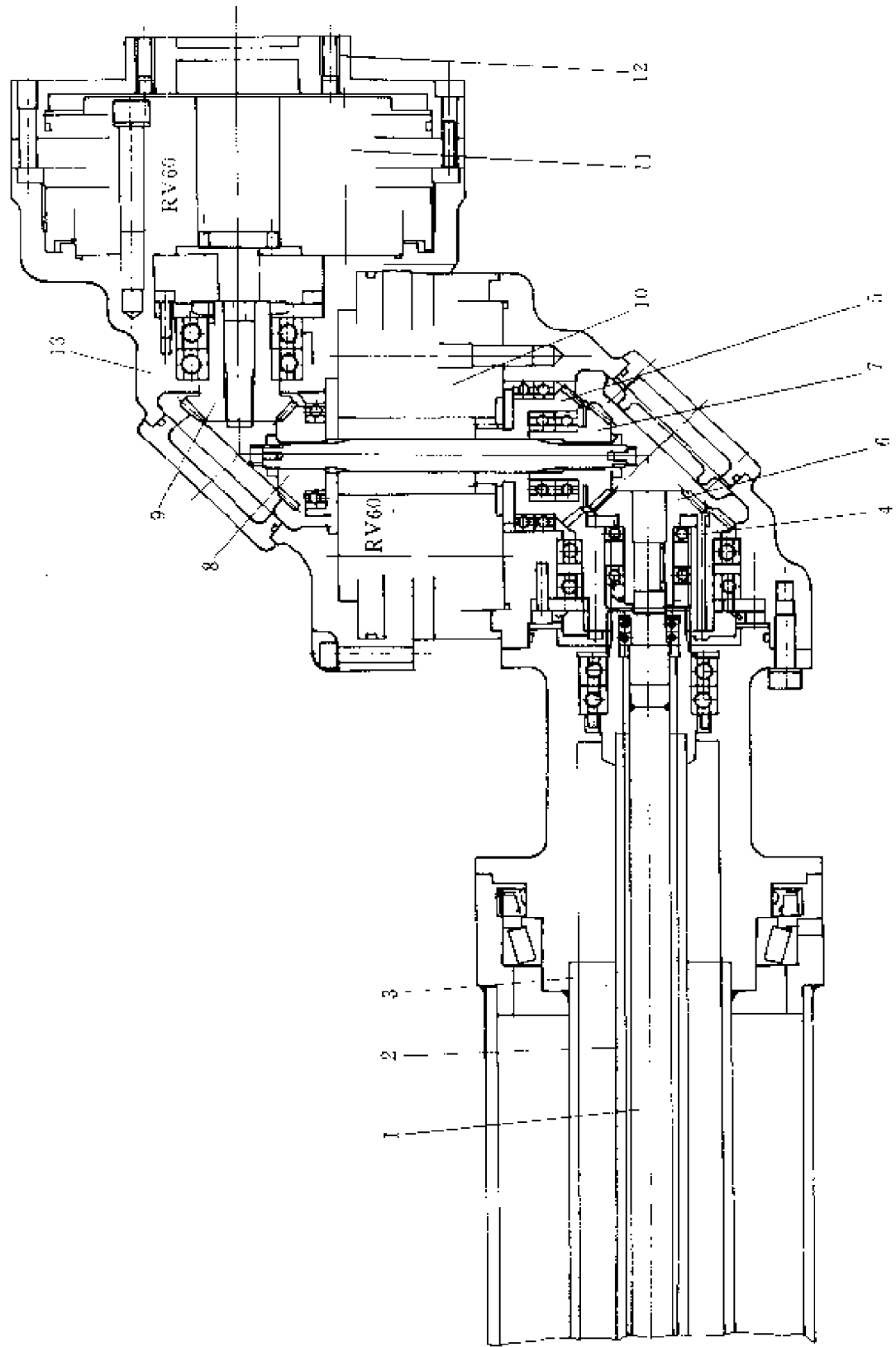


图 5-14 偏置式手腕

的转动，即 α 运动。

图 5-14 表示一偏置式手腕，由后置电机通过齿轮副带动轴 (1) 旋转，轴 1 再经花键带动锥齿轮副 (6、7)，再经齿轮 (8、9) 带动 RV 减速器 (11)，RV 的输出部与法兰 (12) 相联，从而完成末杆 L_n (法兰) 的 γ 旋转。轴 (2) 经花键带动锥齿轮 (4、5)，后者的尾部是 RV 减速器 10 的输入齿轮，RV 的输出与腕壳 (13) 相联，从而完成 β 运动。轴 (3) 由后置电机通过齿轮副、RV 减速器 (图中未画出来) 带动，完成整个手腕的旋转运动 α 。

图 5-13 和 5-14 所示的手腕都是把 γ 、 β 运动的减速器安装在手腕上，可简化小臂结构，但却增加了手腕本身的重量和复杂程度。

必须指出，若操作机为 6 自由度，当手腕为偏置式时，运动学反解得不出解析的显式，且动力学参数也是强耦合的。设计时必须给予充分注意。

2. 转角计算

转角计算有以下几种。

(1) 偏置式手腕的转角计算。以表 5-1 中图 1 为例。由图可以看出， α 转角只与腕输入转角 θ_{n-2} 有关，故：

$$\alpha = \theta_{n-2} \quad (5-3a)$$

β 虽直接与 θ_{n-1} 有关，但当 θ_{n-2} 使腕转动时，轮 6 即在轮 5 上滚动，故 θ_{n-2} 对腕壳产生相反方向的诱导转动，故：

$$\beta = \frac{Z_6}{Z_5}(\theta_{n-1} - \theta_{n-2}) \quad (5-3b)$$

θ_{n-1} 、 θ_{n-2} 都对 γ 产生诱导运动，故 γ 是 θ_n 、 θ_{n-1} 、 θ_{n-2} 的函数：

$$\gamma = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_4}{Z_3}(\theta_n - \theta_{n-2}) - \frac{Z_6}{Z_5} \frac{Z_4}{Z_3}(\theta_{n-1} - \theta_{n-2}) \quad (5-3c)$$

(2) 汇 (正) 交式手腕的转角计算。以表 5-1 中图 2 为例。通过与偏置式类似的分析，可得：

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \theta_{n-2} \\ \beta &= \theta_{n-1} \frac{Z_8}{Z_7} \frac{Z_{10}}{Z_9} \\ \gamma &= \theta_n \left(\frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_4}{Z_3} \frac{Z_6}{Z_5} \right) + \theta_{n-1} \left(\frac{Z_8}{Z_7} \frac{Z_{10}}{Z_9} \frac{Z_6}{Z_5} \right) - \theta_{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

(3) 球形腕与中腕的转角计算。以表 5-1 中图 3、4 为例。由图可以看出，它们与偏置腕虽结构不同，但传动方式相似，故 γ 、 β 、 α 计算与偏置腕相似。

(4) 双偏置式手腕的转角计算。以表 5-1 中图 5 为例。由图可知，除 θ_{n-2} 使 α 转动外， θ_{n-1} 对它也有诱导运动； β 转角只与 θ_{n-1} 有关； θ_{n-2} 、 θ_{n-1} 都对 γ 产生诱导运动，故是 θ_n 、 θ_{n-1} 、 θ_{n-2} 的函数。于是：

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \theta_{n-2} \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right) - \theta_{n-1} \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right) \\ \beta &= \theta_{n-1} \\ \gamma &= \left(\frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_4}{Z_3} \right) (\theta_{n-1} - \theta_{n-2}) + \theta_n \left(\frac{Z_4}{Z_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

可以看出，只要传动路线分析清楚，根据轮系原理， γ 、 β 、 α 是不难求得的。

3. 驱动系统的布置

自 θ_n 、 θ_{n-1} 、 θ_{n-2} 的输入方式可分为平行轴式和同轴式。前者如表 5-1 中图 2 和图 5-13 所示， θ_n 和 θ_{n-1} 的两传动轴平行排列于小臂的前半部，这段小臂整体旋转完成 α 的旋转运动。这种布置的优点是结构简单，但加大了小臂前端的尺寸和重量。图 5-14 和表 5-1 中的图 1、3、4 都是同轴式，即 α 、 β 、 γ 的三个驱动轴互相套在一起，这样虽使后面的三个电机与三轴的联接复杂化，但减小了小臂的尺寸，对小臂的重量平衡也有改善。

自减速器的配置可分为前置式和后置式。表 5-1 中图 1~4 都为减速器后置式，即经减速后再把输入的 θ_n 、 θ_{n-1} 、 θ_{n-2} 传到腕部，这样有利于小臂的平衡。图 5-13 和图 5-14 则是把 β 、 γ 两自由度的减速器装在手腕内，这种方式称作前置式。它加大了腕部的复

杂程度和重量，对小臂乃至整机的平衡不利，但可简化整个小臂的结构，而且当腕部使用同步齿形带时，只能采用这种布置，因为齿形带只能用于高速级，这种布置还可简化后面三个驱动系统的结构。对于平行轴传动，减速器前置可以匹配小臂与手腕的几何尺寸。

自电机配置也可分为前置式和后置式。前置式如表 5-1 中图 5 所示，即有一个电机配置在手腕中，其最大优点是大大减化了小臂的结构和传动过程的轴线干绕，但加重了腕部。这种结构较适合于小负荷操作机。必须指出，这种结构的手腕也属非汇（正）交式，由它构成的六自由度操作机无解析解。电机后置式如表 5-1 中的图 1~4 所示，即驱动电机都布置在腕的后面。对于中小负载的操作机，电机可布置在臂的空腔中（如图 5-13），而对于大负载操作机，由于电机重而且大，电机多布置在臂的后端，以减小臂的尺寸和前部重量，并与减速器一起对小臂起平衡作用。

第三节 末端执行器

末端执行器是装在机器人操作机的机械接口上，用于使机器人完成作业任务而专门设计的装置。末端执行器种类繁多，与机器人的用途密切相关，最常见的有用于抓拿物件的夹持器；用于加工工件的铣刀、砂轮和激光切割器；用于焊接、喷涂用的焊枪、喷具；用于质量检测的测量头、传感器。一般说来，一种新的作业需要一种新的末端执行器，而一种新的末端执行器的出现又往往为机器人开辟一种新的应用领域。目前，末端执行器的分析和设计已形成了一个专门领域^[8]。这里只简要介绍几种常用的抓拿物体的末端执行器。

一、夹持器

夹持器通常有两个夹爪。根据不同的运动形式，夹爪又可分为回转式和平移式两种类型。

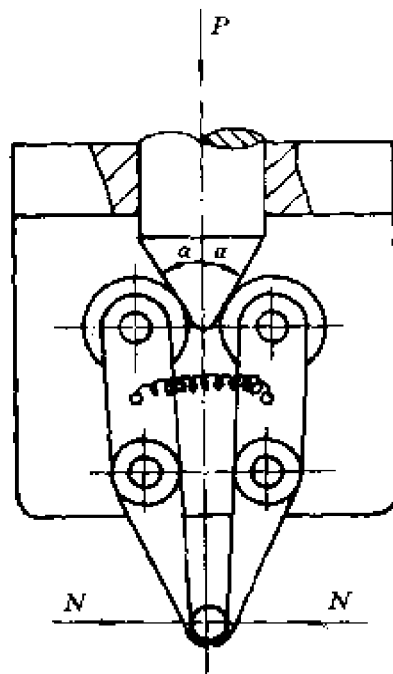


图 5-15 斜楔杠杆式

图 5-15 是斜楔杠杆式夹持器。当施以力 P 时，楔角为 α 的斜楔前进，使夹爪闭合，夹紧物件，且当 α 小于自锁角时，即使 P 消失，被夹物件也不会滑脱。当施以相反方向的力时，斜楔后退，夹爪在弹簧的作用下打开。由于夹爪作回转运动，而回转轴又是固定的，故当夹持不同直径的物件时，物件的中心线将沿对称轴线移动，形成定位误差。故使用这种夹持器时，机器人的应用程序必须有补偿功能。

图 5-16 是一种有定位补偿功能的杠杆式夹持器。这种夹持器的夹爪回转销轴可借助左右螺旋副平移其相对位置，所以通过调整螺旋可对不同直径的物件保持中心位置不变。

图 5-17 为平行移动式夹爪。当施以压力 P 时，齿轮在下齿条上滚动，并以两倍于齿轮的移动速度带动上齿条移动，两个齿条分别与两个夹爪联接，带动夹爪平行地移动，起到夹持物件的作用。

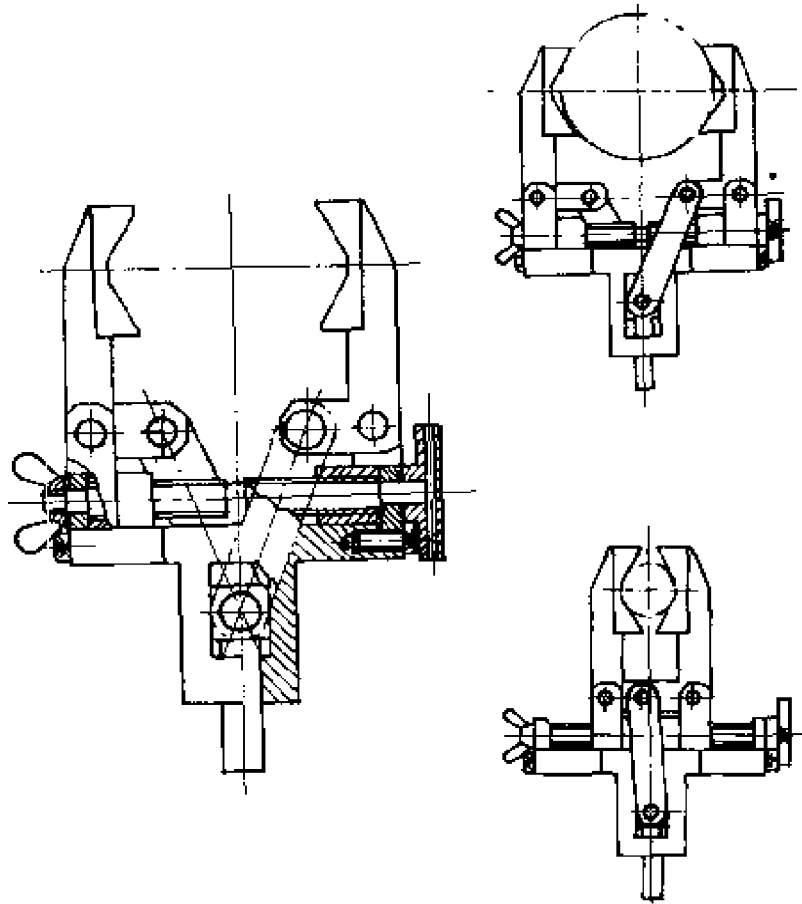


图 5-16 有位置补偿的杠杆式夹持器

夹爪的夹紧力极易按静力平衡求得。

二、拟手指型执行器

人手是最灵巧的夹持器，如果模拟人手结构，就能制造出结构最优的夹持器。但由于人手自由度较多，驱动和控制都十分复杂，所以到目前为止，只是制造出了一些原理样机，离工业应用还有一定的差距。下面介绍几种较有特色的拟手指型手爪。

图 5-18 是 UTACH/MIT 手爪的示意图^[18]。它有 4 个手指，可实现对握，每个手指有 3 个曲伸关节和一个摆动关节，共 16 个

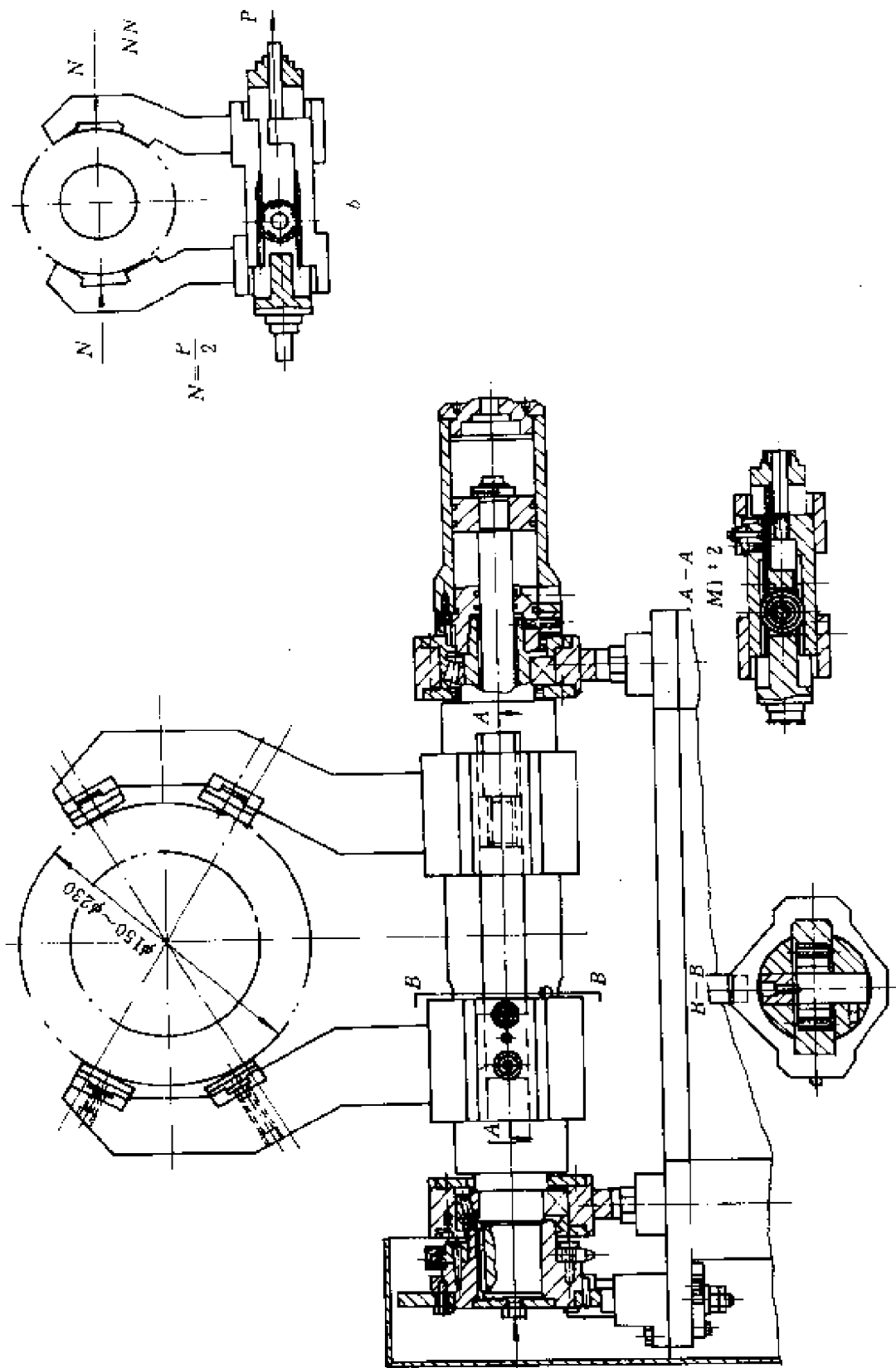


图 5-17 平行移动式夹爪
 a—原理图，b—原理图

自由度。各关节采用绳轮驱动，驱动器后置。由于拇指对置，所以4个手指不能实现并掌操作，即4个手指不能放在一侧实现全握式的抓拿物体。

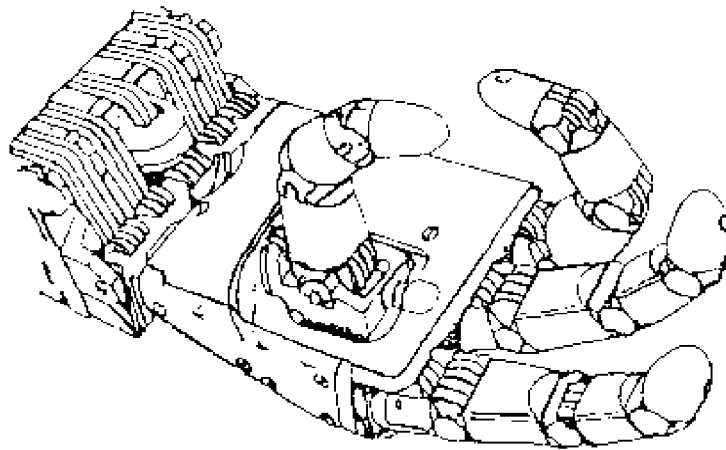


图 5-18 UTACH/MIT 手爪

图 5-19 为 3 指手爪^[8]。第一指相当于拇指，只有一个曲伸关节，一个摆动关节和一个开合关节，其他两指都有两个曲伸关节，故共有 11 个自由度，也是驱动器后置。

图 5-20 是另一种三指手，也称双拇指手爪。每个手指都有 3 个曲伸关节。其中，外面两指有摆动和转动自由度，通过转动，可以和中间指对置，也可如图示那样，与中指处于同侧（并掌）；中指无转动自由度，故该手共有 14 个自由度。该手可以抓取或握取物件，由于使用了超小型电机和减速器，实现了驱动器前置配置（即驱动器、减速器与手指配在一起），结构紧凑，可作为一个部件安装于机器人的机械接口上。

三、吸式执行器^[8]

吸式执行器是目前应用较多的一种执行器，特别是用于搬运机器人。该类执行器可分磁吸和气吸两类。

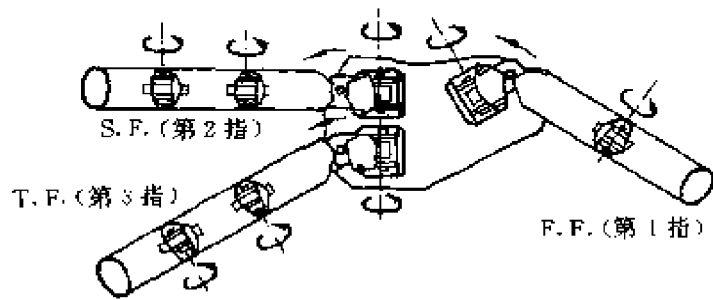


图 5-19 三指手爪

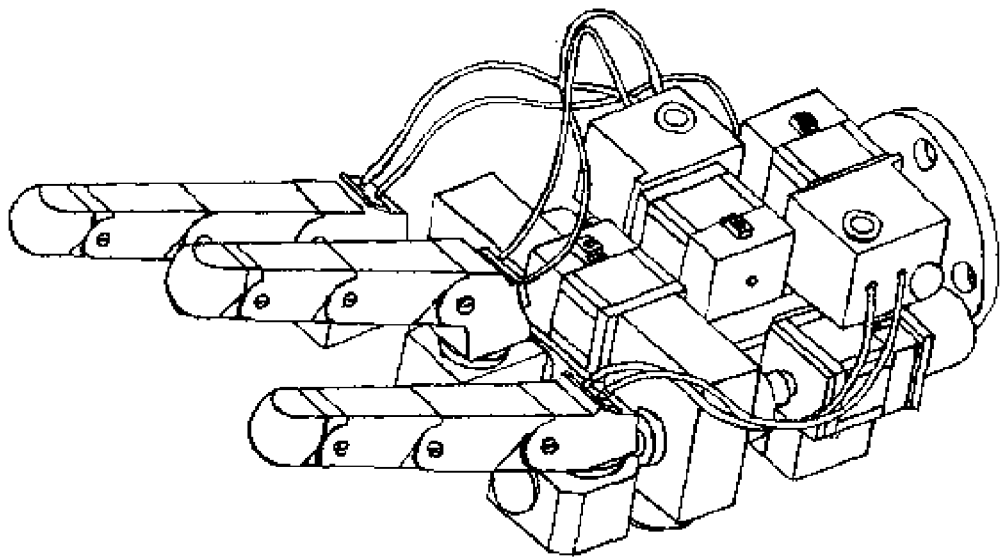


图 5-20 双拇指三指手

图 5-21 是一种很有特点的磁吸式手爪。它利用电磁力和袋装可变形磁粉，可以吸住具有任意表面形状的磁性物件。

图 5-22 是一种气吸式手爪。它下端有一个橡胶吸盘，上面有弹簧缓冲压下装置，靠吸盘内腔的真空度吸住物件。形成真空的方法通常有两种。一种靠真空泵，一种靠气流形成负压。前者工

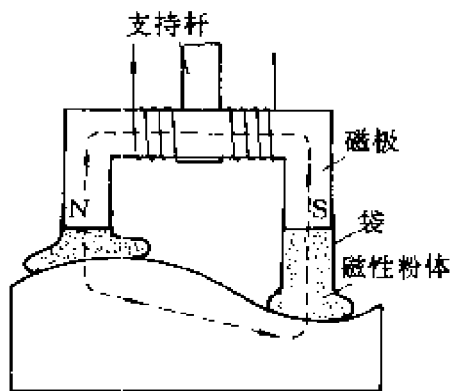


图 5-21 磁吸手爪

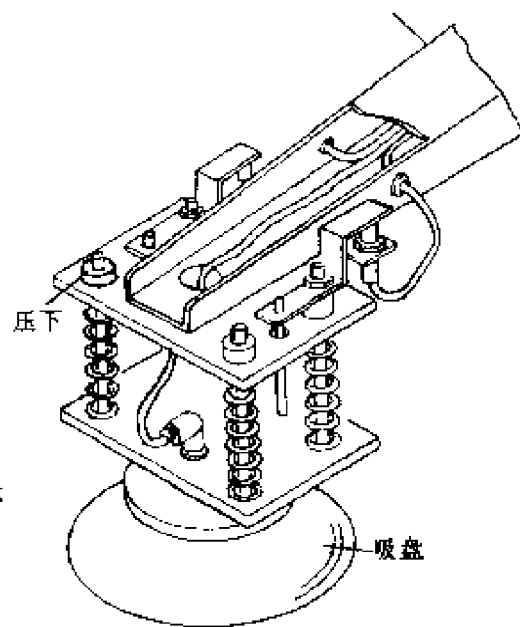


图 5-22 气吸式手爪

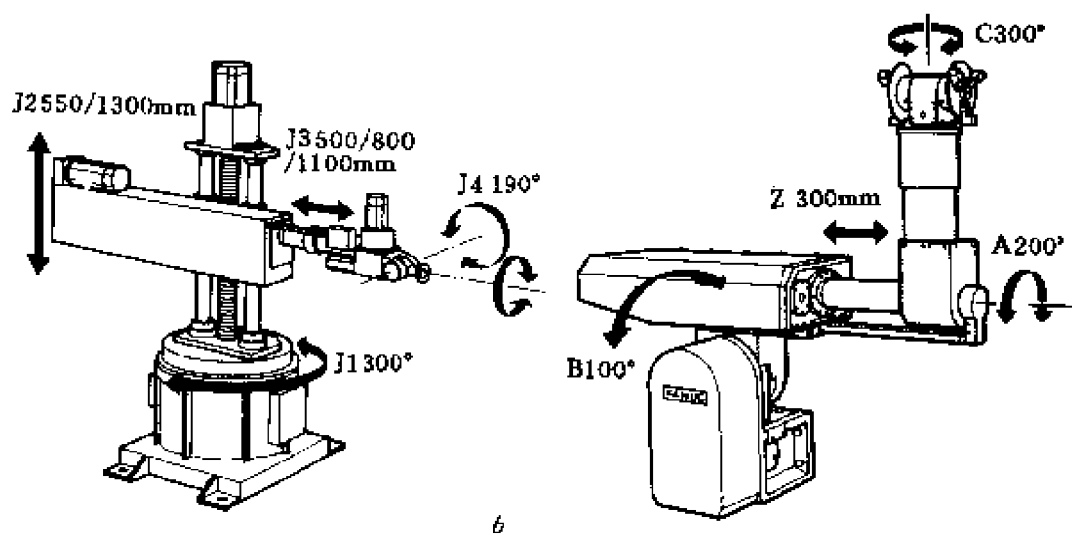
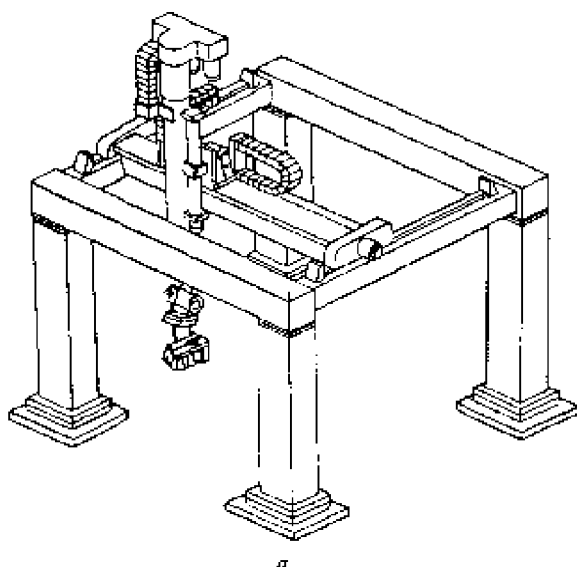
作可靠，吸盘结构简单，但成本较高；后者只需压力为 0.4MPa 的普通工业气源，利用伯努利原理（文多利管），在气流高速喷射时即可形成所要求的负压，使吸盘吸住物体，因不需专用真空泵，故成本较低，目前应用较广泛。

第六章 操作机本体的分析与设计

第一节 机 型

一、常见的商用机型及其评价

1. 常见机型



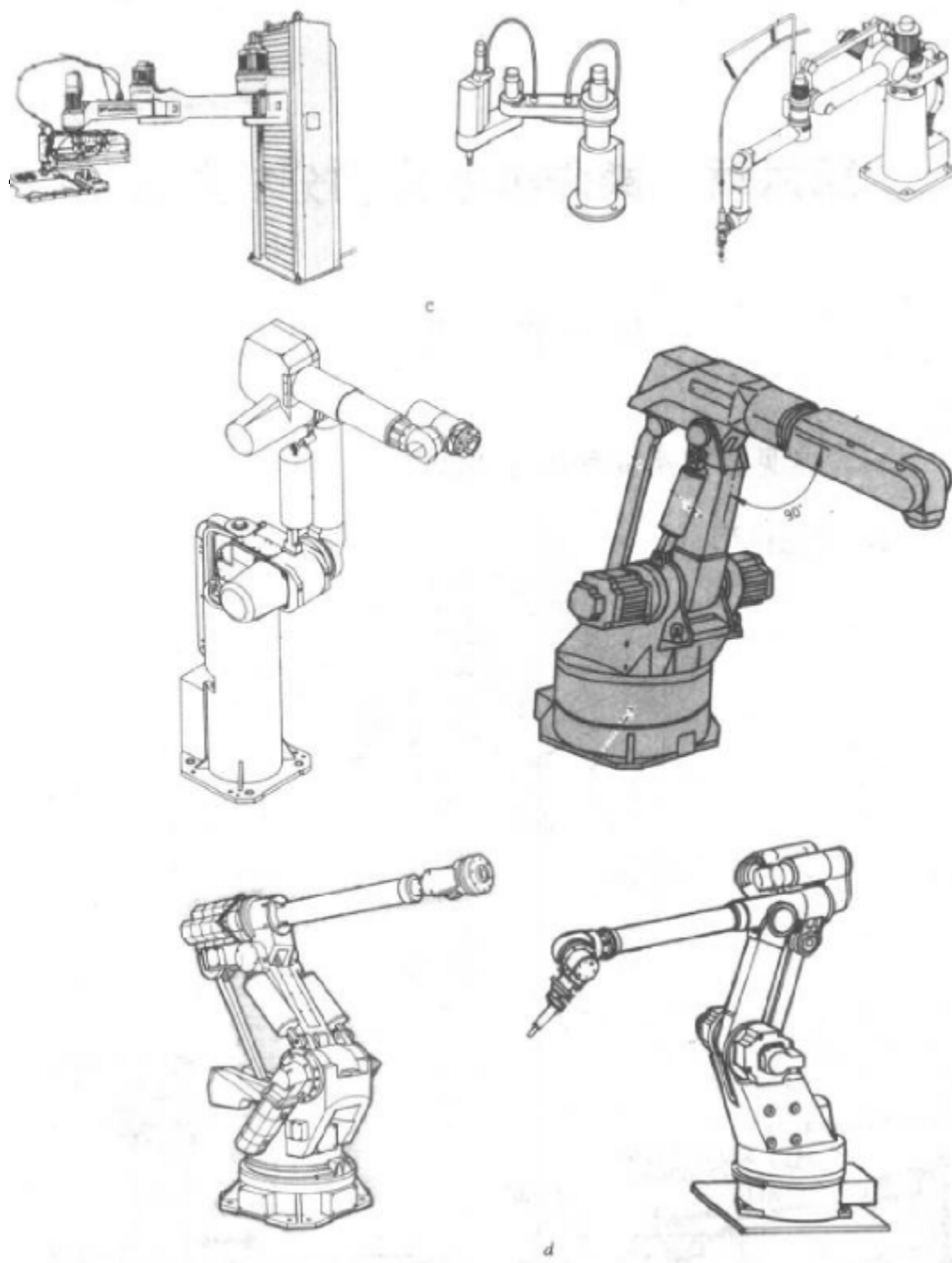


图 6-1 操作机的常见形式

a—直角式 (NY—H200); *b*—圆柱坐标式 (FANUC ROBOTOM);
c—水平关节式 (SONY SRX—4CH); *d*—垂直关节式 (MOTOMAN)

近年来，由于伺服电机，特别是交流伺服电机的发展，负荷

在 300kgf 以下的液压驱动机器人几乎全为电气驱动。最近，全电动关节型机器人的负荷，已达到 4000N (400kgf) (1992 年日本安川公司生产)。目前常见的操作机机型如图 6-1 所示。其中，水平关节型和垂直关节型已成为机器人的主要机型。为了满足某些特殊要求和提高效率，机器人制造厂家还生产了混合型（水平关节

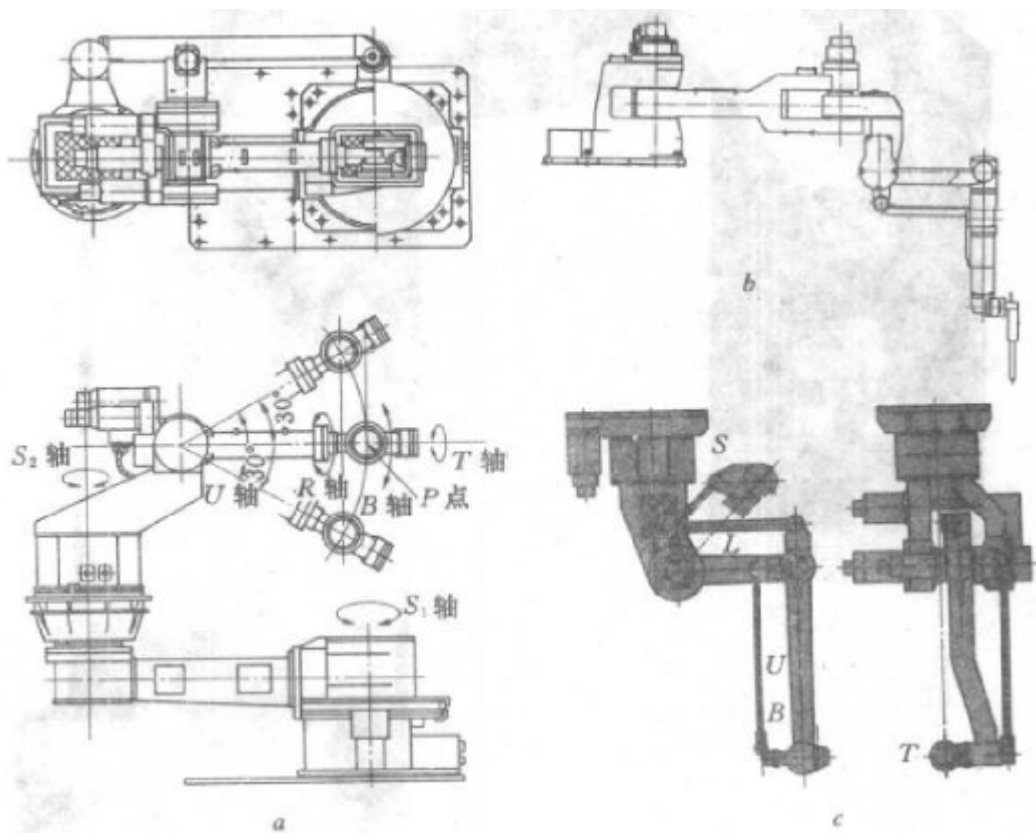


图 6-2 混合型和吊挂型操作机

a、b—混合关节型；c—吊挂型

+垂直关节) 和特殊的吊挂型操作机 (如图 6-2)。美国 Unimaf 公司最早推出的球坐标式液压驱动的机器人，目前已很少生产，图 6-3 所示的用于冶金企业的大负荷操纵型液压机器人却得到了发展。

表 6-1 是目前最流行的商用机器人构形简图。直角坐标有两种基本形式：吊车式和基座式，前者工作空间大，负荷也较大，如

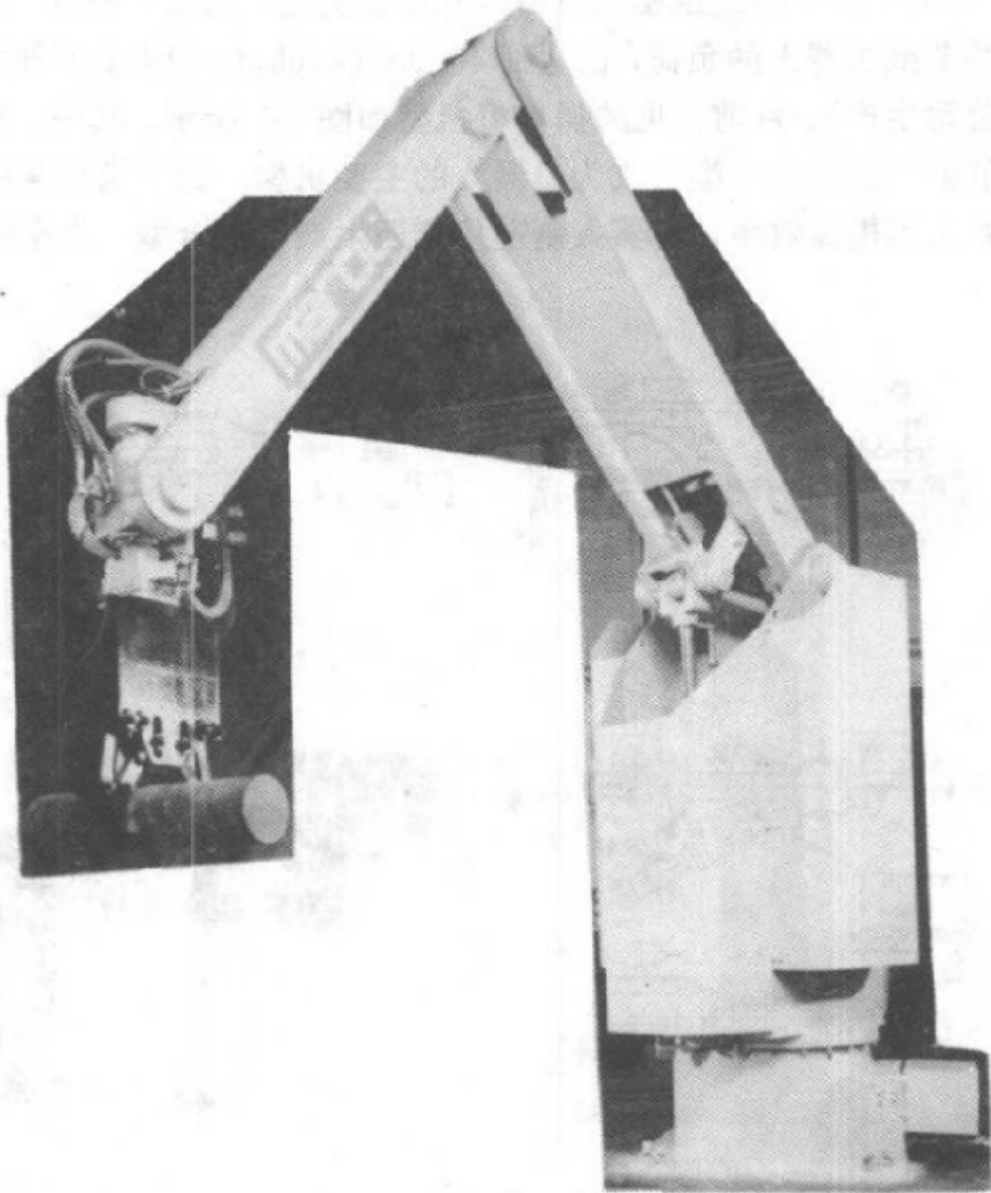


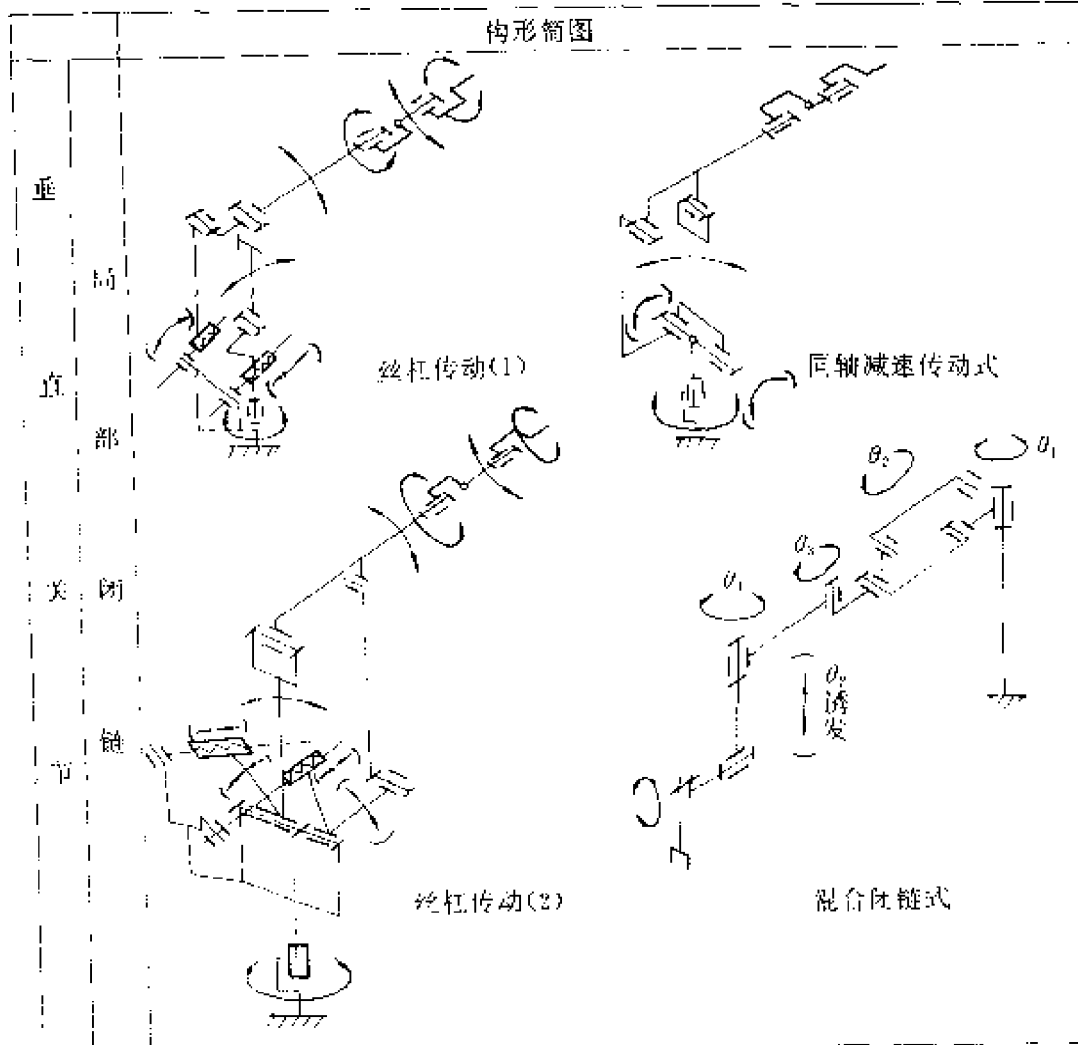
图 6-3 大负荷操纵型机器人（垂直关节式）

安川公司生产的吊车式负荷为 200~350kg。圆柱坐标型比较单一。水平关节式也有两种基本形式，手爪移动式用于需要快速移动的场所，如电子插件的装配；臂杆移动式行程较大，但速度不高。垂直关节式有开链和局部闭链两种基本类型，前者工作空间大，但负荷较小，美国的 PUMA 机器人是其代表，局部闭链式工作空间相对较小，但负荷较大（已达 4000N），而且可以使第 2 轴

(大臂倾动)、第3轴(小臂摆动)的动力学部分解耦。局部闭链型又有丝杠传动和同轴减速传动两类,前者刚度好精度高,但工作空间较小;后者是电机通过RV减速器或谐波减速器直接驱动大臂和小臂的曲柄,这样可以大大加大大小臂的转角范围,目前正在取代丝杠传动,局部闭链的同轴减速传动是一种工作空间大、承载能力强、刚度好的较佳机型。这种机型的关键部件是RV减速器(或刚度较好的谐波减速器)。

表 6-1 常见机型

构形简图	
直角坐标	<p>吊车式 基座式</p>
圆柱坐标	<p>基座式</p>
水平关节	<p>手爪移动式 臂杆移动式</p>
垂直关节	<p>偏置式 正交式</p>



2. 机型评价

机型评价是一个十分复杂的问题，目前尚无统一的标准。我们认为，在负荷和位姿重复精度相同，自由度数目和驱动方式相同的条件下，最主要的评价指标是：性能指标、能耗指标和寿命指标。

(1) 性能指标。用以评价性能的有两个指标，一为性能重量比 K_w ，一为性能价格比 K_c 。一般由高刚、强度的轻型材料制作的操作机， K_w 一定会大些，但 K_c 可能小些；反之，用普通材料， K_c 就会大些，而 K_w 可能小些。最好综合考虑这两个指标。

性能重量比 K_w 可由下式计算：

$$K_w = R_v \omega \times R_d D \times R_w V / W \quad (6-1)$$

其中： $\omega = (\omega_1 \times \omega_2 \times \omega_3) / \pi^3$

$$D = (\alpha \times \beta \times \gamma) / (2\pi)^3$$

$$V = V_p / V_0$$

式中 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ——前三关节的角速度 rad/s；

α, β, γ ——手腕 3 个转角的计算值 rad，一般最大只取 2π ；

V_p, V_0 ——分别是腕点 (P_w) 的工作空间体积和操作机零位时所占空间体积， m^3 ，其中 V_0 可由下式求出：

$$V_0 = \frac{\pi}{4} H_0 L_0^2 \left(\frac{\theta_1}{2\pi} \right)$$

H_0 ——零位时操作机总高度；

L_0 ——零位时沿小臂水平方向的最大半径；

θ_1 ——关节 1 的转角范围；

R_v, R_d, R_w ——速度、灵活度和工作空间的权重，其值为 0 ~ 1，根据评价重点确定；

W ——操作机总重，t。

性能价格比 K_c 可由下式求出：

$$K_c = R_v \omega \times R_d D \times R_w V / C \quad (6-2)$$

式中 C ——操作机价格（不包括控制器）。

其他符号意义同前。

(2) 能耗指标。能耗指标 K_E 可由下式求出：

$$K_E = \sum_{i=1}^n KW_i / Q \quad (6-3)$$

式中 KW_i ——每个自由度驱动器的容量 kW；

n ——自由度数目；

Q ——负荷重量，kgf。

(3) 寿命指标。寿命指标 F 用易损件的更换周期表示（单位

为小时)。

一台机器人，如果上述 3 个指标都比较大，其操作机一定是好的。这就是我们建议的量化评价标准。

二、构形原则及方法

为了构思一台工业机器人的操作机，最重要的原则就是满足作业要求，即在性能方面满足作业的负荷要求、精度要求、速度要求、环境要求；在几何方面满足空间要求和姿态要求。对操作机的构形来说，几何要求是其重要的设计依据。比如，为了完成轴类零件的码放作业，我们设计一台带有局部闭链的垂直关节同轴减速传动式机器人。图 6-4 是零件在多层台车上的码放情况。如果夹持器抓拿零件的中部，按作业要求，

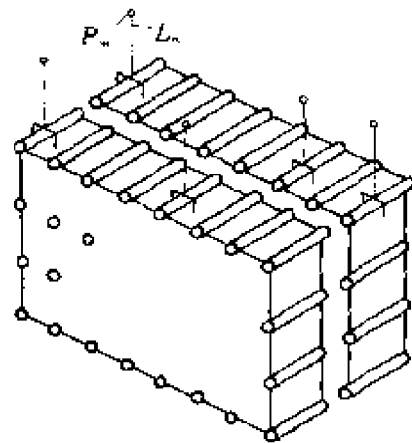


图 6-4 零件码放图

操作机的末杆必须具有图中双点划线所示的位姿(为了图形清晰，图中只画了上排的几个图形)。于是操作机的构形设计，首先必须根据作业要求的末杆位姿图设计一种合适的机型，并且使其具有适当数量的自由度和结构尺寸。图 6-5 中粗实线所表示的就是一种能完成该作业的结构简图。为了完成这一作业，可能还会设计出其他构形形式的操作机。进行比较后，其中结构最紧凑而且重量最轻者，一般来说，就是最好的，也就是我们所需要的。由此可以得出一个非常重要的构形原则，即：操作机末杆位姿图必须覆盖作业要求的末杆位姿图，并且结构紧凑，重量轻。

由图 6-5 还可看出：由于作业要求的工作空间是一个长方体，所以该操作机的位置机构必须具有 3 个自由度，而作业的姿态要求末杆 L_n 在作业空间内必须达到垂直向下，并能转动手爪，使其夹持方向始终平行于零件的轴线，为此姿态机构必须具有两个自

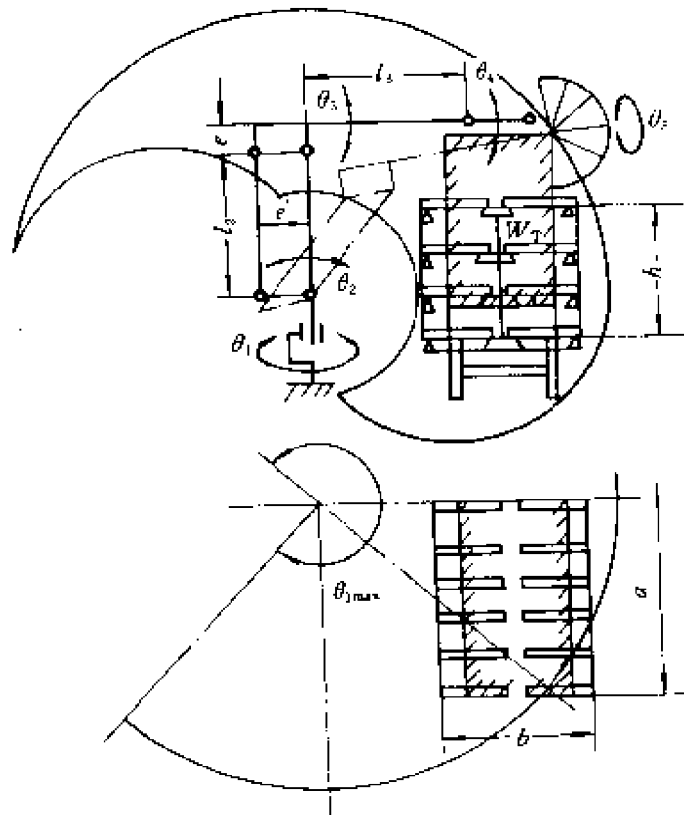


图 6-5 操作机构形简图

由度，于是该操作机至少应有 5 个自由度。操作机的杆长 (l_2, l_3, e) 以及各关节的转角范围必须能使操作机的工作空间完全包容作业空间，也就是要满足操作机的末杆位姿图必须对作业要求的末杆位姿图进行覆盖的构形原则。

所谓结构紧凑，就是工作空间靠近关节 1 的旋转轴线的剖截线（图 6-5 中曲折线 fgh ）在 θ_1 的转角范围内所形成的扇形体积 V_0 最小。因为 V_0 越小，工作空间就越靠近中线，当然结构就越紧凑。要使结构最轻，在其他条件不变的情况下，臂杆的长度尺寸之和应该最小。

有了上述的量化标准，机型一经确定之后就可用优化方法确定操作机的结构参数。以图 6-5 所示的操作机为例，其优化模型是：

(1) 设计变量 \bar{x} 。设计变量包括大小臂的杆长 (l_2, l_3)、偏距 (e) 和关节 2、3 的转角范围 (θ_2, θ_3)，即：

$$\bar{x} = [l_2, l_3, e, \theta_2, \theta_3]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \quad (6-4)$$

(2) 目标函数 $F(x)$ 。结构紧凑性取为 $F_1(x)$ ，重量最轻取为 $F_2(x)$ ：

$$\min F_1(x) = V(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)$$

$$\min F_2(x) = L(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)$$

将两式合并，加权 (K_1, K_2) 即得目标函数：

$$\min F(x) = K_1 \cdot F_1(x) + K_2 \cdot F_2(x) \quad (6-5)$$

式中 K_1, K_2 的值由设计者根据具体要求选取，一般可取 $K_1 = K_2 = 0.5$ 。

(3) 约束条件 $G_i(x)$ 。最重要的约束条件就是操作机的腕点空间 W_P 大于、等于作业空间 W_T 和设计变量以及其参数的上下界，即：

$$\left. \begin{aligned} G_1(x) &= W_P(x_1 \cdots x_i \cdots x_n) - W_T \geq 0 \\ G_i(x) &= x_{i\min} \sim x_{i\max} \quad (i = 2 \cdots n) \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

有了上述优化模型，选用一种优化方法，如罚函数法，即可得到所需结构参数的理论值，再根据实际情况进行圆整和调整，即可得到所需的结构参数值。具体算例略。

第二节 关节的构造及其传动配置

关节是操作机各杆件间的结合部分，有转动和移动两种类型。前三关节通常称作腰关节 (J_1)、肩关节 (J_2) 和肘关节 (J_3)，它们构成了操作机的位置机构。后三关节（或后二、后一关节）构成了操作机的姿态机构，称作腕部，这已在前面进行了讨论。下面分别讨论 J_1 、 J_2 、 J_3 的构造和传动配置。

一、腰关节 (J_1)

图 6-6 是最新流行的腰关节型式。它由电机通过 RV 减速器

带动腰部支架转动。整个腰部及其以上的操作机所有部分都支持在操作机的专用交叉滚子轴承上。该轴承既能承受轴向力、径向力，又能承受倾翻力矩，且具有较高的精度和刚度。上述结构的主要优点是关节刚度大，传动平稳，回差可小到 $1'$ 以内。

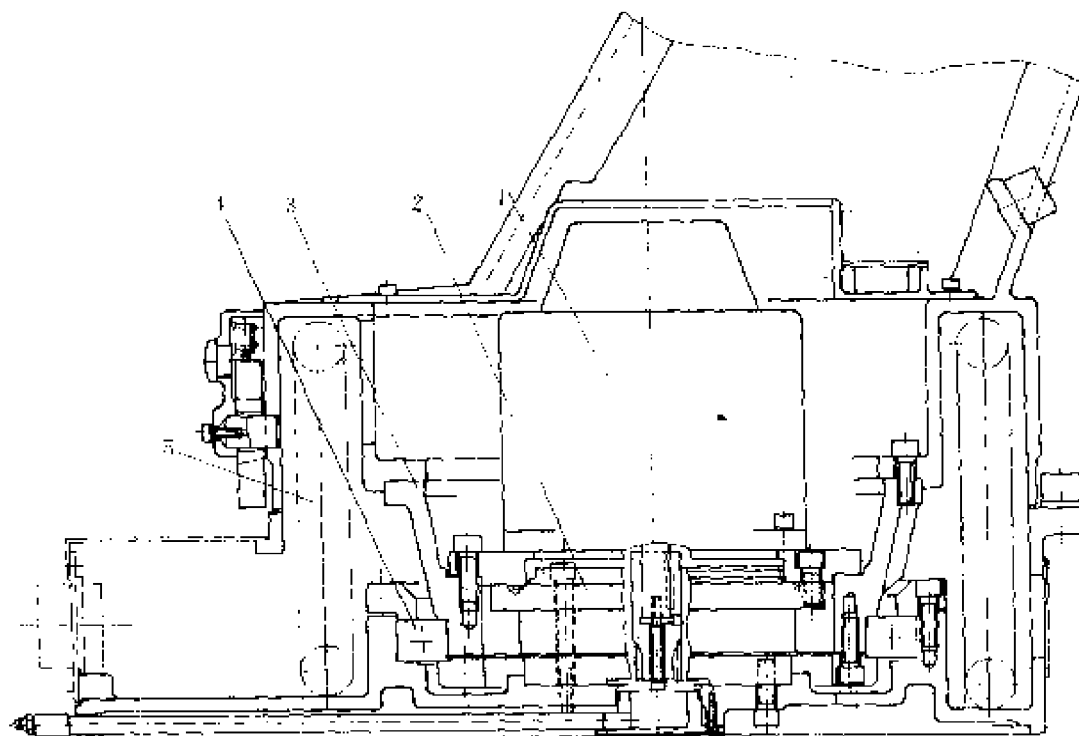


图 6-6 腰关节 (J_1) (电机上置)

1—电机；2—RV 减速器；3—支架；4—交叉滚子轴承；5—电缆

图 6-7 是电机在下，使用杯式谐波传动和四点接触式薄壁轴承的关节结构。由于杯式谐波柔轮刚度低，所以这种结构要特别注意腰回转时整机的低频振动问题。

图 6-8 所示腰关节是电机经齿轮减速之后再带动立轴转动。立轴上下使用两个向心推力轴承，是 PUMA 操作机的典型结构。该结构支承稳定，能承受很大的倾翻力矩，齿轮传动刚度较大，但必须增加消齿隙机构，否则回差很大，严重影响操作机的位置精度。

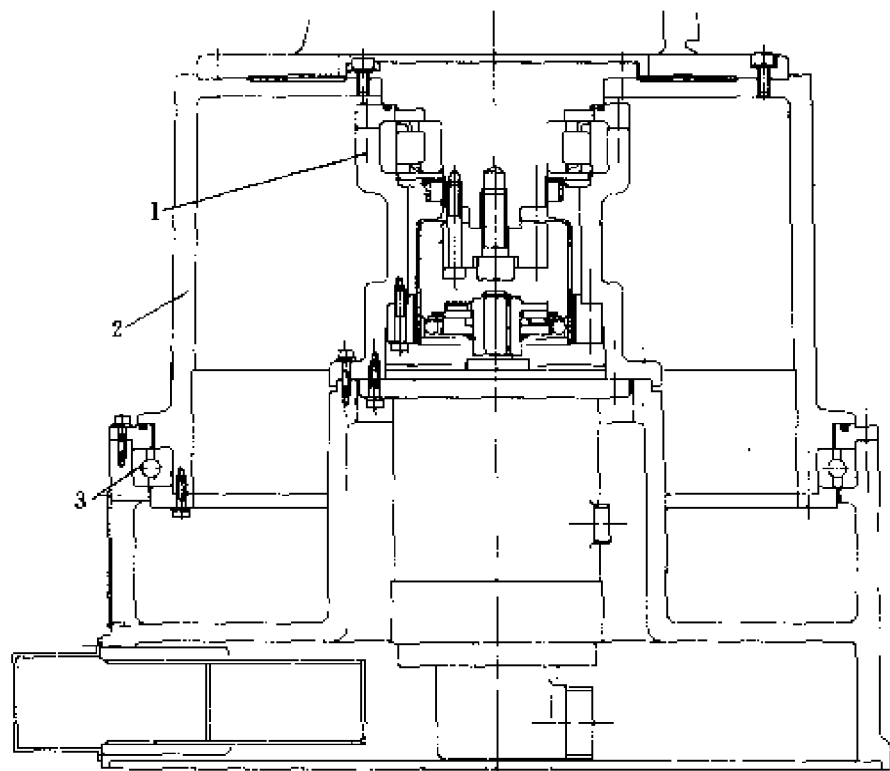


图 6-7 腰关节 (J_1) (电机下置)

1—谐波减速器；2—电机；3—四点接触球轴承

由上面的图例可以看出，腰关节的构造主要是两种类型——使用交叉滚子或四点接触式轴承的同轴式（图 6-6、6-7）和平行轴式（图 6-8）。前者结构紧凑，腰关节高度尺寸小（使用特制轴承的缘故），但后面关节（ J_2, J_3, \dots ）的各种电缆走线比较困难，大多是在固定的中间柱体外面留有较大的环形空间，使电缆以盘旋的形式松松地套在中间柱体上，当腰支架等机体转动时，电缆犹如盘旋弹簧或收紧或放松，从而解决了电缆两固定端的相对运动问题。对于平行轴式腰关节，电缆则可方便地通过中空轴，联接于支座的固定接线板上，十分方便地解决了电缆两固定端的相对运动。

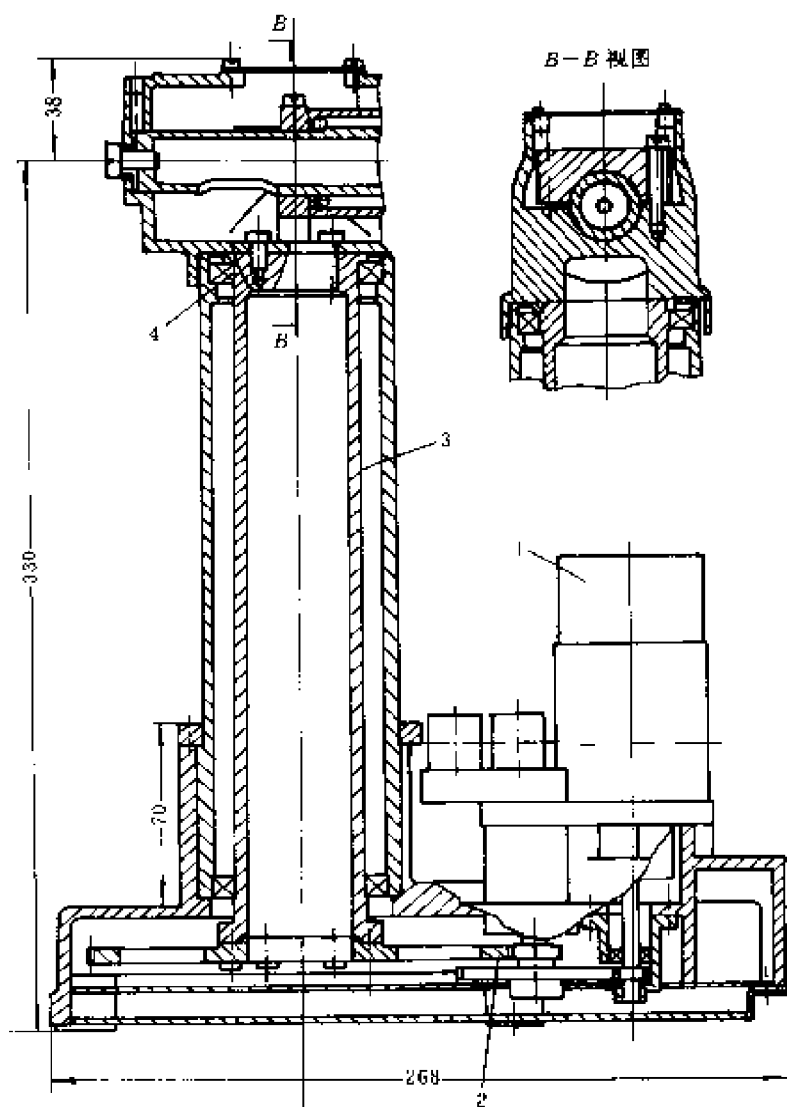


图 6-8 腰关节 (J_1)

1—电机；2—齿轮；3—立柱；4—结合螺栓

二、肩关节 (J_2) 和肘关节 (J_3)

对于开式连杆结构， J_2 位于腰部的支座上， J_3 位于大臂与小臂的联接处。其结构形式有 PUMA 式 (图 6-9) 或采用同轴传动 (图 6-10)。它采用高刚性的 RV 减速器减速，也可改用谐波传动或摆线针轮。

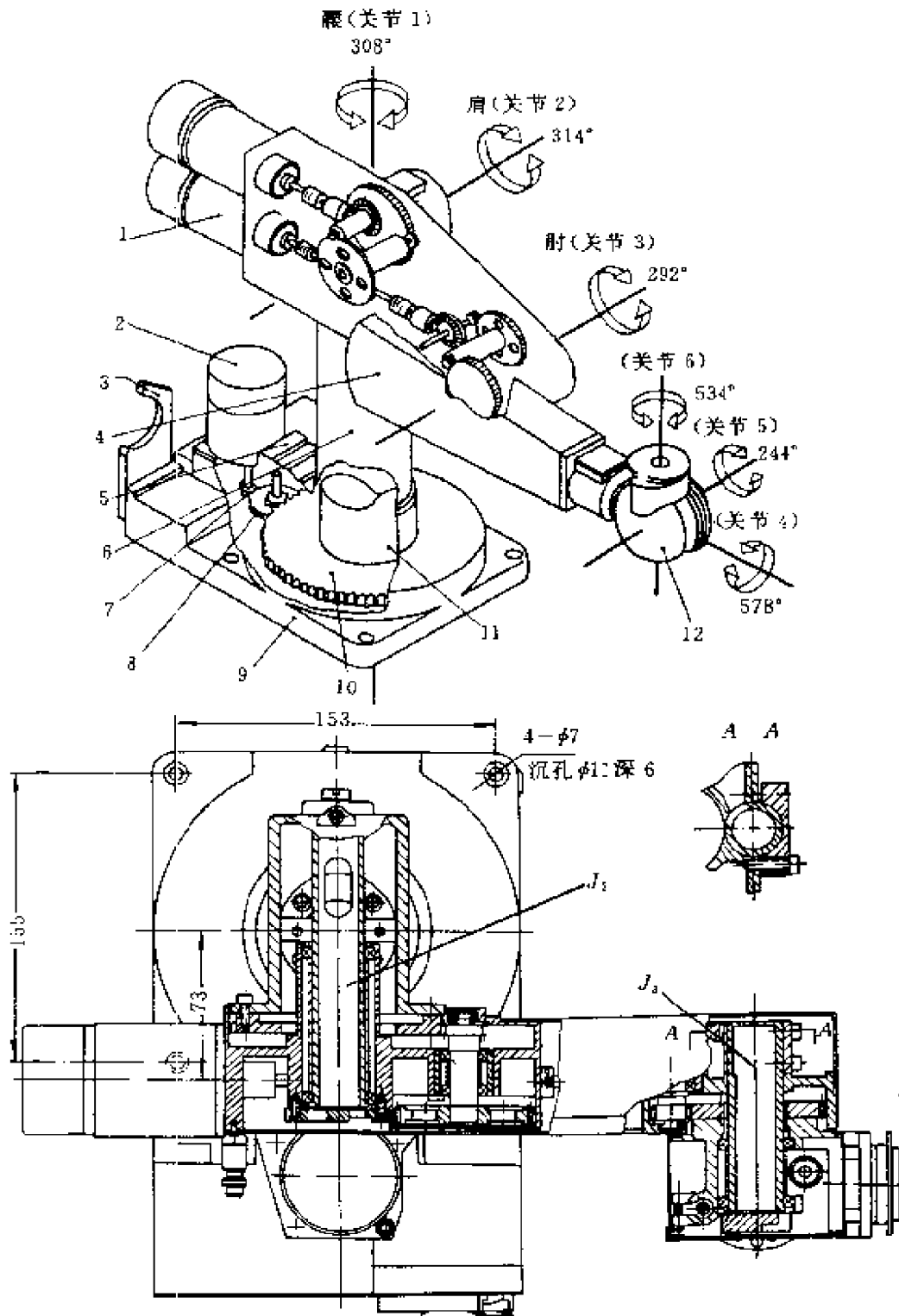


图 6-9 PUMA 机器人的 J_2 、 J_3 结构

1—大臂；2—关节 1 电机；3—小臂定位夹板；4—小臂；5—气动阀；6—立柱；
7—直齿轮；8—中间齿轮；9—机座；10—主齿轮；11—管形连接轴；12—手腕

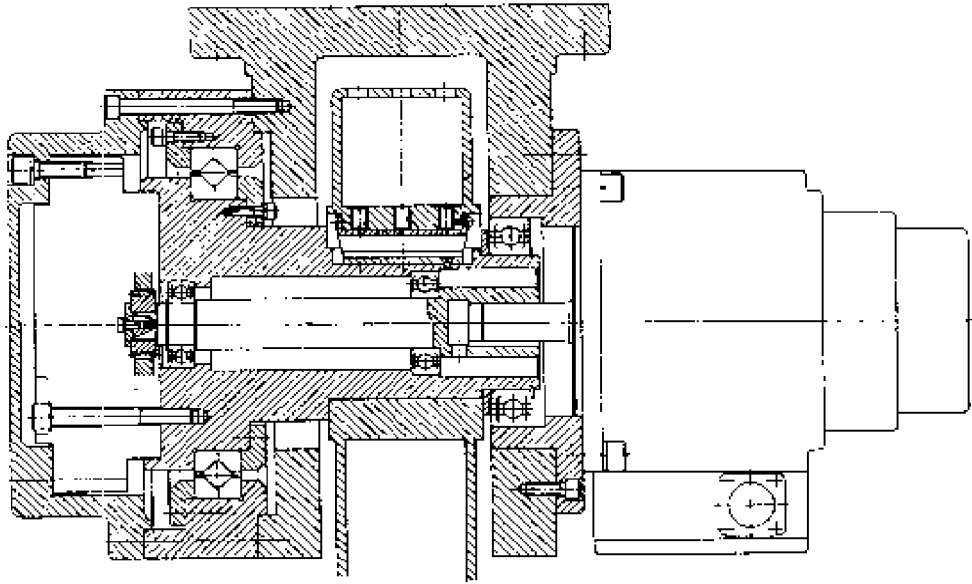


图 6-10 同轴减速传动 (J_2)

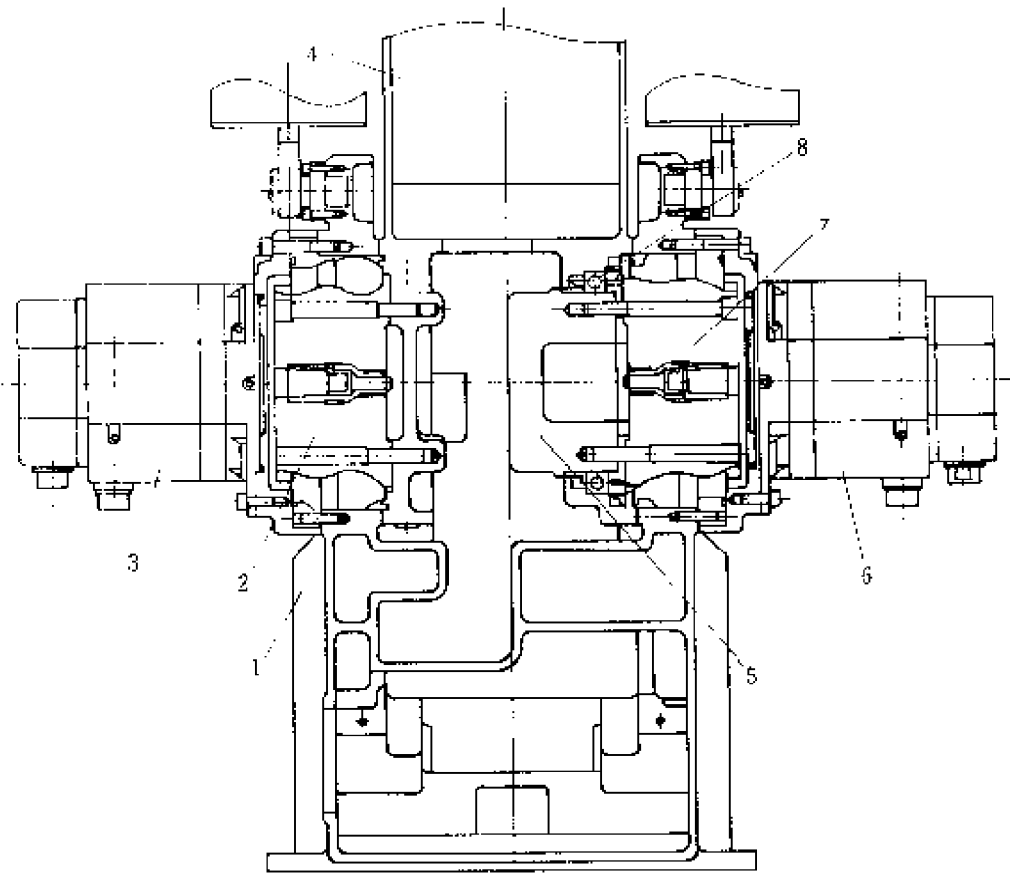


图 6-11 J_2 、 J_3 的同轴传动结构

1—底座; 2、7—RV 减速器; 3、6—驱动电机; 4—大臂; 5—曲柄; 8—轴承

对于局部闭链，情况就比较复杂。当采用滚动丝杠作为主动件时，肩关节 J_2 本身多为曲柄式，这时 J_2 只是一般带有滚动轴承的心轴结构。对于目前最流行的同轴减速传动，即驱动大臂转动和小臂四边形传动的曲柄转动的两减速器为同一个轴线，多采用图 6-11 所示的结构。电机 3 通过 RV 减速器 2 带动大臂 4 的左侧法兰，使大臂转动；电机 6 通过 RV 减速器 7 带动曲柄 5，后者再通过四边形机构（参看图 6-1d）带动小臂摆动。为了使大臂支承可靠，其右侧又通过轴承 8 支持在曲柄 5 上，形成双支点结构。为了缩小横向尺寸，也有通过锥齿轮传动使电机与关节的旋转轴线垂直的结构（如图 6-12），或者通过齿形带，使电机平行布置（如图 6-13）。

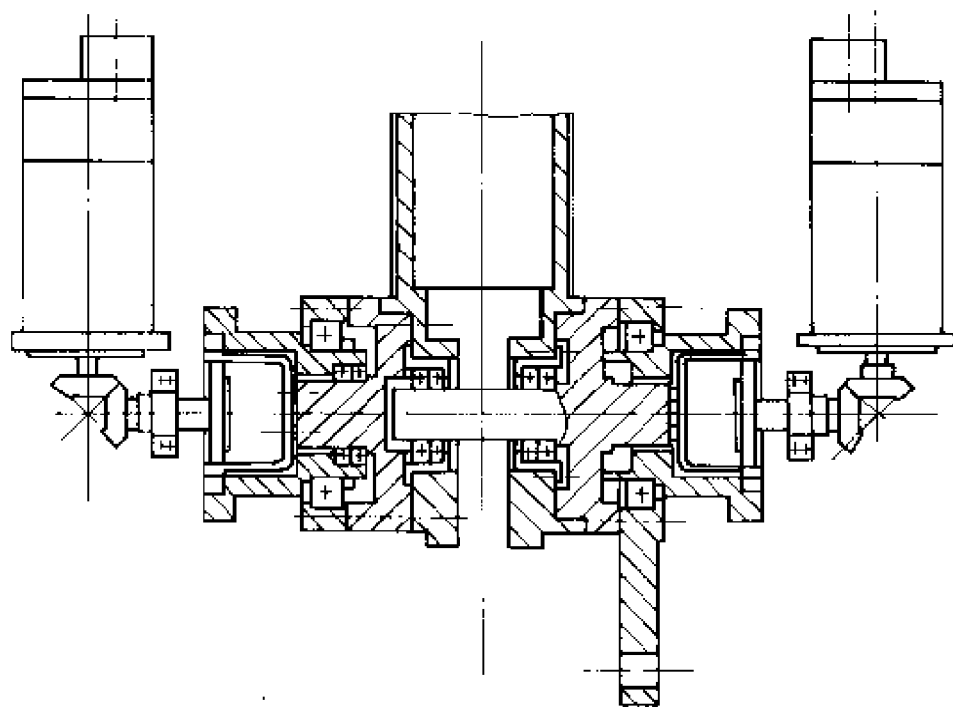


图 6-12 电机垂直布置

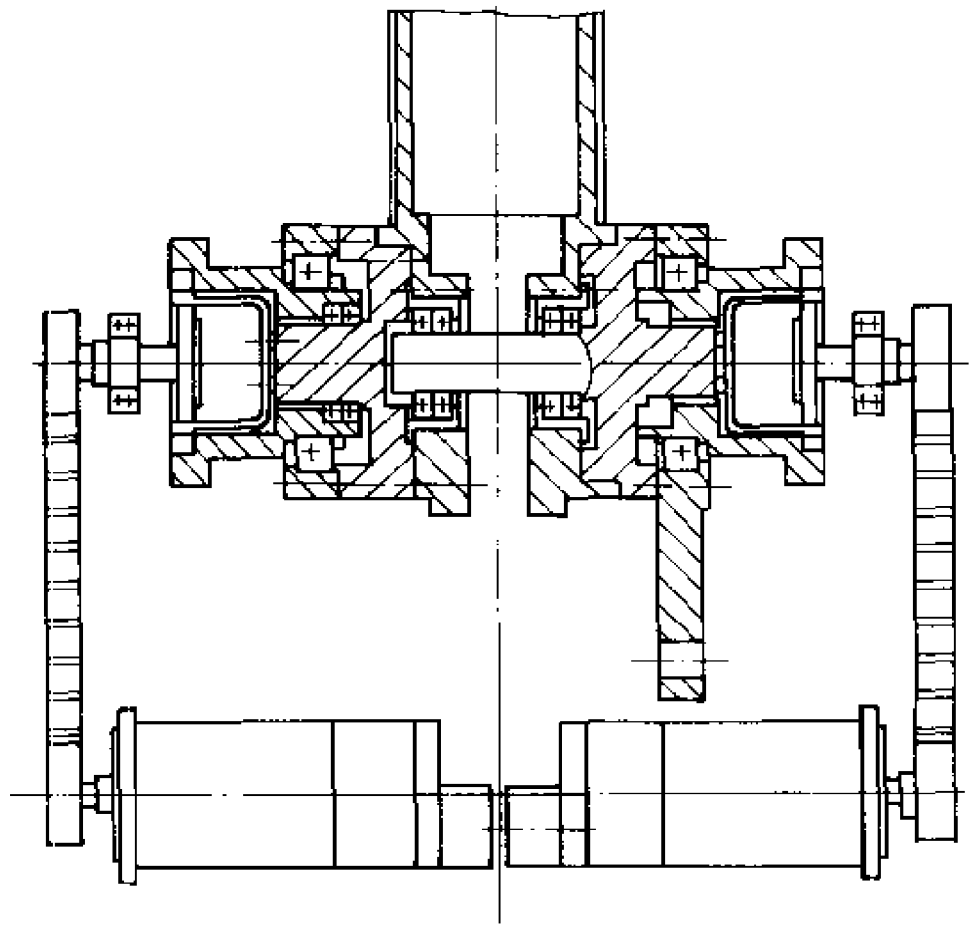


图 6-13 电机平行布置

三、直动关节

直动关节可有两种类型：电机驱动和液压驱动。前者多采用滚动丝杠和导柱（轨）式；后者的一种油缸驱动齿轮的倍速移动结构如图 6-14 所示。可以看出，当油缸 8 推动齿轮 6 前进时，由于齿轮 6 在固定的上齿条 4 上滚动，故以 2 倍的速度推动与手臂 1 固结在一起的齿条前进，使手臂倍速前进。

四、四点接触球轴承和交叉滚子轴承的选择计算

1. 受力分析

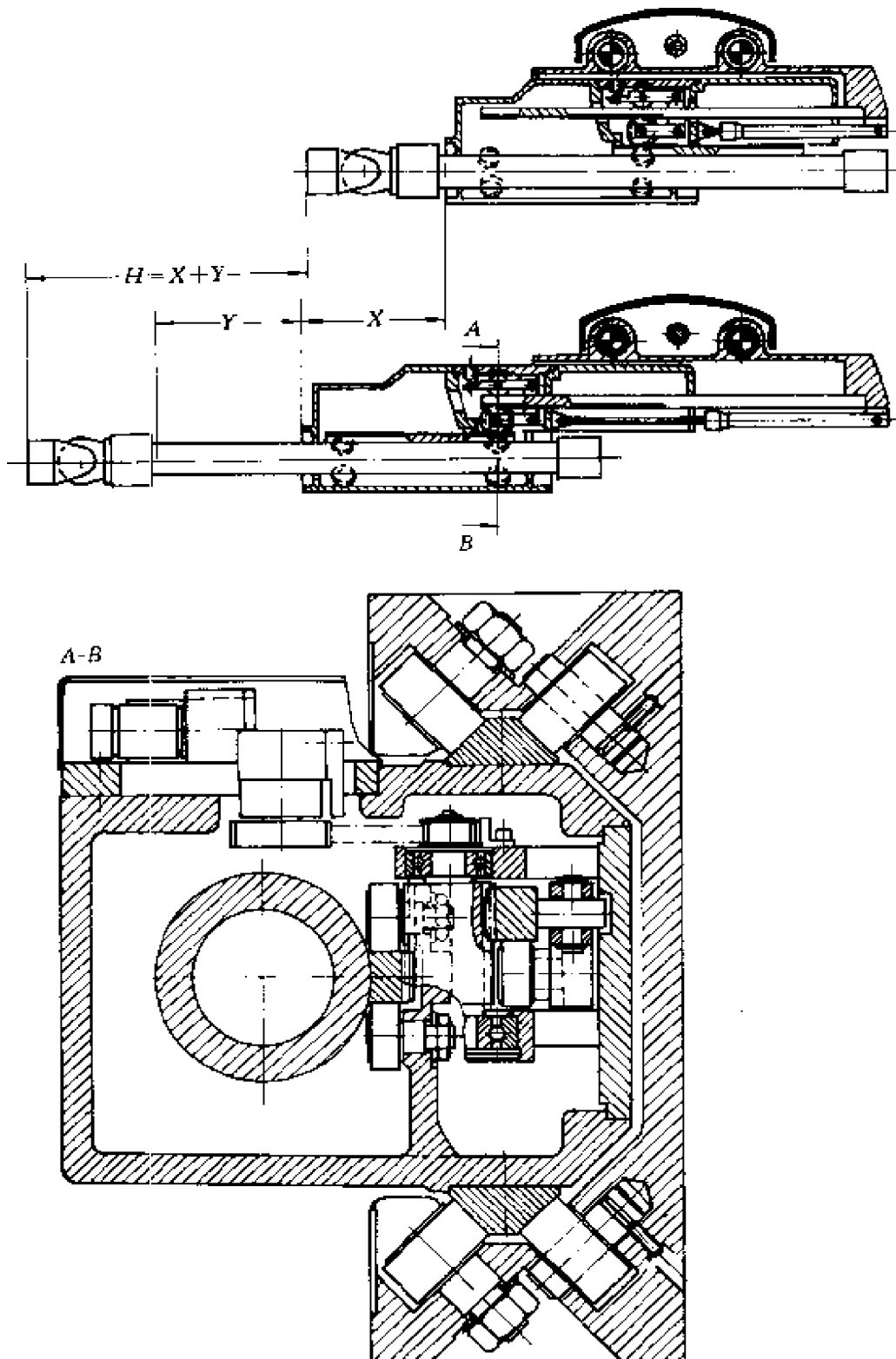


图 6-14 液压驱动滚动导轨式直动关节

表 6-2 和表 6-3 是洛阳轴承研究所研制的机器人用 4 点接触

表 6-2 薄壁密封 4 点接触球轴承

轴承型号	主要尺寸						额定负荷	
	d	D	d _s	D _s	r _{min}	C	C ₀	kN
	in							
FPXU400 2RU	4	101.60	20.65	108.65	115.0	0.2	11.10	16.23
FPXU404 2RU	4 1/4	107.95	27.00	115.00	121.4	0.2	11.28	17.06
FPXU408 2RU	4 1/2	114.30	33.35	121.35	127.7	0.2	11.63	18.30
FPXU412 2RU	4 3/4	120.65	39.70	127.70	134.1	0.2	11.80	19.13
FPXU500 2RU	5	127.00	46.05	134.05	140.4	0.2	11.97	19.96
FPXU508 2RU	5 1/2	139.70	58.75	146.75	153.1	0.2	12.44	22.02
FPXU600 2RU	6	152.40	71.45	159.45	165.8	0.2	12.73	23.68
FPXU608 2RU	6 1/2	165.10	84.15	172.15	178.5	0.2	13.16	25.75
FPXU700 2RU	7	177.80	96.85	184.85	191.2	0.2	13.43	27.40
FPXU708 2RU	7 1/2	190.50	109.55	197.55	203.9	0.2	13.81	29.47
FPXU800 2RU	8	203.20	122.25	210.25	216.6	0.2	14.06	31.13
FPXU900 2RU	9	228.60	147.65	235.65	242.0	0.2	14.65	34.85
FPXU1000 2RU	10	254.00	173.05	261.05	267.4	0.2	15.20	38.57
FPXU1100 2RU	11	279.40	198.45	286.45	292.8	0.2	15.61	41.88
FPXU1200 2RU	12	304.80	223.85	311.85	318.2	0.2	16.11	45.60

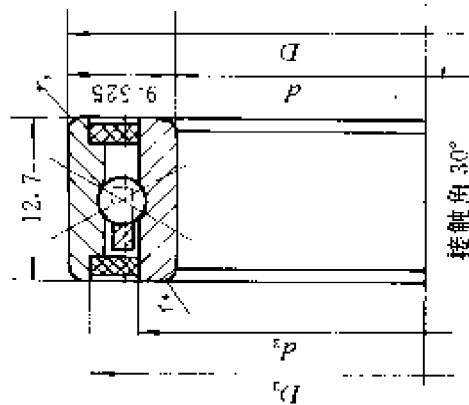
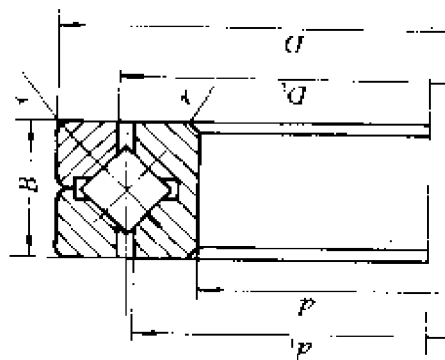


表 6-3 薄壁密封交叉滚子轴承

轴承型号	主要尺寸							额定负荷	
	d	D	B	d_1	D_1	r_{\min}	C	C_0	
	mm							kN	
CRB3010	30	55	10	42.1	45.3	0.5	9.25	6.45	
CRB4010	40	65	10	52.1	55.3	0.5	10.41	8.01	
CRB5015	50	80	15	64.5	68.1	0.5	21.08	15.72	
CRB6015	60	90	15	74.5	78.1	1	22.85	18.58	
CRB7015	70	100	15	84.5	88.1	1	24.48	20.96	
CRB8020	80	130	20	104.4	108.6	1	39.39	34.06	
CRB9020	90	140	20	114.4	118.6	1.5	41.42	37.39	
CRB10020	100	150	20	124.4	128.6	1.5	43.35	39.88	
CRB11070	110	160	20	134.4	138.6	1.5	45.20	43.20	
CRB12025	120	180	25	149.4	153.6	2	91.67	75.77	
CRB13025	130	190	25	159.4	163.6	2	95.04	79.65	
CRB14026	140	200	25	169.4	173.6	2	98.28	85.48	
CRB15015	150	180	15	164.4	168.0	1	34.99	40.98	
CRB15025	150	210	25	179.3	183.5	2	101.42	89.37	
CRB20025	200	260	25	229.3	233.5	2.5	115.94	116.57	
CRB25025	250	310	25	279.2	283.4	3	128.89	141.82	
CRB30035	300	395	35	346.5	351.3	3	226.30	263.92	
CRB40040	400	510	40	454.0	458.8	3.5	314.92	390.39	
CRB50040	500	600	40	548.9	553.7	3.5	348.34	472.86	



球轴承和交叉滚子轴承性能表。实际上，这两类轴承可以看作是两套相对安装的向心推力球轴承 ($\alpha \leq 45^\circ$) 和向心推力滚子轴承 ($\alpha = 45^\circ$)，它们的等效受力图如图 6-15 所示。由图可知，作用在轴承上的任意外负荷总可以向轴承组合中心 O 简化为一组力系 (图 6-15a)。该力系由轴向力 P_a 、径向力 P_r 、倾翻力矩 M 所组成。

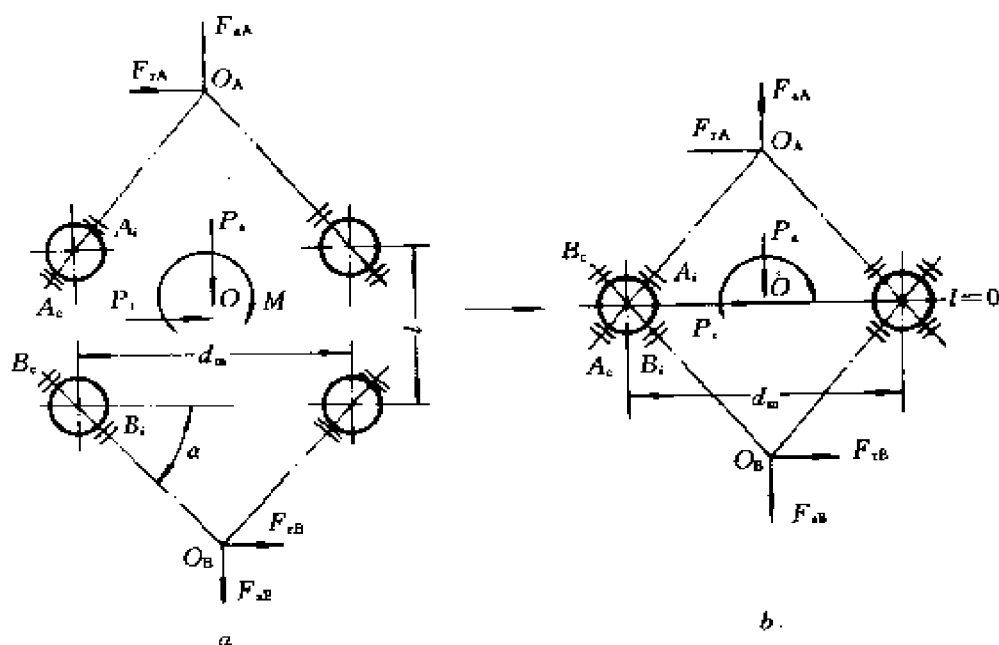


图 6-15 轴承受力简图

a—内套轴承；b—等效轴承

倾翻力矩又可分解为两个力矩力 P_M ，并可用下式计算：

$$P_M = \frac{2M}{d_m \operatorname{tg} \alpha} \quad (6-7)$$

式中 d_m —— 轴承中径；

α —— 接触角。

在上述力系作用下，上轴承内 (A_i) 外 (A_o) 套圈的支反力汇交于 O_A ，下轴承内 (B_i) 外 (B_o) 套圈的支反力汇交于 O_B 点，设接触角为 α ，两轴承的距离为 l ，则有：

$$\overline{O_A O_B} = d_m \operatorname{tg} \alpha + l$$

如果这两套轴承的间距 l 趋于零，如图 6-15b，就是与之等效

的 4 点接触球轴承。

同理，若两套向心推力滚子轴承的间距为零时，也同样等效于交叉滚子轴承。

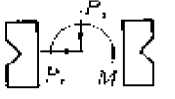
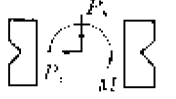


根据这种等效性，对 4 点接触球轴承和交叉滚子轴承的选择计算就可等效地进行。

4 点接触球轴和交叉滚子轴承的等效支反力，可用表 6-4 所示的公式计算。公式的形式与外负荷所作用的套圈（内或外）、倾翻力矩的方向以及 P_s 、 P_r 和等效力矩力 P_M 的大小、次序有关，使用时必须加以区分。

表 6-4 4 点接触球轴承和交叉滚子轴承的支反力

外 负 荷 顺 序 / 外 负 荷 形 式	外负荷直接加在内套圈上		外负荷直接加在外套圈上	
$P_s > P_M > P_r$	IV	V	V	IV
$P_s > P_r > P_M$	I	VI	VI	I
$P_M > P_s > P_r$	V	V	V	IV
$P_M > P_r > P_s$	III	V	V	I
$P_r > P_s > P_M$	I	VI	VI	I
$P_r > P_M > P_s$	I	VI	VI	II
第 I 组		第 IV 组		
$F_{rA} = \frac{1}{2} (P_r + P_M)$		$F_{rA} = \frac{1}{2} (P_M + P_r)$		
$F_{sA} = P_s + \frac{1}{2} (P_r - P_M) \operatorname{tg} \alpha$		$F_{sA} = P_s + \frac{1}{2} (P_M - P_r) \operatorname{tg} \alpha$		
$F_{rB} = \frac{1}{2} (P_r - P_M)$		$F_{rB} = \frac{1}{2} (P_M - P_r)$		
$F_{sB} = \frac{1}{2} (P_r - P_M) \operatorname{tg} \alpha$		$F_{sB} = \frac{1}{2} (P_M - P_r) \operatorname{tg} \alpha$		

续表 6-4

外 负 荷 顺 序	外负荷形式	
	外负荷直接加在内套圈上	外负荷直接加在外套圈上
		
		
	第 I 组	第 V 组
	$F_{rA} = \frac{1}{2} (P_r + P_M)$	$F_{rA} = \frac{1}{2} (P_M - P_r)$
	$F_{aA} = \frac{1}{2} (P_r + P_M) \operatorname{tg} \alpha$	$F_{aA} = P_a + \frac{1}{2} (P_M + P_r) \operatorname{tg} \alpha$
	$F_{rB} = \frac{1}{2} (P_r - P_M)$	$F_{rB} = \frac{1}{2} (P_M + P_r)$
	$F_{aB} = \frac{1}{2} (P_r + P_M) \operatorname{tg} \alpha - P_a$	$F_{aB} = \frac{1}{2} (P_M + P_r) \operatorname{tg} \alpha$
	第 III 组	第 VI 组
	$F_{rA} = \frac{1}{2} (P_M - P_r)$	$F_{rA} = \frac{1}{2} (P_r - P_M)$
	$F_{aA} = \frac{1}{2} (P_M + P_r) \operatorname{tg} \alpha$	$F_{aA} = P_a + \frac{1}{2} (P_r + P_M) \operatorname{tg} \alpha$
	$F_{rB} = \frac{1}{2} (P_M - P_r)$	$F_{rB} = \frac{1}{2} (P_r + P_M)$
	$F_{aB} = \frac{1}{2} (P_M - P_r) \operatorname{tg} \alpha - P_a$	$F_{aB} = \frac{1}{2} (P_r + P_M) \operatorname{tg} \alpha$

在选型时，对于 4 点接触球轴承，主要承受轴向力和倾翻力矩时， α 取大值；对于交叉滚子轴承， $\alpha = 45^\circ$ 。

2. 当量动负荷和寿命计算

当量动负荷 P 可按下列式计算：

$$P = XF_r + YF_a \quad (6-8)$$

式中 F_r ——轴承支反力的径向分量；

F_a ——轴承支反力的轴向分量；

X, Y ——系数，见表 6-5。

表 6-5 系数 X、Y 值

轴承类型	接触角	X		Y		ε
		$F_r/F_t \leq \epsilon$	$F_r/F_t > \epsilon$	$F_r/F_t \leq \epsilon$	$F_r/F_t > \epsilon$	
4 点接触球轴承	30°	1	0.03	0.78	1.24	0.80
	45°	1.18	0.66	0.59	1	1.14
交叉滚子轴承	45°	1.5	1	0.67	1	1.5

注：表中 ε 为寿命离散指数。

由式 6-8 分别对两套圈组 A、B 求 P_A 、 P_B ，其寿命 L （以百万转为单位）分别为：

$$L_A = \left(\frac{C}{P_A} \right)^\epsilon \quad (6-9)$$

$$L_B = \left(\frac{C}{P_B} \right)^\epsilon$$

式中 C —— 额定动负荷（由厂家给出，见表 6-2、6-3）；

ϵ —— 寿命指数（对 4 点接触球轴承， $\epsilon=3$ ；对交叉滚子轴承， $\epsilon=10/3$ ）。

整套轴承的寿命 L ，可用下式求得：

$$L = \left[\left(\frac{1}{L_A} \right)^\epsilon + \left(\frac{1}{L_B} \right)^\epsilon \right]^{-1/\epsilon} \quad (6-10)$$

式中 ϵ —— 寿命离散指数（4 点接触球轴承， $\epsilon=10/9$ ；交叉滚子轴承， $\epsilon=9/8$ ）。

如果需要用一定转速下的工作小时数来表示额定寿命时，则有：

$$H = L \times 10^6 / (60n) \quad (6-11)$$

式中 n —— 轴承工作时的转速，r/min。

3. 静载能力计算

与一般轴承相同，有：

$$C_0/P_0 > [S]$$

式中 C_0 —— 额定静负荷；

P_0 —— 当量静负荷；

[S] ——安全系数，一般取 0.8~1.2，有冲击和振动时取大值。

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a \quad (6-12)$$

对于 4 点接触球轴承，当 α 为 30° 时， $X_0=1$ ， $Y_0=0.66$ ；当 $\alpha=45^\circ$ 时， $X_0=2.3$ ， $Y_0=1$ 。

对于交叉滚子轴承，当 α_0 为 45° 时， $X_0=2.3$ ， $Y_0=1$ 。

4. 安装形式

图 6-16 表示了交叉滚子轴承内圈固定和外圈固定的两种结构形式。供参考。

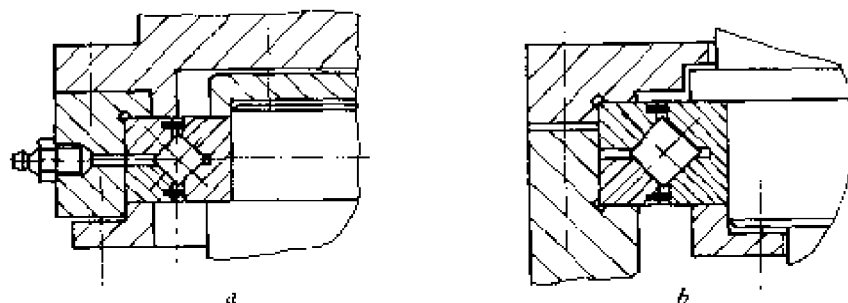


图 6-16 交叉滚子轴承安装方式

a —内圈固定； b —外圈固定

第三节 臂杆及其平衡

一、臂杆的结构及材料

一般操作机有 5 个较复杂的结构件，即：底座、腰转台支架、大（下）臂杆、小（上）臂杆和腕壳。大、小臂杆通常有两种结构：箱形结构，如 PUMA 机器人（图 6-9），大小臂杆中均装有电机和传动装置；梁形结构，驱动和传动装置安装在臂杆的端部，中间部分形成圆套截面、方壳截面等形状的梁构件。当腕结构具有

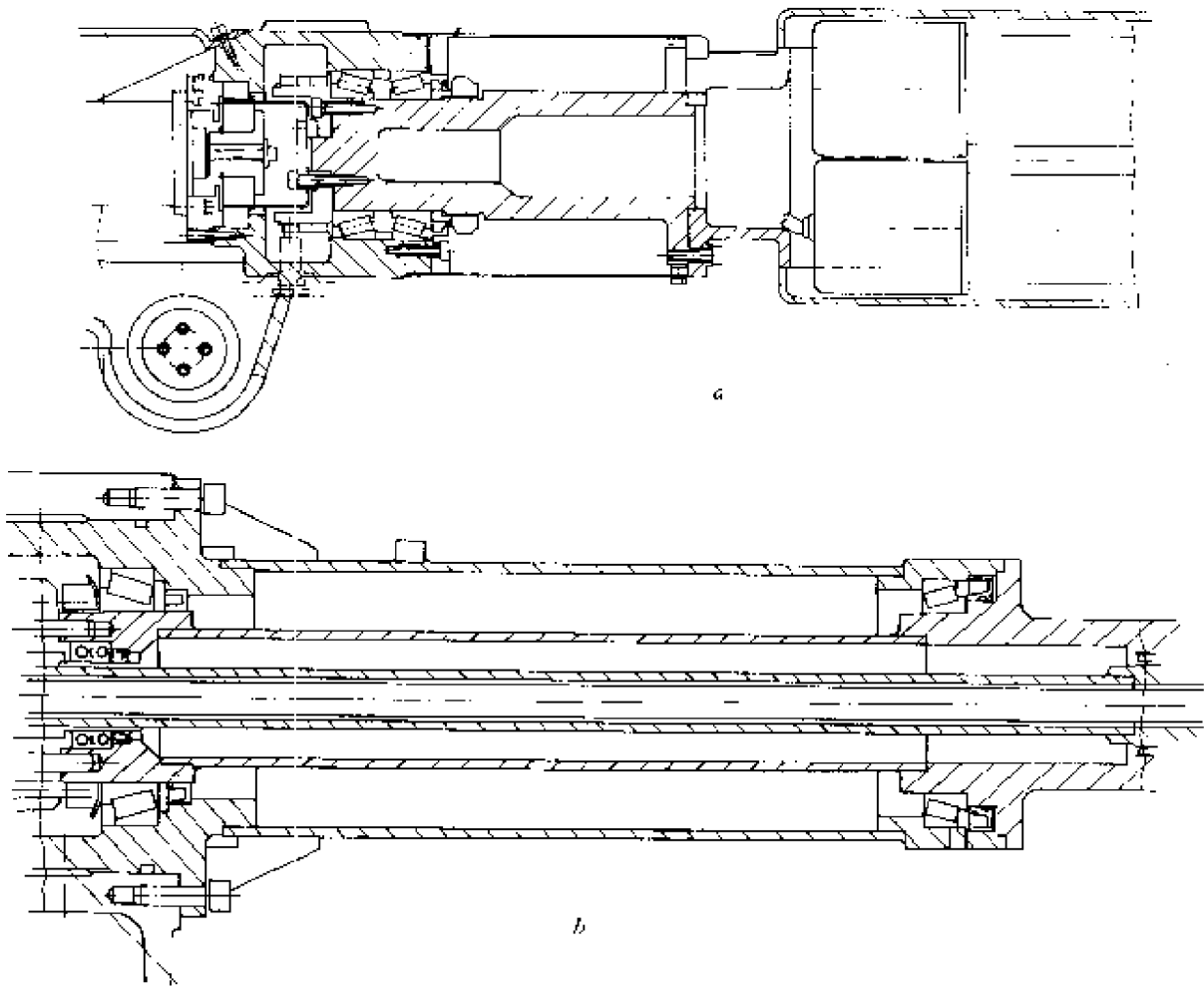


图 6-17 上臂结构
a—箱式；b—梁式

三自由度时，由于要在上臂上配置驱动和传动机构，从而使上臂十分复杂。图 6-17 为两种目前流行的上臂杆示意图。可以看出，图 6-17b 两端实际上是两个结构十分复杂的壳体，中间是多层圆筒形套装梁结构。外形象一“哑铃”，多为焊铸组合结构。图 6-17a 是箱形结构，就整体来说是比较复杂的箱体，多用铸件。为了减轻整机的重量，特别是为了降低 J_2 、 J_3 的关节力矩，大小臂多用轻合金铝铸件。

二、臂杆的平衡

为了减小驱动力矩和增加运动的平稳性，大小臂杆原则上说都需进行平衡。但当负载较小，臂杆的重量较轻，关节力矩不大，驱动装置有足够的容量时，可以省去平衡装置。但对于大负荷 ($\geq 3\text{kgf}$) 臂杆 ($\geq 30\text{kgf}$)，大都设有平衡装置。

1. 小臂杆的平衡

小臂杆通常采用结构自平衡和重块平衡两种方式。所谓结构自平衡，就是配置的腕部驱动和传动装置尽量放在关节旋转轴的两边，以达到对关节轴的重力平衡。哑铃状上臂，就较好地起到了这一作用。PUMA 机的小臂也是按这一原则配置的。但如果臂杆的后部长度（无效长度）太长，不利于机器人在狭窄环境中工作，所以单采用自重平衡对大负荷操作机还很难取得满意的结果，对如图 6-17a 的小臂更难作到自重平衡。图 6-18 是一种对小臂进行重锤平衡的方法。

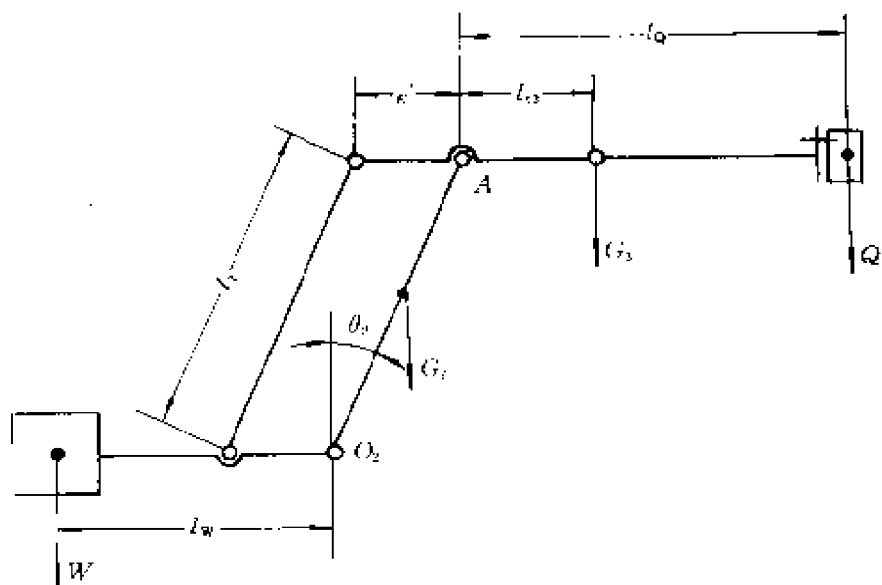


图 6-18 小臂平衡简图

由图可知，略去小拉杆和曲柄自重，对关节 J_3 的 A 点取矩得：

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 \\ G_3 l_{C_3} + Q l_q &= F e' \cos \theta_2 \\ \Sigma M_{O_2} &= 0 \\ W l_w &= F e' \cos \theta_2\end{aligned}$$

从而有

$$(G_3 l_{C_3} + Q l_q) / l_w = W \quad (6-13)$$

式中 G_3 、 Q 、 W —— 杆 L_3 的自重、荷重和平衡块重；

l_{C_3} —— 杆 L_3 自重心到关节 J_3 的长度；

l_q 、 l_w —— Q 到 J_3 和 W 到 J_2 (O_2) 的长度。

设计时，在结构允许的条件下， l_w 要尽可能小些，以减小绕竖轴的转动惯量。如果在作业中载荷 Q 为变值，计算时可取 Q 的最常用值。

2. 大臂的平衡

由图 6-18 可以看出，加在 O_2 处的力矩 M_2 是由 L_2 的自重 G_2 ， L_3 的自重 G_3 和荷重 Q 等力联合作用的结果。对于图 6-18 中四边形杆件系统，可以画出如图 6-19 所示的受力图。

由图可得：

$$\begin{aligned}F_z &= (G_3 l_{C_3} + Q l_q) / e' \\ F_x &= F_z \operatorname{tg} \theta_2 \\ R_z &= G_3 + Q + F_z \\ R_x &= F_x = F_z \operatorname{tg} \theta_2 \\ M_2 &= [G_2 l_{C_2} + (G_3 + Q) l_2] \sin \theta_2\end{aligned} \quad (6-14)$$

如果仅考虑对 O_2 的力矩作用，则简化后的 L_2 受力图（包括平衡弹簧）如图 6-20 所示。这一静力学模型即可作为杆 L_2 的静力平衡的依据。由图可以看出，小臂 L_3 的自重 G_3 和负荷 Q ，对 O_2 点的静力矩，只是平移于 A 点后所形成的合力对 O_2 之矩 (M_2)，平移后的附加合力矩 (M_3) 完全通过连杆，由小臂电机通过曲柄承担。这和静力矩 M_2 与 M_3 的完全解耦是该平行四边形局部闭链机

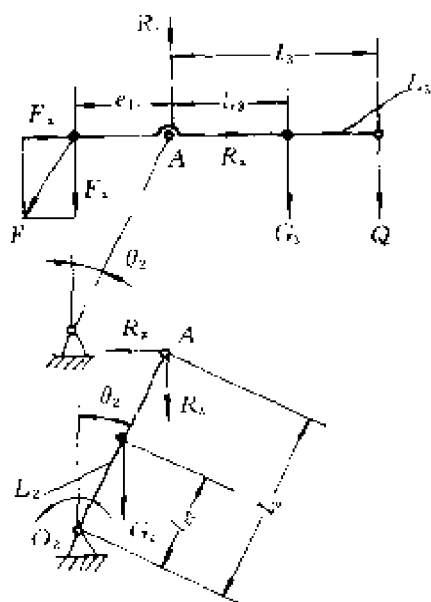


图 6-19 L_2 、 L_3 受力图

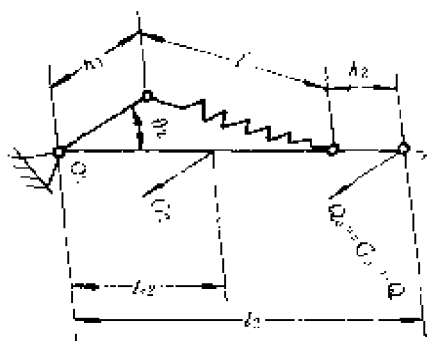


图 6-20 带平衡弹簧的 L_2 受力图

构的一大优点。

随着 θ_2 、 G_3 和 Q 的加大， M_2 可以很大，通常需加平衡装置予以减小。目前常用的有弹簧和汽缸两种平衡方式。弹簧结构简单，且无需增加动力源，应用最为普遍。气缸由于气压可调，当负荷变化较大时，能提供较好的平衡作用。

设弹簧的自由长度为 l_0 ，装在操作机上之后的实际长度为 l ，弹簧刚度为 K ，预拉力 $f' = K(l_0 - l)$ ，此时上臂正处于竖直位置 ($\theta_2 = 0$)。在图示位置，不平衡力矩 (即 G_2 、 G_3 、 Q 引起的力矩) M_2 为：

$$M_2 = (l_2 Q_2 + G_2 l_{c2}) \sin \theta_2 \quad (6-15)$$

弹簧力的平衡力矩 \bar{M} 为：

$$\bar{M}_2 = K(l_0 - l') h_1 \sin \theta_2 \quad (6-16)$$

由图 6-20 得：

$$l' = \sqrt{h_1^2 + (l_2 - h_2)^2 - 2h_1(l_2 - h_2)\cos\theta_2}$$

由于 M_2 和 \bar{M}_2 不同时正比于 $\sin \theta_2$ ($l' = f(\theta_2)$)，所以两者不

可能处处相等，即不可能处处平衡。必须注意，若将弹簧设计成压簧形式，上述算法稍加改变即可使用。

由公式(6-16)可知， \bar{M}_2 是一个与弹簧刚度 K 、初始长度 l_0 、固定点的位置 h_1 、 h_2 有关的量，可用优化方法确定这些量的理论值，其优化模型是：

(1) 设计变量 \bar{X} 。

$$\bar{X} = [l_0, K, h_1, h_2]^T = [X_1, X_2, X_3, X_4]^T \quad (6-17)$$

(2) 目标函数 $F(X)$ 。取最大不平衡力矩($M_{\max} = M_2 - \bar{M}$)和力矩波动 $\tilde{M} = M_{\max} - M_{\min}$ 为最小作为目标函数：

$$\min F_1(X) = M_{\max}(M_2 - \tilde{M}) = M_{\max}(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

$$\min F_2(X) = \tilde{M} = \tilde{M}(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

$$\min F(X) = K_1 F_1(X) + K_2 F_2(X) \quad (6-18)$$

式中 K_1 、 K_2 ——权重，根据具体情况选取，可取 $K_1 = K_2 = 0.5$ 。

(3) 约束条件 $G_i(X)$ 。可取设计变量以及 θ_2 的上下限作为约束条件。为了保证在任何时候拉弹簧都不会受压(压簧会受拉)，还须有：

$$\left. \begin{aligned} G_1(X) &= (l_0 - l') \geq 0 \\ G_i(X) &= X_{i\max} \sim X_{i\min} \quad i = 2 \cdots n \end{aligned} \right\} \quad (6-19)$$

有了上述模型，利用某一优化算法，即可得到平衡弹簧的固定位置 h_1 、 h_2 和弹簧参数 l_0 、 K ，由此可设计出平衡弹簧。因为 $K = f(d, D)$ (其中 d 、 D 分别表示弹簧丝直径和弹簧中径)，也可把 d 、 D 当作设计变量取代 K 而引入优化模型。优化得出这些参数的理论值之后，再根据具体条件进行圆整。例略。

第四节 操作机的强度、刚度及动态特性分析

机器人操作机是一台多驱动系统的空间连杆机构，其强度、刚度和动态特性直接关系着机器人完成作业的质量。为了设计制造出一台轻型快速，可连续变化位姿且具有较高位姿精度的操作机，就必须分析其主要零件或构件的强度、刚度和整机的动态特性，以

便减轻零件的重量，合理构造零件的形状和确定零件的尺寸，获得质高价廉的设备，满足用户日益提高的要求。

实践表明，操作机的强度、刚度与动态特性是由驱动系统、传动系统和操作机的零构件的形状、材质和相互配置多种因素综合决定的。在分析和设计操作机时，其强度、刚度的计算可采用材料力学或机械设计中所提供的方法，先分析零构件的载荷，再进行强度、刚度计算。一般说来，由于操作机的载荷不大，零件的形状和尺寸多由结构确定，强度、刚度都有足够的裕量，只是个别零件或零件的个别部位由于结构上的原因，比较薄弱，须进行强度和刚度方面的校核。相比之下，为使机器人具有高品质的工作性能，操作机整体的动态特性分析更具有实用价值。所以在这里，只对操作机的强度、刚度分析作简要说明，重点阐述操作机的动态特性分析。

一、操作机的强度、刚度分析要点

机器人都是在运动条件下工作，而且都是空间机构，所以即使手心点在笛卡儿坐标空间作等速直线运动，但反求到各个关节，其运动参数 θ_i 和 d_i 还是存在加速运动 $\dot{\theta}_i$ 和 \dot{d}_i ，所以操作机的每一个杆件和零件一般都时时承受着附加的惯性载荷作用，因此在进行强度、刚度计算时，仅考虑外载荷和重力载荷是不够的，还必须考虑惯性载荷，即在计算载荷时取外载荷、重力载荷和惯性载荷之和。为了强调这一特点，我们把必须涉及惯性载荷的计算称作准静态强度、刚度计算。由于必须计算惯性力，操作机的准静态强度、刚度计算比之其他机械要复杂得多，并且必须分几步进行，即先在工作空间规划出手心点（有时可用腕点）的运动轨迹和速度变化曲线，然后用牛顿-欧拉法求出沿该轨迹运动时各关节处的作用力和力矩曲线，并在这条曲线上选出最大值，最后用这既考虑到静力又考虑到惯性力的最大外力和力矩作计算载荷，并按材料力学或机械设计所提供的方法进行强度、刚度计算。对于复杂的杆件和壳体，还可进行有限元计算。由于求解十分繁杂，方

法并无显著特色，实例从略，仅用框图形式把计算步骤表示如下：

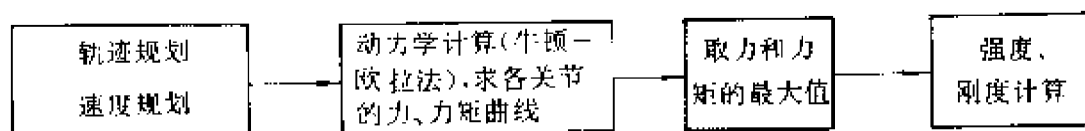


图 6-21 准静态计算步骤

二、动态特性分析

这里介绍一种比较实用的混合子结构分析法。该方法是把操作机分解为若干个不同性质的子结构，如驱动系统子结构、传动系统子结构、杆件子结构。对于杆件子结构，又可根据构形特点分为弹性子结构，如前面说过的“哑铃”式小臂的中间套杆部分；刚性子结构，如腕部和多轴传动的减速箱体和电机。分别对这些子结构建立运动微分方程（动特性方程），然后根据各子结构接口处的变形和作用力协调规律把它们组装起来，进行应力、应变、动态性以及某一子结构对整体特性的影响等多种要求的整体或局部分析。限于篇幅，这里只能介绍该法的基本思路和处理方法。第四章已经详细地讨论了驱动系统、传动系统的动态方程，这里只引用其基本公式。

为了便于叙述，且不失一般性，我们以图 6-22 所示的结构简图进行分析。该图是由与图 6-1d 相似的操作机简化得来的。图中未画腕部的三自由度及其传动机构和电机，我们将其固结成为两个刚体，腕部 AB 及肘部 $CDEF$ （包括后置的 3 个电机和支承它们的减速箱体和内部轮系）。

整个操作机共分 13 个子结构，即 3 个传动系统子结构；4 个弹性系统子结构（大臂、小臂、拉杆、曲柄）；3 个刚性化子结构（腕、肘及腰）；3 个驱动系统子结构（3 个电机及其控制）。肘、腕、腰与小臂、大臂拉杆相比，刚性很大，因此可视为刚体。当然也可作为弹性体，这时自由度将急剧增加，需用模态综合法将其压

缩。本书不介绍这一内容。

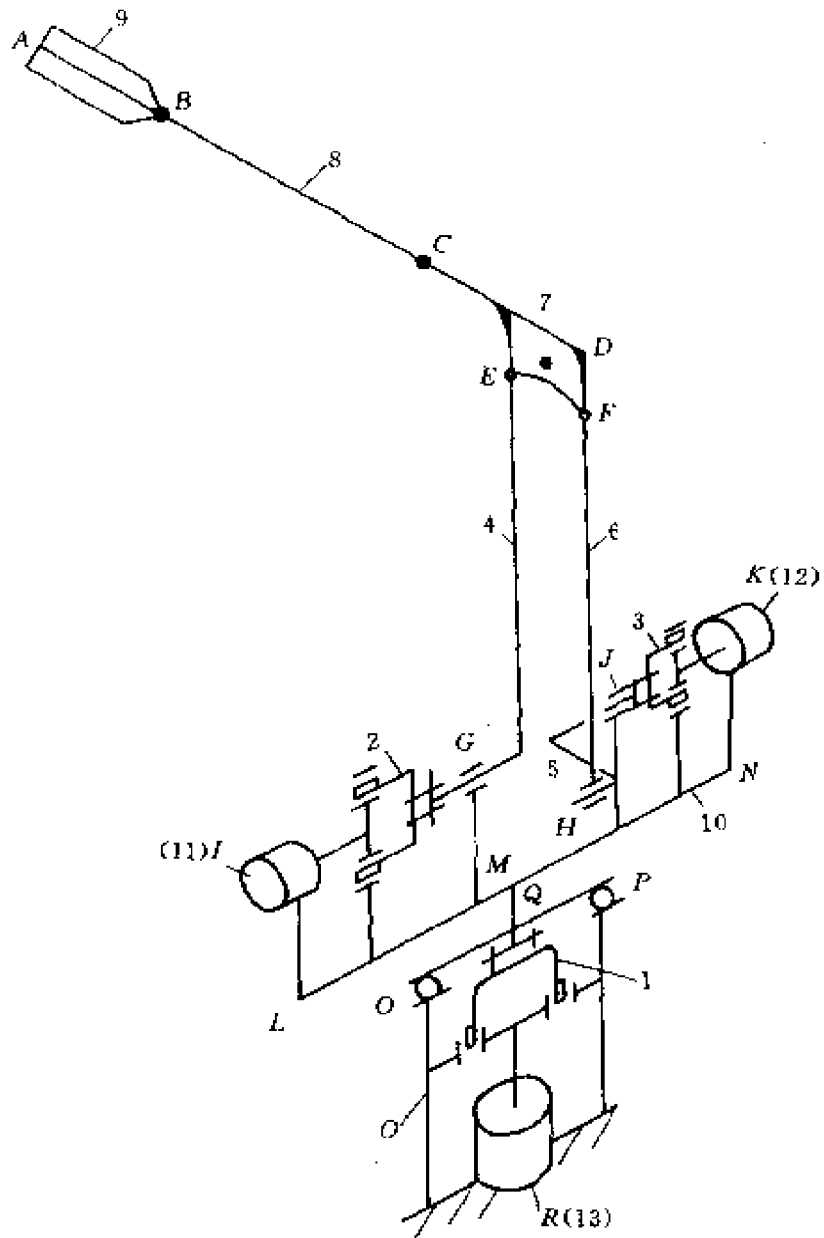


图 6-22 操作机机构示意图

AB —腕部 (刚体 9); BC —小臂 (弹性体 8); $CDEF$ —肘部 (刚体 7); EG —大臂 (弹性体 4); FH —拉杆 (弹性体 5); HJ —曲柄 (弹性体 5); GI —大臂传动系统 (2-谐波); JK —小臂传动系统 (3-谐波); $GIMNOPQ$ —腰部 (刚体 10); QR —腰部传动系统 (1-谐波); I 、 K 、 R —电机 (11、12、13)

下面分别建立各子结构的动力学微分方程。

1. 驱动系统子结构运动微分方程

由第四章第五节可知，对于直流伺服电机，其线性化简后的二阶运动微分方程（式 4-22）为：

$$J\ddot{\theta}_m + (K + f)\dot{\theta}_m + K\theta_m = K\theta_d - \tau_T$$

式中 K —— 给定增益系数，并有以下关系式：

$$K = K_p K_a / R_a$$

K_p —— 比例增益系数；

K_a —— 电机力矩常数；

R_a —— 电枢电阻；

J —— 电机转子惯性矩；

f —— 电机阻尼系数；

θ_m 、 $\dot{\theta}_m$ 、 $\ddot{\theta}_m$ —— 电机输出转角、输出角速度和输出角加速度；

τ_T —— 电机输出力矩，即传动系统的输入力矩；

θ_d —— 伺服给定，对于某一瞬时固接结构，取 $\theta_d = 0$ 。

2. 传动系统子结构的运动微分方程

由第四章第五节可知，最一般的传动系统的运动微分方程（式 4-39）为：

$$[M_i]\{\ddot{\theta}_i\} + [C_i]\{\dot{\theta}_i\} + [K_i]\{\theta_i\} = \{Q_i\}$$

式中各符号的意义见式 4-39 注。要注意，当真实系统中所没有的传动单元，在质量矩阵 $[M_i]$ 、阻尼矩阵 $[C_i]$ 、刚度矩阵 $[K_i]$ 中相应元素取为 0 值。

3. 弹性子结构的运动微分方程

(1) 运动关系。如图 6-23 所示，坐标系 $O-x_0y_0z_0$ 是基础坐标系， $O_i-x_iy_iz_i$ 是连杆 L_i 的坐标系。设两者的变换矩阵为 $[T_i^0]$ （为了书写方便，以后略去上标 0），写成分块形式是：

$$T_i = \begin{bmatrix} [R_i] & \{r_i\} \\ \{0\}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

式中 $[R_i]$ —— 旋转变换矩阵；

$\{r_i\}$ —— 位置向量列阵。

设杆 L_i 上单元 e 内有点 P' 并由于弹性变形到 P 。 P 相对于杆

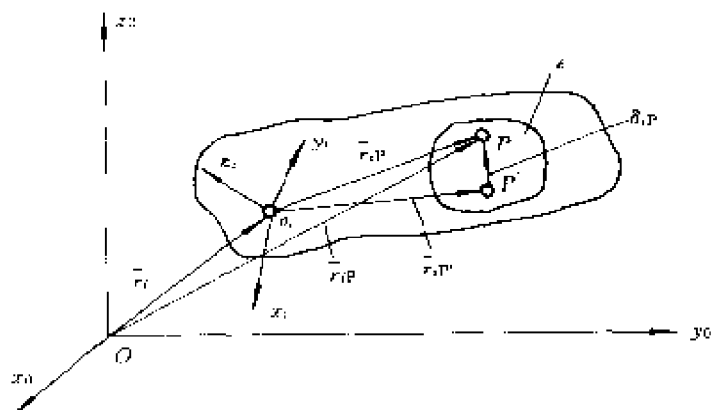


图 6-23 弹性运动与坐标关系

坐标系位置向量为 $\{r_{ip}\}$ ，相对于基坐标系的位置向量为：

$$\{r_{ip}^0\} = \{r_i\} + [R_i]\{r_{ip}\} \quad (a)$$

而

$$\{r_{ip}\} = \{r_{ip}'\} + \{\delta_{ip}\} \quad (b)$$

式中 $\{\delta_{ip}\}$ —— P 点在杆坐标系中的弹性位移向量。

由有限元理论可知，单元内任一点的位移可用单元的节点（图中未画，视具体的单元划分而定）位移表示：

$$\{\delta_{ip}\} = [N_{ie}]\{u_i^e\} \quad (c)$$

式中 $[N_{ie}]$ —— 单元 e 的形状函数；

$\{u_i^e\}$ —— 单元节点位移在杆坐标系中向量列阵。

由式 (a)、(b)、(c) 可得：

$$\{r_{ip}^0\} = \{r_i\} + [R_i]\{r_{ip}'\} + [R_i][N_{ie}]\{u_i^e\} \quad (d)$$

$\{r_{ip}^0\}$ 对时间的一阶导数即 P 点的速度向量：

$$\{\dot{r}_{ip}^0\} = \{\dot{r}_i\} + [\dot{R}_i]\{\dot{r}_{ip}'\} + \{\dot{R}_i\}[N_{ie}]\{u_i^e\} + [R_i][N_{ie}]\{\dot{u}_i^e\} \quad (6-21)$$

(2) 只有分布质量时弹性子结构的运动微分方程。设 ρ_{ie} 为杆 L_i 上单元 e 的材料密度，则单元分布质量产生的动能为：

$$T_{ie} = \frac{1}{2} \int_{v_{ie}} \rho_{ie} \{\dot{r}_{ip}^0\}^T \{\dot{r}_{ip}^0\} dv \quad (f)$$

将 (e) 代入 (f) 得:

$$\begin{aligned}
 T_{ie} = & \frac{1}{2} \int_{v,e} \rho_{ie} (\{u_i^e\}^T [N_i^e]^T [N_{ie}] \{u_i^e\} + \{u_i^e\}^T [N_{ie}]^T + [\dot{R}_i]^T \\
 & [R_i] [N_{ie}] \{u_i^e\} + 2 \{u_i^e\} [N_{ie}]^T [\dot{R}_i] [R_i] [N_{ie}] \{\dot{u}_i^e\} \\
 & + 2 (\{\dot{r}_i\} + [\dot{R}_i] \{r_{ip}\})^T [\dot{R}_i] [N_{ie}] \{u_i^e\} + 2 (\{\dot{r}_i\} + [\dot{R}_i] \\
 & \{r_{ip}\})^T [R_i] [N_{ie}] \{\dot{u}_i^e\} + (\{\dot{r}_i\} + [\dot{R}_i] \{r_{ip}\})^T (\{\dot{r}_i\} \\
 & + [\dot{R}_i] \{r_{ip}\})) dv \quad (g)
 \end{aligned}$$

单元的势能 U_{ie} 为弹性势能与重力势能之和:

$$U_{ie} = \frac{1}{2} \{u_i^e\} [K_i^e] \{u_i^e\} + \int_{v,e} \rho_{ie} \{g\}^T \{r_{ip}^0\} dv \quad (h)$$

式中 $[K_i^e]$ —— 单元刚度矩阵;

$\{g\}$ —— 重力加速度列阵。

把单元 e 的动能 T_{ie} 和势能 U_{ie} 代入拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{ie}}{\partial \{\dot{u}_i^e\}} \right) - \frac{\partial T_{ie}}{\partial \{u_i^e\}} + \frac{\partial U_{ie}}{\partial \{u_i^e\}} = \{f_i^e\} + \{Q_i^e\}$$

经整理可得单元 e 的运动微分方程:

$$\begin{aligned}
 & [M_i^e] \{\ddot{u}_i^e\} + [C_i^e] \{\dot{u}_i^e\} + ([K_i^e] + [K_i^e]_d) \{u_i^e\} \\
 & = \{f_i^e\} + \{Q_i^e\} - \{F_i^e\} \quad (6-22)
 \end{aligned}$$

上式中的 $[M_i^e]$ 为单元的质量矩阵, 是正定对称阵, 可表示为:

$$[M_i^e] = \int_{v,e} \rho_{ie} [N_{ie}]^T [N_{ie}] dv \quad (i)$$

$[C_i^e]$ 为单元的“陀螺阻尼”矩阵, 是反对称阵, 可表示为:

$$[C_i^e] = \int_{v,e} \rho_{ie} [N_{ie}]^T ([R_i]^T [\dot{R}_i] - [\dot{R}_i]^T [R_i]) [N_{ie}] dv$$

由于 $[R_i]^T [R_i] = [1]$, 所以 $[\dot{R}_i]^T [R_i] + [R_i] [\dot{R}_i] = 0$, 于是:

$$[C_i^e] = 2 \int_{v,e} \rho_{ie} [N_{ie}]^T [R_i]^T [\dot{R}_i] [N_{ie}] dv \quad (j)$$

$[K_i^e]_d$ 为单元的“离心刚度”矩阵, 可表示为:

$$[K_i^e]_d = \int_{v,e} [N_{ie}]^T [R_i] [\dot{R}_i] [N_{ie}] dv \quad (k)$$

由于 $[R_i]^T [\dot{R}] = \frac{d}{dt}([R_i]^T [\dot{R}]) - [\dot{R}_i]^T [\dot{R}_i]$

$$\text{故 } [K_i^*]_d = \frac{1}{2} [\dot{C}_i^*] - \int_{v_{ie}} \rho_{ie} [N_{ie}]^T [\dot{R}_i]^T [\dot{R}_i] [N_{ie}] dv \quad (l)$$

可见 $[K_i^*]_d$ 可以表示为一个反对称矩阵和一个对称矩阵之和。

$\{F_i^*\}$ 为单元刚体运动惯性力和重力等化简到单元节点上的力向量，可表示为：

$$\begin{aligned} \{F_i^*\} = & \int_{v_{ie}} \rho_{ie} [N_{ie}]^T [R_i]^T (\{\ddot{r}_i\} + [\dot{R}_i] \{r_{ip'}\}) dv \\ & + \int_{v_{ie}} \rho_{ie} [N_{ie}]^T [R_i]^T \{g\} dv \end{aligned} \quad (m)$$

$\{F_i^*\}$ 、 $\{Q_i^*\}$ 为单元节点的内力向量和外力向量。

根据有限元理论，将单元运动微分方程叠加即可组集成弹性预结构的运动微分方程：

$$\begin{aligned} [M_i] \{\ddot{u}_i\} + [C_i] \{\dot{u}_i\} + ([K_i] + [K_i]_d) \{u_i\} \\ = \{Q_i\} - \{F_i\} \end{aligned} \quad (6-23)$$

$$\text{其中 } [M_i] = \sum_{e=1}^{n_e} [M_i^*]; [C_i] = \sum_{e=1}^{n_e} [C_i^*]; [K_i] = \sum_{e=1}^{n_e} [K_i^*]$$

$$[K_i]_d = \sum_{e=1}^{n_e} [K_i^*]_d; \{F_i\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{F_i^*\}$$

式中 n_e —— 子结构的单元数。

由于单元与单元间的内力在组集时正负抵消，故方程式 (6-23) 中没有 $\{f_i\}$ 项。

(3) 具有集中质量时弹性子结构的运动微分方程。机器人臂杆上经常带有轴销等各种附属零件，其质量一般作为节点处的集中质量处理。因此，即使采用分布质量法，也必须考虑节点具有集中质量的情况。

不失一般性，设弹性子结构 i 上节点 j 具有集中质量 m_{ij} ，节点 j 的速度向量可以写作：

$$\{\dot{r}_{ij}^0\} = \{S_{ij}^0\} + [\dot{R}_i] \{\delta_{ij}\} + [R_i] \{\delta_{ij}\} \quad (6-24)$$

式中 $\{\dot{\mathbf{S}}_j^0\}$ —— j 节点的刚体运动速度向量；

$\{\delta_j\}$ —— j 节点相对于子结构坐标系的弹性位移向量。

由 m_{ij} 产生的动能为：

$$T_{ij} = \frac{1}{2} m_{ij} \{\dot{\mathbf{r}}_{ij}^c\}^T \{\dot{\mathbf{r}}_{ij}^0\}$$

这里不包括 m_{ij} 的转动动能，因其为集中（点）质量。

子结构 i 上所有集中质量产生的动能为：

$$T_i = \sum_{j=1}^{n_i} T_{ij}$$

式中 n_i —— 集中质量数。

所有集中质量产生的重力势能为：

$$U_i = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} \{\mathbf{g}\}^T (\{\mathbf{S}_j^0\} + [\mathbf{R}_j] \{\delta_j\})$$

将子结构的分布质量与集中质量产生的动能和势能分别相加，可得子结构的总势能和总动能。同样应用拉格朗日方程，可得同时具有分布质量与集中质量的子结构运动微分方程：

$$([\mathbf{M}_i] + [\bar{\mathbf{M}}_i]) \{\ddot{\mathbf{u}}_i\} + ([\mathbf{C}_i] + [\bar{\mathbf{C}}_i]) \{\dot{\mathbf{u}}_i\} + ([\mathbf{K}_i] + [\mathbf{K}_i]_d + [\bar{\mathbf{K}}_i]_d) \{\mathbf{u}_i\} = \{\mathbf{Q}_i\} - \{\mathbf{F}_i\} - \{\bar{\mathbf{F}}_i\} \quad (6-25)$$

式中 $[\mathbf{M}_i]$ 、 $[\mathbf{C}_i]$ 、 $[\mathbf{K}_i]$ 、 $[\mathbf{K}_i]_d$ 、 $\{\mathbf{Q}_i\}$ 、 $\{\mathbf{F}_i\}$ —— 前面导出的只有分布质量时子结构的运动微分方程 (6-23) 的系数矩阵和力向量；

$[\bar{\mathbf{M}}_i]$ —— 节点集中质量所构成的质量矩阵；

$[\bar{\mathbf{C}}_i]$ 、 $[\bar{\mathbf{K}}_i]_d$ —— 节点集中质量引起的陀螺阻尼矩阵和离心刚度矩阵；

$\{\bar{\mathbf{F}}_i\}$ —— 节点集中质量产生的刚体运动惯性力向量和重力向量。

考虑最一般的情况，每个节点具有 6 个自由度，包括 3 个线位移 $\{\delta_j\}$ 和 3 个角位移 $\{\varphi_j\}$ ，节点位移记为：

$$\{\mathbf{u}_j\} = \{\{\delta_j\}^T, \{\varphi_j\}^T\}^T$$

则式 (6-25) 中由节点集中质量引起的系数矩阵和力向量可直接写

出：

$$[\bar{M}_i] = \text{diag}([\mathbf{M}_{i1}] \quad [\mathbf{M}_{i2}] \cdots \cdots [\mathbf{M}_{inr}])$$

$$[\bar{C}_i] = \text{diag}([\mathbf{C}_{i1}] \quad [\mathbf{C}_{i2}] \cdots \cdots [\mathbf{C}_{inr}])$$

$$[\bar{K}_i]_d = \text{diag}([\mathbf{K}_{i1}]_d \quad [\mathbf{K}_{i2}]_d \cdots \cdots [\mathbf{K}_{inr}]_d)$$

$$\{\bar{F}_i\} = \{ \{F_{i1}\}^T \quad \{F_{i2}\}^T \cdots \cdots \{F_{inr}\}^T \}^T$$

式中 $[\mathbf{M}_{ij}] = \text{diag}(m_{ij} \quad m_{ij} \quad m_{ij} \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$$[\mathbf{C}_{ij}] = \text{diag}(2m_{ij}[\mathbf{R}_i]^T[\dot{\mathbf{R}}_i] \quad [0])$$

$$[\mathbf{K}_{ij}]_d = \text{diag}(m_{ij}[\mathbf{R}_i]^T[\ddot{\mathbf{R}}_i] \quad [0])$$

$$\{F_{ij}\} = \{ \{m_{ij}[\dot{\mathbf{R}}_i]^T\{\dot{S}_{ij}^0\} + m_{ij}[\mathbf{R}_i]^T\{\mathbf{g}\}\}^T\{0\}^T \}^T$$

符号 diag 表示括号内的元素对角线放置。

可将 (6-25) 写成更简捷的形式：

$$[\mathbf{M}_E]\{\ddot{\mathbf{u}}_E\} + [\mathbf{C}_E]\{\dot{\mathbf{u}}_E\} + [\mathbf{K}_E]\{\mathbf{u}_E\} = \{\mathbf{Q}_E\} - \{\mathbf{F}_E\} \quad (6-26)$$

其中 $[\mathbf{M}_E] = [\mathbf{M}_i] + [\bar{\mathbf{M}}_i]$; $[\mathbf{C}_E] = [\mathbf{C}_i] + [\bar{\mathbf{C}}_i]$;

$$[\mathbf{K}_E] = [\mathbf{K}_i] + [\mathbf{K}_i]_d + [\bar{\mathbf{K}}_i]_d; \{\mathbf{Q}_E\} = \{\mathbf{Q}_i\};$$

$$\{\mathbf{F}_E\} = \{\mathbf{F}_i\} + \{\bar{\mathbf{F}}_i\}.$$

式中的下标 E 表示弹性子结构。

式 (6-26) 就是所求的弹性子结构的运动微分方程。

(4) 刚性化子结构的运动微分方程。设有刚性化子结构如图 6-24 所示，它与 3 个弹性化子结构相连（即图 6-22 的肘部）。由于弹性子结构的弹性变形，刚性子结构由点划线位置（重心在 C'_i ）变到实线位置（重心在 C_i ）。设刚性子结构的坐标系为 $O_i-x_iy_iz_i$ 。对基础坐标系的坐标变换为：

$$[\mathbf{T}_i] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_i] & \{\mathbf{r}_i\} \\ \{\mathbf{0}\}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (6-27)$$

式中 各符号的意义同前。

设变形后的重心位置 C_i 在 $O_i-x_iy_iz_i$ 中的位置向量为 $\{\mathbf{r}_{ci}\}$ ，则对基坐标系的位置向量为

$$\{\mathbf{r}_{ci}^0\} = \{\mathbf{r}_i^0\} + [\mathbf{R}_i]\{\mathbf{r}_{ci}\}$$

$$\{\mathbf{r}_{ci}\} = \{\mathbf{r}_{ci}^0\} + \{\delta_{ci}\}$$

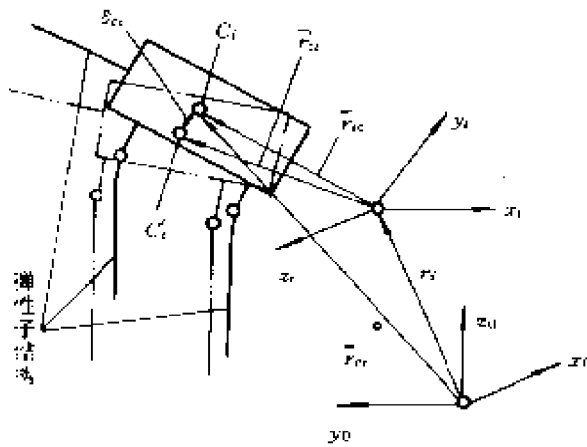


图 6-24 刚性子结构

式中 各符号的意义如图所示。

$\{\delta_{ci}\}$ 是由系统弹性变形而产生的，并定义其为广义坐标。

$\{r_{ci}^0\}$ 对时间的一阶导数为 C_i 的线速度向量：

$$\{\dot{r}_{ci}^0\} = \{\dot{r}_i^0\} + [R_i] (\{r_{ci}\} + \{\delta_{ci}\}) + [R_i] \{\delta_{ci}\} \quad (6-28)$$

根据理论力学可直接将刚体的角速度向量 $\{\omega_i^0\}$ 引入 (6-28) 式，则得

$$\begin{aligned} \{\dot{r}_{ci}^0\} = & \begin{Bmatrix} \dot{r}_i^0 \\ \omega_i^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [R_i] & 0 \\ 0 & [R_i] \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} r_{ci} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{ci} \\ \delta_{cib} \end{Bmatrix} \right] \\ & + \begin{bmatrix} [R_i] & 0 \\ 0 & [R_i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{ci} \\ \delta_{cib} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6-29)$$

为了统一书写格式，我们令

$$\{\dot{r}_i^0\} = \begin{Bmatrix} \dot{r}_i^0 \\ \omega_i^0 \end{Bmatrix}, [R_i] = \begin{bmatrix} [R_i] & 0 \\ 0 & [R_i] \end{bmatrix}$$

$$\{r_{ci}\} = \begin{Bmatrix} r_{ci} \\ 0 \end{Bmatrix}, \{\delta_{ci}\} = \begin{Bmatrix} \delta_{ci} \\ \delta_{cib} \end{Bmatrix}$$

即把 3 维升为 6 维，也就是说把线速度和角速度统一起来。

刚性子结构的动能为：

$$T_i = \frac{1}{2} \{\dot{r}_{ci}^0\}^T [M_i] \{\dot{r}_{ci}^0\}$$

式中 $[M_i]$ 是刚性子结构相对于质心处的惯量矩阵。

刚性子结构的势能为：

$$U_i = \{g\}^T [M] [R_i] \{\delta_{ci}\}$$

式中 $\{g\} = \{0 \ 0 \ g \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ ，是 6 维表示的重力加速度向量。

将动能、势能代入拉格朗日方程得：

$$[M_i] \{\ddot{u}_i\} + [C_i] \{\dot{u}_i\} + [K_i] \{u_i\} = \{Q_i\} + \{F_i\} \quad (6-30)$$

式中 $[M_i]$ —— 质量矩阵， $[M_i] = [R_i]^T [\bar{M}_i] [R_i]$ ；

$[C_i]$ —— “阻尼” 矩阵， $[C_i] = 2 [R_i]^T [\bar{M}_i] [\dot{R}_i]$ ；

$[K_i]$ —— “刚度” 矩阵， $[K_i] = [R_i] [\bar{M}_i] [\ddot{R}_i]$ ；

$\{Q_i\}$ —— 外力向量；

$\{F_i\}$ —— 惯性力向量， $\{F_i\} = - [R_i]^T [\bar{M}_i] (\{\ddot{r}_{ci}^0\} + \{\ddot{R}_i\} \{r_{ci}\}) - [R_i]^T [\bar{M}_i]^T \{g\}^T$ ；

$\{u_i\}$ —— 广义坐标， $\{u_i\} = \{\delta_{ci}\}$ 。

式 (6-30) 即为刚性子结构的运动微分方程。我们将其写成了与弹性子结构运动微分方程相同的形式，并对 $\{\dot{u}\} \cdot \{u\}$ 的系数赋予了“阻尼”、“刚度”矩阵的名字。

4. 相邻子结构间的位移协调矩阵

有了各子结构的运动微分方程，就可以建立整个系统的弹性动力学方程，关键是子结构间的位移协调矩阵。现以刚性化子结构和弹性杆子结构间的位移协调矩阵为例加以推导，而其他类型子结构间的协调矩阵与之类似推导从略。

如图 6-25 所示，1 为弹性杆，2 为刚体，二者在 A 点以转动副相连，刚体的质心为 C。在建立各子结构方程时，弹性杆 1 在 A 点处有 6 个广义坐标 $\delta_1 \sim \delta_6$ ，刚体的广义坐标是质心 C 的位移和转角 $\delta_7 \sim \delta_{12}$ 。将 δ_6 (绕 x_{1A} 的转角) 及 $\delta_7 \sim \delta_{12}$ 设定为系统广义坐标，那么 $\delta_1 \sim \delta_5$ 就要用 $\delta_7 \sim \delta_{12}$ 来表示，它们之间的关系用协调矩阵 $[B_2^1]$ 表示，即：

$$\{\delta_1 \cdots \delta_5\}^T = [B_2^1] \{\delta_7 \cdots \delta_{12}\}^T$$

$\delta_1 \sim \delta_6$ 和 $\delta_7 \sim \delta_{12}$ 分别是坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$ 和 $O_2-x_2y_2z_2$ 中沿 x, y, z

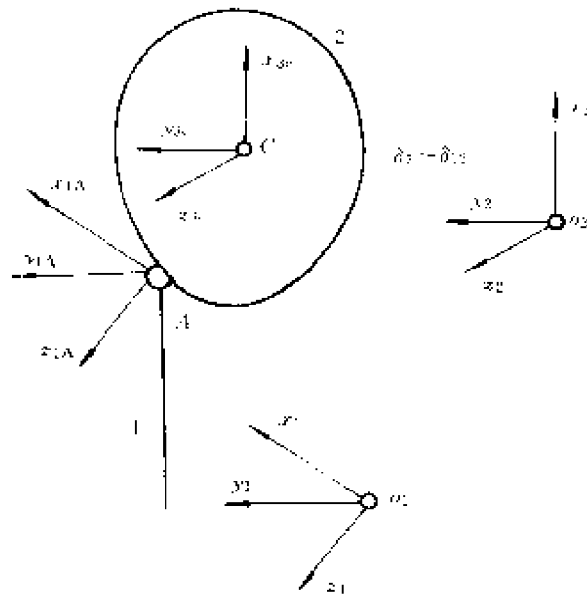


图 6-25 刚弹结构示意图

向的位移和绕 x 、 y 、 z 的转角。

子结构 2 的坐标系 $O_2-x_2y_2z_2$ 到子结构 1 的坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$ 的变换矩阵为：

$$[T_2^1] = \begin{bmatrix} [R_2^1] & \{r_2^1\} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-31)$$

由机器人运动学可得，固定在质心上的坐标系 $C-x_{2c}y_{2c}z_{2c}$ 到 $O_2-x_2y_2z_2$ 的微分变换矩阵为：

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{12} & \delta_{11} & \delta_7 \\ \delta_{12} & 0 & -\delta_{13} & \delta_8 \\ -\delta_{11} & \delta_{10} & 0 & \delta_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

则子结构 2 上 A 点相对于 $O_2-x_2y_2z_2$ 的微小位移是：

$$\{\delta_A^c\} = \begin{Bmatrix} \delta_{Ax}^c \\ \delta_{Ay}^c \\ \delta_{Az}^c \end{Bmatrix} = \Delta \{r_A^c\} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{12} & \delta_{11} & \delta_7 \\ \delta_{12} & 0 & -\delta_{13} & \delta_8 \\ -\delta_{11} & \delta_{10} & 0 & \delta_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A^c \\ y_A^c \\ z_{1A}^c \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -y_A^C \delta_{12} + z_A^C \delta_{11} + \delta_7 \\ x_A^C \delta_{12} - z_A^C \delta_{10} + \delta_8 \\ -x_A^C \delta_{11} + y_A^C \delta_{10} + \delta_9 \end{Bmatrix} \quad (6-33)$$

式中 $\{r_A^C\} = \{x_A^C, y_A^C, z_A^C\}^T$ 是 A 点相对于 C- $x_{2c}y_{2c}z_{2c}$ 的位置向量。

将角位移 δ_{10} 、 δ_{11} 、 δ_{12} 直接引入式 6-33:

$$\{\delta_A^c\} = \begin{Bmatrix} -y_A^C \delta_{12} + z_A^C \delta_{11} + \delta_7 \\ x_A^C \delta_{12} - z_A^C \delta_{10} + \delta_8 \\ -x_A^C \delta_{11} + y_A^C \delta_{10} + \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{Bmatrix} \quad (6-34)$$

由式 (6-34) 可得 $\{\delta_A^c\}$ 和广义坐标 $\delta_7 \sim \delta_{12}$ 之间的关系表达式:

$$\{\delta_A^c\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_A^C & -y_A^C \\ & 1 & 0 & -z_A^C & 0 & x_A^C \\ & & 1 & y_A^C & -x_A^C & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{Bmatrix} = [J]\{u_2\} \quad (6-35)$$

式中 $[J]$ 即为雅可比矩阵, $\{U_2\} = \{\delta_7 \sim \delta_{12}\}^T$ 。

A 点相对于杆 1 坐标系的位移为:

$$\{\delta_A^1\} = [R_2^1]^* \{\delta_A^c\} = [R_2^1]^* [J]\{U_2\} \quad (6-36)$$

式中 $[R_2^1]^*$ 是式 (6-31) 中 $[R_2^1]$ 构成的 6×6 变换矩阵, 即

$$[R_2^1]^* = \begin{bmatrix} [R_2^1] & 0 \\ 0 & [R_2^1] \end{bmatrix} \quad (6-37)$$

需要说明的是 1 杆上 A 点处广义坐标只有 5 个与 $\{U_2\}$ 有关, 绕 z_{1A} 轴转角 δ_6 是独立的, 因此 $[R_2^1]^*$ 应只取前 5 行。

因此两子结构间的位移协调矩阵为:

$$[B_2^1] = [R_2^1]_{5 \times 6}^* [J]_{6 \times 6} \quad (6-38)$$

5. 系统运动微分方程的建立

有了相邻子结构间的位移协调矩阵，就可求得各子结构的广义坐标和系统广义坐标之间的关系：

$$\{u_i\} = [B_i] \{u\} \quad (i = 1, 2, \dots, 9)$$

式中 $\{u_i\}$ —— 第 i 子结构的广义坐标；

$\{u\}$ —— 系统的广义坐标；

$[B_i]$ —— 协调矩阵。

将 $\{u_i\}$ 代入各子结构方程并左乘 $[B_i]^T$ ，然后把各个方程叠加起来，就得到了系统的弹性动力学方程：

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F\} + \{Q\} \quad (6-39)$$

$$\text{式中 } [M] = \sum_{i=1}^9 [B_i]^T [M_i] [B_i]$$

$$[C] = \sum_{i=1}^9 ([B_i]^T [C_i] [B_i] + 2 [B_i]^T [M_i] [\dot{B}_i])$$

$$[K] = \sum_{i=1}^9 ([B_i]^T [K_i] [B_i] + [B_i]^T [M_i] [\dot{B}_i] + [B_i]^T [C_i] [\dot{B}_i])$$

$$\{F\} = \sum_{i=1}^9 [B_i]^T \{F_i\}$$

$$\{Q\} = \sum_{i=1}^9 [B_i]^T \{Q_i\}$$

6. 关于系统运动微分方程的讨论

有了系统的运动微分方程，从理论上讲，对方程进行求解，就可获得所需要的运动和力学方面的信息，如系统的响应，固有频率，以及静、动态应力和应变所需要的节点位移等。但方程本身是时变系数的，无法直接求解，只能把连续运动机构离散为一系列瞬时不变结构（称作瞬时结构），才能对相应的构形分析其运动学和力学方面的特性，再把这些结果综合起来，形成原方程的解。下面对各运动学和力学项目的求解，都是在瞬时结构这一前

提下进行的。

(1) 响应分析。响应分析，即对方程 (6-39) 求解 $u_i = f_i(t)$ ，也就是求解弹性变形的时间历程，即变形与时间的函数关系。对于该时变系数方程，我们对机构选取一系列的瞬时结构，与该瞬时结构相对应的某一时刻 t_i ，方程的系数矩阵均变为常值，这样就 把一个变系数方程离散为多个常系数微分方程，从而可按常系数微分方程的各种算法求解，如直接积分法中的 Newmark 法等。

(2) 固有频率分析。令方程 (6-39) 中力向量和阻尼系数矩阵为零，即得到该系统的无阻尼自由振动方程：

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (6-40)$$

利用特征方程：

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (6-41)$$

按瞬时结构法即可求得系统的固有频率：

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \cdots \cdots < \omega_n$$

(3) 准静态分析。准静态分析是对系统略去弹性加速度 ($\{\ddot{u}\}$) 和速度 ($\{\dot{u}\}$) 的影响，对系统进行静力和动力结合的性能分析 (“响应分析”)。这时方程变为：

$$[K]\{u\} = \{Q\} - \{F\} \quad (6-42)$$

按瞬时结构法，即可求得在外力 $\{Q\}$ 和惯性力 $\{F\}$ 作用下的节点位移 (变形) $\{u\}$ ，再结合有限元理论，就可以求得各弹性单元的应力和应变分布。

(4) 静态分析。取方程 (6-42) 的两项，即：

$$[K]\{u\} = \{Q\} \quad (6-43)$$

利用该方程，即可求得在外力 $\{Q\}$ 作用下各节点的位移 (变形) $\{u\}$ ，再结合有限元理论，就可以求得各弹性单元的应力应变分布。

总之，对于不同子结构，组集得出的系统运动微分方程 (6-39)，包括了操作机自驱动系统、传动系统到各个杆件的运动学动力学性能，是分析操作机静、动态特性的关键。

(5) 关于刚性子结构的问题。刚性子结构是为了简化动力学

建模并考虑到操作机的结构特点而建立的，是刚度比较大的弹性结构件刚性化的结果。如果不采用这一措施，而是把所有零构件都作为弹性结构进行建模，得到的解当然会更精确一些，但问题的复杂程度和方程的维数也会大大提高。所以用含有刚性子结构的方法建立的运动微分方程是一个近似方程，所得的解也是近似解，但作为设计过程中的动态分析，确是比较合适和经济的。

7. 实例^[17]

在该实例中，为了简化计算，只分析机械部分的动态特性。

将图 6-22 所示的 6 自由度机器人操作机，分成不同的单元，用第二、三章所述方法求出各运动学、动力学参数和运动学正逆解；各杆件的尺寸、质量、质心坐标、惯性张量以及杆件和传动系统的刚度系数等（具体计算从略）。把这些参数代入式 6-39，求得各系数矩阵和力向量，进而就可求得系统的固有频率、准静态变形及动态响应等动态性能的仿真图像和评估数据。

当要求解系统的动态响应时，首先要规划腕点的运动。国标要求，在测试机器人的动态性能时，腕点轨迹要求是工作空间内最大包容正方体内某指定对角线的百分之八十。我们取包容正方体上的对角线点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的直线为腕点的运动轨迹，速度图如图 6-26 所示（等加速、等速、等减速）。

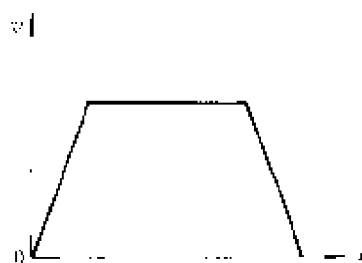


图 6-26 速度图

有了腕点轨迹和速度，根据第二章就可求得各关节变量及其速度（具体计算从略），进而求得方程（6-39）中的各系数矩阵^[17]。

(1) 频域分析。求解系统的固有率和振型需解如下方程组：

$$[K]\{x\} = \omega^2[M]\{x\} \quad (a)$$

式中 $[K]$ ——式（6-39）中的刚度矩阵；

$[M]$ ——式（6-39）中的质量矩阵；

$\{x\}$ ——振型向量；

ω ——固有圆频率。

关于式 (a) 的解法很多, 这里采用比较有效的 Householder-QL 迭代法。在无负载的情况下取: (x_1, y_1, z_1) 为 $(-0.25, 1.0, 0.9)$; (x_2, y_2, z_2) 为 $(0.25, 0.5, 0.4)$ (单位为 m), 求得的该机器人固有频率如图 6-27 所示 (机构的结构参数和惯性参数参见文献[17])。

图 6-28 表明了前 7 阶固有频率随腕点位置变化的情况。从图中可以看出, 前 5 阶固有频率相差不大, 而第 6 阶固有频率则大得多。前 5 阶固有频率恰好对应传动系统的 5 个自由度, 说明传动系统刚度与杆刚度相比小得多, 末端的运动误差主要是由传动系统的变形引起的。可见, 传动系统的弹性变形在整个系统的变形中占主导地位, 是绝对不可忽略的。

(2) 准静态变形和响应分析。如果忽略阻尼力和弹性运动惯性力项, 则方程 (6-39) 变成:

$$[K]\{u\} = \{F\} + \{f\} \quad (b)$$

该方程又叫准静态方程。解该方程可得到系统的准静态变形。虽然它不是准确的响应, 但它表明了系统的变形趋势。由于它求解简单且能表示机器人操作机的轨迹误差, 因此进行准静态分析还是很有意义的。

响应分析就是求解方程 (6-39)。这里采用 Newmark 积分法。在求解过程中忽略陀螺阻尼和离心刚度项。有资料表明, 这样简化引起的误差很小, 能保证计算结果的精度^[17]。

图 6-28 是计算机绘出的该操作机传动系统 5 个自由度和腕点 6 个自由度的准静态变形 (KES) 和响应曲线 (KED) 中的一

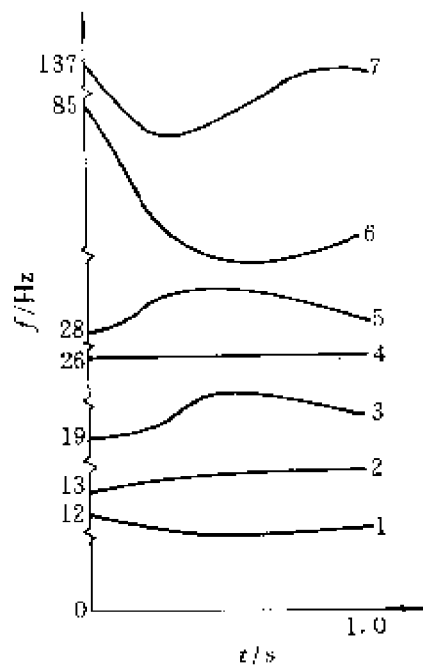


图 6-27 固有频率曲线

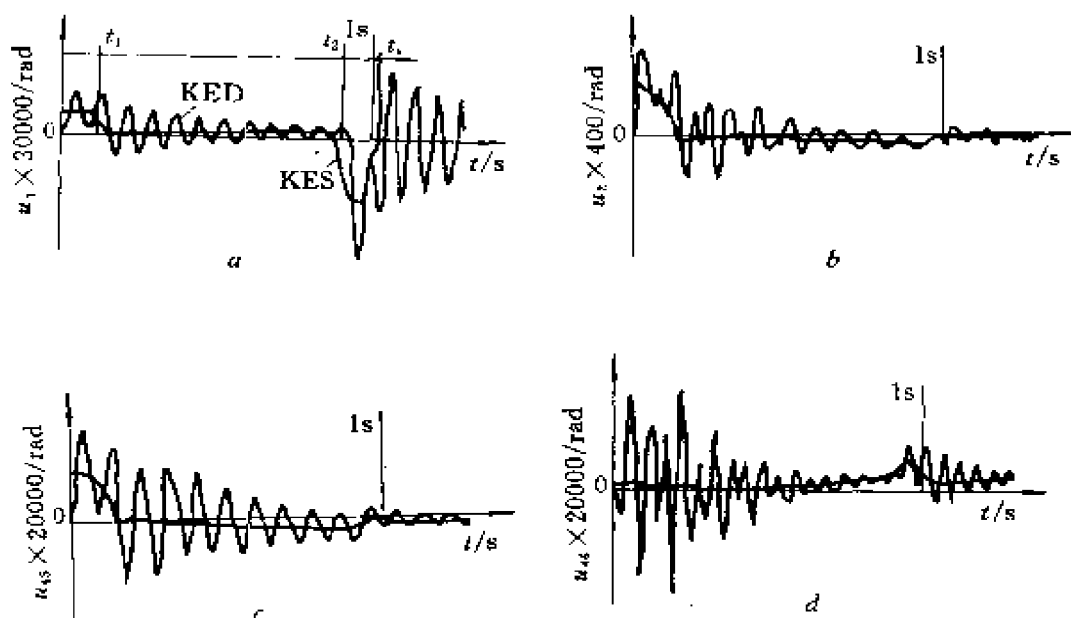


图 6-28 准静态和动态响应曲线

部分。其中， a 是腰部转角； b 是下臂传动系统第一级转角； c 是腕点 x 向位移； d 是腕点 y 向位移。

观察图 6-28 可以发现，所有的响应均可分为四个部分。以 u_1 腰部转角的响应（图 6-28a）为例，从开始到 t_1 为加速段，由于系统具有较大的惯性力即激振力，系统开始振动，并且振幅较大； t_1 到 t_2 为匀速段，激振力减小，由于结构阻尼的作用，系统振动的振幅逐渐减小； t_2 到 t_3 为减速段，激振力又突然增大，系统又加剧振动，直到系统的运动静止下来； t_3 以后为延时段，虽然系统的刚体运动已静止，但此时系统的振动并未停止，还要延续一段时间。

从上面的曲线还可以发现，动态响应曲线总是围绕准静态变形曲线（见图 6-28）。在机器人实际工作中，准静态变形可能引起轨迹误差，但通常可以通过示教方式加以消除，而弹性误差则是由于系统的结构、传动方式以及速度规划和控制规律等引起的振动所产生的。因此，从各个方面减小振动振幅是提高机器人动态

性能的关键。

对照腕点响应曲线和传动系统响应曲线(图 6-28),可以进一步得出结论:系统的弹性变形主要是传动系统的弹性变形,要想减小系统振动的振幅,自机械学的角度最有效的方法就是提高传动件的刚度。比如选用刚性较好的其他传动方式来实现这一目的。这也就是目前在前三关节采用刚性较大的 RV 摆线针轮减速器代替谐波减速器的原因。

必须说明的是:上述结果都是在图 6-26 所示的速度规划条件下得到的,即在笛卡儿坐标系中直线路径上采用等加速等减速运动方式,而且没有考虑控制方程(4-27)。如果采用其他的轨迹和速度规划,并考察控制方程,振动可有显著变化。这就是本节提出的要作机电统一的动态特性分析的原因。

参 考 文 献

- [1] 马香峰等, 机器人机构学, 机械工业出版社, 1991, 第 9 页。
- [2] 张建民, 工业机器人, 北京理工大学出版社, 1988, 第 12 页。
- [3] 蔡自兴, 机器人原理及其应用, 中南工业大学出版社, 1988, 第 8 页。
- [4] 付京逊等著, 机器人学, 中国科学技术出版社, 1989。
- [5] 徐灏主编, 机械设计手册(第五卷第四十二篇: 工业机器人), 机械工业出版社, 1992, 第 1 页。
- [6] 安川電機製作所, 産業用ロボット(一般入門)編, 安川電機製作所, 1990, p. 3。
- [7] 産業用ロボット, ハント"フ"ック。(社)日本産業用ロボット工業會, 1992。
- [8] 加藤一郎, 図解ロボットハンド, 工業調査會, 昭和 60 年 4 月。
- [9] Handbook of Industrial Robotics, Shimon Y. No. f, 1985。
- [10] 朱齐荣, 核电厂机械设备及设计, 原子能出版社, 1991, 第 6 页。
- [11] 张策等, 弹性连杆机构的分析与设计, 机械工业出版社, 1989, 第 3 页。
- [12] 沈允文等, 谐波齿轮传动的理论和设计, 机械工业出版社, 1985, 第 9 页。
- [13] 理查德·P 保罗, 机器人操作手: 数学、编程与控制, 机械工业出版社, 1989。
- [14] H. ASAd & J. — J. E. Slotine, Robot Analysis and Control, A Wiley-Interscience Publication, 1985。
- [15] John J. Craig, Introduction to Robotics Mechanics and Control, Adolison-Wesley Publishing Company, 1986。
- [16] 欧名文, 工业机器人弹性动力分析的研究, 北京科技大学硕士论文, 1989 (未公开发表)。
- [17] 刘鸿飞, 机器人机构弹性动力学分析, 北京科技大学硕士论文, 1990 (未公开发表)。
- [18] 于建国, 灵巧手机构学研究, 北京科技大学硕士论文, 1991 (未公开发表)

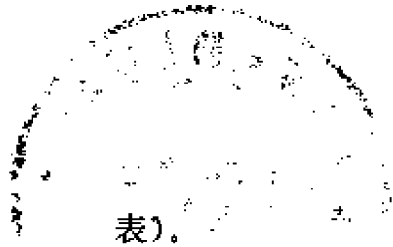


表)。

- [19] 李德高、马香峰, 5R 实验机器人动力学仿真结果分析, 机器人, 2 (1989)。
- [20] 龚振帮, 特大型四点接触球轴承和交叉滚子轴承的动态寿命和静载能力, 上海科技大学无线电机械结构专业。
- [21] 黄宇中、张宗明、何奇伟, 机器人服务角的分析, 机器人, 2 (1989)。
- [22] 肖 英, 操作机末杆位姿图的几何解, 中国工程图学学报, 1990。